⁕ Duración del examen: dos horas ⁕
⁕ No se permite el uso de ningún tipo de material ⁕

Ejercicio 1) **(2 puntos)** Probar que si f es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$(y+1)\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

entonces f es constante.

Ejercicio 2) **(4 puntos)** utilizando el método de variables separadas, hallar la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, \quad x \in (0, \frac{1}{2}), \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1 - 2x \\ u_x(0,t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3) **(4 puntos)** Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

a) Hallar el desarrollo en cosenos de la función f en el intervalo $[0,\pi]$.

b) ¿En qué puntos del intervalo $[0,\pi]$ la serie en cosenos converge a $f(x)$?

c) Según los valores de $\lambda \in [0,1]$ hallar las soluciones del siguiente problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x), \quad x \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$