ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

Sucesión de Fibonacci

Ecuaciones lineales homogéneas

Ecuaciones lineales en diferencias

Definición

En matemáticas, una ecuación en diferencias finitas o EDF es una ecuación cuya solución es una sucesión, es decir, está definida por una relación entre términos consecutivos de una sucesión, que pretende ser una solución.

Por ejemplo, los términos x_n de la sucesión:

$\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots\}$

Verifican la ecuación en diferencias:

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$

Fibonacci

Esta sucesión es conocida como sucesión de Fibonacci.

Por ejemplo si queremos calcular la probabilidad de que al lanzar n veces una moneda al aire no salgan dos caras seguidas podemos contar el número de casos favorables mediante la ecuación de Fibonacci.

Se representa x_n por el número de casos favorables a n lanzamientos.

Fibonacci

Si en el último lanzamiento sale una cruz, el número de casos posibles se reduce a x_{n-1} ya que no influye este hecho en los anteriores lanzamientos.

Si en el último lanzamiento sale una cara, el número de casos posibles se reduce a x ya que fuerza a que el penúltimo sea cruz. Entonces el número de casos favorables verifica la ecuación:

$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$

Ecuación de Fibonacci

Orden de una ecuación en diferencias finitas

El orden de una ecuación es diferencias finitas es la diferencia entre el mayor y el menor de los índices que aparecen en la relación que define la ecuación. En el caso de la ecuación de Fibonacci es de orden 2:

$$(n+1) - (n-1) = K = 2$$

Introducción

Las ecuaciones en diferencias aparecen en diversas áreas de la ciencia y son particularmente importantes en algunos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales cómo veréis en los siguientes capítulos.

Una de las aplicaciones de las EDF es el estudio de la evolución de las variables temporales en Economía cuando se considera al tiempo como una variable discreta.

Recurrencia y algoritmos iterativos

En capítulos anteriores se han estudiado recurrencias y algoritmos iterativos que son conceptos relacionados. Se puede expresar la ecuación que define la sucesión de Fibonacci en forma vectorial como:

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)}$ donde $x^{(n)} = (x_n, x_{n+1})^t$ y A es la matriz de coeficientes

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector inicial $x^{(0)} = (x_0, x_1)$ tiene como componentes a todos los datos iniciales.

Sucesión de Krylov

La sucesión generada por la recurrencia es una sucesión de Krylov asociada a la matriz A.

Se llama sucesión de Krylov asociada al vector x y a la matriz cuadrada A, a la siguiente sucesión

$\{x, Ax, A^2x, A^3x, \ldots, A^nx, \ldots\}$

Ecuaciones lineales en diferencias

El estudio de las ecuaciones lineales en diferencias, con coeficientes constantes, nos indica que se pueden expresar de la siguiente forma:

$x_{n+1} + a_{k-1}x_n + a_{k-2}x_{n-1} + \ldots + a_0x_{n-k+1} = b_n$

En el caso de la sucesión de Fibonacci, sería:

$x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $b_n = 0$

$a_0 = -1$ y $a_1 = -1$ $(k = 2)$

Podemos calcular términos de la sucesión de Fibonacci, sabiendo que $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$;

Ecuaciones lineales en diferencias

$x_2 = x_0 + x_1 = 0 + 1 = 1$

$x_3 = x_1 + x_2 = 1 + 1 = 2$

$x_4 = x_2 + x_3 = 1 + 2 = 3$

$x_5 = x_3 + x_4 = 2 + 3 = 5$

…

Pero en ocasiones lo interesante es conocer el término n-ésimo sin necesidad de conocer todos los términos que le preceden, es decir encontrar una expresión de x_n en términos exclusivamente de n y de los k primeros términos, es decir, resolver la ecuación en diferencias.

Ecuaciones lineales homogéneas en diferencias con coeficientes constantes

La ecuación lineal homogénea en diferencias

$x_{n+1} + a_{k-1}x_n + a_{k-2}x_{n-1} + \ldots + a_0x_{n-k+1} = 0,\ a_0 \neq 0$

Se puede expresar en forma vectorial como

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} = A^{n+1}x^{(0)}$

donde $x^{(n)} = (x_n, x_{n+1},\ldots, x_{n+k-1})^t$ y A es la matriz de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones lineales homogéneas en diferencias con coeficientes constantes

Los autovalores de la matriz son las raíces de su polinomio característico.

La ecuación característica en la incógnita λ es

$\lambda^{k} + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$, donde k es el orden.

El determinante de la matriz de coeficientes es $(-1)^{k}a_0 \neq 0$

Entonces la matriz es invertible y todos sus autovalores son distintos de 0.

El cálculo de las potencias sucesivas de A puede ser más sencillo si se utiliza su factorización canónica de Jordan.

Matriz canónica de Jordan

Por el teorema de Jordan existe un matriz invertible P tal que $A = PJP^{-1}$

Donde la matriz canónica de Jordan J es una matriz diagonal por bloques:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_m \end{pmatrix} \quad J_i = \begin{pmatrix} \lambda_{mi} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{mi} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{mi} & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{mi} \end{pmatrix}$$

Para i = 1, 2, …, m y la suma de las dimensiones de los bloques de Jordan es k.

Matriz canónica de Jordan

Al calcular las matrices sucesivas de A se tiene:

$A^n = PJ^nP^{-1}$

$$J^n = \begin{pmatrix} {J_1}^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & {J_2}^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & {J_m}^n \end{pmatrix}$$

Ecuaciones lineales homogéneas en diferencias con coeficientes constantes

La n-ésima potencia de cada bloque está dada por

$$J_i^n = \begin{pmatrix} \Lambda_{mi}^{\,n} & \binom{n}{1}\Lambda_{mi}^{\,n\text{-}1} & \cdots & \binom{n}{ri-2}\Lambda_{mi}^{\,n-\mathrm{ri}+1} & \binom{n}{ri-1}\Lambda_{mi}^{\,n-ri} \\ 0 & \Lambda_{mi}^{\,n} & \cdots & \binom{n}{ri-3}\Lambda_{mi}^{\,n-\mathrm{ri}+2} & \binom{n}{ri-2}\Lambda_{mi}^{\,n-\mathrm{ri}+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Lambda_{mi}^{\,n} & \binom{n}{1}\Lambda_{mi}^{\,n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Lambda_{mi}^{\,n} \end{pmatrix}$$

Ecuaciones lineales homogéneas en diferencias con coeficientes constantes

La solución de la ecuación en diferencias homogénea es combinación lineal de las siguientes funciones en la variable n

$\{\Lambda_{mi}{}^{n}, \binom{n}{1} \Lambda_{mi}{}^{n\text{-}1}, \ldots, \binom{n}{ri-1} \Lambda_{mi}{}^{n\text{-}ri} : i = 1,\ldots, m\}$

O equivalentemente, de las funciones

$\{\Lambda_{mi}{}^{n}, n\Lambda_{mi}{}^{n\text{-}1}, n^2 \Lambda_{mi}{}^{n\text{-}2}, \ldots, n^{ri\text{-}1}\Lambda_{mi}{}^{n\text{-}ri+1} : i = 1, \ldots, m\}$

Ejemplo 1. Resuelve la ecuación en diferencias: $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$

Vemos que es una ecuación en diferencias finitas homogénea.

Calculamos el orden:

(n+3)-n=k=3

Luego la ecuación característica asociada es:

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación por Ruffini y obtenemos:

$$(\lambda + 1)^3 = 0$$

<u>Ejemplo 1.</u> Resuelve la ecuación en diferencias: $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$

Es decir $\lambda = -1$ es una solución triple

Luego la solución general de la ecuación en diferencias es:

$x_n = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^{n-1} + c_3 n^2(-1)^{n-2}$

donde $c_{1,}$ c_2 y c_3 son constantes arbitrarias.

Ecuaciones lineales en diferencias con coeficienes constantes

Consideramos la siguiente ecuación en diferencias con coeficientes constantes

$x_{n+1} + a_{k-1}x_n + a_{k-2}x_{n-1} + \ldots + a_0x_{n-k+1} = b_n$

Si el término $b_n = 0$ para todo $n > k$, la ecuación no es homogénea.

La ecuación puede expresarse en forma vectorial como

$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + b^{(n)}$

Donde $b^{(n)} = (0, \ldots, 0, b_{n+k})^t$

Para todo dato inicial $x^{(0)}$ la ecuación tiene solución única.

Ecuaciones lineales en diferencias con coeficienes constantes

Si conocemos una solución particular $x_0^{(n)}$ de esta ecuación y $z^{(n)}$ es la solución general de la ecuación homogénea asociada

$$z^{(n+1)} = Az^{(n)}$$

Entonces $x_0^{(n)} + z^{(n)}$ es la solución general de la ecuación completa.

Una estrategia para resolver la ecuación no homogénea consiste en encontrar alguna solución particular y completarla con la solución general de la ecuación homogénea.

Ecuaciones lineales en diferencias con coeficienes constantes

Aunque no hay un procedimiento general que permita calcular con sencillez una solución particular de la ecuación completa, en algunas situaciones especiales existen métodos que pueden resultar eficaces, por ejemplo el llamado método de los coeficientes indeterminados.

Forma de b_n	Forma solución particular x_n^0
$d^n p(n)$	$d^n q(n)$

Donde q(n) es un polinomio a determinar.

Ejemplo 2. Calcula la solución general de la ecuación lineal en diferencias:

$x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 5^n n$

Primero calculamos la solución general de la homogénea

$x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 0$

Calculamos el orden de la ecuación

$(n+1) - (n-1) = k = 2$

Buscamos las raíces de la ecuación característica

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

Ejemplo 2. Calcula la solución general de la ecuación lineal en diferencias:

$$x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 5^n n$$

Cuyas raíces son 2 y 3, entonces la solución general de la homogénea resulta

$$z_n = c_1 2^n + c_2 3^n$$

Consideramos una solución particular de la completa

$$X_n^0 = 5^n(r_1 n + r_0)$$

Sustituimos esta expresión en la ecuación completa

$$5^{n+1}(r_1(n+1) + r_0) - 5 \cdot 5^n(r_1 n + r_0) + 6 \cdot 5^{n-1}(r_1(n-1) + r_0) = 5^n n$$

Ejemplo 2. Calcula la solución general de la ecuación lineal en diferencias:

$x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 5^n n$

$5^{n+1}(r_1(n+1) + r_0) - 5\cdot 5^n(r_1 n + r_0) + 6\cdot 5^{n-1}(r_1(n-1) + r_0) = 5^n n$

Dividimos toda la ecuación entre 5^n y nos queda

$5(r_1(n+1) + r_0) - 5(r_1 n + r_0) + 6\cdot 5^{-1}(r_1(n-1) + r_0) = n$

Haciendo operaciones y simplificando nos queda

$5r_1 + 6/5r_1 n - 6/5r_1 + 6/5r_0 = n$

$19/5r_1 + 6/5r_0 + 6/5r_1 n = n$

Igualando coeficientes, obtenemos el sistema

<u>Ejemplo 2.</u> Calcula la solución general de la ecuación lineal en diferencias:

$x_{n+1} - 5x_n + 6x_{n-1} = 5^n n$

$$\left.\begin{aligned} 6/5r_1 n &= n \\ 19/5r_1 + 6/5r_0 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De lo que se obtiene que $r_1 = 5/6$ y $r_0 = -95/36$

Luego la solución general de la ecuación comples es

$x_n = 5^n(5/6n - 95/36) + c_1 2^n + c_2 3^n$

Ejemplo 3. Calcula la solución de la ecuación lineal en diferencias:

$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 1,\ x_0 = 0\ x_0 = 0$

Resolvemos la Ecuación en Diferencias Finitas Homogénea (EDFH)

$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 0$

El orden de la ecuación es $(n+2) - n = k = 2$

El polinomio característico es

$ʎ^2 - 2ʎ - 3 = 0$ con soluciones $ʎ = 3$ y $ʎ = -1$

La solución general de la homogénea es

$z_n = c_1 3^n + c_2(-1)^n$

Ejemplo 3. Calcula la solución de la ecuación lineal en diferencias:

$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 1,\ x_0 = 0\ x_0 = 0$

Buscamos una solución particular de la no homogénea.

Por la forma de $b_n = 1$

Proponemos la solución particular

$x_n^0 = r_0$

Sustituimos en la Ecuación en Diferencias Finitas (EDF)

$r_0 - 2r_0 - 3r_0 = 1$

Luego $r_0 = - 1/4$

Ejemplo 3. Calcula la solución de la ecuación lineal en diferencias:

$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 1$, $x_0 = 0$ $x_0 = 0$

Por tanto, tenemos la solución general

$x_n = z_n + x_n^{\,0} = c_1 3^n + c_2(-1)^n - 1/4$

Aplicamos las condiciones iniciales

$0 = x_0 = c_1 + c_2 - 1/4$

$0 = x_1 = c_1 3 - c_2 - 1/4$

Resolvemos el sistema y las soluciones son

$c_1 = 1/8$ y $c_2 = 1/8$

Ejemplo 3. Calcula la solución de la ecuación lineal en diferencias:

$x_{n+2} - 2x_{n+1} - 3x_n = 1,\ x_0 = 0\ x_0 = 0$

Finalmente, la solución de la EDF es

$x = 1/8 \cdot 3^n + 1/8 \cdot (-1)^n - 1/4$

Resolución Numérica de Ecuaciones

TUTORA UNED

Mariví Millán Huerta