1. INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE HILBERT:

1.1. Espacios Vectoriales. Base y dimensión:

Se dice que el grupo conmutativo (V, +) es un espacio vectorial sobre el cuerpo (K, +, .), y se puede representar por (V; K), si se verifica que existe una ley de composición externa, . , definida desde

$$KxV \rightarrow V$$

esto es, tal que

$$\forall \alpha \in K, \forall x \in V \rightarrow \alpha . x \in V$$

cumpliendo las condiciones:

a) **Distributividad mixta del producto de elementos de K por suma de elementos de V:**

$$\forall \alpha \in K, \forall x, y \in VxV, \qquad \alpha.(x+y) = \alpha.x + \alpha.y$$

b) **Distributividad mixta del producto de elementos de V por suma de elementos de K:**

$$\forall \alpha, \beta \in KxK, \forall x \in V, \qquad (\alpha. + \beta).x = \alpha.x + \beta.x$$

c) **Asociatividad mixta de elementos de K por elemento de V:**

$$\forall \alpha, \beta \in KxK, \forall x \in V, \qquad (\alpha.\beta).x = \alpha.(\beta.x)$$

d) **Existencia de elemento uno del cuerpo K:**

$$\exists 1 \in K / \forall x \in V, 1.x = x$$

Se llaman *escalares* a los elementos del cuerpo, y *vectores* a los elementos del grupo conmutativo.

Se definen los conjuntos de vectores es *linealmente independientes:*

$$x_1, x_2, ... x_n \in V^n, linealmente\_independientes \Leftrightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0 \Rightarrow \alpha_1 = ... \alpha_n = 0$$

Se definen los conjuntos de vectores que generan a todo el espacio vectorial:

$$x_1, x_2, ... x_n \in V^n generadores \Leftrightarrow \forall x \in V, \exists a_1, a_{2,} .. a_n \in K / a_1.x_1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_n = x$$

Una *base* es un conjunto de vectores que es linealmente independiente y, también, sistema de generadores del espacio vectorial.

Se prueba que en un espacio vectorial dado todas sus bases tienen el mismo número de vectores, que definen la dimensión del espacio. Cuando el número de vectores de las bases es finito, se dirá que el espacio es de dimensión finita, en caso contrario, se dice que es un espacio de dimensión infinita.

En un espacio de dimensión finita, n, se cumple que el número máximo de vectores linealmente independientes coincide con la dimensión del espacio.

1.2. Métrica. Métrica euclidiana. Métrica euclidiana ordinaria.

Una métrica en un espacio vectorial (V;K) es una distancia o medida, esto es, una correspondencia tal que a cada par de vectores le corresponde una *medida*. La definición de una medida o distancia puede hacerse desde la definición de una operación de VxV en K, esto es, una composición o

producto interior de elementos del espacio que da como resultado un elemento del cuerpo de definición del espacio:

$$\begin{aligned} &\bullet : VxV \to K \\ &\forall x, y \in VxV, x \bullet y \in K \end{aligned}$$

donde se ha llamado $\bullet$ a la operación que define el producto interior y, por tanto, la métrica.

Una métrica se dice *euclidiana*, si el producto interior cumple las siguientes condiciones:

1) **Conmutatividad:**

$$\forall x, y \in V^2, x \bullet y = y \bullet x$$

2) **Distributividad con respecto a la suma vectorial:**

$$\forall x, y, z \in V^3, x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$$

3) **Asociatividad mixta:**

$$\forall x, y \in V^2, a \in K, a.(x \bullet y) = (a.x) \bullet y = x \bullet (a.y)$$

4) **Definición positiva:**

$$\forall x \in V, x \bullet x \geq 0$$

5) **No degeneración:**

$$x \bullet x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Se llama *métrica euclidiana ordinaria* a aquella métrica definida por la condición de ortonormalidad de la base:

Si son los vectores $x = \sum x_i.e_i$ y $y = \sum y_j.e_j$ **, se tiene:**

$$\forall x, y \in V^2, x \bullet y = \left(\sum x_i e_i\right) \bullet \left(\sum y_j e_j\right) = \sum x_i y_j e_i \bullet e_j = x_1.y_1 + x_2.y_2 + \ldots + x_n.y_n + \ldots \equiv \sum x_i.y_i$$

(trivialmente puede comprobarse que verifica las cinco condiciones anteriores para las métricas euclidianas)

En los párrafos que siguen representaremos el producto interior euclidiano por un paréntesis en el que figuran los dos vectores separados por una coma, es decir, el producto interior de los vectores a y b se representará :

$$a \bullet b \equiv (a, b)$$

En general, para una métrica euclidiana cualquiera, en cualquier base $\{e_n\}$:

$$\forall x, y \in V^2 / x = \sum x_i.e_i \Lambda y = \sum y_j.e_j, \qquad (x, y) = \sum x_i.y_j (e_i, .e_j) = \sum g^{ij} x_i y_j$$

$$\forall x, y \in V^2, (x, y) = \sum g^{ij} x_i y_j$$

siendo $g^{ij} = e_i.e_j$, la métrica definida en el espacio, y $G = (g^{ij})$ la matriz métrica. En el caso de la métrica euclidiana ordinaria, la matriz métrica es la matriz identidad.

Y la distancia euclidiana entre dos vectores, x e y, se define por $d(x,y)^2 = [(x-y),(x-y)]$,
esto es, si los vectores son de la forma $x=(x_1,x_2,...,x_n,...)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n,...)$, **se tiene:**
$d(x,y)^2 = \sum g^{ij}(x_i-y_i).(x_j-y_j)$ **, y, para una métrica euclidiana ordinaria, es**

$$d(x,y)^2 = \sum (x_i-y_i)(x_i-y_i) = \sum (x_i-y_i)^2 = \sum |x_i-y_i|^2$$

Si en un espacio euclidiano ordinario V definimos la norma y el módulo de un vector por

$$Norma(x) = (x,x) = \sum_{i=1}^{n} |x^i|^2 \qquad Módulo(x) = \|x\| = +\sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x^i|^2}$$

se verifican, trivialmente los teoremas básicos:

$|(x,y)| \leq \|x\|.\|y\|$ **(de Schwartz)**

$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ **(de Minkowski)**

$\|mx\| = |m|.\|x\|$

1.3. **Espacios prehilbertianos. Espacios euclidianos. Espacios de Hilbert:**

Un espacio prehilbertiano es un espacio vectorial con métrica euclidiana. Si el espacio prehilbertiano es finitodimensional, se dirá entonces que es un espacio *euclidiano de n dimensiones*.

Para establecer el concepto de espacio de Hilbert, aclaremos qué hemos de entender por sucesión convergente de vectores de un espacio métrico, y qué debemos entender por sucesión de Cauchy de vectores de un espacio métrico.

Sucesión convergente de vectores de un espacio métrico:

Una sucesión de vectores $\{x_n\} \equiv \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ **del espacio métrico** $(V;K)$ **se dice convergente hacia** l **si se verifica que, dado un escalar positivo, por muy pequeño que fuera,** ε**, existe un número natural** N **tal que para todo** $n \geq N$**, es** $d(l, x_n) < \varepsilon$.

El vector l **se dice que es el limite de la sucesión convergente, y se designa en general por** $\lim x_n = l$,
O bien, por $\lim d(l, x_n) = 0$.

Sucesión de *Cauchy* de vectores de un espacio métrico:

Llamaremos *Sucesión de Cauchy* a toda sucesión $\{x_n\} \equiv \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ **que cumple la condición de que cualquiera que fuera el escalar positivo** ε**, y por muy pequeño que fuere, existe siempre un número natural N tal que para dos naturales, p, q, mayores o iguales a N, se verifica que la distancia entre los vectores** x_p **y** x_q**, esto es,** $d(x_p, x_q)$**, es menor que** ε**. O sea,** $\lim d(x_p, x_q) = 0$.

Haciendo uso de la Desigualdad Triangular de la métrica euclidiana, se prueba trivialmente el siguiente teorema:

Teorema 1:

Toda sucesión convergente es sucesión de Cauchy.

En efecto:

$$\{x_m\} \quad convergente \Rightarrow \lim\, d(l,x_m)=0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\, d(l,x_m)=0 \\ \\ d(x_p,x_q) \le d(x_p,l)+d(l,x_q) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\, d(x_p,x_q) \le \lim\, d(x_p,l)+\lim\, d(l,x_q)=0+0=0 \Rightarrow \lim\, d(x_p,x_q)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x_m\} \quad es \quad de \quad Cauchy$$

Sin embargo, el teorema recíproco no siempre es cierto. Cuando lo es, es decir, cuando toda sucesión de Cauchy de vectores del espacio es, también, una sucesión convergente de vectores del espacio, se dirá que tal espacio es *completo*.

Los espacios prehilbertianos euclidianos, es decir, los espacios con métrica euclidiana finitodimensionales, son, efectivamente, espacios métricos completos, pues en ellos toda sucesión convergente es de Cauchy y toda sucesión de Cauchy es convergente.

Veámoslo en el siguiente teorema, para una métrica euclidiana ordinaria, usando el criterio general de convergencia de Cauchy para sucesiones de escalares.

Teorema 2:

Todo espacio métrico euclidiano ordinario es completo.

En efecto:

Sean dos vectores $x_p=\sum x_p^i.e_i$ **y** $x_q=\sum x_q^i.e_i$ **. Se tiene:** $x_p-x_q=\sum (x_p^i-x_q^i).e_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow d^2(x_p,x_q)=\left[(x_p-x_q),(x_p-x_q)\right]=\sum \left|x_p^i-x_q^i\right|^2$$

por tanto,

$$d(x_p,x_q)<e \Rightarrow \sqrt{\sum \left|x_p^i-x_q^i\right|^2}<e \Rightarrow \left|x_p^i-x_q^i\right|<e \Rightarrow \exists a^i \in K \,/\, \lim\, x_n^i=a^i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\, x_n=\lim\, \sum x_n^i e_i=\sum a^i e_i=a$$

por tanto, la sucesión $\{x_n\}$ de Cauchy, converge hacia a.

Pero no todos los espacios prehilbertianos infinitodimensionales son completos.

Llamaremos *Espacio de Hilbert* a un espacio prehilbertiano completo.

Los espacios de Hilbert engloban, pues, a los espacios euclidianos como caso particular.

1.4. Bases en un espacio de Hilbert. Teorema Fundamental. Identidades de Bessel-Parseval:

Aunque en los espacios euclidianos se cumple que el número máximo de vectores linealmente independientes es, precisamente, el número de dimensiones del espacio, y una base cualquiera tiene un número de componentes igual a tal número de dimensiones, no ocurre lo mismo en los espacios de Hilbert en general, lo cual exige una precisión del concepto de base y de coordenadas en estos espacios, de modo que al particularizar a los espacios euclidianos, finitodimensionales, coincida con el concepto de base y coordenadas en estos espacios.

En un espacio H de Hilbert, se tiene que una sucesión cualquiera de vectores ortonormalizados no es necesariamente una base de H, es decir, si para " x Î H construimos los escalares $x^i = (x, e_i)$, no se puede asegurar que la suma siguiente

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i.e_i$$

sea convergente y que su suma sea x. Esto es, no se puede asegurar que $\forall x \in H, x = \sum_{i=1}^{\infty} x^i.e_i$

Es preciso estudiar, entonces, qué condiciones habrían de cumplir los vectores $\{e_i\}$ para que constituyan una base del espacio H.

Se llama Sistema Total en H a un sistema $\{e_i\}$ de vectores linealmente independientes de H tales que verifican:

$$\forall x \in H, x.e_i = 0 \Rightarrow x = 0$$

O bien, con la notación del paréntesis:

$$\forall x \in H, (x, e_i) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Veamos un a continuación un teorema previo al teorema fundamental:

Teorema 3:

Sea la sucesión, $\{b_n\}$, de números reales no negativos de la forma:

$$b_n = \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^2$$

Sea también, la sucesión de vectores $\{a_n\}$ engendrados por el sistema $\{e_i\}$, que podemos suponer ortonormal:

$$a_n = \sum_{i=1}^{\infty} x^i.e_i$$

Se verifican entonces, tres desigualdades, que usando la notación del paréntesis para el producto interior, son :

a) $(x, a_n) = (a_n, x) = (a_n, a_n) = b_n \geq 0$

b) $d^2(x, a_n) = (x - a_n, x - a_n) = (x, x) - b_n \geq 0$

c) $d^2(a_p, a_q) = b_p - b_q \geq 0 \qquad (q < p)$

En efecto:

a) $(x, a_n) = \left(x, \sum_{i=1}^{n} x^i.e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} (x, x^i.e_i) = \sum_{i=1}^{n} x^i.x^i = \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^2 = b_n$

$(a_n, x) = (x, a_n) = b_n$

$(a_n, a_n) = (\sum_{i=1}^{n} x^i.e_i, \sum_{j=1}^{n} x^j.e_j) = \sum_{i,j}^{n} x^i.x^j(e_i, e_j) = \sum_{i,j}^{n} x^i.x^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x^i.x^i = \sum_{i=1}^{n} \left|x^i\right|^2 = b_n$

b)

$d^2(x, a_n) = (x - a_n, x - a_n) = (x, x) - (x, a_n) - (a_n, x) + (a_n, a_n) = (x, x) - b_n - b_n + b_n =$
$= (x, x) - b_n \geq 0$

c)

$$d^2(a_p,a_q)=(a_p-a_q,a_p-a_q)=\left(\sum_{i=q}^{p}x^i.e_i,\sum_{i=q}^{p}x^j.e_j\right)=\sum_{i=q}^{p}x^i.x^j\delta_{ij}=\sum_{i=q}^{p}\left|x^i\right|^2=b_p-b_q\geq 0$$

Teorema 4 (Teorema Fundamental):

Un Sistema Total, {e$_i$} de H, es una base de H. Esto es, se verifica que la serie $\sum_{i=1}^{\infty}x^i.e_i$ **es convergente y su suma es x**

$$\forall x\in H, x=\sum_{i=1}^{\infty}x^i.e_i$$

En efecto:

- **Veamos en primer lugar que la sucesión de escalares {bn} es convergente:**

  De la desigualdad b) del anterior teorema, se tiene que $b_n\leq(x,x)$**, lo cual indica que** $\{b_n\}$ **es una sucesión acotada, con límite inferior o igual a la cota, por el criterio M de Weierstrass. Por tanto, es una sucesión convergente.**

- **Veamos ahora que la sucesión de vectores {a$_n$} es también convergente:**

  Al ser $\{b_n\}$ **convergente, se tiene que**

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in Z/\forall p,q\in Z, p,q\geq N\Rightarrow b_p-b_q<\varepsilon^2$$
$$(q<p)$$

  De esta desigualdad y de la desigualdad c) del teorema anterior:

  $d^2(a_p,a_q)=b_p-b_q<\varepsilon^2\Rightarrow d(a_p,a_q)<\varepsilon\Rightarrow\{a_n\}$ **sucesión de Cauchy, y por ser H espacio métrico completo, es** $\{a_n\}$**es convergente.**

- **Veamos finalmente que el limite de convergencia de la sucesión {a$_n$} es el vector x:**

  Llamemos a **al límite de la sucesión** $\{a_n\}$**. Y probemos que a = x.**

$$\forall j\leq n,\qquad (x-a_n,e_j)=(x,e_j)-(a_n,e_j)=x^j-\left(\sum_{i=1}^{n}x^ie_i,e_j\right)=x^j-x^j=0$$

  Es decir, $(x-a_n,e_j)=0$ **, por lo que, en el límite:**

$$\lim(x-a_n,e_j)=(x-\lim a_n,e_j)=(x-a,e_j)=0\Rightarrow x-a=0\Rightarrow x=a$$

  que demuestra el teorema.

Corolario 1 (Identidades de Bessel-Parseval):

Se obtienen inmediatamente las dos identidades:

a) $(x,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\left|x^i\right|^2$

b) $(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty} x^i.y^{i\bullet}$

En efecto:

a) **Tomando límites en el teorema 3, se tiene:**

$$\lim (x-a_n, x-a_n)=\lim[(x,x)-b_n]\Rightarrow (x-\lim a_n, x-\lim a_n)=(x,x)-\lim b_n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x-x,x-x)=(x,x)-\lim b_n \Rightarrow (0,0)=(x,x)-\lim b_n \Rightarrow (x,x)=\lim b_n = \sum_{i=1}^{\infty}\left|x^i\right|^2$$

b) **Al tomar límites en la identidad** $(x,y)-(x-a_n, y-c_n)=(a_n,c_n)=\sum_{i=1}^{n} x^i y^i$ **, se tiene:**

$$\lim(x,y)-(\lim(x-a_n),\lim(y-c_n))=\sum_{i=1}^{\infty}x^i y^i \Rightarrow (x,y)-(0,0)=\sum_{i=1}^{\infty}x^i y^i$$

1.5. Unicidad de las bases

El Teorema Fundamental en la construcción de los espacios de Hilbert, teorema que permite construir las bases de estos espacios, tiene varios recíprocos dependiendo de las condiciones que a priori se establezcan. El siguiente teorema establece una condición de unicidad.

Teorema 5:

Si $\{e_i\}$ es un sistema total de H, y $\{x^i\}$ es un conjunto de números complejos (i =1, 2, ...) tales que la suma $\sum_{i=1}^{n}\left|x_i\right|^2=b_n$ **tiene límite, también la serie** $\sum_{i=1}^{n}x^i.e_i$ **es convergente y su suma, x, es el único vector de H que cumple la condición** $(x,e_j)=x^j, \forall j$

En efecto:

$$a_n=\sum_{i=1}^{n}x^i.e_i \Rightarrow a_q-a_p=\sum_{i=p}^{q}x^i.e_i \Rightarrow \left\|a_q-a_p\right\|^2=\sum_{i=p}^{q}\left|x^i\right|^2=b_q-b_p$$

y, siendo la sucesión $\{b_n\}$ convergente, se tiene:

$$\exists N\in Z / \forall p,q\in Z \Lambda p,q>N \Rightarrow b_q-b_p<e^2 \Rightarrow \left\|a_q-a_p\right\|<e$$

Así, pues, $\{a_n\}$ es sucesión de Cauchy, y, por tanto, convergente. Sea $\lim a_n = x$**:**

$$\forall j<n, \quad (a_n.e_i)=x^i$$

y, en el límite:

$$\forall j, \quad (x,e_i)=x^i$$

y el vector x es único, pues si hubiera otro y **tal que**

$$\forall j, \quad (y,.e_i)=x^i$$

entonces se tendría

$$(x-y,e_i)=0\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y$$

La búsqueda de un sistema $\{e_j\}$ total se puede realizar prácticamente tomando un vector x cualquiera del espacio y calculando los números

$$x^j = (x, e_j)$$

y, con ellos, la sucesión de vectores $\{a_n\} = \left\{\sum_{j=1}^{n} x^j . e_j\right\}$. Esta sucesión ha de ser convergente y su suma ha de ser x. Comprobando este extremo puede decidirse si $\{e_j\}$ es un sistema total o no.

Existen en la práctica ejemplos concretos de espacios de Hilbert (realizaciones de espacios de Hilbert), como es, por ejemplo, el espacio $L^2(a,b)$ de las funciones de cuadrado integrable en un intervalo cerrado [a,b].

2. UN EJEMPLO DE ESPACIO DE HILBERT:

Consideremos el conjunto de las funciones de cuadrado sumable en un intervalo cerrado [a, b], es decir, las funciones f(x) para las que existe y es finita la integral

$$\int_a^b |f(x)|^2.dx = \int_a^b f(x).f^*(x).dx$$

Vamos a ver que se trata de un espacio vectorial, al que se puede dotar de una métrica euclidiana, y, además, es un espacio completo.

2.1. Las funciones de cuadrado sumable en un intervalo cerrado como espacio vectorial:

Designando por M(a, b) al conjunto de todas las funciones f(t) definidas en [a, b], se le dota fácilmente de estructura de espacio vectorial definiendo la suma y el producto por los escalares (números reales o complejos) de la forma:

$$\forall f, g \in M(a,b), (f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$\forall f \in M(a,b), \forall \alpha \in C, (\alpha f)(x) = \alpha . f(x), \qquad \forall x \in [a,b]$$

lo cual es inmediato.

Teorema 6:

El conjunto L^2(a,b) definido antes como el subconjunto de M(a, b) constituido por las funciones de cuadrado integrable, es subespacio vectorial del espacio M(a, b).

En efecto:

Bastará probar que es

$$\forall f, g \in L^2(a,b), f(x) + g(x) \in L^2(a,b), \qquad \forall x \in [a,b]$$
$$\forall f \in L^2(a,b), \forall \alpha \in C, \alpha . f(x) \in L^2(a,b), \qquad \forall x \in [a,b]$$

1) **De ser:**

$$(|f| + |g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 + 2.|f|.|g|$$
$$(|f| - |g|)^2 = |f|^2 + |g|^2 - 2.|f|.|g|$$

sumando: $$(|f| + |g|)^2 + (|f| - |g|)^2 = 2|f|^2 + 2|g|^2$$

y siendo $$(|f| - |g|)^2 \geq 0$$

se tiene que $$(|f| + |g|)^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$$

de lo cual, será $$|f+g|^2 \leq (|f| + |g|)^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2 \Rightarrow |f+g|^2 \leq 2|f|^2 + 2|g|^2$$

y, por tanto:

$$\int_a^b |f+g|^2.dx \leq 2\int_a^b |f|^2\, dx + 2\int_a^b |g|^2\, dx \Rightarrow f + g \in L^2(a,b)$$

2) De ser:

$$|\alpha . f|^2 = |\alpha|^2 . |f|^2$$

se cumple que $$\int_a^b |\alpha . f|^2 dx = |\alpha| . \int_a^b |f|^2 dx \Rightarrow k.f \in L^2(a,b)$$

2.2. Las funciones de cuadrado sumable en un intervalo cerrado como espacio prehilbertiano:

Para dotar a este espacio de una métrica, bastará definir el producto interior de la forma

$$\forall f, g \in L^2(a,b), \qquad (f,g) = \int_a^b f.g.dx$$

Hemos de ver que, efectivamente, tal producto interior pertenece al conjunto de las funciones de cuadrado integrable, lo cual se muestra con el siguiente teorema.

Teorema 7:

$$\forall f, g \in L^2(a,b), \qquad (f,g) = \int_b^a f.g^*.dx \text{ existe y es finito}$$

En efecto:

$$\left|\int_a^b f.g.dx\right| \leq \int_a^b |f.g|.dx = \int_a^b |f|.|g|.dx \leq \frac{1}{2}\int_a^b |f|^2.dx + \frac{1}{2}\int_a^b |g|^2.dx$$

Es inmediato que el producto interior así definido cumple las condiciones de definición de la métrica euclidiana, por lo que el espacio L^2(a, b) queda caracterizado como espacio prehilbertiano.

En el espacio prehilbertiano L^2(a, b) **se define el concepto de norma de f como el número real no negativo (f,f), y el módulo de f como la raíz cuadrada positiva de la norma.**

$$norma(f) = (f,f)$$
$$\mathrm{mod}\, ulo(f) = \|f\| = +\sqrt{(f,f)}$$

Son de demostración elemental los teoremas

$$|(f,g)| \leq \|f\|.\|g\| \text{ (de Schwartz)}$$
$$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \text{ (de Minkowski)}$$
$$\|mf\| = |m|.\|f\|$$

Dos funciones, $f, g \in L^2(a,b)$ **se dice que *pertenecen a la misma clase*, o simplemente, *que son iguales*, si ambas funciones son iguales** $\forall x \in \in [a,b]$, **salvo para aquellos valor de** x **pertenecientes a un conjunto de medida nula. Cada clase de funciones se dice que es una *función generalizada*.**

En general, la integración que figura en la definición del espacio $L^2(a, b)$ **es la integración de Lebesgue-Stieltjes. Este concepto tan general de integral, y el de función generalizada, permite desarrollar la teoría de estas funciones de cuadrado integrable hasta probar que se trata de un espacio prehilbertiano completo, es decir, de un espacio de Hilbert.**

2.3. Teorema de completitud de Fischer-Riesz.

Antes de exponer el teorema de completitud, veamos previamente la siguiente proposición:

Teorema 7: Dada la función $g(x) \in L^2(a,b)$ **y los números reales positivos** e **y** k**, se tiene que**

$$\int_a^b |g(x)|^2 .dx < e \Rightarrow |g(x)| < k$$

para todo valor de x, salvo para los pertenecientes a un conjunto E de medida inferior a e^2 / k^2 **.**

En efecto:

Dividamos el intervalo [a, b] en dos conjuntos:

P = conjunto de valores de x en los que $|g(x)| < k$

E = conjunto de valores de x en los que $|g(x)| \geq k$

Y siendo $\|g\|^2 = \int_a^b |g|^2 .dx = \int_P |g|^2 .dx + \int_E |g|^2 .dx,$ **será:** $\int_E |g|^2 .dx \leq \|g\|^2$

Y puesto que $\int_E |g|^2 dx \geq k^2 \int_E dx = k^2 .med(E)$

Será: $\|g\|^2 \geq k^2 .med(E) \Rightarrow med(E) < \dfrac{\|g\|^2}{k^2}$

Así pues, para todo e **tal que** $\|g\| < e$ **se verifica que** $med(E) < \dfrac{e^2}{k^2}$

Lo que quiere decir que $\|g\| < e$ **implica que** $|g| < k$ **, para todo x no perteneciente a un subconjunto E de medida inferior al número** $\dfrac{e^2}{k^2}$

Corolario:

Sea $\{g_n\}$ **una sucesión de funciones de** $L^2(a,b)$ **y apliquemos el teorema anterior a cada una de estas funciones, eligiendo para cada una de ellas un** $e_n = 1 / \sqrt{2^{3n}}$ **y un** $k_n = 1 / 2^n$

(con lo cual $e_n^2 / k_n^2 = 1 / 2^n$ **). Se verifica:** $\|g_n(x)\| < \dfrac{1}{\sqrt{2^{3n}}} \Rightarrow |g_n(x)| < \dfrac{1}{2^n}$ **, para todo x, excepto en un conjunto de medida inferior a** $1 / 2^n$

Para n tendiendo a infinito:

$\lim \|g_n\| = 0 \Rightarrow \lim |g_n| = 0,$ **para todo x, excepto en los puntos de medida nula. Es decir, finalmente:**

$$\lim \|g_n\| = 0 \Rightarrow \lim |g_n| = 0, \text{ en casi todo } [a, b]$$

Teorema 8 (de Fischer-Riesz):

Toda sucesión de Cauchy del espacio $L^2(a, b)$**, de las funciones de cuadrado integrable, es convergente en** $[a, b]$.

En efecto:

Vamos a probar el teorema desde la proposición anterior y su corolario.

Sabemos que

$\{f_n\}$ **es sucesión de Cauchy, entonces** $\forall e > 0, \exists N \in Z^+ / \forall m, n \geq N \Rightarrow \|f_m - f_n\| < e$

Consideremos la sucesión de valores de e : $e_1, e_2, ..., e_p, ...$ *con* $e_n = 1 / \sqrt{2^{3n}}$ **O sea,**

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2^3}}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2^6}}, ..., e_p = \frac{1}{\sqrt{2^{3p}}}, ...$$

Y la correspondiente sucesión de valores de n: $N_1, N_2, ..., N_p, ...$

Sea $\{f_{n_p}\}$ **una sucesión extraída de** $\{f_n\}$ **dando a n los valores Np.**

.

En estas condiciones se tiene, por el corolario del teorema anterior, que

$\left\| f_{N_{p+1}} - f_{N_p} \right\| < e_p \Rightarrow \left| f_{N_{p+1}} - f_{N_p} \right| < \frac{1}{2^p}$ **en todo intervalo [a, b] salvo en un subconjunto del mismo cuya medida es inferior a** $1/2^p$ **.**

Por tanto, la sucesión $\{f_{N_p}\}$ **tiene límite para p tendiendo a infinito en casi todo [a, b] . Sea f ese límite.**

De la igualdad $f - f_n = f - f_{N_p} + f_{N_p} - f_n$**,se tiene** $|f - f_n| \leq |f - f_{N_p}| + |f_{N_p} - f_n| < 2e$

Tomando p y n suficientemente avanzados.

Luego es $\lim f_n = f$ **en casi todo [a, b].**

Es claro que la función límite f dependerá de la sucesión extraída $\{f_{N_p}\}$**. Con otra sucesión** $\{f_{N_q}\}$ **extraída, el límite sería, por ejemplo, la función g. Pero el límite de la diferencia:**

$$\lim(f - g) = \lim(f - f_n) + \lim(f_n - f) = 0 \text{ para casi todo } [a, b]$$

Así, pues, las funciones fy g pertenecen a la misma clase y son, por tanto, iguales según la definición de igualdad para funciones generalizadas.

3. **BIBLIOGRAFÍA DE AMPLIACIÓN**:

ABELLANAS, L, GALINDO, A. ***Espacios de Hilbert (Geometría, operadores, espectros)*. Eudema**
BERBERIAN, S.K. ***Introducción al espacio de Hilbert.*** **Ed. Teide, 1970**
FRIEDRICHS, K.O. ***Spectral Theory of Operators in Hilbert Space***', **Applied Mathematical Sc.Vol. 9**
HALMOS, P.R., ***Introduction to Hilbert Spaces*** **.Chelsea Pub. Co. 1957**
KOLMOGOROV/FOMIN, ***Elementos de la Teoría de Funciones y el Análisis Funcional,*** **Mir, Moscu, 1972**
LASZLO M. HILGER, ADAM, ***Hilbert Space Methods in Science and Egineering,*** **1989**
RUDIN, W., ***Análisis Funcional,*** **Reverté 1979**