⁎ DURACIÓN DEL EXAMEN: DOS HORAS ⁎

⁎ NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE MATERIAL ⁎

EJERCICIO 1) **(4 puntos)** Sea X un conjunto. Dados subconjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se define el límite ínfimo y el límite supremo

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n \qquad\qquad \limsup_n A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n$$

Decimos que la sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos de X converge a un subconjunto A de X, y escribimos $\lim_n A_n = A$, cuando la sucesión de funciones características $(\chi_{A_n})_n$ converge puntualmente a la función característica χ_A de A.

(1) Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(1.a) $\lim_n A_n$ existe.

(1.b) $\lim_n A_n^c$ existe.

(1.c) $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = A$ y $\lim_n A_n = A$.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida (σ-aditiva, no necesariamente finita), y sea $(A_n)_n$ una sucesión de conjuntos en Σ.

(3) Demostrar que si $(A_n)_n$ converge a $A \subseteq \Omega$, entonces $A \in \Sigma$.

(4) Supongamos $\lim_n A_n$ existe y que existe B tal que $\mu(B) < \infty$ y que contiene a todos los A_n's. Demostrar que $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$. ¿De cual teorema de convergencia de funciones integrables es este resultado un caso particular?

(5) Encontrar un espacio de medida (Ω, Σ, μ) y una sucesión de conjuntos $(A_n)_n$ en Σ tal que $\mu(\lim A_n) \neq \lim_n \mu(A_n)$.

⁎

EJERCICIO 2) **(3 puntos)**

(1) Enunciar el teorema de *Radon-Nikodym*.

(2) Sea $X := \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos, y sean $\mu, \nu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ las medidas $\mu(A) := \sum_{j\in A} a_j$ y $\nu(A) :=$ Card(A)=cardinalidad de A, para cada $A \subseteq X$. Demostrar que existe la derivada de Radon-Nikodym de μ con respecto a ν y encontrarla.

⁎

EJERCICIO 3) **(3 puntos)** Sean X un conjunto, $\mathcal{A}$ una σ-álgebra sobre X, y $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida finita signada real. Recordemos que un conjunto $D \in \mathcal{A}$ es positivo (resp. negativo) si $\mu(B) \geq 0$ (resp. $\mu(B) \leq 0$) para todo $B \subseteq D$, $B \in \mathcal{A}$. Denotamos por $\mathcal{P}$ (resp. por $\mathcal{N}$) la familia de todos los conjuntos positivos (resp. negativos) de $\mathcal{A}$. Se pide:

(1) Demostrar que $\mathcal{N} \neq \emptyset$, y que existe $B \in \mathcal{N}$ tal que $\mu(B) = \inf\{\mu(D) : D \in \mathcal{N}\}$(Si no fuera cierto, decir por qué).

(2) Demostrar que existen $A \in \mathcal{P}$ y $B \in \mathcal{N}$ tales que $A \cup B = X$ y $A \cap B = \emptyset$. (Teorema de descomposición de Hahn).