Cuestiones y problemas
Tema 2. Principios de conservación de la mecánica clásica: Conservación del momento angular

Cuando escuchamos una cinta de música en un radio-casette, ¿cuál de los dos cabezales del radio-casette que hacen girar la cinta da vueltas con mayor velocidad angular?

Solución:

Sean ω_1 y ω_2 las velocidades angulares de los cabezales con menos (cabezal 1) y más cinta magnética alrededor (cabezal 2), respectivamente, y R_1 y R_2 los radios de las circunferencias exteriores formada por los dos cabezales y la cinta magnética enrollada. Sean también v_1 y v_2 las velocidades lineales de la cinta en el borde de ambos cabezales. Al escuchar la cinta de música, la cinta magnética pasa de un cabezal a otro, por lo tanto se cumple que $v_1 = v_2$, entonces tenemos que

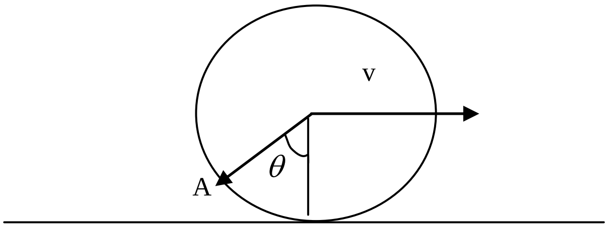
$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2,$$

de donde

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_1}.$$

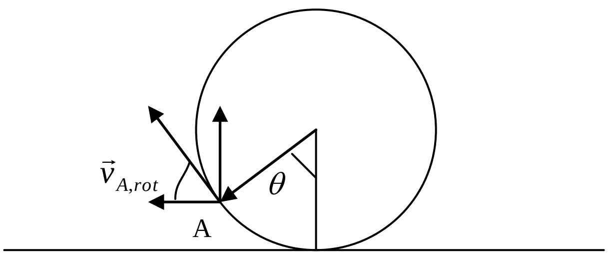
Como $R_2 > R_1$ (más cinta alrededor del cabezal 2 que del cabezal 1) entonces tenemos que $\omega_1 > \omega_2$, y, por tanto, el cabezal 1, con menos cinta, gira más rápidamente que el 2.

Un disco se mueve rodando sin deslizar con velocidad de traslación v.¿Cuál es la velocidad $\vec{v}_A$ del punto A situado en la periferia del disco con respecto a un sistema de referencia fijo al suelo?



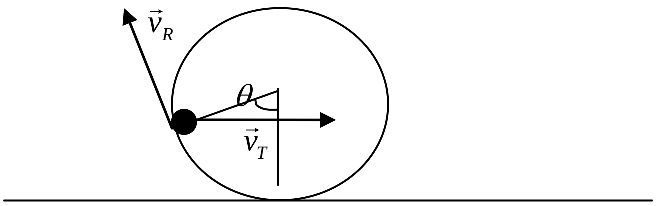
Solución:

La velocidad del punto A es la suma de las velocidades de traslación $\vec{v}_{A,trasl}$ y de rotación $\vec{v}_{A,rot}$. La velocidad de traslación es $\vec{v}_{A,trasl} = (v, 0)$ mientras que la velocidad de rotación es tangente al punto y de módulo *v*, puesto que el disco rueda sin deslizar.



En la figura vemos que la velocidad de rotación se descompone en sus dos componentes perpendiculares y tenemos $\vec{v}_{A,rot} = (-v\cos\theta, v\sin\theta)$. Sumando llegamos finalmente a $\vec{v}_A = v(1-\cos\theta, sen\theta)$. Como se puede comprobar, cuando $\theta = 0$ tenemos que $\vec{v}_A = \vec{0}$, mientras que si $\theta = 180^{\text{o}}$ obtenemos $\vec{v}_A = (2v, 0)$.

Una motocicleta circula a una velocidad constante *v* por una carretera con grava. La grava se va empotrando en el dibujo de los neumáticos, siendo posteriormente despedida de la rueda trasera de radio *R*. La motocicleta adelanta a un autobús estacionado, y cuando está a una distancia *d* de él, una piedra se suelta desde un punto de la rueda situado a una altura $h < R$ sobre el asfalto. Calcular la velocidad con la que sale despedida la piedra con respecto a un observador en reposo en relación a la carretera.
Responder razonadamente a la pregunta: ¿chocará la piedra con el autobús? En caso afirmativo obtener la relación entre *v*, *d*, *R* y *h* para que eso ocurra.
Solución:



La velocidad de la piedra en el momento en el que sale despedida es la composición de dos velocidades, una de traslación en la direción del movimiento de la moto $\vec{v}_T$ y otra de rotación $\vec{v}_R$, siendo $|\vec{v}_R| = |\vec{v}_T| = v$. Por un lado tenemos que $\vec{v}_T = v\vec{i}$ y por otro $\vec{v}_R = -v\cos\theta\,\mathbf{i} + v\sin\theta\,\mathbf{j}$.
La suma de las dos velocidades nos da la velocidad de la piedra en el momento de salir despedida:

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_T = v(1-\cos\theta)\,\mathbf{i} + v\sin\theta\,\mathbf{j}$$

Vemos, pues, que la componente **i** de la velocidad de la piedra respecto del suelo es positiva ya que $1-\cos\theta \geq 0,\ \forall\theta$. Por consiguiente la piedra siempre se moverá a la derecha con respecto a un observador en reposo con respecto a la motocicleta, por ejemplo en el autobús, de forma que la piedra despedida nunca chocará con el autobús

Un tiovivo circular gira con una velocidad angular constante ω. Una persona está situada en el centro del tiovivo y en reposo, mientras que una segunda, de la misma altura, está situada en un punto de la periferia de aquél y mirando hacia el centro del tiovivo. Cuando ambas se enfrentan, la primera envía una pelota hacia la segunda. Si la velocidad con la que es lanzada la pelota es 10 m/s y el ángulo de inclinación con respecto a la horizontal es de 30º, calcular ω para que la persona que se encuentra en la periferia recoja la pelota después de que el tiovivo de una vuelta completa.
Solución:
Al ser lanzada la pelota desde el centro del tiovivo, no hay que considerar en su cinemática ninguna velocidad adicional más que la velocidad inicial con la que es lanzada, v_0=10 m/s.
Por lo tanto, las ecuaciones de su movimiento son las correspondientes a un tiro parabólico:

$$x = tv_0\cos 30$$

$$y = tv_0\sin 30 - \frac{1}{2}gt^2$$

La condición $y = 0$ nos da el tiempo que tarda la pelota en ir de la primera persona a la segunda:

$$t = \frac{2v_0 \sin 30}{g}.$$

Como $\omega = 2\pi / T$ y queremos que el tiovivo de una vuelta mientras la pelota vuela, entonces

$$\omega = \frac{\pi g}{v_0 \sin 30} \approx 6.15 \text{ rad/s}$$

Si el momento neto de las fuerzas que actúan sobre un sólido es cero:
a) El momento angular y la velocidad angular son cero
b) Ni el momento angular ni la velocidad angular pueden variar
c) El momento angular no puede variar pero si la velocidad angular

Solución:

El momento angular es constante, pero la velocidad angular si que puede cambiar si de alguna forma varía la distribución de la masa del sólido con respecto a su eje de giro y por tanto el momento de inercia se altera. Un ejemplo clásico es el de un patinador: al encogerse aumenta su velocidad angular y gira más rápido, si por el contrario estira sus brazos, frenará la frecuencia del giro. Durante todo el proceso, el momento angular permanece constante.

Un coche con una distribución homogénea de masa salta por los aires después de recorrer a gran velocidad una rampa inclinada. Las cuatro ruedas del coche van girando en el aire. ¿Qué ocurrirá si el conductor frena de repente las ruedas?. (No considerar rozamiento alguno con el aire y suponer que el frenazo es instantáneo)

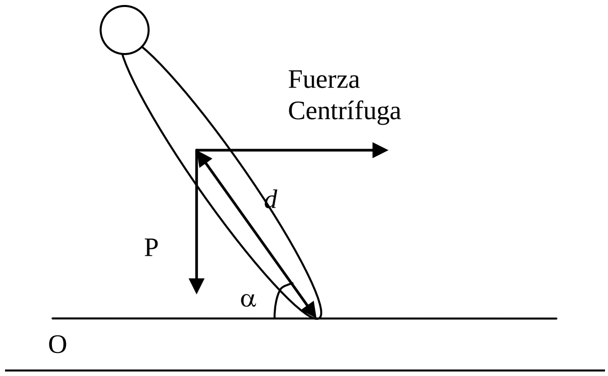
a) El coche comienza a girar inclinando el morro
b) No pasa nada
c) Aumenta la velocidad del centro de masas del coche

Solución:

El momento angular respecto del centro de masas se conserva en todo momento porque la única fuerza externa que actúa sobre el coche es su peso, y éste no produce momento alguno. El frenado de las ruedas se produce por la acción de una fuerza interna que tampoco altera el momento angular. Al frenar las ruedas, éstas dejan de girar, por lo que el coche deberá girar hacia delante inclinando morro para conservar el momento angular.

Explicar con un diagrama de fuerzas porqué debe inclinarse el motorista para describir la curva y calcular cuál es el valor del ángulo de inclinación con respecto a la carretera

Solución:



El motorista debe inclinarse para estar en equilibrio. Para no rotar, el momento total debe ser nulo. Podemos escoger como sistema de referencia O el punto de contacto de la moto con el suelo. Se trata este de un sistema no inercial, por lo que debemos de considerar las fuerzas de inercia (la fuerza centrífuga). Con respecto a este punto el momento de la fuerza de rozamiento y de la fuerza de reacción es 0. El momento de la fuerza centrífuga y el peso deben ser iguales y con signo cambiado, por lo que

$$mgd\cos\alpha = F_c d\sin\alpha$$

$$\tan\alpha = \frac{mg}{mv^2/R} = \frac{gR}{v^2}$$

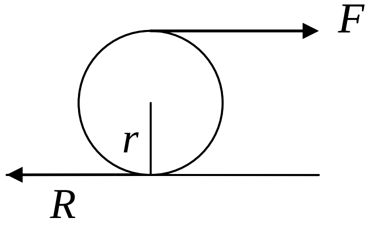
Cuando se pisa el acelerador, la parte delantera del automóvil se mueve hacia arriba. Cuando se pisa el freno, se mueve hacia abajo. Explique por qué de cada una de estas dos reacciones del automóvil.

Solución:

El comportamiento descrito en el enunciado es el mismo, tanto si se considera el rozamiento con el suelo, como si no se considera.

Sin rozamiento. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el coche son su peso, que al estar aplicado sobre el centro de masas no provoca ningún momento con respecto a éste y la reacción de la carretera, aplicada sobre las cuatro ruedas y cuyos momentos con respecto al centro de masas se anulan. Por consiguiente, el momento angular del coche debe ser constante en todo instante. Cuando se pisa el acelerador, el sistema interno del automóvil provoca un aumento de la velocidad de giro de las ruedas. Esto conlleva un incremento del momento angular del coche en un sentido ↻ , a lo que el resto del coche responde con un movimiento de giro (la parte delantera se levanta) en el otro sentido ↺, de forma a tratar de mantener constante el momento angular total. Lo contrario ocurre cuando se pisa el freno.

Con rozamiento. Las ecuaciones de la dinámica de cada rueda son



$$F - R = ma$$
$$Fr + Rr = I\alpha$$
$$a = \alpha r$$

donde *F* es la fuerza que acelera o decelera el coche y *R* el rozamiento con el suelo. La solución de estas ecuaciones es

$$a = \frac{4F}{3M} \quad \text{y} \quad R = \frac{-F}{3}$$

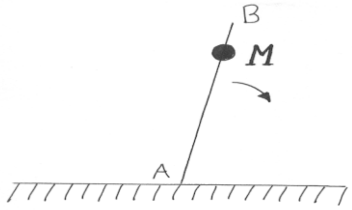
Como se puede apreciar, la fuerza de rozamiento siempre tiene el mismo sentido que la fuerza interna aplicada sobre las ruedas (en la solución de las ecuaciones aparecen con signos opuestos ya que inicialmente, en el esquema de fuerzas y planteamiento de las ecuaciones, supusimos que ambas tenían sentidos opuestos). Por consiguiente, cuando aceleramos (*F* tiene sentido hacia la derecha), la fuera de rozamiento también tiene este sentido, de forma que sobre el coche actuará una fuerza exterior neta con sentido hacia la derecha que provocará un giro con respecto al centro de masas, hacia arriba (el morro del coche se levanta). Cuando frenamos, la fuera aplicada y la fuerza de rozamiento tienen ambas el sentido hacia la izquierda, lo que provoca un momento con respecto del centro de masas que hace que el coche se incline hacia delante (la parte trasera del coche se levanta y la delantera desciende).

Una estrella sufre una explosión, convirtiéndose en una supernova en forma de esfera de radio 8×10^6 m, que gira alrededor de su eje con un período de 15 horas. La supernova colapsa formando una estrella de neutrones de 8×10^3 m de radio. ¿Cuál es el período de rotación de la estrella de neutrones? (Momento de inercia de una esfera sólida $2mr^2/5$)

Solución:
La expansión o contracción de la estrella es debida únicamente a fuerzas internas. Como no actúa ninguna fuerza externa, el momento de todas fuerzas externas que actúan sobre la estrella es nulo y el momento angular se conserva:

$$\vec{L} = \text{cte} \rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$
$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{T_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \frac{2\pi}{T_1} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2$$

Se coloca una esfera maciza pequeña de masa *M*, en una barra de longitud *l* y masa despreciable, mucho más cerca del extremo B que del extremo A tal como se indica en la figura. ¿En qué caso caerá la barra más rápidamente, si la colocamos verticalmente apoyada en el extremo A, o en el extremo B?. Supóngase en cada caso que el extremo que se encuentra en contacto con el suelo no desliza y que la masa de la esfera es mucho mayor que la de la barra.



Solución:
Supongamos que la apoyamos en el extremo A tal y como se muestra en la figura. Definimos *x* como la distancia que hay de la masa *M* al extremo A y δ el ángulo que forma la barra con la horizontal.

El momento que ejerce el peso de la masa con respecto del punto A es $\tau_A = xMg\cos\delta$.
Sabemos que $\tau_A = I_A\alpha_A$ donde I_A es el momento de inercia de la masa con respecto al eje perpendicular a la varilla que pasa por el punto A $\left(I_A = Mx^2\right)$ y α_A es la aceleración angular con la que cae la barra y la masa. Despejando tenemos

$$\alpha_A = \frac{g\cos\delta}{x}$$

Si ahora suponemos que la barra está apoyada en B y hacemos lo mismo llegamos a

$$\alpha_B = \frac{g\cos\delta}{l-x}.$$

Vemos que $\alpha_B > \alpha_A$, y por tanto la solución correcta es que caerá más rápidamente cuando la apoyamos en el extremo B.

Si se fundieran los hielos polares, ¿afectaría esto a la duración del periodo de rotación de la Tierra?
Solución:
Como el momento angular se conserva: $I\omega = cte$. Al fundirse los hielos polares *I* aumenta, por lo que ω debe disminuir y por tanto $T = \frac{2\pi}{\omega}$ aumenta.

Un atleta al saltar en el trampolín realiza diferentes movimientos físicos antes de penetrar en el agua. ¿Cuál de estas magnitudes permanece constante en el salto?
a) momento de inercia
b) momento angular
c) momento lineal
Solución:
La única fuerza que actúa sobre el atleta es la de la gravedad y no ejerce momento alguno sobre el atleta, por lo que el momento angular se conserva. Ni el momento de inercia (pues el atleta cambia su distribución de masa al moverse) ni el lineal (presencia de la gravedad) se conservan. La solución es la b).

Una persona está de pie en el centro de una plataforma giratoria. En un momento dado extiende los brazos que sostienen sendas pesas. ¿Que ocurrirá?
a) El momento angular del sistema aumenta
b) El momento de inercia disminuye
c) la velocidad angular disminuye
Solución:
Al extender los brazos, el momento de inercia del sistema aumentará. Como el momento angular permanece constante en todo momento tenemos que $I\omega = \text{cte}$. Por lo tanto la velocidad angular disminuirá.

Si desea levantarse de una silla, tiene que inclinar el cuerpo hacia delante. ¿Podría explicar por qué?
Solución:
Para desplazar el centro de gravedad sobre las piernas y poder levantar nuestro cuerpo verticalmente. De lo contrario, la fuerza que ejercen las piernas y nuestro peso producirían un par de fuerzas con un momento no nulo que nos haría girar hacia atrás devolviéndonos de nuevo a la silla.

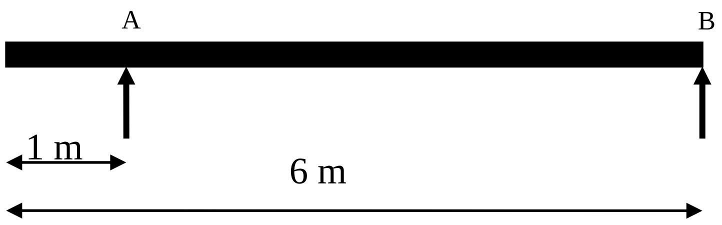
Un niño de masa *m* corre con velocidad *v* en dirección tangencial hacia una plataforma circular de masa *M* y radio *R* que se encuentra en reposo. En el momento en el que llega a la plataforma, el niño salta y se sube, quedando quieto en el borde de la misma y la plataforma comienza a girar sin rozamiento. Calcular la velocidad angular adquirida por el sistema plataforma-niño.

($I_{plataforma} = \frac{1}{2} MR^2$ **)**

<u>Solución:</u>
Por conservación del momento angular tenemos

$$mvR = mR^2\omega + \frac{1}{2}MR^2\varpi \quad \Rightarrow \quad \varpi = \frac{mv}{R(m+\frac{1}{2}M)}$$

Dos personas levantan desde el suelo y *con velocidad constante* un tubo de 30kg de masa y 6m de longitud a una altura de 1m. Una de ellas lo hace cogiendo el tubo por el punto A de la figura, mientras que la otra lo hace por el punto B. Si durante este proceso de levantamiento el tubo está *siempre horizontal*, ¿cuál es el trabajo hecho por cada una de las dos personas?



<u>Solución:</u>
Como el tubo es levantado con velocidad constante, tenemos que

$$F_1 + F_2 = mg\,.$$

Como el tubo siempre permanece en posición horizontal (no gira), la suma de los momentos de estas dos fuerzas más el momento del peso, aplicado en el centro de masas del tubo, debe ser nulo con respecto a cualquier punto. Si elegimos el extremo izquierdo del tubo como punto de referencia tenemos que:

$$F_1 + 6F_2 - 3mg = 0\,.$$

Tenemos, por tanto, dos incógnitas y dos ecuaciones. La solución de estas ecuaciones es $F_1 = 3/5mg$ y $F_2 = 2/5mg$ y el trabajo, dado por el producto de la fuerza por el desplazamiento será: $W_1 = 3/5mg$ J y $W_2 = 2/5mg$ J .

Como se puede comprobar, el trabajo total realizado por las dos personas es igual a la variación de la energía potencial del tubo: $W_{total} = W_1 + W_2 = mg\Delta h = mg$.

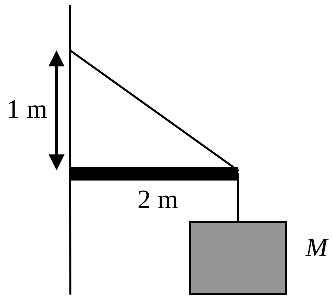
Consejo importante: *para resolver de forma sencilla los problemas de equilibrio estático se aconseja elegir como eje de rotación –o punto respecto al cual calcular los momentos– el punto de aplicación de la fuerza de la que se tiene menos información. De esta forma el momento de esa fuerza respecto a ese punto se anula y el álgebra es menos compleja.*

El problema anterior es un buen ejemplo de esto, pues hemos tenido que resolver un sistema de dos ecuaciones con 2 incógnitas. Si en lugar de elegir el extremo izquierdo del tubo como punto de referencia hubiésemos elegido el derecho, sobre el que se aplica la fuerza B que desconocemos, la ecuación para el equilibrio con respecto a la rotación quedaría

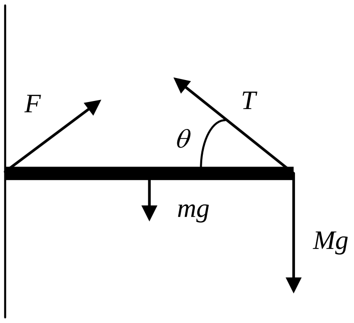
$$5F_1 - 3mg = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{3mg}{5}\ \mathrm{N}$$

y después podríamos despejar directamente F_2 de la ecuación de equilibrio con respecto a la traslación.

Una masa de 20 kg cuelga de una barra rígida horizontal de 2 m de longitud y masa 4 kg que está sujeta a la pared mediante un cable tal y como se muestra en la figura. Calcular:
- La tensión del cable
- La fuerza que la barra ejercerá sobre la pared



Solución:
Aplicamos las condiciones de equilibrio estático de la barra con respecto a la rotación (suma de momentos nula) y a la traslación (suma de fuerzas nula).
El diagrama de las fuerzas que actúan sobre la barra es el siguiente:



en el que la fuerza *F* que la pared ejerce sobre la barra ha sido representada con una dirección aleatoria pues desconocemos su dirección y sentido.
Está claro que el punto sobre el que debemos calcular los momentos de las fuerzas que actúan sobre la barra es el punto de contacto de la misma con la pared, para de esta forma eliminar *F* de la ecuación:

$$2Mg + 1mg - 2T\sin\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T = 483\ \mathrm{N}$$

Conociendo la tensión podemos calcular ahora las dos componentes, vertical y horizontal, de la fuerza **F** que la pared ejerce sobre la barra, a partir de la condición:

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

En la dirección vertical tenemos:

$$F_y + T\sin\theta - mg - Mg = 0$$

En la dirección horizontal:

$$F_x - T\cos\theta = 0$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores obtenemos que $\mathbf{F} = (432{,}19.2)\ \mathrm{N}$.
Por el principio de acción y reacción (3ª Ley de Newton) sabemos que la fuerza ejercida por la barra sobre la pared será igual a $-\mathbf{F} = (-432, -19.2)\ \mathrm{N}$.

Una barra muy fina, rígida y homogénea, de masa *M* y longitud *L*, tiene fijada a uno de sus extremos una pequeña masa *m*, mientras que el otro se fija mediante un pivote (sin rozamiento) al techo. La barra se coloca horizontalmente, paralela al techo, y se suelta. ¿Cuál es la velocidad angular cuando llega a la posición vertical? (momento de inercia de una barra respecto de uno de sus extremos $\frac{1}{3}ML^2$)

Solución:
Utilizamos la conservación de la energía mecánica. Si tomamos como origen de la energía potencial el techo tenemos que la energía mecánica inicial del sistema barra-masa es 0. Podemos escribir entonces para la energía mecánica total en la posición vertical del sistema:

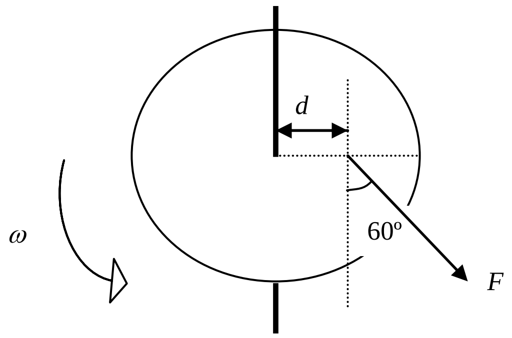
$$0 = E_{cinética-barra} + E_{potencial-barra} + E_{cinética-masa} + E_{potencial-masa}$$

$$0 = \frac{1}{2}I\varpi^2 - \frac{1}{2}LMg + \frac{1}{2}mv^2 - Lmg$$

Sabiendo que $I = \frac{1}{3}ML^2$ y $v = \varpi L$, podemos despejar la velocidad angular y obtenemos

$$\varpi^2 = \frac{g(3M + 6m)}{L(M + 3m)}$$

Un disco uniforme con una masa de 100 Kg y un radio de 1m gira inicialmente con una velocidad angular de 1000 rev/min. A una distancia radial *d* ,de 0.5 m, se aplica una fuerza cuya dirección forma un ángulo de 60º con la tangente al disco. ($I_{disco} = 1/2\, mr^2$)



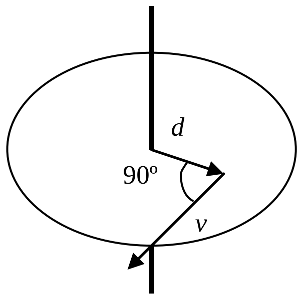
- ¿Qué trabajo debe realizar esa fuerza para detener el disco?.
- ¿Cuál es la magnitud de la fuerza, si el disco se detiene en 1 min?

Solución:
La velocidad angular vale $\omega = 1000\frac{2\pi}{60} = 104.7\ \mathrm{s}^{-1}$.El trabajo realizado por la fuerza será igual a la variación de la energía cinética del disco $W = 0 - \frac{1}{2}I\omega^2 = 274\,\mathrm{KJ}$.

Si el disco se detiene en 1 min, tenemos que la aceleración angular $\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = -1.75\ \mathrm{s}^{-2}$.

Como $\left|\vec{M}_{Fuerza}\right| = \left|\vec{F}\right|\cos 60 d = I\left|\vec{\alpha}\right|$, tenemos que $\left|\vec{F}\right| = 350N$

Una persona de 80 kg se encuentra sobre un plataforma circular en forma de disco. El radio de la plataforma *R* es de 1m y su masa *M* de 200 kg. La persona está situada a una distancia *d* = 0.60 m del eje de giro. El sistema está inicialmente en reposo cuando la persona lanza una pelota de 2 kg con una velocidad *v* = 7 m/s paralela a la plataforma y a una altura despreciable tal y como se muestra en la figura. El momento de inercia de la plataforma respecto al eje de giro es $\frac{1}{2}MR^2$ **. Si se prescinde de rozamientos:**



- Calcular el momento cinético o angular de la pelota con respecto al centro de la plataforma en el momento del lanzamiento
-Calcular la velocidad angular que adquiere la plataforma

<u>Solución:</u>

$$\vec{L}_{pelota} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = -8.4\, \vec{z}\ \mathrm{kg\, m^2/s}$$

Como el momento angular se conserva, tenemos que $\vec{L}_{pelota} + \vec{L}_{plataforma+persona} = \vec{0}$,

De donde $I\vec{\omega} = 8.4\vec{z}$. Como el momento de inercia del sistema plataforma+persona es:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 + mr^2 = 128.8\,\mathrm{kg\, m^2}$$

tenemos que $\vec{\omega} = 0.065\vec{z}\ \mathrm{s^{-1}}$.

Un hilo inextensible y de masa despreciable está arrollado sobre una polea de 10 cm de radio, que se encuentra fija en un punto O. De su extremo cuelga un cuerpo de 10 Kg inicialmente en reposo que, debido a su peso, comienza a descender con movimiento de traslación rectilíneo y aceleración constante igual a 0,5 m/s^2.
Teniendo en cuenta que el hilo no desliza sobre la polea calcular:
- La velocidad de un punto de la periferia de la polea, la velocidad angular de la polea y su aceleración angular.
- La velocidad y aceleración angular de la polea cuando el cuerpo ha descendido una altura de 10 m.
- El momento de inercia de la polea.
- ¿En qué caso sería la aceleración del cuerpo aproximadamente igual a la de la gravedad g=9,8 m/s^2?

<u>Solución</u>

El movimiento del objeto es uniformemente acelerado con velocidad inicial nula. Tomando como origen de posiciones la posición inicial del objeto y como sentido positivo el de caída, tenemos que el movimiento del objeto está dado por

$$a = cte$$
$$v = at$$
$$s = \frac{1}{2}at^2$$

Dado que el hilo es inextensible y no puede deslizarse sobre la polea, la velocidad tangencial de la polea debe coincidir con la de caída del objeto, por tanto

$$v_{\tan} = at = 0.5t \text{ m/s}^2$$

(obsérvese que al sustituir *t* en segundos, el resultado tiene dimensiones de m/s).
La velocidad angular es sencillamente

$$\omega = v_{\tan} / R = 5t \text{ s}^{-2}$$

(obsérvese que al sustituir *t* en segundos, el resultado tiene dimensiones de 1/s).

La aceleración angular es sencillamente

$$\alpha = a / R = 5 \text{ s}^{-2}$$

2. En primer lugar, calculamos el tiempo (t_1) que el cuerpo tarde en descender hasta x_1= 10m.

$$t_1 = (2x_1 / a)^{1/2} = 6.32 \text{ s}$$

Sustituyendo este valor de *t* en el anterior resultado para la velocidad angular, encontramos

$$\omega_1 = 31.62 \text{ s}^{-1}$$

En cuanto a la aceleración angular, como es constante, su valor es sencillamente

$$\alpha_1 = a / R = 5 \text{ s}^{-2}$$

3. Para calcular el momento de inercia de la polea, como no conocemos ni su masa ni su distribución de masa (si es un disco, o un cilindro hueco, o uno macizo, o uno con densidad dependiente del radio, etc.), no podemos calcular su momento de inercia directamente a partir de la definición. Pero podemos calcularlo indirectamente a partir de los datos del problema. Para ello aplicamos la ecuación de Newton al objeto ($\Sigma F = m \cdot a$) y a la polea ($\Sigma M = I \cdot \alpha$):
El objeto se mueve bajo la acción de dos fuerzas, la tensión del hilo (*T*) hacia arriba y su peso ($m \cdot g$) hacia abajo. Con la elección de signos que hemos hecho, la ecuación de Newton aplicada al objeto queda como:

$$mg - T = ma$$

Como el hilo es inextensible, la tensión es constante a lo largo de todo el hilo, de tal forma que, por el principio de acción y reacción, la misma tensión hacia arriba que experimenta el objeto, la experimenta la polea hacia abajo. Por tanto el momento total aplicado sobre la polea es M = R·T (en la dirección de giro positiva). Entonces

$$RT = I\alpha$$

Despejando *I* y sustituyendo el valor de *T* encontramos

$$I = mR^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) = 1{,}86 \text{ kg m}^2$$

4. Si la aceleración del cuerpo coincide con la de la gravedad entones la tensión del hilo es nula, ya que $T = m \cdot (g - a)$. Entonces, recordando que $RT = I\alpha$, vemos que esto sólo puede suceder si el momento de inercia de la polea es nulo.

Un aro de 1,5 kg de masa y 65 cm de radio tiene una cuerda arrollada a su circunferencia y está apoyado en posición plana sobre una mesa horizontal sin rozamiento. Se tira de la cuerda con una fuerza de 5 N.
- ¿Qué distancia recorrerá el aro en 3s?
- ¿Cuál es la velocidad angular del aro respecto de su centro de masas al cabo de 3s?

Solución:

Aplicando $F = ma$ calculamos la aceleración, que es constante.

Como a es constante, por medio de $s = 0.5at^2$ podemos calcular la distancia, el resultado para *t* = 3 s es *s* = 15 m. Para calcular la velocidad angular aplicamos $Fr = I\alpha$. Teniendo en cuenta que el momento de inercia de un anillo en torno a su eje es $I = Mr^2$ tenemos que

$$\alpha = F/(Mr)$$

Como α es constante, tenemos que $\omega = \alpha t$. Sustituyendo los datos del problema encontramos para t = 3 s que $\omega = 15,4$ s^{-1}.

Consideremos dos esferas de la misma masa y el mismo radio, pero una maciza y otra hueca. Si las soltamos desde la parte alta de un plano inclinado con rozamiento y ambas esferas caen rodando sin deslizar, ¿cuál de las dos llegará antes al suelo? (tenga en cuenta que el momento de inercia de la esfera hueca es mayor que el de la esfera maciza). ¿Y si no hubiera rozamiento?

Solución:

Si hay rozamiento y las dos esferas caen rodando sin deslizar no hay disipación de energía porque no existe fricción entre el cuerpo y el plano (rozamiento estático: la velocidad del punto del cuerpo que está en contacto con el plano es 0). Entonces podemos aplicar la conservación de la energía mecánica al final de la rampa:

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{hueca}^2 + \frac{1}{2}I_{hueca}\omega_{hueca}^2$$

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_{maciza}^2 + \frac{1}{2}I_{maciza}\omega_{maciza}^2$$

Utilizando la condición de rodadura $v = R\omega$ obtenemos que

$$v_{hueca}^2 = \frac{2Mgh}{M + I_{hueca}/R^2} \qquad v_{maciza}^2 = \frac{2Mgh}{M + I_{maciza}/R^2}$$

Como $I_{hueca} > I_{maciza}$ tenemos que $v_{hueca}^2 < v_{maciza}^2$ y por tanto llegará antes al suelo la esfera maciza.
Si no hay rozamiento, las esferas no rodarán y ambas llegarán al mismo tiempo.

Una polea en forma de disco, de masa $M = 500g$ y radio R, se encuentra sujeta al techo. Por su garganta pasa una cuerda de masa despreciable que lleva colgado a un extremo una masa $m = 200g$ mientras que el otro extremo se encuentra unido a un resorte vertical fijo en el suelo, de constante elástica $k = 40N/m$. La cuerda no desliza, de forma que la polea gira sin rozamiento sobre su eje debido a la tensión de la cuerda. $I_{polea} = \frac{1}{2}MR^2$.
- Calcular cuanto se alarga el resorte si la masa *m* está en equilibrio
- Si la masa *m* se separa de la posición de equilibrio, calcular el periodo de las oscilaciones.
- Si la masa se encuentra en la posición de equilibrio y cortamos la cuerda por el lado que está unida al resorte vertical, la masa empieza a caer. Obtener la expresión de la velocidad que adquiere la masa después de haber descendido una distancia *h* desde la posición de equilibrio

Solución:

En el equilibrio tenemos:

$$mg - T = 0$$

$$T = kx$$

$$x = \frac{mg}{k} = 0,049\,\text{m}$$

Al separar la masa de la posición de equilibrio tenemos el siguiente conjunto de ecuaciones para describir la dinámica del sistema (elegimos como sentido positivo el que va del muelle a la masa, de modo que el peso mg, la tensión T_1 aplicada sobre la polea y la tensión T_2 aplicada sobre el resorte, son positivas, mientras que la tensión T_1 aplicada sobre la masa y la tensión T_2 aplicada sobre la polea tienen signo negativo):

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma \\ T_1 R - T_2 R = I\alpha = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} \\ T_2 = k(x + x') \end{cases}$$

De donde obtenemos que

$$a = \frac{-kx'}{\frac{1}{2}M + m}.$$

Igualando con la ecuación de un m.a.s obtenemos finalmente el periodo de las oscilaciones:

$$a = -\omega^2 x' \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{2}M + m}} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = 0.67s$$

Al cortar la cuerda tenemos

$$\begin{cases} mg - T_1 = ma \\ T_1 R = I\alpha = \frac{1}{2} M R^2 \frac{a}{R} \end{cases}$$

De donde obtenemos

$$a = \frac{mg}{\frac{1}{2}M + m}$$

$$v = \sqrt{\frac{2mg}{\frac{1}{2}M + m} h} = 2.95\sqrt{h}$$

Un aro puede caer rodando por un plano inclinado, o bien, deslizando sin rozamiento ($I = mR^2$). Hallar razonadamente en qué caso llega antes a la base del plano inclinado.

Solución:

Cuando desliza:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}\,.$$

Cuando rueda:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{gh}\,.$$

Conclusión: llega antes cuando desliza.

Sobre una partícula de 2 kg de masa que se encuentra inicialmente en el punto $\vec{r}_0 = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ m y con velocidad $\vec{v}_0 = \vec{i} + 6\vec{k}$ m/s, actúa una fuerza constante $\vec{F} = 2\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$ N. Calcular el momento angular con respecto al origen al cabo de 2 s.

Solución:

$$\vec{J}(2) = \vec{r}(2) \times m\vec{v}(2)$$
$$\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m = \vec{i} + 0.5\vec{j} - 2\vec{k} \ \text{m/s}^2$$
$$\vec{v}(t) = (t+1)\vec{i} + 0.5t\vec{j} + (-2t+6)\vec{k} \ \text{m/s}$$
$$\vec{x}(t) = (0.5t^2 + t + 2)\vec{i} + (0.25t^2 - 3)\vec{j} + (-t^2 + 6t + 1)\vec{k} \ \text{m}$$
$$\vec{x}(2) = 6\vec{i} - 2\vec{j} + 9\vec{k} \ \text{m}$$
$$\vec{v}(2) = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} \ \text{m/s}$$
$$\vec{J}(2) = \vec{r}(2) \times m\vec{v}(2) = -26\vec{i} + 30\vec{j} + 24\vec{k} \ \text{Nms}$$

Un proyectil de masa 1 kg es lanzado con una velocidad $\vec{v}_0 = (0,0,\ 1)$ m/s desde un punto de coordenadas $\vec{r}(0) = (1,0,0)$ m. Si está sometido a la aceleración de la gravedad (dirección y sentido negativo del eje Z) y módulo 10 m/s^2 y a una fuerza constante debida al viento en la dirección positiva del eje X de 2N:

- Calcular la posición del proyectil en función del tiempo $\vec{r}(t)$

- Comprobar que $\vec{\tau}(t) = \dfrac{d\vec{L}(t)}{dt}$, siendo $\vec{\tau}$ el momento total de las fuerzas externas que actúan sobre el proyectil y $\vec{L}$ el momento angular del mismo.

Solución:

De los datos del problema tenemos que $\vec{a}(t) = (2,0,-10)$ m/s^2. Integrando las ecuaciones del movimiento con las condiciones iniciales del enunciado obtenemos $\vec{v}(t) = (2t, 0, 1-10t)$ m/s y $\vec{r}(t) = (1+t^2, 0, t-5t^2)$ m.

Calculamos ahora el momento total de las fuerzas externas

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}_{ext} = (1+t^2, 0, t-5t^2) \times (2,0,-10)$$
$$= \left(0, 10+2t, 0\right) \text{N m},$$

y el momento angular del proyectil

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = (1+t^2, 0, t-5t^2) \times (2t, 0, 1-10t)$$
$$= (0, -1+10t+t^2, 0) \ \text{kg m}^2/\text{s}.$$

Es inmediato comprobar ahora que, efectivamente, $\vec{\tau}(t) = \dfrac{d\vec{L}(t)}{dt}$.

A una partícula de masa 1 kg que se encuentra inicialmente en el punto (1, 0, -3) m y con velocidad $\vec{v}_0 = (-1,-1,2)$ m/s se le aplica una fuerza tal que su momento con respecto al origen de coordenadas permanece constante en el tiempo y de valor $\vec{\tau} = (2,\, 0,\, -1)$ Nm. Calcular el momento angular de la partícula al cabo de 4 s.

Solución:

Aplicamos la ecuación que relaciona la variación del momento angular con el momento de las fuerzas externas:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

Como $\boldsymbol{\tau}$ es constante tenemos que

$$\mathbf{L} = t\boldsymbol{\tau} + \mathbf{L}_0$$

con $\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_0 \times m\mathbf{v}_0 = (-3,\ 1,-1)$ N m s. Haciendo los cálculos llegamos a

$$\mathbf{L}(t) = (2t-3,\ 1,-t-1)\ \text{N m s},$$
$$\mathbf{L}(4) = (5\ ,1,-5)\ \text{N m s}.$$

Sobre un objeto de masa 1 kg únicamente actúa la siguiente fuerza $\mathbf{F}(t) = (t, 0, 1)$ m/s. Cuando $t = 2$ s, el cuerpo pasa por el origen de coordenadas con una velocidad $\mathbf{v} = (0,0,1)$ m/s.

- Calcular la posición del proyectil en función del tiempo $\mathbf{r}(t)$.

- Comprobar que se satisface la segunda ley de Newton para el movimiento de rotación: $\vec{\tau}(t) = \dfrac{d\vec{L}(t)}{dt}$, siendo $\vec{\tau}$ el momento total de las fuerzas externas que actúan sobre el objeto y $\vec{L}$ el momento angular del mismo.

Solución:

De los datos del problema tenemos que $\mathbf{a}(t) = (t, 0, 1)$ m/s^2. Ahora integramos las ecuaciones del movimiento:

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}(t)dt \ = \left(\frac{t^2}{2} + v_{x,0}, v_{y,0}, t + v_{z,0}\right).$$

Como $\mathbf{v}(2) = (0,0,1)$ m/s tenemos que $\mathbf{v}(t) = \left(\dfrac{t^2}{2} - 2, 0, t-1\right)$.

Para el espacio tenemos

$$\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt \ = \left(\frac{t^3}{6} - 2t + x_0, y_0, \frac{t^2}{2} - t + z_0\right).$$

Como $\mathrm{r}(2) = (0,0,0)$ m tenemos que $\mathbf{r}(t) = \left(\dfrac{t^3 - 12t + 16}{6}, 0, \dfrac{t^2 - 2t}{2}\right)$.

Calculamos ahora el momento de la fuerza

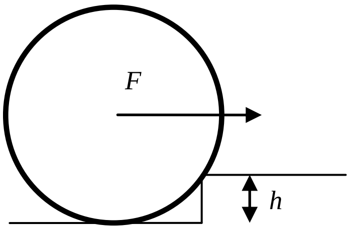
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}\times\mathbf{F} = \left(\frac{t^3-12t+16}{6}, 0, \frac{t^2-2t}{2}\right)\times(t,0,1)$$
$$= \left(0, \frac{2t^3-6t^2+12t-16}{6}, 0\right) \text{N m},$$

y el momento angular del proyectil

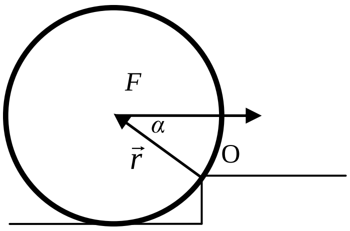
$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \left(\frac{t^3-12t+16}{6}, 0, \frac{t^2-2t}{2}\right)\times\left(\frac{t^2}{2}-2, 0, t-1\right)$$
$$= \left(0, \frac{t^4-4t^3+12t^2-32t+32}{12}, 0\right) \text{ kg m}^2\text{/s}.$$

Es inmediato comprobar ahora que, efectivamente, $\boldsymbol{\tau}(t) = \dfrac{d\mathbf{L}(t)}{dt}$.

Calcular la fuerza horizontal *F* que es necesario aplicar en el centro de un cilindro de 10 Kg de masa y 10 cm de radio para que suba el escalón representado en la figura, de altura *h*=2 cm. (Ayuda: obsérvese que el movimiento que debe efectuar el cilindro para subir el escalón es un giro con eje la arista del escalón)



Solución:
La fuerza mínima *F* que hay que aplicar será aquella que haga cero el momento de todas las fuerzas con respecto a la arista del escalón. Tomando momentos con respecto al punto O, tenemos que sólo dos fuerzas contribuyen, el peso del cilindro, aplicado en el centro de masas y la fuerza *F*, también aplicada en el centro



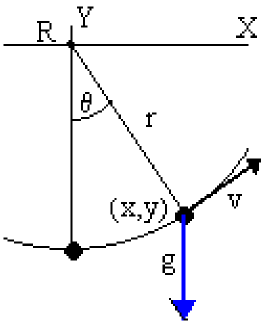
$$\sum \vec{M}_O = 0$$
$$\vec{r}\times\vec{F} + \vec{r}\times\vec{P} = 0$$
$$rF\sin(180-\alpha) - rmg\sin(\alpha+90) = 0$$
$$sen\alpha = \frac{r-h}{r} \Rightarrow \alpha = 53.1$$

Finalmente

$$F = mg\frac{sen(\alpha + 90)}{sen(180 - \alpha)} = 73.6\ \mathrm{N}$$

La ecuación del movimiento de un péndulo simple ideal de masa *m* y longitud *l* es $\frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\mathrm{sen}\phi$, donde ϕ es el ángulo que el péndulo forma con la vertical. Deducir esta ecuación aplicando sobre el péndulo la segunda ley de Newton para la rotación. Recordamos que esta ley tiene la forma $\tau_R = \frac{dL}{dt}$, donde τ_R es el momento total de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo y *L* es su momento angular. Ayuda: tomar como origen de coordenadas el punto del techo del cual cuelga el péndulo.

Solución:



Sólo el peso contribuye al momento total, τ_R, de las fuerzas, pues la tensión está aplicada en el punto de giro y su momento es cero.

$$\tau_R = -mgl\mathrm{sen}\phi$$

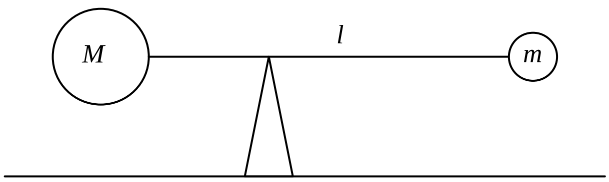
$$L = mvl$$

$$\tau_R = \frac{dL}{dt} \Rightarrow -g\mathrm{sen}\phi = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega l}{dt} = l\frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2\phi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\mathrm{sen}\phi$$

Supongamos dos esferas de distinta masa unidas por una varilla de masa despreciable. Queremos que el conjunto esté en equilibrio cuando apoyamos la varilla sobre un pivote, tal y como se muestra en la figura.

¿En qué punto deberemos realizar el apoyo?

Calcular el centro de masas del sistema y compararlo con el punto obtenido en el apartado anterior. Justificar razonadamente por qué son iguales o diferentes.



Solución:

Podemos resolver el problema de dos formas. En la primera de ellas hay que darse cuenta de que ese punto debe ser el centro de masas del sistema formado por las dos esferas, ya que de esta forma el peso del sistema –concentrado en ese punto– y la reacción del pivote, que tienen el mismo valor pero signo contrario, se aplican sobre el mismo punto y no habrá ningún momento externo que haga girar el sistema. Si elegimos el origen de coordenadas en el punto ocupado por la esfera más pesada tenemos:

$$x_{CM} = \frac{m}{m+M}l$$

En la segunda forma debemos aplicar las condiciones de equilibrio bajo traslación (suma de fuerzas cero) y bajo rotación (suma de momentos cero). La primera de ellas se cumple ya que suponemos que el pivote está apoyado en una superficie horizontal cuya fuerza normal F_N aplicada en el punto de contacto del pivote con la barra compensa la fuerza del peso de las dos masas $(M+m)g$. Si ahora hacemos la suma de momentos cero tenemos (escogemos el origen como punto de referencia para los momentos)

$$0 = F_N x - lmg$$

como $F_N = (M+m)g$ llegamos al mismo resultado anterior

$$x = \frac{m}{m+M} l$$

Un sistema binario de estrellas consiste en dos estrellas girando alrededor de su centro de masas debido a la interacción gravitatoria mutua. Suponer que el sistema está aislado, que la masa de las estrellas es *m* y 2*m* y que la distancia que las separa *d* es mucho mayor que los radios de cada estrella, de modo que pueden considerarse como cuerpos puntuales.

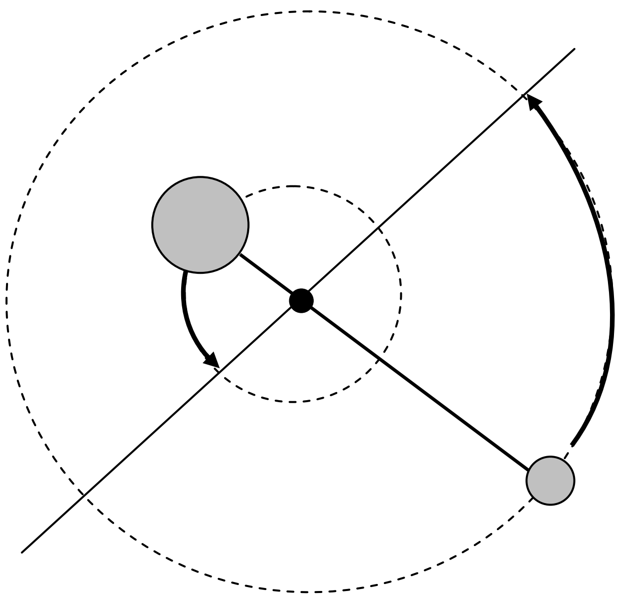
–**Razonar físicamente por qué las velocidades angulares de rotación de las dos estrellas alrededor del centro de masas deben ser iguales.**

–**Calcular el periodo de rotación suponiendo que la órbita es circular.**

–**Calcular el vector momento angular del sistema binario respecto del centro de masas. Suponer que el plano orbital es el plano XY.**

Solución:

Es evidente que el centro de masas siempre estará en la línea que une las dos estrellas. Como el sistema está aislado, el centro de masas (punto negro en la figura) debe permanecer en reposo o moviéndose con velocidad constante (a lo largo de la línea continua de la figura, por ejemplo). Tanto en un caso como en el otro (en el segundo caso basta mover nuestro sistema de referencia al centro de masas) el sistema se comporta como si estuviera unido por una varilla rígida que gira alrededor del centro de masas. Cada punto de esa línea gira con la misma velocidad angular:



Calculemos la posición del centro de masas con respecto de la estrella de mayor tamaño, por ejemplo:

$$x_{CM} = \frac{md}{M+m} = \frac{d}{3}$$

La distancia de la estrella de menor tamaño al centro de masas será, por consiguiente, $2d/3$.
Como el movimiento orbital está provocado por la atracción gravitatoria mutua tenemos, para cada estrella, que:

$$G\frac{Mm}{d^2} = \frac{Mv_M{}^2}{r_M} = M\omega^2 r_M \quad \text{y} \quad G\frac{Mm}{d^2} = \frac{mv_m{}^2}{r_m} = m\omega^2 r_m$$

siendo $r_M = d/3$ y $r_m = 2d/3$. Se puede comprobar que ambas ecuaciones son iguales. Cogiendo la segunda tenemos

$$\omega = \sqrt{G\frac{3m}{d^3}} \quad \rightarrow \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{3Gm}}$$

El momento angular de cada estrella es

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$$

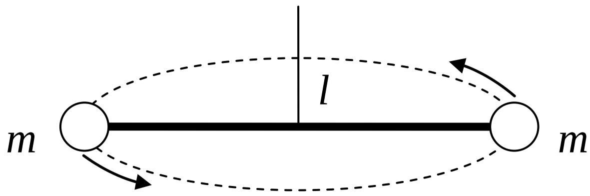
Como las órbitas de las dos estrellas se sitúan en el plano XY y los vectores posición y velocidad son perpendiculares en todo momento debido a que son órbitas circulares, el momento angular de cada estrella sólo tiene componente Z y esta componente tiene el mismo signo en los dos casos
Su módulo vale:

$$L_M = \left(\frac{d}{3}\right)^2 2m\omega \quad \text{y} \quad L_m = \left(\frac{2d}{3}\right)^2 m\omega$$

Sumando y sustituyendo el resultado anterior llegamos a

$$\mathbf{L} = \left(L_M + L_m\right)\mathbf{k} = \left(\frac{2}{3}\sqrt{G3m^3 d}\right)\mathbf{k}$$

Supongamos dos esferas puntuales de masa *m* unidas por una varilla de masa despreciable y de longitud *l*. El sistema está girando libremente en un plano horizontal con velocidad angular constante ω alrededor de un eje vertical perpendicular a la varilla y que pasa por su punto medio (ver figura)



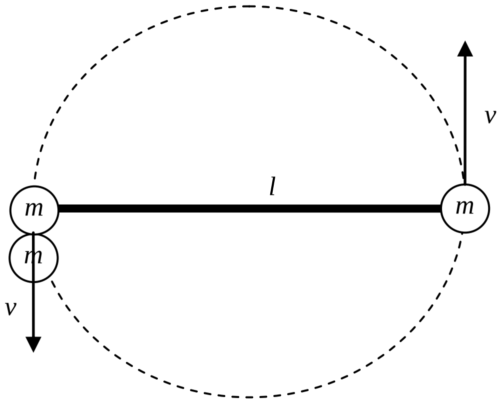
En un momento dado colocamos en la trayectoria circular de una de las esferas otra esfera en reposo con la misma masa.

–**Calcular la posición y la velocidad del centro de masas del sistema formado por las tres masas justo instantes antes del choque (suponed las esferas puntuales).**

–**En el choque las dos masas se quedan pegadas y justo inmediatamente después del mismo el sistema cambia espontáneamente de eje de giro y comienza a girar alrededor del punto dado por el centro de masas obtenido anteriormente. Explicar razonadamente el porqué.**

–**Sabiendo que se conserva el momento angular, calcular la nueva velocidad angular de giro (utilizar como origen de coordenadas para calcular el momento angular el centro de masas obtenido en el primer apartado)**

<u>Solución:</u>
En ese momento tenemos el siguiente esquema (visto desde arriba)



Si elegimos el origen de coordenadas en el extremo de la izquierda tenemos

$$(3m)x_{CM} = lm \quad \Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{l}{3}$$

Sólo tenemos velocidades en una dirección, así que el centro de masas sólo puede tener una componente no nula en esa dirección:

$$(3m)v_{CM} = mv - mv \quad \Rightarrow \quad v_{CM} = 0$$

Como se puede apreciar, la velocidad del centro de masas inmediatamente antes del choque es nula. Como no actúan fuerzas externas sobre el sistema, el centro de masas continuará con velocidad nula por lo que su posición no variará después del choque. Por esa razón el nuevo eje de giro se traslada a la posición del centro de masas.
Antes del choque, las dos partículas tienen una velocidad lineal $v = \omega\, l / 2$. El momento angular antes del choque con respecto al centro de masas es

$$L = m\left(\frac{2}{3}l\right)\omega\left(\frac{l}{2}\right) + m\left(\frac{1}{3}l\right)\omega\left(\frac{l}{2}\right) = m\omega\frac{l^2}{2}$$

El momento final será

$$L = m\left(\frac{2}{3}l\right)\omega'\left(\frac{2}{3}l\right) + 2m\left(\frac{1}{3}l\right)\omega'\left(\frac{1}{3}l\right) = m\omega'\frac{6l^2}{9}$$

Igualando obtenemos

$$\omega' = \frac{3}{4}\omega$$

Bajo la acción de un fuerza F, una partícula de masa *m* describe un movimiento circular de radio *R* en el plano XY con una velocidad de módulo constante *v*. El vector posición y el vector velocidad de la partícula en cualquier instante de tiempo tienen la forma $\mathbf{r}(t) = R\left(\cos(\omega t), \sin(\omega t), 0\right)\mathrm{m}$ y $\mathbf{v}(t) = R\omega\left(-\sin(\omega t), \cos(\omega t), 0\right)\mathrm{m/s}$, donde $\omega = v/R$ es la velocidad angular. Comprobar que el momento angular de la partícula se conserva y explicar por qué sucede esto.

Solución:
El momento angular en cualquier punto de la trayectoria será:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t) = m\left(0, 0, Rv\right)\ \mathrm{kg\ m^2/s}$$

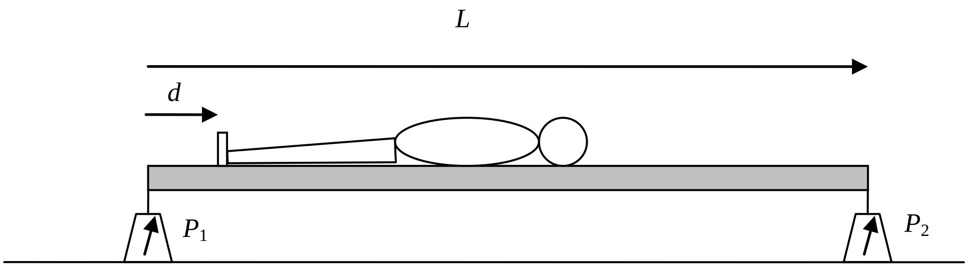
Se puede comprobar que no varía con el tiempo, es decir, que es constante. Esto es debido a que la fuerza **F** que produce un movimiento circular uniforme es una fuerza central de módulo constante $F = mv^2 / R$. Al tratarse de una fuerza central cuya dirección es la dirección radial, esto es, la dirección de la fuerza coincide en todo momento con la dirección del vector posición de la partícula, el momento de la fuerza será cero:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

Esto quiere decir que el momento angular de la partícula se conservará:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{L} = \text{constante}\,.$$

Una forma experimental de obtener la altura del centro de masas de una persona consiste en tumbar completamente a la persona en una tabla que se encuentra apoyada en sus dos extremos en sendas balanzas, tal y como se muestra en la figura.

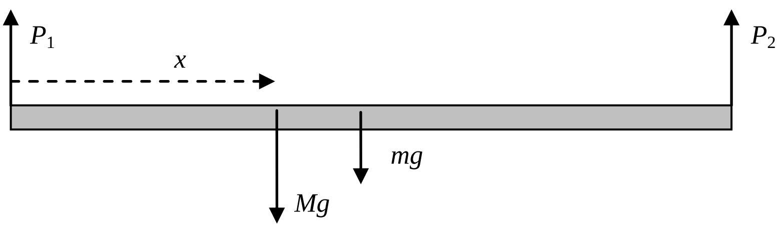


– Calcular la altura a la que se encuentra el centro de masas de la persona en función de la distancia *d* a uno de los extremos, de la longitud *L* y masa *m* de la tabla, de la masa *M* de la persona y de los pesos registrados en las dos balanzas P_1 y P_2.

– Si ahora retiramos las dos balanzas y las sustituimos por un pivote, en qué punto de la tabla debemos colocarlo para que el sistema siga en equilibrio.

Solución:

Aplicamos la condición de equilibrio traslacional y rotacional sobre la tabla, sobre la que actúan las siguientes fuerzas:



siendo *x* la posición del centro de masas de la persona con respecto al extremo izquierdo. El equilibrio rotacional con momentos calculados con respecto al extremos izquierdo da:

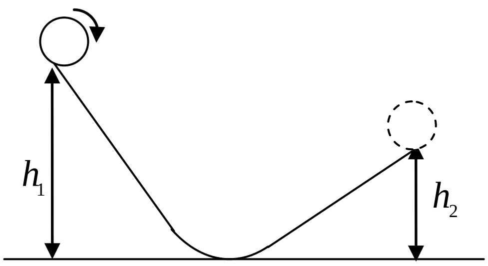
$$\sum \mathbf{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad Mgx + mgL/2 - P_2 L = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{P_2 L - mgL/2}{Mg}$$

Por consiguiente, el centro de gravedad de la persona estará a una altura $x - d$:

$$h_{CM} = \frac{P_2 L - mgL/2}{Mg} - d$$

Si ahora quitamos las balanzas y apoyamos la tabla sobre un pivote, éste deberá estar aplicado en el centro de masas del sistema tabla + persona, ya que de esta forma la fuerza y el momento resultante son nulos y el sistema se encuentra en equilibrio.

Una esfera de masa M y radio R cae rodando sin deslizar por el plano inclinado de la izquierda de la figura desde una altura h_1. Al llegar a la parte más baja la pista deja de tener rozamiento y la bola empieza a subir por el plano inclinado de la derecha, que tampoco tiene rozamiento. Determinar la altura máxima h_2 que alcanzará la bola. (El momento de inercia de una esfera sólida es $I = 2/5MR^2$)



<u>Solución:</u>
En ningún momento hay disipación de energía por lo que la energía mecánica total se conservará durante todo el movimiento. Durante la caída por la primera rampa, aunque existe rozamiento, no hay pérdida de energía ya que la esfera cae rodando sin deslizar, por lo que el balance de energía será:

$$E_{h_1} = E_{h=0} \;\rightarrow\; Mgh_1 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

donde $\omega = v/R$.
Despejando obtenemos la velocidad de traslación del centro de masas en la parte más baja.

$$v^2 = \frac{10}{7}gh_1$$

En el momento en el que la esfera pasa a la región sin rozamiento deja de ejercerse momento alguno sobre la esfera que la haga girar, ya que las únicas fuerzas que actúan sobre la misma son el peso, aplicado en su centro, y la fuerza normal de reacción del plano, cuyo momento sobre la bola también es nulo. Entonces la bola, que tenía una cierta velocidad de rotación ω en el punto más bajo justo antes de entrar en la nueva región, mantendrá esa velocidad de rotación durante toda la ascensión por la segunda rampa ya que no experimentará ningún momento neto, por lo que la aceleración angular será 0. Al final de la rampa, en el punto más alto, la velocidad de traslación será nula pero seguirá rotando sobre sí misma con la misma velocidad de rotación ω que tenía justo antes de entrar en la región sin rozamiento. La energía en ese punto será

$$E_{h_2} = \frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh_2$$

Esta energía debe ser igual a la energía en el punto inicial E_{h_1}. Igualando tenemos

$$Mgh_2 = Mgh_1 - \frac{1}{2}I\omega^2$$

Ahora podemos sustituir el valor de la energía cinética de rotación y así llegar al resultado pedido:

$$
\begin{aligned}
Mgh_2 &= Mgh_1 - \frac{1}{2} I\omega^2 \\
&= Mgh_1 - \frac{2}{10} Mv^2 \\
&= Mgh_1 - \frac{2}{7} Mgh_1 \\
&= \frac{5}{7} Mgh_1
\end{aligned}
$$

de donde obtenemos finalmente que

$$h_2 = \frac{5}{7} h_1 \,.$$