ALGEBRA II

Licenciatura en Ciencias Matemáticas

1. Sean A y B dos anillos y $f : A \to B$ un morfismo entre ellos. Sea p un ideal de B y denotemos con $q = f^{-1}(p) = \{a \in A : f(a) \in p\}$.
a) Probar que q es un ideal de A.
b) Probar que si p es primo entonces q también lo es.

Solución.
Este problema está totalmente resuelto en la colección "Problemas de congruencias."
2. Resolver el sistema de congruencias $x \equiv 2 \,\mathrm{mod}(3)$, $x \equiv 8 \,\mathrm{mod}(11)$.

Solución.
Nuestro objetivo es encontrar x en el isomorfismo de anillos:

$$Z/(33) \xrightarrow{f} Z/(3) \times Z/(11),$$

tal que $f(x) = (2, 3)$.
Si tenemos λ tal que

$$11\lambda \equiv 1 \,\mathrm{mod}(3)$$

y μ que verifique

$$3\mu \equiv 1 \,\mathrm{mod}(11),$$

entonces $x = 2 \cdot 11\lambda + 3 \cdot 3\mu + 33t$. Un par de valores, a simple vista, de estos parámetros es $\lambda = 2$ y $\mu = 4$.
3. Estudiar si el polinomio $f(t) = 5t^3 + 25t^2 + 125t + 1$ es un elemento irreducible de $Q[t]$.
Solución.

En este problema trasladaremos la cuestión de la irreducibilidad de f a la de otro polinomio donde el criterio de Eisenstein se aplica directamente. Es un caso particular del problema 29 [GR].
Si f fuera reducible podríamos escribir

$$f(t) = r(t) \cdot s(t) \qquad (*)$$

donde podemos suponer que r tiene grado 1 y s tiene grado 2. Fácilmente se comprueba que el polinomio $g(t) = t^3 f(1/t) = t^3 + 125t^2 + 25t + 5$ es irreducible por el criterio de Eisenstein con el primo 5. Si en (*) hacemos el mismo cambio, obtenemos

$$g(t) = t^3 f(1/t) = t \cdot r(1/t) \cdot t^2 s(1/t) \qquad (**)$$

pero $t \cdot r(1/t)$ y $t^2 s(1/t)$ son dos polinomios de gardo 1 y 2 respectivamente, con lo que (**) contradice que $g(t)$ sea irreducible, contradicción que proviene de suponer que $f(t)$ es reducible.

4. a) Enunciar el teorema de Lüroth.

b) Consideremos la extensión de cuerpos

$$Q \hookrightarrow E$$

donde $E = Q(\sqrt{5}, i)$. Demostrar que $[E : Q] = 4$ y determinar una base de E como $Q-$espacio vectorial.

c) Sea u un elemento primitivo de la extensión E/Q. Consideremos el endomorfismo de E

$$H : E \to E$$

definido por la multiplicación por $u : H(e) = e \cdot u$. Probar que el polinomio mínimo de u sobre Q, coincide con el polinomio característico de H.

Solución.

a) Es la proposición 2.5 pág. 260 de Gamboa-Ruiz.

b) Es un problema muy similar a 93 de Fernández Laguna.

Podemos escribir

$$Q \hookrightarrow Q[i] \hookrightarrow Q[i][\sqrt{5}] = E.$$

Como una base de $Q[i]/Q$ es $\{1, i\}$ y una base de $E/Q[i]$ es $\{1, \sqrt{5}\}$, por la proposición 1.6 (pág. 250), una base de E/Q es $\{1, i, \sqrt{5}, \sqrt{5}i\}$.

c) *Primera solución.*

Si (a_{ij}) es la matriz del endomorfismo H en la base $\{1, u, u^2.u^3\}$ de E, entonces, su polinomio característico es:

$$p(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - x & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44-}x \end{vmatrix},$$

que desarrollado podemos escribir en la forma: $p(x) = x^4 + s_1 x^3 + s_2 x^2 + s_3 x + s_4$. Sabemos del álgebra lineal que este polinomio anula al endomorfismo H, esto es, el endomorfismo de E dado por la expresión

$$p(H) = H^4 + s_1 H^3 + s_2 H^2 + s_3 H + s_4$$

es idénticamente nulo. Ahora bien como H es "multiplicar por u", el endomorfismo $p(H)$ es multiplicar por el elemento.

$$u^4 + s_1 u^3 + s_2 u^2 + s_3 u + s_4$$

En particular multiplicando por $1 \in E$, queda

$$0 = p(H)(1) = \left(u^4 + s_1 u^3 + s_2 u^2 + s_3 u + s_4\right) \cdot 1 = 0$$

con lo que

$$u^4 + s_1 u^3 + s_2 u^2 + s_3 u + s_4 = 0.$$

Es decir $p(u) = 0$. Además como p tiene grado 4, forzosamente es el mínimo.

Segunda solución.
Denotamos con $q(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$ al polinomio mínimo de u sobre Q.
Como $H(1) = u$, $H(u) = u^2$, $H(u^2) = u^3$ y $H(u^3) = u^4 = -a_1 u^3 - a_2 u^2 - a_3 u - a_4$, la matriz del endomorfismo H respecto a la base $\{1, u, u^2, u^3\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_4 \\ 1 & 0 & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico:

$$\begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & -a_4 \\ 1 & -x & 0 & -a_3 \\ 0 & 1 & -x & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & -x - a_1 \end{pmatrix}$$

que desarrollado da precisamente $q(x)$.