# Introducción a los espacios de Hilbert

## Resolución de los ejercicios recomendados. Capítulo 6

### Ejercicio 1

Se comprueba sin dificultad que $T$ es un operador lineal. Veamos que $T$ es acotado.

$$\|T(x)\|_2^2 = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + x_4^2 + \cdots \leqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \cdots) = 4\|x\|_2^2$$

Es decir:

$$\|T(x)\|_2 \leqslant 2\|x\|_2 \tag{1}$$

En consecuencia, $T$ es un operador acotado.
Para cada $x \in \ell^2$ se tiene:

$$T^2(x) = T\big(T(\{x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\})\big) = T\big(\{0, 2x_1, x_2, 2x_3, x_4, \ldots\}\big) = \{0, 0, 2x_1, 2x_2, 2x_3, \ldots\}.$$

En particular se obtiene que $\|T^2(x)\|_2 = 2\|x\|$. En consecuencia, $\|T^2\| = 2$.

Por otro lado, de (1) se deduce que $\|T\| \leqslant 2$, y teniendo en cuenta que si $z = \{x_1, 0, x_3, 0, \ldots\}$ entonces $T(z) = \{0, 2x_1, 0, 2x_3, 0, \ldots\}$ resulta que $\|T(z)\|_2 = 2\|z\|_2$, y se obtiene finalmente que $\|T\| = 2$. Obsérvese que $\|T^2\| \neq \|T\|^2$.

El operador adjunto $T^*$ cumple que $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$, es decir, $2x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + 2x_3\overline{y_4} + \cdots = x_1\overline{y_1^*} + x_2\overline{y_2^*} + x_3\overline{y_3^*} + \cdots$ de donde $T^*(y) = \{y_1^*, y_2^*, y_3^*, \cdots\} = \{2y_2, y_3, 2y_4, \cdots\}$.

### Ejercicio 2

Teniendo en cuenta las propiedades lineales de la derivación, se deduce sin dificultad que $T$ es un operador lineal. Por otro lado,

$$\|T(f)\|_{\mathcal{H}_2}^2 = \|f'\|^2 = \int_0^1 |f'(x)|^2 dx \leqslant \int_0^1 \big(|f(x)|^2 + |f'(x)|^2\big) dx = \|f\|_{\mathcal{H}_1}^2$$

y en consecuencia, $T$ es un operador acotado.

### Ejercicio 3

Observemos en primer lugar que para cada $t \in [0,1]$,

$$T(f)(t) = \int_0^t f(x)dx = \int_0^1 \chi_{[0,t]}(x) f(x) dx\,.$$

Por tanto, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene

$$\begin{aligned} |T(f)(t)|^2 &= |\langle \chi_{[0,t]}, \overline{f}\rangle|^2 \leqslant \|\chi_{[0,t]}\|^2 \|f\|^2 \\ &= \Big(\int_0^1 |\chi_{[0,t]}|^2(x) dx\Big)\|f\|^2 = t\|f\|^2 \end{aligned}$$

En consecuencia, $T(f) \in L^2[0,1]$ y además se cumple

$$\begin{aligned} \|T(f)\|^2 &= \int_0^1 |T(f)(t)|^2 dt \leqslant \int_0^1 t\|f\|^2 dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \|f\|^2 \\ &= \frac{1}{2}\|f\|^2\,. \end{aligned}$$

Por tanto, $\|T\| \leqslant 1/\sqrt{2}$.

### Ejercicio 4

El operador $T$ es lineal pues el producto interno es lineal en la primera variable. Si $u = 0$ entonces $T = 0$ y por tanto $\|T\| = 0$. Supongamos ahora que $u \neq 0$. De la desigualdad de Cauchy Schwarz se deduce que

$$\|T(x)\| = \|\langle x, u\rangle v\| = |\langle x, u\rangle|\|v\| \leqslant \|x\|\|u\|\|v\|\,,$$

y en consecuencia $T$ es un operador acotado y $\|T\| \leqslant \|u\|\|v\|$. Además $\|T(u)\| = \|\langle u, u\rangle v\| = \|u\|^2\|v\|$, luego

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geqslant \frac{\|T(u)\|}{\|u\|} = \|u\|\|v\|$$

y por tanto $\|T\| = \|u\|\|v\|$.

Comprobemos que el operador adjunto está definido por $T^*(y) = \langle y, v\rangle u$. En efecto,

$$\Big\langle x, \langle y, v\rangle u\Big\rangle = \overline{\langle y, v\rangle}\langle x, u\rangle = \langle x, u\rangle \langle v, y\rangle = \Big\langle \langle x, u\rangle v, y\Big\rangle = \langle T(x), y\rangle .$$

## Ejercicio 9

Observemos en primer lugar que dado que para todo $y \in \mathcal{H}$, $\langle y, \alpha x + \beta z\rangle = \overline{\alpha}\langle y, x\rangle + \overline{\beta}\langle y, z\rangle$, se obtiene, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y para todo $x, z \in \mathbb{H}$ la relación entre operadores

$$T_{\alpha x+\beta z} = \overline{\alpha}T_x + \overline{\beta}T_z .$$

Notemos además que el producto definido en $\mathcal{H}'$ cumple

$$\langle T_y, T_x\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}.$$

a) Veamos que $\mathcal{H}'$ es un espacio de Hilbert. Sean $T$, $S$ y $Q \in \mathcal{H}'$ y $y, z, x \in \mathcal{H}$ tales que $T = T_y$, $S = T_x$ y $Q = T_z$.
Es definido positivo:
$\langle T, T\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle y, y\rangle_{\mathcal{H}} \leqslant 0$ y si $\langle T, T\rangle_{\mathcal{H}'} = 0$ entonces $y = 0$ y por tanto $T = 0$.
Es hermítico:
$\langle T, S\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle T_y, T_x\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle x, y\rangle_{\mathcal{H}} = \overline{\langle y, x\rangle}_{\mathcal{H}} = \overline{\langle T_x, T_y\rangle}_{\mathcal{H}'} = \overline{\langle S, T\rangle}_{\mathcal{H}'}$ .
Es lineal en la primera variable:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha S + \beta Q, T\rangle_{\mathcal{H}'} &= \langle \alpha T_x + \beta T_z, T_y\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle \alpha T_{\overline{\alpha}x+\overline{\beta}z}, T_y\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle y, \overline{\alpha}x + \overline{\beta}z\rangle_{\mathcal{H}} \\
&= \alpha\langle y, x\rangle_{\mathcal{H}} + \beta\langle y, z\rangle_{\mathcal{H}} = \alpha\langle T_x, T_y\rangle_{\mathcal{H}'} + \beta\langle T_z, T_y\rangle_{\mathcal{H}'} \\
&= \alpha\langle S, T\rangle_{\mathcal{H}'} + \beta\langle Q, T\rangle_{\mathcal{H}'} .
\end{aligned}$$

$\mathcal{H}'$ con la norma inducida es un espacio completo pues si $\{T_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}'$ y $\{x_n\}$ es la correspondiente sucesión en $\mathcal{H}$ tal que $T_n = T_{x_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Tomando $x = \lim_n x_n$, resulta que $\|T_x - T_n\| = \|x - x_n\|$ y en consecuencia $\{T_n\}$ es una sucesión convergente a $T_x$ en $\mathcal{H}'$.

b) $\{Tx_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal pues

$$\langle T_{x_i}, T_{x_j}\rangle_{\mathcal{H}'} = \langle x_j, x_i\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{ji} = \delta_{ij}.$$

Para ver que es base ortonormal bastará ver, por el teorema 4.11, que se verifica la identidad de Parseval. En efecto, sea $T \in \mathcal{H}'$ y $x \in \mathcal{H}$ tal que $T = T_x$. Se tiene:

$$\|T\|^2 = \|x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle x, x_n\rangle_{\mathcal{H}}\big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle T_{x_n}, T_x\rangle_{\mathcal{H}'}\big|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big|\langle T, T_{x_n}\rangle_{\mathcal{H}'}\big|^2 .$$

## Ejercicio 10

Definimos el operador $T$ de la manera siguiente. Reescribimos cada $x \in \mathcal{H}$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n$$

y definimos

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\langle x, x_n\rangle x_n . \tag{2}$$

La serie en (2) converge en $\mathcal{H}$ pues

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} \alpha_n\langle x, x_n\rangle x_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2|\langle x, x_n\rangle|^2 \leqslant A^2 \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n|^2|\langle x, x_n\rangle|^2 \leqslant A^2\|x\|^2$$

para todo $N$. Además, tomando límites en $N$ se obtiene

$$\|T(x\| \leqslant A\|x\|\,. \tag{3}$$

Obviamente $T(x_n) = \alpha_n x_n$ y $T$ es único Pues si $T'$ es un operador lineal y acotado tal que $T'(x_n) = \alpha_n x_n$ entonces

$$T'(x) = \lim_N T'\Big(\sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle\, x_n\Big) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle\, T'(x_n) = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \langle x, x_n\rangle\, \alpha_n x_n = T(x)$$

para cada $x \in \mathcal{H}$.
Veamos que $\|T\| = A$. De (3) se deduce que $\|T\| \leqslant A$. Por otro lado,

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \geqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| = A\,.$$

Por tanto $\|T\| = A$.
Hallemos $T^*$. Como

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \Big\langle \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, x_n\rangle\, x_n,\ y\Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, x_n\rangle\, \langle x_n, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle\, \overline{\overline{\alpha_n} \langle y, x_n\rangle} \\ &= \Big\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n}\, \langle y, x_n\rangle\, x_n\Big\rangle\end{aligned}$$

resulta que el operador adjunto viene definido por

$$T^*(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\alpha_n}\, \langle y, x_n\rangle\, x_n\,.$$

En concreto, $T^*$ es el único operador lineal acotado tal que $T^*(x_n) = \overline{\alpha_n} x_n$. Finalmente

$$TT^*(x_n) = T(\overline{\alpha_n} x_n) = |\alpha_n|^2 x_n \quad \text{y} \quad T^*T(x_n) = T^*(\alpha_n x_n) = |\alpha_n|^2 x_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Sabemos que para la sucesión de números complejos acotada $\{|\alpha_n|^2\}_{n=1}^{\infty}$ existe un único operador lineal acotado $S$ tal que $S(x_n) = |\alpha_n|^2 x_n$ . En consecuencia, $S = TT^* = T^*T$.

## Ejercicio 11

Sabemos por el apartado iv) del teorema 6.26 que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \big|\langle T(x), x\rangle\big|$ y por tanto, si $\langle T(x), x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$ entonces $\|T\| = 0$ y en consecuencia $T = 0$.

## Ejercicio 14

a) Basta aplicar el apartado ii) del teorema 6.29 válido en un espacio de Hilbert complejo. El siguiente ejemplo pone de manifiesto que la propiedad no es cierta si $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial real. En $\mathbb{R}^2$ consideramos la aplicación lineal tal que $T(1,0) = (0,1)$ y $T(1,0) = (-1,0)$. Se cumple que $T \geqslant 0$ (en realidad, $\langle T(x), x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$). Sin embargo, el operador no es autoadjunto (la matriz no es simétrica).

b) Basta tener en cuenta que $\langle \alpha T(x), x\rangle = \alpha\langle T(x), x\rangle$ y $\langle (T+S)(x), x\rangle = \langle T(x), x\rangle + \langle S(x), x\rangle$.

c) Veamos que $S^*TS \geqslant 0$. Para cada $x \in \mathcal{H}$ se tiene $\langle (S^*TS)(x), x\rangle = \langle T(S(x)), S(x)\rangle \geqslant 0$ si $T \geqslant 0$.

d) Como $\langle T^*T(x), x\rangle = \langle T(x), T(x)\rangle = \|T(x\|^2 \geqslant 0$ para cada $x \in \mathcal{H}$ resulta que $T^*T \geqslant 0$.

e) La propiedad es cierta sólo en espacios vectoriales complejos. En este caso por el apartado a) el operador positivo $T$ es autoadjunto.
Caso i) $\langle T(x), x\rangle \neq 0$ o $\langle T(y), y\rangle \neq 0$. Supongamos por ejemplo $\langle T(y), y\rangle \neq 0$. Dividiendo por $\langle T(y), y\rangle$ bastará probar que $|\langle T(x), y\rangle|^2 \leqslant \langle T(x), x\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$ tal que $\langle T(y), y\rangle = 1$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrario.

$$\begin{aligned}\langle T(x-\lambda y), x-\lambda y\rangle &= \langle T(x), x\rangle - \overline{\lambda}\langle T(x), y\rangle - \lambda\langle T(y), x\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle T(y), y\rangle \\ &= \langle T(x), x\rangle - \langle T(x), y\rangle\,\overline{\lambda} - \lambda\overline{\langle T(x), y\rangle} + \lambda\overline{\lambda} \\ &= \langle T(x), x\rangle - \langle T(x), y\rangle\overline{\langle T(x), y\rangle} + \langle T(x), y\rangle\overline{\langle T(x), y\rangle} \\ &\quad -\langle T(x), y\rangle\,\overline{\lambda} - \lambda\overline{\langle T(x), y\rangle} + \lambda\overline{\lambda} \\ &= \langle T(x), x\rangle - \big|\langle T(x), y\rangle\big|^2 + \big(\langle T(x), y\rangle - \lambda\big)\big(\overline{\langle T(x), y\rangle - \lambda}\big) \\ &= \langle T(x), x\rangle - \big|\langle T(x), y\rangle\big|^2 + \big|\langle T(x), y\rangle - \lambda\big|^2\end{aligned}$$

En particular para $\lambda = \langle T(x), y\rangle$ se obtiene

$$0 \leqslant \langle T(x-\lambda y), x-\lambda y\rangle = \langle T(x), x\rangle - \big|\langle T(x), y\rangle\big|^2$$

de donde se deduce la desigualdad buscada.
Caso ii) $\langle T(x), x\rangle = 0$ y $\langle T(y), y\rangle = 0$. Se obtiene para $\lambda \in \mathbb{C}$ arbitrario,

$$0 \leqslant \langle T(x-\lambda y), x-\lambda y\rangle = -\overline{\lambda}\langle T(x), y\rangle - \lambda\langle T(y), x\rangle\,,$$

y tomando $\lambda = \langle T(x), y\rangle$ resulta

$$0 \leqslant -2\big|\langle T(x), y\rangle\big|^2,$$

y en consecuencia $\big|\langle T(x), y\rangle\big| = 0$ y se cumple también la desigualdad.
El mismo ejemplo del apartado a) pone de manifiesto que la desigualdad no es cierta si $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial real. En $\mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $T(1,0) = (0,1)$ y $T(1,0) = (-1,0)$ que cumple que $T \geqslant 0$, en este caso, $\langle T(x), x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ no cumple la desigualdad propuesta pues para $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ resulta que

$$\big|\langle T(x), y\rangle\big|^2 = (-x_2y_1 + x_1y_2)^2 > 0 = \langle T(x), x\rangle\langle T(y), y\rangle$$

si $-x_2y_1 + x_1y_2 \neq 0$. De hecho, en la demostración anterior de la desigualdad propuesta hemos utilizado que el operador $T$ es autoadjunto en ambos casos.

## Ejercicio 18

Tenemos que demostrar que $T$ es biyectivo. Para hacerlo probaremos lo siguiente:
i) $T$ es inyectivo. En efecto , si $x \in \mathcal{H}$ es tal que $T(x) = 0$ entonces $\|x\| \leqslant \frac{\|T(x)\|}{a} = 0$ y por tanto $x = 0$.
ii) $T(\mathcal{H})$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{H}$. En efecto, sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset T(\mathcal{H})$ una sucesión que converge a $y \in \mathcal{H}$. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ tal que $T(x_n) = y_n$. De

$$a\|x_n - x_m\| \leqslant \|T(x_n - x_m)\| = \|T(x_n) - T(x_m)\| = \|y_n - y_m\|$$

se deduce que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$ puesto que $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ lo es. Como $\mathcal{H}$ es completo, existe el límite $x$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. La continuidad del operador $T$ permite asegurar que

$$T(x) = \lim_n T(x_n) = \lim_n y_n = y\,.$$

Se concluye que $y \in T(\mathcal{H})$ y por tanto $T(\mathcal{H})$ es cerrado.
iii) $T(\mathcal{H})^\perp = \{0\}$. En efecto sea $y \in T(\mathcal{H})^\perp$. Entonces $\langle y, T(x)\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Como $T$ es autoadjunto resulta que $\langle T(y), x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Por tanto $T(y) = 0$ y como $T$ es inyectiva se obtiene que $y = 0$.
El corolario 3.10 junto con ii) y iii) permiten deducir que $T(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$ y por tanto $T$ es sobreyectiva.

## Ejercicio 19

a) Sea $T$ el operador asociado a la base de Riesz $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, es decir, el operador biyectivo y bicontinuo $T : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $T(e_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $x \in \mathcal{H}$, expresamos $T^{-1}(x) \in \mathcal{H}$ en la base ortonormal $\{e_n\}_{n=1}^\infty$,

$$T^{-1}(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n e_n \quad \text{siendo} \quad c_n = \langle T^{-1}(x), e_n\rangle \quad \text{y} \quad \{c_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2\,,$$

De esta manera,

$$x = T\big(T^{-1}(x)\big) = \sum_{n=1}^\infty c_n T(e_n) = \sum_{n=1}^\infty c_n x_n \quad \text{y} \quad \{c_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2\,.$$

La expresión es única pues si $x = \sum\limits_{n=1}^\infty c_n x_n = \sum\limits_{n=1}^\infty d_n x_n$ entonces $T^{-1}(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty c_n e_n = \sum\limits_{n=1}^\infty d_n e_n$ y como la expresión respecto de una base ortonomal es única, $c_n = d_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
b) Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene $c_n = \langle T^{-1}(x), e_n\rangle = \langle x, (T^{-1})^*(e_n)\rangle$. Por tanto, tomamos

$$y_n = (T^{-1})^*(e_n) = (T^*)^{-1}(e_n) \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}\,.$$

La unicidad se deduce de que si $\langle x, y_n\rangle = \langle x, z_n\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$ entonces $y_n = z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
c) Para cada $n, m \in \mathbb{N}$ se tiene $\langle x_n, y_m\rangle = \langle T(e_n), (T^*)^{-1}(e_m)\rangle = \langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m}$.
d) Que la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ es una base de Riesz se deduce de que el operador $(T^*)^{-1}$ es biyectivo y bicontinuo. Que su sucesión biortonormal es $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ se deduce de que si $H = (T^*)^{-1}$ entonces aplicando el teorema 6.19 se obtiene

$$(H^*)^{-1} = (H^{-1})^* = (((T^*)^{-1})^{-1})^* = T^{**} = T\,.$$