Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2013/2014, Septiembre

1. Consideremos un muelle de constante *k* y longitud en reposo L_0. Su extremo fijo está en la posición *x*=0, mientras que el otro extremo sujeta una partícula que puede moverse sobre el eje x. Además, la partícula está sometida a otra fuerza que también es conservativa y que está definida por la energía potencial

$$U(x) = \frac{2}{x} - k \cdot L_0 \cdot x$$

Calcule la posición de equilibrio (aquella que minimiza la energía potencial total) del sistema. **(2 puntos)**

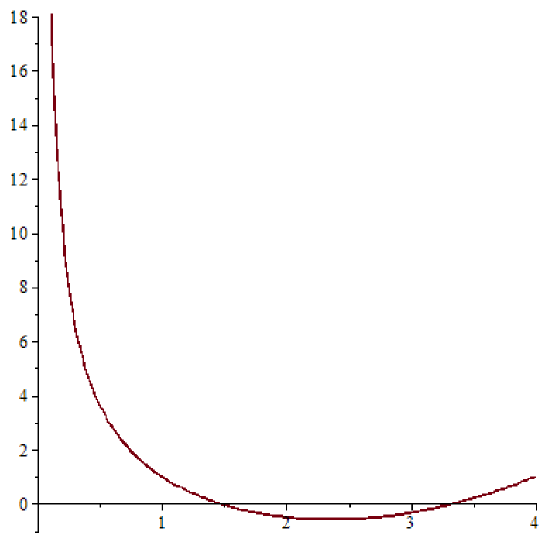
Solución

La fuerza que ejerce el muelle sobre la partícula: $F = -k \cdot (x - L_0)$, es conservativa y su energía asociada es $U_m(x) = -\int F(x) \cdot dx = \frac{k}{2}(x - L_0)^2$.

La posición de equilibrio del sistema es aquella en la que la energía potencial total es mínima.

$$U_T = \frac{k}{2}(x - L_0)^2 + \frac{2}{x} - k \cdot L_0 \cdot x$$

representada en la figura siguiente para $L_0 = k = 1$,



Derivamos la función anterior para obtener los extremos:

$$\frac{dU}{dx} = \frac{k \cdot x^3 - 2 \cdot k \cdot L_0 \cdot x^2 - 2}{x^2}$$

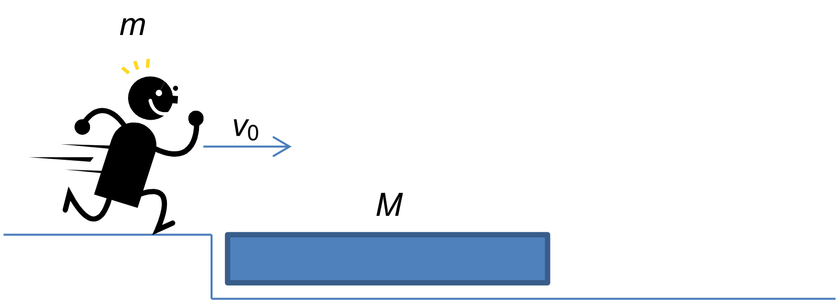
Por tanto, la solución de la ecuación $f(x) = k \cdot x^3 - 2 \cdot k \cdot L_0 \cdot x^2 - 2 = 0$ nos da el punto fijo solicitado. No se puede dar la solución analítica pero es fácil comprobar que tiene que haber una solución positiva, ya que $f(0) = -2$ y $f(\infty) = \infty$.

Al tomar la segunda derivada:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = k + \frac{4}{x^3}$$

está claro que es positiva para cualquier valor positivo de x, por lo que el punto fijo será un mínimo.

2. Como se muestra en la figura, un niño de masa *m*=30 kg que está corriendo a 4,0 m/s se sube en un trineo de *M*=50 kg, que inicialmente estaba en reposo sobre una superficie horizontal de hielo sin rozamiento, quedándose parado sobre el trineo. Después de deslizar durante unos instantes, el niño salta del trineo de tal forma que se queda parado con respecto al suelo mientras que el trineo sigue avanzando. Calcule la energía total del sistema niño-trineo cuando el niño acaba de saltar sobre el trineo, y en el momento final cuando está en reposo en el suelo. Justifique razonadamente que estos valores sean iguales o diferentes. **(2 puntos)**



Solución

a) Momento en el que niño se sube al trineo. Por conservación de la cantidad de movimiento la velocidad final del sistema niño-trineo es

$$v_1 = \frac{m}{m+M} v_0 = 1.5\ m/s$$

Y la energía del sistema es igual a la energía cinética:

$$T = \frac{1}{2}(m+M) \cdot v_1^2 = 90\ \mathrm{J}$$

La velocidad después de que salte del trineo viene determinada igualmente por la conservación de momento (teniendo en cuenta que la velocidad del niño es 0)

$$v_f = \frac{m+M}{M} v_1 = 2.4\ m/s$$

Por lo que la energía del sistema niño-trineo en la situación final es de

$$T = \frac{1}{2} M \cdot v_f^2 = 144\ J$$

El incremento en la energía viene dado por la fuerza ejercida por el niño para saltar del trineo de modo que se quede en reposo en la posición final.

3. En relatividad general, el horizonte de sucesos es una superficie imaginaria de forma esférica que rodea a un agujero negro, en la cual la velocidad de escape necesaria para alejarse del mismo coincide con la velocidad de la luz (3×10^8 m/s). Por ello, ninguna cosa dentro de él, incluyendo los fotones (partículas que "componen" la luz), puede escapar debido a la atracción de un campo gravitatorio extremadamente intenso. Supongamos que en la etapa final de nuestro Sol, éste colapsa gravitatoriamente debido a la atracción gravitatoria provocada por su propia masa. Esto significa que su radio comienza a disminuir con el tiempo y su densidad aumenta. Sabiendo que la masa del Sol es aproximadamente de 2×10^{30} kg, calcular el radio máximo que debería tener el nuevo objeto (lo que podría identificarse con su horizonte de sucesos) para que pudiera considerarse como un agujero negro. $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ **(1,5 puntos)**

Solución:

La velocidad de escape de una partícula tiene la forma:

$$v_e = \sqrt{2gR}\ ,$$

siendo *g* la aceleración del campo gravitatorio a una distancia *R*. En nuestro caso, para calcular el horizonte de sucesos tenemos que considerar que esa partícula es un fotón que se mueve a la velocidad de la luz *c*. Así pues tenemos:

$$c = \sqrt{2gR} = \sqrt{2G\frac{M}{R}}\ .$$

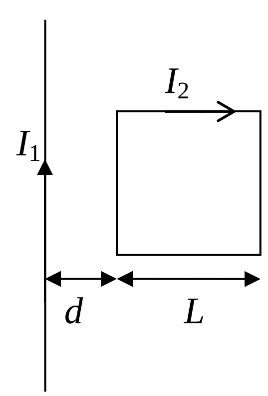
Despejando obtenemos el radio de nuestra estrella convertida en agujero negro:

$$R = 2G\frac{M}{c^2} = 2964\ \mathrm{m}$$

4. Supongamos que tenemos la configuración mostrada en la figura. A la izquierda tenemos un conductor rectilíneo de longitud infinita por el que circula una corriente I_1. A su derecha tenemos una espira cuadrada de lado L por la que circula una corriente con intensidad I_2 en el sentido de las agujas del reloj. Calcular la fuerza que la corriente rectilínea ejerce sobre cada uno de los lados de la espira. **(3 puntos)**

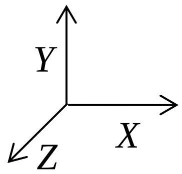
Ayuda: El módulo del campo magnético generado por una corriente rectilínea infinita a una distancia *r* de la misma es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Solución

Consideramos los siguientes ejes cartesianos



Lados paralelos a la corriente rectilínea (el campo magnético es constante en todos los puntos):

Lado cercano:

$$\mathbf{F} = I_2 \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 L I_1 I_2}{2\pi d}\mathbf{i}\,.$$

Lado lejano:

$$\mathbf{F} = I_2 \mathbf{L} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 L I_1 I_2}{2\pi\left(d+L\right)}\mathbf{i}$$

Lados perpendiculares a la corriente rectilínea (el campo magnético varía en cada punto del lado):

Lado arriba:

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx\,\mathbf{j} \quad \to \quad \mathbf{F} = \int_d^{L+d} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx\,\mathbf{j} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{L+d}{d}\right)\mathbf{j}$$

Lado abajo:

$$d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx\,\mathbf{j} \quad \to \quad \mathbf{F} = -\int_d^{L+d} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx\,\mathbf{j} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln\left(\frac{L+d}{d}\right)\mathbf{j}$$

5. Un rectángulo cuyos lados miden en reposo 0,5m y 0,75 m se mueve con velocidad 0,5c respecto a un observador en reposo. La velocidad es paralela al lado mayor. Calcular la velocidad a la que debe moverse para que al observador le parezca un cuadrado. **(1,5 puntos)**

Solución

Mientras que el lado perpendicular al movimiento no se deforma, el lado en la dirección del movimiento se contrae

$$L = \gamma^{-1} L_P\,,$$

donde $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Queremos que $L = 0,5$. Despejando obtenemos

$$\gamma = \frac{L_P}{L} \quad \to \quad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{L}{L_P}\right)^2} = 0,745c$$