Álgebra Lineal
Febrero 2014

Problema 1

Sea $V = M_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de la matrices cuadradas 2x2 con coeficientes en $\mathbb{R}$ y sean $S = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = d\}$ y $T = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = d, c = 2b\}$.

Calcular las bases de los subespacios $S + T$ y $S \cap T$. (3 puntos)

Solución

Si escribimos $S = \{(a, b, c, a) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ y $T = \{(a, b, 2b, a) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, entonces es muy fácil demostrar que una base de S es $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$ y una base de T es $\{(1, 0, 0, 1), (0, 1, 2, 0)\}$. Por lo tanto $\dim(S) = 3$ y $\dim(T) = 2$.

Como el vector $(0, 1, 2, 0) \in S$, se tiene que $S + T = S$ y $S \cap T = T$, luego las bases serán las de S y T.

Problema 2

A) Sea E un espacio vectorial de tipo finito, y sea L un subespacio vectorial de E. Demostrar que E/L es de tipo finito, y que se cumple que $dim(E/L) = dim(E) - dim(L)$. (2 puntos)

B) Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base del espacio vectorial E, sea L el subespacio vectorial del que unas ecuaciones implícitas respecto de B son

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

y sea $v = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$. Obtener una base del espacio vectorial cociente E/L y calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase $[v]$. (2 puntos)

Solución

A) Pág 182 del libro

B) Pág 187 del libro

Problema 3

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2 + 2u_3, u_1 + 3u_2)$ y las bases $B_1 = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ y $B_2 = \{(1, 1), (1, -1)\}$ a) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base B_1 de $\mathbb{R}^3$ y la canónica de $\mathbb{R}^2$. b) Hallar la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base B_2 de $\mathbb{R}^2$. (3 puntos)

Solución

Importante: En este problema había una errata, el vector $(1,0,-1)$, tendría que ser $(1,0,1)$ porque si no B_1 no es base, pero tanto si os habéis dado cuenta de la errata, como si la habéis resuelto el problema sin daros cuenta, en la corrección del apartado a) lo he puesto como bien resuelto (ya que la técnica de calcular la matriz se podía hacer aunque hubiese esa errata).

a) Puesto que $f(1,1,0) = (0,4)$; $f(1,0,1) = (3,4)$ y $f(0,1,1) = (1,3)$, la matriz del cambio de base es $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

b) Si denominamos $v_1 = (1,1)$ y $v_2 = (1,-1)$ Puesto que $f(1,0,0) = (1,1) = v_1$; $f(0,1,0) = (-1,3) = v_1 - 2v_2$ y $f(0,0,1) = (2,0) = v_1 + v_2$, la matriz del cambio de base es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.