Cuestión 1. (1 punto) Exponer la relación entre la convergencia en distribución de una sucesión F_n de funciones de distribución hacia una distribución F y la convergencia de las correspondientes funciones características ψ_n.

Cuestión 2. (1 punto) Para una sucesión $\{X_j\}$ de variables aleatorias independientes con varianzas finitas σ_j^2, enunciar la afirmación de la Ley débil y fuerte de los grandes números e indicar condiciones suficientes para que se verifique cada una de ellas.

Ejercicio 1. (4 puntos) Un negocio de alquiler de coches quiere determinar el número óptimo de coches que, diariamente, debe tener a disposición del público. Cada cliente que alquila un coche produce un beneficio de 50 euros. Cada coche que no es alquilado tiene, en razón de su estacionamiento, un coste de 30 euros. Se estima que un cliente que acude al negocio y no puede alquilar un coche (porque ya lo están todos) produce un coste de 20 euros. El número de personas que acuden, a lo largo de un día, a este negocio viene dado por la variable aleatoria X, que toma valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

(a) Expresar el beneficio diario esperado en función de X y de k, donde k denota el número de coches puestos a disposición del público.

(b) Demostrar que el valor k^* que maximiza el beneficio esperado es el percentil 70 de la distribución F de X, es decir, k^* verifica

$$F(k^*) \geq 0{,}7 \geq F(k^* - 1).$$

Ejercicio 2. (4 puntos) Se elige un punto P al azar en el interior de una circunferencia de centro O y radio 1.

(a) Mediante un giro alrededor de O, el punto P puede situarse sobre un radio fijo del círculo, a distancia X del centro. Hallar la distribución de X.

(b) Si se traza por P una cuerda cuya dirección se elige al azar, determinar la distribución de la longitud de la cuerda.

Cuestión 1. (1 punto) Exponer la relación entre la convergencia en distribución de una sucesión F_n de funciones de distribución hacia una distribución F y la convergencia de las correspondientes funciones características ψ_n.

Cuestión 2. (1 punto) Para una sucesión $\{X_j\}$ de variables aleatorias independientes con varianzas finitas σ_j^2, enunciar la afirmación de la Ley débil y fuerte de los grandes números e indicar condiciones suficientes para que se verifique cada una de ellas.

Ejercicio 1. (4 puntos) Un negocio de alquiler de coches quiere determinar el número óptimo de coches que, diariamente, debe tener a disposición del público. Cada cliente que alquila un coche produce un beneficio de 50 euros. Cada coche que no es alquilado tiene, en razón de su estacionamiento, un coste de 30 euros. Se estima que un cliente que acude al negocio y no puede alquilar un coche (porque ya lo están todos) produce un coste de 20 euros. El número de personas que acuden, a lo largo de un día, a este negocio viene dado por la variable aleatoria X, que toma valores en $\{0, 1, 2, \ldots\}$.

(a) Expresar el beneficio diario esperado en función de X y de k, donde k denota el número de coches puestos a disposición del público.

(b) Demostrar que el valor k^* que maximiza el beneficio esperado es el percentil 70 de la distribución F de X, es decir, k^* verifica

$$F(k^*) \geq 0{,}7 \geq F(k^* - 1).$$

Ejercicio 2. (4 puntos) Se elige un punto P al azar en el interior de una circunferencia de centro O y radio 1.

(a) Mediante un giro alrededor de O, el punto P puede situarse sobre un radio fijo del círculo, a distancia X del centro. Hallar la distribución de X.

(b) Si se traza por P una cuerda cuya dirección se elige al azar, determinar la distribución de la longitud de la cuerda.

Ejercicio 1. Por un punto elegido al azar sobre una circunferencia de radio r, se traza una recta que forma, con el diámetro que pasa por dicho punto, un ángulo α cuya distribución es uniforme en $(-\pi/2, \pi/2]$.

a) Determinar la distribución de la longitud del segmento de la recta interior a la circunferencia.

b) Calcular su media y su varianza.

Ejercicio 2. Sea (X, Y) una variable bidimensional con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} 4xy & \text{si } 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ \\ 6x^2 & \text{si } 0 \leq x < y \leq 1 \end{cases}$$

a) Determinar las distribuciones marginales de X y Y.

b) Hallar la curva de regresión de Y sobre X.

c) Si $A = \{X \leq 1/2\}$ y $B = \{Y \leq 1/2\}$, calcular $P(A \cup B)$.

Cuestión (2 pts.) Definir la convergencia en media de orden p y en probabilidad para sucesiones de variables aleatorias. Probar que la convergencia en media de orden p implica la convergencia en probabilidad.

Ejercicio (8 pts.) Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Se define

$$Y_n = \begin{cases} 1/X_n & \text{si } \frac{1}{n+1} < X_n < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $n \geq 1$, y sea $Y = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$.

(a) Determinar la media y la varianza de Y_n.

(b) Probar que Y es finita casi seguramente (se puede utilizar el lema de Borel-Cantelli) y que $E[Y] = \infty$.

Definimos ahora

$$Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \frac{1}{n+1} < X_n < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

para cada $n \geq 1$, y $Z = \sum_{n=1}^{\infty} Z_n$.

(c) Probar que $E[Z] = 1$ y demostrar que la varianza de Z es igual a $4 - \dfrac{\pi^2}{3}$. (Se sugiere utilizar la igualdad $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 = \pi^2/6$.)

(d) Probar que

$$P\{Z = 0\} \;=\; -\frac{\operatorname{sen}\left(\pi(1+\sqrt{5})/2\right)}{\pi} \approx 0{,}297.$$

Para ello, utilizar la siguiente expresión para la función Gamma:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)},$$

y la identidad

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi z)}.$$

Cuestión (2 puntos). Definir la función característica de una variable aleatoria. Relacionar la convergencia en distribución de $\{X_n\}$ a X con la de sus funciones características.

Ejercicio 1. (6 puntos). Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de densidad

$$f(x, y) = 1/2, \quad \text{si } |x| + |y| \leq 1.$$

Fijados dos números reales a y b, se considera la siguiente transformación del vector aleatorio (X, Y):

$$(U, V) = (X + aY, bX + Y).$$

a) Determinar la matriz de varianzas-covarianzas de (X, Y) y comprobar que X e Y son incorreladas pero no independientes.

b) Determinar los valores de a y b para los cuales las variables U y V son incorreladas.

c) Comprobar que tomando $a = 1$ y $b = -1$, las variables U y V son independientes. Determinar todos los valores de (a, b) para los cuales U y V son independientes.

Ejercicio 2. (4 puntos). Sea $\{X_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0, a_n)$, para $n \geq 1$, donde $a_n > 0$ y $\lim a_n = +\infty$.

a) Demostrar que $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ converge en probabilidad a cero si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = +\infty.$$

Se sugiere utilizar la desigualdad $e^{-2x} \leq 1 - x \leq e^{-x}$ para $0 \leq x \leq 1/2$.

b) En caso de que $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ converja en probabilidad a cero, estudiar si la convergencia es también casi segura.

La puntuación máxima es de 10 puntos.

Cuestión (2 puntos). Si $(\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2)$ son variables aleatorias, r y k dimensionales respectivamente, cuya distribución conjunta es normal $\mathcal{N}_{r+k}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, especificar las distribuciones marginales de $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$. Indicar cuál es la condición necesaria y suficiente para que $\boldsymbol{X}_1$ y $\boldsymbol{X}_2$ sean independientes.

Ejercicio 1 (4 puntos).
La base X y la altura Y de un rectángulo se escogen aleatoriamente, con las restricciones de que la altura supere al cuadrado de la base y el área del rectángulo sea inferior a 1, y con densidad conjunta proporcional a x.

a) Obtener la curva de regresión de X sobre Y. Estudiar si existe la recta de regresión de X sobre Y.

b) Determinar la densidad conjunta de la base y el área del rectángulo. Hallar la recta de regresión del área sobre la base.

Ejercicio 2 (6 puntos). Se realiza una sucesión de lanzamientos de un dado anotando

$$x_k = \begin{cases} 0 & \text{si en el lanzamiento } k\text{-ésimo se obtiene 1, 2, 3 ó 4} \\ 1 & \text{si en el lanzamiento } k\text{-ésimo se obtiene 5 ó 6} \end{cases}$$

Sea X es el número de $[0,1]$ cuyo desarrollo en base 2 es: $0'x_1x_2x_3\ldots x_k\ldots$, de forma que $X = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$.

a) Calcular $P\{3/8 < X < 5/8\}$.

b) Hallar la media y la varianza de X.

c) Para cada $x \in [0,1]$, se considera $a_n(x) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$, siendo $(x_k)_{k\geq 1}$ el desarrollo decimal en base 2 de x, y se define

$$A = \{x \in [0,1] \mid a_n(x) \text{ converge a } 1/3 \text{ cuando } n \to \infty\}.$$

Probar que $P\{X \in A\} = 1$. Admitiendo que A es un conjunto de longitud cero, concluir entonces que la distribución de X no es discreta ni absolutamente continua.

Nota máxima: 10 puntos.