Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Primera Prueba de Evaluación Continua 2016

Soluciones

Ejercicio 1: (a) Determine la forma canónica de Jordan J del endomorfismo f de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cuya matriz respecto de cierta base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Determine la base $\mathcal{B}'$ tal que $M_{\mathcal{B}'}(f) = J$.

Solución: Este ejercicio es totalmente análogo al ejercicio 5.15, pág. 401. El polinomio característico es $p_f(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = (1-\lambda)^4$, de donde deducimos que f tiene un único autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad algebraica $a = 4$. Calculamos los subespacios propios generalizados hasta obtener el subespacio máximo $M(1)$ que será el que tenga dimensión igual a $a = 4$.

$$\operatorname{rg}(A - I) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \;\Rightarrow\; \dim K^1(1) = \dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}) = 4 - 2 = 2$$

Unas ecuaciones implícitas de este subespacio son $K^1(1) \equiv \{x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_1 = 0\}$.

La multiplicidad geométrica del autovalor es $g = \dim K^1(1) = 2$. Esto ya nos dice que en la matriz de Jordan habrá dos bloques. Las posibilidades son: dos bloques de dimensión 2 o un bloque de dimensión 3 y otro de dimensión 1. Seguimos con los subespacios generalizados:

$$\operatorname{rg}(A - I)^2 = \operatorname{rg} 0 = 0 \;\Rightarrow\; \dim K^2(1) = \dim \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})^2 = 4 \;\Rightarrow\; K^2(1) = M(2)$$

En particular $K^2(1) = M(2) = V$ el espacio total, que no tiene ecuaciones implícitas.

La tabla de la base de Jordan es

$$\begin{array}{lcl} \overset{2}{K^1(1)} & \subset & \overset{4}{K^2(1)} = M(1) \\ v_2 & \leftarrow & v_1 \\ v_4 & \leftarrow & v_3 \end{array}$$

donde $v_2 = (f - \operatorname{Id})(v_1),\ v_4 = (f - \operatorname{Id})(v_3)$ y $v_1, v_3 \in K^2(1) - K^1(1)$ y forman una base de un suplementario de $K^1(1)$ en $K^2(1)$. Es decir $K^1(1) \oplus L(v_1, v_3) = K^2(1)$.

Como en la base de Jordan hay dos líneas de longitud 2, entonces la forma canónica de Jordan está formada por dos bloques de orden 2

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Para construir $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ determinamos primero una base del subespacio propio $V_1 = K^1(1)$:

$$K^1(1) = L((0,1,1,0)_{\mathcal{B}},\ (0,0,0,1)_{\mathcal{B}})$$

y ampliamos esta base hasta obtener una de $K^2(1)$ con los vectores v_1 y v_3:

$$K^2(1) = K^1(1) \oplus L(v_1 = (1,0,0,0)_{\mathcal{B}},\ v_3 = (0,0,1,0)_{\mathcal{B}})$$

y se calculan:

$$v_2 = (f - \mathrm{Id})(v_1) = (0,1,1,1)_{\mathcal{B}}, \quad v_4 = (f - \mathrm{Id})(v_3) = (0,-1,-1,1)_{\mathcal{B}}, \quad v_2,\, v_4 \in K^1(1)$$

Las coordenadas de estos vectores forman las columnas de la matriz de cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$

$$P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para comprobar que la base está correctamente calculada basta verificar que se cumple $J = P^{-1}AP$, o lo que es lo mismo $PJ = AP$.

Observación: si tomamos los vectores v_1 y v_3 con la única condición de ser linealmente independientes y pertenecer a $K^2(1) - K^1(1)$ (sin cumplir la condición necesaria, en azul), entonces podría ocurrir que alguna combinación lineal de ellos fuera un vector de $K^1(1)$, y en tal caso $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ no serían linealmente independientes. Eso es lo que le ha faltado a la mayoría de ejercicios entregados, aunque también en la mayoría no se ha dado la coincidencia de elegirlos con la mala suerte de que algún $av_1 + bv_3 \in K^1(1)$.

Ejercicio 2:
Dé la matriz de un endomorfismo f de $\mathbb{R}^5$ que cumpla $f^4 = 4f^3 - 4f^2$.

Solución: $f^4 = 4f^3 - 4f^2 \ \Rightarrow\ f^4 - 4f^3 + 4f^2 = 0$ de donde se deduce que

$$q(t) = t^4 - 4t^3 + 4t^2 = t^2(t^2 - 4t + 4) = t^2(t-2)^2$$

es un polinomio anulador de f que tiene por raíces 0 (doble) y 2 (doble). Como los autovalores de f son raíces de todo polinomio anulador (proposición 6.20), entonces f puede tener como autovalores 0 y/o 2.

Todo polinomio anulador es múltiplo del polinomio mínimo (pág. 245) $m_f(t)$. En particular $q(t)$ es múltiplo de $m_f(t)$ por lo que éste tendrá por raíces 0 y/o 2, es decir:

$$m_f(t) = t^{l_1}(t-2)^{l_2}, \quad \text{con } 0 \le l_1 \le 2,\ 0 \le l_2 \le 2$$

Eso obliga a que los bloques de Jordan asociados a los autovalores sean como mucho de orden 2. es decir, bloques de orden 1 o 2.

Todos los posibles polinomios característicos son (de grado 5):

$$p_f(t) = (-t)^{a_1}(2-t)^{a_2}, \quad \text{con } a_1 + a_2 = 5,\ 0 \le a_1, a_2 \le 5$$

Dependiendo del polinomio característico y el mínimo se tienen muchas posibilidades. Una forma de proceder que habéis elegido muchos es tomar $q(t)$ como el polinomio mínimo, por lo que el característico será $p_f(t) = -t^3(2-t)^2$ o bien $p_f(t) = t^2(2-t)^3$, con un autovalor triple y el otro doble.

Aunque el ejercicio sólo pedía un endomorfismo, se listan algunos casos como ejemplo:

- Si $p_f(t) = -t^3(2-t)^2$ (0 triple y 2 doble). La forma canónica de Jordan de f será alguna de las siguientes según el polinomio mínimo $m_f(t)$:

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&1&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&1&2 \end{pmatrix}$$

$$m_f(t) = t^2(t-2) \qquad m_f(t) = t^2(t-2)^2 \qquad m_f(t) = t(t-2) \qquad m_f(t) = t(t-2)^2$$

- Si $p_f(t) = t^2(2-t)^3$ (0 doble, 2 triple) las posibles matrices de Jordan de f se tienen intercambiando los papeles de los autovalores en los casos anteriores:

$$J_5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&1&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

$$m_f(t) = t^2(t-2) \qquad m_f(t) = t^2(t-2)^2 \qquad m_f(t) = t(t-2) \qquad m_f(t) = t(t-2)^2$$

- Si $p_f(t) = (2-t)^5$ (0 no es autovalor) las posibles matrices de Jordan de f son

$$\begin{pmatrix} 2&0&0&0&0\\ 0&2&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0\\ 0&0&2&0&0\\ 0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&2 \end{pmatrix}$$

$$m_f(t) = (t-2) \qquad m_f(t) = (t-2)^2$$

- Si $p_f(t) = (-t)^5$ (2 no es autovalor) las posibles matrices de Jordan de f son

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

$$m_f(t) = t \qquad m_f(t) = t^2$$

Habría muchos más casos posibles combinando los autovalores 0 y 2 con las distintas multiplicidades posibles, y con todos lo bloques de Jordan de tamaño 1 o 2.

Ejercicio 3:
Determine si puede existir un endomorfismo de $\mathbb{C}^4$ que tenga exactamente 1 recta invariantes y 2 planos invariantes.

Solución: Por ser el endomorfismo en un espacio vectorial complejo tendrá exactamente 4 autovalores, no necesariamente distintos, y admitirá una forma canónica de Jordan (Teorema de existencia 5.31).

Puesto que las rectas son todas las contenidas en los subespacios propios, entonces necesariamente habrá un único autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ de multiplicidad algebraica $a = 4$, y V_λ será la única recta invariante. Por lo tanto, la multiplicidad geométrica será $d = \dim V_\lambda = 1$ y la matriz de Jordan del endomorfismo tendrá un único bloque de Jordan:

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{ccccccc} & \overset{1}{K^1} & \subset & \overset{2}{K^2} & \subset & \overset{3}{K^3} & \subset & \overset{4}{K^4} = M(\lambda) \\ & v_4 & \leftarrow & v_3 & \leftarrow & v_2 & \leftarrow & v_1 \end{array}$$

y tendrá un único plano invariante $L(v_3, v_4)$, el subespacio 2-cíclico (pág. 234-235):

$$L(v_3,\, v_4 = (f - \lambda\,\mathrm{Id})(v_3)), \quad v_3 \in K^2(\lambda) - K^1(\lambda).$$

Se concluye que no puede existir un endomorfismo en las condiciones pedidas.