

# Trabajo Práctico Final

## Control en Nivel de Líquido para Tanques Acoplados

66.18 - Teoría de Control I  
Dpto. de Electrónica, Facultad de Ingeniería, UBA  
Víctor M. Cánepa\* - 92132

1º cuatrimestre de 2017

### Índice

<b>1. Modelo del Sistema</b>	<b>2</b>
<b>2. Espacio de Estados y Linealización en Punto de Equilibrio</b>	<b>2</b>
<b>3. Controlador por Estados Observados</b>	<b>3</b>
<b>4. Modelo en Simulink</b>	<b>4</b>
<b>5. Simulaciones con Simulink</b>	<b>7</b>

---

\* canepavictor@gmail.com

## 1. Modelo del Sistema

El sistema no lineal de tercer orden a controlar es el que se muestra en la Fig. 1. Consiste en tres tanques acoplados, con un nivel de líquido  $h_i$  para cada uno de ellos, entradas  $q_1$  y  $q_2$  de fluido en el tanque 1 y 3 respectivamente y un desagüe incluido en el tanque 3.

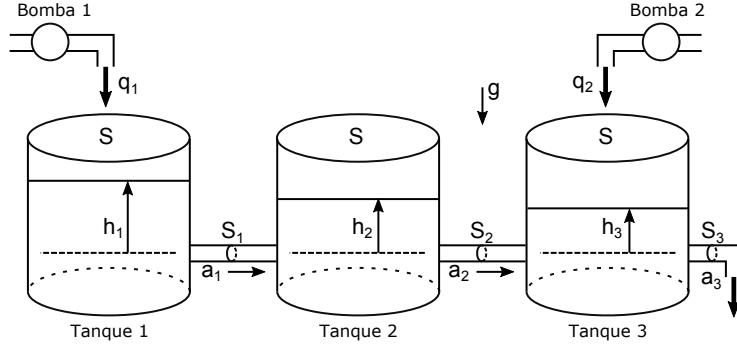


Fig. 1: Diagrama del sistema de tres tanques acoplados.

El conjunto de ecuaciones que gobiernan al sistema es

$$\begin{cases} \dot{Sh}_1 = q_1 - S_1 a_1 \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) \sqrt{2g|h_1 - h_2|} \\ \dot{Sh}_2 = S_1 a_1 \operatorname{sgn}(h_1 - h_2) \sqrt{2g|h_1 - h_2|} - S_2 a_2 \operatorname{sgn}(h_2 - h_3) \sqrt{2g|h_2 - h_3|} \\ \dot{Sh}_3 = q_2 + S_2 a_2 \operatorname{sgn}(h_2 - h_3) \sqrt{2g|h_2 - h_3|} - S_3 a_3 \sqrt{2gh_3} \end{cases} \quad (1)$$

Los valores numéricos de simulación son los que se presentan en la Tabla 1. Además se omite para este modelo los efectos de saturación en el nivel de fluido del tanque y en el máximo caudal de entrada.

TABLA 1: PARÁMETROS ESTABLECIDOS DEL MODELO.

Área para cada tanque ( $S$ )	$0.0171 \text{ m}^2$
Área para cada tubo ( $S_1, S_2, S_3$ )	$0.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2$
Coeficiente de flujo del tubo ( $a_1$ )	0.511
Coeficiente de flujo del tubo ( $a_2$ )	0.5279
Coeficiente de flujo del tubo ( $a_3$ )	0.7313
Constante de la gravedad ( $g$ )	$9.81 \text{ m/s}^2$

## 2. Espacio de Estados y Linealización en Punto de Equilibrio

Las variables de estado del sistema son los tres niveles  $\vec{x} = (h_1, h_2, h_3)^T \in \mathbb{R}^3$  de los tanques. Las entradas originalmente son  $q_1$  y  $q_2$ , aunque para simplificar el problema y llevarlo a un caso SISO (Single Input, Single Output) se considerará

$q_2 = Q_2$  constante y entonces una única entrada controlable  $u = q_1 \in \mathbb{R}$ . Como medición de salida se toma el nivel de líquido del tanque 3 ( $y = h_3 \in \mathbb{R}$ ), el cual además es el que se desea controlar.

$$\begin{cases} \vec{x}(t) = \vec{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))^T \\ u(t) = q_1(t) \\ y(t) = h_3(t) \end{cases} \quad (2)$$

Se definen los valores de equilibrio  $h_{1e} = 0.6$  m,  $h_{2e} = 0.5$  m. Luego, del sistema de la Ec. 1 en condición de equilibrio (derivada de  $\vec{x}$  nula) se obtienen los resultados de la Tabla 2.

TABLA 2: PUNTO DE EQUILIBRIO DEL SISTEMA.

Altura de equilibrio en tanque 1 ( $h_{1e}$ )	0.600 m
Altura de equilibrio en tanque 2 ( $h_{2e}$ )	0.500 m
Altura de equilibrio en tanque 3 ( $h_{3e}$ )	0.406 m
Caudal entrante de equilibrio en tanque 1 ( $q_{1e}$ )	$0.35787 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$
Caudal entrante de equilibrio en tanque 2 ( $Q_{2e}$ )	$0.67450 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$

A partir de los datos de la Tabla 2 se obtiene el modelo lineal aproximado del sistema, entorno al punto de equilibrio

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = A (\vec{h} - \vec{h}_e) + B (q_1 - q_{1e}) \quad (3)$$

$$y - y_e = C (\vec{h} - \vec{h}_e), \quad (4)$$

con

$$A = \begin{pmatrix} -0.0105 & 0.0105 & 0 \\ 0.0105 & -0.0216 & 0.0112 \\ 0 & 0.0112 & -0.0186 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 58.4795 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = (0 \quad 0 \quad 1),$$

$$\begin{aligned} \vec{h}_e &= (0.600, 0.500, 0.406), \\ q_{1e} &= 0.35787 \times 10^{-4}, \\ y_e &= 0.406. \end{aligned} \quad (5)$$

### 3. Controlador por Estados Observados

Con las matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , del modelo lineal definido, se construye las matrices de controlabilidad  $W_r$  y observabilidad  $W_o$  de la Ec. 6. En este caso ambas son de rango 3 al igual que el orden del sistema. Por lo tanto el sistema definido en espacio de estados resulta controlable y observable.

$$\begin{aligned} W_r &= \begin{pmatrix} 58.48 & -0.612 & 0.013 \\ 0 & 0.612 & -0.020 \\ 0 & 0 & 0.007 \end{pmatrix} \\ W_o &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.011 & -0.020 \\ 0.117 & -0.450 & 0.471 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

El polinomio característico de la matriz  $A$  es

$$\lambda(s) = s^3 + 0.507 \times 10^{-1}s^2 + 0.589 \times 10^{-3}s + 0.868 \times 10^{-6}, \quad (7)$$

con raíces reales negativas

$$\lambda_1 = -0.342 \times 10^{-1}, \quad \lambda_2 = -0.148 \times 10^{-1}, \quad \lambda_3 = -0.172 \times 10^{-2}. \quad (8)$$

A partir de los coeficientes del polinomio  $\lambda(s)$  se arman las matrices de controlabilidad y observabilidad canónicas  $\tilde{W}_r$  y  $\tilde{W}_o$ , respectivamente.

Como criterio de diseño se construye la respuesta al escalón deseada del sistema a lazo cerrado. Fijando un error de sobrepico OS de un 1 % y un tiempo de establecimiento  $T_s$  de 10 s se consigue aproximadamente un  $\xi = 0.81$  y  $\omega_n = 0.5$ . De esto se desprenden dos polos del sistema  $\gamma_{1,2} = -0.405 \pm 0.293i$ , los cuales serán además los polos dominantes. Se ubica el resto de los polos 10 veces más alejados a los dominantes, para que no infieran sobre la respuesta al escalón.  $\gamma_3 = -4$ .

De las raíces conseguidas se construye el polinomio característico

$$\gamma(s) = s^3 + 0.481 \times 10^1 s^2 + 0.349 \times 10^1 s + 0.100 \times 10^1. \quad (9)$$

Con esto se obtiene la matriz de ganancia

$$K = \begin{pmatrix} 0.814 \times 10^{-1} & 0.539 \times 10^1 & 0.138 \times 10^3 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

El factor de ganancia feedforward es

$$k_r = 147. \quad (11)$$

Los polos del observador deberán ubicarse sobre el eje real del plano complejo mucho más a la izquierda que los del sistema a lazo cerrado ( $A - BK$ )

$$\rho_1 = -40, \quad \rho_2 = -41, \quad \rho_3 = -42. \quad (12)$$

Entonces el polinomio característico es

$$\rho(s) = s^3 + 0.123 \times 10^3 s^2 + 0.504 \times 10^4 s + 0.689 \times 10^5. \quad (13)$$

Se obtiene la matriz

$$L = \begin{pmatrix} 0.232 \times 10^7 \\ 0.451 \times 10^6 \\ 0.123 \times 10^3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

## 4. Modelo en Simulink

A partir de los valores obtenidos en la Sección 3, se presenta el modelo cargado en el simulador Simulink (MATLAB 7.12.0 R2011a) en las Fig. 2 - 4.

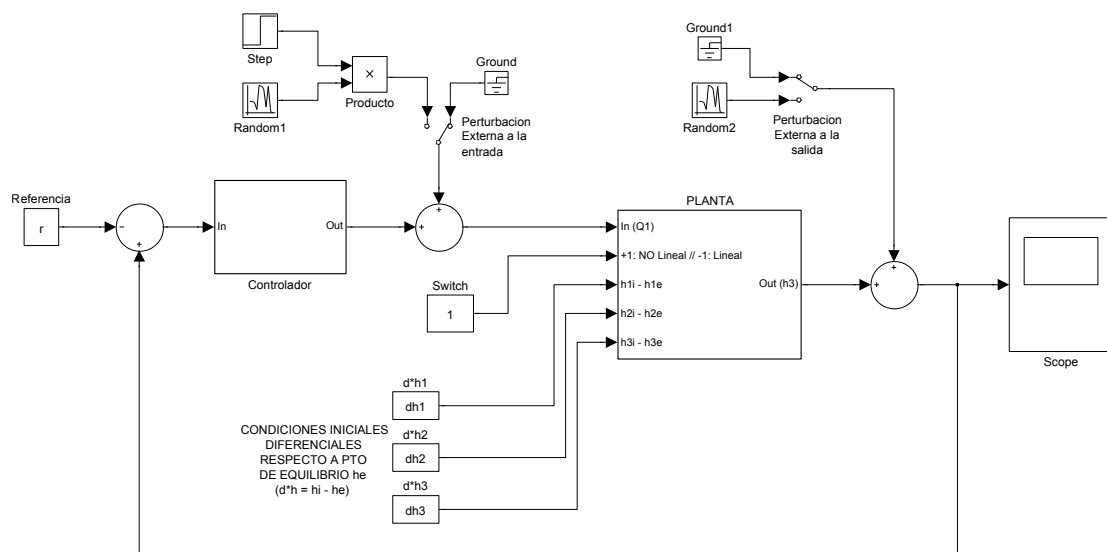


Fig. 2: Sistema SISO con lazo cerrado de control.

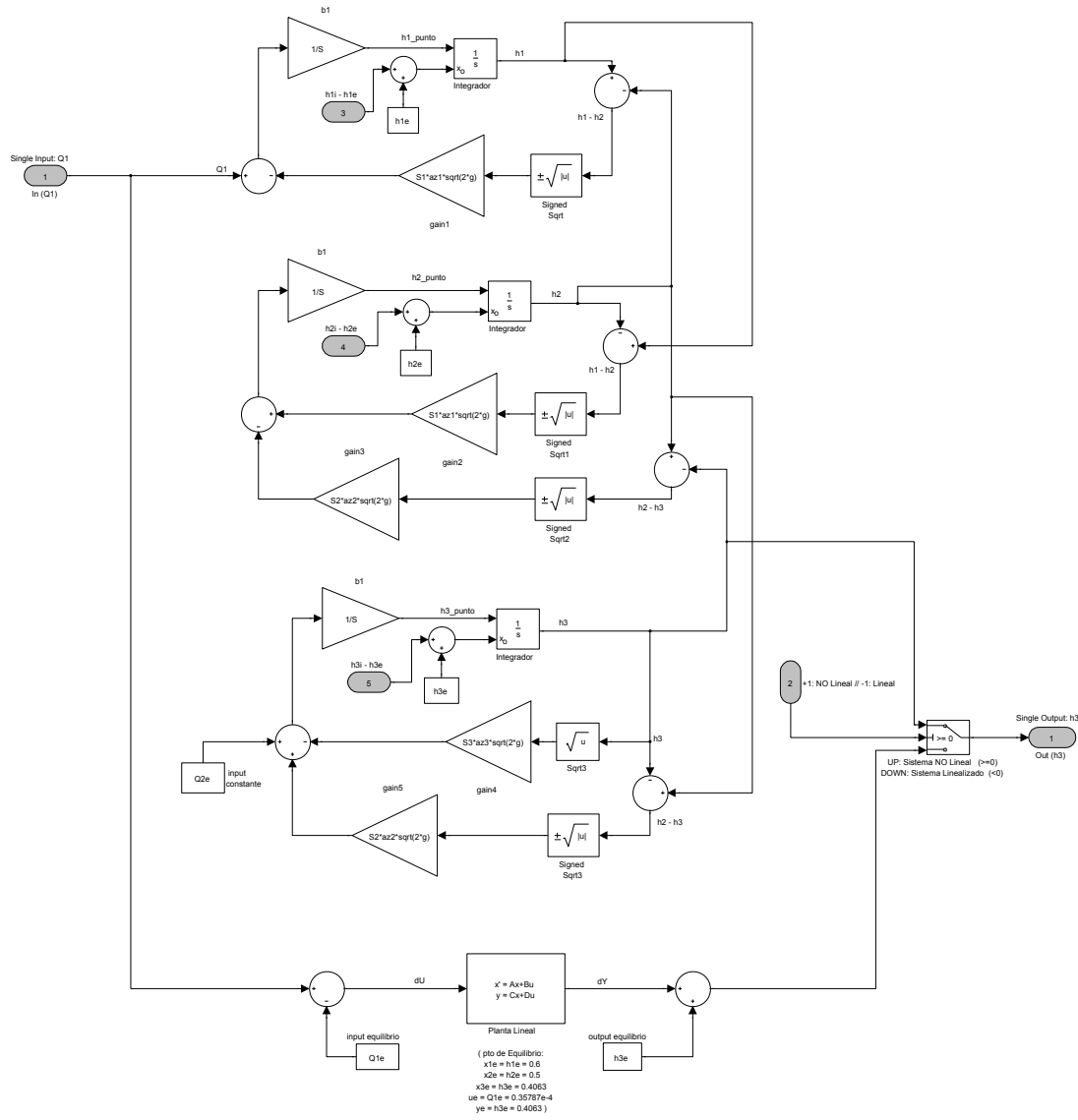


Fig. 3: Modelo de la planta “no lineal” de 3er orden.

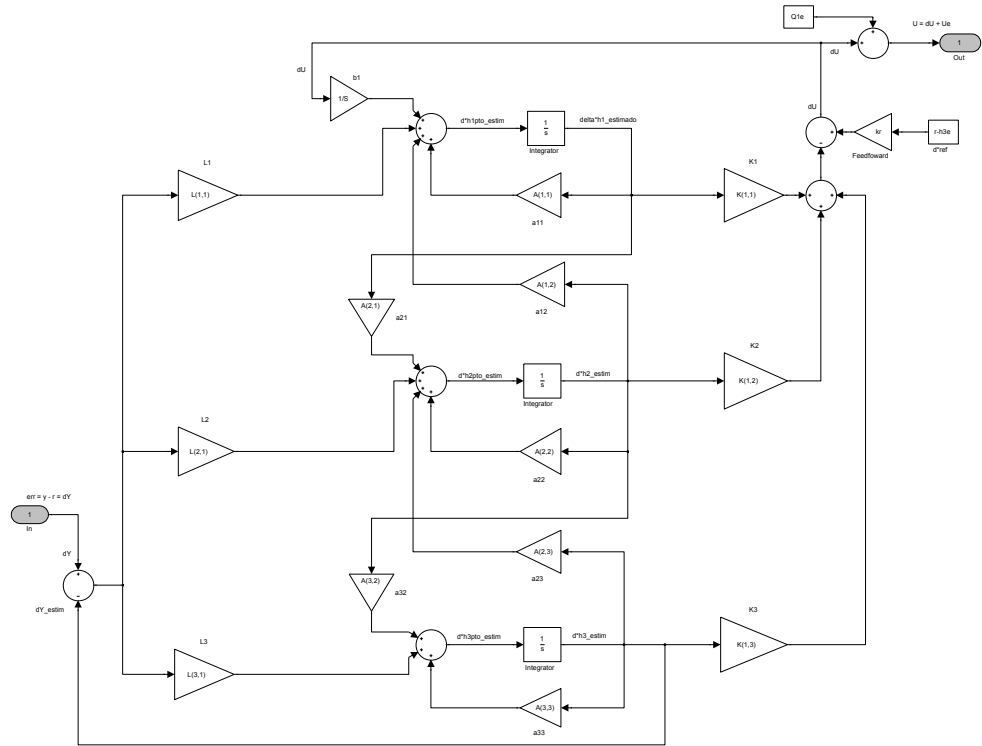


Fig. 4: Controlador por realimentación de estados observados.

## 5. Simulaciones con Simulink