FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). 1^a sem. Feb. 2011
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Considere el conjunto M de las funciones continuas de variable real definidas en todo el dominio $\mathbb{R}$. $M = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f$ continua en todo $x \in \mathbb{R}\}$. Dados dos elementos cualesquiera $f, g \in M$ la operación producto $\cdot$ se define como

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

Considere los elementos $f_1(x) = 2 + \operatorname{sen} x$, $f_2(x) = x$, $f_3(x) = x^2 - x + 8$, $f_4(x) = \cos x$. Señale el número de ellos que tienen inverso con respecto a dicha operación.
(a) 4 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor del determinante de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$$

en donde a, b, c, d, e, f y g son parámetros reales arbitrarios
(a) $-efdg$ (b) $afdg$ (c) $-aefg$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sean los subespacios $\mathbb{E}_1 = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\}$ y $\mathbb{E}_2$ el subespacio generado por el sistema $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Señale las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$.
(a) $x = y = z = 0$ (b) $x - y + z = 0,\ y = 0$ (c) $x - z = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

señale una base del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$.
(a) $\{(1, 0, 1), (2, 0, 2)\}$ (b) $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0\}$ (c) $\{(1, 0, 1)\}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Dada la forma cuadrática $w(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 6x_1x_3 + x_3^2$. Señale una base del espacio conjugado a los vectores $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 0, -1)$.
(a) $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ (b) $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$
(c) $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0)\}$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Cálcule el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} e^{\dfrac{1 + x - e^x}{x^2}}$$

(a) $1/\sqrt{e}$ (b) $-\sqrt{e}$ (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

7. Determine el numero de raíces reales que tiene la ecuación $x^3 - x + 1 = 0$.
(*a*) 1 (*b*) 2 (*c*) 3 (*d*) Ninguna de las anteriores

8. Señale el valor de la integral $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx$.
(*a*) $I = (\pi^2 - 8)/4$ (*b*) $I = (\pi^2 - 2)/2$ (*c*) $I = (\pi^2 - 6)/2$ (*d*) Ninguna de las anteriores

9. Sea P_2 el polinomio de Taylor de segundo orden de la función $f(x, y) = e^{x+2y}$ en el punto $(0, 0)$. Señale la respuesta correcta:
(*a*) $P_2(1, 1) = 17/2$ (*b*) $P_2(1, 1) = 15/2$ (*c*) $P_2(1, 1) = 19/2$
(*d*) Ninguna de las anteriores

10. Señale el valor de la integral $I = \int_S xydxdy$ en donde

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\ \right\}$$

(*a*) $I = 1/2$ (*b*) $I = 0$ (*c*) $I = 1/8$ (*d*) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
Febrero 2011. 1^a semana. MODELO A..

1. **Solución. (b)**

   Los elementos que tienen inverso son aquellos que no se anulan en ningún punto del dominio. Las funciones f_1, f_3 no se anulan ya que por un lado $f_1(x) = 2 + \operatorname{sen} x \geq 2 - 1 = 1$ para todo x y por otro lado las raíces de $x^2 - x + 1 = 0$ son complejas. Del mismo modo es fácil ver que f_2, f_4 se anulan en algún punto de la recta real.

2. **Solución. (a)**

   Desarrollando mediante los adjuntos de la cuarta columna

$$\det M = (-1)^{1+4} d \begin{vmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & g \end{vmatrix} = -defg$$

3. **Solución. (d)**

   $\mathbb{E}_2 = \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Luego su ecuación implícita es trivialmente $x = 0$. Adjuntando la ecuaciones de los dos espacios $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$ obtenemos la ecuaciones implícitas de $\mathbb{E}_1 \cap \mathbb{E}_2$ que son

$$\left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x - y + z = 0 \end{array}\right\}$$

   que no coincide con ninguna de las propuestas.

4. **Solución. (b)**

   Las ecuaciones del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} (A - I)X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

   Luego

$$\mathbb{E}_1 = \{(x, y, z) : y = 0\} = \{(x, 0, z) = x(1, 0, 0) + z(0, 0, 1) : x, z \in \mathbb{R}\}$$

   y por tanto $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ es una base por ser un sistema generador linealmente independiente de $\mathbb{E}_2$.

5. **Solución. (a)**

   Matricialmente

$$\begin{aligned} w(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + 6x_1x_3 + x_3^2 = \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Un vector $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ pertenece al espacio $\mathbb{E}$ conjugado a v_1, v_2 si verifica simultaneamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 + 3x_3 = 0$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \mathbb{E} &= \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + 3x_3 = 0\} = \\ &= \{(-3x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1(-3, 0, 1, 0) + x_2(0, 1, 0, 0) + x_4(0, 0, 0, 1)\} \end{aligned}$$

Por tanto $\{(-3, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))\}$ es una base de $\mathbb{E}$ por ser un sistema generador linealmente independiente.

6. **Solución. (a)**

   Calculamos el límite por L'Hopital

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1+x-e^x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1-e^x}{2x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-e^x}{2}} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$$

7. **Solución (a)**

   $f(x) = x^3 - x + 1$, y su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 1$ que se anula en los puntos $x_1 = -\sqrt{3}/3$, $x_2 = \sqrt{3}/3$. En el intervalo $(-\infty, x_1)$ la función derivada toma signo constante positivo luego f es creciente, en el intervalo (x_1, x_2) la función derivada toma signo positiva y es por tanto decreciente y en el intervalo (x_2, ∞) la derivada toma signo positivo y es creciente. x_1 es por tanto un máximo local y respectivamente x_2 es un mínimo local. Además $f(x) \geq f(x_2)$ para todo $x \in (x_1, \infty)$, y $f(x) < f(x_1)$ con f decreciente en $(-\infty, x_1)$. Como además $f(x_1)$, $f(x_2)$ son estrictamente posititivos la única posibilidad es que exista un única raíz en $(-\infty, x_1)$. De hecho dicha raíz existe por el Teorema de Bolzano ya que por ejemplo $f(0) = 1$, $f(-2) = -5$.

8. **Solución (a)** Es una integral que se resuelve por partes

$$\int_0^{\pi/2} uv' dx = [uv]_{x=0}^{x=\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v dx$$

Se resuelve mediante un cambio a polares

$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta$$

El jacobiano es $J(r,\theta) = r$ y S es la parte del círculo de radio 1 ($0 \leq r \leq 1$) en el primer cuadrante ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$). Luego

$$\begin{aligned}
\int_S xydxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\cos\theta r\operatorname{sen}\theta r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}d\theta = \\
&= \left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1}\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). 2^a sem. Feb. 2011
MODELO EXAMEN C

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Señale el supremo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 1 > 0\}$.
   (a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) Ninguna de las anteriores

2. Cálcule el determinante de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) 0 (b) 14 (c) -12 (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea B la matriz inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   y sea el vector columna $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Señale la respuesta correcta:
   (a) $(BD)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $(BD)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
   (c) $(BD)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

   señale las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathbb{E}_1$ asociada al autovalor $\lambda_1 = 0$.
   (a) $3x + y = 0$ (b) $x + y = 0$ (c) $x + 2y = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $p(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + 1$. Existen números reales a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 tales que

$$p(x) = a_5(x-1)^5 + a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$$

   Señale la respuesta correcta.
   (a) $a_3 = 41$ (b) $a_3 = 48$ (c) $a_3 = 42$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Señale el valor de la integral $I = \int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen}(x^2+1)dx$
   (a) $I = 2\cos 1$ (b) $I = \cos 1$ (c) $I = -\cos 1$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(\mathbf{x}) = X^T AX + B^T X$ para cada vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ y en donde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Señale el valor $DF(1,1,1)(1,0,1)$.
(a) $DF(1,1,1)(1,0,1) = 5$ (b) $DF(1,1,1)(1,0,1) = 3$ (c) $DF(1,1,1)(1,0,1) = 2$
(d) Ninguna de las anteriores

8. Señale el valor de la integral $I = \int_S xy^4 dxdy$ en donde

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x \right\}$$

(a) $I = 1/210$ (b) $I = 1/250$ (c) $I = 1/300$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale los valores de λ para los que la forma cuadrática

$$w(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 + 2\lambda x_2x_3 + \lambda x_3^2$$

es definida positiva.
(a) Para $\lambda > 0$ (b) Para ningún λ (c) Para todo λ (d) Ninguna de las anteriores

10. Dada la tabla

x_k	-1	1	2
$f(x_k)$	-1	-1	-4

determínese mediante el polinomio de interpolacion de Lagrange una aproximacion del valor $f(1/2)$
(a) -1 (b) -1/4 (c) -1/2 (d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
Febrero 2011. 2^a semana. MODELO C..

1. **Solución. (a)**

   $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 > x^2\} = (-1, 1)$, por tanto $\sup(-1, 1) = 1$.

2. **Solución. (c)**

   Desarrollando en primer lugar por adjuntos de la segunda columna

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 9 & 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 9 & 9 & 9 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 9 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = -(-1)^{1+4} 2 \begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 9 & 3 & 9 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2(84 - 90) = -12\end{aligned}$$

3. **Solución. (b)**

   La matriz producto BD se corresponde con la primera columna de la matriz B. Luego solamente tenemos que calcular la primera columna de la matriz inversa. Por el teorema de caracterización de la inversa

$$(BD)_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 1,\ (BD)_{12} = \frac{-\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0,\ (BD)_{13} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0$$

4. **Solución. (b)**

   Las ecuaciones del subespacio E asociado al autovalor 0 son

$$(A - 0I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x + y = 0$$

5. **Solución. (d)**

   Por el teorema de Taylor $a_3 = \dfrac{p'''(1)}{6}$.

   Como $p'''(x) = 60x^2 - 24x + 6$, entonces $p'''(1) = 42$ y por tanto $a_3 = \frac{42}{6} = 7$.

6. **Solución. (b)**

   Mediante el cambio $u = x^2 + 1$, $du = 2xdx$ la integral es inmediata

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{\pi}} xsen(x^2 + 1)dx &= \frac{1}{2} \int_1^{\pi+1} senudu = \frac{1}{2}[-\cos u]_{u=1}^{u=\pi+1} = \frac{1}{2}(-\cos(\pi + 1) + \cos 1) = \\ &= \frac{1}{2}(-(\cos 1 \cos \pi - sen\pi sen1) + \cos 1) = \cos 1\end{aligned}$$

7. **Solución. (a)** Como

Luego

$$\begin{aligned} D_iF(x_1,x_2,x_3) &= \sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + a_{ji}x_j + b_i = \\ &\underset{a_{ij}=a_{ji}}{=} 2\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_j + b_i \end{aligned}$$

y por tanto

$$DF(x_1,x_2,x_3) = (D_1F(x_1,x_2,x_3)\ D_2F(x_1,x_2,x_3)\ D_3F(x_1,x_2,x_3)) = 2X^TA + B.$$

En particular

$$DF(1,1,1) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$DF(1,1,1)(1,0,1) = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5$$

8. **Solución. (a)**

La integral viene dada por

$$\begin{aligned} \int_S xy^4 dxdy &= \int_0^1 x\left(\int_0^{1-x} y^4 dy\right)dx = \int_0^1 x[\frac{y^5}{5}]_{y=0}^{y=1-x}dx = \int_0^1 x\frac{(1-y)^5}{5}dx = \\ &= \frac{1}{5}\int_0^1 (1-t)t^5 dt = \frac{1}{5}\int_0^1 (t^6-t^7)dt = \frac{1}{5}([\frac{t^7}{7}]_{t=0}^{t=1} - [\frac{t^8}{8}]_{t=0}^{t=1}) = \\ &= \frac{1}{210} \end{aligned}$$

en donde hemos realizado el cambio $t = 1-x$, $dx = -dt$.

9. **Solución. (b)**

$$w(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 3 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Aplicando el criterio de Silvester para que la forma cuadrática sea definida positiva se debe de cumplir que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 3 & \lambda & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - \lambda^2 - 9 > 0$$

pero esto es falso para cualquier λ ya que $p(\lambda) = \lambda - \lambda^2 - 9$ es un polinomio de segundo grado sin raíces reales. Por tanto p es de signo constante, y como $p(0) = -9 < 0$ entonces $p(\lambda) < 0$ para todo λ.

10. **Solución.** **(b)** El polinomio de interpolación de Lagrange asociado es un polinomio de segundo grado $p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ verificando

$$\begin{aligned} p_2(-1) &= -1 \Leftrightarrow a_2 - a_1 + a_0 = -1 \\ p_2(1) &= -1 \Leftrightarrow a_2 + a_1 + a_0 = -1 \\ p_2(2) &= -4 \Leftrightarrow 4a_2 + 2a_1 + a_0 = -4 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema lineal obtenemos los coeficientes

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow a_2 = -1,\ a_1 = a_0 = 0$$

Luego $p_2(x) = -x^2$ y por tanto $p(1/2) = -1/4$.

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). Sep. 2011
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.

- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Consideremos la función $f(x) = 3x^2 - x$. Partiendo del intervalo $I = [a_0, b_0] = [1/5, 1/2]$, sea (x_n) la sucesión generada al aplicar el método de Regula Falsi reiteradamente Aplicando la fórmula de estimación del error que aparece en el libro de texto señale el valor L para el que el criterio de paro $|x_n - x_{n-1}| \leq L$ asegura un error de aproximación $\varepsilon = 10^{-4}$.
(a) $L = 1,1111 \times 10^{-5}$ (b) $L = 10^{-5}/9$ (c) $L = 10^{-4}$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea (x_n) la sucesión definida recursivamente por $x_1 = 0$
$$x_n = \frac{-17x_{n-1} + 24}{4x_{n-1} - 13} \text{ para todo } n \geq 2.$$
Sabiendo que dicha sucesión es convergente y siempre toma valores negativos calcule su límite $L = \lim x_n$.
(a) $L = -4$ (b) $L = -2$ (c) $L = -5$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
sea la matriz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$
que se obtiene "haciendo ceros" mediante transformaciones elementales por debajo del primer elemento de la diagonal en A. Si consideramos la matriz la matriz $C \in M_4$ tal que $B = CA$, señale la inversa de C.
(a) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
(c) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $\mathbb{P}_5 = \{p = a_5x^5 + a_4x^4 + ... + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R} \}$ el espacio vectorial de polinomios

de grado igual o menor a 5. Consideremos los siguientes subconjuntos

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_1 &= \left\{p \in P_5 : \int_0^1 p(x)dx = 0\right\} \\
\mathbb{V}_2 &= \left\{p \in P_5 : \int_0^1 p(x)dx > 0\right\} \\
\mathbb{V}_3 &= \{p \in P_5 : a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0\} \\
\mathbb{V}_4 &= \{p \in P_5 : |a_1 + a_2| = 0\}
\end{aligned}$$

Señale el número de ellos que son asimismo subespacio vectorial (Notación: $|\cdot|$ denota valor absoluto)

(*a*) 2 (*b*) 3 (*c*) 4 (*d*) Ninguna de las anteriores

5. Sea $\mathbf{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $\mathbf{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Con respecto a dichas bases la matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinar la matriz Q asociada a f si consideramos las bases

$$\mathbf{A}' = \{(1,1,0),(-1,1,0),(0,0,1)\}, \mathbf{B} = \{(1,0),(1,0)\}.$$

(*a*) $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (*b*) $Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(*c*) $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

6. Sea $\mathbf{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una forma bilineal simétrica que satisface $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = -1$, $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 1$, $\varphi(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_3) = -1$, $\varphi(2\mathbf{e}_1, 3\mathbf{e}_2) = 6$, $\varphi(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3) = -2$, $\varphi(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 2$. Consideremos otra base $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en donde

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\
\mathbf{v}_3 &= \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

Determínese la matriz de la aplicación φ respecto de la base $\mathbf{B}$.

(*a*) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 8 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & -4 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ (*c*) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 2 & 8 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

7. Señale el valor de la integral $I = \int_0^e x^5 \ln x dx$. (ln-logaritmo neperiano).

(*a*) $I = (5e^6)/36$ (*b*) $I = e^6/36$ (*c*) $I = e^6/6$ (*d*) Ninguna de las anteriores

8. Sean las funciones $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $g(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Asimismo sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función compuesta definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = g(h(x_1, -x_3), x_3, h(x_1, x_2))$$

Señale su matriz jacobiana $f'(0,1,0)$

(a) $f'(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $f'(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $f'(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor de la integral $I = \int_M \frac{2y}{x^2+1} dxdy$ en donde $M = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(a) $I = (\ln 2)/2$ (b) $I = (\ln 5)/2$ (c) $I = (\ln 7)/2$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ determine la matriz potencia A^{200}:

(a) $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). MODELO EXAMEN A

1. **Solución. (a)**

   Por la fórmula de la página 316 del libro de texto, siempre que la derivada segunda f'' tenga signo constante como en este caso ya que $f''(x) = 6$, se tiene que

$$|\xi - x_n| \le \frac{M' - m'}{m'} |x_n - x_{n-1}|$$

   siendo ξ la raíz que se encuentra en el intervalo I (en este caso particular compruébese que $\xi = 1/3$), $M' = \max_{x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]} f'(x)$, $m' = \min_{x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]} f'(x)$. Utilizando dicha fórmula para que $|\xi - x_n| \le 10^{-4}$ es suficiente que

$$\frac{M' - m'}{m'} |x_n - x_{n-1}| \le 10^{-4} \Rightarrow |x_n - x_{n-1}| \le \frac{m'}{M' - m'} 10^{-4}$$

   Por tanto la cota L viene dada por

$$L = \frac{m'}{M' - m'} 10^{-4}$$

   Calculando

$$m' = \min_{x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]} f'(x) = \min_{x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]} 6x - 1 = 1/5,\ M' = \max_{x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]} f'(x) = \max_{x \in [\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]} 6x - 1 = 2$$

   el valor de la constante se calcula directamente

$$L = \frac{1/5}{2 - 1/5} 10^{-4} = 10^{-4}/9 = 1,1111 \times 10^{-5}$$

2. **Solución. (d)**

   Por hipótesis existe $L = \lim x_n$, con lo que basta tomar directamente límites en la expresión recursiva

$$L = \frac{-17L + 24}{4L - 13} \Leftrightarrow L^2 + L - 6 = 0$$

   Las raíces de la última ecuación $L = -3$, $L = 2$ nos dan los posibles valores del límite. Descartamos el positivo ya que sabemos que la sucesión siempre toma valores negativos, por tanto necesariamente $L = -3$.

3. **Solución. (b)** En general de $B = CA$ se deduce

$$A = C^{-1}B$$

   Luego de una manera directa basta comprobar si cualquiera de las opciones verifican esta identidad. Como

$$C^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -16 & -9 & -16 \\ -1 & -6 & -2 & -3 \\ -2 & -7 & -1 & -11 \end{pmatrix} \neq A$$

$$C^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

$$C^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -10 & -6 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \neq A$$

   La respuesta correcta es (b).

   De otra manera, por el proceso de eliminación Gaussiana se tiene que la matriz C no es más que la matriz resultado de adjuntar a la matriz unidad los correspondientes factores de la eliminación Gaussiana por debajo del pivote. En este caso dicho pivote es el primer elemento de la diagonal. Por ejemplo el factor situado en la segunda fila es

-3 ya que es el factor por el que se multiplica la primera fila para sumarsela a la correspondiente fila con objeto de obtener un cero en el elemento b_{12}, y así sucesivamente para el resto de filas. De este modo se tiene que

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una matriz de estructura simple cuya diagonal se obtiene cambiando el signo a los factores

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **Solución. (b)**

Para estudiar si los subconjuntos son subespacios vectoriales basta comprobar si se cumple la caracterización de subespacio vectorial (véase página 50 libro texto). $\mathbb{V}_1$ es un subespacio vectorial ya que dados dos polinominios $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2 \in P_5$ tales que $\int_0^1 \mathbf{p}_1(x)dx = \int_0^1 \mathbf{p}_2(x)dx = 0$, por propiedades elementales de integración se tiene que $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_1 + \mu\ \mathbf{p}_2$ tiene integral nula ya que

$$\int_0^1 \mathbf{p}(x)dx = \lambda \int_0^1 \mathbf{p}_1(x)dx + \mu \int_0^1 \mathbf{p}_2(x)dx = 0$$

En cambio $\mathbb{V}_2$ no es un espacio vectorial, de hecho sabemos por la misma caracterización de subespacio vectorial. que el vector nulo pertenece a cualquier subespacio vectorial y en este caso el polinomio nulo $\mathbf{p} = \mathbf{0}$ no pertenece a $\mathbb{V}_2$ ya que su integral es cero. Por otro lado $\mathbb{V}_3$ sí es subespacio vectorial, dados dos polinomios $\mathbf{p}_1 = \sum_{i=0}^{5} a_i x^i$, $\mathbf{p}_2 = \sum_{i=0}^{5} b_i x^i \in P_5$ en donde $\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{i=1}^{5} b_i = 0$ se tiene que $\mathbf{p} = \lambda \mathbf{p}_1 + \mu\ \mathbf{p}_2 = \sum_{i=0}^{5} (\lambda a_i + \mu b_i) x^i$ y se cumple $\sum_{i=0}^{5} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i=1}^{5} a_i + \mu \sum_{i=1}^{5} b_i = 0$ por hipótesis. Del mismo $\mathbb{V}_4$ es un subespacio vectorial ya que $|a_1 + a_2| = 0 \Leftrightarrow a_1 + a_2 = 0$ y la prueba es muy similar a la dada para el caso anterior.

5. **Solución. (c)** ó **(d)**

En primer lugar existe una errata evidente al referirnos por segunda vez a la base $\mathbf{B}$ ya que tal como está escrito en primer lugar $\mathbf{B}$ es la base canónica $\{(1{,}0), (0,1)\}$ y no $\{(1{,}0), (1,0)\}$ que no constituye una base de $\mathbb{R}^2$. La matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego $Y' = AY$ y por tanto

$$Y = PX \Rightarrow A^{-1}Y' = PX \Leftrightarrow Y' = APX \Rightarrow Q = AP$$

Luego

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Al haber una errata en el enunciado tambien se considera como correcta la pregunta d. Aquellos que hayan contestado cualquier otra respuesta o no hayan constestado se les considerar la pregunta como anulada.

6. **Anulada**

Existe un error en el enunciado ya que $\mathbf{B}$ no es una base, luego se considera anulada la pregunta.

7. **Solución. (a)** Se resuelve integrando por partes, en particular consideramos $u = \ln x$, $dv = x^5$ con lo que $u' = \frac{1}{x}$, $v = \frac{x^6}{6}$. De este modo aplicando la fórmula de integración por partes se obtiene

$$\int_0^e x^5 \ln x dx = \left[\frac{x^6 \ln x}{6}\right]_{x=0}^{x=e} - \int_0^e \frac{x^5}{6} dx = \frac{e^6}{6} - \frac{e^6}{36} = \frac{5e^6}{36}$$

8. **Solución.** **(b)** Podemos considerar la función como una composición de funciones y aplicar la regla de la cadena. De hecho $f = g \circ t$ en donde $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación (lineal) definida por

$$t(x_1, x_2, x_3) = (h(x_1, -x_3), x_3, h(x_1, x_2)) = (x_1 - x_3, x_3, x_1 + x_2)$$

Las jacobianas son

$$\begin{aligned} t'(0,1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ g'(t(0,1,0)) &= g(0,0,1) = \left[\frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \right]_{(x_1,x_2,x_3)=(0,0,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando la regla de la cadena se obtiene

$$Df(t(0,1,0) \circ Dt(0,1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. **Solución.** **(b)** Se resuelve por integración reiterada

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} \left(\int_0^{\sqrt{x}} 2y dy \right) &= \int_0^2 \frac{dx}{x^2+1} \left[y^2 \right]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} = \int_0^2 \frac{x dx}{x^2+1} = \left[\frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_{x=0}^{x=2} \\ &= \frac{1}{2} \ln 5 \end{aligned}$$

10. **Solución.** **(b)** ó **(c)**

En general dada una matriz diagonalizable A se tiene la descomposición

$$A = PDP^{-1} \tag{1}$$

en donde D es una matriz diagonal cuya diagonal está formada por una ordenación de los distintos autovalores de A, y P es la matriz de paso asociada formada por los correspondientes autovectores como columnas el mismo orden (léase Tema 4 Sección 5 del libro de texto). De (1) se puede obtener una fórmula recursiva para hallar la potencia n-esima de A ya que

$$\begin{aligned} A^2 &= PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A^n &= A^{n-1}A = PD^{n-1}P^{-1}PDP^{-1} = PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

En este caso $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ tiene como autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, y $\mathbf{v}_1 = (1,2)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1)$ como sus correspondientes autovectores. Por lo que podemos considerar

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{200} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Evidentemente tambien se considera valida la respuesta (c) al coincidir con la (b)

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). Feb. 2012
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Si $a \in [-1, 1]$ señale el valor de a que hace máximo el determinante de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

(*a*) $a = 1/4$ (*b*) $a = 0$ (*c*) $a = 3/4$ (*d*) Ninguna de las anteriores

2. Sea $\mathbb{R}^3$ con la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathbb{R}^4$ con la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ .Determínese el rango de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) &= -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 \\ f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(*a*) 1 (*b*) 3 (*c*) 2 (*d*) Ninguna de las anteriores

3. Dados los sistemas $\mathbf{A} = \{(1, 0), (1, 1)\}$, $\mathbf{B} = \{(1, -1), (2, 1)\}$. Señale la matriz de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

(*a*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (*b*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

(*c*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

4. Sea el conjunto $M = \{a, b, c, d\}$ y consideremos la ley de composición interna $\diamond$ definida mediante la tabla

$\diamond$	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c
e	e	a	b	c	d

Senale el elemento inverso del elemento $a \diamond (a \diamond (b \diamond (c \diamond d)))$ respecto a la operación $\diamond$.

(*a*) e (*b*) a (*c*) c (*d*) Ninguna de las anteriores

5. Dada la forma cuadrática

$$w(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

señale las ecuaciones implícitas del subespacio asociado al vector $\mathbf{v} = (1, 0, -1, 1)$.
(*a*) $x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ x_3 = \lambda_2\ x_3 = \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3,\ x_4 = \lambda_3$
(*b*) $x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ x_3 = \lambda_2\ x_3 = 2\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3,\ x_4 = \lambda_3$
(*c*) $x_1 = \lambda_1,\ x_2 = \lambda_2,\ x_3 = \lambda_2\ x_3 = -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3,\ x_4 = \lambda_3$
(*d*) Ninguna de las anteriores

6. Determine el número de raíces reales que tiene la ecuación $x^3 - x^2 + 2 = 0$.
(*a*) Ninguna (*b*) 1 (*c*) 3 (*d*) Ninguna de las anteriores

7. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 \dfrac{tdt}{(t+1)^2}$.
(*a*) $I = (2\ln 2 - 1)/2$ (*b*) $I = (\ln 2 + 1)/2$ (*c*) $I = (\ln 2 - 1)/2$ (*d*) Ninguna de las anteriores

8. Sean las funciones $F(x, y) = (x - y^3, x + x^2 y)$, $G(x, y) = (xy^2, x - y)$. Señale la matriz jacobiana de la función compuesta $F \circ G$ en el punto $(1, 1)$.
(*a*) $(F \circ G)'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (*b*) $(F \circ G)'(1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
(*c*) $(F \circ G)'(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor de $I = \int_M xdxdy$ en donde $M = \{(x, y) : 1 + 2x \geq y,\ y \geq 0,\ y \leq 1 - 2x\}$
(*a*) 0 (*b*) 1 (*c*) $\dfrac{3}{2}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

10. Cálcule el error cometido al aproximar la integral $\int_0^1 x^2 dx$ mediante la regla de trapecios con $n = 3$.
(*a*) $\dfrac{3}{27}$ (*b*) $\dfrac{5}{27}$ (*c*) $\dfrac{2}{27}$ (*d*) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
Febrero 2012. 1^a semana. MODELO A..

1. **Solución. (a)**

Calculamos el determinante desarrollando por los adjunto de la tercera fila, de esta manera

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + a + 1$$

Se trata por tanto de hallar el máximo de la función real $f(a) = -2a^2+a+1$. Su función derivada es $f'(a) = -4a+1$ y su único punto crítico viene dado por $a = 1/4$. Dicho punto es máximo local por ser su derivada segunda $f''(a) = -4 < 0$ estrictamente negativa, de hecho la función es concava y por tanto dicho máximo es global.

2. **Solución. (a)**

El rango de la aplicación lineal coincide con el rango de la matriz asociada. La matriz asociada a la aplicación lineal tiene como columnas las coordenadas de la imagen de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con respecto a la base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. En este caso la matriz asociada viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La segunda y tercera columna de la matriz son combinación lineal de la primera. Luego el mayor número de vectores columnas linealmente independientes es uno y por tanto el rango es 1.

3. **Solución. (b)** La matriz de cambio de la base **A** a **B** que denotamos por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

es aquella que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de **A** con respecto de **B**. Es decir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= a_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{21} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= a_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + a_{22} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} A$$

por lo que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

4. **Solución. (a)**

En primer lugar de la tabla deducimos que a es el elemento neutro de $\diamond$ ya que

$$\begin{aligned} a \diamond a &= a \\ a \diamond b &= b \diamond a = b \\ a \diamond c &= c \diamond a = c \\ a \diamond d &= d \diamond a = d \end{aligned}$$

Por otro lado operando

$$\begin{aligned} a \diamond (a \diamond (b \diamond (c \diamond d))) &= a \diamond (a \diamond (b \diamond a)) = \\ a \diamond (a \diamond b) &= a \diamond b = b \end{aligned}$$

Y el inverso de b con respecto a a es e ya que

$$e \diamond b = b \diamond e = a$$

5. **Solución. (d)**

La respuesta es (d) ya que las ecuaciones dadas en (a), (b) y (c) son paramétricas y no implícitas.

6. **Solución. (b)**

Sea $f(x) = x^3 - x^2 + 2$. Estudiemos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento. La función derivada $f'(x) = 3x^2 - 2x$ se anula en los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 2/3$. En el intervalo $(-\infty, 0]$ la función derivada es positiva luego f crece, de igual modo en $(0, 2/3)$ la función derivada es negativa luego la función es decreciente y finalmente en $(2/3, \infty)$ la función derivada vuelve a ser positiva ya que es creciente. De lo que se deduce en primer lugar que

$$f(x) \geq f(2/3) > 0 \text{ para todo } x \in (0, \infty)$$

Por lo que en $(0, \infty)$ la función f no tiene ninguna raíz. Por otro lado en $(-\infty, 0]$ la función solamente puede tener una raíz por ser creciente, de hecho dicha raíz existe como aplicación directa del Teorema de Bolzano ya que como la función es continua y por ejemplo $f(-2) < 0$, $f(0) > 0$ por dicho teorema se puede asegurar que la raíz existe en el intervalo $(-2, 0)$.

7. **Solución. (a)** Es una integral racional que se resuelve descomponiendo por fracciones simples (p.215 libro de texto). De esta forma

$$\frac{t}{(t+1)^2} = \frac{A_1}{(t+1)} + \frac{A_2}{(t+1)^2} = \frac{A_1 t + A_1 + A_2}{(t+1)^2}$$

en donde A_1, A_2 constantes a determinar. Identificando coeficientes

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 \\ A_1 + A_2 &= 0 \end{aligned}$$

y por tanto $A_1 = 1$, $A_2 = -1$. Luego

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{tdt}{(t+1)^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{t+1} - \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} \\
&= [\ln(t+1)]_{t=0}^{t=1} - \left[\frac{(t+1)^{-2+1}}{-2+1}\right]_{t=0}^{t=1} \\
&= \ln 2 - 0 - (-\frac{1}{2} + 1) = \\
&= \ln 2 - \frac{1}{2} = \frac{2\ln 2 - 1}{2}
\end{aligned}$$

8. **Solución. (a)**

Se resuelve aplicando la regla de la cadena (p. 247 libro de texto). Entonces $G(1,1) = (1,0)$ y las matrices jacobianas vienen dadas por

$$\begin{aligned}
F'(G(1,1)) = F(1,0) &= \begin{pmatrix} 1 & -3y^2 \\ 1+2xy & x^2 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
G'(1,1) &= \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Finalmente aplicando la regla de la cadena se tiene

$$(F \circ G)'(1,1) = F'(1,0)G'(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

9. **Solución. (a)**

El recinto de integración viene dado por (representese gráficamente)

$$\left\{(x,y) : -\frac{1}{2} \leq x \leq 0,\ 0 \leq y \leq 1+2x\right\} \cup \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq \frac{1}{2},\ 0 \leq y \leq 1-2x\right\}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\int_M xdxdy &= \int_{-\frac{1}{2}}^0 xdx \int_0^{1+2x} dy + \int_0^{\frac{1}{2}} x \int_0^{1-2x} dy = \int_{-\frac{1}{2}}^0 x(1+2x)dx \\
+ \int_0^{\frac{1}{2}} x(1-2x)dx &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=0} + 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-\frac{1}{2}}^{x=0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=\frac{1}{2}} \\
&= 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = 0
\end{aligned}$$

10. **Solución. (d)**

El valor de la integral es

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}.$$

Aplicando la fórmula de los trapecios (p. 334 libro de texto) se tiene $n = 3$, $h = \dfrac{1}{3}$,

$$P = \{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}$$

y

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x^2dx &\approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(x_k)+f(x_{k+1})\} = \frac{1}{6}\left\{0^2+2\left(\frac{1}{3}\right)^2+2\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right\} = \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}+\frac{8}{9}+1\right) = \frac{19}{54}
\end{aligned}
$$

Luego el error cometido viene dado por

$$
\left|\frac{19}{54}-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{54}
$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). 2^a **sem. Feb. 2012**
MODELO EXAMEN C

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Dada la aplicación lineal T de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_3 - x_1, x_2 - x_1 + 4x_3, x_3, x_3 - x_1 + x_2 + x_4)$$

señale el determinante de su matriz asociada
(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

2. Consideremos el espacio vectorial de las matrices $\mathbb{M}_2$ de orden 2. De los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
\mathbf{S}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \\
\mathbf{S}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

señale el número de ellos que constituyen un base en $\mathbb{M}_2$.
(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

3. Consideremos las matrices

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Siendo $M = X(X^T X)X^T$ señale el valor $V^T M V$.
(a) $V^T M V = -1$ (b) $V^T M V = 6$ (c) $V^T M V = 2$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Considere $\mathbb{R}^4$ con la ley de composición interna $\diamond$ definida como

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) \diamond (y_1,y_2,y_3,y_4) = (x_1y_1 + x_2y_3, x_1y_2 + x_2y_4, x_3y_1 + x_4y_3, x_3y_2 + x_4y_4)$$

Señale el elemento neutro e con respecto a dicha operación
(a) $e = (1,0,1,0)$ (b) $e = (0,0,0,0)$ (c) $e = (1,1,1,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Considere la forma bilineal φ en $\mathbb{R}^3$ definida como

$$\varphi(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

en donde los vectores de coordenadas $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2,y_3)$ están referidos a la base canónica

$$\mathbf{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Señale la matriz asociada a φ con respecto a una nueva base

$$\mathbf{B} = \{(1,1,1), (-1,1,1), (1,0,1)\}$$

(a) $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 4 \\ 4 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Señale el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

(a) -1 (b) 2 (c) $1/2$ (d) Ninguna de las anteriores

7. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 xe^{2x} dx$.
(a) $I = \dfrac{e^2 - 1}{2}$ (b) $I = \dfrac{e^2 + 1}{4}$ (c) $I = \dfrac{e^2 + 1}{2}$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Sea P_3 el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x, y) = xy^4$ en el punto $(1, 1)$. Señale el valor $P_3(1, 2)$
(a) $P_3(1,2) = 6$ (b) $P_3(1,2) = 16$ (c) $P_3(1,2) = 19$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor de la integral $\int_M (x^2+y^2+z^2) dxdydz$ en donde $M = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ 0 \leq z\}$
(a) $\dfrac{2\pi}{5}$ (b) π (c) $\dfrac{\pi}{5}$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Sea p el polinomio de interpolación de Lagrange dado por tabla

x_k	-1	0	1	2
$f(x_k)$	-1	0	1	-1

Señale la respuesta correcta:
(a) $p(3) = -9$ (b) $p(3) = -8$ (c) $p(3) = 11$ (d) Ninguna de las anteriores

Fundamentos de Matemáticas. Pruebas de Autoevaluación.
Capítulo 10. *Introducción al cálculo numérico*

1. **Solución. (b)** La matriz asociada a la aplicación lineal viene dada por

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sus determinante viene dado por

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+4} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

2. **Solución. (b)**

La base canónica de $\mathbb{M}_2$ viene dada por

$$\mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Una manera de estudiar si los sistemas $\mathbf{S}_i$ constituyen una base es ver si la matriz de paso que tiene como vectores columnas las coordenadas de los elementos de $\mathbf{S}_i$ con respecto a $\mathbf{E}$ tiene determinante no nulo y por tanto constituyen una matriz de cambio de base. Por ejemplo para el caso del sistema $\mathbf{S}_1$ la matriz de paso y su determinante viene dado por

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

y por tanto efectivamente tiene determinante no nulo y $\mathbf{S}_2$ es una base del espacio. Del mismo modo para $\mathbf{S}_2$ tenemos

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

y por tanto $\mathbf{S}_2$ también es base. En cambio $\mathbf{S}_3$ no es base ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

De hecho se puede ver por ejemplo que el primer elemento del sistema es combinacion lineal de los otros

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Solución. (b)**

Dadas

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

basta operar directamente

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente

$$V^T M V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 6$$

4. **Solución. (d)**

El vector $(1,0,1,0)$ no puede ser el elemento neutro ya que por ejemplo

$$\begin{aligned} (1,0,1,0) \circ (1,0,0,0) &= (1 \times 1 + 0 \times 0, 1 \times 0 + 0 \times 0, 1 \times 1 + 0 \times 0, 1 \times 0 + 0 \times 0) \\ &= (1,0,1,0) \neq (1,0,0,0) \end{aligned}$$

El vector $(0,0,0,0)$ no puede ser el elemento neutro ya que por ejemplo

$$(0,0,0,0) \circ (1,0,0,0) = (0,0,0,0) \neq (1,1,1,1)$$

Del mismo modo el vector $(1,1,1,1)$ no es elemento neutro ya que

$$(1,1,1,1) \circ (1,0,0,0) = (1,0,1,0) \neq (1,0,0,0)$$

5. **Solución. (c)**

La matriz de la aplicación es la matriz identidad, y la matriz de cambio de base de la matriz **B** a la base canónica **A** viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz asociada a φ con respecto a **B** viene dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6. **Solución. (b)**

Calculamos el límite aplicando dos veces la regla de L'Hopital

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{6x-2}=\frac{8}{4}=2$$

7. **Solución. (b)**

Calculamos la integral aplicando integral por partes (p. 214 libro de texto). Identificando $u'=e^{2x}$, $v=x$ se tiene $u=\dfrac{e^{2x}}{2}$, $v'=1$ y por tanto

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{2x}dx &= \left[\frac{e^{2x}x}{2}\right]_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 e^{2x}dx=\frac{e^2}{2}-\left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_{x=0}^{x=1}\\ &= \frac{e^2}{2}-\frac{e^2-1}{4}=\frac{e^2+1}{4}\end{aligned}$$

8. **Solución. (d)**

Sea $f(x,y)=xy^4$. Calculamos la derivadas hasta orden 3 en el punto $(1,1)$

$$\begin{array}{ll} f(1,1)=1 & \\ D_1f(x,y)=y^4 & D_1f(1,1)=1\\ D_2f(x,y)=4y^3x & D_2f(1,1)=4\\ D_{11}f(x,y)=0 & D_{11}f(1,1)=0\\ D_{12}f(x,y)=4y^3 & D_{12}f(1,1)=4\\ D_{22}f(x,y)=12y^2x & D_{22}f(1,1)=12\\ D_{111}f(x,y)=0 & D_{111}f(1,1)=0\\ D_{112}f(x,y)=0 & D_{112}f(1,1)=0\\ D_{122}f(x,y)=12y^2 & D_{11}f(1,1)=12\\ D_{222}f(x,y)=24yx & D_{222}f(1,1)=24\end{array}$$

Por tanto el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $(1,1)$ viene dado por

$$\begin{aligned}P_3(x,y) &= 1+1(x-1)+4(y-1)+\frac{1}{2}(0(x-1)^2+8(x-1)(y-1)+12(y-1)^2)\\ &\quad \frac{1}{6}(0(x-1)^3+3\times 0(x-1)^2(y-1)+3\times 12(x-1)(y-1)^2+24(y-1)^3)\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}P_3(1,2) &= 1+0+4+\frac{1}{2}(0+0+12)+\frac{1}{6}(0+0+0+24)\\ &= 1+4+6+4=15.\end{aligned}$$

9. **Solución. (a)**

Para resolver la integral hacemos un cambio a coordenadas esféricas $x=r\cos\theta\operatorname{sen}\varphi$, $y=r\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z=r\operatorname{sen}\varphi$, en donde el jacobiano del cambio viene dado por

$$J(r,\theta,\varphi)=-r^2\operatorname{sen}\varphi$$

(p. 284-5 libro de texto) y aplicamos el teorema de cambio de variables (p. 289). La función integrando y el recinto transformado viene dado por

$$\begin{gathered}f(r,\theta,\varphi)=r^2\\ T=\{(r,\theta,\varphi):0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\}\end{gathered}$$

y por el teorema de cambio de variable

$$
\begin{aligned}
\int_M (x^2+y^2+z^2)dxdydz &= \int_T r^2 r^2 \operatorname{sen}\varphi d\varphi d\theta dr = \int_0^1 r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}\varphi d\varphi \\
&= \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=0}^{r=1} 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{5}\times 2\pi \times 1 = \frac{2\pi}{5}.
\end{aligned}
$$

10. **Solución.** **(a)** -Nodos de interpolación. $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} = \{-1, 0, 1, 2\}$.

-Funciones de interpolación de Lagrange

$$
\begin{aligned}
L_0(x) &= \frac{x-0}{-1-0}\frac{x-1}{-1-1}\frac{x-2}{-1-2} = -\frac{x(x-1)(x-2)}{6} \\
L_1(x) &= \frac{x+1}{0+1}\frac{x-1}{0-1}\frac{x-2}{0-2} = \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} \\
L_2(x) &= \frac{x+1}{1+1}\frac{x-0}{1-0}\frac{x-2}{1-2} = -\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{2} \\
L_3(x) &= \frac{x+1}{2+1}\frac{x-0}{2-0}\frac{x-1}{2-1} = \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{6}
\end{aligned}
$$

-Polinomio de interpolación

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (-1)\times\left(-\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\right) + 0\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{2} \\
&\quad +1\times\left(-\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{2}\right) + (-1)\frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{6}
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{gathered}
P(3) = \tfrac{3(3-1)(3-2)}{6} - \tfrac{(3+1)(3-0)(3-2)}{2} \\
-\tfrac{(3+1)(3-0)(3-1)}{6} = 1-6-4 = -9
\end{gathered}
$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS (Grado Ingeniería Informática). Sep. 2012
MODELO EXAMEN A

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta. Cada pregunta acertada suma 1 punto, las incorrectas restan 0'3 puntos cada una. Las preguntas en blanco no puntúan.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.
- Entregue únicamente la hoja de respuestas. Verifique que en dicha hoja figura su nombre, DNI y modelo de examen.

1. Dada la matriz $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, sea el conjunto $L = \{B \in \mathbb{M}_2 : B \times C = C \times B\}$ de las matrices cuadradas de orden 2 que conmutan con C con respecto del producto usual $\times$ de matrices. Consideremos las siguiente dos afirmaciones:

   - A1. Las suma usual de matrices $+$ es una operación conmutativa sobre el conjunto L.
   - A2. El producto usual de matrices $\times$ es una operación conmutativa sobre el conjunto L.

   Señale la respuesta correcta.
   (a) Ambas afirmaciones, A1 y A2, son ciertas
   (b) A1 es cierta, pero A2 es falsa
   (c) A2 es cierta, pero A1 es falsa
   (d) Ninguna de las anteriores

2. Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tiene determinante 1, calcule el valor del determinante de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c + \frac{a}{2} & d + \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

   (a) $\det B = 1$ (b) $\det B = 1/2$ (c) $\det B = 3/2$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea $\mathbb{Q}_4$ el espacio vectorial generado por la familia de polinomios

$$\{\mathbf{q}_1(x,y) = 1, \mathbf{q}_2(x,y) = x, \mathbf{q}_3(x,y) = y, \mathbf{q}_4(x,y) = xy\},$$

   es decir

$$\mathbb{Q}_4 = \{\mathbf{p} = a_1\mathbf{q}_1 + a_2\mathbf{q}_2 + a_3\mathbf{q}_3 + a_4\mathbf{q}_4,\ a_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, ..., 4\}$$

   Dado el subespacio vectorial $\mathbb{T} \subset \mathbb{Q}_4$ definido por

$$\mathbb{T} = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{Q}_4 : \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{p}(x,y)dxdy = 0 \right\},$$

   señale sus ecuaciones implícitas.
   (a) $4a_1 + 2(a_2 + a_3) + a_4 = 0$ (b) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$
   (c) $a_1 + 2a_2 + a_3 + 4a_4 = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Consideramos $\mathbb{M}_2$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 con la base

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\},$$

Sea $f : \mathbb{M}_2 \to \mathbb{M}_2$ la aplicación lineal definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 \\ f(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 \\ f(\mathbf{v}_3) &= -2\mathbf{v}_2 \\ f(\mathbf{v}_4) &= -\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Determine la matriz $f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión 2, y sean $\mathbf{A} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2\}$ dos bases de dicho espacio. La matriz asociada a una forma bilineal $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ respecto de la base $\mathbf{A}$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Señale la matriz asociada de φ con respecto de la base $\mathbf{B}$.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

6. Calcule el error exacto cometido al aproximar la integral

$$\int_0^{2\pi} \cos(2x)dx$$

utilizando el método de los trapecios con $n = 4$ subintervalos de la misma longitud.

(a) $\pi/2$ (b) 0 (c) π (d) Ninguna de las anteriores

7. Sea p_3 el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = \ln(x^3 + 1)$ en el punto $x = 0$. Calcule el valor $p_3(1)$.

(a) $p_3(1) = 1/2$ (b) $p_3(1) = 0$ (c) $p_3(1) = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

8. Dada la función $f(x) = \int_0^x (s^2 - 1)ds$ señale el punto $c \in (0, 1)$ para el que se verifica el teorema del valor medio del cálculo diferencial en el intervalo $[0, 1]$.

(a) $c = \sqrt{3}/3$ (b) $c = \sqrt{2}/2$ (c) $c = 1/3$ (d) Ninguna de las anteriores

9. Señale el valor del siguiente límite $L = \lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x + y^3}{x^2 + 2xy + y^2}$.

(a) $L = 9$ (b) No existe (c) $L = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

10. Sea T el triángulo de vertices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. Señale el valor de la integral

$$I = \int_T xydxdy.$$

(a) $I = 1/24$ (b) $I = 1/12$ (c) $I = 1/9$ (d) Ninguna de las anteriores

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS.
septiembre 2012. MODELO A.

1. **Solución. (a)**

Una matriz arbitraria $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ pertenece a L si se cumplen las siguientes equivalencias

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} b_1 & b_1 + b_2 \\ b_3 & b_3 + b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + b_3 & b_2 + b_4 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ b_3 = 0, b_1 = b_4 \end{array}$$

Por tanto los elementos de L son matrices de la forma

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

La operación suma de matrices es una operación conmutativa sobre L, ya que efectivamente la suma de dos elementos arbitrarios

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \in L$$

sigue siendo un elemento de L. Además no influye el orden de como se sumen, de hecho se puede comprobar directamente por la propiedad conmutativa de los números reales

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' & y + y' \\ 0 & x + x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + x & y' + y \\ 0 & x' + x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

Del mismo modo, el producto de matrices es una operación conmutativa ya que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' & xy' + yx' \\ 0 & xx' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

2. **Solución. (a)**

$$\det B = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c + \dfrac{a}{2} & d + \dfrac{b}{2} \end{pmatrix} = a(d + \frac{b}{2}) - b(c + \frac{a}{2}) = ad - bc = \det A = 1$$

3. **Solución. (a)**

Integrando directamente se tiene que

$$\begin{array}{l} \mathbf{p} \in \mathbb{T} \Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{p}(x, y) dxdy = 0 \Leftrightarrow \int_0^1 \int_0^1 (a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy)\, dxdy = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1 \int_0^1 \int_0^1 dxdy + a_2 \int_0^1 \int_0^1 xdxdy + a_3 \int_0^1 \int_0^1 ydxdy + a_4 \int_0^1 \int_0^1 xydxdy = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} + a_3 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} + a_4 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=1} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a_1 + a_2 \frac{1}{2} + a_3 \frac{1}{2} + a_4 \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4 = 0 \end{array}$$

4. **Solución. (b)**

Teniendo en cuenta

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$$

Luego

$$f\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3) = f(\mathbf{v}_1) + f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_2$$
$$= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

5. **Solución. (b)**

La matriz de cambio de la base **B** a la base **A** viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz asociada a φ respecto de **B** viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. **Solución. (b)**

Por un lado, la integral exacta viene dada por

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2s)ds = \left[\frac{sen(2s)}{2}\right]_{s=0}^{s=2\pi} = 0 - 0 = 0$$

Siguiendo la fórmula explicita (p. 335 libro de texto) en este caso tenemos $n = 5$, $h = 2\pi/4 = \pi/2$, la partición de puntos

$$P = \{x_0 = 0,\ x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \pi,\ x_3 = \frac{3\pi}{2},\ x_4 = 2\pi\}$$

y la función $f(x) = \cos(2x)$. Aplicamos directamente la fórmula

$$\begin{aligned} & \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + 2f(x_3) + f(x_4)\right) \\ = & \frac{\pi/2}{2}\left(\cos 0 + 2\cos(\pi) + 2\cos(2\pi) + 2\cos(3\pi) + \cos(4\pi)\right) \\ = & \frac{\pi}{4}(1 - 2 + 2 - 2 + 1) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto la formula integra exáctamente, y el error cometido es 0.

7. **Solución. (c)**

Calculamos las derivadas de la función en el punto $x = 0$

$$\begin{aligned} f(0) &= \left[\ln(x^3+1)\right]_{x=0} = \ln 1 = 0 \\ f'(0) &= \left[\tfrac{3x^2}{x^3+1}\right]_{x=0} = 0 \\ f''(0) &= \left[\tfrac{6x(x^3+1)-\left(3x^2\right)^2}{(x^3+1)^2}\right]_{x=0} = \left[\tfrac{6x-3x^4}{(x^3+1)^2}\right]_{x=0} = 0 \\ f'''(0) &= \left[\tfrac{(6-12x^3)(x^3+1)^2-2\left(3x^2\right)(6x-3x^4)}{(x^3+1)^4}\right]_{x=0} = 6 \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de la función f en el punto $x = 0$ viene dado por

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x^3$$

y por tanto $p_3(1) = 1$.

8. **Solución. (a)**

El teorema del valor medio establece la existencia de un valor $c \in (0, 1)$ para el que se verifica

$$f(1) - f(0) = f'(c) \tag{1}$$

En este caso

$$\begin{aligned} f(1) &= \textstyle\int_0^1 (s^2-1)ds = -2/3 \\ f(0) &= \textstyle\int_0^0 (s^2-1)ds = 0 \\ f'(x) &= x^2 - 1 \end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo directamente en (1) se tiene

$$\frac{-2}{3} = c^2 - 1 \Leftrightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Por tanto $c = \frac{\sqrt{3}}{3} \in (0, 1)$ es el valor buscado.

9. **Solución. (c)**

La función $f(x, y) = \dfrac{x + y^3}{x^2 + 2xy + y^2}$ es continua en el punto $(1, 2)$, luego basta sustituir directamente en el punto para hallar el límite

$$L = \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x + y^3}{x^2 + 2xy + y^2} = \frac{1 + 2^3}{1^2 + 2 \times 1 \times 2 + 2^2} = \frac{9}{9} = 1$$

10. **Solución. (a)**

Representando gráficamente el dominio, se puede comprobar

$$T = \{(x, y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 - x\}$$

Luego

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_0^1 x dx \int_0^{1-x} y dy = \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x=0}^{y=1-x} dx = \int_0^1 x \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \textstyle\int_0^1 x \frac{x^2-2x+1}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)dx = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{2x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3-8+6}{12}\right) = \tfrac{1}{24} \end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2013 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.7 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. La aplicación lineal f definida como $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, 0)$ verifica:
   (a) $\dim \mathrm{Im}(f) = 2$ y $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$
   (b) $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$ y $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$
   (c) $\mathrm{Im}(f)$ está definido por $2x_1 - x_2 = 0$.
   (d) Ninguna de las anteriores

2. La forma cuadrática $w(x_1, x_2) = 2x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + 6x_2^2$ de $\mathbb{R}^2$ verifica:
   (a) Es siempre definida positiva
   (b) Es definida positiva si y sólo si $\lambda = 0$
   (c) Puede ser semidefinida positiva para algún valor de λ
   (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1, 0, -1)$ y $(0, 1, -1)$ y F el subespacio generado por $(1, 1, -2)$, $(2, 1, -3)$ y $(0, 1, -1)$. Entonces se verifica:
   (a) $V \subseteq F$ y $F \not\subseteq V$
   (b) $V \subseteq F$ y $F \subseteq V$
   (c) $V \not\subseteq F$ y $F \subseteq V$
   (d) Ninguna de las anteriores

4. El valor de la integral
$$I = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x| \, dx$$
   es:
   (a) $I = -1$ (b) $I = 3$ (c) $I = 2$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $f(x,y) = xy^2e^{x^2+y^2}$, entonces el valor de la derivada $D_{12}f(1,1)$ es:

(a) $D_{12}f(1,1) = 10e^2$ (b) $D_{12}f(1,1) = 12e^2$

(c) $D_{12}f(1,1) = 11e^2$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(i) Las ecuaciones paramétricas de los subespacios de vectores propios de A (1pto.)

(ii) Decidir si A diagonaliza. En caso afirmativo, calcular una matriz de cambio de base P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal. (1pto.)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea la función $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x,y) = \int_0^{x^2+y^4} (s+1)ds.$$

Se pide:

(i) Hallar el valor de $F(1,1)$. (1pto.)

(ii) Calcular la derivadas parciales $D_1F(1,1)$, $D_2F(1,1)$. (1pto.)

FMI. Febrero 2013 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (b)** El Núcleo es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y tiene como ecuaciones cartesianas: $2x_1 - x_2 = 0$. Por lo tanto es de dimensión 2. Como la suma de la dimensión de la imagen y la dimensión del núcleo es 3, la dimensión de la imagen es 1.

2. **Solución. (c)** La matriz asociada a la forma cuadrática en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 2 & \lambda/2 \\ \lambda/2 & 6 \end{pmatrix}$. El determinante es $12 - \frac{a^2}{4}$ y se anula para $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$. Teniendo es cuenta la clasificación de formas cuadráticas según el criterio de Silvester (página 129), Q es definida positiva si y sólo si
$$-4\sqrt{3} < \lambda < +4\sqrt{3}.$$
Luego A) y B) son falsas. Si $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$ el determinante es nulo y la forma cuadrática sería semidefinida positiva. En efecto, supongamos que $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$. Sea D la matriz reducida asociada a A, es decir, $D = P^t AP$ para cierta matriz regular P. Como $\det(A)\det(P)^2 = \det(D)$, entonces también $\det(D) = 0$. Por lo tanto $D = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ o bien $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ para saber si d es positivo o negativo basta con tomar valores en la expresión $w(x_1, x_2) = 2x_1^2 + \lambda x_1 x_2 + 6x_2^2$ siendo $\lambda = \pm 4\sqrt{3}$. Como $w(1, 0) > 0$, no puede suceder que $d < 0$ ya que en ese caso sería semidefinida negativa.

3. **Solución. (b)** Es fácil comprobar que la dimensión de V es 2 y la dimensión de F es 2 (obsérvese que el determinante es 0). Debido a que $(0, 1, -1)$ pertenece a V y a F, basta comprobar que el primer vector de V, $(1, 0, -1)$, pertenece a F para concluir que $V \subset F$. En efecto,
$$(1, 0, -1) = -(1, 1, -2) + (2, 1, -3).$$
Por lo tanto $V \subseteq F$. Pero como ambos tienen la misma dimensión 2, se tiene que $F = V$. También se puede razonar por el rango de un sistema de vectores.

4. **Solución. (b)** Por definición
$$|\cos x| = \begin{cases} \cos x & \text{si } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ -\cos x & \text{si } x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Luego

$$\int_0^{\frac{3\pi}{2}} |\cos x|\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - [\operatorname{sen} x]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 + 1 - (-1) + 1 = 3$$

5. **Solución. (b)** Derivando sucesivamente

$$D_1 f(x,y) = D_1[xy^2 e^{x^2+y^2}] = y^2 e^{x^2+y^2} + xy^2 2x e^{x^2+y^2}$$
$$= \left(y^2 + 2x^2y^2\right) e^{x^2+y^2},$$
$$D_{12} f(x,y) = D_2\left[\left(y^2 + 2x^2y^2\right) e^{x^2+y^2}\right] = \left(2y + 4x^2 y\right) e^{x^2+y^2}$$
$$+ \left(y^2 + 2x^2y^2\right) 2y e^{x^2+y^2}$$

Evaluando la derivada en el punto

$$D_{12} f(1,1) = 6e^2 + 6e^2 = 12e^2$$

- Problema **a)**. El polinomio característico es $(2-\lambda)^2(1-\lambda)$. Cuyas raíces son 2 (doble) y 1.
  Las ecuaciones cartesianas que definen el subespacio de vectores propios de valor propio 2 se obtienen de:

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & -1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

es decir, el plano $y - z = 0$. Luego una base es $\{(1,1,1),(0,1,1)\}$. Unas posibles ecuaciones paramétricas del subespacio de vectores propios de valor propio 2 son:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & \alpha + \beta \\ z & = & \alpha + \beta \end{array} \right.$$

Las ecuaciones cartesianas que definen el subespacio de vectores propios de valor propio 1 se obtienen de:

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir, $y = 0$, $x = z$ (un subespacio de dimensión 1). Luego, unas ecuaciones paramétricas que definen el subespacio de vectores propios de valor propio 1 son:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \alpha \\ y & = & 0 \\ z & = & \alpha \end{array} \right.$$

Por ejemplo, el vector $(1, 0, 1)$ genera el subespacio de vectores propios asociados al valor propio 1.
Por tanto, la matriz A diagonaliza (ya que coinciden las multiplicidades geométricas de cada valor propio ocn las multiplicidades algebraicas).

Una matriz de paso P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal puede ser: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

En efecto, $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- Problema **b)**.

  i) Sustituímos el valor y calculamos directamente la integral

$$F(1,1) = \int_0^{1^2+1^4} (s+1)ds = \int_0^2 (s+1)ds = \left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=0}^{s=2} + [s]_{s=0}^{s=2} = 2+2 = 4.$$

  ii) Definamos $h(z) = z + 1$. Aplicando la regla de la cadena y el teorema fundamental de cálculo integral se tiene

$$\begin{array}{lcl} D_1F(x,y) & = & D_1(x^2+y^4) \times \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_0^z (s+1)\right]_{z=x^2+y^4} = 2x\left(x^2+y^4+1\right) \\ D_2F(x,y) & = & D_2(x^2+y^4) \times \left[\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int_0^z (s+1)\right]_{z=x^2+y^4} = 4y^3\left(x^2+y^4+1\right) \end{array}$$

  Por tanto

$$\begin{array}{lcl} D_1F(1,1) & = & 2x\left(x^2+y^4+1\right) = 2 \cdot 3 = 6 \\ D_2F(1,1) & = & 4y^3\left(x^2+y^4+1\right) = 4 \cdot 3 = 12 \end{array}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Feb. 2013 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.7 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. En el conjunto $V = \{(x_1, x_2)\colon x_1 > 0,\ x_2 \in \mathbb{R}\}$ con la operación
$$(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1 y_1, x_2 + y_2)$$
verifica
(a) Es un grupo conmutativo
(b) No posee la propiedad elemento simétrico
(c) El elemento neutro es $(0, 0)$
(d) Ninguna de las anteriores

2. Si $a \in \mathbb{R}$, la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ de expresión $4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2ax_2x_3$ es definida positiva siempre que:
(a) $a \in [-2, 2]$ (b) $a = -2$ ó $a = 2$
(c) $a > 0$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Señale el máximo absoluto de f en el intervalo $[0, 2]$.
(a) 0 (b) -1 (c) $1/2$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor del siguiente límite
$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$
(a) $L = 1$ (b) $L = 0$ (c) $L = \infty$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea P_2 el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ en el punto $(x,y) = (0, \sqrt{\pi})$. Señale el valor $P_2(0,0)$.
(a) $P_2(0,0) = -1 + 2\pi$ (b) $P_2(0,0) = 0$
(c) $P_2(0,0) = -1 - 2\pi$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Si f es la aplicación de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z) = (x - 3y, 0, x, z.)$$

Se pide:

(i) Comprobar que f es aplicación lineal (0.5ptos.)

(ii) Calcular una base del subespacio Imagen de f (0.5ptos.)

(iii) La dimensión del subespacio núcleo de f (0.5ptos.)

(iv) La matriz asociada a f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\{(1,2,0,0),(1,0,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,5)\}$ en $\mathbb{R}^4$. (0.5ptos.)

Problema **b)**(2ptos.) Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(a) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x+ay)^2 dxdy.$$

Se pide:

(i) Hallar el valor de $F(1)$. (1pto.)

(ii) Expresar $F(a)$ en potencias de $a+1$. (1pto.)

FMI. Febrero 2013 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (a)** El elemento neutro es el vector $(1,0)$ (nótese que $x_1 \neq 0$ por definición de V). El elemento simétrico del vector (x_1, x_2) es $(\frac{1}{x_1}, -x_2)$ que pertenece siempre a V. Verifica la propiedad conmutativa y asociativa.

2. **Solución. (d)** Utilizando el criterio de Sylvester resulta que $\triangle_1 = 4 > 0$, $\triangle_2 = 4 > 0$ y $\triangle_3 = 16 - 4a^2$. Por lo tanto la forma cuadrática es definida positiva si y sólo si $a \in (-2, 2)$. Nótese que si $a \in [-2, 2]$ puede ser $a = -2$ o $a = 2$ y en esos casos no es definida positiva. Por otro, no todos los valores positivos de a valen y por eso c) es falsa.

3. **Solución. (c)** La función derivada viene dada por

$$f'(x) = \frac{(1+x^2) - 2xx}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

La derivada es (estrictamente) positiva en el intervalo $[0, 1)$ y estrictamente negativa en $(1, 2]$. Por tanto f crece estrictamente en $[0, 1)$, y decrece en $(1, 2]$. Con lo que $x = 1$ es un punto máximo global y el máximo se alcanza en

$$\max_{x \in [0,2]} f(x) = f(1) = \frac{1}{2}$$

También consideramos como valida la respuesta (**d**), al que haya considerado que el máximo de la función se alcanza en $x = 1$.

4. **Solución. (b)** Multiplicando por el conjugado

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} &= \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Tomando límite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

5. **Solución. (d)** Por definición el polinomio de Taylor buscado viene dado

por

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(0,\sqrt{\pi}) + D_1 f(0,\sqrt{\pi})x + D_2 f(0,\sqrt{\pi})(y-\sqrt{\pi}) + \\ & \frac{1}{2!}(D_{11} f(0,\sqrt{\pi})x^2 + 2D_{12} f(0,\sqrt{\pi})x(y-\sqrt{\pi}) + \\ & D_{22} f(0,\sqrt{\pi})(y-\sqrt{\pi})^2) \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas parciales en el punto $(x,y)=(0,\sqrt{\pi})$,

$$\begin{aligned} & f(0,\sqrt{\pi}) = \cos(0^2 + \sqrt{\pi}^2) = \cos(\pi) = -1 \\ & D_1 f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2x \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0 \\ & D_2 f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2y \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0 \\ & D_{11} f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2 \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) - 4x^2 \cos\left(x^2+y^2\right)\right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0 \\ & D_{12} f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-4xy \cos\left(x^2+y^2\right)\ \right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 0 \\ & D_{22} f(0,\sqrt{\pi}) = \left[-2 \operatorname{sen}\left(x^2+y^2\right) - 4y^2 \cos\left(x^2+y^2\right)\ \right]_{(x,y)=(0,\sqrt{\pi})} = 4\pi \end{aligned}$$

Y por tanto

$$P_2(x,y) = -1 + \frac{1}{2}4\pi(y-\sqrt{\pi})^2,$$

con lo que

$$P_2(0,0) = -1 + \frac{1}{2}4\pi\pi = -1 + 2\pi^2$$

- Problema **a)**. Sea f la aplicación de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^4$ definida por $f(x,y,z) = (x-3y,0,x,z)$.

(i) f es aplicación lineal (0.5ptos.)
Se trata de probar que $f(\lambda(x,y,z)) = \lambda f(x,y,z)$ y $f(x,y,z)+f(x',y',z') = f((x,y,z)+(x',y',z'))$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$ y (x,y,z), $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$. En efecto, $f(\lambda(x,y,z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x - 3\lambda y, 0, \lambda x, \lambda z) = \lambda(x-3y,0,x,z) = \lambda f(x,y,z)$ y
$f(x,y,z)+f(x',y',z') = (x-3y,0,x,z)+(x'-3y',0,x',z') = (x-3y+x'-3y',0,x+x',z+z') = f(x+x',y+y',z+z') = f((x,y,z)+(x',y',z'))$.

(ii) Base del subespacio Imagen de f (0.5ptos.)
Como $f(x,y,z) = (x-3y,0,x,z) = x(1,0,1,0)+y(-3,0,0,0)+z(0,0,0,1)$ y los valores de x, y, $z \in \mathbb{R}$ son cualquiera

$$\operatorname{Ima}(f) = G[(1,0,1,0),(-3,0,0,0),(0,0,0,1)].$$

Como $\{$(1,0,1,0),(-3,0,0,0),(0,0,0,1)$\}$ es linealmente independiente, entonces es base de Ima(f).

(iii) Dimensión del subespacio núcleo de f (0.5ptos.)
Como Ima(f) + Nuc(f) = Dim ($\mathbb{R}^3$) se deduce que Nuc(f) = 0. En efecto, como Nuc$(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon f(x,y,z) = (0,0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon (x-3y,0,x,z) = (0,0,0,0)\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon x-3y = 0,\ x = 0,\ z = 0\} = \{(0,0,0,0)\}$.

(iv) Matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\{(1,2,0,0),(1,0,1,-1),(0,1,0,1),(0,0,0,5)\}$ en $\mathbb{R}^4$. (0.5ptos.)
Como
$f(1,0,0) = (1-0,0,1,0) = (1,0,1,0) = 0(1,2,0,0) + 1(1,0,1,-1) + 0(0,1,0,1) + \frac{1}{5}(0,0,0,5)$
$f(0,1,0) = (0-3,0,0,0) = (-3,0,0,0) = -3(1,2,0,0) + 0(1,0,1,-1) + 6(0,1,0,1) + \frac{-6}{5}(0,0,0,5)$
$f(0,0,1) = (0-0,0,0,1) = (0,0,0,1) = 0(1,2,0,0) + 0(1,0,1,-1) + 0(0,1,0,1) + \frac{1}{5}(0,0,0,5)$
La matriz pedida es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{-6}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

- Problema **b)**. Integrando directamente, hallamos la expresión explícita de la función

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x+ay)^2dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(x^2+2axy+a^2y^2)dxdy = \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}x^2dxdy + 2a\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}xydxdy + a^2\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}y^2dxdy \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1}[y]_{y=-1}^{y=1} + 2a\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1} + a^2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}[x]_{x=-1}^{x=1} \\ &= \frac{4}{3} + a^2\frac{4}{3} \end{aligned}$$

(i) Evaluamos directamente la función $F(1) = \frac{8}{3}$

(ii) Por ser un polinomio de grado 2, basta hallar el desarrollo de Taylor de F en el punto $a = -1$

Como

$$\begin{aligned} F(-1) &= \tfrac{8}{3} \\ F'(-1) &= -\tfrac{8}{3} \\ F''(-1) &= \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

Por tanto

$$F(a) = F(-1)+F'(-1)(a+1)+\frac{F''(-1)}{2}(a+1)^2 = \frac{8}{3}-\frac{8}{3}(a+1)+\frac{4}{3}(a+1)^2$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2013
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.7 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal tal que $f(1,0) = (2,1,-1)$, $f(1,-3) = (1,-1,0)$. Señale la imagen del vector $\mathbf{v} = (1,1)$.
   (a) $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$
   (b) $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$
   (c) $f(\mathbf{v}) = \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$
   (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale el valor del límite $L = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(e^x - 1)}{\ln x}$.
   (a) $L = 1$ (b) $L = 0$
   (c) No existe dicho límite (d) Ninguna de las anteriores

3. Sean las bases de $\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\} \ y \ \mathbf{B} = \{(-1,0,1),(1,0,0),(0,-1,0)\}$$

   Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(1,-1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, encontrar sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.
   (a) $(1,-1,2)$ (b) $(1,2,1)$
   (c) $(-1,-1,2)$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Calcule el valor de la integral

$$I = \int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}dx$$

   aplicando un cambio de variable adecuado.
   (a) $I = -\dfrac{1}{3}$ (b) $I = \dfrac{1}{3}$ (c) $I = \dfrac{-2}{3}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la función de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z) = (\sqrt{xyz}, xyz, x+y+z)$. Señálese el valor de su determinante jacobiano en el punto $(1,1,1)$.
   (a) 0 $\quad$ (b) -1 $\quad$ (c) 1 $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $\mathbb{R}^3$ con la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ y $\mathbb{R}^2$ con la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$.

i) Determínese la matriz de la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{u}_2) &= -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \\ f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

(0.5 pts)

ii) Determínense las ecuaciones paramétricas e implícitas del núcleo Ker f, su dimensión y una base. (1 pto)

iii) Determínese la dimensión y una base de Im f (0.5 ptos).

Problema **b)**(2ptos.)

Se pide:

(i) Sean $f(u,v) = (\sqrt{|v|}, v-u)$, $g(x,y) = (x^2, x^2+y)$. Determínese la diferencial de $F = f \circ g$ en el punto $(1,0)$. (1pto.)

(ii) Calcule la integral $\int_S \left(x + y^2\right) dxdy$ en donde

$$S = \{(x,y) : y \geq x^2,\ y - 2 + x \leq 0,\ y - 2 - x \leq 0\}$$

(1pto.)

FMI. Septiembre 2013 . SOLUCIONES Modelo A.

Solución 1: Se tiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} f\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{4}{3}f\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}f\begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{4}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La solución correcta es la c).

Solución 2: El límite se calcula aplicando de manera consecutiva la regla de L'Hopital dos veces

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0^+} \frac{[\ln(e^x-1)]'}{[\ln x]'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{1}{x}} = \frac{xe^x}{e^x-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(xe^x)'}{(e^x-1)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x+xe^x}{e^x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+0}{1} = 1. \end{aligned}$$

La solución correcta es la a).

Solución 3: La matriz de cambio de base de **A** a **B** es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las coordenadas de **v** respecto de la base son

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La solución correcta es la b).

Solución 4: Consideramos el cambio de variable $x = g(t) = -\sqrt{1-t}$, que tengamos en cuenta implica la relación $t = 1 - x^2$. Tenemos

$$g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1-t}},\ 0 = g(1),\ \ -1 = g(0).$$

Aplicando directamente el teorema de cambio de variable se tiene

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0} x\sqrt{1-x^2}dx &= \int_{0}^{1}\left(-\sqrt{1-t}\right)\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{1-t}}dt\\ &= -\int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{2}dt\\ &= -\frac{1}{2}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{t=0}^{t=1}\\ &= -\frac{1}{3}\end{aligned}$$

La solución correcta es la a).

Solución 5: La matriz jacobiana de derivadas parciales viene dada por

$$Df(1,1,1) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{yz}}{2\sqrt{x}} & \frac{\sqrt{xz}}{2\sqrt{y}} & \frac{\sqrt{xy}}{2\sqrt{z}} \\ yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y su determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La solución correcta es la a).

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**(2ptos.)

i) La matriz de la aplicación tiene como columnas las coordenadas de la imagenes de la base del espacio dominio $\{f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\}$ con respecto de la base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ del espacio imagen. Por tanto, viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

ii) Para hallar las ecuaciones del núcleo se tiene que resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la submatriz asociado a los dos últimas coordenadas es no nulo,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1,$$

el rango de la matriz del sistema, y por tanto de su ampliada, es 2. Luego es un sistema compatible determinado con un parámetro. De hecho podemos considerar la primera coordenada como parámetro y resolver el sistema

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_1 \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_1
\end{aligned}$$

Luego

$$Ker\text{f} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 = x_1,\ x_3 = 0\}$$

Las ecuaciones implícitas son directamente las anteriores. Denotando $x_1 = \lambda$, las ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x_1 = \lambda,\ x_2 = \lambda,\ x_3 = 0$$

Asimismo de esta expresión es claro que Ker f es de dimensión 1, con una base dada por el vector de coordenadas $(1, 1, 0)$ que se corresponde con el vector $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$. Luego la base viene dada por el conjunto

$$A = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2\}$$

(iii) Por el teorema de la dimensión.

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Kerf} = 3 - 1 = 2.$$

Basta por tanto con tomar dos imágenes linealmente independientes como base. En este caso

$$\{f(\mathbf{u}_2), f(\mathbf{u}_3)\} = \{-\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1 - 2\mathbf{w}_2\}$$

constituye directamente un sistema generador linealmente independiente y por tanto base.

Problema **b)**(2ptos.)

(i). Aplicación directa de la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D(f\circ g)(1,0) &= Df(g(1,0))Dg(1,0) \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2\sqrt{v}} \\ -1 & 1 \end{array}\right)_{(u,v)=g(1,0)=(1,1)} \left(\begin{array}{cc} 2x & 0 \\ 2x & 1 \end{array}\right)_{(x,y)=(1,0)} \\ &= \left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

(ii) El recinto tiene la expresión

$$S=\{(x,y): y\le 2-x,\, y\le 2+x,\, x^2\le y\},$$

y por tanto está delimitado por la rectas $y=x-2$, $y=x+2$ y la parabola $y=x^2$. Gráficamente se observa que podemos considerar el recinto S como unión de los subrecintos (represéntese S)

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x,y): -1\le x\le 0, x^2\le y\le 2+x\}, \\ S_2 &= \{(x,y): 0\le x\le 1, x^2\le y\le 2-x\}. \end{aligned}$$

Luego la integral se puede calcular como la suma de dos integrales

$$\int_S \left(x+y^2\right)dxdy = \int_{-1}^{0} dx \int_{x^2}^{2+x} (x+y^2)dy + \int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x}(x+y^2)dy.$$

Calculemos cada integral por separado. En primer lugar

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{0} dx\int_{x^2}^{2+x}(x+y^2)dy &= \int_{-1}^{0} x\,[y]_{y=x^2}^{y=2+x}\,dx + \int_{-1}^{0}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2+x} dx \\ &= \int_{-1}^{0} x\left(2+x-x^2\right)dx + \int_{-1}^{0}\left(\frac{(2+x)^3}{3}-\frac{x^6}{3}\right)dx \\ &= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=0} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=0} \\ &\quad + \left[\frac{(2+x)^4}{12}\right]_{x=-1}^{x=0} - \left[\frac{x^7}{21}\right]_{x=-1}^{x=0} \\ &= -1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{16}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{21} = \frac{11}{14}, \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{aligned}
\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} (x+y^2)dy &= \int_{-1}^{0} x\,[y]_{y=x^2}^{y=2-x}\,dx + \int_{-1}^{0} \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=2-x} dx \\
&= \int_0^1 x\left(2-x-x^2\right)dx + \int_0^1 \left(\frac{(2-x)^3}{3} - \frac{x^6}{3}\right)dx \\
&= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&\quad + \left[-\frac{(2-x)^4}{12}\right]_{x=0}^{x=1} - \left[\frac{x^7}{21}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{16}{12} - \frac{1}{21} = \frac{34}{21}
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_S \left(x+y^2\right) dxdy = \frac{11}{14} + \frac{34}{21} = \frac{101}{42}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2014 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{M}_2$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden 2. Consideramos $*$ la operación definida por

$$A * B = B^T \times A^T \text{ para todo } A, B \in \mathbb{M}_2,$$

en donde $\times$ denota el producto usual de matrices. De las siguientes elecciones de subconjuntos señale el número de ellos para los que $*$ continúa siendo una operación. Es decir, dadas las afirmaciones:

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices diagonales

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices triangulares inferiores

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

- $*$ es una operación sobre el conjunto de matrices

$$M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Señale el número de ellas qué son verdaderas.

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) Ninguna de las anteriores

2. Sean las bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{(1,0),(-1,1)\} \\ \mathbf{B} &= \{(-1,1),(0,1)\} \end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^2$. Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(2,1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.

(a) $(-1,2)$ (b) $(1,-1)$ (c) $(1,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x_1,x_2)=(x_1,x_2,x_1-x_2,0).$$

Señale las ecuaciones implícitas del subespacio imagen $\mathrm{Im} f$.

(a) $y_1+y_2+y_3=0,\ y_4=0$ (b) $y_1-y_2-y_3=0,\ y_4=0$

(c) $y_1+y_2-y_3=0,\ y_4=0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea p_2 el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x)=\cos(xe^x)$ en el punto $x=0$. Señale la respuesta correcta.

(a) $p_2(1)=0$ (b) $p_2(1)=-1$ (c) $p_2(1)=1$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Señale el valor de la integral

$$I=\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx.$$

(a) $I=-1$ (b) $I=2$ (c) $I=1/2$ (d) Ninguna de las anteriores

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**(2ptos.)

Sea la aplicación $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_3 \\ f(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2 \\ f(\mathbf{u}_3) &= 2\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

en donde $\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$

(a) Señale la matriz de la aplicación. (0.5 ptos)

(b) Determínense las ecuaciones implícitas del $\ker f$, su dimensión y una base. (0.75 ptos)

(c) Determínense las ecuaciones implícitas de $Im\, f$, su dimensión y una base. (0.75 ptos)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$F(t) = f(r(t)),$$

en donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función definida por

$$f(x, y) = xy^2 + x^2y$$

y $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ es una función que toma valores

$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(i) Calcule la integral $\int_M f(x, y)dxdy$ en donde

$$M = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\}.$$

(1 pto)

(ii) Calcule la derivada $F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. (1 pto)

FMI. Febrero 2013 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (b)** Se trata de ver para cada subconjunto si para cualesquiera A, $B \in M_i$ entonces

$$A * B \in M_i \text{ para todo } i = 1, ..., 4.$$

- $*$ es una operación sobre M_1 ya que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & b_1b_2 \end{pmatrix} \in M_1\end{aligned}$$

- $*$ es un operación sobre sobre M_2 ya que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} b_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} a_1b_2 & 0 \\ 0 & a_1b_2 \end{pmatrix} \in M_2\end{aligned}$$

- $*$ no una operación sobre M_3 ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3$$

  y se tiene

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin M_3\end{aligned}$$

- $*$ no es una operación sobre M_4 ya que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4$$

  y se tiene

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \notin M_4\end{aligned}$$

2. **Solución.** **(a)** Lo haremos cambiando primeramente de **A** a la base canónica y posteriormente a la base **B**. Con respecto de la base canónica el vector tiene por coordenadas

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de cambio de base de la canónica a la base **B** es directamente

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el vector toma las coordenadas

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. **Solución.** **(b)** Como

$$\dim \mathbb{R}^4 - \dim Imf = 4 - 2 = 2$$

hay dos ecuaciones implícitas.Un vector genérico (y_1, y_2, y_3, y_4) de Imf verifica

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ y_3 &= x_1 - x_2 \\ y_4 &= 0 \end{aligned}$$

que nos da directamente las ecuaciones paramétricas de Imf. Una ecuación implícita es directamente $y_4 = 0$. Para hallar la segunda ecuación basta eliminar los parámetros sumando la primera con la tercera ecuación y restársela a la segunda

$$y_1 - y_2 - y_3 = x_1 - x_2 - (x_1 - x_2) = 0$$

4. **Solución.** **(d)** Las derivadas en el punto $x = 0$ vienen dadas por

$$\begin{aligned} &f(0) = \cos(xe^x)\big]_{x=0} = \cos 0 = 1 \\ &f'(0) = -\left(xe^x\right)' \operatorname{sen}(xe^x)\Big]_{x=0} = -e^x(1+x)\operatorname{sen}(xe^x)\big]_{x=0} = -sen0 = 0 \\ &f''(0) = -e^x(2+x)\operatorname{sen}(xe^x) - e^{2x}(1+x)^2\cos(xe^x)\Big]_{x=0} = -1 \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor viene dado por

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Luego

$$p_2(1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

5. **Solución. (b)** Como

$$\left((\ln x)^2\right)' = 2\,(\ln x)' \ln x = \frac{2}{x}\ln x \Rightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\left((\ln x)^2\right)'}{2}$$

entonces

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}\int_1^{e^2} \left((\ln x)^2\right)' dx = \frac{1}{2}\left(\left(\ln e^2\right)^2 - \left(\ln 1^2\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2}(4-0) = 2. \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**(2ptos.) (a) La matriz A de la aplicación tiene como columnas las coordenadas de la imágenes de la base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ con respecto de la misma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$. Directamente

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) Ker $f = \left\{ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : AX = 0 \right\}$.El sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es compatible indeterminado con un parámetro. De hecho considerando $x_3 = \lambda$ como parámetro, la solucion del sistema viene dada por

$$\text{Ker } f = \{(-\lambda, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

De aquí directamente obtenemos que Ker f tiene dimensión 1 y $\{(-1,-1,1)\}$ es una base. Como

$$\dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Ker}\ f = 3 - 1 = 2,$$

necesariamente tiene que haber dos ecuaciones implícitas. De

$$\begin{aligned} x_1 &= -\lambda \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= \lambda \end{aligned}$$

sumando las dos primeras ecuaciones y restando la tercera multiplicada por el factor 2 eliminamos el parámetro y obtenemos la primera ecuación implícita

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -\lambda - \lambda + 2\lambda = 0$$

Del mismo modo restando las dos primeras ecuaciones obtenemos una segunda ecuación implícita linealmente independiente a la anterior

$$x_1 - x_2 = -\lambda - (-\lambda) = 0$$

Luego las ecuaciones implícitas vienen dadas por

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ &x_1 - x_2 = 0 \end{aligned}$$

(c) Por el teorema de la dimensión, $\dim \operatorname{Im} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker\, f = 3 - 1 = 2$. Las ecuaciones parámetricas viene dadas directamente por

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 &= x_1 - x_2 \\ y_3 &= -x_1 - x_3 \end{aligned}$$

Sumando la dos primeras ecuaciones y la tercera multiplicada por el factor 2 eliminamos parámetros y obtenemos la única ecuación implícita

$$y_1 + y_2 + 2y_3 = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_1 - x_2 + 2(-x_1 - x_3) = 0$$

Una base viene dada por dos vectores linealmente independiente que verifiquen la ecuación, por ejemplo

$$\{(1,1,-1),(2,0,-1)\}$$

Problema **b)**(2ptos.) (i) El recinto integración viene dado por

$$M = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1, |y| \leq 1\} = [-1,1] \times [-1,1]$$

Integrando directamente

$$\begin{aligned}
\int_M f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (xy^2 + x^2y)dxdy \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy^2 dxdy + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^2 y dxdy \\
&= \left(\int_{-1}^{1} xdx\right)\left(\int_{-1}^{1} y^2 dy\right) + \left(\int_{-1}^{1} ydy\right)\left(\int_{-1}^{1} x^2 dx\right) \\
&= \left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=-1}^{y=1}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-1}^{x=1} + \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-1}^{y=1}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right) \\
&= 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

(ii) Aplicando la regla de la cadena

$$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = Df(r(\frac{\pi}{4}))r'(\frac{\pi}{4}) =$$

Como

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 + 2xy & 2xy + x^2 \end{pmatrix}$$

se tiene directamente

$$\begin{aligned}
F'(\frac{\pi}{4}) &= Df\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) r'\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} & 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = 0
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2014 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix},$$

señale su posible matriz inversa

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ \cos x & -\operatorname{sen} x & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Dados los conjuntos de matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{A}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \\ \mathbf{A}_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Señale el número de ellos que son base del espacio vectorial $\mathbb{M}_2$ de matrices cuadradas de orden 2.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la función $f(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-3}$, señale el valor de la integral

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

(a) $I = 1$ $\quad$ (b) $I = 1/2$ $\quad$ (c) $I = 3$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x - e^y}{e^{x-y} - 1}$$

(a) 1 $\quad$ (b) 0 $\quad$ (c) e $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} (e^x - 1)/x & si \quad x \neq 0, \\ 1 & si \quad x = 0. \end{cases}$$

Señale el valor de su derivada en el punto $x = 0$.

(a) $f'(0) = 1/3$ $\quad$ (b) No existe $f'(0)$

(c) $f'(0) = 1/2$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $f(x_1, x_2) = (-7x_1 + 6x_2, -9x_1 + 8x_2)$ una aplicación lineal referida a la base canónica. Se pregunta:

(i) Halle la matriz asociada de f con respecto a la base $\mathbf{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$. (1 pto)

(ii) Estudiar si es diagonalizable, y en caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea la función

$$f(x, y) = (x + y)^2$$

(i) Señale sus máximos y mínimos absolutos en el conjunto

$$A = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

(1 pto)

(ii) Calcule la integral $\int_M f(x,y)dxdy$ en donde

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

(1 pto)

FMI. Febrero 2014 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (c)** Basta hacer directamente la operación de la matriz por la tres posibles candidatas para ver que efectivamente la matriz

$$\begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \sin x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

es la inversa buscada. Operando directamente se tiene

$$\begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & -\cos x & 0 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} x + \cos x & \operatorname{sen} x - \cos x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x & 0 \\ -\cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. **Solución. (a)** Basta comprobar que las matrices que tienen por columnas las coordenadas de los vectores de lo conjuntos con respecto a la base canónica

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

tiene rango 4, equivalentemente que dicha matriz tiene determinante no nulo.

- Para el caso de $\mathbf{A}_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  por tanto los vectores son linealmente dependientes y no constituyen una base.

- Para el caso de $\mathbf{A}_2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

y por tanto constituye una base.

- De igual forma para el caso de $\mathbf{A}_3$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

los vectores son linealmente dependientes, y por tanto no es una base.

3. **Solución. (c)** Integramos directamente

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^3} = \left[\frac{-2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-3+1}}{-3+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - 1 = 4 - 1 = 3$$

4. **Solución. (c)** Basta simplificar

$$\frac{e^x - e^y}{e^{x-y} - 1} = e^y \frac{e^{x-y} - 1}{e^{x-y} - 1} = e^y$$

y tomar límite directamente

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{e^x - e^y}{e^{x-y} - 1} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} e^y = e.$$

5. **Solución. (c)** Como

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{e^h - 1}{h} - 1}{h} = \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \frac{e^h - 1 - h}{h^2}$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1 - h}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1 - h\right)'}{\left(h^2\right)'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(e^h - 1\right)'}{\left(2h\right)'} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^h}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

en donde hemos aplicado dos veces consecutivamente la regla de L'Hôpital.

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) (i) Matricialmente la aplicación lineal se puede expresar como

$$Y = PX = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} X$$

en donde $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ vectores columna de coordenadas respecto de la base canónica. Denotado por Y', X' la coordenadas respecto de la nueva base $\mathbf{B} = \{(1,-1),(1,1)\}$ la matriz de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base canónica viene dada por

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

luego

$$Y = BY' \Rightarrow Y' = B^{-1}Y = B^{-1}PX = B^{-1}PBX'$$

y la matriz asociado respecto de la base B viene dada por

$$\begin{aligned} B^{-1}PB &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -15 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = |A - \lambda I| = \left| \begin{pmatrix} -7-\lambda & 6 \\ -9 & 8-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - \lambda - 2$$

y los valores propios las raíces de la ecuació $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$. Por ser diferentes ya sabemos que la matriz es diagonalizable por el teorema de caracterización. Los subespacios propios vienen dados por

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$.

$$\mathbb{E}_1 = \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \{(x_1, x_2) : -3x_1 + 2x_2 = 0\}$$

Es claramente de dimensión uno, siendo el vector $\{(2,3)\}$ una posible base.

- Subespacio propio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$.

$$\mathbb{E}_2 = \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\}$$

En este caso también de dimensión 1, siendo el vector $\{(1,1)\}$ otra posible base.

La matriz de paso sería

$$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

y la matriz diagonal correspondiente

$$D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**(2ptos.) (i) Se trata de minimizar la función $f(x,y) = (x+y)^2$ en un cuadrado $[-1,1] \times [-1,1]$. Por la forma de la función una manera ad-hoc de hacerlo es ver que en las rectas $\bar{x} + \bar{y} = k$ (k constante) la función toma valor constante

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x} + \bar{y})^2 = k^2$$

Formalmente si consideramos los conjuntos $E_k = \{(x,y) : x + y = k\} \cap A$, se tiene que $A = \bigcup\limits_{k \in [-1,1]} E_k$. Como $f(E_k) = k^2$ los mínimos y máximos globales coinciden con los conjuntos

$$\begin{aligned} &\text{Mínimos globales} \equiv E_0 = \{(x,y) : x + y = 0,\ x \in [-1,1]\} \\ &\text{Máximos globales} \equiv E_1 \cup E_{-1} = \{(-1,-1), (1,1)\} \end{aligned}$$

respectivamente.

(ii) Calculamos la integral directamente

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(x+y)^2dydx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}(x^2+y^2+2xy)dydx \\
&= \int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx + \int_{-1}^{1}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x^2}dx \\
&\quad + \int_{-1}^{1}2x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1-x^2}dx \\
&= \int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx + \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^3}{3}dx \\
&\quad + \left(\int_{-1}^{1}x(1-x^2)^2dx\right) \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}
$$

Cada integral viene dada por

- $$I_1 = \int_{-1}^{1}x^2(1-x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$

- $$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_{-1}^{1}\frac{(1-x^2)^3}{3}dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(1-3x^2+3x^4-x^6)dx \\
&= \frac{1}{3}\left(2 - 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} + 3\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1} - \left[\frac{x^7}{7}\right]_{x=-1}^{x=1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2 - 3\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{2}{5} - \frac{2}{7}\right) = \frac{32}{105}
\end{aligned}
$$

- $I_3 = 0$, ya que $\int_{-1}^{1}x(1-x^2)^2dx = \int_{-1}^{1}(x+x^5-2x^3)dx = \left[x^2\right]_{x=-1}^{x=1} + \left[\frac{x^6}{6}\right]_{x=-1}^{x=1} - 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=1} = 0$

Luego finalmente

$$I = \frac{4}{15} + \frac{32}{105} = \frac{4}{7}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2014
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Considere la operación $*$ sobre el conjunto de los números reales $M = \mathbb{R}$ definida por
$$a * b = 10^{a+b} \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$
Dadas las siguientes afirmaciones con respecto a la operación $*$
   - $*$ es conmutativa.
   - El elemento inverso de $a = 2$ viene dado por $a' = 1/2$.
   - El elemento neutro viene dado por $e = 1$.

   Señale el número de ellas que son ciertas.
   (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Consideramos el espacio vectorial de polinomios de grado 2,
$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$$
y la base de dicho espacio
$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1(x) = 1, \mathbf{p}_2(x) = x^2 - 1, \ \mathbf{p}_3(x) = x - 1\}$$
Dado el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = x^2 + x + 1$ señale su vector de coordenadas con respecto a la base $\mathbf{A}$.
(a) $(1, 2, 1)$ (b) $(3, 1, 1)$ (c) $(1, 3, 1)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

señale su derivada en el punto $x = 0$.

(a) No existe $f'(0)$ (b) $f'(0) = 1$

(c) $f'(0) = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida como

$$f(x) = \int_0^{2-\ln x} ue^u du$$

Calcule el valor de la derivada $f'(1)$.

(a) $f'(1) = -4e^2$ (b) $f'(1) = -2e^2$

(c) $f'(1) = 2e$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean $f(u, v) = (1 + e^x, e^{xy})$, $g(x, y) = (xy, x - y)$. Determínese la diferencial de la función compuesta $H = f \circ g$ en el punto $(1, 0)$.

(a) $H'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e & -e \end{pmatrix}$ (b) $H'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $H'(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -e & e \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)** (2ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 + 2x_3)$$

en la base canónica.

(i) Determinar los valores propios y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a ellos. (1 pto)

(ii) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

calcule sus derivada parciales $D_1f(0,0)$, $D_2f(0,0)$. (1 pto)

(ii) Calcule la integral

$$I = \int_S (x-y)^2 dxdy$$

en donde

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq x^2 + y^2 \geq 1,\, x \geq 0\}.$$

(1 pto)

FMI. Septiembre 2014 SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)** Claramente la operación es conmutativa como consecuencia de la conmutatividad de la suma de números reales. En cambio el elemento neutro de $*$ no existe. Por ejemplo si consideramos el punto $\bar{a} = 0$ si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{R}$, éste debería verificar

$$e * 0 = 0,$$

lo que es equivalente a que

$$10^e = 0.$$

Como no existe ningún e verificando la identidad anterior, entonces no puede existir elemento neutro y consecuentemente tampoco el inverso.

2. **Solución. (b)** Directamente, podemos desarrollar en función de los elementos de la base para ver si el polinomio asociado nos da el polinomio pedido. Como

$$\begin{array}{c} 1 \cdot 1 + 2 \cdot (x^2 - 1) + 1 \cdot (x - 1) = 2x^2 + x - 2, \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot (x^2 - 1) + 1 \cdot (x - 1) = x^2 + x + 1, \\ 1 \cdot 1 + 3 \cdot (x^2 - 1) + 1 \cdot (x - 1) = 3x^2 + x - 3. \end{array}$$

Por tanto el vector de coordendas $(3, 1, 1)$ se corresponde con el polinomio $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = x^2 + x + 1$ y la respuesta correcta es la (b).

3. **Solución. (c)** Aplicamos directamente la definición de derivada

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{h})}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}(\frac{1}{h}) = 0.$$

4. **Solución. (b)** Podemos expresar la función f como composición de dos funciones

$$f = g \circ h,$$

en donde $g(x) = \int_0^x ue^u du$, $h(x) = 2 - \ln x$. Por la regla de la cadena

$$f'(1) = (g \circ h)'(1) = g'(h(1))h'(1)$$

Por un lado

$$\begin{array}{l} h'(1) = -\frac{1}{x}\Big|_{x=1} = -1, \\ h(1) = 2 - \ln 1 = 2. \end{array}$$

Por otro lado aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral

$$g'(h(1)) = g'(2) = ue^u\big|_{x=2} = 2e^2.$$

Finalmente

$$f'(1) = g'(h(1))h'(1) = 2e^2 \cdot (-1) = -2e^2.$$

5. **Solución. (d)** La diferencial se calcula aplicando la regla de la cadena

$$DH(1,0) = Df(g(1,0)) \times Dg(1,0).$$

Operando

$$Dg(1,0) = \left.\begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Df(g(1,0)) = Df(0,1) = \left.\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{pmatrix}\right|_{(x,y)=(0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente

$$DH(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**(2ptos.) La matriz viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico asociado

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+4\lambda^2-5\lambda+2 = -(\lambda-2)(\lambda-1)^2$$

cuya raíces son $\lambda_1 = 1$ (doble), $\lambda_2 = 2$

El subespacio vectorial

$$\mathbb{E}_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - I)X = 0\}$$

asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ viene determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned}(A-I)\,X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_3 = x_2 - x_1\end{aligned}$$

Como

$$\mathbb{E}_1 = \{(x_1, x_2, -x_1 + x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,0,-1) + x_2(0,1,1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$
$$= G[(1,0,-1),(0,1,1)]$$

$\{\mathbf{v}_1 = (1,0,1), \mathbf{v}_2 = (0,1,1)\}$ es un sistema linealmente independiente y generador, luego constituye una base de autovectores de $\mathbb{E}_1$.

Por otra parte el subespacio vectorial

$$\mathbb{E}_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 : (A-2I)\,X = 0\}$$

asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$ viene dado por

$$\begin{aligned}(A-2I)\,X &= 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \quad x_2 - 2x_1 - x_3 = 0, \ \ - x_1 - x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \ x_2 = x_1,\ x_3 = -x_1\end{aligned}$$

Luego

$$\mathbb{E}_2 = \{(x_1, x_1, -x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1,1,-1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = G[(1,1,-1)]$$

y directamente $\{\mathbf{v}_3 = (1,-1,1)\}$ es la otra base buscada.

Como la dimensión de los subespacios coincide con la multiplicidad de los autovalores en cada caso por el Teorema de caracterización podemos concluir que la matriz es diagonalizable con una posible base de autovectores dada por

$$\{\mathbf{v}_1 = (1,0,-1),\ \mathbf{v}_2 = (0,1,1),\ \mathbf{v}_3 = (1,1,-1)\}$$

cuya matriz diagonal asociada es

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

De hecho compruébese que la matriz de paso viene dada por

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y que

$$D = QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Para calcular las derivadas parciales aplicamos directamente la definición

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{t^2 0 + t^3}{t^2 + 0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^3} = 1. \\ D_2 f(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{0^2 t + 0^3}{0^2 + t^2} - 0}{t} = 0. \end{aligned}$$

(ii) Desarrollamos el integrando

$$\int_S (x-y)^2 dxdy = \int_S (x^2 + y^2 - 2xy) dxdy$$

Mediante un cambio a polares $x = r\cos\theta$, $y = r sen\theta$, $dxdy = r dr d\theta$

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \geq x^2 + y^2 \geq 1,\ x \geq 0\} \\ &= \left\{(r,\theta) : 1 \leq r \leq \sqrt{2},\ -\tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{2}\right\}, \end{aligned}$$

calculamos la integral sustituyendo directamente

$$
\begin{aligned}
\int_S (x^2+y^2-2xy)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}}(r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta - 2r\cos\theta r sen\theta) r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}}(r^2 - r^2 sen 2\theta) r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}}(r^2 - r^2 sen 2\theta) r dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} sen 2\theta d\theta \int_1^{\sqrt{2}} r^3 dr d\theta \\
&= \pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=\sqrt{2}} - \left[\frac{-\cos 2\theta}{2}\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=1}^{r=\sqrt{2}} \\
&= \pi\frac{4-1}{4} + 0 = \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}
$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2015 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\lozenge$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \lozenge : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \lozenge m = |n - m| \end{array}$$

en donde recordemos que $|\cdot|$ denota el valor absoluto. De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\lozenge$ es asociativa
- $\lozenge$ es conmutativa
- No existe elemento neutro

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Señale las ecuaciones implícitas del subespacio vectorial $\mathbb{A}$ generado por los vectores $\mathbf{v} = (1, -1, 1)$, $\mathbf{w} = (1, 0, 1)$.
(a) $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 - x_1 = 0\}$
(b) $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_3 = 0\}$
(c) $\mathbb{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 - x_1 = 0\}$
(d) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor de la integral $I = \int_0^1 \dfrac{xdx}{(1 + x^2)^4}$.

(a) $\dfrac{7}{48}$ (b) $\dfrac{3}{16}$ (c) $\dfrac{5}{42}$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor de la integral $I = \int_M (x^2 + y^2) dxdy$ en donde

$$M = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0, \ -1 \leq y \leq 1\}.$$

$(a)\ I = \dfrac{1}{3}$ $\quad (b)\ I = \dfrac{8}{3}$ $\quad (c)\ I = \dfrac{2}{3}$ $\quad (d)$ Ninguna de las anteriores

5. Sean las funciones $f(x, y) = (x^2 + y^2, xy)$, $g(u, v) = (u^3, u + v)$. Determínese la diferencial de la función compuesta $H = g \circ f$ en el punto $(0, 1)$.

$(a)\ DH(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (b)\ DH(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$(c)\ DH(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad (d)$ Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal D y la base a la que está referida. (1 pto)

(ii) Calcule razonadamente la matriz potencia A^{11}. (Notación: $A^n = A \times A^{n-1}$ para todo $n = 2, 3, ...$) (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Exprese el polinomio $p(x) = x^4 - 1$ en potencias de $x + 1$. (1 pto)

(ii) Calcule el valor de la integral

$$I = \int_M \sqrt{x + y}\, dxdy$$

en donde $M = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, \ 0 \leq y \leq 1\}$. (1 pto)

FMI. Enero 2015 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)**

- $\Diamond$ no es asociativa . Basta tomar $n = 1$, $m = 2$, $q = 3$, en dicho caso se tiene
$$(n\Diamond m)\Diamond q = (1\Diamond 2)\Diamond 3 = 1\Diamond 3 = 2$$
$$\neq$$
$$n\Diamond(m\Diamond q) = 1\Diamond(2\Diamond 3) = 1\Diamond 1 = 0.$$

- $\Diamond$ es conmutativa. Aplicando propiedades del valor absoluto, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene
$$n\Diamond m = |n - m| = |-(n - m)| = |m - n| = m\Diamond n.$$

- $e = 0$ es el elemento neutro, ya que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene
$$\begin{aligned} n\Diamond 0 &= |n - 0| = n, \\ 0\Diamond n &= |0 - n| = n. \end{aligned}$$

2. **Solución. (a)**

El subespacio viene dado por

$$\begin{aligned} &A = G[(1, -1, 1), (1, 0, 1)] = \{(x_1, x_2, x_3) = \lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(1, 0, 1)\} \\ &= \lambda_1(1, -1, 1) + \lambda_2(1, 0, 1)\} \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

Las ecuaciones paramétricas vienen dadas por tanto por

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ x_2 &= -\lambda_1, \\ x_3 &= \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Eliminamos los parámetros sustituyendo la segunda ecuación en la primera y tercera $x_1 = -x_2 + \lambda_2$, $x_3 = -x_2 + \lambda_2$ e igualando ambas expresiones

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 0.$$

3. **Solución. (a)**

Teniendo en cuenta que

$$\left[(1 + x^2)^{-3}\right]' = -6x(1 + x^2)^{-3} \Rightarrow x(1 + x^2)^{-4} = -\frac{\left[(1 + x^2)^{-3}\right]'}{6},$$

calculamos la integral directamente aplicando la regla de Barrow

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x(1+x^2)^{-4}dx &= \frac{-1}{6}\int_0^1 \left[(1+x^2)^{-3}\right]' dx = \frac{-1}{6}\left[(1+x^2)^{-3}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{-1}{6}\left((1+1)^{-3}-(1+0)^{-3}\right) \\
&= \frac{-1}{6}\left(\frac{1}{8}-1\right) = \frac{7}{48}
\end{aligned}$$

4. **Solución. (d)**

Calculamos la integral directamente

$$\begin{aligned}
\int_M (x^2+y^2)dxdy &= \int_{-1}^1\int_{-1}^0 x^2dxdy + \int_{-1}^1\int_{-1}^0 y^2dxdy \\
&= \left(\int_{-1}^0 x^2dx\right)\left(\int_{-1}^1 dy\right) + \left(\int_{-1}^1 y^2dy\right)\left(\int_{-1}^0 dx\right) \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=0}(1-(-1)) + \left[\frac{y^3}{2}\right]_{y=-1}^{y=1}(0-(-1)) \\
&= 2\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

5. **Solución. (b)**

Aplicamos la regla de la cadena. Como $f(0,1)=(1,0)$ entonces

$$DH(0,1) = Dg(f(0,1)) \times Df(0,1).$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
&DH(0,1) = Dg(1,0)\times Df(0,1) \\
&= \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}_{(u,v)=(1,0)} \times \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,1)} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

y resulta

$$DH(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1$$

que tiene por raíces (autovalores) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Calculamos los subespacios de autovectores asociados:

- Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_1 &= \{(x_1, x_2) : -x - y = 0\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_1 &= G\left[(1, -1)\right]. \end{aligned}$$

- Para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2 &= \left\{ (x_1, x_2) : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_2 &= \{(x_1, x_2) : x - y = 0\} \Leftrightarrow \\ \mathbb{E}_2 &= G\left[(1, 1)\right]. \end{aligned}$$

La base de autovalores es por tanto $\mathbf{B} = \{(1, -1), (1, 1)\}$, con matriz diagonal y de paso

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \, Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

De hecho compruébese

$$\begin{aligned} D &= QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Como $A = Q^{-1}DQ$ las potencias sucesivas se calculan iterativamente de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &A^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}DQ = Q^{-1}D^2Q \\ &A^3 = Q^{-1}DQA^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}D^2Q = Q^{-1}D^3Q \\ &\vdots \\ &A^n = Q^{-1}DQA^{n-1} = Q^{-1}DQQ^{-1}D^{n-1}Q = Q^{-1}D^nQ \end{aligned}$$

Luego

$$A^{11} = Q^{-1}D^{11}Q \tag{1}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
A^{11} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^{11} & 0 \\ 0 & -1^{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Problema **b)**(2ptos.) (i) Al ser f un polinomio de grado 4 su polinomio de Taylor p_4 de grado 4 en el punto $x=-1$ coincide con f y está expresado en potencias de $x+1$. Se trata por tanto de calcular dicho polinomio p_4. Calculamos las derivadas

$$\begin{aligned}
&f(-1) = 0, \\
&f'(-1) = \left[4x^3\right]_{x=-1} = -4, \\
&f''(-1) = \left[12x^2\right]_{x=-1} = 12, \\
&f'''(-1) = [24x]_{x=-1} = -24, \\
&f^{(4}(-1) = 24.
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
f(x) &= p_4(x) = 24\frac{(x+1)^4}{4!} - 24\frac{(x+1)^3}{3!} + 12\frac{(x+1)^2}{2!} - 4(x+1) + 0 \\
&= (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + 6(x+1)^2 - 4(x+1)
\end{aligned}$$

(ii)Calculamos la integral directamente

$$\begin{aligned}
&I = \int_M \sqrt{x+y}dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^1 (x+y)^{\frac{1}{2}}dy\right) dx \\
&= \int_0^3 \left[\frac{(x+y)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{y=0}^{y=1} dx \\
&= \tfrac{2}{3}\left(\int_0^3 (x+1)^{\frac{3}{2}}dx - \int_0^3 x^{\frac{3}{2}}dx\right) \\
&= \tfrac{2}{3}\left(\left[\frac{(x+1)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=3} - \left[\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}\right]_{x=0}^{x=3}\right) \\
&= \tfrac{2}{3}\left(\tfrac{2}{5}\left(2^5-1\right) - \tfrac{2}{5}\left(3^{\frac{5}{2}}-0\right)\right) \\
&= \tfrac{4}{15}\left(2^5 - 9\sqrt{3} - 1\right)
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2015 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ d & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en donde $c, d \in \mathbb{R}$ parámetros. Señale para qué valores de c, d el sistema lineal $AX = B$ tiene solución única para cualquier termino independiente $B \in \mathbb{R}^4$.

(a) Para cualesquiera $c, d \in \mathbb{R}$ (b) $15c - 33d \neq 0$
(c) $17c - 12d \neq 0$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideremos la operación $\Diamond$ definida de la siguiente manera

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n, m) & \longmapsto & n \Diamond m = 1 + n \cdot m \end{array}$$

De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- No existe elemento neutro para $\Diamond$

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la función

$$f(x,y) = (x-y)^6 + (x+y)^6$$

señale cuál es la expresión correcta.

(a) $D_{11}f(x,y) = -D_{22}f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(b) $D_{11}f(x,y) = D_{22}f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(c) $D_{11}f(x,y) = 6D_{22}f(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$
(d) Ninguna de las anteriores

4. Calcule el siguiente límite

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{3 - \sqrt{2x+9}}{2x}$$

(a) $L = -1/18$ (b) $L = -1/9$
(c) $L = -1/6$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Halle el valor de la integral $I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} x^4 y^{10} dx dy$.

(a) $I = \dfrac{4}{37}$ (b) $I = 0$ (c) $I = \dfrac{4}{55}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $\mathbb{P}_k$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a k. Consideramos la aplicación $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$ que a cada polinomio $\mathbf{p} = ax^2 + bx + c$ le hace corresponder el polinomio

$$F(\mathbf{p}) = bx + a.$$

Se pide:

(i) Demostrar que F es una aplicación lineal. (1 pto)

(ii) Hallar la matriz asociada de F con respecto de la bases

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{p}_1(x) = -1, \mathbf{p}_2(x) = x - 1, \mathbf{p}_3(x) = (x+3)^2\right\},$$
$$\mathbf{B} = \{\mathbf{q}_1(x) = -x, \mathbf{q}_2(x) = 2\}.$$

(1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Determine los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

(1 pto)

(ii) Calcule la integral $I = \int_{-1}^{1} \dfrac{x}{x^2+4-4x} dx$. (1 pto)

FMI. Febrero 2014 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (b)** El sistema lineal $AX = B$ tiene solución única cuando la matriz A tiene determinante no nulo. Computamos el determinante directamente

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{pmatrix} c & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ d & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -3 \begin{vmatrix} c & 1 & 4 \\ d & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3(c + 12d - d - 6c) \\ &= -3(11d - 5c) \end{aligned}$$

en donde hemos desarrollado el determinante por los elementos de la tercera columna. Por tanto

$$|A| \neq 0 \Leftrightarrow -33d + 15c \neq 0$$

2. **Solución. (b)**

- $\diamondsuit$ no es asociativa. Tomemos $n = 1$, $m = 2$, $q = 3$, se tiene

$$\begin{gathered} (n \diamondsuit m) \diamondsuit q = (1 \diamondsuit 2) \diamondsuit 3 = 3 \diamondsuit 1 = 4 \\ \neq \\ n \diamondsuit (m \diamondsuit q) = 1 \diamondsuit (2 \diamondsuit 3) = 1 \diamondsuit 7 = 8. \end{gathered}$$

- $\diamondsuit$ es conmutativa. Para cualesquiera $m, n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$n \diamondsuit m = 1 + n \cdot m = 1 + m \cdot n = m \diamondsuit n.$$

- Si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{N}$, entonces para $n = 1$ se tendria

$$1 \diamondsuit e = 1 \Leftrightarrow 1 + e = 1 \Leftrightarrow e = 0$$

  De lo anterior necesariamente $e = 0$, pero en dicho caso

$$2 \diamondsuit e = 2 \diamondsuit 0 = 1 \neq 2,$$

  luego no verifica la propiedad de elemento neutro para el caso particular $n = 2$. Por tanto no existe elemento neutro.

3. **Solución. (b)** Derivando directamente

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= 6(x - y)^5 + 6(x + y)^5, \\ D_{11} f(x, y) &= 30(x - y)^4 + 30(x + y)^4, \\ D_2 f(x, y) &= -6(x - y)^5 + 6(x + y)^5, \\ D_{22} f(x, y) &= 30(x - y)^4 + 30(x + y)^4, \end{aligned}$$

se comprueba que

$$D_{11}f(x,y) = D_{22}f(x,y)$$

Solución. (c) Es una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$, calculamos el límite aplicando la regla de L'Hopital (p. 172 libro de texto)

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{2x+9}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(3-\sqrt{2x+9}\right)'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{2x+9}}}{2} = \frac{-\dfrac{2}{2\sqrt{0+9}}}{2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

Solución. (c) Integramos directamente

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} x^4y^{10}dxdy &= \left(\int_{-1}^{1} x^4dx\right)\left(\int_{-1}^{1} y^{10}dy\right) = \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=1}\left[\frac{y^{11}}{11}\right]_{y=-1}^{y=1} \\ &= \left(\frac{1}{5}-\left(-\frac{1}{5}\right)\right)\left(\frac{1}{11}+\left(-\frac{1}{11}\right)\right) \\ &= \frac{2}{5}\frac{2}{11} = \frac{4}{55} \end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**

(i) Dados λ, $\mu\in\mathbb{R}$, $\mathbf{p}_1 = a_1x^2+b_1x+c_1$, $\mathbf{p}_2 = a_2x^2+b_2x+c_2$ operando y aplicando la definición de F se tiene

$$\begin{aligned} F(\lambda\mathbf{p}_1+\mu\mathbf{p}_2) &= F((\lambda a_1+\mu a_2)\,x^2+(\lambda b_1+\mu b_2)\,x+\lambda c_1+\mu c_2) \\ &= (\lambda b_1+\mu b_2)\,x+\lambda c_1+\mu c_2 \\ &= \lambda\,(b_1x+c_1)+\mu\,(b_2x+c_2) \\ &= \lambda F(\mathbf{p}_1)+\mu F(\mathbf{p}_2), \end{aligned}$$

lo que prueba que F es una aplicación lineal.

(ii) Consideremos un vector genérico $\mathbf{p} = ax^2+bx+c$ sus coordenadas respecto de la base

$$\mathbf{A}' = \left\{\mathbf{p}_1'(x) = x^2, \mathbf{p}_2'(x) = x,\ \mathbf{p}_3'(x) = 1\right\}$$

viene dadas por el vector columna

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Del mismo modo las coordenadas de su imagen $F(\mathbf{p}) = bx + a$ respecto de la base

$$\mathbf{B}' = \{\mathbf{q}_1'(x) = x, \, \mathbf{q}_2'(x) = 1\}$$

es el vector

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}.$$

Como directamente vemos

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{1}$$

la matriz asociada respecto de las bases $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}'$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denotemos por X, Y los vectores columnas de coordenadas de los polinomios $\mathbf{p}$ y $F(\mathbf{p})$ respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. La matriz de cambio de la base $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}'$ viene dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X \tag{2}$$

en donde las columnas no son más que las coordenadas de los elementos de la base $\mathbf{A}$ respecto de la base $\mathbf{A}'$ (p. 63 libro de texto)

$$\begin{aligned} &\mathbf{p}_1 = -1 = -1 = -\mathbf{p}_3', \\ &\mathbf{p}_2 = x - 1 = \mathbf{p}_2' - \mathbf{p}_3', \\ &\mathbf{p}_3 = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9 = \mathbf{p}_1' + 6\mathbf{p}_2' + 9. \end{aligned}$$

Del mismo modo

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y \tag{3}$$

en donde en este caso

$$\mathbf{q}_1 = -x = -\mathbf{q}'_1,$$
$$\mathbf{q}_2 = 2 = 2\mathbf{q}'_2,$$

Teniendo en cuenta (1), (2), (3) se tiene

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X$$

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} X$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \\ -1 & -1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

es la matriz asociada de F respecto de la bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$.
Problema **b)**(2ptos.)

(i) Operando

$$D_1 f(x,y) = 4x^3 - 4x + 4y, D_2 f(x,y) = 4y^3 + 4x - 4y.$$

Los puntos críticos son la solución del sistema obtenido de igualar a las derivadas a cero

$$\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0, \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Es un sistema no lineal, sumando ambas ecuaciones $x^3 + y^3 = 0$, entonces necesariamente $x^3 = -y^3$ lo que implica $x = -y$. Sustituyendo en una cualquiera de las ecuaciones del sistema

$$x^3 - x - x = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0$$

que tiene como soluciones $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$, $x_2 = -\sqrt{2}$. Los puntos críticos serían por tanto

$$\{(x_1, -x_1), (x_2, -x_2), (x_3, -x_3)\} = \left\{(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\right\}$$

(ii) Es una integral racional cuyo denominador $x^2+4-4x=(x-2)^2$ tiene a $x=2$ como raíz doble. Siguiendo la descomposición habitual en este tipo de casos (p. 215 libro de texto)

$$\begin{aligned}
\frac{x}{x^2+4-4x} &= \frac{A_1}{(x-2)}+\frac{A_2}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \\
\frac{x}{x^2+4-4x} &= \frac{A_1(x-2)+A_2}{(x-2)^2} \Leftrightarrow \\
A_1 &= 1,\ A_2=2
\end{aligned}$$

Luego

$$\frac{x}{x^2+4-4x}=\frac{1}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

e integrando

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}\frac{x}{x^2+4-4x}dx &= \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x-2}+2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)^2} \\
&= [\ln|x-2|]_{x=-1}^{x=1}+2\left[\frac{-1}{x-2}\right]_{x=-1}^{x=1} \\
&= \ln 1-\ln 3+2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}-\ln 3
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2015
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sean las bases

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \{(1,0,0),(1,0,1),(0,1,0)\}\\ \mathbf{B} &= \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}\end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^3$. Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(1,1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.
(a) $(1,1,2)$ (b) $(2,1,1)$ (c) $(1,1,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1 - x_2, x_1+x_2+x_3)$$

Señale las ecuaciones paramétricas del subespacio núcleo Ker f.
(a) $x_1=\lambda$, $x_2=\lambda$, $x_3=-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$
(b) $x_1=\lambda$, $x_2=\lambda$, $x_3=-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$
(c) $x_1=\lambda$, $x_2=2\lambda$, $x_3=-3\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$
(d) Ninguna de las anteriores

3. Dada la función $f(x)=x\,|x|$, señale su derivada en el punto $x=0$.
(a) No existe $f'(0)$ (b) $f'(0)=1$
(c) $f'(0)=0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor, si existe, del siguiente límite

$$L = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cos(\frac{x+1}{x})}{1+x}$$

(a) $L=\cos 1$ (b) $L=0$
(c) No existe dicho límite (d) Ninguna de las anteriores

5. Señale el valor de la integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1} dx$$

(a) $I = -2/3$ (b) $I = -4/3$ (c) $I = -1/3$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

(i) Sea $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

en donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable arbitraria. Demuestre, aplicando la regla de la cadena, que se verifica la siguiente identidad

$$D_1 g(x, y, z) + D_2 g(x, y, z) + D_3 g(x, y, z) = 0$$

para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.(1 pto)

(ii) Calcule la integral

$$\int_T (x - y) dx dy$$

en donde $T \subset \mathbb{R}^2$ es el triángulo de vértices $(0, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Consideramos el siguientes subconjunto

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{p}_1(x) = x^2 + x + 1,\ \mathbf{p}_2(x) = 1,\ \mathbf{p}_3(x) = 1 - x \right\}$$

Sea asimismo $\varphi : \mathbb{P}_2 \times \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^1 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x) x dx \text{ para todo } \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2.$$

Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

(i) Demuestre que $\mathbf{A}$ es una base de $\mathbb{P}_2$. (0.5 ptos)

(ii) Demuestre que φ es una aplicación bilineal simétrica. (0.5 ptos)

(iii) Señale la matriz de φ con respecto de la base $\mathbf{A}$. (1 pto)

FMI. Febrero 2015 Septiembre. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)**

Denotemos por (x, y, z) la coordenadas del vector $\mathbf{v}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$. Las coordenadas con respecto de la base canónica

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

debe coincidir, luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. **Solución. (c)**

Los punto que anulan f verifican

$$\begin{aligned} & f(x_1, x_2, x_3) = (0,0) \Leftrightarrow \\ & (2x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3) = (0,0) \Leftrightarrow \\ & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por tanto para calcular el núcleo de la aplicacíón basta resolver este último sistema lineal. Como

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \tag{1}$$

la matriz del sistema tiene rango 2. Luego es un sistema homogéneo de dos ecuaciones y tres incognitas, y por tanto es un sistema lineal compatible con un parámetro. De hecho, por (1) podemos considerar como parámetro la variable x_3.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= -x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= -x_3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}x_3 \\ -\frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Se concluye que $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 = 0$, $x_2 = -\frac{2}{3}x_3$. Si denotamos el parámetro por $\lambda = -\frac{x_3}{3}$, finalmente las ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x_1 = \lambda,\, x_2 = 2\lambda,\, x_3 = -3\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

3. **Solución. (c)**

Aplicamos directamente la definición de derivada

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,|h|}{h} = \lim_{h\to 0} |h| = 0.$$

4. **Solución. (a)** Aplicando propiedades de límites directamente

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty} \frac{x\cos(\frac{x+1}{x})}{1+x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} \lim_{x\to\infty} \cos(\frac{x+1}{x}) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+x} \cos(\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x}) = 1 \cdot \cos 1,
\end{aligned}$$

en donde también hemos aplicado que la función coseno es continua.

5. **Solución. (b)** Basta aplicar diferencia de cuadrados en el numerador,

simplificar e integrar directamente

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1} \frac{x^4-1}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{1} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}dx = \int_{-1}^{1}(x^2-1)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1} - 2 = \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3}.
\end{aligned}
$$

Problema **a)**

(i) Calculamos las derivadas parciales de g aplicando la regla de la cadena. Explicítemos dicho cálculo para el caso de las derivadas parciales de g con respecto de la primera componente

$$
\begin{aligned}
&D_1g(x,y,z) = D_1(x-y)D_1f(x-y,y-z,z-x) + D_1(y-z)D_2f(x-y,y-z,z-x) \\
&+D_1(y-z)D_2f(x-y,y-z,z-x) = 1\cdot D_1f(x-y,y-z,z-x) + 0 - 1D_3f(x-y,y-z,z-x).
\end{aligned}
$$

Luego

$$D_1g(x,y,z) = D_1f(x-y,y-z,z-x) - D_3f(x-y,y-z,z-x)$$

Siguiendo el mismo razonamiento podemos calcular el resto de derivadas parciales

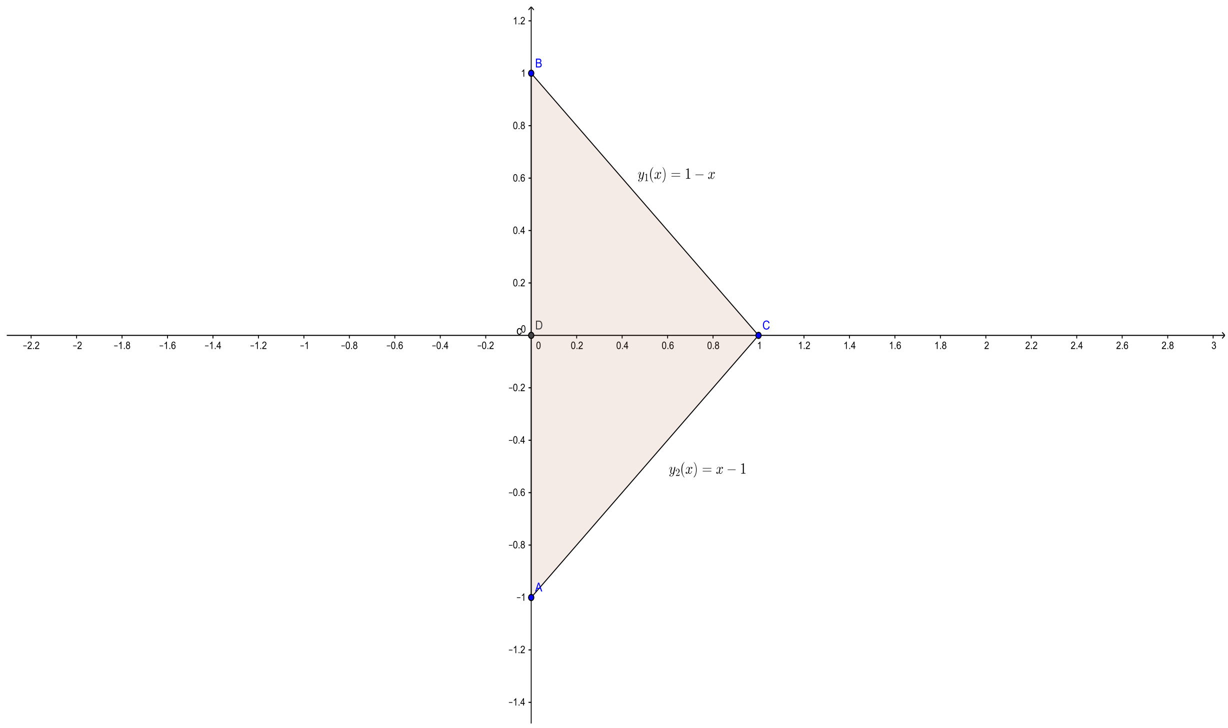
$$
\begin{aligned}
D_2g(x,y,z) = -D_1f(x-y,y-z,z-x) + D_2f(x-y,y-z,z-x) \\
D_3g(x,y,z) = -D_2f(x-y,y-z,z-x) + D_3f(x-y,y-z,z-x)
\end{aligned}
$$

Sumando las tres componentes

$$
\begin{aligned}
D_1g(x,y,z) + D_2g(x,y,z) + D_3g(x,y,z) &= D_1f(x-y,y-z,z-x) - D_3f(x-y,y-z,z-x) \\
&\quad -D_1f(x-y,y-z,z-x) + D_2f(x-y,y-z,z-x) \\
&\quad -D_2f(x-y,y-z,z-x) + D_3f(x-y,y-z,z-x) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

(ii) Representado gráficamente la figura, se puede ver fácilmente la siguiente parametrización de T

$$T = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\, x-1 \leq y \leq 1-x\}$$



La integral viene dada por

$$\int_T (x-y)dxdy = \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} (x-y)dydx$$

Resolvemos directamente la integral aplicando integración reiterada.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} (x-y)dydx &= \int_0^1 x \int_{x-1}^{1-x} dy - \int_0^1 \int_{x-1}^{1-x} ydydx \\
&= \int_0^1 2(x-x^2)dx - \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=x-1}^{y=1-x} dx \\
&= 2(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) - \int_0^1 \left[\frac{(1-x)^2-(x-1)^2}{2}\right]_{y=x-1}^{y=1-x} \\
&= \frac{1}{3} - 0
\end{aligned}$$

Problema **b)**

(i) Como la dimensión de $\mathbb{P}_2$ es 3, todo sistema linealmente independiente de tres vectores constituye una base. Veamos aplicando la definición que el sistema $\mathbf{A}$ es linealmente independiente (véase p. 55 libro de texto). Tomamos λ_1, λ_2, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ escalares tales que

$$\lambda_1\mathbf{p}_1 + \lambda_2\mathbf{p}_2 + \lambda_3\mathbf{p}_3 = \mathbf{0}.$$

Equivalentemente

$$\begin{aligned}
\lambda_1\left(x^2+x+1\right) + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot (1-x) &= 0 \Leftrightarrow \\
\lambda_1 x^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)x + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\lambda_1 = 0,\ \ \lambda_1 - \lambda_3 = 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0.$$

De esto último necesariamente deducimos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, lo que prueba que $\mathbf{A}$ es linealmente independiente y por tanto base.

(ii) En primer lugar, es evidente por su definición que la aplicación φ es simétrica en el siguiente sentido

$$\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \int_0^1 \mathbf{p}(x)\mathbf{q}(x)x dx = \int_0^1 \mathbf{q}(x)\mathbf{p}(x)x dx = \varphi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$$

para todos $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2$ cualesquiera.

Para probar que la aplicación es bilineal simétrica basta comprobar que se cumple la definicion (pp 112-113 libro de texto). Por la propiedad de simetría anterior basta comprobar que se cumple la linealidad con respecto de la primera componente. En este sentido dados vectores $\mathbf{p}, \mathbf{p}',\ \mathbf{q} \in \mathbb{P}_2$ y escalares $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ arbitrarios, aplicando propiedades elementales de la integral (p. 200 libro de texto) se tiene

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{p}', \mathbf{q}) &= \int_0^1 \left(\lambda\mathbf{p}+\mu\mathbf{p}'\right)(x)\mathbf{q}(x)x dx \\
&= \lambda \int_0^1 \mathbf{p}(\mathbf{x})\mathbf{q}(x)x dx + \mu \int_0^1 \mathbf{p}'(\mathbf{x})\mathbf{q}(x)x dx \\
&= \lambda\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu\varphi(\mathbf{p}', \mathbf{q}).
\end{aligned}$$

(iii) Por definición, la matriz asociada a la base $\mathbf{A}$ viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) \\ \varphi(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \\ \varphi(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_1) & \varphi(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_2) & \varphi(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3) \end{pmatrix}$$

Por simetría, basta calcular los elementos que están por encima de la diagonal. Luego se trata de calcular las siguientes integrales

$$\varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1) = \int_0^1 \left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) x dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x\right) dx$$
$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{149}{60}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \int_0^1 \left(x^2 + x + 1\right) \cdot 1 \cdot x dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + x\right) dx$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) = \int_0^1 \left(x^2 + x + 1\right)(1 - x)\, x dx$$
$$= \int_0^1 \left(x^3 + x^2 + x\right) dx - \int_0^1 \left(x^4 + x^3 + x^2\right) dx$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_2) = \int_0^1 1 \cdot 1 x dx = \frac{1}{2}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) = \int_0^1 1 \cdot (1 - x) x dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$\varphi(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_3) = \int_0^1 (1 - x)^2 x dx$$
$$= \int_0^1 (x + x^3 - 2x^2) dx$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{12}$$

Finalmente, aplicando simetría, la matriz asociada está dada por

$$A = \begin{pmatrix} \frac{149}{60} & \frac{13}{12} & \frac{3}{10} \\ \frac{13}{12} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2016 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Determinar una recta tangente a la función $f(x) = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta $2x + y = 4$.
   (a) $2x + y = 3$ (b) $2x + y = 0$
   (c) $2x + y = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $M \in \mathcal{M}_n$ una matriz cuadrada regular de orden n verificando la siguiente identidad
   $$M^2 - 2M = 3I$$
   Señale la expresión correcta de la matriz inversa M^{-1}.
   (a) No existe matriz inversa (b) $M^{-1} = \frac{1}{3}(M - 2I)$
   (c) $M^{-1} = \frac{1}{3}(2M - I)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor de la integral $I = \int_{-2}^{2} \left|1 - x^2\right| dx$.
   (a) $I = 4$ (b) $I = 3$ (c) $I = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sean las funciones
   $$f(x, y, z) = (x + y, xyz, z^2 - x^2)$$
   y
   $$g(u, v, w) = (u^2 + v, v - w).$$
   Determínese la matriz jacobiana de $h = g \circ f$ en el punto $P = (1, 1, 1)$.
   (a) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
   (c) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_3).$$

en donde la coordenadas están referidas a la base canónica. Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ el vector que tiene a $(1, 2, -1)$ por vector de coordenadas con respecto de la base $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (-1, -1, 1)\}$. Señale las coordenadas de la imagen $f(\mathbf{v})$ con respecto de la base canónica.

(a) $f(\mathbf{v}) = (7, -2)$ (b) $f(\mathbf{v}) = (4, 0)$

(c) $f(\mathbf{v}) = (12, 4)$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Consideramos el espacio de las matrices $\mathbb{M}_2$ de orden 2 y las bases

$$\mathbf{A} = \left\{ \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathbf{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determine las matrices de cambio de la base $\mathbf{A}$ a la base $\mathbf{B}$ y de la base $\mathbf{B}$ a la base $\mathbf{A}$. (1 pto)

(ii) Hallar los vectores de coordenadas de la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ respectivamente. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

$$f(x, y) = x^3 - y^3 + xy - x^2.$$

(i) Calcule el polinomio de Taylor $\mathbb{P}_2$ de orden 2 de f en el punto $(x, y) = (1, 1)$ (1 pto)

(ii) Calcule de manera razonada una cota del error cometido al aproximar f por P_2 en $I = [0, 2] \times [0, 2]$. Es decir, calcule una cota del error

$$\max_{(x,y) \in I} |P_2(x, y) - f(x, y)|$$

(1 pto)

FMI. Enero 2016 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

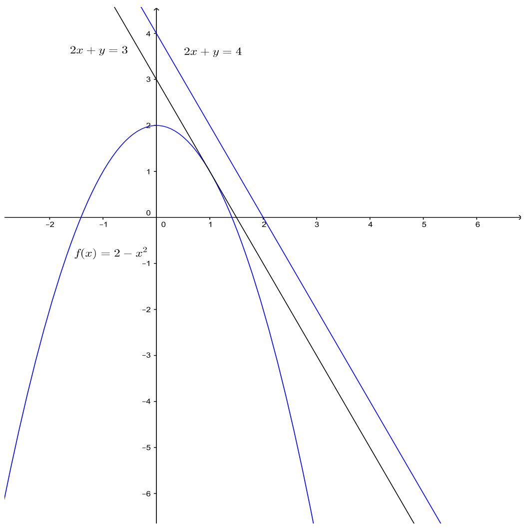
1. **Solución. (a)** Para que una tangente a la función $f(x) = 2 - x^2$ y la recta $y(x) = 4 - 2x$ sean paralelas deben coincidir sus pendientes en el punto de tangencia, es decir, sus derivadas $f'(x) = y'(x)$. Luego

$$-2x = -2 \Rightarrow x = 1.$$

Por tanto la recta tangente a f en el punto $x = 1$ viene dada por

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - 2(x - 1)$$

(véase figura)



2. **Solución. (b)** Aplicando propiedades del producto de matrices,

$$M^2 - 2M = 3I \Leftrightarrow M(M - 2I) = 3I \Leftrightarrow M\left(\frac{M}{3} - \frac{2}{3}I\right) = I.$$

Luego $M^{-1} = \dfrac{1}{3}(M - 2I)$ es la matriz inversa buscada.

3. **Solución (a)** Para calcular la integral descomponemos en primer lugar la función

$$\left|1 - x^2\right| = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si} \quad x \in (-1, 1), \\ x^2 - 1 & \text{si} \quad x \notin (-1, 1), \end{cases}$$

e integramos directamente a partir de esta expresión

$$I=\int_{-2}^{2}\left|1-x^2\right|dx=\int_{-2}^{-1}(x^2-1)dx+\int_{-1}^{1}(1-x^2)dx+\int_{1}^{2}(x^2-1)dx=$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{x=-2}^{x=-1}+\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=1}+\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_{x=1}^{x=2}$$
$$=\left(\frac{(-1)^3}{3}-(-1)\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-(-2)\right)+\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left(-1-\frac{(-1)^3}{3}\right)$$
$$+\left(\frac{2^3}{3}-2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=4.$$

4. **Solución. (c)** Aplicamos la regla de la cadena

$$Dh(1,1,1)=Dg(f(1,1,1))Df(1,1,1).$$

En primer lugar calculamos

$$Df(1,1,1)=\begin{pmatrix}1&1&0\\ yz&yz&zy\\ -2x&0&2z\end{pmatrix}_{(x,y,z)=(1,1,1)}=\begin{pmatrix}1&1&0\\ 1&1&1\\ -2&0&2\end{pmatrix},$$
$$Dg(f(1,1,1))=Dg(2,1,0)=\begin{pmatrix}2u&1&0\\ 0&1&-1\end{pmatrix}_{(u,v,w)=(2,1,0)}=\begin{pmatrix}4&1&0\\ 0&1&-1\end{pmatrix}.$$

Finalmente la matriz jacobiana de la función compuesta viene dada por

$$\begin{aligned}Dh(1,1,1)&=\begin{pmatrix}4&1&0\\ 0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\ 1&1&1\\ -2&0&2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}5&5&1\\ 3&1&-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

5. **Solución (c)** Por definición

$$\begin{aligned}f(\mathbf{v})&=f((1,1,1)+2(0,1,1)-(-1,-1,1))\\ &=f(1,1,1)+2f(0,1,1)-f(-1,-1,1)\\ &=(4,2)+2(3,1)-(-2,0)\\ &=(12,4)\end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)** Podemos expresar directamente los elementos de la base **A** como combinación lineal de los de **B**

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$
$$\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_4$$
$$\mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4$$
$$\mathbf{w}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3$$

La matriz de cambio de la base **A** a **B** es la que tiene por columnas las coordenadas de los vectores de **A** con respecto a **B**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eso quiere decir que si X, Y son los vectores columnas de coordenadas de una matriz cualquiera $\mathbf{w} \in \mathbb{M}_2$ respecto de las bases **A** y **B** respectivamente, entonces

$$Y = AX$$

La matriz de cambio de la base **A** a **B** será la inversa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Las coordenadas de la matriz $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ con respecto de la base **B** viene dado por el vector $(1, 2, 4, 3)$ y sus coordenadas con respecto de la base **A**

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Finalmente verifíquese que

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**

(i) Las derivadas en el punto $(x, y) = (1, 1)$ vienen dadas por

$$\begin{array}{l} f(1,1) = 0 \\ D_1 f(1,1) = 3x^2 + y - 2x\big|_{(x,y)=(1,1)} = 2, \; D_2 f(1,1) = -3y^2 + x\big|_{(x,y)=(1,1)} = -2 \\ D_{11} f(1,1) = 6x - 2\big|_{(x,y)=(1,1)} = 4, \; D_{12} f(1,1) = 1, \;\; D_{22} f(1,1) = -6y\big|_{(x,y)=(1,1)} = -6 \end{array}$$

El polinomio de Taylor viene dado por

$$P_2(x, y) = 0 + 2(x-1) - 2(y-1) + \frac{1}{2}(4(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1) - 6(y-1)^2)$$

(ii) Como $f \in \mathbb{P}_3$, su polinomio de Taylor P_3 de orden 3 en $(x, y) = (1, 1)$ es exacto. Es decir

$$f(x, y) = P_3(x, y).$$

por tanto

$$f(x, y) - P_2(x, y) = P_3(x, y) - P_2(x, y),$$

y el error viene dado directamente por el término de orden 3. Para calcular dicho término, recordemos en primer lugar la regla mnemotécnica para calcular el de orden 3 de un polinomio de dos variables (véase p. 255):

$$((x - x_1)D_1 + (y - y_1)D_2)^3 f(a) = (x - x_1)^3 D_{111} f(a) + 3(x - x_1)^2 (y - y_1) D_{112} f(a) + 3(x - x_1)(y - y_1)^2 D_{122} f(a) + (y - y_1)^3 D_{222} f(a)$$

Las derivadas de tercer orden viene dadas por

$$D_{111} f(1, 1) = 6, \; D_{222} f(1, 1) = -6, \;\; D_{112} f(1, 1) = D_{122} f(1, 1) = 0$$

Por construcción

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= P_2(x, y) + \frac{1}{3!}(D_{111} f(1, 1)(x - 1)^3 + D_{222} f(1, 1)(y - 1)^3) \\ &= P_2(x, y) + \frac{6}{3!}((x - 1)^3 - (y - 1)^3) \\ &= P_2(x, y) + ((x - 1)^3 - (y - 1)^3) \end{aligned}$$

Por tanto

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| = \left|(x - 1)^3 - (y - 1)^3\right| \leq \left|(x - 1)^3\right| + \left|(y - 1)^3\right|$$

Para $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, tenemos que como mucho $|x - 1|$,$|y - 1| \leq 1$, luego finalmente

$$|f(x, y) - P_2(x, y)| \leq 1 + 1 = 2.$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2016 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen} x & \text{si } x\le 0,\\ ax+b & \text{si } x>0.\end{cases}$$

Determínense los parámetros $a,b\in\mathbb{R}$ para que f sea derivable en $x=0$.

(a) $a=0$, $b=-1$ (b) $a=1$, $b=0$
(c) $a=1$, $b=1$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0&0&a\\0&0&a\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Señale la posible matriz inversa de la matriz $B=A+I$

(a) $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\-a&0&1\end{pmatrix}$ (b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-a\\0&1&-a\\0&0&1\end{pmatrix}$

(c) $B^{-1}=\begin{pmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea el polinomio $p(x)=x^5+x^4-6x^3-14x^2-8x$. Señale los valores a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 verificando

$$p(x)=a_5(x+1)^5+a_4(x+1)^4+a_3(x+1)^3+a_2(x+1)^2+a_1(x+1)+a_0$$

(a) $a_0=0$, $a_1=3$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=-4$, $a_5=1$

(b) $a_0 = 0$,$a_1 = -8$, $a_2 = -14$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$
(c) $a_0 = 0$, $a_1 = -8$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$
(d) Ninguna de las anteriores

4. Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones tales que

$$u(x, y) = F(u(x, y)y, x + u(x, y))$$

Si se tiene que $u(0, 0) = 1$,

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} x + y & 1 + e^{x+y} \end{pmatrix},$$

señale el valor de la derivada parcial $D_1u(0, 0)$.
(a) $D_1u(0, 0) = -2$ (b) $D_1u(0, 0) = 1$
(c) $D_1u(0, 0) = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean $\mathbf{A} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ dos bases de $\mathbb{R}^2$ verificando

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

Señale las coordenadas del vector $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$ respecto de la base $\mathbf{B}$.
(a) $(1, 2)$ (b) $(-1/2, 3/2)$ (c) $(2, 1)$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\ \}$$

y sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación definida por

$$F(\mathbf{p}) = \int_1^2 \mathbf{p}(x)dx.$$

En este ejercicio consideramos las siguientes bases

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_0(x) = -1, \mathbf{p}_1(x) = x + 2,\ \mathbf{p}_2(x) = x^2\}, \\ &\mathbf{B} = \{-3\}. \end{aligned}$$

en $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}$ respectivamente.

(i) Probar que F es una aplicación lineal. (0.5 ptos)

(ii) Señale la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$. (0.75 ptos)

(iii) Determine las ecuaciones implícitas y una base de Ker$F$ expresadas en coordenadas con respecto de la base $\mathbf{A}$. (0.75 ptos)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Determínense los máximos y mínimos locales de las función

$$f(x,y) = x^2 - 2xy - 8x + y^2 + 8y + 16.$$

(1 pto)

(ii) Sea $f(x,y) = xy$. Señale el valor de la integral

$$\int_D f(x,y)dxdy$$

en donde $D = \{(x,y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$.(1 pto)

FMI. Enero 2016 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (b)** Para que la función sea derivable, se debe verificar que la función es continua en $x = 0$. Es decir

$$f(0) = \operatorname{sen} 0 = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = b,$$

por tanto $b = 0$. Del mismo modo las derivadas laterales deben coincidir. En este caso como

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad x < 0, \\ a & \text{si} \quad x > 0, \end{cases}$$

necesariamente

$$a = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \cos 0 = 1$$

2. **Solución. (b)** Por definición

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene determinante $|B| = 1$. Aplicamos directamente el teorema de caracterización de la matriz inversa

$$\begin{aligned} B^{-1} &= \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 & a \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & a \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -a & -a & 1 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3. **Solución. (a)**

La parte derecha de la identidad se corresponde con el polinomio de Taylor de grado 5 centrado en el punto $x = -1$. Luego

$$a_i = \frac{p^{i)}(-1)}{i!} \text{ para } i = 0, ..., 5.$$

Mediante un calculo directo $p(-1) = 0$, $p'(-1) = 3$, $p''(-1) = p'''(-1) = 0$, $p^{4)}(-1) = -96$, $p^{5)}(-1) = 120$. Luego

$$a_0 = a_2 = a_3 = 0,$$

y

$$\begin{array}{l} a_1 = \frac{3}{1!} = 3, \\ a_4 = \frac{-96}{4!} = -4, \\ a_1 = \frac{120}{5!} = 1. \end{array}$$

De hecho, compruébese que

$$(x+1)^5 - 4(x+1)^4 + 3(x+1) = x^5 + x^4 - 6x^3 - 14x^2 - 8x$$

4. **Solución. (d)** Aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D_1u(x,y) &= D_1F(u(x,y)y, x+u(x,y))D_1(u(x,y)y) + D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))D_1(x+u(x,y)) \\ &= D_1F(u(x,y)y, x+u(x,y))D_1u(x,y)y + D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))(1+D_1u(x,y)). \end{aligned}$$

Luego despejando

$$D_1u(x,y) = \frac{D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))}{1 - D_1F(u(x,y)y, x+u(x,y))y - D_2F(u(x,y)y, x+u(x,y))}$$

Sustituyendo en $(x,y) = (0,0)$,

$$\begin{aligned} D_1u(0,1) &= \frac{D_2F(0, 0+u(0,0))}{1 - D_1F(0, 0+u(0,0))0 - D_2F(0, 0+u(0,0))} \\ &= \frac{D_2F(0,1)}{1 - D_1F(0,1)0 - D_2F(0,1)} \\ &= \frac{1+e}{1 - 0 - (1+e)} \\ &= -\frac{1+e}{e} \end{aligned}$$

5. **Solución. (a)** Como $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2$, las coordenadas de w con respecto de $\mathbf{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ son directamente $(1,2)$.

Parte Desarrollo

Problema **a)**

(i) Para todos α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_2$ se tiene

$$\begin{aligned} F(\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{q}) &= \int_1^2 (\alpha\mathbf{p}+\beta\mathbf{p})dx = \alpha\int_1^2 \mathbf{p}(x)dx+\beta\int_1^2 \mathbf{q}(x)dx = \\ &= \alpha F(\mathbf{p})+\beta F(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

en donde hemos aplicado la linealidad de la integral (véase p. 200 libro de texto).

(ii) La matriz asociada a la aplicación viene dada por la imágenes de la base $\mathbf{A}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$. En primer lugar calculamos

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}_0) &= \textstyle\int_1^2 -1dx = -1 \\ F(\mathbf{p}_1) &= \textstyle\int_1^2 (x+2)dx = \frac{7}{2} \\ F(\mathbf{p}_2) &= \textstyle\int_1^2 x^2dx = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

Para cualquier $\mathbf{p} \in \mathbb{P}_2$ se tiene

$$F(\mathbf{p}) = \left(-\frac{F(\mathbf{p})}{3}\right)(-3)$$

y por tanto $-\dfrac{F(\mathbf{p})}{3}$ es la coordenada de $F(\mathbf{p})$ con respecto de la base $\{-3\}$. Luego la matriz asociada viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{F(\mathbf{p})}{3} & -\dfrac{F(\mathbf{p})}{3} & -\dfrac{F(\mathbf{p})}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & -\dfrac{7}{6} & -\dfrac{7}{9} \end{pmatrix}$$

(iii) Un vector $\mathbf{p} = x_0\mathbf{p}_0 + x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 \in \operatorname{Ker} F$ verifica

$$\begin{aligned} F(\mathbf{p}) &= 0 \Leftrightarrow x_0F(\mathbf{p}_0) + x_1F(\mathbf{p}_1) + x_2F(\mathbf{p}_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow -x_0 + \frac{7}{2}x_1 + \frac{7}{3}x_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -6x_0 + 21x_1 + 14x_2 = 0, \end{aligned}$$

siendo ésta última ecuación la ecuación implícita de $\operatorname{Ker} F$. Las ecuaciones paramétricas del subespacio están dadas por

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}x_1 + \frac{7}{3}x_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y de aquí directamente deducimos que $\left\{\left(\frac{7}{2},1,0\right),\left(\frac{7}{3},0,1\right)\right\}$ es una base de $\operatorname{Ker} F$.

Compruébese que se podría trabajar directamente con la matriz asociada

$$\operatorname{Ker} F=\left\{(x_0,x_1,x_2)\in\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{7}{6} & -\frac{7}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\x_1\\x_2\end{pmatrix}=0\right\}.$$

Problema **b)**

(i) Calculamos en primer lugar los punto críticos igualando a cero sus derivadas de primer orden

$$\left.\begin{array}{l}D_1f(x,y)=2x-2y-8=0\\D_2f(x,y)=-2x+2y+8=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-8\end{pmatrix}$$

es un sistema lineal compatible inderteminado con un parámetro cuyo conjunto de soluciones viene dado por la recta

$$L=\{(x,y):y=x-4\}$$

La matriz Hessiana de derivadas de segundo orden

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y)\\D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 2\end{pmatrix}.$$

es contante para cada punto, en particular para los puntos de la recta. Por el criterio de los determinantes de las submatrices principales (véase pp. 259-261) se tiene

$$\Delta_1=2>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & -2\\-2 & 2\end{vmatrix}=0$$

y por tanto los puntos pueden ser o no extremos relativos. Se puede comprobar directamente que la matriz Hessiana

$$\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=2\,(x-y)^2\geq 0$$

es definida positiva para todo (x,y). Luego todo punto crítico es mínimo local. Por tanto, L es una recta de mínimo locales de f.

(ii) Calculamos la integral mediante un cambio a polares

$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta,\ dxdy = rd\theta$$

En polares el dominio de integración se expresa como

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\} \\ &= \left\{(r,\theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2\right\} \end{aligned}$$

La integral viene dada por

$$\begin{aligned} \int_D xydxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r\cos\theta r sen\theta r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^3 \cos\theta sen\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta sen\theta d\theta \int_0^2 r^3 dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} 2\theta d\theta \int_0^2 r^3 dr \\ &= \frac{1}{2} \left. \frac{-\cos 2\theta}{2} \right|_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left. \frac{r^4}{4} \right|_{r=0}^{r=2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos\pi + \cos 0}{2}\right)\left(\frac{2^4}{4}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2^4}{4} = 2 \end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2016
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar únicamente un ejemplar original del texto "Temas de Matematicas" del Luis Rodríguez-Marín, que podrá contener anotaciones del alumno en cuyo caso no puede prestarselo a ningún compañero.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números naturales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (r,q) & \longmapsto & r\Diamond q = \dfrac{r+q}{2} \end{array}$$

De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- Existe elemento neutro.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Calcule las coordenadas del vector

$$\mathbf{v} = (2,5)$$

respecto de la base $\mathbf{B} = \{(1,-2),(3,3)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
(a) $(-1,1)$ (b) $(2,1)$ (c) $(3,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor del siguiente límite

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(2x)-2x}{x^3}$$

(a) $L=-1/3$ (b) $L=-4/3$
(c) $L=-2/3$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x)=\int_1^{1+x^2} u^2du.$$

Señale el valor de la derivada $f'(1)$.

(a) $f'(1)=12$ (b) $f'(1)=8$

(c) $f'(1)=10$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbb{P}_2=\{\mathbf{p}(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{R}\ \}$$

y sea $F:\mathbb{P}_2\to\mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por

$$F(\mathbf{p})=\mathbf{p}'(1)+\int_0^1\mathbf{p}(s)ds \text{ para todo } \mathbf{p}\in\mathbb{P}_2.$$

Consideramos las siguientes bases

$$\begin{aligned}&\mathbf{A}=\{\mathbf{p}_0(x)=x^2,\mathbf{p}_1(x)=x,\ \mathbf{p}_2(x)=-1\},\\ &\mathbf{B}=\{-1\},\end{aligned}$$

en $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Señale la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases **A** y **B**.

(a) $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix}-\frac{5}{2} & -\frac{1}{3} & -1\end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & -\frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por la matriz

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

(i) Determinar los valores propios y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a ellos. (1 pto)

(ii) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal y la base a la que está referida (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.) Responda razonadamente a las siguientes preguntas:

(i) Calcule el valor de la integral

$$\int_M x dx dy,$$

en donde M es el triángulo de vértices $(0,-1)$, $(1,0)$, $(2,0)$. (1 pto)

(ii) Sean las funciones

$$f(u,v,w) = (e^{u-w}, \cos(v+u) + \operatorname{sen}(u+v+w)),$$
$$g(x,y) = (e^x, \cos(x-y), e^{-y}).$$

Calcule $(f \circ g)'(0,0)$, matriz jacobiana de la función compuesta $f \circ g$ en el punto $(0,0)$. (1 pto)

FMI. Septiembre 2016 Septiembre. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)**

- En general $\diamondsuit$ no es asociativa. Tomando por ejemplo $r=1$, $q=2$, $s=3$ se tiene
  $r\diamondsuit(q\diamondsuit s)=1\diamondsuit(2\diamondsuit 3)=1\diamondsuit\frac{5}{2}=\frac{7}{4}\neq\frac{9}{4}=\frac{3}{2}\diamondsuit 3=(1\diamondsuit 2)\diamondsuit 3=(r\diamondsuit q)\diamondsuit s.$
- $\diamondsuit$ es conmutativa como consecuencia de la conmutatividad de la suma de los reales. Para cualesquiera $r,q\in\mathbb{R}$ se tiene que
  $$r\diamondsuit q=\frac{r+q}{2}=\frac{q+r}{2}=q\diamondsuit r.$$
- No existe elemento neutro. En caso de existir un elemento neutro e, para $r=1$
  $$1\diamondsuit e=1\Rightarrow\frac{1+e}{2}=e$$
  y necesariamente $e=1$. Pero en dicho caso si tomamos por ejemplo $r=2$, se tiene que
  $$2\diamondsuit e=2\diamondsuit 1=\frac{3}{2}\neq e.$$
  Luego $e=1$ no puede ser elemento neutro y por tanto no existe elemento neutro para $\diamond$.

2. **Solución. (a)** Por definición, buscamos α, $\beta\in\mathbb{R}$ tales que
$$(2,5)=\alpha(1,-2)+\beta(3,3).$$
Matricialmente podemos expresarlo como
$$\begin{pmatrix}1&3\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$$
Resolviendo este sistema se tiene directamente que la coordenadas vienen dadas por $(\alpha,\beta)=(-1,1)$.

3. **Solución. (b)** Es una indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicamos la regla de L'Hopital tres veces consecutivamente para resolver el límite
$$\begin{aligned}L&=\lim_{x\to 0}\frac{(\operatorname{sen}(2x)-2x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{(2\cos(2x)-2)'}{(3x^2)'}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(-4\operatorname{sen}(2x))'}{(6x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-8\cos(2x)}{6}=\frac{-4}{3}.\end{aligned}$$

4. **Solución. (b)** Podemos expresar f como composición de dos funciones reales

$$f = g \circ h$$

en donde $g,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$g(y) = \int_1^y u^2 du,\ h(x) = 1 + x^2.$$

Aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x).$$

La derivadas correspondientes vienen dadas por

$$g'(y) = y^2,\ \ h'(x) = 2x.$$

en donde en el primer caso hemos aplicado el Primer Teorema Fundamental del Cálculo (véase pp 208-9). Luego finalmente

$$f'(x) = g'(1 + x^2)2x$$

y por tanto

$$f'(1) = g'(1 + 1)2 = g'(2)2 = 2^2 2 = 8.$$

Solución. (d)

Sabemos que la matriz de la aplicación tiene por columnas las coordenadas de la imágenes

$$\{F(\mathbf{p}_0), F(\mathbf{p}_1), F(\mathbf{p}_2)\}$$

de la base $\mathbf{A}$ con respecto de la base $\mathbf{B} = \{\mathbf{v} = -1\}$ (véase p. 79 libro de texto). Basta calcular directamente

$$F(\mathbf{p}_0) = F(x^2) = 2x|_{x=1} + \int_0^1 x^2 dx = 2 + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{3} = \left(-\tfrac{7}{3}\right)(-1) = -\tfrac{7}{3}\mathbf{v}$$
$$F(\mathbf{p}_1) = F(x) = 1 + \int_0^1 x dx = 1 + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2} = (-\tfrac{3}{2})(-1) = -\tfrac{3}{2}\mathbf{v}$$
$$F(\mathbf{p}_2) = F(-1) = 0 - \int_0^1 1 dx = -1 = 1(-1) = \mathbf{v}$$

Por tanto la matriz asociada viene dada por

$$\begin{pmatrix} -\tfrac{7}{3} & -\tfrac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Problema **a)**

(i) Denotemos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(\lambda-1)\,(\lambda-3)$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_2 = 3$.

El subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 0I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 0\} \end{aligned}$$

El subespacio $\mathbb{E}_2$ asociado al autovalor $\lambda_2 = 1$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_2 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_1 = 0\} \end{aligned}$$

El subespacio $\mathbb{E}_3$ asociado al autovalor $\lambda_3 = 3$ viene dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_3 &= \{X \in \mathbb{R}^3 : (A - 3I)X = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^3 : AX = 0\} \\ &= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - 2x_2 = 0,\ x_1 - 2x_3 = 0\} \end{aligned}$$

(ii) La matriz es diagonalizable ya que tiene tres autovalores distintos. (véase p. 102 libro de texto) y la matriz diagonal asociada será

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

si ordenamos la base de autovalores siguiendo el mismo orden. Como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1 &= G[(1,-1,-1)],\\
\mathbb{E}_2 &= G[(0,1,-1)],\\
\mathbb{E}_3 &= G[(2,1,1))],
\end{aligned}$$

una base de vectores propios viene dada por

$$\{(1,-1,-1),(0,1,-1),(2,1,1)\}.$$

Una matriz de paso P verificando

$$D = P^{-1}AP$$

tiene por columnas los elementos de la base de cada subespacio propio (véase p.102 libro de texto). En este caso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y se puede verificar

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Problema **b)**

(i) El triángulo M se parametriza como la unión de dos conjuntos disjuntos de la siguiente manera

$$M = M_1 \cup M_2,$$

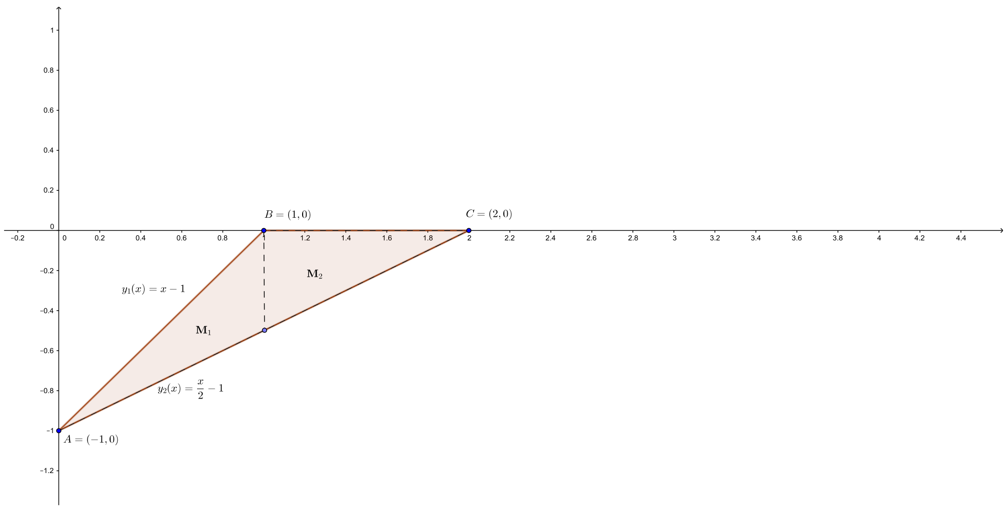
en donde

$$\begin{aligned}
M_1 &= \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ x-1 \leq y \leq \tfrac{x}{2} - 1\right\},\\
M_2 &= \{(x,y) : 1 \leq x \leq 2,\ x-1 \leq y \leq 0\}.
\end{aligned}$$

(véase figura)

Sabemos que la integral sobre M es la suma de las integral sobre M_1 y M_2

$$I = \int_M x dx dy = \int_{M_1} x dx dy + \int_{M_2} x dx dy$$



Calculamos cada integral directamente. Por un lado

$$\begin{aligned}\int_{M_1} x dx dy &= \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}-1}^{x-1} x dy dx = \int_0^1 x(x-1-(\frac{x}{2}-1))dx = \\ &= \int_0^1 x\frac{1}{2}x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}\int_{M_2} x dx dy &= \int_1^2 \int_{\frac{x}{2}-1}^{0} x dy dx = \int_1^2 x\left(0-\left(\frac{x}{2}-1\right)\right)dx = \\ &= \int_1^2 x dx - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 dx = \frac{3}{2}-\frac{7}{6} = \frac{2}{6}\end{aligned}$$

Finalmente el valor de la integral viene dado por

$$I = \frac{1}{6}+\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) Aplicando la regla de la cadena (véase pp 246-7 libro de texto)

$$(f\circ g)'(0,0) = f'(g(0,0))g'(0,0)$$

En este caso $g(0,0)=(1,1,1)$ y las correspondientes matrices jacobianas viene dadas por

$$\begin{aligned}f'(g(0,0)) &= f'(1,1,1) \\ &= \begin{pmatrix} e^{u-w} & 0 & -e^{u-w} \\ -\operatorname{sen}(u+v)+\cos(u+v+w) & -\operatorname{sen}(u+v)+\cos(u+v+w) & \cos(u+v+w)\end{pmatrix}_{(u,v,w)=(1,1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\operatorname{sen}(2)+\cos(3) & -\operatorname{sen}(2)+\cos(3) & \cos(3)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

y

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} e^x & 0 \\ -\operatorname{sen}(x-y) & \operatorname{sen}(x-y) \\ 0 & -e^{-y} \end{pmatrix}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}(0) & \operatorname{sen}(0) \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$(f \circ g)'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\operatorname{sen}(2) + \cos(3) & -\operatorname{sen}(2) + \cos(3) & \cos(3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$(f \circ g)'(0,0) == \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\operatorname{sen}(2) + \cos(3) & -\cos(3) \end{pmatrix}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2017 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un único libro de texto de teoría que puede ser un ejemplar del texto de la Bibliografía Básica o cualquier otro. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números enteros. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (n, m) & \longmapsto & n \Diamond m = m - n \end{array}$$

De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- Existe elemento neutro

(a) 1 (b) 0 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea P_2 el polinomio de Taylor de orden 2 de la función

$$f(x, y) = x^2y + xy - 2$$

en el punto $(0, 1)$. Señale el valor $P_2(2, -1)$.
(a) $P_2(2, -1) = -1$ (b) $P_2(2, -1) = -3$
(c) $P_2(2, -1) = 0$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que

$$F(1, 0, 0) = (2, 4, -1),$$
$$F(0, 1, 0) = (1, 3, -2),$$
$$F(0, 0, 1) = (0, -2, 2).$$

Señale el valor de $F(-2,4,-1)$

(a) $F(-2,4,-1) = (0,6,-8)$ (b) $F(-2,4,-1) = (-1,0,0)$
(c) $F(-2,4,-1) = (1,-3,2)$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor mínimo absoluto de la función

$$f(x) = 6x^3 - 6x^4 + 5$$

en el intervalo $I = [-1, 2]$.

(a) $\min_{x\in[-1,2]} f(x) = -7$ (b) $\min_{x\in[-1,2]} f(x) = -52$
(c) $\min_{x\in[-1,2]} f(x) = -43$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Calcule la integral

$$I = \int_M (x-y)^3 \, dxdy$$

en donde

$$M = [-1,0] \times [-1,2] = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 0, \ -1 \leq y \leq 2\}.$$

(a) $I = -\dfrac{17}{2}$ (b) $I = -\dfrac{21}{2}$ (c) $I = -\dfrac{11}{2}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sean los conjuntos

$$\mathbf{A} = \{(1,0,0), (-1,0,1), (2,1,0)\} \ y \ \mathbf{B} = \{(1,1,0), (1,0,0), (1,1,1)\}$$

(i) Probar que **A** y **B** son bases de $\mathbb{R}^3$. (0.5 ptos)

(ii) Señale la matrices de cambio de base de **A** a **B**, y de **B** a **A** respectivamente. (0.5 ptos)

(iii) Dado el vector **v** de coordenadas $(3,2,1)$ en la base **A**, encontrar sus coordenadas en la base **B**. (0.5 ptos)

(iv) Dado el vector **w** de coordenadas $(1,2,3)$ en la base **B**, encontrar sus coordenadas en la base **A**. (0.5 ptos)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Señale razonadamente los máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x,y) = (x - y^2)(x - 1)$$

(1 pto)

(ii) Calcule la matriz jacobiana de la función

$$f(x,y,z) = \cos(xy + y^2 - zx)$$

en el punto $(x,y,z) = (\sqrt{\pi}, 0, -\sqrt{\pi})$. (1 pto)

FMI. Enero 2017 1ª Semana. SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (b)**

- $\Diamond$ no es asociativa. Si tomamos $n = m = 1$, $k = -1$, se tiene que

  $$n\Diamond(m\Diamond k) = 1\Diamond(1\Diamond -1) = 1\Diamond 2 = -1 \neq 1 = 0\Diamond{-1} = (1\Diamond 1)\Diamond{-1} = (n\Diamond$$

- $\Diamond$ no es conmutativa. Tomando $n = 1$, $m = -1$

  $$n\Diamond m = 1\Diamond -1 = 2 = -2 = -1\Diamond 1 = m\Diamond n$$

- No existe elemento neutro. Si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{Z}$, entonces necesariamente

  $$n - e = n \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \to e = 0.$$

  Pero, por ejemplo

  $$e\Diamond 1 = 0\Diamond 1 = 0 - 1 = -1 \neq 1$$

2. **Solución. (c)**
El polinomio de Taylor P_2 viene dado por

$$P_2(x,y) = f(0,1) + D_1f(0,1)x + D_2f(0,1)(y-1) + \frac{1}{2}(D_{11}f(0,1)x^2 + 2D_{12}f(0,1)x(y-1) + D_{22}f(0,1)(y-1)^2)$$

Por un cálculo directo

$$\begin{aligned}
&f(0,1) = -2,\\
&D_1f(0,1) = 2xy + y\big|_{(x,y)=(0,1)} = 1,\\
&D_2f(0,1) = x^2 + x\big|_{(x,y)=(0,1)} = 0,\\
&D_{11}f(0,1) = 2y\big|_{(x,y)=(0,1)} = 2,\\
&D_{12}f(0,1) = 2x + 1\big|_{(x,y)=(0,1)} = 1,\\
&D_{22}f(0,1) = 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$P_2(x,y) = -2 + x + 0(y-1) + \frac{1}{2}(2x^2 + 2x(y-1) + 0(y-1)^2) = -2 + x + x^2 + x(y-1)$$

En particular

$$P_2(2,-1) = -2 + 2 + 4 + 2(-2) = 0.$$

3. **Solución. (a)**
Aplicando linealidad de F, tenemos

$$F(-2,4,-1) = -2F(1,0,0) + 4F(0,1,0) - F(0,0,1) = -2(2,4,-1) + 4(1,3,-2) - (0,-2,2) = (0,6,-8)$$

4. **Solución. (c)** La derivada

$$f'(x) = 18x^2 - 24x^3 = 6x^2(3-4x) = 0$$

se anula en los puntos $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{3}{4}$. Analicemos el signo de la derivada para estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0, \text{ para } x \in [\tfrac{3}{4}, 2], \\ f'(x) &\leq 0, \text{ para } x \in [-1, \tfrac{3}{4}] \end{aligned}$$

La función crece en $[-1, \frac{4}{3}]$ y decrece en el intervalo $[\frac{3}{4}, 2]$. Luego el mínimo global se encuentra en los extremos

$$\min_{x\in[-1,2]} f(x) = \min\{f(-1), f(2)\} = \min\{-7, -43\} = -43$$

5. **Solución. (b)**

Integramos directamente

$$\begin{aligned} I &= \int_M (x-y)^3\, dxdy = \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{2} (x-y)^3\, dydx = \int_{-1}^{0} \left[-\frac{(x-y)^4}{4}\right]_{y=-1}^{y=2} dx \\ &= \frac{1}{4}\left(-\int_{-1}^{0} (x-2)^4\, dx + \int_{-1}^{0} (x+1)^4\, dx\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(\left[-\frac{(x-2)^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=0} + \left[\frac{(x+1)^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=0}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{32-243+1}{5}\right) = -\frac{21}{2} \end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)** Para resolver este ejercicio, seguimos los mismos argumentos que en los vídeos:

- Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. I de II
- Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. II de II

(i) Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como sus determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

son no nulos, los vectores son linealmente independientes y por tanto base.

(ii) En lo siguiente por

$$\mathbf{E} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

denotamos la base canónica. Sabemos que

$$\begin{aligned} M_{A\to B} &= M_{E\to B}M_{A\to E} = B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en donde recordemos $M_{A\to B}$ denota la matriz de cambio de la base **A** a la base **B**.

De esta forma

$$M_{B\to A} = M_{A\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) Las coordenadas del vector que tiene por coordenadas $(3,2,1)$ en la base **A**, tiene por coordenadas

$$M_{A\to B}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

respecto de la base **B**. Verífiquese que los vectores tienen las mismas componentes si pasamos a la base canónica

$$\begin{aligned} 3(1,0,0) + 2(-1,0,1) + (2,1,0) &= (3,1,2) \\ -(1,1,0) + 2(1,0,0) + 2(1,1,1) &= (3,1,2) \end{aligned}$$

(iv) De igual forma, vector que tiene por coordenadas $(1,2,3)$ en la base $\mathbf{B}$, tiene por coordenadas

$$M_{B\to A}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$$

respecto de la base $\mathbf{A}$. Verifiquemos que coinciden sus componentes

$$\begin{aligned}1(1,0,0)+3(-1,0,1)+4(2,1,0) &= (6,4,3)\\ 1(1,1,0)+2(1,0,0)+3(1,1,1) &= (6,4,3)\end{aligned}$$

Problema **b)**

(i) Los punto críticos se encuentran igualando a cero las derivadas parciales

$$\begin{aligned}&D_1f(x,y)=x-1+x-y^2=2x-y^2-1=0\\ &D_2f(x,y)=-2y(x-1)=0\end{aligned}$$

Es fácil ver que los puntos que anulan ambas funciones son

$$\{\mathbf{a}_1=(1,1),\mathbf{a}_2=(1,-1),\ \mathbf{a}_3=(\frac{1}{2},0)\ \}$$

La Hessiana viene dada por

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix}2&-2y\\-2y&-2(x-1)\end{pmatrix}$$

- En $\mathbf{a}_1=(1,1)$, la Hessiana

$$Hf(1,1)=\begin{pmatrix}2&-2\\-2&0\end{pmatrix}$$

tiene determinante negativo

$$\begin{vmatrix}2&-2\\-2&0\end{vmatrix}=-4$$

Luego aplicando criterio p. 260 libro de texto, $\mathbf{a}_1$ no es extremo relativo.

- Del mismo modo, en $\mathbf{a}_2=(1,-1)$

$$Hf(1,-1)=\begin{pmatrix}2&2\\2&0\end{pmatrix}$$

su determinante es también negativo

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

y $\mathbf{a}_2$ no es extremo relativo.

- En $\mathbf{a}_3 = (\frac{1}{2}, 0)$ la Hessiana viene dada por

$$Hf(\frac{1}{2}, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2(\frac{1}{2} - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por el criterio de Silvester, la matriz es definida positiva y por tanto $\mathbf{a}_3$ es un mínimo relativo

(ii) Calculamos en primer lugar las derivadas parciales

$$\begin{aligned} D_1 f(\sqrt{\pi}, 0, -\sqrt{\pi}) &= -(y-z)\,sen(xy + y^2 - zx)\big|_{(x,y,z)=(\sqrt{\pi},0,-\sqrt{\pi})} = -\left(0 + \sqrt{\pi}\right)\mathrm{sen}(\sqrt{\pi}0 + 0^2 + \sqrt{\pi}0) = \sqrt{\pi}0 = 0 \\ D_2 f(\sqrt{\pi}, 0, -\sqrt{\pi}) &= -(x+2y)sen(xy + y^2 - zx)\big|_{(x,y,z)=(\sqrt{\pi},0,-\sqrt{\pi})} = -(\sqrt{\pi} + 2\cdot 0)\,\mathrm{sen}(\sqrt{\pi}0 + 0^2 + \sqrt{\pi}0) = 0 \\ D_3 f(\sqrt{\pi}, 0, -\sqrt{\pi}) &= -x\,\mathrm{sen}(xy + y^2 - zx)\big|_{(x,y,z)=(\sqrt{\pi},0,-\sqrt{\pi})} = -\sqrt{\pi}sen(\sqrt{\pi}0 + 0^2 + \sqrt{\pi}0) = 0 \end{aligned}$$

Luego el gradiente viene dado por

$$f'(\sqrt{\pi}, 0, -\sqrt{\pi}) = \left(0 \quad 0 \quad 0 \right)$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2017 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un único libro de texto de teoría que puede ser un ejemplar del texto de la Bibliografía Básica o cualquier otro. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x \Diamond y = |x| + |y| \end{array}$$

en donde recordemos que $|\cdot|$ denota el valor absoluto. De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- Existe elemento neutro.

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_3 + x_4, x_1 + x_3 + x_4)$$

Calcule la dimensión de su núcleo Ker f.

(a) $\dim \operatorname{Ker} f = 1$ (b) $\dim \operatorname{Ker} f = 3$
(c) $\dim \operatorname{Ker} f = 2$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Señale el valor de la integral

$$I = \int_1^e \left(x - \frac{1}{2x} \right) dx$$

(a) $I = \frac{1}{2}e^2 + 1$ (b) $I = \frac{1}{2}e^2 - 1$
(c) $I = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = |2 - |x - 1|| - 1$$

Señale el valor de la derivada $f'(3)$.
(a) $f'(3)$ no existe
(b) $f'(3) = 1$
(c) $f'(3) = -1$
(d) Ninguna de las anteriores

5. Dada la función $F(x, y) = \cos((x - y)^2)$, señale el valor de la derivada $D_{212}F(0, \sqrt{\pi})$.
(a) $D_{212}F(0, \sqrt{\pi}) = -12\sqrt{\pi}$
(b) $D_{212}F(0, \sqrt{\pi}) = 12\sqrt{\pi}$
(c) $D_{212}F(0, \sqrt{\pi}) = 0$
(d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

(i) Señale las ecuaciones implícitas y paramétricas del subespacio generado por el sistema

$$\mathbf{S} = \{(1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$$

(1 pto)

(ii) Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio vectorial de los polinomios de grado igual o menor a 2

$$\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c.$$

Consideremos las bases

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{p}_1(x) = x^2 - 1,\ \mathbf{p}_2(x) = x,\ \mathbf{p}_3(x) = x + 1\right\}$$
$$\mathbf{B} = \left\{\mathbf{q}_1(x) = -1,\ \mathbf{q}_2(x) = -x^2,\ \mathbf{q}_3(x) = x\right\}$$

Señale razonadamente la coordenadas del polinomio

$$\mathbf{p}(x) = x^2 + x - 1$$

respecto de la bases **A** y **B** respectivamente. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen} 2x \cos y$$

en el punto $(\frac{\pi}{2}, 0)$. (1 pto)

(ii) Calcule la integral

$$I = \int_M xy dx dy$$

en donde M es el triángulo de vértices $(0, 1)$, $(2, 1)$, $(1, 4)$. (1 pto)

FMI. Enero 2017 2ª Semana. SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (b)**

   - $\Diamond$ es asociativa. Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$ se tiene

   $$\begin{aligned} (x \Diamond y) \Diamond z &= (|x| + |y|) \Diamond z \\ &= ||x| + |y|| + |z| \\ &= |x| + |y| + |z| \\ &= |x| + ||y| + |z|| \\ &= x \Diamond (|y| + |z|) \\ &= x \Diamond (y \Diamond z) \end{aligned}$$

   - $\Diamond$ es conmutativa. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$

   $$x \Diamond y = |x| + |y| = |y| + |x| = y \Diamond x$$

   - No existe elemento neutro. Si existiese un elemento neutro $e = 0$, necesariamente para $x = 0$, tenemos que

   $$0 \Diamond e = 0 \Rightarrow 0 + |e| = 0 \Rightarrow e = 0.$$

   Pero, por ejemplo

   $$(-1) \Diamond e = (-1) \Diamond 0 = 1 \neq -1$$

   luego 0 no es elemento neutro y por tanto no existe elemento neutro.

2. **Solución. (b)** Directamente

   $$\text{Ker} f = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$$

   el núcleo de f está dado por una sola ecuación implícita. Luego la dimensión de dicho subespacio es

   $$\dim(\mathbb{R}^4) - 1 = 4 - 1 = 3.$$

   De hecho, como $x_1 = -x_3 - x_4$,

   $$\begin{aligned} \text{Ker} f &= \{(-x_3 - x_4, x_2, x_3, x_4) = x_2(0,1,0,0) + x_3(-1,0,1,0) + x_4(-1,0,0,1)\} \\ &= G[\{(0,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}] \end{aligned}$$

3. **Solución. (b)**

   La integral es inmediata

   $$\int_1^e \left(x - \frac{1}{2x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=1}^{x=e} - \frac{1}{2}\left[\ln x\right]_{x=1}^{x=e} = \frac{e^2 - 1}{2} - \frac{1 - 0}{2} = \frac{e^2}{2} - 1$$

4. **Solución. (a)**

Sabemos que la función valor absoluto $g(x) = |x|$ no es derivable en el punto $x = 0$. En este caso la función

$$f(x) = |2 - |x - 1|| - 1$$

no es derivable en los puntos en que se anula el valor absoluto

$$|2 - |x - 1|| = 0 \Leftrightarrow 2 - |x - 1| = 0 \Leftrightarrow 2 = |x - 1| \Leftrightarrow x = 3$$

Por tanto $f'(3)$ no existe

5. **Solución. (a)** En primer lugar derivamos respecto de y

$$D_2F(x, y) = -2(x - y)(-\operatorname{sen}(x - y)^2) = 2(x - y)\operatorname{sen}(x - y)^2$$

A continuación respecto de x

$$\begin{aligned} D_{12}F(x, y) &= D_1(D_2F(x, y)) = D_1\left(2(x - y)\operatorname{sen}(x - y)^2\right) \\ &= 2\operatorname{sen}(x - y)^2 + 2(x - y)2(x - y)\cos(x - y)^2 \\ &= 2\operatorname{sen}(x - y)^2 + 4(x - y)^2\cos(x - y)^2 \end{aligned}$$

Por último, derivamos respecto de y

$$\begin{aligned} D_{212}F(x, y) &= D_2(D_{12}F(x, y)) = D_2(2\operatorname{sen}(x - y)^2 + 4(x - y)^2\cos(x - y)^2) \\ &= -4(x - y)\cos(x - y)^2 - 8(x - y)\cos(x - y)^2 - 4(x - y)^2\operatorname{sen}(x - y)^2 \\ &= -12(x - y)\cos(x - y)^2 - 4(x - y)^2\operatorname{sen}(x - y)^2 \end{aligned}$$

Evaluando en el punto

$$\begin{aligned} D_{212}F(0, \sqrt{\pi}) &= -4(0 - \sqrt{\pi})\cos(0 - \sqrt{\pi})^2 - 8(0 - \sqrt{\pi})\cos(0 - \sqrt{\pi})^2 - 4(0 - \sqrt{\pi})^2\operatorname{sen}(0 - \sqrt{\pi})^2 \\ &= -12(0 - \sqrt{\pi})\cos(0 - \sqrt{\pi})^2 - 4(0 - \sqrt{\pi})^2\operatorname{sen}(0 - \sqrt{\pi})^2 \\ &= 12\sqrt{\pi}\cos(\pi) - 4\pi\operatorname{sen}\pi = -12\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**

(i) Para resolver esta parte, seguimos los mismos argumentos que en los vídeos:

- Ecuaciones de subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$. I de II
- Ecuaciones de subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$. II de II

En primer lugar

$$\begin{aligned} G[\mathbf{S}] &= G[(1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)] \\ &= \{(x, y, z, t) = \lambda_1(1, 0, 1, 0) + \lambda_2(1, -1, 0, 1) + \lambda_3(1, 1, 1, 0), \lambda_i \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z, t) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_3 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_3, \lambda_2), \lambda_i \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ y = \lambda_3 - \lambda_2 \\ z = \lambda_1 + \lambda_3 \\ t = \lambda_2 \end{cases}$$

Es un subespacio de dimensión 3 de $\mathbb{R}^4$, luego solamente hay una ecuación implicita solamete. Se calcula como

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ y & 0 & -1 & 1 \\ z & 1 & 0 & 1 \\ t & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - t - z = 0$$

(ii) Directamente

$$\mathbf{p}(x) = x^2 + x - 1 = -\mathbf{q}_2(x) + \mathbf{q}_3(x) + \mathbf{q}_1(x) = \mathbf{q}_1(x) - \mathbf{q}_2(x) + \mathbf{q}_3(x).$$

Luego las coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$ viene dadas por el vector

$$(1, -1, 1).$$

La matriz $M_{A\to B}$ de cambio de la base $\mathbf{A}$ la base $\mathbf{B}$ tiene por columnas las coordenadas de $\mathbf{A}$ con respecto de $\mathbf{B}$. Directamente

$$M_{A\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y su inversa nos da la matriz del cambio contrario, de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$,

$$M_{B\to A} = M_{A\to B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego el vector $\mathbf{p}(x) = x^2 + x - 1$, con coordenadas $(-1, -1, 1)$ respecto de la base $\mathbf{B}$ tiene por coordenadas :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Efectivamente se puede comprobar que

$$\mathbf{p}_1(x) + \mathbf{p}_2(x) = x^2 - 1 + x = \mathbf{p}(x)$$

(i) El polinomio de Taylor P_2 de f en $(\frac{\pi}{2}, 0)$ viene dado por

$$P_2(x,y) = f(\frac{\pi}{2},0)+D_1f(\frac{\pi}{2},0)(x-\frac{\pi}{2})+D_2f(\frac{\pi}{2},0)y+\frac{1}{2}(D_{11}f(0,1)(x-\frac{\pi}{2})^2+2D_{12}f(\frac{\pi}{2},0)(x-\frac{\pi}{2})y+D_{22}f(\frac{\pi}{2},0)y^2)$$

Por un cálculo directo

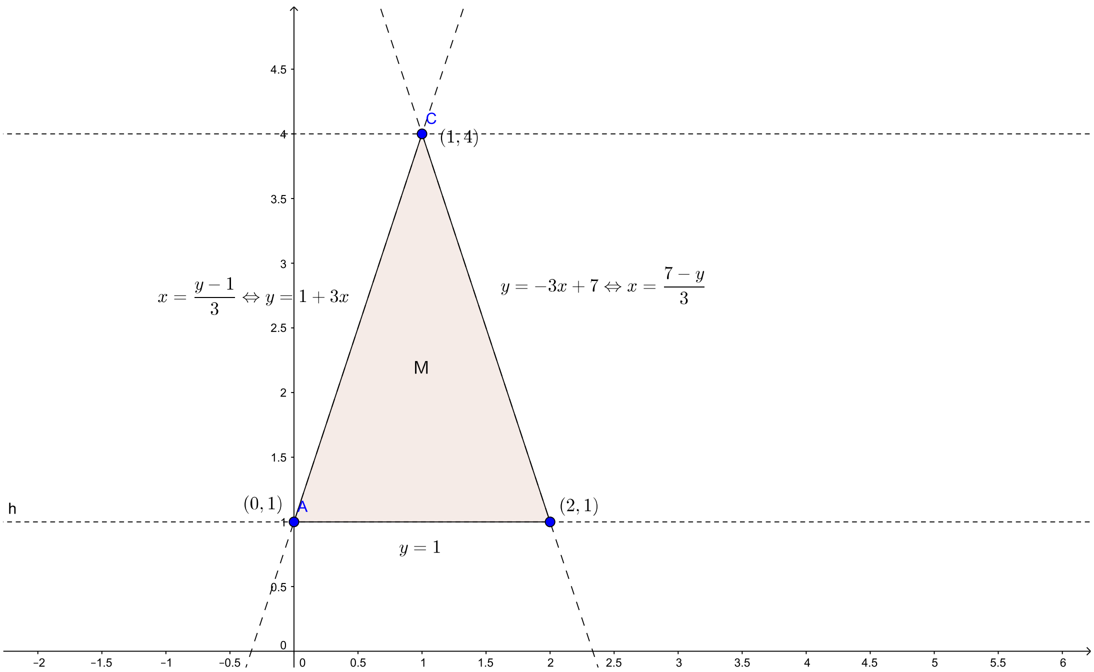
$$\begin{aligned}
&f(\tfrac{\pi}{2},0) = \operatorname{sen}\pi\cos 0 = 0,\\
&D_1f(\tfrac{\pi}{2},0) = 2\cos 2x\cos y|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} = 2\cos\pi\cos 0 = -2,\\
&D_2f(\tfrac{\pi}{2},0) = -\operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} y|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} = -\operatorname{sen}\pi\operatorname{sen} 0 = 0,\\
&D_{11}f(\tfrac{\pi}{2},0) = -4\operatorname{sen} 2x\cos y|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} = -4\operatorname{sen}\pi\cos 0 = 0,\\
&D_{12}f(\tfrac{\pi}{2},0) = -2\cos 2x\operatorname{sen} y|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} = -2\cos\pi\operatorname{sen} 0 = 0,\\
&D_{22}f(\tfrac{\pi}{2},0) = -\operatorname{sen} 2x\cos y|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} = -\operatorname{sen}\pi\cos 0 = 0.
\end{aligned}$$

Luego

$$P_2(x,y) = -2(x-\frac{\pi}{2}) = -2x+\pi$$

(ii) El triángulo M se puede expresar como

$$M = \{(x,y) : 1 \le y \le 4, \frac{y-1}{3} \le x \le \frac{7-y}{3}\}$$



Luego

$$\begin{aligned}
\int_M xydxdy &= \int_1^4 \int_{\frac{y-1}{3}}^{\frac{y-7}{3}} xydxdy = \int_1^4 y \left(\int_{\frac{y-1}{3}}^{\frac{7-y}{3}} xdx \right) dy = \\
&= \int_1^4 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=\frac{y-1}{3}}^{x=\frac{7-y}{3}} dy = \frac{1}{18} \int_1^4 \left(y(y-7)^2 - y(y-1)^2 \right) dy \\
&= \frac{1}{18} \int_1^4 (48y - 12y^2) dy = \frac{8}{3} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=4} - \frac{2}{3} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=1}^{y=4} \\
&= \frac{8}{3}(8 - \frac{1}{2}) - \frac{2}{3}(\frac{64}{3} - \frac{1}{3}) = 6
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2017
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1pto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un único libro de texto de teoría que puede ser un ejemplar del texto de la Bibliografía Básica o cualquier otro, que podrá contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Resuelva la ecuación

$$AXB = I,$$

en donde $I \in M_{2\times 2}$ es la matriz identidad y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) $X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

(c) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sean las bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{(1,1),(-1,1)\}, \\ \mathbf{B} &= \{(1,-1),(0,1)\} \end{aligned}$$

de $\mathbb{R}^2$. Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(3,-1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.

(a) $(4,6)$ (b) $(1,-3)$ (c) $(-2,1)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$$
$$f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$$

en donde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Calcule la imagen del vector

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$$

(a) $f(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$
(b) $f(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2$
(c) $f(\mathbf{v}) = \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$
(d) Ninguna de las anteriores

4. Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ funciones definidas por

$$f(x, y) = (x^2y, xy^2)$$

y

$$g(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

respectivamente. Calcule el jacobiano de la función compuesta $f \circ g$ en el punto $t = 0$.

(a) $D(f \circ g)(0) = (1, 0)$ (b) $D(f \circ g)(0) = (1, 1)$
(c) $D(f \circ g)(0) = (0, 0)$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Calcule la integral

$$I = \int_1^2 x^4 \ln x dx$$

(ln denota logaritmo neperiano)

(a) $I = \frac{18}{5}\ln 2 - \frac{29}{25}$ (b) $I = \frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}$
(c) $I = \frac{16}{5}\ln 2 - \frac{30}{25}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

(i) Represente gráficamente la función

$$f(x) = \frac{|x-1|}{|x|-1}$$

(1 pto)

(ii) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \int_0^{x^2y^4} t^2 dt.$$

Calcule las derivadas parciales $D_1 f(2,1)$, $D_2 f(2,1)$. (1 pto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Determinar los valores propios y las ecuaciones de los subespacios propios asociados a ellos. (1 pto)

(ii) Estudiar si es diagonalizable. En caso afirmativo encontrar la matriz diagonal y la base a la que está referida (1 pto)

FMI. Septiembre 2017 . SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (b)** Como la matrices A, B tienen determinante no nulo

$$|A| = 1, \ |B| = -1,$$

existen sus matrices inversas

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Podemos despejar la matriz incognita X multiplicando la igualdad por las matrices inversas A^{-1}, B^{-1} a ambos lados de la igualad.

$$\begin{aligned} AXB = I \ &\leftrightarrow A^{-1}AXB = A^{-1} \leftrightarrow IXB = A^{-1} \leftrightarrow XB = A^{-1} \\ &\leftrightarrow XB = A^{-1} \leftrightarrow XBB^{-1} = A^{-1}B^{-1} \leftrightarrow XI = A^{-1}B^{-1} \\ &\leftrightarrow X = A^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

Luego

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. **Solución. (a)** En general, la matriz de cambio de la base $\mathbf{A}$ a la base $\mathbf{B}$ se puede expresar como

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = M_{\mathbf{E}\to\mathbf{B}} M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} = B^{-1}A$$

siendo $M_{\mathbf{B}\to\mathbf{E}}$ la matriz de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base canónica

$$\mathbf{E} = \{(1,0),(0,1)\},$$

$M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}}$ la matriz de cambio de la base canónica a $\mathbf{A}$, y

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

las matrices que tiene por columnas los elementos de la base.(véanse los siguientes vídeos para una explicación detallada del caso general

- Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. I de II
- Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. II de II)

Luego

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} &= B^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aplicando dicha matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix},$$

El vector $\mathbf{v}$, de coordenadas $(3,-1)$ con respecto de $\mathbf{A}$, tiene por vector de coordenadas $(4,6)$ con respecto de $\mathbf{B}$. Efectivamente

$$3(1,1) - 1(-1,1) = 4(1,-1) + 6(0,1) = (4,2)$$

3. **Solución. (c)** Aplicando directamente la linealidad de f tenemos

$$\begin{aligned} f(\mathbf{v}) &= f(3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2) = 3f(\mathbf{v}_1) - 2f(\mathbf{v}_2) = 3(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) - 2(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3) \\ &= \mathbf{u}_1 - 3\mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3 \end{aligned}$$

4. **Solución. (a)** Aplicando la regla de la cadena

$$D(f\circ g)(0) = Df(g(0))Dg(0) = Df(1,0)Dg(0)$$

Cada matriz jacobiana viene dada por

$$\begin{aligned} Df(1,0) &= \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ y^2 & 2xy \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ Dg(0) &= \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}_{t=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego

$$D(f\circ g)(0) = Df(g(0))Dg(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. **Solución. (b)** Aplicamos la fórmula de integración por partes

$$\int_a^b uv'dx = [uv]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'vdx,$$

en donde en este caso

$$u = u(x) = \ln x,\ \ v' = v'(x) = x^4.$$

Es inmediato que $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ y $v(x) = \dfrac{x^5}{5}$, luego aplicando fórmula

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^4 \ln x dx dx &= \left[\frac{x^5}{5}\ln x\right]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \frac{1}{x}\frac{x^5}{5}dx = \frac{1}{5}\left(\left[x^5 \ln x\right]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 x^4 dx\right) \\
&= \frac{1}{5}\left(32\ln 2 - 0 - \left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=1}^{x=2}\right) = \frac{1}{5}\left(32\ln 2 - (\frac{32-1}{5})\right) \\
&= \frac{32}{5}\ln 2 - \frac{31}{25}
\end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**

(i) Podemos simplificar la expresión de la función, sin más que aplicar la definición de valor absoluto

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{|x|-1} = \dfrac{x-1}{x-1} = 1 & \text{si } 1 < x, \\ \dfrac{|x-1|}{|x|-1} = \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ \dfrac{|x-1|}{|x|-1} = \dfrac{-(x-1)}{-x-1} = \dfrac{-x+1}{-x-1} & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

La función no está definida en el punto $x = 1$ por anularse el denominador. En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función toma la expresión

$$f(x) = \frac{-x+1}{-x-1} = \frac{-x+1}{-(x+1)}$$

El denominador se anula en $x = -1$ y por tanto tampoco está definida.

Por otro lado, su derivada

$$f'(x) = \frac{(-1)(-x-1) - (-1)(-x+1)}{(-x-1)^2} = \frac{2}{(-x-1)^2}$$

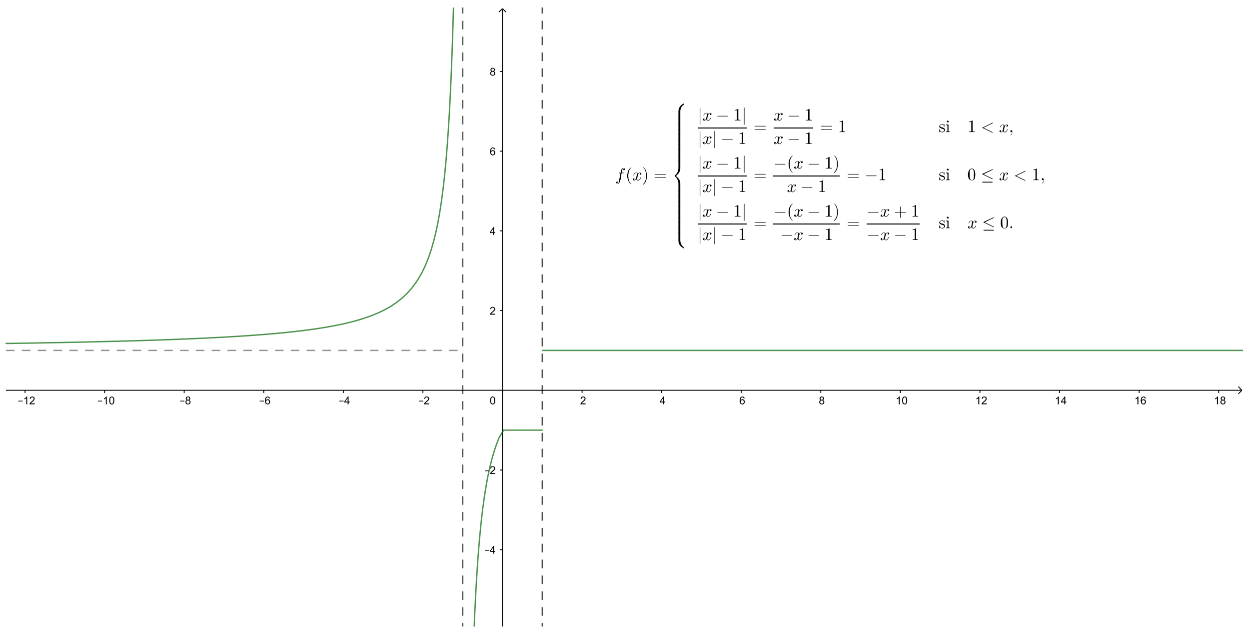
es positiva, luego la función es convexa y creciente en todo el dominio, en particular en los subdominios $(-\infty, -1)$ y $(-1, 0)$. En el subdominio $(-\infty, -1)$ se verifica

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1,\ \ \lim_{x \to -1^-} f(x) = \infty$$

la función es creciente y convexa, tendiendo a 1 en el menos infinito y a infinito cuando nos aproximamos a -1 por la derecha. En el intervalo $(-1,0)$ tenemos

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty,\ f(0) = -1,$$

la función es también creciente y convexa, partiendo de menos infinito y tomando el valor -1 en $x=0$. En $[0,1)$ es constante con valor -1 y del mismo modo, en $(1,\infty)$, no estando definida en el punto $x=1$. Con todo esto podemos hacer un bosquejo de la función, véase figura a continuación.



(ii) Podemos expresar f como composición de dos funciones reales

$$f = g \circ h,$$

en donde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ están definidas por

$$g(y) = \int_1^y u^2 du,\ h(x,y) = x^2y^4.$$

Aplicando la regla de la cadena

$$D_i f(x,y) = g'(h(x,y))D_i h(x) \text{ para todo } i = 1,2.$$

Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo (véase pp 208-9)

$$g'(y) = y^2,$$

por otro lado

$$D_1f(x,y)=2xy^4,\ D_2f(x,y)=4x^2y^3$$

Luego

$$D_1f(2,1)=g'(h(2,1))D_1h(2,1)=\left.y^2\right|_{y=h(2,1)=4}\cdot\left.2xy^4\right|_{(x,y)=(2,1)}=16\cdot 4=64$$
$$D_2f(2,1)=g'(h(2,1))D_2h(2,1)=\left.y^2\right|_{y=h(2,1)=4}\cdot\left.4x^2y^3\right|_{(x,y)=(2,1)}=16\cdot 16=256$$

Problema **b)**

(i) Denotemos

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-1&0\\0&2&1\end{pmatrix}$$

El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda)=|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\0&-1-\lambda&0\\0&2&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-1)=(1-\lambda)^2(1+\lambda)$$

Los autovalores son $\lambda_1=1$(doble), $\lambda_2=-1$

El subespacio $\mathbb{E}_1$ asociado al autovalor $\lambda_1=0$ viene dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1&=\{X\in\mathbb{R}^3:(A-1I)X=0\}=\{X\in\mathbb{R}^3:AX=0\}\\&=\left\{(x_1,x_2,x_3):\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-2&0\\0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\\&=\{(x_1,x_2,x_3):x_2=0\}\\&=\{(x_1,0,x_3)\}\\&=x_1(1,0,0)+x_3(0,0,1)\\&=G[\{(1,0,0),(0,0,1)\}]\end{aligned}$$

El subespacio $\mathbb{E}_2$ asociado al autovalor $\lambda_2=-1$ viene dado por

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_2&=\{X\in\mathbb{R}^3:(A-I)X=0\}=\{X\in\mathbb{R}^3:AX=0\}\\&=\left\{(x_1,x_2,x_3):\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&0&0\\0&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}\\&=\{(x_1,x_2,x_3):2x_1-2x_2=0,\ 2x_2+2x_3=0\}=\\&=\{(x_1,x_2,x_3):x_1=x_2,\ x_2=-x_3\}\\&=\{(x_1,x_1,-x_1)=x_1(1,1,-1)\}\\&=G[(1,1,-1)]\end{aligned}$$

(ii) La matriz es diagonalizable, ya que las dimensiones de los subespacios coinciden con sus multiplicidades (véase p. 99 libro de texto), con matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si ordenamos la base de autovalores siguiendo el mismo orden. Como

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1 &= G[\{(1,0,0),(0,0,1)\}], \\ \mathbb{E}_2 &= G[(1,1,-1)], \end{aligned}$$

una base de vectores propios viene dada por

$$\{(1,0,0),(0,0,1),(1,1,-1))\}.$$

Una matriz de paso P verificando

$$D = P^{-1}AP$$

tiene por columnas los elementos de la base de cada subespacio propio (véase p.102 libro de texto). En este caso

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y se puede verificar

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2018. 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1 punto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un único libro de texto de teoría que puede ser un ejemplar del texto de la Bibliografía Básica o cualquier otro, que podrá contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Sea

$$\mathcal{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$

el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2. Sobre dicho conjunto consideramos la siguiente operación

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathcal{M}_{2\times 2} \times \mathcal{M}_{2\times 2} & \to & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ (A, B) & \longmapsto & A \Diamond B = \dfrac{1}{2}(A \times B + B \times A). \end{array}$$

De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- Existe elemento neutro

(a) 2 (b) 1 (c) 3 (d) Ninguna de las anteriores

2. Indique el valor del siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1}.$$

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) Ninguna de las anteriores

3. Señale las ecuaciones implícitas del subespacio generado por el sistema

$$\mathbf{S} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}.$$

(a) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\}$
(b) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0\}$
(c) $\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_4 = 0,\ x_1 - x_3 = 0,\ x_1 - x_2 = 0\}$
(d) Ninguna de las anteriores

4. Señale el valor de la integral

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

(a) $I = 2\sqrt{2} - 2$ (b) $I = \sqrt{2} - 2$
(c) $I = \sqrt{2} - 1$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean las bases de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\}, \\ \mathbf{B} &= \{(1,1,1),(1,1,0),(-1,0,0)\}. \end{aligned}$$

Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(1,1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.
(a) $(1,0,-1)$ (b) $(1,-1,1)$
(c) $(1,0,0)$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

En este ejercicio consideramos el espacio de polinomios de grado igual o menor a 3

$$\mathbb{P}_3 = \{\mathbf{p}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 : a,b,c,d \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Calcule razonadamente las coordenadas del polinomio

$$\mathbf{q}(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

respecto de la base

$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{p}_1(x) = 1,\ \mathbf{p}_2(x) = 1 + x,\ \mathbf{p}_3(x) = 1 + x + x^2,\ \mathbf{p}_4(x) = x^2 + x^3\right\}.$$

(1 punto)

(ii) Considerando coordenadas con respecto de $\mathbf{A}$, halle las ecuaciones paramétricas e implicitas del subespacio vectorial

$$\mathbb{V} = G[\mathbf{C}] \subset \mathbb{P}_3$$

generado por el conjunto

$$\mathbf{C} = \left\{ \mathbf{q}_1(x) = 1 - x^2, \mathbf{q}_2(x) = x^3 \right\}.$$

(1 punto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

Calcule las derivadas parciales $D_1 f(0,0)$, $D_2 f(0,0)$. (1 punto)

(ii) Dada la integral

$$I = \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Dibuje su recinto de integración, dé su expresión en coordenadas polares y calcule la integral. (1 punto)

FMI. SOLUCIONES. Febrero 2018. 1^a semana

1. **Solución. (a)**

- La operación es conmutativa, por la conmutatividad de la suma de matrices,

$$A\Diamond B = \frac{1}{2}\left(A\times B + B\times A\right) = \frac{1}{2}\left(B\times A + A\times B\right) = B\Diamond A$$

para cualquier par de matrices $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$.

- La matriz identidad

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es el elemento neutro de la operación. Ya que

$$\begin{aligned} I\Diamond A &= \frac{1}{2}\left(I\times A + A\times I\right) = \frac{1}{2}2A = A \\ A\Diamond I &= \frac{1}{2}\left(A\times I + I\times A\right) = \frac{1}{2}2A = A \end{aligned}$$

- La operación no es asociativa. Si tomamos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

por un lado

$$\begin{aligned} A\Diamond B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Diamond\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y se tiene

$$\begin{aligned} \left(A\Diamond B\right)\Diamond C &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\Diamond\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por el otro lado

$$\begin{aligned}
B\Diamond C &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Diamond \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
A\Diamond(B\Diamond C) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Diamond \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Luego

$$(A\Diamond B)\Diamond C = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A\Diamond(B\Diamond C)$$

y la propiedad no es asociativa.

2. **Solución. (c)**

Para resolver este ejercicio, seguimos ideas generales dadas en los vídeos

- Regla de L'Hopital. I de II
- Regla de L'Hopital. II de II

Al sustituir por 0 en la expresión del límite se obtiene la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Veamos si se satisfacen las condiciones de la regla de L'Hôpital para poder abordar esta indeterminación.

Las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x - x - 1$ son derivables en $\mathbb{R}$. Además, $g'(x) = e^x - 1 \neq 0$ para todo $x \neq 0$. Así pues, si existe $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces en virtud de la regla de L'Hôpital su valor coincide con el del límite que se quiere calcular. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{e^x - 1},$$

y otra vez, se obtiene la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. Se tiene que $f'(x)$ y $g'(x)$ son derivables en $\mathbb{R}$, $g''(x) = e^x \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y el siguiente límite existe

$$\lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^0} = 2.$$

Luego por la regla de L'Hôpital aplicada reiteradamente, se deduce que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = 2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 2,$$

por lo que la opción correcta es la (c).

3. **Solución. (b)** Para resolver este ejercicio, seguimos el procedimiento dado en el vídeo

   - Ecuaciones de subespacios vectoriales en $\mathbb{R}^n$. I de II

$$\mathbf{S} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}.$$

El conjunto $\mathbf{S}$ es linealmente independiente, por tanto el número de ecuaciones implícitas del subespacio es la dimensión del espacio menos el rango del sistema generador. En este caso, por ser los vectores de $\mathbf{S}$ linealmente independientes, rango($\mathbf{S}$)$= 3$ y se tiene

$$n - \text{rango}(\mathbf{S}) = 4 - 3 = 1,$$

luego hay una única ecuación implícita. Un vector genérico $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in G[\mathbf{S}]$, es combinación lineal de los vectores del sistema, luego

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4), (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0)\}$$

es linealmente dependiente y por tanto su determinante nulo

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_4 = 0$$

Esto determina la ecuación implícita, y por tanto $x_4 = 0$ es una ecuación implícita de $\mathbf{S}$. Razonese que (a), (c) no son validas ya que los vectores de

S no verifican las ecuaciones propuestas. Por ejemplo, el vector $(1,0,0,0)$ no verifica la ecuación $x_1 - x_2 = 0$.

4. **Solución. (a)** La integral es inmediata, ya que es fácil obtener una primitiva de la función integrando

$$\left(2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)' = 2\frac{1}{2}2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Aplicando la regla de Barrow,

$$\int_0^1 2x\left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left[2\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]_{x=0}^{x=1} = 2\sqrt{2}-2$$

5. **Solución. (a)** Para resolver este ejercicio, seguimos el procedimiento dado en los vídeos

   - Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. I de II
   - Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. II de II

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

las matrices que tienen por columnas los vectores de los conjuntos **A** y **B**, respectivamente. De esta manera, la matriz de cambio $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}$ de la base **A** a la base **B** viene dada por

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = B^{-1}A.$$

En este caso,

$$\begin{aligned} M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego el vector de coordenadas $(1,1,1)$ en la base $\mathbf{A}$, tiene por coordenadas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con respecto de la base $\mathbf{B}$. Por tanto, $(1,0,-1)$ es el vector de coordenadas buscado y (a) la opción correcta. Efectivamente, podemos comprobar que el vector tiene las mismas coordenadas con respecto de la base canónica

$$(2,1,1) = 1\cdot(1,0,0)+1\cdot(1,1,0)+1\cdot(0,0,1) = 1\cdot(1,1,1)+0\cdot(0,1,0)-(-1,0,0)$$

Parte Desarrollo

Problema **(a)**

(i) Si consideramos la base canónica

$$\mathbf{E} = \left\{\mathbf{e}_1(x) = 1,\ \mathbf{e}_2(x) = x,\ \mathbf{e}_3(x) = x^2,\ \mathbf{e}_4(x) = x^3\right\}$$

podemos identificar dichos vectores con la base canónica usual de $\mathbb{R}^4$

$$\mathbf{E} = \{\mathbf{e}_1(x) = (1,0,0,0),\ \mathbf{e}_2 = (0,1,0,0),\ \mathbf{e}_3 = (0,0,1,0),\ \mathbf{e}_4 = (0,0,0,1)\}$$

y a los vectores de $\mathbf{A}$ con sus coordenadas con respecto de la base canónica

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{p}_1 = (1,0,0,0),\ \mathbf{p}_2 = (1,1,0,0),\ \mathbf{p}_3 = (1,1,1,0),\ \mathbf{p}_4 = (0,0,0,1)\}\,,.$$

en el sentido de que por ejemplo

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_3(x) &= 1 + x + x^2 \\ &= 1\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2 + 0\cdot x^3 \\ &= 1\cdot \mathbf{e}_1(x) + 1\cdot \mathbf{e}_2(x) + 1\cdot \mathbf{e}_3(x) + 0\cdot \mathbf{e}_4(x) \end{aligned}$$

El ejercicio es, por tanto, equivalente a trabajar con vectores de $\mathbb{R}^4$ y dichas bases. Para entender mejor esta idea recomendamos ver el vídeo

- Capítulo 3. Espacios vectoriales de dimensión finita

Con respecto de dicha base, el vector de coordenadas de

$$\mathbf{q}(x) = x^3 - x^2 + x - 1$$

es sencillo de calcular y viene dado por

$$Q_{\mathbf{E}} = (-1,1,-1,1)$$

La matriz $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}}$ de cambio de la base $\mathbf{A}$ a la base $\mathbf{E}$ tiene por columnas los vectores de la base $\mathbf{A}$, y su inversa nos da la matriz del cambio en sentido opuesto. Es decir, la matriz de cambio $M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}}$ de la base $\mathbf{E}$ a la base $\mathbf{A}$ es la inversa de la matriz $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}}$

$$M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} = M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y por tanto las coordenadas $Q_{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{q}$ con respecto de $\mathbf{A}$ vienen dadas por

$$Q_{\mathbf{A}} = M_{\mathbf{E}\to\mathbf{A}} Q_{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Véase que esto es equivalente a resolver el siguiente sistema lineal que es muy sencillo de calcular

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} Q_{\mathbf{A}} = Q_{\mathbf{E}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto $(-2, 3, -2, 1)$ son las coordenadas de $\mathbf{q}$ con respecto de la base $\mathbf{A}$. Compruébese que efectivamente

$$\mathbf{q}(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = -2 \cdot 1 + 3(1+x) - 2(1+x+x^2) + (x^2+x^3)$$

(ii) Por lo visto anteriormente, las coordenadas de los vectores de $\mathbf{C}$ con respecto de la base $\mathbf{A}$ viene dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1(x) &= 1 - x^2 = \mathbf{p}_1(x) + \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}_3(x) = 1 + 1 + x - (1 + x + x^2) \\ \mathbf{q}_2(x) &= x^3 = \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}_3(x) + \mathbf{p}_4(x) = 1 + x - (1 + x + x^2) + x^2 + x^3 \end{aligned}$$

Luego cualquier vector $\mathbf{p}(x) = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3 + x_4\mathbf{p}_4$ pertenece al subespacio $G[\mathbf{C}]$ generado por C si

$$x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3 + x_4\mathbf{p}_4 = \lambda_1\mathbf{q}_1(x) + \lambda_2\mathbf{q}_2(x),$$

es decir

$$\begin{aligned} x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3 + x_4\mathbf{p}_4 &= \lambda_1(\mathbf{p}_1(x) + \mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}_3(x)) + \lambda_2(\mathbf{p}_2(x) - \mathbf{p}_3(x) + \mathbf{p}_4(x)) \\ &= \lambda_1\mathbf{p}_1(x) + (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{p}_2(x) + (-\lambda_1 - \lambda_2)\mathbf{p}_3(x) + \lambda_2\mathbf{p}_4(x) \end{aligned}$$

Igualando componentes

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1, \\ x_2 &= \lambda_1 + \lambda_2, \\ x_3 &= -\lambda_1 - \lambda_2, \\ x_4 &= \lambda_2, \end{aligned}$$

que son las ecuaciones paramétricas de $G[\mathbf{C}]$ con respecto de la referencia $\mathbf{A}$. Como estamos en un espacio de dimensión 4 y el subespacio de dimensión 2, basta hallar dos ecuaciones implícitas linealmente independientes eliminando parámetros. Lo vamos a hacer directamente, recordemos que un razonamiento formal de cómo hacerlo se puede encontrar en el vídeo que hemos indicado en la solución de la pregunta 3. Directamente sumando la segunda y tercera ecuación obtenemos una ecuación implícita

$$x_2 + x_3 = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

y sumando la primera, tercera y cuarta obtenemos la segunda ecuación implícita

$$x_1 + x_3 + x_4 = \lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_2 = 0$$

Finalmente razónese que dicho ejercicio se puede resolver equivalentemente trabajando directamente en el espacio $\mathbb{R}^4$ sin más que considerar el subespacio generado por las coordenadas $\{(1,1,-1,0),(0,1,-1,1)\}$ de los polinomios de $\mathbf{C}$ con respecto de la base $\mathbf{A}$.

Problema **(b)**

(i) Calculamos las derivadas parciales directamente

$$\begin{aligned} D_1 f(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t0(t^2-0^2)}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 = 0 \\ D_1 f(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(0,1)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0t(0^2-t^2)}{0^2+t^2}0 - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0 = 0 \end{aligned}$$

(ii) Queremos calcular la integral

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

El recinto de integración $\mathbf{M}$ se corresponde con el círculo de centro $(0,0)$ y radio 2

$$\mathbf{M} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le y \le 2,\ -\sqrt{4-y^2} \le x \le \sqrt{4-y^2}\right\}$$

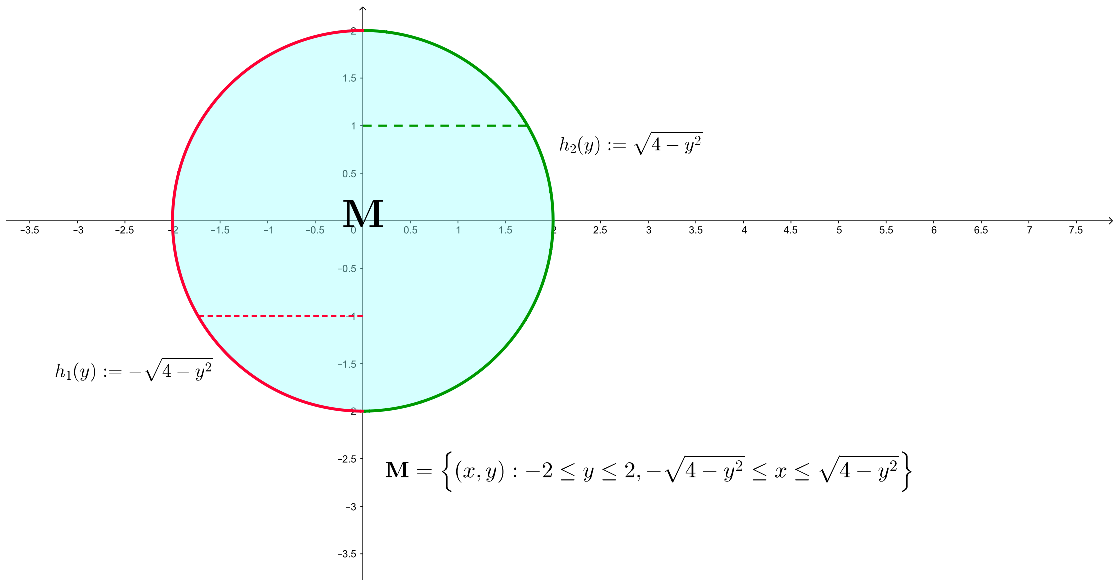


Figura 1: Recinto de integración

Expresando el conjunto en polares

$$x = r\cos\theta,\ y = r\operatorname{sen}\theta,$$

sus coordenadas vienen dadas por

$$\left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\right\},$$

Además por el Teorema de Cambio de Variable (véase Sección 4. Tema 9 del libro de texto)

$$dxdy = rdrd\theta,$$

por tanto

$$I = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}dxdy = \int_0^2\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\theta dr = \int_0^2 \left(e^{-r^2} r \int_0^{2\pi} d\theta\right)$$

Calculamos la integral aplicando integración reiterada

$$I = \int_0^2 e^{-r^2} r \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right) dr = 2\pi\int_0^2 e^{-r^2} r dr = 2\pi\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_{r=0}^{r=2} = \pi(1-e^{-4}).$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2018. 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1 punto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un único libro de texto de teoría que puede ser un ejemplar del texto de la Bibliografía Básica o cualquier otro, que podrá contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números enteros. Sobre dicho conjunto consideramos la operación $\Diamond$ definida por

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & a \Diamond b = a \cdot b - (a + b) \end{array}$$

De las siguientes afirmaciones señale el número de ellas que son ciertas.

- $\Diamond$ es asociativa
- $\Diamond$ es conmutativa
- Existe elemento neutro

(a) 1 $\quad$ (b) 0 $\quad$ (c) 2 $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio de matrices cuadradas de orden 2 y sea $\mathbf{A}$ la siguiente base del mismo

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallar el vector de coordenadas de la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

respecto de dicha base.

(a) $(0, 0, 1, 1)$ $\quad$ (b) $(3, 3, 3, 3)$

(c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$$

Calcule la derivada parcial $D_1 f(0,0)$

(a) No existe $D_1 f(0,0)$ (b) $D_1 f(0,0) = 0$

(c) $D_1 f(0,0) = 1$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Dado el polinomio

$$p(x) = x^4 + x^3 - x + 1,$$

determine los valores a, b, $c, d, e \in \mathbb{R}$ tales que

$$p(x) = a + b(x+1) + c(x+1)^2 + d(x+1)^3 + e(x+1)^4.$$

(a) $a = 2$, $b = 6$, $c = 9$, $d = 5$, $e = 1$

(b) $a = 2$, $b = -2$, $c = 3$, $d = -3$, $e = 1$

(c) $a = 2$, $b = 1$, $c = -2$, $d = 2$, $e = 1$

(d) Ninguna de las anteriores

5. Señale el valor de la siguiente integral

$$I = \int_{\ln 4}^{\ln 7} \frac{e^x}{(e^x - 3)^2} dx.$$

(Notación: ln denota Logaritmo neperiano)

(a) $1/3$ (b) 1 (c) $3/4$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

(i) Demuestre, aplicando la regla de L'Hopital, que el siguiente límite es 0

$$\lim_{x \to 0} x^2 \ln(x^2).$$

A partir del resultado, deduzca razonadamente el valor del siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \ln(x^2) \cos\left(\frac{\pi}{xy}\right).$$

(1 punto)

(ii) Calcule el valor de la integral

$$I = \int_0^2 \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dxdy.$$

Dibuje su recinto de integración, dé su expresión en coordenadas polares y calcule la integral. (1 punto)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (1,3), \\ f(0,0,1) &= (1,0), \\ f(0,1,1) &= (-1,1). \end{aligned}$$

(i) Calcule razonadamente el vector imagen $f(1,1,1)$ (1 punto)

(ii) Halle la matriz asociada de f con respecto de las bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \\ \mathbf{B} &= \{(0,2),(-1,0)\}. \end{aligned}$$

(1 punto)

FMI. SOLUCIONES. Febrero 2018. 2^a semana

1. **Solución. (a)**

   - La operación es conmutativa, por la conmutatividad de la suma de enteros,
   $$a\Diamond b = a \cdot b - (a+b) = b \cdot a - (b+a) = b\Diamond a$$
   para todos a, $b \in \mathbb{Z}$.
   - La operación no es asociativa, si tomamos por ejemplo $\bar{a} = 1$, $\bar{b} = 2$, $\bar{c} = 3$ se tiene
   $$(\bar{a}\Diamond\bar{b})\Diamond\bar{c} = -5 \neq -1 = \bar{a}\Diamond(\bar{b}\Diamond\bar{c}),$$
   ya que operando directamente
   $$\begin{aligned}(\bar{a}\Diamond\bar{b})\Diamond\bar{c} &= (1\Diamond 2)\Diamond 3 = -1\Diamond 3 = -5,\\ \bar{a}\Diamond(\bar{b}\Diamond\bar{c}) &= 1\Diamond(2\Diamond 3) = 1\Diamond 1 = -1.\end{aligned}$$
   - No existe elemento neutro. Si existiese un elemento neutro $e \in \mathbb{Z}$, entonces, en particular, se tiene
   $$0\Diamond e = 0$$
   y esto implica que
   $$0 \cdot e - (0+e) = 0 \Rightarrow e = 0.$$
   Pero $e = 0$ no es elemento neutro, ya que por ejemplo
   $$0\Diamond 1 = -1 \neq 1.$$
   (se puede probar con otros elementos diferentes al 0, el procedimiento es análogo)

2. **Solución. (c)** Para resolver este ejercicio seguimos el procedimiento dado en los vídeos

   - Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. I de II
   - Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. II de II

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Repecto de la base canónica de matrices

$$\mathbf{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

es fácil ver que el vector de coordenadas de la matriz B es

$$B_{\mathbf{E}} = (1, 1, 1, 1).$$

La matriz de cambio de la base $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}$ es la matriz que tiene por columnas las coordenadas de la base $\mathbf{A}$ con respecto a $\mathbf{E}$ y por tanto fácilmente calculable

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si denotamos por $B_{\mathbf{A}} = (x, y, z, t)$ las coordenadas de la matriz B con respecto de $\mathbf{A}$, $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}}B_{\mathbf{A}}$ nos da las coordenadas con respecto de la base $\mathbf{E}$ y por tanto

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}}B_{\mathbf{A}} = B_{\mathbf{E}}.$$

Por tanto, basta con resolver el siguiente sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que tiene por solución $(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Compruebese que efectivamente

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **Solución. (b)** Por un cálculo directo

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

4. **Solución. (b)** El polinomio p coincide con el polinomio de Taylor de orden 4 en el punto $x = -1$. Luego

$$\begin{aligned}
a &= p(-1) = 2,\\
b &= p'(-1) = -2,\\
c &= \frac{p''(-1)}{2!} = 3,\\
d &= \frac{p'''(-1)}{3!} = -3,\\
e &= \frac{p''''(-1)}{4!} = 1.
\end{aligned}$$

Podemos comprobar que efectivamente esos son los valores

$$2 - 2(x+1) + 3(x+1)^2 - 3(x+1)^3 + (x+1)^4 = x^4 + x^3 - x + 1$$

5. **Solución. (c)** Resolvemos la integral mediante el cambio de variable

$$x = g(t) = \ln t$$

De esta manera es claro que $\ln 7 = g(7)$, $\ln 4 = g(4)$ y

$$dx = g'(t)dt = \frac{1}{t}dt.$$

Aplicamos la fórmula de cambio de variable, véase p. 211 libro texto, y se tiene

$$\int_{\ln 4}^{\ln 7} \frac{e^x}{(e^x-3)^2}dx = \int_4^7 \frac{t}{(t-3)^2}\frac{1}{t}dt = \int_4^7 \frac{1}{(t-3)^2}dt = \left[-\frac{1}{t-3}\right]_{t=4}^{t=7} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**

(i) Al tratar de determinar $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln(x^2)$ se obtiene la indeterminación $0 \cdot (-\infty)$. Para evitarla, se utiliza la siguiente equivalencia

$$x^2 \ln(x^2) = \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x^2}},$$

y se estudia el límite equivalente $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x^2}}$. De este modo, ahora se obtiene una indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$, que se puede resolver utilizando la regla de

L'Hôpital. Es claro que se satisfacen las condiciones de la misma. En efecto, las funciones $f(x) = \ln(x^2)$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ son derivables en $\mathbb{R}$ menos en el punto $x = 0$, que es en el que se quiere calcular el límite; $g'(x) = -\dfrac{2}{x^3} \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ y el siguiente límite existe:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x^2}2x}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0}(-x^2) = 0.$$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital, se tiene que

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln(x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0.$$

Finalmente, se observa que la expresión $x^2 \ln(x^2) \cos\left(\frac{\pi}{xy}\right)$ es el producto de una función que tiende hacia 0 cuando (x, y) tiende hacia $(0, 0)$ (la función $h(x) = x^2 \ln(x^2)$, que sólo depende de la variable x) y de una función acotada (la función $l(x, y) = \cos\left(\frac{\pi}{xy}\right)$). Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \ln(x^2) \cos\left(\frac{\pi}{xy}\right) = 0.$$

(ii) Tenemos la integral

$$I = \int_0^2 \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} dxdy.$$

El recinto de integración $\mathbf{M}$ se corresponde con la intersección de los semiplanos $x \geq y$, $y \geq 0$, $2 \geq y$ y el círculo de centro $(0, 0)$ y radio 2

$$\mathbf{M} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2,\, y \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\right\}$$

En la figura (1) podemos ver una representación gráfica del mismo.

Expresando el conjunto en polares

$$x = r\cos\theta,\, y = r\operatorname{sen}\theta$$

sus coordenadas vienen dadas por

$$\left\{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq 2,\ \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\right\}$$

Aplicando el Teorema de Cambio de Variable (véase Sección 4. Tema 9 del libro de texto)

$$dxdy = rdrd\theta$$

luego sustituyendo en la integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dxdy = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2\cos^2\theta + r^2 \operatorname{sen}^2\theta}} rd\theta dr \\ &= \int_0^2 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} dr \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^2 \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} dr = \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\sqrt{1+r^2}\right]_{r=0}^{r=2} = \frac{\pi}{4}\left(\sqrt{5}-1\right) \end{aligned}$$

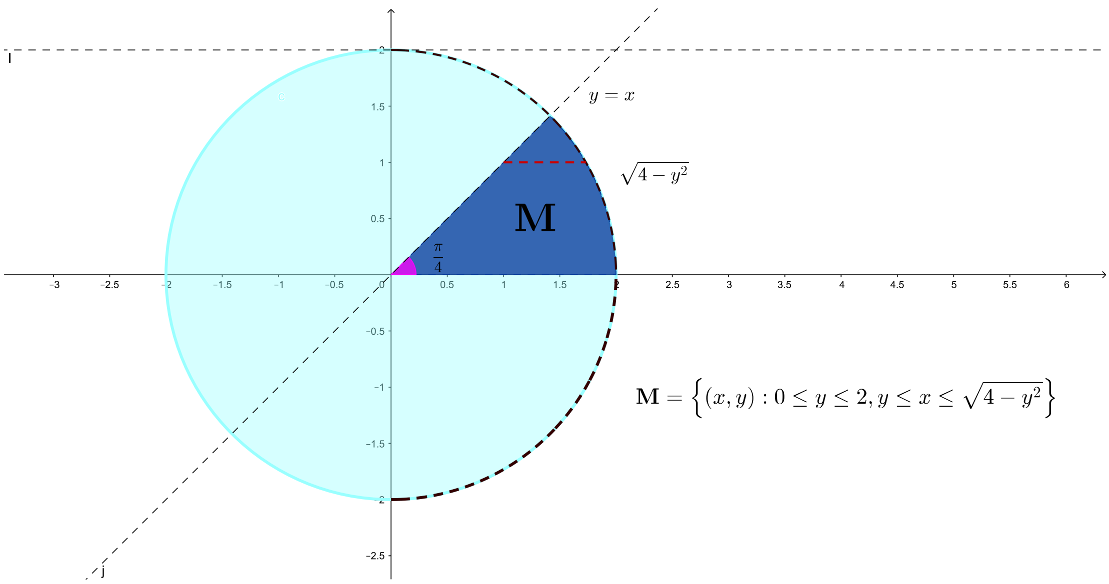


Figura 1: Recinto de integración

Problema **b)**

(i) Como

$$(1,1,1) = (1,1,0) + (0,0,1),$$

por linealidad de f

$$f(1,1,1) = f(1,1,0) + f(0,0,1) = (1,3) + (1,0) = (2,3).$$

(ii) La matriz de f con respecto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ tiene por columnas las coordenadas de los elementos de la base $\mathbf{A}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$ (véase páginas 83-4 libro de texto). Tenemos que calcular las coordenadas con respecto de

$$\mathbf{B} = \{(0,2), (-1,0)\}$$

de las imágenes

$$\{f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\}.$$

Aunque podríamos razonarlo mediante matrices de cambio de base, directamente se puede ver que

$$\begin{aligned}
&(1,0,0) = (1,1,0) + (0,0,1) - (0,1,1),\\
&(0,1,0) = -(0,0,1) + (0,1,1),\\
&(0,0,1) = (0,0,1).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
&f(1,0,0) = f(1,1,0) + f(0,0,1) - f(0,1,1) = (1,3) + (1,0) - (-1,1) = (3,2) = 1 \cdot (0,2) + (-3) \cdot (-1,0),\\
&f(0,1,0) = -f(0,0,1) + f(0,1,1) = -(1,0) + (-1,1) = (-2,1) = \tfrac{1}{2} \cdot (0,2) + 2 \cdot (-1,0),\\
&f(0,0,1) = (1,0) = 0 \cdot (0,2) + (-1) \cdot (-1,0).
\end{aligned}$$

Luego la matriz de f con respecto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por ejemplo, el vector $X = (1,1,1)$ que tiene por vector de coordenadas con respecto de $\mathbf{A}$ el mismo vector $(1,1,1)$ por ser $\mathbf{A}$ la base canónica, tiene por coordenadas con respecto de $\mathbf{B}$ el vector

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Efectivamente se comprueba

$$f(1,1,1) = (2,3) = \frac{3}{2}(0,2) - 2(-1,0).$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2018
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1 punto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un único libro de texto de teoría que puede ser un ejemplar del texto de la Bibliografía Básica o cualquier otro, que podrá contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Sea
$$\mathcal{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R} \right\}$$
el conjunto de las matrices cuadradas de orden 2. Sobre dicho conjunto consideramos la siguiente operación
$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathcal{M}_{2\times 2} \times \mathcal{M}_{2\times 2} & \to & \mathcal{M}_{2\times 2} \\ (A, B) & \longmapsto & A\Diamond B = A + B - \frac{1}{2}\left(A \times B + B \times A\right). \end{array}$$
Se considera la matriz
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Señale la respuesta correcta.

(*a*) No existe elemento inverso de C con respecto a $\Diamond$.

(*b*) El elemento inverso de C con respecto a $\Diamond$ es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(*c*) El elemento inverso de C con respecto a $\Diamond$ es la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(*d*) Ninguna de las anteriores

2. Sean las bases de $\mathbb{R}^3$
$$\mathbf{A} = \{(0,1,0), (0,0,-1), (1,0,0)\}$$

y

$$\mathbf{B} = \{(0,0,1), (2,0,0), (0,1,-1)\}.$$

Dado el vector $\mathbf{v}$ de coordenadas $(0,1,0)$ en la base $\mathbf{A}$, señale sus coordenadas en la base $\mathbf{B}$.

(a) $(-1,0,0)$ (b) $(0,0,2)$ (c) $(2,0,0)$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Indique el valor del siguiente límite

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(a) $L = 1$ (b) $L = 0$ (c) $L = \infty$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Señale una primitiva de la integral indefinida

$$I = \int \frac{x-5}{x+2} dx.$$

(a) $x - 5\ln|x+2|$ (b) $x - 7\ln|x+2|$
(c) $x + 3\ln|x+2|$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Sean las funciones $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definidas por

$$f(x,y,z) = e^{x+y^2+3z^3}$$

y

$$g(u) = (u^2 - u, \ln u).$$

Determine la matriz jacobiana de $h = g \circ f$ en el punto $(0,0,0)$.

(a) $h'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$ (b) $h'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(c) $h'(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Determine sus autovalores y las ecuaciones implicitas de los subespacios propios asociados. (0.7 ptos)

(ii) Estudie si es diagonalizable. En caso afirmativo encuentre la matriz diagonal D y la base a la que está referida. (0.7 ptos)

(iii) Calcule razonadamente la matriz potencia A^9. (Notación: $A^n = A \times A^{n-1}$ para todo $n = 2, 3, ...$) (0.6 ptos)

Problema **b)**(2ptos.)

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = (x + y)^3.$$

(i) Calcule su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(x, y) = (1, -1)$.

(1 pto)

(ii) Calcule la integral

$$\int_{[-1,0]\times[0,2]} f(x, y)dxdy.$$

(1 pto)

FMI. Septiembre 2018 . SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (d)** Denotemos por

$$E = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix}$$

el posible elemento neutro con respecto de la operación $\Diamond$. Para determinar dicho elemento neutro, consideremos en primer lugar una matriz sencilla, por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

necesariamente se tiene que

$$A \Diamond E = A,$$

es decir se cumple

$$A + E - \frac{1}{2}(A \times E + A \times E) = A.$$

Por un cálculo directo

$$\begin{aligned}
A \Diamond E &= A + E - \frac{1}{2}(A \times E + O \times E) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} e_1 + 1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} e_1 & e_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ e_3 & 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} e_1 + 1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2e_1 & e_2 \\ e_3 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}e_2 \\ \frac{1}{2}e_3 & e_4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Por tanto se debe verificar que

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}e_2 \\ \frac{1}{2}e_3 & e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo que igualando términos

$$e_2 = e_3 = e_4 = 0.$$

Y por tanto el elemento neutro tiene necesariamente la forma

$$E = \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Siguiendo el mismo razonamiento, tomando en este caso la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

se tiene

$$A\Diamond E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Diamond \begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & 1 - \frac{e_1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso $A\Diamond E = A$ si y solamente si

$$\begin{pmatrix} e_1 & 1 - \frac{e_1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

lo que implica que $e_1 = 0$. Por tanto el elemento neutro, si existe, viene dado por la matriz nula

$$E = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Compruébese que efectivamente

$$\begin{aligned} A\Diamond O &= A + O - \frac{1}{2}(A \times O + O \times A) = A + O - \frac{1}{2}(O + O) = A, \\ O\Diamond A &= O + A - \frac{1}{2}(O \times A + A \times O) = A + O - \frac{1}{2}(O + O) = A. \end{aligned}$$

El elemento inverso C' de C debe verificar

$$C\Diamond C' = C + C' - \frac{1}{2}(C \times C' + C' \times C) = O.$$

Tomando una matriz arbitraria

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

por una computación directa

$$\begin{aligned} C \diamond C' &= C + C' - \frac{1}{2}(C \times C' + C' \times C) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c+1 & d+1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ a+c & b+d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c+1 & d+1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a+b & 2b \\ a+2c+d & b+2d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}b & 0 \\ 1 - \frac{1}{2}d - \frac{1}{2}a & 1 - \frac{1}{2}b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Del mismo modo se puede comprobar que

$$C'\lozenge C = C' + C - \frac{1}{2}\left(C' \times C + C \times C'\right) = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}b & 0 \\ 1-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}a & 1-\frac{1}{2}b \end{pmatrix}.$$

Luego para que se cumpla

$$C'\lozenge C = C'\lozenge C = O,$$

entonces necesariamente se debe cumplir

$$\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}b & 0 \\ 1-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}a & 1-\frac{1}{2}b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Igualando cada entrada de la matriz

$$1-\frac{1}{2}b = 0,\ 1-\frac{1}{2}d-\frac{1}{2}a = 0.$$

Luego $b = 2$, $a + d = 2$. Por tanto cualquier matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ c & 2-a \end{pmatrix}$$

con $a, c \in \mathbb{R}$ arbitrarios es elemento inverso de C. Por ejemplo, tomando los valores $a = 2$, $c = 0$, la matriz correspondiente,

$$C' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

es inverso de C. Podemos verificar que efectivamente lo es

$$\begin{aligned} C\lozenge C' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego descartamos opción (a). También descartamos opciones (b), (c) ya que las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

no son de la forma

$$\begin{pmatrix} a & 2 \\ c & 2-a \end{pmatrix}.$$

2. **Solución. (a)** Como $\mathbf{v}$ tiene coordenadas $\mathbf{v_A} = (0,1,0)$ con respecto de la base $\mathbf{A}$, se tiene que el vector en la base canónica viene dado por

$$\mathbf{v} = 0(0,1,0) + 1(0,0,-1) + 0(1,0,0) = (0,0,-1).$$

Directamente se comprueba que

$$\mathbf{v} = (0,0,-1) = -1(0,0,1) + 0(2,0,0) + 0(0,1,-1),$$

y por tanto $\mathbf{v_B} = (-1,0,0)$ son las coordenadas con respecto de $\mathbf{B}$.

Siguiendo los vídeos

- Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. I de II
- Expresión matricial del cambio de base en $\mathbb{R}^n$. II de II

podríamos razonar directamente mediante matrices de cambio de base. Así tendríamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{v_B} &= M_{\mathbf{E}\to\mathbf{B}} M_{\mathbf{A}\to\mathbf{E}} \mathbf{v_A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

lo que concuerda con lo anterior.

3. **Solución. (a)** Manipulando la expresión

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}}.$$

y por tanto

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{0+1}} = 1.$$

4. **Solución. (b)** Es una integral inmediata

$$\begin{aligned}\int \frac{x-5}{x+2}dx &= \int \frac{x+2-7}{x+2}dx = \int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{7}{x+2}\right) dx \\ &= \int \left(1 - \frac{7}{x+2}\right) dx \\ &= \int dx - 7\int \frac{dx}{x+2} \\ &= x - 7\ln|x+2|.\end{aligned}$$

5. **Solución. (c)** Por un cálculo directo

$$f(0,0,0) = e^{0+0^2+30^3} = e^0 = 1.$$

Las jacobianas vienen dadas por

$$Dg(f(0,0,0)) = Dg(1) = \left(\begin{array}{c} 2u-1 \\ \frac{1}{u} \end{array}\right)_{u=1} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right),$$

y

$$\begin{aligned} Df(0,0,0) &= \left(\begin{array}{ccc} e^{x+y^2+3z^3} & 2ye^{x+y^2+3z^3} & 9z^2e^{x+y^2+3z^3} \end{array}\right)_{(x,y,z)=(0,0,0)} \\ &= \left(\begin{array}{ccc} e^0 & 2\cdot 0e^0 & 9\cdot 0e^{x+y^2+3z^3} \end{array}\right) \\ &= \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right).\end{aligned}$$

Luego

$$Dh(0,0,0) = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**

(i) El polinomio característico viene dado por

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \left|\left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{array}\right) - \lambda\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right)\right| = \left|\begin{array}{cc} -\lambda & 2 \\ 1 & -\lambda \end{array}\right| = \lambda^2 - 2$$

que tiene por raíces (autovalores) $\lambda_1 = \sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Calculamos los subespacios de autovectores asociados.

Para $\lambda_1 = \sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_1 &= \left\{(x,y) : \left(\begin{array}{cc} -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & -\sqrt{2} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right)\right\} \\ &= \left\{(x,y) : 2y - \sqrt{2}x = 0, x - \sqrt{2}y = 0\right\}\end{aligned}$$

Como

$$2y-\sqrt{2}x=0, x-\sqrt{2}y=0$$

son la misma ecuación, existe una ecuación implícta de $\mathbb{E}_1$ que viene dada por

$$2y-\sqrt{2}x=0.$$

Además

$$\mathbb{E}_1=\left\{\left(x,\frac{\sqrt{2}}{2}x\right):x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right):x\in\mathbb{R}\right\}=G\left[\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

y el vector

$$\left\{\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

es una base de $\mathbb{E}_1$.

Del mismo modo para $\lambda_2=-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_2 &= \left\{(x,y):\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 2\\ 1 & \sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}\\ &= \left\{(x,y):2y+\sqrt{2}x=0,\sqrt{2}y+x=0\right\}\end{aligned}$$

En este caso una ecuación implícita de $\mathbb{E}_2$ viene dada por

$$2y+\sqrt{2}x=0.$$

Además

$$\mathbb{E}_2=\left\{\left(x,-\frac{\sqrt{2}}{2}x\right):x\in\mathbb{R}\right\}=\left\{x\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right):x\in\mathbb{R}\right\}=G\left[\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$$

y

$$\left\{\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

es una base de $\mathbb{E}_2$.

(ii) La matriz es diagonalizable por tener autovalores distintos. Una base de autovalores viene dada por

$$\mathbf{B}=\left\{\left(1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

con matriz diagonal y de paso

$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}, \; Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Calculando la matriz de paso

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

de hecho compruébese

$$\begin{aligned} D &= QAQ^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Como $A = Q^{-1}DQ$ hemos visto como podemos calcular iterativamente las potencias sucesivas

$$\begin{aligned} &A^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}DQ = Q^{-1}D^2Q \\ &A^3 = Q^{-1}DQA^2 = Q^{-1}DQQ^{-1}D^2Q = Q^{-1}D^3Q \\ &\vdots \\ &A^n = Q^{-1}DQA^{n-1} = Q^{-1}DQQ^{-1}D^{n-1}Q = Q^{-1}D^nQ \end{aligned}$$

Luego

$$A^9 = Q^{-1}D^9Q. \tag{1}$$

Por tanto

$$
\begin{aligned}
A^9 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}^9 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}^9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{\frac{9}{2}} & 0 \\ 0 & -2^{\frac{9}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -16\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8\sqrt{2} & 16 \\ -8\sqrt{2} & 16 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 32 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Problema **b)**

(i) El polinomio de Taylor P_2 viene dado por

$$P_2(x,y) = f(1,-1) + D_1f(1,-1)(x-1) + D_2f(1,-1)(y+1) + \frac{1}{2}(D_{11}f(1,-1)(x-1)^2 + 2D_{12}f(1,-1)(x-1)(y+1) + D_{22}f(1,-1)(y+1)^2)$$

Por un cálculo directo

$$
\begin{aligned}
f(1,-1) &= (1-1)^3 = 0, \\
D_1f(1,-1) &= 3(x+y)^2\big|_{(x,y)=(1,-1)} = 0, \\
D_2f(1,-1) &= 3(x+y)^2\big|_{(x,y)=(1,-1)} = 0, \\
D_{11}f(1,-1) &= 6(x+y)\big|_{(x,y)=(1,-1)} = 0, \\
D_{12}f(1,-1) &= 6(x+y)\big|_{(x,y)=(1,-1)} = 0, \\
D_{22}f(1,-1) &= 6(x+y)\big|_{(x,y)=(1,-1)} = 0.
\end{aligned}
$$

Luego

$$P_2(x,y) = 0+0(x-1)+0(y+1)+\frac{1}{2}(0(x-1)^2+2\cdot 0(x-1)(y+1)+0(y+1)^2) = 0.$$

Por tanto

$$P_2(x,y) = 0.$$

(ii) Calculamos la integral aplicando integración reiterada

$$\begin{aligned}
\int_{[-1,0]\times[0,2]} f(x,y)dxdy &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{2}(x+y)^3 dydx \\
&= \int_{-1}^{0}\left[\frac{(x+y)^4}{4}\right]_{y=0}^{y=2} dx = \int_{-1}^{0}\left(\frac{(x+2)^4}{4}-\frac{x^4}{4}\right)dx \\
&= \int_{-1}^{0}\frac{(x+2)^4}{4}dx - \int_{-1}^{0}\frac{x^4}{4}dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{(x+2)^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=0} - \frac{1}{4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_{x=-1}^{x=0} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{32-1}{5}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{0-(-1)^5}{5}\right) \\
&= \frac{31-1}{20} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2019. 1^a semana
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1 punto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un copia impresa de las Unidades Didácticas de la Asignatura, que podrá contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Sobre dicho conjunto consideramos la siguiente operación

$$\begin{array}{rcl} \Diamond : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (a, b) & \longmapsto & a \Diamond b = (a+b)^2 - (a-b)^2. \end{array}$$

Dado
$$a = \frac{1}{2},$$
por a' denotamos el posible elemento inverso con respecto de $\Diamond$. Señale la respuesta correcta.

(a) No existe elemento inverso a' $\quad$ (b) $a' = 4$
(c) $a' = \frac{1}{8}$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(\mathbf{a}_1) = -\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2,$$
$$F(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3,$$

en donde
$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\},\ \mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$$
son bases de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Calcule las coordenadas $F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}$ de la imagen del vector
$$\mathbf{v} = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$$
con respecto de $\mathbf{B}$.

(a) $F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (-5, -5, 2)$ $\quad$ (b) $F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (4, 1, -1)$
(c) $F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (1, 1, 3)$ $\quad$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Sea la función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = 2 - \sqrt{x}.$$

Señale la respuesta correcta.

(a) $\left(f^{-1}\right)'(0) = 2$

(b) $\left(f^{-1}\right)'(0) = -4$

(c) $\left(f^{-1}\right)'(0)$ no existe

(d) Ninguna de las anteriores

4. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_1^{(x+1)^2} \frac{1-u}{1+u} du.$$

Calcule su derivada en el punto $x = 1$.

(a) $f'(1) = -\dfrac{12}{5}$

(b) $f'(1) = \dfrac{-4}{5}$

(c) $f'(1) = 0$

(d) Ninguna de las anteriores

5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = e^{xy}.$$

Señale la respuesta correcta.

(a) $D_{121}f(1, -1) = -\dfrac{2}{e}$

(b) $D_{121}f(1, -1) = -\dfrac{1}{e}$

(c) $D_{121}f(1, -1) = \dfrac{1}{e}$

(d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

(i) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- Calcule su matriz inversa A^{-1}. (0.4 ptos)
- Exprese A^{-1} como producto de matrices elementales. (0.6 ptos)

(ii) Estudie si A es diagonalizable. En caso afirmativo encuentre la matriz diagonal y la base a la que está referida. (1 punto)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Determine el polinomio p_2 de Taylor de orden 2 de la función

$$f(x) = (x+1)e^{x^2}$$

en el punto $x = 0$. (0.5 ptos)

(ii) Calcule de manera razonada una cota del error que se produce al aproximar f por p_2 en el intervalo $[-1, 1]$. Es decir, un cota superior del siguiente valor

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \,.$$

(0.5 ptos)

(iii) Sea $\mathbf{T}$ el triángulo de vértices

$$A = (0, -1)\,,\; B = (0, 1)\,,\; C = (2, 0)\,.$$

- Exprese $\mathbf{T}$ como unión finita de conjuntos de tipo I. (0.5 ptos)
- Calcule la integral

$$I = \int_{\mathbf{T}} x dx dy.$$

(0.5 ptos)

FMI. Febrero 2019 . SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (c)** Operando, podemos simplificar la operación

$$a\Diamond b = (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = 4ab.$$

Luego

$$a\Diamond b = 4ab.$$

El elemento neutro con respecto de dicha operación viene dado por $e = \dfrac{1}{4}$, ya que

$$\begin{aligned} a\Diamond e &= a\Diamond\frac{1}{4} = 4a\frac{1}{4} = a, \\ e\Diamond a &= \frac{1}{4}\Diamond a = 4\frac{1}{4}a = a \end{aligned}$$

para todo $a \in \mathbb{R}$. Para cualquier $a \in \mathbb{R}$, el posible elemento inverso $a' \in \mathbb{R}$ debe verificar

$$a\Diamond a' = e \Leftrightarrow 4aa' = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a' = \frac{1}{16a}.$$

Para el caso particular $a = \frac{1}{2}$,

$$a' = \frac{1}{16\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

Y por tanto $a' = \frac{1}{8}$ es el elemento inverso, efectivamente se verifica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Diamond\frac{1}{8} &= 4\frac{1}{2}\frac{1}{8} = \frac{1}{4} = e, \\ \frac{1}{8}\Diamond\frac{1}{2} &= 4\frac{1}{8}\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = e. \end{aligned}$$

2. **Solución. (a)** Aplicando linealidad de F, tenemos que

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= F(3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2) = 3F(\mathbf{a}_1) - 2F(\mathbf{a}_2) \\ &= 3(-\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) - 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3) \\ &= -5\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Por tanto, $F(\mathbf{v}) = -5\mathbf{b}_1 - 5\mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3$ y se tiene directamente que

$$F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (-5, -5, 2).$$

3. **Solución. (b)** Determinamos directamente la función inversa, así buscamos determinar la siguiente expresión

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y),$$

con lo que

$$x = f(y) \Leftrightarrow y = 2 - \sqrt{y} \Leftrightarrow 2 - x = \sqrt{y} \Leftrightarrow y(x) = (2-x)^2.$$

Luego

$$f^{-1}(y) = (2-y)^2,$$

y por tanto

$$(f^{-1})'(0) = -2(2-y)\big|_{y=0} = -2 \cdot 2 = -4.$$

4. **Solución. (a)** Podemos expresar f como composición de dos funciones reales

$$f = g \circ h,$$

en donde g, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ están definidas por

$$g(y) = \int_0^y \frac{1-u}{1+u} du$$

y

$$h(x) = (x+1)^2$$

respectivamente. Por el Primer Teorema Fundamental, la función g es derivable con derivada

$$g'(y) = \frac{1-y}{1+y}.$$

Por otro lado

$$h'(x) = 2(x+1).$$

Aplicando la regla de la cadena

$$f'(1) = g'(h(1))h'(1).$$

Como $h(1) = 4$, $g'(h(1)) = g'(4) = -\frac{3}{5}$, $h'(1) = 2(1+1) = 4$, se tiene

$$f'(1) = g'(h(1))h'(1) = -\frac{3}{5}4 = -\frac{12}{5}.$$

5. **Solución. (b)** Operando directamente

$$\begin{aligned} D_{121}f(x,y) &= D_{121}(e^{xy}) = D_{12}(ye^{xy}) = D_1(e^{xy} + yxe^{xy}) \\ &= ye^{xy} + ye^{xy} + y^2xe^{xy} \\ &= e^{xy}(2y + y^2x). \end{aligned}$$

Luego $D_{121}f(x,y) = e^{xy}(2y + y^2x)$, y por tanto

$$\begin{aligned} D_{121}f(1,-1) &= e^{xy}(2y + y^2x)\big|_{(x,y)=(1,-1)} \\ &= e^{-1}(2(-1) + (-1)^2 1) \\ &= -e^{-1} \\ &= -\frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Parte Desarrollo

Problema **a)**

(i) Aplicamos el método de eliminación de Gauss, para ello adjuntamos la matriz A y la matriz identidad

$$(A|\ I) \to \left(I|\, A^{-1}\right)$$

haciendo operaciones elementales para obtener la matriz identidad a la izquierda y la inversa a la derecha (véase Sección 1.6.2).
Así tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{-2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to -\frac{1}{2}F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 + 3F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to -F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to 2F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 + \frac{1}{2}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -3 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Por tanto
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Teniendo en cuenta las operaciones elementales realizadas, la matriz inversa se corresponde con el producto de matrices elementales
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
es decir,
$$A^{-1} = F_{13}\left(\frac{1}{2}\right) F_3(2) F_2(-1) F_{31}(3) F_1\left(-\frac{1}{2}\right).$$

(ii) Sea
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Calculamos el polinomio característico
$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1,$$
cuyas raíces (aplíquese Ruffini)
$$-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$
son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad doble y $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad simple. Es decir, podemos factorizar el polinomio de la siguiente forma
$$-\lambda^3 + 5\lambda^2 - 7\lambda + 3 = -(\lambda - 1)(\lambda + 1)^2$$
Luego
$$\text{Autovalores}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{1, -1\}.$$
El autovalor $\lambda_1 = 1$ tiene multiplicidad algebraica $m_1 = 1$. Por otro lado, el subespacio de vectores propios viene dado por
$$\mathbb{E}_1 = \text{Ker}(A - 1 \cdot I) = \text{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de esta matriz es 2, luego aplicando fórmula (7.6) de las unidades didácticas, se tiene

$$\dim \mathbb{E}_1 = \operatorname{Ker}(C - I) = 3 - 2 = 1 = m_1$$

y la multiplicidad geométrica y algebraica coinciden para este subespacio. Podemos determinar las ecuaciones implícitas del subespacio $\mathbb{E}_1$ directamente.

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_3 - 3x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 - 3x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \; x_3 - 3x_1 = 0, \; -2x_2 = 0.$$

Luego

$$\mathbb{E}_1 = \{(x_1, 0, 3x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\} = \{x_1(1, 0, 3) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Por tanto

$$\mathbb{E}_1 = G[\{(1, 0, 3)\}],$$

y $\{(1, 0, 3)\}$ es una base de $\mathbb{E}_1$.

Para $\lambda_2 = -1$, en este caso

$$\mathbb{E}_2 = \operatorname{Ker}(A + I) = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -2+1 & 0 & 1 \\ 0 & -1+1 & 0 \\ -3 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

El rango de esta matriz es 1, luego aplicando fórmula (7.6) de las unidades didácticas, se tiene

$$\dim \mathbb{E}_2 = \operatorname{Ker}(C - I) = 3 - 1 = 2 = m_1$$

y la multiplicidad geométrica y algebraica coinciden para este subespacio. Por tanto se cumple el Teorema 7.2 de caracterización y la matriz es diagonalizable. Nos quedaría por determinar una base del subespacio propio, directamente calculamos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_2 &= \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \left\{ (x_1, x_2, x_3) : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 - x_1 = 0, 3x_3 - 3x_1 = 0 \ \} \\
&= \{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = x_1\} \\
&= \{(x_1, x_2, x_1) : x_2 \in \mathbb{R} \ \}.
\end{aligned}
$$

Por tanto

$$\mathbb{E}_2 = \{x_1(1,0,1) + x_2(0,1,0) : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \ \} = G[\{(1,0,1),(0,1,0)\}].$$

Por tanto la matriz es diagonalizable, la base de autovectores sería

$$\{(1,0,3),(1,0,1),(0,1,0)\}$$

y la matriz diagonal equivalente tiene por diagonal los autovalores

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Problema **b)**

(i) Calculamos las derivadas en el punto

$$
\begin{aligned}
&f(0) = (x+1)e^{x^2}\Big|_{x=0} = (0+1)e^{0^2} = 1, \\
&f'(0) = e^{x^2}\left(2x + 2x^2 + 1\right)\Big|_{x=0} = e^{0^2}\left(2\cdot 0 + 2\cdot 0^2 + 1\right) = 1, \\
&f''(0) = e^{x^2}\left(3x + 4x^2 + 4x^3 + 2\right)\Big|_{x=0} = e^{0^2}\left(3\cdot 0 + 4\cdot 0^2 + 4\cdot 0^3 + 2\right) = 2.
\end{aligned}
$$

Luego el polinomio de Taylor viene dado por

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} = 1 + x + 2\frac{x^2}{2} = 1 + x + x^2.$$

(ii) Por el teorema de Taylor, véase Teorema 10.19,

$$f(x) = p_2(x) + \frac{f^{(3)}(c_x)}{3!}x^3$$

para un cierto $c_x \in [-1, 1]$. Luego

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| &\leq \max_{x\in[-1,1]} \left|\frac{f^{(3)}(c_x)}{3!}\right| |x|^3 \\
&\leq \frac{1}{3!}\max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(3)}(x)\right| |1|^3 \\
&= \frac{\max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(3)}(x)\right|}{6}.
\end{aligned}$$

Como

$$f'''(x) = 2e^{x^2}\left(6x + 12x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 3\right),$$

podemos acotar

$$\begin{aligned}
\max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(3)}(x)\right| &\leq \max_{x\in[-1,1]} \left|2e^{x^2}\right| \left(\left|6x + 12x^2 + 4x^3 + 4x^4 + 3\right|\right) \\
&\leq \max_{x\in[-1,1]} 2e^{x^2}\left(6|x| + 12|x|^2 + 4|x|^3 + 4|x|^4 + 3\right) \\
&= 2e^{1^2}\left(6|1| + 12|1|^2 + 4|1|^3 + 4|1|^4 + 3\right) \\
&= 58e.
\end{aligned}$$

Y por tanto

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| \leq \frac{\max_{x\in[-1,1]} \left|f^{(3)}(x)\right|}{6} = \frac{58}{6}e = \frac{29}{3}e = 26.277,$$

siendo la cota exacta

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - p_2(x)| = |f(1) - p_2(1)| = 2e - 3 = 2.4366.$$

(ii-iii) Representado gráficamente la figura, véase Figura 1, se puede ver fácilmente la siguiente parametrización de $\mathbf{T}$ de tipo I,

$$\mathbf{T} = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, \frac{x}{2} - 1 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}.$$

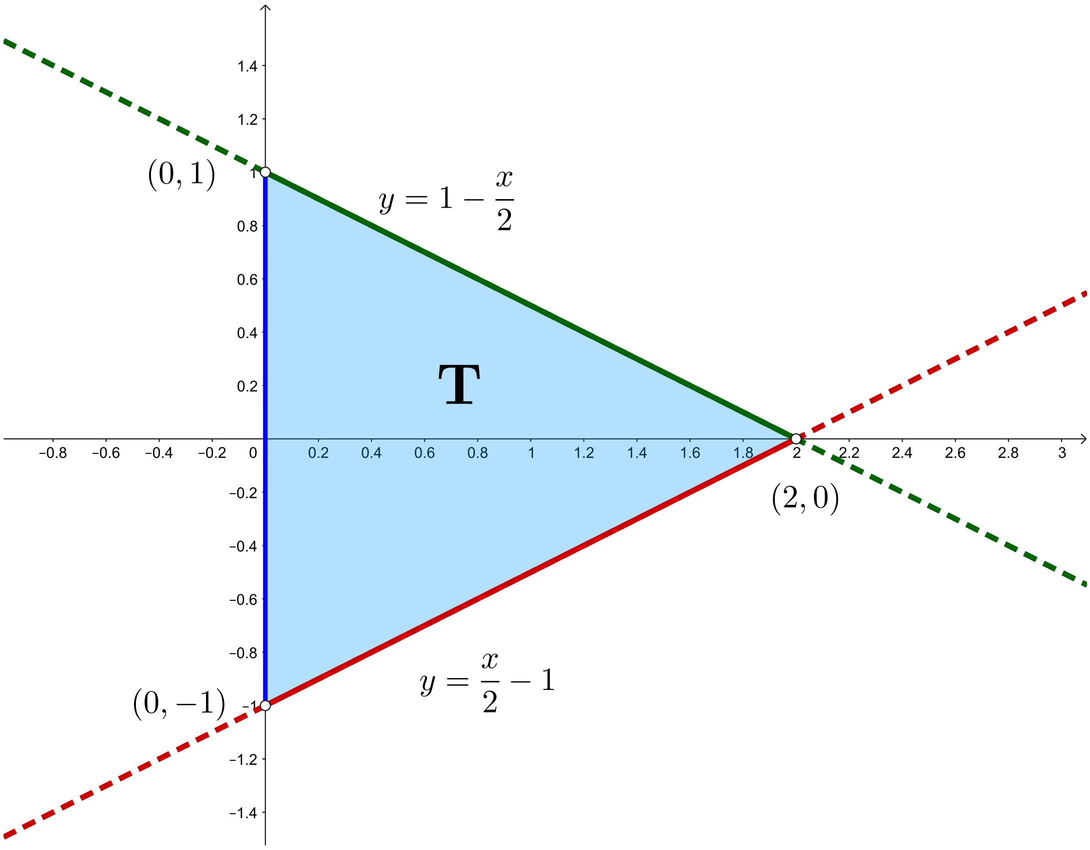


Figura 1: Triángulo $\mathbf{T} = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq 2,\ \frac{x}{2} - 1 \leq y \leq 1 - \frac{x}{2}\right\}$

Calculamos la integral aplicando itegración reiterada

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{T}} x dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{\frac{x}{2}-1}^{1-\frac{x}{2}} x dy \right) dx = \int_0^2 \left(x \int_{\frac{x}{2}-1}^{1-\frac{x}{2}} dy \right) dx \\
&= \int_0^2 x \left(1 - \frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2} - 1 \right) \right) dx \\
&= \int_0^2 x(2-x) dx.
\end{aligned}$$

Y por tanto

$$\int_{\mathbf{T}} x dx dy = \int_0^2 x(2-x) dx = 2 \int_0^2 x dx - \int_0^2 x^2 dx,$$

con lo que

$$\int_{\mathbf{T}} x dx dy = 2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=0}^{x=2} - \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=2} - 0 = 2 \left(\frac{2^2}{2} - 0 \right) - \left(\frac{8}{3} - 0 \right) = \frac{4}{3}.$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Febrero 2019. 2^a semana
MODELO EXAMEN B

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1 punto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar un copia impresa de las Unidades Didácticas de la Asignatura, que podrá contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcule su matriz escalonada reducida.

(a) $\text{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\text{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\text{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

2. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Señale la matriz potencia A^7. (Notación: $A^n = A \times A^{n-1}$ para todo $n = 2, 3, ...$).

(a) $A^7 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$ (b) $A^7 = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

(c) $A^7 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$ (d) Ninguna de las anteriores

3. Se considera $\mathbb{R}^3$ con dos bases genéricas suyas

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$$

y

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\},$$

cuyos vectores verifican

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,\\ \mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3\ ,\\ \mathbf{b}_3 &= -2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3.\end{aligned} \tag{1}$$

Dado el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas $\mathbf{v_A} = (1,-1,2)$ con respecto de la base $\mathbf{A}$, señale su vector de coordenadas $\mathbf{v_B}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$.

(a) $\mathbf{v_B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ (b) $\mathbf{v_B} = \left(-\frac{1}{6}, \frac{13}{12}, -\frac{1}{4}\right)$

(c) $\mathbf{v_B} = \left(\frac{3}{4}, -1, -\frac{7}{4}\right)$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Sea la función

$$f(x) = 1 - (x-1)^2.$$

Componiendo sucesivamente dicha función, definimos otra función

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

por

$$h(x) = f(f(f(x))).$$

Señale la respuesta correcta.

(a) $h'(2) = 1$ (b) $h'(2) = -1$

(c) $h'(2) = -8$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Señale el valor del siguiente límite

$$L = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2n}{2n-1}\right)^{\frac{n-2}{3}}$$

(a) $L = e^{\frac{4}{3}}$ (b) $L = e^{\frac{1}{3}}$ (c) $L = e^{\frac{2}{3}}$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.)

Sea $\mathbb{P}_1$ el espacio de polinomios de grado igual o menor a 1

$$\mathbb{P}_1 = \{\mathbf{p}(x) = a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\ \}$$

y sea $F : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$F(\mathbf{p}) = \left(\int_1^2 \mathbf{p}(x)dx, \mathbf{p}(1)\right).$$

En este ejercicio consideramos las siguientes bases

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \{-1, 2x\},$$
$$\mathbf{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \{(1,0),(0,1)\},$$

en $\mathbb{P}_1$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente.

(i) Calcular la imagen $F(\mathbf{p})$ del polinomio

$$\mathbf{p}(x) = -1 + x. \quad (0.3 \text{ ptos})$$

(ii) Calcule las coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto de la base $\mathbf{A}$ (0.4 ptos)

(iii) Calcule la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

y compruebe el resultado para el polinomio anterior $\mathbf{p}(x) = -1 + x$.

(0.7 ptos)

(iv) Determine las ecuaciones implícitas y una base de $\operatorname{Ker} F$ expresadas en coordenadas con respecto de la base $\mathbf{A}$. (0.6 ptos)

Problema **b)**(2ptos.)

(i) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

para todo $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

En este apartado se pide calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $\mathbf{a} = (1, -1)$. (1 pto)

(ii) Sea el conjunto

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi,\ 1 \leq y \leq 2 \right\}.$$

Señale el valor de la siguiente integral

$$I = \int_M x \operatorname{sen}(xy) dxdy.$$

(1 pto)

FMI. Septiembre 2019 . SOLUCIONES Modelo B.

1. **Solución. (c)** Aplicando operaciones elementales por filas

$$A=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1\to\frac{1}{2}F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 4 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_2\to F_2-4F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{-3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2\to\frac{-1}{3}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -1 \end{pmatrix} \underset{F_1\to F_1-\frac{1}{2}F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego la matriz escalonada reducida viene dada por

$$\operatorname{red}(A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. **Solución. (b)** Directamente, aplicando la asociatividad del producto de matrices, tenemos

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \\ A^6 &= A^3A^3=\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^7 &= AA^6=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. **Solución. (a)** La matriz $M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}$ de cambio de la base $\mathbf{B}$ a la base $\mathbf{A}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de

$$\mathbf{B}=\{\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\}$$

con respecto de $\mathbf{A}=\{\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3\}$, véase Sección 3.3.3. Podemos obtener dicha matriz directamente del enunciado,

$$M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Luego las coordenadas $\mathbf{v}_\mathbf{B}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ de $\mathbf{v}$ con respecto de $\mathbf{B}$ verifican

$$M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}\mathbf{v}_\mathbf{B}=\mathbf{v}_\mathbf{A},$$

es decir son solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dicho sistema tiene como solución única $(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$, y por tanto

$$\mathbf{v_B} = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

4. **Solución. (c)** Aplicamos la regla de la cadena, véase Proposición 10.3, de manera consecutiva

$$h'(2) = f'(f(f(2))f'(f(2))f'(2).$$

Así, como

$$f(2) = 0,\ f(f(2)) = f(0) = 0,$$

y del mismo modo, como

$$f'(x) = -2(x-1),$$

se tiene

$$f'(2) = ,\ f'(f(2)) = f(0) = 2,\ f'(f(f(2)) = f'(0) = 2.$$

Por tanto

$$h'(2) = f'(f(f(2))f'(f(2))f'(2) = 2 \cdot 2 \cdot (-2) = -8.$$

5. **Solución. (b)** Es un límite de tipo número e, véase Proposición 8.7, ya que

$$\left\{\frac{1+2n}{2n-1}\right\} \to 1,\ \left\{\frac{n-2}{3}\right\} \to \infty.$$

Por la Proposición 8.7, si $\{a_n\} \to \pm\infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e,$$

luego se trata de reescribir convenientemente el límite como el de esta expresión. Como

$$\frac{1+2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{a_n} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = 1 - \frac{1+2n}{2n-1} \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} = \frac{2}{1-2n},$$

se tiene que

$$\{a_n\} = \left\{\frac{1-2n}{2}\right\}.$$

Luego

$$\left(\frac{1+2n}{2n-1}\right)^{\frac{n-2}{3}} = \left(1+\frac{2}{1-2n}\right)^{\frac{1-2n}{2}\frac{2}{1-2n}\frac{n-2}{3}} = \left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{2}{1-2n}\frac{n-2}{3}}$$

Tomando límite

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\frac{2}{1-2n}\frac{n-2}{3}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1-2n}\frac{n-2}{3}} = e^{-\frac{2}{3}\frac{1}{2}} = e^{\frac{-1}{3}}.$$

$\boxed{\textbf{Parte Desarrollo}}$

Problema **a)**

(i) Calculamos directamente

$$F(-1+x) = \left(\int_1^2 (-1+x)dx, (-1+1)\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right).$$

(ii) Como

$$\mathbf{p}(x) = -1+x = 1\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot(2x) = 1\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{a}_2,$$

las coordenadas de $\mathbf{p}$ con respecto de la base $\mathbf{A}$ vienen dadas por

$$\mathbf{p}_{\mathbf{A}} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

(iii) La matriz asociada $M(F;\mathbf{A},\mathbf{B})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes

$$\{F(\mathbf{a}_1), F(\mathbf{a}_2)\}$$

con respecto de $\mathbf{B}$, véase Sección 5.1. De esta manera, como

$$F(\mathbf{a}_1) = F(-1) = \left(\int_1^2(-1)dx, -1\right) = (-1,-1) = -1(1,0) - 1(0,1) = -1\mathbf{e}_1 - 1\mathbf{e}_2,$$
$$F(\mathbf{a}_2) = F(2x) = \left(\int_1^2 2x dx, 2\right) = (3,2) = 3(1,0) + 2(0,1) = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$$

se tiene

$$M(F;\mathbf{A},\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para $\mathbf{p}(x) = -1 + x$ vimos que $\mathbf{p_A} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$, luego las coordenadas de su imagen $F(\mathbf{p})_\mathbf{B}$, de hecho sus componentes $F(\mathbf{p})$ por ser $\mathbf{B}$ la base canónica, se tiene que

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p})_\mathbf{B} = M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{p_A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

luego $F(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2}, 0\right)$, lo que coincide con lo calculado en el primer apartado.

(iv) Por definición

$$\operatorname{Ker} F = \{\mathbf{q} \in \mathbb{P}_1 : F(\mathbf{q}) = \mathbf{0}\}$$

Dado un polinomio genérico $\mathbf{q} \in \mathbb{P}_1$, denotemos por $\mathbf{q_A} = (c_1, c_2)$ sus coordenadas con respecto de $\mathbf{A}$. Es decir,

$$\mathbf{q}(x) = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{e}_2 = c_1(-1) + c_2 2x = 2xc_2 - c_1.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} F &= \{\mathbf{q} \in \mathbb{P}_1 : F(\mathbf{q}) = 0\} \\ &= \left\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 : \left(\int_1^2 (2xc_2 - c_1)dx, 2(1)c_2 - c_1\right) = (0,0)\right\} \\ &= \left\{(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2 : (3c_2 - c_1, 2c_2 - c_1) = (0,0)\right\}. \end{aligned}$$

Unas ecuaciones implícitas son por tanto

$$\left.\begin{aligned} 3c_2 - c_1 = 0 \\ 2c_2 - c_1 = 0 \end{aligned}\right\}$$

De hecho, como existe solución única trivial $c_1 = c_2 = 0$ de dicho sistemas, otros ecuaciones implícitas serían $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $\operatorname{Ker} F$ es el subespacio nulo,

$$\operatorname{Ker} F = \{(0,0)\},$$

y formalmente no existe base.

Problema **b)**

(i) Sea

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2}$$

Su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $\mathbf{a} = (1, -1)$ viene dado por

$$P_2(x_1, x_2) = f(1,-1) + D_1 f(1,-1)(x_1 - 1) + D_2 f(1,-1)(x_2 + 1) + \tfrac{1}{2}(D_{11} f(1,-1)(x_1-1)^2 + 2D_{11} f(1,-1)(x_1-1)(x_2+1) + D_{22} f(1,-1)(x_2+1)^2)$$

Calculando,

$$f(1,-1) = \frac{1}{1^2+(-1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$D_1f(1,-1) = \left.\frac{-2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right|_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = \frac{-2\cdot 1}{(1^2+(-1)^2)^2} = -\frac{1}{2},$$

$$D_2f(1,-1) = \left.\frac{-2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}\right|_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = \frac{-2\cdot(-1)}{(1^2+(-1)^2)^2} = \frac{1}{2},$$

$$D_{11}f(1,-1) = \left.\frac{-2(x_1^2+x_2^2)^2+2x_1 2(x_1^2+x_2^2)(2x_1)}{(x_1^2+x_2^2)^4}\right|_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = \frac{1}{2},$$

$$D_{12}f(1,-1) = \left.\frac{2x_1 2(x_1^2+x_2^2)(2x_2)}{(x_1^2+x_2^2)^4}\right|_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = -1,$$

$$D_{22}f(1,-1) = \left.\frac{-2(x_1^2+x_2^2)^2+2x_2 2(x_1^2+x_2^2)(2x_2)}{(x_1^2+x_2^2)^4}\right|_{(x_1,x_2)=(1,-1)} = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$P_2(x_1,x_2) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x_1-1)+\frac{1}{2}(x_2+1)+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}(x_1-1)^2-2(x_1-1)(x_2+1)+\frac{1}{2}(x_2+1)^2$$

(ii) La integral viene dada por

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 x\,\mathrm{sen}(xy)dy\right)dx.$$

La calculamos aplicando integración reiterada

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\int_1^2 x\,\mathrm{sen}(xy)dy\right)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\left(\int_1^2 \mathrm{sen}(xy)dy\right)dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\left[-\frac{\cos(xy)}{x}\right]_{y=1}^{y=2}dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos(2x)+\cos(x))dx \\
&= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos(2x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos x dx \\
&= \left[-\frac{\mathrm{sen}(2x)}{2}\right]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} + [\mathrm{sen}(x)]_{x=\frac{\pi}{2}}^{x=\pi} \\
&= \frac{-\mathrm{sen}(2\pi)+\mathrm{sen}(\pi)}{2} + \mathrm{sen}(\pi) - \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}) \\
&= \frac{-0+0}{2} + 0 - 1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Luego

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\int_{1}^{2} x \operatorname{sen}(xy) dy \right) dx = -1.$$

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA (G. en Ing. Informática)
Septiembre 2019
MODELO EXAMEN A

- **Parte tipo test: Ejercicios 1 a 5**: Deben ser contestados en hoja de lectura óptica. Cada respuesta correcta suma 1 punto, cada incorrecta resta 0.3 puntos, la doble marca o en blanco ni suma ni resta.
- **Parte Desarrollo: Problemas (a) y (b)**: Se corregirán sólo si la nota obtenida en los 5 ejercicios tipo test es superior o igual a 1.4 puntos.
- Se permite utilizar una copia impresa de las Unidades Didácticas de la Asignatura, que podrá contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba. Ningún otro tipo de material como calculadoras, tablas, etc, estará permitido.

Parte tipo test

1. Sean las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,-1)\}, \\ \mathbf{B} &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \{(1,0,-1),(1,0,1),(0,1,1)\}. \end{aligned}$$

Dado el vector $\mathbf{w}$ de coordenadas $\mathbf{w_B} = (3,1,1)$ en la base $\mathbf{B}$, encuentre sus coordenadas en la base $\mathbf{A}$.

(*a*) $\mathbf{w_A} = (1,4,1)$ (*b*) $\mathbf{w_A} = (4,1,-1)$
(*c*) $\mathbf{w_A} = (1,1,4)$ (*d*) Ninguna de las anteriores

2. Sea la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}_1) &= \mathbf{b}_1, \\ F(\mathbf{a}_2) &= 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2, \\ F(\mathbf{a}_3) &= \mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2, \end{aligned}$$

en donde $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Dado el vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$

calcule las coordenadas de su imagen $F(\mathbf{v})$ con respecto de $\mathbf{B}$.

(*a*) $F(\mathbf{v})_\mathbf{B} = (6,1)$ (*b*) $F(\mathbf{v})_\mathbf{B} = (4,2)$
(*c*) $F(\mathbf{v})_\mathbf{B} = (2,4)$ (*d*) Ninguna de las anteriores

3. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 7$$

definida en el intervalo $I = [-4, 3]$. Calcule en qué punto alcanza f su máximo global en I.

(a) $x = 3$ (b) $x = 2$ (c) $x = -2$ (d) Ninguna de las anteriores

4. Calcule el valor de la siguiente integral

$$I = \int_1^{\sqrt{10}} x\sqrt{x^2 - 1}dx$$

(a) $I = 3$ (b) $I = 27$ (c) $I = 9$ (d) Ninguna de las anteriores

5. Calcule la derivada según el vector $\mathbf{v} = (1, 3, 1)$ de la función

$$f(x, y, z) = \frac{1}{1 + xyz}$$

en el punto $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$.

(a) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = -\dfrac{1}{2}$ (b) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = -3$

(c) $D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = -5$ (d) Ninguna de las anteriores

Parte Desarrollo

Problema **a)**(2ptos.) Sean $A \in \mathcal{M}_{4\times 3}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ la matriz y vector dados por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}$$

respectivamente. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Calcule el rango de A. (0.3 ptos)

(ii) Calcule $\mathrm{red}(A)$, matriz escalonada reducida de A, y determine la matriz de paso P tal que

$$PA = \mathrm{red}(A).$$

(0.5 ptos)

(iii) Clasifique el sistema lineal

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

utilizando el teorema de Rouché-Frobenius. (0.3 ptos)

(iv) Resuelva el sistema (1) aplicando eliminación de Gauss. (0.5 ptos)

(v) Determine la dimensión, una base y unas ecuaciones implícitas del subespacio vectorial imagen $\operatorname{Im} A$. (0.4 ptos)

Problema **b)**(2ptos.) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = (1 + x^3 y)^2.$$

(i) Calcule su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(x, y) = (2, 0)$. (1 pto)

(ii) Calcule la integral

$$\int_{[-1,0]\times[1,2]} f(x, y) dx dy.$$

(1 pto)

FMI. Septiembre 2019 . SOLUCIONES Modelo A.

1. **Solución. (a)** Se puede aplicar el método general descrito en la Sección 3.4.2 *Matrices de cambio entre dos bases genéricas* $\mathbf{A}$ *y* $\mathbf{B}$ de los apuntes. En este caso, se verifica que

$$A\mathbf{w_A} = B\mathbf{w_B},$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son las matrices asociadas a los conjuntos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Como

$$B\mathbf{w_B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

si denotamos por $\mathbf{w_A} = (x, y, z)$ las coordenadas a calcular, lo anterior es equivalente a

$$A\mathbf{w_A} = B\mathbf{w_B} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

y por tanto $\mathbf{w_A} = (x, y, z) = (1, 4, 1)$.

2. **Solución. (a)** En general, véase Sección 5.1 *Expresión matricial de una aplicación lineal de dimensión finita* de los apuntes, se tiene que

$$F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B})\mathbf{v_A},$$

en donde $F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}}$ denota el vector de coordenadas de $F(\mathbf{v})$ con respecto de $\mathbf{B}$, $M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B})$ la matriz de la aplicación F respecto de la bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, y $\mathbf{v_A}$ el vector de coordenadas de $\mathbf{v}$ con respecto de $\mathbf{A}$.

La matriz $M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B})$ tiene por columnas las coordenadas de la imágenes $\{F(\mathbf{a}_1), F(\mathbf{a}_2), F(\mathbf{a}_3)\}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$. En este caso, como

$$F(\mathbf{a}_1) = 1\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2,$$
$$F(\mathbf{a}_2) = 2\mathbf{b}_1 - 1\mathbf{b}_2,$$
$$F(\mathbf{a}_3) = \mathbf{b}_1 + 3\mathbf{b}_2,$$

se tiene que

$$M(F;\mathbf{A},\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado como

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3,$$

directamente se obtiene que $\mathbf{v}_\mathbf{A} = (1,2,1)$. Por tanto

$$F(\mathbf{v})_\mathbf{B} = M(F;\mathbf{A},\mathbf{B})\mathbf{v}_\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Solución. (c)**

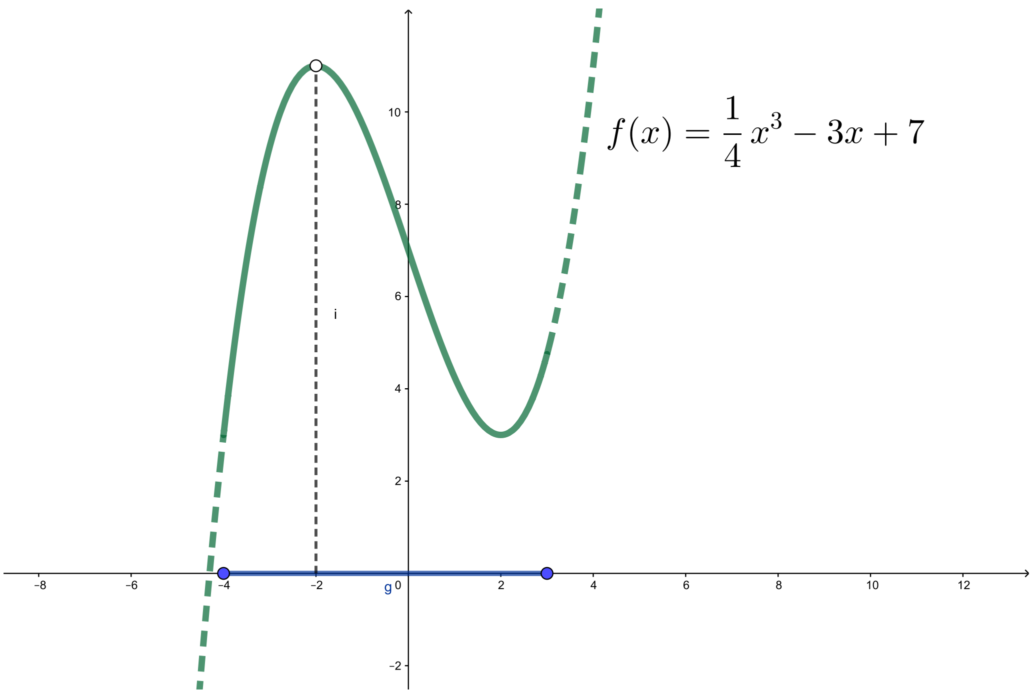


Figura 1: Máximo global de la función $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 7$ en el intervalo $I = [-4, 3]$

El máximo global de la función f en el intervalo I existe por ser f una función continua en un intervalo compacto, véase Teorema de Weierstrass (Teorema 9.6). El máximo global se encuentra entre los extremos del intervalo y los posibles máximos locales de la función en el interior del intervalo. Para calcular los máximos locales, aplicando lo visto en la Sección 10.3.2. *Extremos relativos de una función*, calculamos en primer lugar los puntos críticos de f. Como

$$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3,$$

se tiene que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4}x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2.$$

Luego los puntos críticos son dos, $x_1 = -2$ y $x_2 = 2$, que caen dentro del intervalo $I = [-4, 3]$ de estudio. La derivada segunda $f''(x) = \frac{3}{2}x$, nos determina el carácter de dichos puntos. Así como $f''(x_1) = -3 < 0$, x_1 es un máximo local estricto, que toma el valor

$$f(-2) = 11.$$

Por otro lado, como $f''(x_2) = 3 > 0$, entonces x_2 es un mínimo local estricto y lo descartamos. Luego los candidatos a máximo global son el máximo local $x_1 = -2$ y los extremos $a = -4$, $b = 3$. En dichos extremos la función toma los valores $f(-4) = 3$ y $f(3) = \frac{19}{4} = 4{,}75$. Como el máximo,

$$\text{máx}\{f(-4), f(-2), f(-1)\} = \text{máx}\left\{3, 11, \frac{19}{4}\right\} = 11 = f(-2),$$

se alcanza en el punto $x_1 = -2$, dicho punto es el máximo global de f en I, tal como se puede observar en la Figura 1.

4. **Solución. (c)** Aplicamos el cambio de variable $x(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ tal que $t = \sqrt{x^2 - 1}$. Se tiene que $x(3) = \sqrt{10}$, $x(0) = 1$. Además

$$x'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$$

Por tanto aplicando el teorema de cambio de variable, Teorema 16.3 de los apuntes, llegamos a una integral inmediata

$$I = \int_1^{\sqrt{10}} x\sqrt{x^2 - 1}dx = \int_0^3 \sqrt{t^2 + 1}t\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}dt = \int_0^3 t^2 dt,$$

fácilmente calculable

$$I = \int_0^3 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=3} = \frac{3^3 - 0}{3} = 9.$$

5. **Solución. (b)** Según lo visto en la Sección 14.2.14. *Cálculo de la derivada direccional de funciones diferenciables*, si f es diferenciable en $\mathbf{a}$,

se tiene lo siguiente

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = f'(\mathbf{a})\mathbf{v} = \begin{pmatrix} D_1f(\mathbf{a}) & D_2f(\mathbf{a}) & D_3f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix},$$

En este caso

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{a}) &= \begin{pmatrix} D_1f(\mathbf{a}) & D_2f(\mathbf{a}) & D_3f(\mathbf{a}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1+xyz} & \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{1+xyz} & \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{1+xyz} \end{pmatrix}_{\mathbf{a}=(2,-1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{yz}{(1+xyz)^2} & -\frac{xz}{(1+xyz)^2} & -\frac{xy}{(1+xyz)^2} \end{pmatrix}_{\mathbf{a}=(2,-1,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$D_{\mathbf{v}}f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3.$$

Parte Desarrollo

Problema **a)** Tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

y queremos resolver el sistema lineal: Encontrar $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix}.$$

En primer lugar, podemos obtener la matriz reducida y la matriz de paso aplicando operaciones elementales. Siguiendo lo explicado en la Sección 6.1.2 *Calculando la matriz inversa mediante operaciones elementales,* calculamos la matriz reducida y la matriz de paso aplicando operaciones elementales a la matriz resultante de adjuntar la propia matriz y la matriz identidad hasta obtener la matriz reducida en la parte izquierda. De manera esquemática,

$$(A|\, I) \to (\mathrm{red}(A)|\, P)$$

De esta manera

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cccc} \mathbf{0} & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cccc} \mathbf{2} & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to \frac{1}{2}F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cccc} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 + 2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cccc} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4 \to F_4 - 4F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cccc} \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4 \to F_4 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

que cuenta con dos pivotes. Por tanto, véase Sección 1.4.2. *Matriz escalonada. Rango de una matriz*, el rango de la matriz A es 2.

Por otro lado, del resultado de las operaciones elementales también obtenemos que la matriz de paso viene dada por

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

compruébese que efectivamente

$$PA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{red}(A).$$

Utilizando la matriz de paso podemos calcular el rango de la matriz ampliada, aplicar Rouché-Frobenius y resolver el sistema por el método de eliminación de Gauss. Así multiplicar por P es equivalente a realizar eliminación de Gauss

$$A^* = (A|\,\mathbf{b}) \quad \to (PA|\,P\mathbf{b}) = (\mathrm{red}(A)|\,P\mathbf{b})$$

Como

$$P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -5 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

entonces

$$A^* = (A|\,\mathbf{b}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 10 \\ -2 & 0 & -1 & -5 \\ 4 & 3 & 8 & 25 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Con lo que hemos calculado la matriz escalonada reducida de la matriz ampliada

$$\mathrm{red}(A^*) = \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Dicha matriz también tiene dos pivotes y por tanto su rango 2. Aplicando Rouché-Frobenius, véase Teorema 2.1, el sistema es compatible indeterminado,

$r = \text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, con

$$k = p - r = 3 - 2 = 1$$

parámetro. El sistema lineal asociado viene dado por

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}x_3 & = & \frac{5}{2} \\ x_2 + 2x_3 & = & 5 \end{array}\right\}$$

en donde hemos descartamos la dos últimas ecuaciones triviales. Es un sistema con tres incógnitas, y dos pivotes asociados a las variables x_1 y x_2. Por tanto la tercera variable queda como parametro $x_3 = \lambda$. Sustituyendo

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + \frac{1}{2}\lambda & = & \frac{5}{2} \\ x_2 + 2\lambda & = & 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rcl} x_1 & = & \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda \\ x_2 & = & 5 - 2\lambda \end{array}\right\}$$

Luego el conjunto solución viene dado por

$$\text{Sol}(A, b) = \left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\lambda, 5 - 2\lambda, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Finalmente sabemos que por definición, véase Sección 6.1.2 *Subespacios vectoriales asociados a una matriz*, se tiene

$$\text{Im}\, A = G[\{(0, 2, -2, 4), (1, 1, 0, 3), (2, 3, -1, 8)\}]$$

Aplicando lo visto en la Sección 6.2. *Teorema de la dimensión*,

$$\dim \text{Im}\, A = \text{rango}(A) = 2,$$

luego dos vectores linealmente independientes del sistema generador

$$\{(0, 2, -2, 4), (1, 1, 0, 3), (2, 3, -1, 8)\}$$

constituyen una base de $\text{Im}\, A$, por ejemplo los dos primeros

$$\{(0, 2, -2, 4), (1, 1, 0, 3)\}.$$

Para hallar sus ecuaciones implicitas seguimos lo explicando en la Sección 3.5.2. *Ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial*. Como hay $n = 4$ variables y $k = 2$ vectores en la base, tenemos que encontrar

$$n - k = 4 - 2 = 2$$

ecuaciones linealmente independientes. Siguiendo el método dado en la Sección 3.5.3. *Cambio de ecuaciones paramétricas a implícitas*, dada la matriz

$$\begin{pmatrix} y_1 & 0 & 1 \\ y_2 & 2 & 1 \\ y_3 & -2 & 0 \\ y_4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

basta igualar a cero los determinantes de dos submatrices cuadrada de orden $k+1=3$ y comprobar que las ecuaciones obtenidas son linealmente independientes. De esta manera

$$\begin{vmatrix} y_1 & 0 & 1 \\ y_2 & 2 & 1 \\ y_3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y_1 - 2y_2 - 2y_3 = 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 - y_3 = 0,$$

y

$$\begin{vmatrix} y_2 & 2 & 1 \\ y_3 & -2 & 0 \\ y_4 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y_4 - 2y_3 - 6y_2 = 0 \Leftrightarrow y_4 - y_3 - 3y_2 = 0$$

nos proporcionan dos ecuaciones implícitas linealmente independientes de Im A,

$$\operatorname{Im} A = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) : y_1 - y_2 - y_3 = 0, y_4 - y_3 - 3y_2 = 0\}.$$

Problema **b)** (i) Sea la función

$$f(x,y) = (1 + x^3 y)^2.$$

El polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$ de la función f viene dado por

$$P_2(x,y) = f(0,0) + \frac{1}{1!}\begin{pmatrix} D_1 f(2,0) & D_2 f(2,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-2 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_{11}f(2,0) & D_{12}f(2,0) \\ D_{21}f(2,0) & D_{22}f(2,0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}.$$

Calculamos las derivadas y particularizamos para el punto $(2,0)$

$$\begin{aligned}
&f(2,0) = 1, \\
&D_1 f(2,0) = 6(1+x^3y)x^2y\big|_{(x,y)=(2,0)} = 0, \\
&D_2 f(2,0) = 2(1+x^3y)x^3\big|_{(x,y)=(2,0)} = 16, \\
&D_{11} f(2,0) = 18x^4y^2 + 12xy\left(yx^3+1\right)\big|_{(x,y)=(2,0)} = 0, \\
&D_{12} f(2,0) = 6x^5y + 6x^2\left(yx^3+1\right)\big|_{(x,y)=(2,0)} = 24, \\
&D_{22} f(2,0) = 2x^6\big|_{(x,y)=(2,0)} = 128,
\end{aligned}$$

de esta manera el polinomio de Taylor viene dado por

$$
\begin{aligned}
P_2(x,y) &= 1+\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-2 & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 128 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1+16y+\frac{1}{2}\left(24y\left(x-2\right)+y\left(24x+128y-48\right)\right) \\
&= 1-32y+64y^2+24xy.
\end{aligned}
$$

Finalmente

$$P_2(x,y)=1-32y+64y^2+24xy.$$

(ii) Calculamos la integral directamente desarrollando el integrando

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{[-1,0]\times[1,2]}(1+x^3y)^2dxdy=\int_{[-1,0]\times[1,2]}(x^6y^2+2x^3y+1) \\
&= \int_1^2\int_{-1}^0 x^6y^2dxdy+\int_1^2\int_{-1}^0 2x^3ydxdy+\int_1^2\int_{-1}^0 dxdy
\end{aligned}
$$

y aplicando integración reiterada

$$
\begin{aligned}
I &= \left[\frac{x^7}{7}\right]_{x=-1}^{x=0}\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=1}^{y=2}+2\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x=-1}^{x=0}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1}^{y=2}+[x]_{x=-1}^{x=0}[y]_{y=1}^{y=2} \\
&= \frac{1}{7}\frac{7}{3}+2\frac{-1}{4}\frac{3}{2}+1=\frac{1}{3}-\frac{3}{4}+1=\frac{7}{12}.
\end{aligned}
$$

Febrero 2020. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Una **copia de las Unidades Didácticas de la Asignatura**, tanto la versión editada en el libro "*Curso de introducción al Álgebra y al Cálculo Diferencial e Integral en* $\mathbb{R}^n$" por la Editorial UNED como una copia impresa del fichero proporcionado por el Equipo Docente en el curso virtual. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.
- Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

EJERCICIOS

1. En este ejercicio se pide lo siguiente:

   (i) Sea $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ el conjunto de los números enteros. Sobre dicho conjunto consideremos la operación $\diamond$ definida de la siguiente manera

   $$\begin{array}{rcl} \diamond : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ (n, m) & \longmapsto & n \diamond m = (n \cdot m) + n + m \end{array}$$

   en donde $\cdot$ denota el producto usual de números enteros.

   Estudie si la operación verifica las siguiente propiedades:

   – $\diamond$ es asociativa.
   – $\diamond$ es conmutativa.
   – Existe elemento neutro para $\diamond$.

   (1 pto)

(ii) Calcule la matriz escalonada reducida de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

(1 pto)

2. Se considera $\mathbb{R}^3$ con dos bases genéricas suyas,

$$\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$$

y

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\},$$

cuyos vectores verifican

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_2 \ , \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 \ , \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{u}_1 . \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Calcule las matrices de cambio de base $M_{\mathbf{U}\to\mathbf{V}}$ y $M_{\mathbf{V}\to\mathbf{U}}$ respectivamente. (1 pto)

(ii) Si

$$\mathbf{U} = \{(2,1,0), (1,0,1), (2,3,1)\},$$

calcule las coordenadas del vector de componentes $\mathbf{x} = (2,3,1)$ con respecto de las bases $\mathbf{U}$ y $\mathbf{V}$. (1 pto)

(iii) Sea la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \\ F(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3, \\ F(\mathbf{v}_3) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3. \end{aligned}$$

Calcule la matriz asociada $M(F, \mathbf{U}, \mathbf{V})$, y verifique el resultado para el vector $\mathbf{x} = (2,3,1)$. Es decir, compruebe que efectivamente

$$F(\mathbf{x})_{\mathbf{V}} = M(F, \mathbf{U}, \mathbf{V})\mathbf{x}_{\mathbf{U}}.$$

(1 pto)

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función cuya **función derivada** $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ viene dada por

$$f'(x) = x^3 + x^2 - x - 1.$$

Determine los extremos relativos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los puntos de inflexión y los intervalos de convexidad y concavidad de la función. Represente gráficamente la función. (2 ptos)

4. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden de la función

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + x - y^2$$

en el punto $(x,y) = (1,0)$. (1 pto)

(ii) Sea $\mathbf{T}$ el triángulo de vértices

$$\mathbf{a}_1 = (-1,0), \ \mathbf{a}_2 = (-1,1) \text{ y } \mathbf{a}_3 = (0,0).$$

Determine una representación de tipo I para $\mathbf{T}$ y calcule la integral

$$\int_{\mathbf{T}} x dx dy.$$

(1 pto)

Ejercicio 1

(i) La operación es conmutativa por la conmutatividad de la suma y producto usuales,

$$n\diamond m=(n\cdot m)+n+m=(m\cdot n)+m+n=m\diamond n$$

Para cualesquiera $n,m,r\in\mathbb{Z}$ se tiene

$$\begin{aligned}n\diamond(m\diamond r) &= n\diamond(mr+r+m)=n(mr+r+m)+n+mr+r+m=m+n+r+mn+mr+nr+mnr\\ (n\diamond m)\diamond r &= (nm+n+m)\diamond r=(nm+n+m)r+r+nm+n+m=m+n+r+mn+mr+nr+mnr\end{aligned}$$

Luego coincinden ambas cantidades

$$n\diamond(m\diamond r)=(n\diamond m)\diamond r$$

y la operación es asociativa.

El elemento $e=0$ es el elemento neutro ya que

$$0\diamond n=n\diamond 0=(n\cdot 0)+n+0=n$$

para todo $n\in\mathbb{Z}$.

(ii) Aplicamos operaciones elementales a la matriz

$$\begin{pmatrix}\mathbf{0}&2&1&7\\1&1&-1&0\\3&0&2&9\end{pmatrix}\underset{F_1\leftrightarrow F_3}{\approx}\begin{pmatrix}\mathbf{3}&0&2&9\\1&1&-1&0\\0&2&1&7\end{pmatrix}\underset{F_1\to\frac{1}{3}F_1}{\approx}\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&\frac{2}{3}&3\\1&1&-1&0\\0&2&1&7\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2\to F_2-F_1}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&3\\0&\mathbf{1}&-\frac{5}{3}&-3\\0&2&1&7\end{pmatrix}\underset{F_3\to F_3-2F_2}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&3\\0&1&-\frac{5}{3}&-3\\0&0&\frac{13}{3}&13\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3\to\frac{3}{13}F_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&3\\0&1&-\frac{5}{3}&-3\\0&0&\mathbf{1}&3\end{pmatrix}\underset{F_2\to F_2+\frac{5}{3}F_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&\frac{2}{3}&3\\0&1&0&2\\0&0&\mathbf{1}&3\end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1\to F_1-\frac{2}{3}F_3}{\approx}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{pmatrix}$$

La matriz escalonada reducida viene dada por

$$\operatorname{red}(A)=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&0&0&1\\0&\mathbf{1}&0&2\\0&0&\mathbf{1}&3\end{pmatrix},$$

con tres pivotes.

Ejercicio 2

(i) La matriz de cambio $M_{\mathbf{V}\to\mathbf{U}}$ tiene por columnas las coordenadas de la base $\mathbf{V}$ con respecto de $\mathbf{U}$, en este caso

$$M_{\mathbf{V}\to\mathbf{U}}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

La matriz del cambio recíproco viene dada por su inversa

$$M_{\mathbf{U}\to\mathbf{V}} = M_{\mathbf{V}\to\mathbf{U}}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Directamente el vector de componentes $\mathbf{x} = (2, 3, 1)$ se corresponde con el tercer vector de la base $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{x} = (2, 3, 1) = 0(2, 1, 0) + 0(1, 0, 1) + 1(2, 3, 1),$$

luego sus coordenadas con respecto de la base $\mathbf{U}$ vienen dadas por

$$\mathbf{x}_{\mathbf{U}} = (0, 0, 1).$$

Por otro lado,

$$\mathbf{x}_{\mathbf{V}} = M_{\mathbf{U}\to\mathbf{V}}\mathbf{x}_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\mathbf{x}_{\mathbf{V}} = (0, 1, -1).$$

(iii) Directamente del enunciado calculamos la matriz $M(F, \mathbf{V}, \mathbf{U})$ que tiene por columnas las coordenadas de las imágenes $\{F(\mathbf{v}_1), F(\mathbf{v}_2), F(\mathbf{v}_3)\}$ con respecto de la base $\mathbf{U}$, en este caso

$$M(F, \mathbf{V}, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Aplicando la fórmula de cambio de base

$$\begin{aligned} M(F, \mathbf{U}, \mathbf{V}) &= M_{\mathbf{U}\to\mathbf{V}} M(F, \mathbf{V}, \mathbf{U}) M_{\mathbf{U}\to\mathbf{V}} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se tiene que $\mathbf{x}_{\mathbf{U}} = (0, 0, 1)$, luego

$$M(F, \mathbf{U}, \mathbf{V})\mathbf{x}_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, $\mathbf{x}_{\mathbf{V}} = (0, 1, -1)$

$$F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3) = F(\mathbf{v}_2) - F(\mathbf{v}_3) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 - (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3,$$

y se tiene que

$$F(\mathbf{x})_{\mathbf{U}} = (0, -1, -1).$$

Así pues,

$$F(\mathbf{x})_{\mathbf{V}} = M_{\mathbf{U}\to\mathbf{V}} F(\mathbf{x})_{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y se comprueba

$$F(\mathbf{x})_{\mathbf{V}} = M(F, \mathbf{U}, \mathbf{V})\mathbf{x}_{\mathbf{U}}.$$

Ejercicio 3

Igualando a cero la derivada obtenemos los puntos críticos de la función, en este caso la función derivada se anula en los puntos $a = -1$, $b = 1$, que son la solución de la ecuación

$$x^3 + x^2 - x - 1 = 0$$

y por tanto hay dos puntos críticos. Como la derivada es continua, la función toma signo constante en cada uno de los tres intervalos que determina, $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$. Tomando un valor de f' en cada uno de dichos intervalos determinamos el signo de la función derivada, así se puede comprobar que

$$\text{signo}(f'(x)) = \begin{cases} - & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1), \\ - & \text{si} \quad x \in (-1, 1), \\ + & \text{si} \quad x \in (1, \infty). \end{cases}$$

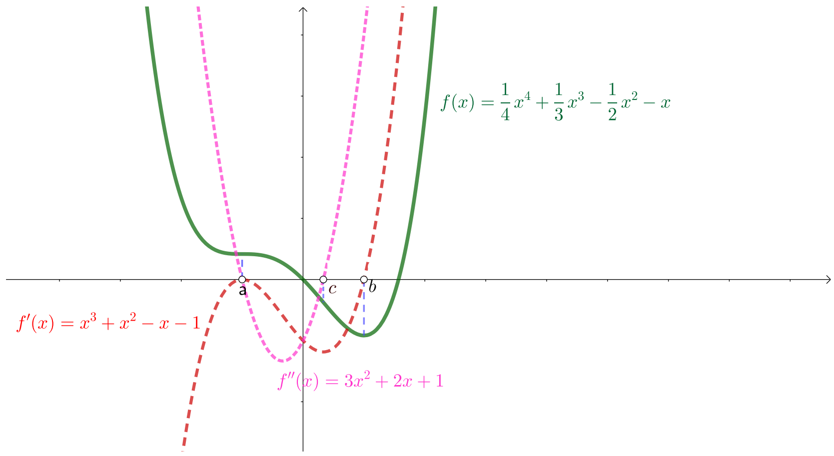


Figure 1: Ejercicio 3

Luego la función f' es negativa en $(-\infty, 1)$ y positiva en $(1, \infty)$. Por tanto f decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$, con lo que $b = 1$ es un mínimo local, de hecho es estricto, mientra que el punto $a = -1$ no es extremo relativo. Por otro lado, la derivada segunda $f''(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$ se anula en los puntos $a = -1$ y $c = \frac{1}{3}$. Haciendo el correspondiente análisis de signos, tenemos

$$\text{signo}(f''(x)) = \begin{cases} + & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1), \\ - & \text{si} \quad x \in (-1, \frac{1}{3}), \\ + & \text{si} \quad x \in (\frac{1}{3}, \infty). \end{cases}$$

La función f'' es positiva, y por tanto f es convexa, en $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, \infty)$, mientras que f'' es negativa, y por tanto f es cóncava, en $(-1, \frac{1}{3})$. Luego la función cambia de convexa a cóncava o viceversa, en los puntos $a = -1$, $c = \frac{1}{3}$ que son por tanto puntos de inflexión. Con toda esta información podemos hacer un esbozo de la gráfica de la función tal como vemos en la Figura 1. De hecho, en dicha figura representamos la función $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ que se se corresponde con una de las primitivas de la función f'. Cualquier otra primitiva sería una posible función f,

$$f(x) = \int \left(x^3 + x^2 - x - 1\right) dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + C, \; C \text{ constante},$$

y tiene una gráfica igual a la de la figura pero desplazada C unidades respecto del eje vertical.

Ejercicio 4

(i) El polinomio de Taylor de orden 2 en $(1,0)$ de la función f viene dado por

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(1,0)+\frac{1}{1!}\begin{pmatrix} D_1f(1,0) & D_2f(1,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-1 & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_{11}f(1,0) & D_{12}f(1,0) \\ D_{21}f(1,0) & D_{22}f(1,0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y\end{pmatrix} \\ &= f(1,0)+(x-1)D_1f(1,0)+yD_2f(1,0)+\frac{1}{2}D_{11}f(1,0)(x-1)^2+D_{12}f(1,0)(x-1)y+D_{22}f(1,0)y^2. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas y particularizamos para el punto $(0,0)$:

$$\begin{aligned} &f(1,0)=\frac{y}{x}+x-y^2\Big|_{(x,y)=(1,0)}=1, \\ &D_1f(1,0)=1-\tfrac{y}{x^2}\Big|_{(x,y)=(1,0)}=1,\ D_2f(1,0)=\tfrac{1}{x}-2y\Big|_{(x,y)=(1,0)}=1, \\ &D_{11}f(1,0)=2\frac{y}{x^3}\Big|_{(x,y)=(1,0)}=0,\ D_{12}f(1,0)=-\tfrac{1}{x^2}\Big|_{(x,y)=(1,0)}=-1, \\ &D_{22}f(1,0)=-2|_{(x,y)=(1,0)}=-2, \end{aligned}$$

por tanto el polinomio de Taylor es

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= 1+(x-1)+y+\frac{1}{2}0(x-1)^2+(-1)(x-1)y-\frac{1}{2}2y^2 \\ &= x+2y-xy-y^2 \end{aligned}$$

Luego

$$P_2(x,y)=x+2y-xy-y^2.$$

(ii) En la representación gráfica de la Figura 2 se observa directamente que $\mathbf{T}$ tiene la siguiente representación de tipo I

$$\mathbf{T}=\{(x,y):-1\le x\le 0,\ 0\le y\le -x\}.$$

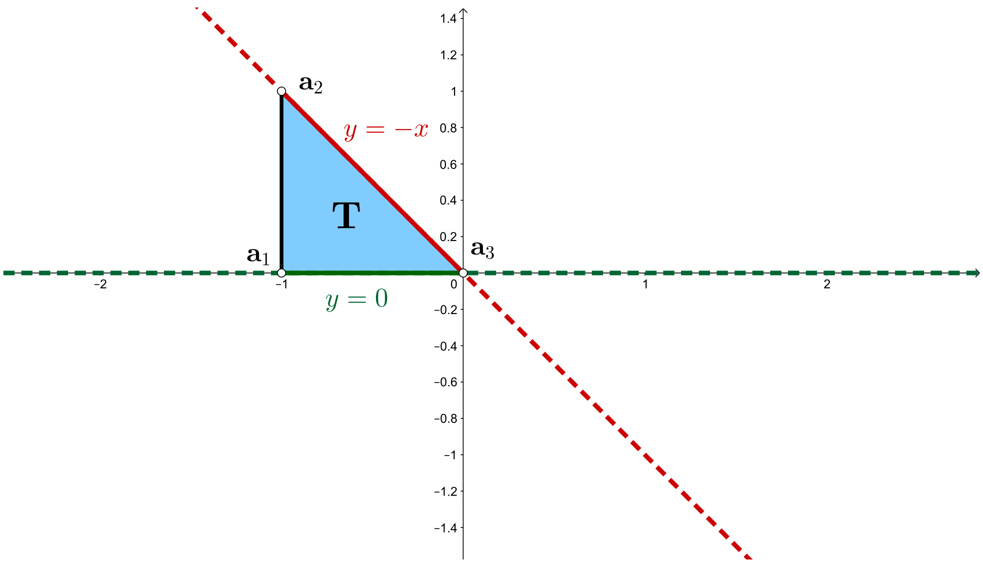


Figure 2: Ejercicio 4

La integral se calcula aplicando integración reiterada

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{T}} x\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\int_{0}^{-x} x\,dy\,dx=\int_{-1}^{0} x\left(\int_0^{-x} dy\right)=\int_{-1}^{0} x\,[y]_{y=0}^{y=-x}\,dx=\int_{-1}^{0} x(-x-0)dx \\ &= -\int_{-1}^{0} x^2dx=-\left[\frac{x^3}{3}\right]_{x=-1}^{x=0}=-\frac{0^3}{3}+\frac{(-1)^3}{3}=-\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\mathbf{T}} x\,dx\,dy=-\frac{1}{3}.$$

Febrero 2020. Modelo B
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Una **copia de las Unidades Didácticas de la Asignatura**, tanto la versión editada en el libro "*Curso de introducción al Álgebra y al Cálculo Diferencial e Integral en* $\mathbb{R}^n$" por la Editorial UNED como una copia impresa del fichero proporcionado por el Equipo Docente en el curso virtual. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.
- Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

EJERCICIOS

1. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -5 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$
   (i) Calcule su matriz inversa A^{-1}. (1 pto)
   (ii) Exprese A^{-1} como producto de matrices elementales. (1 pto)
   (iii) Estudie si A es diagonalizable. En caso afirmativo encuentre una matriz diagonal semejante. (1 pto)

2. En este ejercicio consideramos el espacio de polinomios de grado igual o menor a 2,
$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

(i) Calcule razonadamente las coordenadas del polinomio

$$\mathbf{q}(x) = x^2 - 6x - 1$$

respecto de la base

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \left\{-1, -5 + 2x, -6x^2\right\}.$$

(1 pto)

(ii) Considerando coordenadas con respecto de $\mathbf{A}$, halle las ecuaciones paramétricas e implícitas del subespacio vectorial

$$\mathbb{V} = G[\mathbf{C}] \subset \mathbb{P}_2$$

generado por el conjunto

$$\mathbf{C} = \{\mathbf{c}_1\} = \{2x\}.$$

(1 pto)

3. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Determine los intervalos de concavidad de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$. (1 pto)

(ii) Calcule la siguiente integral indefinida

$$I = \int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)}} dx.$$

(1 pto)

4. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Encuentre las direcciones tal que la derivada direccional de la función

$$f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$$

en el punto $(1, 0)$ toma el valor 1. (1 pto)

(ii) Determine los máximos y mínimos locales de la función

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2 - 5x + 6y - 9.$$

(1 pto)

Ejercicio 1

(i) Aplicamos el método de eliminación de Gauss, para ello adjuntamos la matriz A y la matriz identidad y hacemos operaciones elementales para obtener la matriz identidad a la izquierda y la inversa a la derecha (véase Sección 1.6.2)

$$(A|\ I) \to \left(I|\, A^{-1}\right)$$

Así tenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{3} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to \frac{1}{3}F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to F_2 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to F_3 + 5F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} & \frac{5}{3} & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to -\frac{3}{2}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to F_2 - \frac{1}{3}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - \frac{2}{3}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

Por tanto

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) Teniendo en cuenta las operaciones elementales realizadas, la matriz inversa se corresponde con el producto de matrices elementales

$$A^{-1} = F_{13}\left(-\frac{2}{3}\right) F_{23}\left(-\frac{1}{3}\right) F_3\left(-\frac{3}{2}\right) F_{31}(5) F_{21}(-1) F_1\left(-\frac{1}{3}\right),$$

es decir

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(iii) Calculamos el polinomio característico

$$p(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ -5 & 0 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2) = 0,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = -2$ con multiplicidad simple y $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad doble. El autovalor $\lambda_1 = -2$ tiene multiplicidad algebraica $m_1 = 1$. Al ser la multiplicidad geométrica siempre menor que la algebraíca y mayor que 1 (Proposición 7.1), en este caso necesariamente van a coincidir. Del mismo modo,

$$\mathbb{E}_2 = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 3-1 & 0 & 2 \\ 1 & 1-1 & 1 \\ -5 & 0 & -4-1 \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Como en este caso la matriz tiene rango 1, aplicando la fórmula (7.6) de las unidades didácticas se tiene

$$\dim \mathbb{E}_2 = \operatorname{Ker}(A - I) = 3 - 1 = 2 = m_2.$$

Por tanto, las multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden por el teorema de caracterización de matrices diagonalizables, Teorema 7.1, la matriz es diagonalizable, siendo una matriz diagonal semejamente cualquiera que contenga en su diagonal los autovalores con los valores repetidos teniendo en cuenta su multiplicidad. Por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2

(i) Directamente, las coordenadas de $\mathbf{q}$ con respecto de $\mathbf{A}$ son los escalares $\mathbf{q_A} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\mathbf{q}(x) = q_1\mathbf{a}_1(x) + q_2\mathbf{a}_2(x) + q_3\mathbf{a}_3(x),$$

con lo que

$$x^2 - 6x - 1 = q_1(-1) + q_2(-5 + 2x) + q_3(-6x^2),$$

equivalentemente

$$x^2 - 6x - 1 = -q_1 - 5q_2 + 2q_2x - 6q_3x^2.$$

Igualando componentes

$$q_3 = -\frac{1}{6},\ q_2 = -\frac{6}{2} = -3,\ \ q_1 = 1 - 5q_2 = 1 - 5(-3) = 16.$$

Por tanto $\mathbf{q_A} = \left(16, -3, -\frac{1}{6}\right)$.

(ii) Como

$$\mathbf{c}_1(x) = 2x = 1(-5 + 2x) - 5(-1) = 1\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_1$$

las coordenadas de $\mathbf{c}_1$ con respecto de $\mathbf{A}$ vienen dadas por $(\mathbf{c}_1)_\mathbf{A} = (-5, 1, 0)$. Esto nos permite trabajar directamente sobre el espacio de coordenadas. Así, para un vector genéríco $\mathbf{p} \in \mathbb{V} = G[\mathbf{c}_1]$ con coordenadas $\mathbf{p_A} = (p_1, p_2, p_3)$ con respecto de la base $\mathbf{A}$ las ecuaciones parámetricas vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} p_1 = -5\lambda, \\ p_2 = \lambda, \\ p_3 = 0, \end{array}$$

y por tanto

$$\begin{cases} p_1 = -5\lambda, \\ p_2 = \lambda, \\ p_3 = 0, \end{cases}$$

en donde $\lambda \in \mathbb{R}$. Las ecuaciones implícitas son 2 ya que el número de ecuaciones se determina por la fórmula

$$n - \dim \mathbb{V} = 3 - 1 = 2.$$

Una ecuación es directamente $p_3 = 0$, la segunda $p_1 + 5p_2 = 0$, independiente linealmente de la anterior, se obtiene eliminando el parámetro en las dos primeras ecuaciones . Luego unas ecuaciones implícitas de $\mathbb{V}$ en la referencia $\mathbf{A}$ vienen dadas por

$$\begin{cases} p_1 + 5p_2 = 0, \\ p_3 = 0. \end{cases}$$

Ejercicio 3

(i) Los intervalos de concavidad vienen dados por los intervalos en los que la derivada segunda es negativa, véase *Sección 15.4 Concavidad y convexidad.* En este caso, como

$$f''(x) = 6x - 18 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 3,$$

la función es cóncava en el intervalo $(-\infty, 3)$.

(ii) Para resolver esta integral aplicamos el cambio de variable $t = \sin(3x)$, así tendríamos que

$$dt = 3\cos(2x)dt.$$

Susituyendo directamente

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{3}t^{\frac{1}{2}} + C,\ C \text{ constante.}$$

Deshaciendo el cambio, se tiene finalmente que

$$\int \frac{\cos(3x)}{\sqrt{\sin(3x)}}dx = \frac{2}{3}\sqrt{\sin(3x)} + C,\ C \text{ constante.}$$

Ejercicio 4

(i) En general para una dirección $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, que suponemos de norma 1 para cumplir con la definición (véase Definición 14.1),

$$v_1^2 + v_2^2 = 1, \tag{1}$$

la correspondiente derivada direccional de f en $(1, 0)$ se puede calcular como (véase Proposición 14.5)

$$D_{\mathbf{v}}f(1,0) = \nabla f(1,0)^T\mathbf{v}$$

en donde

$$\begin{aligned} \nabla f(1,0)^T &= \begin{pmatrix} D_1(x^2 + \sin(xy)) & D_2(x^2 + \sin(xy)) \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,0)} = \begin{pmatrix} 2x + y\cos(xy)) & x\cos(xy)) \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,0)} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces

$$D_{\mathbf{v}}f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 2v_1 + v_2.$$

Luego

$$D_{\mathbf{v}}f(1,0) = 1 \Leftrightarrow 2v_1 + v_2 = 1 \Leftrightarrow v_2 = 1 - 2v_1.$$

De la condición (1) obtenemos

$$v_1^2 + (1 - 2v_1)^2 = 1 \Rightarrow 5v_1^2 - 4v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \text{ o } v_1 = \frac{4}{5}.$$

Tenemos dos posibilidades. Si $v_1 = 0$, entonces $v_2 = 1$ y $(0, 1)$ es una posible dirección. Por otro lado si $v_1 = \frac{4}{5}$, entonces $v_2 = 1 - 2\frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$ y $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ es la otra dirección.

(ii) Los puntos críticos

$$\nabla f(x,y) = (0,0),$$

vienen dados por el sistema

$$\left.\begin{array}{r} D_1 f(x,y) = 0 \\ D_2 f(x,y) = 0 \end{array}\right\}$$

Como $D_1 f(x,y) = 2x - y - 5$, $D_2 f(x,y) = 4y - x + 6$ el sistema es lineal

$$\left.\begin{array}{r} 2x - y - 5 = 0 \\ 4y - x + 6 = 0 \end{array}\right\}$$

con solución única

$$(x,y) = (2,-1)$$

La matriz Hessiana viene dada por

$$\nabla^2 f(2,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aplicando el criterio de los menores (Teorema 15.2)

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0$$

la Hessiana define una forma cuadrática positiva y podemos concluir que $(2,-1)$ es un mínimo estricto local (Teorema 15.3).

Febrero 2022. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Una **copia de las Unidades Didácticas de la Asignatura**, tanto la versión editada en el libro "*Curso de introducción al Álgebra y al Cálculo Diferencial e Integral en* $\mathbb{R}^n$" por la Editorial UNED como una copia impresa del fichero proporcionado por el Equipo Docente en el curso virtual. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario. Ningún otro tipo de material estará permitido.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. En este ejercicio se pide lo siguiente:

   (i) Sea $M = \{[a,b] : a \leq b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$ el conjunto de los intervalos compactos en $\mathbb{R}$. Sobre dicho conjunto consideramos una operación suma $\oplus$ de la siguiente manera

$$\begin{array}{rlcl} \oplus : & M & \rightarrow & M \\ & ([a,b],[c,d]) & \mapsto & [a+c, b+d] \end{array}$$

   Estudie si la operación $\oplus$ verifica las siguientes propiedades:

   – $\oplus$ es conmutativa

- $\oplus$ es asociativa
- Existe elemento neutro para $\oplus$

(1 pto)

(ii) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

Calcule y exprese su matriz escalonada reducida como producto de matrices elementales. (1 pto)

2. Sea la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1) &= -\mathbf{u}_1, \\ F(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2, \\ F(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

en donde $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Consideramos asimismo la base

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, -\mathbf{u}_1\}$$

(i) Calcule de manera razonada las siguientes matrices asociadas a la aplicación,

$$M(F; \mathbf{U}, \mathbf{U}),\ M(F; \mathbf{V}, \mathbf{U}).$$

(1.5 ptos)

(ii) Determine la dimensión del Ker F, así como unas ecuaciones implícitas y una base expresadas en coordenadas con respecto de la base $\mathbf{U}$ y asimismo de la base $\mathbf{V}$. (1.5 ptos)

3. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Calcule el polinomio de Taylor de orden 3 de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

en el punto $x = 0$. (1 pto)

(ii) Calcule razonadamente la siguiente integral

$$I = \int_1^3 \frac{2}{x^3 + 2x} dx$$

(1 pto)

4. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Señale razonadamente los máximos y mínimos relativos de la función

$$f(x, y) = \operatorname{sen}(x) + \operatorname{sen}(y) + \operatorname{sen}(x + y)$$

en el conjunto $\mathbf{M} = \{(x, y) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$. (1 pto)

(ii) Sea el recinto

$$\mathbf{A} = \{(x, y) : |x| < y < 1,\ \ -1 < x < 1\}.$$

Represente gráficamente el conjunto $\mathbf{A}$ y calcule la integral

$$I = \int_{\mathbf{A}} (x + y)^2 dx dy.$$

(1 pto)

Ejercicio 1

(i) La operación $\oplus$ es conmutativa como consecuencia de la conmutatividad de la suma de números reales. Así dados dos intervalos $[a_1, b_1],\ \ [a_2, b_2] \in M,$ se tiene que

$$[a_1, b_1] \oplus [a_2, b_2] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] = [a_2 + a_1, b_2 + b_1] = [a_2, b_2] \oplus [a_1, b_1]$$

Y del mismo modo se puede probar que $\oplus$ es también asociativa, así considerando un intervalo adicional $[a_3, b_3] \in M$ se tiene que

$$\begin{array}{l}[a_1, b_1] \oplus ([a_2, b_2] \oplus [a_3, b_3]) = [a_1, b_1] \oplus [a_2 + a_3, b_2 + b_3] = [a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3] \\ ([a_1, b_1] \oplus [a_2, b_2]) \oplus [a_3, b_3] = [a_1 + a_2, b_1 + b_2] \oplus [a_3, b_3] = [a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3]\end{array}$$

Por tanto $[a_1, b_1] \oplus ([a_2, b_2] \oplus [a_3, b_3]) = [a_1, b_1] \oplus ([a_2, b_2] \oplus [a_3, b_3])$, lo que prueba la asociatividad.

Asimismo existe elemento neutro dado por $[0, 0] \in M$, ya que fácilmente se comprueba que

$$\begin{array}{rcl}[a_1, b_1] \oplus [0, 0] & = & [a_1 + 0, b_1 + 0] = [a_1, b_1] \\ [0, 0] \oplus [a_1, b_1] & = & [0 + a_1, 0 + b_1] = [a_1, b_1]\end{array}$$

para todo intervalo $[a_1, b_1] \in M$.

(ii) Aplicamos operaciones elementales a la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -3 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix} \underset{F_2 \to F_2 - 4F_1}{\approx} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -11 \\ 7 & 5 & -8 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 7F_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -\mathbf{1} & -11 \\ 0 & -2 & -22 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_2 \to -F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 11 \\ 0 & -2 & -22 \end{pmatrix} \underset{F_3 \to F_3 - 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz escalonada reducida viene dada por

$$\mathrm{red}(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & -9 \\ 0 & \mathbf{1} & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con tres pivotes. En principio la matriz escalonada reducida no tiene descomposición en matrices elementales por no ser regular y no se puede dar la descomposición pedida. Lo que si se puede expresar en términos de producto de matrices elementales es la matriz de paso P tal que $PA = \mathrm{red}(A)$, que recoge las operaciones elementales realizadas ordenadas,

$$P = F_{12}(-1)F_{32}(2)F_2(-1)F_{31}(-7)F_{21}(-4)$$

Se puede calcular que

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

En cualquier caso, teniendo en cuenta lo anterior, en este ejercicio para obtener la puntuación máxima basta calcular la matriz escalonada.

Ejercicio 2

(i) La matriz $M(F;\mathbf{U},\mathbf{U})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes $\{F(\mathbf{u}_1),F(\mathbf{u}_2),F(\mathbf{u}_3)\}$ con respecto de la base $\mathbf{U}$, veáse Definición 5.1 Unidades Didácticas. Así, como

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1) &= -\mathbf{u}_1+0\mathbf{u}_2+0\mathbf{u}_3,\\ F(\mathbf{u}_2) &= 1\mathbf{u}_1-1\mathbf{u}_2+0\mathbf{u}_3,\\ F(\mathbf{u}_3) &= 0\mathbf{u}_1+0\mathbf{u}_2+0\mathbf{u}, \end{aligned}$$

entonces

$$M(F;\mathbf{U},\mathbf{U})=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Para calcular $M(F;\mathbf{V},\mathbf{U})$, aplicamos la fórmula (5.2) de las unidades didácticas,

$$M(F;\mathbf{V},\mathbf{U}) = M(F;\mathbf{U},\mathbf{U})M_{\mathbf{V}\to\mathbf{U}}$$

Como la matriz de cambio $M_{\mathbf{V}\to\mathbf{U}}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base $\mathbf{V}$ con respecto de la base $\mathbf{U}$, se tiene

$$M_{\mathbf{V}\to\mathbf{U}}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} M(F;\mathbf{V},\mathbf{U}) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Por definición

$$\text{Ker } F=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x})=\mathbf{0}\}$$

Con respecto de la base $\mathbf{U}$, podemos utilizar la matriz $M(F;\mathbf{U},\mathbf{U})$, ya que (téngase en cuenta que $\mathbf{0}_U=\mathbf{0}_V=\mathbf{0}=(0,0,0)$)

$$\text{Ker } F=\{\mathbf{x}_\mathbf{U}=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3 : M(F;\mathbf{U},\mathbf{U})\mathbf{x}_\mathbf{U}=\mathbf{0}\}$$

Así como

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow\\ \begin{pmatrix} u_2-u_1\\ -u_2\\ 0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow\\ u_2 &= u_1=0. \end{aligned}$$

Se tendría que

$$u_2=0, u_1=0$$

son unas ecuaciones implícita de Ker F con respecto de la base $\mathbf{U}$. Además como

$$\begin{aligned} \text{Ker } F &= \{(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3 : u_2=u_1=0\}\\ &= \{(0,0,u_3)\in\mathbb{R}^3 : u_2=u_1=0\}\\ &= \{u_3(0,0,1) : u_3\in\mathbb{R}\}\\ &= G[\{(0,0,1)\}] \end{aligned}$$

se tiene que $\{(0,0,1)\}$ es una base de Ker F con respecto de la base $\mathbf{U}$ que tiene por tanto dimensión 1. Del mismo modo,

$$\text{Ker } F = \{\mathbf{x_V} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : M(F; \mathbf{V}, \mathbf{U})\mathbf{x_V} = \mathbf{0}\}$$

y se tiene que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
\begin{pmatrix} v_1 + v_3 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\
v_1 &= v_3 = 0.
\end{aligned}$$

y razonado del mismo modo

$$v_3 = 0, v_1 = 0$$

son unas ecuaciones implícita de Ker F con respecto de la base $\mathbf{V}$ y

$$\begin{aligned}
\text{Ker } F &= \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : v_1 = v_3 = 0\} \\
&= G[\{(0,1,0)\}]
\end{aligned}$$

y $\{(0,0,1)\}$ es una base de Ker F con respecto de la base $\mathbf{V}$, que también está formada por un solo vector por ser la dimensión independiente de la base considerada.

Ejercicio 3

(i) Por definición, véase Sección 10.4 unidades didácticas, el polinomio buscado viene dado por

$$p_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

Calculamos la derivadas directamente

$$\begin{aligned}
f(0) &= (1-x)^{-1}|_{x=0} = 1 \\
f'(0) &= (1-x)^{-2}|_{x=0} = 1 \\
f''(0) &= 2(1-x)^{-3}|_{x=0} = 2 \\
f'''(0) &= 6(1-x)|_{x=0} = 6
\end{aligned}$$

Sustituyendo obtenemos el polinomio

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{2}{2}x^2 + \frac{6}{6}x^3 = 1 + x + x^2 + x^3$$

(ii) Calculamos en primer lugar una primitiva de la función integrando

$$\int \frac{2}{x^3 + 2x} dx$$

Es una integral racional, véase Sección 16.4.2 unidades didácticas. Es inmediato que el polinomio denominador

$$\mathbf{q}(x) = x^3 + 2x = x(x^2 + 2)$$

una raíz real $x_1 = 0$ aparte de dos raices imaginarias, $x_2 = \sqrt{2}i$, $x_3 = -\sqrt{2}i$ correspondientes a resolver $x^2 + 2 = 0$. Siguiendo el procedimiento usual se propone la descomposición

$$\frac{2}{x^3 + 2x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2}$$

Operando

$$2 = A(x^2+2) + x(Bx+C) \Leftrightarrow 2 = (A+B)x^2 + Cx + 2A$$

e igualando coeficientes se obtiene que

$$A+B=0,\ C=0,\ 2A=2 \Rightarrow A=1,\ B=-1,\ C=0.$$

Luego

$$\frac{2}{x^3+2x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+2}$$

y podemos descomponer la integral como una suma de integrales simples

$$\int \frac{2}{x^3+2x}dx = \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+2} = \ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$$

en donde C constante arbitraria. Luego $\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)$ es una primitiva, y aplicando la Regla de Barrow, véase Teorema 16.2 unidades didácticas, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{2}{x^3+2x}dx &= \left[\ln x - \frac{1}{2}\ln(x^2+2)\right]_{x=1}^{x=3} \\
&= \ln 3 - \frac{1}{2}\ln(3^2+2) - (\ln 1 - \frac{1}{2}\ln(1^2+2)) \\
&= \ln 3 - \frac{1}{2}\ln(11) + \frac{1}{2}\ln(3) \\
&= \frac{3}{2}\ln 3 - \frac{1}{2}\ln(11)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4

(i) Los puntos críticos se obtiene resolviendo el sistema no lineal (véase Sección 15.3 unidades didáctica)

$$\left.\begin{array}{l} D_1f(x,y) = \cos(x) + \cos(x+y) = 0 \\ D_2f(x,y) = \cos(y) + \cos(x+y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \cos(x) + \cos(x+y) = 0 \\ \cos(y) + \cos(x+y) = 0 \end{array}\right\}$$

De combinar ambas igualdades, $\cos(x) = \cos(y)$ y como $x, y \in (0, \pi)$, entonces necesariamente $x = y$, luego sustituyendo en la primera igualdad (sería lo mismo con respecto de la segunda igualdad)

$$\begin{aligned}
\cos(x) + \cos(2x) &= 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(x) + \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(x) + \cos^2(x) - (1-\cos^2(x)) = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 = 0
\end{aligned}$$

Luego $\cos(x) + 2\cos^2(x) - 1 = 0$, que es una ecuación segundo orden, así denotando $t = \cos x$, tenemos la ecuación $2t^2 + t - 1 = 0$ con soluciones $t_1 = \frac{1}{2}$, $t_2 = -1$. Luego los posibles soluciones verifican

$$\cos(x) = -1 \text{ sin solución en } (0, \pi),$$

y

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}.$$

Luego el único punto crítico es $\mathbf{a} = (\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Calculamos la Hessiana

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) &= \left(\begin{array}{cc} D_{11}f(x,y) & D_{12}f(x,y) \\ D_{21}f(x,y) & D_{22}f(x,y) \end{array}\right)_{(x,y)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})} = \left(\begin{array}{cc} -\operatorname{sen}(x) - \sin(x+y) & D_{12}f(x,y) = -\operatorname{sen}(x+y) \\ -\operatorname{sen}(x+y) & -\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(x+y) \end{array}\right. \\
&= \left(\begin{array}{cc} -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) - \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3}) & -\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3}) \\ -\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3}) & -\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3}) - \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{3}) \end{array}\right)
\end{aligned}$$

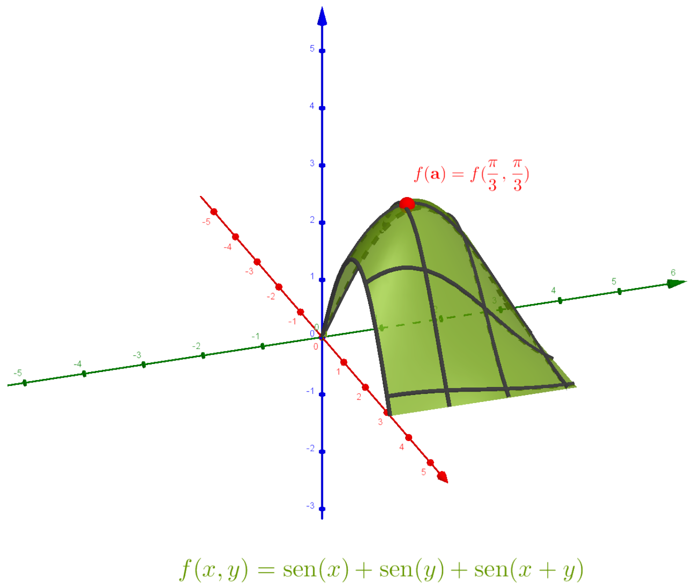


Figure 1: Ejercicio 4.(i)

Luego $\nabla^2 f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ y por el criterio de los determinantes (Teorema 15.2) se puede ver que $\Delta_1 = -\sqrt{3} < 0$, $\Delta_2 = \frac{9}{4} > 0$ y por tanto la matriz es definida negativa. Por tanto el punto **a** es un máximo local, tal como se puede apreciar en la Figura 1.

(ii) Graficamente, véase Figura 2, se puede ver que el conjunto se puede expresar como un conjunto de tipo II

$$\mathbf{A} = \{(x, y) : 0 < y < 1, \ \ -y < x < y\}.$$

Luego teniendo en cuenta esta representación y aplicando integración reiterada, tenemos que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbf{A}} (x+y)^2 dxdy = I = \int_0^1 \int_{-y}^{y} (x+y)^2 dxdy = \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^3}{3}\right]_{x=-y}^{x=y} dy \\ &= \int_0^1 \frac{(y+y)^3}{3} dy - \int_0^1 \frac{(-y+y)^3}{3} dy = \int_0^1 \frac{(y+y)^3}{3} dy - \int_0^1 0 dy \\ &= \int_0^1 \frac{(2y)^3}{3} dy = \frac{8}{3} \int_0^1 y^3 dy = \frac{8}{3} \left[\frac{y^4}{4}\right]_{y=0}^{y=1} = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4} - 0\right) \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

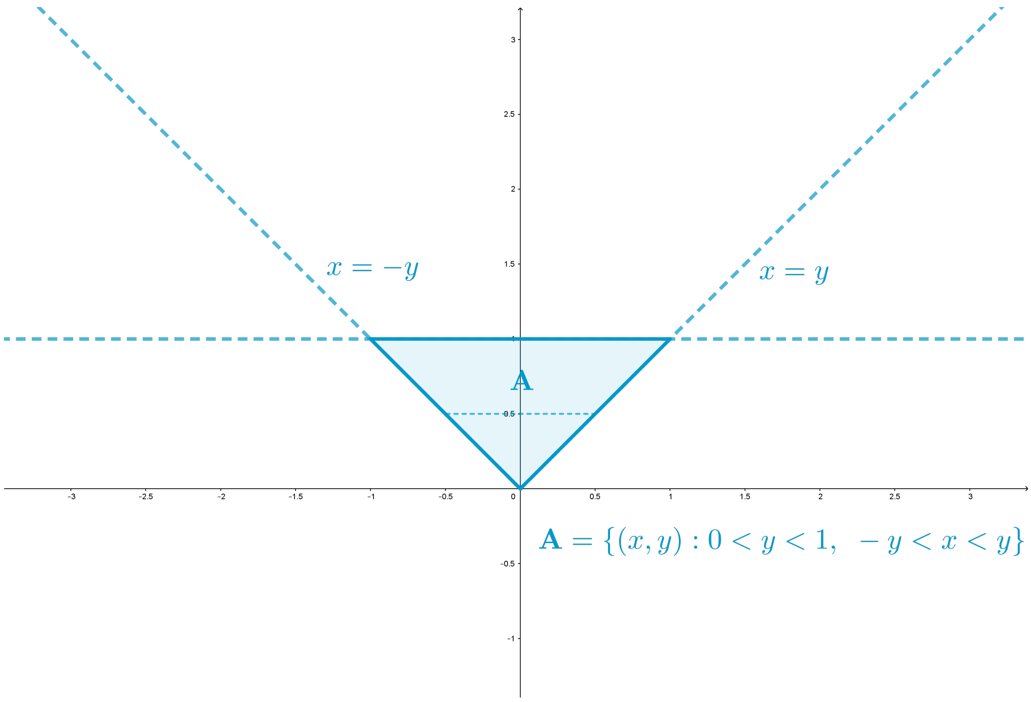


Figure 2: Ejercicio 4.(ii)

Febrero 2022. Modelo B
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Una **copia de las Unidades Didácticas de la Asignatura**, tanto la versión editada en el libro "*Curso de introducción al Álgebra y al Cálculo Diferencial e Integral en* $\mathbb{R}^n$" por la Editorial UNED como una copia impresa del fichero proporcionado por el Equipo Docente en el curso virtual. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario. Ningún otro tipo de material estará permitido.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. Sean $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^4$ la matriz y vector dados por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivamente. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Resuelva el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ aplicando eliminación de Gauss. (1.25 pto)

(ii) Calcule red(A), matriz escalonada reducida de A. Exprese la matriz de paso P, que verifica

$$PA = \text{red}(A),$$

como producto de matrices elementales. (1.25 pto)

2. Sea $\mathcal{M}_2$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas de orden 2 y consideramos las siguientes bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathbf{B} &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Consideramos asimismo la aplicación lineal $F : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ definida por

$$F\left[\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & t \\ x & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcule razonadamente las coordenadas de la matriz

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

con respecto de **A** y **B**. (1.25 ptos)

(ii) Calcule razonadamente las coordenadas $F(\mathbf{c})_{\mathbf{A}}$, $F(\mathbf{c})_{\mathbf{B}}$ de la imagen $F(\mathbf{c})$ con respecto de las bases **A**, **B**. (1.25 ptos)

3. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Calcule de manera razonada el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x \ln x}.$$

(1 pto)

(ii) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_0^{2+x^3} (1 + (1-s)^7) ds.$$

Calcule de manera razonada su polinomio de Taylor de order 2 en el punto $x = 1$. (1 pto)

4. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Calcule el polinomio de Taylor de order 2 de la funcion

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + (x-y)^3}$$

en el punto $(x, y) = (1, 3)$. (1 pto)

(ii) Sea $\mathbf{T}$ el triángulo de vértices

$$A = (1, 0),\ B = (2, 1),\ C = (3, 0)$$

– Expres $\mathbf{T}$ como unión finita de conjuntos de tipo II. (0.5 ptos)
– Calcule la integral

$$I = \int_{\mathbf{T}} xydxdy$$

(0.5 ptos)

FMI. FEBRERO 2022 . SOLUCIONES Modelo **A**.

Ejercicio 1

(i-ii) Aplicamos eliminación de Gauss

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\underset{F_2\to F_2-F_1}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)
\underset{F_4\to F_4-2F_1}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_2\leftrightarrow F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)
\underset{F_1\to F_1-F_2}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_3\to \frac{1}{2}F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)
\underset{F_4\to F_4-2F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

$$
\underset{F_2\to F_2+2F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
\underset{F_1\to F_1-F_3}{\approx}
\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

De aquí directamente obtenemos la matriz escalonada reducida

$$
\mathrm{red(A)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

además teniendo en cuentas las operaciones elementales realizadas y su orden, la matriz de paso se factoriza de la siguiente manera

$$
P = F_{13}(-1)F_{23}(2)F_{43}(-2)F_3(\frac{1}{2})F_{12}(-1)F_{23}F_{41}(-2)F_{21}(-1)
$$

De la matriz resultante

$$
\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

obtenemos el sistema lineal asociado: Encontrar $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_{3,}x_4)$ tal que

$$
\begin{array}{rcl} \mathbf{1}x_1 - \frac{3}{2}x_4 & = & \frac{3}{2} \\ \mathbf{1}x_2 + 2x_4 & = & -1 \\ \mathbf{1}x_3 + \frac{1}{2}x_4 & = & \frac{1}{2} \end{array}
$$

Es un sistema con tres pivotes y la cuarta variable queda como parámetro, $\lambda = x_4$, con lo que despejando del sistema obtenemos directamente el conjunto solución

$$
\{(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left\{ \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\lambda, -1-2\lambda, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda, \lambda \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}
$$

Ejercicio 2

(i) Directamente, por ser la base $\mathbf{A}$ de estructura sencilla, se puede ver que

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 + 0\mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_1 \\
&= 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{a}_3 + 2\mathbf{a}_4
\end{aligned}$$

Luego las coordenadas vienen dadas por $\mathbf{c}_{\mathbf{A}} = (1, 0, \frac{1}{2}, 2)$. Por otro lado, directamente la coordenadas $\mathbf{c}_B = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, verifican

$$\begin{aligned}
x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3 + x_4\mathbf{b}_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow\ x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow\ \begin{pmatrix} x_2 + x_4 & x_1 \\ x_1 - 2x_3 & x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Y de aquí $x_1 = 0$, $x_3 = -1$, $x_2 + x_4 = 1$, $x_2 + 2x_4 = -1$, luego $x_4 = -2$, $x_2 = 3$. Por tanto $\mathbf{c}_{\mathbf{B}} = (0, 3, -1, -2)$.

(ii) Como

$$F(\mathbf{c}) = F\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

basta seguir el mismo razonamiento para la matriz $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En este caso

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

luego $F(\mathbf{c})_{\mathbf{A}} = (0, -1, 0, 1)$. Y del mismo modo

$$x_1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 + x_4 & x_1 \\ x_1 - 2x_3 & x_2 + 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y de aquí $x_2 = x_4 = 0$, $x_1 = x_3 = -1$. Luego $F(\mathbf{c})_{\mathbf{B}} = (-1, 0, -1, 0)$.

Ejercicio 3

(i) Es una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ que se puede resolver aplicando la regla de L'Hopital (Teorema 10.5 unidades didácticas). Así aplicando dicha regla de manera reiterada

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x \ln x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x \ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x \ln x + \frac{e^x}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)'}{\left(e^x \ln x + \frac{e^x}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x \ln x + 2\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} 2}{\lim_{x\to\infty} e^x \ln x + 2\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0,
\end{aligned}$$

en donde el límite del denominador se puede resolver aplicando asimismo L'Hopital. Así $\lim_{x\to\infty} e^x \ln x = \infty$ directamente y aplicando L'Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty,$$

y del mismo, de hecho como consecuencia,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x^2)'} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty,$$

lo que prueba que $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \ln x + 2\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2} = \infty$.

(ii) El polinomio de Taylor viene dado por

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

En primer lugar integrando directamente tenemos que

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^3 (1 + (1-s)^7)ds = 3 + \left[-\frac{(1-s)^8}{8} \right]_{s=0}^{s=3} = 3 - \frac{(1-3)^8}{8} + \frac{(1-0)^8}{8} \\ &= -\frac{231}{8} \end{aligned}$$

Para calcular la derivada primera, aplicamos el primer teorema fundamental del cálculo (Teorema 16.1 Unidades Didácticas). En primer lugar expresamos f como la composición de dos funciones,

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

en donde $h(x) = 2 + x^3$, $g(x) = \int_0^x (1 + (1-s)^7)ds$. Así, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x).$$

Por el primer teorema fundamental tenemos que $g'(x) = 1 + (1-x)^7$, mientras que $h'(x) = 3x^2$. Por tanto

$$f'(x) = g'(2 + x^3) = (1 + (1 - (2 + x^3))^7)3x^2 = (1 + (-1 - x^3)^7)3x^2.$$

Luego

$$f'(1) = (1 + (-1 - 1^3)^7)3 \cdot 1^2 = -381.$$

La segunda derivada se calcula derivando directamente a partir de la primera,

$$f''(x) = 7 \cdot (-3x^2)(-1 - x^3)^6 3x^2 + (1 + (-1 - x^3)^7)6x.$$

Y por tanto $f''(1) = 7 \cdot (-3 \cdot 1^2)(-1 - 1^3)^6 3 \cdot 1^2 + (1 + (-1 - 1^3)^7)6 \cdot 1 = -4794$. Finalmente, sustituyendo los valores en la fórmula del polinomio se tiene que

$$p_2(x) = -\frac{231}{8} - 381(x-1) - \frac{4794}{2}(x-1)^2.$$

Ejercicio 4

(i) El polinomio de Taylor de orden 2 en $(1,3)$ de la función f viene dado por

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(1,0) + \frac{1}{1!} \begin{pmatrix} D_1 f(1,3) & D_2 f(1,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} x-1 & y-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11} f(1,3) & D_{12} f(1,3) \\ D_{21} f(1,0) & D_{22} f(1,3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-3 \end{pmatrix} \\ &= f(1,3) + D_1 f(1,3)(x-1) + D_2 f(1,3)(y-3) + \frac{1}{2} D_{11} f(1,3)(x-1)^2 + D_{12} f(1,3)(x-1)(y-3) + \frac{1}{2} D_{22} f(1,3)(y-3)^2. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas y particularizamos para el punto $(1,3)$

$$f(1,3) = \left.\frac{1}{1+(x-y)^3}\right|_{(x,y)=(1,3)} = \frac{1}{1+(1-3)^3} = -\frac{1}{7}$$

$$D_1 f(1,3) = \left.\frac{-3(x-y)^2}{(1+(x-y)^3)^2}\right|_{(x,y)=(1,3)} = \frac{-3(1-3)^2}{(1+(1-3)^3)^2} = -\frac{12}{49}$$

$$D_2 f(1,3) = \left.\frac{3(x-y)^2}{(1+(x-y)^3)^2}\right|_{(x,y)=(1,3)} = \frac{3(1-3)^2}{(1+(1-3)^3)^2} = \frac{12}{49}$$

$$D_{11} f(1,3) = -\left.\frac{6(x-y)\big(1+(x-y)^3\big)^2 - 2\big(1+(x-y)^3\big)3(x-y)^2 3(x-y)^2}{(1+(x-y)^3)^4}\right|_{(x,y)=(1,3)}$$

$$= -\frac{6(1-3)\big(1+(1-3)^3\big)^2 - 2\big(1+(1-3)^3\big)3(1-3)^2 3(1-3)^2}{(1+(1-3)^3)^4} = -\frac{204}{343}$$

$$D_{12} f(1,3) = -\left.\frac{-6(x-y)\big(1+(x-y)^3\big)^2 + 2\big(1+(x-y)^3\big)3(x-y)^2 3(x-y)^2}{(1+(x-y)^3)^4}\right|_{(x,y)=(1,3)}$$

$$= \frac{6(1-3)\big(1+(1-3)^3\big)^2 - 2\big(1+(1-3)^3\big)3(1-3)^2 3(1-3)^2}{(1+(1-3)^3)^4} = \frac{204}{343}$$

$$D_{22} f(1,3) = \left.\frac{-6(x-y)\big(1+(x-y)^3\big)^2 + 2\big(1+(x-y)^3\big)3(x-y)^2 3(x-y)^2}{(1+(x-y)^3)^4}\right|_{(x,y)=(1,3)}$$

$$= \frac{-6(1-3)\big(1+(1-3)^3\big)^2 + 2\big(1+(1-3)^3\big)3(1-3)^2 3(1-3)^2}{(1+(1-3)^3)^4} = -\frac{204}{343}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos el valor del polinomio

$$P_2(x,y) = -\frac{1}{7} - \frac{12}{49}(x-1) + \frac{12}{49}(y-3) + \frac{1}{2}\left(-\frac{204}{343}\right)(x-1)^2 + \frac{204}{343}(x-1)(y-3) + \frac{1}{2}\left(-\frac{204}{343}\right)(y-3)^2.$$

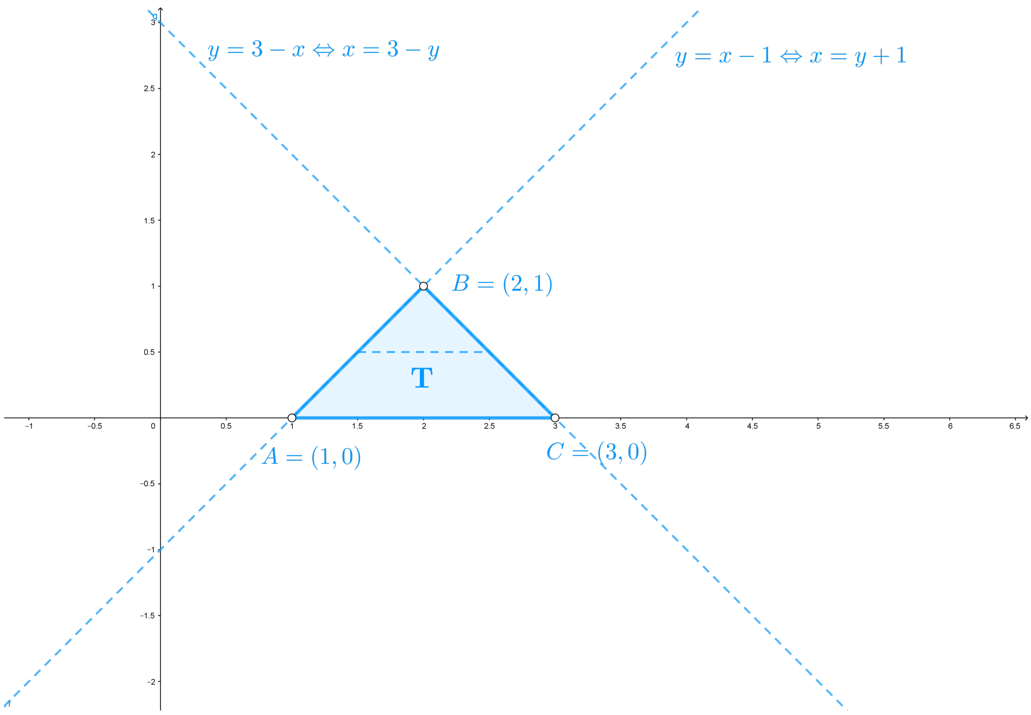


Figure 1: Ejercicio 4.(ii)

(ii) Gráficamente, véase Figura 1, la figura admite la siguiente representación de tipo II

$$\mathbf{T} = \{(x,y):\ y+1 \le x \le 3-y,\ 0 \le y \le 1\}$$

Teniendo en cuenta esta representación calculamos la integral aplicando integración reiterada

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{T}} xydxdy &= \int_0^1 \int_{y+1}^{3-y} xydxdy = \int_0^1 y \left(\int_{y+1}^{3-y} xdx \right) dy \\
&= \int_0^1 y \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=y+1}^{x=3-y} dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \left((3-y)^2 - (y+1)^2 \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 y(9 + y^2 - 6y - y^2 - 1 - 2y)dy \\
&= \int_0^1 (4y - 4y^2)dy = 4 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} - 4 \left[\frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= 4 \cdot \frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Septiembre 2022. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Una **copia de las Unidades Didácticas de la Asignatura**, tanto la versión editada en el libro "*Curso de introducción al Álgebra y al Cálculo Diferencial e Integral en* $\mathbb{R}^n$" por la Editorial UNED como una copia impresa del fichero proporcionado por el Equipo Docente en el curso virtual. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario. Ningún otro tipo de material estará permitido.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Calcule su matriz escalonada reducida $\mathrm{red}(A)$. (1 punto)

(ii) Calcule la matriz de paso P tal que

$$PA = \mathrm{red}(A),$$

y exprésela como producto de matrices elementales. (1.5 puntos)

2. En este ejercicio se pide lo siguiente:

   (i) Dado el subespacio vectorial

   $$\mathbb{W} = G[(1,0,0,1),(0,-1,0,1)]$$

   calcule unas ecuaciones parámetricas e implícitas. (1 punto)

   (ii) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal

   $$F(x,y,z) = (x-y, y-z, z)$$

   Calcule la matriz $M(F, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ asociada a las bases

   $$\mathbf{A} = \{(1,2,0),(0,0,2),(0,-1,0)\},\ \mathbf{B} = \{(0,-1,0),(3,0,0),(0,0,2)\}$$

   (1 punto)

3. Sea la función

   $$f(x) = \frac{1}{1+\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

   (i) Determine los subintervalos de crecimiento/decrecimiento, así como los extremos absolutos y locales de la función f en el intervalo $[0, 2\pi]$. (1 punto)

   (ii) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $x = \pi$. (1 punto)

4. Sea la función

   $$f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2-y)^2 + \frac{1}{2}(1-y)^2$$

   (i) Determine los extremos absolutos y locales de f. (1.5 puntos)

   (ii) Calcule la integral

   $$\int_{\mathbf{T}} f(x,y)\,dxdy$$

   en donde $\mathbf{T}$ es el triángulo formado por los puntos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$. (1 punto)

Ejercicio 1

(i-ii) Aplicando eliminación de Gauss podemos resolver las dos partes del ejercicio al mismo tiempo. Así, si a la matriz A le adjuntamos la matriz identidad a la izquierda y hacemos operaciones elementales de manera que obtengamos las matriz escalonada reducida a la derecha,

$$(I|\,A) \to (P|\,\mathrm{red}(A))\,,$$

se tiene que la matriz transformada en la parte izquierda coincide con la matriz de paso. En este caso, haciendo operaciones elementales

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right) \underset{F_2\to F_2-4F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 5 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-7F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \\ -7 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1\to F_1+F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{-1} \\ -7 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{F_2\to -F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ -7 & 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3\to F_3+2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La matriz escalonada reducida viene dada por

$$\mathrm{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y su matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Recogiendo las operaciones elementales según el orden en la que hemos realizado las operaciones, se obtiene la descomposición pedida

$$P = F_{32}(2)F_2(-1)F_{12}(1)F_{31}(-7)F_{21}(-4).$$

Ejercicio 2

(i) En este apartado seguimos la Sección 1.4.3 de las unidades didácticas. Como los vectores

$$(1,0,0,1), (0,-1,0,1)$$

son linealmente independientes, entonces forman una base de $\mathbb{W}$ y por tanto su dimesión es 2. Luego para todo $(x,y,z,t) \in \mathbb{W}$ existen $\lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = \lambda_1(1,0,0,1) + \lambda_2(0,-1,0,1) = (\lambda_1, -\lambda_2, 0, \lambda_1+\lambda_2)$$

con lo que igualando componentes obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x_1 = \lambda_1,\ x_2 = -\lambda_2,\ x_3 = 0,\ x_4 = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{1}$$

$\mathbb{W}$ es una espacio de dimensión 2 en $\mathbb{R}^4$, luego existen $m = 4 - 2 = 2$ ecuaciones paramétricas a calcular eliminando los parámetros en (1). Así directamente $x_3 = 0$ es la primera ecuación, mientras que manipulando las otras tres, obtenemos que

$$x_1 - x_2 - x_4 = \lambda_1 - (-\lambda_2) - (\lambda_1 + \lambda_2) = 0.$$

Luego unas ecuaciones paramétricas vienen dadas por

$$x_3 = 0,\ x_1 - x_2 - x_4 = 0.$$

(ii) Tenemos que

$$F(x, y, z) = (x - y, y - z, z)$$

y las bases

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{(1, 2, 0), (0, 0, 2), (0, -1, 0)\}, \\ \mathbf{B} &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \{(0, -1, 0), (3, 0, 0), (0, 0, 2)\}. \end{aligned}$$

La matriz $M(F, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes $\{F(\mathbf{a}_1), F(\mathbf{a}_2), F(\mathbf{a}_3)\}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$, véase Sección 5.2 unidades didácticas. Así

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}_1) &= F(1, 2, 0) = (-1, 2, 0) = -2(0, -1, 0) - \tfrac{1}{3}(3, 0, 0) + 0(0, 0, 2) = 2\mathbf{b}_1 - \tfrac{1}{3}\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3, \\ F(\mathbf{a}_2) &= F(0, 0, 2) = (0, -2, 2) = 2(0, -1, 0) + 0(3, 0, 0) + 1(0, 0, 2) = 2\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2 + 1\mathbf{b}_3, \\ F(\mathbf{a}_3) &= F(0, -1, 0) = (1, -1, 0) = 1(0, -1, 0) + \tfrac{1}{3}(3, 0, 0) + 0(0, 0, 2) = 1\mathbf{b}_1 + \tfrac{1}{3}\mathbf{b}_2 + 0\mathbf{b}_3. \end{aligned}$$

Luego

$$M(F, \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3

(i) Partimos de la función

$$f(x) = \frac{1}{1 + \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

La derivada primera viene dada por

$$f'(x) = \frac{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\left(1 + \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{2\left(1 + \cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2}$$

Como el denominador es positivo, el signo de f' es equivalente al signo del numerador y por tanto de la función $\operatorname{sen}(x)$. Así

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi],\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen}(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi, 2\pi].$$

Luego f' es positiva en $[0, \pi]$ y negativa en $[\pi, 2\pi]$, con lo que la función crece en $[0, \pi]$ y decrece en $[\pi, 2\pi]$. Luego necesariamente en $x_1 = \pi$ hay un máximo global, y como los valores en los extremos , $f(0) = f(2\pi) = \frac{1}{2}$, entonces $x_2 = 0$, $x_3 = 2\pi$ son ambos mínimo globales de f.

(ii) Por definición

$$p_2(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2}(x-\pi)^2 \tag{2}$$

Se tiene que

$$f(\pi) = \frac{1}{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1, f'(\pi) = \frac{\operatorname{sen}(\pi)}{2\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2} = 0$$

La derivada segunda viene dada por

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\cos(x)\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 + 2\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\frac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}(x)}{2\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^4} \\ &= \frac{\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos(x) + \operatorname{sen}^2(x)}{2\left(1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^3} \end{aligned}$$

Con lo que $f''(\pi) = \frac{\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\cos(\pi)+\operatorname{sen}^2(\pi)}{2\left(1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^3} = -\frac{1}{2}$. Sustituyendo dichos valores en la expresión (2) , se tiene finalmente que

$$p_2(x) = 1 + 0(x-\pi) - \frac{1}{4}(x-\pi)^2 = 1 - \frac{1}{4}(x-\pi)^2.$$

En la Figura 1 puede verse una representación gráfica del ejercicio.

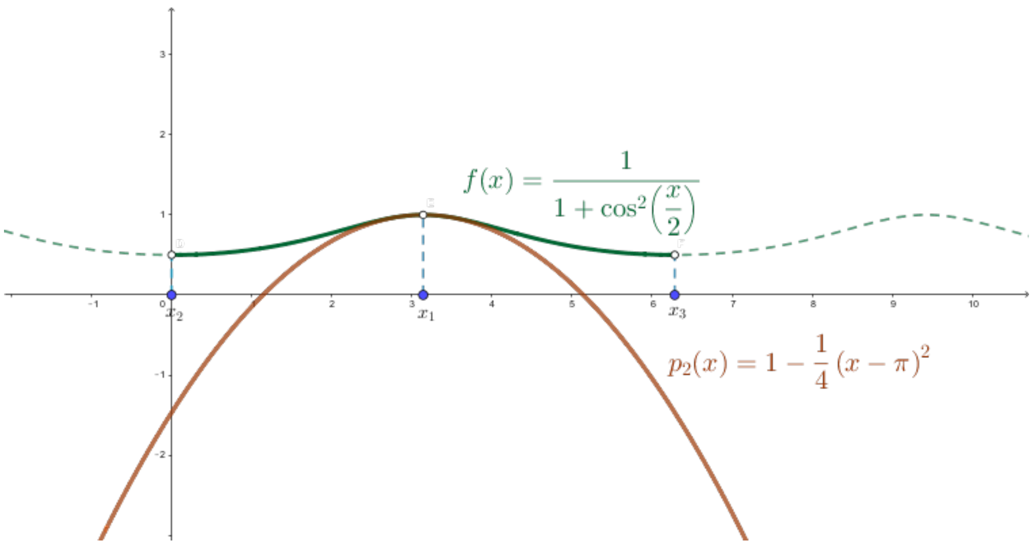


Figure 1: Ejercicio 3

Ejercicio 4

(i) Calculando el gradiente e igualando a cero,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x\left(y-x^2\right) & -x^2+2y-1 \end{pmatrix} = (0,0).$$

obtenemos el sistema de puntos críticos

$$\begin{aligned} -2x\left(y-x^2\right) &= 0, \\ -x^2+2y-1 &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación, tenemos dos posibilidades:

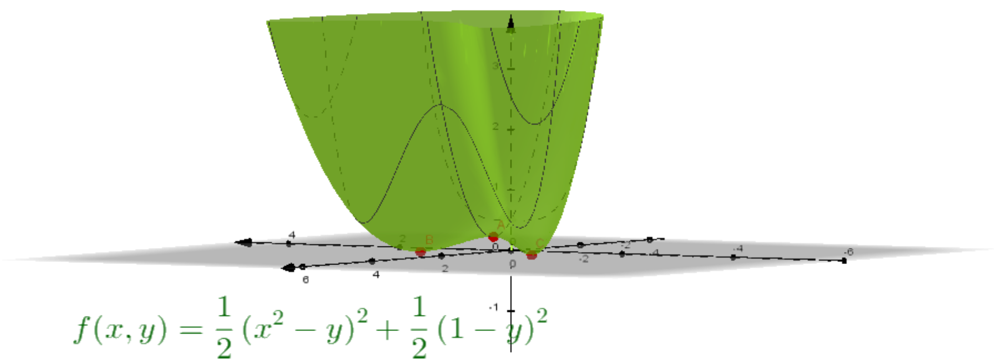


Figure 2: Ejercicio 4.(i)

- Si $x = 0$, de la segunda ecuación $y = \frac{1}{2}$ y obtenemos el punto crítico $\mathbf{a}_1 = (0, \frac{1}{2})$.
- Si $y = x^2$, de la segunda ecuación $y = 1$ y obtenemos los punto críticos $\mathbf{a}_2 = (1,1)$, $\mathbf{a}_3 = (-1,1)$.

Claramente los dos puntos $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ son mínimos globables, ya que anulan la función objetivo que es positiva

$$f(\mathbf{a}_2) = f(\mathbf{a}_3) = 0.$$

El punto restante $\mathbf{a}_1$ es un punto de silla, ya que el Hessiano

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}_1) = \begin{pmatrix} -2\,(y - x^2) & -2x \\ -2x & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

es indefinido aplicando el criterio de los determinantes. Véase Figura 2 para una representación gráfica de la función y sus puntos críticos.

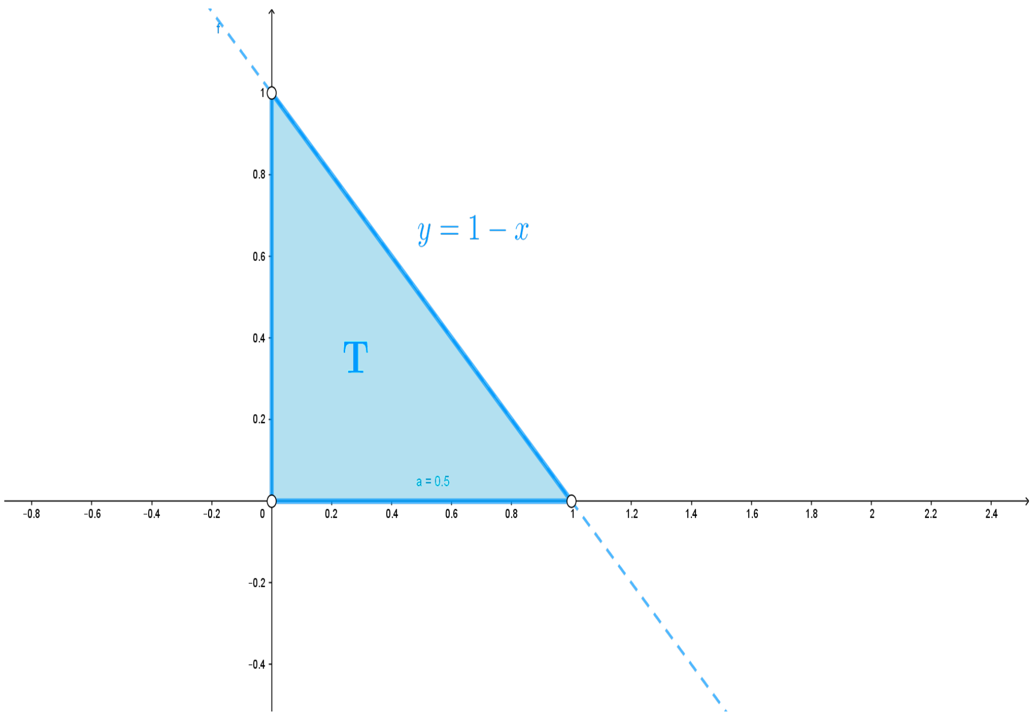


Figure 3: Ejercicio 4.(ii)

(ii) Gráficamente, véase Figura 3, la figura admite la siguiente representación de tipo I

$$\mathbf{T} = \{(x,y): \ 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq 1-x\}$$

Luego

$$\int_{\mathbf{T}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(x^2-y)^2 dydx + \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1-y)^2 dydx = I_1 + I_2.$$

Calculamos cada integral por separado. Así

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(x^2-y)^2 dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} x^4 dydx + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{1-x} y^2 dydx - \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y dydx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x^4(1-x)dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3}dx - \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{30} + \frac{1}{2}\frac{1}{12} - \frac{1}{60} \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1-y)^2 dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[-\frac{(1-y)^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx \\
&= -\frac{1}{6}\int_0^1 x^3 dx + \frac{1}{6}\int_0^1 1 dy \\
&= -\frac{1}{24} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\int_{\mathbf{T}} f(x,y)dxdy = I_1 + I_2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6}.$$

Febrero 2023. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros,etc), en particular las Unidades Didácticas. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario. Ningún otro tipo de material estará permitido.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Calcule su matriz escalonada reducida $\mathrm{red}(A)$. (0.5 puntos)

(ii) Exprese la matriz de paso P,

$$PA = \mathrm{red}(A),$$

como un producto de matrices elementales. (1.25 puntos)

(iii) Estudie si la matriz P tiene inversa y en caso afirmativo calcule P^{-1}. (1.25 puntos)

2. Encuentre los subespacios propios asociados a los autovalores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y estudie si la matriz es diagonalizable. En caso afirmativo encuentre la matriz diagonal y base a la que está referida. (2 puntos)

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \int_1^{2x} \ln(s)ds.$$

(i) Calcule el valor $f(1)$. (1 punto)

(ii) Cacule el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $x = 1$. (1 punto)

4. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Sea

$$F(x, y) = e^{7x-2y}.$$

Calcule la derivada parcial $D_{12121}F(1, -1)$. (1 punto)

(ii) Calcule la integral

$$I = \int_{\mathbf{M}} (x^2 + y^2)dxdy,$$

en donde $\mathbf{M}$ es el círculo de centro $(1, 0)$ y radio 1. (1 punto)

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1

(i-ii) Resolvemos el ejercicio mediante operaciones elementales. si adjuntamos a la matriz A una matriz identidad de tamaño adecuado, en este caso de orden 4, y hacemos operaciones elementales podemos obtener la matriz escalonada reducida y la matriz de paso al mismo tiempo,

$$(A|I) \to (\mathrm{red}(A)|P)$$

De este modo, aplicando operaciones elementales

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \longleftrightarrow F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cccc} \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_4 \to F_4 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto la matriz escalonada reducida viene dada por

$$\mathrm{red}(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y la matriz de paso[1] determinada por la tabla se corresponde con

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Recogiendo las operaciones elementales realizadas en la tabla, obtenemos una posible descomposición en matrices elementales,

$$P = F_{32}(-1)F_{12}(-1)F_{41}(-1)F_{13}.$$

(iii) Por construcción toda matriz de paso tiene inversa al ser producto de matrices (elementales) regulares. Podemos calcular su inversa directamente, o alternativamente, siguiendo lo hecho en la solución del ejercicio 1.(ii) de la PEC del curso pasado, utilzar la descomposición

$$P^{-1} = (F_{32}(-1)F_{12}(-1)F_{41}(-1)F_{13})^{-1} = F_{13}^{-1}F_{41}(-1)^{-1}F_{12}(-1)^{-1}F_{32}(-1)^{-1} = F_{13}F_{41}(1)F_{12}(1)F_{32}(1)$$

de manera que

$$\begin{aligned} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

[1]En general, al contrario del caso de la matriz escalonada reducida, no existe una única matriz de paso dependiendo de la operaciones realizadas

en donde hemos aplicado que

$$F_{ij}^{-1} = F_{ij},$$
$$F_{ij}(\lambda)^{-1} = F_{ij}(\tfrac{1}{\lambda}),$$
$$(C_1C_2C_3C_4)^{-1} = C_4^{-1}C_3^{-1}C_2^{-1}C_1^{-1}$$

en donde $C_i \in \mathcal{M}_4$ matrices regulares.

EJERCICIO 2

Sea

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico

$$p(\lambda) = |B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda)(1-\lambda)\,(-\lambda) = 0,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ con multiplicidad triple y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad simple. Por definición

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1 &= \operatorname{Ker}(B - I) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y-x-t \\ y-x-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \{(x,y,z,t) : y - x - t = 0\} \\
&= \left\{(x, x+t, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x, z, t \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \{x(1,1,0,0) + t(0,1,0,1) + z(0,0,1,0) : x, t, z \in \mathbb{R}\} \\
&= G[\{(1,1,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0)\}]
\end{aligned}$$

Luego $\{(1,1,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)$ es una base de $\mathbb{E}_1$, que tiene dimensión 3, y coinciden por tanto la multiplicidad geométrica y algebraica. De igual manera,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_2 &= \operatorname{Ker}(B - 0I) = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ y-x-t+z \\ y-x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x = 0,\ y = 0,\ \ z = t\right\} \\
&= \{(0,0,t,t) = t(0,0,1,1) : t \in \mathbb{R}\} \\
&= G[\{(0,0,1,1)\}]
\end{aligned}$$

y por tanto $\{0,0,1,1\}$ es una base de $\mathbb{E}_2$ que tiene multiplicidad geométrica 1, necesariamente igual a su multiplicidad algebraica. Podemos concluir que la matriz es diagonalizable por coincidir en ambos casos las multiplicidades geométricas y algebraicas, véase Teorema 7.1. Una base de autovectores viene dada por

$$\{\{(1,1,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,1,1)\}\},$$

que siguiendo el orden de autovectores estaría asociada a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3

Sea

$$f(1) = \int_1^{2x} \ln(s) ds.$$

(i) Directamente

$$f(1) = \int_1^{2} \ln(s) ds$$

La integral se puede resolver por integración por partes,

$$\int_a^b v'(s)u(s)ds = v(b)u(b) - v(a)u(a) - \int_a^b v(s)u'(s)ds$$

véase Ejemplo 16.14. Tomando $u(s) = \ln(s)$, $v'(s) = 1$, con lo que $u'(s) = \dfrac{1}{s}$, $v(s) = s$, y aplicando la fórmula en este caso

$$\int_1^2 1 \cdot \ln(s)ds = 2\ln(2) - 1\ln(1) - \int_1^2 s\frac{1}{s}ds = 2\ln(2) - 0 - 1 = 2\ln 2 - 1.$$

(ii) Por definición el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $x = 1$ viene dado por

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Para calcular la derivadas podemos expresar f como la composición de dos funciones

$$f(x) = g \circ h$$

en donde $g(y) = \int_1^y \ln(s)ds$, $h(x) = 2x$. Por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, véase Teorema 16.1,

$$g'(y) = \ln y.$$

Por otro lado $h'(x) = 2$, aplicando la regla de la cadena

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = g'(2x)2 = 2\ln 2x \Rightarrow f'(1) = 2\ln 2.$$

La segunda derivada se calcula derivando la primera, $f''(x) = f'(x)' = (2\ln 2x)' = 2\frac{2}{2x} = \frac{2}{x}$, por lo que

$$f''(1) = \frac{2}{1} = 2.$$

Finalmente el polinomio de Taylor viene dado por

$$p_2(x) = 2\ln 2 - 1 + 2\ln 2(x-1) + (x-1)^2.$$

EJERCICIO 4

(i) Derivamos reiteradamente,

$$\begin{aligned} D_{12121}F(x,y) &= D_{12121}\left[e^{7x-2y}\right] = D_{1212}\left[7(e^{7x-2y})\right] = D_{121}\left[7(-2)(e^{7x-2y})\right] = D_{12}\left[7^2(-2)(e^{7x-2y})\right] \\ &= D_1\left[7^2(-2)^2(e^{7x-2y})\right] = 7^3(-2)^2(e^{7x-2y}). \end{aligned}$$

Por tanto $D_{12121}F(x,y) = 7^2(-2)^3(e^{7x-2y})$, y directamente

$$D_{12121}F(1,-1) = 7^3(-2)^2(e^{7\cdot 1-2\cdot(-1)}) = 1372e^9.$$

(ii) Utilizamos el cambio

$$x = 1 + r\cos\theta,\; y = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

que se corresponde con desplazar el centro del círculo $(1,0)$ al origen $(0,0)$ y después aplicar coordenadas polares. Es claro que el jacobiano del cambio $\mathbf{s}(r,\theta) = (1 + r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$ coincide con el de polares

$$\det s'(r,\theta) = r,$$

luego

$$dxdy = |\det s'(r,\theta)|drd\theta = rdrd\theta.$$

Para dicho cambio

$$\mathbf{M} = \{(r,\theta) : 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Aplicado el teorema de cambio de variables, Teorema 17.1, se tiene que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbf{M}} (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[(1+r\cos\theta)^2 + r^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta\right] rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\,\theta)rdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 2r\cos\theta rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 rdrd\theta + \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3drd\theta + \left(\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\right)\left(\int_0^1 2r^2dr\right) \\ &= 2\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=1} + 2\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_{r=0}^{r=1} + 2\pi\left[\mathrm{sen}\,\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi}\left[\frac{2r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=1} \\ &= 2(\frac{1}{2}-0) + 2\pi(\frac{1}{4}-0) + 2\pi(\mathrm{sen}\,2\pi - \mathrm{sen}\,0)\left(\frac{2}{3}-0\right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{2} + 0 \\ &= \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Febrero 2023. Modelo B
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros,etc), en particular las Unidades Didácticas. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario. Ningún otro tipo de material estará permitido.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   (i) Calcule su matriz escalonada reducida $\mathrm{red}(A)$. (1 punto)

   (ii) Exprese la matriz de paso P,

$$PA = \mathrm{red}(A),$$

   como un producto de matrices elementales. (1 punto)

   (iii) Estudie si la matriz P tiene inversa y en caso afirmativo calcule P^{-1}. (1 punto)

2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} &F\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right) = (1, 3), \\ &F\left(0, 0, 3\right) = (1, 0), \\ &F(0, 1, 1) = (-1, 1). \end{aligned}$$

(i) Calcule razonadamente el vector imagen $F(1, 2, 3)$. (1 punto)

(ii) Calcule la matriz $M(F; \mathbf{E}, \mathbf{B})$ asociada de F con respecto de las bases

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} = \{(0, -1, 0), (2, 0, 0), (0, 0, 3)\}, \\ &\mathbf{B} = \{(1, 2), (-1, 0)\}. \end{aligned}$$

Compruebe el resultado para el vector $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$. (1 punto)

3. Sea la función

$$f(x) = \cos\left(\ln x^2\right)$$

(i) Calcule el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $x = 1$. (1 punto)

(ii) Calcule los extremos locales y globales de f en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 10\right]$. (1 punto)

4. En este ejercicio se pide lo siguiente:

(i) Sea $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \|\mathbf{x}\|} \text{ para todo } \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

en donde recordemos que $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}}$ es la norma euclídea.
Calcule la derivada de G en el punto $\mathbf{x} = (2, 3)$ según el vector $\mathbf{v} = (1, -1)$. (1 punto)

(ii) Calcule la integral

$$I = \int_{\mathbf{M}} \sqrt{x + y}\, dxdy,$$

en donde $\mathbf{M}$ es el triángulo determinado por los puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$. (1 punto)

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1

(i-ii-iii) El ejercicio es similar al primer ejercicio del modelo A correspondiente a la primera semana de exámenes, lo resolvemos de la misma forma. Así haciendo operaciones elementales podemos obtener la matriz escalonada reducida y la matriz de paso al mismo tiempo,

$$(A|I) \to (\mathrm{red}(A)|P)$$

De este modo,

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \longleftrightarrow F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 - F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_2 - F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto la matriz escalonada reducida viene dada por

$$\mathrm{red}(A) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso por

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Recogiendo las operaciones elementales realizadas en la tabla obtenemos una posible descomposición en matrices elementales,

$$P = F_{13}(-1)F_{23}(-1)F_{12}(-1)F_{31}(-1)F_{12}$$

Recordemos que la matriz de paso siempre es regular. Al ser una matriz de orden 3, podemos calcular su inversa por los métodos usuales

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2

(i) De manera directa podemos calcular los escalares x, y, z verificando

$$(1,2,3) = x(\frac{1}{2},0,0) + y(0,0,3) + z(0,1,1),$$

que se corresponden con las coordenadas de $(1,2,3)$ con respecto de la base

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \left\{(\frac{1}{2},0,0),(0,0,3),(0,1,1)\right\}$$

Equivalentemente

$$(1,2,3) = (\frac{1}{2}x, z, 3y+z) \Rightarrow x = 2,\ z = 2,\ y = \frac{1}{3}.$$

Por tanto
$$(1,2,3) = 2(\frac{1}{2},0,0) + \frac{1}{3}(0,0,3) + 2(0,1,1)$$
y por linealidad, y la propia definición de F, tenemos que

$$\begin{aligned} F(1,2,3) &= 2F(\frac{1}{2},0,0) + \frac{1}{3}F(0,0,3) + 2F(0,1,1) \\ &= 2(1,3) + \frac{1}{3}(1,0) + 2(-1,1) \\ &= (\frac{1}{3},8). \end{aligned}$$

(ii) Por definición, véase Definición 5.1, la matriz $M(F;\mathbf{E},\mathbf{B})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes
$$\{F(0,-1,0), F(2,0,0)), F(0,0,3)\}$$
con respecto de la base $\mathbf{B}$. Para el primer caso, siguiendo lo hecho anteriormente se tiene que

$$(0,-1,0) = -1(0,1,1) + \frac{1}{3}(0,0,3),$$

y por tanto

$$F(0,-1,0) = -F(0,1,1) + \frac{1}{3}F(0,0,3) = -(-1,1) + \frac{1}{3}(1,0) = (\frac{4}{3},-1).$$

De igual modo
$$\begin{aligned} &F(2,0,0) = 4F\left(\frac{1}{2},0,0\right) = 4(1,3) = (4,12), \\ &F\,(0,0,3) = (1,0). \end{aligned}$$
Esto prueba que
$$M(F,\mathbf{E},\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 4 & 1 \\ -1 & 12 & 0 \end{pmatrix},$$
en donde $\mathbf{E}_2 = \{(1,0),(0,1)\}$ base canónica de $\mathbb{R}^2$. Aplicando la fórmula de cambio de base, véase Proposición 5.1,
$$M(F;\mathbf{E},\mathbf{B}) = M_{\mathbf{E}_2\to\mathbf{B}}M(F,\mathbf{E},\mathbf{E}_2).$$

Por otro lado, véase Proposición 3.5, tenemos que

$$M_{\mathbf{E}_2\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Luego

$$M(F;\mathbf{E},\mathbf{B}) = M_{\mathbf{E}_2\to\mathbf{B}}M(F;\mathbf{E},\mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 4 & 1 \\ -1 & 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

En el caso del vector $\mathbf{x} = (1,2,3) = (-2)(0,-1,0) + \frac{1}{2}(2,0,0) + 1(0,0,3)$, directamente $\mathbf{x_E} = (-2,\frac{1}{2},1)$, y se tiene que
$$F(\mathbf{x})_{\mathbf{B}} = M(F;\mathbf{E},\mathbf{B})\mathbf{x_E} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 6 & 0 \\ -\frac{11}{6} & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{11}{3} \end{pmatrix}.$$

y se puede comprobar que efectivamente

$$4(1,2) + \frac{11}{3}(-1,0) = (\frac{1}{3},8) = F(\mathbf{x}).$$

EJERCICIO 3

Sea

$$f(x) = \cos\left(\ln x^2\right).$$

(i) Por definición, el polinomio de Taylor de orden 2 de f en el punto $x = 1$, viene dado por

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Directamente

$$f(1) = \cos\ln 1^2 = \cos 0 = 1.$$

Derivando

$$f'(x) = -\sin(\ln x^2)\left(\ln x^2\right)' = -\sin(\ln x^2)\frac{2x}{x^2} = -\sin(\ln x^2)\frac{2}{x}$$

y

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\cos(\ln x^2)\frac{2}{x}\frac{2}{x} - \sin(\ln x^2)\left(\frac{-2}{x^2}\right) \\ &= \frac{2}{x^2}(\sin(\ln x^2) - 2\cos(\ln x^2)). \end{aligned}$$

Luego $f'(1) = -\sin(\ln 1^2)\frac{2}{x} = 0$, $f''(1) = \frac{2}{1^2}(\sin(\ln 1^2) - 2\cos(\ln 1^2)) = -4$. Por tanto,

$$p_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = 1 - 2(x-1)^2.$$

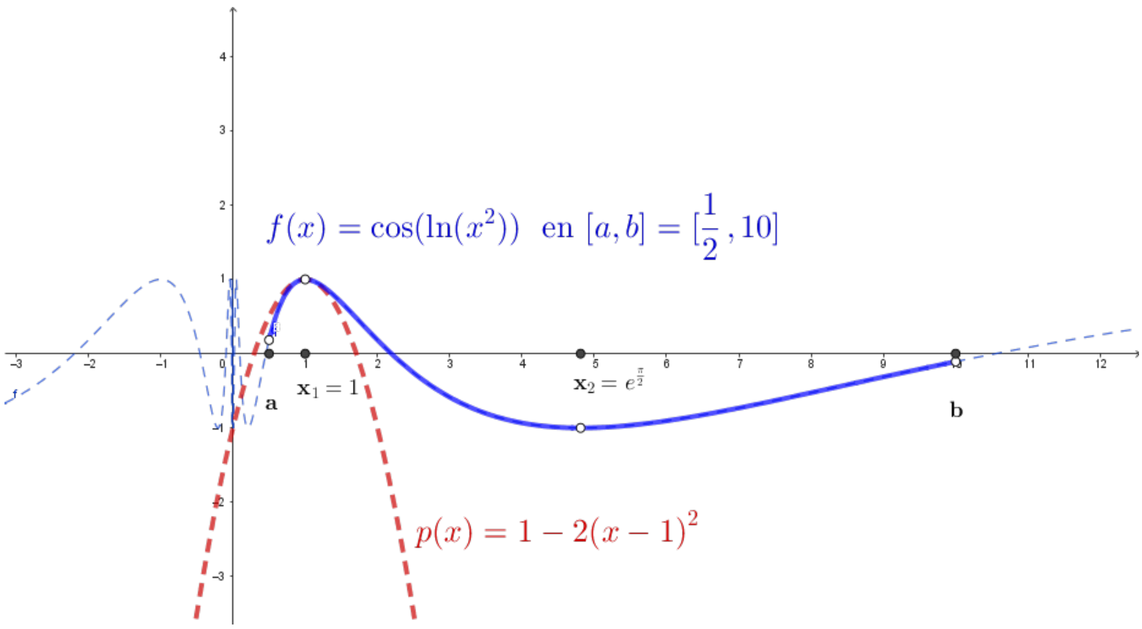


Figure 1: Ejercicio 3

(ii) En general los puntos críticos verifican

$$-\sin(\ln x^2)\frac{2}{x} = 0,\ x \in \left[\frac{1}{2}, 10\right] \Rightarrow \begin{cases} \ln x_1^2 = 0 \Rightarrow x_1^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1, \\ \ln x^2 = \pi \Rightarrow x_2 = \sqrt{e^\pi} = e^{\frac{1}{2}\pi}. \end{cases}$$

El punto crítico x_1 se corresponde con un máximo local ya que $f''(x_1) = f''(2) = -4$. Por otro lado, $x_2 = e^{\frac{1}{2}\pi}$ se corresponde con un máximo local ya que

$$\begin{aligned} f''(x_2) &= f''(e^{\frac{1}{2}\pi}.) = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi 2}}(\sin(\ln e^{\frac{1}{2}\pi 2}) - 2\cos(\ln e^{\frac{1}{2}\pi 2})) = \frac{2}{e^\pi}\sin\left(\ln\left(e^\pi\right)\right) - 2\cos\left(\ln\left(e^\pi\right)\right) \\ &= \frac{2}{e^\pi}\left(\sin\left(\pi\right) - 2\cos\left(\pi\right)\right) = 2 > 0 \end{aligned}$$

Comparando los valores con los extremos

$$\begin{aligned}
\left\{f(\frac{1}{2}), f(1), f(e^{\frac{1}{2}\pi}), f(10)\right\} &= \left\{\cos\left(\ln\frac{1}{4}\right), 1, \cos\left(\ln e^{\pi}\right), \cos\left(\ln 10^2\right)\right\} \\
&= \{0.18346, 1, -1, -0.10701\}
\end{aligned}$$

se confirma que x_1 y x_2 son máximo y mínimo globales respectivamente. En la Figura 1 puede verse una representación gráfica del ejercicio.

EJERCICIO 4

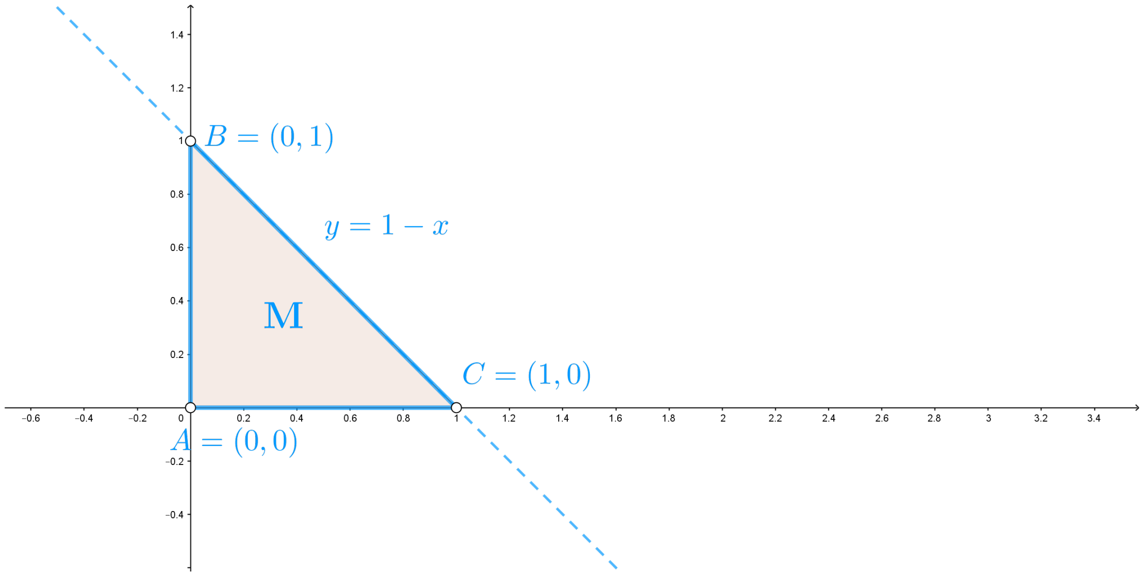


Figure 2: Ejercicio 4.(ii)

(i) La función viene dada por

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Sus derivadas parciales

$$D_i G(x_1, x_2) = \frac{-\frac{2x_i}{2\sqrt{x_1^2+x_2^2}}}{(1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2} = -\frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}(1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2})^2} \text{ para } i = 1, 2.$$

Sabemos, véase Sección 14.2.4, que la derivada de G en el punto $\mathbf{x} = (2,3)$ según el vector $\mathbf{v} = (1, -1)$ viene dada por

$$D_{(1,2)}G(2,3) = \nabla G(2,3)^T \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
D_1 G(2,3) &= -\frac{2}{\sqrt{2^2 + 3^2}(1 + \sqrt{2^2 + 3^2})^2} = -\frac{2}{\sqrt{13}\left(\sqrt{13} + 1\right)^2}, \\
D_2 G(2,3) &= -\frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2}(1 + \sqrt{2^2 + 3^2})^2} = -\frac{3}{\sqrt{13}\left(\sqrt{13} + 1\right)^2}.
\end{aligned}$$

Luego

$$D_{(1,2)}G(2,3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{13}\left(\sqrt{13}+1\right)^2} & -\frac{3}{\sqrt{13}\left(\sqrt{13}+1\right)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}\left(\sqrt{13} + 1\right)^2} = 0.013076.$$

(ii) Directamente, véase Figura 2, es fácil ver que el dominio tiene la siguiente representación

$$\mathbf{M} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1-x\}.$$

Por tanto, aplicando integración reiterada

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbf{M}} \sqrt{x+y}dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}dydx = \int_0^1 \left[\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right]_{y=0}^{y=1-x} dy \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 (x+1-x)^{\frac{3}{2}}\,dx - \frac{2}{3}\int_0^1 (x+0)^{\frac{3}{2}}\,dx \\
&= \frac{2}{3}\int_0^1 dx - \frac{2}{3}\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1}\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{2}{3} - \frac{2}{3}(\frac{2}{5} - 0) \\
&= \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

Septiembre 2023. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

`-MATERIAL PERMITIDO:`

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros,etc), en particular las Unidades Didácticas. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario. Ningún otro tipo de material estará permitido.

`-PUNTUACIÓN:`

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de **cuatro** ejercicios con diferentes apartados. La puntuación de cada apartado consta entre paréntesis.

`-DURACIÓN:` 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. Consideramos el siguiente sistema lineal: Encontrar $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ verificando

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + w = 2 \\ 2x + 3y + 4z + 5w = 0 \\ 3x + 4y + 5z + w = -1 \end{array}\right\}$$

Se pide lo siguiente:

(i) Clasifique y resuelva el sistema lineal. (1.5 puntos)

(ii) Determine la matriz del sistema, calcule su matriz escalonada reducida y exprese la matriz de paso asociada como producto de matrices elementales. (1.5 puntos)

2. Sea la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{aligned} F(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3, \\ F(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3, \\ F(\mathbf{u}_3) &= -\mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

en donde $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$. Consideramos asimismo la base

$$\mathbf{V} = \{-\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2\}.$$

(i) Calcule de manera razonada la matriz asociada

$$M(F; \mathbf{U}, \mathbf{V}).$$

(1 punto)

(ii) Sea el vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ con coordenadas con respecto a $\mathbf{V}$ dadas por $\mathbf{x}_\mathbf{V} = (1, 2, 3)$. Calcule las coordenadas $F(\mathbf{x})_\mathbf{U}$ de su imagen con respecto de la base $\mathbf{U}$. (1 punto)

3. Sea la función

$$f(x) = \operatorname{sen}^2(\sqrt{x}).$$

Se pide lo siguiente:

(i) Calcule las funciones derivadas $f'(x)$, $f''(x)$. (1 punto)

(ii) Determine los extremos locales y globales de f en el intervalo $[0, 10]$. (1 punto)

4. Sea la función

$$f(x, y) = x\sqrt{1 + y^2}.$$

Se pide lo siguiente:

(i) Calcule su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(x, y) = (-1, 0)$. (1 punto)

(ii) Determine una representación de tipo II del conjunto

$$\mathbf{M} = \{(x, y) : \ 0 \leq x \leq 1, \ x^2 \leq y \leq 1\}$$

y calcule la integral

$$\int_\mathbf{M} f(x, y) dx dy.$$

(1 punto)

SOLUCIÓN

EJERCICIO 1

(i-ii) Matricialmente el sistema lineal se puede expresar como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz del sistema es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos eliminación de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_2\to F_2-2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{F_3\to F_3-3F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -7 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3\to F_3-F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -3 \end{array}\right) \underset{F_1\to F_1-F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{-5} & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3\to -\frac{1}{5}F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{5} \end{array}\right) \underset{F_2\to F_2-3F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1\to F_1+2F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{36}{5} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

De aquí directamente obtenemos la matriz escalonada reducida

$$\text{red(A)} = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & -1 & 0 & \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & \end{array}\right)$$

además teniendo en cuentas las operaciones elementales realizadas y su orden, la matriz de paso se factoriza de la siguiente manera

$$P = F_{12}(2)F_{23}(-3)F_3(-\frac{1}{5})F_{12}(-1)F_{32}(-1)F_{31}(-3)F_{21}(-1)$$

De la matriz resultante

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{36}{5} \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -\frac{29}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array}\right)$$

obtenemos el sistema lineal asociado: Encontrar (x, y, z, w) tal que

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{1}x - z & = & \frac{36}{5} \\ \mathbf{1}y + 2z & = & -\frac{29}{5} \\ \mathbf{1}w & = & \frac{3}{5} \end{array}$$

Es un sistema con tres pivotes, asociados a las variables x, y, w, mientras que la variable z queda como parámetro, $\lambda = z$, con lo que despejando del sistema obtenemos directamente el conjunto solución

$$\{(x, y, z, w) = \left\{ \left(\frac{36}{5} + \lambda, -\frac{29}{5} - 2\lambda, \lambda, \frac{3}{5} \right) : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

EJERCICIO 2

(i) Tenemos que

$$\mathbf{V} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\} = \{-\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1, -\mathbf{u}_2\}$$

luego

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_2,\ \ \mathbf{u}_2 = -\mathbf{v}_3,\ \ \mathbf{u}_3 = -\mathbf{v}_1.$$

Por definición, véase Sección 5.1 Unidades Didácticas, la matriz $M(F;\mathbf{U},\mathbf{V})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes $\{F(\mathbf{u}_1), F(\mathbf{u}_2), F(\mathbf{u}_3)\}$ con respecto de la base $\mathbf{V}$. En este caso, teniendo en cuenta lo anterior, directamente

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3,\\
F(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_1 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3,\\
F(\mathbf{u}_3) &= -\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_3.
\end{aligned}$$

Luego

$$M(F;\mathbf{U},\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Del mismo modo, como

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{v}_1) &= F(-\mathbf{u}_3) = -F(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_2 = 0\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2 + 0\mathbf{u}_3,\\
F(\mathbf{v}_2) &= F(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3 = 1\mathbf{u}_1 + 0\mathbf{u}_2 + 1\mathbf{u}_3,\\
F(\mathbf{v}_3) &= -F(\mathbf{u}_2) = -(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3.
\end{aligned}$$

se tiene que

$$M(F;\mathbf{V},\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$F(\mathbf{x})_{\mathbf{U}} = M(F;\mathbf{V},\mathbf{U})\mathbf{x}_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ -2\\ -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto $F(\mathbf{x})_{\mathbf{U}} = (-1,-2,-4)$.

EJERCICIO 3

(i) Derivando directamente, se tiene que

$$f'(x) = 2\,\mathrm{sen}(\sqrt{x})\cos\left(\sqrt{x}\right)\sqrt{x}' = 2\,\mathrm{sen}(\sqrt{x})\cos\left(\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\mathrm{sen}(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

y

$$f''(x) = \frac{1}{2}\frac{\cos(2\sqrt{x})\frac{2}{2\sqrt{x}}\sqrt{x} - \mathrm{sen}(2\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} = \frac{\cos(2\sqrt{x})}{2x} - \frac{\mathrm{sen}(2\sqrt{x})}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

(ii) Calculamos los puntos críticos igualando a cero la derivada

$$\frac{\mathrm{sen}(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} = 0 \text{ para } x \in [0,10].$$

Luego se anula si se anula el seno, es decir cuando

$$2\sqrt{x_k} = k\pi,$$

para $k = 1, 2, $, siempre que $x_k \in [0, 10]$. En este caso solamente los dos primeros casos,

$$\begin{aligned} k &= 1,\ 2\sqrt{x_1} = \pi \Rightarrow x_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi^2 = 2.4674 \in [0, 10], \\ k &= 2,\ 2\sqrt{x_2} = 2\pi \Rightarrow x_2 = \pi^2 = 9.869\,6 \in [0, 10], \end{aligned}$$

ya que

$$k = 3,\ 2\sqrt{x_3} = 3\pi \Rightarrow x_3 = \frac{9}{4}\pi^2 = 22.207 \notin [0, 10],$$

Evaluado la derivada

$$f(x_1) = \frac{\cos(2\sqrt{x_1})}{2x_1} - \frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{x_1})}{4x_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos(\pi)}{2x_1} = \frac{-1}{2x_1} < 0$$

y

$$f(x_2) = \frac{\cos(2\sqrt{x_2})}{2x_3} - \frac{\operatorname{sen}(2\sqrt{x_1})}{4x_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{\cos(\pi)}{2x_2} = \frac{1}{2x_2} > 0,$$

por lo que x_1 es un máximo local y x_2 es un mínimo local respectivamente, con valores

$$f(x_1) = \operatorname{sen}^2(\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2}) = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) = 1$$

y

$$f(x_2) = \operatorname{sen}^2(\sqrt{\pi^2}) = \operatorname{sen}^2(\pi) = 0.$$

En los extremos, $a = 0$, $b = 10$, se tiene que

$$\begin{aligned} f(a) &= f(0) = \sin^2(\sqrt{0}) = 0 \\ f(b) &= f(10) = \sin^2(\sqrt{10}) = 0.00042781 > 0. \end{aligned}$$

por lo que $x_1 = \frac{\pi^2}{4}$ es un máximo global mientras que $a = 0$, $x_2 = \pi^2$ son los mínimos globales, véase figura 1.

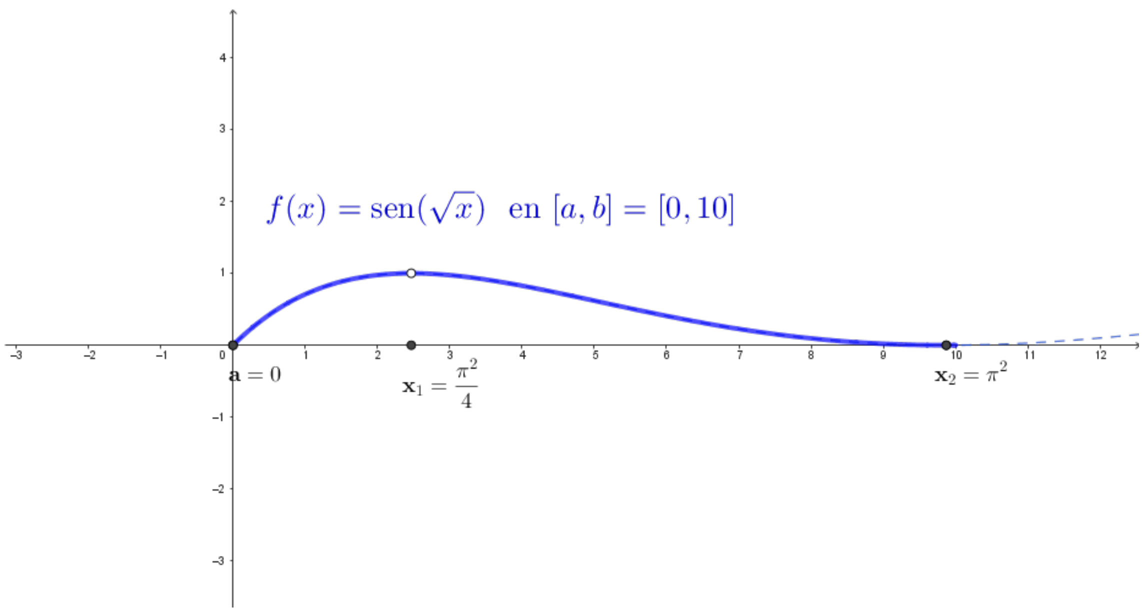


Figure 1: Ejercicio 3

EJERCICIO 4

(i) El polinomio de Taylor de orden 2 en $(-1,0)$ de la función f viene dado por

$$P_2(x,y) = f(-1,0) + D_1f(-1,0)(x+1) + D_2f(-1,0)y + \frac{1}{2}D_{11}f(-1,0)(x+1)^2 + D_{12}f(-1,0)(x+1)y + \frac{1}{2}D(-1,0)y^2.$$

Calculamos las derivadas y particularizamos para el punto $(-1,0)$

$$\begin{aligned}
f(-1,0) &= x\sqrt{1+y^2}\Big|_{(x,y)=(-1,0)} = -1,\\
D_1f(-1,0) &= \sqrt{1+y^2}\Big|_{(x,y)=(-1,0)} = 1,\\
D_2f(-1,0) &= x\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_{(x,y)=(-1,0)} = 0,\\
D_{11}f(1,3) &= 0|_{(x,y)=(-1,0)} = 0,\\
D_{12}f(1,3) &= \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\Bigg|_{(x,y)=(-1,0)} = 0,\\
D_{22}f(-1,0) &= x\frac{\sqrt{1+y^2}-y\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2}\Bigg|_{(x,y)=(-1,0)} = \frac{x}{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{(x,y)=(-1,0)} = -1.
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos el valor del polinomio

$$P_2(x,y) = -1 + 1(x+1) + 0y + \frac{1}{2}0(x+1)^2 + 0(x+1)y - \frac{1}{2}y^2 = -1 + 1(x+1) - \frac{1}{2}y^2.$$

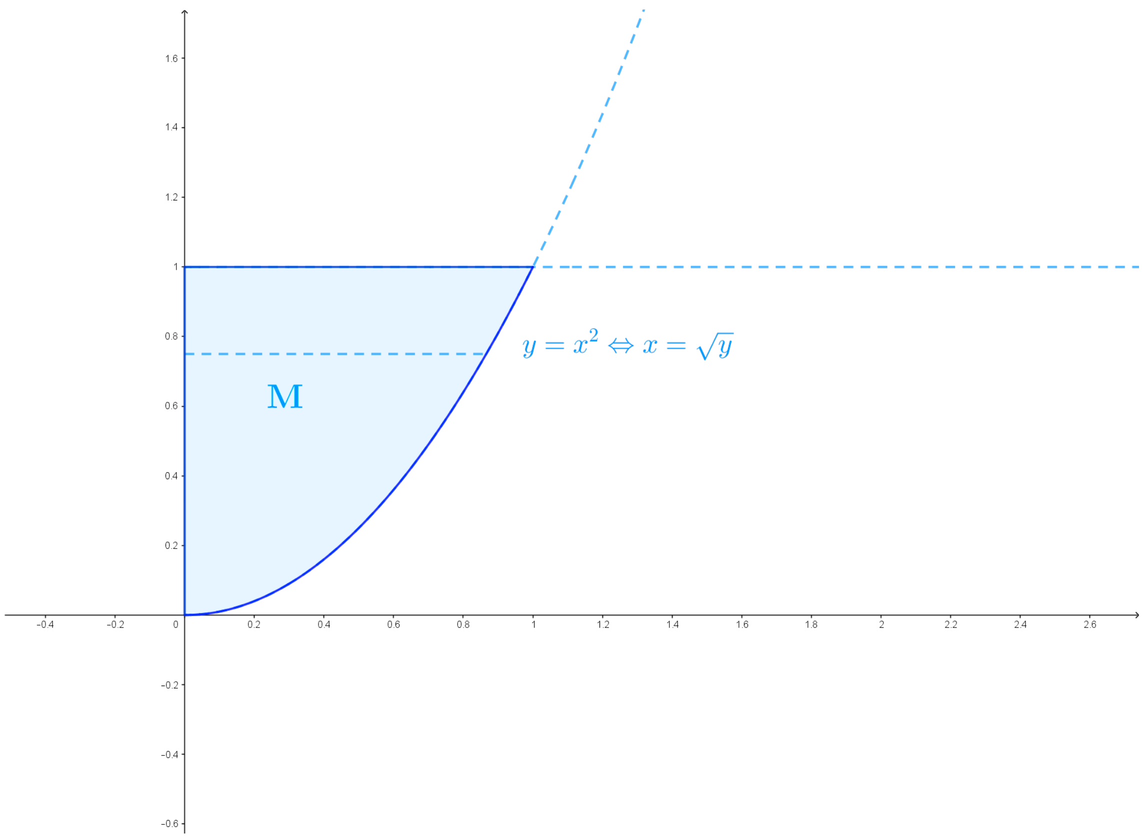


Figure 2: Ejercicio 4.(ii)

(ii) Representando gráficamente el dominio, véase figura (2), se deduce directamente una representación de tipo II del conjunto de integración

$$\mathbf{M} = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{y}\}$$

Mediante dicha representación, aplicando integración reiterada, se puede calcular directamente la integral

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{M}} f(x,y)dxdy &= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x\sqrt{1+y^2}dxdy = \int_0^1 \sqrt{1+y^2}\left(\int_0^{\sqrt{y}} xdx\right)dy = \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+y^2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=\sqrt{y}} dy = \int_0^1 \sqrt{1+y^2}\left(\frac{\sqrt{y}^2-0}{2}\right)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 y\sqrt{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\left.\frac{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{y=0}^{y=1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{2^{\frac{3}{2}}-1}{3} \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{2}-\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Febrero 2024. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros, etc), en particular las Unidades Didácticas. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Ningún otro tipo de material estará permitido. No se permite el uso de calculadora.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de cuatro ejercicios. Se deben contestar íntegramente a los dos primeros. Para los ejercicios 3 y 4 se debe elegir, en cada uno de ellos, uno de sus dos apartados. La puntuación del apartado elegido en los ejercicios 3 y 4 es la puntuación indicada al inicio del ejercicio.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   (i) Determine razonadamente su matriz escalonada reducida $\text{red}(A)$. `(1.25 puntos)`

   (ii) Calcule explícitamente la matriz de paso P tal que

$$PA = \text{red}(A),$$

   `(1.25 puntos)`

2. Sea la aplicación lineal $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$F(\mathbf{a}_1) = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2,$$
$$F(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

   en donde $\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ respectivamente. Y tal que se tiene la siguiente relación

$$\mathbf{a}_1 = 7\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2,$$
$$\mathbf{a}_2 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2.$$

(i) Calcule la imagen del vector

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2.$$

`(1.25 puntos)`

(ii) Calcule la matriz

$$M(F; \mathbf{B}, \mathbf{A})$$

asociada a las bases **B** y **A**. `(1.25 puntos)`

3. (`2 puntos`) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Dada la función [1]

$$f(x) = e^{x \cos x}$$

calcule su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x = 0$.

(ii) Calcule la siguiente integral

$$\int_0^1 \frac{x^3 - 1}{1 + x^2} dx$$

4. (`2 puntos`) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Sea la función

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + (x + 3y)^4}$$

Calcule la derivada de f en el punto $(1, 2)$ según el vector $\mathbf{v} = (1, -1)$.

(ii) Calcule la integral

$$\int_{\mathbf{T}} (x + y) dx dy$$

en donde **T** es el triángulo formado por los puntos $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.

[1] Enunciado corregido al inicio del examen

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(i-ii) Resolvemos el ejercicio mediante operaciones elementales. si adjuntamos a la matriz A una matriz identidad de tamaño adecuado, en este caso de orden 3, y hacemos operaciones elementales podemos obtener la matriz escalonada reducida y la matriz de paso al mismo tiempo,

$$(A|I) \to (\mathrm{red}(A)|P)$$

De este modo, aplicando operaciones elementales

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} \mathbf{1} & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - 2F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + 4F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 9 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_3 \to \frac{-1}{4} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{9}{4} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - 2F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{9}{4} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - 2F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Por tanto la matriz escalonada reducida viene dada por

$$\mathrm{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

y la matriz de paso

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 2

(i) Aplicando la linealidad de F y su definición, se tiene que

$$F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2) = F(\mathbf{a}_1) - 2F(\mathbf{a}_2) = \mathbf{b}_1 - 2\mathbf{b}_2 - 2(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = -\mathbf{b}_1 - 4\mathbf{b}_2.$$

(ii) Directamente

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

ya que por definición $M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes $F(\mathbf{a}_1)$, $F(\mathbf{a}_2)$ con respecto de $\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, véase Definición 5.1. Aplicamos la fórmula (5.2) de las unidades didácticas,

$$M(F; \mathbf{B}, \mathbf{A}) = M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}) M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}. \tag{1}$$

La matriz $M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}}$, que tiene por columnas las coordenadas de $\mathbf{A}$ con respecto de $\mathbf{B}$, véase Proposición 3.5, es directamente calculable

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y aplicando el mismo resultado, el cambio recíproco viene dado por su inversa,

$$M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} = M^{-1}_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix}.$$

Luego aplicando la fórmula (1), se tiene

$$M(F; \mathbf{B}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{64} & \frac{13}{64} \\ -\frac{21}{64} & \frac{27}{64} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3

(i) Teniendo en cuenta la corrección del enunciado, $f(x) = e^{x\cos x}$. La primera y segunda derivada vienen dada respectivamente por

$$f'(x) = (x\cos x)'e^{x\cos x} = (\cos x - x\sin x)\,e^{x\cos x}$$

y

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x - x\sin x)'\,e^{x\cos x} + (\cos x - x\sin x)\,(x\cos)'e^{x\cos x} \\ &= (-\sin x - \sin x - x\cos x)e^{x\cos x} + (\cos x - x\sin x)^2\,e^{x\cos x} \end{aligned}$$

Evaluando en el punto $x = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} &f(0) = e^{0\cos 0} = 1 \\ &f'(0) = (\cos 0 - 0\sin 0)\,e^{0\cos 0} = (1-0)1 = 1 \\ &f''(0) = (-\sin 0 - \sin 0 - 0\cos 0)e^{0\cos 0} + (\cos 0 - 0\sin 0)^2\,e^{0\cos 0} = 0 + 1 = 1 \end{aligned}$$

Luego el polinomio de Taylor viene dado por

$$p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

(ii) En primer lugar, haciendo el cociente de $x^3 - 1$ entre $1 + x^2$,

$$\begin{array}{rr|l} x^3 & -1 & x^2+1 \\ \cline{3-3} -x^3 - x & & x \\ \cline{1-1} -x-1 & & \end{array}$$

Se tiene $x^3 - 1 = x(1+x^2) - 1 + x$, y por tanto

$$\frac{x^3-1}{1+x^2} = \frac{x(1+x^2)-1-x}{1+x^2} = x - \frac{x+1}{1+x^2}$$

Por lo que podemos decomponer la integrales como suma de tres integrales inmediatas

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3-1}{1+x^2}dx &= \int_0^1 xdx - \int_0^1 \frac{x+1}{1+x^2}dx \\ &= \int_0^1 xdx - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2xdx}{1+x^2} - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=1} - \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_{x=0}^{x=1} - [\arctan x]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{2} - 0 - \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) - (\arctan 1 - \arctan 0) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

(i) Aplicando Proposición 14.5,

$$D_{(1,-1)}f(1,2) = D_1 f(1,2) - D_2 f(1,2).$$

Calculamos las derivadas parciales

$$\begin{aligned} D_1 f(1,2) &= \left.\tfrac{-4(x+3y)^3}{(1+(x+3y)^4)^2}\right|_{(x,y)=(1,2)} = \tfrac{-4(1+3\cdot 2)^3}{(1+(1+3\cdot 2)^4)^2} = \tfrac{-4\cdot 7^3}{(1+7^4)^2}, \\ D_2 f(1,2) &= \left.\tfrac{-4(x+3y)^3 3}{(1+(x+3y)^4)^2}\right|_{(x,y)=(1,2)} = \tfrac{-12(1+3\cdot 2)^3}{(1+(1+3\cdot 2)^4)^2} = \tfrac{-12\cdot 7^3}{(1+7^4)^2}. \end{aligned}$$

Luego

$$D_{(1,-1)} f(1,2) = \frac{-4\cdot 7^3}{(1+7^4)^2} - \frac{-12\cdot 7^3}{(1+7^4)^2} = \frac{8\cdot 7^3}{(1+7^4)^2}.$$

(ii) Representando, véase figura 1, se puede ver que el dominio tiene la siguiente representación de tipo II

$$\mathbf{T} = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1,\ y-1 \leq x \leq 1-y\}$$

Luego

$$I = \int_{\mathbf{T}} (x+y)dxdy = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (x+y)dxdy,$$

y podemos calcular la integral aplicando integración reiterada

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (x+y)dxdy &= \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} xdxdy + \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} ydxdy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y-1}^{x=1-y} dx + \int_0^1 y \int_{y-1}^{1-y} dy \\ &= \int_0^1 \frac{(1-y)^2}{2} dy - \int_0^1 \frac{(y-1)^2}{2} dy + \int_0^1 y(1-y-y+1)dy \\ &= \int_0^1 y(2-2y)dy \\ &= 2\int_0^1 y - 2\int_0^1 y^2 dy \\ &= 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=1} - 2\left[\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1} \\ &= 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

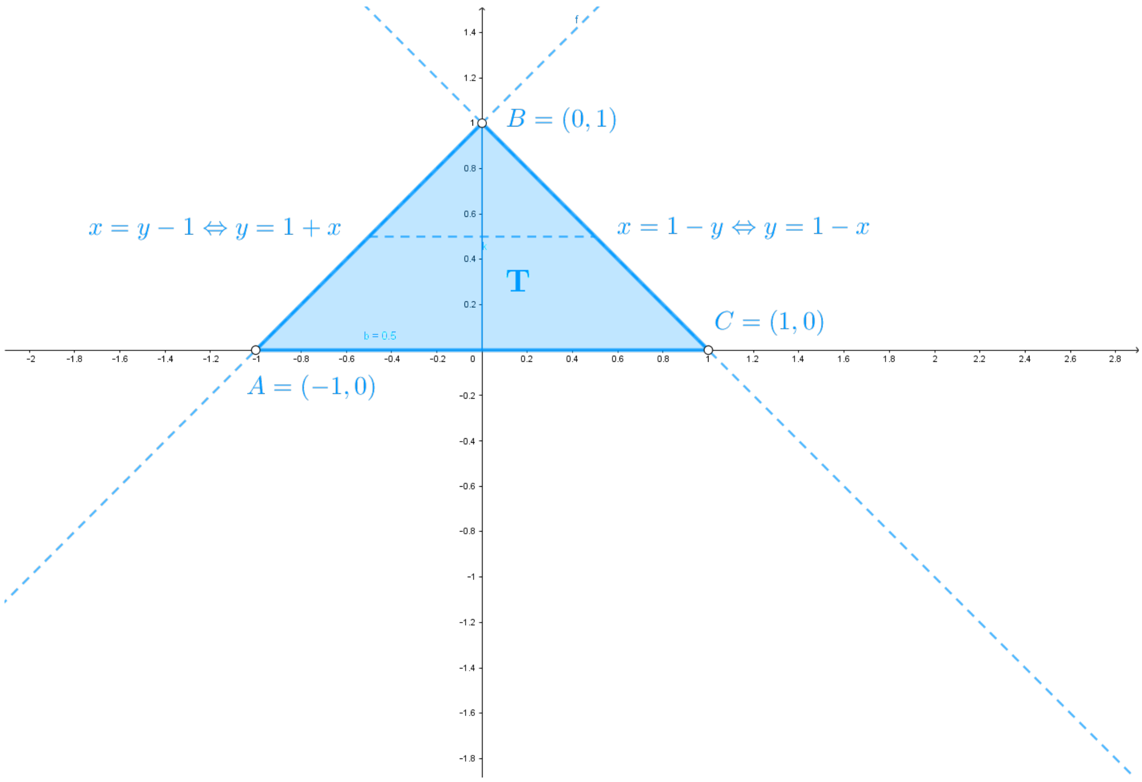


Figure 1: Ejercicio 4.(ii)

GRADO INGENIERÍA INFORMÁTICA

Febrero 2024. Modelo B
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros, etc), en particular las Unidades Didácticas. Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Ningún otro tipo de material estará permitido. No se permite el uso de calculadora.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de cuatro ejercicios. Se deben contestar íntegramente a los dos primeros. Para los ejercicios 3 y 4 se debe elegir, en cada uno de ellos, uno de sus dos apartados. La puntuación del apartado elegido en los ejercicios 3 y 4 es la puntuación indicada al inicio del ejercicio.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-**Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas.**

Ejercicios

1. Consideremos el siguiente sistema lineal: Encontrar $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$\left.\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ y+2z-t & = & 2 \\ x+3z+5t & = & 3 \end{array}\right\}$$

   (i) Clasifique y resuelva el sistema aplicando eliminación de Gauss. (1.25 puntos)

   (ii) Determine la matriz A del sistema y una base del $\ker A$. (1.25 puntos)

2. Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$F(x, y, z) = (x + 2y, x - y)$$

   Consideramos la base

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{(1, 1, 0), (0, 2, 0), (0, 0, -1)\},$$

   en el espacio dominio $\mathbb{R}^3$ y la base

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\} = \{(1, -1), (1, 1)\}$$

   en el espacio imagen $\mathbb{R}^2$.

(i) Calcule la imagen $F(\mathbf{v})$ del vector $\mathbf{v}$ cuya coordenadas con respecto de la base $\mathbf{A}$ vienen dadas por $\mathbf{v}_{\mathbf{A}} = (1, 2, 1)$. `(1 punto)`

(ii) Calcule la matriz asociada a la aplicación F con respecto de las bases $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$,

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

compruebe el resultado para el vector $\mathbf{v}$ del apartado anterior. `(1.5 puntos)`

3. (`2 puntos`) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Considere la función

$$f(x) = \frac{x+1}{3-x}.$$

Determine la función inversa $f^{-1} = f^{-1}(y)$ y su derivada en el punto $y = 3$.

(ii) Sean las funciones $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$h(x, y) = (x, y^2 - x, 1),\ g(x, y, z) = \frac{1}{x - y + z + 4}.$$

Determine la matriz jacobiana de la función composición en el punto

$$f(x, y) = g(h(x, y))$$

en el punto $(x, y) = (1, -1)$.

4. (`2 puntos`) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Dada la función

$$f(x) = \int_1^{x^3} \frac{3x}{1+x^2} dx,$$

calcule su derivada $f'(2)$ en el punto $x = 2$.

(ii) Calcule la integral

$$\int_0^1 \int_0^1 y^x dx dy.$$

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(i-ii) Podemos expresar matricialmente el sistema como

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

matriz del sistema. Aplicando eliminación de Gauss

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 - F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right) \underset{F_3 \to F_3 + F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \underset{F_3 \to \frac{1}{4} F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to F_2 - 2F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 + F_3}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{11}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right)$$

El sistema lineal equivalente viene dado por

$$\begin{array}{rcl} x + \frac{11}{4}t & = & 0 \\ y - \frac{5}{2}t & = & 0 \\ z + \frac{3}{4}t & = & 1 \end{array}$$

en donde tomando directamente $\lambda = t$ como parámetro, el conjunto solución viene dado por

$$\text{Sol} = \{(x, y, z, t) : x = -\frac{11}{4}\lambda,\ y = \frac{5}{2}\lambda,\ z = 1 - \frac{3}{4}\lambda\}$$

y por tanto es un sistema compatible indeterminado con 1 parámetro. De la expresión (2.10) de las unidades didácticas sabemos que la parte paramétrica caracteriza el ker,

$$\begin{aligned} \text{Sol} &= \left\{(-\frac{11}{4}\lambda, \frac{5}{2}\lambda, 1 - \frac{3}{4}\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{(0,0,1,0) + \lambda\left(-\frac{11}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right) : \lambda \in \mathbb{R}\right\} \\ &= (0,0,1,0) + G\left[\left\{\left(-\frac{11}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right)\right\}\right] \end{aligned}$$

Se tiene por tanto que $\ker A = G\left[\left\{\left(-\frac{11}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right)\right\}\right]$, y

$$\left\{\left(-\frac{11}{4}, \frac{5}{2}, -\frac{3}{4}, 1\right)\right\}$$

es una base del ker.

EJERCICIO 2

(i) Como $\mathbf{v_A} = (1, 2, 1)$, las componentes del vector vienen dadas por

$$\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = (1, 1, 0) + 2(0, 2, 0) + (0, 0, -1) = (1, 5, -1).$$

Luego directamente,

$$F(\mathbf{v}) = F(1, 5, -1) = (1 + 2 \cdot 5, 1 - 5) = (11, -4). \tag{1}$$

(ii) Como

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}_1) &= F(1, 1, 0) = (3, 0),\\ F(\mathbf{a}_2) &= F(0, 2, 0) = (4, -2),\\ F(\mathbf{a}_3) &= F(0, 0, -1) = (0, 0), \end{aligned}$$

directamente

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

en donde $\mathbf{E}_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base canónica. Aplicando formula de cambio de base, véase Proposición 5.1,

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = M_{\mathbf{E}_2 \to \mathbf{B}} M(F; \mathbf{A}, \mathbf{E}_2)$$

En este caso,

$$M_{\mathbf{E}_2 \to \mathbf{B}} = M^{-1}_{\mathbf{B} \to \mathbf{E}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Luego

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = M_{\mathbf{E}_2 \to \mathbf{B}} M(F; \mathbf{A}, \mathbf{E}_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Compruébese que

$$F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}) \mathbf{v_A} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 3 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix}$$

Como $F(\mathbf{v})_{\mathbf{B}} = (\frac{15}{2}, \frac{7}{2})$, se tiene que que

$$F(\mathbf{v}) = \frac{15}{2}(1, -1) + \frac{7}{2}(1, 1) = (11, -4),$$

lo que concuerda con el cálculo (1).

EJERCICIO 3

(i) Directamente, $y = f(x)$, se tiene que $x(y) = f^{-1}(y)$ verifica

$$y = \frac{x(y) + 1}{3 - x(y)} \Leftrightarrow (3 - x(y))y = x(y) + 1 \Leftrightarrow x(y)(-y - 1) = 1 - 3y \Leftrightarrow x(y) = \frac{3y - 1}{y + 1}.$$

Por tanto $f^{-1}(y) = \dfrac{3y - 1}{y + 1}$, y podemos calcular la derivada

$$(f^{-1})'(y) = \frac{3(y + 1) - 1(3y - 1)}{(y + 1)^2} = \frac{4}{(y + 1)^2}$$

Luego

$$(f^{-1})'(3) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

(ii) Directamente podemos componer las funciones

$$f(x,y) = g(h(x,y)) = g(x, y^2 - x, 1) = \frac{1}{x - (y^2 - x) + 1 + 4} = \frac{1}{-y^2 + 2x + 5}.$$

El jacobiano viene dado por

$$f'(1,-1) = \begin{pmatrix} \frac{-2}{(-y^2+2x+5)^2} & \frac{2y}{(-y^2+2x+5)^2} \end{pmatrix}_{(x,y)=(1,-1)} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{(-1+2+5)^2} & \frac{-2}{(-1+2+5)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{18} & -\frac{1}{18} \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4

(i) Podemos expresar f como la composición de dos funciones, $f(x) = (g \circ h)(x)$ en donde

$$g(y) = \int_1^y \frac{3x}{1+x^2} dx, \; h(x) = x^3$$

Aplicando la regla de la cadena

$$f'(2) = g'(h(2))h'(2)$$

De esta manera, $h'(2) = 3x^2|_{x=3} = 12$, y por el Teorema fundamental del cálculo, Teorema 16.1, se tiene que

$$g'(h(2)) = g'(8) = \left.\frac{3x}{1+x^2}\right|_{x=8} = \frac{3 \cdot 8}{1+8^2} = \frac{24}{65}.$$

Luego

$$f'(2) = \frac{24}{65} 12 = \frac{288}{65}.$$

(ii) Aplicando integración reiterada, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 y^x dx dy &= \int_0^1 \left[\frac{y^{x+1}}{x+1}\right]_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 (\frac{1^{x+1}}{x+1} - \frac{0^{x+1}}{x+1}) dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} \\ &= [\ln(x+1)]_{x=0}^{x=1} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2. \end{aligned}$$

Septiembre 2024. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

`-MATERIAL PERMITIDO:`

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros, etc). Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Ningún otro tipo de material estará permitido. No se permite el uso de calculadora.

`-PUNTUACIÓN:`

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de cuatro ejercicios. Se deben contestar íntegramente a los dos primeros. Para los ejercicios 3 y 4 se debe elegir, en cada uno de ellos, uno de sus dos apartados. La puntuación del apartado elegido en los ejercicios 3 y 4 es la puntuación indicada al inicio del ejercicio.

`-DURACIÓN:` 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. Consideramos un sistema lineal genérico: Encontrar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \tag{1}$$

en donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se tiene que la matriz escalonada reducida del sistema viene dada por

$$\text{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y su matriz de paso P asociada, tal que $PA = \text{red}(A)$, es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere el vector $\mathbf{b} = (2, -3)$. Se pide lo siguiente:

(i) Determine la matriz A. `(0.5 puntos)`

(ii) Determine el conjunto solución del sistema (1). `(1 punto)`

(iii) Determinar las ecuaciones parámetricas de $\ker A$. (1 punto)

2. Sea la función

$$f(x) = \operatorname{sen}^3(3x).$$

Se pide lo siguiente:

(i) Calcule su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x = \dfrac{\pi}{2}$. (1.25 puntos)

(ii) Determine y clasifique los puntos críticos de f, así como sus extremos globales, en el intervalo $[0, \pi]$. (1.25 puntos)

3. (2 puntos) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Sea $\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\}$ el espacio de polinomios de grado igual o menor a 2 y sea $F : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}$ la aplicación lineal definida por

$$F(\mathbf{p}) = \mathbf{p}(1) + \int_{-1}^{1} \mathbf{p}(s)ds \text{ para todo } \mathbf{p} \in \mathbb{P}_2.$$

Consideramos las siguientes bases

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{-1, x, -2x^2\},\ \mathbf{B} = \{\mathbf{b}_1\} = \{5\}$$

en $\mathbb{P}_2$ y $\mathbb{R}$ respectivamente. Calcule la matriz asociada a la aplicación con respecto de las bases **A** y **B**

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

(ii) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por

$$F(x_1, x_2) = (-7x_1 + 6x_2, -9x_1 + 8x_2).$$

Estudie si la matriz asociada es diagonalizable, y en caso afirmativo, encuentre la matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_2$ y la base $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^2$ a la que está referida.

4. (2 puntos) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Sea la función

$$f(x, y) = \int_0^{x-3y+1} \frac{ds}{s+1}$$

Calcule la derivada de f en el punto $\mathbf{a} = (1, 1)$ siguiendo el vector $\mathbf{v} = (1, 3)$.

(ii) Consideremos la integral

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \cos x^3 dxdy$$

En este apartado se pide lo siguiente:

(a) Represente gráficamente el recinto de integración y dé una representación de tipo I y de tipo II del mismo. (1 punto)

(b) Calcule la integral. (1 punto)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(i) Directamente

$$PA = \text{red}(A) \Rightarrow A = P^{-1}\text{red}(A).$$

Operando

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}\text{red}(A) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(ii) Del mismo modo, como

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow PAx = P\mathbf{b} \Leftrightarrow \text{red}(A)x = P\mathbf{b}$$

este último sistema $\text{red}(A)x = P\mathbf{b}$ es equivalente al sistema inicial. Como

$$P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

tenemos que resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Así

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_4 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + x_4 \\ -3 - x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Tomando como parámetros $\lambda_1 = x_4$, $\lambda_2 = x_3$, variable no asociadas a los pivotes, se tiene que el conjunto solución viene dado por

$$\text{Sol}(A, \mathbf{b}) = \{(-4 + \lambda_1, -3 - \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

(iii) Sabemos que la "*parte parámetrica*" del conjunto solución est a caracterizada por el kerA,

$$\begin{aligned} \text{Sol}(A, \mathbf{b}) &= \{(-4 + \lambda_1, -3 - \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(-4, -3, 0, 0) + \lambda_1(1, 0, 0, 1) + \lambda_2(0, -1, 1, 0) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= (-4, -3, 0, 0) + G[(1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)] \end{aligned}$$

véase expresi on (2.10) libro de texto. Es decir, como

$$\ker A = G[(1, 0, 0, 1), (0, -1, 1, 0)] = \{\lambda_1(1, 0, 0, 1) + \lambda_2(0, -1, 1, 0) : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\},$$

las ecuaciones parámetricas vienen dadas directamente por

$$x_1 = \lambda_1,\ x_2 = -\lambda_2,\ x_3 = \lambda_2,\ x_4 = \lambda_1,\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}.$$

EJERCICIO 2

(i) El polinomio de Taylor pedido viene dado por

$$p_2(x) = f(\frac{\pi}{2}) + f'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}f''(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2})^2$$

Calculamos la derivadas

$$\begin{aligned}
f(\frac{\pi}{2}) &= \operatorname{sen}^3(3x)|_{x=\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}^3(3\tfrac{\pi}{2}) = -1,\\
f'(\frac{\pi}{2}) &= 9\cos 3x\operatorname{sen}^2 3x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 9\cos 3\tfrac{\pi}{2}\operatorname{sen}^2 3\frac{\pi}{2} = 0,\\
f''(\frac{\pi}{2}) &= 54\cos^2 3x \operatorname{sen} 3x - 27\operatorname{sen}^3 3x|_{x=\frac{\pi}{2}} = 54\cos^2 3\frac{\pi}{2}\operatorname{sen} 3\frac{\pi}{2} - 27\operatorname{sen}^3 3\frac{\pi}{2} = 27.
\end{aligned}$$

Luego

$$p_2(x) = -1 + \frac{27}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2.$$

(ii) Para calcular los puntos críticos igualamos a cero la derivada,

$$f'(x) = 9\cos 3x\operatorname{sen}^2 3x = 0 \Rightarrow 3x = k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Es decir, $x_k = k\frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. Es decir,

$$\{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\} = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \pi\right\}$$

Para analizar los puntos críticos, estudiamos el signo de la derivada $f(x) = 9\cos 3x\operatorname{sen}^2 3x$ que es equivalente a estudiar el signo de $\cos 3x$, así

$$\text{signo}(f'(x)) = \begin{cases} + \ (f \text{ creciente}) & \text{si} \quad x \in (x_0, x_1),\\ - \ (f \text{ decreciente}) & \text{si} \quad x \in (x_1, x_2),\\ - \ (f \text{ decreciente}) & \text{si} \quad x \in (x_2, x_3),\\ + \ (f \text{ creciente}) & \text{si} \quad x \in (x_3, x_4),\\ + \ (f \text{ creciente}) & \text{si} \quad x \in (x_4, x_5),\\ - \ (f \text{ decreciente}) & \text{si} \quad x \in (x_5, x_6), \end{cases}$$

luego $\{x_2, x_4\} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ puntos de inflexión, $\{x_0, x_3, x_6\} = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$ mínimos y $\{x_1, x_5\} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ máximos. De ellos, como $-1 \le f(x) = \operatorname{sen}^3(3x) \le 1$, y

$$\{f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4), f(x_5), f(x_6)\} = \{0, 1, 0, -1, 0, 1, 0\},$$

entonces $\{x_1, x_5\} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\}$ máximos globales por tomar valor 1, $x_3 = \frac{\pi}{2}$ mínimo global por tomar valor -1, siendo el resto de extremos locales.

EJERCICIO 3

(i) Por definición, la matriz $M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B})$ tiene por columnas las imágenes $\{F(\mathbf{a}_1), F(\mathbf{a}_2), F(\mathbf{a}_3)\}$ de la base $\mathbf{A}$ con respecto de la base $\mathbf{B}$. Directamente

$$\begin{aligned}
&F(\mathbf{a}_1) = F(-1) = -1 + \textstyle\int_{-1}^{1}(-1)ds = -3 = \frac{-3}{5}5 = \frac{-3}{5}\mathbf{b}_1.\\
&F(\mathbf{a}_2) = F(x) = 1 + \textstyle\int_{-1}^{1} s ds = 1 = \frac{1}{5}5 = \frac{1}{5}\mathbf{b}_1.\\
&F(\mathbf{a}_3) = F(-2x^2) = -2 + \textstyle\int_{-1}^{1}(-2s^2)ds = -\frac{10}{3} = -\frac{10}{15}5 = -\frac{10}{15}\mathbf{b}_1.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B}) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{10}{15} \end{pmatrix}.$$

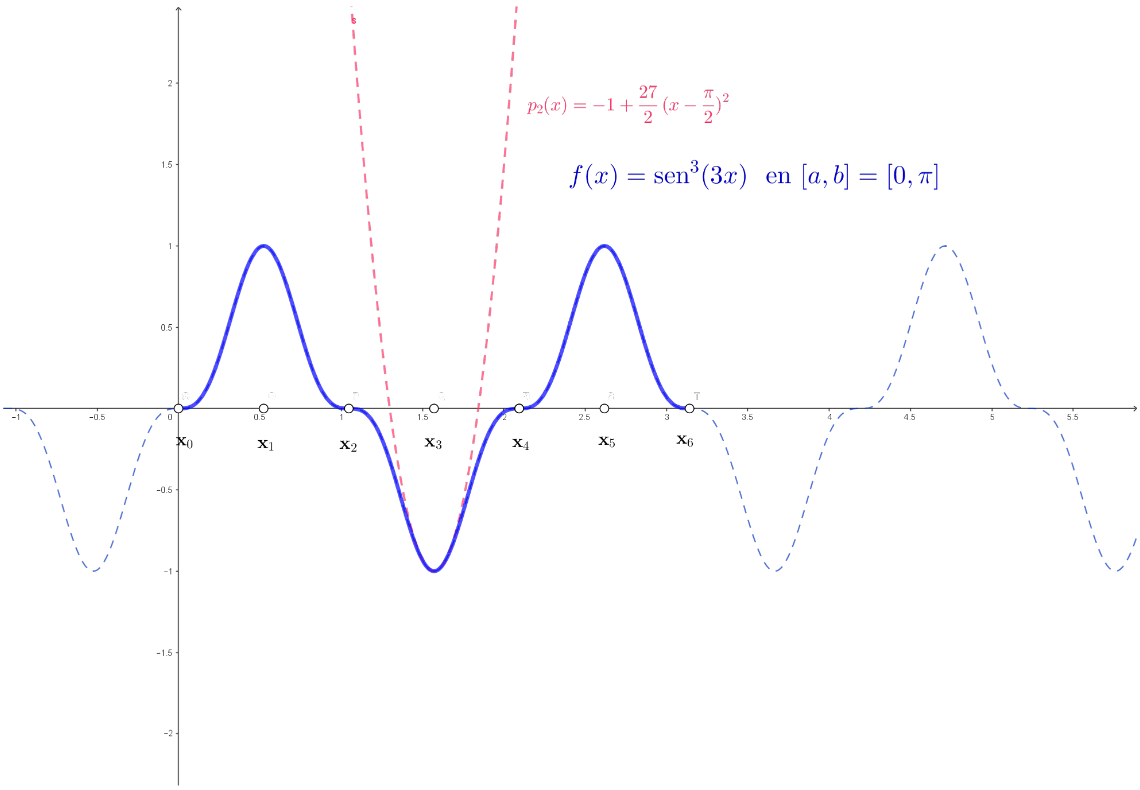


Figure 1: Ejercicio 2

(ii) Como

$$\begin{pmatrix} -7x_1 + 6x_2 \\ -9x_1 + 8x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

la matriz asociada viene dada por

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Los autovalores anulan son las raíces del polinomio característico, en este caso

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & 6 \\ -9 & 8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \to \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1.$$

El subespacio asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (C - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -7-2 & 6 \\ -9 & 8-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{(x_1, x_2) : -9x_1 + 6x_2 = 0\} \\
&= \left\{(x_1, \frac{9}{6}x_1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= G\left[\left(1, \frac{9}{6}\right)\right]
\end{aligned}$$

De igual forma el subespacio asociado al autovalor $\lambda_2 = -1$ está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_2 &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : (C + I)\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -7+1 & 6 \\ -9 & 8+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{(x_1, x_2) : \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ -9 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \{(x_1, x_2) : -6x_1 + 6x_2 = 0, \ -9x_1 + 9x_2 =\} \\
&= \{(x_1, x_2) : x_1 = x_2\} \\
&= \{(x_1, x_1) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\
&= G\,[(1,1)]
\end{aligned}$$

Ambos espacios tiene dimensión 1, por tanto conciden con las multiplicidades de las correspondientes raíces y eso prueba que la matriz es diagonalizable véase Teorema 7.1 unidades didácticas. Teniendo en cuenta el orden, una posible base de autovalores viene dada por

$$\mathbf{A} = \left\{\left(1, \frac{9}{6}\right), (1,1)\right\}$$

y tiene como matriz diagonal asociada a la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Compruébese, lo que no necesario para resolver el ejercicio, que se cumple

$$\begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9}{6} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{9}{6} & 1 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 4

(i) Integrando directamente la función

$$f(x,y) = \int_0^{x-3y+1} \frac{ds}{s+1} = \ln(s+1)\Big]_{s=0}^{s=x-3y+1} = \ln(x - 3y + 1 + 1) - \ln 1 = \ln(x - 3y + 2)$$

En $(x,y) = (1,1)$ la función $f(1,1) = \ln(0)$ no está definida y por tanto concluímos que no se puede calcular la derivada pedida.

(ii) Resolvemos cada uno de los apartados.

(a) Directamente una representación de tipo II del recinto de integración vendría dada por

$$\mathbf{M} = \{(x,y) : 0 \le y \le 1, \sqrt{y} \le x \le 1\}$$

A partir de la representación gráfica, véase Figura 2, se obtiene que una representación de tipo I del conjunto viene dada por

$$\mathbf{M} = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$$

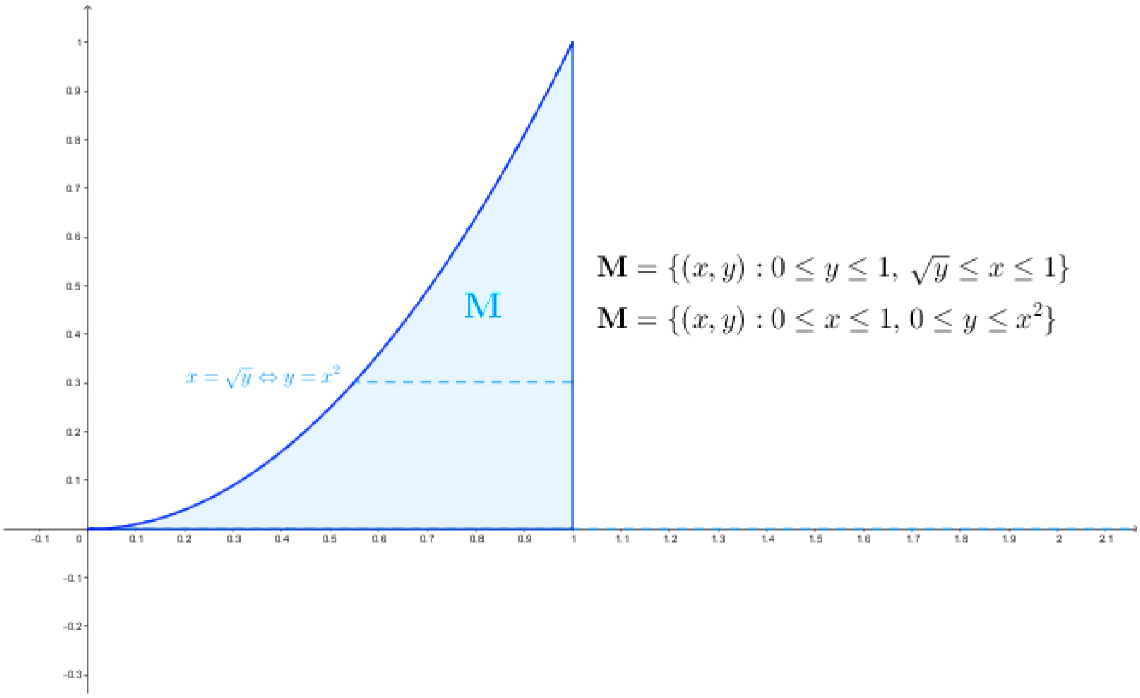


Figure 2: Ejercicio 4.(ii)

(b) Usando la representación de tipo I la integral es inmediata aplicando integración reiterada

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_0^{x^2} \cos x^3 dy dx = \int_0^1 \cos x^3 \left(\int_0^{x^2} dy \right) dx = \\
&= \int_0^1 \cos x^3 \, [y]_{y=0}^{y=x^2} \, dx = \int_0^1 \cos x^3 (x^2 - 0) dx \\
&= \int_0^1 x^2 \cos x^3 dx \\
&= \left[\frac{\operatorname{sen} x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen} 0}{3} \\
&= \frac{1}{3} \operatorname{sen} 1
\end{aligned}
$$

Febrero 2025. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros, etc). Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Ningún otro tipo de material estará permitido. No se permite el uso de calculadora.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de cuatro ejercicios. Se deben contestar íntegramente a los dos primeros. Para los ejercicios 3 y 4 se debe elegir, en cada uno de ellos, uno de sus dos apartados. La puntuación del apartado elegido en los ejercicios 3 y 4 es la puntuación indicada al inicio del ejercicio.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. (3 puntos) Consideramos el siguiente sistema lineal: Encontrar $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ verificando

$$\left.\begin{array}{r} -5x - 8y - 11z - 14w = -2 \\ x + y + z + 2w = 1 \end{array}\right\}$$

Se pide lo siguiente:

(i) Clasifique y resuelva el sistema lineal. (1 punto)

(ii) Determine la matriz A del sistema y calcule su matriz escalonada reducida $\mathrm{red}(A)$. (1 punto)

(iii) Calcule una base del $\ker A$. (1 punto)

2. (2 puntos) Sea $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por

$$F(x_1, x_2, x_3) = (4x_1 + x_2, -4x_1 - x_2, 3x_3).$$

Se pide lo siguiente:

(i) Determine los valores propios y subespacios asociados. (`1.25 puntos`)

(ii) Estudie si la matriz asociada es diagonalizable, y en caso afirmativo, encuentre la matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_3$ y la base $\mathbf{A} \subset \mathbb{R}^3$ a la que está referida. (`1.25 puntos`)

3. (`2 puntos`) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Sea la función

$$f(x) = \cos(2x) - 2\,\mathrm{sen}(x)$$

En este apartado se pide lo siguiente:

(a) Pruebe la existencia de mínimos absolutos de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$. (`1 punto`)

(b) Determine explícitamente dichos mínimos absolutos. (`1 punto`)

(ii) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x, y) = (-x - 1)^2(y + 1)^3,$$

Determine su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(2, 1)$. (`2 puntos`)

4. (`2 puntos`) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Calcule una primitiva de la siguiente integral indefinida

$$\int e^{\sqrt{2x}} dx$$

(Ayuda: Considere el cambio $u = \sqrt{2x}$.) (`2 puntos`)

(ii) Consideremos la integral

$$I = \int_{\mathbf{T}} x dx dy$$

en donde $\mathbf{T}$ es el triángulo formado por los puntos $(-1, -1)$, $(0, 0)$ y $(1, -1)$

En este apartado se pide lo siguiente:

(a) De una representación de tipo II del recinto de integración. (`1 punto`)

(b) Calcule la integral. (`1 punto`)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(i-ii) Matricialmente el sistema se corresponde con: Encontrar $\mathbf{x} = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ tal que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

en donde

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{-5} & -8 & -11 & -14 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el ejercicio mediante operaciones elementales

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -\mathbf{5} & -8 & -11 & -14 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2 \longleftrightarrow F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -5 & -8 & -11 & -14 & -2 \end{array}\right) \underset{F_2 \to F_2 + 5F_1}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -\mathbf{3} & -6 & -4 & 3 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_2 \to \frac{-1}{3} F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & 2 & \frac{4}{3} & -1 \end{array}\right) \underset{F_1 \to F_1 - F_2}{\approx} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -1 \end{array}\right)$$

De aquí, por un lado deducimos que la parte del sistema es la matriz escalonada reducida

$$\operatorname{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Por otra parte es directo ver que $2 = \operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^*)$, y que el sistema es compatible indeterminado con $4 - 2 = 2$ parámetros, de la última matriz obtenemos el sistema

$$\begin{array}{rcl} 1x + 0y - z + \frac{2}{3}w & = & 2 \\ 0x + y + 2z + \frac{4}{3}w & = & -1 \end{array}$$

Tomando como parámetros las variables no asociadas a los dos pivotes, $z = \lambda_1$, $w = \lambda_2$ y despejando

$$x = 2 + \lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2,\ y = -1 - 2\lambda_1 - \frac{4}{3}\lambda_2,$$

el conjunto solución del sistema viene dado por

$$\text{Sol} = \left\{ (2 + \lambda_1 - \frac{2}{3}\lambda_2, -1 - 2\lambda_1 - \frac{4}{3}\lambda_2, \lambda_1, \lambda_2) :\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) De la expresión (2.10) de las unidades didácticas sabemos que la parte paramétrica caracteriza el ker,

$$\text{Sol} = \left\{ (2, -1, 0, 0) + \lambda_1(1, -2, 1, 0) + \lambda_2 \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 1 \right) :\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Luego

$$\{(1, -2, 1, 0), (-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, 0, 1)\}$$

es una base del ker.

EJERCICIO 2

(i) La matriz asociada viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos el polinomio característico

$$\begin{array}{rcl} p(\lambda) & = & |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 & 0 \\ -4 & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} \\ & = & (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ & = & (3 - \lambda)((4 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4) \\ & = & (3 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \\ & = & (3 - \lambda)^2 \lambda \end{array}$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 3$ con multiplicidad doble y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad simple. Por definición

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_1 &= \mathrm{Ker}(B-3I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x+y \\ -4x-4y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0,\ -4x-4y=0 \big\} \\
&= \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0 \big\} \\
&= \{ (x,-x,z) = x(1,-1,0) + z(0,0,1) : x,z \in \mathbb{R} \} \\
&= G[\{(1,-1,0),(0,0,1)\}]
\end{aligned}$$

Luego $\{(1,-1,0),(0,0,1)\}$ es una base de $\mathbb{E}_1$, que tiene dimensión 2, y coinciden por tanto la multiplicidad geométrica y algebraica. De igual manera,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_2 &= \mathrm{Ker}(A-0I) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 4x+y \\ -4x-y \\ 3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\
&= \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x+y=0,\ -4x-y=0,\ 3z=0 \big\} \\
&= \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y=-4x,\ z=0 \big\} \\
&= \{ (x,-4x,0) = x(1,-4,0) : x \in \mathbb{R} \} \\
&= G[\{(1,-4,0)\}]
\end{aligned}$$

y por tanto $\{(1,-4,0)\}$ es una base de $\mathbb{E}_2$ que tiene multiplicidad geométrica 1, necesariamente igual a su multiplicidad algebraica.

(ii) Podemos concluir que la matriz es diagonalizable por coincidir en ambos casos las multiplicidades geométricas y algebraicas, véase Teorema 7.1. Una base de autovectores viene dada por

$$\{(1,-1,0),(0,0,1),(1,-4,0)\},$$

que siguiendo el orden de autovectores estaría asociada a la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3

Apartado (i)

(a) Al ser f una función claramente continua sobre conjunto acotado $[-\pi,\pi]$, existen mínimos absolutos como aplicación del Teorema de Weierstrass, Teorema 9.6 unidades didácticas

(b) Calculamos en primer lugar los puntos críticos

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \Leftrightarrow -2\,\mathrm{sen}(2x) - 2\cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{sen}(2x) + \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\cos(x)\,\mathrm{sen}(x) + \cos x = 0 \\
&\Leftrightarrow \cos(x)(2\,\mathrm{sen}\,x + 1) = 0
\end{aligned}$$

Los puntos críticos son aquellos puntos en el dominio $[-\pi,\pi]$ tales que $\cos(x)=0$, $\operatorname{sen} x=\frac{1}{2}$. En el primer caso

$$\cos(x)=0 \to x=\frac{\pi}{2}\pm k\pi \ \to x_1=-\frac{\pi}{2},\, x_2=\frac{\pi}{2},$$

en el segundo

$$\operatorname{sen} x=-\frac{1}{2} \to x=-\frac{\pi}{6}\pm k2\pi \ \to x_3=-\frac{\pi}{6}.$$

Los extremos absolutos se encuentra tanto en un punto crítico como en los extremos, $x_4=-\pi$, $x_5=\pi$. Comparando valores

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= \cos(-2\tfrac{\pi}{2})-2\operatorname{sen}(-\tfrac{\pi}{2})=-1+2=1\\
f(x_2) &= \cos(2\tfrac{\pi}{2})-2\operatorname{sen}(\tfrac{\pi}{2})=-1-2=-3\\
f(x_3) &= \cos(-2\tfrac{\pi}{6})-2\operatorname{sen}(-\tfrac{\pi}{6})=\tfrac{1}{2}-1=-\tfrac{1}{2}\\
f(x_4) &= \cos(-2\pi)-2\operatorname{sen}(-\pi)=1-0\\
f(x_5) &= \cos(2\pi)-2\operatorname{sen}(\pi)=1
\end{aligned}$$

Luego $x_2=\frac{\pi}{2}$ es el mínimo global de la función, véase figura 1.

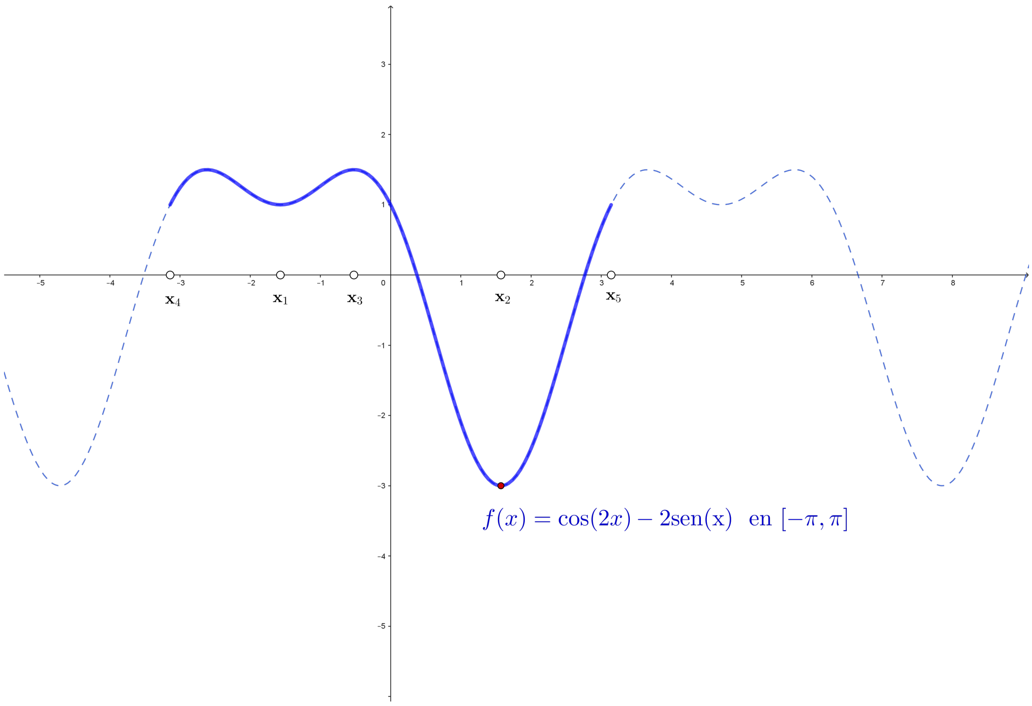


Figure 1: Ejercicio 3.(i)

Apartado (ii)

El polinomio de Taylor de orden 2 en $(2,1)$ de la función f viene dado por

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= f(2,1)+\frac{1}{1!}\begin{pmatrix} D_1f(2,1) & D_2f(2,1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2\\ y-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2!}\begin{pmatrix} x-2 & y-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} D_{11}f(2,1) & D_{12}f(2,1)\\ D_{21}f(2,1) & D_{22}f(2,1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2\\ y-1\end{pmatrix}\\
&= f(2,1)+D_1f(2,1)(x-2)+D_2f(2,1)(y-1)+\frac{1}{2}D_{11}f(2,1)(x-2)^2+D_{12}f(2,1)(x-2)(y-1)+\frac{1}{2}D_{22}f(2,1)(y-1)^2.
\end{aligned}$$

Calculamos las derivadas y particularizamos para el punto $(2,1)$,

$$\begin{aligned}
f(2,1) &= (-x-1)^2(y+1)^3|_{(x,y)=(2,1)}=(-3)^2 2^3=72\\
D_1f(2,1) &= -2(-x-1)(y+1)^3|_{(x,y)=(2,1)}=-2\cdot(-3)2^3=48\\
D_2f(2,1) &= 3(-x-1)^2(y+1)^2|_{(x,y)=(2,1)}=3\cdot(-3)^2\cdot 2^2=108\\
D_{11}f(2,1) &= 2(1+1)^3|_{(x,y)=(2,1)}=2\cdot 2^3=16\\
D_{12}f(2,1) &= -6(-x-1)(y+1)^2|_{(x,y)=(2,1)}=-6\cdot(-3)\cdot 2^2=72\\
D_{22}f(2,1) &= 6(-x-1)^2(y+1)|_{(x,y)=(2,1)}=6\cdot(-3)^2\cdot 2=108
\end{aligned}$$

Sustituyendo los valores en la fórmula obtenemos el valor del polinomio

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= 72+48(x-2)+108(y-1)+\frac{1}{2}16(x-2)^2+72(x-2)(y-1)+\frac{1}{2}108(y-1)^2 \\ &= 72+48(x-2)+108(y-1)+8(x-2)^2+72(x-2)(y-1)+54(y-1)^2 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

Apartado (i)

Aplicando el cambio propuesto,

$$u=\sqrt{2x} \Leftrightarrow x=\frac{u^2}{2}$$

Luego $x=x(u)=\dfrac{u^2}{2}$ y podemos aplicar directamente el equivalente al teorema de cambio de variable, como $x'(u)=u$, hacemos directamente la sustitución

$$\int e^{\sqrt{2x}}dx=\int e^{\sqrt{2x}}\left|x'(u)\right|dx=\int e^{u}\left|u\right|du=\int e^{u}udu$$

La integral se resuelve como una integral por partes, tomando

$$v'(u)=e^u, w(u)=u\rightarrow v(u)=e^u,\ w'(u)=1,$$

y aplicando fórmula de integración por partes $\int v'(u)w(u)du=v(u)w(u)-\int v(u)w'(u)du$, entonces

$$\int e^u udu=ue^u-\int e^u du=ue^u-e^u+C,$$

en donde C constante arbitraria. Deshaciendo el cambio, finalmente se tiene

$$\int e^{\sqrt{2x}}dx=\sqrt{2x}e^{\sqrt{2x}}-e^{\sqrt{2x}}+C.$$

Apartado (ii)

Representando, véase figura 2, se puede ver que el dominio tiene la siguiente representación de tipo II

$$\mathbf{T}=\{(x,y):-1\leq y\leq 0,-y\leq x\leq y\}$$

Luego

$$I=\int_{\mathbf{T}}(x+y)dxdy=\int_{-1}^{0}\int_{-y}^{y}xdxdy$$

y podemos calcular la integral aplicando integración reiterada

$$I=\int_{-1}^{0}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-y}^{x=y}dy=\int_{-1}^{0}\frac{y^2-(-y^2)}{2}dy=\int_{-1}^{0}0dy=0.$$

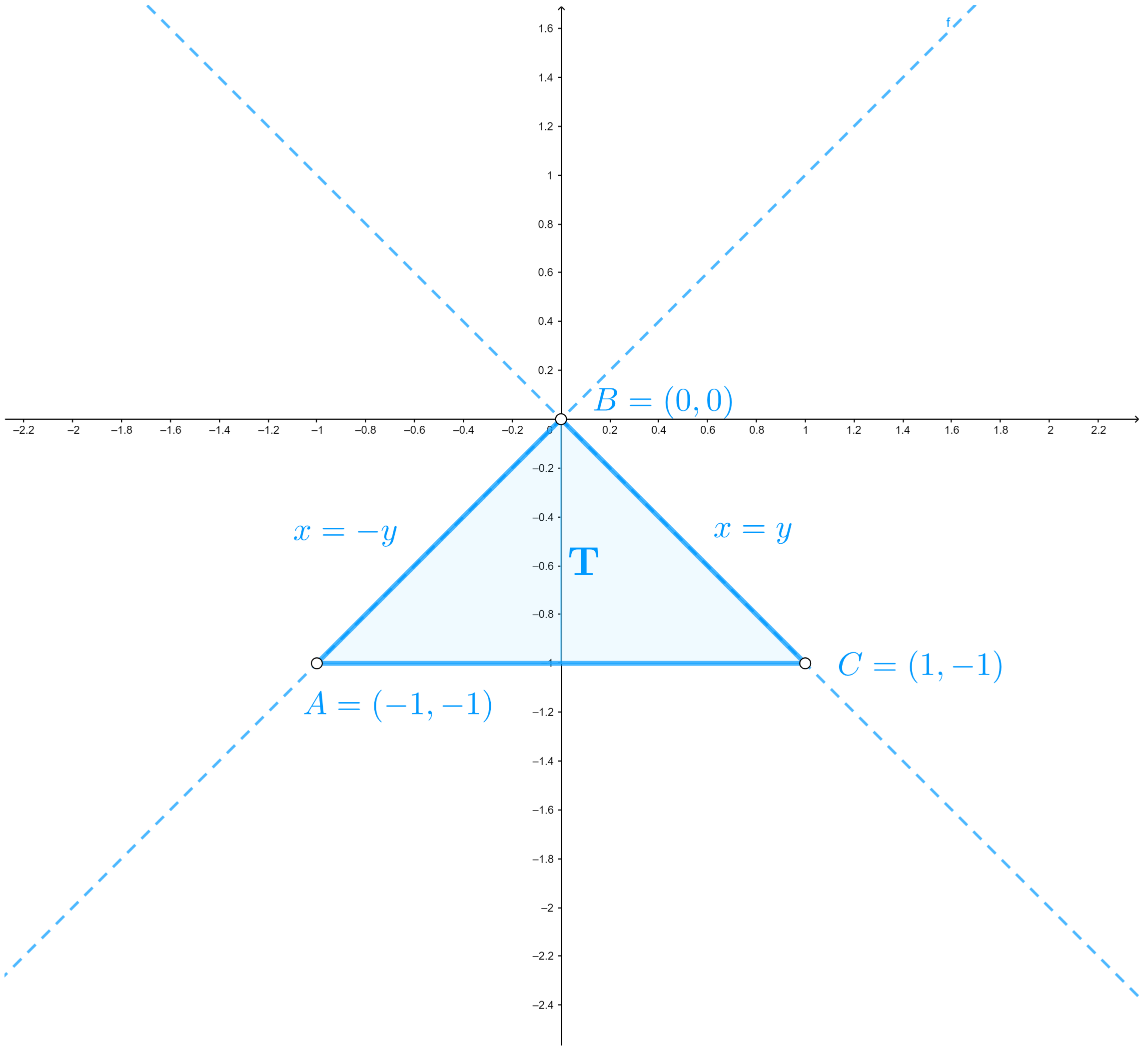


Figure 2: Ejercicio 4.(ii)

GRADO INGENIERÍA INFORMÁTICA

Febrero 2025. Modelo B
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros, etc). Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Ningún otro tipo de material estará permitido. No se permite el uso de calculadora.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de cuatro ejercicios. Se deben contestar íntegramente a los dos primeros. Para los ejercicios 3 y 4 se debe elegir, en cada uno de ellos, uno de sus dos apartados. La puntuación del apartado elegido en los ejercicios 3 y 4 es la puntuación indicada al inicio del ejercicio.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. (3 puntos) Sean los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \{(0,0,1),(0,2,0),(3,0,0)\}\,, \\ \mathbf{B} &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}\,. \end{aligned}$$

   (i) Señale la matrices de cambio de base de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, y de $\mathbf{B}$ a $\mathbf{A}$ respectivamente. (1.5 puntos)

   (ii) Sea $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ el vector de componentes $\mathbf{v} = (2,-2,1)$. Determine unas ecuaciones implícitas del subespacio generado por el elemento dado $G[\{\mathbf{v}\}]$ en términos de las coordenadas respecto a $\mathbf{A}$. (1.5 puntos)

2. (2 puntos) Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que

$$\begin{aligned} F(1,0) &= (1,3), \\ F(1,-1) &= (1,0). \end{aligned}$$

   (i) Calcule razonadamente el vector imagen $F(5,4)$. (1 punto)

(ii) Calcule la matriz $M(F; \mathbf{A}, \mathbf{B})$ asociada de F con respecto de las bases

$$\mathbf{A} = \{(1,1), (0,-2)\}, \ \mathbf{B} = \{(0,2), (-1,0)\}.$$

(1 punto)

3. (2 puntos) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) En este apartado consideramos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = x\left|x - \frac{1}{2}\right|$$

en donde $|\cdot|$ recordemos denota el valor absoluto. En este apartado se pide lo siguiente:

(a) Estudie la diferenciabilidad de f en todo su dominio y calcule la derivada donde sea posible. (1 punto)

(b) Calcule la integral

$$\int_{-1}^{1} f(s)ds$$

(1 punto)

(ii) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$g(x,y) = \int_0^{x-2y+2} (2s-1)^2 ds$$

Calcule la derivada de g en el punto $\mathbf{a} = (1,0)$ siguiendo el vector $\mathbf{v} = (1,-1)$.

(2 puntos)

4. (2 puntos) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) En este apartado consideramos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = \frac{1}{4}((1-x^2)^2 + (1-y^2)^2).$$

Se pide lo siguiente:

(a) Calcule su función gradiente $\nabla f(x,y)$. (1 punto)

(b) Determine todos sus puntos críticos. (1 punto)

(ii) En este apartado consideramos la siguiente integral

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

Se pide lo siguiente:

(a) Dibuje su recinto de integración y dé su expresión en coordenadas polares. (1 punto)

(b) Calcule su valor. (1 punto)

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(i) Siguiendo la Sección 3.4 de las Unidades Didácticas, la matriz de cambio $M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}}$ tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base $\mathbf{B}$ con respecto de $\mathbf{A}$. En este caso es directamente calculable, ya que

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= (1,0,0) = 0(0,0,1) + 0(0,2,0) + \tfrac{1}{3}(3,0,0) = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \tfrac{1}{3}\mathbf{a}_3,\\
\mathbf{b}_2 &= (1,1,0) = 0(0,0,1) + \tfrac{1}{2}(0,2,0) + \tfrac{1}{3}(3,0,0) = 0\mathbf{a}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \tfrac{1}{3}\mathbf{a}_3,\\
\mathbf{b}_3 &= (1,1,1) = 1(0,0,1) + \tfrac{1}{2}(0,2,0) + \tfrac{1}{3}(3,0,0) = 1\mathbf{a}_1 + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}_2 + \tfrac{1}{3}\mathbf{a}_3,
\end{aligned}$$

y por tanto

$$M_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Su inversa nos da la matriz del cambio de $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$

$$M_{\mathbf{A}\to\mathbf{B}} = M^{-1}_{\mathbf{B}\to\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Como

$$\mathbf{v} = (2,-2,1) = 1(0,0,1) - 1(0,2,0) + \frac{2}{3}(3,0,0) = 1\mathbf{a}_1 - 1\mathbf{a}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{a}_3$$

entonces sus coordenadas respecto de la base $\mathbf{A}$ vienen dadas por $\mathbf{v}_A = (1,-1,\frac{2}{3})$. Luego con respecto de $\mathbf{A}$, el subespacio generado por dicho vector viene por

$$G[\{\mathbf{v}_A\}] = \left\{(x,y,z) = \lambda(1,-1,\frac{2}{3}) : \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

y las ecuaciones parámetricas

$$\begin{aligned}
x &= \lambda,\\
y &= -\lambda,\\
z &= \tfrac{2}{3}.\lambda
\end{aligned}$$

Siguiendo la Sección 3.5.1 de las Unidades Didácticas, por ser un subespacio de dimensión 1 en $\mathbb{R}^3$ las ecuaciones implícitas están formadas por $3-1=2$ ecuaciones linealmente independientes que se determinan eliminando el parámetro entre ecuaciones. De la primera y segunda ecuación, $x=-y \iff x+y=0$, y de la primera y tercera $\frac{3}{2}z = x \iff 2x-3z=0$, que son independientes entre sí. Luego unas posibles ecuaciones implícitas vienen dadas por

$$x+y=0,\ 2x-3z=0.$$

EJERCICIO 2

(i) Directamente $(5,4) = 9(1,0) + (-4)\,(1,-1)$, aplicando la linealidad de F,

$$F(5,4) = 9F(1,0) - 4F(1,0) = 9(1,3) - 4(1,0) = (5,27).$$

(ii) La matriz $M(F;\mathbf{A},\mathbf{B})$ tiene por columnas las coordenadas de las imágenes $\{F(\mathbf{a}_1), F(\mathbf{a}_2)\}$ con respecto de $\mathbf{B}$, véase Definición 5.1 de las Unidades Didácticas. Siguiendo el apartado anterior

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= (1,1) = 2(1,0) + (-1)\,(1,-1),\\
\mathbf{a}_2 &= (0,-2) = -2(1,0) + 2(1,-1),
\end{aligned}$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{a}_1) &= 2(1,3) + (-1)\,(1,0) = (1,6) = 3(0,2) + (-1)(-1,0) = 3\mathbf{b}_1 + (-1)\ \mathbf{b}_2.\\
F(\mathbf{a}_2) &= -2(1,3) + 2(1,0) = (0,-6) = -3(0,2) + 0(-1,0) = -3\mathbf{b}_1 + 0\mathbf{b}_2.
\end{aligned}$$

Por tanto

$$M(F;\mathbf{A},\mathbf{B}) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

EJERCICIO 3

Apartado (i)

(a) Deshaciendo el valor absoluto la función viene dada por

$$f(x)=\left\{\begin{array}{lll} x\left(x-\frac{1}{2}\right)=x^2-\frac{1}{2}x & \text{si} & x\geq\frac{1}{2}, \\ x\left(-x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}x-x^2 & \text{si} & x<\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Para $x\neq 2$, en cualquiera de las dos ramas, $x<2$ o $x>2$, es claramente diferenciable por ser una función polinómica con derivada

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{lll} 2x-\frac{1}{2} & \text{si} & x>2, \\ \frac{1}{2}-2x & \text{si} & x<2 \end{array}\right.$$

En $x=2$, la derivadas laterales

$$\begin{aligned} f'(2^+) &= 2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \\ f'(2^-) &= \frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

no coinciden y por tanto la función no es diferenciable, véase Proposición 10.5 unidades didácticas.

(b) Directamente

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}f(s)ds &= \int_{-1}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}s-s^2)ds+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(s^2-\frac{1}{2}s)ds \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=-1}^{s=\frac{1}{2}}-\left[\frac{s^3}{3}\right]_{s=-1}^{s=\frac{1}{2}}+\left[\frac{s^3}{3}\right]_{s=\frac{1}{2}}^{s=1}-\frac{1}{2}\left[\frac{s^2}{2}\right]_{s=\frac{1}{2}}^{s=1} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}+1\right)+\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right) \\ &= \frac{2}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)-\frac{2}{3}\frac{1}{8} \\ &= -\frac{11}{24}. \end{aligned}$$

Apartado (ii)

La función se puede expresar como composición de dos funciones

$$g(x,y)=h(f(x,y))$$

en donde $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ vienen dadas respectivamente por

$$h(t)=\int_0^t(2s-1)^2ds,\; f(x,y)=x-2y+2$$

respectivamente. Ambas funciones son diferenciales, en el caso de h como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, Teorema 16.1, con derivadas

$$h'(t)=(2t-1)^2,\; D_1f(x,y)=1,\; D_2f(x,y)=-2.$$

Por lo que podemos aplicar la regla de la cadena

$$\begin{aligned} D_1g(x,y) &= h'(f(x,y))D_1f(x,y)=(2(x-2y+2)-1)^2 \\ D_2g(x,y) &= h'(f(x,y))D_2f(x,y)=-2(2(x-2y+2)-1)^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, aplicando la Proposición 14.5,

$$\begin{aligned} D_{(1,-1)}g(1,0) &= D_1g(1,0) - D_2g(1,0) \\ &= (2(1-2\cdot 0+2)-1)^2 + 2(2(1-2\cdot 0+2)-1)^2 \\ &= 25+50 \\ &= 75 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

Apartado (i)

(a) Derivando directamente

$$\begin{aligned} D_1f(x,y) &= \frac{1}{4}2(1-x^2)(-2x) = x\left(x^2-1\right) \\ D_2f(x,y) &= \frac{1}{4}2(1-y^2)(-2y) = y\left(y^2-1\right) \end{aligned}$$

Luego el gradiente viene dado por

$$\nabla f(x,y) = \left(x\left(x^2-1\right), y\left(y^2-1\right)\right)$$

(b) Los puntos críticos se obtienen igualando a cero las derivadas

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right) = 0,\ y\left(y^2-1\right) = 0 \to x = 0,\ x = \pm 1$$

De la primera ecuación $x\left(x^2-1\right) = 0 \to x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$, y del mismo modo de la segunda $y\left(y^2-1\right) = 0 \to y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = -1$, combinando obtenemos un total de nueve puntos críticos

$$\begin{array}{lll} \mathbf{a}_1 = (0,0) & \mathbf{a}_2 = (0,1) & \mathbf{a}_3 = (0,-1) \\ \mathbf{a}_4 = (1,0) & \mathbf{a}_5 = (1,1) & \mathbf{a}_6 = (1,-1) \\ \mathbf{a}_7 = (-1,0) & \mathbf{a}_8 = (-1,1) & \mathbf{a}_9 = (-1,-1) \end{array}$$

Apartado (ii)

(a-b) El recinto de integración

$$\mathbf{M} = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

se corresponde con la semicircunferencia de centro el origen $(0,0)$ y radio 1 situada en el primer cuadrante, véase Figura 1. Aplicamos el cambio a polares, véase Sección 17.3.1 de las Unidades Didácticas,

$$x = r\cos\theta,\ y = r\mathrm{sen}\theta.$$

En polares, el recinto de integración tiene la siguiente expresión

$$0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

mientras que la función integrando

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta + \mathrm{sen}^2\theta)}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

Aplicando el teorema de cambio de variable, $dxdy = rdrd\theta$, calculamos la integral por integración reiterada

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dydx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \cos\theta r dr d\theta \\
&= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \right) \left(\int_0^1 r dr \right) \\
&= [\operatorname{sen}\theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=1} \\
&= (1-0)\left(\frac{1}{2}-0\right) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

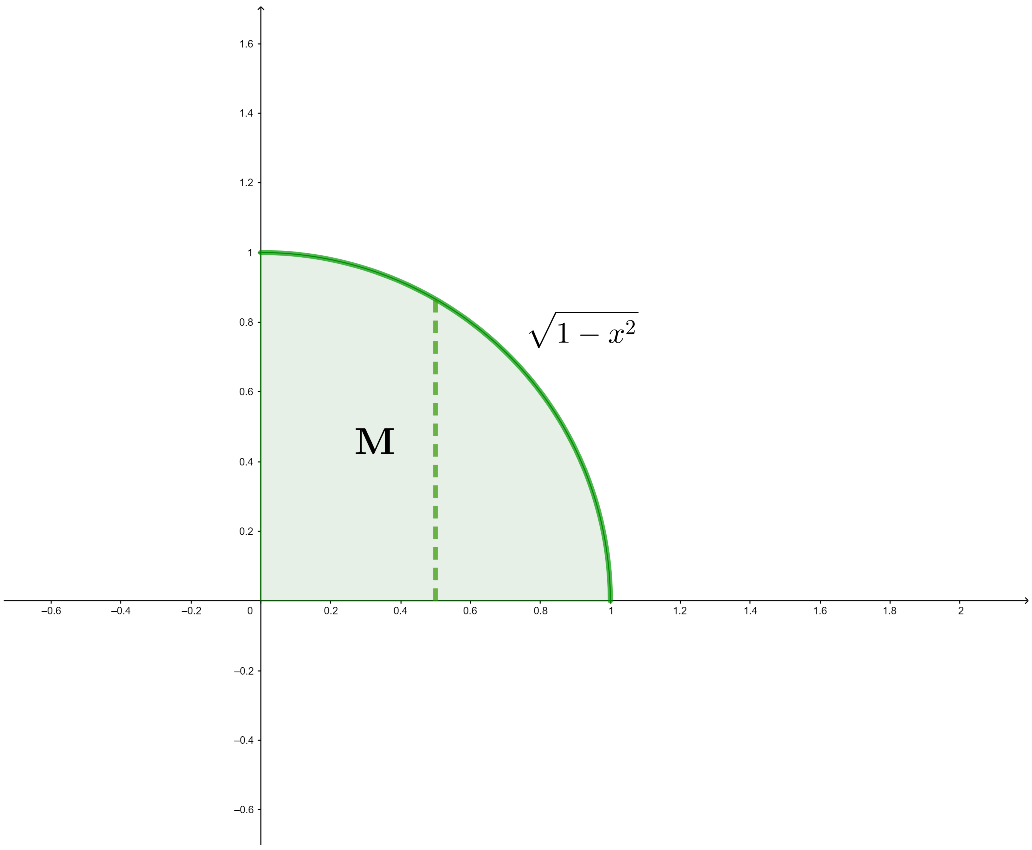


Figure 1: Ejercicio 4.(ii)

Septiembre 2025. Modelo A
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA.

INSTRUCCIONES:

-MATERIAL PERMITIDO:

Se permiten usar los siguientes materiales (ningún otro material estará permitido):

- Se permite utilizar un ejemplar de cualquier material escrito (apuntes, libros, etc). Puede contener anotaciones del alumno. No puede prestarse a ningún compañero durante la realización de la prueba.
- Ningún otro tipo de material estará permitido. No se permite el uso de calculadora.

-PUNTUACIÓN:

- El examen puntúa sobre 9, siendo el punto restante correspondiente a la Prueba de Evaluación Continua
- El examen consta de cuatro ejercicios. Se deben contestar íntegramente a los dos primeros. Para los ejercicios 3 y 4 se debe elegir, en cada uno de ellos, uno de sus dos apartados. La puntuación del apartado elegido en los ejercicios 3 y 4 es la puntuación indicada al inicio del ejercicio.

-DURACIÓN: 120 minutos.

-Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre, modelo de examen y fecha.

-Todas las respuestas deben estar debidamente razonadas.

Ejercicios

1. (3 puntos) Consideremos un sistema lineal genérico: Encontrar $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

en donde $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Se tiene que la matriz escalonada reducida del sistema viene dada por

$$\mathrm{red}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y su matriz de paso P asociada, tal que $PA = \mathrm{red}(A)$, es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considere el vector $\mathbf{b} = (1, 2, 3)$.

(i) Calcule una base de ker A. (1 punto)

(ii) Calcule el conjunto solución del sistema lineal. (1 punto)

(iii) Exprese P como producto de matrices elementales. (1 punto)

2. (2 puntos) Sea
$$\mathbb{P}_2 = \{\mathbf{p}(x) = ax^2 + bx + c : \ a, b, c \in \mathbb{R}\}$$
el espacio vectorial de polinomios de grado igual o menor a 2. Consideramos la siguiente aplicación lineal
$$\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{P}_2 & \to & \mathbb{P}_2 \\ & \mathbf{p} & \mapsto & \mathbf{p}(0) + 2\mathbf{p}'(x) \end{array}$$
Se considera la base
$$\mathbf{A} = \left\{\mathbf{a}_1(x) = 1, \ \mathbf{a}_2(x) = -2x, \ \mathbf{a}_3(x) = x^2\right\}$$
Se pide lo siguiente:

(i) Determine la matriz $M(F; \mathbf{A}, \mathbf{A})$. (1 punto)

(ii) Determine unas ecuaciones implícitas de ker A con respecto de $\mathbf{A}$. (1 punto)

3. (2 puntos) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos:

(i) Sea la función
$$f(x) = \int_{-x}^{x^2} \left(\frac{s}{2} - 1\right)^2 ds.$$
Determine su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x = 1$.

(ii) Dado $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T\mathbf{a} + 3 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$
Determine su polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $\mathbf{a}$.

4. (2 puntos) Este ejercicio consta de dos apartados, debe elegir y responder **solamente a uno** de ellos.

(i) Calcule el plano tangente a la función
$$f(x, y) = \ln(x - 2y)$$
en el punto $(3, 1, 0)$.

(ii) Calcule la integral
$$I = \int_{\mathbf{M}} \frac{y}{1 + x^5} dxdy,$$
en donde
$$\mathbf{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x^2\}.$$

SOLUCIONES

EJERCICIO 1

(i) El ker de una matriz coincide con el su matriz escalonada reducida, veánse las siguientes implicaciones

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow PA\mathbf{x} = P\mathbf{0} \Leftrightarrow \text{red}(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Luego

$$\ker \text{A} = \ker \text{red}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \text{red}(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

El sistema $\text{red}(A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

equivalentemente

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_4 & = & 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0. \end{array}$$

Es un sistema con cuatro variables y dos pivotes asociados a las variables x_1, x_2. Tomando como parámetros el resto de variables, $\lambda_1 = x_3$, $\lambda_2 = x_4$ obtenemos

$$x_1 = -4\lambda_2,\ x_2 = -2\lambda_1 + \lambda_2,$$

que nos da directamente un sistema generador

$$\begin{array}{rcl} \ker \text{red}(A) & = & \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = -4\lambda_2,\ x_2 = -2\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1 = x_3,\ \lambda_2 = x_4\} \\ & = & \{(-4\lambda_2, -2\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)\} \\ & = & \lambda_1(0, -2, 1, 0) + \lambda_2(-4, 1, 0, 1) \\ & = & G[\{(0, -2, 1, 0), (-4, 1, 0, 1)\}]. \end{array}$$

Como los vectores son independientes, el conjunto

$$\{(0, -2, 1, 0), (-4, 1, 0, 1)\}$$

es directamente una base de $\ker \text{red}(A)$ y por tanto de $\ker \text{A}$

(ii) Del mismo modo tenemos las equivalencias

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} \Leftrightarrow \text{red}(A)\mathbf{x} = P\mathbf{b}$$

Por tanto el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es equivalente al sistema $\text{red}(A)\mathbf{x} = P\mathbf{b}$, que tiene una estructura más sencilla. Operando

$$P\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$$

el sistema $\text{red}(A)\mathbf{x} = P\mathbf{b}$ viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$$

equivalentemente

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 4x_4 & = & 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 & = & 0, \\ 0 & = & 3. \end{array}$$

La tercera ecuación $0 = 3$ es un absurdo, y por tanto el sistema es incompatible con conjunto solución vacío.

(iii) Siguiendo el proceso de cálculo de inversa mediante operaciones elementales, la matriz de paso P se corresponde con el producto de matrices elementales que se obtiene de transformar la matriz inversa P^{-1} en su inversa, es decir la propia matriz $P = (P^{-1})^{-1}$,

$$\left(P^{-1} \middle| \, I \right) \to \left(I \middle| \, P \right),$$

en donde I matriz identidad. La inversa en este caso viene dada por

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Así, aplicando operaciones elementales,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \underset{F_2 \to F_2 + F_1}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\underset{F_2 \to F_2 + F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$
$$\underset{F_1 \to F_1 - F_3}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Y de aquí

$$P = F_{13}(-1)F_{23}(1)F_{21}(1)$$

Se puede comprobar efectivamente que

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

EJERCICIO 2

(i) La matriz $M(F; \mathbf{A}, \mathbf{A})$ tiene por columnas la coordenada de las imágenes de la base $\{F(\mathbf{a}_1), F(\mathbf{a}_2), F(\mathbf{a}_1)\}$ con respecto de la misma base A. Así directamente

$$\begin{aligned} F(\mathbf{a}_1) &= 1|_{x=0} + 2(1)' {=} 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot \ (-2x) + 0 \cdot (x^2) = 1 \cdot \mathbf{a}_1(x) + 0 \cdot \ \mathbf{a}_2(x) + 0 \cdot \mathbf{a}_3(x), \\ F(\mathbf{a}_2) &= -2x|_{x=0} + 2(-2x)' = -4 = -4 \cdot 1 + 0 \cdot \ (-2x) + 0 \cdot (x^2) = -4 \cdot \mathbf{a}_1(x) + 0 \cdot \ \mathbf{a}_2(x) + 0 \cdot \mathbf{a}_3(x), \\ F(\mathbf{a}_2) &= x^2|_{x=0} + 2(x^2)' = 4x = 0 \cdot 1 + (-2) \cdot \ (-2x) + 0 \cdot (x^2) = 0 \cdot \mathbf{a}_1(x) + (-2) \cdot \ \mathbf{a}_2(x) + 0 \cdot \mathbf{a}_3(x). \end{aligned}$$

Por tanto

$$M(F; \mathbf{A}, \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) Por definición $\ker F = \{p \in \mathbb{P}_2 : \mathbf{p}(0) + 2\mathbf{p}'(x) = 0\}$. En general, un polinomio $\mathbf{p}(x)$ con coordenadas $\mathbf{p_A} = (\alpha, \beta, \gamma)$ con respecto de la base $\mathbf{A}$ tiene la expresión analítica

$$\mathbf{p}(x) = \alpha \cdot \mathbf{a}_1(x) + \beta \cdot \ \mathbf{a}_2(x) + 0 \cdot \mathbf{a}_3(x) = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot \ (-2x) + \gamma \cdot (x^2) {=} \gamma x^2 - 2\beta x + \alpha$$

Operando e igualando a cero,

$$\mathbf{p}(0) + 2\mathbf{p}'(x) = \alpha + 2(\gamma x - 2\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha - 4\beta = 0,\ \gamma = 0.$$

Y por tanto unas posibles ecuaciones implícitas en la referencia **A** vienen dadas por

$$\alpha - 4\beta = 0,\ \gamma = 0.$$

EJERCICIO 3

(i) Por definición el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x = 1$, viene dado por

$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2}f''(1)(x-1)^2.$$

Calculamos la función integrando directamente

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-x}^{x^2} \left(\frac{s}{2} - 1\right)^2 ds = \frac{2}{3}\left(\frac{s}{2} - 1\right)^3 \Bigg|_{s=-x}^{s=x^2} \\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{-x}{2} - 1\right)^3. \end{aligned}$$

Su valor en $x = 1$ viene dado por

$$f(1) = \frac{2}{3}\left(\frac{1^2}{2} - 1\right)^3 - \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2} - 1\right)^3 = \frac{2}{3}(\frac{-1}{8}) - \frac{2}{3}(-\frac{27}{8}) = \frac{13}{6}.$$

La primera derivada viene dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} - 1\right)^2 - \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-x}{2} - 1\right)^2 \\ &= 2x\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2, \end{aligned}$$

y por tanto

$$f'(1) = 2\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + 1\right)^2 = \frac{11}{4}$$

La segunda derivada viene dada por

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)^2 + 2x2\frac{1}{2}2x\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) + \frac{2}{2}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)^2 + 4x^2\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right) + \left(\frac{1}{2}x + 1\right), \end{aligned}$$

luego

$$f''(1) = \frac{1}{2} - 2 + \frac{3}{2} = 0.$$

Con todo esto, calculamos finalmente el polinomio

$$p(x) = \frac{13}{6} + \frac{11}{4}(x-1).$$

(ii) En este caso el polinomio de Taylor viene dado por

$$p(x) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \nabla^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

La función viene dada por

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y \ + 6z + 2 \end{aligned}$$

En el punto la función vale

$$f(1,2,3) = 1 + 4 + 9 + 2 + 8 + 18 + 2 = 44.$$

Luego el gradiente

$$\nabla f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2x+2 & 2y+4 & 2z+6 \end{pmatrix}\Big|_{(x,y,z)=(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \end{pmatrix},$$

y el Hessiano viene dado por

$$\nabla^2 f(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y,z)=(1,2,3)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente el polinomio viene dado por

$$\begin{aligned} p(x) &= 44 + \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \\ &= 44 + 4(x-1) + 8(y-2) + 12(z-1) + (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \end{aligned}$$

EJERCICIO 4

(i) Aplicando la definición, véase Definición 14.5 Unidades Didácticas, el plano tangente viene dado por

$$z = f(3,1) + \nabla f(3,1)(x-3, y-1)$$

Directamente $f(3,1) = 0$, y gradiente viene dado por

$$\nabla f(3,1) = \begin{pmatrix} D_1 f(3,1) & D_2 f(3,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x-2y} & \frac{-2}{x-2y} \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(3,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el plano tangente se corresponde a la siguiente ecuación

$$z = 1(x-3) - 2(y-1) \Leftrightarrow x - 2y - z - 1 = 0$$

(ii) La integral se puede expresar como

$$I = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{1+x^5} dy dx$$

Aplicando integración reiterada

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^5}\left(\int_0^{x^2} y dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^5}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x^2} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2)^2-0}{1+x^5} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^5} dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\ln\left(1+x^5\right)\right]_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{5}\left(\ln(1+1)-\ln 1\right) \\
&= \frac{1}{10}\ln(2).
\end{aligned}
$$

Luego

$$I = \frac{1}{10}\ln(2).$$