Examen Matemática discreta

Andrés Rodríguez Carmonet

Septiembre 2020

Pregunta 1: Para escribir números en base 11, se necesitan 11 símbolos. Utilizaremos las cifras 0,1,2,...,9 y X para denotar el 10. Sea n=18aX9b2 escrito en base 11. Cuáles de las siguientes cifras a y b hacen que n sea múltiplo de 10 y de 12.

A a=3 y b=8

B a=2 y b=8

C a=2 y b=6

Necesitamos los critrios de divisibilidad de 10 y 12 en base 11, para ello calculamos los restos potenciales de 11 en módulo 10 y 12:

$11^0 \equiv 1 \mod 10$
$11^1 \equiv 1 \mod 10$
$\vdots$
$11^r \equiv 1 \mod 10$

Como $n = \sum_{i=1}^{r} a_i 10^i \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i 10^i \mod 10 \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i \mod 10 \equiv 0 \mod 10$
Un número en base 11 es divisible por 10 sí y solo sí la sumas de sus cifras es congruente con 0 módulo 10

$11^0 \equiv 1 \mod 12$
$11^1 \equiv -1 \mod 12$
$11^2 \equiv 1 \mod 12$
$\vdots$
$11^n \equiv (-1)^r \mod 12$

Como $n = \sum_{i=1}^{r} a_i 10^i \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i 10^i \mod 12 \equiv \sum_{i=1}^{r} (-1)^i a_i \mod 12 \equiv 0 \mod 12$
Un número en base 11 es divisible por 12 sí y solo sí la sumas de las cifras en posición impar menos la suma de las cifras en posición par es congruente con 0 módulo 12.

Podemos plantear el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} 1+8+a+10+9+b+2 = 30+a+b \equiv 0 \mod 10 \Rightarrow a+b \equiv 0 \mod 10 \\ 1+a+9+2-(8+10+b) = a-b-6 \equiv 0 \mod 12 \Rightarrow a-b \equiv 6 \mod 12 \end{array}\right\}$$

Con el sistema establecido ya podemos marcar la opción B pues és la única que cumple ambas congruencias. ■

Pregunta 2: Sea k_r el grafo completo de r vértices. Entonces k_r es plano cuando:

A) r=4
B) r=6
C) r=8
Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

A Una afirmación es correcta.

B Dos afirmaciones son correctas.

C Las tres afirmaciones son correctas.

Aplicando el teorema 2-4.15 (Teorema de Kuratowski), la opción es clara.

■

Pregunta 3: En una circuferencia se marcan n puntos, donde $n > 8$ y par.A estos puntos se le asignan aleatoriamente los puntos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ (a cada punto un número entero distinto). Entonces:

1) Al menos una de las sumas de los números asignados a 3 puntos consecutivos es mayor o igual que $\dfrac{(3n+4)}{2}$.

2) Al menos una de las sumas de los números asignados a 3 puntos consecutivos es mayor o igual que $\dfrac{(3n+2)}{2}$.

3) Al menos una de las sumas de los números asignados a 3 puntos consecutivos es mayor o igual que $\dfrac{(3n)}{2}$.

Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

A Una afirmación es correcta.

B Dos afirmaciones son correctas.

C Las tres afirmaciones son correctas.

Hagamos sumas de 3 elementos consecutivos:

$$S_1 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$S_2 = a_2 + a_3 + a_4$$
$$\vdots$$

$$S_{n-1} = a_{n-1} + a_n + a_1$$

$$S_n = a_n + a_1 + a_2$$

Se puede observar que cada término aparece 3 veces en las sucesivas sumas, luego:

$$\sum_{i=1}^{n} S_i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{3n(n+1)}{2}$$

Sabiendo que $n > 8$ y par, luego divisible por 2, aplicando el principio del palomar que nos dice que si se efectúa una partición en n partes de un conjunto de N elementos, a las horas, al menos una parte tendrá $\frac{N}{n}$ o más elementos y si la división no es exacta, al menos una parte tendrá $\left[\frac{N}{n}\right] + 1$ o más elementos, luego:

$$\exists i : S_i > \left[\frac{N}{n}\right] + 1 = \left[\frac{\frac{3n(n+1)}{2}}{n}\right] + 1 = \left[\frac{3n+3}{2}\right] + 1 \geq \frac{3n+4}{2}; \quad n = 2k \; con \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Por tanto si se cumple para la primera opción se cumple para las otras dos ya que son estrictamente menores que la primera.

■

Pregunta 4: Sea p un número primo. Entonces:

1) Si $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, entonces p divide a $\binom{p+1}{j}$.

2) Si $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, entonces p divide a $\binom{p}{j}$.

3) Si $j \in \{1, 2, \ldots, p+1\}$, entonces p divide a $\binom{p+1}{j}$.

Estudiar cual de las siguientes afirmaciones son correctas:

A Se verifica 1) pero no 2)

B No se verifica 1) pero si 2)

C Se verifican las tres

Basta tomar $j = 1$ y obtenemos que para las expresiones 1) y 3) $p \nmid p+1$, en la expresión 2) obtenemos que $p \mid p$, luego solo se cumple la opción 2). Tan solo faltaría comprobar que p divide:

$$p \mid \binom{p}{j}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$$

Para ello desarrollemos el número combinatorio:

$$\binom{p}{j} = \frac{p(p-1)\dots(p-j+1)}{j!} = p\cdot\frac{(p-1)\dots(p-j+1)}{j!} = p\cdot\frac{a}{b}, \quad mcd(a,b)=1 \ \wedge \ a,b\in\mathbb{N}$$

Es claro que tanto a como b son números naturales al ser producto de números naturales, y como toda fracción podemos reducirla a su representante de clase, esto es, hacerla irreducible y obtener que $mcd(a,b)=1$. Seguimos operando:

$$b\cdot\binom{p}{j} = p\cdot a$$

Partiendo de que todo número combinatorio es entero, ademas la parte derecha de la igualdad pertenece a $\mathbb{Z}$ luego la parte izquierda también, y de que $p\nmid b$ puesto que b es producto de factores pertenecientes al conjunto $\{1,2,\dots,p-1\}$ coprimos (y menores) con p, podemos concluir:

$$p \mid \binom{p}{j}, \quad \forall j\in\{1,2,\dots,p-1\} \quad QED$$

■

Pregunta 5: Un jugador de dados conoce a otro 8 jugadores. Cada semana invita a 3 a jugar con él una partida. Entre los conocidos hay tres que no deben coincidir en una misma partida, ni tampoco dos cualesquiera de ellos. En estas condiciones, calculen el número máximo de partidas diferentes que se pueden organizar.

A 36 partidas

B 38 partidas

C 40 partidas

Lo primero es numerar el conjunto de los 8 amigos: $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8\}$.
A continuación podemos suponer que los amigos que no pueden coincidir son a_6,a_7,a_8 y solo nos queda contar, como cada semana invita a 3 amigos donde no importa el orden, es decir, $a_1,a_2,a_3=a_2,a_1,a_3$, hablamos por tanto de combinaciones:

$\binom{5}{3}=10$ partidas posibles sin problemas, es decir, entre los amigos a_1,a_2,a_3,a_4,a_5

Ahora bien, como los amigos a_6,a_7,a_8 no pueden coincidir 2 cualesquiera de ellos, al resultado anterior hay que sumarle las formas de seleccionar 2 amigos entre a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 y el tercero entre a_6,a_7,a_8, es decir:

$$\binom{5}{2}\cdot\binom{3}{1} = 10\cdot 3 = 30$$

Por tanto el número máximo de partidas diferentes que se pueden organizar es **40**. ■

Pregunta 6: Sea $p > 10$ un número primo. Los siguientes valores de q verifican que $(p-2)q \equiv 1 \mod p$.

1) $q = (p-3)! + (p-1)$

2) $q = (p-3)! + p(p-1)$

3) $q = (p-4)! + 2p(p-1)$

Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

$\boxed{\text{A}}$ Una afirmación es correcta.

$\boxed{\text{B}}$ Dos afirmaciones son correctas.

$\boxed{\text{C}}$ Ninguna afirmación es correcta.

Sustituyendo los valores de q en la expresión tenemos:

1) $(p-2)q \equiv 1 \mod p; \quad q = (p-3)! + (p-1)$

$(p-2)[(p-3)! + (p-1)] \equiv 1 \mod p$
$(p-2)! + (p-2)(p-1) \equiv 1 \mod p$
$1 + (-2)(-1) \equiv 1 \mod p$
$3 \not\equiv 1 \mod p;\ p > 10$ KO

2) $(p-2)q \equiv 1 \mod p; \quad q = (p-3)! + p(p-1)$

$(p-2)[(p-3)! + p(p-1)] \equiv 1 \mod p$
$(p-2)! + p(p-2)(p-1) \equiv 1 \mod p$
$1 + 0 \equiv 1 \mod p$
$1 \equiv 1 \mod p;\ p > 10$ OK
3) $(p-2)q \equiv 1 \mod p; \quad q = (p-4)! + 2p(p-1)$

$(p-2)[(p-4)! + 2p(p-1)] \equiv 1 \mod p$
$(p-2)(p-4)! + 2p(p-1)(p-2) \equiv 1 \mod p$
$(p-2)! \equiv p-3 \mod p$
$1 \not\equiv (-3) \mod p;\ p > 10$ KO

Luego solo una afirmación es correcta.

$\blacksquare$

Pregunta 7: Los números $3^{4n} - 2^{4n}$ con $n > 0$ son divisibles por 5 sí:

1) n es par y múltiplo de 7

2) n es impar y múltiplo de 5

3) n es par y múltiplo de 5

Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

A Una afirmación.

B Dos afirmaciones.

C Las tres afirmaciones.

$3^{4n} - 2^{4n} = (3^4)^n - (2^4)^n \equiv 0$ mód 5. Aplicando el pequeño teorema de Fermat, es indiferente la forma de n con $n > 0$, siempre será divisible por 5, luego **las tres afirmaciones son correctas**. ■

Pregunta 8: Sea un grafo G con 10 vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ y aristas $v_i v_j$, con $|i - j|$ impar. Entonces:

1) El grafo es euleriano.

2) El grafo es bipartito.

3) El grafo es plano.

Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

A Una afirmación.

B Dos afirmaciones.

C Las tres afirmaciones.

1) El grafo es euleriano.

Cada v_i con i impar tiene arista con cada v_j con j par para que $|i - j|$ sea impar. El mismo argumento se puede utilizar para cada v_i con i par. Como hay 5 vértices con índice par y 5 con índice impar, cada vértice v_i tiene grado 5. Lo cual imposibilita que sea euleriano por teorema 2-2.12. Luego **G no es euleriano** (sí hamiltoniano $\{v_1 v_2 v_3 \ldots v_{10} v_1\}$).

2) El grafo es bipartito.

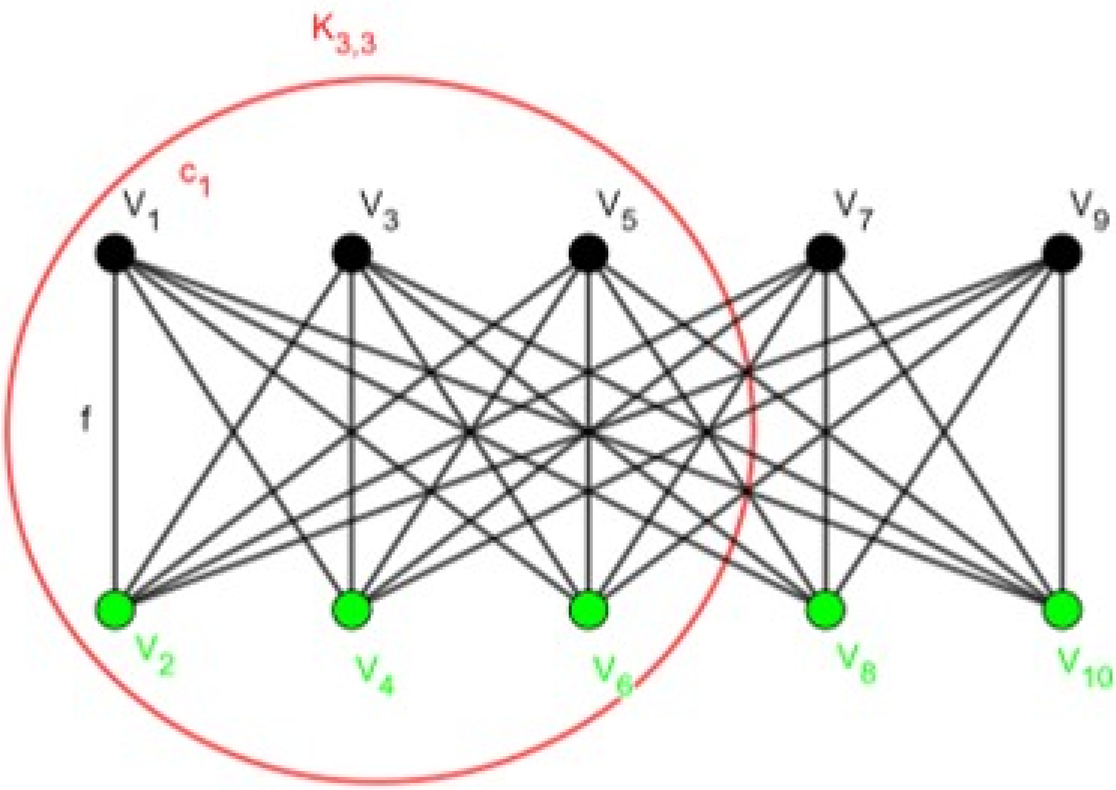
Los vértices claramente se pueden dividir en dos subconjuntos, los vértices de grado par por un lado y los vertices de grado impar por otro, no existiendo aristas dentro del mismo conjunto de vértices, es decir se pueden colorear con solo dos colores, por tanto **el grafo es bipartito** (definición 2-4.22).

3) El grafo es plano.

Aplicando el corolario 2-4.9 ya que G es conexo:
$\#E \leq 3\#V - 6 \Rightarrow \dfrac{10 * 5}{2} \nleq 3 * 10 - 6 \Rightarrow 25 \nleq 24$ Luego G **no es plano**.

O también aplicando el teorema 2-4.15 (Teorema de Kuratowski):

Un grafo G es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo que sea isomorfo a una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.



Grafo G.