Unidad didáctica 4: Aplicaciones lineales

4.1 Introducción

En esta unidad didáctica se estudiarán la aplicaciones propias entre espacios vectoriales. Dados dos espacios vectoriales de tipo finito E y F definidos sobre el mismo cuerpo ***K***, una aplicación $f: E \to F$ es **lineal** si transforma combinaciones lineales de vectores del espacio de partida E en combinaciones lineales del espacio F de llegada:

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v) \ ,$$

para todo $u, v \epsilon E$. Se dice que f respeta la estructura de los espacios vectoriales. A las aplicaciones lineales también se les llama **homomorfismos vectoriales**. Una de las características de estas aplicaciones es que transforman el cero del espacio vectorial de partida en el cero del espacio vectorial de llegada: $f(0_E) = 0_F$, aunque, igual que en el texto base, prescindiremos de la notación con subíndices y llamaremos 0 al elemento neutro de todo espacio vectorial, ya sea una matriz, un polinomio, una aplicación o un elemento de K_n.

El conjunto formado por todas las aplicaciones lineales entre dos espacios vectoriales E y F de denota por $\mathcal{L}(E, F)$ y tiene estructura de espacio vectorial para la suma de aplicaciones y el producto de una aplicación por un escalar.

Existen dos subespacios vectoriales asociados a una aplicación lineal dada $f: E \to F$ denominados núcleo e imagen. El **núcleo de *f*** es el conjunto de vectores de E cuya imagen es el 0 de F:

$$\ker(f) = \{u \in E : f(u) = 0\} \subset E$$

(ker viene de kernel, núcleo en inglés. Es la notación má habitual aunque en otros libros de texto se denota por Nuc(f)). Y la **imagen de *f*** es el subespacio vectorial de F generado por todas las imágenes de los vectores de E:

$$\mathrm{im}(f) = \{f(v) : v \in E\} \subset F$$

Las dimensiones de estos subespacios guardan la siguiente relación: $\dim \ker(f) + \dim im(f) = \dim(E)$.

El estudio de estos subespacios vectoriales permite clasificar las aplicaciones en los siguientes tipos:

- Inyectivas o monomorfismos: si $\ker(f) = \{0\}$.
- Suprayectivas (o sobreyectivas) o epimorfismos: si $\mathrm{im}(f) = F$.
- Biyectivas o isomorfismos: inyectivas y sobreyectivas a la vez.
- Cuando los espacios de partida E y de llegada F coinciden, esto es $f: E \to E$ entonces se dice que *f* es un endomorfismo y cuando es biyectivo se le llama automorfismo.

Por cómo se comportan las aplicaciones lineales respecto a las combinaciones lineales, ocurre que conservan la dependencia lineal de vectores: si $u_1, \dots, u_n$ son vectores linealmente dependientes en E, entonces sus imágenes $f(u_1), \dots, f(u_n)$ son vectores linealmente dependientes en F. Eso no ocurre con la independencia lineal, salvo que la aplicación sea inyectiva.

Otra de las operaciones entre aplicaciones lineales es la composición. Para realizar la **composición de dos aplicaciones lineales** *f* y g tenemos que tener espacios vectoriales E, F y G (no necesariamente distintos) definidos sobre el mismo cuerpo ***K***. Si $f: E \to F$ y $g: F \to G$ entonces podemos definir la aplicación *f* compuesto con g, que se denota por $g \circ f$ del siguiente modo $g \circ f: E \to G,\ g \circ f(v) := g(f(v))$, para todo $v \epsilon E$.

El **Primer Teorema de Isomorfía** (pág. 195) nos dice que toda aplicación lineal *f* se puede descomponer como la composición de 3 aplicaciones canónicamente asociadas a ella: una suprayectiva, una biyectiva y una tercera inyectiva.

Se dedicará un espacio al estudio de dos tipos de aplicaciones lineales: las **proyecciones y las simetrías**.

Finalmente, se describen las aplicaciones lineales $f: E \to F$ mediante ecuaciones y matrices que relacionan las coordenadas de vectores respecto a bases fijadas B y B' en los espacios de partida y de llegada, respectivamente. En particular, la Proposición 9.17, pag. 200, nos dice que una aplicación lineal queda completamente determinada conocidas las imágenes de los vectores de una base de E. Además, si $(x_1, \dots, x_n)$ son las coordenadas en B de un vector $u \in E$ e $(y_1, \dots, y_m)$ son las coordenadas en B' de su imagen $f(u) \in F$, existe una única matriz M de orden $m \times n$ que cumple:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{y_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y_m} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x_n} \end{pmatrix}$$

lo que se resume diciendo $\boldsymbol{y^t = Mx^t}$. A esta expresión la denominaremos ecuaciones de *f* respecto a las bases $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$. A la matriz M se la denomina **matriz de *f* en las bases $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{B'}$** y en el texto base se denota por $\boldsymbol{M_f(B, B')}$.

Estaremos interesados en obtener matrices de una misma aplicación en distintas bases, y veremos cómo se relacionan dichas matrices con las matrices de cambio de base o de cambio de coordenadas.

La última sección, la II.10, se dedica al estudio del **espacio dual** E^* asociado a un ***K***-espacio vectorial *E*. El dual está formado por todas las formas lineales definidas en *E*, siendo una forma lineal una aplicación lineal de *E* en ***K*** , el cuerpo de escalares (***K*** es un espacio vectorial sobre sí mismo). Esta es la parte más abstracta de la asignatura.
Habrá que entender, cómo una forma lineal en E^* determina un hiperplano en *E*, y viceversa. Calcular la base dual asociada a una base de *E*. Sobre el Principio de dualidad: no se utilizará para demostraciones o ejercicios en el examen, pero es un resultado muy potente y es importante leerlo y comprenderlo.

4.2 Conceptos más importantes

Sección II.9. Aplicaciones lineales
- Definición y propiedades.
- Las aplicaciones: identidad y nula.
- Núcleo e imagen de una aplicación.
- Imagen inversa.
- Aplicación inyectiva, suprayectiva (o sobreyectiva) y biyetiva.
- Isomorfismo de coordenadas (pág. 195).
- Composición de aplicaciones.
- Primer Teorema de Isomorfía.
- Proyección y simetría.
- Ecuaciones y matriz de una aplicación lineal respecto a dos bases dadas.
- Rango de una aplicación lineal.

Sección II.10. El espacio dual
- Forma lineal.
- Espacio dual E^* de un espacio vectorial.
- Isomorfismo entre E^* y E. Codimensión.

4.3 Resultados del aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con precisión y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) más importantes.

Se desarrollarán las siguientes habilidades:

- Comprobar si una aplicación entre dos espacios vectoriales es lineal.
- Calcular la imagen de un vector cualquiera, conocidas las imágenes de los vectores de una base.
- Obtener ecuaciones, base y dimensión de los subespacios núcleo e imagen.
- Determinar el rango de una aplicación lineal.
- Clasificar una aplicación lineal: determinar si es inyectiva, suprayectiva o biyectiva.
- Obtener la matriz de una aplicación lineal en distintas bases.
- Determinar si una aplicación dada es una simetría o una proyección.