Dos mujeres y tres hombres suben a un ascensor en la planta baja de un edificio de seis pisos. Averiguar de cuantas maneras se pueden bajar del ascensor, sabiendo que en un mismo piso no pueden bajar personar de distinto sexo.

Solución:

Hay que tener en cuenta dos posibilidades a la hora de contar, y es que las mujeres se pueden bajar en la misma planta o en distintas plantas.

- Si las mujeres se bajan, las dos, en la misma planta tenemos cinco formas diferentes de que se bajen, ya que como se suben en la planta baja, se pueden bajar en cualquiera de las otras cinco plantas. Para cada una de las cinco formas de bajarse las mujeres hay $\binom{3+4-1}{3} = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$ formas de bajarse los hombres, que son las combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 3 en 3.

- Si las mujeres se bajan en pisos distintos se tiene que hay $\binom{5}{2} = 10$ formas diferentes de bajarse, y los hombres tendrán $\binom{3+3-1}{3} = 10$ formas diferentes de bajarse, combinaciones con repetición de 3 elementos tomados de 3 en 3.

Por lo tanto:

$$N = 5 \cdot 20 + 10 \cdot 10 = 200 \Rightarrow \text{El resultado es} \quad N = 200$$

Se colocan al azar n bolas en n urnas. Calcular las probabilidades siguientes:
a) de que las n urnas queden ocupadas
b) de que quede una sola urna vacía

Solución:

a) El número de cosas favorables es n! que son las n formas diferentes de colocar n bolas en n urnas (permutaciones sin repetición de n elementos).

Entonces:

$$P = \frac{n!}{n^n}$$

b) El número de cosas posibles es n^n que es el número de variaciones con repetición de n elementos tomados de n en n.

El número de cosas favorables viene dado por:

- Primero elegimos que urnas vamos a dejar vacía entre las n que hay y esto es $\binom{n}{1} = n$.

- Segundo elegimos que urna va a tener dos bolas, porque las demás van a tener una, y esto es $\binom{n-1}{1} = n-1$.

• Tercero elegimos que dos bolas de las n que hay vamos a situar en la urna que tendrá dos bolas, esto es, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

• Y por último situemos las (n – 2) bolas restantes en las (n – 2) urnas restantes $\Rightarrow$ (n – 2)!

Entonces las cosas favorables son: $n(n-1)\frac{n(n-1)}{2}(n-2)!$

Entonces la probabilidad es:

$$P = \frac{n(n-1)\frac{n(n-1)}{2}(n-2)!}{n^n} = \frac{(n-1)^2(n-2)!}{2 \cdot n^{n-2}}$$

a) $P = \frac{n!}{n^n}$

b) $P = \frac{(n-1)^2(n-2)!}{2n^{n-2}}$

En un armario hay n pares de zapatos distintos, es decir, cada par es diferente de los restantes pares. Se toman r zapatos al azar. Se pide la probabilidad de que entre los zapatos elegidos aparezcan exactamente h pares.

El número de casos posibles es $\binom{2n}{r}$ que son el número de combinaciones de 2n elementos tomados de r en r.

El número de casos favorables viene dado por:

- Primero elegimos h pares entre los n que hay, esto es: $\binom{n}{h}$
- En segundo lugar debemos elegir entre los (n – h) pares que quedan los r – 2h de los cuales vamos a sacar un zapato de cada uno, esto es: $\binom{n-h}{r-2h}$
- Y por último, hay $\binom{2}{1}$ formas de elegir un zapato de las dos que hay en cada par, de manera que nunca elijamos un par completo.

Entonces hay n = $\binom{n}{n}\binom{n-h}{r-2h}2$ casos favorables.

Entonces la probabilidad viene dada por:

$$P = \frac{\binom{n}{n}\binom{n-h}{r-2h}2}{\binom{2n}{r}}$$

k

48. a) ¿De cuántas maneras se pueden repartir n bolas idénticas en urnas de manera que r urnas prefijadas estén vacías?

b) ¿De cuántas maneras distintas se pueden repartir n bolas idénticas en k urnas de manera que una urna prefijada contenga r bolas ($r \leq n$)?

Resoluciòn:

a) Habrá tantas configuraciones como maneras distintas de repartir todas las bolas en k-r urnas. Por lo tanto habrá

$$\binom{n+k-r-1}{k-r-1}$$

b) Para construir estas configuraciones tomamos r bolas y las colocamos en la urna prefijada. Luego, las restantes n-r bolas se repartirán, de todas las maneras posibles, entre las n-1 urnas que quedan. Por lo tanto, habrá

$$\binom{n+k-r-2}{k-2}$$

210. Se considera el experimento aleatorio consistente en tirar tres dados al aire y anotar los puntos de las caras superiores.

a) **¿Cuantos elementos tiene el espacio de sucesos?**
b) **Calcular la probabilidad de sacar al menos dos 5.**
c) **Calcular la probabilidad de sacar dos 2 y un 3.**

a) Como cada dado tiene seis posibilidades tenemos que

nº de Elementos = 6
nº de Repeticiones = 3

$$\Omega = VR_n^m = 6^3 = 216$$

b) Sea A el suceso de que salgan al menos dos 5.

Casos Totales = 216

Casos Favorables = $1+\binom{3}{2}\cdot 5$

$$P(A) = \frac{1+\binom{3}{2}\cdot 5}{216} = \frac{1+15}{216} = \frac{2}{27}$$

c) Sea B el suceso correspondiente a que salgan dos 2 y un 3.

Casos Totales = 216

Casos Favorables = $\binom{3}{2}\cdot 1$

$$P(B) = \frac{\binom{3}{2}\cdot 1}{216} = \frac{3}{216} = \frac{1}{72}$$

212. En una bolsa hay 4 bolas negras y 5 blancas. En otra bolsa hay dos negras y 3 blancas. Se elige al azar una bolsa y se extrae de ella una bola.

a) **Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea negra.**
b) **Hallar la probabilidad de que la bola extraída sea blanca.**

a) $P(N) = P(N \cap \Omega) = P(N \cap (Bolsa1 \cup Bolsa2)) = P((N \cap Bolsa1) \cup (N \cap Bolsa2)) =$

$= P(N \cap Bolsa1) + P(N \cap Bolsa2) = P(Bolsa1) \cdot P(N|Bolsa1) + P(Bolsa2) \cdot P(N|Bolsa2) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{9} + \frac{1}{5} = \frac{19}{45}$$

b) $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap (Bolsa1 \cup Bolsa2)) = P((B \cap Bolsa1) \cup (B \cap Bolsa2)) =$

$= P(B \cap Bolsa1) + P(B \cap Bolsa2) = P(Bolsa1) \cdot P(B|Bolsa1) + P(Bolsa2) \cdot P(B|Bolsa2) =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5}{18} + \frac{3}{10} = \frac{26}{45}$$

217. Distribuimos al azar n bolas blancas y n bolas negras en n urnas.

a) **Hallar la probabilidad de que una urna especificada contenga i bolas blancas y j bolas negras.**
b) **Calcular la probabilidad de que en cada urna haya 1 bola de cada color.**

a) Sea A el siguiente suceso

A = {Una urna contenga i bolas blancas y j bolas negras}

Para calcular la probabilidad P(A) tenemos que:

Casos Totales: $VR_n^{2n} = n^{2n}$

Casos Favorables: Se obtiene como producto de

- Las i bolas blancas C_n^i
- Las j bolas negras C_n^j
- Repartimos el resto de bolas en el resto de urnas VR_{n-1}^{2n-i-j}

$$P(A) = \frac{C_n^i \cdot C_n^j \cdot VR_{n-1}^{2n-i-j}}{VR_n^{2n}} = \frac{\binom{n}{i} \cdot \binom{n}{j} \cdot (n-1)^{2n-i-j}}{n^{2n}}$$

b) Sea B el suceso

B = {Cada urna tiene una bola de cada color}

Casos Totales: $VR_n^{2n} = n^{2n}$

Casos Favorables: Se obtiene como producto de:

- Las n bolas blancas en las n urnas P_n
- Las n bolas negras en las n urnas P_n

$$P(B) = \frac{P_n^2}{n^{2n}} = \frac{n!\cdot n!}{n^{2n}}$$