

La Fracción un Cuarto del Diseño 2^k

Para un número moderadamente grande de factores, con frecuencia son útiles fracciones menores del diseño 2^k . Considere una fracción un cuarto del diseño 2^k . Este diseño contiene 2^{k-2} corridas y es común llamarlo **diseño factorial fraccionario** 2^{k-2} .

El diseño 2^{k-2} puede construirse apuntando primero un diseño básico compuesto por las corridas asociadas con un diseño factorial completo en $k-2$ factores y asociando después las dos columnas adicionales con las iteraciones elegidas apropiadamente que incluyan los primeros $k-2$ factores. Por lo tanto, una fracción un cuarto del diseño 2^k tiene dos generadores. Si P y Q representan los generadores escogidos, entonces a $I=P$ e $I=Q$ se les llaman **relaciones generadoras del diseño**. Los signos de P y Q (+ o -) determinan cuál de las fracciones un cuarto se produce. Las cuatro fracciones asociadas con la elección de los **generadores** $\pm P$ y $\pm Q$ pertenecen a la misma familia. La fracción para el cual tanto P como Q son positivas es la fracción principal.

La **relación de definición completa** del diseño está compuesta por todas las columnas que son iguales a la columna identidad I . Éstas constarán de P , Q y su **interacción generalizada** PQ ; es decir, la relación de definición es $I = P = Q = PQ$. A los elementos P , Q y PQ de la relación de definición se les denominan **palabras**. Los alias de cualquier efecto se obtienen mediante la multiplicación de las columnas de ese efecto por cada palabra de la relación de definición. Evidentemente, cada efecto tiene *tres* alias. El experimentador deberá estar atento al elegir a los generadores para que los efectos potencialmente importantes no sean alias entre sí.

Como un ejemplo considere el diseño 2^{6-2} . Suponga que se escogen $I = ABCE$ y $I = BCDF$ como **los generadores del diseño**. Entonces **la interacción generalizada de los generadores** $ABCE$ y $BCDF$ es $ADEF$; por lo tanto, **la relación de definición completa** de este diseño es:

$$I = ABCE = BCDF = ADEF$$

Por consiguiente, se trata de un diseño de resolución IV. Para encontrar los alias de cualquier efecto (por ejemplo de A), se multiplica cada efecto por cada palabra de la relación de definición. Para A , esto produce:

$$A = BCE = ABCDF = DEF$$

Es sencillo verificar que todos los efectos principales son alias de interacciones de tres y cinco factores, mientras que las interacciones de dos factores son alias entre sí y de interacciones de órdenes superiores. Por lo tanto, cuando se estima A , por ejemplo, en realidad se está estimando $A + BCE + ABCDF + DEF$. En la tabla 8-8 se muestra la estructura completa de los alias de este diseño. Si las interacciones de tres factores y de orden superiores son insignificantes, este diseño produce estimaciones claras de los efectos principales.

Tabla 8-8 Estructura de los alias del diseño 2^{6-2}_{IV} , con $I = ABCE = BCDF = ADEF$

$A = BCE = DEF = ABCDF$	$AB = CE = ACDF = BDEF$
$B = ACE = CDF = ABDEF$	$AC = BE = ABDF = CDEF$
$C = ABE = BDF = ACDEF$	$AD = EF = BCDE = ABCF$
$D = BCF = AEF = ABCDE$	$AE = BC = DF = ABCDEF$
$E = ABC = ADF = BCDEF$	$AF = DE = BCEF = ABCD$
$F = BCD = ADE = ABCEF$	$BD = CF = ACDE = ABEF$
	$BF = CD = ACEF = ABDE$
$ABD = CDE = ACF = BEF$	
$ACD = BDE = ABF = CEF$	

Para construir este diseño se anota el diseño básico, el cual consiste en las 16 corridas para un diseño completo $2^{6-2} = 2^4$ en A, B, C y D . Después se añade los dos factores E y F , asociando sus niveles más y menos con los signos más y menos de la interacción ABC y BCD , respectivamente. Este procedimiento se muestra en la tabla 8-9

Tabla 8-9 Construcción del Diseño 2^{6-2}_{IV} con los generadores $I = ABCE$ y $I = BCDF$

Corrida	Diseño Básico				E=ABC	F=BCD
	A	B	C	D		
1	-	-	-	-	-	-
2	+	-	-	-	+	-
3	-	+	-	-	+	+
4	+	+	-	-	-	+
5	-	-	+	-	+	+
6	+	-	+	-	-	+
7	-	+	+	-	-	-
8	+	+	+	-	+	-
9	-	-	-	+	-	+
10	+	-	-	+	+	+
11	-	+	-	+	+	-
12	+	+	-	+	-	-
13	-	-	+	+	+	-
14	+	-	+	+	-	-
15	-	+	+	+	-	+
16	+	+	+	+	+	+

Otra forma de construir este diseño es deduciendo los cuatro bloques del diseño 2^6 con $ABCE$ y $BCDF$ confundidas y eligiendo después el bloque con la combinaciones de tratamientos que son positivas para $ABCE$ y $BCDF$. Se trataría de **diseño factorial fraccionario 2^{6-2} con relaciones generadoras $I = ABCE$ e $I = BCDF$** , y puesto que los dos **generadores $ABCE$ y $BCDF$ son positivos** se trata de la **fracción principal**.

```
> library(conf.design)
> design.4 <- conf.design(rbind(c(A = 1, B = 1, C = 1, D = 0, E = 1,
F = 0), c(A = 0, B = 1, C = 1, D = 1, E = 0, F = 1)), p = 2)
> design.4[1:16,]
  Blocks A B C D E F
1      00 0 0 0 0 0
2      00 0 1 1 0 0
3      00 1 1 0 1 0
4      00 1 0 1 1 0
```

5	00 1 0 0 0 1 0
6	00 1 1 1 0 1 0
7	00 0 1 0 1 1 0
8	00 0 0 1 1 1 0
9	00 1 1 0 0 0 1
10	00 1 0 1 0 0 1
11	00 0 0 0 1 0 1
12	00 0 1 1 1 0 1
13	00 0 1 0 0 1 1
14	00 0 0 1 0 1 1
15	00 1 0 0 1 1 1
16	00 1 1 1 1 1 1

Hay, desde luego, tres fracciones alternas de este diseño 2_{IV}^{6-2} particular. Se trata de las fracciones con las relaciones generadoras $I = ABCE$ e $I = -BCDF$; $I = -ABCE$ e $I = BCDF$; $I = -ABCE$ e $I = -BCDF$. Es sencillo construir estas fracciones con el método que se muestra en la tabla 8-9. Por ejemplo si quiere encontrarse la fracción para el cual $I = ABCE$ e $I = -BCDF$, entonces en la última columna de la tabla 8-9 se hace $F = -BCD$ obteniéndose la siguiente tabla:

Diseño Básico						
Corrida	A	B	C	D	E=ABC	F=-BCD
1	-	-	-	-	-	+
2	+	-	-	-	+	+
3	-	+	-	-	+	-
4	+	+	-	-	-	-
5	-	-	+	-	+	-
6	+	-	+	-	-	-
7	-	+	+	-	-	+
8	+	+	+	-	+	+
9	-	-	-	+	-	-
10	+	-	-	+	+	-
11	-	+	-	+	+	+
12	+	+	-	+	-	+
13	-	-	+	+	+	+
14	+	-	+	+	-	+
15	-	+	+	+	-	-
16	+	+	+	+	+	-

```
> design.4[17:32,]
  Blocks A B C D E F
17      01 1 1 0 0 0 0
18      01 1 0 1 0 0 0
19      01 0 0 0 1 0 0
20      01 0 1 1 1 0 0
21      01 0 1 0 0 1 0
22      01 0 0 1 0 1 0
23      01 1 0 0 1 1 0
24      01 1 1 1 1 1 0
25      01 0 0 0 0 0 1
26      01 0 1 1 0 0 1
27      01 1 1 0 1 0 1
28      01 1 0 1 1 0 1
29      01 1 0 0 0 1 1
30      01 1 1 1 0 1 1
31      01 0 1 0 1 1 1
```

La **relación de definición completa** de esta fracción alterna es $I = ABCE = -BCDF = -ADEF$. Luego ciertos signos en la estructura de **alias** han cambiado. Por ejemplo los **alias de A** son $A = BCE = -DEF = -ABCDF$ por lo tanto la **combinación lineal de las observaciones** ℓ_A estiman en realidad $A + BCE - DEF - ABCDF$. La estructura de los alias se da a continuación

$$\begin{array}{ll}
 A = BCE = -DEF = -ABCDF & AB = CE = -ACDF = -BDEF \\
 B = ACE = -CDF = -ABDEF & AC = BE = -ABDF = -CDEF \\
 C = ABE = -BDF = -ACDEF & AD = -EF = BCDE = -ABCF \\
 D = -BCF = -AEF = ABCDE & AE = BC = -DF = -ABCDEF \\
 E = ABC = -ADF = -BCDEF & -AF = DE = -BCEF = ABCD \\
 -F = BCD = ADE = -ABCEF & BD = -CF = ACDE = -ABEF \\
 & -BF = CD = -ACEF = ABDE \\
 \\
 ABD = CDE = -ACF = -BEF & \\
 ACD = BDE = -ABF = -CEF &
 \end{array}$$

Por último, observe que el diseño factorial fraccionado 2^{6-2}_{IV} se proyectará en una sola réplica de un diseño 2^4 en cualquier subconjunto de cuatro factores que no sea una palabra de la relación de definición. También se pliega en una fracción un medio con una réplica de un diseño 2^4 en cualquier subconjunto de cuatro factores que sea una palabra de la relación de definición. Por lo tanto, el diseño de la tabla 8-9 se convierte en dos réplicas de un diseño 2^{4-1} en los factores $ABCE$, $BCDF$ y $ADEF$, porque son las palabras de la relación de definición. Hay otras 12 combinaciones de los seis factores, como $ABCD$, $ABCF$, etc., para la cual el diseño se proyecta en una sola réplica del diseño 2^4 . Este diseño también se pliega en dos réplicas de un diseño 2^3 en cualquier subconjunto de tres de los 6 factores o cuatro réplica de un diseño 2^2 en cualquier subconjunto de dos factores.

En general, cualquier diseño factorial fraccionado 2^{k-2} puede replegarse en un diseño factorial fraccionado en algún subconjunto de $r \leq k-2$ de factores originales. Estos subconjuntos de variables que forman diseños factoriales completos no son palabras de la relación de definición completa.

Ejemplo 8-4

Las piezas fabricadas en un proceso de moldeo por inyección están presentando una contracción excesiva. Esto está ocasionando problemas en las operaciones de ensamblaje que se realizan después del moldeo de inyección. Un equipo de mejoramiento de calidad ha decidido llevar a cabo un experimento diseñado para estudiar el proceso de moldeo por inyección a fin de poder reducir la contracción. El equipo decide investigar seis factores: la temperatura del moldeo (A), la velocidad del enroscado (B), el tiempo de retención (C), la duración del ciclo (D), el tamaño del vaciadero (E) y la presión de la retención (F) con dos niveles cada uno, con el fin de saber cómo se afecta la contracción debido a cada factor, así como obtener información preliminar acerca de la forma de cómo los factores interactúan.

El equipo decide usar el diseño factorial fraccionado de 16 corridas con dos niveles de la tabla 8-9. El diseño se muestra de nuevo en la tabla 8-10, junto con la contracción

observada ($\times 10$) en la pieza de prueba producida en cada una de las 16 corridas del diseño.

Tabla 8-9 Construcción del Diseño 2^{6-2}_{IV} para el experimento de moldeo por inyección del ejemplo 8-4

Corrida	Diseño Básico						Contracción
	A	B	C	D	E=ABC	F=BCD	observada ($\times 10$)
1	-	-	-	-	-	-	6
2	+	-	-	-	+	-	10
3	-	+	-	-	+	+	32
4	+	+	-	-	-	+	60
5	-	-	+	-	+	+	4
6	+	-	+	-	-	+	15
7	-	+	+	-	-	-	26
8	+	+	+	-	+	-	60
9	-	-	-	+	-	+	8
10	+	-	-	+	+	+	12
11	-	+	-	+	+	-	34
12	+	+	-	+	-	-	60
13	-	-	+	+	+	-	16
14	+	-	+	+	-	-	5
15	-	+	+	+	-	+	37
16	+	+	+	+	+	+	52

```

y<-c(6,10,32,60,4,15,26,60,8,12,34,60,16,5,37,52)
A<-rep(c(-1,1),8)
B<-rep(c(-1,-1,1,1),4)
C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
D<-c(rep(-1,8),rep(1,8))
E<-A*B*C
F<-B*C*D
modelo<-lm(y~A+B+C+D+E+F+A*B+A*C+A*D+A*E+A*F+B*D+B*F+A*B*D+A*B*F)
beta<-coefficients(modelo)
efectos0<-round(2*beta[2:16],4)
efectos<-c("",efectos0)
SC1<-round((8*efectos0)^2/16,4)
SC<-c("",SC1)
Variables<-c("Promedio
Global","A","B","C","D","E","F","AB+CE","AC+BE","AD+EF","AE+BC+DF","AF
+DE","BD+CF","BF+CD","ABD","ABF")
data.frame(Variables,beta,efectos,SC)

```

	Variables	beta	efectos	SC
(Intercept)	Promedio Global	27.3125		
A	A	6.9375	13.875	770.0625
B	B	17.8125	35.625	5076.5625
C	C	-0.4375	-0.875	3.0625
D	D	0.6875	1.375	7.5625
E	E	0.1875	0.375	0.5625
F	F	0.1875	0.375	0.5625
A:B	AB+CE	5.9375	11.875	564.0625
A:C	AC+BE	-0.8125	-1.625	10.5625
A:D	AD+EF	-2.6875	-5.375	115.5625
A:E	AE+BC+DF	-0.9375	-1.875	14.0625
A:F	AF+DE	0.3125	0.625	1.5625
B:D	BD+CF	-0.0625	-0.125	0.0625
B:F	BF+CD	-0.0625	-0.125	0.0625

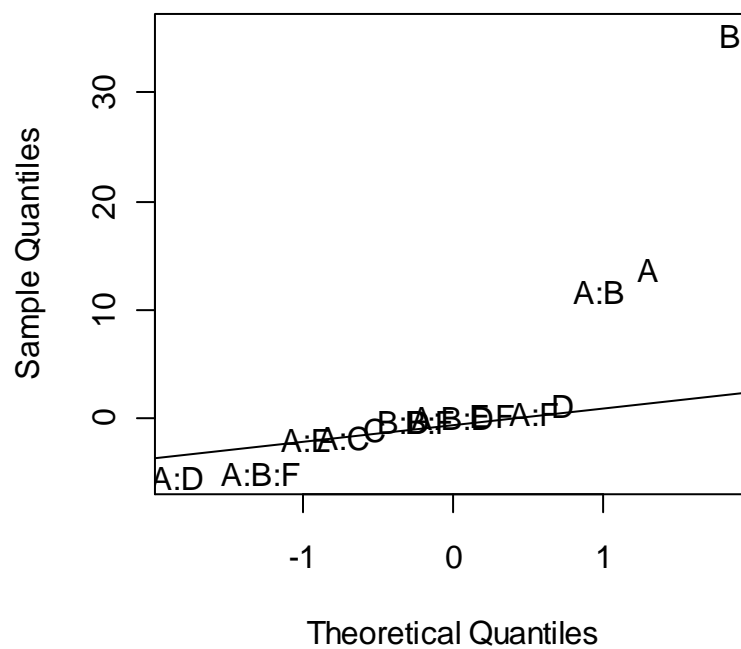
A:B:D	ABD	0.0625	0.125	0.0625
A:B:F	ABF	-2.4375	-4.875	95.0625

```

qq<-qqnorm(efectos0,type="n")
nombre<-
c("A","B","C","D","E","F","A:B","A:C","A:D","A:E","A:F","B:D","B:F","A
:B:D","A:B:F")
text(qq$x, qq$y, labels = nombre)
efectos1<-efectos0[-c(1,2,7)]
qqline(efectos1)

```

Normal Q-Q Plot



```

> A<-as.factor(A)
> B<-as.factor(B)
> C<-as.factor(C)
> D<-as.factor(D)
> E<-as.factor(E)
> F<-as.factor(F)
> mod<-
lm(y~A+B+C+D+E+F+A*B+A*C+A*D+A*E+A*F+B*C+B*D+B*E+B*F+C*D+C*E+C*F+D*E+D
 *F+E*F)
> summary(aov(mod))

```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	770.1	770.1	16.1905	0.056574 .
B	1	5076.6	5076.6	106.7346	0.009239 **
C	1	3.1	3.1	0.0644	0.823392
D	1	7.6	7.6	0.1590	0.728622
E	1	0.6	0.6	0.0118	0.923329
F	1	0.6	0.6	0.0118	0.923329
A:B	1	564.1	564.1	11.8594	0.074963 .
A:C	1	10.6	10.6	0.2221	0.683866
A:D	1	115.6	115.6	2.4297	0.259391
A:E	1	14.1	14.1	0.2957	0.641124

A:F	1	1.6	1.6	0.0329	0.872877
B:D	1	0.1	0.1	0.0013	0.974376
B:F	1	0.1	0.1	0.0013	0.974376

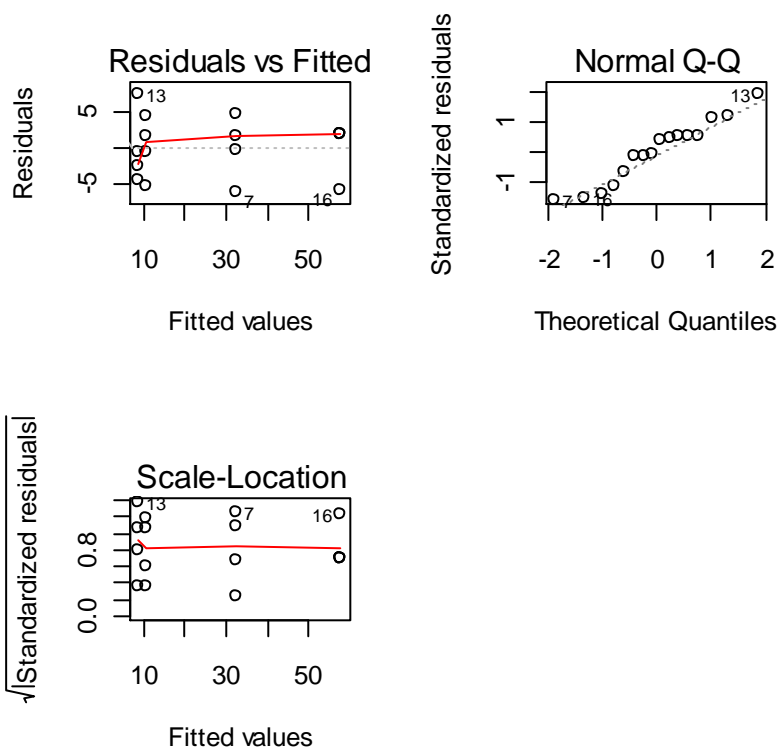
Mejor aún es el siguiente cuadro de ANVA

```
mod1<-lm(y~A+B+A*B)
summary(aov(mod1))
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
A	1	770	770	37.15	5.38e-05	***
B	1	5077	5077	244.90	2.39e-09	***
A:B	1	564	564	27.21	0.000216	***
Residuals	12	249	21			

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

```
A<-rep(c(-1,1),8)
B<-rep(c(-1,-1,1,1),4)
C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
modelo2<-lm(y~I(A)+I(B)+I(A*B))
par(mfrow=c(2,2))
plot(modelo2)
```

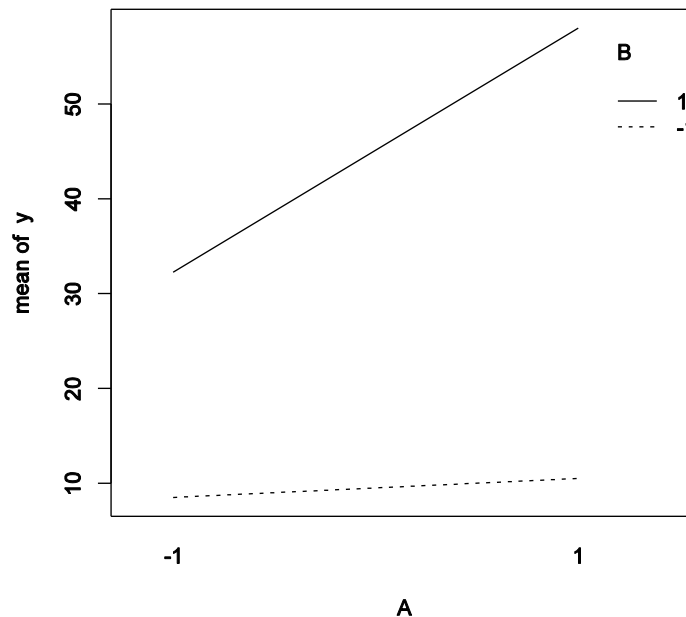


```
> ri<-residuals(modelo2)
> shapiro.test(ri)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data:  ri
W = 0.9459, p-value = 0.4283
> interaction.plot(A,B,y)
```

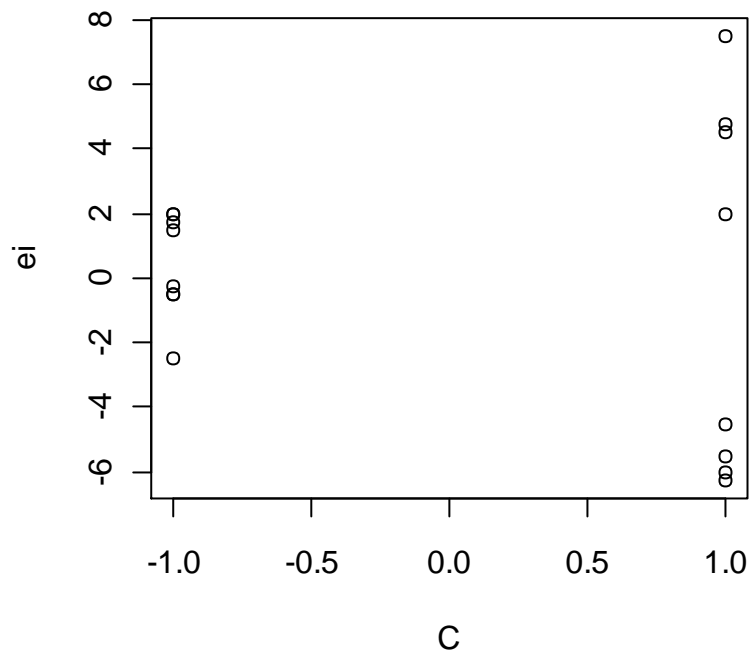
En las gráficas valores ajustado vs los residuos, así como el de los valores ajustados vs raíz cuadrada de los valores absolutos de los residuales estandarizados no se observa evidencia de que no se esté cumpliendo con el supuesto de homogeneidad de variancias. También, la gráfica de los residuos estandarizados sobre papel de probabilidad normal tampoco revela que no se esté cumpliendo con el supuesto de normalidad. Esto último es corroborado con la prueba de normalidad de Shapiro, en la cual se acepta que los residuales estandarizados se ajustan a una distribución normal.



En el gráfico se puede observar que B =velocidad de enroscado es un factor importante ya que existe una gran diferencia en la media de contracción. En cambio no existe mucha influencia de A =temperatura de moldeo sobre la contracción, ya que no existe mucha diferencia entre la media de la contracción entre el nivel bajo y alto de A . Se recomienda realizar el proceso A =la temperatura del moldeo y B = la velocidad del enroscado a nivel bajo. Los otros efectos no contribuyen significativamente a explicar el comportamiento de la media de la contracción

Los residuales $e = y - \hat{y}$ ofrece mucha información sobre el proceso uno puede graficar los residuales en función de los niveles de cada factor

```
> ei<-residuals(modelo2)
> plot(C,ei)
```

También se puede realizar una prueba que permite comparar la variabilidad de los errores a nivel altos y bajo de un factor. Esto es, se puede realizar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \sigma^2(i+) = \sigma^2(i-)$$

$$H_1 : \sigma^2(i+) \neq \sigma^2(i-), \text{ siendo } i = A, B, AB, C, \dots$$

En este caso se utiliza la siguiente estadística:

$$F_i^* = \ln \frac{S^2(i+)}{S^2(i-)} \stackrel{a}{\sim} N(0,1) / H_0 \text{ es verdadera}$$

```
> eic<-data.frame(ei,C)
> eic
   ei  C
1 -2.50 -1
2 -0.50 -1
3 -0.25 -1
4  2.00 -1
5 -4.50  1
6  4.50  1
7 -6.25  1
8  2.00  1
9 -0.50 -1
10 1.50 -1
11 1.75 -1
12 2.00 -1
13 7.50  1
14 -5.50  1
15 4.75  1
16 -6.00  1
> eimenos<-eic[eic$C==1,]
```

```

> eimenos
      ei  C
1  -2.50 -1
2  -0.50 -1
3  -0.25 -1
4   2.00 -1
9  -0.50 -1
10  1.50 -1
11  1.75 -1
12  2.00 -1
> eimas<-eic[eic$C==1,]
> eimas
      ei  C
5  -4.50  1
6   4.50  1
7  -6.25  1
8   2.00  1
13  7.50  1
14 -5.50  1
15  4.75  1
16 -6.00  1
> Fa<-log(var(eimas$ei)/var(eimenos$ei))
> Fa
[1] 2.502537
> pvalue<-2*(1-pnorm(Fa))
> pvalue
[1] 0.01233066

```

La gráfica revela que hay menos dispersión a nivel bajo de C que a nivel alto, por lo tanto se puede concluir que existe dispersión o variabilidad real entre ambos niveles del factor C en cuanto a la contracción. Esto es corroborado por la prueba de F^* . Por lo se recomienda correr a niveles bajo de C , esto es a un nivel bajo del tiempo de retención. Se puede verificar que para los otros efectos no existe diferencia en la dispersión.

Tabla 8-12 Cálculo de los efectos de dispersión del ejemplo 8-4

Corrida	A	B	AB = CE	C	AC = BE	AE = BC = DF	E	D	AD = EF	BD = CE	ABD	BF = CD	ACD	F	AF = DE	Residual
1	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-2.50
2	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-0.50
3	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	-0.25
4	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	2.00
5	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-4.50
6	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	4.50
7	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-6.25
8	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	+	-	2.00
9	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	-0.50
10	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	+	+	+	1.50
11	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	1.75
12	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	2.00
13	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	7.50
14	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-5.50
15	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	4.75
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-6.00
$S(i^+)$	3.80	4.01	4.33	5.70	3.68	3.85	4.17	4.64	3.39	4.01	4.72	4.71	3.50	3.88	4.87	
$S(i^-)$	4.60	4.41	4.10	1.63	4.53	4.33	4.25	3.59	2.75	4.41	3.51	3.65	3.12	4.52	3.40	
F_i^*	-0.38	-0.19	0.11	2.50	-0.42	-0.23	-0.04	0.51	0.42	-0.19	0.59	0.51	0.23	-0.31	0.72	

```

> F<-c(-0.38,-0.19,0.11,2.5,-0.42,-0.23,-0.04,0.51,0.42,-
0.19,0.59,0.51,0.23,-0.31,0.72)
> Nombre<-
c("A","B","AB","C","AC","AE","E","D","AD","BD","ABD","BF","ACD","F","A
F")
> qq1<-qqnorm(F,type="n")
> text(qq1$x, qq1$y, labels = Nombre)
> F1<-F[-4]
> qqline(F1)

```

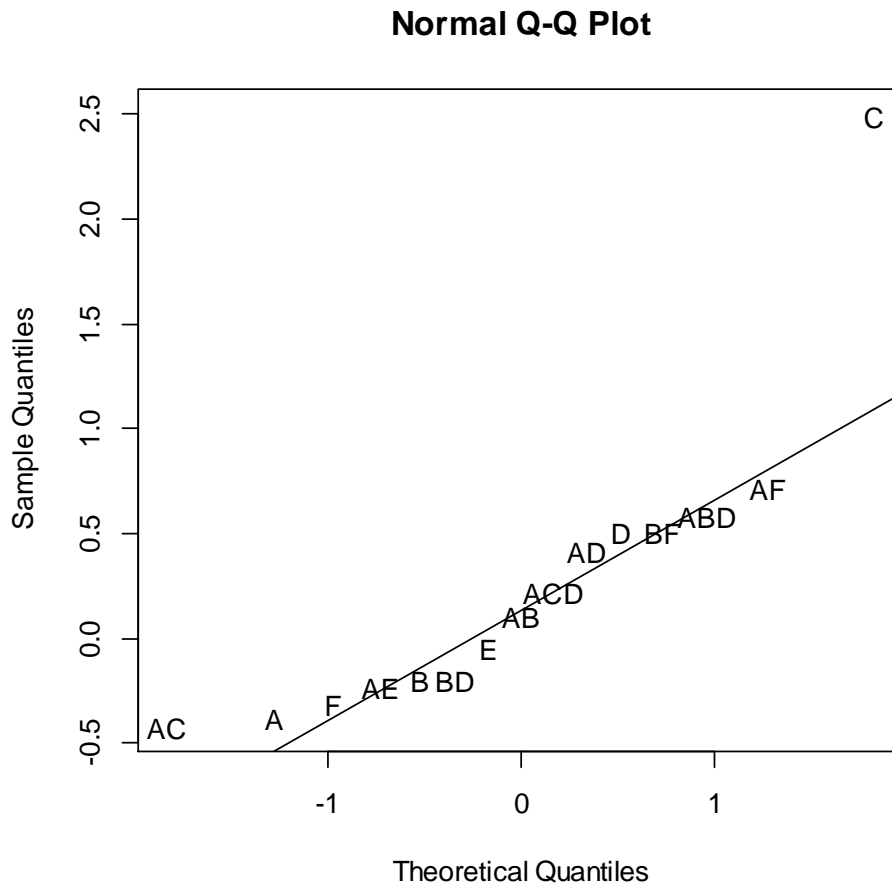


Fig 8-16 Gráfica de probabilidad normal de los valores de la estadística F^* del ejemplo 8-4

En la figura 8-17 se muestran los datos de este experimento proyectado en un cubo en los factores A , B y C . La contracción promedio observada y el rango de la contracción observada se indican en cada vértice del cubo. Por la inspección de la figura se observa que correr el proceso con velocidad del enroscado (B) en el nivel bajo es la clave para reducir la contracción promedio de las piezas. Si B está en el nivel bajo, virtualmente cualquier combinación de la temperatura (A) y el tiempo de retención (C) resultará en valores bajos de la contracción en cada vértice del cubo, es claro de inmediato que ajustar el tiempo de retención (C) en el nivel bajo es la única elección razonable si se quiere mantener baja la variabilidad de la contracción de una pieza a otra en una corrida de producción.

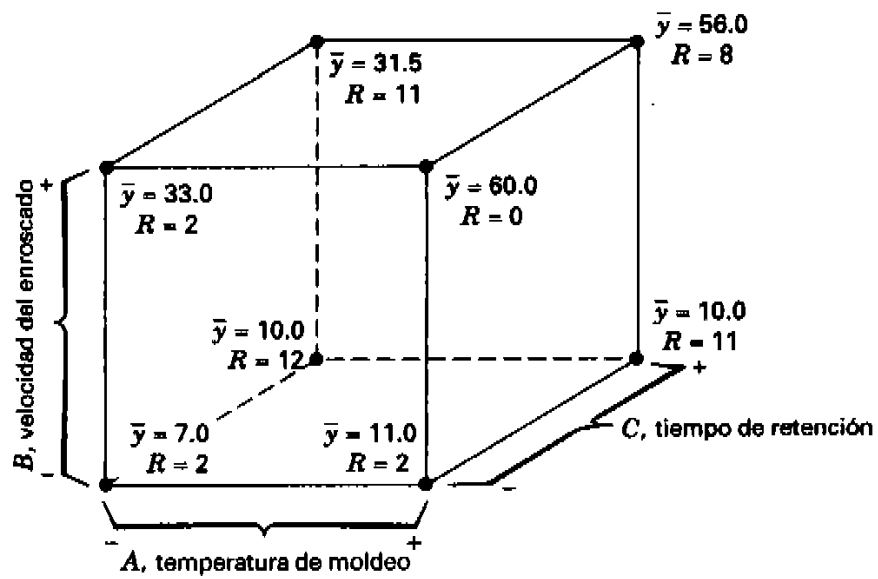


Figura 8-17 Contracción promedio y rango de la contracción en los factores A , B y C para el ejemplo 8-4.