Índice general

Capítulo 1

Anillos

1.1. Ideales y anillos cociente

Teorema 1.1 (**Teorema de la Correspondencia**). *Si I es un ideal de un anillo A, las asignaciones $J \mapsto J/I$ y $X \mapsto \pi^{-1}(X)$ definen aplicaciones biyectivas (una inversa de la otra) que conservan la inclusión entre el conjunto de los ideales de A que contienen al I y el conjunto de los ideales de A/I.*

Demostración.

(1) Si J es un ideal de A que contiene a I entonces J/I es un ideal de A/I y $\pi^{-1}(J/I) = J$.

(2) Si X es un ideal de A/I entonces $\pi^{-1}(X)$ es un ideal de A que contiene a I y $\pi^{-1}(X)/I = X$.

(3) Si $J \subseteq K$ son ideales de A que contienen a I entonces entonces $J/I \subseteq K/I$.

(4) Si $X \subseteq Y$ son ideales de A/I entonces $\pi^{-1}(X) \subseteq \pi^{-1}(Y)$.

□

1.2. Operaciones con ideales

Sea A un anillo. Recordemos que X es un subconjunto de A entonces llamamos *ideal* de A *generado* por X al menor ideal de A que contiene a X y que

$$(X) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i : n \geq 0, a_i \in A, x_i \in X \right\}$$

Es fácil ver que la intersección de una familia de ideales de A es un ideal de A. Eso implica que (X) es también la intersección de todos los ideales de A que contienen a X.

Si I y J son dos ideales de A entonces la suma y el producto de A son los conjuntos

$$I + J = \{x + y : x \in, y \in J\}$$
$$IJ = \{x_1 y_1 + \cdots x_n y_n : x_1 \cdots, x_n \in I, y_1, \cdots, y_n \in J\}$$

Más generalmente, si $I_1, \ldots, I_n$ son ideales, entonces la suma de estos ideales es

$$I_1 + \cdots + I_n = \{x_1 + \cdots + x_n : x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n\}$$

y el producto $I_1 \cdots I_n$, es el ideal formado por las sumas de productos de la forma $x_1 \cdots x_n$ donde $x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n$.

Aún más general, si $\{I_x : x \in X\}$ es una familia de ideales de A entonces

$$\sum_{x\in X} I_x = \left\{ \sum_{x\in X} a_x : a_x \in I_x \text{ para todo } x \in X \text{ y } a_x = 0 \text{ para casi todo } x \in X \right\}$$

y $\prod_{x\in X} I_x$ es el ideal formado por las sumas de productos de la forma $\prod_{x\in X} a_x$ donde $a_x \in I_x$ para todo $x \in X$ y $a_x = 1$ para casi todo $x \in X$.

Proposición 1.1. *Si $\{I_x : x \in X\}$ es una familia de ideales de un anillo A entonces:*

(1) $\sum_{x\in X} I_x$ es el menor ideal de A que contiene a todos los I_x, o sea el ideal generado por $\cup_{x\in X} I_x$.

(2) Si $I_1, \ldots, I_n$ son ideales de A entonces $I_1 \cdots I_n$ es el menor ideal de A generado por los productos $x_1 \cdots x_n$ con $x_1 \in I_1, \ldots, x_n \in I_n$.

Ejemplo 1.1. *Operaciones con ideales*

(1) Sean n y m dos números enteros y consideremos los ideales (n) y (m) de $\mathbb{Z}$. Claramente $(n)(m) = (nm)$. Por otro lado, $(n) \cap (m)$ está formado por los números enteros que son múltiplos de n y m. Esos son precisamente los múltiplos del mínimo común múltiplo de n y de m. Finalmente, $(n)+(m)$ es el menor ideal (d) de $\mathbb{Z}$ que contiene a (n) y (m), $(d) = (n)+(m)$ si y solo si d divide a n y a m y es múltiplo de todos los divisores comunes de n y m. O sea, d es el máximo común divisor de n y m. En resumen:

$$(n)(m) = (nm), \quad (n) \cap (m) = (\mathrm{mcm}\,(n,m)), \quad (n) + (m) = (\mathrm{mcd}\,(n,m))$$

(2) Consideremos ahora el anillo $\mathbb{Z}[X]$ de los polinomios con coeficientes enteros. Entonces $(2) + (X)$ está formado por los polinomios cuyo término independiente es par. Vamos a ver que este ideal no es principal. Supongamos por reducción al absurdo que $(2) + (X) = (a)$ para algún $a \in \mathbb{Z}[X]$. Entonces $2 = ab$ para algún polinomio b, lo que que implica que $a \in \mathbb{Z}$. Además, como $a \in (2, X)$, necesariamente a es par, lo que implica $X \notin (a) = (2) + (X)$, una contradicción.

1.3. Los Teoreamas de Isomorfía y Chino de los Restos

Teorema 1.2 (Primer Teorema de Isomorfía). *Sea $f : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos. Entonces existe un único isomorfismo de anillos $\overline{f} : A/\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & B \\ A/\operatorname{Ker} f \arrow[r, dashed, "\overline{f}"] & \operatorname{Im} f \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

es decir, $i \circ \overline{f} \circ p = f$, donde i es la inclusión y p es la proyección. En particular,

$$A/\operatorname{Ker} f \simeq \operatorname{Im} f$$

Demostración. Sean K e $I = \operatorname{Im} f$. La aplicación $\overline{f} : A/K \longrightarrow I$ dada por $\overline{f}(x+K) = f(x)$ está bien definida (no depende de representantes) pues si $x + K = y + K$ entonces $x - y \in K$ y por lo tanto $f(x) - f(y) = f(x-y) = 0$, es decir, $f(x) = f(y)$. Además es elemental ver que es un homomorfismo de anillos y que es suprayectiva. Para ver que es inyectiva, veamos que su nucleo es nulo. Si $x + K$ está en el núcleo de $\overline{f}$ entonces $0 = \overline{f}(x+K) = f(x)$, de modo que $x \in K$ y así $x+K = 0+K$. Es decir $\operatorname{Ker} \overline{f} = 0$ y por lo tanto f es inyectiva. En conclusión, $\overline{f}$ es un isomorfismo, y hace conmutativo el diagrama porque, para cada $x \in A$, se tiene

$$i\left(\overline{f}\,(p(x))\right) = \overline{f}(x+K) = f(x)$$

En cuanto a la unicidad, supongamos que otro homomorfismo $\widehat{f} : A/K \longrightarrow I$ verifica que $i \circ \widehat{f} \circ p = f$; entonces para cada $x \in A$ se tiene $\widehat{f}(x+K) = i(\widehat{f}(p(x))) = f(x) = \overline{f}(x+K)$, y por lo tanto $\widehat{f} = \overline{f}$. $\square$