Pregunta 1 (2, 5 puntos)
Demuestre que en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se tiene para $x, y, z \in \mathcal{H}$,

$$\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\|$$

si y sólo si

$$\text{existe } \alpha \in [0, 1] \text{ tal que } y = \alpha x + (1 - \alpha)z\,.$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ el espacio de las funciones polinómicas reales de grado menor o igual que 2. Se define la aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \,:\, \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \langle P, Q \rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \end{aligned}$$

a) Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{H}$.

b) Encuentre las constantes a y $b \in \mathbb{R}$ que minimizan la expresión $\|x^2 - ax - b\|$ para la norma inducida por el producto interno del apartado anterior.

Pregunta 3 (2,5 puntos) (1+1,5)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano real y $T \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ una aplicación tal que $T(0) = 0$ y $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.
a) Demuestre que $\|T(x)\| = \|x\|$ y que $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

b) Calcule $\|T(x + y) - T(x) - T(y)\|^2$. Deduzca que T es lineal.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sabiendo que $\displaystyle\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big((2n-1)t\big)}{(2n-1)^3}$ es el desarrollo en serie de Fourier de la función impar,

$$g(t) = \begin{cases} t(\pi + t) & \text{si } -\pi \le t < 0, \\ t(\pi - t) & \text{si } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

deduzca

a) la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$; b) la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$.