Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2.5 puntos) (1+1.5)
Sea E un conjunto no vacío y $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$ una aplicación tal que dados dos subconjuntos disjuntos cualesquiera de E, A y B, se cumple que $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

a) Demuestre que $f(\varnothing) = 0$.

b) Demuestre que $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(E)$ se cumple que $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$.

Solución: a) En efecto, como

$$f(\varnothing) = f(\varnothing \cup \varnothing) = f(\varnothing) + f(\varnothing)$$

de $f(\varnothing) = f(\varnothing) + f(\varnothing)$ se deduce que $f(\varnothing) = 0$.

b) Observemos que $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ y A y $B \setminus A$ son conjuntos disjuntos. En consecuencia:

$$f(A \cup B) = f(A \cup (B \setminus A)) = f(A) + f(B \setminus A) \tag{1}$$

Por otro lado $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ y $A \cap B$ y $B \setminus A$ son conjuntos disjuntos. Por tanto:

$$f(B) = f\big((A \cap B) \cup (B \setminus A)\big) = f(A \cap B) + f(B \setminus A)$$

y despejando $f(B \setminus A)$ se obtiene, $f(B \setminus A) = f(B) - f(A \cap B)$. Sustituyendo en (1), resulta

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

de donde se deduce que $f(A \cup B) + f(A \cap B) = f(A) + f(B)$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Se define en $\mathbb{R}^2$ la relación $\ll$ dada por:

$$(x, y) \ll (x', y') \text{ si y sólo si } \ (x + y < x' + y') \text{ o } \ (x + y = x' + y' \text{ y } \ x \leq x')$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden en $\mathbb{R}^2$ y determine si el orden es total o parcial.

b) Represente en el plano el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1, 1) \ll (x, y)\}$. Determine razonadamente, si existen, cotas superiores, supremo y máximo del conjunto $B = \{(1, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ y del triángulo CDE siendo C, D y E los puntos de coordenadas $(-7, 0)$, $(0, 7)$ y $(2, 5)$, respectivamente.

Solución: a)Veamos que $\ll$ es una relación de orden total en $\mathbb{R}^2$.

Es reflexiva: para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que $(x, y) \ll (x, y)$ pues $x + y = x + y$ y $x \leq x$.

Es antisimétrica: para todo (x, y), $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ se tiene que si $(x, y) \ll (x', y')$ y $(x', y') \ll (x, y)$ entonces

$$\begin{cases} (x + y < x' + y') \text{ o } \ (x + y = x' + y' \text{ y } \ x \leq x') \\ (x' + y' < x + y) \text{ o } \ (x' + y' = x + y \text{ y } \ x' \leq x) \end{cases}$$

Estudiando todas las posibilidades

$$\begin{cases} (x + y < x' + y') \text{ y } \ (x' + y' < x + y) \\ \text{ o } \ (x + y < x' + y') \text{ y } \ (x' + y' = x + y \text{ y } \ x' \leq x) \\ \text{ o } \ (x + y = x' + y' \text{ y } \ x \leq x') \text{ y } \ (x' + y' < x + y) \\ \text{ o } \ (x + y = x' + y' \text{ y } \ x \leq x') \text{ y } \ (x' + y' = x + y \text{ y } \ x' \leq x) \end{cases}$$

el único caso factible es el último en el que se deduce que $x+y=x'+y'$ y $x=x'$, esto es, $(x,y)=(x',y')$.

Es transitiva: sean (x,y), (x',y'), $(x'',y'')\in\mathbb{R}^2$ tales que $(x,y)\ll(x',y')$ y $(x',y')\ll(x'',y'')$. Por tanto,

$$\begin{cases}(x+y<x'+y') \text{ o } (x+y=x'+y' \text{ y } x\leq x')\\ (x'+y'<x''+y'') \text{ o } (x'+y'=x''+y'' \text{ y } x'\leq x'')\end{cases}$$

Estudiando todas las posibilidades

$$\begin{cases} (x+y<x'+y') \text{ y } (x'+y'<x''+y'')\\ \text{o } (x+y<x'+y') \text{ y } (x'+y'=x''+y'' \text{ y } x'\leq x'')\\ \text{o } (x+y=x'+y' \text{ y } x\leq x') \text{ y } (x'+y'<x''+y'')\\ \text{o } (x+y=x'+y' \text{ y } x\leq x') \text{ y } (x'+y'=x''+y'' \text{ y } x'\leq x'')\end{cases}$$

de los tres primeros caso se deduce que $x+y<x''+y''$ mientras que en el último se deduce que $x+y=x''+y''$ y $x\leq x''$. Por tanto, $(x,y)\ll(x'',y'')$.

Además el orden es total. En efecto dados (x,y), $(x',y')\in\mathbb{R}^2$, se comparan $x+y$ y $x'+y'$ dándose únicamente los tres casos siguientes.

i) Si $x+y<x'+y'$ entonces $(x,y)\ll(x',y')$.

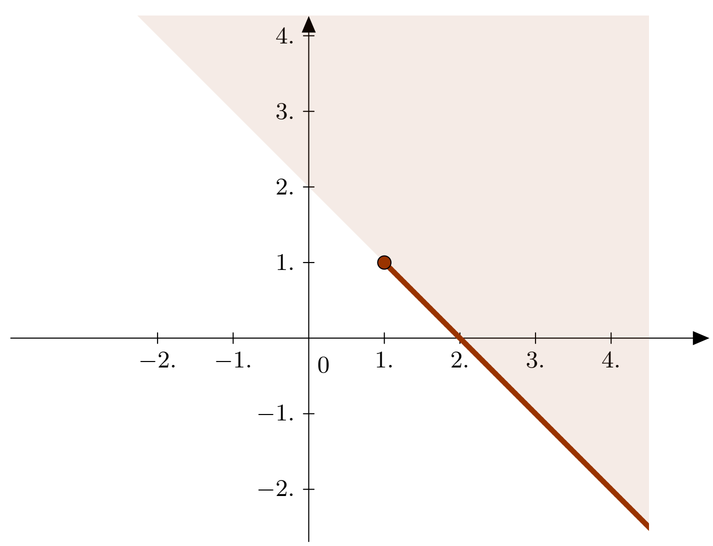
ii) Si $x'+y'<x+y$ entonces $(x',y')\ll(x,y)$.

iii) Si $x'+y'=x+y$ entonces se comparan x y x' con las siguientes posibilidades.

Si $x\leq x'$ entonces $(x,y)\ll(x',y')$.

Si $x'<x$ entonces $(x',y')\ll(x,y)$.

b) Observemos que $(x,y)\in A$ si y sólo sí $(1,1)\ll(x,y)$, es decir, $2<x+y$ o $(x+y=2$ y $1\leq x)$. Por tanto A es la unión del semiplano abierto $x+y>2$ y de la semirrecta $x+y=2$, $1\leq x$. Veáse la representación adjunta.



El conjunto B no está acotado superiormente: en efecto para cualquier $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ el elemento $(1,a+b)$ cumple que $(1,a+b)\in Y$ y sin embargo, no es cierto que $(1,a+b)\ll(a,b)$. Por tanto ningún elemento $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ es cota superior de Y.

El triángulo T de vértices C, D, y E está situado en la banda cerrada del plano limitada por las rectas de ecuaciones $x+y=-7$ y $x+y=7$. Por tanto, todas las cotas superiores (a,b) del conjunto T de las coordenadas del triángulo de vértices C, D, y E deben cumplir que $a+b\geq 7$. Además si $a+b=7$ se tiene que cumplir que $a\geq\max(0,2)=2$ Luego el conjunto de cotas superiores de los puntos del triángulo es

$$H=\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \mid a+b>7 \text{ o } (a+b=7 \text{ y } a\geq 2)$$

El elemento $(2,5) \in H \cap T$, por tanto $(2,5) = \sup T = \max T$.

Pregunta 3 (2 puntos)
Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq 0$. Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene:

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Solución: i) La desigualdad es cierta para $n = 0$ pues $(1+a)^0 = 1 \geq 1 + 0 \cdot a$.
ii) Supongamos que la desigualdad es cierta para n, esto es, $(1+a)^n \geq 1 + na$. Veamos que es cierta para $n+1$, esto es,

$$(1+a)^{n+1} \geq 1 + (n+1)a\,.$$

En efecto,

$$\begin{array}{rcl} (1+a)^{n+1} & = & (1+a)(1+a)^n \text{ por la hipótesis de inducción y puesto que } 1+a \geq 0 \\ & \geq & (1+a)(1+na) = 1 + a + na + na^2 \geq 1 + a + na = 1 + (n+1)a. \end{array}$$

Pregunta 4 (2.5 puntos)
Sea el conjunto de los números primos estrictamente superiores a 2:

$$\mathbb{P} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ es primo y } \ p > 2\}$$

Se define en $\mathbb{P}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$p\mathcal{R}q \ \text{ si y sólo si } \ \frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}$$

Determine razonadamente si la relación es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva.

Se recuerda que todo número primo mayor que 2 tiene, en $\mathbb{N}$, únicamente dos divisores distintos, el propio número y el 1.

Solución:
Es reflexiva: para todo $p \in \mathbb{P}$ se tiene que $p\mathcal{R}p$ pues $\frac{p+p}{2} = p \in \mathbb{P}$.

Es simétrica: para todo $p, q \in \mathbb{P}$ si $p\mathcal{R}q$ entonces $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}$ por tanto $\frac{q+p}{2} \in \mathbb{P}$ y en consecuencia, $q\mathcal{R}p$.

No es antisimétrica. De $p\mathcal{R}q$ y $q\mathcal{R}p$ sólo se deduce que $\frac{p+q}{2} \in \mathbb{P}$. Basta por tanto, hallar dos números primos distintos que estén relacionados para concluir que la relación no es antisimétrica. Por ejemplo, $3\mathcal{R}7$ y por la propiedad simétrica $7\mathcal{R}3$ y sin embargo $3 \neq 7$.

No es transitiva: De $p\mathcal{R}q$ y $q\mathcal{R}r$ se deduce que $a = \frac{p+q}{2}, b = \frac{q+r}{2} \in \mathbb{P}$. A priori, no parece que se pueda deducir que $\frac{p+r}{2} \in \mathbb{P}$. Busquemos un contraejemplo. Para ello escribimos los primero elementos de $\mathbb{P}$: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, etc. De estos números nos fijamos en los que están relacionados con el número 3, que son: 3, 7, 11, 19 y 23 pues $\frac{3+7}{2} = 5 \in \mathbb{P}$, $\frac{3+11}{2} = 7 \in \mathbb{P}$, $\frac{3+19}{2} = 11 \in \mathbb{P}$ y $\frac{3+13}{2} = 13 \in \mathbb{P}$. Tenemos por ejemplo, $7\mathcal{R}3$ y $3\mathcal{R}11$. Sin embargo 7 y 11 no están relacionados pues $\frac{7+11}{2} = 9 \notin \mathbb{P}$. Por tanto la relación no es transitiva.

Nota: Si nos hubiéramos fijado en los números 7, 3 y 19 , se tiene $7\mathcal{R}3$ y $3\mathcal{R}19$ y en este caso, también se cumple que $7\mathcal{R}19$ pues $\frac{7+19}{2} = 13 \in \mathbb{P}$. Sin embargo no se puede concluir que $\mathcal{R}$ es transitiva (de hecho, no lo es) salvo que se demuestre para cualquier terna de elementos.