Modelos estocásticos

Prueba de evaluación continua

Abril 2020

Dr. Víctor Hernández

Universidad Nacional de Educación a distancia
Departamento de Estadística e Investigación operativa

Modelos estocásticos. PEC 2020. Modelo 6

Primer enunciado

Una urna contiene n bolas numeradas de 1 a n. Se extraen sucesivas bolas con reemplazamiento hasta obtener una bola con un número menor o igual que el de la bola anterior. Excluyendo ese último número, tendremos una secuencia de números crecientes. Por ejemplo, supongamos que $n = 20$, si primero extraemos 2, luego 7, luego 15 y luego 11, la secuencia creciente obtenida será 2, 7, 15.

Sea N el número de números que forman la secuencia creciente y S la suma de esos números. En el ejemplo anterior, se tiene $N = 3$ y $S = 24$.

Cuestión 1. (0.5 puntos) Hallar el valor esperado de la suma de los números de la secuencia creciente $E\{S\}$.

Cuestión 2. (0.5 puntos) Hallar el valor esperado $E\{N\}$. Si $n \to \infty$, ¿converge $E\{N\}$ hacia algún valor?

Solución de la cuestión 1

Sea X_1 es el número que lleva la primera bola extraída; se tiene

$$E\{S\} = \frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = 1\} + \frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = 2\} + \cdots + \frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = n\} \tag{1}$$

Volvamos a condicionar ahora por el número, X_2, que lleva la segunda bola extraída. Lo que ocurra en el futuro depende exclusivamente el número de la última bola extraída y no de las anteriores, luego

$$E\{S \mid X_1 = k, X_2 = i\} = \begin{cases} k + E\{S \mid X_1 = i\} & i > k \\ k & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y, si aplicamos lo anterior a la relación

$$E\{S \mid X_1 = k\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} E\{S \mid X_1 = k, X_2 = i\}$$

resulta

$$\begin{aligned} E\{S \mid X_1 = k\} &= \sum_{i=k+1}^{n} P(X_2 = i \mid X_1 = k)\, E\{S \mid X_1 = k, X_2 = i\} \\ &= k + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{1}{n} E\{S \mid X_1 = i\} \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots, n-1 \end{aligned} \tag{2}$$

Obtenemos así $n - 1$ ecuaciones que, junto con $E\{S \mid X_1 = n\} = n$, permiten calcular $E\{S \mid X_1 = i\}$, para cada i, y $E\{S\}$.

Por ejemplo, basta reemplazar la condición de contorno en

$$E\{S \mid X_1 = n-1\} = n - 1 + \frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = n\}$$

para obtener $E\{S \mid X_1 = n-1\} = n$. De igual manera, si reemplazamos en

$$E\{S \mid X_1 = n-2\} = n-2+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = n-1\}+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = n\}$$

resulta $E\{S \mid X_1 = n-2\} = n$; así sucesivamente, se tiene

$$E\{S \mid X_1 = n\} = E\{S \mid X_1 = n-1\} = \cdots = E\{S \mid X_1 = 1\} = n$$

luego

$$E\{S\} = \frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = 1\}+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = 2\}+\cdots+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = n\} = n \tag{3}$$

Solución de la cuestión 2

Condicionando por X_1 y X_2 como en la cuestión anterior, se obtiene

$$E\{N \mid X_1 = k\} = 1+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = k+1\}+\cdots+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = n\} \tag{4}$$

y, de igual modo, se tiene

$$E\{N \mid X_1 = k+1\} = 1+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = k+2\}+\cdots+\frac{1}{n}E\{S \mid X_1 = n\} \tag{5}$$

luego, si se resta 5 a 4, resulta

$$E\{N \mid X_1 = k\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)E\{S \mid X_1 = k+1\} \tag{6}$$

relación que, aplicada reiteradas veces, produce

$$E\{N \mid X_1 = k\} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-k} \tag{7}$$

se sigue

$$\begin{aligned} E\{S\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}E\{N \mid X_1 = k\} &= \frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{k} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}\left(1-\left(\frac{n}{n}\right)^{n}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

por lo cual

$$\lim_{n\to\infty} E\{S\} = e(1-e^{-1}) = e-1$$

Segundo enunciado

Un sistema para estar operativo requiere que dos baterías que lleva incorporado estén en funcionamiento. Además de las dos baterías en funcionamiento, el sistema tiene una tercera batería en reserva o *standby* que entra en funcionamiento inmediatamente cuando alguna de las dos iniciales se avería. Mientras la batería está en *standby* no consume vida útil.

Cuestión 3. (0.5 puntos) Si los tiempos de funcionamiento de cada batería (su vida útil) son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas con distribución común exponencial de parámetro λ, hallar la distribución del tiempo de funcionamiento del sistema.

Cuestión 4. (0.5 puntos) Si los tiempos de funcionamiento de cada batería (su vida útil) son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con distribución común uniforme en $(0,1)$, hallar el tiempo esperado que funciona el sistema.

Solución de la cuestión 3

Elabora un plan

Sean X_1, X_2 y X_3 los tiempos de vida útil de las tres baterías. Si contamos el tiempo desde el instante en que comienza a funcionar el sistema, de las dos baterías inicialmente instaladas, la primera que se avería lo hace en el instante $U = \min(X_1, X_2)$ y la última en $V = \max(X_1, X_2)$. La batería que estaba en reserva comienza a funcionar en el instante U y se avería en $U + X_3$. El tiempo T de funcionamiento del sistema es

$$T = \min(V, U + X_3) = U + \min(V - U, X_3) = U + \min(R, X_3)$$

donde $R = V - U$.

Primera solución

La función de densidad conjunta de (U, V) es

$$f(u,v) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} I_{\{0<u<v\}}(u,v)$$

luego, si $R = V - U$, la función de densidad conjunta de (U, R) es

$$f(u,r) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(2u+r)} I_{\{u>0,\, r>0\}}(u,r)$$

se sigue la distribución de R es $f(r) = \lambda e^{-\lambda r} I_{\{r>0\}}(r)$, la distribución de U es $f(u) = 2\lambda e^{-2\lambda u} I_{\{u>0\}}(u)$ y U y U son independientes.

Ahora, la distribución de $\min(R, X_3)$ es el mínimo de dos exponenciales de parámetro λ independientes, luego es una exponencial de parámetro 2λ. Así, T es suma de dos exponenciales de parámetro 2λ independientes, luego tiene distribución $\gamma(2, 2\lambda)$, con función de densidad

$$f(t) = (2\lambda)^2 t e^{-2\lambda t} I_{\{t>0\}}(t) \tag{9}$$

Segunda solución

Se tiene

$$P(T > t) = P(T > t \mid X_1 > X_2) P(X_1 > X_2) + P(T > t \mid X_1 < X_2) P(X_1 < X_2)$$

pero, por simetría, $P(X_1 < X_2) = P(X_1 > X_2) = 1/2$ y

$$P(T > t \mid X_1 > X_2) = P(T > t \mid X_1 < X_2)$$

así, resulta

$$P(T > t) = P(T > t \mid X_1 > X_2) = \frac{P(X_1 > t,\, X_2 < X_1,\, X_2 + X_3 > t)}{P(X_1 > X_2)} \tag{10}$$

Ahora bien, se tiene

$$\begin{aligned} &P(X_1 > t,\, X_2 < X_1,\, X_2 + X_3 > t) = \\ &\quad = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_1}\, dx_1 \left\{ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x_2} P(X_3 > t - x_2)\, dx_2 + \int_t^{x_1} \lambda e^{-\lambda x_2}\, dx_2 \right\} \end{aligned}$$

por lo cual

$$P(X_1 > t,\, X_2 < X_1,\, X_2 + X_3 > t) = \lambda t e^{-2\lambda t} + \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} \tag{11}$$

de donde

$$P(T > t) = 2\lambda t e^{-2\lambda t} + e^{-2\lambda t}$$

Por consiguiente, la función de densidad de T es 9.

Solución de la cuestión 4

La distribución conjunta de (U, V) tiene función de densidad

$$f(u, v) = 2 I_{\{0<u<v<1\}}(u, v) \tag{12}$$

como se comprueba inmediatamente sin más que observar que

$$P(U > u, V < v) = (v - u)^2, \quad 0 < u < v < 1$$

y gracias a ello obtener la función de distribución conjunta $P(U \le u, V \le v)$.

Si $R = V - U$ es el rango de las variables, a partir de 12 y mediante un cambio de variables, se obtiene la densidad conjunta de (U, R).

$$f(u, r) = 2 I_{\{u>0,\, r>0,\, u+r<1\}}(u, r) \tag{13}$$

Ahora, si T es el tiempo de funcionamiento del sistema, se tiene

$$T = U + \min(R, X_3)$$

Se sigue

$$E\{T\} = E\{U\} + E\{\min(R, X_3)\}$$

Pero, por una parte, $E\{U\} = 1/3$, y por otra X_3 es independiente de X_1 y X_2, luego es independiente de R por lo que se tiene

$$\begin{aligned} P(\min(R, X_3) > t) &= P(X_3 > t) P(R > t) \\ &= (1 - t) \int_t^1 1(1 - r)\, dr = (1 - t)^3 \end{aligned}$$

luego

$$E\{\min(R, X_3)\} = \int_0^1 P(\min(R, X_3) > t)\, dt = \frac{1}{4}$$

y $E\{T\} = 1/3 + 1/4 = 7/12$.