Modelos estocásticos

Prueba de evaluación continua

Abril 2020

Dr. Víctor Hernández

Universidad Nacional de Educación a distancia
Departamento de Estadística e Investigación operativa

Modelos estocásticos. PEC 2020. Soluciones del modelo 3

Primer enunciado

(**Modelo de mercado en competencia**) Participan n competidores que, imaginamos, están ordenados en fila, En la primera ronda, el participante que está en el primer lugar de la fila compite con el que está en segundo lugar; el perdedor de la ronda pasa a ocupar el último lugar de la fila, el vencedor ocupa o mantiene el primer lugar y los restantes competidores avanzan una posición. Tales rondas se repiten una y otra vez hasta que algún jugador derrota *consecutivamente* a todos sus contrincantes.

Cuestión 1. (0.5 puntos) Si en cada ronda ambos contrincantes tienen la misma probabilidad de ganar, hallar la probabilidad que cada participante tiene de ganar según el lugar que inicialmente ocupaba en la fila.

Solución de la cuestión 1

Traza un plan

El enunciado sugiere plantear relaciones recurrentes; sin embargo, un primer análisis muestra lo inconveniente de considerar las probabilidades de ganar de cada participante desde la posición inicial, es decir, cuando todavía no se ha jugado una ronda, pues esa situación no se vuelve a alcanzar nunca en el transcurso de la competición puesto que, desde el instante en que se juegue la primera ronda, el jugador que ocupe el primer lugar al menos tendrá una victoria anotada. Se observa también que la competición vuelve a su situación inicial (es recurrente) cada vez que el primer jugador es derrotado.

Pongamos que p_k es la probabilidad que tiene de ganar el participante que ocupa la posición k cuando el primero tiene anotada una victoria.

Considera un caso más simple

Antes de abordar el caso general, consideremos el caso $n = 5$; elegimos este valor porque, siendo más simple, tiene la complejidad suficiente para proporcionar ideas válidas en el caso general.

Para el competidor que está en primera posición y tiene una victoria anotada hay dos alternativas: o bien derrota consecutivamente a los tres competidores siguientes y gana el juego, o bien pierde con alguno de ellos, pasa a la última posición; entonces, tendrá una probabilidad igual a p_4 de ganar pues es como si el juego comenzara de nuevo. Este razonamiento se traduce en la ecuación

$$p_1 = \frac{1}{2^3} + \left(1 - \frac{1}{2^3}\right) p_5 \tag{1}$$

Para el competidor que está en segunda posición cuando el primero tiene una victoria anotada hay dos alternativas: o bien gana al primero en la ronda que los enfrenta y, entonces, tiene una probabilidad p_1 de ganar, o bien pierde en su ronda con el primero y luego el primero pierde con alguno de los competidores siguientes, bien $k = 3$, bien $k = 4$, y desde ese instante tendrá una probabilidad p_{5-k+2} de ganar pues se encontrará en la posición $(5-k+2)$-ésima de la fila. Este razonamiento se traduce en la ecuación

$$p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2^2}p_4 + \frac{1}{2^3}p_3 \tag{2}$$

De manera semejante se razonan las relaciones siguientes

$$p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2^2}p_1 + \frac{1}{2^3}p_4 \tag{3}$$

$$p_4 = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2^2}p_2 + \frac{1}{2^3}p_1 \tag{4}$$

$$p_5 = \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2^2}p_3 + \frac{1}{2^4}p_2 \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

Ahora, si 5 se multiplica por 2 y se resta a 4, se tiene $p_4 - 2p_5 = -p_4 + \frac{1}{2^3}p_1$, luego

$$p_4 = p_5 + \frac{1}{2^4}p_1$$

De manera semejante, si 4 se multiplica por 2 y se resta a 3, resulta

$$p_3 = \left(1 + \frac{1}{2^4}\right)p_4 = \lambda p_4$$

donde $\lambda = 1 + 1/2^4$. Análogamente, si 3 se multiplica por 2 y se resta a 2, resulta

$$p_2 = \left(1 + \frac{1}{2^4}\right)p_3 = \lambda^2 p_4$$

Reemplazando las anteriores en 5 y teniendo en cuenta 1, se obtiene

$$p_5 = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3}{(2^4+1)\lambda^3 - 2^4 + 1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3}$$

Reemplazando sucesivamente se pueden obtener $p_1, p_2, \ldots, p_4$.

El resultado general se sigue exactamente del mismo modo, resultando

$$p_n = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-2}}{(2^{n-1}+1)\lambda^{n-2} - 2^{n-1} + 1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{n-2}} \tag{7}$$

Segundo enunciado

Para estar operativo, cierto sistema requiere que dos baterías que lleva incorporado estén en funcionamiento. Además de las dos baterías en funcionamiento, el sistema tiene una tercera batería en reserva o *standby* que entra en funcionamiento inmediatamente cuando alguna de las dos iniciales se avería. Mientras la batería está en *standby* no consume vida útil.

Cuestión 2. (0.5 puntos) Si los tiempos de funcionamiento de cada batería (su vida útil) son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con distribución común uniforme en $(0,1)$, hallar el tiempo esperado de funcionamiento del sistema.

Cuestión 3. (0.5 puntos) Supongamos que los tiempos de funcionamiento de cada batería (su vida útil) son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con distribución común exponencial de parámetro $\lambda > 0$.

Cuando el sistema deja de funcionar debido a la segunda avería de una batería, retiramos la que todavía está en funcionamiento. ¿Cuál es el tiempo esperado que todavía puede funcionar esa batería?

Cuestión 4. (0.5 puntos) Supongamos que los tiempos de funcionamiento de cada batería (su vida útil) son variables aleatorias independientes e igualmente distribuidas, con distribución común exponencial de parámetro $\lambda > 0$.

Cuando el sistema deja de funcionar debido a la segunda avería de una batería, retiramos la que todavía está en funcionamiento. ¿Cuál es la distribución del tiempo de vida útil que le resta a la batería que retiramos?

Dos resultados auxiliares

Aunque puede darse una respuesta directa a la segunda cuestión, para hacer más simple alguna de las respuestas posibles, daremos antes un par de resultados auxiliares.

Resultado 1. Sean X_1, X_2 dos variables aleatorias independientes con distribución uniforme en $(0,1)$; pongamos $U = \min(X_1, X_2)$, $V = \max(X_1, X_2)$. La distribución conjunta de (U, V) tiene función de densidad

$$f(u, v) = 2I_{\{0<u<v<1\}}(u, v) \tag{8}$$

como se comprueba inmediatamente sin más que observar que

$$P(U > u, V < v) = (v - u)^2, \quad 0 < u < v < 1$$

y gracias a ello obtener la función de distribución conjunta $P(U \le u, V \le v)$.

Si $R = V - U$ es el rango de las variables, a partir de 8 y mediante un cambio de variables, se obtiene la densidad conjunta de (U, R).

$$f(u, r) = 2I_{\{u>0,\, r>0,\, u+r<1\}}(u, r) \tag{9}$$

A partir de 9 se calcula la función de densidad de R condicionada por $U = u$, $0 < u < 1$, y resulta

$$f(r \mid u) = \frac{1}{1-u} I_{\{0<r<1-u\}}(u) \tag{10}$$

En resumen, la distribución de R condicionada por $\min(X_1, X_2) = u$ es uniforme en $(0, 1-u)$.

También de 9 se sigue que la función de densidad de R es

$$f(r) = 2(1-r)I_{\{0<r<1\}}(u) \tag{11}$$

aunque este resultado se puede obtener directamente gracias a la distribución de (U, V).

Resultado 2. Si X_1 y X_2 son dos variables aleatorias independientes con distribuciones uniformes en $(0, a)$ y $(0, b)$, $0 < a < b$, y $U = \min(X_1, X_2)$, resulta

$$P(U > u) = \frac{a-t}{a}\frac{b-t}{b}, \quad \text{si } 0 < t < a$$

luego la función de densidad de U es

$$f_U(u) = \left(\frac{1}{b}\frac{a-u}{a} + \frac{1}{a}\frac{b-u}{b}\right) I_{\{0<u<a\}}(u) \tag{12}$$

y su valor esperado es

$$E\{\min(X_1, X_2)\} = E\{U\} = \frac{a(3b-a)}{6b} \tag{13}$$

Solución de la segunda cuestión

Sean X_1, X_2 y X_3 los tiempos de vida útil de las tres baterías. Si contamos el tiempo desde el instante en que comienza a funcionar el sistema, de las dos inicialmente en funcionamiento, la primera se avería en el instante $U = \min(X_1, X_2)$ y la última se avería en $V = \max(X_1, X_2)$. La batería que estaba en reserva comienza a funcionar en el instante U y se avería en $U + X_3$.

Si T es el tiempo de funcionamiento del sistema, se tiene

$$T = \min(V, U + X_3) = U + \min(V - U, X_3) = U + \min(R, X_3)$$

luego

$$E\{T\} = E\{U\} + E\{\min(R, X_3)\}$$

Ahora bien, por una parte, $E\{U\} = 1/3$, y por otra X_3 es independiente de X_1 y X_2, luego es independiente de R por lo que se tiene

$$\begin{aligned} P(\min(R, X_3) > t) &= P(X_3 > t)P(R > t) \\ &= (1-t)\int_t^1 1(1-r)\,dr = (1-t)^3 \end{aligned}$$

luego

$$E\{\min(R, X_3)\} = \int_0^1 P(\min(R, X_3) > t)\,dt = \frac{1}{4}$$

y $E\{T\} = 1/3 + 1/4 = 7/12$.

Entre otros métodos posibles de calcular $E\{T\}$ está condicionar por U.

$$E\{T \mid U = u\} = u + E\{\min(R, X_3) \mid U = u\}, \quad \text{para } 0 < u < 1$$

La distribución de R condicionada por $U = u$ es uniforme en $(0, 1-u)$, luego $\min(R, X_3) \mid U = u$ es el mínimo de dos variables independientes, una uniforme en $(0, 1-u)$ y la otra uniforme en $(0, 1)$ y, por el segundo resultado, se tiene

$$E\{\min(R, X_3) \mid U = u\} = \frac{(1-u)(2+u)}{6}$$

por lo cual, dado que la densidad de U es $f_U(u) = 2(1-u)$, $0 < u < 1$, resulta

$$E\{T\} = \int_0^1 \left\{u + \frac{(1-u)(2+u)}{6}\right\} 2(1-u)\, du = \frac{7}{12} \tag{14}$$

Solución de la tercera cuestión

Solución informal

El tiempo hasta que falla la primera de las baterías es U, mínimo de dos variables exponenciales. Por consiguiente U tiene distribución exponencial de parámetro 2λ y el tiempo esperado hasta este fallo es $1/2\lambda$.

Por otra parte, el tiempo que transcurre desde el instante U hasta que ocurre el segundo fallo de una batería y falla el sistema es $\min(V-U, X_3)$; pero $V-U$ tiene distribución exponencial de parámetro λ y es independiente de X_3, luego el tiempo esperado que transcurre desde el fallo de la primera batería hasta el de la segunda es $1/2\lambda$.

Por último, el tiempo de vida de la batería todavía en funcionamiento desde que ocurre el segundo fallo tiene también distribución exponencial de parámetro λ, luego el tiempo esperado que todavía puede funcionar es $1/\lambda$.

Una solución formal

De las dos baterías inicialmente instaladas, la más duradera falla en el instante $V = \max(X_1, X_2)$. La tercera batería falla en el instante $U + X_3$, donde $U = \min(X_1, X_2)$.

La función de densidad conjunta de (U, V) es

$$f(u, v) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(u+v)} I_{\{0<u<v\}}(u, v)$$

luego, si $R = V - U$, la función de densidad conjunta de (U, R) es

$$f(u, r) = 2\lambda^2 e^{-\lambda(2u+r)} I_{\{u>0,\, r>0\}}(u, r)$$

y la distribución de R es $f(r) = \lambda e^{-\lambda r} I_{\{r>0\}}(r)$.

Por su parte, el tiempo de vida que le resta a la batería en funcionamiento cuando falla el sistema es $|V - U - X_3| = |R - X_3|$. Luego el tiempo esperado de vida es

$$E\{|R - X_3|\} = E\{(R - X_3) I_{\{R > X_3\}}\} + E\{(X_3 - R) I_{\{R < X_3\}}\}$$

y, por simetría, resulta $E\{(R-X_3)I_{\{R>X_3\}}\} = E\{(X_3-R))I_{\{R<X_3\}}\}$.

Ahora bien, resulta

$$E\{(R-X_3)I_{\{R>X_3\}}\} = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x_3}\,dx_3 \int_{x_3}^\infty (r-x_3)\lambda e^{-\lambda r}\,dr = \frac{1}{2\lambda} \tag{15}$$

luego $E\{|R-X_3|\} = 2E\{(R-X_3)I_{\{R>X_3\}}\} = \frac{1}{\lambda}$.

Solución de la cuarta cuestión

Solución informal

El tiempo hasta que falla la primera de las baterías es U, mínimo de dos variables exponenciales.

Por otra parte, desde el instante U hasta que falla el sistema transcurre un tiempo $\min(V-U, X_3)$; pero $V-U$ tiene distribución exponencial de parámetro λ y es independiente de X_3, luego este tiempo tiene una distribución exponencial de parámetro $1/2\lambda$.

Por último, desde el instante en que se produce la segunda avería, el tiempo de vida de la batería que todavía está funcionamiento es $\max(Y,Z) - \min(Y,Z)$, donde Y, Z son exponenciales independientes de parámetro λ; se sigue que ese tiempo residual tiene también distribución exponencial de parámetro λ.

Una solución formal

Con la notación anterior, debemos calcular $P(|R-X_3|>t)$, $t>0$. Se tiene

$$P(|R-X_3|>t) = P(R-X_3>t, R>X_3) + P(X_3-R>t, R<X_3)$$

y, por simetría, $P(R-X_3>t, R>X_3) = P(X_3-R>t, R<X_3)$.

Ahora, resulta

$$\begin{aligned} P(R-X_3>t, R>X_3) &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x_3}\,dx_3 \int_{t+x_3}^\infty \lambda e^{-\lambda r}\,dr \\ &= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda(t+2x_3)}\,dx_3 = \frac{1}{2}e^{-\lambda t} \end{aligned} \tag{16}$$

luego

$$P(|R-X_3|>t) = 2P(R-X_3>t, R>X_3) = e^{-\lambda t}$$

y $|R-X_3|$ tiene distribución exponencial de parámetro λ.