Algoritmos y Teoremas para Advent of Code

José Antonio González Morente

16 de noviembre de 2024

Resumen

Este documento es una recopilación de teoremas y algoritmos que he necesitado aplicar durante la resolución de los retos del **Advent of Code**.

Índice

1. Geometría computacional

Definición 1. Se llama **polígono simple** a un polígono cuyos lados no contiguos no se intersecan; es decir, es una figura plana cerrada que forma la frontera de una región poligonal.

Un polígono simple divide al plano en dos conjuntos de puntos: el **interior** y el **exterior** de la región poligonal. El interior se caracteriza por no contener rectas completas, mientras que el exterior sí puede contenerlas. Un polígono que no es simple se denomina **polígono complejo**.

Definición 2. Una **triangulación** de un polígono simple es una división de su área en un conjunto de triángulos que cumplen las siguientes condiciones:

- La unión de todos los triángulos es igual al polígono original.
- Los vértices de los triángulos son vértices del polígono original.
- Cualquier pareja de triángulos es disjunta o comparte únicamente un vértice o un lado.

Lema 1. *Todo polígono simple de n vértices es triangulable.*

Demostración. La demostración es por inducción fuerte sobre el número de vértices n del polígono.

Caso base: Para $n = 3$, el polígono es un triángulo, el cual es trivialmente triangulable.

Paso inductivo: Supongamos que todo polígono simple con menos de n vértices es triangulable, y consideremos un polígono simple P con $n > 3$ vértices.

Primero, demostraremos que P tiene al menos una diagonal que no cruza al polígono. Una diagonal es un segmento que une dos vértices no consecutivos y que está completamente contenido en el interior del polígono.

Consideremos el conjunto de vértices de P. Sea v un vértice de P con coordenada x mínima (es decir, el vértice más a la izquierda). Sean u y w los vértices adyacentes a v en el polígono. Existen dos casos:

- **Caso 1:** El segmento $\overline{uw}$ está completamente dentro de P. En este caso, $\overline{uw}$ es una diagonal válida, y podemos dividir P en dos polígonos más pequeños al trazar esta diagonal.

- **Caso 2:** El segmento $\overline{uw}$ no está completamente dentro de P. Esto significa que existen vértices de P en el interior del triángulo $\triangle uvw$. Entre estos vértices, seleccionemos aquel, llamémosle v', que está más alejado de la base $\overline{uw}$. El segmento $\overline{vv'}$ no puede cruzar ningún lado del polígono P, ya que si lo hiciera, implicaría la existencia de otro vértice más alejado de $\overline{uw}$ dentro de $\triangle uvw$, contradiciendo la elección de v'. Por lo tanto, $\overline{vv'}$ es una diagonal válida.

En ambos casos, hemos encontrado una diagonal que divide P en dos polígonos simples con menos de n vértices. Por hipótesis inductiva, ambos polígonos son triangulables. Al combinar las triangulaciones de los subpolígonos y la diagonal encontrada, obtenemos una triangulación de P. □

Teorema 1 (Teorema de Pick)**.** *Supongamos que tenemos una cuadrícula en el plano, donde cada punto tiene coordenadas enteras. Sea P un polígono simple cuyos vértices están todos en puntos de la cuadrícula. Sea i el número de puntos de la cuadrícula en el interior de P, y f el número de puntos de la cuadrícula en la frontera de P. Entonces, el área del polígono P se calcula mediante:*

$$A_P = i + \frac{f}{2} - 1$$

Demostración. Vamos a demostrar el resultado por inducción. Sea P un polígono simple y T un triángulo con un lado común con P. Asumimos que el teorema es cierto para P y para T de forma separada y demostraremos que también es cierto para el polígono PT formado a partir de P añadiendo T. Como P y T comparten un lado, todos los puntos frontera a lo largo del lado común, excepto los puntos extremos del lado, se convierten en puntos interiores de PT. Por tanto, llamando c al número de puntos frontera en común, tenemos que

$$i_{PT} = (i_P + i_T) + (c - 2), \quad f_{PT} = (f_P + f_T) - 2(c - 2) - 2$$

Por tanto,

$$i_P + i_T = i_{PT} - (c - 2), \quad f_P + f_T = f_{PT} + 2(c - 2) + 2$$

Como asumimos que el teorema es cierto para P y T de forma separada:

$$A_{PT} = A_P + A_T = \left(i_P + \frac{f_P}{2} - 1\right) + \left(i_T + \frac{f_T}{2} - 1\right) =$$
$$= i_{PT} - (c - 2) + \frac{f_{PT} + 2(c - 2) + 2}{2} - 2 = i_{PT} + \frac{f_{PT}}{2} - 1$$

Por lo tanto, el polígono A_{PT} cumple el teorema.

Por el lema anterior cualquier polígono simple puede ser triangulado. Por tanto, lo que hemos obtenido es que si el teorema es cierto para un triángulo T y para un polígono formado por n triángulos también lo es para un polígono formado por $n+1$ triángulos.

El último paso de la demostración es comprobar el resultado para cualquier triángulo. Es fácil ver que el teorema es cierto para cualquier rectángulo con sus lados paralelos a los ejes. A partir de esto deducimos que la fórmula es cierta para triángulos rectángulos obtenidos a partir de un rectángulo mediante un corte por una de sus diagonales. En efecto, sea Q un triángulo rectángulo obtenido a partir de un rectángulo R mediante un corte por una de sus diagonales. Sea d el número de puntos de la cuadrícula pertenecientes a la diagonal. Entonces

$$i_R = 2i_T + (d-2), \quad f_R = 2f_T - 2(d-2) - 2$$

luego

$$\begin{aligned} 2A_T = A_R = i_R + \frac{f_R}{2} - 1 = \\ &= 2i_T + (d-2) + \frac{2f_T - 2(d-2) - 2}{2} - 1 = \\ &= 2i_T + (d-2) + f_T - (d-2) - 2 = \\ &= 2i_T + f_T - 2 \end{aligned}$$

luego

$$A_T = i_T + \frac{f_T}{2} - 1$$

y la fórmula es cierta para triángulos rectángulos.

Finalmente cualquier triángulo puede particionarse en triángulos rectángulos. $\square$

Teorema 2 (Fórmula de Gauss para el área de polígonos simples)**.** *Sea P un polígono simple con vértices dados en orden cíclico $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$, donde $p_i = (x_i, y_i)$ para $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Entonces, el área A de P se puede calcular mediante:*

$$A = \frac{1}{2}\left|\sum_{k=0}^{n} x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k\right| = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \det\begin{pmatrix} x_k & x_{k+1} \\ y_k & y_{k+1} \end{pmatrix}$$

donde se considera que $p_n = p_0$.

Demostración. El área del polígono es la suma de todas las áreas orientadas de los trapezoides delimitados por cada dos vértices y el eje horizontal, es decir,

$$A = \left|\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} - x_k)\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\right|$$

Desarrollando la expresión anterior y teniendo en cuenta la suma telescópica

$$\sum_{k=0}^{n} (x_{k+1} y_{k+1} - x_k y_k) = x_0 y_0 - x_n y_n = 0$$

obtenemos el resultado deseado. $\square$

Esta es la fórmula de Gauss, también conocida como la *fórmula del zapato* o *shoelace formula*, debido al patrón que sigue al multiplicar y sumar las coordenadas.