Introducción a los espacios de Hilbert

Resolución de los ejercicios recomendados. Capítulo 2

Ejercicio 2

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\|\|y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, se deduce que

$$\sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| \leqslant \|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathcal{H}\,.$$

La desigualdad inversa se cumple pues si $x \neq 0$ se tiene que $\|x\| = \left\langle x, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle \leqslant \sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle|$ mientras que para $x = 0$ obviamente $\sup_{\|y\|=1} |\langle x,y\rangle| = \|x\| = 0$.

Ejercicio 3

$$\begin{aligned} \|z-x\|^2 + \|z-y\|^2 &= \|z\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle z,x\rangle + |z\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle z,y\rangle \\ &= 2|z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle z, x+y\rangle \end{aligned}$$

Desarrollamos el otro miembro y se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|x-y\|^2 + 2\left\|z - \frac{x+y}{2}\right\|^2 \\ = \; & \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + 2\|z\|^2 + \frac{1}{2}\|x+y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle z,x+y\rangle \\ = \; & \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \mathrm{Re}\langle x,y\rangle + 2\|z\|^2 + \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 - \mathrm{Re}\langle x,y\rangle - 2\mathrm{Re}\langle z,x+y\rangle \\ = \; & 2|z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle z,x+y\rangle \end{aligned}$$

de donde se deduce la identidad de Apolonio.

Ejercicio 5

a) Basta tener en cuenta que

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle - \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle = 4\langle x,y\rangle$$

b) Para $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se obtiene

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle - \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x,y\rangle = 4\mathrm{Re}\langle x,y\rangle$$

y en consecuencia,

$$\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2 = 4\mathrm{Re}\langle x,iy\rangle = 4\mathrm{Im}\langle x,y\rangle\,.$$

Por tanto,

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 = 4\mathrm{Re}\langle x,y\rangle + 4i\mathrm{Im}\langle x,y\rangle = 4\langle x,y\rangle\,.$$

Ejercicio 6

i) Se cumple $\langle x,x\rangle = \frac{1}{4}\|2x\|^2 = \|x\|^2 \geqslant 0$ y si $\langle x,x\rangle = 0$ entonces $x = 0$.

ii) $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ pues $\|x-y\| = \|y-x\|$.

iii) Veamos primero que $\langle x+x',y\rangle = 2\langle x,y/2\rangle + 2\langle x',y/2\rangle$. En efecto:

$$\begin{aligned} 2\langle x,y/2\rangle + 2\langle x',y/2\rangle &= \frac{1}{4}\big[2\|x+y/2\|^2 - 2\|x-y/2\|^2\big] + \frac{1}{4}\big[2\|x'+y/2\|^2 - 2\|x'-y/2\|^2\big] \\ &= \frac{1}{4}\big[(2\|x+y/2\|^2 + 2\|x'+y/2\|^2) - (2\|x-y/2\|^2 + 2\|x'-y/2\|^2\big] \end{aligned}$$

y por la identidad del paralelogramo

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\big[(\|x+x'+y\|^2 + \|x-x'\|^2) - (\|x+x'-y\|^2 + \|x-x'\|^2\big] \\
&= \frac{1}{4}\big[\|x+x'+y\|^2 - \|x+x'-y\|^2\big] \\
&= \langle x+x', y\rangle
\end{aligned}
$$

Si en la identidad anterior tomamos $x'=0$ se obtiene que $2\langle x, y/2\rangle + 2\langle 0, y/2\rangle = \langle x,y\rangle$ y teniendo en cuenta que $\langle 0,u\rangle = \frac{1}{4}\big[\|u\|^2 - \|-u\|^2\big] = 0$ para todo $u\in\mathcal{H}$, resulta finalmente que $2\langle x, y/2\rangle = \langle x,y\rangle$ para todo $x,y\in\mathcal{H}$. En consecuencia,

$$\langle x+x', y\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x',y\rangle$$

para todo $x,x',y\in\mathcal{H}$.

iv) Para todo $n\in\mathbb{N}$ se tiene $\langle nx,y\rangle = n\langle x,y\rangle$. Se demuestra por inducción. La igualdad es cierta para $n=1$ y supuesto cierta para n entonces

$$\langle (n+1)x, y\rangle = \langle nx+x, y\rangle = \langle nx,y\rangle + \langle x,y\rangle = n\langle x,y\rangle + \langle x,y\rangle = (n+1)\langle x,y\rangle\,.$$

La igualdad $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ es cierta si $\alpha\in\mathbb{Z}$ pues $\langle -nx,y\rangle + \langle nx,y\rangle = \langle 0,y\rangle = 0$ y en consecuencia $\langle -nx,y\rangle = -\langle nx,y\rangle = -n\langle x,y\rangle$ para todo $n\in\mathbb{N}$.
La igualdad $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ es cierta si $\alpha\in\mathbb{Q}$ pues $\langle x,y\rangle = \langle n(\frac{1}{n}x), y\rangle = n\langle \frac{1}{n}x, y\rangle$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$ y así pues $\langle \frac{1}{n}x,y\rangle = \frac{1}{n}\langle x,y\rangle$ para todo $n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$. Por tanto , $\langle \frac{m}{n}x,y\rangle = \frac{m}{n}\langle x,y\rangle$ para todo $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$.
La igualdad $\langle \alpha x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ es cierta si $\alpha\in\mathbb{R}$ pues fijados x e $y\in\mathcal{H}$, la aplicación $g=g_{xy}$ de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tal que $g(\alpha) = \langle \alpha x,y\rangle$ es continua. Se toma una sucesión $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathbb{Q}$ que converge a α y se obtiene

$$\langle \alpha x,y\rangle = g(\alpha) = g(\lim_n \alpha_n) = \lim_n g(\alpha_n) = \lim_n \langle \alpha_n x,y\rangle = \lim_n \alpha_n\langle x,y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle\,.$$

Ejercicio 7

Como $x_n, y_n\in\overline{B}(0;1)$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|x_n-y_n\|^2 &= \langle x_n-y_n, x_n-y_n\rangle = \|x_n\|^2 + \|y_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x_n,y_n\rangle \\
&\leqslant 2 - 2\mathrm{Re}\langle x_n,y_n\rangle
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si $\lim_n\langle x_n,y_n\rangle = 1$ entonces $\lim_n \mathrm{Re}\langle x_n,y_n\rangle = 1$ (y aunque no lo utilicemos $\lim_n \mathrm{Im}\langle x_n,y_n\rangle = 0$). En consecuencia $\lim_n \|x_n-y_n\|^2 \leqslant 0$. Por tanto, la sucesión $\{\|x_n-y_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ converge a 0.

Ejercicio 8

Como $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle f,g\rangle$, bastará tomar f y g tales que $\mathrm{Re}\langle f,g\rangle = 0$ y sin embargo $\mathrm{Im}\langle f,g\rangle\neq 0$. Por ejemplo las funciones $f(x)=\cos x$, $g(x) = i\,\mathrm{sen}\,x$ de $L^2[0,1]$ son tales que $\langle f,g\rangle = i\frac{\mathrm{sen}^2 1}{2}\neq 0$ y sin embargo $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 = 1$.
Nota: Si el espacio considerado es real entonces la igualdad $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$ es cierta si y sólo si $\langle f,g\rangle = 0$.

Ejercicio 10

a) La expresión $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f'(t)\overline{g'(t)}dt$ no define un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^1[-1,1]$ de las funciones complejas de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $[-1,1]$. Cualquier función constante, $f\equiv k$, cumple que $\langle f,f\rangle = \int_{-1}^{1} f'(t)\overline{f'(t)}dt = 0$, pudiendo ser $k\neq 0$.

b) La expresión $\langle f,g\rangle = f(0)g(0)$ tampoco define un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^1[-1,1]$. Por ejemplo la función $f(x)=x$ cumple que $\langle f,f\rangle = f(0)f(0) = 0$ siendo $f\neq 0$.

c) La expresión $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$ define un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^1[-1,1]$. En efecto:
1. $\langle f,f\rangle = |f(0)|^2 + \int_{-1}^{1}|f(t)|^2dt \geqslant 0$ y si $\langle f,f\rangle = 0$ entonces $f\equiv 0$.
2. $\langle f,g\rangle = f(0)\overline{g(0)} + \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt = \overline{g(0)\overline{f(0)} + \int_{-1}^{1} g(t)\overline{f(t)}dt} = \overline{\langle g,f\rangle}$.
3. $\langle \alpha f+\beta h, g\rangle = (\alpha f(0) + \beta h(0))\overline{g(0)} + \int_{-1}^{1}(\alpha f(t)+\beta h(t))\overline{g(t)}dt$

$= \alpha\big(f(0)\overline{g(0)} + \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt\big) + \beta\big(h(0)\overline{g(0)} + \int_{-1}^{1} h(t)\overline{g(t)}dt\big)$
$= \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle h, g\rangle.$

d) La expresión $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt + \int_{-1}^{1} f'(t)\overline{g'(t)}dt$ también define un producto interno en el espacio $\mathcal{C}^1[-1,1]$. En efecto:
1. $\langle f, f\rangle = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 dt + \int_{-1}^{1} |f'(t)|^2 dt \geqslant 0$ y si $\langle f, f\rangle = 0$ entonces $f \equiv 0$.
2. $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt + \int_{-1}^{1} f'(t)\overline{g'(t)}dt = \overline{+\int_{-1}^{1} g(t)\overline{f(t)}dt + \int_{-1}^{1} g'(t)\overline{f'(t)}dt} = \overline{\langle g, f\rangle}$.
3. $\langle \alpha f + \beta h, g\rangle = \int_{-1}^{1}(\alpha f(t) + \beta h(t))\overline{g(t)}dt + \int_{-1}^{1}(\alpha f'(t) + \beta h'(t))\overline{g'(t)}dt$
$= \alpha\big(\int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt + \int_{-1}^{1} f'(t)\overline{g'(t)}dt\big) + \beta\big(\int_{-1}^{1} h(t)\overline{g(t)}dt + \int_{-1}^{1} h'(t)\overline{g'(t)}dt\big)$
$= \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle h, g\rangle.$

Ejercicio 11

a) Sean $A, B \subset \mathcal{H}$ tales que $A \subset B$. Si $x \in B^\perp$ entonces $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in B$. En particular, $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in A$. Por tanto, $x \in A^\perp$ y en consecuencia, $A^\perp \supset B^\perp$.
b) De la linealidad en la primera variable se deduce que $A^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{H}$. La continuidad del producto interno permite deducir que si la sucesión $(x_n)_n \subset A^\perp$ converge a x en $\mathcal{H}$ entonces para todo $y \in A$ se tiene que

$$\langle x, y\rangle = \langle \lim_n x_n, y\rangle = \lim_n \langle x_n, y\rangle = 0\,,$$

y consecuentemente $x \in A^\perp$. Por tanto $A^\perp$ es un conjunto cerrado.

Ejercicio 13

F es subespacio vectorial de ℓ^2 pues si $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \in F$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces $\alpha x + \beta y \in F$ pues si n es par, el término n-ésimo de $\alpha x + \beta y \in F$ es $\alpha x_n + \beta y_n = 0$. Para ver que F es cerrado basta observar que si $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión en F que converge en ℓ^2 a x, siendo para cada n $x^{(n)} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}, \ldots\}$ y $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, entonces fijado el subíndice k, la sucesión de números complejos $\{x_k^{(1)}, x_k^{(2)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots\}$ satisface que $|x_k - x_k^{(n)}| \leqslant \|x - x^{(n)}\|_2$ y en consecuencia si k es par $x_k = \lim_n x_k^{(n)} = 0$.
Veamos que $F^\perp = \big\{\{x_n\} \in \ell^2 \colon x_n = 0 \text{ si } n \text{ impar }\big\}$. En efecto si $x = \{x_n\} \in \ell^2$ es tal que $x_n = 0$ si n impar e $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \in F$ entonces $x_n\overline{y_n} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $x \in F^\perp$. Inversamente si $x \in F^\perp$, $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in F$. En particular, si n impar, como $\mathbf{e}_n = \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^\infty \in F$, se cumple que $0 = \langle x, \mathbf{e}_n\rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k \delta_{n,k} = x_n$.

Ejercicio 14

F es subespacio vectorial de ℓ^2 pues si $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \in F$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces $\alpha x + \beta y \in F$ ya que para todo N $\sum_{n=1}^N (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^N x_n + \beta \sum_{n=1}^N y_n \to 0$ si $N \to \infty$.
Veamos que F no es cerrado. Consideramos la sucesión $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset F$

$$x^{(n)} = \{-1, \overbrace{\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}}^{n \text{ términos}}, 0, \ldots\}$$

que converge a $x = \{-1, 0, \ldots, 0, \ldots\}$ pues $\|x - x^{(n)}\|_2^2 = n\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ y sin embargo $x \notin F$.
Veamos que $F^\perp = \{0\}$. En efecto si $x = \{x_n\}_{n=1}^\infty \in \ell^2$ pertenece a $F^\perp$, resulta que $x \perp y$ para todo $y \in F$. En particular $x \perp \mathbf{v}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ siendo $\mathbf{v}_n := \{1, 0, \ldots, 0, \overbrace{-1}^{\text{término } n+1}, 0 \ldots\}$. En consecuencia, $\langle x, \mathbf{v}_n\rangle = x_1 - x_{n+1} = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero si $x_1 \neq 0$ entonces $x \notin \ell^2$ Por tanto $F^\perp = \{0\}$ y

$$F \oplus F^\perp \neq \ell^2\,.$$

Ejercicio 17

F es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}[-1,1]$ pues si $f, g \in F$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces $\alpha f + \beta g \in F$ pues para todo $t \in [-1, 0]$, $(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha f(t) + \beta g(t) = 0$.
Veamos que $F^\perp = \big\{g \in \mathcal{C}[-1,1] \colon g(t) = 0 \text{ para todo } t \in [0,1]\big\}$. En efecto si $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ es tal que $g(t) =$

0 para todo $t \in [0,1]$ entonces $\langle g, f\rangle = 0$ para todo $f \in F$ pues $g(t)\overline{f(t)} = 0$ para todo $t \in [-1,1]$ y en consecuencia $\int_{-1}^{1} g(t)\overline{f(t)}dt = 0$. Inversamente si $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ es tal que no es cierto que $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, de la continuidad de g se deduce la existencia de un intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ tal que $g(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ o $g(t) < 0$ para todo $t \in [a,b]$. Sea una función f continua en $[-1,1]$ que se anula fuera de $[a,b]$ y tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in (a,b)$. Por ejemplo,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ t-a & \text{si } a \leqslant t \leqslant (a+b)/2 \\ \frac{-t+b}{\varepsilon'} & \text{si } (a+b)/2 \leqslant t < b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$

Claramente $f \in F$ y $\int_{-1}^{1} g(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b g(t)f(t)dt \neq 0$ pues $g(t)f(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ o $g(t)f(t) < 0$ para todo $t \in [a,b]$.
La igualdad $\mathcal{C}[-1,1] = F \oplus F^{\perp}$ no es verdadera pues cualquier función de $F \oplus F^{\perp}$ verifica que $f(0) = 0$.

Ejercicio 19

i) $\Rightarrow$ ii) Sea $A \subset \mathcal{H}_1$ y sea $y \in f\big(\overline{A}\big)$. Existe $a \in \overline{A}$ tal que $y = f(a)$. Como $a \in \overline{A}$ existe una sucesión $\{a_n\}_n \subset A$ tal que $\lim_n a_n = a$. Al ser f continua en a, resulta que $y = f(a) = f(\lim_n a_n) = \lim_n f(a_n)$. En consecuencia $y = f(a) \in \overline{f(A)}$ y por tanto $f\big(\overline{A}\big) \subset \overline{f(A)}$.
ii) $\Rightarrow$ iii) En este apartado utilizaremos que para todo $A \subset \mathcal{H}_1$ y para todo $B \subset \mathcal{H}_2$ y para cualquier función $f\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ se cumple que

$$A \subset f^{-1}\big(f(A)\big) \quad \text{y} \quad B \subset f\big(f^{-1}(B)\big)\,.$$

Sea $C \subset \mathcal{H}_2$ un conjunto cerrado y sea $A = f^{-1}(C)$. Por ii) se tiene

$$f\big(\overline{f^{-1}(C)}\big) \subset \overline{f(f^{-1}(C))} \subset \overline{C} = C\,.$$

En consecuencia

$$\overline{f^{-1}(C)} \subset f^{-1}\Big(f\big(\overline{f^{-1}(C)}\big)\Big) \subset f^{-1}(C)\,,$$

y por tanto $\overline{f^{-1}(C)} = f^{-1}(C)$ y resulta que $f^{-1}(C)$ es cerrado.
iii) $\Rightarrow$ i) Sabiendo que $\mathcal{H}_1 \backslash f^{-1}(B) = f^{-1}(\mathcal{H}_2 \backslash B)$ para todo $B \subset \mathcal{H}_2$ de iii) se deduce inmediatamente que la imagen inversa de un abierto de $\mathcal{H}_2$ es un abierto de $\mathcal{H}_1$. Sea $a \in \mathcal{H}_1$ y $\varepsilon > 0$ y consideramos en $\mathcal{H}_2$ la bola abierta $B(f(a);\varepsilon)$ resulta que $a \in f^{-1}\big(B(f(a);\varepsilon)\big)$ y $f^{-1}\big(B(f(a);\varepsilon)\big)$ es un conjunto abierto en $\mathcal{H}_1$. Consecuentemente, existe $\delta > 0$ tal que $a \in B(a;\delta) \subset f^{-1}\big(B(f(a);\varepsilon)\big)$ y se obtiene que f es continua en a.

Ejercicio 22

De $\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle$ y de las hipótesis se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_n \|x_n - x\|^2 &= \lim_n \|x_n\|^2 + \|x\|^2 - 2\lim_n \mathrm{Re}\langle x_n, x\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|x\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x, x\rangle = 0 \end{aligned}$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ en $\mathcal{H}$.