Geometría Básica. Septiembre 2015.

Duración 2 horas. **No se permite ningún tipo de material**.

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (3 puntos)
Definir homotecia de centro C y razón k.
Probar que la imagen del segmento $[A, B]$ por la homotecia $\eta_{C,k}$ es el segmento $[\eta_{C,k}(A), \eta_{C,k}(B)]$.

Ejercicio 2. (4 puntos) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro O. Sean P, Q y P', Q' puntos en $\mathcal{C}$, $M = \text{medio}(P, Q)$ y $M' = \text{medio}(P', Q')$. Demostrar $PQ = P'Q'$ si y solo si $OM = OM'$.

Ejercicio 3. (3 puntos) . Sea $\mathcal{P}$ un octaedro y C_1, C_2 dos caras de $\mathcal{P}$ de modo que tienen la arista $[A, B]$ en común. Sean ρ_1, ρ_2 dos rotaciones de ángulo $2\pi/3$ que son simetrías de $\mathcal{P}$, el eje de rotación de ρ_1 pasa por el centro de C_1, el eje de rotación de ρ_2 pasa por el centro de C_2 y además $\rho_1(A) = \rho_2(A) = B$. Describir y clasificar la isometría $\rho_2 \circ \rho_1$.

SOLUCIONES

Ejercicio 1.

Definición 7.1, página 113 y Corolario 7.5, páginas 115-116, del Curso de Geometría Básica.

Ejercicio 2.

Supongamos que O, P y Q no están alineados.

En primer lugar se observa que O está en la mediatriz $m_{P,Q}$ del segmento $[P, Q]$. En efecto $OP = OQ = r$ (radio de $\mathcal{C}$) y $m_{P,Q} = \{X : d(X, P) = d(X, Q\}$ (ver Corolario 2.30, página 41).

También $O \in m_{P',Q'}$.

Consideremos los triángulos $\triangle\{O, M, P\}$ y $\triangle\{O, M', P'\}$.

Tenemos que $\angle_{\triangle\{O,M,P\}}M = \angle_{\triangle\{O,M,P\}}M$ es recto, pués O está en $m_{P,Q}$ y en $m_{P',Q'}$.

Además $MP = \frac{1}{2}PQ$ y $M'P' = \frac{1}{2}P'Q'$, $OP = OP' = r$ y al ser $\triangle\{O, M, P\}$ y $\triangle\{O, M', P'\}$ rectángulos por el teorema de Pitágoras:

$$OM = +\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}PQ^2}$$
$$OM' = +\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}P'Q'^2}$$

Entonces

$$OM = OM' \Longleftrightarrow +\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}PQ^2} = +\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}P'Q'^2} \Longleftrightarrow PQ = P'Q'$$

Si P y Q están alineados entonces o bien $P = Q$ o son diametralmente opuestos y entonces $PQ = 2r$. En ambos casos la demostración es inmediata. Por ejemplo si $PQ = 2r$, entonces $PQ = P'Q' = 2r \Leftrightarrow P, Q$ son diametralmente opuestos y P', Q' son diametralmente opuestos $\Leftrightarrow$ $M = O$, $M' = O' \Longleftrightarrow OM = OM' = 0$.

Ejercicio 3.

Supongamos que la cara C_1 tiene por vértices A, B, E y la cara C_2 los vértices A, B, F.

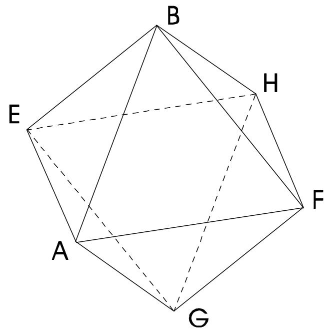
En la figura de la página siguiente nombramos el resto de los vértices.

Se tiene:

$\rho_2 \circ \rho_1(A) = \rho_2(B) = F$

$\rho_2 \circ \rho_1(E) = \rho_2(A) = B$

$\rho_2 \circ \rho_1(B) = \rho_2(E) = H$



$\rho_2 \circ \rho_1(F) = \rho_2(H) = G$
$\rho_2 \circ \rho_1(G) = \rho_2(F) = A$
$\rho_2 \circ \rho_1(H) = \rho_2(G) = E$

Entonces $\rho_2 \circ \rho_1$ es una rotación de ángulo $2\pi/3$ cuyo eje pasa por los centros de las caras $\triangle\{E, B, H\}$ y $\triangle\{A, F, G\}$.