# Álgebra Lineal y Geometría

2 de diciembre de 2023

# Índice general

# Capítulo 1

# Divisibilidad en los números enteros

## 1.1. División entera. Ideales

Designaremos por $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. La teoría de la divisibilidad en $\mathbb{Z}$ es consecuencia de la siguiente importante propiedad.

**Teorema 1.1** (**de la división entera**)**.** *Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, existen dos únicos números enteros $q$ y $r$ que cumplen $a = bq + r$, $0 \leq r < |b|$. Estos números $q$ y $r$ se llaman el cociente y el resto de la división entera de $a$ por $b$.*

**Ejemplo 1.1.**

$$-8 = 3 \cdot (-3) + 1, \quad 3 = (-8) \cdot 0 + 3$$

Si el resto de la división entera de $a$ por $b$ es 0, se dice que $a$ es un *múltiplo* de $b$ (escribiremos $a \stackrel{\cdot}{=} b$), que $b$ es un *divisor* de $a$ (escribiremos $b \mid a$), o que $a$ es *divisible* por $b$. Indicaremos por $(b)$ el conjunto de los múltiplos de $b$. Observemos que $(b)$ cumple las dos propiedades siguientes:

- es cerrado para la suma; es decir, $a, c \in (b) \Rightarrow a + c \in (b)$.
- si $a \in (b)$ y $c$ es cualquier entero, entonces $ac \in (b)$.

**Proposición 1.1.** *Si el subconjunto $I \subset \mathbb{Z}$ cumple*

1. $a, b \in I \Rightarrow a + b \in I$
2. $a \in I, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow ac \in I$

*entonces existe un $b \in \mathbb{Z}$ tal que $I = (b)$.*