Unidad Didáctica 1: Matrices

1.1. Introducción

Una matriz de orden o tamaño m por n, con elementos en un cuerpo K, es un conjunto de $m \times n$ escalares (o elementos del cuerpo) ordenados en m filas y n columnas. Comenzamos estudiando distintos tipos de matrices y en la Sección 1.1 se presentan las operaciones básicas: suma de matrices y producto de un escalar por una matriz. Estas dos operaciones cumplen una serie de propiedades con las que estamos familiarizados ya que son propiedades (pág. 6) de los cuerpos de números reales y complejos ($\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$), que confieren al conjunto de matrices estructura de espacio vectorial. También se estudia el producto de matrices, de tamaño adecuado, una operación que no cumple algunas de las propiedades "buenas" de las operaciones anteriores. Por ejemplo no es conmutativo: $AB \neq BA$, en general. A veces, para simplificar el producto de matrices resulta interesante contemplar las matrices por "trozos": a esto lo llamamos división por cajas o bloques de una matriz.

La Sección 1.2 se dedica al conocido como **Método de Gauss** que sirve para transformar una matriz A en otra más sencilla B manteniendo ambas propiedades similares más fáciles de estudiar en B que en A. El método consiste en cambiar las filas de una matriz mediante la aplicación de **operaciones elementales** (pág. 16) que consisten en:

(1) Intercambiar dos filas.
(2) Sumarle a una fila otra multiplicada por un escalar.
(3) Multiplicar una fila por un escalar no nulo.

Cada operación elemental tiene asociada una **matriz elemental** que es el resultado de aplicar a la matriz identidad dicha operación elemental. De modo que, aplicarle a una matriz una operación elemental en sus filas es equivalente a multiplicarla por la izquierda por la matriz elemental asociada (pág. 17).

Cuando mediante un número finito e operaciones elementales de filas podemos transformar una matriz A en otra matriz B, decimos que A y B son equivalentes por filas. De entre todas las matrices equivalentes por filas a una matriz A nos interesan dos: las **matrices escalonadas** y la matriz **escalonada reducida** (esta última es única). Llamamos Método de Gauss al algoritmo que transforma una matriz en una escalonada (Teorema 1.24), y Método de Gauss-Jordan al que transforma una matriz en su matriz escalonada reducida equivalente (forma de Hermmite por filas, pág. 25).

En la Sección 1.3 se estudia el **rango** de una matriz, que es el número de filas independientes que tiene. Resulta que el rango de dos matrices equivalentes por filas es igual, y que el rango de una matriz escalonada es igual al número de filas no nulas. Por lo que el rango de una matriz es igual al número de filas no nulas de cualquier matriz escalonada equivalente (Corolario 1.44) y esta caracterización es el método más eficiente de cálculo del rango. En esta sección se estudia también el comportamiento del rango respecto a las operaciones con matrices (Teorema 1.53).

Todo lo hecho por filas, puede hacerse también por columnas y se cumplen las mismas propiedades, de modo que se puede definir una equivalencia entre matrices si podemos pasar de una a otra utilizando operaciones elementales de filas y/o de columnas.

En la Sección 1.4 se estudian los casos de existencia de elemento inverso para el producto entre matrices cuadradas. Una matriz A se dice que es **invertible** o **regular** si tiene elemento inverso para el producto, es decir si existe otra matriz A^{-1} tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$. Entre los ejemplos de matrices invertibles están las matrices elementales. Se tienen distintas caracterizaciones de las matrices inversas (Teorema 1.68) y un método de cálculo eficiente de la inversa utilizando operaciones elementales por filas o por columnas (pág. 44). Terminamos la sección con el concepto de **inversas laterales** para matrices no cuadradas.

En la Sección 1.5 se estudia el concepto de **determinante** de una matriz cuadrada, así como distintas reglas de cálculo: bien sea recurriendo al método de escalonamiento de Gauss o bien utilizando el desarrollo por

una fila o columna a lo que llamamos Método de Laplace. El determinante de una matriz triangular se calcula trivialmente como el producto de los elementos de la diagonal, y el método de escalonamiento simplificará el cálculo del determinante convirtiendo una matriz cuadrada en escalonada (en particular triangular). Esto se puede hacer porque las operaciones elementales se comportan bien respecto al determinante (Proposiciones 1.75, 1.77 y 1.80). Mediante el determinante se obtiene la siguiente caracterización de las matrices invertibles: A tiene inversa si y sólo si $\det(A) \neq 0$ (Teorema 1.84). El determinante se comporta bien respecto al producto y trasposición de matrices:
$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ y $\det(A) = \det(A^t)$.

Dos aplicaciones directas del determinante son:
- El cálculo (poco eficiente) de la inversa según la fórmula $A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{\det(A)}$ (pág. 59).
- El estudio del rango de una matriz por menores (pág. 61).

1.2 Conceptos más importantes

Introducción y Sección 1.1 Operaciones con matrices
Tipos de matrices: fila, columna, cuadrada, diagonal, traspuesta y traspuesta conjugada, simétrica y antisimétrica, hermítica, triangular (superior e inferior), idempotente, nilpotente, involutiva. Matriz identidad, matriz nula y submatriz de una matriz.

Sección 1.2. El Método de Gauss
Combinación lineal de filas. Filas dependientes e independientes.
Operaciones elementales de filas y de columnas.
Matriz escalonada y escalonada reducida.
Método de Gauss y método de Gauss-Jordan.
Matrices equivalentes por filas, y equivalentes por columnas. Matrices equivalentes.
Forma de Hermite por filas (o columnas o matriz escalonada reducida equivalente.

Sección 1.3. Rango de una matriz

Sección 1.4. Inversa de una matriz cuadrada
Matriz invertible o regular.
Inversa por la izquierda. Inversa por la derecha.

Sección I.5. El determinante
Determinante de una matriz cuadrada.
Menor adjunto. Matriz Adjunta.
Fórmulas de Laplace por una fila o columna. Matriz adjunta.
Regla de Sarrus.
Relación del determinante con las operaciones elementales.
Menor principal.
Determinante de Vandermonde (Ejercicio 1.8).

1.3 Resultados de aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con rigor y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) que exhiben las propiedades más importantes de los conceptos anteriores.

Se desarrollarán las siguientes **habilidades**:
- Realizar operaciones con matrices: suma, producto por escalares y producto.
- Aplicar los métodos de Gauss y Gauss-Jordan para convertir una matriz en otra escalonada o escalonada reducida equivalente (por filas y/o columnas).

- Utilizar la relación entre la aplicación de operaciones elementales de fila (o columnas) y los productos matriciales por la derecha (o por la izquierda) de matrices elementales.
- Calcular el rango de una matriz por dos métodos: escalonándola (método de Gauss, el más eficiente) y por el método de los menores.
- Decidir si una matriz es invertible y calcular la inversa por los dos métodos: de Gauss y por la fórmula $A^{-1} = \frac{Adj(A)^t}{\det(A)}$.
- Calcular el determinante de una matriz por los dos métodos:
  - El método de Gauss de escalonamiento.
  - La regla de Laplace: desarrollándolo por una fila o una columna.
- Dominar las propiedades del determinante respecto de las operaciones elementales para simplificar su cálculo.