La puntuación máxima de cada pregunta se indica en cada una de ellas. Se valorará la exposición de las respuestas dadas. No se permite el uso de ningún tipo de material.

1. (3 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie descrita por la ecuación $z = x^3y + 5y^2$ con el plano $x = 2$ en el punto en el que $y = 1$.

2. (2 puntos) Sea $f(x, y)$ armónica, esto es:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Demostrar que $f(x^2 - y^2, 2xy)$ también es armónica.

3. (2 puntos) Obtener las derivadas parciales primeras de la siguiente función:

$$f(x, y) = \ln \frac{1 - \sqrt{x^2 + y^2}}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

¿Dónde y por qué es esta función diferenciable?

4. (3 puntos) Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x + \operatorname{sen}(x + y)}{x + y} & \text{si } x + y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

Estudiar su continuidad en $\mathbb{R}^2$ y describir el conjunto de puntos de discontinuidad.

Examen 2016 Junio 1a semana

Nelson

1.

La recta que nos piden es la recta resultante de la intersección del plano dado con el plano tangente en el punto dado.

Considerando $f(x,y) = z = x^3y + 5y^2$ el plano tangente en $(2,1)$ tendrá pendientes

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 12$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 10y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 18$$

ademas $f(2,1) = 13$, por lo tanto el plano tangente tendrá la forma

$$12x + 18y - 29 = z$$

si hacemos la intersección cone el plano $x = 2$ tenemos la recta buscada

$$z = 18y - 5$$

2.

Si consideramos $g(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ entonces $f(x^2 - y^2, 2xy) = (f \circ g)(x,y)$. Por la regla de la cadena $\mathbf{D}(f \circ g)(x,y) = \mathbf{D}f(g(x,y))\mathbf{D}g(x,y)$, si $g(x,y) = \overrightarrow{v}$, entonces calculando tenemos

$$\mathbf{D}g(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}f(\overrightarrow{v}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{v}) & \frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{v}) \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\mathbf{D}(f \circ g)(x,y) = \begin{bmatrix} 2x\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{v}) + 2y\frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{v}) & -2y\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{v}) + 2x\frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{v}) \end{bmatrix}$$

y derivando los elementos de la matriz anterior obtenemos

$$\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial^2 x} = 2\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{v}) + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\overrightarrow{v}) + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overrightarrow{v})$$

$$\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial^2 y} = -2\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{v}) + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\overrightarrow{v}) - 2y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\overrightarrow{v})$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial^2 y} = 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right] = 0$$

por lo tanto $(f \circ g)$ es armónica, como queriamos demostrar.

3.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2x}{(1 - x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(1 - x^2 - y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$$

La función es continua en $U = \mathbb{R}^2 - \{(x,y)|1 > x^2 + y^2\}$ y es diferenciable en U por existir sus derivadas y estas ser continuas en U.

4.

Considerando el cambio de variable $t = x + y$ tenemos que

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t-y+\mathrm{sen}(t)}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & si \quad t = 0 \end{cases}$$

Evaluamos en $t = 0$ aproximando por límite

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{t \to 0} \frac{t - y + \mathrm{sen}(t)}{t} = \pm\infty$$

por lo tanto la función es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(x, y)|x + y = 0\}$.