UNIVERSIDAD NACIONAL AGRARIA LA MOLINA

ESCUELA DE POSGRADO

MAESTRÍA EN ESTADÍSTICA APLICADA

2019-1 : CURSO ESTADÍSTICA ACTUARIAL

TRABAJO FINAL "MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN PARA EDADES FRACCIONALES"

Presentado por

Jaime Gómez Marín

Roberto León Leiva

Arturo Zuñiga Blanco

Docente

Msc. Jesús Eduardo GAMBOA UNSIHUAY

3 de julio de 2019

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Los eventos que desencadenan las activaciones de los seguros o de las decisiones repecto a las políticas de los mismos tienen como variables fundamentales la edad y el tiempo de vida restantes, ambas son de naturaleza aleatoria y conforme las tablas de vida que son reguladas por ley y por organismos gubernamentales, para el caso del Perú es la Superintendencia de Banca y Seguros, SBS, los datos están registrados en forma discreta, en valores enteros para ser precisos.

Lo anterior plantea un problema entre las tablas de naturaleza discreta y la variable aleatoria que es de naturaleza continua, el estudio de este problema se conoce en estadística acturial como Edad Fraccional o en inglés Fractional Age Asumptions (FAA) y lo que plantea son formas de salvar este problema que pudiera entenderse como supuestos para interpolar datos y sus implicancias en la determinación de las probabilidades y posteriormente con los ajustes de las fórmulas para las anualidades y seguros.

En el presente trabajo nos centraremos en revisar los supuestos de la Edad Fracional y en la determinación de las probabilidades y revisaremos los tres principales supuestos distribución uniforme de muertes (UDD), fuerza de mortalidad constante y el supuesto de Balducci.

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Supuestos de las Edades Fraccionarias

Las tablas de vida generalmente muestra el número de personas vivas a edades exactas. Si necesitamos información de las tablas de vida sobre una fracción de un año, debemos hacer suposiciones con respecto a la tabla. Existen 3 supuestos:

- Primer supuesto : Distribución Uniforme de Muertes (UDD)
- Segundo supuesto : Fuerza de Mortalidad constante
- Tercer supuesto : Supuesto Balducci

2.1.1. Distribución Uniforme de Muertes (UDD)

Primer supuesto : ***Distribución Uniforme de las muertes.*** [2] Asume que la distribución de supervivencia es lineal entre cada par de años enteros, su abreviación es UDD (Uniform distribution of deaths). Puede ser visto como una regresión lineal.

Asumiendo UDD , tomamos un variable t que tiene valores definidos entre 0 y 1, es decir $0 \leq t < 1$, entonces representamos el valor de l_{x+t} como:

$$l_{x+t} = l_x - m * t \tag{2.1.1.1}$$

Donde m es la pendiente de la regresión lineal. Para calcular m usamos el supuesto de UDD, entonces en la ecuación 2.1.1.1 para $t = 1$ tenemos:

$$l_{x+1} = l_x - m => m = l_x - l_{x+1}$$

aplicandolo a la ecuación 2.1.1.1 tendriamos

$$l_{x+t} = l_x - t(l_x - l_{x+1})$$

$$l_{x+t} = (1-t)l_x + t * l_{x+1} \qquad (2.1.1.2)$$

si dividimos todo entre l_0

$$\frac{l_{x+t}}{l_0} = (1-t)\frac{l_x}{l_0} + t * \frac{l_{x+1}}{l_0}$$

recordando que

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0}$$

$$S(x+t) = \frac{l_{x+t}}{l_0}$$

$$S(x+t) = (1-t)S(x) + t * S(x+1) \qquad (2.1.1.3)$$

2.1.2. Fuerza de Mortalidad constante

Partamos de la definición de fuerza de mortalidad: [1] "*En estadística actuarial representa la tasa de mortalidad instantanea a una cierta edad dentro una base anualizada*"

$$u_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x | X > x)}{\Delta x} \qquad (2.1.2.4)$$

recordando que:

$$P(x < X < x + \Delta x | X > x) = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{1 - F(x)} \qquad (2.1.2.5)$$

reemplazando:

$$u_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x * (1 - F(x))}$$

$$u_x = \frac{1}{(1 - F(x))} * \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$u_x = \frac{1}{(1 - F(x))} * F'(x)$$

$$u_x = \frac{F'(x)}{1 - F(x)} \tag{2.1.2.6}$$

se sabe que:

$$1 - F(x) = S(x)$$

$$F'(x) = -S'(x)$$

reemplazando:

$$u_x = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} ln(S(x)) \tag{2.1.2.7}$$

Procedemos a integrar entre $x_0 < X < x_0 + t$:

$$\int_{x_0}^{x_0+t} u_x dx = ln(S(x_0)) - ln(S(x_0 + t)) \tag{2.1.2.8}$$

Segundo supuesto : *Fuerza de Mortalidad Constante.* El supuesto consiste en que la fuerza de mortalidad μ se mantiene constante entre dos edades exactas; es decir para una edad exacta x_o, se tiene una variable X dentro de un rango de $x_0 \leq X < x_0 + t$ donde la fuerza de mortalidad no cambia. Lo anterior significa que la fuerza de mortalidad μ_{x_0} no depende del valor de t siempre y cuando t este entre los rangos de $0 < t < 1$. A esta Fuerza de Mortalidad constante la vamos a denominar μ_x^*.

En la ecuación 2.1.2.8 aplicamos el segundo supuesto

$$\int_{x_0}^{x_0+1} \mu_x^* dx = ln(S(x_0)) - ln(S(x_0 + 1))$$

$$\mu_x^*(x_0 + 1 - x_0) = ln(S(x_0)) - ln(S(x_0 + 1))$$

$$\mu_x^* = ln(S(x_0)) - ln(S(x_0+1)) \tag{2.1.2.9}$$

En la ecuación 2.1.2.8 aplicamos el segundo supuesto para un periodo de tiempo t

$$\int_{x_0}^{x_0+t} \mu_x^* dx = ln(S(x_0)) - ln(S(x_0+t))$$

$$\mu_x^* t = ln(S(x_0)) - ln(S(x_0+t))$$

$$ln(S(x_0+t)) = ln(S(x_0)) - \mu_x^* t$$

$$ln(S(x_0+t)) = ln(S(x_0)) - (ln(S(x_0)) - ln(S(x_0+1)))t$$

$$ln(S(x_0+t)) = (1-t)ln(S(x_0)) + t * ln(S(x_0+1)) \tag{2.1.2.10}$$

2.1.3. Supuesto Balducci

En este supuesto se asume que la recíproca de la función de supervivencia es lineal entre dos edades enteras contiguas, tenemos así:

$$S(x+t)^{-1} = (1-t)S(x)^{-1} + t * S(x+1)^{-1} \tag{2.1.3.11}$$

en notación actuarial tendremos:

$${}_tp_q = p_x/(1-(1-t)q_x) \tag{2.1.3.12}$$

y para la fuerza de mortalidad

$$\mu_{x+t} = q_x/(1-(1-t)q_x) \tag{2.1.3.13}$$

2.2. Resumen de Fórmulas

En la siguiente tabla se puede apreciar el resumen de los supuestos de edades fraccionarias:

Función	Distribución Uniforme	Fuerza Constante	Hiperbólica
${}_tq_x$	tq_x	$1 - p_x^t$	$\frac{tq_x}{1-(1-t)q_x}$
$\mu(x+t)$	$\frac{q_x}{1-tq_x}$	$log(p_x)$	$\frac{q_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_{1-t}q_{x+t}$	$\frac{(1-t)q_x}{1-tq_x}$	$1 - p_x^{1-t}$	$(1-t)q_x$
${}_yq_{x+t}$	$\frac{yq_x}{1-tq_x}$	$1 - p_x^y$	$\frac{yq_x}{1-(1-y-t)q_x}$
${}_tq_x$	$1 - tq_x$	p_x^t	$\frac{p_x}{1-(1-t)q_x}$
${}_tq_x\mu(x+t)$	q_x	$-p_x^t log(p_x)$	$\frac{q_x p_x}{[1-(1-t)q_x]^2}$

Capítulo 3

Aplicación

Preparación del entorno de trabajo. Se realizan las siguientes tareas:

- El paquete lifecontingencies
- La tabla de vida de la SBS

```
> # Preparamos entorno para trabajar
> #-------------------------------------------------------
>
> # Cargamos biblioteca de funciones para Tablas de vida
>
> options(scipen=999) # para evitar la notación científica
> library(lifecontingencies)
> TablaSBS = read.table("TMSPP2017.txt",T)
> # Revisamos data cargada
> head(TablaSBS)

  x  SPPS2017H  SPPS2017M  SPPI2017H  SPPI2017M  AaxH  AaxM
1 0 0.00839770 0.00610297 0.02943100 0.02098114 0.036 0.042
2 1 0.00158542 0.00103173 0.00615344 0.00392810 0.036 0.042
3 2 0.00129897 0.00082895 0.00507403 0.00317632 0.036 0.042
4 3 0.00104859 0.00065435 0.00412794 0.00252685 0.036 0.042
5 4 0.00083367 0.00050689 0.00331398 0.00197655 0.036 0.042
6 5 0.00068023 0.00040828 0.00282181 0.00168331 0.027 0.029

>
```

3.1. Ejemplo 1

Enunciado. Calcule la probabilidad de que, en el año 2019, un hombre sano de 33 años fallezca pasado 6 meses de su cumpleaños.

```
> # Plateamiento nos piden 0.5q33 para la tabla de vida del 2018
> t <- 0.5
> x <- 33
> # Creamos una tabla de vida para HS2018
>
>
> HS2019  = probs2lifetable(probs = TablaSBS$SPPS2017H * (1 - TablaSBS$AaxH)^(2)
+                           radix = 10^6,
+                           type = "qx",
+                           name = "HS2019")
> # por defecto la función qxt asume fractional = lineal
> qxt_r <- numeric(3)
> qxt_calculado <- numeric(3)
> qxt_metodos <- c("UDD", "fuerza constante", "hiperbólica")
> # Valores de las funciones de R del paquete LifeContingencies
> qxt_r[1] <- qxt(HS2019, x=x, t=t)
> qxt_r[2] <- qxt(HS2019, x=x, t=t, fractional = "constant force")
> qxt_r[3] <- qxt(HS2019, x=x, t=t, fractional = "hyperbolic")
> # Probemos con las fórmulas fraccionales
> #---------------------------------------------------
>
> # UDD
> qxt_calculado[1] <- t * qxt(HS2019, x=x, t=1)
> # Fuerza constante
> qxt_calculado[2] <- 1 - pxt(HS2019, x=x, t=1)^(t)
> #Hiperbólica
> qxt_calculado[3] <- t * qxt(HS2019, x=x, t=1) / (1 - (1-t)* qxt(HS2019, x=x, t
> df_resultados <- data.frame(calculado = qxt_calculado,
+                             r = qxt_r,
+                             var_porc = (qxt_calculado / qxt_r - 1) * 100)
> row.names(df_resultados) <- qxt_metodos
> df_resultados
```

```
                   calculado            r              var_porc
UDD                0.0004920478 0.0004920478 -0.00000000011279866
fuerza constante 0.0004921690 0.0004921690  0.00000000000000000
hiperbólica        0.0004922901 0.0004922901  0.00000000004063416

>
```

Conclusión La probabilidad de que un hombre de 33 años fallezca a los 6 meses de su cumpleaños es de 0.00049

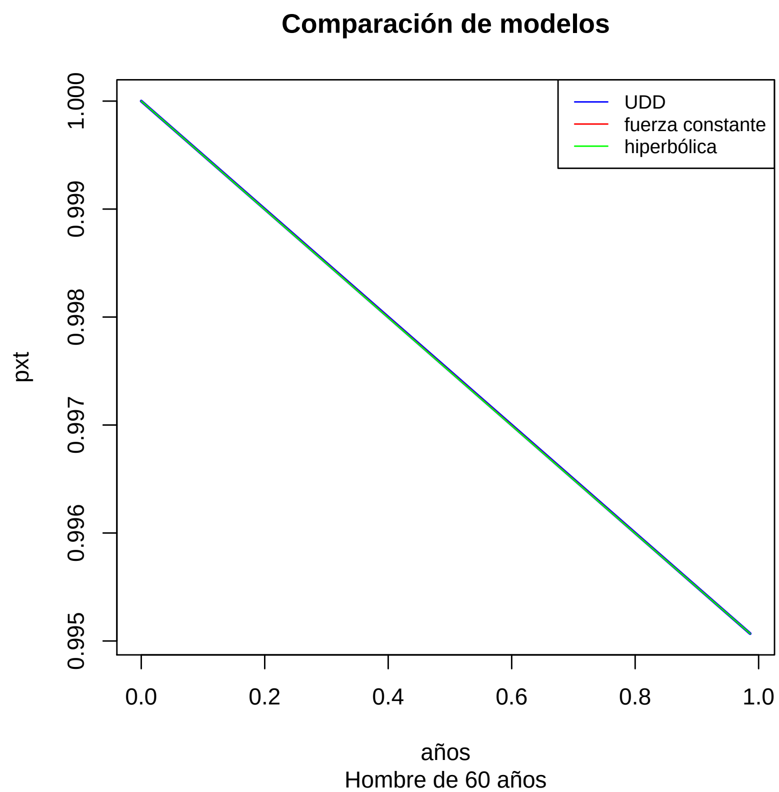
Se aprecia que no existe diferencia significativa entre los 3 métodos calcudos y tampoco con los que calcule el R utilizando el paquete lifecontingecies

3.2. Ejemplo 2

Analice las diferencias entre las probabilidades de que un hombre se mantenga vivo con los los métodos calculados para un hombre sano de 60 años haciendo intervalos mensuales.

```
> # En este caso prepararemos un dataframe con 12 elementos
>
> x <- 60
> t_semanal <- seq(from=0, to= 365, by = 30) / 365
> udd_sem <- 1 - t_semanal * qxt(HS2019, x=x, t=1)
> fuerza_constante_sem <- pxt(HS2019, x=x, t=1)^t_semanal
> hiperbolica_sem <-  pxt(HS2019, x=x, t=1) / (1 - (1-t_semanal)*qxt(HS2019, x=x
> df_semanal <- data.frame(udd_sem, fuerza_constante_sem, hiperbolica_sem)
> summary(df_semanal)

    udd_sem       fuerza_constante_sem hiperbolica_sem
 Min.   :0.9951   Min.   :0.9951       Min.   :0.9951
 1st Qu.:0.9963   1st Qu.:0.9963       1st Qu.:0.9963
 Median :0.9975   Median :0.9975       Median :0.9975
 Mean   :0.9975   Mean   :0.9975       Mean   :0.9975
 3rd Qu.:0.9988   3rd Qu.:0.9988       3rd Qu.:0.9988
 Max.   :1.0000   Max.   :1.0000       Max.   :1.0000

> plot(t_semanal,
+      df_semanal$udd_sem,
```

```
+       type="l",
+       col="blue",
+       lwd=2,
+       x_lim = c(0.995, 1),
+       main="Comparación de modelos",
+       sub = "Hombre de 60 años",
+       xlab="años",
+       ylab = "pxt")
> lines(t_semanal,
+        df_semanal$fuerza_constante_sem,
+        col = "red")
> lines(t_semanal,
+        df_semanal$hiperbolica_sem,
+        col = "green")
> legend("topright", legend=qxt_metodos,
+          col=c("blue", "red", "green"), lty=1,cex=0.8)
> df_semanal

     udd_sem fuerza_constante_sem hiperbolica_sem
1  1.0000000            1.0000000       1.0000000
2  0.9995890            0.9995881       0.9995871
3  0.9991781            0.9991764       0.9991746
4  0.9987671            0.9987648       0.9987624
5  0.9983561            0.9983534       0.9983506
6  0.9979452            0.9979421       0.9979391
7  0.9975342            0.9975311       0.9975280
8  0.9971233            0.9971202       0.9971171
9  0.9967123            0.9967095       0.9967067
10 0.9963013            0.9962989       0.9962965
11 0.9958904            0.9958885       0.9958867
12 0.9954794            0.9954783       0.9954772
13 0.9950684            0.9950683       0.9950681

>
```



Comparación de modelos
UDD
fuerza constante
hiperbólica
pxt
1.000
0.999
0.998
0.997
0.996
0.995
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
años
Hombre de 60 años

Capítulo 4

Conclusiones

- Los métodos de edad fraccionaria convergen en sus interpolaciones. La gráfica de comparación de modelos en el tiempo de 1 año para secuencias mensuales en el cálculo del pxt para un hombre de 60 años practicamente se superponían.
- El paquete lifecontingencies incorpora los tres métodos estudiados.
- El esquema de edades fraccionales también se pueden incorporar a los seguros y anualidades.
- Se pueden aplicar más métodos de interpolación, sin embargo, y dado la convergencia en el tiempo de 1 año hace que la utilidad del mismo sea reducida.

Bibliografía

[1] "David C.M. Dickson. Mary R. Hardy y Howards R. Waters ". .^{A}*ctuarial Mathematics for Life Contingent - Second Edition"*. Çambridge University Press", "2013", "21".

[2] "S. David Promislow". *"Fundamentals of Actuarial Mathematics - Third Edition"*. "John Wiley Sons, Ltd", "2015", "102".