Índice general

1. Introducción **1**

Capítulo 1

Introducción

En la escuela aprendimos a resolver ecuaciones lineales

$$aX + b = 0 \tag{1.1}$$

y cuadráticas

$$aX^2 + bX + c = 0 \tag{1.2}$$

donde a, b y c son números y supondremos que $a \neq 0$. Es bien sabido que la única solución de la ecuación 1.1 es $-\frac{b}{a}$ y que la ecuación 1.2 tiene a lo sumo dos soluciones que se obtienen al elegir el signo de la raíz cuadrada de la siguiente expresión:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{1.3}$$

En realidad, si $b^2 = 4ac$, entonces la ecuación 1.2 tiene una única solución y, si nos restringimos a los números reales, entonces la ecuación no tiene solución si $b^2 - 4ac$ es negativo.

Las ecuaciones 1.1 y 1.2 aparecen naturalmente en multitud de problemas y sus soluciones son conocidas desde tiempos de los babilonios. Sin embargo, hasta el Renacimiento no se descubrieron fórmulas para resolver las ecuaciones de tercer y cuarto grado, conocidas con el nombre de cúbicas y cuárticas respectivamente. Al parecer Scipione del Ferro (1465?-1526) fue el primero en descubrir una fórmula para resolver ecuaciones de tercer grado. Los descubrimientos de del Ferro no fueron divulgados y fueron redescubiertos más tarde por Nicolo Fontana (1500?-1557), conocido con el nombre de Tartaglia ("El Tartamudo"). El método para resolver la cúbica fue guardado en secreto por Tartaglia hasta que se lo comunicó a Gerolamo Cardano (1501-1576) con la condición de que no lo hiciera público. Sin embargo, Cardano rompió su promesa con Fontana y en 1545 publicó la fórmula de Tartaglia en su libro *Artis Magnae sive de Regulis Algebricis*, más conocido con el nombre de *Ars Magna*. En este libro Cardano no sólo publica la fórmula de Tartaglia, sino también la solución de la cuártica que entretanto había sido descubierta por Ludovico Ferrai (1522-1565).

Vamos a ver como resolver la cúbica

$$aX^3 + bX^2 + cX + d = 0 \quad (a \neq 0) \tag{1.4}$$

Está claro que poniendo,

$$B = \frac{b}{a}, \quad C = \frac{c}{a}, \quad D = \frac{d}{a}$$

la ecuación anterior toma la forma

$$X^3 + BX^2 + CX + D = 0 \tag{1.5}$$

Después de la siguiente igualdad

$$X^3 + BX^2 + CX + D = \left(X + \frac{B}{3}\right)^3 + \left(C - \frac{B^2}{3}\right)\left(X + \frac{B}{3}\right) + D + \frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3}$$

podemos poner

$$Y = X + \frac{B}{3}, \quad p = C - \frac{B^2}{3}, \quad q = D + \frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3}$$

de forma que la ecuación anterior toma la forma $Y^3 + pY + q = 0$.

Por tanto podemos concentrarnos en las ecuaciones de la siguiente forma

$$X^3 + pX + q = 0 \tag{1.6}$$

Por ejemplo, podemos plantearnos el problema de calcular la longitud de las aristas de un cubo cuyo volumen sea seis unidades mayor que el área total de las caras exteriores. Si X es la longitud de una arista, entonces el volumen X^3 y cada una de las seis caras exteriores tiene un área igual a X^2. Por tanto X satisface la ecuación

$$X^3 = 6X^2 + 6 \quad \text{ó} \quad X^3 - 6X^2 - 6 = 0$$

Poniendo $Y = X + 2$ nos quedamos con la ecuación

$$\begin{aligned} 0 &= (Y+2)^3 - 6(Y+2)^2 - 6 \\ &= Y^3 + 6Y^2 + 12Y + 8 - 6Y^2 - 24Y - 24 - 6 \\ &= Y^3 - 12Y - 22 \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación 1.6 del Ferro y Tartaglia ponían

$$X = u + v$$

con lo que la ecuación 1.6 se convierte en

$$u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0$$

o

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Como hemos cambiado una variable por otras dos, es natural imponer alguna condición adicional entre las dos variables u y v. Por ejemplo, la última ecuación se simplifica bastante si ponemos $3uv + p = 0$, con lo que nos quedamos con el siguiente sistema

$$u^3 + v^3 + q = 0, \quad v = -\frac{p}{3u}$$

de donde se obtiene

$$u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$$

Multiplicando por u^3 obtenemos

$$u^6 + qu^3 - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \tag{1.7}$$