Álgebra Lineal II, Grado en Matemáticas

Prueba de Evaluación Continua 2014

Ejercicio 1:
Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto a una base ortonormal $\mathcal{B}$ es

$$A = M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

Demostrar que es una isometría vectorial y describirla geométricamente.

Solución:
Para demostrar que es una isometría es suficiente comprobar que la matriz A es ortogonal, es decir, que cumple $AA^t = I$.
Para describir f geométricamente, en primer lugar, determinamos el tipo de isometría estudiando la dimensión del conjunto de vectores fijos $V_f = Ker(f - I)$.

$$\dim V_f = 3 - rg(A - I) = 3 - rg \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Como $\dim V_f = 1$, entonces f es un giro, y precisamente el eje de giro es la recta de vectores fijos V_f. Calculamos unas ecuaciones de esta recta:

$$V_f : (A - I)X = 0 \ \rightarrow \ V_f : \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando se tienen las ecuaciones

$$V_f : (x = 0, \ z = 0).$$

Para determinar el ángulo de giro buscamos la matriz J reducida de f (matriz de Jordan real). La base ortonormal $\mathcal{B}' = \{v_1, \ v_2, \ v_3\}$ tal que $M_{\mathcal{B}'}(f) = J$ cumplirá $v_1 \in V_f$ y $v_2, v_3 \in V_f^{\perp}$. El subespacio complemento ortogonal de V_f tiene ecuaciones

$$V_f^{\perp} : (y = 0).$$

Así, como $\mathcal{B}'$ nos sirve la misma base canónica pero reordenada con el cuidado de que esté orientada positivamente, es decir, que el giro en el plano $V_f^{\perp}$ se produzca en sentido positivo (antihorario)[1]. Para ello, basta con que $\det P = 1$, $P = C(B', B)$ la matriz de cambio de base, y la podemos construir tomando la base ortonormal de la forma $u, v, u \wedge v$, tal y como se explica en las sesiones de tutoría ST3 y ST4. Tomamos

$$\mathcal{B}' = \{v_1 = (0,1,0), \ v_2 = (0,0,1), \ v_3 = (1,0,0)\}, \quad \det P = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

[1]Nótese que si tomamos $\mathcal{B}' = \{v_1, \ v_3, \ v_2\}$ la base no tiene orientación positiva y el giro en V_f se hará en sentido horario. Obtendremos el ángulo de giro opuesto $\frac{\pi}{4}$.

Así,

$$
\begin{aligned}
J &= P^{-1}AP = P^tAP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si θ es el ángulo de giro, se tiene $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, por lo que $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$.

No se descontará nota en la calificación de este ejercicio si se da el ángulo de giro con orientación negativa, es decir $\theta = \frac{\pi}{4}$.

■

Ejercicio 2: Sea f un endomorfismo de $\mathbb{C}^n$ y $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ su matriz respecto a una base dada $\mathcal{B}$. Sabiendo que A es una matriz de rango 1, se pide:

(a) Demostrar que A tiene como mucho un autovalor $a \in \mathbb{C}$ no nulo.

(b) Determinar la multiplicidad algebraica del autovalor 0.

(c) ¿En qué casos es f diagonalizable?

(d) Determine las posibles formas de Jordan de f.

Solución:

(a) Procedamos por reducción al absurdo y supongamos que A tiene dos autovalores no nulos λ_1 y λ_2. Consideremos dos autovectores no nulos asociados a dichos autovalores v_1 y v_2, respectivamente. Estos vectores son linealmente independientes, por lo que podemos formar una base de $\mathbb{C}^n$ de la forma $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$. Las dos primeras columnas de la matriz de f respecto a dicha base son de la forma

$$
B = M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \\ 0 & \lambda_2 & \\ \vdots & 0 & B_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}
$$

y como λ_1 y λ_2 son no nulos, entonces el rango de B es mayor o igual que 2. Como el rango es un invariante por cambios de base, entonces también el rango de A es mayor o igual que 2. Una contradicción.

(b) En primer lugar, vemos que $\lambda = 0$ es autovalor ya que

$$
\dim V_0 = \dim \ker(f - 0I) = n - rg(A - 0I) = n - rg(A) = n - 1.
$$

La multipliciadad geométrica es $d = n - 1$, luego la multiplicidad algebraica es $\alpha \geq d = n - 1$.

Dado que el polinomio característico tiene n raíces en $\mathbb{C}$ y $\lambda = 0$ es una raíz de multiplicidad al menos $n - 1$, entonces tenemos dos posibilidades:

b.1) $\alpha = n$, con lo que $\lambda = 0$ sería el único autovalor, o bien

b.2) $\alpha = n - 1$, con lo que tendríamos dos autovalores:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 0, \ \alpha_1 = n - 1 = d_1; \\
\lambda_2 &\neq 0, \ \alpha_2 = 1 = d_2.
\end{aligned}
$$

(c) Para que sea diagonalizable tienen que coincidir las multiplicidades algebraicas y geométricas, luego el único caso es (b.2) del apartado anterior. Así f es diagonalizable si y sólo si posee un autovalor no nulo.

(d) Formas de Jordan

Caso b.1: $\lambda = 0$ es el único autovalor con multiplicidad algebraica $\alpha = n$ y geométrica $d = n-1$.No es diagonalizable y su forma canónica de Jordan está formada por $d = n-1$ bloques de Jordan. Entonces, la única posibilidad es tener 1 bloque de tamaño 2×2 y $n-2$ bloques de tamaño 1×1 :

$$J = \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right).$$

Caso b.2: La matriz es diagonal $J = diag(0, \overset{n-1)}{\ldots}, 0, \lambda_2)$. ■