

Teorema de Bolzano-Weierstrass

José Antonio González Morente

15 de noviembre de 2024

Resumen

En este documento se presenta el **Teorema de Bolzano-Weierstrass** en \mathbb{R}^n , el cual afirma que todo subconjunto infinito y acotado de \mathbb{R}^n tiene al menos un punto de acumulación. Se ofrece una demostración detallada y mejorada, enfatizando la claridad en la notación y la rigurosidad en los argumentos. La demostración utiliza una construcción de intervalos n -dimensionales anidados cuya longitud disminuye exponencialmente, asegurando la convergencia hacia un punto límite que es un punto de acumulación del conjunto dado.

Teorema 1 (Bolzano-Weierstrass). *Si un conjunto acotado S de \mathbb{R}^n contiene una infinidad de puntos, entonces existe al menos un punto $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ que es punto de acumulación de S .*

Demostración. Como S es acotado, existe un número real positivo $a > 0$ tal que $S \subset B(\mathbf{0}, a)$, donde $B(\mathbf{0}, a)$ es la bola n -dimensional centrada en el origen con radio a . Por lo tanto, S está contenido en el intervalo n -dimensional:

$$J_1 = I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)},$$

donde cada $I_k^{(1)} = [-a, a]$ para $k = 1, 2, \dots, n$.

■ Paso 1: Subdivisión inicial.

Dividimos cada intervalo $I_k^{(1)}$ en dos subintervalos iguales:

$$I_{k,1}^{(1)} = [-a, 0], \quad I_{k,2}^{(1)} = [0, a]$$

Consideramos todos los productos cartesianos de la forma:

$$J = I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,k_n}^{(1)}$$

donde cada $k_i \in \{1, 2\}$. Hay exactamente 2^n intervalos n -dimensionales de este tipo, y su unión es J_1 . Dado que S es infinito y está contenido en J_1 , al menos uno de estos intervalos, denotado por J_2 , contiene infinitos puntos de S .

■ Paso 2: Proceso iterativo.

Repetimos el proceso con J_2 :

1. Dividimos cada intervalo $I_k^{(2)}$ en dos subintervalos iguales:

$$I_{k,1}^{(2)} \text{ y } I_{k,2}^{(2)}$$

donde $I_k^{(2)}$ es el intervalo correspondiente en J_2 .

2. Obtenemos 2^n nuevos intervalos n -dimensionales cuya unión es J_2 .
3. Al menos uno de estos intervalos, denotado por J_3 , contiene infinitos puntos de S .

■ **Paso 3: Construcción de la sucesión de intervalos anidados.**

Continuamos este procedimiento inductivamente, obteniendo una sucesión de intervalos n -dimensionales anidados:

$$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$$

donde cada J_m se puede expresar como:

$$J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \dots \times I_n^{(m)}$$

con $I_k^{(m)} \subset I_k^{(m-1)}$ y longitud:

$$\ell_k^{(m)} = b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}}$$

para $k = 1, 2, \dots, n$ y $m \geq 1$.

■ **Paso 4: Determinación del punto límite.**

Para cada k , las sucesiones $\{a_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{b_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ cumplen:

1. $\{a_k^{(m)}\}$ es creciente y acotada superiormente, por lo que converge al supremo $t_k = \lim_{m \rightarrow \infty} a_k^{(m)}$.
2. $\{b_k^{(m)}\}$ es decreciente y acotada inferiormente, por lo que converge al ínfimo $t'_k = \lim_{m \rightarrow \infty} b_k^{(m)}$.
3. Como $b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}} \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow \infty$, se sigue que $t_k = t'_k$.

Por lo tanto, ambas sucesiones convergen al mismo límite t_k , y podemos afirmar que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_k^{(m)} = \lim_{m \rightarrow \infty} b_k^{(m)} = t_k$$

Definimos el punto $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Este punto pertenece a todos los intervalos J_m :

$$\mathbf{t} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$$

■ **Paso 5: Demostración de que \mathbf{t} es punto de acumulación de S .**

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Elegimos m suficientemente grande tal que:

$$\frac{a}{2^{m-2}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

Entonces, el diámetro de J_m satisface:

$$\text{diam}(J_m) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (\ell_k^{(m)})^2} \leq \sqrt{n \left(\frac{a}{2^{m-2}} \right)^2} < \varepsilon$$

Por lo tanto,

$$J_m \subset B(\mathbf{t}, \varepsilon)$$

Como J_m contiene infinitos puntos de S , se deduce que $B(\mathbf{t}, \varepsilon)$ también contiene infinitos puntos de S . Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que \mathbf{t} es un punto de acumulación de S .

□

Referencias

- [1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, 2da Edición, 1976.