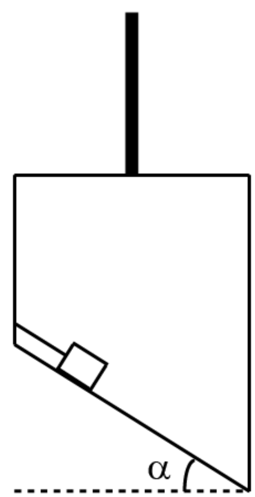
Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2015/2016, Septiembre

1. El suelo de un ascensor se encuentra inclinado un ángulo α respecto a la horizontal. Sobre él descansa una masa m en reposo, atada mediante una cuerda de masa despreciable a su extremo más alto, como se ilustra en la figura. Cuando el ascensor sube con una cierta aceleración a, la tensión observada en la cuerda es T. Calcule la tensión de la cuerda (en función de los datos proporcionados en el enunciado) si el ascensor tiene la misma aceleración, pero de bajada. Verifique que la solución encontrada es físicamente correcta para el caso en el que $a=g$. **(2 puntos)**

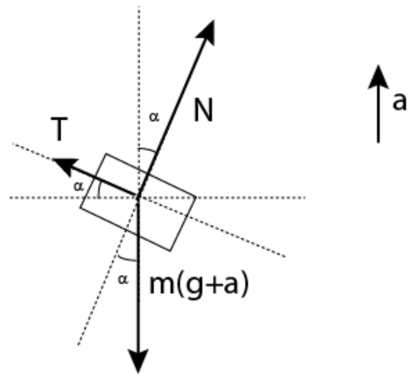


Solución

Veamos primero el caso del ascensor subiendo. La clave está en encontrar el efecto del ascensor sobre el movimiento en el plano inclinado.

En el sistema de referencia del ascensor, no-inercial con aceleración a, tenemos que introducir una fuerza inercial. Si el ascensor sube, induce una fuerza en la dirección hacia abajo, en el mismo sentido que la gravedad de $m\ a$. Podemos olvidarnos del ascensor si substituimos la gravedad g por el valor de la gravedad 'efectiva', $g+a$. El caso del ascensor bajando con aceleración a es similar y lleva a un valor de la gravedad 'efectiva' de $g-a$.

Volvamos al ascensor subiendo. El diagrama de fuerzas es el siguiente:



Si proyectamos sobre los ejes en la dirección del suelo del ascensor y su perpendicular, sabiendo que la masa no se mueve respecto al ascensor:

$$N - m(g + a)\ cos\alpha = 0$$
$$T - m(g + a)sin\alpha = 0$$

De donde podemos despejar

$$T = m(g + a)sin\alpha$$

Veamos eso mismo esto desde el suelo, sistema de referencia externo. El balance de fuerzas es el mismo, substituyendo la gravedad g por la gravedad efectiva. Lo mejor es proyectar sobre las direcciones horizontal y vertical, ya que la masa se mueve verticalmente con el ascensor hacia arriba:

$$Ncos\alpha + Tsin\alpha - mg = ma$$
$$Nsin\alpha - Tcos\alpha = 0$$

De donde podemos despejar y obtener el mismo resultado.

Lo mismo sirve para el caso del ascensor bajando, substituyendo *g-a* por *g+a*. Por tanto,

$$T' = m(g - a)sin\alpha$$

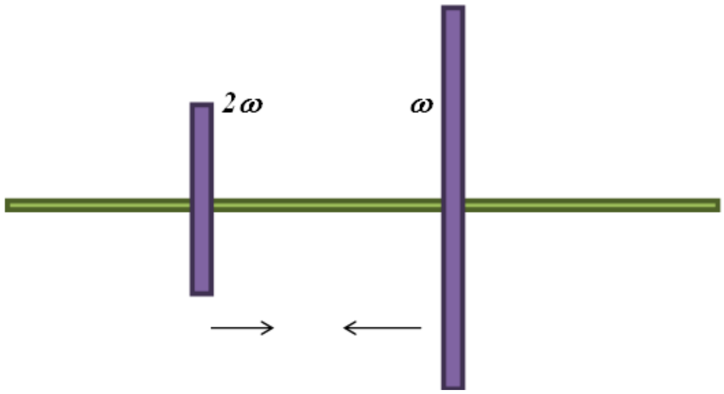
De donde podemos escribir *T'* en función de *T*:

$$T' = \frac{g - a}{g + a}T$$

En el límite *a=g* la tensión *T'* es cero. Un cuerpo en caída libre no siente la acción de la fuerza de gravedad y no hace falta tensión en la cuerda para mantener la masa inmóvil.

2. La figura inferior es una vista de perfil de dos discos sólidos que giran sin fricción alrededor de un eje horizontal. Los discos tienen el mismo grosor y están hechos del mismo material (tienen la misma densidad). El radio del disco de la derecha es el doble del radio del disco de la izquierda. Los discos giran en sentidos opuestos siendo el módulo de la velocidad angular del disco pequeño el doble que la del disco grande. En un determinado momento, los discos se mueven sobre el eje debido a una fuerza paralela al eje hasta que entran en contacto y se quedan pegados moviéndose conjuntamente. Calcule la velocidad angular final del

sistema formado por los dos discos en función de ω. El momento de inercia de un disco que gira alrededor de su eje es: $I = \frac{1}{2}MR^2$. **(2 puntos)**



Solución

Calculemos en primer lugar la relación entre las masas de los discos. Sea la masa del disco de menor tamaño M y su radio R. Si los discos tienen la misma densidad, las masas guardan la misma relación que los volúmenes. El volumen del disco de menor tamaño es $V_1 = x\,\pi\,R^2$, y el de mayor tamaño, de radio 2R, $V_2 = x\,4\,\pi\,R^2$ (siendo x el ancho de los discos). Por tanto, la masa del disco de mayor tamaño es 4M.

No se ejerce ningún torque sobre los discos, por lo que su momento angular no cambia. El momento angular inicial es

$$L_0 = L_{10} + L_{20} = I_1\,w_{10} + I_2\,w_{20} = -\frac{1}{2}MR^2\,2w + \frac{1}{2}4M4R^2\,w = 7MR^2w$$

En el que hemos tomado como positivo el sentido de giro del disco de mayor tamaño.

El momento angular final es

$$L_f = L_{1f} + L_{2f} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{2}4M4R^2\right)w_f = \frac{17}{2}MR^2\,w_f$$

De donde

$$w_f = \frac{14}{17}w$$

3. Un satélite de masa *m* describe órbitas circulares de radio R_1 y periodo T_1 alrededor de la Tierra. Otro satélite de masa *2m* también orbita alrededor de la Tierra y posee además la misma energía mecánica total que el primero. Calcular el periodo de la órbita del segundo satélite en función del periodo de la órbita del primero. **(2 puntos)**

Solución

La energía total de un satélite que orbita alrededor de la Tierra a una distancia *r* debido a la acción de su campo gravitatorio es

$$E_T = E_c + U = -G\frac{M_T m}{2r}.$$

En el caso del primer satélite tenemos

$$E_{T,1} = -G\frac{M_T m}{R_1}$$

En el caso del segundo satélite su energía total será

$$E_{T,2} = -G\frac{M_T 2m}{R_2}$$

Igualando obtenemos

$$R_2 = 2R_1$$

Ahora aplicamos la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3}$$

Y despejamos

$$T_2 = \sqrt{\frac{R_2^3}{R_1^3}T_1^2} = \sqrt{8}T_1$$

4. Consideremos una esfera sólida de radio *R* con una cierta carga distribuida en su interior. La distribución de carga tiene simetría esférica y está dada por una función de densidad de carga $\rho(r)$ que tiene la forma:

$$\rho(r) = \begin{cases} a \cdot r & \text{si } r < r_0 \\ b/r & \text{si } r_0 < r < R \end{cases}$$

donde r es la distancia radial al centro de la esfera, r_0 es un valor de corte, interior a la esfera ($r_0 < R$) en el que las propiedades cambian, y a y b son dos parámetros de la distribución.

(a) Obtener el campo eléctrico generado por esta distribución en cualquier valor de *r*. (**2 puntos**)

(b) Qué relaciones deben satisfacer los parámetros a y b para que el campo sea una función continua de *r.* (**0,5 puntos**)

Solución

Debido a la simetría del problema es conveniente utilizar la ley de Gauss:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n dA = 4\pi k Q_{\text{interior}}.$$

con esferas de radio *r*, de modo que

$$\phi_{\text{neto}} = E(r)4\pi r^2 = 4\pi k Q(r) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E}(r) = k\frac{Q(r)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Ahora sólo debemos determinar la carga encerrada dentro de la superficie gaussiana de radio *r*:

1. Caso $r < r_0$

$$Q(r) = \int_{\text{esfera de radio } r} dq = \int_{r=0}^{r=r} \rho(r) dV$$

$$= \int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr = \int_0^r \rho(r)4\pi r^2 dr = 4\pi a\int_0^r r^3 dr = \pi a r^4$$

De modo que el campo será

$$\mathbf{E}(r) = k\pi a r^2 \hat{\mathbf{r}}$$

2. Caso $r_0 < r < R$

$$Q(r) = \pi a r_0^4 + \int_{r_0}^{r} \rho(r) dV$$

$$= \pi a r_0^4 + 4\pi b\int_{r_0}^{r} r dr = \pi a r_0^4 + 2\pi b\left(r^2 - r_0^2\right)$$

De modo que el campo será

$$\mathbf{E}(r) = k\frac{\pi a r_0^4 + 2\pi b\left(r^2 - r_0^2\right)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

3. Caso $r > R$

$$Q(r) = \pi a r_0^4 + 2\pi b\left(R^2 - r_0^2\right)$$

De modo que el campo será

$$\mathbf{E}(r) = k\frac{\pi a r_0^4 + 2\pi b\left(R^2 - r_0^2\right)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Vemos que el campo siempre será una función continua de *r*, independientemente de los valores de a y b.

5. Un astronauta realiza un viaje hasta la estrella Vega, situada a 26 años-luz de la Tierra. Si para el astronauta el viaje ha durado 5 años, ¿cuánto tiempo ha pasado para un observador situado en la Tierra? (**1,5 puntos**)

Solución

El tiempo que ha transcurrido para el astronauta es el tiempo propio del sistema, de modo que el tiempo que ha transcurrido en la Tierra es: $\Delta t_{Tierra} = \gamma \Delta t_{astronauta}$.

Por otro lado tenemos que la velocidad de la nave con respecto a la Tierra es

$$v_{nave} = \frac{d}{\Delta t_{Tierra}} = \frac{ct}{\Delta t_{Tierra}}$$

donde *t* son los 26 años que tarda la luz en llegar a la estrella. Sustituyendo en la expresión que relaciona los dos tiempos obtenemos

$$\Delta t_{Tierra} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{nave}^{2}}{c^2}}}\Delta t_{astronauta} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{\Delta t_{Tierra}^{2} c^2}}}\Delta t_{astronauta}$$

Y despejando llegamos a

$$\Delta t_{Tierra} = \sqrt{\Delta t_{astronauta}^{2} + t^2} = 26,476 \text{ años}$$

Ahora es fácil obtener la velocidad del astronauta con respecto a la Tierra

$$v = 0,9820c$$

y la distancia entre la estrella y el astronauta en el sistema de referencia del astronauta

$$d' = 4,910 \text{ años-luz}$$