**ANÁLISIS NUMÉRICO, MATRICIAL E INTERPOLACIÓN**
(Grado en Matemáticas)
**Junio 2023**

**INSTRUCCIONES:**

`MATERIAL PERMITIDO:`

- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario.
- El **libro de texto** de la asignatura (o una copia impresa del ebook) *Introducción al Cálculo Numérico* de Carlos Moreno González.

`DURACIÓN:` 120 minutos.

Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre y fecha.

**P 1.** (3.5 puntos) Aplique el método de Gram-Schmidt para obtener la factorización QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

**P 2.** (3 puntos) Discuta la existencia y unicidad de un polinomio $p \in \mathcal{P}_3$ tal que $p(0) = 1$, $p(1) = 3$, $p'(-1) = 4$ y $p''(0) = 0$.

**P 3.** (3.5 puntos) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se considera la cuadratura obtenida por interpolación de Lagrange $Q_n(f)$ para aproximar la integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ usando como nodos las $n+1$ raíces del polinomio de Chebyshev $T_{n+1}(x)$. Demuestre que en el caso $f(x) = 1/(x+2)$ se tiene que el error de cuadratura $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - Q_n(f)$ converge a cero cuando $n$ tiende a infinito.

*Solución del Problema 1.* Denotamos las columnas de la matriz como

$$\mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}^2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{a}^3 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Consideremos nuestro primer vector

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{a}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \|\mathbf{p}^1\| = \sqrt{6}\,.$$

El segundo vector corresponde a

$$\mathbf{p}^2 = \mathbf{a}^2 - \frac{\langle \mathbf{a}^2, \mathbf{p}^1 \rangle}{\|\mathbf{p}^1\|^2}\mathbf{p}^1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} - \frac{18}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \|\mathbf{p}^2\| = \sqrt{2}\,.$$

El tercer vector

$$\mathbf{p}^3 = \mathbf{a}^3 - \frac{\langle \mathbf{a}^3, \mathbf{p}^1 \rangle}{\|\mathbf{p}^1\|^2}\mathbf{p}^1 - \frac{\langle \mathbf{a}^3, \mathbf{p}^2 \rangle}{\|\mathbf{p}^2\|^2}\mathbf{p}^2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} - \frac{-12}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{-2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \|\mathbf{p}^3\| = \sqrt{3}\,.$$

En resumen,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & -4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz diagonal es

$$\begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 3\sqrt{6} & -2\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

*Solución del Problema 2.* Una forma de abordar el problema, consiste en considerar el polinomio cuyos coeficientes son incógnitas:

$$\begin{aligned} p(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3\,, \\ p'(x) &= b + 2cx + 3dx^2\,, \\ p''(x) &= 2c + 6dx\,. \end{aligned}$$

podemos imponer las condiciones

$$\begin{aligned} 1 &= p(0) = a \\ 3 &= p(1) = a + b + c + d \\ 4 &= p'(-1) = b - 2c + 3d \\ 0 &= p''(0) = 2c \end{aligned}$$

que podemos traducir en un sistema lineal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para determinar el rango de la matriz de coeficientes calculamos su determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

Por tanto, la solución existe y es única. □

*Solución del Problema 3.* Recordemos el Teorema 24 del libro, que nos dice que el error de cuadratura

$$E = \int_{-1}^{1} f(x)dx - Q_n(f)$$

se puede estimar como

$$|E| \leq \frac{\max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \int_{-1}^{1} |w_{n+1}(x)|\, dx\,.$$

Por un lado, observemos que

$$f^{(n)}(x) = (-1)(-2)\dots(-n)(x+2)^{-(n+1)} = (-1)^n n!(x+2)^{-(n+1)}\,.$$

Por tanto,

$$\frac{\max_{\xi \in [-1,1]} |f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \leq \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = 1\,.$$

Por otro lado, como estamos tomando como nodos del polinomio $T_{n+1}$ de Chebyshev, entonces $w_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} T_{n+1}$, que satisface $|w_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$ para todo $x \in [-1,1]$. Esto nos permite acotar

$$\int_{-1}^{1} |w_{n+1}(x)| dx \leq \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Combinando estas estimaciones, obtenemos que

$$|E| \leq 1 \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\,.$$

Se concluye inmediatamente que el error de cuadratura tiende a cero. □