FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I
(Grado en Matemáticas)
Mayo de 2019

NO SE PERMITE NINGÚN TIPO DE MATERIAL

Todas las **respuestas deben** estar **justificadas** razonadamente.

Se aconseja utilizar borrador en los ejercicios de más cálculos y pasar luego a limpio.

1.(2 Puntos) Determinar la distancia del punto $P(2,4,-1)$ al plano π que contiene la recta $r : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1, x+y+z = 2\}$ y es perpendicular al plano $\alpha : \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 5z = 1\}$

Resolución: El vector $\overrightarrow{n}_\pi$ normal al plano π deve ser **ortogonal al vector** $\overrightarrow{n}_\alpha = (2,-1,5)$ **y al vector** $\overrightarrow{r} = (0,1,-1)$; luego, puedo tomar $\overrightarrow{n}_\pi = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{r} = (-4,2,2) = -2(2,1,1)$;

entonces, π tiene ecuación $2x - y - z = const$

(la constante se determina imponiendo que todo punto de la recta - por ejemplo, $(1,1,0)$ - pertenzca a π). Obtenemos:

$2x - y - z = 1$

(También hubiéramos podido usar el hecho de que las condiciones para π son equivalentes a que **sea nulo el determinante**:

(la tercera columna representa las coordenadas del vector diferencia entre un punto generico y un punto de π, en este caso $(1,1,0)$.

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x-1 \\ -1 & 1 & y-1 \\ 5 & -1 & z \end{vmatrix}$ La ecuación obtenida para π es equivalente a la de arriba).

Ahora utilizamos la fórmula que da la distancia de un punto a un plano:

$d = \frac{|2.2-4+1-1|}{\sqrt{2+1+1}} = 0$. El resultado no nos debe sorprender, pues, de hecho, el punto $P(2,4,-1) \in \pi$!

2. *(2,5 Puntos) ¿Para que valores de k,es $(0,0)$ es punto crítico de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$.*

Para cuáles valores de k, tiene f un punto de silla en $(0,0)$? ¿Y un extremo local en $(0,0)$? (Ese extremo local es un máximo o mínimo?)

Resolución:

Un punto (x, y) es punto crítico de f si se verifica: $f\ \nabla f(x, y) = (2x + ky, 2y + kx) = (0, 0)$

Lo que es equivalente a $2x + ky = 0$, $2y + kx = 0$. lo que nos dice que si $x = y = 0$, las ecuaciones son **identidades**.

Es decir: $(0, 0)$ es punto crítico de f para **todo** $k \in \mathbb{R}$.

La matriz hessiana es $H(f) = \left(\begin{array}{cc} 2 & \mathrm{k} \\ \mathrm{k} & 2 \end{array}\right)$ con determinante $4 - k^2$.El punto$(0, 0)$ es de silla si $4 - k^2 \lneqq 0$, es decir $|k| \gneqq 2$.

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, f tiene un extremo local, que será un **mínimo** local, si $4 - k^2 \gneqq 0$, es decir $k \in]2, 2[$.

3. *(3 Puntos) Dada la función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ *si* $(x, y) \neq 0$ *y* $f(0, 0) = 0$

a) Estudiar si f *es continua en el origen.*
b) Hallar, si es posible, la derivadas parciales en el origen.
c) Estudiar si f *es diferenciable en el origen.*

Resolución:

a) f *es continua en el origen* si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$

Podemos ver que este límite es cero utilizando el criterio de la majoración:

$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{x^2 y}{x^2}\right| = |y|$ como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$ resulta que también $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0 = f(0, 0)$. Por tanto f **es continua en el origen.**

***También se puede utilizar las coordenadas polares, reescribiendo el enunciado en esas coordenadas:*

$x = \rho \cos\theta \quad y = \rho \sin\theta$

El límite que tenemos que calcular se queda en:

$\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\rho^2 \cos^2\theta \sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho^2 \cos^2\theta \sin\theta = 0$ porque se trata del limite de una función que es el producto de una función (es importante señalarlo:) **acotada** $(\cos^2\theta \sin\theta)$ por otra (ρ) que converge para 0.

b) Hay que calcular estas derivadas por la definición:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h,0)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0,h)-0}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$

Así:

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

c) Sabemos que las derivadas parciales existen, pero no son contínuas las dos; de hecho, calculando $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ **fuera del origen** obtenemos funciones continuas pero que no son continuas en $(0,0)$.(Queda como ejercicio el cálculo de eses límites en $(0,0)$). **Luego, no sabemos si la función es diferenciable en el origen; para averiguarlo**, tenemos que calcular el límite: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\|(x-0,y-0)\|} =$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0-0.x-0.y}{\|(x,y)\|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Este límite no existe:

Hay muchas formas de verlo; por ejemplo,

*si hacemos el límite según puntos de la recta (x,x), tenemos $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)}\frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{\sqrt{8}x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{8}}$

Pero, tomando puntos de la recta $x=0$, es decir, puntos de la forma $(0,y)$,tenemos $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)}\frac{0}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} 0 = 0.$

**Tambien bastaría tomar puntos de la forma $(x,\lambda x)$, el límite quedaría $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lambda x^3}{(x^2+\lambda^2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\lambda x^3}{x^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$ Este valor depende del valor de λ elegido y no es siempre igual a 0 (¡casí nunca, solo para $\lambda = 0$!).

*** Se podría también volver a usar las coordenadas polares y obtendríamos el resultado de $\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{\lambda^3\cos^2\theta\sin\theta}{\lambda^3} = \lim\limits_{\rho\to 0}\cos^2\theta\sin\theta = \cos^2\theta\sin\theta.$

Este valor depende del θ elegido y no es siempre igual a 0 (¡solo para $\theta = \frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$).

En todos los casos concluímos que no existe el límite.

Conclusión: f no es diferenciable en $(0,0)$.

4. *(2,5 Puntos) Determine el polinomio (o fórmula) de Taylor de segundo grado de la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y) = e^{(x-y)}\sin y$ en un entorno del punto $(1,0)$.*

Cuál es el valor de este polinomio en $(\frac{1}{2},0)$?

Resolución:

La fórmula de Taylor de segundo grado es dada por:

$f((1,0)+(h_1,h_2) = P_2\left[(1,0)+(h_1,h_2)\right] + R_2\left[(1,0),(h_1,h_2)\right] =$

$= f(1,0)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)+\frac{1}{2}\left[h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\right]+$ $R_2\left[(1,0),(h_1,h_2)\right]$

donde $\frac{R_2[(1,0),(h_1,h_2)]}{\|(h_1,h_2)\|} \to 0$ cuando (h_1,h_2) tiende a $(0,0)$.

Solo nos interesa el polinomio $P_2\left[(1,0)+(h_1,h_2)\right] = P_2(1+h_1,h_2)$

o, utilizando la fórmula más usual: (haciendo $h_1 = x-1$ y $h_2 = y-0$)

$P_2((x,y) = f(1,0)+(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+(y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)+\frac{1}{2}\left[(x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)+2(x-1)y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)+\right.$

Vamos a calcularlo:

$f(x,y) = e^{(x-y)}\sin y$ Luego $f(1,0) = e.0 = 0$

Calculemos las derivadas parciales primeras y segundas en el punto $(1,0).de\ f$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{(x-y)}\sin y = f(x,y)$ y por tanto, también

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y).$

$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{(x-y)}(-\sin y+\cos y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{(x-y)}(-2\cos y)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$,ya que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f(x,y))$

Calculemos estas derivadas en el punto $(1,0)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)f(1,0) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = e$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = -2e$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(1,0) = e$

entonces,

$P_2(1+h_1,h_2) = f(1,0)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)+\frac{1}{2}\left[h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\right]$

$= 0+0+h_2e+\frac{1}{2}\left[0+2h_1h_2e-2eh_2^2\right] = (h_2+h_1h_2-h_2^2)e$

$= \left[y+(x-1)y-y^2\right]e = e(xy-y^{2)}$

o, utilizando la fórmula más usual:

$P_2(x,y) = f(1,0)+(x-1)\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)+(y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)+\frac{1}{2}\left[(x-1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)+2(x-1)y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)+\right.$

$= 0+0+ye+0+(x-1)ye-ey^2 = e(xy-y^{2)}$

en $(\frac{1}{2},0)$ **este** polinomio (no es el polinomio de Taylor en el punto $(\frac{1}{2},0)$) vale

$P_2(\frac{1}{2},0) = e.(\frac{1}{2}.0-0) = 0.$

*Si se quiere utilizar la fórmula $P_2(1+h_1,h_2) = (h_2+h_1h_2-h_2^2)e$, solo hay que tener en cuenta que

$h_1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$ y $h_2 = 0 - 0 = 0$ y el resultado es

$P_2(1 + h_1, h_2) = 0 + (-\frac{1}{2})0 - 0)e = 0.$