Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2,5puntos)

Dados tres conjuntos arbitrarios no vacíos A, B y C y dos aplicaciones $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$, demuestre que:

a) si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

Solución: a) Supongamos que $g \circ f$ es inyectiva y veamos que f también lo es.
En efecto sean $x, x' \in A$ tales que $f(x) = f(x')$. Componiendo con g se cumple que $g\big(f(x)\big) = g\big(f(x')\big)$. Es decir, $(g \circ f)(x) = (g\circ) f(x')$. Por tanto $x = x'$ pues $g \circ f$ es inyectiva. En consecuencia, g es inyectiva.

b) Supongamos que $g \circ f$ es sobreyectiva y veamos que g también lo es. Sea $z \in C$. Tenemos que ver que existe $y \in B$ tal que $g(y) = z$. En efecto, como $g \circ f$ es sobreyectiva, sabemos que existe $x \in A$ tal que $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = z$. En consecuencia si tomamos $y = f(x)$ se tiene que $y \in B$ y $g(y) = z$. Por tanto, g es sobreyectiva.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$a \,\mathcal{R}\, b \quad \text{si y sólo si} \quad a^2 - b^2 = a - b$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia.

Solución: Veamos que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.

Es reflexiva: para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que $a \,\mathcal{R}\, a$ pues $a^2 - a^2 = a - a = 0$.

Es simétrica: para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que si $a \,\mathcal{R}\, b$ entonces $a^2 - b^2 = a - b$ y por tanto, multiplicando por -1, $b^2 - a^2 = b - a$, es decir, $b \,\mathcal{R}\, a$.

Es transitiva: sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a \,\mathcal{R}\, b$ y $b \,\mathcal{R}\, c$. Por tanto, $\begin{cases} a^2 - b^2 = a - b \\ b^2 - c^2 = b - c \end{cases}$. Sumando ambas igualdades se obtiene $a^2 - c^2 = a - c$ y en consecuencia $a \,\mathcal{R}\, c$.

Observemos que

$$a^2 - b^2 = a - b \iff (a-b)(a+b) = (a-b) \iff (a-b)(a+b-1) = 0$$

por tanto,

$$a \,\mathcal{R}\, b \quad \text{si y sólo si} \quad b = a \ \vee \ b = 1 - a\,.$$

En consecuencia, la clase de cada $a \in \mathbb{R}$ es

$$[a] = \{b \in \mathbb{R} \mid a \,\mathcal{R}\, b\} = \{a, 1-a\}\,.$$

Esto es, la clase de equivalencia de cualquier elemento está formada por el conjunto de dos elementos $\{a, 1-a\}$ salvo si $a = \dfrac{1}{2}$ en cuyo caso la clase tiene un único elemento que es el propio $\dfrac{1}{2}$.

Pregunta 3 (3 puntos)

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario.

a) Demuestre que dados $x, y \in A$ si xy es inversible entonces x e y son inversibles.

b) Demuestre que si $x \in A$ es inversible entonces x no es un divisor de cero.

c) Sea $a \in A$ y sea aA el ideal generado por a. Demuestre que $aA = A$ si y sólo si a es inversible.

Solución: a) Supongamos que xy es inversible. En consecuencia existe $z \in A$ tal que $(xy)z = z(xy) = 1$. Teniendo en cuenta que en un anillo el producto es asociativo, podemos escribir que $x(yz) = 1$ y $(zx)y = 1$. Como el anillo es conmutativo también se tiene que $(yz)x = 1$ e $y(zx) = 1$. Así pues x e y son inversibles siendo yz el inverso de x y zx el inverso de y.

b) Por reducción al absurdo supongamos que existe $x \in A$ inversible y divisor de cero. Sean x^{-1} el inverso de x, que existe pues x es inversible, y $b \in A$ tal que $b \neq 0$ y $xb = 0$, b existe pues x es un divisor de cero. Multiplicando la igualdad $xb = 0$ por x^{-1}, se obtiene $x^{-1}(xb) = x^{-1}0 = 0$. Por tanto, $x^{-1}(xb) = (x^{-1}x)b = 1 \cdot b = b = 0$ que contradice la elección de $b \neq 0$.

c) Se recuerda que en un anillo A el ideal generado por a es:

$$aA = \left\{ ay \ \mid \ y \in A \right\}$$

Supongamos que $aA = A$. En particular el elemento unidad de A, 1, será un elemento de aA. Por tanto existe $c \in A$ tal que $1 = ac$. Teniendo en cuenta que el anillo es conmutativo, se obtiene que a es inversible siendo c el inverso de a.

Recíprocamente, si a es inversible y $a^{-1} \in A$ es el inverso de a, se tiene que $1 = aa^{-1}$. Como para cada $x \in A$ se cumple que $x = 1 \cdot x = (aa^{-1})x = a(a^{-1}x)$, resulta que $x \in aA$. Por tanto $A \subset aA$. La inclusión $aA \subset A$ es siempre verdadera para cualquier elemento a, inversible o no inversible, de A. En conclusión, si a es inversible entonces $aA = A$.

Pregunta 4 (2 puntos)

Sea el número complejo $w = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$

a) Exprese w y w^2 en forma binómica y calcule $1 + w + w^2$.

b) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^3 - 8i = 0$.

Solución: a) Se tiene:

$$w = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$w^2 = \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Por tanto, sustituyendo se obtiene:

$$1 + w + w^2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

b) Pasando a forma polar para $z = r_\alpha$ tenemos la ecuación $r^3_{3\alpha} = 8_{\pi/2}$ y se obtiene:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r^3 & = & 8 \quad (\text{ecuación en } \mathbb{R}_+) \\ 3\alpha & = & \pi/2 \quad [\text{mód } 2\pi] \end{array} \right. \text{, y por tanto: } \left\{ \begin{array}{rcl} r & = & \sqrt[3]{8} = 2 \\ \alpha & = & \dfrac{\pi}{6} \quad [\text{mód } \dfrac{2\pi}{3}] \end{array} \right.$$

Las raíces cúbicas de $8i$, que expresamos también en forma binómica, son:

si $k = 0$, $\quad z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big) = \sqrt{3} + i$

si $k = 1$, $\quad z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\Big) = -\sqrt{3} + i$

si $k = 2$, $\quad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2(0 - i) = -2i$