Un problema de decisión con espacio de estados de la naturaleza $\Theta = [0,1]$ y espacio de acciones $A = [0,2]$ tiene como función de pérdida

$$L(\theta, a) = \begin{cases} 1+2a & \text{si } \theta < a < 1 \\ 0 & \text{si } a = \theta \\ 1+2\theta & \text{si } a < \theta \\ 4\theta a & \text{si } 1 \leq a \leq 2 \end{cases}$$

a) Determinar las acciones no aleatorizadas admisibles. ¿Y si L representa ganancias? ¿Qué ocurre si se modifica $L(\theta,\theta) = 1+2\theta$? Discutir, en cada caso, si las acciones admisibles forman una clase completa.

Se supone ahora que $L(\theta,\theta) = 1+2\theta$.

b) Determinar las acciones óptimas con el criterio de Wald. ¿Qué ocurre si L representa ganancias?

c) Determinar las acciones Bayes frente a cualquier distribución a priori con función de distribución $\Pi(\theta)$ concentrada en $[0,1]$; especificar el mínimo riesgo Bayes frente a Π.

d) Analizar si se cumplen las conclusiones del Teorema del minimax.

e) Si θ se elige con densidad $\pi(\theta) = 2\theta$ en $[0,1]$ y pueden realizarse cuatro observaciones independientes de una variable con distribución uniforme en $(0,\theta)$, hallar la regla de decisión Bayes. ¿Cuánto se podría pagar a lo sumo por las cuatro observaciones?

$$L(\theta,a) = \begin{cases} 1+2a & \text{si } \theta < a < 1 \\ 0 & \text{si } \theta = a \\ 1+2\theta & \text{si } a < \theta \\ 4\theta a & \text{si } 1 \leq a \leq 2 \end{cases}$$ (pérdida)

$A = [0,2]$

$\Theta = [0,1]$

a) Veamos que la acción $a=\theta$ domina al resto de acciones:

$1+2a < 0 \Rightarrow a < -\frac{1}{2}$ sin embargo en este caso $\theta < a < 1$ con $\theta \in [0,1]$ con lo que no es posible que a tome valores negativos. (Además $a \in [0,2]$) $\boxed{a=\theta \text{ domina a } \theta < a < 1}$

$1+2\theta < 0 \Rightarrow \theta < -\frac{1}{2}$ pero $\theta \in [0,1]$ por tanto

$\boxed{a=\theta \text{ domina a } a < \theta.}$

$4\theta a < 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta < 0 \\ a < 0 \end{cases}$ pero ninguno de los dos casos es posible pues $\theta \in [0,1]$ y $a \in [1,2]$.

$\boxed{a=\theta \text{ domina a } 1 \leq a \leq 2.}$

La única acción admisible es $a=\theta$ puesto que no está dominada por otra acción (no aleatorizada).

Supongamos que L representa ganancias. En este caso la acción $a=\theta$ está dominada por todas las acciones. Veamos el resto:

Supongamos que tomamos $1 \leq a \leq 2$, entonces la ganancia es $4\theta a$. Pero si θ es pequeño, la acción $\theta < a < 1$ con ganancia $1+2a$ es mayor que $4\theta a$. Incluso si $\theta < 1/6$ sabemos que $1+2\theta > 4\theta a$ ~~[illegible]~~.

Por tanto para θ pequeño la acción dominante es $\theta < a < 1$.

Si θ es grande (próximo a 1) se tiene que $1 \leq a \leq 2$ es la acción dominante, puesto que genera una ganancia superior al resto, pues $1+2a \to 3$, $1+2\theta \to 3$ y $4\theta a \in [4,8]$.

Por tanto, para θ grande la acción dominante es $1 \leq a \leq 2$

Además, escogiendo $a > \theta$ podemos garantizar que $1+2a > 1+2\theta \Rightarrow \theta < a < 1$ domina a $a < \theta$.

Vemos que todas las acciones se dominan entre sí según el valor de θ, por lo que el conjunto de acciones admisibles es todo A. exceptuando la acción $a=\theta$. (dominada)

Si hacemos $\mathcal{L}(\theta,\theta) = 1+2\theta$ la función de pérdidas queda

$$\mathcal{L}(\theta,a) = \begin{cases} 1+2a & \theta < a < 1 \\ 1+2\theta & a \leq \theta \\ 4\theta a & 1 \leq a \leq 2 \end{cases}$$

de manera que el conjunto de acciones admisibles es todo A ya que la acción $a=\theta$ ya no tiene pérdida nula para cualquier valor de θ.

En el caso en que $\mathcal{L}$ es de pérdidas la clase admisible es completa, ya que domina a todas las demás.
Si L es de ganancias con $\mathcal{L}(\theta,\theta)=0$ la clase admisible es completa ya que cada acción genera ganancia mayor que cero si $a \neq \theta$.
Si L es de ganancias con $\mathcal{L}(\theta,\theta) = 1+2\theta$ todas las acciones son admisibles y por tanto es completa.