

Tema 1: Números complejos

1. El cuerpo de los números complejos

Definición 1.1. Se define la *unidad imaginaria* como $i = \sqrt{-1}$, o de forma equivalente, $i^2 = -1$.

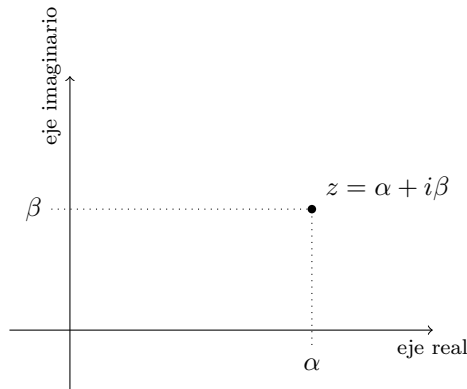
Definición 1.2. Un *número complejo* es una expresión de la forma $z = \alpha + i\beta$, donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. α es denominada la *parte real*, $\text{Re}(z)$, mientras que β es la *parte compleja o imaginaria*, $\text{Im}(z)$. Esta expresión se conoce como *forma binomial* o *cartesiana* del número complejo.

Definición 1.3. Si $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, se define el *conjugado* de z , y se denotará por \bar{z} , como el número complejo $\bar{z} = \alpha - i\beta$.

Proposición 1.1. Si $z, w \in \mathbb{C}$ se verifica:

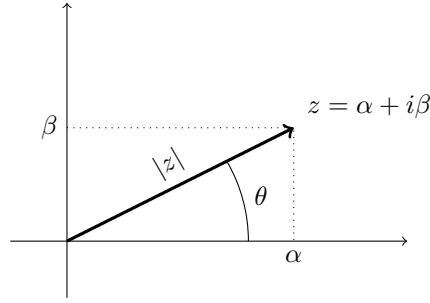
- (I) $\overline{\bar{z}} = z$.
- (II) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$.
- (III) $z = \bar{z} \Leftrightarrow z$ es real.
- (IV) $\bar{z} = -z \Leftrightarrow z$ es imaginario puro.
- (V) Si $z = \alpha + i\beta \neq 0$, entonces $z\bar{z} = \alpha^2 + \beta^2 \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
- (VI) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

2. Representación geométrica: módulo y argumento



Definición 1.4. Dado un número complejo $z = \alpha + i\beta$ se define su *módulo*, que se notará como $|z|$, por

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$



Proposición 1.2.

- (I) $|z| = |\bar{z}| = |-z|, \forall z \in \mathbb{C}.$
- (II) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$
- (III) $\operatorname{Re}(z) \leq |\operatorname{Re}(z)| \leq |z|.$
- (IV) $\operatorname{Im}(z) \leq |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$
- (V) **Desigualdad triangular:** $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$
- (VI) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

Definición 1.5. Dado un número complejo $z = \alpha + i\beta \neq 0$ se define el *argumento* de z , y se notará por $\arg(z)$, al conjunto

$$\arg(z) = \{\theta \in \mathbb{R} : \alpha = |z| \cos \theta, \beta = |z| \sin \theta\}$$

El argumento de 0 no está definido.

Se denomina *argumento principal* de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, y se notará por $\operatorname{Arg}(z)$, al único número $\theta \in \arg(z)$ tal que $-\pi < \theta \leq \pi$.

3. Forma trigonométrica y forma polar

Definición 1.6. A la expresión

$$z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

se le denomina *forma trigonométrica* de un número complejo.

Definición 1.7. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se define $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, que se conoce como *fórmula de Euler*.

Definición 1.8. A la expresión

$$z = |z|e^{i\theta}, \quad \theta \in \arg(z)$$

se le denomina *forma polar* de un número complejo.

4. Potencia y raíz n-ésima de un número complejo

Teorema 1.1 (Teorema fundamental del Álgebra). Si $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ es un polinomio con coeficientes complejos (esto es, $a_i \in \mathbb{C}, \forall i$), entonces la ecuación $p(x) = 0$ tiene n raíces contando sus multiplicidades.

Tema 2: Matrices y determinantes

1. Matrices: primeras definiciones

Definición 2.1. Una ordenación rectangular

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se denomina *matriz de orden $m \times n$* (m filas y n columnas), donde cada $a_{ij} \in \mathbb{K}$. Los elementos $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ forman la fila i -ésima, que denotaremos por F_i , mientras que los elementos $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ conforman la columna j -ésima, denotada por C_j . El conjunto de matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en \mathbb{K} se denota por $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$. Para simplificar la escritura es frecuente notar a las matrices por $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ o simplemente $A = (a_{ij})$, donde el primer índice siempre denotará las filas, y el segundo las columnas.

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{K})$ se dirá matriz *fila* y si $A \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$ se dirá matriz *columna*.

Definición 2.2. Dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ son *iguales* si los elementos correspondientes son iguales, es decir, $a_{ij} = b_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo: Una empresa fabrica pilas eléctricas en tres tamaños: A, B y C, y dos voltajes: V_1 y V_2 . El número de piezas fabricadas cada día (en miles de unidades) viene dada por la matriz F , y el precio (en céntimos por unidad) en la matriz P :

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C \end{matrix} \\ \begin{matrix} V_1 \\ V_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 20 & 19 & 18 \\ 22 & 19 & 21 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad P = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \end{matrix} & \begin{pmatrix} 70 & 120 \\ 45 & 65 \\ 60 & 50 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Definición 2.3. Una matriz se dice *cuadrada* si $m = n$. El conjunto de matrices cuadradas de orden n con coeficientes en \mathbb{K} se notará por $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Una matriz cuadrada se dice *simétrica* si $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i, j$.

Se denomina matriz *traspuesta* (o *transpuesta*) de $A = (a_{ij})$ a la matriz $A^T = (a_{ji})$, es decir, la que resulta al intercambiar sus filas por sus columnas.

Una matriz se dirá *simétrica* si es igual a su traspuesta.

Definición 2.4. Los elementos a_{ii} , $1 \leq i \leq \min\{m, n\}$ son denominados *elementos diagonales*, y conforman la llamada *diagonal principal* de la matriz.

Una matriz con ceros por debajo de la diagonal principal se denomina *triangular superior*. Si los ceros están por encima se dirá *triangular inferior*. Si hay ceros por encima y por debajo de la diagonal principal se llamará matriz *diagonal*.

Definición 2.5. Dadas $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, con $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, y $\alpha \in \mathbb{K}$, se definen:

- (I) la *suma* de A y B como la matriz $A + B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ donde $(A + B)_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})$.
- (II) el *producto por escalar* de $\alpha \in \mathbb{K}$ y A como la matriz $\alpha A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ dada por $(\alpha A)_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Proposición 2.1 (Propiedades de la suma de matrices). Si $A, B, C \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, se verifican las siguientes propiedades:

- (I) Conmutativa: $A + B = B + A$

(II) Asociativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

(III) Elemento neutro: existe una única matriz $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ tal que $A + \mathbf{0} = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, que se denomina *matriz nula* y cuyos elementos son todos cero.

(IV) Elemento opuesto o simétrico: para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ existe una única matriz D tal que $A + D = \mathbf{0}$. Se notará $D = -A$.

Proposición 2.2 (Propiedades del producto por un escalar). Si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ entonces

(I) Pseudoasociativa: $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

(II) Distributiva respecto de la suma de escalares: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(III) Distributiva respecto de la suma de matrices: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Definición 2.6. Dadas dos matrices $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y $B \in \mathcal{M}_{n \times p}(\mathbb{K})$, con $A = (a_{ik})$ y $B = (b_{kj})$ se define el *producto* de A por B como la matriz $AB \in \mathcal{M}_{m \times p}(\mathbb{K})$ cuyos elementos vienen dados por

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$$

Definición 2.7. La matriz $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dada por

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

o abreviadamente $(I_n)_{ij} = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq n$, donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker, se denomina *matriz identidad*.

Proposición 2.3 (Propiedades del producto de matrices).

Se verifican las siguientes propiedades (siempre que los productos sean posibles):

(I) Asociativa: $A(BC) = (AB)C$

(II) Distributiva respecto de la suma:

$$\begin{aligned} \text{(por la izquierda):} \quad & (B + C)A = BA + CA; \\ \text{(por la derecha):} \quad & A(B + C) = AB + AC. \end{aligned}$$

(III) Distributiva respecto del producto por escalar: $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$.

(IV) Elemento neutro: se verifica $I_m A = A$, $A I_n = A$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, donde las matrices I_n , I_m son las matrices identidad de órdenes n y m , respectivamente.

Proposición 2.4 (Propiedades de la trasposición de matrices). Si A, B son matrices y α un escalar, entonces

(I) $(A^T)^T = A$.

(II) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

(III) $(A + B)^T = A^T + B^T$.

(IV) $(AB)^T = B^T A^T$.

2. Inversa de una matriz

Definición 2.8. Dada una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, se dice que la matriz $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es su *inversa* si $AB = BA = I_n$, donde $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es la matriz identidad. Se notará $B = A^{-1}$.

Si existe una tal matriz se dirá que A es *regular* o *invertible*. En caso contrario se dirá que A es *singular*.

Teorema 2.1. Si una matriz tiene inversa, entonces ésta es única.

Proposición 2.5. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y verifican que $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$ y por tanto $B = A^{-1}$.

Proposición 2.6. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, entonces

- (I) Si A y B son invertibles, entonces AB es invertible y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- (II) Si A es invertible, entonces A^T es invertible y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

3. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 2.9. Se denomina *sistema de ecuaciones lineal de m ecuaciones con n incógnitas* a una expresión del tipo siguiente:

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \quad (1)$$

donde los a_{ij} son denominados *coeficientes*, x_i son las *incógnitas* y b_i el *término independiente*.

Definición 2.10. Se denomina *solución* del sistema (1) a toda n -upla $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{K}^n$ que convierte la expresión (1) en una identidad.

Proposición 2.7. Se verifican las siguientes propiedades:

- (I) Si multiplicamos una ecuación por un escalar distinto de cero, las soluciones de (1) no varían.
- (II) Si intercambiamos dos ecuaciones en el sistema (1), las soluciones del mismo no cambian.
- (III) Si sumamos o restamos un múltiplo de una ecuación a otra, las soluciones del sistema (1) no varían.

4. Determinante de una matriz: propiedades

Definición 2.11. Se denomina *submatriz* de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ dada, a cualquier matriz obtenida de A eliminando un conjunto determinado de filas y/o columnas.

Definición 2.12. Se denomina *matriz adjunta del elemento ij* de una matriz A , y se denotará por A_{ij} , a la submatriz obtenida al eliminar la fila i y la columna j de dicha matriz.

Definición 2.13. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se define el *determinante* de A , que denotaremos por $\det A$ ó $|A|$, del siguiente modo:

- Si $n = 1$, $|A| = a_{11}$.
- Si $n > 1$,

$$|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + \cdots + (-1)^{n+1}a_{n1}|A_{n1}| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|$$

donde $|A_{i1}|$ es el determinante de la matriz adjunta del elemento ij , que corresponde a una matriz cuadrada de orden $n - 1$.

Proposición 2.8. Si una matriz cuadrada A tiene una fila completa de ceros, entonces su determinante es nulo.

Proposición 2.9. Se verifica:

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right|$$

Proposición 2.10. Si B es la matriz obtenida al multiplicar los elementos de una fila de la matriz A por un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $|B| = \lambda|A|$.

Proposición 2.11. Si B es la matriz que se obtiene de A intercambiando dos de sus filas, entonces $|B| = -|A|$.

Proposición 2.12. Si una matriz tiene dos filas iguales su determinante es nulo.

Proposición 2.13. Si B es la matriz obtenida de A al sumar a una fila de A , un múltiplo de otra fila de la matriz, entonces $|B| = |A|$.

Proposición 2.14. A es una matriz regular si y sólo si $|A| \neq 0$.

Proposición 2.15. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ entonces $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Proposición 2.16. $\det(A) = \det(A^T)$

Teorema 2.2 (Desarrollo por filas o columnas). Si $A = (a_{ij})$ entonces

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

y también

$$|A| = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}|$$

5. Rango de una matriz

Definición 2.14. Se denomina *menor de orden k* de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ al determinante de una submatriz cuadrada de A de orden k .

Definición 2.15. Se llama *rango* de una matriz $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ al mayor orden de entre todos los menores de A no nulos.

Teorema 2.3. El rango de una matriz no se altera si:

- (I) Intercambiamos entre sí dos filas (o dos columnas).
- (II) Transponemos una fila con una columna (esto es, intercambiar la fila i con la columna i).
- (III) Multiplicamos los elementos de una fila (o columna) por un escalar distinto de cero.
- (IV) Sumamos a una fila (o columna) los elementos de otra fila (o columna) multiplicados por un escalar.

6. Aplicación de los determinantes al cálculo de la inversa

Definición 2.16. Dada una matriz cuadrada A , se denomina *adjunta* de una matriz (o *matriz de cofactores*) de A a la matriz $\text{adj}(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dada por

$$(\text{adj } A)_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

Teorema 2.4 (Inversa de una matriz). Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz invertible. Entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj}(A)^T$$

Tema 3: Sistemas de ecuaciones lineales

1. Sistemas de ecuaciones lineales: primeras definiciones

Un sistema de ecuaciones lineal es una expresión de la forma

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\} \quad (1)$$

Definición 3.1. Un sistema se dice *compatible* si posee solución, e *incompatible* si no posee solución. Un sistema compatible se dice *determinado* si su solución es única. En caso contrario se dirá *indeterminado*.

Definición 3.2. Un sistema de la forma (1) se dirá *homogéneo*, si el término independiente $b_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$.

Proposición 3.1.

Dado el sistema homogéneo

$$\left. \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

si $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ es solución, entonces $(\alpha\bar{x}_1, \dots, \alpha\bar{x}_n)$ también es solución del sistema, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Del mismo modo, si $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ e $(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ son soluciones de (2), entonces la n -upla $(\bar{x}_1 + \bar{y}_1, \dots, \bar{x}_n + \bar{y}_n)$ también es solución de (2).

Proposición 3.2.

Si $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ es solución del sistema (1), entonces todas sus restantes soluciones se escriben de la forma $(\bar{x}_1 + \alpha_1, \dots, \bar{x}_n + \alpha_n)$, donde $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ es solución de (2), su sistema homogéneo asociado.

Teorema 3.1 (Regla de Cramer). Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es regular y $\mathbf{x}, \mathbf{b} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$, el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible determinado y

$$x_j = \frac{|A_j|}{|A|}, \quad 1 \leq j \leq n$$

donde A_j es la matriz

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es decir, la matriz obtenida de A al sustituir la columna j por el segundo miembro del sistema.

2. Teorema de Rouché-Frobenius

Teorema 3.2 (Teorema de Rouché-Frobenius). Consideremos el sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, con $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{K})$ y $\mathbf{b} \in \mathcal{M}_{m \times 1}(\mathbb{K})$. Denotemos por \bar{A} a la matriz ampliada del sistema, esto es la matriz formada por A junto con el segundo miembro \mathbf{b} . Entonces, el sistema es compatible si y sólo si $\text{rango}(A) = \text{rango}(\bar{A})$.

Más aun, el sistema será determinado si $\text{rango}(A) = n$ (n° de incógnitas) e indeterminado si $\text{rango}(A) < n$.

3. Álgebra Lineal Numérica

Con estrategia de pivoteo parcial:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & -16 & -38 \\ 14 & 2 & 4 & -10 \\ 16 & 40 & -4 & 55 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 40 & -4 & 55 \\ 14 & 2 & 4 & -10 \\ -2 & 4 & -16 & -38 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{F_2 - 0.875F_1 \\ F_3 + 0.125F_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.16 \cdot 10^2 & 0.4 \cdot 10^2 & -0.4 \cdot 10 & 0.55 \cdot 10^2 \\ 0 & -0.33 \cdot 10^2 & 0.75 \cdot 10 & -0.5812 \cdot 10^2 \\ 0 & 0.9 \cdot 10 & -0.165 \cdot 10^2 & -0.3112 \cdot 10^2 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{F_3 + 0.2727F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0.16 \cdot 10^2 & 0.4 \cdot 10^2 & -0.4 \cdot 10 & 0.55 \cdot 10^2 \\ 0 & -0.33 \cdot 10^2 & 0.75 \cdot 10 & -0.5812 \cdot 10^2 \\ 0 & 0 & -0.1445 \cdot 10^2 & -0.4696 \cdot 10^2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Solución: $x = 1.9981$, $y = 2.4993$, $z = 3.2498$

Solución: $x = 2.033$, $y = 2.4666$, $z = 3.2468$ (sin pivoteo)

3.1. Factorización LU

Matrices elementales

Definición 3.3.

(I) E_{ij} es la matriz que se obtiene de la identidad cuando intercambiamos la fila i con la fila j , es decir:

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{Fila } i \\ \leftarrow \text{Fila } j \end{array}$$

(II) $E_i(\lambda)$ es la matriz obtenida al multiplicar la fila i por λ en la matriz identidad, es decir:

$$E_i(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Fila } i$$

(III) $E_{ij}(\lambda)$ es la matriz obtenida de la matriz identidad al sumar a la fila j , la fila i previamente multiplicada por λ , esto es:

$$E_{ij}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \lambda & \cdots & 1 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{Col. } i \downarrow \quad \text{Col. } j \downarrow \\ \leftarrow \text{Fila } i \\ \leftarrow \text{Fila } j \end{array}$$

Proposición 3.3. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ y sean E y F matrices elementales de orden m y n , respectivamente. Entonces el producto EA es la matriz que se obtiene de A cuando aplicamos a sus filas la misma transformación que aplicamos a la identidad para obtener E .

Análogamente, AF es la matriz que se obtiene de A cuando aplicamos a sus columnas la misma transformación que aplicamos a la identidad para obtener F .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-3)]{F_2 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[E_{23}(\frac{1}{5})]{F_3 + \frac{1}{5}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = U$$

$$E_{23}(\frac{1}{5})E_{12}(-3)A = U \Rightarrow A = (E_{23}(\frac{1}{5})E_{12}(-3))^{-1}U$$

$$\Rightarrow A = (E_{12}(-3))^{-1} \left(E_{23}(\frac{1}{5}) \right)^{-1} U$$

Denotando por $L = (E_{12}(-3))^{-1} (E_{23}(\frac{1}{5}))^{-1}$, entonces $A = LU$.

$$(E_{ij}(\lambda))^{-1} = E_{ij}(-\lambda), \quad (E_i(\lambda))^{-1} = E_i(\frac{1}{\lambda})$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{23}(-\frac{1}{5})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{E_{12}(3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} = L$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

3.2. Sistemas mal condicionados

Se define la norma de un vector \mathbf{x} , que se notará como $\|\mathbf{x}\|$, como un número real que verifica las siguientes propiedades:

- (I) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$, y $\|\mathbf{x}\| = 0$ si y sólo si $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- (II) $\|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- (III) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.

Definición 3.4. Sean $\|\cdot\|_{\clubsuit}$ y $\|\cdot\|_{\spadesuit}$ dos normas vectoriales en \mathbb{K}^m y \mathbb{K}^n , respectivamente. Se denomina *norma matricial* en $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ *inducida* por dichas normas vectoriales a

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{x}\|_{\spadesuit}}{\|\mathbf{x}\|_{\clubsuit}}$$

Definición 3.5. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ regular y $\|\cdot\|$ una norma matricial inducida por una norma vectorial. Se define el *número de condición* de A como

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

Si A es singular, se define $\kappa(A) = \infty$

$$\left. \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ A\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} + \Delta\mathbf{b} \end{array} \right\} \Rightarrow A(\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = \Delta\mathbf{b}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x} = A^{-1}\Delta\mathbf{b} \Rightarrow \|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|$$

Por otra parte $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{b}\| \Rightarrow \|\mathbf{x}\| \geq \frac{\|\mathbf{b}\|}{\|A\|}$.

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{\|A^{-1}\| \|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \|A^{-1}\| \|A\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} = \kappa(A) \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

3.3. Método de Jacobi

Consideremos el sistema:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \right\}$$

en el que todos los elementos diagonales $a_{ii} \neq 0$.

Dada una aproximación $\mathbf{x}^{(k)}$, se construye $\mathbf{x}^{(k+1)}$ del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} \right) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)} \right) \end{aligned}$$

3.4. Método de Gauss-Seidel

Dado $\mathbf{x}^{(k)}$ calculamos $\mathbf{x}^{(k+1)}$ mediante:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}} \left(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} \right) \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}} \left(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} \right) \\ &\vdots \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - a_{i1}x_1^{(k+1)} - \cdots - a_{i,i-1}x_{i-1}^{(k+1)} - a_{i,i+1}x_{i+1}^{(k)} \right. \\ &\quad \left. - \cdots - a_{in}x_n^{(k)} \right) \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}} \left(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} \right) \end{aligned}$$

Tema 4: Espacios vectoriales

1. La estructura de espacio vectorial

Definición 4.1. Un conjunto V se dice que es un *espacio vectorial sobre el cuerpo* \mathbb{K} (o un abreviadamente un \mathbb{K} -espacio vectorial) si existen en él las siguientes operaciones:

una operación interna (*suma*):

$$\begin{array}{rcl} + : & V \times V & \longrightarrow V \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \end{array}$$

y una operación externa (*producto por escalar*):

$$\begin{array}{rcl} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow V \\ & (\alpha, \mathbf{x}) & \longrightarrow \alpha \cdot \mathbf{x} \end{array}$$

verificando:

- (I) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
- (II) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
- (III) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- (IV) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
- (V) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$
- (VI) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{u}$
- (VII) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$
- (VIII) $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$

Proposición 4.1. Sea V un e.v. Se verifican las siguientes propiedades:

- (I) El elemento neutro de un e.v. es único.
- (II) El elemento opuesto de un e.v. es único.
- (III) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \forall \mathbf{u} \in V$.
- (IV) El elemento opuesto de \mathbf{u} es $(-1) \cdot \mathbf{u}$.
- (V) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$.

2. Independencia lineal

Definición 4.2. Sea V un e.v. y sean $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vectores de V . Se dice que \mathbf{v} es *combinación lineal* (o que *depende linealmente*) de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, si existen $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Se dirá combinación lineal *no nula* si algún $\alpha_i \neq 0$.

Proposición 4.2.

- (I) El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.
- (II) Un vector cualquiera \mathbf{v} siempre es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores que contenga al propio \mathbf{v} .

Definición 4.3. Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son *linealmente dependientes (l.d.)* si podemos escribir el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal no nula de ellos. Dicho de otro modo, si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *no todos nulos* tales que

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

En caso contrario se dirá que los vectores son *linealmente independientes (l.i.)*, lo que ocurrirá si cualquier combinación lineal de los vectores \mathbf{v}_i igualada al vector nulo, implica que todos los escalares deben ser nulos, es decir,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$$

Proposición 4.3.

- (I) Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son vectores linealmente dependientes, existe algún \mathbf{v}_j que es combinación lineal de los demás.
- (II) Todo conjunto finito de vectores entre los cuales se encuentre el vector $\mathbf{0}$ es linealmente dependiente.
- (III) Todo conjunto finito de vectores linealmente independientes no puede contener un subconjunto propio linealmente dependiente.

Teorema 4.1. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ con $\text{rango}(A) = r$. Entonces existen r filas (o columnas) de A linealmente independientes, esto es, hay r vectores de \mathbb{K}^n correspondientes a sus filas (o de \mathbb{K}^m correspondientes a sus columnas) linealmente independientes, de manera que el resto se expresa como combinación lineal de éstas.

Definición 4.4. Se denomina *rango de un conjunto de vectores* al mayor número de ellos que son linealmente independientes.

Teorema 4.2. En \mathbb{K}^n , todo conjunto de vectores formado por $n + 1$ vectores es linealmente dependiente.

3. Bases y dimensión de un espacio vectorial

Definición 4.5. Sea V un e.v. Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ se dice *sistema generador* (o *conjunto generador*) de V si cualquier vector $\mathbf{u} \in V$ se puede poner como combinación lineal de ellos.

Lema 4.4. Sea V un e.v. con $\dim V = n$. Sea \mathcal{S} un sistema generador de V . Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, con \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 conjuntos disjuntos¹ tales que los elementos de \mathcal{S}_2 se escriben como combinación lineal de los elementos de \mathcal{S}_1 , entonces \mathcal{S}_1 es sistema generador.

Definición 4.6. Sea V un e.v. Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es una *base* de V si es un conjunto linealmente independiente y sistema generador.

Teorema 4.3. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ una base de un e.v. V . Entonces $\forall \mathbf{u} \in V$ existen unos únicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n \tag{1}$$

Definición 4.7. A los escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de (1) se les denominan *coordenadas* de \mathbf{u} en la base \mathcal{B} , y se notará por

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

Proposición 4.5. Supongamos que el e.v. V posee una base formada por n elementos. Entonces, todo conjunto de m vectores, con $m > n$ es l.d.

Teorema 4.4. Todas las bases de un e.v. poseen el mismo número de elementos.

¹Esto es, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$.

Definición 4.8. Se llama *dimensión* de un espacio vectorial V al número de elementos de cualquiera de sus bases, y se notará por $\dim(V)$.

Proposición 4.6. Sea V es un e.v. de dimensión n . Todo conjunto de n vectores l.i. forma una base de V .

Proposición 4.7 (Ampliación de bases). Sea V un espacio vectorial de $\dim V = n$. Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ con $k < n$, es un conjunto l.i. entonces existen $n - k$ vectores, $\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n$, tales que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V .

Proposición 4.8. Si S es un sistema generador de un e.v. V de dimensión n , entonces existe S_1 un subconjunto de S que es base de V .

Corolario 4.5. Si V es un e.v. con $\dim V = n$, se tiene:

- (I) Todo conjunto de n vectores l.i. es una base.
- (II) Todo conjunto con más de n vectores es l.d.
- (III) Todo sistema generador tiene al menos n elementos.
- (IV) Todo sistema generador de n elementos es una base.

Definición 4.9. Un conjunto infinito de vectores de un e.v. V es l.i. si cualquier subconjunto suyo es l.i. Si existe un tal conjunto se dirá que V es de *dimensión infinita*.

4. Cambios de base

Teorema 4.6. La matriz del cambio de base de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es invertible y su inversa es la matriz del cambio de base de \mathcal{B} a \mathcal{B}' .

5. Subespacios vectoriales

Definición 4.10. Sea V un e.v. sobre un cuerpo \mathbb{K} y $W \subset V$ un subconjunto suyo. Se dice que W es un *subespacio vectorial* (o variedad lineal) de V si W es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} con las operaciones definidas en V .

Proposición 4.9. W es un subespacio vectorial si y sólo si $\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} \in W$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

Definición 4.11. Sean $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ vectores de un e.v. V . Se define el conjunto

$$W = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

es decir, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales que se pueden hacer con los vectores dados. Este conjunto se denomina *subespacio engendrado por* $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ y a tales vectores se les denomina sistema generador de W .

Proposición 4.10. $W = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ es un subespacio vectorial de V .

Teorema 4.7. Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, con $\text{rango}(A) = r$. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un subespacio vectorial generado por cualesquiera $k = n - r$ soluciones linealmente independientes.

Teorema 4.8. Recíprocamente, todo subespacio vectorial de \mathbb{K}^n de dimensión k puede determinarse a través de las soluciones de un sistema lineal homogéneo.

5.1. Operaciones con subespacios

Teorema 4.9. Sean L_1 y L_2 dos subespacios vectoriales de V . Si $L_1 \subset L_2$ y $\dim(L_1) = \dim(L_2)$ entonces $L_1 = L_2$.

Definición 4.12. Dados dos subespacios L_1, L_2 de un e.v. V se define la *suma* de L_1 y L_2 por

$$L_1 + L_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1 \in L_1, \mathbf{u}_2 \in L_2\}$$

Igualmente definimos la *intersección* de L_1 y L_2 por

$$L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in L_1, \mathbf{u} \in L_2\}$$

Teorema 4.10. Si L_1 y L_2 son subespacios vectoriales, entonces $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$ también son subespacios vectoriales.

Teorema 4.11. Sean L_1 y L_2 dos subespacios de un e.v. V . Se verifica:

(I) Si \mathcal{B}_1 es una base de L_1 y \mathcal{B}_2 es una base de L_2 , entonces $L_1 + L_2 = L(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$, esto es, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es un sistema generador de $L_1 + L_2$.

(II) Si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un sistema de ecuaciones implícitas de L_1 y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un sistema de ecuaciones implícitas de L_2 , entonces,

$$\left. \begin{array}{l} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ B\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array} \right\}$$

es un sistema de ecuaciones implícitas de $L_1 \cap L_2$.

Teorema 4.12 (Fórmula de la dimensión). Si L_1 y L_2 son subespacios de un e.v. V se verifica:

$$\dim(L_1) + \dim(L_2) = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$$

Definición 4.13. Un e.v. V es *suma directa* de dos subespacios L_1 y L_2 si y sólo si

$$L_1 + L_2 = V \quad \text{y} \quad L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$$

Se notará $V = L_1 \oplus L_2$.

Teorema 4.13. Son equivalentes:

(I) $V = L_1 \oplus L_2$.

(II) $\forall v \in V, \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, con $\mathbf{v}_1 \in L_1, \mathbf{v}_2 \in L_2$, únicos.

Tema 5: Aplicaciones lineales

1. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales

Definición 5.1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo \mathbb{K} . Una aplicación $f : V \rightarrow W$ se dice *lineal* si verifica:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \\f(\alpha \mathbf{x}) &= \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}\end{aligned}$$

Proposición 5.1. Si $f : V \rightarrow W$ es lineal, entonces,

(I) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(II) $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$.

(III) Si L es un subespacio vectorial, $f(L) = \{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in L\}$ también es un subespacio vectorial.

Proposición 5.2. Sea L un subespacio de dimensión k y f una aplicación lineal, entonces $f(L)$ es un subespacio de dimensión menor o igual que k .

Teorema 5.1. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base de V . Sean $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$ n vectores cualesquiera de W . Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ tal que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$, $1 \leq i \leq n$.

2. Matriz de una aplicación lineal.

3. Operaciones entre aplicaciones lineales

Proposición 5.3. Si A y B son las matrices de las aplicaciones f y g en las bases \mathcal{B} y \mathcal{B}' , respectivamente, entonces

(I) $A + B$ es la matriz de la aplicación $f + g$ en las citadas bases.

(II) αA es la matriz de la aplicación $\alpha \cdot f$ en las mismas bases.

Proposición 5.4. Si $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $g \in \mathcal{L}(W, X)$, $A = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(f)$ y $B = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_X}(g)$ entonces

$$BA = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_X}(g \circ f).$$

Teorema 5.2. Sea f una aplicación lineal de V en W . Entonces,

(I) La inversa de una aplicación lineal es lineal y $(f^{-1})^{-1} = f$.

(II) f es invertible si y solo si es biyectiva.

(III) Si $f : V \rightarrow W$ es biyectiva y tiene a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ como matriz asociada respecto de ciertas bases, entonces f^{-1} tiene como matriz asociada respecto de las mismas bases a A^{-1} .

4. Cambio de base en una aplicación lineal

$$C = M_{\mathcal{B}'_V}^{\mathcal{B}_V} \quad D = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}'_W} \quad A = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(f) \quad A' = M_{\mathcal{B}'_V}^{\mathcal{B}'_W}(f)$$

$$\begin{array}{ccc}
f : V & \longrightarrow & W \\
\begin{array}{ccc}
C \curvearrowright & \mathcal{B}_V & \xrightarrow{A} \mathcal{B}_W \\
& & \searrow D \\
& \mathcal{B}'_V & \xrightarrow{A'} \mathcal{B}'_W
\end{array}
\end{array}$$

$$A' = DAC$$

5. Núcleo y rango de una aplicación lineal

Definición 5.2. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación. Se define el *núcleo* de f como el conjunto

$$\ker(f) = \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Se define la *imagen* de f como

$$\begin{aligned}
\text{Im}(f) &= \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \text{ tal que } f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \\
&= \{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = f(V)
\end{aligned}$$

Proposición 5.5. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal, entonces $\ker(f)$ y $\text{Im}(f)$ son subespacios vectoriales de V y W , respectivamente.

Proposición 5.6. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal. Entonces, f es inyectiva si y sólo si $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Proposición 5.7. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base de V . Entonces el conjunto

$$\{f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$$

es un sistema generador de $\text{Im}(f)$.

Teorema 5.3. Sea $f : V \rightarrow W$ lineal. Entonces

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f))$$

Corolario 5.4. Sea $f : V \rightarrow W$ lineal con matriz asociada A respecto de ciertas bases. Entonces,

(I) f es inyectiva si y sólo si $\text{rango}(A) = \dim(V)$.

(II) f es sobreyectiva si y sólo si $\text{rango}(A) = \dim(W)$.

Teorema 5.5. Sea $f : V \rightarrow W$ lineal. Si $\dim(V) = \dim(W)$, son equivalentes:

(I) f es biyectiva.

(II) f es inyectiva.

(III) f es sobreyectiva.

(IV) $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

(V) $\text{rango}(f) = \dim(V)$.

Tema 6: Diagonalización

1. Valores y vectores propios

Definición 6.1. Un vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ se dice *vector propio* o *autovector* de un endomorfismo $f : V \rightarrow V$ si existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $f(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. A λ se le llama *valor propio* o *autovalor* asociado al autovector \mathbf{x} .

Definición 6.2. Sea $f : V \rightarrow V$ una aplicación lineal. Un conjunto L se dice *invariante* respecto de f si $f(L) \subset L$.

Proposición 6.1. Si L_1 y L_2 son subespacios invariantes de una aplicación lineal f entonces $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$ también son subespacios invariantes.

Definición 6.3. Una aplicación lineal $f : V \rightarrow V$ se dice *diagonalizable* si existe una base de V respecto de la cual la matriz asociada es diagonal.

Igualmente, se dice que una matriz es diagonalizable si la aplicación lineal que la tiene como matriz asociada es diagonalizable. Esto es, si existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tal que $D = C^{-1}AC$, con D una matriz diagonal.

Teorema 6.1. Una aplicación lineal $f : V \rightarrow V$ es diagonalizable si y sólo si existe una base de V formada por autovectores de f .

Teorema 6.2. Si $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ son autovectores correspondientes a autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distintos entre sí dos a dos, entonces $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es un conjunto l.i.

2. Polinomio característico

Definición 6.4. Dada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, la expresión $|A - \lambda I|$ es un polinomio en la variable λ que se denomina *polinomio característico* de A .

Teorema 6.3. El polinomio característico no depende de la base que representa a la matriz de una aplicación.

Definición 6.5. Se denomina *multiplicidad algebraica* de un autovalor a la multiplicidad que tiene como raíz del polinomio característico.

Se denomina *multiplicidad geométrica* de un autovalor al número de autovectores independientes asociados.

Definición 6.6. Sea $f : V \rightarrow V$ lineal con matriz asociada A respecto de alguna base dada. Si λ es un autovalor de f se denomina *subespacio propio* correspondiente a λ al subconjunto

$$E_1(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$$

Proposición 6.2. Para cada autovalor

$$1 \leq \text{multiplicidad geométrica} \leq \text{multiplicidad algebraica}$$

Teorema 6.4. Una aplicación lineal es diagonalizable si y solo si tiene n autovalores, contando sus multiplicidades, y para cada autovalor, su multiplicidad algebraica coincide con su multiplicidad geométrica.

3. Forma canónica de Jordan

Lema 6.3. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ y tiene sus dos autovalores iguales entonces la matriz $(A - \lambda I)^2 = 0$, donde λ es el único autovalor de A .

Definición 6.7. Dos matrices A y B se dicen *equivalentes* si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$.

Definición 6.8. Se denomina *matriz elemental de Jordan de orden k (o caja de orden k)* y autovalor $\lambda \in \mathbb{C}$ a la matriz $J_k(\lambda) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ con elementos nulos excepto en la diagonal (donde aparece λ) y encima de la misma (en la que aparecen 1).

Definición 6.9. Se denomina *matriz de Jordan* a cualquier matriz cuadrada formada por yuxtaposición de matrices elementales de Jordan a lo largo de su diagonal, es decir, una matriz *diagonal por cajas* en la que cada caja es una matriz elemental.

$$J = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k_n}(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Teorema 6.5 (Teorema de Jordan (forma compleja)). *Toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es equivalente a una matriz de Jordan $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que es única, salvo permutación de las cajas que la forman.*

Proposición 6.4. Sea λ un autovalor de A de multiplicidad r y consideremos los subespacios $E_j(\lambda)$, $j \geq 0$. Entonces:

(I) $E_j(\lambda)$ es una sucesión estrictamente creciente de subespacios de manera que existe t tal que $E_t(\lambda) = E_{t+k}(\lambda)$, $\forall k \geq 0$; esto es,

$$\{\mathbf{0}\} = E_0(\lambda) \subsetneq E_1(\lambda) \subsetneq E_2(\lambda) \subsetneq \cdots \subsetneq E_t(\lambda) = E_{t+1}(\lambda) = \cdots$$

A $E_t(\lambda)$ se le denomina *subespacio máximo* asociado al autovalor λ

(II) $E_t(\lambda)$ es un subespacio invariante.

(III) $\mathbf{u} \in E_j(\lambda)$ si y solo si $(A - \lambda I)\mathbf{u} \in E_{j-1}(\lambda)$.

(IV) Se verifica que $\dim(E_t(\lambda)) = r$

Además, si $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ son los autovalores de A de multiplicidades respectivas r_1, \dots, r_k , con $n = r_1 + \cdots + r_k$, y $E_{t_j}(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, k$ son los subespacios máximos asociados a cada autovalor, entonces

$$V = E_{t_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E_{t_k}(\lambda_k)$$

donde V es el espacio ambiente.

Construcción de la forma compleja de Jordan y de una matriz de paso

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, para construir la matriz de Jordan seguiremos los siguientes pasos:

1. Calcular los autovalores de A , $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ junto con sus multiplicidades algebraicas r_1, \dots, r_k . Puesto que estamos en \mathbb{C} sabemos que $r_1 + \cdots + r_k = n$.
2. Para cada autovalor λ de multiplicidad r construimos los espacios $E_j(\lambda) = \ker((A - \lambda I)^j)$, con $j \geq 0$ hasta llegar al subespacio máximo, es decir, aquél que verifica que $\dim(E_t(\lambda)) = r$. Denotaremos por

$$q_j = \dim(E_j(\lambda)), \quad j = 0, \dots, t \quad (1)$$

3. Construimos la denominada *partición de multiplicidad* del autovalor λ . Para ello, dados los q_j calculados en (1), definimos

$$p_j = q_j - q_{j-1}, \quad j = 1, \dots, t$$

Obsérvese que q_j es una sucesión estrictamente creciente de números naturales, mientras que p_j es una sucesión decreciente. Se define la **partición de multiplicidad** del autovalor λ como la expresión

$$r = p_1 + \cdots + p_t$$

4. Construida la partición de multiplicidad, la forma canónica de Jordan tiene, para cada autovalor:

$$\left\{ \begin{array}{lll} p_t & \text{cajas de tamaño} & t \\ p_{t-1} - p_t & " & t-1 \\ p_{t-2} - p_{t-1} & " & t-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1 - p_2 & " & 1 \end{array} \right.$$

Construcción de la matriz de paso

1. Consideramos (a nuestra elección) p_t vectores de $E_t(\lambda) \setminus E_{t-1}(\lambda)$ linealmente independientes entre sí, que denotaremos por $\mathbf{u}_1^t, \dots, \mathbf{u}_{p_t}^t$
2. Para cada uno de los vectores anteriores construimos

$$\mathbf{u}_l^{t-1} = (A - \lambda I)\mathbf{u}_l^t, \quad l = 1, \dots, p_t$$

y los completamos con vectores de $E_{t-1}(\lambda) \setminus E_{t-2}(\lambda)$ linealmente independientes hasta obtener un total de p_{t-1} vectores. Ahora en este nivel tenemos

$$\{\mathbf{u}_1^t, \dots, \mathbf{u}_{p_t}^t\} \subset E_t(\lambda), \quad \{\mathbf{u}_1^{t-1}, \dots, \mathbf{u}_{p_t}^{t-1}, \mathbf{u}_{p_t+1}^{t-1}, \dots, \mathbf{u}_{p_{t-1}-p_t}^{t-1}\} \subset E_{t-1}(\lambda) \quad (2)$$

3. Repetimos la operación del paso anterior sobre el conjunto de vectores de (2), es decir, aplicamos $(A - \lambda I)$ a cada uno de los vectores anteriores y los completamos con vectores independientes de $E_{t-2} \setminus E_{t-3}$ hasta obtener p_{t-2} vectores.

Podemos usar la siguiente representación gráfica de la construcción de la base:

p_t	$E_t(\lambda)$	\mathbf{u}_1^t	\dots	$\mathbf{u}_{p_t}^t$				
p_{t-1}	$E_{t-1}(\lambda)$	\mathbf{u}_1^{t-1}	\dots	$\mathbf{u}_{p_t}^{t-1}$	$\mathbf{u}_{p_t+1}^{t-1}$	\dots	$\mathbf{u}_{p_{t-1}-p_t}^{t-1}$	
\vdots	\vdots							
p_1	$E_1(\lambda)$	\mathbf{u}_1^1	\dots	$\mathbf{u}_{p_t}^1$	$\mathbf{u}_{p_t+1}^1$	\dots	$\mathbf{u}_{p_{t-1}-p_t}^1$	\dots

En cada una de las filas correspondiente a un subespacio $E_j(\lambda)$ debemos tener exactamente p_j vectores linealmente independientes. Conocidos los vectores del espacio $E_j(\lambda)$, construimos los vectores de $E_{j-1}(\lambda)$ multiplicando cada uno de ellos por $(A - \lambda I)$. Si el número de vectores así obtenido es inferior a p_{j-1} , añadimos vectores linealmente independientes de $E_{j-1}(\lambda) \setminus E_{j-2}(\lambda)$ en número necesario hasta obtener p_{j-1} vectores.

Finalmente, los vectores que formarán parte de la matriz de paso son los vectores de cada uno de los subespacios anteriores escritos **por columnas de abajo hacia arriba** (¡atención al orden!¹), es decir

$$\{\mathbf{u}_1^1, \mathbf{u}_1^2, \dots, \mathbf{u}_1^t, \mathbf{u}_2^1, \mathbf{u}_2^2, \dots, \mathbf{u}_2^t, \dots, \mathbf{u}_{p_t}^1, \dots, \mathbf{u}_{p_t}^t, \mathbf{u}_{p_t+1}^1, \dots, \mathbf{u}_{p_t+1}^{t-1}, \mathbf{u}_{p_t+2}^1, \dots\}$$

Lema 6.5. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ es un autovalor entonces $\bar{\lambda}$ (su complejo conjugado) también es autovalor y además

$$\overline{A - \lambda I} = A - \bar{\lambda} I$$

3.1. Forma de Jordan real

Cálculo de la forma de Jordan real

(I) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un autovalor de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, las cajas correspondientes y los vectores asociados permanecen igual.

(II) Si $\lambda = \alpha + \beta i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ es un autovalor de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (y por tanto $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ también es autovalor) con p_t cajas de tamaño t , $p_{t-1} - p_t$ cajas de tamaño $t - 1$, etc., entonces al par de autovalores λ y $\bar{\lambda}$ le asignamos

$$\left\{ \begin{array}{lll} p_t & \text{cajas de tamaño} & 2t, \\ p_{t-1} - p_t & \text{''} & 2(t-1), \\ p_{t-2} - p_{t-1} & \text{''} & 2(t-2), \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_1 - p_2 & \text{''} & 2. \end{array} \right.$$

¹El orden de estos vectores debe venir de acuerdo al orden impuesto sobre las cajas elementales en la forma de Jordan. El orden descrito aquí corresponde a una ordenación de las cajas de mayor a menor tamaño.

de manera que cada caja tiene la forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c} B & I_2 & \\ \hline & B & I_2 \\ \hline & & \ddots \\ & & & B \end{array} \right) \quad (3)$$

donde $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

(III) Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es el conjunto de los vectores que aporta el autovalor λ a la forma de Jordan,² en el orden adecuado, entonces el par de autovalores $\lambda, \bar{\lambda}$ aporta los vectores

$$\{\text{Re}(\mathbf{v}_1), \text{Im}(\mathbf{v}_1), \dots, \text{Re}(\mathbf{v}_r), \text{Im}(\mathbf{v}_r)\} \quad (4)$$

donde recordemos que, si escribimos $\mathbf{v}_i = \mathbf{x}_i + i\mathbf{y}_i$ entonces $\text{Re}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{x}_i$ y $\text{Im}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{y}_i$.

Proposición 6.6. Con las notaciones anteriores, los vectores de (4) pertenecen al espacio $E_t(\lambda) \oplus E_t(\bar{\lambda})$, son linealmente independientes y dan lugar a la caja (3).

²Lo que implica que $\bar{\mathbf{v}}_1, \dots, \bar{\mathbf{v}}_r$ son los vectores que aporta $\bar{\lambda}$.

Tema 8: Espacio vectorial euclídeo

1. Producto escalar

Definición 8.1. Sea E un espacio vectorial real. Una aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \end{aligned}$$

se dice que es un *producto escalar* si satisface las siguientes propiedades:

- (I) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$.
- (II) $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E$.
- (III) $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- (IV) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{x} \in E$. Además $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Si en un espacio vectorial E hay definido un producto escalar se dirá que E es un *espacio euclídeo* (e.e.).

Definición 8.2. Sea E un e.e. Se denomina *norma* o *longitud* de un vector \mathbf{x} a $\sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$. Se notará por $\|\mathbf{x}\|$.

Proposición 8.1 (Desigualdad de Schwarz). Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, un e.e., entonces

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \leq 1$$

Proposición 8.2 (Desigualdad triangular). $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}$ de un e.e. E , se verifica:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

2. Ortogonalidad

Definición 8.3. Sea E un e.e.

- (I) Dos vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} se dicen *ortogonales* respecto de un producto escalar si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$. Se notará $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$.
- (II) Un conjunto de vectores $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ se dice *ortogonal* (dos a dos) si $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$.
- (III) Un vector \mathbf{x} es *ortogonal* a un conjunto S si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0, \forall \mathbf{y} \in S$.

Proposición 8.3. Si $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ son ortogonales entre sí y no nulos entonces son l.i.

Proposición 8.4 (Teorema de Pitágoras). Si $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ entonces

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

2.1. Bases ortonormales

Definición 8.4. Se dice que una base \mathcal{B} es *ortogonal* si los elementos que la forman son ortogonales dos a dos. Si además los vectores son de norma uno respecto del mismo producto escalar, se dirá que \mathcal{B} es *ortonormal*.

Teorema 8.1. En todo espacio euclídeo de dimensión finita existen bases ortonormales.

Teorema 8.2 (Gram-Schmidt, método de ortogonalización¹). Sea $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \dots$, una sucesión (finita o infinita) de vectores linealmente independientes. Denotemos por $L_k = L(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k)$ el espacio generado por los k primeros vectores. Entonces, existen $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n, \dots$ tales que

$$(I) \quad L_k = L(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k).$$

$$(II) \quad \mathbf{y}_{k+1} \perp L_k, \forall k \geq 1.$$

Definición 8.5. Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es *ortogonal* si $A^T A = I_n$, o equivalentemente, $A^T = A^{-1}$

2.2. Subespacios ortogonales

Definición 8.6. Dos subespacios W_1, W_2 se dicen *ortogonales*, y se notará $W_1 \perp W_2$, si todos los vectores de W_1 son ortogonales a todos los vectores de W_2 .

Proposición 8.5. $W_1 \perp W_2$ si y sólo si los vectores de una base de W_1 son ortogonales a los vectores de una base de W_2 .

Proposición 8.6. $W_1 \perp W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$.

Definición 8.7. Sea W un subespacio vectorial de un e.e. E . Se define el *ortogonal de W* , también denominado *complemento ortogonal* de W , y se notará por W^\perp , como

$$W^\perp = \{\mathbf{y} \in E : \mathbf{x} \perp \mathbf{y}, \forall \mathbf{x} \in W\}$$

Proposición 8.7. W^\perp es un subespacio vectorial.

Proposición 8.8. $(W^\perp)^\perp = W$.

2.3. Proyección ortogonal

Proposición 8.9. Si W es un subespacio vectorial de un e.e. E , entonces $W \oplus W^\perp = E$.

Como consecuencia de este resultado todo vector $\mathbf{x} \in E$ puede escribirse **de forma única** como

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}, \quad \text{con } \mathbf{y} \in W \text{ y } \mathbf{z} \in W^\perp$$

Definición 8.8. Con las notaciones anteriores se dice que \mathbf{y} es la *proyección ortogonal* de \mathbf{x} sobre W , que denotaremos por $\mathcal{P}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Asimismo, se dice que \mathbf{z} es la *proyección ortogonal* sobre W^\perp , que denotaremos por $\mathcal{Q}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{z}$.

Proposición 8.10. Si E es un e.e., W un subespacio vectorial de E y $\mathbf{x} \in E$ con $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ tal que $\mathbf{x}_1 \in W$, entonces $\|\mathcal{Q}_W(\mathbf{x})\| \leq \|\mathbf{x}_2\|$.