Teorema de Bolzano-Weierstrass

José Antonio González Morente

26 de noviembre de 2024

Resumen

En este documento se presenta el **Teorema de Bolzano-Weierstrass** en $\mathbb{R}^n$, el cual afirma que todo subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ tiene al menos un punto de acumulación. Se ofrece una demostración detallada y mejorada, enfatizando la claridad en la notación y la rigurosidad en los argumentos. La demostración utiliza una construcción de intervalos n-dimensionales anidados cuya longitud disminuye exponencialmente, asegurando la convergencia hacia un punto límite que es un punto de acumulación del conjunto dado.

Teorema 0.1 (Bolzano-Weierstrass). *Si un conjunto acotado S de $\mathbb{R}^n$ contiene una infinidad de puntos, entonces existe al menos un punto $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ que es punto de acumulación de S.*

Demostración. Como S es acotado, existe un número real positivo $a > 0$ tal que $S \subset B(\mathbf{0}, a)$, donde $B(\mathbf{0}, a)$ es la bola n-dimensional centrada en el origen con radio a. Por lo tanto, S está contenido en el intervalo n-dimensional:

$$J_1 = I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)},$$

donde cada $I_k^{(1)} = [-a, a]$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.

- **Paso 1: Subdivisión inicial**.

  Dividimos cada intervalo $I_k^{(1)}$ en dos subintervalos iguales:

  $$I_{k,1}^{(1)} = [-a, 0]\,, \quad I_{k,2}^{(1)} = [0, a]$$

  Consideramos todos los productos cartesianos de la forma:

  $$J = I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,k_n}^{(1)}$$

  donde cada $k_i \in \{1, 2\}$. Hay exactamente 2^n intervalos n-dimensionales de este tipo, y su unión es J_1. Dado que S es infinito y está contenido en J_1, al menos uno de estos intervalos, denotado por J_2, contiene infinitos puntos de S.

- **Paso 2: Proceso iterativo**.

  Repetimos el proceso con J_2:

  1. Dividimos cada intervalo $I_k^{(2)}$ en dos subintervalos iguales:

     $$I_{k,1}^{(2)} \text{ y } I_{k,2}^{(2)}$$

     donde $I_k^{(2)}$ es el intervalo correspondiente en J_2.
  2. Obtenemos 2^n nuevos intervalos n-dimensionales cuya unión es J_2.
  3. Al menos uno de estos intervalos, denotado por J_3, contiene infinitos puntos de S.

- **Paso 3: Construcción de la sucesión de intervalos anidados**.

  Continuamos este procedimiento inductivamente, obteniendo una sucesión de intervalos n-dimensionales anidados:

  $$J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \dots$$

  donde cada J_m se puede expresar como:

  $$J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}$$

  con $I_k^{(m)} \subset I_k^{(m-1)}$ y longitud:

  $$\ell_k^{(m)} = b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}}$$

  para $k = 1, 2, \dots, n$ y $m \geq 1$.

- **Paso 4: Determinación del punto límite**.

  Para cada k, las sucesiones $\{a_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{b_k^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ cumplen:

  1. $\{a_k^{(m)}\}$ es creciente y acotada superiormente, por lo que converge al supremo $t_k = \lim_{m\to\infty} a_k^{(m)}$.
  2. $\{b_k^{(m)}\}$ es decreciente y acotada inferiormente, por lo que converge al ínfimo $t_k' = \lim_{m\to\infty} b_k^{(m)}$.
  3. Como $b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{a}{2^{m-2}} \to 0$ cuando $m \to \infty$, se sigue que $t_k = t_k'$.

  Por lo tanto, ambas sucesiones convergen al mismo límite t_k, y podemos afirmar que:

  $$\lim_{m\to\infty} a_k^{(m)} = \lim_{m\to\infty} b_k^{(m)} = t_k$$

Definimos el punto $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Este punto pertenece a todos los intervalos J_m:

$$\mathbf{t} \in \bigcap_{m=1}^{\infty} J_m$$

- **Paso 5: Demostración de que t es punto de acumulación de** S.

  Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Elegimos m suficientemente grande tal que:

  $$\frac{a}{2^{m-2}} < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

  Entonces, el diámetro de J_m satisface:

  $$\operatorname{diam}(J_m) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\ell_k^{(m)}\right)^2} \leq \sqrt{n \left(\frac{a}{2^{m-2}}\right)^2} < \varepsilon$$

  Por lo tanto,

  $$J_m \subset B(\mathbf{t}, \varepsilon)$$

  Como J_m contiene infinitos puntos de S, se deduce que $B(\mathbf{t}, \varepsilon)$ también contiene infinitos puntos de S. Dado que $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\mathbf{t}$ es un punto de acumulación de S.

$\square$

Referencias

[1] Tom M. Apostol, *Análisis Matemático*, Reverté, 2da Edición, 1976.