Examen de Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- A) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Calcular el valor de a para que $det(A.B^t) = det(B^t.A)$.
(1 punto)
B) Si dos matrices no necesariamente cuadradas A, B cumplen que $A.B = I_n$ (matriz identidad de orden n),
demostrar que entonces ambas tienen rango máximo. (1, 5 puntos)

A) a=1

B) Sean A nxp B pxn
$n = rango(A.B) \leq \min(rango(A), rango(B))$
Si $n \leq p$
$rango(A) = r \leq n$
$rango(B) = s \leq n \rightarrow rango(A) = rango(B) = n$
Si $p \leq n$ se procede de forma análoga.

2.- Sea $f : R^4 \rightarrow R^4$ una aplicación lineal y a un escalar que cumple las siguientes propiedades:
i) $f(0,0,0,1) = (0,0,1,1)$ y $f(0,0,1,0) = (a,1,1,1)$. ii) $ker(f)$ contiene al subespacio vectorial $H = \{(x,y,z,t) \mid t = y + z = 0\}$.
A) Calcular la dimensión del núcleo y una base de la imagen de f. (2 puntos)
B) Calcular el rango en función de a de la matriz M de f respecto a la base estándar. (2 puntos)

A) $f(0,0,0,1) = (0,0,1,1)$ y $f(0,0,1,0) = (a,1,1,1)$ →los vectores

$(0,0,1,1),(a,1,1,1)$ son linealmente independientes,
luego $dim(im(f)) \geq 2$

$ker(f)=$
$\{(x,y,z,t) \mid t = y+z = 0\} = \{(x,y,-y,0) \mid x,y \in R\} = \{x(1,0,0,0) + y(0,1,-1$
$\dim(\ker(f)) \geq 2$

$dim(R^4) = 4 = \dim(im(f)) + \dim(\ker(f))$, luego $dim(im(f)) = 2$
$\dim(\ker(f)) = 2.$

B) $u_1 = (1,0,0,0),\ u_2 = (0,0,1,0),\ u_3 = (0,1,-1,0),\ u_4 = (0,0,0,1)$
$\to f(u_1) = (0,0,0,0), f(u_2) = (a,1,1,1),\ f(u_3) = (0,0,0,0),$
$f(u_4) = (0,0,1,1)$

$e_1 = u_1,\quad e_2 = u_2 + u_3,\quad e_3 = u_2,\ e_4 = u_4$

$\to f(e_1) = (0,0,0,0),\quad f(e_2) = (a,1,1,1),$
$f(e_3) = (a,1,1,1), f(e_4) = (0,0,1,1)$

M= $\begin{pmatrix} 0 & a & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rango(M) = 2.$

3.- Dados tres vectores linealmente independientes u_1,u_2,u_3 en un espacio vectorial E,
se considera los subespacios $V = L(u_1 - u_2, u_2 - u_3)$ y
$W = L(u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3)$.
A) ¿Cuál es la dimensión de $V \cap W$ y $V+W$?. (2 puntos)
B) Encontrar una base de $V \cap W$. (1,5 puntos)

A) rango $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 = \dim(V)$, rango
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 = \dim(W)$

$dim(V \cap W) = \dim(V) + \dim(W) - \dim(V + W)$

$V + W = L(u_1 - u_2, u_2 - u_3, u_1 + u_2 + u_3, u_2 + u_3)$

$$dim(V + W) = rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow dim(V \cap W) = 1$$

B) $\lambda(u_1 - u_2) + \mu(u_2 - u_3) = \tau(u_1 + u_2 + u_{3)} + \rho(u_2 + u_3)$

$u_1(\lambda - \tau) + u_2(-\lambda + \mu - \tau - \rho) + u_3$

$(- \mu - \tau - \rho) = 0 \rightarrow \mu = \tau - \rho \rightarrow \lambda = 2\mu$

$\lambda(u_1 - u_2) + \mu(u_2 - u_3) = 2\mu(u_1 - u_2) + \mu(u_2 - u_3) = \mu(2u_1 - u_2 - u_3)$.

Una base está formada por el vector $2u_1 - u_2 - u_3$.

Examen de Álgebra Lineal I

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- A) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Encontrar $det(A^{-1}.A^t.A)$ (1 punto)

B) Sea A una matriz cuadrada de orden n, tal que $A^2 = 0$. Demostrar que $I_n + A$ es invertible. (1,5 puntos)

A)

$det(A^{-1}.A^t.A) = det(A^{-1}).\det(A^t).\det(A) = \frac{1}{\det(A)}\det(A^t).\det(A) = \det(A^t) =$

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -14$

B) Matriz inversa $(I_n - A)$

$(I_n + A)\ .\ (I_n - A) = I_n^2 - A^2 = I_n$

2.-Sean $a, b \in R$ y sea $f : R^3 \to R^3 : x \to y$ la aplicación lineal dada por $y^t = Ax^t$,

con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y consideremos el vector $u = (b, 1+b, 4)$.

A) Determinar a y b para que $u \in im(f) \neq R^3$. Obtener las ecuaciones implícitas y paramétricas de $im(f)$ y $\ker(f)$. (3 puntos)

B) Encontrar un subespacio $L \subset R^3$ de dimensión mínima entre los que cumplen que $f(L) = im(f)$. (1 puntos)

A)

$$rango(A) < 3, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 + a \to a = 3 \to rango(A) = 2.$$

$dim(im(f)) \leq 2$, las dos últimas columnas son independientes son una base de $im(f)$

Las ecuaciones paramétricas son: $x_1 = \lambda, x_2 = \mu, x_3 = \lambda + 2\mu$

La ecuación implícita es $\begin{vmatrix} x_1 & 1 & 0 \\ x_2 & 0 & 1 \\ x_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 = -x_1 - 2x_2 + x_3$

Puesto que $u = (b, 1 + b, 4)$ tiene que verificar la ecuación anterior, se tiene que $0 = -b - 2(1 + b) + 4 \to b = \frac{2}{3}$

Se tiene que las ecuaciones implíctas de $ker(f)$ son dos ecuaciones al tener dimensión 1

$0 = Ax^t,\ \ x_1 + x_2 = 0,\ \ x_1 + x_3 = 0, 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \to x_1 + x_2 = 0,$
$x_1 + x_3 = 0,$ paramétricas $x_1 = \lambda, x_2 = -\lambda, x_3 = -\lambda$

B) En el apartado anterior hemos visto que las im(f) está generada por las imágenes del (0,1,0) y (0,0,1),
$im(f) = f(L)$ donde L = L$[(0,1,0),(0,0,1)]$, si otro subespacio W verifica que $f(W) = im(f)$

$$dim(W) \geq \dim(f(W) = \dim(im(f)) = 2.$$

3.- Sea $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ una base de un espacio vectorial E y sean: i) U el subespacio con ecuaciones $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$ respecto de B. ii) W el subespacio de E generado por los vectores
$\omega_1 = u_1 + u_2, \omega_2 = u_1 - u_3, \omega_3 = u_1 + u_4$.

A) Calcular las dimensiones de U y W. (1,5 puntos)

B) Calcular las dimensiones de $U \cap W$ y $U + W$. (2 puntos)

A) Dimensión de U

rg$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \rightarrow \dim(U) = 4-2$

$dim(W)$=rg$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$,

B) La ecuación implícita de W es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 1 & x_4 \end{vmatrix} : -x_2 + x_3 - x_4 + x_1 = 0$$

$U \cap W \rightarrow x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = -x_2 + x_3 - x_4 + x_1 = 0$, son los vectores de la forma
$(\lambda, \lambda, \mu, \mu) = \lambda(1,1,0,0) + \mu(0,0,1,1)$, por lo tanto tiene dimensión 2, así

$dim(U+W) = dim(U) + dim(W) - dim(U \cap W) = 2 + 3 - 2 = 3.$