Sea $f_n = nxe^{-nx^2}$. Hallar el límite $f(x) = \lim_n f_n(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y comparar

$$\lim_n \int_0^1 f_n(x)dx \quad y \quad \int_0^1 f(x)\,dx$$

SOLUCIÓN: Fijemos $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_n \frac{nx}{e^{+nx^2}} = \left\{ \text{ind } \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_n \frac{x}{x^2 e^n} = 0$$

Por Tanto $f(x) = 0$ y $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

Por otro lado

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 (-2nx)e^{-nx^2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2} e^{-nx^2}\Big|_0^1 = -\frac{1}{2}\left[e^{-n} - 1\right]$$

y

$$\lim_n \int_0^1 nx\,e^{-nx^2} = \frac{1}{2}.$$

Nota: Podemos deducir, pues, que la convergencia NO es convergente

Calcular para $\alpha \in (-1, 1)$ la integral $\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^\alpha(x)\,dx$.

SOLUCIÓN:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{ctg}^\alpha(x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-\alpha}(x)\cos^\alpha(x)\,dx =$$

(*) $= \frac{1}{2}\beta\left(\frac{1-\alpha}{2}, \frac{1+\alpha}{2}\right) =$ por la fórmula de los complementos $= \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)}{\Gamma(1)} =$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)}$$

* $2p-1=-\alpha \qquad 2p=1-\alpha \qquad p=\frac{1-\alpha}{2}$

$2q-1=\alpha \qquad 2q=1+\alpha \qquad p=\frac{1+\alpha}{2}$

Fórmula de los complementos

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)}, \quad 0<p<1$$

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y no idénticamente nula tal que $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.

cualesquiera que sean $x, y \in \mathbb{R}$

a) Probar que $f(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ y calcular $f(0)$.

b) Probar que $f'(x)\, f(y) = f(x)\, f'(y)$ $\forall x, y$.

c) Probar que hay una constante c tal que $f'(x) = c f(x)$ $\forall x$.

d) Probar que $f(x) = e^{cx}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN: Unidad Didáctica 3, tema 3, ejercicio 8.

Calcular el intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(n+1)(n+2)2^n}(x-5)^n$

SOLUCIÓN: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!}$

$$\frac{1}{R} = \lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_n \left| \frac{\frac{(-1)^{\binom{n+1}{2}}}{(n+3)(n+2)2^{n+1}}}{\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(n+2)(n+1)2^n}} \right| =$$

$$= \lim_n \left| \frac{(n+1)}{(n+3)} \cdot \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2}.$$

luego el radio de convergencia es $R=2$

si $|x-5|<2$ el intervalo de convergencia es $(3,7)$

En los extremos del intervalo.

$x=3$

$$\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(n+1)(n+2)2^n}(-2)^n = \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}+n}}{(n+1)(n+2)}$$

que si la comparamos con $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sale convergente.

$x=7$

$$\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(n+1)(n+2)2^n}(2)^n = \sum_2^{\infty} \frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{(n+1)(n+2)}$$

que también es convergente.

Sea $f(x) = e^x$. Calcular $F'(x)$ donde esté definido $F(x) = \int_1^{\log(x^3+1)} f(t)\,dt$

SOLUCIÓN: $F'(x) = f(\log(x^3+1)) \cdot \dfrac{3x^2}{(x^3+1)} =$

$$= e^{\log(x^3+1)} \cdot \frac{3x^2}{(x^3+1)} = 3x^2$$

Calcúlese $I = \int \frac{1}{x^3+1}\,dx$

SOLUCIÓN: Por fracciones simples.

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{(x+1)} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\frac{1}{(x^3+1)} = \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx + C}{(x+1)(x^2+1-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A = 1/3 \quad B = -1/3 \quad C = 2/3 .$$

Luego $3I = \int \frac{1}{x+1} + \int \frac{-x+2}{x^2-x+1} = \log(x+1) - I_2$

donde

$$I_2 = \int \frac{(x-2)\,dx}{x^2-x+1} = \int \frac{x-1/2}{x^2-x+1}\,dx + \int \frac{-3/2}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2} \log\left|x^2-x+1\right| - \frac{3}{2} I_3$$

donde

$$I_3 = \int \frac{1}{x^2-x+1} = \int \frac{1}{(x-1/2)^2+3/4} = \int \frac{4/3}{\frac{4}{3}(x-\frac{1}{2})^2+1} =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

Por tanto

$$3I = \log|x+1| - \frac{1}{2}\log\left|x^2-x+1\right| + \frac{3}{2}\,\frac{4}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

y

$$I = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right).$$