

# DISEÑO FACTORIAL $2^k$

## Introducción

Es un diseño factorial en donde intervienen  $k$  factores, cada uno con dos niveles, llamado “superior” e “inferior”. Estos niveles pueden ser cuantitativos (por ejemplo: temperatura, presión, etc.) o cualitativos. Una réplica completa de este diseño requiere que se recopilen  $2^k$  observaciones.

Este diseño es particularmente útil en la primera fase del trabajo experimental, cuando es probable que haya muchos factores por investigar. En donde es necesario realizar el menor número de corridas con las cuales puedan estudiarse  $k$  factores de un diseño factorial completo. Por consiguiente, estos diseños se usan ampliamente en los **experimentos de tamizado o selección de factores**.

Aquí se presentan métodos especiales para el análisis de estas series de diseños. En este caso, se supone,

- 1) que los factores son fijos,
- 2) que los diseños son completamente aleatorizados, y
- 3) que se satisface la suposición usual de normalidad
- 4) La respuesta es aproximadamente lineal en el intervalo de los niveles elegidos de los factores.

## Notación

Por convención:

- Los factores se denotan por letras mayúscula:  $A, B, C, \dots$
- Los niveles de los factores “-” nivel bajo y “+” nivel alto
- Los efectos por letras mayúsculas  $A, B, AB, C, AC, BC, \dots$ . En este caso,  $A$  denota el efecto de los  $A$  y,  $AB$ , el efecto de la interacción  $AB$ .
- La combinación de tratamiento o tratamiento (1),  $a, b, ab, c, \dots$ , o también por tabla de signos :

Por ejemplo:

```
> data.frame(tratamiento,A,B,C)
  tratamiento A B C
1          (1) - - -
2           a  + - -
3           b  - + -
4          ab  + + -
5           c  - - +
6          ac  + - +
7          bc  - + +
8          abc  + + +
```

- Los totales de la variable respuesta sujeta a cada combinación de tratamientos de “ $n$ ” réplicas se representa por (1),  $a, b, ab, c, \dots$

Aquí (1) representa la combinación de tratamiento o el total de la variable respuesta sujeta a la combinación de tratamiento donde todos los factores se encuentran en el nivel bajo, “ $a$ ” representa la combinación de tratamiento o el total de la variable respuesta sujeta a la combinación de tratamiento donde el factor  $A$  se encuentra en el nivel alto y los otros factores en el nivel bajo, así la presencia de una letra en la combinación de tratamiento indica que el factor correspondiente se encuentra en nivel alto.

## Estimación de efectos y cálculo de la suma de cuadrados

### *Contraste en experimento factoriales*

En un experimento factorial  $2^k$ , un contraste se define de la siguiente forma:

$$\text{Contraste}_{AB\dots K} = (a \pm 1)(b \pm 1) \cdots (k \pm 1)$$

En este desarrollo se usa álgebra ordinaria, y se reemplaza el "1" por (1) en la expresión final, En cada conjunto de paréntesis debe usarse el signo negativo si se incluye el factor en ese efecto, y el positivo en caso contrario.

Ejemplo: Se considera el diseño factorial  $2^3$  para ilustrar el uso de esta ecuación. El contraste para  $AB$  será:

$$\begin{aligned}\text{Contraste}_{AB} &= (a - 1)(b - 1)(c + 1) \\ &= abc + ab + c + (1) - ac - bc - a - b\end{aligned}$$

Como un ejemplo más, el contraste para  $ABCD$  en un diseño  $2^5$  será

$$\begin{aligned}\text{Contraste}_{ABCD} &= (a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1)(e + 1) \\ &= abcde + cde + bde + ade + bce \\ &\quad + ace + abe + e + abcd + cd + bd \\ &\quad + ad + bc + ac + ab + (1) - a - b - c \\ &\quad - abc - d - abd - acd - bcd - ae \\ &\quad - be - ce - abce - de - abde - acde - bcde\end{aligned}$$

Una vez que se han determinado los contrastes para los efectos, pueden estimarse y calcularse las sumas de cuadrados de cada efecto, de acuerdo con

$$AB\dots K = \frac{2}{n2^k} (\text{Contraste}_{AB\dots K})$$

También, los efectos principales pueden estimarse mediante la siguiente fórmula:

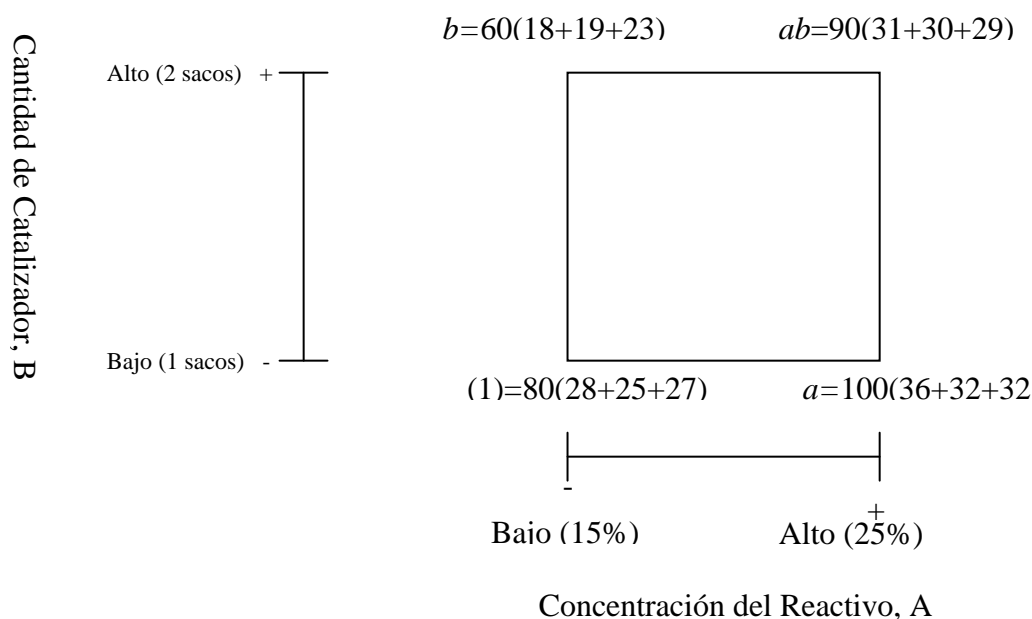
$$P = \bar{Y}_{P+} - \bar{Y}_{P-}, \text{ donde } P = A, B, \dots$$

### **Ejemplo 6.1 del libro de Montgomery "Análisis y Diseño de Experimento"**

Considere una investigación llevada a cabo para estudiar el efecto que tienen la concentración de un reactivo y la presencia de un catalizador sobre el tiempo de reacción de un proceso químico. Sea la concentración del reactivo el factor  $A$  con dos niveles de interés, 15 y 25%. El catalizador constituye el factor  $B$ ; el nivel alto (o superior) denota el uso de dos sacos de catalizador y el nivel bajo (o inferior) denota el uso de sólo un saco. El experimento se realiza ("réplica" o "repite") tres veces, y los datos son como sigue:

Factor		Combinación de tratamientos	Réplica			Total
A	B		I	II	III	
-	-	A bajo, B bajo	28	25	27	80
+	-	A alto, B bajo	36	32	32	100
-	+	A bajo, B alto	18	19	23	60
+	+	A alto, B alto	31	30	29	90

En la Fig 1 se presentan gráficamente las combinaciones de tratamientos para este diseño. Por convención, el efecto de un factor se denota por la letra latina mayúscula. De este modo, "A" se refiere al efecto del factor A, "B" se refiere al efecto del factor B, y "AB" se refiere a la interacción AB. En el diseño  $2^2$ , los niveles bajo y alto de A y B se denotan por "-" y "+", respectivamente, en los ejes A y B. Así, - en el eje A representa el nivel bajo de concentración (15%), mientras que + representa el nivel alto (25%), y - en el eje B representa el nivel bajo de catalizador mientras que + denota el nivel alto.



**Figura N° 1** Combinaciones de tratamientos en el diseño  $2^2$

Las cuatro combinaciones de tratamientos en el diseño suelen representarse por letras minúsculas, como se muestra en la Fig. 1. En esta figura se aprecia que el nivel superior de cualquier factor de una combinación de tratamientos está representado por la presencia de la letra minúscula correspondiente, mientras que la ausencia de esta última representa el nivel inferior del factor. Así *a* representa la combinación de tratamientos, en la que A se encuentra en el nivel superior y B en el inferior; *b* representa aquella en la que A se halla en el nivel inferior y B en el superior, y *ab* representa a ambos

factores en el nivel superior. Por convención (1) se usa para representar a ambos factores en el nivel inferior. Esta notación se usará a lo largo de toda la serie  $2^k$ . Las letras minúsculas (1), *a*, *b* y *ab* también se usan para representar los totales de la variable respuesta de las *n* réplicas de las combinaciones de tratamientos correspondientes

```
> library(DoE.base)
> fac.design(nlevels=c(2,2),factor.names=list(one=c(15,25),      two=c(1,2)),
replications=3)
creating full factorial with 4 runs ...
  run.no run.no.std.rp one two
1      1             1.1 15   1
2      2             3.1 15   2
3      3             4.1 25   2
4      4             2.1 25   1
5      5             4.2 25   2
6      6             3.2 15   2
7      7             1.2 15   1
8      8             2.2 25   1
9      9             2.3 25   1
10     10             4.3 25   2
11     11             1.3 15   1
12     12             3.3 15   2
class=design, type= full factorial
NOTE: columns run.no and run.no.std.rp are annotation, not part of the data
frame
>
> y<-c(28,25,27,36,32,32,18,19,23,31,30,29)
> A<-rep(c(rep(-1,3),rep(1,3)),2)
> B<-c(rep(-1,6),rep(1,6))
> AB<-A*B
> XA<-data.frame(y,A)
> XAp<-XA[XA$A==1,]
> XAn<-XA[XA$A==-1,]
> XAp
  y A
4 36 1
5 32 1
6 32 1
10 31 1
11 30 1
12 29 1
> XAn
  y A
1 28 -1
2 25 -1
3 27 -1
7 18 -1
8 19 -1
9 23 -1
> A<-mean(XAp$y)-mean(XAn$y)
> A
[1] 8.333333
> XB<-data.frame(y,B)
> XBP<-XB[XB$B==1,]
> XBN<-XB[XB$B==-1,]
> B<-mean(XBP$y)-mean(XBN$y)
```

```

> B
[1] -5
> XAB<-data.frame(y,AB)
> XABp<-XAB[XAB$AB==1,]
> XABn<-XAB[XAB$AB==-1,]
> contrasteAB<-sum(XABp$y)-sum(XABn$y)
> AB<-contrasteAB/(2*3)
> AB
[1] 1.666667

```

### Análisis de variancia

$$SS_{AB \dots K} = \frac{1}{n2^k} (\text{Contraste}_{AB \dots K})^2$$

respectivamente, en donde  $n$  corresponde al número de réplicas. El análisis de variancia para el diseño  $2^k$  aparece en la siguiente tabla:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad
<b><math>k</math> efectos principales</b>		
<i>A</i>	$SS_A$	1
<i>B</i>	$SS_B$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<i>K</i>	$SS_K$	1
<b><math>\binom{k}{2}</math> interacciones de dos factores</b>		
<i>AB</i>	$SS_{AB}$	1
<i>AC</i>	$SS_{AC}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<i>JK</i>	$SS_{JK}$	1
<b><math>\binom{k}{3}</math> interacciones de tres factores</b>		
<i>ABC</i>	$SS_{ABC}$	1
<i>ABD</i>	$SS_{ABD}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<i>IJK</i>	$SS_{IJK}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
<b><math>\binom{k}{k} = 1</math> interacción de <math>k</math> factores</b>		
<i>ABC ... K</i>	$SS_{ABC \dots K}$	1
Error	$SS_E$	$2^k(n-1)$
Total	$SS_T$	$n2^k - 1$

### Modelo de Regresión

Sea

$$x_i = \frac{P - \frac{(P_{\text{baja}} + P_{\text{alta}})}{2}}{(P_{\text{alta}} - P_{\text{baja}})/2}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, k, \text{ } P \text{ es el factor correspondiente a } i$$

Luego,

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_k x_k + \beta_{12} x_1 x_2 + \dots + \beta_{(k-1)k} x_{(k-1)} x_k + \dots + \beta_{12 \dots k} x_1 x_2 \dots x_k + \varepsilon$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y}_{\dots} \text{ y } \hat{\beta}_{i \dots l} = \frac{\text{Efecto}(i \dots l)}{2}$$

$$H_0 : \beta_{i \dots l} = 0$$

$H_0 : \beta_{i \dots l} = 0$ ,  $i, \dots, l = 1, 2, \dots, k$ , el número de subíndice de  $i$  a  $l$  puede ser de 1 a  $k$ , dependerá de que efecto se está probando.

$$F_{i \dots l} = \frac{SS_{i \dots l}}{\{SS_E / [2^k (n-1)]\}} \sim F_{(1, 2^k (n-1))} / H_0 \text{ es verdadera}$$

$$\text{p-value} = P \left[ F_{(1, 2^k (n-1))} > F_{i \dots l} \right]$$

Continuando con el **ejemplo 6.1**

```
> y<-c(28,25,27,36,32,32,18,19,23,31,30,29)
> A<-rep(c(rep(-1,3),rep(1,3)),2)
> B<-c(rep(-1,6),rep(1,6))
> mod<-lm(y~A+B+A*B)
```

Otra forma de encontrar los efectos estimados

```
> betaest<-coefficients(mod)
> efectosest<-2*betaest[2:4]
> data.frame(efectosest)
  efectosest
A      8.333333
B     -5.000000
A:B     1.666667
> anva<-aov(mod)
> summary(anva)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)
A	1	208.33	208.33	53.191	8.44e-05 ***
B	1	75.00	75.00	19.149	0.00236 **
A:B	1	8.33	8.33	2.128	0.18278
Residuals	8	31.33	3.92		

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

$$H_0 : \beta_i = 0 \qquad H_0 : \beta_{12} = 0$$

$$H_1 : \beta_i \neq 0, \text{ para } i = 1, 2 \quad H_1 : \beta_{12} \neq 0$$

Se puede concluir que ambos efectos principales: concentración de reactivo y cantidad de catalizador influyen significativamente a un nivel del 1%. En cambio, La prueba de hipótesis sobre el efecto de la interacción (concentración de reactivo y cantidad de catalizador) resultó no significativa a un nivel del 10%.

### Chequeo de supuestos

Los residuales se definen:

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \text{ para } i=1, \dots, 2^k n$$

donde  $y_i$  es la  $i$ -ésima observación y  $\hat{y}_i$  es el  $i$ -ésimo valor predicho obtenido con la ecuación de regresión que solo incluye los efectos que contribuye significativamente sobre la variable respuesta.

Los residuales estandarizados se definen:

$$r_i = \frac{e_i}{\sqrt{CME \times (1 - h_{ii})}}$$

Donde:  $e_i$   $i$ -ésimo residual,  $CME$  cuadrado medio del error del modelo de regresión ajustado solamente con las factores e interacciones que contribuyen significativamente sobre la variable respuesta. En este caso,  $h_{ii}$  es el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de la matriz  $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$  siendo  $\mathbf{X}$  una matriz donde el primer vector columna está conformado solamente de todos sus componentes igual a 1 y de longitud igual al número total de observaciones. Después sigue los vectores de los efectos principales que contribuyen significativamente ordenados alfabéticamente en este caso cada vector está conformados por valores -1 y 1 de manera que toma el valor -1 si la observación resulta cuando el nivel del factor se encuentran en el nivel bajo y 1 si está en nivel alto. Luego los vectores de interacciones de dos, de tres y así sucesivamente, todos deben contribuir significativamente, siempre ordenado en ordenado alfabéticamente, sus valores pueden ser obtenido por el producto de componente a componente de los vectores de los efectos principales dados anteriormente.

El chequeo de supuestos se puede realizar en forma similar a los otros diseños, pero en este caso se realiza con el modelo de regresión apropiado (solo se considera los efectos significativo)

- Gráfico de residuales en función de valores predichos.
- Gráfico en probabilidad normal de residuos estandarizados.
- Gráfico de la raíz cuadrada de valores absolutos de los residuales estandarizados en función de los valores predichos.
- Gráfico de los residuos en función de los factores para analizar variabilidad.
- Prueba de Normalidad: Shapiro Wilk, Anderson Darling, entre otros.
- El modelo de regresión que se considera para realizar el chequeo de supuesto está dado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

donde :

$$x_1 = \frac{Conc - (Conc_{baja} + Conc_{alta})/2}{(Conc_{alta} - Conc_{baja})/2} = \frac{Conc - (15+25)/2}{(25-15)/2} = \frac{Conc - 20}{5}$$

$$x_2 = \frac{Catal - (Catal_{baja} + Catal_{alta})/2}{(Catal_{alta} - Catal_{baja})/2} = \frac{Catal - (1+2)/2}{(2-1)/2} = \frac{Catal - 1.5}{0.5}$$

En este caso,  $x_1 = \begin{cases} -1, & \text{si conc}=15 \\ 1, & \text{si conc}=25 \end{cases}$  y  $x_2 = \begin{cases} -1, & \text{si catal}=1 \\ 1, & \text{si catal}=2 \end{cases}$

Luego, con los datos del **ejemplo 6.1**, la ecuación de regresión estimada está dado por:

$$\hat{y} = 27.5 + \left(\frac{8.33}{2}\right)x_1 + \left(\frac{-5.00}{2}\right)x_2$$

```
> mod1<-lm(y~A+B)
> CME<-deviance(mod1)/df.residual(mod1)
> betal<-coefficients(mod1)
> I<-rep(1,length(y))
> X<-cbind(I,A,B)
> yest<-X%*%betal
> e<-y-yest
> e
```

```
      [,1]
[1,] -0.3333333
[2,] -3.3333333
[3,]  8.6666667
[4,]  1.0000000
[5,] -3.0000000
[6,] -3.0000000
[7,] -3.6666667
[8,] -2.6666667
[9,]  1.3333333
[10,] 2.6666667
[11,] 1.6666667
[12,] 0.6666667
> H<-X%*%solve(t(X)%*%X)%*%t(X)
> ri<-e/sqrt(CME*(1-diag(H)))
> ri
```

```
      [,1]
[1,] -0.09829464
[2,] -0.98294637
[3,]  2.55566057
[4,]  0.29488391
[5,] -0.88465174
[6,] -0.88465174
[7,] -1.08124101
[8,] -0.78635710
```



```

[9,] 0.39317855
[10,] 0.78635710
[11,] 0.49147319
[12,] 0.19658927

> par(mfrow=c(2,2))
> plot(mod1)
hat values (leverages) are all = 0.25
and there are no factor predictors; no plot no. 5

```

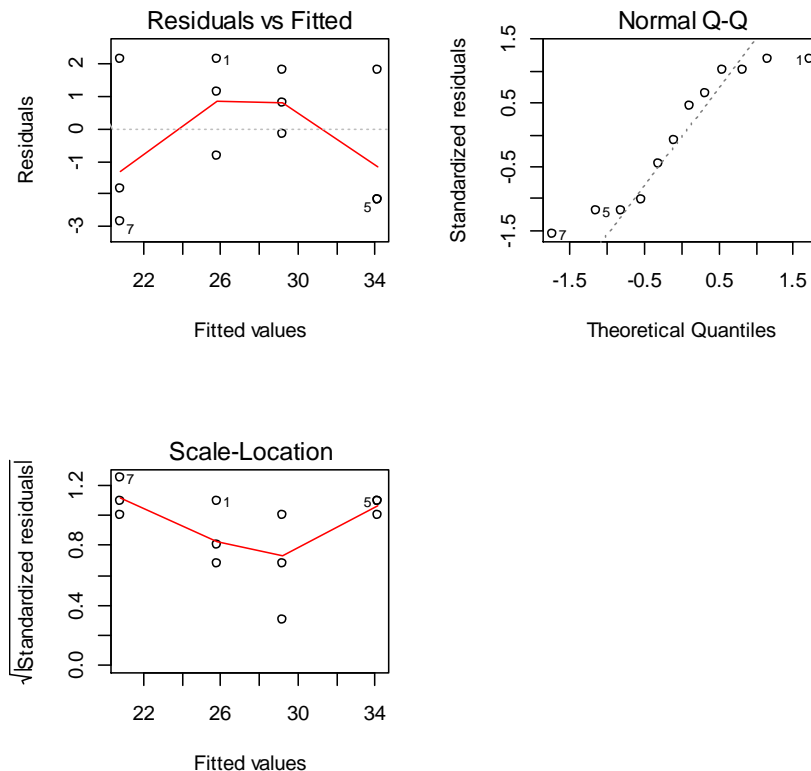


Figura N° 2: Gráficos de residuos y residuos estandarizados

En el primer gráfico de La Fig. N° 2, se puede observar que los residuos en función de los valores predichos se encuentran casi en una banda salvo los valores extremos que se alejan un poco más del resto, con esto se puede concluir que posiblemente que se cumpla el supuesto de homogeneidad de variancias. Esto puede ser corroborado en el tercer gráfico se puede observar el lowess de la raíz cuadrada de los valores absolutos de los residuos estandarizados en función de los valores predichos si bien primero decrece hasta cuando el valor predicho tome un valor de 29 y luego crece el lowess que se forma no tiene una forma no lineal muy pronunciada. También, del primer gráfico se puede observar que el lowess de los residuos en función de los valores predichos tiene una forma no lineal esto es posible que indique que el supuesto de linealidad no se cumpla y es posible que se necesite realizar una transformación. Del segundo gráfico se observa que la distribución de los residuos tiene colas más pesadas que la distribución normal, con lo cual es posible que no se cumpla con el supuesto de normalidad.

En estadística, el se usa para contrastar la normalidad de un conjunto de datos. La hipótesis nula:

$H_0$  : la muestra  $x_1, \dots, x_n$  proviene de una población normalmente distribuida.

$H_1$  : la muestra  $x_1, \dots, x_n$  no proviene de una población normalmente distribuida.

### Test de Shapiro–Wilk

Esta prueba fue dada en una publicación dada en 1965 por Samuel Shapiro y Martin Wilk. Se considera uno de los pruebas más poderosa para el contraste de normalidad, sobre todo para muestras pequeñas ( $n < 30$ ).

El estadístico del test es:

$$W = \frac{\left( \sum_{i=1}^n a_i x_{(i)} \right)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

Donde:

$x_{(i)}$  es el i-ésimo estadístico de orden de la muestra  $x_1, \dots, x_n$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$(a_1, \dots, a_n) = \frac{m^T V^{-1}}{(m^T V^{-1} V^{-1} m)^{\frac{1}{2}}} \text{ siendo } m = (m_1, \dots, m_n)^T \text{ y } m_1, \dots, m_n \text{ son los valores esperados de las}$$

variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas muestreada de una distribución normal estándar y  $V$  es la matriz variancia covariancia de estos estadísticos de orden.

El paquete R tiene programado para encontrar los el valor de esta estadística y los p-values de la distribución de este estadístico de prueba, así aplicando al **ejemplo 6.1**

$H_0$  : Los errores se distribuye normalmente

$H_1$  : Los errores no se distribuye normalmente

```
> ri<-rstandard(mod1)
> shapiro.test(ri)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data:  ri
W = 0.8818, p-value = 0.09239
```

A un nivel de significación del 10% se ha encontrado suficiente evidencia para afirmar que los errores no se distribuyen normalmente

## Anderson Darling

La **prueba de Anderson-Darling** es una prueba no paramétrica sobre si los datos de una muestra provienen de una distribución específica. La fórmula para el estadístico A determina si los datos  $x_1, \dots, x_n$  (observar que los datos se deben ordenar) vienen de una distribución con función acumulativa  $F$

$$A^2 = -n - S$$

donde

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{n} \left[ \ln F(x_k) + \ln(1 - F(x_{n+1-k})) \right]$$

El estadístico de la prueba se puede entonces comparar contra las distribuciones del estadístico de prueba (dependiendo que  $F$  se utiliza) para determinar el P-valor.

La prueba de Anderson-Darling es una prueba estadística que permite determinar si una muestra de datos se extrae de una distribución de probabilidad. En su forma básica, la prueba asume que no existen parámetros a estimar en la distribución que se está probando, en cuyo caso la prueba y su conjunto de valores críticos siguen una distribución libre. Sin embargo, la prueba se utiliza con mayor frecuencia en contextos en los que se está probando una familia de distribuciones, en cuyo caso deben ser estimados los parámetros de esa familia y debe tenerse estos en cuenta a la hora de ajustar la prueba estadística y sus valores críticos. Cuando se aplica para probar si una distribución normal describe adecuadamente un conjunto de datos, es una de las herramientas estadísticas más potentes para la detección de la mayoría de las desviaciones de la normalidad

Aplicando a los residuals estandarizados obtenido del modelo aplicado al **ejemplo 6.1**, se tiene:

$H_0$  : Los errores se distribuye normalmente

$H_1$  : Los errores no se distribuye normalmente

```
> library(nortest)
> ad.test(ri)
```

```
Anderson-Darling normality test
```

```
data:  ri
```

A = 0.5504, p-value = 0.1216

A un nivel de significación del 10% no se ha encontrado suficiente evidencia para afirmar que los errores no se distribuyen normalmente

De acuerdo con los gráfico de probabilidad normal el resultado obtenido con la prueba de Shapiro Wild es más coherente que con la prueba de Anderson Darling

- Prueba de variancia constante de errores Breusch-Pagan.

#### Test de Breusch-Pagan:

$H_0$  : Existe homogeneidad de variancia de los errores

$H_1$  : No existe homogeneidad de variancia de los errores

Cuando sean varias las variables causantes de tal problema, se deberá recurrir a otras pruebas. En concreto, el test de Breusch-Pagan el cual sólo es estrictamente válido cuando se dispone de muestras suficientemente grandes presupone que es posible expresar la varianza del término de perturbación como una combinación lineal de  $p$  variables explicativas, esto es,

$$Var[u_i] = \alpha_0 + \alpha_1 z_{1i} + \dots + \alpha_p z_{pi}$$

:

Los pasos a seguir para obtener el estadístico BP, el cual seguirá bajo la hipótesis nula una distribución  $\chi^2$  con  $p$  grados de libertad, son:

1. Estimar por MCO el modelo original  $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + u_i$ , guardando los residuos resultantes y

donde:  $e_i = y_i - \hat{y}_i$

2. Calcular una serie con los errores del modelo anterior al cuadrado estandarizados:

$$\tilde{e}_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}^2}, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n}$$

3. Estimas una regresión del error calculado en el paso (2) explicado por una constante y el conjunto de las variables Z que se pretende saber si producen o no heterocedasticidad en el modelo, obteniéndose la  $R^2$  de este modelo y la varianza de la estimada

$$\tilde{e}_i = \alpha_0 + \alpha_1 z_{1i} + \dots + \alpha_p z_{pi} + \varepsilon_i$$

$$R_e^2$$

4. En principio, dado que el modelo tiene término constante, se cumple la regla general de las regresiones según la cual la varianza de la endógena real es igual a la suma de la varianza de la endógena estimada más la varianza del error obtenido en el modelo  $S_{e^2}^2 + S_{\varepsilon}^2$  o su equivalente multiplicando a ambos lados de la igualdad por el número de observaciones " $n$ ", donde en vez de varianzas hablaremos de Sumas al cuadrado. Por ello, si el modelo es "malo" la varianza de la endógena estimada será pequeña (es lo mismo que decir que la varianza del error estimado es grande o que el "modelo tiene mucho error"). En definitiva, y siguiendo el interés que aquí buscamos, si la varianza de la endógena estimada en este segundo modelo es muy pequeña, estaremos afirmando que el

poder explicativo del conjunto de variables Z sobre la representación de la varianza de las perturbaciones aleatorias es escaso. A partir de esta afirmación, podríamos generar un contraste calculado con la suma residual, a sabiendas de que cuanto más cerca de cero se encuentre, más probabilidades de homocedasticidad habrá en el modelo. El contraste propuesto es:

$$BP = \frac{S_{\hat{e}}^2 * n}{2} \approx \chi_p^2 / H_0 \text{ es verdadera}$$

los autores demuestran que, en el caso de un modelo homocedástico, se distribuye como una  $\chi_p^2$  con lo que, si el valor del ratio supera al valor de tablas, se rechaza la hipótesis nula (homocedasticidad); es decir, se acepta que el conjunto de variables Z está produciendo heterocedasticidad en el modelo original.

El contraste de Breusch Pagan efectivamente nos servirá para aceptar o descartar la presencia de heterocedasticidad debida a ese conjunto de variables Z citado, pero su operatividad es limitada. Si el conjunto de las variables Z contiene variables no incluidas en el modelo original, parece difícil no haberlas tenido en cuenta antes para realizar una buena especificación y sí tenerlas en cuenta ahora para la prueba. Por otro lado, la lista de variables Z debe ser necesariamente pequeña para poder realizarse el contraste.

Aplicando al modelo obtenido con los datos del **ejemplo 6.1**, se tiene:

$H_0$  : Los errores tiene variancia constante

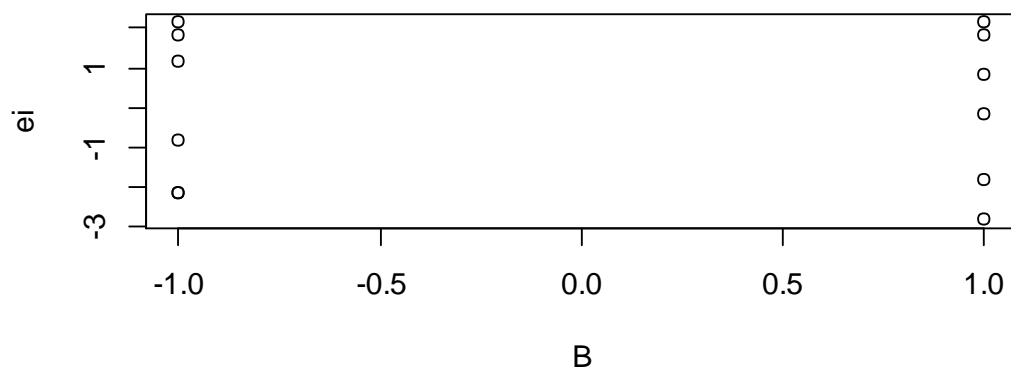
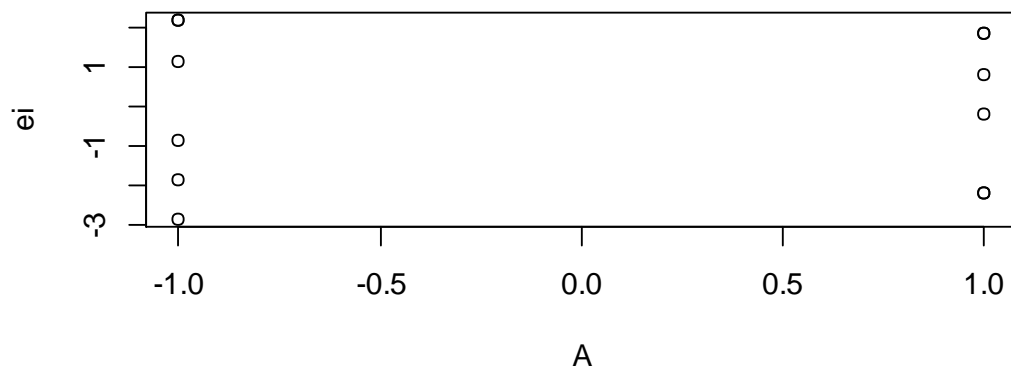
$H_0$  : Los errores tiene variancia constante

```
> library(car)
> ncvTest(mod1)
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 0.1148473    Df = 1    p = 0.7346916
```

A un nivel de significación del 10% no se ha encontrado suficiente evidencia para afirmar que los errores no tienen variancia constante. Por lo tanto, se puede aceptar que los errores tienen variancia constante.

- Gráfico de variabilidad de los residuales a nivel alto del factor versus la variabilidad de los residuos a nivel bajo, para el **ejemplo 6.1**

```
> ei<-residuals(mod1)
> par(mfrow=c(2,1))
> plot(A,ei)
> plot(B,ei)
```



- Prueba de variabilidad de los residuales a nivel alto del factor versus la variabilidad de los residuos a nivel bajo:

$$H_0 : \sigma^2(i+) = \sigma^2(i-)$$

$$H_1 : \sigma^2(i+) \neq \sigma^2(i-), \text{ para } i = A, \dots, K$$

Para realizar esta prueba se utiliza la siguiente estadística:

$$F_i^* = \ln \left[ \frac{S^2(i+)}{S^2(i-)} \right] \sim N(0,1) / H_0 \text{ es verdadera}$$

Donde:  $S^2(i+)$  es la variancia de los residuos correspondientes cuando el factor  $i$  se encuentra en el nivel alto; y,  $S^2(i-)$  es la variancia de los residuos correspondientes cuando el factor  $i$  se encuentra en el nivel bajo.

Con los datos del **ejemplo 6.1**, se tiene:

$$H_0: \sigma^2(i+) = \sigma^2(i-)$$

$$H_1: \sigma^2(i+) \neq \sigma^2(i-), \text{ para } i = A, B$$

```
> dataA<-data.frame(ei,A)
> dataAn<-dataA[dataA$A==-1,]
> dataAn
      ei  A
1  2.166667 -1
2 -0.833333 -1
3  1.166667 -1
7 -2.833333 -1
8 -1.833333 -1
9  2.166667 -1
> dataAp<-dataA[dataA$A==1,]
> dataAp
      ei  A
4  1.833333 1
5 -2.166667 1
6 -2.166667 1
10 1.833333 1
11 0.833333 1
12 -0.166667 1
> F<-log(var(dataAp$ei)/var(dataAn$ei))
> F
[1] -0.3048604
> pvalue<-2*pnorm(F)
> pvalue
[1] 0.7604725
> dataB<-data.frame(ei,B)
> dataBn<-dataB[dataB$B==-1,]
> dataBn
      ei  B
1  2.166667 -1
2 -0.833333 -1
3  1.166667 -1
4  1.833333 -1
5 -2.166667 -1
6 -2.166667 -1
> dataBp<-dataB[dataB$B==1,]
> dataBp
      ei  B
7 -2.833333 1
8 -1.833333 1
9  2.166667 1
10 1.833333 1
11 0.833333 1
12 -0.166667 1
> F<-log(var(dataBp$ei)/var(dataBn$ei))
> F
[1] 0.03361661
> pvalue<-2*(1-pnorm(F))
```

```
> pvalue
[1] 0.9731829
```

### Gráfica de la superficie

La ecuación de regresión en términos de las variables codificadas está dada por

$$\hat{y} = 27.5 + \left(\frac{8.33}{2}\right)x_1 + \left(\frac{-5.00}{2}\right)x_2 = 27.5 + \left(\frac{8.33}{2}\right)\left(\frac{A-20}{5}\right) - \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{B-1.5}{0.5}\right)$$

$$\hat{y} = 27.5 - 16.6666 + 7.5 + 0.83333A - 5B$$

$$\hat{y} = 16.3333 + 0.83333A - 5B$$

```
> mod<-function(x1,x2){16.3333+0.83333*x1-5*x2}
> x1<-seq(15,25,0.5)
> x2<-seq(1,2,0.05)
> z<-outer(x1,x2,mod)
> persp(x1,x2,z,theta=-40,phi=30,ticktype="detailed",xlab="concentración del
reactivo",ylab="cantidad del catalizador",zlab="y")
```

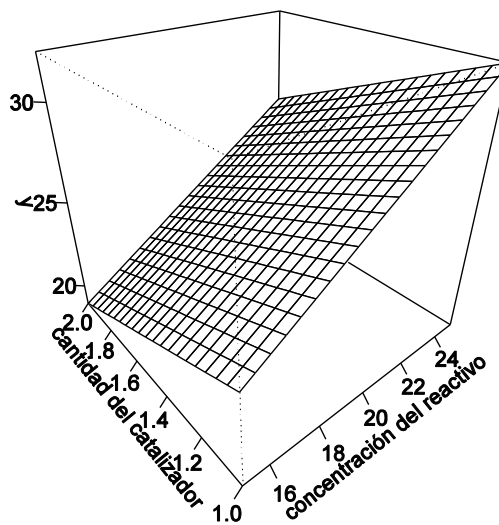


Fig. N°3: Gráfico de la superficie de respuesta del ejemplo 6-1

```
> contour(x1,x2,z,nlevels=6,xlab="Concentración de reactivo", ylab="cantidad de
catalizador")
```



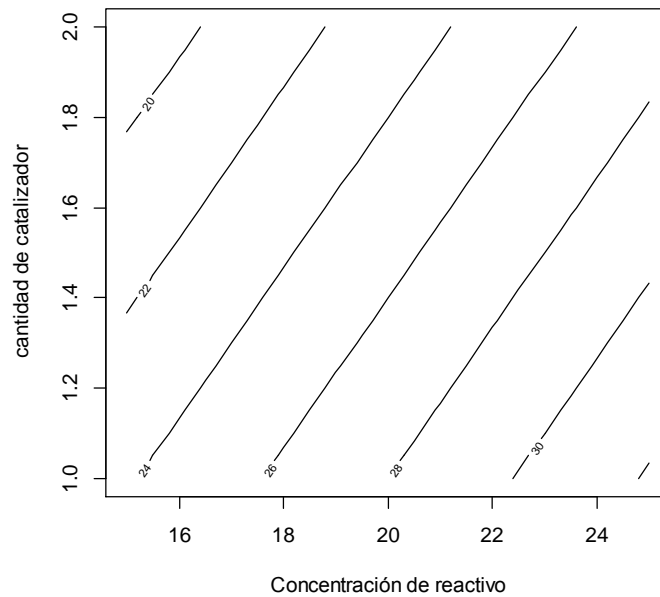


Figura N° 4 Gráfico de Contorno del ejemplo 6-1

## Ejemplo 6.2

Refiérase al ejemplo 5-14 del libro de análisis y diseños de experimentos de Montgomery, en el que se presentó un estudio del efecto que tiene el porcentaje de carbonato, la presión de operación y la rapidez en la línea sobre el volumen envasado de una bebida gaseosa. Suponga que sólo se usaron dos niveles del porcentaje del carbonato por lo que el experimento es un diseño factorial  $2^3$  con dos réplicas. En la tabla 4 se presentan los datos, desviaciones con respecto a la altura de llenado objetivo, y el diseño se ilustra en la Fig. 5.

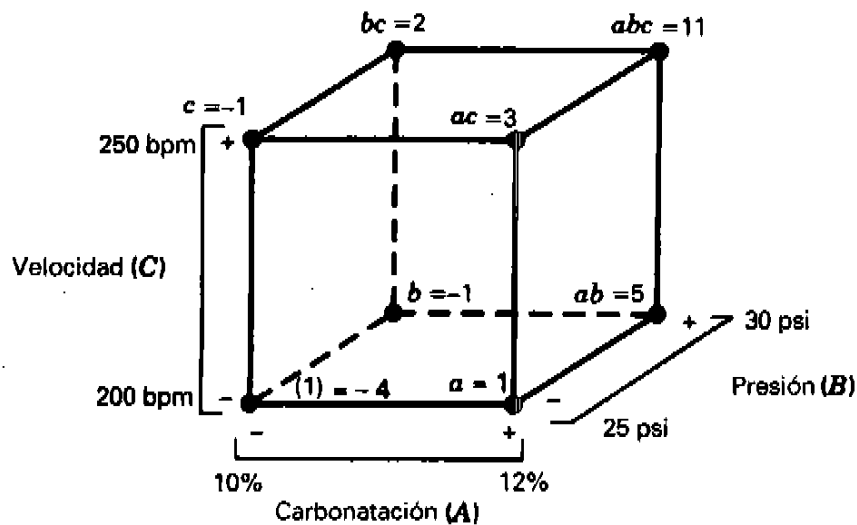


Fig. 5: El diseño factorial  $2^3$

Tabla: N° 4: Datos del experimento altura de llenado

Corrida	Factores codificados			Desviación de la altura de llenado		Niveles del factor		
	A	B	C	Réplica 1	Réplica 2	Bajo (-1)	Alto (+1)	
1	-1	-1	-1	-3	-1	A (psi) 10	12	
2	1	-1	-1	0	1	B (psi) 25	30	
3	-1	1	-1	-1	0	C (b/min) 200	250	
4	1	1	-1	2	3			
5	-1	-1	1	-1	0			
6	1	-1	1	2	1			
7	-1	1	1	1	1			
8	1	1	1	6	5			

```
> fac.design(nlevels=c(2,2,2), factor.names=list(one=c(10,12),
two=c(25,30),three=c(200,250)), replications=2)
creating full factorial with 8 runs ...
```

```
run.no run.no.std.rp one two three
1      1             6.1 12 25 250
2      2             4.1 12 30 200
3      3             7.1 10 30 250
4      4             5.1 10 25 250
5      5             3.1 10 30 200
6      6             8.1 12 30 250
7      7             1.1 10 25 200
8      8             2.1 12 25 200
9      9             2.2 12 25 200
10     10            1.2 10 25 200
11     11            6.2 12 25 250
12     12            3.2 10 30 200
13     13            5.2 10 25 250
14     14            4.2 12 30 200
15     15            8.2 12 30 250
16     16            7.2 10 30 250
```

```
class=design, type= full factorial
```

NOTE: columns run.no and run.no.std.rp are annotation, not part of the data frame

Utilizando los datos de las combinaciones de tratamiento que se muestran en la Tabla N° 4, es posible estimar como sigue los efectos de los factores:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{4n} [a + ab + ac + abc - (1) - b - c - bc] \\
 &= \frac{1}{8} [1 - (-4) + 5 - (-1) + 3 - (-1) + 11 - 2] \\
 &= \frac{1}{8} [24] = 3.00
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{4n} [b + ab + bc + abc - (1) - a - c - ac] \\
&= \frac{1}{8} [-1 + 5 + 2 + 11 - (-4) - 1 - (-1) - 3] \\
&= \frac{1}{8} [18] = 2.25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{4n} [c + ac + bc + abc - (1) - a - b - ab] \\
&= \frac{1}{8} [-1 + 3 + 2 + 11 - (-4) - 1 - (-1) - 5] \\
&= \frac{1}{8} (14) = 1.75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AB &= \frac{[abc - bc + ab - b - ac + c - a + (1)]}{4n} \\
&= \frac{1}{8} [5 - 1 - (-1) + (-4) + 11 - 2 - 3 + (-11)] \\
&= \frac{1}{8} [6] = 0.75
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
AC &= \frac{[(1) - a + b - ab - c + ac - bc + abc]}{4n} \\
&= \frac{1}{8} [-4 - 1 + (-1) + (-4) + 11 - 2 - 3 + (-1)] \\
&= \frac{1}{8} [2] = 0.25
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
BC &= \frac{[(1) + a - b - ab - c - ac + bc + abc]}{4n} \\
&= \frac{1}{8} [-4 + 1 - (-1) - 5 - (-1) - 3 + 2 + 11] \\
&= \frac{1}{8} [4] = 0.50
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ABC &= \frac{[abc - be - ae + e - ab + b + a - (1)]}{4n} \\
&= \frac{1}{8} [11 - 2 - 3 + (-1) - 5 + (-1) + 1 - (-4)] \\
&= \frac{1}{8} [4] = 0.50
\end{aligned}$$

Los mayores efectos son para carbonatación ( $A=3.00$ ), presión ( $B=2.25$ ), rapidez ( $C=1.75$ ) e interacción carbonatación-presión ( $AB=0.75$ ), aunque al parecer el efecto de la interacción sobre la desviación de la altura de llenado no es tan grande como los efectos principales.

Puede utilizarse el análisis de variancia para confirmar la magnitud de estos efectos. A partir de la ecuación 6.18, las sumas de cuadrados son:

$$SS_A = \frac{(24)^2}{16} = 36.00$$

$$SS_B = \frac{(18)^2}{16} = 20.25$$

$$SS_C = \frac{(14)^2}{16} = 12.25$$

$$SS_{AB} = \frac{(6)^2}{16} = 2.25$$

$$SS_{AC} = \frac{(2)^2}{16} = 0.25$$

$$SS_{BC} = \frac{(4)^2}{16} = 1.00$$

$$SS_{ABC} = \frac{(4)^2}{16} = 1.00$$

La suma total de cuadrados es  $SS_T = 78.00$ , y por diferencia,  $SS_E = 5.00$ . El análisis de variancia se resume en la Tabla N° 6, y confirma la significancia de los efectos principales. La interacción  $AB$  es significativa a un nivel aproximado del 10%; por tanto existe cierta ligera interacción entre carbonatación y presión.

Tabla N° 5: Resumen de los efectos estimados y sumas de cuadrados

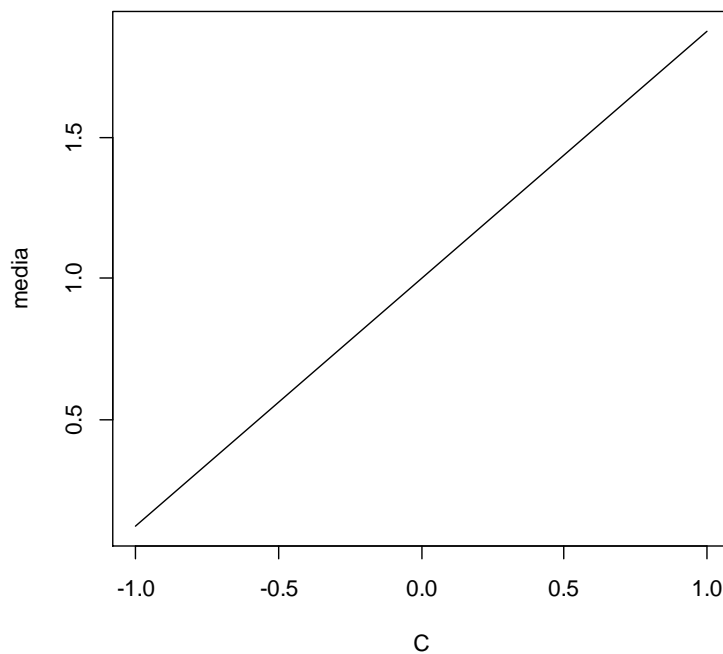
Factor	Estimación del efecto	Sumas de cuadrados	Contribución porcentual
<i>A</i>	3.00	36.00	46.1538
<i>B</i>	2.25	20.25	25.9615
<i>C</i>	1.75	12.25	15.7051
<i>AB</i>	0.75	2.25	2.88462
<i>AC</i>	0.25	0.25	0.320513
<i>BC</i>	0.50	1.00	1.28205
<i>ABC</i>	0.50	1.00	1.28205
Error puro		5.00	6.41026
Total		78.00	

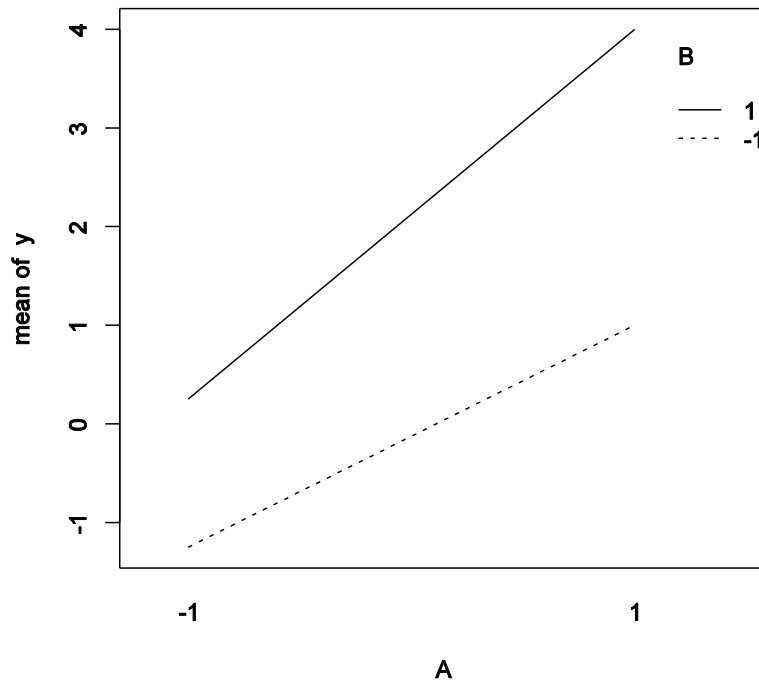
Tabla N° 6 cuadro de análisis de variancia del experimento de altura de llenado

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Cuadrado medio	$F_0$	Valor $P$
Porcentaje de carbonatación ( $A$ )	36.00	1	36.00	57.60	<0.0001
Presión ( $B$ )	20.25	1	20.25	32.40	0.0005
Velocidad de línea ( $C$ )	12.25	1	12.25	19.60	0.0022
$AB$	2.25	1	2.25	3.60	0.0943
$AC$	0.25	1	0.25	0.40	0.5447
$BC$	1.00	1	1.00	1.60	0.2415
$ABC$	1.00	1	1.00	1.60	0.2415
Error	5.00	8	0.625		
Total	78.00	15			

La interpretación práctica de este experimento es que el proceso se debe ejecutar éste a alta presión, baja velocidad de la línea y a bajo porcentaje de carbonatación con la finalidad de poder dar por resultado un sustancial decremento en la desviación de la altura de llenado respecto al valor objetivo.

```
> y<-c(-3,0,-1,2,-1,2,1,6,-1,1,0,3,0,1,1,5)
> A<-rep(c(-1,1),8)
> B<-rep(c(-1,-1,1,1),4)
> C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
> datac<-data.frame(y,C)
> datacp<-datac[datac$C==1,]
> datacn<-datac[datac$C==-1,]
> ycn<-mean(datacn$y)
> ypp<-mean(datacp$y)
> nC<-c(-1,1)
> ypC<-c(ycn,ypp)
> plot(nC,ypC,type="l",xlab="C",ylab="media")
> interaction.plot(A,B,y)
```





**Residuos y pruebas de Diagnóstico.** Los residuos de este experimento pueden generarse por el método del modelo de regresión utilizado anteriormente. El modelo de regresión para predecir la altura es

$$\begin{aligned}\hat{y} &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \hat{\beta}_{12} x_1 x_2 \\ &= 1.00 + \left(\frac{3.00}{2}\right) x_1 + \left(\frac{2.25}{2}\right) x_2 + \left(\frac{1.75}{2}\right) x_3 + \left(\frac{0.75}{2}\right) x_1 x_2\end{aligned}$$

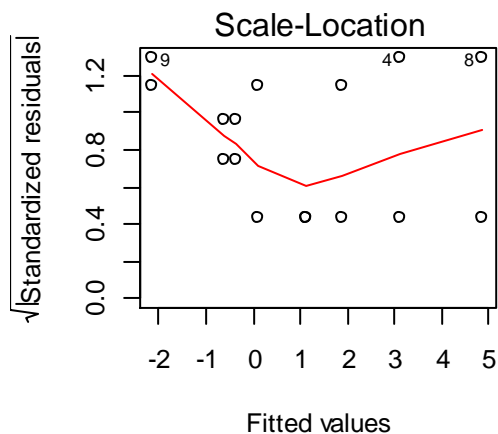
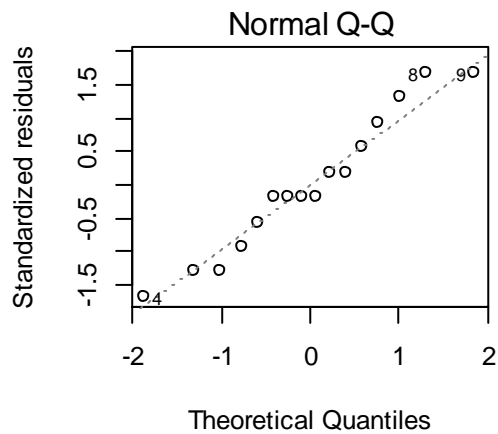
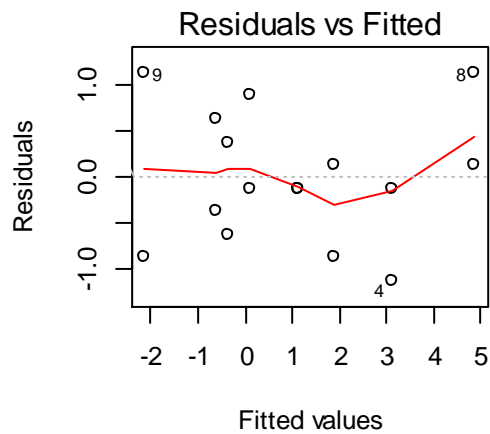
donde las variables codificadas  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  representan  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente. El término  $x_1 x_2$  representa la interacción  $AB$ . Es posible obtener los residuos como la diferencia entre las desviaciones observada y predichas en la altura de llenado. El análisis de estos residuos se deja como un ejercicio al lector.

```
> y<-c(-3,0,-1,2,-1,2,1,6,-1,1,0,3,0,1,1,5)
> A<-rep(c(-1,1),8)
> B<-rep(c(-1,-1,1,1),4)
> C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
> mod<-lm(y~A*B*C)
> betaest<-coefficients(mod)
> betaest
(Intercept)          A          B          C          A:B          A:C
      1.000       1.500       1.125       0.875       0.375       0.125
      B:C       A:B:C
      0.250       0.250
> efectos<-2*betaest[2:8]
> efectos
```

```

      A      B      C    A:B    A:C    B:C A:B:C
3.00  2.25  1.75  0.75  0.25  0.50  0.50
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(mod1)

```



```

> ri<-rstandard(mod1)
> shapiro.test(ri)

```

Shapiro-Wilk normality test

```

data:  ri
W = 0.9522, p-value = 0.526

```

```

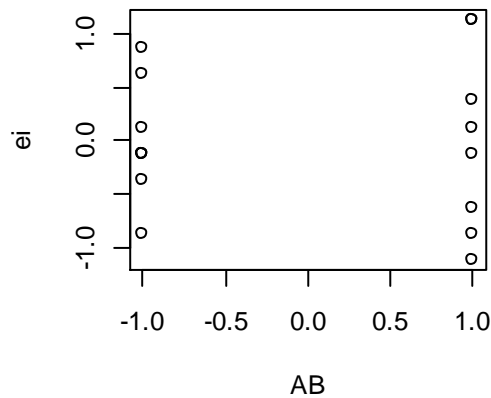
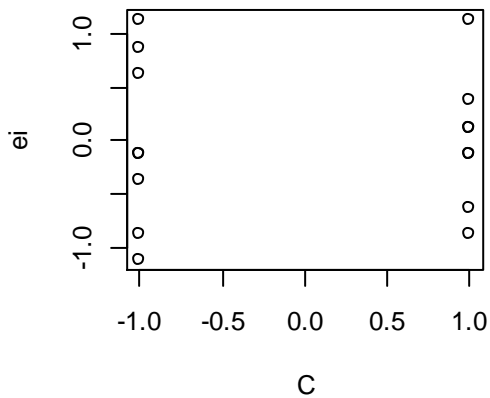
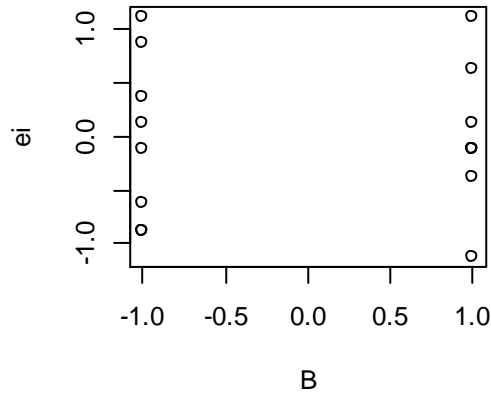
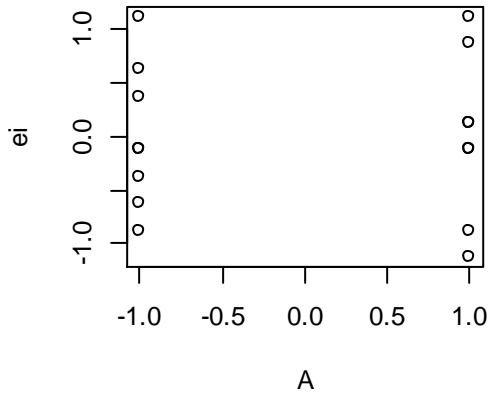
> library(car)
> ncvTest(mod1)
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 0.002151233    Df = 1    p = 0.9630063
> ei<-residuals(mod1)
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(A,ei)

```

```

> plot(B,ei)
> plot(C,ei)
> AB<-A*B
> plot(AB,ei)

```



**Otros Métodos para juzgar la Significancia de los efectos.** El análisis de variancia es una manera formal de determinar cuáles efectos de un factor son distintos de cero. Existen otros dos métodos útiles. En el primero de ellos se calcula el error estándar de los efectos y se compara la magnitud de estos últimos con la de sus errores estándares. En el segundo método, que se ilustrará en la Secc. 6-5, se utilizan gráficas de probabilidad normal para evaluar la importancia de los efectos.

El error estándar de un efecto es fácil de determinar. Si se supone que hay  $n$  réplicas para cada una de las  $2^k$  corridas en el diseño, y si  $Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{in}$  son las observaciones para la  $i$ -ésima corrida, entonces

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2 \quad i = 1, 2, \dots, 2^k$$



es una estimación de la variancia hasta la  $i$ -ésima corrida. Las estimaciones de las  $2^k$  variancia pueden combinarse para obtener una estimación global de variancia

$$S^2 = \frac{1}{2^k (n-1)} \sum_{i=1}^{2^k} \sum_{j=1}^n (Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot})^2$$

Ésta es también la estimación de variancia dado por el cuadrado medio del error en el análisis de variancia. La variancia de cada estimación de un efecto es

$$\begin{aligned} V(\text{Efecto}) &= V\left(\frac{\text{Contraste}}{n2^{k-1}}\right) \\ &= \frac{1}{(n2^{k-1})^2} V(\text{Contraste}) \end{aligned}$$

Cada contraste es una combinación lineal de  $2^k$  totales de tratamientos, y cada total consiste en  $n$  observaciones. Por tanto,

$$V(\text{Contraste}) = n2^k \sigma^2$$

y la variancia de un efecto es

$$\begin{aligned} V(\text{Efecto}) &= \frac{1}{(n2^{k-1})^2} n2^k \sigma^2 \\ &= \frac{1}{n2^{k-2}} \sigma^2 \end{aligned} \quad (*)$$

El error estándar estimado se hallaría sustituyendo  $\sigma^2$  por  $S^2$  su estimado y extrayendo la raíz cuadrada de la Ecuación dada en (\*).

Para ilustrar este método, considérese el experimento de la desviación en la altura de llenado. El cuadrático medio del error es  $MS_E = 0.625$ . Por tanto, el error estándar de cada efecto es (empleando  $S^2 = MS_E$ )

$$\begin{aligned} S_{(\text{Efecto})} &= \sqrt{\frac{1}{n2^{k-2}} S^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2(2^{3-2})} 0.625} \\ &= 0.40 \end{aligned}$$

Dos límites de error estándar para las estimaciones del efecto son entonces

$$\begin{aligned} A: & 3.00 \pm 0.80 \\ B: & 2.25 \pm 0.80 \\ C: & 1.75 \pm 0.80 \\ AB: & 0.75 \pm 0.80 \\ AC: & 0.25 \pm 0.80 \end{aligned}$$

$$BC: 0.50 \pm 0.80$$

$$ABC: 0.50 \pm 0.80$$

Éstos son intervalos de confianza aproximados del 95%. Este análisis indica que  $A$ ,  $B$  y  $C$  son factores importantes, ya que son las únicas estimaciones de efectos de factores para las cuales los intervalos no incluyen el cero.

**Efectos de Dispersión.** El ingeniero de proceso responsable del llenado también se interesaba en los efectos *de dispersión*; esto es, ¿alguno de los factores afecta la variabilidad en la desviación de altura de llenado de una corrida a otra? Una forma de contestar la pregunta es buscar *el rango* de desviaciones en dicha altura para cada una de las ocho corridas en el diseño  $2^3$ . Estos rangos se grafican en el cubo de la Fig. N° 6. Obsérvese que los intervalos son aproximadamente los mismos para las ocho corridas del diseño. En consecuencia, no existe una fuerte evidencia que indique que alguna de las variables del proceso influya directamente en la variabilidad de la desviación de la altura de llenado en el proceso.

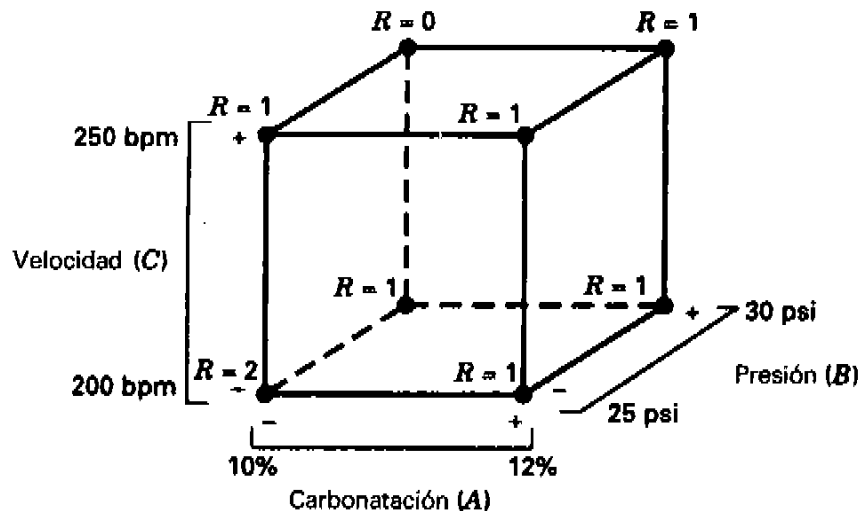


Fig. N° 6: Rangos de desviaciones de altura de llenado

### UNA SOLA RÉPLICA EN EL DISEÑO $2^k$

- Usualmente cuando los recursos son limitados, y hay un número moderados de factores o muchos factores es imposible realizar más de una réplica.
- Cuando se realiza una sola réplica de un diseño factorial  $2^k$  se le llama **factorial no replicado**.
- Daniel sugiere graficar las estimaciones de los efectos en gráfico de probabilidad normal. Los efectos que son despreciables se distribuyen normalmente, con media cero y variancia  $\sigma^2$ , y tienden a ubicarse a lo largo de una línea recta en esta gráfica, mientras que los efectos significativos tendrán medias distintas de cero y no se ubicarán en la línea recta.
- En caso que las interacciones de orden superior no influya significativamente se puede apelar al **principio de efectos esparcidos**, la cual consiste en que la mayoría de los sistemas son dominados por algunos de los efectos principales e interacciones de bajo orden, y la mayor parte de las interacciones de orden superior son despreciables.

## Ejemplo 6.2

### Una sola réplica del diseño $2^4$

Un producto químico se produce en un recipiente a presión. Se realiza un experimento factorial en la planta piloto para estudiar los efectos que se cree influyen sobre la tasa de filtración de ese producto. Los cuatro factores son temperatura ( $A$ ), presión ( $B$ ), concentración de los reactivos ( $C$ ) y rapidez de mezclado ( $D$ ). Cada factor está presente en dos niveles; en la Tabla N° 7 y la Fig. N° 7 se muestran los datos recopilados de una sola réplica del experimento  $2^4$ . Los 16 ensayos se realizaron en orden aleatorio. El ingeniero de proceso está interesado en maximizar la rapidez de filtración. Las condiciones actuales del proceso dan por resultado velocidad de filtración aproximadas de 75 gal/h. Además, en el proceso se utiliza actualmente el nivel alto del factor  $C$ , concentración de formaldehído. El ingeniero desearía reducir todo lo posible esta concentración, pero ha sido incapaz de hacerlo en virtud de que ello siempre ha dado por resultado menores velocidades de filtración.

Tabla N° 7: Datos del experimento del índice de filtración en la planta piloto

Número de corrida	Factor				Etiqueta de la corrida	Índice de filtración (gal/h)
	$A$	$B$	$C$	$D$		
1	-	-	-	-	(1)	45
2	+	-	-	-	$a$	71
3	-	+	-	-	$b$	48
4	+	+	-	-	$ab$	65
5	-	-	+	-	$c$	68
6	+	-	+	-	$ac$	60
7	-	+	+	-	$bc$	80
8	+	+	+	-	$abc$	65
9	-	-	-	+	$d$	43
10	+	-	-	+	$ad$	100
11	-	+	-	+	$bd$	45
12	+	+	-	+	$abd$	104
13	-	-	+	+	$cd$	75
14	+	-	+	+	$acd$	86
15	-	+	+	+	$bcd$	70
16	+	+	+	+	$abcd$	96

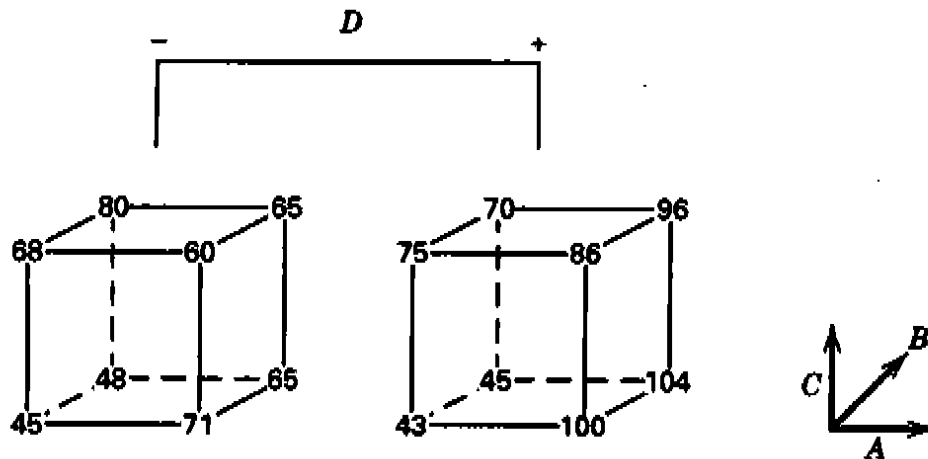


Fig. N° 7: Gráfico de datos del experimento del índice de filtración en la planta piloto

Tabla N° 8: Tabla de signos para los contrastes para calcular los efectos estimados y sumas de cuadrados.

	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
(I)	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+
a	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
b	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
ab	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+
c	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
ac	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+
bc	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
d	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
ad	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+
bd	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
abd	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
cd	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
acd	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
bcd	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
abcd	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Comenzaremos el análisis de estos datos graficando las estimaciones de los efectos en el papel probabilidad normal. La Tabla N° 8 es la tabla de signos más y menos para las constantes de contraste del diseño  $2^4$ . A partir de estos contrastes podemos estimar los 15 efectos factoriales que siguen:

```
> y<-c(45,71,48,65,68,60,80,65,43,100,45,104,75,86,70,96)
> A<-rep(c(-1,1),8)
> B<-rep(c(-1,-1,1,1),4)
> C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
> D<-c(rep(-1,8),rep(1,8))
> mod<-lm(y~A*B*C*D)
> Estimados<-2*(coefficients(mod)[2:16])
> SC<-(8*Estimados)^2/16
> SCTotal<-sum(SC)
> Contribución<-round((SC/SCTotal)*100,4)
> data.frame(Estimados,SC, Contribución)
```

Tabla N° 9: Efectos estimados y sumas de cuadrados del ejemplo 6-2

	Estimados	SC	Contribución
A	21.625	1870.5625	32.6397
B	3.125	39.0625	0.6816
C	9.875	390.0625	6.8063
D	14.625	855.5625	14.9288
A:B	0.125	0.0625	0.0011
A:C	-18.125	1314.0625	22.9293
B:C	2.375	22.5625	0.3937
A:D	16.625	1105.5625	19.2911
B:D	-0.375	0.5625	0.0098
C:D	-1.125	5.0625	0.0883
A:B:C	1.875	14.0625	0.2454
A:B:D	4.125	68.0625	1.1876
A:C:D	-1.625	10.5625	0.1843
B:C:D	-2.625	27.5625	0.4809
A:B:C:D	1.375	7.5625	0.1320

En la Fig. 8 se presenta la gráfica de probabilidad normal de estos efectos. Todos los efectos que se ubican en la línea son despreciables, mientras que los efectos grandes están alejados de ésta. Los efectos importantes que se descubren en este análisis son los efectos principales de *A*, *C* y *D* y las interacciones *AC* y *AD*.

```
> qq<-qqnorm(Estimados,type="n")
> Efectos<-names(Estimados)
> text(qq$x, qq$y, labels = Efectos)
> Estimados1<-Estimados[-c(1,3,4,6,8)]
> qqline(Estimados1)
```

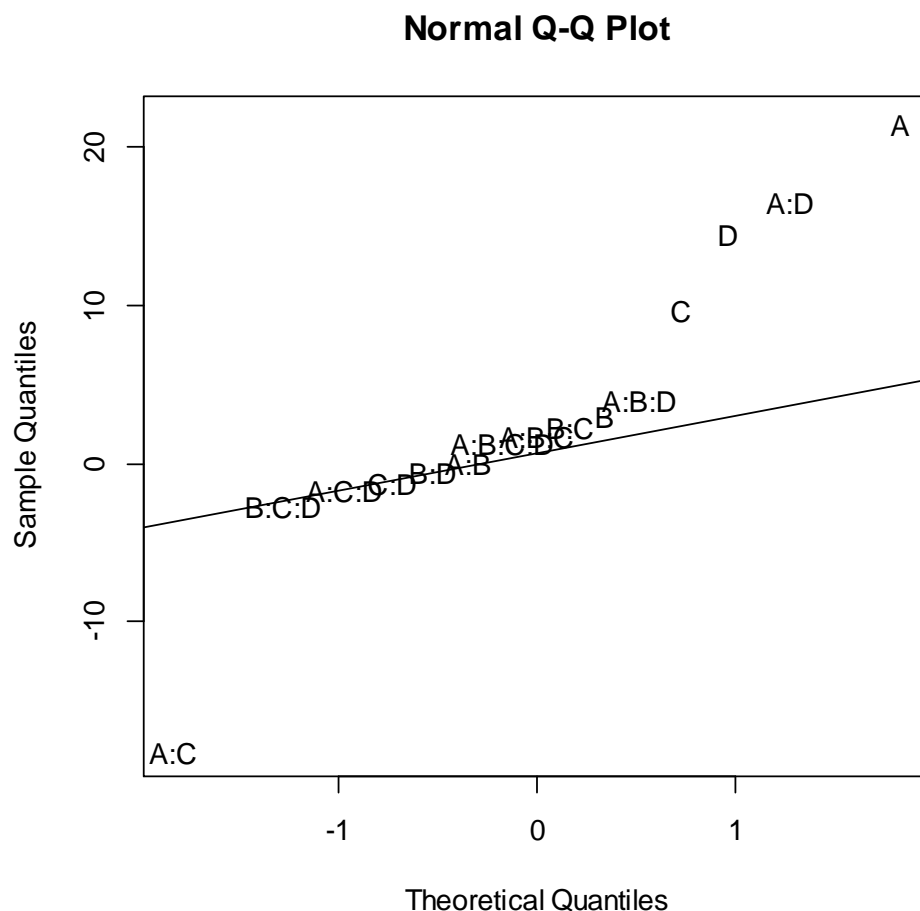


Fig. N° 8: Gráfico de probabilidad normal de los efectos del ejemplo 6-2

Los efectos principales de *A*, *C* y *D* se grafican en la Fig. 9a. Los tres efectos son positivos, y si consideramos sólo estos tres efectos principales, podemos correr los tres factores al nivel alto para maximizar la rapidez de filtración. Sin embargo, siempre es necesario examinar cualesquiera interacciones que sean importantes. Recuérdese que los efectos principales no tienen mucho sentido cuando están implicados en interacciones significativas.

```
> mediaA<-tapply(y,A,mean)
> xA<-c(-1,1)
```

```

> plot(xA,mediaA,type="l",xlab="A",ylab="I. filtración promedio")
> mediaC<-tapply(y,C,mean)
> xC<-c(-1,1)
> plot(xC,mediaC,type="l",xlab="C",ylab="I. filtración promedio")
> mediaD<-tapply(y,D,mean)
> xD<-c(-1,1)
> plot(xD,mediaD,type="l",xlab="D",ylab="I. filtración promedio")

```

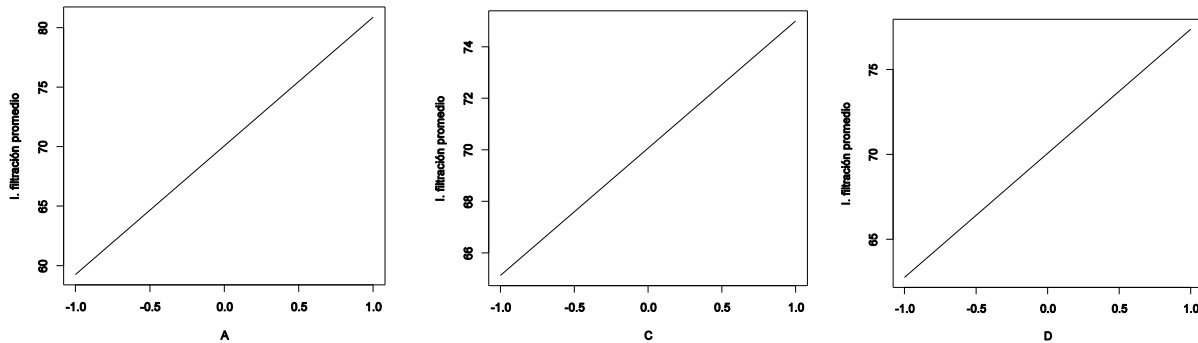


Fig. N° 9a: Gráfica de lo efecto principales significativos del ejemplo 6-2

En la Fig. 9b se grafican las interacciones  $AC$  y  $AD$ . Estas interacciones son la clave para resolver el problema. Obsérvese en el caso de la interacción  $AC$  que el efecto de la temperatura es muy pequeño cuando la concentración se encuentra en el nivel alto, y muy grande en caso contrario; los mejores resultados se obtienen para baja concentración y alta temperatura. La interacción  $AD$  indica que la rapidez de agitación  $D$  tiene poco efecto a baja temperatura, pero un gran efecto positivo a temperatura elevada. Por lo tanto, las mayores velocidades de filtración se obtienen al parecer cuando  $A$  y  $D$  están en el nivel alto y  $C$  está en el nivel bajo. Esto permitiría reducir la concentración de formaldehído a un nivel más bajo, otro objetivo del experimentador.

```

> interaction.plot(A,C,y,ylab="I. filtración promedio")
> interaction.plot(A,D,y,ylab="I. filtración promedio")

```

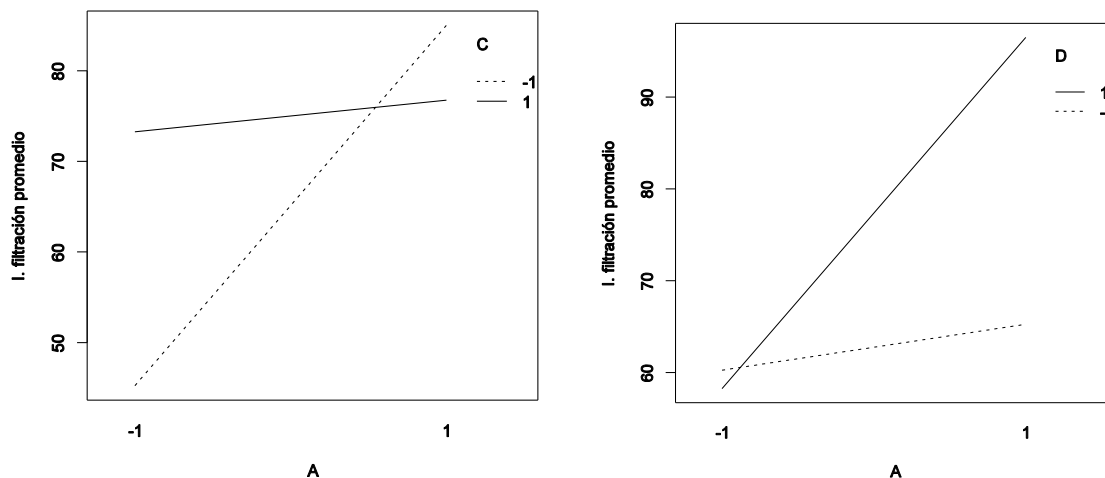


Fig. N° 9b: Gráfico de las interacciones significativas del ejemplo 6-2

**Proyección del Diseño.** Es posible otra interpretación de los datos de la Fig. 8. Dado que  $B$  (presión) no es significativa, al igual que todas las interacciones en que interviene, es posible descartarla del experimento a fin de que el diseño se convierta en un factorial  $2^3$  en  $A$ ,  $C$  y  $D$  con dos réplicas. Esto se aprecia fácilmente examinando sólo las columnas  $A$ ,  $C$  y  $D$  en la Tabla N° 7 y observando que dichas columnas forman dos réplicas de un diseño  $2^3$ . En la Tabla 10 se resume el análisis de variancia de los datos utilizando la suposición simplificadora. Las conclusiones que podríamos extraer de este análisis son esencialmente las mismas del Ejemplo 6-2. Obsérvese que proyectando la réplica única del diseño  $2^4$  en uno  $2^3$  replicado, ahora tenemos una estimación de la interacción  $ACD$  y una estimación del error con base en la replicación (o repetición).

El concepto de proyectar un diseño factorial sin réplicas en uno con menos factores con réplicas resulta ser muy útil. En general, si se tiene una sola réplica de un diseño  $2^k$ , y se comprueba que  $h$  factores  $h(h \leq k)$  son despreciables y pueden desecharse, los datos originales corresponden a un diseño factorial completo de dos niveles de  $k - h$  factores restante con  $2^h$  réplicas.

```
> mod2<-lm(y~A*C*D)
> anva<-aov(mod2)
> summary(anva)
```

Tabla N° 10: Cuadro de ANVA de la proyección del diseño

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
A	1	1870.6	1870.6	83.368	1.67e-05	***
C	1	390.1	390.1	17.384	0.003124	**
D	1	855.6	855.6	38.131	0.000267	***
A:C	1	1314.1	1314.1	58.565	6.00e-05	***
A:D	1	1105.6	1105.6	49.273	0.000110	***
C:D	1	5.1	5.1	0.226	0.647483	
A:C:D	1	10.6	10.6	0.471	0.512032	
Residuals	8	179.5	22.4			

---

Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

El modelo de regresión está dado por

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{14} x_1 x_4 + \beta_{34} x_3 x_4 + \beta_{134} x_1 x_3 x_4 + \varepsilon$$

$$H_0 : \beta_i = 0$$

$$H_0 : \beta_{ij} = 0$$

$$H_0 : \beta_{134} = 0$$

$$H_1 : \beta_i \neq 0, \text{ para } i = 1, 3 \text{ y } 4 \quad H_1 : \beta_{ij} \neq 0, \text{ para } i \neq j, \text{ } i, j = 1, 3 \text{ y } 4 \quad H_1 : \beta_{134} \neq 0$$

Los efectos contribuyen significativamente a un nivel del 1% sobre la tasa de filtración son de temperatura ( $A$ ), concentración de los reactivos ( $C$ ), rapidez de mezclado ( $D$ ), el efecto de interacción temperatura ( $A$ ) y concentración de los reactivos ( $C$ ), y el efecto de interacción temperatura ( $A$ ) y rapidez de mezclado ( $D$ ). Los únicos efectos que no contribuyen significativamente a un nivel del 10% sobre la tasa de filtración son los efectos de interacción de concentración de los reactivos ( $C$ ) y rapidez de mezclado ( $D$ ), y el efecto de la triple interacción de temperatura ( $A$ ), concentración de los reactivos ( $C$ ) y rapidez de mezclado ( $D$ ).

**Pruebas de Diagnóstico.** Las pruebas de diagnóstico usuales deben aplicarse a los residuos de un diseño  $2^k$ . Nuestro análisis indica que los únicos efectos significativos son  $A = 21.63$ ,  $C = 9.88$ ,  $D = 14.63$ ,  $AC = -18.13$  y  $AD = 16.63$ . Si esto es verdadero, el índice de filtración estimada están dados por:

$$\hat{y} = 70.06 + \left(\frac{21.625}{2}\right)x_1 + \left(\frac{9.875}{2}\right)x_3 + \left(\frac{14.625}{2}\right)x_4 - \left(\frac{18.125}{2}\right)x_1x_3 + \left(\frac{16.625}{2}\right)x_1x_4$$

donde 70.06 es la respuesta promedio.

```
> mod3<-lm(y~A+C+D+A*C+A*D)
> anva3<-aov(mod3)
> summary(anva3)
```

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
A	1	1870.6	1870.6	95.86	1.93e-06	***
C	1	390.1	390.1	19.99	0.0012	**
D	1	855.6	855.6	43.85	5.92e-05	***
A:C	1	1314.1	1314.1	67.34	9.41e-06	***
A:D	1	1105.6	1105.6	56.66	2.00e-05	***
Residuals	10	195.1	19.5			

```
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(mod3)
hat values (leverages) are all = 0.375
and there are no factor predictors; no plot no. 5
```



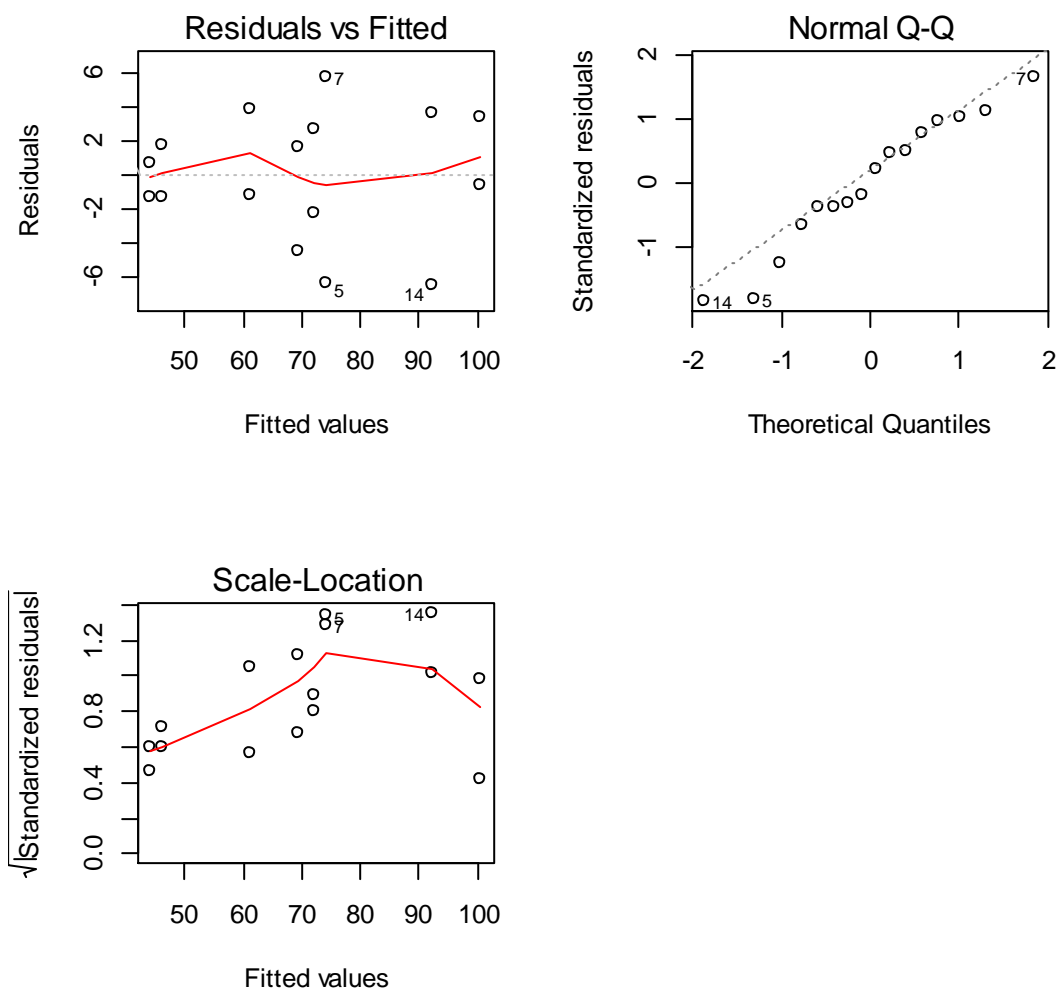


Fig. N° 10: Gráficos de los residuos y residuos estandarizados

```
> ri<-rstandard(mod3)
> shapiro.test(ri)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  ri
W = 0.9535, p-value = 0.5466
```

$H_0$ : Los errores se distribuyen normalmente

$H_1$ : Los errores no se distribuyen normalmente

### Conclusión:

```
> library(car)
> ncvTest(mod3)
Non-constant Variance Score Test
```

```
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 1.485943      Df = 1      p = 0.222847
```

$H_0$ : Los errores tienen variancia constante

$H_1$ : Los errores no tienen variancia constante

### Conclusión:

En la Fig. N° 10 aparece una gráfica de estos residuos y residuos estandarizados. Los puntos de esta gráfica se encuentran razonablemente cerca de una línea recta. Esto apoya nuestra conclusión de que  $A$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $AC$  y  $AD$  son los únicos efectos significativos, y que se satisfacen las suposiciones en las que se basa el análisis.

### Superficie de respuesta

La superficie de respuesta se genera a partir de la siguiente ecuación de regresión estimada:

$$\hat{y} = 70.06 + \left(\frac{21.625}{2}\right)x_1 + \left(\frac{9.875}{2}\right)x_3 + \left(\frac{14.625}{2}\right)x_4 - \left(\frac{18.125}{2}\right)x_1x_3 + \left(\frac{16.625}{2}\right)x_1x_4$$

Asumiendo que se desea trabajar a un nivel alto de velocidad de agitación ( $D$ ); esto es, cuando  $x_4 = 1$ , entonces se obtiene la siguiente ecuación de regresión estimada:

$$\hat{y} = 77.3725 + \left(\frac{38.25}{2}\right)x_1 + \left(\frac{9.875}{2}\right)x_3 - \left(\frac{18.125}{2}\right)x_1x_3$$

La figura N° 11 se presenta el gráfico de contorno de esta superficie

```
> Temperatura<-seq(-1,1,0.1)
> Concentración<-seq(-1,1,0.1)
> model<-function(x,y){77.3725+19.125*x+4.9375*y-9.0625*x*y}
> z<-outer(Temperatura,Concentración,model)
> contour(Temperatura,Concentración,z,nlevels=5,xlab="Temperatura",
ylab="Concentración")
```

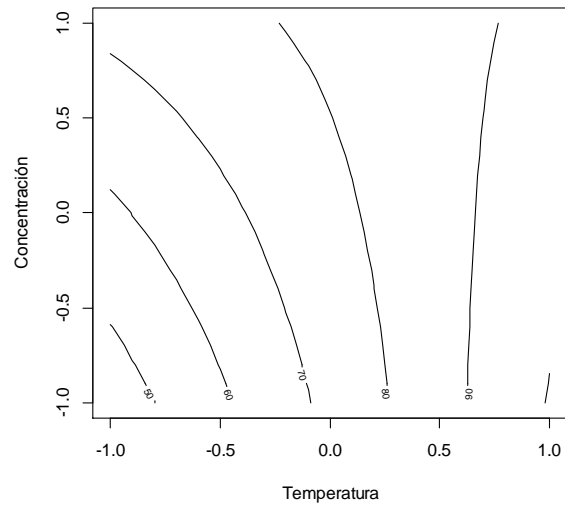


Fig. N° 11: Gráfico de contorno con la velocidad de agitación ( $D$ )  $x_4=1$ .

Asumiendo que la temperatura ( $A$ ) se encuentra al nivel alto ( $x_1=1$ ) se obtiene la siguiente ecuación de regresión estimada:

$$\hat{y} = 80.8725 - \left(\frac{8.25}{2}\right)x_3 + \left(\frac{31.25}{2}\right)x_4$$

```
> Velocidad<-seq(-1,1,0.1)
> model1<-function(x3,x4){80.8725-4.125*x3+15.625*x4}
> z1<-outer(Concentración,Velocidad,model1)
> contour(Concentración,Velocidad,z1,nlevels=8,xlab="Concentración",
ylab="Velocidad de Agitación")
```

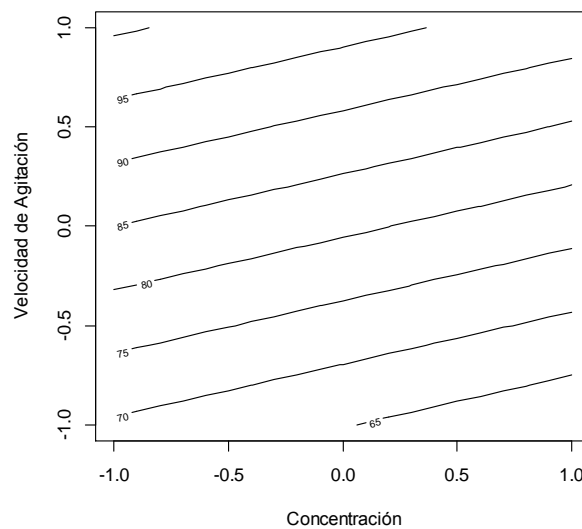


Fig. N° 12: Gráfica de contorno con la temperatura ( $A$ ),  $x_1=1$

Estos contornos son rectas paralelas porque el modelo solo contiene los efectos principales  $C(x_3)$  y  $D(x_4)$ .

Ambas gráficas de contorno indican si se quiere maximizar el índice de filtración, las variables  $A(x_1)$  y  $D(x_4)$  deberán estar en el nivel Alto y que el proceso es relativamente robusto para la concentración  $C$ . Se obtuvieron conclusiones similares a partir de las gráficas de las interacciones.

### La mitad de la gráfica normal de los efectos

Una alternativa para la gráfica de probabilidad normal de los efectos de los factores es la mitad de gráfica normal. Es una gráfica del valor absoluto de las estimaciones de los efectos contra sus probabilidades normales acumuladas. En la figura N° 13 se muestra la mitad de gráfica normal de los efectos para el ejemplo 6-2. La línea recta de la mitad de gráfica normal siempre pasa por el origen y deberá pasar también cerca del valor de los datos del percentil cincuenta. Muchos analistas sienten que es más fácil interpretar la mitad de gráfica normal, en particular si sólo se cuenta con pocas estimaciones de los efectos, como cuando el experimentador ha usado un diseño de ocho corridas. Algunos paquetes de software construirán ambas gráficas.

```
> aestimados<-abs(Estimados)
> Efectos<-names(Estimados)
> qq<-qqnorm(aestimados,type="n")
> text(qq$x, qq$y, labels = Efectos)
> aestimados1<-aestimados[-c(1,3,4,6,8)]
> qqline(aestimados1)
```

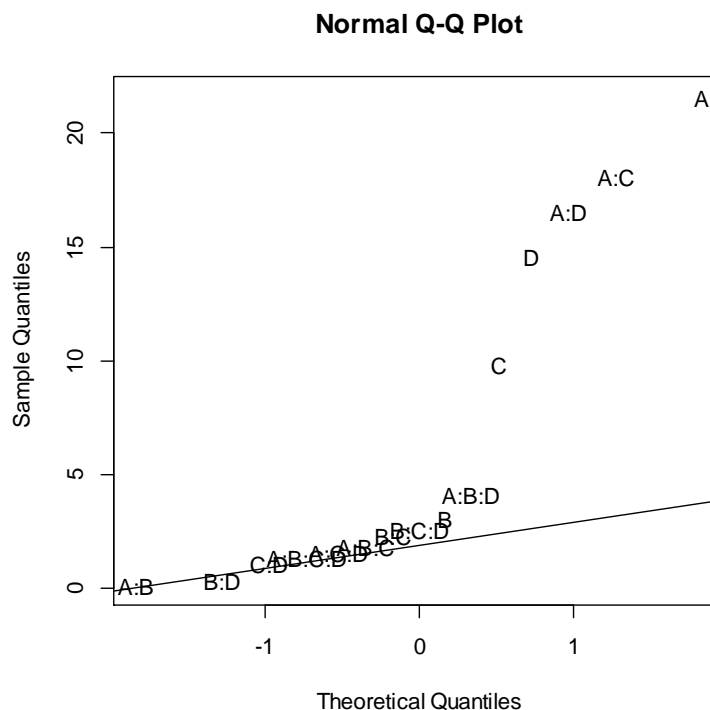


Fig. N° 13: Mitad de la gráfica de probabilidad normal de los efectos estimados del ejemplo 6-2

### Ejemplo 6.3

#### Transformación de Datos en un Diseño Factorial

Daniel (1976) describe un factorial  $2^4$  utilizado para estudiar la rapidez de avance de una barrena de perforación en función de cuatro factores: carga de la barrena ( $A$ ), gasto (velocidad de flujo) del lodo de perforación ( $B$ ), velocidad rotacional ( $C$ ) y tipo de lodo de perforación utilizado ( $D$ ). En la Fig. N° 14 se presentan los datos del experimento.

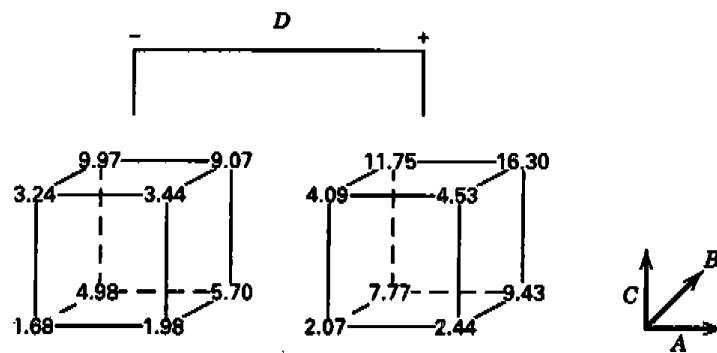


Fig. N° 14: Datos del experimento del ejemplo 6-3

En la Fig. N° 15 se muestra la gráfica de probabilidad normal de las estimaciones de los efectos para este experimento. Con base en esta gráfica, los factores  $B$ ,  $C$  y  $D$  junto con las interacciones  $BC$  y  $CD$  requieren interpretación.

```
> yt<-
c(1.68,1.98,4.98,5.7,3.24,3.44,9.97,9.07,2.07,2.44,7.77,9.43,4.09,4.53,11.75,16.3)
> A<-rep(c(-1,1),8)
> B<-rep(c(-1,-1,1,1),4)
> C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
> D<-c(rep(-1,8),rep(1,8))
> modt<-lm(yt~A*B*C*D)
> Estimados<-2*(coefficients(modt)[2:16])
> Efectos<-names(Estimados)
> data.frame(Estimados)
  efectos
A      0.9175
B      6.4375
C      3.2925
D      2.2900
A:B     0.5900
A:C     0.1550
B:C     1.5100
A:D     0.8375
B:D     1.5925
C:D     0.4475
A:B:C   0.1625
A:B:D   0.7600
```

```

A:C:D      0.5850
B:C:D      0.1750
A:B:C:D    0.5425
> qq<-qqnorm(Estimados,type="n")
> text(qq$x, qq$y, labels = Efectos)
> Estimados1<-Estimados[-c(2,3,4,7,9)]
> qqline(Estimados1)

```

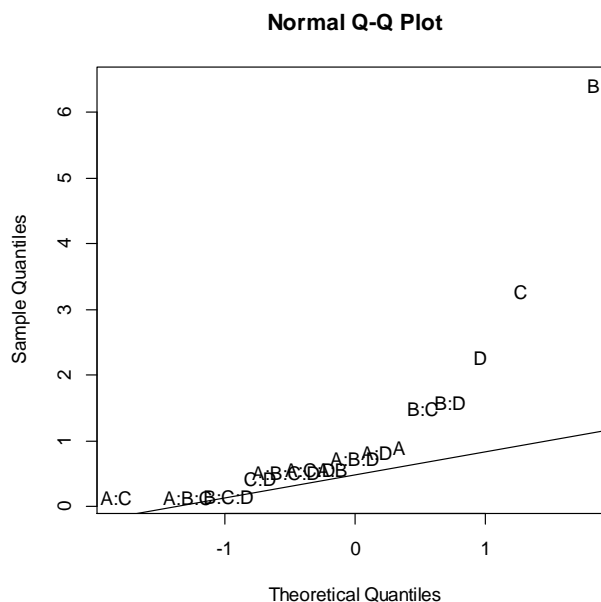


Fig. N° 15: Gráfica de probabilidad normal de los efectos estimados del ejemplo 6-3

La Fig. N° 16 se dan las gráficas de los residuos y residuos estandarizados, a partir del modelo que contiene solo los efectos que contribuye significativamente a la velocidad del avance. En el primer gráfico se muestra la gráfica de los residuos contra la velocidad de avance predicha a partir del modelo que incorpora los factores identificados en el segundo gráfico se muestra la gráfica de probabilidad normal los residuos estandarizados. Es claro que existen problemas en cuanto a la normalidad e igualdad de la variancia. A menudo se utiliza una transformación de datos para tratar estos problemas. Como la variable de respuesta es un cociente, la transformación logarítmica parece una alternativa razonable. (Pueden utilizarse los métodos descritos en el Cap. 4 para elegir una transformación adecuada, si así se desea.)

```

> modt1<-lm(yt~B+C+D+B*C+B*D)
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(modt1)
hat values (leverages) are all = 0.375
and there are no factor predictors; no plot no. 5

```

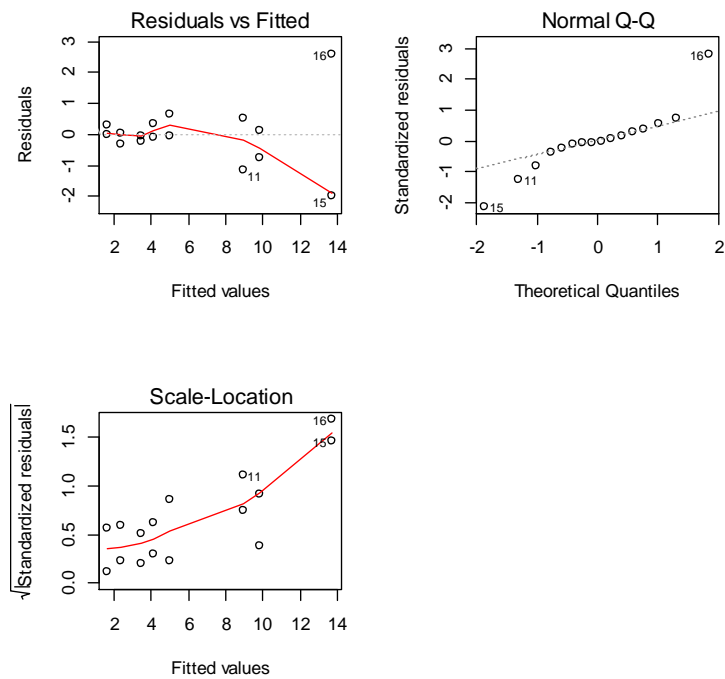


Fig. N° 16: Gráficos de los residuos y residuos estandarizados del ejemplo 6-3

```
> ri<-rstandard(modt1)
> shapiro.test(ri)
```

Shapiro-Wilk normality test

```
data: ri
W = 0.8812, p-value = 0.04049
```

```
> library(car)
> ncvTest(modt1)
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 20.00919    Df = 1    p = 7.707089e-06
```

$H_0$ : Los errores se distribuyen normalmente

$H_1$ : Los errores no se distribuyen normalmente

### Conclusión:

```
> library(MASS)
> boxcox(modt1)
```

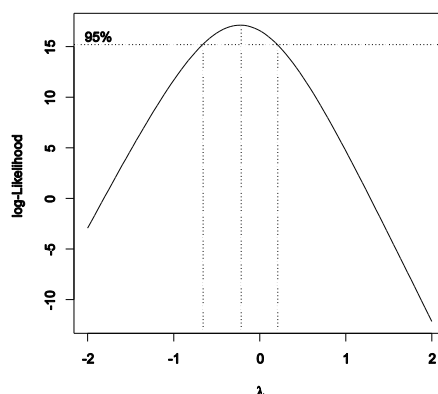


Fig. N° 17: Gráfico de los valores de Lambda de la transformación de Box y Cox

En la Fig. N° 17 se presenta la gráfica del log de la verosimilitud en función de los valores de lambda, como el valor de lambda=0 está muy cerca del valor que maximiza la función de verosimilitud, entonces se puede usar la transformación logarítmica. En la Fig. N° 18 se presenta una gráfica de probabilidad normal de las estimaciones de efectos después de la transformación  $y'' = \ln y$ . Obsérvese que ahora parece posible una interpretación mucho más simple, ya que sólo son activos los factores, *B*, *C* y *D*. Esto es, expresar los datos en la escala correcta ha simplificado su estructura hasta el punto en que ya no se requieren las dos interacciones en el modelo explicativo.

```
> yt1<-log(yt)
> modt2<-lm(yt1~A*B*C*D)
> Estimados2<-2*(coefficients(modt2)[2:16])
> data.frame(Estimados2)
      Estimados2
A      0.131524170
B      1.155985566
C      0.578547912
D      0.328076727
A:B     0.008817271
A:C    -0.032829505
B:C    -0.048670695
A:D     0.065366881
B:D     0.096607197
C:D    -0.013404824
A:B:C     0.008839838
A:B:D     0.054760578
A:C:D     0.050682873
B:C:D    -0.036046349
A:B:C:D    0.040149761

> Efectos2<-names(Estimados2)
> qq<-qqnorm(Estimados2,type="n")
> text(qq$x, qq$y, labels = Efectos2)
> Estimados3<-Estimados2[-c(2,3,4)]
> qqline(Estimados3)
```



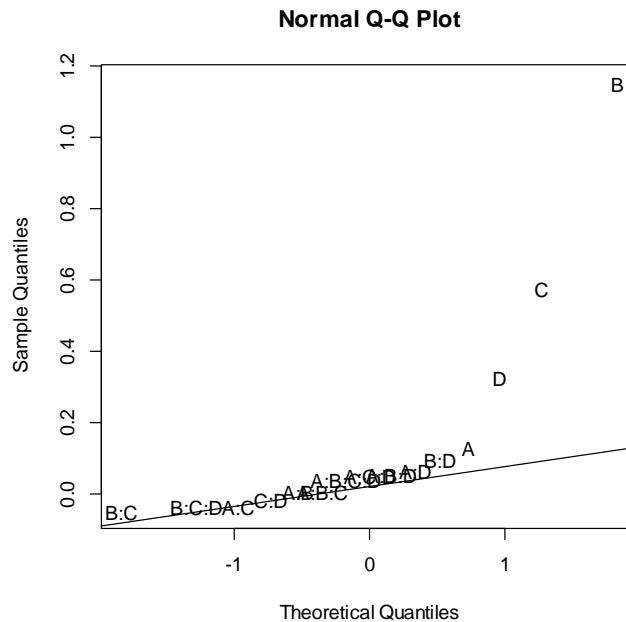


Fig. N° 18: Gráfica de probabilidad normal de los efectos estimados del ejemplo 6-3 después de la transformación logarítmica

En las Fig. N° 19 se presentan las gráficas de los residuos y residuos estandarizados. En la primera gráfica se presenta la una gráfica de los residuos contra la rapidez de avance predicha para el modelo en la escala logarítmica que incluye solo los factores *B*, *C* y *D*, en este gráfico se puede observar que los residuales se distribuye aleatoriamente conforme los valores de la rapidez de avance predicha aumenta, también el lowes de los residuos en función del avance de rapidez predicha es casi una recta horizontal. En la segunda gráfica se muestra la gráfica de probabilidad normal de los residuos estandarizados están muy cerca en torno a la recta en donde se encuentra los cuantiles distribución normal. En el tercer gráfico se observa que el lowes de la raíz cuadrada de los valores absolutos de los residuales estandarizados en función del avance de la rapidez predicha no tiene una tendencia sistemática decreciente fuerte. Ahora son satisfactorias estas gráficas. También al realizar las pruebas de hipótesis de Normalidad de errores y de variancia constantes se concluye que se puede aceptar que cumple con los supuestos de normalidad de errores y de homogeneidad de variancia. Se concluye que el modelo para  $y^* = \ln y$  y sólo requiere los factores *B*, *C* y *D* para obtener una interpretación adecuada. En la tabla N° 11 se resume el análisis de variancia para este modelo. La suma de cuadrados del modelo es

$$SS_{\text{Modelo}} = SS_B + SS_C + SS_D = 1.346 + 5.331 + 0.427 = 7.104$$

y  $R^2 = \frac{SS_{\text{Modelo}}}{SS_T} = 7.104 / 7.277 = 0.98$ , de modo que el modelo explica alrededor del 98% de la variabilidad en la rapidez de avance de la barrena.

```
> modt3<-lm(yt1~B+C+D)
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(modt3)
hat values (leverages) are all = 0.25
```

and there are no factor predictors; no plot no. 5

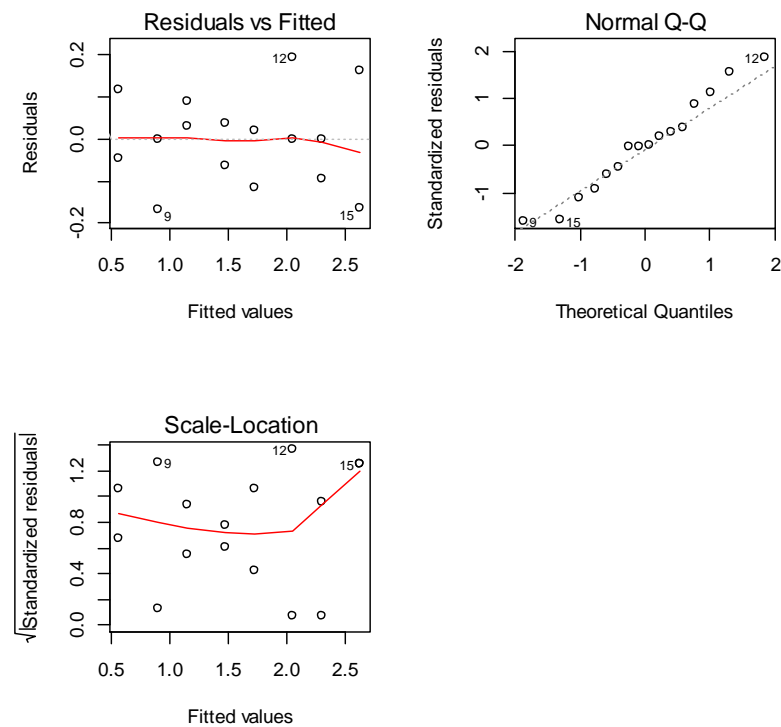


Fig. N° 19: Gráfica de los residuos y residuos estandarizados del ejemplo 6-3 obtenidos después de la transformación logarítmica

```
> ri3<-rstandard(modt3)
> shapiro.test(ri3)

Shapiro-Wilk normality test

data:  ri3
W = 0.9681, p-value = 0.8077

> library(car)
> ncvTest(modt3)
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 0.9463665    Df = 1    p = 0.3306459
```

$H_0$ : Los errores tienen variancia constante

$H_1$ : Los errores no tienen variancia constante

### Conclusión:

```
> summary(modt3)
```

```

Call:
lm(formula = yt1 ~ B + C + D)

Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-0.166184 -0.071606 -0.000029  0.051648  0.194177

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  1.59696    0.02999   53.253 1.26e-15 ***
B             0.57799    0.02999   19.274 2.15e-10 ***
C             0.28927    0.02999    9.646 5.28e-07 ***
D             0.16404    0.02999    5.470 0.000143 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 0.12 on 12 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9763,    Adjusted R-squared:  0.9704
F-statistic: 164.8 on 3 and 12 DF,  p-value: 5.135e-10

> anva3<-aov(modt3)
> summary(anva3)

```

Tabla N° 11: Análisis de variancia del ejemplo 6-3 después de la transformación logarítmica

	Df	Sum Sq	Mean Sq	F value	Pr(>F)	
B	1	5.345	5.345	371.49	2.15e-10	***
C	1	1.339	1.339	93.05	5.28e-07	***
D	1	0.431	0.431	29.92	0.000143	***
Residuals	12	0.173	0.014			

---  
Signif. codes: 0 '\*\*\*' 0.001 '\*\*' 0.01 '\*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

## Ejemplo 6.4

### Efectos de Localización y de Dispersión en un Diseño Factorial No Replicado

Se ejecutó un diseño  $2^4$  en un proceso de manufactura que produce paneles de pared lateral y de ventana para aviones comerciales. Los paneles se producen en una prensa, y en las condiciones actuales el número promedio de defectos por panel en una carga de prensa es demasiado elevado. (El promedio actual del proceso es de 5.5 defectos por tablero.) Se investigan cuatro factores empleando una sola réplica de un diseño  $2^4$ , donde cada réplica corresponde a una sola carga de prensa. Los factores son temperatura (*A*), tiempo de prensado (*B*), flujo de resina (*C*) y tiempo de cierre de la prensa (*D*). Los datos de este experimento se presentan en la Fig. N° 20.

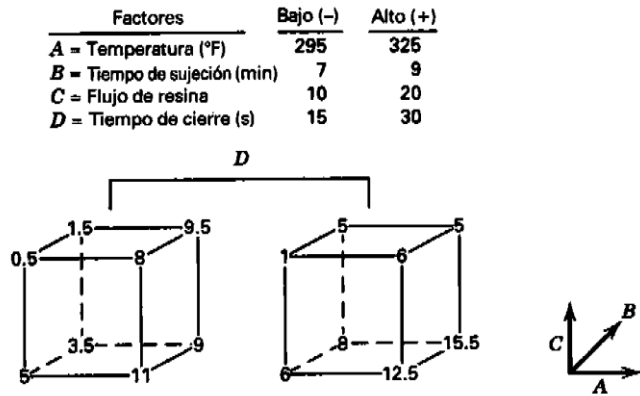


Fig. N° 20: Los datos del experimento del proceso de los paneles del ejemplo 6-4

La Fig. N° 21 es una gráfica de probabilidad normal de los efectos estimados de los factores e interacciones. Es evidente que los dos mayores efectos son A = 5.75 y C = -4.25. Al parecer ningún otro factor tiene efectos importantes, y A y C explican alrededor del 77% de la variabilidad total, de modo que se concluye que la menor temperatura (A) y el mayor flujo de resina (C) reducirían la incidencia de defectos en los paneles.

```
> y<-c(5,11,3.5,9,0.5,8,1.5,9.5,6,12.5,8,15.5,1,6,5,5)
> A<-rep(c(-1,1),8)
> B<-rep(c(-1,-1,1,1),4)
> C<-rep(c(rep(-1,4),rep(1,4)),2)
> D<-c(rep(-1,8),rep(1,8))
> mod4<-lm(y~A*B*C*D)
> Estimados<-2*(coefficients(mod4)[2:16])
> data.frame(Estimados)
      Estimados
A           5.750
B           0.875
C          -4.250
D           1.375
A:B         -0.500
A:C         -0.625
B:C          0.500
A:D         -1.000
B:D          1.125
C:D         -2.000
A:B:C       -0.625
A:B:D       -0.500
A:C:D       -1.625
B:C:D       -1.000
A:B:C:D     -0.875
> qq<-qqnorm(Estimados,type="n")
> Efectos<-names(Estimados)
> text(qq$x, qq$y, labels = Efectos)
> Estimados1<-Estimados[-c(1,3)]
> qqline(Estimados1)
```

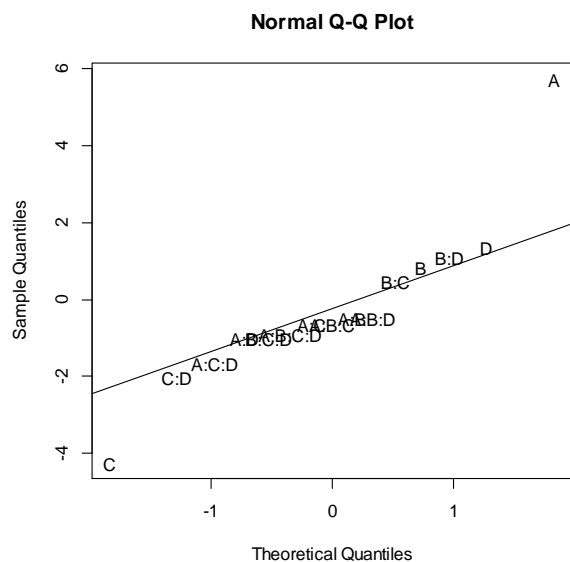


Fig. N° 21: Gráfica de probabilidad normal de los efectos estimados de los factores e interacciones para el experimento del proceso de los paneles del ejemplo 6-4

```
> mod5<-lm(y~A+C)
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(mod5)
hat values (leverages) are all = 0.1875
and there are no factor predictors; no plot no. 5
```

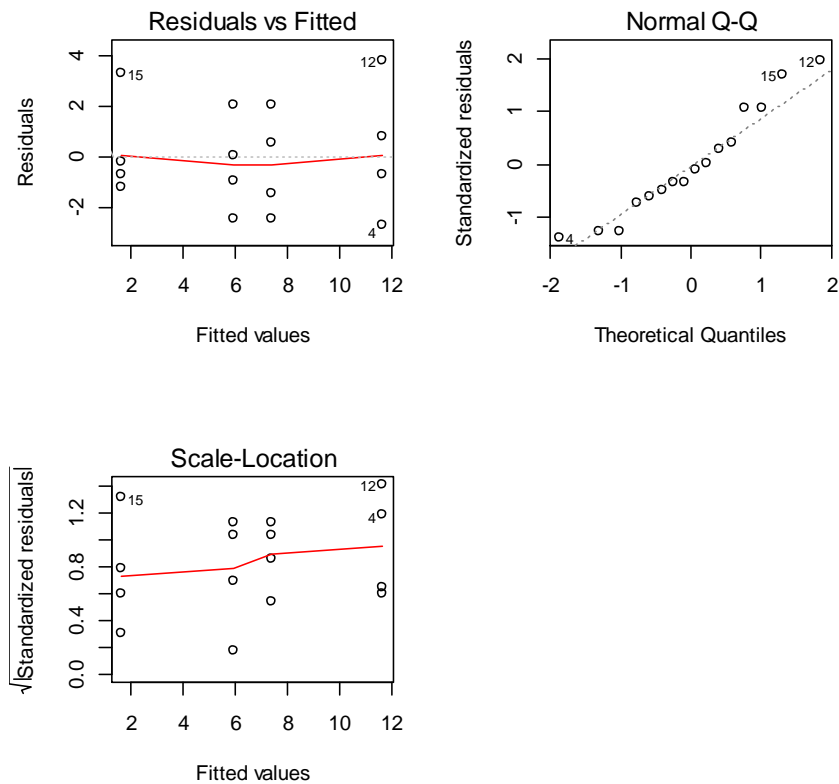


Fig. N° 22: Gráfico de residuos y residuos estandarizados del ejemplo 6-4

```
> ri5<-rstandard(mod5)
> shapiro.test(ri5)

      Shapiro-Wilk normality test

data:  ri5
W = 0.9428, p-value = 0.3847

> library(car)
> ncvTest(mod5)
Non-constant Variance Score Test
Variance formula: ~ fitted.values
Chisquare = 0.4630866    Df = 1    p = 0.496185

> ei<-residuals(mod5)
> par(mfrow=c(2,2))
> plot(A,ei)
> abline(h=0,lty=2)
> plot(B,ei)
> abline(h=0,lty=2)
> plot(C,ei)
> abline(h=0,lty=2)
> plot(D,ei)
> abline(h=0,lty=2)
```

Un cuidadoso análisis de residuos es parte importante de cualquier experimento. En este caso una gráfica de probabilidad normal de los residuos no reveló anomalías, pero cuando el experimentador graficó, los residuos contra cada uno de los factores *A* a *D*, las que se muestra en la Fig. N° 23. La grafica de los residuales contra el tiempo de sujeción (*B*), el cual carece de importancia en lo que respecta al número promedio de defectos por panel, es muy importante en su efecto sobre la variabilidad del proceso, ya que un menor tiempo de prensado reduce la variabilidad en el número promedio de defectos por panel en una carga de prensa.

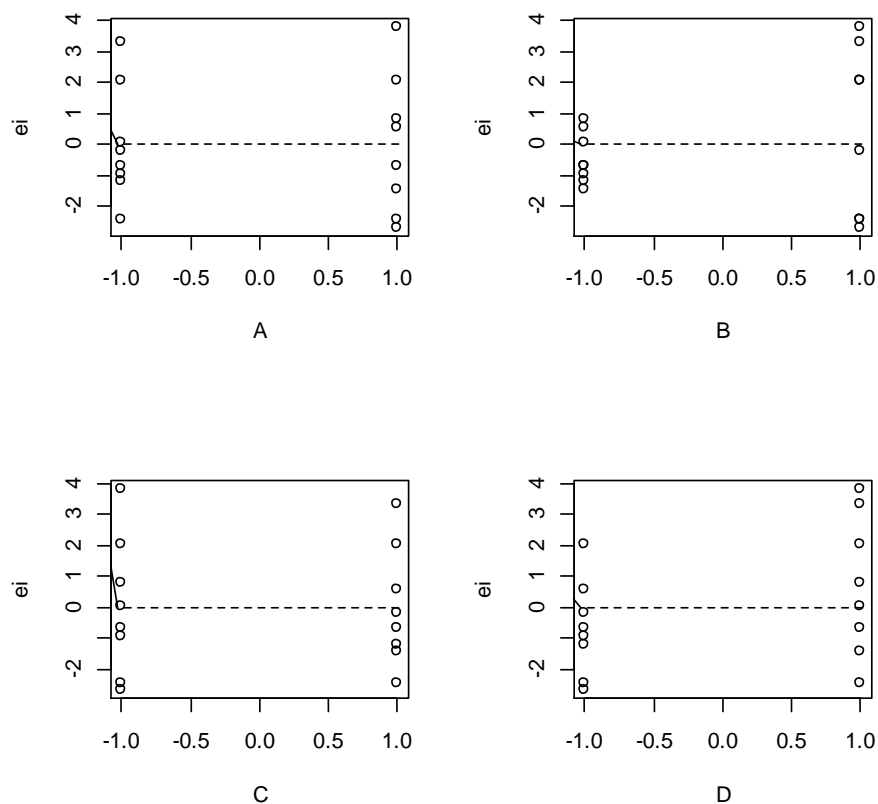


Fig. N° 23: Gráfica de los residuales contra los niveles de cada uno de los factores *A* a *D* del ejemplo

6-4

```
> summary(aov(mod5))
      Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
A         1  132.25   132.25   28.93 0.000126 ***
C         1   72.25    72.25   15.80 0.001584 **
Residuals 13   59.44     4.57
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

El efecto de dispersión del tiempo de prensado también es muy evidente en el *diagrama de cubo* de la Fig. N° 24, donde se grafica el número promedio de defectos por panel y el intervalo del número de defectos en cada punto del cubo definido por los factores A, B y C. El intervalo promedio cuando B está en el nivel alto (la cara posterior del cubo de la Fig. N° 24) es  $R_B^+ = 4.75$ , y cuando está en el nivel bajo es  $R_B^- = 1.25$ .

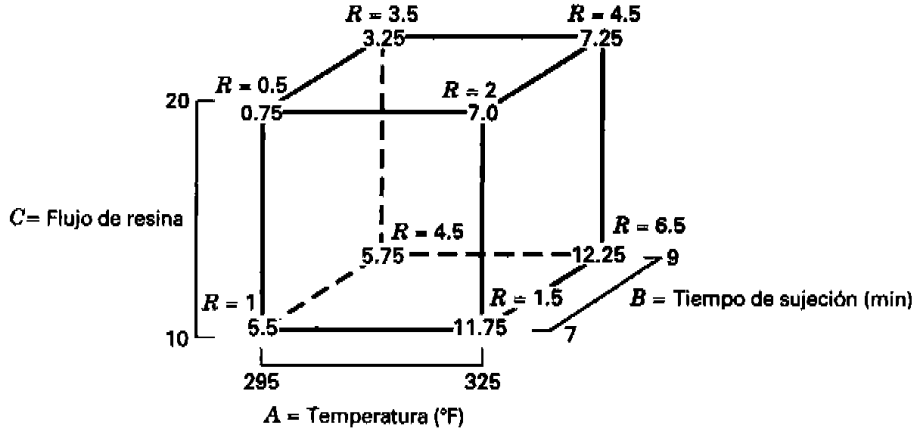


Fig. N° 24: Gráfica de cubo de temperatura, el tiempo de sujeción y el flujo de resina para el ejemplo 6-4.

Como resultado de este experimento, el ingeniero decidió correr el proceso a baja temperatura y alto flujo de resina con objeto de reducir el número promedio de defectos, con bajo tiempo de prensado para reducir la variabilidad en el número de defectos por panel, y con bajo tiempo de cierre de la prensa (que no tuvo efecto en la localización o la dispersión). El nuevo conjunto de condiciones de operación dio por resultado un nuevo promedio del proceso de menos de un defecto por panel.

Los residuos de un diseño  $2^k$  proporcionan mucha información acerca del problema en estudio. Dado que los residuos pueden considerarse valores observados del ruido o error, a menudo dan indicios sobre la variabilidad del proceso. Es posible examinar sistemáticamente los residuos de un experimento  $2^k$  no replicado para obtener información acerca de la variabilidad del proceso.

Considérese la gráfica de residuos de la Fig. N° 23 contra los niveles del factor B. La desviación estándar de los ocho residuos cuando B está en el nivel bajo es  $S(B^-) = 0.83$ . La desviación estándar de los ocho residuos para los que B está en el nivel alto es  $S(B^+) = 2.72$ . Luego, se puede plantear la siguiente hipótesis  $H_0: \sigma^2(B^+) = \sigma^2(B^-)$  versus  $H_1: \sigma^2(B^+) \neq \sigma^2(B^-)$ . Luego, la estadística

$$F_B^* = \ln \frac{S^2(B^+)}{S^2(B^-)}$$

tiene distribución aproximada normal estándar si las dos variancias  $\sigma^2(B^+)$  y  $\sigma^2(B^-)$  son iguales (si  $H_0$  es verdadera). El valor de  $F$ ; es



$$\begin{aligned}
 F_B^* &= \ln \frac{S^2(B^+)}{S^2(B^-)} \\
 &= \ln \frac{(2.72)^2}{(0.83)^2} \\
 &= 2.37
 \end{aligned}$$

```

> resB<-data.frame(ei,B)
> resB
      ei  B
1 -0.9375 -1
2 -0.6875 -1
3 -2.4375  1
4 -2.6875  1
5 -1.1875 -1
6  0.5625 -1
7 -0.1875  1
8  2.0625  1
9  0.0625 -1
10 0.8125 -1
11 2.0625  1
12 3.8125  1
13 -0.6875 -1
14 -1.4375 -1
15 3.3125  1
16 -2.4375  1
> resbneg<-resB[resB$B== -1,]
> resbneg
      ei  B
1 -0.9375 -1
2 -0.6875 -1
5 -1.1875 -1
6  0.5625 -1
9  0.0625 -1
10 0.8125 -1
13 -0.6875 -1
14 -1.4375 -1
> resbpos<-resB[resB$B==1,]
> resbpos
      ei  B
3 -2.4375  1
4 -2.6875  1
7 -0.1875  1
8  2.0625  1
11 2.0625  1
12 3.8125  1
15 3.3125  1
16 -2.4375  1
> F<-log(var(resbpos[,1])/var(resbneg[,1]))
> F
[1] 2.385861
> pvalue<-2*(1-pnorm(F))
> pvalue
[1] 0.01703917

```

>

lo cual excede el punto superior de 5 % de la distribución normal estándar ( $Z_{0.975} = 1.96$  de la Tabla de valores de T).

En la Tabla N° 12 se presenta el conjunto completo de contrastes para el diseño  $2^4$  junto con los residuos para cada corrida del experimento de los paneles del Ejemplo 6-4. Cada columna de esta tabla contiene la misma cantidad de signos más y menos, y es posible calcular la desviación estándar de los residuos para cada grupo de signos en cada columna, digamos  $S(i^+)$  y  $S(i^-)$ , donde  $i = 1, 2, \dots, 15$ . De este modo

$$F_i^* = \ln \frac{S^2(i^+)}{S^2(i^-)} \quad i = 1, 2, \dots, 15$$

es una estadística que puede utilizarse para evaluar la magnitud de los *efectos de dispersión* en el experimento. Si la variancia de los residuos para las corridas en que el factor  $i$  es positivo es igual a la variancia de los residuos para las corridas en que el factor  $i$  es negativo, entonces  $F_i^*$  tiene distribución normal estándar aproximada. Los valores de  $F_i^*$  se presentan bajo cada columna en la Tabla N° 12.

Tabla N° 12: Cálculos de los valores de la estadística  $F^*$

Corrida	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD	Residual
1	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+	-0.94
2	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-	-0.69
3	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	-2.44
4	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	-2.69
5	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-1.19
6	+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	0.56
7	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	-0.19
8	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-	2.06
9	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-	0.06
10	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	0.81
11	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	2.06
12	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	3.81
13	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-0.69
14	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	-1.44
15	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	3.31
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-2.44
$S(i^+)$	2.25	2.72	2.21	1.91	1.81	1.80	1.80	2.24	2.05	2.28	1.97	1.93	1.52	2.09	1.61	
$S(i^-)$	1.85	0.83	1.86	2.20	2.24	2.26	2.24	1.55	1.93	1.61	2.11	1.58	2.16	1.89	2.33	
$F_i^*$	0.39	2.37	0.34	-0.28	-0.43	-0.46	-0.44	0.74	0.12	0.70	-0.14	0.40	-0.70	0.28	-0.74	

En la Fig. 6-25 sería graficar  $F_i^*$  en papel de probabilidad normal, evidentemente  $B$  es un efecto importante en lo que se refiere al efecto de dispersión del proceso. En Box y Meyer (1986) se analiza con mayor detalle este procedimiento.

```
> Fa<-c(0.39,2.37,0.34,-0.28,-0.43,-0.46,-0.44,0.74,0.12,0.7,-0.14,0.4,-
0.7,0.28,-0.74)
> Efectos<-
c("A","B","A:B","C","A:C","B:C","A:B:C","D","A:D","B:D","A:B:D","C:D","A:
C:D","B:C:D","A:B:C:D")
> qq<-qqnorm(Fa,type="n")
> text(qq$x, qq$y, labels = Efectos)
> Fa1<-Fa[-2]
> qqline(Fa1)
```

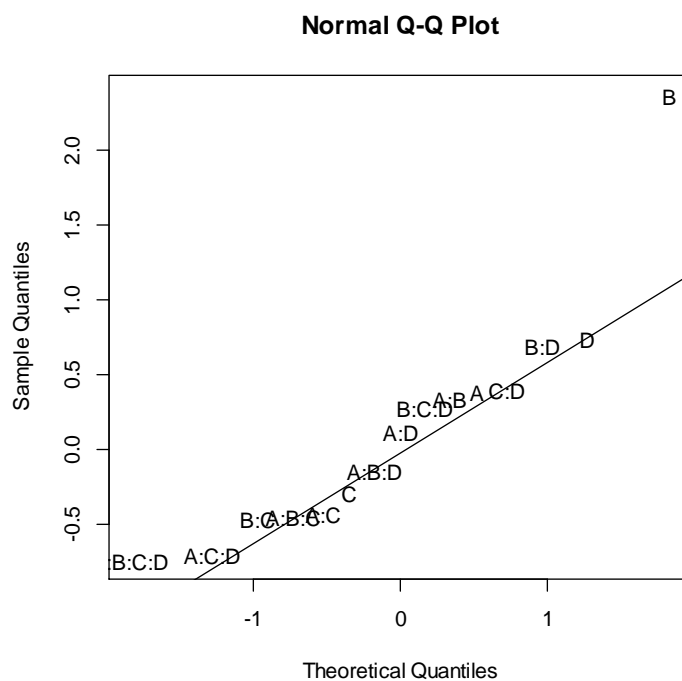


Fig. N° 25: gráfico de probabilidad normal de las estadísticas  $F^*$