EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. FEBRERO 2007. 1.SEMANA.

1.Pregunta. Se pide:

i) Enunciar las condiciones de Cauchy-Riemann.

ii) Demostrar que una función $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, abierto, que es diferenciable en sentido real, es también diferenciable en sentido complejo si y solo si verifica las condiciones de Cauchy-Riemann.

2.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema de Morera.

3.Pregunta. Dada la función

$$f(z) = z + e^z,$$

y un rayo L_{θ_0} partiendo del origen

$$L_{\theta_0} = \left\{ z = re^{i\theta_0} \,,\, r \in \mathbb{R} \right\},$$

donde $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, estudiar la existencia del límite

$$\lim_{\substack{z \longrightarrow \infty \\ z \in L_{\theta_0}}} f(z) \ ,$$

en función de θ_0.

4.Pregunta. Estudiar las siguientes singularidades de las funciones:

i) $f(z) = \frac{1}{1-e^z}$ en $z = 2\pi i$,

ii) $f(z) = \frac{1}{sen z - \cos z}$ en $z = \frac{\pi}{4}$.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV I.P.P. FEBRERO 2007

1. SEMANA

1. PROBLEMA Dada la función

$$f(z) = z + e^z,$$

y un rayo L_{θ_0} partiendo del origen

$$L_{\theta_0} = \{z = re^{i\theta_0},\ r \in \mathbb{R}\}$$

donde $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$, estudiar la existencia del límite

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in L_{\theta_0}}} f(z)$$

en función de θ_0.

SOLUCION.

Consideremos primero $\theta_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. entonces si $z = re^{i\theta_0}$

$$|f(z)| \geq |e^z| - |z| = e^{r\cos\theta_0} - r \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

pues $\cos\theta_0 > 0$

Por el contrario si $\theta_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi) \cup (-\pi, -\frac{\pi}{2})$

procedemos

$$|f(z)| \geq |z| - |e^z| = r - e^{r\cos\theta_0} \xrightarrow[r\to\infty]{} \infty$$

y la conclusión es la misma pues en este caso $\cos\theta_0 < 0$

En el caso $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$, también

$$|f(z)| \geq |z| - |e^z| \longrightarrow \infty$$

pues $|e^{ri}| = |e^{-ri}| = 1$.

2. PROBLEMA. Estudiar las siguientes singularidades de las funciones

i) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$ en $z = 2\pi i$

ii) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z - \cos z}$ en $z = \dfrac{\pi}{4}$.

SOLUCION.

i) $f(z) = \dfrac{1}{1-e^z}$ tiene un polo simple en $z = 2\pi i$ pues $\dfrac{1}{f(z)} = 1 - e^z$ tiene un cero simple en $z = 2\pi i$. En efecto $\left(\dfrac{1}{f(z)}\right)' = -e^z$ que distinto de cero en $2\pi i$

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

I.P.P. FEBRERO 2007

1. SEMANA

(CONTINUACION)

ii) La función

$$f(z)=\frac{1}{\operatorname{sen} z-\cos z}$$

tiene un polo simple en $z=\frac{\pi}{4}$ pues la función

$$\frac{1}{f}(z)=\operatorname{sen} z-\cos z$$

tiene un ~~polo~~ simple en $z=\frac{\pi}{4}$.

En efecto

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'=\cos z+\operatorname{sen} z\neq 0 \quad \text{en } z=\frac{\pi}{4}.$$

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. FEBRERO 2007. 2.SEMANA

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el teorema de derivabilidad de una serie de potencias de variable compleja.

2.Pregunta. Enunciar y demostrar las desigualdades de Cauchy.

3.Pregunta. Si $r > 0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

y si en un punto z_0 tal que $|z_0| = r$, la serie converge absolutamente, demostrar que la serie converge absoluta y uniformemente en $\overline{D}(0, r) = \{z \,||z| \leq r\}$.

4.Pregunta. Demostrar que si $f(z)$ es analítica en el conjunto

$$A_R = \{z \,||z| > R\}$$

y $|f(z)|$ es acotado cuando $|z| \longrightarrow \infty$, entonces $f(z)$ admite un desarrollo de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n},$$

en A_R.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN, DE ANALISIS MATEMATICO IV

2. SEMANA. I.P.P. FEBRERO 2007

1. PROBLEMA. Si $r>0$ es el radio de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

y si en un punto z_0 tal que $|z_0|=r$, la serie converge absolutamente, demostrar que la serie converge absoluta y uniformemente en $\bar{D}(0,r)=\{z / |z|\leq r\}$.

SOLUCION.

La hipótesis implica que dado $\varepsilon>0$. $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq n_0} |a_n||z_0|^n = \sum_{n\geq n_0} |a_n| r^n \leq \varepsilon.$$

Ahora dado $z\in \bar{D}(0,r)$, tenemos que

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n||z|^n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n| r^n \leq \varepsilon,$$

luego por el Criterio de Cauchy la serie

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge absolutamente y puesto que dado $\varepsilon>0$ podemos encontrar n_0 independiente de z de tal forma que el resto

$$\left|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n z^n\right| \le \sum_{n=n_0} |a_n||z|^n < \varepsilon$$

la convergencia también es uniforme.

<u>2. PROBLEMA.</u> Demostrar que si $f(z)$ es analítica en el conjunto

$$A_R = \{z \mid |z|>R\}$$

y $|f(z)|$ es acotado cuando $|z|\to\infty$, entonces $f(z)$ admite un desarrollo de la forma

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

<u>SOLUCION.</u> La hipótesis implica que la función

$$g(z)=f\left(\frac{1}{z}\right)$$

es analítica en el disco perforado $\overset{*}{D}(0,R)$ y acotada allí. Luego concluimos que $g(z)$ tiene una singularidad evitable en $z=0$ y por tanto admite un desarrollo $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ en $D(0,R)$, luego $f(z)=g\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ en A_R.

084059	Sept. - 2007 Original	Código 405 **ANALISIS MATEMATICO IV** Código 08 **MATEMATICAS**		
		Duración: 120 min	Modelo: - Parcial: 1ª P.P.	
	Material:Ninguno			Hoja: 1 de 1

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. SEPTIEMBRE 2007

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el teorema que describe el dominio de convergencia de una serie de potencias.

2.Pregunta. Definir el índice topológico de un punto respecto de una curva. Probar que es un número entero.

3.Pregunta. Determinar los radios de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$i)\sum_{n\geq 0} n!z^n,\ ii)\ \sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{n!},\ iii)\sum_{n\geq 0}\frac{z^n}{2^n n^k},$$

donde $k \in \mathbb{N}$ es constante.

4.Pregunta. Utilizando el método de los residuos calcular la integral

$$\int_C \frac{e^z}{z^3+z}dz\ ,$$

donde C es la circunferencia de radio 2 recorrida en sentido positivo una sola vez.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV. I.P.P. SEPTIEMBRE 2007.

1.PROB Determinar los radios de convergencia de las siguientes series de potencias:

i) $\sum_{n\geq 0} n!\, z^n$, ii) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$

ii) $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{2^n n^k}$ donde $k\in\mathbb{N}$ es constante

SOLUCION

i) $\mathbb{R}^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n!}$

Formula de Sterling $n! \simeq n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$

Así pues

$$\mathbb{R}^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{n}{e} \sqrt[2n]{2\pi n} = \infty$$

es decir $\mathbb{R} = 0$.

ii) $$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$$

(Ubl. Stirling) $$= \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{e}{n} \frac{1}{\sqrt[2n]{2\pi n}} \Rightarrow 0$$

, es decir $R = \infty$.

iii) $$R^{-1} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n n^k}} = \frac{1}{2} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{n^k}} = \frac{1}{2}$$

es decir $R = 2$.

2. PROBLEMA. Utilizando el método de los residuos calcular la integral

$$\int_C \frac{e^z}{z^3+z}\, dz \quad ,$$

donde C es la circunferencia de radio 2 recorrida en sentido positivo una sola vez.

SOLUCION

Los posibles polos son las raices de $z^3+z=0$, es decir

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

I.P.P. SEPTIEMBRE 2007. (CONTINUACION).

$$z=0,\ z=i,\ z=-i.$$

Son todos polos simples

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{z^2+1} = 1$$

$$\operatorname{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{\cancel{(z-i)}\, e^z}{z\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{e^i}{i\,2i} = -\frac{e^i}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{e^z \cancel{(z+i)}}{(-i)(z-i)\cancel{(z+i)}} = \frac{e^{-i}}{(-i)(-2i)} = -\frac{e^{-i}}{2}$$

Luego por el Teorema de los Residuos para funciones meromorfas.

$$\int_C \frac{e^z\,dz}{z^3+z} = 2\pi i\left(1 - \frac{e^i+e^{-i}}{2}\right)$$

$$= 2\pi i\,(1-\cos i)$$