PECs de Teoría de juegos, 2019-2020

Juan Luis Castaño Fernández

1 de enero de 2021

Índice

1. Juegos bipersonales de suma nula

Problema 1. Hallar la forma extensiva y la forma normal de este juego:

(I) J_1 elige un número $x \in \{1, 2\}$.

(II) J_0 elige un número $y \in \{1, 2\}$ con $\mathcal{P}(y = 1) = \frac{1}{3}$, $\mathcal{P}(y = 2) = \frac{2}{3}$.

(III) J_2 elige un número $z \in \{1, 2, 3\}$.

Si $xy + z$ es par J_2 paga a J_1 tres unidades, en los demás casos J_1 paga a J_2 dos unidades.

La información de J_2 en la etapa (III) es que sabe el valor de y pero no el de x.

Solución del problema 1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. En la primera etapa del juego, el jugador J_1 elige un número $x \in \{1, 2\}$. Precisamente, el conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{1, 2\}.$$

La segunda etapa es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos J_0, elige un número $y \in \{1, 2\}$, con probabilidades

$$\mathcal{P}(y = 1) = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{P}(y = 2) = \frac{2}{3}.$$

Por último, en la tercera etapa, el jugador J_2 elige un número $z \in \{1, 2, 3\}$, conociendo el resultado y del movimiento aleatorio pero no el número x elegido por J_1. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_2 será

$$\Sigma_2 = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\};$$

donde la estrategia ij indica que si J_0 eligió el número $y = 1$ entonces J_2 elegirá a su vez el número $z = i$, mientras que si J_0 eligió el número $y = 2$ entonces J_2 elegirá $z = j$.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{1, 2\}, \Sigma_2 = \{11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33\}\}\Big\}.$$

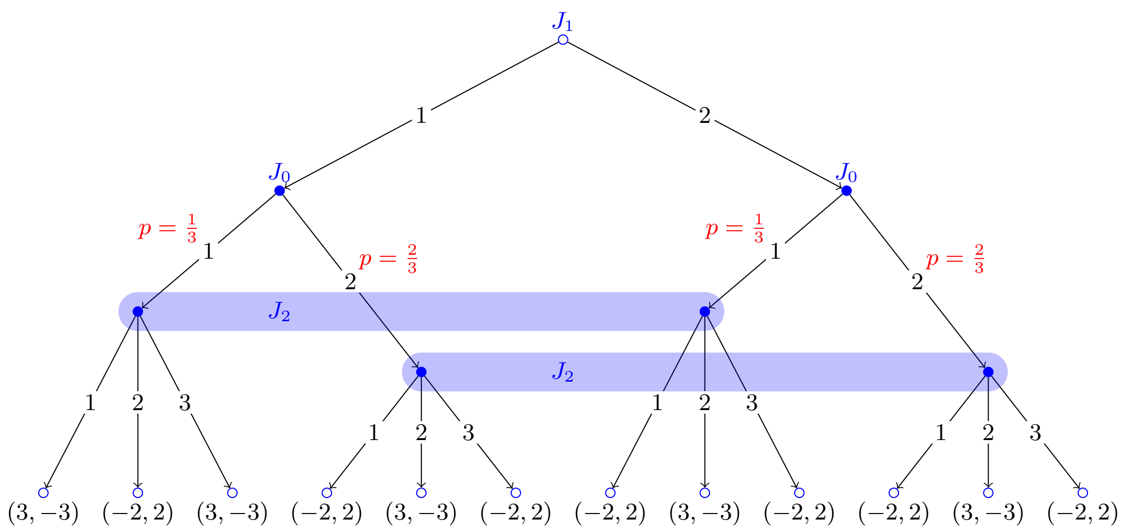

Figura 1: Árbol T del juego Γ, para el problema 1.

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(1,11)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-\frac{1}{3};\quad \pi(1,12)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot 3=3;\quad \pi(1,13)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-\frac{1}{3};$$

$$\pi(1,21)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-2;\quad \pi(1,22)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot 3=\frac{4}{3};\quad \pi(1,23)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-2;$$

$$\pi(1,31)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-\frac{1}{3};\quad \pi(1,32)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot 3=3;\quad \pi(1,33)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-\frac{1}{3};$$

$$\pi(2,11)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-2;\quad \pi(2,12)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot 3=\frac{4}{3};\quad \pi(2,13)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-2;$$

$$\pi(2,21)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-\frac{1}{3};\quad \pi(2,22)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot 3=3;\quad \pi(2,23)=\frac{1}{3}\cdot 3+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-\frac{1}{3};$$

$$\pi(2,31)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-2;\quad \pi(2,32)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot 3=\frac{4}{3};\quad \pi(2,33)=\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{2}{3}\cdot(-2)=-2.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 1.

M		J_2								
		11	12	13	21	22	23	31	32	33
J_1	1	$-\frac{1}{3}$	3	$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{4}{3}$	-2	$-\frac{1}{3}$	3	$-\frac{1}{3}$
	2	-2	$\frac{4}{3}$	-2	$-\frac{1}{3}$	3	$-\frac{1}{3}$	-2	$\frac{4}{3}$	-2

Cuadro 1: Forma normal del juego del problema 1.

Este juego se resuelve en la página 10.

Problema 2. Considerar el siguiente juego bipersonal de suma nula en tres etapas:

- En la primera etapa el jugador J_1 elige $x \in \{2, -3\}$.
- En la segunda etapa, se realiza un experimento aleatorio que selecciona el valor de y, 2 con probabilidad $\frac{1}{4}$, y -2 con probabilidad $\frac{3}{4}$.
- En la tercera, el jugador J_2 elige $z \in \{1, -3\}$, sin saber el resultado del experimento de azar, pero sí la elección del otro jugador. El pago al primer jugador es $(xz)^y$.

Hallar la forma extensiva y la forma normal de este juego.

Solución del problema 2. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. A los efectos de los conjuntos de estrategias de los jugadores J_1 y J_2, y por facilidad en la notación, designaremos los números que estos eligen, x y z, en valor absoluto. Nótese que esto no produce ninguna ambigüedad.

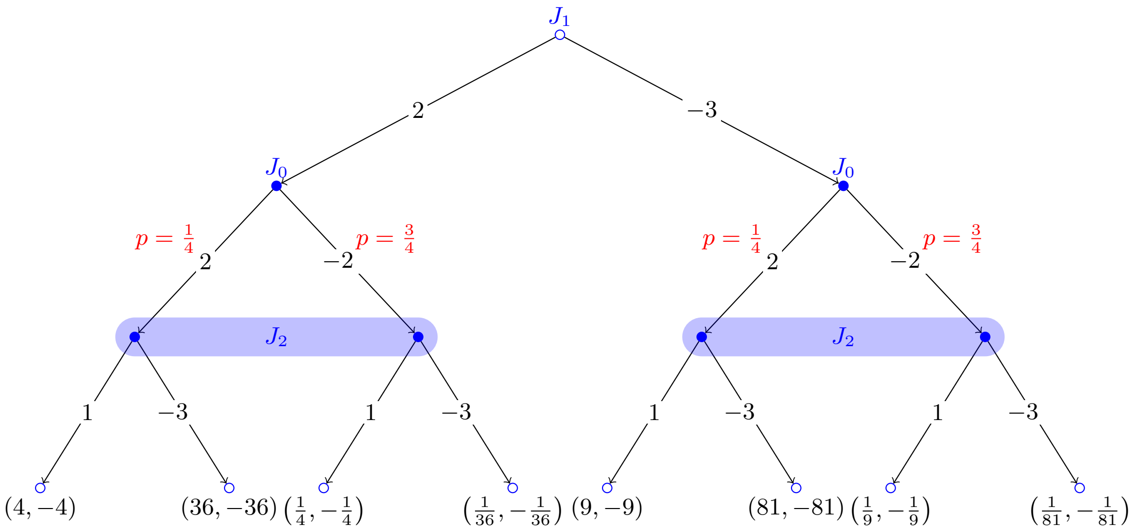

Figura 2: Árbol T del juego Γ, para el problema 2.

En la primera etapa del juego, el jugador J_1 elige un número $x \in \{2, -3\}$. Precisamente, el conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{2, 3\}.$$

La segunda etapa es un movimiento aleatorio aleatorio en la que el azar, que denominaremos J_0, elige un número $y \in \{2, -2\}$, con probabilidades

$$\mathcal{P}(y = 2) = \frac{1}{4}, \quad \mathcal{P}(y = -2) = \frac{3}{4}.$$

Por último, en la tercera etapa, el jugador J_2 elige un número $z \in \{1, -3\}$, conociendo número x elegido por J_1 pero no el resultado y del movimiento aleatorio. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_2 será

$$\Sigma_2 = \{11, 13, 31, 33\};$$

donde la estrategia ij indica que si J_1 eligió el número $x = 2$ entonces J_2 elegirá a su vez un número $z \in \{1, -3\}$ tal que $|z| = i$, mientras que si J_1 eligió el número $x = -3$ entonces J_2 elegirá un número $z \in \{1, -3\}$ tal que $|z| = j$.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 2.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \big\{\Sigma_1 = \{2, 3\}, \Sigma_2 = \{11, 13, 31, 33\}\big\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(2, 11) = \pi(2, 13) = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{16}; \quad \pi(2, 31) = \pi(2, 33) = \frac{1}{4} \cdot 36 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{36} = \frac{433}{48};$$

$$\pi(3, 11) = \pi(3, 31) = \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{9} = \frac{7}{3}; \quad \pi(3, 13) = \pi(3, 33) = \frac{1}{4} \cdot 81 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{81} = \frac{547}{27}.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 2.

M		J_2			
		11	13	31	33
J_1	2	$\frac{19}{16}$	$\frac{19}{16}$	$\frac{433}{48}$	$\frac{433}{48}$
	3	$\frac{7}{3}$	$\frac{547}{27}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{547}{27}$

Cuadro 2: Forma normal del juego del problema 2.

Este juego se resuelve en la página 10.

Problema 3. Se tiene una urna que contiene 3 bolas rojas y 5 azules.

Cada uno de los dos jugadores, J_1 y J_2, pone 20 euros sobre la mesa. A continuación, J_1 toma una bola de la urna y la mira pero no se la enseña a J_2.

J_1 puede *apostar*, poniendo 20 euros más en la mesa, o *retirarse*.

Si se retira, el dinero que hay en la mesa es para J_1 si la bola escogida es azul, siendo para J_2 si la bola es roja.

Si apuesta, J_2 puede *ver* la apuesta poniendo 20 euros más en la mesa, o *pasar*. En el primer caso se lleva todo J_1 si la bola escogida es azul, o todo J_2 si se trata de una roja. Si J_2 pasa se lo lleva todo J_1, cualquiera que sea la bola escogida.

Hallar la forma extensiva y la forma normal de este juego.

Solución del problema 3. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. En la primera etapa se realiza un movimiento aleatorio en la que el azar[1], que denominaremos J_0, elige una bola de la urna que puede ser roja (R) o azul (A) con probabilidades

$$\mathcal{P}(R) = \frac{3}{8}, \quad \mathcal{P}(A) = \frac{5}{8}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_1, conociendo la bola elegida, elige entre apostar (A) o retirarse (R). Así, su conjunto de estrategias será

$$\Sigma_1 = \{AA, AR, RA, RR\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia AR indica que J_1 apuesta si la bola es roja y se retira si la bola es azul.

Por último, si el jugador J_1 decidió apostar, en la tercera etapa el jugador J_2, sin conocer el color de la bola, ha de elegir entre ver la apuesta (V) o pasar (P). Su conjunto de estrategias será, por tanto,

$$\Sigma_2 = \{V, P\}.$$

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 3.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{AA, AR, RA, RR\}, \Sigma_2 = \{V, P\}\}\Big\}.$$

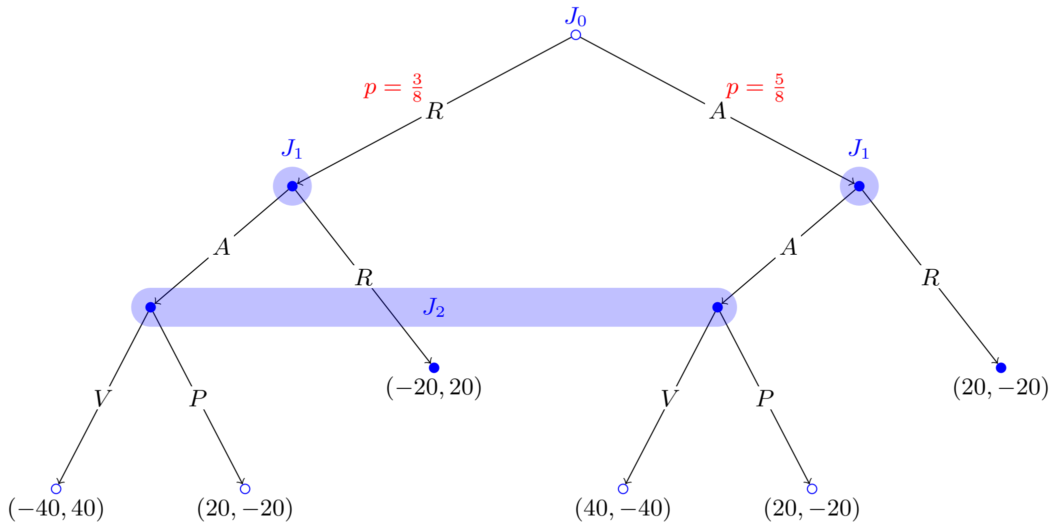

Figura 3: Árbol T del juego Γ, para el problema 3.

[1] Entendemos que el primer jugador elige la bola de forma aleatoria.

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(AA,V)=\frac{3}{8}\cdot(-40)+\frac{5}{8}\cdot 40=10;\quad \pi(AA,P)=\frac{3}{8}\cdot 20+\frac{5}{8}\cdot 20=20;$$
$$\pi(AR,V)=\frac{3}{8}\cdot(-40)+\frac{5}{8}\cdot 20=-\frac{5}{2};\quad \pi(AR,P)=\frac{3}{8}\cdot 20+\frac{5}{8}\cdot 20=20;$$
$$\pi(RA,V)=\frac{3}{8}\cdot(-20)+\frac{5}{8}\cdot 40=\frac{35}{2};\quad \pi(RA,P)=\frac{3}{8}\cdot(-20)+\frac{5}{8}\cdot 20=5;$$
$$\pi(RR,V)=\pi(RR,P)=\frac{3}{8}\cdot(-20)+\frac{5}{8}\cdot 20=5.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 3.

M		J_2	
		V	P
J_1	AA	10	20
	AR	$-\frac{5}{2}$	20
	RA	$\frac{35}{2}$	5
	RR	5	5

Cuadro 3: Forma normal del juego del problema 3.

Este juego se resuelve en la página 10.

Problema 4. El jugador J_2 lanza un dado con seis caras numeradas del uno al seis y mira si el resultado es par (P) o impar (I). A continuación elige seguir un plan (S) o cambiarlo (C).

Después el jugador J_1 sin conocer la elección de J_2 pero sabiendo el resultado del dado, elige seguir (S) o cambiar (C).

La función de pago es:

$$\begin{array}{rcrrcr} M(P,S,S) & = & -3, & M(I,S,S) & = & -5, \\ M(P,S,C) & = & 4, & M(I,S,C) & = & 8, \\ M(P,C,S) & = & 2, & M(I,C,S) & = & -2, \\ M(P,C,C) & = & 1, & M(I,C,C) & = & 3. \end{array}$$

Hallar la forma extensiva y la forma normal de este juego.

Solución del problema 4. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. En la primera etapa se realiza un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos J_0, lanza un dado. El resultado puede ser par (P) o impar (I) con las mismas probabilidades

$$\mathcal{P}(P) = \mathcal{P}(I) = \frac{1}{2}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_2, conociendo el resultado del lanzamiento del dado, elige entre seguir un plan (S) o cambiarlo (C). Por tanto, el conjunto de estrategias para dicho jugador será

$$\Sigma_2 = \{SS, SC, CS, CC\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia SC indica que J_2 seguirá el plan si el resultado del lanzamiento del dado es P y lo cambiará si el resultado del lanzamiento es I.

Por último, en la tercera etapa, el jugador J_1 también conoce el resultado del lanzamiento del dado, pero no el movimiento de J_2. Como también ha de elegir entre seguir un plan (S) o cambiarlo (C), su conjunto de estrategias es idéntico al del jugador J_2,

$$\Sigma_1 = \{SS, SC, CS, CC\}.$$

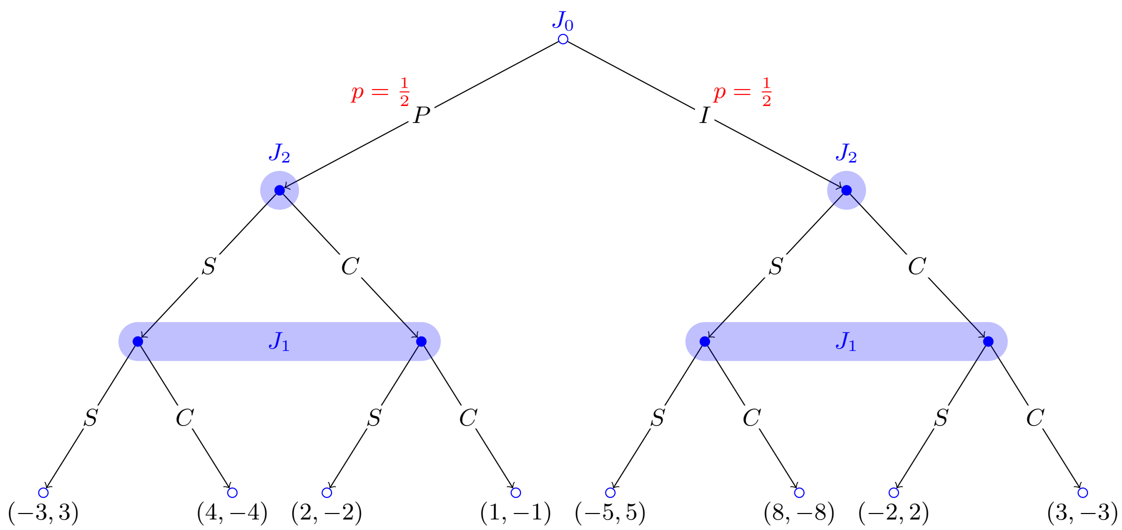

Figura 4: Árbol T del juego Γ, para el problema 4.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 4. Aunque en este caso el primero en jugar es J_2, los pagos se representan en la forma habitual. Por ejemplo, $(-3,3)$ indica que el pago de J_1 es -3 y el pago de J_2 es 3.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{SS, SC, CS, CC\}, \Sigma_2 = \{SS, SC, CS, CC\}\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(SS,SS) = \frac{1}{2}\cdot(-3) + \frac{1}{2}\cdot(-5) = -4; \quad \pi(SS,SC) = \frac{1}{2}\cdot(-3) + \frac{1}{2}\cdot(-2) = -\frac{5}{2};$$
$$\pi(SS,CS) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot(-5) = -\frac{3}{2}; \quad \pi(SS,CC) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot(-2) = 0;$$
$$\pi(SC,SS) = \frac{1}{2}\cdot(-3) + \frac{1}{2}\cdot 8 = \frac{5}{2}; \quad \pi(SC,SC) = \frac{1}{2}\cdot(-3) + \frac{1}{2}\cdot 3 = 0;$$
$$\pi(SC,CS) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 8 = 5; \quad \pi(SC,CC) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{5}{2};$$
$$\pi(CS,SS) = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot(-5) = -\frac{1}{2}; \quad \pi(CS,SC) = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot(-2) = 1;$$
$$\pi(CS,CS) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-5) = -2; \quad \pi(CS,CC) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot(-2) = -\frac{1}{2};$$
$$\pi(CC,SS) = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 8 = 6; \quad \pi(CC,SC) = \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 3 = \frac{7}{2};$$
$$\pi(CC,CS) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 8 = \frac{9}{2}; \quad \pi(CC,CC) = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3 = 2.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 4. Al igual que ya se hizo en la forma extensiva, a pesar de que el primero en jugar es J_2, por seguir la notación habitual designaremos jugador fila a J_1 y jugador columna a J_2. Evidentemente, los pagos esperados calculados son los de J_1.

M		J_2			
		SS	SC	CS	CC
J_1	SS	-4	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0
	SC	$\frac{5}{2}$	0	5	$\frac{5}{2}$
	CS	$-\frac{1}{2}$	1	-2	$-\frac{1}{2}$
	CC	6	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	2

Cuadro 4: Forma normal del juego del problema 4.

Este juego se resuelve en la página 11.

Problema 5. Resolver los juegos de los problemas 1, 2, 3, y 4.

Solución del problema 5.

[P1] Puntos de silla. La matriz M de la forma normal del juego (cuadro 1) no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.

Análisis de dominancia. La columna 1 domina a las columnas 2, 3, 5, 7, 8 y 9; y la columna 4 domina a la columna 6. Eliminando las columnas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -2 \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Estrategias mixtas. Para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$. Para que sea óptima ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -\frac{1}{3}p - 2(1-p) = -2p - \frac{1}{3}(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{2}.$$

Análogamente, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$. Y, si es óptima,

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow -\frac{1}{3}q - 2(1-q) = -2q - \frac{1}{3}(1-q) \Longrightarrow q = \frac{1}{2}.$$

Conclusión. Una solución para el juego es

$$\vec{p}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad \vec{q}\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{6} \\ v_2(M) &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{6} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = -\frac{7}{6}.$$

[P2] Puntos de silla. La matriz M de la forma normal del juego (cuadro 2) tiene un punto de silla, que es el elemento m_{21}.

Conclusión. Una solución para el juego es

$$\vec{p}(0, 1), \quad \vec{q}(1, 0, 0, 0); \quad v_1(M) = v_2(M) = m_{21} = \frac{7}{3}.$$

[P3] Puntos de silla. La matriz M de la forma normal del juego (cuadro 3) no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.

Análisis de dominancia. La fila 1 domina a la fila 2 y a la fila 4. Eliminando las filas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ \frac{35}{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Estrategias mixtas. Para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$. Para que sea óptima ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 10p + \frac{35}{2}(1-p) = 20p + 5(1-p) \Longrightarrow 4p + 7(1-p) = 8p + 2(1-p) \Longrightarrow p = \frac{5}{9}.$$

Análogamente, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$. Y, si es óptima,

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow 10q + 20(1-q) = \frac{35}{2}q + 5(1-q) \Longrightarrow 4q + 8(1-q) = 7q + 2(1-q) \Longrightarrow q = \frac{2}{3}.$$

Conclusión. Una solución para el juego es

$$\vec{p}\left(\frac{5}{9},0,\frac{4}{9},0\right),\quad \vec{q}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1(M) = 10\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{35}{2}\cdot\left(1-\dfrac{5}{9}\right) = 20\cdot\dfrac{5}{9}+5\cdot\left(1-\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{40}{3} \\ \\ v_2(M) = 10\cdot\dfrac{2}{3}+20\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{35}{2}\cdot\dfrac{2}{3}+5\cdot\left(1-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{40}{3} \end{array}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{40}{3}.$$

[P4] Puntos de silla. La matriz M de la forma normal del juego (cuadro 4) no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.

Análisis de dominancia. La fila 2 domina a la fila 1, y la fila 4 domina a la fila 3. Eliminando las filas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 & 5 & \frac{5}{2} \\ 6 & \frac{7}{2} & \frac{9}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

En la matriz reducida M^* la columna 2 domina a la columna 3, y la columna 4 domina a la columna 1. Eliminando las columnas dominadas se obtiene una nueva matriz reducida

$$M^{**} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{2} \\ \frac{7}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Estrategias mixtas. Para la matriz reducida M^{**}, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$. Para que sea óptima ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow \frac{7}{2}(1-p) = \frac{5}{2}p + 2(1-p) \Longrightarrow 7(1-p) = 5p + 4(1-p) \Longrightarrow p = \frac{3}{8}.$$

Análogamente, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$. Y, si es óptima,

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow \frac{5}{2}(1-q) = \frac{7}{2}q + 2(1-q) \Longrightarrow 5(1-q) = 7q + 4(1-q) \Longrightarrow q = \frac{1}{8}.$$

Conclusión. Una solución para el juego es

$$\vec{p}\left(0,\frac{3}{8},0,\frac{5}{8}\right),\quad \vec{q}\left(0,\frac{1}{8},0,\frac{7}{8}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1(M) = \dfrac{7}{2}\cdot\left(1-\dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{8}+2\cdot\left(1-\dfrac{3}{8}\right) = \dfrac{35}{16} \\ \\ v_2(M) = \dfrac{5}{2}\cdot\left(1-\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{7}{2}\cdot\dfrac{1}{8}+2\cdot\left(1-\dfrac{1}{8}\right) = \dfrac{35}{16} \end{array}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{35}{16}.$$

2. Juegos bipersonales de suma no nula

Problema 6. Ejercicio 9 de Morris (1994: 146). Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2},0\right) & \left(-\frac{1}{2},-4\right) \\ (1,2) & (-2,4) \\ (4,-4) & \left(-\frac{1}{2},0\right) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 6. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. Para resolver el juego cooperativo hemos de encontrar un punto de *statu quo* (u_0, v_0) y la región de pagos cooperativa P. Normalmente tomaremos como punto de *statu quo* el par de valores maximin, y la región de pagos cooperativa P es la envoltura convexa del conjunto de puntos definidos por la bimatriz del juego.

En primer lugar calcularemos por separado los valores maximin para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

  Tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{12} y m_{32}, por lo que $v_1 = m_{12} = m_{32} = -\frac{1}{2}$.

- La matriz de pagos del jugador J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

  No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -4(1-p) = -4p \Longrightarrow p = 1-p \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$

$$v_2 = -4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2.$$

Por tanto, se ha determinado el punto de *statu quo*, que es $(u_0, v_0) = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$, y en la figura 5 se representa la región de pagos cooperativa P.

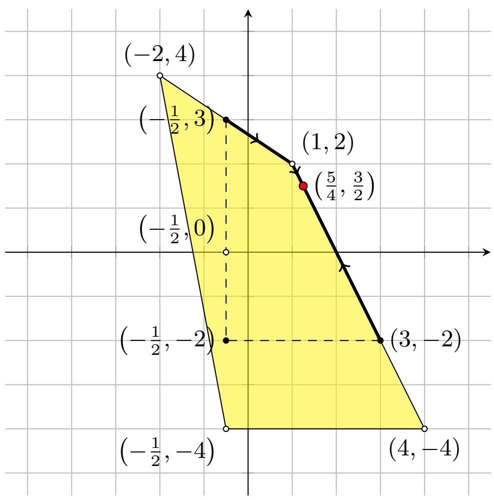

Figura 5: Región de pagos cooperativa P y conjunto de negociación para el problema 6.

El par de arbitraje (u^*, v^*), para que verifique los axiomas de negociación de Nash (Morris, 1994: 135), ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 5, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u,v) = (u - u_0)(v - v_0) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(v+2).$$

Estudiaremos cada segmento del conjunto de negociación por separado:

- Del punto $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ al punto $(1,2)$. La relación entre las variables es

  $$v = -\frac{2}{3}u + \frac{8}{3},$$

  y sustituida en la función g permite obtener

  $$g_1(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}u + \frac{8}{3} + 2\right) = -\frac{2}{3}u^2 + \frac{13}{3}u + \frac{7}{3}.$$

  Su máximo es el punto $\left(\frac{13}{4}, \frac{1}{2}\right)$, que se encuentra fuera del conjunto de negociación, y que nos permite saber que la función g crece al moverse en el segmento estudiado en el sentido que va desde el punto $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ al punto $(1,2)$.

  $$g_1'(u) = -\frac{4}{3}u + \frac{13}{3}; \quad g_1''(u) = -\frac{4}{3} < 0;$$
  $$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -\frac{4}{3}u + \frac{13}{3} = 0 \Longrightarrow u = \frac{13}{4};$$
  $$v = -\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{4} + \frac{8}{3} = \frac{1}{2}.$$

- Del punto $(1,2)$ al punto $(3,-2)$. La relación entre las variables es

  $$v = -2u + 4,$$

  y sustituida en la función g permite obtener

  $$g_2(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(-2u + 4 + 2) = -2u^2 + 5u + 3.$$

  Su máximo es el punto $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

  $$g_2'(u) = -4u + 5; \quad g_2''(u) = -4 < 0;$$
  $$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -4u + 5 = 0 \Longrightarrow u = \frac{5}{4};$$
  $$v = -2 \cdot \frac{5}{4} + 4 = \frac{3}{2}.$$

En conclusión, el par de arbitraje es el punto $(u^*, v^*) = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

Problema 7. Se considera una empresa monopolista (hasta ahora) y otra entrante potencial en su mercado. Se está discutiendo una ley de control de la contaminación y hay dos propuestas: la del Grupo Verde (GV), que aumentaría 6 millones los costes fijos de cada empresa que está en el mercado, y la de la Oposición (O), que aumentaría los costes de cada empresa que está en el mercado en 3 millones.

El monopolista tiene tal influencia política que una propuesta u otra solo se aprobarán si la apoya el monopolista, que debe decidir entre apoyar a GV, a O, o que no salga ley alguna. El entrante puede o no entrar en el mercado.

Se sabe que los beneficios de un monopolio son 12 millones y 0 para el entrante potencial si no entra, y 5 para cada empresa en un mercado duopolista.

Escribir la matriz del juego y encontrar los puntos de equilibrio.

Solución del problema 7. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. Llamaremos jugador J_1 a la empresa monopolista, y jugador J_2 a la empresa entrante. El jugador J_1 puede decidir apoyar al Grupo Verde (G), apoyar a la Oposición (O), o impedir que salga la ley (I). A su vez, el jugador J_2 puede entrar en el mercado (E) o no hacerlo (N). Así, las posibles estrategias para ambos jugadores son

$$\Sigma_1 = \{G, O, I\}, \quad \Sigma_2 = \{E, N\}.$$

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 6, y donde los pagos se dan en millones de euros.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{G, O, I\}, \Sigma_2 = \{E, N\}\}\Big\}.$$

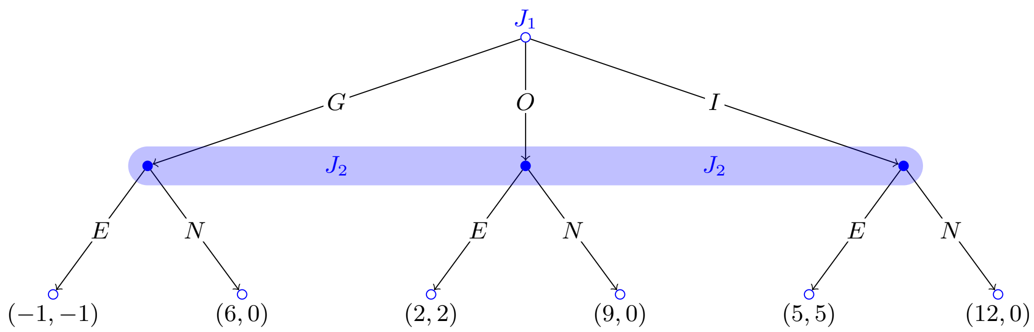

Figura 6: Árbol T del juego Γ, para el problema 7.

La forma normal del juego Γ se recoge en la bimatriz M del cuadro 5. Una vez más, los pagos se dan en millones de euros.

M		J_2	
		E	N
J_1	G	$(-1,-1)$	$(6,0)$
	O	$(2,2)$	$(9,0)$
	I	$(5,5)$	$(12,0)$

Cuadro 5: Forma normal del juego Γ del problema 7.

Para hallar los puntos de equilibrio utilizaremos el método IDSDS[2]:

- La estrategia I para el jugador J_1 domina estrictamente a las otras dos. Se pueden eliminar, por tanto, las filas 1 (G) y 2 (O), puesto que sería irracional que el jugador J_1 siguiese cualquiera de las estrategias correspondientes (hecho conocido también por el jugador J_2).
- En la fila restante (cuadro 6), la estrategia E para el jugador J_2 domina estrictamente a la estrategia N. Por tanto, se puede eliminar la columna 2 (N).

M^1		J_2	
		E	N
J_1	I	$(5,5)$	$(12,0)$

Cuadro 6: Bimatriz M^1 obtenida tras la primera iteración del método IDSDS.

En conclusión, el único punto de equilibrio es el par de estrategias puras (I,E), para el cual los pagos son $(5,5)$. Dicho de otra forma, el único punto de equilibrio es aquel en el que la empresa monopolista impide que salga la ley mientras que la otra empresa entra en el mercado, siendo en ese caso los beneficios de cada empresa de 5 millones de euros.

[2]Siglas de *«iterated deletion of strictly dominated strategies»* (Bonanno, 2018: 35), (Osborne & Rubinstein, 1994: 60), y que describen con precisión el procedimiento empleado.

Problema 8. La empresa I puede fabricar a la semana 400 unidades del producto P_1 o 300 del producto P_1 y 100 del producto P_2, mientras la empresa II puede hacer 150 unidades del producto P_1 o 200 del P_2. Hay una demanda semanal de 400 unidades del producto P_1 y 250 del P_2.

Cada unidad del producto P_1 se vende a 350 euros y cada unidad del P_2 a 150 euros.

A la empresa I le cuesta 200 euros fabricar cada unidad del producto P_1 y 100 cada unidad del P_2. A la empresa II le cuesta 220 euros hacer cada unidad del producto P_1 y 125 cada unidad del P_2.

Si se fabrican más unidades de los productos que la demanda, las empresas venden la misma proporción de lo que producen. Por ejemplo, si la empresa I produce 400 unidades del P_1, la II produce 150 del P_1 y la demanda es 400, entonces la empresas venden respectivamente

$$\frac{400}{550} \cdot 400 \simeq 291, \quad \frac{400}{550} \cdot 150 \simeq 109.$$

Las unidades del producto que no se venden no valen nada pero las empresas tienen que pagar su coste de producción.

Las empresas tratan de maximizar su beneficio. ¿Existen puntos de equilibrio?

Solución del problema 8. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. En primer lugar calcularemos los pagos de los jugadores J_1 y J_2 (empresa I y empresa II, respectivamente) según sus estrategias. Para ello abreviaremos las estrategias de cada jugador de la forma:

$$\Sigma_1 = \big\{A(400,0), B(300,100)\big\}, \quad \Sigma_2 = \big\{C(150,0), D(0,200)\big\}.$$

En este caso un par (x, y) indica que se producen x unidades del producto P_1 e y unidades del producto P_2.

	Estrategias						Producción		Resultados				
	Empresa I			Empresa II			Total		Ventas		Ingresos	Costes	Beneficios
	J_1	P_1	P_2	J_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2			
Empresa I	A	400	0	C	150	0	550	0	291	0	101 850	80 000	21 850
(J_1)	A	400	0	D	0	200	400	200	400	0	140 000	80 000	60 000
	B	300	100	C	150	0	450	100	267	100	108 450	70 000	38 450
	B	300	100	D	0	200	300	300	300	83	117 450	70 000	47 450
Empresa II	A	400	0	C	150	0	550	0	109	0	38 150	33 000	5 150
(J_2)	A	400	0	D	0	200	400	200	0	200	30 000	25 000	5 000
	B	300	100	C	150	0	450	100	133	0	46 550	33 000	13 550
	B	300	100	D	0	200	300	300	0	167	25 050	25 000	50

Cuadro 7: Cálculo de los pagos para la empresa I y la empresa II.

Siguiendo con el ejemplo dado en el enunciado, si los jugadores siguen el par de estrategias (A, C), se fabrican un total de $400 + 150 = 550$ unidades de P_1 (y ninguna de P_2). Como se supera la demanda de 400 unidades, cada empresa vende en proporción a lo que produce, hasta que en conjunto satisfacen dicha demanda. Así, como ya se ha visto, los jugadores venden respectivamente (redondeando los resultados)

$$\frac{400}{550} \cdot 400 \simeq 291, \quad \frac{400}{550} \cdot 150 \simeq 109.$$

Entonces, obtienen unos ingresos respectivos de

$$291 \cdot 350 = 101\,850\,€, \quad 109 \cdot 350 = 38\,150\,€;$$

tienen un coste de producción de

$$400 \cdot 200 = 80\,000\,€, \quad 150 \cdot 220 = 33\,000\,€;$$

y sus beneficios son de

$$101\,850\,€ - 80\,000\,€ = 21\,850\,€, \quad 38\,150\,€ - 33\,000\,€ = 5\,150\,€.$$

Se procede como en el ejemplo indicado para cada par de estrategias posibles. No se detallan los cálculos, pero los resultados se recogen en el cuadro 7.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 7.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{A, B\}, \Sigma_2 = \{C, D\}\}\Big\}.$$

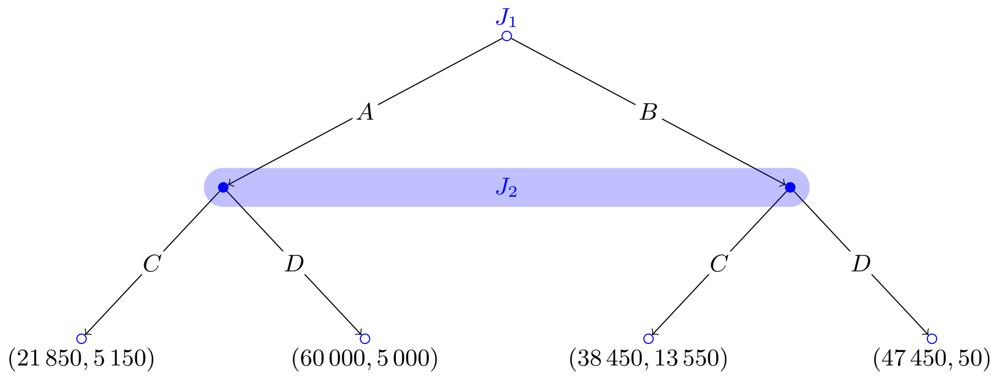

Figura 7: Árbol T del juego Γ, para el problema 8.

La forma normal del juego Γ se recoge en la bimatriz M del cuadro 8.

M		J_2	
		C	D
J_1	A	$(21\,850, 5\,150)$	$(60\,000, 5\,000)$
	B	$(38\,450, 13\,550)$	$(47\,450, 50)$

Cuadro 8: Forma normal del juego del problema 8.

Aunque para hallar los puntos de equilibrio podríamos usar el método IDSDS empleado en el problema anterior (y sería considerablemente más fácil), usaremos el que Thomas (2003: 59) denomina *método de la esvástica*[3]. Supongamos que el jugador J_1 sigue una estrategia mixta $\vec{p}(p, 1-p)$ y el jugador J_2 una estrategia mixta $\vec{q}(q, 1-q)$.

[3]Recogido también por Morris (1994: 121), que simplemente denomina método gráfico.

En ese caso, los pagos esperados de ambos serían

$$\begin{aligned}\pi_1(p,q) &= 21\,850pq + 60\,000p(1-q) + 38\,450(1-p)q + 47\,450(1-p)(1-q) = \\ &= -29\,150pq + 12\,550p - 9\,000q + 47\,450 = \\ &= (-29\,150q + 12\,550)p - 9\,000q + 47\,450; \\ \pi_2(p,q) &= 5\,150pq + 5\,000p(1-q) + 13\,550(1-p)q + 50(1-p)(1-q) = \\ &= -13\,350pq + 4\,950p + 13\,500q + 50 = \\ &= (-13\,350p + 13\,500)q + 4\,950p + 50.\end{aligned}$$

Se puede ver que el valor de p que maximiza π_1 para q fijo es $p = 1$ si $q < \frac{251}{583}$, cualquiera si $q = \frac{251}{583}$, y $p = 0$ si $q > \frac{251}{583}$.

$$-29\,150q + 12\,550 = 0 \Longrightarrow q = \frac{12\,550}{29\,150} = \frac{251}{583}.$$

De la misma forma, el valor de q que maximiza π_2 para p fijo es $q = 1$ (independientemente del valor de p).

En la figura 8 se representan los valores de p que maximizan π_1 para q fijo (en azul) y los valores de q que maximizan π_2 para p fijo (en rojo). El único punto donde ambos conjuntos intersectan, que es en este caso el único punto de equilibrio, es el punto $(p_0, q_0) = (0, 1)$.

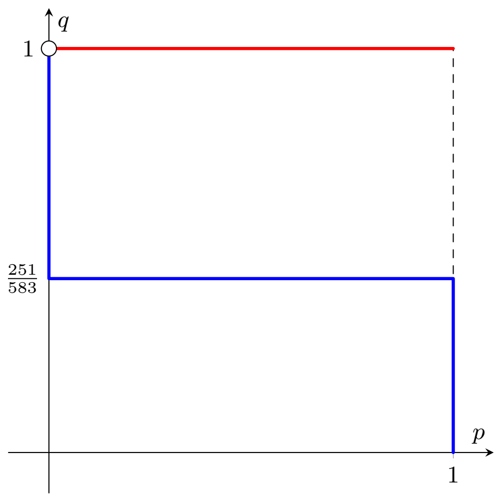

Figura 8: Método de la esvástica para el problema 8.

El punto de equilibrio hallado se corresponde con las estrategias mixtas $\vec{p}(0,1)$ para el jugador J_1 y $\vec{q}(1,0)$ para el jugador J_2. Dicho de otra forma, el punto de equilibrio se corresponde con el par de estrategias puras (B, C), donde la empresa I produciría 300 unidades de P_1 y 100 unidades de P_2 para obtener unos beneficios de 38 450 €, y la empresa II produciría 150 unidades de P_1 para obtener unos beneficios de 13 550 €.

Evidentemente, y como ya se ha dicho, el punto de equilibrio se habría obtenido de forma inmediata con el método IDSDS, pero como este ya se ha usado en el problema anterior, hemos aplicado aquí con el objetivo de trabajar distintos procedimientos el método de la esvástica.

3. Juegos N-personales de suma no nula

Problema 9. Ejercicio 1 de Morris (1994: 183). Demuestra que el conjunto

$$\big\{(x, 0, 700 - x) :\ 0 \leqslant x \leqslant 700\big\}$$

es un conjunto estable de imputaciones para el juego cuya función característica es[4]

$$\nu(\varnothing) = \nu\big(\{J_1\}\big) = \nu\big(\{J_2\}\big) = \nu\big(\{J_3\}\big) = 0,$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 500, \quad \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = 700, \quad \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 0, \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 700.$$

Solución del problema 9. Comprobaremos en primer lugar que el conjunto dado

$$X = \big\{(x, 0, 700 - x) :\ 0 \leqslant x \leqslant 700\big\}$$

es un conjunto de imputaciones. Sea $\vec{x}(x_1, 0, 700 - x_1) \in X$ con $0 \leqslant x_1 \leqslant 700$. Se verifican:

- Racionalidad individual.

$$x_1 \geqslant \nu\big(\{J_1\}\big) = 0; \quad x_2 = 0 = \nu\big(\{J_2\}\big); \quad x_3 = 700 - x_1 \geqslant 0 = \nu\big(\{J_3\}\big).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 0 + (700 - x_1) = 700 = \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big).$$

Y ahora veremos que el conjunto X es un conjunto estable de imputaciones, tal y como se pedía. Se verifican:

- Estabilidad interna. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in X$. Veamos que no existe ninguna coalición $\mathcal{S} \subset \{J_1, J_2, J_3\}$ para la cual la imputación $\vec{x}$ domine a la imputación $\vec{y}$. Para que esto fuese así, se tendrían que verificar las dos condiciones que definen la dominancia de imputaciones (Morris, 1994: 158),

$$\forall J_i \in \mathcal{S} :\ x_i > y_i; \tag{1}$$

$$\sum_{J_k \in \mathcal{S}} x_k \leqslant \nu(\mathcal{S}). \tag{2}$$

  Como se tiene que $x_2 = y_2 = 0$, la condición (1) no se verifica para ninguna coalición que contenga a J_2. Además, a la vista de la definición del conjunto X, sabemos que para cualquier $i \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $x_i \geqslant 0$, e $y_i \geqslant 0$. Entonces, si $J_i \in \mathcal{S}$ y se verifican las condiciones (1) y (2),

$$0 \leqslant y_i < x_i \leqslant \sum_{J_k \in \mathcal{S}} x_k \leqslant \nu(\mathcal{S}),$$

  lo que nos indica que podemos descartar cualquier coalición $\mathcal{S}$ que verifique $\nu(\mathcal{S}) = 0$. Esto nos deja únicamente la coalición $\{J_1, J_3\}$, pero esta también se puede descartar, puesto que tampoco satisface la condición (1),

$$x_1 > y_1 \iff 700 - x_1 < 700 - y_1 \iff x_3 < y_3.$$

[4] Datos obtenidos del ejemplo 6.1 de Morris (1994: 162), juego del coche de segunda mano. Para simplificar la notación llamamos J_1 a Nixon, J_2 a Agnew y J_3 a Mitchell.

- Estabilidad externa. Sea $\vec{y} \notin X$ una imputación. Por definición, se verifica

$$\forall i \in \{1,2,3\}: \; y_i \geqslant \nu\big(\{J_i\}\big) = 0;$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 700.$$

Es evidente que si $y_2 = 0$ entonces $\vec{y} \in X$, por lo que necesariamente ha de ser $y_2 > 0$. Consideramos la imputación $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ definida por

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2}.$$

Es inmediato que $\vec{x} \in X$, puesto que

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} \geqslant 0; \quad x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} \leqslant y_1 + y_2 + y_3 = 700; \quad x_2 = 0;$$

$$x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2} = (y_1 + y_2 + y_3) - \Big(y_1 + \frac{y_2}{2}\Big) = 700 - x_1.$$

Y, si consideramos la coalición $\mathcal{S} = \{J_1, J_3\}$, se puede ver que $\vec{x}$ domina a $\vec{y}$ para dicha coalición.

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} > y_1; \quad x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2} > y_3;$$

$$x_1 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = 700 = \nu\big(\{J_1, J_3\}\big).$$

Problema 10. Cuatro jugadores pueden elegir una de las letras $\{L, M, N\}$. Se verifica que L gana a M, M gana a N y N gana a L.

El jugador que pierda paga 10 euros a cada uno de los jugadores que le ganen.

Hallar la función característica de este juego y decir si es o no un juego esencial.

Solución del problema 10. Estamos ante un juego tetrapersonal simétrico de suma cero en su forma normal. Por ser simétrico son indistinguibles todos los jugadores y todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores. Y por ser de suma cero en su forma normal también será de suma cero en su forma de función característica, según el teorema 6.9 de Morris (1994: 164). Estudiamos las posibles coaliciones *distintas* por separado.

- Se forman las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3, J_4\}$. La forma normal del juego se recoge en el cuadro 9. En principio debería ser una matriz de dimensiones 3×27, pero directamente se han eliminado las columnas dominadas que corresponden a la coalición $\{J_2, J_3, J_4\}$, para la cual es evidente que el orden de las estrategias de los distintos jugadores no es relevante. Por ejemplo, la columna correspondiente a la estrategia LML se suprime puesto que es idéntica a (y está dominada por) la correspondiente a la estrategia LLM.

		$\{J_2, J_3, J_4\}$									
		LLL	LLM	LLN	LMM	LMN	LNN	MMM	MMN	MNN	NNN
$\{J_1\}$	L	0	10	-10	20	0	-20	30	10	-10	-30
	M	-30	-20	-10	-10	0	10	0	10	20	30
	N	30	10	20	-10	0	10	-30	-20	-10	0

Cuadro 9: Forma normal del juego del problema 10 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3, J_4\}$.

La matriz reducida obtenida no tiene puntos de silla y tampoco tiene filas ni columnas dominadas. Para obtener el valor del juego bipersonal asociado hemos de resolver, por ejemplo, el problema de programación lineal asociado al jugador fila $\{J_1\}$:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maximizar} & v; \\
\text{Sujeto a} & \begin{array}{rrrrrrrrrl}
 & & & & & & & p_1, p_2, p_3 & \geqslant & 0, \\
 & p_1 & + & p_2 & + & p_3 & & & = & 1, \\
 & & - & 30p_2 & + & 30p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
 & 10p_1 & - & 20p_2 & + & 10p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
- & 10p_1 & - & 10p_2 & + & 20p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
 & 20p_1 & - & 10p_2 & - & 10p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
 & & & & & & - & v & \geqslant & 0, \\
- & 20p_1 & + & 10p_2 & + & 10p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
 & 30p_1 & & & - & 30p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
 & 10p_1 & + & 10p_2 & - & 20p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
- & 10p_1 & + & 20p_2 & - & 10p_3 & - & v & \geqslant & 0, \\
- & 30p_1 & + & 30p_2 & & & - & v & \geqslant & 0.
\end{array}
\end{array}
$$

Vamos a intentar resolver el problema evitando el método simplex. Por inspección se puede ver que $v \leqslant 0$. Si suponemos que $v = 0$ es factible, y sustituyendo convenientemente, se obtiene

$$\left.\begin{aligned} -30p_2 + 30p_3 \geqslant 0 &\Longrightarrow p_3 \geqslant p_2 \\ 30p_1 - 30p_3 \geqslant 0 &\Longrightarrow p_1 \geqslant p_3 \\ -30p_1 + 30p_2 \geqslant 0 &\Longrightarrow p_2 \geqslant p_1 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow p_1 = p_2 = p_3.$$

Entonces, necesariamente ha de ser

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3},$$

y es inmediato comprobar que los valores $v = 0$ y $\vec{p}\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ satisfacen todas las restricciones. Por tanto,

$$\nu\big(\{J_1\}\big) = 0,$$

y como se ha razonado que es un juego de suma cero,

$$\nu\big(\{J_2, J_3, J_2\}\big) = 0.$$

- Se forman las coaliciones $\{J_1, J_2\}$ y $\{J_3, J_4\}$. La forma normal del juego se recoge en el cuadro 10. De nuevo, en vez de dar una matriz de dimensiones 9×9, se eliminan directamente las filas y columnas dominadas correspondientes a cambios de orden entre las estrategias de las coaliciones.

		$\{J_3, J_4\}$					
		LL	LM	LN	MM	MN	NN
$\{J_1, J_2\}$	LL	0	20	−20	40	0	−40
	LM	−20	0	−10	20	10	0
	LN	20	10	0	0	−10	−20
	MM	−40	−20	0	0	20	40
	MN	0	−10	10	−20	0	20
	NN	40	0	20	−40	−20	0

Cuadro 10: Forma normal del juego del problema 10 para las coaliciones $\{J_1, J_2\}$ y $\{J_3, J_4\}$.

En este caso es evidente vista la forma de la matriz reducida que estamos ante un juego simétrico, y el corolario 2.12 de Morris (1994: 60) nos garantiza que el valor del juego ha de ser $v = 0$. Por tanto,

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 0.$$

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, y que el juego es de suma cero, tenemos suficiente información para dar la función característica. En este caso es idénticamente nula.

$$\nu(\varnothing) = \nu\big(\{J_1\}\big) = \nu\big(\{J_2\}\big) = \nu\big(\{J_3\}\big) = \nu\big(\{J_4\}\big) = 0;$$
$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_3, J_4\}\big) = 0;$$
$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 0.$$

Como se puede ver, es un juego no esencial, puesto que se verifica la definición 6.2 de Morris (1994: 154).

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \sum_{i=1}^{4} \nu\big(\{J_i\}\big) = 0.$$

Problema 11. La función característica de un juego entre cuatro personas viene dada de la siguiente forma:

$$\nu(\varnothing) = 0, \quad \nu\big(\{J_1\}\big) = -1, \quad \nu\big(\{J_2\}\big) = 0, \quad \nu\big(\{J_3\}\big) = -1, \quad \nu\big(\{J_4\}\big) = 0,$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 0, \quad \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = -1, \quad \nu\big(\{J_1, J_4\}\big) = 1, \quad \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 0, \quad \nu\big(\{J_2, J_4\}\big) = 1, \quad \nu\big(\{J_3, J_4\}\big) = 0,$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1, \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = 2, \quad \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = 0, \quad \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = 1,$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2.$$

Verificar que ν es una función característica.

Calcular la forma reducida-$(0, 1)$ de este juego y el valor de Shapley.

Solución del problema 11. Para que ν sea una función característica tiene que tomar valor cero para la coalición vacía y ser superaditiva. La primera condición se verifica, puesto que por definición $\nu(\varnothing) = 0$. La segunda exige que si $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{P}$ son dos coaliciones disjuntas, entonces

$$\nu(\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2) \geqslant \nu(\mathcal{S}_1) + \nu(\mathcal{S}_2).$$

Veamos que la superaditividad también se satisface.

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 0 > -1 + 0 = \nu\big(\{J_1\}\big) + \nu\big(\{J_2\}\big), \quad \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = -1 > -1 - 1 = \nu\big(\{J_1\}\big) + \nu\big(\{J_3\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_4\}\big) = 1 > -1 + 0 = \nu\big(\{J_1\}\big) + \nu\big(\{J_4\}\big), \quad \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 0 > 0 - 1 = \nu\big(\{J_2\}\big) + \nu\big(\{J_3\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_2, J_4\}\big) = 1 > 0 + 0 = \nu\big(\{J_2\}\big) + \nu\big(\{J_4\}\big), \quad \nu\big(\{J_3, J_4\}\big) = 0 > -1 + 0 = \nu\big(\{J_3\}\big) + \nu\big(\{J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1 > -1 + 0 = \nu\big(\{J_1\}\big) + \nu\big(\{J_2, J_3\}\big), \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1 > 0 - 1 = \nu\big(\{J_2\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_3\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1 > -1 + 0 = \nu\big(\{J_3\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_2\}\big), \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = 2 > -1 + 1 = \nu\big(\{J_1\}\big) + \nu\big(\{J_2, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = 2 > 0 + 1 = \nu\big(\{J_2\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_4\}\big), \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = 2 > 0 + 0 = \nu\big(\{J_4\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_2\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = 0 > -1 + 0 = \nu\big(\{J_1\}\big) + \nu\big(\{J_3, J_4\}\big), \quad \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = 0 = -1 + 1 = \nu\big(\{J_3\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = 0 > 0 - 1 = \nu\big(\{J_4\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_3\}\big), \quad \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = 1 > 0 + 0 = \nu\big(\{J_2\}\big) + \nu\big(\{J_3, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = 1 > -1 + 1 = \nu\big(\{J_3\}\big) + \nu\big(\{J_2, J_4\}\big), \quad \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = 1 > 0 + 0 = \nu\big(\{J_4\}\big) + \nu\big(\{J_2, J_3\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2 > -1 + 1 = \nu\big(\{J_1\}\big) + \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2 > 0 + 0 = \nu\big(\{J_2\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2 > -1 + 2 = \nu\big(\{J_3\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2 > 0 + 1 = \nu\big(\{J_4\}\big) + \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2 > 0 + 0 = \nu\big(\{J_1, J_2\}\big) + \nu\big(\{J_3, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2 > -1 + 1 = \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) + \nu\big(\{J_2, J_4\}\big),$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 2 > 1 + 0 = \nu\big(\{J_1, J_4\}\big) + \nu\big(\{J_2, J_3\}\big).$$

Y en consecuencia, se ha visto que ν es una función característica.

Para calcular la forma reducida-$(0,1)$ del juego, el primer paso es obtener

$$k = \frac{1}{\nu(\mathcal{P}) - \sum_{i=1}^{4} \nu\big(\{J_i\}\big)} = \frac{1}{2-(-1+0-1+0)} = \frac{1}{4} > 0.$$

Después,

$$c_1 = -k\nu\big(\{J_1\}\big) = -\frac{1}{4}\cdot(-1) = \frac{1}{4}; \quad c_2 = -k\nu\big(\{J_2\}\big) = -\frac{1}{4}\cdot 0 = 0;$$
$$c_3 = -k\nu\big(\{J_3\}\big) = -\frac{1}{4}\cdot(-1) = \frac{1}{4}; \quad c_4 = -k\nu\big(\{J_4\}\big) = -\frac{1}{4}\cdot 0 = 0.$$

Por ultimo, aplicando la relación 6.12 de Morris (1994: 168),

$$\mu(\mathcal{S}) = k\nu(\mathcal{S}) + \sum_{J_i\in\mathcal{S}} c_i,$$

y operando se obtiene la forma reducida-$(0,1)$ del juego, que denominamos μ:

$$\mu(\varnothing) = 0, \quad \mu\big(\{J_1\}\big) = \mu\big(\{J_2\}\big) = \mu\big(\{J_3\}\big) = \mu\big(\{J_4\}\big) = 0,$$
$$\mu\big(\{J_1,J_2\}\big) = \mu\big(\{J_1,J_3\}\big) = \frac{1}{4}, \quad \mu\big(\{J_1,J_4\}\big) = \frac{1}{2}, \quad \mu\big(\{J_2,J_3\}\big) = \mu\big(\{J_2,J_4\}\big) = \mu\big(\{J_3,J_4\}\big) = \frac{1}{4}.$$
$$\mu\big(\{J_1,J_2,J_3\}\big) = \mu\big(\{J_1,J_2,J_4\}\big) = \frac{3}{4}, \quad \mu\big(\{J_1,J_3,J_4\}\big) = \mu\big(\{J_2,J_3,J_4\}\big) = \frac{1}{2},$$
$$\mu\big(\{J_1,J_2,J_3,J_4\}\big) = 1.$$

Para calcular el valor de Shapley, estudiamos cada jugador por separado:

- Jugador J_1. Calculamos la medida en la que contribuye J_1 a cada posible coalición en la que participa.

$$\delta\big(J_1,\{J_1\}\big) = \nu\big(\{J_1\}\big) - \nu(\varnothing) = -1-0 = -1;$$
$$\delta\big(J_1,\{J_1,J_2\}\big) = \nu\big(\{J_1,J_2\}\big) - \nu\big(\{J_2\}\big) = 0-0 = 0;$$
$$\delta\big(J_1,\{J_1,J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1,J_3\}\big) - \nu\big(\{J_3\}\big) = -1-(-1) = 0;$$
$$\delta\big(J_1,\{J_1,J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1,J_4\}\big) - \nu\big(\{J_4\}\big) = 1-0 = 1;$$
$$\delta\big(J_1,\{J_1,J_2,J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1,J_2,J_3\}\big) - \nu\big(\{J_2,J_3\}\big) = 1-0 = 1;$$
$$\delta\big(J_1,\{J_1,J_2,J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1,J_2,J_4\}\big) - \nu\big(\{J_2,J_4\}\big) = 2-1 = 1;$$
$$\delta\big(J_1,\{J_1,J_3,J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1,J_3,J_4\}\big) - \nu\big(\{J_3,J_4\}\big) = 0-0 = 0;$$
$$\delta\big(J_1,\{J_1,J_2,J_3,J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1,J_2,J_4,J_4\}\big) - \nu\big(\{J_2,J_3,J_4\}\big) = 2-1 = 1.$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \sum_{\mathcal{S}\ni J_1} \frac{(4-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{4!}\delta(J_1,\mathcal{S}) = \\ &= \frac{3!0!}{4!}\cdot(-1) + \frac{2!1!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 0 + \frac{0!3!}{4!}\cdot 1 = \\ &= \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

- Jugador J_2. Calculamos la medida en la que contribuye J_2 a cada posible coalición en la que participa.

$$\delta\big(J_2, \{J_2\}\big) = \nu\big(\{J_2\}\big) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta\big(J_2, \{J_1, J_2\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2\}\big) - \nu\big(\{J_1\}\big) = 0 - (-1) = 1;$$

$$\delta\big(J_2, \{J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) - \nu\big(\{J_3\}\big) = 0 - (-1) = 1;$$

$$\delta\big(J_2, \{J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_4\}\big) = 1 - 0 = 1;$$

$$\delta\big(J_2, \{J_1, J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = 1 - (-1) = 2;$$

$$\delta\big(J_2, \{J_1, J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_4\}\big) = 2 - 1 = 1;$$

$$\delta\big(J_2, \{J_2, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_3, J_4\}\big) = 1 - 0 = 1;$$

$$\delta\big(J_2, \{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_4, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = 2 - 0 = 2.$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \sum_{\mathcal{S} \ni J_2} \frac{(4 - |\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}| - 1\big)!}{4!} \delta(J_2, \mathcal{S}) = \\
&= \frac{3!0!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 2 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{0!3!}{4!} \cdot 2 = \\
&= \frac{13}{12}.
\end{aligned}$$

- Jugador J_3. Calculamos la medida en la que contribuye J_3 a cada posible coalición en la que participa.

$$\delta\big(J_3, \{J_3\}\big) = \nu\big(\{J_3\}\big) - \nu(\varnothing) = -1 - 0 = -1;$$

$$\delta\big(J_3, \{J_1, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) - \nu\big(\{J_1\}\big) = -1 - (-1) = 0;$$

$$\delta\big(J_3, \{J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) - \nu\big(\{J_2\}\big) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta\big(J_3, \{J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_3, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_4\}\big) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta\big(J_3, \{J_1, J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 1 - 0 = 1;$$

$$\delta\big(J_3, \{J_1, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_4\}\big) = 0 - 1 = -1;$$

$$\delta\big(J_3, \{J_2, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_2, J_4\}\big) = 1 - 1 = 0;$$

$$\delta\big(J_3, \{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_4, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = 2 - 2 = 0.$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= \sum_{\mathcal{S} \ni J_3} \frac{(4 - |\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}| - 1\big)!}{4!} \delta(J_3, \mathcal{S}) = \\
&= \frac{3!0!}{4!} \cdot (-1) + \frac{2!1!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 0 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot (-1) + \frac{1!2!}{4!} \cdot 0 + \frac{0!3!}{4!} \cdot 0 = \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

- Jugador J_4. Calculamos la medida en la que contribuye J_4 a cada posible coalición en la que participa.

$$\delta\big(J_4, \{J_4\}\big) = \nu\big(\{J_4\}\big) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta\big(J_4, \{J_1, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1\}\big) = 1 - (-1) = 2;$$

$$\delta\big(J_4, \{J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_2\}\big) = 1 - 0 = 1;$$

$$\delta\big(J_4, \{J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_3, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_3\}\big) = 0 - (-1) = 1;$$

$$\delta\big(J_4, \{J_1, J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 2 - 0 = 2;$$

$$\delta\big(J_4, \{J_1, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = 0 - (-1) = 1;$$

$$\delta\big(J_4, \{J_2, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 1 - 0 = 1;$$

$$\delta\big(J_4, \{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_4, J_4\}\big) - \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 2 - 1 = 1.$$

  Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}\phi_4 &= \sum_{\mathcal{S} \ni J_4} \frac{(4 - |\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}| - 1\big)!}{4!} \delta(J_4, \mathcal{S}) = \\ &= \frac{3!0!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 2 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 2 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{0!3!}{4!} \cdot 1 = \\ &= \frac{11}{12}.\end{aligned}$$

Por tanto, el valor de Shapley es el vector

$$\vec{\phi}\left(\frac{1}{4}, \frac{13}{12}, -\frac{1}{4}, \frac{11}{12}\right).$$

No se pide, pero para detectar posibles errores, se puede comprobar fácilmente que el valor de Shapley obtenido es una imputación. Verifica:

- Racionalidad individual.

$$\phi_1 = \frac{1}{4} > -1 = \nu\big(\{J_1\}\big), \quad \phi_2 = \frac{13}{12} > 0 = \nu\big(\{J_2\}\big), \quad \phi_3 = -\frac{1}{4} > -1 = \nu\big(\{J_3\}\big), \quad \phi_4 = \frac{11}{12} > 0 = \nu\big(\{J_4\}\big).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^{4} \phi_i = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \frac{1}{4} + \frac{13}{12} - \frac{1}{4} + \frac{11}{12} = 2 = \nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big).$$

Referencias bibliográficas

Bonanno, Giacomo, *Game Theory*, 2$^{\text{nd}}$ ed., CreateSpace, 2018, 592 p.

Morris, Peter, *Introduction to Game Theory*, New York (US), Springer-Verlag, 1994, isbn 978-1-4612-4316-8, 230 p.

Osborne, Martin J.; Rubinstein, Ariel, *A Course in Game Theory*, Cambridge (Massachusetts, US), The MIT Press, 1994, isbn 0-262-15041-7, 352 p.

Thomas, L. C., *Games, Theory and Applications*, Mineola (New York, US), Dover, 2003, isbn 0-486-43237-8, 279 p.