PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA
TOPOLOGÍA

Sea

$$ß = \{(a,b) \subset \mathbb{R} \mid a < b\} \cup \{(a,b) - K \subset \mathbb{R} \mid a < b\}$$

donde

$$K = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in Z^{+}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$$

1. Pruebe que ß es base para una topología T en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.
2. ¿Es K abierto en $(\mathbb{R}, T)$? ¿Es K cerrado en $(\mathbb{R}, T)$?
3. ¿Existen abiertos U y V en T tales que $0 \in U$, $K \subset V$ y $U \cap V = \varnothing$?

Solución:

1. Evidentemente, para cada $x \in \mathbb{R}$ es $x \in (x-1, x+1) \in ß$. Por tanto,

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{A \in ß} A \subset \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\bigcup_{A \in ß} A = \mathbb{R}}$$

Sean ahora $U, V \in B$ tales que $U \cap V \neq \varnothing$. Se tiene que

$$U \cap V = (p,q) \text{ para ciertos } p, q \in \mathbb{R}, p < q$$

o bien

$$U \cap V = (p,q) - K \text{ para ciertos } p, q \in \mathbb{R}, p < q$$

Por tanto, se tiene que $U \cap V \in B$, y por tanto se verifica trivialmente la segunda propiedad de las caracterizaciones de bases de una topología. Por tanto, ß es base de una topología de $\mathbb{R}$.

2. Veamos que K no es abierto. Si lo fuese, existiría un elemento $A \in B$ tal que $1 \in A \subset K$. Por tanto, se tiene que $A = (p,q)$ para ciertos $p, q \in \mathbb{R}, p < 1 < q$. De esta forma, A contiene reales mayores que 1, mientras que K no los contiene. Por tanto, $A \not\subset K$. Así, K no es abierto.

Veamos que K es cerrado, viendo que su complementario es abierto. Dado $x \in \mathbb{R} - K$, el entorno de x dado por $V = (p,q) - K$ donde $p, q \in \mathbb{R}, p < x < q$, verifica que $V \cap K = \varnothing$. Por tanto $V \subset \mathbb{R} - K$. Así, se tiene que $\mathbb{R} - K$ es cerrado y por tanto que K es abierto.

3. Sea $U \subset T$ tal que $0 \in U$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[0, \varepsilon) \subset U$. Si ahora es $V \in T$ tal que $U \cap V = \varnothing$, entonces $V \cap [0, \varepsilon) = \varnothing$, lo que está en contradicción con que $K \subset V$, ya que $K \cap [0, \varepsilon) \neq \varnothing$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Por tanto, no pueden existir dichos conjuntos.