Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2018, 2ª. Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Autovalor y autovector.

(b) Signatura.

(c) Matriz de un producto escalar.

(d) Subespacio máximo asociado a un autovalor.

Ejercicio 1: (2 puntos)

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$. Demuestre que si f transforma una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V en otra base ortonormal $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ de V, entonces f es una isometría.

Ejercicio 2: (2 puntos)

Sean V un espacio vectorial real, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y f un endomorfismo de V que cumple las siguientes condiciones:

(a) Tiene dos autovalores distintos λ_1 y λ_2 con multiplicidades algebraicas $a_1 + a_2 = 4$.

(b) El núcleo de f es $\mathrm{Ker}(f) \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\, x_4 = 0\}$

(c) $f(v_4) = 3v_4$ y $v_1 - v_2$ es un autovector.

Determine si f es diagonalizable.

Ejercicio 3: (2 puntos)

Determine las ecuaciones de los planos invariantes irreducibles del endomorfismo f cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: (2 puntos)

Sean $P_1 \equiv \{x + 2y - z = 0\}$ y $P_2 \equiv \{x + 2y + z = 0\}$ dos planos del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$. Considerando el producto escalar estándar, halle una base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ tal que el subespacio generado por los vectores u_1 y u_2 esté contenido en el plano P_1 y el subespacio generado por los vectores u_1 y u_3 no esté contenido en el plano P_2.