Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (3 puntos)
En el espacio $\mathcal{P}^n_{\mathbb{R}}[0,1)$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a n, se define

$$\langle P, G\rangle = \int_0^1 tP(t)G(t)\,dt\,.$$

a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{P}^n_{\mathbb{R}}[0,1)$.

b) Determine una base ortonormal, respecto de este producto interno, del subespacio vectorial $\mathcal{F} = \mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,1)$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a dos.

c) Halle la proyección ortogonal del polinomio $P(t) = t^3$ sobre el subespacio $\mathcal{G} = \mathcal{P}^1_{\mathbb{R}}[0,1)$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a uno.

Solución: a) $\langle P,P\rangle = \int_0^1 tP^2(t)\,dt \geq 0$ pues $P^2(t)\geq 0$ y $t\geq 0$ para todo $t\in[0,1)$.
Además si $\langle P,P\rangle = \int_0^1 tP^2(t)\,dt = 0$, teniendo en cuenta que el integrando es una función continua positiva en $[0,1]$, resulta que $tP^2(t)=0$ para todo $t\in[0,1)$. Por tanto, $P(t)=0$ para todo $t\in(0,2)$ y en consecuencia $P\equiv 0$.
Nota: Un polinomio de grado n que se anula en más de n valores distintos es necesariamente el polinomio cero.

Claramente $\langle P,G\rangle = \langle G,P\rangle$ pues $P(t)G(t) = G(t)P(t)$ para todo t.

Además para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y para todo $P,Q,G\in\mathcal{P}^n_{\mathbb{R}}[0,1)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha P+\beta Q, G\rangle &= \int_0^1 t\big(\alpha P(t)+\beta Q(t)\big)G(t)\,dt\\
&= \alpha\int_0^1 tP(t)G(t)\,dt + \beta\int_0^1 tQ(t)G(t)\,dt\\
&= \alpha\langle P,G\rangle + \beta\langle Q,G\rangle
\end{aligned}$$

b) Ortonormalizamos, mediante Gram-Schmidt, la base $\{x_1,x_2,x_3\}$ de $\mathcal{F}$ tal que $x_1(t)=1$, $x_2(t)=t$ y $x_3(t)=t^2$ para todo $t\in[0,2)$.
De $\int_0^1 t(1^2)\,dt = \Big[t^2/2\Big]_0^1 = 1/2$ se obtiene $e_1(t)=\sqrt{2}$. A su vez,

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= x_2(t) - \langle x_2,e_1\rangle e_1(t) = t - \sqrt{2}\int_0^1 t(\sqrt{2}t)\,dt\\
&= t - 2\Big[t^3/3\Big]_0^1 = t - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle y_2,y_2\rangle &= \langle y_2,x_2\rangle - \langle x_2,e_1\rangle\,\langle y_2,e_1\rangle = \langle y_2,x_2\rangle = \int_0^1 t(t-2/3)t\,dt\\
&= \Big[t^4/4 - 2t^3/9\Big]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{9} = \frac{1}{36}
\end{aligned}$$

en consecuencia, se obtiene el vector unitario $e_2(t) = 6y_2(t) = 6t-4$. Obtenemos y_3:

$$\begin{aligned}
y_3(t) &= x_3(t) - \langle x_3,e_1\rangle e_1(t) - \langle x_3,e_2\rangle e_2(t) = t^2 - 2\int_0^1 t^3\,dt - \Big(\int_0^1 t^2(6t-4)t dt\Big)(6t-4)\\
&= t^2 - \frac{1}{2} - (\frac{6}{5}-1)(6t-4) = t^2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5}(6t-4) = t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{3}{10}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle y_3,y_3\rangle &= \langle x_3,y_3\rangle - \langle x_3,e_1\rangle\langle e_1,y_3\rangle - \langle x_3,e_2\rangle\langle x_3,e_2\rangle = \langle x_3,y_3\rangle\\
&= \int_0^1 t(t^2)(t^2 - \frac{6}{5}t + \frac{3}{10})\,dt = \int_0^1 (t^5 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{3}{10}t^3)\,dt = \frac{1}{6} - \frac{6}{25} + \frac{3}{40} = \frac{1}{600}
\end{aligned}$$

en consecuencia, se obtiene el vector unitario $e_3(t) = \dfrac{y_3(t)}{\|y_3\|} = \sqrt{6}(10t^2 - 12t + 3)$
Por tanto, una base ortonormal de $\mathcal{F}$ es $\{e_1, e_2, e_3\}$ siendo $e_1(t) = \sqrt{2}$, $e_2(t) = 6t - 4$ y $e_3(t) = \sqrt{6}(10t^2 - 12t + 3)$ para todo $t \in [0, +\infty)$.

c) $\mathcal{G}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{F}$ siendo $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{G}$. La proyección ortogonal de P sobre $\mathcal{G}$ es

$$y = \langle P, e_1\rangle e_1 + \langle P, e_2\rangle e_2.$$

Como $\langle P, e_1\rangle = \sqrt{2}\int_0^1 t^4\, dt = \frac{\sqrt{2}}{5}$ y $\langle P, e_2\rangle = \int_0^1 (6t^5 - 4t^4)\, dt = \frac{1}{5}$ sustituyendo se obtiene

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\sqrt{2}}{5} e_1(t) + \frac{1}{5} e_2(t) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}(6t - 4) \\ &= \frac{6}{5}t - \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Pregunta 2 (2 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y M y N dos subespacios cerrados de $\mathcal{H}$ ortogonales. Demuestre que $M + N = \{z \in \mathcal{H} \colon z = m + n,\ m \in M, n \in N\}$ es un subespacio vectorial cerrado en $\mathcal{H}$.

Solución: Trivialmente resulta que $M + N$ es un subespacio vectorial pues si $z, z' \in M + N$ entonces $z = a + b$ y $z' = a' + b'$ con $a, a' \in M$ y $b, b' \in N$ y en consecuencia para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\alpha z + \beta z' = \alpha(a + b) + \beta(a' + b') = (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b')\ \in M + N$$

ya que $\alpha a + \beta a' \in M$ y $\alpha b + \beta b' \in N$ al ser M y N dos subespacios de $\mathcal{H}$.
Veamos ahora que $M + N$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$. Sea $\{z_n\}_n \subset M + N$ una sucesión que converge a z en $\mathcal{H}$. Tenemos que ver que $z \in M + N$. Como $z_n \in M + N$ para todo n, entonces $z_n = a_n + b_n$ con $a_n \in M$ y $b_n \in N$. Vemos que $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ son sucesiones convergentes viendo que son sucesiones de Cauchy en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. En efecto, basta tener en cuenta que

$$\|z_n - z_m\|^2 = \|a_n + b_n - (a_m + b_m)\|^2 = \|a_n - a_m + b_n - b_m\|^2 = \|a_n - a_m\|^2 + \|b_n - b_m\|^2$$

donde la última igualdad se deduce de aplicar el teorema de Pitágoras a los vectores ortogonales $a_n - a_m$ y $b_n - b_m$. Por tanto $\{z_n\}_n$es de Cauchy si y sólo si $\{a_n\}_n$ y $\{b_n\}_n$ son de Cauchy. Sean $a = \lim_n a_n$ y $b = \lim_n b_n$, que existen pues $\mathcal{H}$ es completo. Se cumple que $a \in M$ y $b \in N$ pues M y N son subespacios cerrados de $\mathcal{H}$. En consecuencia,

$$z = \lim_n z_n = \lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a + \lim_n b = a + b \in M + N$$

y por tanto $M + N$ es cerrado.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y sean P_1 y P_2 dos proyecciones ortogonales en $\mathcal{H}$. Demuestre que $P_1 + P_2$ es una proyección ortogonal en $\mathcal{H}$ si y sólo si los subespacios $F_1 = \mathrm{Im}(P_1)$ y $F_2 = \mathrm{Im}(P_2)$ son ortogonales.

Solución: Recordamos que una proyección ortogonal es un operador autoadjunto tal que $P^2 = P$.
Supongamos que $P_1 + P_2$ es una proyección ortogonal y veamos que F_1 y F_2 son ortogonales. En efecto, Si $(P_1+P_2)^2 = P_1+P_2$ entonces $P_1^2+P_2^2+P_1P_2+P_2P_1 = P_1+P_2+P_1P_2+P_2P_1 = P_1+P_2$ y por tanto, $P_1P_2+P_2P_1 = 0$. Componiendo a la izquierda y a la derecha con P_1 se obtiene $P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0$ y $P_1P_2P_1 + P_2P_1 = 0$ y en consecuencia

$$P_2P_1 = P_1P_2 = 0\,.$$

Si $y \in F_1$ e $y' \in F_2$ entonces existen $x, x' \in \mathcal{H}$ tales que $y = P_1(x)$ e $y' = P_2(x')$. Por tanto,

$$\langle y, y'\rangle = \langle P_1(x), P_2(x')\rangle = \langle x, P_2(P_1(x'))\rangle = 0$$

de donde se deduce que F_1 y F_2 son ortogonales.

Recíprocamente si F_1 y F_2 son ortogonales entonces $P_2P_1 = P_1P_2 = 0$. En efecto, para todo $x, x' \in \mathcal{H}$ se tiene que

$$\langle x, P_2(P_1(x'))\rangle = \langle P_1(x), P_2(x')\rangle = 0 = \langle P_2(P_1(x)), x'\rangle$$

donde la igualdad a cero se deduce de que $P_1(x) \in F_1$ y $P_2(x') \in F_2$. En particular tomando $x = \overline{P_2(P_1(x'))}$ en $\langle x, P_2(P_1(x')) = 0$ se deduce que $P_2(P_1(x')) = 0$ para todo $x' \in \mathcal{H}$. Análogamente $P_2(P_1(x)) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Por tanto, $(P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_1P_2 + P_2P_1 = P_1 + P_2$.
Trivialmente $P_1 + P_2$ es autoadjunto por serlo P_1 y P_2 pues

$$\langle x, (P_1 + P_2)(x')\rangle = \langle x, P_1(x')\rangle + \langle x, P_2(x')\rangle = \langle P_1(x), x'\rangle + \langle P_2(x), x'\rangle = \langle (P_1 + P_2)(x), x'\rangle\,.$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Sea $F \in L^2[0, \pi]$. Demuestre que la función f definida mediante

$$f(t) := \int_0^\pi F(x)\Big(\cos tx + \operatorname{sen} tx\Big)dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

es bandalimitada al intervalo $[-\pi, \pi]$.
(Utilice la fórmula de Euler: $\mathrm{e}^{i\alpha} = \cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha$)

Solución: Utilizando las fórmulas de Euler se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\pi F(x)\,\big\{\cos tx + \operatorname{sen}\, tx\big\}dx = \int_0^\pi F(x)\,\Big\{\frac{\mathrm{e}^{itx} + \mathrm{e}^{-itx}}{2} + \frac{\mathrm{e}^{itx} - \mathrm{e}^{-itx}}{2i}\Big\}dx \\ &= \int_0^\pi \Big(\frac{F(x)}{2} + \frac{F(x)}{2i}\Big)\mathrm{e}^{itx}\,dx + \int_0^\pi \Big(\frac{F(x)}{2} - \frac{F(x)}{2i}\Big)\mathrm{e}^{-itx}\,dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $x \mapsto -x$ en la última integral se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\pi \Big(\frac{F(x)}{2} + \frac{F(x)}{2i}\Big)\mathrm{e}^{itx}\,dx + \int_{-\pi}^0 \Big(\frac{F(-x)}{2} - \frac{F(-x)}{2i}\Big)\mathrm{e}^{itx}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^\pi \sqrt{2\pi}\Big\{\Big(\frac{F(x)}{2} + \frac{F(x)}{2i}\Big)\chi_{[0,\pi]}(x) + \Big(\frac{F(-x)}{2} - \frac{F(-x)}{2i}\Big)\chi_{[-\pi,0]}(x)\Big\}\mathrm{e}^{itx}\,dx\,. \end{aligned}$$

Es decir, f es bandalimitada a $[-\pi, \pi]$ y se cumple que

$$\mathcal{F}f(x) = \sqrt{2\pi}\Big\{\Big(\frac{F(x)}{2} + \frac{F(x)}{2i}\Big)\chi_{[0,\pi]}(x) + \Big(\frac{F(-x)}{2} - \frac{F(-x)}{2i}\Big)\chi_{[-\pi,0]}(x)\Big\}, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$