La puntuación máxima de cada preguntase indica en cada una de ellas. Se valorará la exposición de las respuestas dadas. No se permite el uso de ningún tipo de material.

1. (3 puntos) Explicar el concepto de plano tangente a la gráfica de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ en un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. Describir su relación con las derivadas parciales y la diferenciabilidad de f en ese punto.

Nota: No utilizar más extensión que la de una cara para responder a esta pregunta.

2. (2 puntos) Sea f una función con derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2$. Calcular las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x^2 y, x + y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x^2 y, x + y)$$

3. (2 puntos) Hallar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$$

definida en $\mathbb{R}^2$.

4. (3 puntos) Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y^2 - x y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar su continuidad en $\mathbb{R}^2$ y estudiar si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ son iguales.

Examen 2016 septiembre

Nelson

1.

Teoría

2.

Consideramos $g(x,y) = (x^2y, x+y)$, entonces $H = (f \circ g)(x,y) = f(x^2y, x+y)$, y por lo tanto $\mathbf{D}H = \mathbf{D}f(g(x,y))\mathbf{D}g(x,y)$.
Por un lado

$$\mathbf{D}g(x,y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}f(g(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^2y, x+y) \end{bmatrix}$$

entonces

$$\mathbf{D}H = \mathbf{D}f(g(x,y))\mathbf{D}g(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^2y, x+y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} f(x^2y, x+y) = 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^2y, x+y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x^2y, x+y) = x^2\frac{\partial f}{\partial x}(x^2y, x+y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^2y, x+y)$$

3.

Tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y - x$$

igualando a 0 en ambas funciones tenemos el punto crítico $(x,y) = (0,0)$.
Calculamos las derivadas segundas para construir la matriz hessiana H.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$$

la matriz hessiana es

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

como todos los menores principales de H son positivos tenemos que el punto $(0,0)$ es un mínimo.

4.

La función es continua en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ por ser composición de funciones continuas, estudiemos el caso $(0,0)$ aproximando su valo rpor límite

$$\lim_{x,y \to 0,0} f(x,y) = \lim_{r \to 0} \frac{r^5 \cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta - r^4 \cos\theta \operatorname{sen}^3\theta}{r^2} = 0 = f(0,0)$$

por lo tanto también es continua en $(0,0)$. La función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Ahora calculamos las derivadas primeras y segundas en $(0,0)$ por la definición por límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$