

## PROBLEMA 1 (3 puntos)

Consideremos el siguiente problema unidimensional

$$u_{xx} = u$$

con condiciones de contorno

$$u(-1) = -1 + \exp[-2]$$

$$u(1) = 1 - \exp[-2]$$

y cuya solución exacta tiene la forma

$$u(x) = \exp[x-1] - \exp[-x-1].$$

Dada una aproximación  $u_N(x)$  de orden  $N$  a la función exacta  $u(x)$ , definimos el error cometido por la aproximación como  $E(x) = u(x) - u_N(x)$ , y definimos el error total en el intervalo  $[a, b]$  como  $E_T = \int_a^b |u(x) - u_N(x)| dx$ .

### Ejercicio 1 (TEMA 2). Coeficientes espectrales y convergencia (0.5 puntos)

- (a) Calcular los coeficientes  $a_n$  de la expansión espectral de la solución exacta tomando como base los polinomios de Chebyshev hasta orden  $n = 30$  (o hasta el orden al que se llegue). Se recomienda utilizar precisión infinita en los cálculos para poder obtener los coeficientes de órdenes altos (valores muy pequeños). Mostrar los valores obtenidos con varias cifras significativas. ¿Qué circunstancia especial se observa en los coeficientes espectrales? ¿Por qué ocurre esto?
- (b) Representar gráficamente el valor de los coeficientes en función del orden, utilizando la representación adecuada (log-lineal, log-log,...) para determinar el tipo de convergencia (algebraica, geométrica, subgeométrica y supergeométrica).
- (c) Determinar el orden (índice) de convergencia, algebraica o exponencial, de los coeficientes.
- (d) Determinar la tasa asintótica de convergencia.
- (e) Representar gráficamente el error cometido  $E(x)$  al aproximar la solución exacta mediante la serie espectral truncada en el intervalo  $[-1, 1]$  para  $N = 3, 5$  y  $11$ . Analizar el dominio de convergencia de la expansión infinita a la función exacta. Relacionar el resultado en relación a las singularidades de la función y/o de su ecuación diferencial.

**Ejercicio 2 (TEMA 3).**  
**Método espectral de Galerkin (0.5 puntos)**

En este ejercicio vamos a obtener una aproximación por serie espectral de Chebyshev

$u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x)$  a la solución de la ecuación diferencial mediante el método de Galerkin. Como se trata de un problema lineal, deberemos construir la matriz de Galerkin  $\mathbf{H}$  y resolver la ecuación lineal  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}$  para obtener el vector  $\mathbf{a}$  de coeficientes espectrales.

Tenemos  $N+1$  grados de libertad, por lo que la matriz deberá tener dimensiones  $N+1 \times N+1$ . Deberemos utilizar dos filas para imponer las condiciones de contorno, y las  $N-1$  restantes para la minimización de la función residuo:

$$(T_n(x), R(x, \{a_i\})) = 0 \quad \text{con } n = 0, \dots, N-2.$$

Comparar en una tabla los valores de los coeficientes  $\{a_i\}$  obtenidos para  $N = 3, 5$  y  $7$  con los coeficientes espectrales exactos obtenidos en el ejercicio anterior y calcular el error total  $E_T$  (definido arriba) cometido al aproximar la solución exacta por las aproximaciones de Galerkin en el intervalo del problema. Como ejemplo se muestra la matriz  $\mathbf{H}$  obtenida para  $N = 3$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\pi & 0 & 4\pi & 0 \\ 0 & -\pi/2 & 0 & 12\pi \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 3 (TEMAS 4 y 5).**  
**Interpolación, funciones cardinales y cuadratura gaussiana (0.5 puntos)**

En este ejercicio vamos a trabajar algunos conceptos de la interpolación y la cuadratura gaussiana. Es muy recomendable la lectura del documento *Cuadratura Gaussiana.pdf* del curso virtual)

(a) Aproximar la solución exacta en el intervalo  $[-1,1]$  a un polinomio de grado  $N=5$ ,  $P_5(x)$ , mediante interpolación de Lagrange. Considerar tres conjuntos de puntos de interpolación  $\{x_j\}$ :

- Puntos de interpolación uniformemente espaciados en el intervalo sin considerar los extremos
- Puntos de la cuadratura de Chebyshev-Gauss (raíces de  $T_{N+1}(x)$ ).
- Puntos de la cuadratura de Lobatto (raíces de  $T_{N,x}(x)$  + extremos del intervalo).

Escribir el polinomio obtenido en cada caso (como suma de monomios con coeficientes en formato decimal) y representar gráficamente los errores cometidos por las aproximaciones con respecto a la solución exacta,  $E(x)$ , en el intervalo  $[-1,1]$ . Calcular el error total cometido por cada aproximación en dicho intervalo. ¿Cuál es la mejor aproximación?

### Comentario sobre la teoría.

En los Temas 4 y 5, hemos visto tres formalismos distintos para construir el polinomio de interpolación a una función:

- Formulación de Lagrange, empleando las funciones cardinales

$$C_i(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Utilizando las funciones cardinales asociadas a los polinomios ortogonales  $\phi_N(x)$

$$C_i(x) \equiv \frac{\phi_{N+1}(x)}{\phi_{N+1,x}(x) \Big|_{x=x_i} (x - x_i)} \quad i = 0, \dots, N \quad \text{Cuadratura de Gauss}$$

$$C_i(x) \equiv \frac{(1-x^2)\phi_{N,x}(x)}{\left[ (1-x^2)\phi_{N,x}(x) \right]_x \Big|_{x=x_i} (x - x_i)} \quad i = 0, \dots, N \quad \text{Cuadratura de Lobatto}$$

- A partir de la expansión en serie espectral de la función exacta, truncada a orden  $N$ , y calculando los coeficientes de la serie mediante cuadratura gaussiana para las dos cuadraturas posibles (Sección 4.5, Teorema 21 para la interpolación por Chebyshev)

Resulta un buen ejercicio comprobar que los tres formalismos son completamente equivalentes, es decir, que el polinomio interpolador utilizando el segundo y tercer formalismo (para ambos conjuntos de abscisas) es igual al polinomio obtenido mediante Lagrange para el mismo conjunto de abscisas.

También resulta interesante deducir las expresiones proporcionadas por el Teorema 21 de la Sección 4.5, que nos muestran los coeficientes espectrales del polinomio interpolador de Chebyshev para las dos cuadraturas de  $N+1$  puntos: Gauss-Chebyshev (también referida en el texto como *Roots Grid* por tratarse de las raíces de  $T_{N+1}(x)$ ) y Lobatto (referida como *Extrema Grid* por tratarse de las raíces de la derivada de  $T_N(x)$ , que incluye los extremos del intervalo). Veamos, por ejemplo cómo se deducen las (4.49) y (4.50) para la cuadratura de Lobatto (el análisis para la de Gauss es muy similar).

Tenemos el polinomio de orden  $N$ ,  $P_N(x)$ , que interpola la función  $u(x)$  en los  $N+1$  puntos de la cuadratura de Lobatto. Su expansión espectral en la base de polinomios de Chebyshev tiene la forma:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x)$$

donde  $a_n$  son los coeficientes espectrales. Nuestro objetivo es demostrar (4.49), es decir que

$$a_0 = \frac{1}{2} b_0, \quad a_1 = b_1, \quad \dots, \quad a_{N-1} = b_{N-1}, \quad a_N = \frac{1}{2} b_N$$

donde los coeficientes  $b_n$  están dados por (4.50):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N f(x_k) T_n(x_k) \\ &= \frac{2}{N} \left[ \frac{1}{2} f(x_0) T_n(x_0) + f(x_1) T_n(x_1) + \dots + f(x_{N-1}) T_n(x_{N-1}) + \frac{1}{2} f(x_N) T_n(x_N) \right] \end{aligned}$$

Para demostrarlo deberemos calcular los pesos de la cuadratura de Lobatto (integrando las funciones cardinales, por ejemplo). También debemos darnos cuenta que

$$(T_n, T_n) = \begin{cases} (T_n, T_n)_G & \text{si } n < N, \\ \frac{1}{2}(T_n, T_n)_G & \text{si } n = N, \end{cases}$$

donde  $(f, g)_G$  es la aproximación discreta por cuadratura gaussiana de Lobatto (utilizando los  $N+1$  puntos de la cuadratura de Lobatto) del producto interno de las dos funciones.

Comencemos considerando los  $N+1$  puntos de colocación de la cuadratura de Lobatto, dados por las raíces de  $T_{N,x}(x)$ :

$$x_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad i = 0, \dots, N$$

Introduciendo estas abscisas en las funciones cardinales de interpolación e integrándolas junto a la función peso en el intervalo  $[-1, 1]$  obtenemos

$$w_i = \begin{cases} \pi / (2N) & i = 0, N \quad (\text{puntos extremos}) \\ \pi / N & i \neq 0, N \quad (\text{puntos internos}) \end{cases}$$

De este modo tenemos que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx \approx \frac{\pi}{N} \sum_{k=0}^N {}''f(x_k)$$

que será exacto cuando  $f(x)$  sea un polinomio de grado menor o igual a  $2N+1$ .

Por consiguiente, los coeficientes espectrales  $a_n$  tienen la forma

$$a_n = \frac{(T_n, P_N(x))}{(T_n, T_n)} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (T_0, P_N(x))_G = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N {}''f(x_k) T_0(x_k) = \frac{1}{2} b_0 & \text{si } n = 0 \\ \frac{2}{\pi} (T_n, P_N(x))_G = \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N {}''f(x_k) T_n(x_k) = b_n & \text{si } 0 < n < N \\ \frac{1}{\pi} (T_N, P_N(x))_G = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N {}''f(x_k) T_N(x_k) = \frac{1}{2} b_N & \text{si } n = N \end{cases}$$

donde hemos tenido en cuenta que  $P_N(x_k) = T_N(x_k)$  y que  $(T_N, P_N(x)) = \frac{1}{2} (T_N, P_N(x))_G$ , quedando así demostrado.

(b) Vamos a aproximar mediante cuadratura Gaussiana la integral de la solución exacta del problema en el intervalo  $[-1, 1]$ . De acuerdo con lo expuesto en el documento sobre cuadratura Gaussiana, ¿cuál será la cuadratura que mejor aproximación proporcione? ¿Cuál es la función peso  $w(x)$ ? Mostrar los resultados obtenidos para cuadraturas de  $N = 2, 3, 4$  y  $5$  puntos, junto con los errores cometidos en %.

#### Ejercicio 4 (TEMAS 4, 5 y 6).

##### Método pseudoespectral de colocación ortogonal (0.5 puntos)

Obtener una aproximación  $u_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(x)$  a la solución de la ecuación diferencial por el método de colocación ortogonal. Como en Galerkin, deberemos construir la matriz de colocación  $\mathbf{H}$  y resolver la ecuación lineal  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}$  para obtener el vector  $\mathbf{a}$  de coeficientes espectrales.

De nuevo serán necesarias  $N+1$  ecuaciones, 2 para satisfacer las condiciones de contorno mientras que las  $N-1$  restantes impondrán que la función residuo se anule en los puntos de colocación:

$$R(x_i, \{a_i\}) = 0 \quad \text{con } i = 1, \dots, N-1$$

Como se hizo en el ejercicio de Galerkin, comparar en una tabla los valores de los coeficientes obtenidos para  $N=3, 5$  y  $7$  con los coeficientes espectrales exactos, y calcular el error total de las aproximaciones en el intervalo del problema. Hacer esto para los puntos de cuadratura de Chebyshev-Gauss:

$$x_i = -\cos\left[\frac{(2i-1)\pi}{2(N-1)}\right] \quad i = 1, \dots, N-1$$

y para los puntos de la cuadratura de Lobatto:

$$x_i = -\cos\left[\frac{i\pi}{N}\right] \quad i = 1, \dots, N-1,$$

donde se han eliminado los puntos extremos porque ya han sido considerados en las condiciones de contorno.

Comparar los resultados con los obtenidos en el ejercicio 2 usando Galerkin. ¿Cuál parece ser el método más preciso para órdenes bajos? ¿Y para los altos?

Como ejemplo se muestra la matriz  $\mathbf{H}$  obtenida para  $N=3$  usando Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/\sqrt{2} & 4 & -1/\sqrt{2} - 12\sqrt{2} \\ -1 & -1/\sqrt{2} & 4 & 1/\sqrt{2} + 12\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y usando Lobatto:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1/2 & 9/2 & -13 \\ -1 & -1/2 & 9/2 & 13 \end{pmatrix}$$

#### Comentario sobre la teoría.

Resulta muy interesante comprobar (ejercicio voluntario) que el resultado obtenido del método de colocación ortogonal es exactamente igual al que se obtendría utilizando el método de Galerkin, como en el ejercicio 2, pero aproximando las integrales de los productos internos mediante la cuadratura gaussiana con los puntos de cuadratura empleados en la colocación ortogonal (Teorema 16, pág. 89). Por ejemplo, para la cuadratura de Gauss tendríamos que la matriz de Galerkin tiene la forma:

$$H_{ij} = (T_i, L(T_j)) \approx \frac{\pi}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} T_i(x_k) L(T_j(x)) \Big|_{x_k}$$

**Ejercicio 5 (TEMAS 4, 5 y 6).**  
**Colocación Ortogonal vs. Interpolación (0.5 puntos)**

En este ejercicio se comprueba la absoluta equivalencia entre interpolación y colocación ortogonal cuando la interpolación y la colocación se realizan en los puntos de cuadratura del problema, y los productos internos son aproximados mediante cuadratura gaussiana. Para ello vamos a calcular las matrices **M**, **L** y **H** de nuestro problema utilizando la base espectral de Chebyshev. Recordamos que esta formulación matricial es aplicable sólo a problemas  $Lu = f$  en los que  $L$  es un operador integro-diferencial lineal.

Método de interpolación:  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$  con  $L_{ij} = L(C_j(x)) \Big|_{x_i}$

Método de colocación:  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{f}$  con  $H_{ij} = L(T_j(x)) \Big|_{x_i}$

Matrix Multiplication Transformation:  $\mathbf{M} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{a}$  con  $M_{ij} = \frac{T_i(x_j)w_j}{(T_i, T_i)}$

Obtener la expresión numérica de las matrices para orden  $N = 3$  y comprobar que se verifican las relaciones  $\mathbf{L} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{M}$  y  $M_{ij}^{-1} = \phi_j(x_i)$ . Hacerlo para las dos cuadraturas: Chebyshev-Gauss y Lobatto. **Atención:** para el correcto cálculo de la matriz de coeficientes **M** en la cuadratura de Lobatto es muy importante tener en cuenta las consideraciones indicadas en el comentario sobre la teoría del Ejercicio 3.

Como ejemplo se muestran las matrices obtenidas para orden  $N = 2$ .

- Cuadratura de Chebyshev-Gauss:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{H} \\ \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1/3 & -8/3 & 4/3 \\ 4/3 & -11/3 & 4/3 \\ 4/3 & -8/3 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3}/2 & 7/2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -\sqrt{3}/2 & 7/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

- Cuadratura de Lobatto:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \mathbf{L} & \mathbf{H} \\ \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Ejercicio 6 (TEMAS 4, 5 y 6).**  
**Métodos pseudoespectrales vs. Diferencias finitas (0.5 puntos)**

En este último ejercicio vamos a comparar la eficiencia y precisión de los métodos pseudoespectrales con uno de los métodos de integración numérica más utilizado, las diferencias finitas. Este método consiste básicamente en discretizar la ecuación diferencial y su dominio, y resolver el sistema de ecuaciones para los valores de la función en los puntos de colocación.

Un esquema clásico de diferencias finitas para nuestro problema tiene la forma

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = u_i \quad i = 1, \dots, N-1$$
$$u_0 = -1 + \exp[-2]$$
$$u_N = 1 - \exp[-2]$$

donde hemos discretizado el dominio del problema en  $N+1$  puntos (incluyendo los extremos) identificados mediante el subíndice  $i$ :  $x_i = -1 + i\Delta x$ , siendo  $\Delta x = 2/N$  el intervalo de discretización. Nótese que en esta aproximación, los puntos de la discretización están regularmente dispuestos en el dominio. Las ecuaciones anteriores conducen a un sistema lineal de  $N+1$  ecuaciones donde las incógnitas son los valores de la función en los puntos de discretización,  $u_i$ . Una vez resuelto el sistema, se puede obtener una buena aproximación a la solución analítica  $u(x)$  en el intervalo del problema mediante el polinomio interpolador de orden  $N$ .

El objetivo de este ejercicio es comparar este método con los métodos que hemos estudiado en este curso, en concreto con el método pseudoespectral de colocación ortogonal utilizando la cuadratura de Lobatto, implementado en el Ejercicio 4. Comparar en una tabla el error total en el intervalo de integración obtenido por cada aproximación para el mismo orden, con  $N$  desde 3 hasta 8. Como ejemplo se muestra el polinomio obtenido con el método de diferencias finitas para  $N=5$ :  $0.737267x + 0.121214x^3 + 0.00618438x^5$