Comentarios sobre los exámenes

A continuación os informo de los ejercicios que debéis ignorar de los exámenes de otros años:

UNIVERSIDAD DE CASTILLA LA MANCHA

E T S I Industriales – C. Real

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

EXAMEN DE ALGEBRA LINEAL

30-01-96

1. Sea A la aplicación de $L(\mathbb{R}^2)$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Dar su factorización polar e interpretar geometricamente el resultado.

b) Encontrar la forma canónica real de Jordan de la matriz A.

c) Si consideramos la matriz $B = A^T A$ calcular

$$\max_{\vec{x}\in\mathbb{R}^2} \frac{(\vec{x}, B\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2} \quad \text{y} \quad \min_{\vec{x}\in\mathbb{R}^2} \frac{(\vec{x}, B\vec{x})}{\|\vec{x}\|^2}.$$

2. Sea V el espacio euclídeo de las funciones continuas sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$, esto es $C([-\pi, \pi])$, con el producto escalar

$$(f(t), g(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, g(t)\, dt.$$

Sea además L el subespacio vectorial de V generado por los vectores 1, $\sin t$ y $\cos t$ es decir, $L = \mathcal{L}\{1, \cos t, \sin t\}$.

a) Encontrar la proyección ortogonal del vector $h(t) = (t - \pi)$ sobre L.

b) Hallar aquél vector $p(t) \in L$ que haga mínimo el valor de la integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} [(t-\pi) - p(t)]^2\, dt.$$

(Ayuda: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 t\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\, dt = \pi$).

3. Sea el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineal

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

siendo A una matriz simétrica definida negativa de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

a) Demuestra que toda solución $(x(t), y(t))$ de dicho sistema verifica

$$(x(t), y(t)) \to (0, 0) \text{ cuando } t \to +\infty.$$

b) Resolver el problema

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \\ (x(0), y(0)) = (1,1) \end{cases}$$

y estudiar el comportamiento de la solución cuando $t \to +\infty$.

4. Sea la aplicación lineal $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ con matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

a) Hallar la forma canónica real de Jordan de la matriz A.

b) Calcular los invariantes de la aplicación lineal A y dar una interpretación geométrica de la misma.

5. Una partícula se mueve en el plano de manera que su posición en el instante t viene dada por el vector (x_t, y_t) (con $t \geq 0$) y además

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}.$$

Dependiendo de la posición inicial (es decir del vector (x_0, y_0)), estudiar la dinámica de dicha partícula.

6. La empresa BOTEBARATO ha realizado un estudio sobre el tipo de máquina de embutición que usa en sus factorías. Se ha llegado a la conclusión de que el tiempo T de correcto funcionamiento entre el fallo n-ésimo de la máquina y el n+1-ésimo se calcula mediante la fórmula

$$T(n) = ke^{-an}$$

con k y a ciertas constantes por determinar. Supongamos que se han medido tiempos entre fallos y se ha obtenido la tabla

tiempo entre fallos (en dias)	e^4	e^3	e^2	1
fallo	1	2	3	4

(es decir se ha medido que entre el primer y segundo fallo han transcurrido e^4 días, entre el segundo y el tercero e^3 días, ect..). Usar los datos anteriores y el método de los mínimos cuadrados para calcular de forma aproximada las constantes k y a. Calcular el número de días que transcurre entre el sexto y el séptimo fallo. ¿Qué ocurre cuando el número de fallos crece?

Universidad de Castilla- La Mancha
E. T. S. I. Industriales
Examen de Álgebra Lineal, 09-07-1.996
ELEGIR 5 PROBLEMAS.

1. Sea $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ una matriz simétrica y consideremos la forma bilineal

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \to f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = (x_1, y_1)\ A \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

   a) Si se supone que $\det A = 1$ y $\operatorname{tr}(A) = 3$, decir si la forma cuadrática asociada a dicha forma bilineal define un producto escalar en $\mathbb{R}^2$, y en tal caso escribir la matriz asociada a tal producto escalar con respecto a una base ortogonal.

   b) Hallar la matriz A si además se supone que

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 4.$$

2. Sea $E = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}[t]$ el espacio euclídeo de los polinomios con coeficientes reales, definidos para $t \in [0,1]$, con el producto escalar $(\cdot,\cdot)$ definido como

$$(f(t), g(t)) = \int_0^1 f(t)\ g(t)\ dt.$$

   Se considera el subespacio vectorial W de E formado por los polinomios de grado ≤ 2, es decir $W = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[t]$. Sea $p(t) = 2t^3 - 1$. Encontrar el polinomio $q(t)$ de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[t]$ que haga mínimo el valor de la integral

$$\int_0^1 (p(t) - q(t))^2\ dt.$$

   Interpretar el resultado obtenido.

3. Hallar la forma real de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

   e interpretar geometricamente la transformación lineal que define esta matriz.

4. *a*) Calcular la descomposición polar de la matriz

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   b) ¿Define M una deformación pura?

   c) ¿Define M una deformación que conserva distancias?.
   ¿Se trata entonces de un deformación rígida?.

5. Se supone que la posición de una partícula en el plano, en el instante t, esta determinada por la posición en el instante $t-1$ según las ecuaciones

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix}.$$

Si la posición inicial es $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ tal que, $x_0 + y_0 = 1$, estudiar la posición límite de la partícula al hacer $t \to +\infty$.

6. Sea $E = \left(C^2([0,1]), (\cdot,\cdot)\right)$ el espacio euclídeo de las funciones derivables dos veces con continuidad sobre $[0,1]$, en el que esta definido el producto escalar $(\cdot,\cdot)$ como $(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)\ g(x)\ dx$. Se considera el subespacio vectorial V de E generado por los vectores,

$$\vec{v_1} = e^x, \quad \vec{v_2} = e^{-2x}, \quad \vec{v_3} = e^{2x} \quad \vec{v_4} = e^{-x},$$

es decir: $V = L\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$. Sea la aplicación $F : V \to V$ definida para cada $f(x) \in V$ como

$$F(f(x)) = f''(x) + f'(x) - 2f(x).$$

a) Demostrar que F es lineal

b) Hallar la matriz asociada a la aplicación F.

c) Comprobar que no existe elemento $\vec{g}$ de V que sea solución de la ecuación

$$F(\vec{g}) = \vec{v_2}$$

d) Hallar por el método de los mínimos cuadrados una solución aproximada para la ecuación $F(\vec{g}) = \vec{v_2}$.
(Observación: En el apartado (d) se pueden dejar las operaciones indicadas).

UCLM, ETSI Industriales, C. Real

Departamento de Matemáticas.

Examen de Álgebra Lineal, 29–01-1.998

PROBLEMAS

1. Sea $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{tr}(A) = 1/4$ y $\det(A) = -1/8$. Se pide:

   a) (0.5 p.) Hallar los autovalores de A.

   b) (0.5 p.) Explicar de manera razonada si A es o no diagonalizable.

   c) (1 p.) Calcular
   $$\lim_{n\to\infty} \vec{z}_n$$
   siendo $\vec{z}_n = A(\vec{z}_{n-1})$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, y $\vec{z}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

2. Sea $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ tal que su matriz con respecto a la base canónica es
   $$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   a) (0.5 p.) Hallar los autovalores y autovectores de A.

   b) (1.5 p.) Encontrar la forma canónica real de Jordan de A y los subespacios vectoriales invariantes.

3. Sea $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}[x]$, el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales, de grado menor o igual que 4 y en la variable x. Se definen las aplicaciones
   $$D^j(p(x)) = \frac{d^j}{dx^j}(p(x)), \quad \text{donde } p(x) \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}[x], \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (*)$$
   y
   $$H(p(x)) = p(x) - \frac{d}{dx}(p(x)), \quad \text{donde } p(x) \in \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}[x].$$
   Se pide:

   a) (0.5 p.) Demostrar que $H \in \mathcal{L}\left(\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}[x]\right)$ y hallar su matriz asociada con respecto a la base $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$.

   b) (0.75 p.) Demostrar que H es un isomorfismo.

c) (0.75 p.) Demostrar que la inversa de la aplicación H es

$$H^{-1} = I + D^1 + D^2 + D^3 + D^4,$$

donde D^1, D^2, D^3 y D^4 han sido definidas en $(*)$ e I es la aplicación identidad (i. e., $I(p(x)) = p(x)$).

4. Sea el espacio vectorial de las funciones continuas sobre $[-\pi, \pi]$, i. e. $C([-\pi, \pi])$, y sean 1, $\sin x$, $\cos x$ y $\sin 2x$ vectores en dicho espacio.

   a) (1 p.) Hallar a, b y c para que el valor de la integral

   $$\int_{-\pi}^{\pi} \left(x - x^2 - a - b\sin x - c\sin 2x\right)^2 dx,$$

   sea lo más pequeña posible.

   b) (1 p.) Interpretar y razonar el resultado obtenido.

   (Ayuda: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2x dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \; dx = 2\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin 2x \; dx = -\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \; dx = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin 2x dx = 0$).

5. a) (4 p.) Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales

   $$\frac{dx_1}{dt} = 7x_1 + 3x_0 + 3x_3$$
   $$\frac{dx_2}{dt} = 3x_1 - x_2$$

   $$\frac{dx_3}{dt} = 3x_1 - x_3.$$

   b) (0.5 p.) Encontrar una solución $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ del sistema aiterior que cumpla las condiciones iniciales

   $$(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (1, -2, \lambda),$$

   donde λ es un número real cualquiera.

c) (0.5 p.) Determinar el parámetro λ dado en el apartado (b) para que la solución cumpla

$$\lim_{t\to+\infty}\left(x_1\left(t\right),x_2\left(t\right),x_3\left(t\right)\right)=(0,0,0).$$

Universidad de Castilla-La Mancha
ETSI Industriales, C. Real
Examen de *Álgebra Lineal*
Convocatoria extraordinaria de Septiembre
03-09-1.998

1. Sea $V = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3[t]$ el espacio vectorial constituido por los polinomios de grado menor o igual que 3, con coeficientes reales y en la variable t. Dado un número real fijo h se define la aplicación A_h sobre V como

$$A_h(p(t)) = \frac{p(t+h) - p(t)}{h}, \qquad p(t) \in V.$$

Se pide

   a) (0.5 p.) Comprobar que $A_h \in \mathcal{L}(V)$.

   b) (0.5 p.) Hallar la matriz asociada a A_h.

   c) (1 p.) Determinar la imagen y el núcleo de la aplicación A_h.

2. *a*) (1 p.) Sean A y B dos matrices del espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, tales que $\operatorname{rank}(A)$ y $\operatorname{rank}(B)$ son ≤ 1. Demostrar que

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq 1$$

si y sólo si

$$\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(B) \quad \text{ó} \quad \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(B).$$

   b) (1 p.) Se dice que un conjunto de vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_j$ es un sistema fundamental de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, si el conjunto de todas las soluciones del sistema coincide con $\mathcal{L}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_j\}$.

   ¿Puede existir un sistema de ecuaciones lineales tal que los conjuntos de vectores

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= (2,3,1,2), \\ \vec{v}_2 &= (1,1,-2,-2), \\ \vec{v}_3 &= (3,4,2,1) \end{aligned}$$

   y

$$\begin{aligned} \vec{w}_1 &= (1,0,2,-5), \\ \vec{w}_2 &= (0,1,8,7), \\ \vec{w}_3 &= (4,5,-2,0) \end{aligned}$$

   sean dos sistemas fundamentales de soluciones?

3. *a*) (1 p.) Calcular la descomposición polar de la matriz

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}\left(\mathbf{R}\right).$$

   b) (0.5 p.) Interpretar el resultado obtenido en el apartado anterior.

   c) (0.5 p.) Evaluar el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left\| A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}\right\|$$

   donde $\|\cdot\|$ denota al producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$ y (x_0, y_0) es un vector cualquiera, escrito con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

4. *a*) (1.5 p.) Encontrar la forma canónica real de Jordan de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) (0.5 p.) Determinar los subespacios vectoriales invariantes de la aplicación lineal que define la matriz A.

5. Se considera la siguiente aplicación:

$$A\left(p(t)\right) = \int_{-1}^{1}\left(3t^2 s + \lambda s^2 t\right)\, p(s)ds,$$

   donde $p(t) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\left[t\right]$ y λ es cierto número real fijo.

   a) (0.25 p.) Demostrar que $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\left[t\right]\right)$.

   b) (1.75 p.) Suponemos que $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}\left[t\right]$ está dotado del producto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$, donde $\langle p(t), q(t)\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$. Determinar λ para que A sea autoadjunta.

Universidad de Castilla-La Mancha
ETSI Industriales, C. Real
Primer Curso. Álgebra Lineal.
28-01-1999
EXAMEN TIPO A (final)

1. (1.25 p.) Estudiar las soluciones del sistema de ecuaciones lineales
$$\left\{\begin{array}{l}\lambda x+y+z=1\\ x+\lambda y+z=\lambda\\ x+y+\lambda z=\lambda^2\end{array}\right.$$
según los valores de λ.
2. (0.75 p.) Sea $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y δ_1 y δ_2 ciertos números reales no nulos. Supongamos que $I=\delta_1 A+\delta_2 A^2$, donde I es la matriz identidad de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Demostrar que A es invertible y calcular A^{-1} en función de A.
3. Sea $A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ cuya traza es $\frac{3}{4}$ y cuyo determinante es $\frac{1}{8}$. Se pide:
   a) (1 p.) Probar que A es diagonalizable y hallar su forma diagonal.
   b) (1 p.) Se expresan en coordenadas con respecto a la base canónica los vectores $\vec{X}_0=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}$, $\vec{X}_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$, $n=1,2,\ldots$ Se supone que $\vec{X}_{n+1}=A\vec{X}_n$, $n=0,1,2,\ldots$ Demostrar que $\lim_{n\to\infty}\vec{X}_n=\vec{0}$.
4. Sea la aplicación lineal
$$\begin{array}{rccl}A: & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] & \to & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]\\ & p(x) & \to & A(p(x))=\int_0^1\left[\left(x^2+x\right)(t+\lambda)\,p'(t)+(t+2\lambda)\,p(t)\right]dt\end{array}$$
   a) (0.5 p.) Hallar la matriz asociada a A con respecto a la base $B=\left\{1,x,x^2\right\}$.
   b) (0.75 p.) Idem con respecto a la base $B=\left\{1,x+1,(x+1)^2\right\}$.
   c) (0.75 p.) Determinar, si es posible, aquellos valores del parámetro λ para los que A es un isomorfismo.
5. (2 p.) Determinar la forma canónica real de Jordan y los subespacios vectoriales invariantes reales de la aplicación lineal $A\in\mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ cuya matriz asociada es
$$A=\begin{pmatrix}-4&4&2\\-1&1&1\\-5&4&3\end{pmatrix}.$$
6. Sea el subespacio vectorial $L=\mathcal{L}\left\{e^x,e^{2x},e^{3x}\right\}$, incluido en el espacio vectorial $C^2((0,1))$.
   a) (0.5 p.) Encontrar una base para L.
   b) (0.5 p.) Sea la aplicación lineal $A:L\to L$ tal que
$$A(\vec{v})=\frac{d^2\vec{v}}{dx^2}-4\vec{v}.$$
   Hallar la matriz asociada a A y el núcleo de A.
   c) (1 p.) Considerando en $C^2((0,1))$ el producto escalar $(p,q)=\int_0^1 p(x)q(x)dx$, donde $p,q\in C^2((0,1))$, emplear el método de los mínimos cuadrados para encontrar una solución (aproximada) en L de la ecuación diferencial $A(\vec{v})=e^{-2x}$.

Universidad de Castilla-La Mancha
ETSI Industriales, C. Real
Primer Curso. Álgebra Lineal.
28-01-1999
EXAMEN TIPO B (final con el parcial aprobado)

1. Sea el espacio euclídeo $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual y $L \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tal que su matriz con respecto a la base canónica es
$$L = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -a \\ a & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$
   a) (0.75 p.) Determinar los valores de a para que L sea una aplicación ortogonal.
   b) (0.75 p.) Para los valores obtenidos en el apartado anterior interpretar geométricamente la transformación. L.
2. (2.5 p.) Determinar la forma canónica real de Jordan y los subespacios vectoriales invariantes reales de la aplicación lineal $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ cuya matriz asociada es
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. Sea el subespacio vectorial $L = \mathcal{L}\left\{e^x, e^{2x}, e^{3x}\right\}$, incluido en el espacio vectorial $C^2\left((0,1)\right)$.
   a) (0.5 p.) Encontrar una base para L.
   b) (0.5 p.) Sea la aplicación lineal $A : L \to L$ tal que
$$A(\vec{v}) = \frac{d^2\vec{v}}{dx^2} - 4\vec{v}.$$
   Hallar la matriz asociada a A y el núcleo de A.
   c) (1 p.) Considerando en $C^2\left((0,1)\right)$ el producto escalar $(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$, donde $p, q \in C^2\left((0,1)\right)$, emplear el método de los mínimos cuadrados para encontrar una solución (aproximada) $\vec{v} \in L$ de la ecuación diferencial $A(\vec{v}) = e^{-2x}$.
4. Sea $B = A^T A$ donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$. Sea la forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$ definida como
$$C(\vec{x},\vec{x}) = (x_1, ..., x_n)\, B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$
   donde $(x_1, ..., x_n)$ son las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base canónica.
   a) (1 p.) Probar que $C(\vec{x},\vec{x})$ es definida positiva.
   b) (1 p.) Determinar la forma canónica de $C(\vec{x},\vec{x})$.
   a) (1 p.) Hallar la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales
$$\begin{aligned} x'(t) &= 3x\,(t) + 5y(t) \\ y'(t) &= -2x(t) - 8y(t). \end{aligned}$$
   b) (1 p.) Si el estado inicial de la solución $(x(t), y(t))$ del sistema anterior es $(x(0), y(0)) = (\alpha, 1+\alpha)$, siendo α cierto número real, determinar, si es posible, el valor de α para el cual
$$\lim_{t\to+\infty} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Universidad de Castilla-La Mancha
E.T.S.I. Industriales
Examen de Algebra Lineal
Ciudad Real, 31 de Enero, 2000

1. Se consideran los espacios vectoriales

$$L_1 = \{p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] : p(1) = 0\};$$
$$L_2 = \{p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] : p'(1) = 0\}.$$

Hallar una base y la dimensión de L_1, L_2, $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$.

[1.75 puntos]

2. Se considera la aplicación $T : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] \to \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ definida por

$$T(p(x)) = xp(x) - p'(x).$$

Hallar la matriz de la aplicación T en las bases canónicas de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ y $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$.

[1 punto]

3. Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 - 3x_3, 2x_1 - 4x_2 - 6x_3)$$

Se pide:

(i) Encontrar la dimensión y una base de $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

(ii) ¿Está el vector $(-1, 1, -1)$ en el $\ker(f)$? En caso afirmativo, encontrar sus coordenadas respecto de la base del $\ker(f)$ escogida.

(iii) Hallar la dimensión y una base del complemento ortogonal de $\ker(f)$.

[1.5 puntos]

4. Calcular los autovalores de la aplicación A cuya matriz respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

[1 punto]

5. Se considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^4$ cuya matriz respecto de la base canónica viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Se sabe que un autovalor de A es $\lambda = 2$ de multiplicidad 4. Además $\dim E_1(2) = 2$ y $\dim E_2(2) = 3$. Conocemos también una base de $E_1(2)$, formada por los vectores

$$\{(1,3,2,0),(0,-2,-1,1)\},$$

que junto con el vector $(1,0,0,1)$, forman una base de $E_2(2)$.

Encontrar **razonadamente** la forma canónica de Jordan de la aplicación dada, y una matriz de paso.

[2.25 puntos]

6. Hallar λ_1, λ_2 y $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ de manera que la función $\lambda_1 \cos x + \lambda_2 \cos(2x) + \lambda_3$ esté lo más cerca posible a la función x^2, en la norma inducida por el producto escalar siguiente

$$(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

(Ayuda:
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(2x)\,dx = \pi$, $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(x)\,dx = -4\pi$ y $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(2x)\,dx = \pi$)

[1.5 puntos]

7. Reponder **razonadamente** las siguientes cuestiones:

(i) ¿Puede una aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ ser sobreyectiva?

(ii) ¿Es posible encontrar una aplicación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ que no sea biyectiva? En caso afirmativo, dar un ejemplo.

(iii) Si una matriz tiene un autovalor nulo, ¿puede ser invertible?

(iv) Puede existir una aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $\ker(f) = V$?

[1 punto]

Universidad de Castilla-La Mancha
E.T.S.I. Industriales
Examen de Algebra Lineal
Ciudad Real, 6 de Septiembre de 2000

1. Se define la aplicación $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dada por

$$T \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} \\ a_{12} - a_{21} \end{pmatrix}.$$

   (i) [0.75 p.] Probar que T es una aplicación lineal.

   (ii) [0.50 p.] Hallar la matriz de la aplicación T respecto de las bases canónicas de ambos espacios.

2. Se considera la aplicación lineal $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,2,0),(1,1,1)\}$$

   es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (i) [0.50 p.] Hallar la dimensión y una base de $\ker(A)$ y de $\mathrm{Im}(A)$.

   (ii) [0.50 p.] Calcular la dimensión y una base de $\ker(A) \cap \mathrm{Im}(A)$ y de $\ker(A) + \mathrm{Im}(A)$.

   (iii) [0.75 p.] ¿Es $\mathbb{R}^3 = \ker(A) \oplus \mathrm{Im}(A)$? En caso afirmativo, escribir el vector $(-1,0,2)$ como suma de dos vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ con $\vec{v}_1 \in \ker(A)$ y $\vec{v}_2 \in \mathrm{Im}(A)$.

   (iv) [0.25 p.] Estudiar si A es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

   (v) [1.00 p.] Hallar la aplicación adjunta de A. ¿Es A una aplicación autoadjunta?

3. [1.25 p.] Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$, donde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

4. [1.50 p.] Estudiar, en función de los valores del parámetro α, si el siguiente endomorfismo es o no diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & \alpha & 4-\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}.$$

5. [1.25 p.] Hallar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. [1,75 p.] Mediante el método de los mínimos cuadrados, encontrar la recta que mejor aproxima a los puntos $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$ y $(5, 2)$.

PRIMER EXAMEN PARCIAL DE ÁLGEBRA

E.T.S.I. Industriales-Ciudad Real. UCLM
1 de febrero de 2002

Problema 1.-[2.5 puntos] Discutir en función de los parámetros $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{array}\right.$$

Problema 2.-[2.5 puntos] En el $\mathbf{R}$-espacio vectorial $\mathbf{R}^4$, consideremos los dos subespacios vectoriales

$$L_1 \equiv \left\{\begin{array}{l} x+y+z+t=0 \\ z+t=0 \end{array}\right.$$

y

$$L_2 = L\langle (1,0,0,0),\ (0,0,0,1),\ (3,0,0,7)\rangle .$$

Se pide:

1. (1 p.) Calcular una base de L_1 y un sistema de ecuaciones implícitas de L_2.
2. (1 p.) Determinar $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$.
3. (0.5 p.) ¿Son L_1 y L_2 suma directa en $\mathbf{R}^4$?.

Problema 3.-[3 puntos] Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ la aplicación lineal definida como la simetría axial de eje el plano

$$L \equiv \{x + 2y + 3z = 0\} .$$

Se pide:

1. (1.5 p.) Encontrar la matriz de f respecto de una base apropiada.
2. (1.5 p.) Encontrar la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$.

Problema 4.-[2 puntos] Responder razonadamente a las siguientes cuestiones:

1. (0.5 p.) ¿La dimensión de un espacio vectorial puede ser mayor que el número de elementos de una de sus bases?, ¿y menor?.
2. (0.5 p.) Sea $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ una aplicación lineal inyectiva, ¿es sobreyectiva?.
3. (0.5 p.) En el $\mathbf{R}$-espacio vectorial de los polinomios de orden dos, ¿cuál es la matriz de la aplicación lineal f (respecto de la base canónica), definida por

$$f(p) = p^{(III)}, \quad (p^{(III)} \textit{ derivada tercera del polinomio } p)?.$$

4. (0.5 p.) Existen aplicaciones lineales inyectivas de $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^2$. En caso afirmativo dar un ejemplo.

DPTO. DE MATEMÁTICAS

Soluciones al Examen Final de Álgebra (Primer Parcial) 25 de Junio de 2003

1. Sea L_1 el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ engendrado por los vectores

$$(1,1,0,0),(2,3,0,0)$$

y L_2 el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ definido por el sistema de ecuaciones implícitas

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Se pide:

1.1) (1,5 p.) Calcular la dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas independientes de L_1 y L_2.

1.2) (2 p.) Calcular la dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas independientes de $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$.

Solución:

1.1) Empecemos por L_1. Es trivial comprobar que la matriz formada por los vectores $(1,1,0,0),(2,3,0,0)$ tiene rango 2, con lo que $\dim(L_1) = 2$ y de esta manera

$$\{(1,1,0,0),(2,3,0,0)\}$$

constituye una base de L_1. Utilizando la fórmula

$$\text{n ecs. independientes} = 4 - \dim(L_1)$$

obtenemos que cualquier sistema de ecuaciones implícitas independientes de L_1 tiene 2 ecuaciones independientes. Evidentemente todos los vectores de L_1 verifican el sistema de ecuaciones independientes

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

luego ese es un sistema de ecuaciones implícitas para L_1.

Evidentemente las ecuaciones del sistema que define L_2 son independientes pues el rango de la matriz de coeficientes es 2. Por tanto, usando de nuevo la fórmula que relaciona número de ecuaciones independientes y dimensión, tenemos que $\dim(L_2) = 2$. Para calcular una base consideramos x_1, x_3 como parámetros y les damos valores alternos 1 y 0 para sacar los vectores. Para $x_1 = 1, x_3 = 0$, hemos de resolver el sistema

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ -2x_2 + x_4 = -2 \end{cases}$$

cuya solución es $x_2 = 1, x_4 = 0$, y por tanto el primer vector para la base de L_2 es $(1, 1, 0, 0)$. Para $x_1 = 0, x_3 = 1$, hemos de resolver el sistema

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es obvia y por tanto el segundo vector para la base de L_2 es $(0, 0, 1, 0)$. Una base de L_2 es por tanto

$$\{(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

1.2) Empecemos calculando una base de $L_1 + L_2$. Sabemos que un sistema generador para ese subespacio es

$$\{(1, 1, 0, 0), (2, 3, 0, 0), (0, 0, 1, 0)\}$$

Es trivial comprobar que el rango de la matriz formada por esos tres vectores es 3, con lo que $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Como consecuencia sabemos que cualquier sistema de ecuaciones implícitas para este sistema tiene una ecuación independiente. Es trivial obtener que un sistema de ecuaciones independientes para $L_1 + L_2$ es

$$\{x_4 = 0$$

Utilizando la fórmula de la dimensión podemos concluir que $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, y por tanto un sistema de ecuaciones independientes de $L_1 \cap L_2$ tendrá tres ecuaciones. Un sistema de ecuaciones de $L_1 \cap L_2$ es

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Es claro que la última ecuación es combinación lineal de la segunda y la tercera, luego podemos eliminarla para obtener que un sistema de ecuaciones independientes de $L_1 \cap L_2$ es

$$\begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Para calcular una base simplemente tomanos como parámetro una incógnita, por ejemplo x_1, le damos el valor $x_1 = 1$ y resolvemos, para obtener que una base de $L_1 \cap L_2$ es
$$\{(1,1,0,0)\}$$

2. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + 2x_4, x_2 + 3x_1, x_3 - x_2).$$

Se pide:

2.1) (1 p.) Calcular la matriz de la aplicación respecto de las bases canónicas del espacio de partida y de llegada.

2.2) (1 p.) Comprobar que el conjunto de vectores

$$\mathcal{C} = \{(1,2,8),(0,3,1),(0,0,2)\}$$

constituye una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular la matriz de cambio de base de la base $\mathcal{C}$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

2.3) (1,5 p.) Calcular la matriz de la aplicación lineal f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ en el espacio de partida y $\mathcal{C}$ en el de llegada.

Solución:

2.1) Calculamos las imagénes de los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ por la aplicación f y los colocamos por columnas.

$$f(1,0,0,0) = (1,3,0),\ f(0,1,0,0) = (0,1,-1),$$

$$f(0,0,1,0) = (0,0,1),\ f(0,0,0,1) = (2,0,0)$$

con lo cual la matriz es
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2) Para comprobar que el conjunto de vectores dado es base basta simplemente con verificar que el determinante de la matriz que forman es no nulo. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de base de $\mathcal{C}$ a la base canónica.

2.3) La ecuación de la aplicación lineal respecto de las bases canónicas es

$$\overrightarrow{y} = f(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{x}.$$

Ahora es fácil concluir que la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y respecto de la base $\mathcal{C}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & -4/3 \\ -25/3 & -2/3 & 1/2 & -22/3 \end{pmatrix}$$

3. Responder razonadamente a las siguientes preguntas:

3.1) (1 p.) Tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales independientes con dos incógnitas compatible indeterminado. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?, ¿de cuántos parámetros depende la solución?.

3.2) (1 p.) Decidir si es cierta la siguiente afirmación en el conjunto de matrices cuadradas de orden 2, $\mathcal{M}_2$,

$$AB = BA, \quad BC = CB \Rightarrow AC = CA.$$

Decidir significa probar la afirmación caso de ser cierta o dar un ejemplo de tres matrices que no la verifiquen para determinar su falsedad.

3.3) (1 p.) ¿Qué significa que una aplicación lineal sea inyectiva?, ¿qué condición caracteriza esta noción en las aplicaciones lineales (no es necesario demostrarlo)?

Solución:

3.1) Todo sistema compatible indeterminado tiene infinitas soluciones. Un sistema de dos ecuaciones si es compatible indeterminado es porque una ecuación es combinación lineal de la otra, y al tener dos incógnitas, la solución dependerá de un único parámetro.

3.2) La afirmación es falsa. Para demostrarlo basta dar el siguiente ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = I_2, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y notar que A y C no conmutan (lo cual es una mera comprobación)

3.3) Que una aplicación lineal f sea inyectiva significa que dos vectores diferentes no pueden tener la misma imagen, es decir que

$$f(\overrightarrow{u}) \neq f(\overrightarrow{v}),$$

siempre que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{v}$.

La condición que caacteriza que una aplicación lineal sea inyectiva es

$$\ker(f) = \{\overrightarrow{0}\},$$

donde $\ker(f)$ representa el subespacio vectorial núcleo de f.

DPTO. DE MATEMÁTICAS

Soluciones al Examen Final de Álgebra (Segundo Parcial) **25 de Junio de 2003**

1. (2,5 p.) Se sabe que los autovalores de una matriz A son $\lambda = 1$, $\lambda = -1$ y $\lambda = 6$ y conocemos las dimensiones de sus espacios propios asociados, que son:

$$\dim E_1(1) = \dim E_2(1) = 1,$$
$$\dim E_1(-1) = 1, \quad \dim E_2(-1) = 2, \quad \dim E_3(-1) = \dim E_4(-1) = 3$$
$$\dim E_1(6) = \dim E_2(6) = 2$$

Calcular la forma canónica de Jordan de A.

Solución:

Comencemos con $\lambda = 1$. Como $\dim E_1(1) = \dim E_2(1) = 1$ está claro que se trata de un autovalor simple, al que le corresponde una caja de tamaño uno.

Para $\lambda = -1$, puesto que el espacio máximo es $E_3(1)$ tiene dimensión tres, se trata de un autovalor triple. La partición de multiplicidad es

$$p_3 = 3 - 2 = 1, \quad p_2 = 2 - 1 = 1, \quad p_1 = 1 \Rightarrow 3 = 1 + 1 + 1$$

y le corresponderá una caja de tamaño tres,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para $\lambda = 6$, la multiplicidad es dos, y la partición es $2 = 2$, de modo que le corresponden dos cajas de tamaño uno:

$$\left(\begin{array}{c|c} 6 & 0 \\ \hline 0 & 6 \end{array}\right).$$

Juntando toda la información se obtiene

$$J = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

2. (2 p.) Supongamos que la posición en el plano de una partícula en movimiento en un instante n es (x_n, y_n), donde x_n e y_n vienen dados a partir de las ecuaciones
$$x_n = \frac{1}{2}x_{n-1}, \quad y_n = \frac{1}{2}x_{n-1} + y_{n-1}.$$
Si partimos del punto $(1,3)$, calcular la posición de la partícula cuando $n \to \infty$.

Solución:

El sistema dinámico que nos muestran se puede escribir como
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$
De modo que lo que tenemos que calcular es
$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
Para calcularlo usamos la forma de Jordan de la matriz del sistema. Es fácil ver que sus autovalores son $\lambda = 1/2$ y $\lambda = 1$, y los autovectores correspondientes $(1,-1)$ y $(0,1)$, respectivamente. Así
$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (1/2)^n & 0 \\ 1-(1/2)^n & 1 \end{pmatrix},$$
de donde se deduce que el estado límite es $(0,4)$.

3. Se considera el espacio $\mathbb{R}^4$ dotado del producto escalar siguiente:
$$\langle (x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4)\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4,$$
y el subespacio vectorial L generado por los vectores $(1,1,0,0), (2,3,0,0)$. Se pide:

3.1) (1,5 p.) Encontrar una base ortogonal de L.

3.2) (1,5 p.) Encontrar una base de $L^\perp$.

Solución:

3.1) Para encontrar una base ortogonal de L simplemente aplicamos el método de Gram-Schmidtz a la base que nos dan, esto es
$$\vec{x}_1 = (1,1,0,0), \quad \vec{x}_2 = (2,3,0,0).$$
Así, $\vec{y}_1 = \vec{x}_1 = (1,1,0,0)$, y
$$\vec{y}_2 = \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{y}_1\rangle}{\|\vec{y}_1\|^2}\vec{y}_1 = (2,3,0,0) - \frac{8}{3}(1,1,0,0) = (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0),$$
luego la base ortogonal es
$$\left\{(1,1,0,0), \quad (-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0)\right\}$$

3.2) Para encontrar una base de $L^{\perp}$ tenemos que buscar vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) que sean ortogonales a todos los vectores de L. Puesto que una base de L está formada por $(1,1,0,0)$ y $(2,3,0,0)$ bastará imponer que

$$\langle (1,1,0,0),(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 = 0$$
$$\langle (2,3,0,0),(x_1,x_2,x_3,x_4)\rangle = 0 \Rightarrow 2x_1 + 6x_2 = 0$$

que proporciona un sistema de ecuaciones implícitas de $L^{\perp}$. Resolviendo para obtener una base resulta

$$\{(0,0,1,0), \quad (0,0,0,1)\}$$

4. En $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual se considera la base canónica

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)\}$$

y los vectores

$$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \mathbf{u}_1 = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \quad \mathbf{u}_3 = (0,0,\alpha)$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{u_i}$, $1 \leq i \leq 3$, se pide:

4.1) (1,5 p.) Hallar los valores de α para los que f es una aplicación ortogonal.

4.2) (1 p.) Hallar los valores de α para los que f es una aplicación autoadjunta.

Solución:

4.1) Está claro que la matriz de la aplicación f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que es ortonormal con el producto escalar dado, es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

De este modo, para que f sea ortogonal bastará comprobar que

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\alpha}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esto es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

y por tanto, se precisa que $\alpha = 1$.

4.2) Para que la aplicación sea autoadjunta habrá que pedir que su matriz sea simétrica, de manera que $\alpha = -1$.

Solución del Examen de Álgebra
Septiembre 2003

1. Se considera el espacio $V = \mathbf{P}^3_{\mathbf{R}}[t]$ de polinomios de grado menor o igual que tres, con coeficientes en $\mathbf{R}$ en la variable t, y se define la aplicación A dada por

$$\begin{gathered} A : V \longrightarrow V \\ A(1) = t^3 - 2t^2 + 4t + 1, \\ A(t) = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1, \\ A(t^2) = t^3 + 6t - 5, \\ A(t^3) = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5. \end{gathered}$$

Se pide:

a) Encontrar la matriz de la aplicación A respecto de la base canónica de V.

b) Encontrar una base del espacio $\mathrm{Im}(A)$ formada por polinomios.

c) Hallar una base del $\ker(A)$ formada por polinomios.

d) Decidir si A es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

e) Encontrar la mejor aproximación mediante mínimos cuadrados de la solución de la ecuación
$$A(p) = t^3 + t^2 + 7t - 8, \quad \text{para } p \in V.$$

[3 Ptos.]

Solución:

a) Puesto que la base canónica de V es la formada por los polinomios $\{1, t, t^2, t^3\}$ la matriz de la aplicación A respecto de esta base es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) El espacio $\mathrm{Im}(A)$ estará generado por los vectores columnas de dicha matriz, de modo que calculando el rango de la matriz se obtiene que $\mathrm{rango}(A) = 2$, y una base de $\mathrm{Im}(A)$ es
$$\{t^3 - 2t^2 + 4t + 1, 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1\}.$$

c) Para calcular el núcleo de A basta resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Puesto que el rango es dos, resolvemos con la primera y tercera ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 5x_3 - 5x_4 \\ -2x_1 - 3x_2 &= 5x_4 \end{aligned}$$

para $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ y para $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, obteniendo los vectores $(3, -2, 1, 0)$ y $(-4, 1, 0, 1)$, que dan lugar a los polinomios

$$\{t^2 - 2t + 3, t^3 + t - 4\}$$

d) Puesto que el $\det(A) = 0$ y se trata de un endomorfismo, la aplicación no puede ser ni inyectiva, ni sobreyectiva, y por tanto no es biyectiva.

e) La ecuación $A(p) = t^3 + t^2 + 7t - 8$ se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 & 5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

y analizando el rango de la matriz ampliada del sistema obtenemos que es 2, de modo que el sistema posee infinitas soluciones. Esto es, la proyección del vector $t^3 + t^2 + 7t - 8$ en el espacio $\mathrm{Im}(A)$ es él mismo. Por lo tanto cualquier polinomio p se podrá escribir como una solución particular más cualquier elemento de $\ker(A)$. Una solución particular es, por ejemplo, $\frac{7}{5}t^2 - \frac{1}{5}t^3$.

2.

a) Estudiar para qué valores de los parámetros reales a y b la matriz A

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix}$$

es diagonalizable.

b) Para $a = 5$ y $b = 2$ encontrar la forma de Jordan de A y una matriz de paso.

[2.5 Ptos.]

Solución:

a) El polinomio característico es $(5 - \lambda)(-1 - \lambda)(a - \lambda)$, de modo que,

- si $a \neq 5, -1$, la matriz es diagonalizable $\forall b$, puesto que todos sus autovalores son distintos;
- si $a = -1$, es fácil ver que $\mathrm{rango}(A + I) = 1$ si $b = 0$, luego la matriz es diagonalizable pues el espacio $E_1(-1)$ tiene dimensión dos, y $\mathrm{rango}(A+I) = 2$ si $b \neq 0$, con lo que A no es diagonalizable porque $E_1(-1)$ tiene dimensión uno;
- si $a = 5$ el $\mathrm{rango}(A - 5I) = 2$ cualquiera que sea b y por tanto A no es diagonalizable.

b) Para $a = 5$, $b = 2$ ya sabemos que hay dos autovalores $\lambda = 5$ (doble) y $\lambda = -1$ simple, y que la dimensión de $E_1(5)$ es uno, (matriz no diagonalizable). Calculamos bases para $E_1(-1)$, que da $(0, 1, 0)$ y para $E_1(5)$, obteniendo $(0, 1, 3)$. Para obtener la matriz de paso, calculamos $E_2(5) = \ker(A-5I)^2$, cuya base es $\{(2, 0, 1), (-6, 1, 0)\}$. Finalmente, cogiendo un vector de $E_2(5)$ que no esté en $E_1(5)$, por ejemplo $(2, 0, 1)$, calculamos $(A - 5I)(2, 0, 1) = (0, 2, 6)$ y por tanto la matriz de paso y la forma de Jordan son

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Sean los subespacios de $\mathbf{R}^3$

$$V_1 = \mathcal{L}\{(0, 2, -1), (1, 0, 1)\},$$
$$W = \mathcal{L}\{(2, 1, 3)\}$$

y $V_2 = W^\perp$, el subespacio ortogonal a W. Se pide:

a) Calcular todos los números reales s, t tal que

$$s(0, 2, -1) + t(1, 0, 1) \perp (2, 1, 3).$$

b) Calcular el subespacio intersección $V_1 \cap V_2$.

[2 Ptos.]

Solución:

a) Para resolver este apartado simplemente tenemos que imponer que

$$s(0, 2, -1) + t(1, 0, 1) \perp (2, 1, 3),$$

es decir

$$\langle s(0, 2, -1) + t(1, 0, 1), (2, 1, 3)\rangle = 0$$

y utilizando la linealidad del producto escalar llegamos a

$$s\langle s(0, 2, -1), (2, 1, 3)\rangle + t\langle(1, 0, 1), (2, 1, 3)\rangle = -s + 5t = 0,$$

De esta manera la solución la constituyen todos los pares (s, t) de la forma $(5\lambda, \lambda)$.

b) El subespacio intersección $V_1 \cap V_2$ esta formado por todos los vectores que pertenecen a la vez a V_1 y V_2. Que pertenezcan a V_1 significa que son combinación lineal de los vectores $(0, 2, -1)$ y $(1, 0, 1)$, y que pertenezcan a V_2 significa que son ortogonales a $(2, 1, 3)$. Los vectores verificando estas dos condiciones fueron calculados en realidad en el apartado anterior y son los de la forma

$$5\lambda(0, 2, -1) + \lambda(1, 0, 1) = \lambda(1, 10, -4)$$

donde $\lambda \in \mathbf{R}$ es un parámetro.

4. Responder si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. No es necesario que justifiques tus respuestas. Contestar en el propio enunciado del examen marcando la respuesta adecuada.

   a) **V F** Si A es una matriz diagonalizable, entonces los autovalores de A son distintos;

   b) **V F** Si A y B son matrices $n \times n$ ortogonales, entonces AB también es ortogonal;

   c) **V F** Si A y B son matrices $n \times n$ simétricas, entonces AB es también simétrica;

   d) **V F** Si V y W son subespacios de $\mathbf{R}^7$ con $\dim V = \dim W = 4$. Entonces debe existir un vector no nulo perteneciente a la vez a V y W;

   e) **V F** Si A es una matriz cuadrada, A^T y A tienen los mismos autovalores;

   f) **V F** Si u es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ y A es la matriz $A = (v_1|v_2|\cdots|v_k)$, entonces u pertenece al núcleo de A;

   g) **V F** Si A es una matriz de orden $n \times m$ tal que $\text{rango}(A) = n$, entonces el sistema lineal $Ax = b$ tiene al menos una solución para todo $b \in \mathbf{R}^n$;

   h) **V F** Si A es una matriz diagonal tal que los términos de la diagonal son todos estrictamente positivos, entonces A es una matriz simétrica, definida positiva;

   i) **V F** Si V es un subespacio de $\mathbf{R}^n$ entonces existe una base ortonormal de V;

   j) **V F** Todo endomorfismo $f \in \mathcal{L}(V)$ inyectivo es además biyectivo.

   [2.5 Puntos]

Solución:

1. Falso;
2. Verdadero;
3. Falso;
4. Verdadero;
5. Verdadero;
6. Falso;
7. Verdadero;
8. Verdadero;
9. Verdadero;
10. Verdadero;

DPTO. DE MATEMÁTICAS

Primer Parcial de Álgebra **29 de Enero de 2004**

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base canónica $\mathcal{B}$ y el conjunto de vectores

$$\mathcal{B}' = \{(1,-1,-1),(0,-1,0),(-2,1,0)\}$$

Se pide:

a) Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{u} = (2,1,2)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

c) Encontrar las ecuaciones del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

d) Hallar los vectores cuyas coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$ son las opuestas, esto es, las de signo contrario, de sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}'$. [2 ptos.]

Solución:

a) Puesto que estamos en un espacio de dimensión 3, y $\mathcal{B}'$ posee 3 elementos, para probar que es base bastará ver si el conjunto es linealmente independiente. Como el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

es tres, se tiene la independencia deseada.

b) Este apartado se obtiene directamente del último apartado, siendo las coordenadas buscadas $(-2,-1,-2)$.

c) Para hallar las ecuaciones del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ necesitamos obtener las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ respecto de los de $\mathcal{B}'$. Puesto que lo que tenemos es justo lo contrario, es más fácil calcular el cambio de coordenadas de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, cuyas ecuaciones son:

$$\vec{x}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}_{\mathcal{B}'}$$

Puesto que el cambio pedido es el contrario, le corresponderá la matriz inversa, es decir:

$$\vec{x}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \vec{x}_{\mathcal{B}}$$

d) El conjunto de vectores cuyas coordenadas respecto de $\mathcal{B}$ son opuestas respecto de $\mathcal{B}'$ serán los vectores (x_1, x_2, x_3) tales que

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

El sistema que queda es

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 &= x_1 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= x_2 \\ x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

de donde se deduce que los vectores buscados son aquéllos que satisfacen la ecuación $x_1 = x_3$.

2. Sean L_1 y L_2 dos subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$$L_1 = L\left((1,0,1,0),(2,0,1,1),(0,0,1,0),(0,0,1,1)\right)$$
$$L_2 = \left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Calcular la dimensión y una base de L_1, L_2, $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$. [2 ptos.]

Solución: Una base de L_1 se obtendrá buscando los vectores linealmente independientes de entre su sistema generador, esto es,

$$(1,0,1,0),(2,0,1,1),(0,0,1,0),(0,0,1,1)$$

Es fácil ver que el rango de la matriz formada por los cuatro vectores es tres, y que los tres primeros son linealmente independientes, por tanto forman base del subespacio. Así, $\dim(L_1) = 3$.

Para L_2, resolvemos el sistema dado, teniendo en cuenta que el rango de la matriz de los coeficientes es dos, y por tanto, $\dim(L_2) = 4 - 2 = 2$. Para obtener una base, resolvemos el sistema con los parámetros, x_2 y x_4. Para $x_2 = 1$, $x_4 = 0$ obtenemos $x_1 = -1$ y $x_3 = 0$, esto es, el vector $(-1,1,0,0)$. Para $x_2 = 0$ y $x_4 = 1$, se tiene $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, que corresponde al vector $(0,0,1,1)$. Ambos vectores forman base de L_2.

Para $L_1 + L_2$ bastará unir las bases de ambos subespacios para tener un sistema generador, y de ahí extraer los vectores linealmente independientes. Una sencilla comprobación nos da

que el rango de
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
es cuatro, de manera que, como $L_1 + L_2 \subset \mathbb{R}^4$ y tienen la misma dimensión, resulta que $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^4$, y podemos tomar como base, la canónica de $\mathbb{R}^4$.

Finalmente, por la fórmula de la dimensión, se tiene que $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, y puesto que a simple vista se tiene que el vector $(0, 0, 1, 1)$ está en ambos subespacios, dicho vector forma una base de $L_1 \cap L_2$.

3. Para cada valor real del parámetro λ se define una aplicación lineal $f_\lambda : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz respecto de las bases canónicas de ambos espacios viene dada por
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Calcular los valores de λ para los que f_λ es

a) inyectiva

b) sobreyectiva

c) biyectiva [1.5 ptos.]

Solución:

a) Puesto que el rango de A no puede ser cuatro, $\dim(\mathrm{Ker}(f_\lambda)) > 0$ y f_λ nunca puede ser inyectiva.

b) Para que f_λ sea sobreyectiva, es necesario que el rango de A sea tres. Como la última columna no aporta rango, es necesario que el determinante
$$\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$
Un simple cálculo muestra que $\det(A) = -\lambda^2$, que es nulo si y sólo si $\lambda = 0$. Por tanto f_λ es sobreyectiva cualquiera que sea $\lambda \neq 0$.

c) Puesto que f_λ no puede ser inyectiva, tampoco será biyectiva.

4. Sea $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal dada por
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 + x_4, 2x_2 - 3x_3),$$

y sea

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$$

una base de $\mathbb{R}^4$. Se pide:

a) Calcular la matriz de f en la base $\mathcal{B}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

b) Dimensión y una base **en coordenadas canónicas** de los espacios $\mathrm{Ker}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

[2 ptos.]

Solución:

a) Para obtener la matriz pedida debemos calcular

$$\begin{aligned} f(1,0,0,0) &= (1,2,0) \\ f(1,1,0,0) &= (2,2,2) \\ f(1,1,1,0) &= (1,2,-1) \\ f(1,1,1,1) &= (1,3,-1) \end{aligned}$$

de modo que la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Puesto que las coordenadas de los vectores $(1,2,0)$, $(2,2,2)$, $(1,2,-1)$ y $(1,3,-1)$, que generan a $\mathrm{Im}(f)$ son canónicas, una base se obtendrá extrayendo los linealmente independientes. Puesto que los tres primeros son independientes, forman base, y $\dim(\mathrm{Im}(f))) = 3$.

Por la fórmula de la dimensión, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$. Si resolvemos el sistema correspondiente con la matriz dada, obtendremos vectores en coordenadas respecto de $\mathcal{B}$, mientras que lo que queremos son coordenadas canónicas. Por ello, resolvemos directamente el sistema dado por f:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuya soluciones están generadas por $(1,-3,-2,-2)$.

5. Dados los espacios vectoriales $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (matrices cuadradas de orden 2 y coeficientes reales) y $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ (polinomios de grado menor o igual que dos, con coeficientes reales y en la variable x), se define la aplicación

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] \\ & A & \longrightarrow & x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) \end{array}$$

Calcular la matriz de T respecto de las bases canónicas de ambos espacios.
Nota: recuérdese que la *traza* de una matriz es la suma de sus elementos diagonales. [1 pto.]

Solución: Buscamos las imágenes de la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ como combinación lineal de los vectores de la base canónica de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$. Esto es,

$$T\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x^2 - x \longrightarrow (0,-1,1)$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = x^2 \longrightarrow (0,0,1)$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = x^2 \longrightarrow (0,0,1)$$
$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = x^2 - x \longrightarrow (0,-1,1)$$

siendo la matriz buscada

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. Se considera f, un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con autovalores 1 y 3, el segundo de los cuales es doble (esto es, su multiplicidad algebraica es dos). Los autovectores asociados son: $(1,0,0)$ para $\lambda = 1$; $(1,1,0)$, $(0,0,1)$ para $\lambda = 3$. Se pide:

   a) Escribir la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   b) Calcular el polinomio característico de f.

[1.5 ptos.]

Solución:

1. Puesto que

$$f(1,0,0) = (1,0,0), \quad f(1,1,0) = (3,3,0), \quad f(0,0,1) = (0,0,3)$$

ya que son autovectores asociados a autovalores dados, y los autovectores forman una base, la matriz de f respecto de la base

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$$

y la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} \equiv A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz respecto de la base canónica, debemos efectuar un cambio de base según el diagrama adjunto

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{A} & \mathcal{B}_c \\ C\uparrow & & \downarrow I \\ \mathcal{B}_c & \xrightarrow[X]{} & \mathcal{B}_c \end{array}$$

del cual deducimos que $X = AC$, con C la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$. Dicha matriz corresponde a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

2. Puesto que las raíces del polinomio característico de f son 1 y 3 (doble), el polinomio característico es $(1 - \lambda)(3 - \lambda)^2$.

2º Examen Parcial de Álgebra **14 de Junio de 2004**

1. **[2 ptos.]** El endomorfismo de $\mathbb{R}^5$ cuya matriz respecto de la base canónica es A tiene un autovalor $\lambda = -3$ de multiplicidad 5 y una base de $E_1(-3)$ está formada por los vectores
$$\{(-1,0,1,0,0),(1,0,0,0,1)\}.$$
Las matrices $A+3I$ y $(A+3I)^2$ vienen dadas por:
$$A+3I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A+3I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Encontrar **razonadamente** la forma canónica de Jordan de la aplicación dada, y una matriz de paso.

Solución:

Está claro que el único autovalor de A es $\lambda = -3$, y que $q_1 = \dim(E_1(-3)) = 2$. Estudiando el rango$(\mathrm{A}+3\mathrm{I})^2 = 1$ obtenemos que $q_2 = \dim(E_2(-3)) = 4$ y por tanto no queda más remedio que $q_3 = \dim(E_3(-3)) = 5$. Así, la partición de multiplicidad es $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 1$. Las cajas elementales asociadas a esta partición son:
$$\begin{aligned} p_3 &= 1 \text{ caja de tamaño } 3 \\ p_2 - p_3 &= 1 \text{ caja de tamaño } 2 \\ p_1 - p_2 &= 0 \text{ cajas de tamaño } 1 \end{aligned}$$
Es decir, la forma canónica de Jordan es:
$$J = \left(\begin{array}{ccc|cc} -3 & 1 & & & \\ & -3 & 1 & & \\ & & -3 & & \\ \hline & & & -3 & 1 \\ & & & & -3 \end{array}\right).$$
Para obtener la matriz de paso construimos la tabla de subespacios:

$p_3 = 1$	$E_3(-3)$	$(1,0,0,0,0)$	
$p_2 = 2$	$E_2(-3)$	$(0,-1,-1,0,1)$	$(-3,0,0,1,0)$
$p_1 = 2$	$E_1(-3)$	$(-1,0,1,0,0)$	$(-1,0,2,1,0)$

donde $(1,0,0,0,0)$ ha sido escogido en $E_3(-3)=\mathbb{R}^5$ de manera que no pertenezca a $E_2(-3)$,

$$\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix} = (A+3I)\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\\ 0\\ 0 \end{pmatrix} = (A+3I)\begin{pmatrix} 0\\ -1\\ -1\\ 0\\ 1 \end{pmatrix};$$

$(-3,0,0,1,0)$ ha sido escogido en $E_2(-3)$, que no esté en $E_1(-3)$ y finalmente

$$(A+3I)\begin{pmatrix} -3\\ 0\\ 0\\ 1\\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 2\\ 0\\ 1 \end{pmatrix}.$$

De este modo la matriz de paso P queda:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **[1 ptos]** En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ dotado del producto escalar habitual se considera un endomorfismo de matriz simétrica respecto de la base canónica. Se sabe que dicho endomorfismo tiene dos autovalores dobles, λ y μ, y que una base de $E_1(\lambda)$ está formada por los vectores
$$\{(1,1,0,0),(1,1,1,1)\}.$$
Decidir **razonadamente** cúal de las siguientes respuestas es correcta:

(A) Una base de $E_1(\mu)$ es $\{(1,-1,0,0),(0,1,-1,0)\}$

(B) Una base de $E_1(\mu)$ es $\{(0,1,-1,0),(0,0,1,-1)\}$

(C) Una base de $E_1(\mu)$ es $\{(-1,0,0,1),(1,-1,0,0)\}$

(D) Una base de $E_1(\mu)$ es $\{(1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\}$

(E) Una base de $E_1(\mu)$ es $\{(0,0,1,-1),(-1,0,0,1)\}$

Solución:

La respuesta correcta es (D), puesto que como la matriz es simétrica, los autovectores asociados a autovalores distintos deben ser ortogonales, de modo que $E_1(\lambda)\perp E_1(\mu)$.

3. **[2 ptos.]** Sea $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ es espacio de matrices cuadradas de orden dos, dotado del producto escalar:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \right\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

Se considera la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

y el conjunto $\mathcal{S}$ de matrices antisimétricas, es decir,

$$\mathcal{S} = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A = -A^T\}.$$

Se pide:

3.a) Hallar la proyección ortogonal de M sobre $\mathcal{S}$.

3.b) Dada la aplicación $T : \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = -A^T$, calcular T', la aplicación adjunta de A. ¿Es T autoadjunta? Calcular $T'(M)$.

Solución:

3.a) Calculemos en primer lugar una base de S. Una matriz de S, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ debe satisfacer:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_1 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = -x_2 \\ x_4 = -x_4 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right.$$

de donde obtenemos como base la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

La proyección ortogonal debe corresponder a una matriz $P_S(M)$ que pertenezca a S, es decir debe ser de la forma $\alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, y tal que $M - P_S(M)$ sea ortogonal a S, lo que significa que

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0.$$

De aquí es inmediato obtener $\alpha = -\frac{1}{2}$, luego

$$P_S(M) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3.b) Para calcular T' obtenemos primeramente la matriz de T en una base ortonormal. El producto escalar que nos dan hace que la base canónica de $\mathbb{M}_2$ sea ortonormal, de modo que la matriz de T se obtiene:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

luego la matriz de T en la base canónica es

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que claramente es simétrica, de modo que $T' = T$, es decir, T es autoadjunta. Finalmente $T'(M) = T(M) = -M^T = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

4. **[1.5 ptos.]** Considera la forma bilineal definida en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ por

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 + 3x_1y_3 + 5x_2y_2 - x_2y_3 - 5x_3y_1 - 3x_3y_2 + 2x_3y_3$$

4.a) Determina la matriz de la forma bilineal A en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

4.b) Descompone A como suma de dos formas bilineales: una simétrica y otra antisimétrica.

4.c) Clasifica la forma cuadrática $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ asociada a la forma bilineal A, es decir, decidir si C es (semi-)definida positiva o negativa, o es indefinida.

Solución:

4.a) Puesto que el elemento ij de la matriz respecto de la base canónica es el coeficiente de x_iy_j está claro que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.b) La descomposición buscada será del tipo $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$, así

$$\tfrac{1}{2}(A + A^T) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tfrac{1}{2}(A + A^T) = \tfrac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ -5 & -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ 0 & 5 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.c) La forma cuadrática que define A es

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,x_3) &= 2x_1^2+3x_1x_3+5x_2^2-x_2x_3-5x_3x_1-3x_3x_2+2x_3^2 \\ &= 2x_1^2-2x_1x_3+5x_2^2-4x_3x_2+2x_3^2, \end{aligned}$$

y la matriz asociada es

$$C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los menores principales de esta matriz son 2, 10 y 7, que al ser todos positivos aseguran, usando el criterio de Sylvester, que C es definida positiva.

5. **[2.5 ptos.]** Se considera el problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1+x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & x_1+x_2 \geq -2, \\ & -2x_1+x_2 \leq 7, \\ & x_1-3x_2 \leq 6 \end{aligned}$$

Se pide:

5.a) Escribir el problema en formato estándar.

5.b) Escribir la tabla inicial del simplex correspondiente al problema, señalar la solución básica factible y las variables entrante y saliente en la primera iteración. No es necesario que realices la iteración completa.

5.c) Resolver gráficamente el problema.

Solución:

5.a) Puesto que las variables no están restringidas en signo, primeramente hacemos el cambio

$$x_1=y_1-y_2, \qquad x_2=y_3-y_4.$$

Multiplicando por -1 la primera restricción y añadiendo variables de holgura se obtiene:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & y_1-y_2+y_3-y_4 \\ \text{sujeto a} \quad & -y_1+y_2-y_3+y_4+y_5=2, \\ & -2y_1+2y_2+y_3-y_4+y_6=7, \\ & y_1-y_2-3y_3+3y_4+y_7=6, \\ & y_1,\dots,y_7 \geq 0. \end{aligned}$$

5.b) La tabla inicial del simplex es:

	c	1	-1	1	-1	0	0	0	
c_B	base	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	**b**
0	y_5	-1	1	-1	1	1	0	0	2
0	y_6	-2	2	1	-1	0	1	0	7
0	y_7	1	-1	-3	3	0	0	1	6
	costes	-1	1	-1	1	0	0	0	**0**

A la vista de la tabla, la variable entrante puede ser, o bien y_2 o y_4. Si es y_2 entonces la saliente es y_5, mientras que si es y_4, pueden entrar, tanto y_5 como y_7. La solución básica factible es $(0, 0, 0, 0, 2, 7, 6)$ y el valor de la función objetivo es 0.

5.c) Atendiendo a la Figura 1, se observa que el mínimo de la función objetivo se alcanza en el segmento definido por los puntos $(-3, 1)$ y $(0, -2)$.

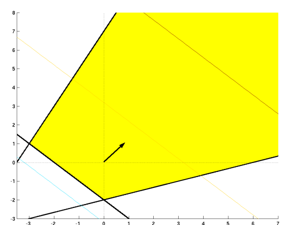


Figura 1: Región factible y curvas de nivel del Problema 5

6. **[1 ptos.]** Decidir **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS:

6.a) Una matriz compleja que tiene todos sus autovalores reales con multiplicidad uno es diagonalizable.

6.b) Si λ es un autovalor asociado al autovector $\mathbf{x}$ de una matriz A, entonces λ^2 es autovalor asociado a $\mathbf{x}$ de A^2.

6.c) Una matriz estrictamente diagonal dominante es invertible.

6.d) Si una matriz cuadrada de orden 4 tiene como polinomio característico $\lambda^4 - 1$, entonces $A^5 - A$ es la matriz nula.

Solución:

6.a) Falso, pues pueden existir autovalores complejos con multiplicidad algebraica mayor que uno y multiplicidad geométrica distinta.

6.b) Verdadero pues si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ entonces

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}.$$

6.c) Verdadero, pues el Teorema de los círculos de Gergshgorin asegura que cero no es autovalor, pues ninguno de los círculos lo contiene, y por tanto que el determinante no puede ser cero.

6.d) Verdadero, por el Teorema de Cayley-Hamilton, $A^4 - I = 0$, de modo que $A(A^4 - I) = A^5 - A = 0$

Soluciones – Álgebra (1er Parcial) **28 de Junio de 2004**

1. **[2.5 ptos]** Discutir según los valores de a el sistema:

$$\begin{aligned} x + 3y - az &= 4 \\ -ax + y + az &= 0 \\ -x + 2ay &= a + 2 \\ 2x - y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

Solución:

Está claro que el rango de la matriz de los coeficientes no puede ser mayor de tres, y el de la ampliada como máximo es cuatro. Así, tras las operaciones siguientes en la matriz ampliada del sistema: $C_1 + 2C_2$, $C_3 - 2C_2$, resolver por la última fila y luego hacer $C_1 + C_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -a & 4 \\ -a & 1 & a & 0 \\ -1 & 2a & 0 & a+2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

se obtiene como determinante: $(a-2)^2(a+3)$. De modo que

- si $a \neq 2, -3$, rango(A') $= 4$ y por tanto el sistema es incompatible,
- si $a = -3$, rango(A) $=$ rango(A') $= 3$ y el sistema es compatible determinado,
- si $a = 2$, rango(A) $=$ rango(A') $= 2$, de modo que el sistema es compatible indeterminado.

2. **[2.5 ptos]** Se consideran los espacios vectoriales

$$L_1 = \{p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] : p(0) = 0\}$$
$$L_2 = \{p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] : p'(0) = 0\},$$

donde $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos en la variable x. Hallar una base y la dimensión de L_1, L_2, $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$.

Solución:

El espacio L_1 está formado por polinomios $p(x) = x_1 + x_2x + x_3x^2$ tales que $x_1 = 0$, de modo que una base estará formada por los vectores $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ correspondientes a los polinomios x y x^2, y la dimensión es obviamente 2.

Del mismo modo L_2 se obtiene mediante el sistema de ecuaciones implícitas $x_2 = 0$ (pues $p'(x) = x_2 x + 2x_3 x$). Una base de L_2 está formada por los vectores $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$, correspondientes a los polinomios 1 y x^2, y la dimensión también es 2.

Para $L_1 + L_2$ basta con juntar las bases de ambos espacios, en este caso $\{1, x, x^2\}$ de modo que es inmediato ver que $L_1 + L_2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$, con dimensión 3.

Finalmente, como por la fórmula de la dimensión, $L_1 \cap L_2$ debe tener dimensión 1, y el polinomio x^2 está en ambos espacios, está claro que una base de $L_1 \cap L_2$ está formada por dicho polinomio.

3. **[2.5 ptos]** Se consideran los espacios $\mathbb{P}_3[x]$, polinomios de grado menor o igual que 3 en la variable x, y $\mathbb{M}_2$, matrices cuadradas de orden 2. Sea $f : \mathbb{P}_3[x] \longrightarrow \mathbb{M}_2$ la aplicación lineal definida por:

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

3.a) Matriz de f respecto de las bases canónicas de ambos espacios.

3.b) Dadas las bases de $\mathbb{P}_3[x]$ y $\mathbb{M}_2$:

$$\mathcal{B}_1 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

respectivamente, hallar la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

Solución:

3.a) Un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ f(x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ f(x^2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ f(x^3) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

de manera que la matriz de f en las bases canónicas de ambos espacios es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.b) Para calcular la matriz de f en las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ podemos proceder de forma similar calculando las imágenes de la base $\mathcal{B}_1$, escribiéndolas como combinación lineal de la base $\mathcal{B}_2$, o usar las matrices de cambio de base. De esta última manera tenemos que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^3 & \longrightarrow & \mathbb{M}_2 \\ \mathcal{B}_c & \xrightarrow{A} & \mathcal{B}_c \\ P_1 \uparrow & & \downarrow P_2 \\ \mathcal{B}_1 & \xrightarrow{X} & \mathcal{B}_2 \end{array}$$

donde P_1 es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a la canónica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$, y P_2 es la matriz de cambio de base de la canónica de $\mathbb{M}_2$ a $\mathcal{B}_2$. Es decir,

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$X = P_2 A P_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. **[2.5 ptos]** Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, x_3).$$

Calcular un base y un sistema de ecuaciones implícitas de los subespacios:

4.a) $\mathrm{Ker}(f)$.

4.b) $\mathrm{Im}(f)$.

4.c) $f(M)$, donde $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

Solución:

4.a) La matriz de f en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de modo que las ecuaciones implícitas de $\ker(f)$ son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0. \end{array} \right.$$

La dimensión de ker(f) será 3$-$rango(A) $= 1$, y una base de soluciones está formada por $(1, -1, 0)$.

4.b) La Im(f) está generada por las columnas de A, de modo que una base está formada por los vectores $(1, 1, 0)$ y $(1, -1, 1)$. Obviamente la dimensión es 2, y un sistema de ecuaciones implícitas se obtiene mediante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 - 2x_3 = 0.$$

4.c) Para calcular un sistema generador de $f(M)$ basta con obtener las imágenes de una base de M. Una base de M se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones implícitas que lo define, en este caso, $(1, -1, 0)$ y $(0, 1, -1)$. Las imágenes de estos vectores son:

$$f(1, -1, 0) = (0, 0, 0), \quad f(0, 1, -1) = (0, 2, -1),$$

de modo que una base está formada por $(0, 2, -1)$ y la dimensión es 1. Finalmente, un sistema de ecuaciones implícitas de $f(M)$ viene dado imponiendo que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

Soluciones de Álgebra (2º Parcial) **28 de Junio de 2004**

1. **[2 ptos.]** Si la posición de una partícula situada en el plano en el instante t viene dada por

$$\begin{cases} x_t = -\frac{1}{4}x_{t-1} - \frac{3}{4}y_{t-1} \\ y_t = \frac{3}{4}x_{t-1} + \frac{1}{4}y_{t-1} \end{cases}$$

Estudiar el estado

$$\lim_{t\to+\infty} \|(x_t, y_t)\|$$

para cada estado inicial (x_0, y_0).

Solución:

Si A es la matriz del sistema dinámico, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

entonces está claro que

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = A^t \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Para calcular A^t consideramos su forma de Jordan, de modo que $A = PJP^{-1}$, y así, $A^t = PJ^tP^{-1}$. Por otro lado, los autovalores de A son $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$, de modo que

$$J^t = \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^t & 0 \\ 0 & \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^t \end{pmatrix}$$

Como lo que nos interesa es el límite cuando $t \to \infty$, y es claro que ambos autovalores tienden a cero, entonces

$$\lim_{t\to+\infty} \|(x_t, y_t)\| = 0.$$

2. **[3 ptos.]** Considera la aplicación lineal

$$\begin{aligned} A:\ \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \mathbf{x} &\longmapsto A\mathbf{x} = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + x_3, -x_1 - x_3) \end{aligned}$$

y el producto escalar habitual en $\mathbb{R}^3$.

2.a) Calcula la matriz de la aplicación adjunta de la aplicación A.

2.b) Calcula una base ortonormal del subespacio

$$S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

2.c) Calcula $S^{\perp}$.

2.d) Calcula la solución aproximada del sistema

$$A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

por el método de los mínimos cuadrados.

Solución:

2.a) La matriz de A en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que es una base ortonormal es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matriz de la aplicación adjunta de A será su traspuesta, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.b) El subespacio S tiene como ecuaciones implícitas

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \quad x_1 + x_3 = 0,$$

cuya dimensión es claramente 1, y una base viene dada por $(3, 2, -3)$. Para ortonormalizar la base, sólo es necesario dividir por su norma, en este caso es $\sqrt{22}$, quedando $(\frac{3}{\sqrt{22}}, \frac{2}{\sqrt{22}}, -\frac{3}{\sqrt{22}})$.

2.c) Para calcular $S^{\perp}$ basta con pedir que

$$(x_1, x_2, x_3) \perp S \Rightarrow \langle (x_1, x_2, x_3), (3, 2, -3) \rangle = 0 \Rightarrow 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0,$$

de donde resulta que $\dim(S^{\perp}) = 2$ y una base viene dada por $(-2, 3, 0)$ y $(1, 0, 1)$.

2.d) Para resolver de forma aproximada el sistema dado debemos calcular previamente la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 1)$ sobre el espacio L generado por las columnas de A. Una base de este espacio es $(2, 1, -1)$ y $(3, 0, 0)$ de manera que la proyección será un vector de la forma

$$\mathbf{x} = \lambda(2, 1, -1) + \mu(3, 0, 0).$$

La característica que define a la proyección ortogonal es que

$$(1,1,1)-\mathbf{x} \perp L \Rightarrow \begin{cases} \langle (1,1,1)-\mathbf{x},(2,1,-1)\rangle = 0 \\ \langle (1,1,1)-\mathbf{x},(3,0,0)\rangle = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema en λ y μ se obtiene $\lambda = 0$, $\mu = \frac{1}{3}$. De aquí, $\mathbf{x} = (1,0,0)$. La solución del sistema con segundo miembro $\mathbf{x}$ es $(-\alpha, \frac{1-2\alpha}{3}, \alpha)$.

3. **[1.5 ptos.]** Se considera la forma bilineal de $\mathbb{R}^3$ dada por

$$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = x_1y_1 + 2\alpha x_1y_2 + 2\alpha x_3y_1 + (1-\alpha)x_2y_2 + (1-\alpha)x_3y_3$$

Obtener los valores de α para los que la forma cuadrática asociada a la forma bilineal A es definida positiva.

Solución:

La matriz de la forma cuadrática asociada a la forma bilineal es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1-\alpha \end{pmatrix}$$

Estudiando sus autovalores, que se pueden calcular haciendo las operaciones $C_2 - C_3$ y $F_3 + F_2$ en el $\det(A-\lambda I)$, resulta

$$\det(A-\lambda I) = (1-\alpha-\lambda)(\lambda^2 + \lambda(\alpha-2) + 1 - \alpha - 2\alpha^2) = 0 \Rightarrow \lambda = 1-\alpha, 1-2\alpha, 1+\alpha$$

Para pedir que la forma cuadrática sea definida basta pedir que $1-\alpha > 0$, $1+\alpha > 0$ y $1-2\alpha > 0$, simultáneamente, lo cual se consigue para $-1 < \alpha < \frac{1}{2}$.

4. **[2.5 ptos.]** Se considera el problema de programación lineal:

$$\begin{array}{rc} \text{Maximizar} & 3x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \geq 3, \\ & -2x_1 + x_2 \leq 3, \\ & 4x_1 + x_2 \leq 9 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Se pide:

4.a) Escribir el problema en formato estándar.

4.b) Escribir la tabla inicial del simplex correspondiente al problema, señalar la solución básica factible y las variables entrante y saliente en la primera iteración. No es necesario que realices la iteración completa.

4.c) Resolver gráficamente el problema.

Solución:

4.a) El formato estándar es:

$$\begin{array}{rc} \text{Minimizar} & -3x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ & -2x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ & 4x_1 + x_2 + x_5 = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

4.b) La tabla a la que da lugar el formato estándar es

	c	-3	-1	0	0	0	
c_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
0	x_3	1	1	-1	0	0	3
0	x_4	-2	1	0	1	0	3
0	x_5	4	1	0	0	1	9

Como no aparece la identidad en la tabla, no tenemos una solución inicial y debemos añadir variables artificiales. En concreto, la primera restricción se transforma en

$$x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 3$$

y la función objetivo será ahora

$$-3x_1 - x_2 + Mx_6,$$

quedando la tabla como

	c	-3	-1	0	0	0	M	
c_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	**b**
M	x_6	1	1	-1	0	0	1	3
0	x_4	-2	1	0	1	0	0	3
0	x_5	4	1	0	0	1	0	9
	costes	M+3	M+1	-M	0	0	0	**3M**

La solución básica factible es $(0, 0, 0, 3, 9, 3)$, la variable entrante es x_1 y la saliente es x_5.

4.c) A la vista de la Figura 1, se observa que la región factible es un triángulo de vértices $(0, 3)$, $(2, 1)$ y $(1, 5)$, alcanzándose el máximo en el punto $(1, 5)$.

5. **[1 pto.]** Sea A un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ con autovalores $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Sabiendo que $A^3 = A$, hallar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. ¿Es A diagonalizable?

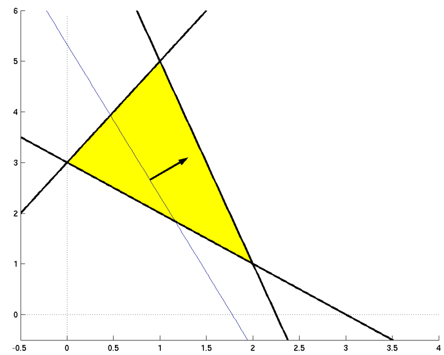


Figura 1: Región factible

Solución:

Como A es una matriz de orden 3, y verifica que $A^3 - A = 0$, por el teorema de Cayley-Hamilton, el polinomio característico de A es $\lambda^3 - \lambda$, cuyas raíces son $\lambda = -1, 1, 0$, siendo éstos los autovalores buscados. Como todos son distintos, A es diagonalizable.

Examen Extraordinario de Álgebra (1^{er} Parcial) **7 de Septiembre de 2004**

1. En $\mathbb{R}^3$ se considera la base canónica $\mathcal{B}$ y el conjunto de vectores

$$\mathcal{B}' = \{(2,0,0),(1,5,4),(-1,-2,-1)\}$$

Se pide:

1.a) Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

1.b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{u} = (1,0,1)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

1.c) Encontrar las ecuaciones del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

1.d) Hallar los vectores de $\mathbb{R}^3$ que poseen las mismas coordenadas en ambas bases.

Solución:

1.a) Es fácil comprobar que el rango de la matriz formada por los tres vectores de $\mathcal{B}'$ es tres, y puesto que nos encontramos en $\mathbb{R}^3$, que tiene dimensión 3, $\mathcal{B}'$ es base.

1.b) Las coordenadas se obtienen resolviendo el sistema

$$(1,0,1) = \alpha(2,0,0) + \beta(1,5,4) + \gamma(-1,-2,-1),$$

resultando $\alpha = 1$, $\beta = \frac{2}{3}$ y $\gamma = \frac{5}{3}$.

1.c) La ecuaciones del cambio de base son $\mathbf{x}_{\mathcal{B}'} = M\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$, donde M es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$. Puesto que la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ está formada por las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}'$ respecto de $\mathcal{B}$, y éstas son las dadas, está claro que

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -4/3 & 5/3 \end{pmatrix}.$$

1.d) Los vectores que tienen las mismas coordenadas en ambas bases serán los que satisfagan el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right.$$

cuyas soluciones son $(\alpha, \alpha, 2\alpha)$.

2. En $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios L_1 y L_2 dados por

$$L_1 = L((1,0,0,1),(1,0,0,0),(0,0,1,1))$$
$$L_2 = \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Calcular la dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas de L_1, L_2, L_1+L_2 y $L_1 \cap L_2$.

Solución:

La matriz formada por los vectores que generan L_1 tiene rango 3, de modo que $\dim(L_1) = 3$ y dichos vectores forman una base de dicho espacio. Para obtener un sistema de ecuaciones implícitas resolvemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_2 = 0.$$

Puesto que el rango de la matriz que define el sistema de ecuaciones implícitas de L_2 es 2, y el espacio ambiente tiene dimensión 4, $\dim(L_2) = 4 - 2 = 2$. Resolviendo el sistema con 2 parámetros (x_2 y x_4) se obtiene como base de L_2:

$$\{(-1,0,0,1),(0,1,0,0)\}.$$

Uniendo las bases de L_1 y L_2 obtenemos un sistema generador de $L_1 + L_2$. La matriz resultante tiene rango 4, lo que demuestra que $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^4$.

Finalmente, a partir de la fórmula de la dimensión es fácil ver que $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, un sistema de ecuaciones implícitas está formado por la unión de los sistemas de L_1 y L_2, y una base la forma el vector $(-1,0,0,1)$.

3. En $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$, espacio de polinomios de grado menor o igual que dos, en la variable x, se consideran las bases

$$\mathcal{B}_1 = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{1, x, x^2\}$$

y la aplicación lineal $f : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ dada por $f(p(x)) = p'(x+1)$. Calcular la matriz de la aplicación f respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

Solución:

Calculamos las imágenes por f de los vectores de la base de $\mathcal{B}_1$:

$$f(1) = 0, \quad f(1+x) = 1, \quad f(1+x+x^2) = 2(x+1)+1,$$

y dichas imágenes las escribimos como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_2$:

$$0 \to (0,0,0), \quad 1 \to (1,0,0), \quad 2x+3 \to (3,2,0).$$

La matriz es por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, -x_2)$, estudiar si la aplicación es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva. Hallar la dimensión y una base de $\mathrm{Im}(f)$ y $\mathrm{Ker}(f)$.

   Solución:

   La matriz de f en las bases canónicas de ambos espacios es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Estudiando su rango podemos ver que es 2, y por tanto, como coincide con la dimensión del espacio de llegada, la aplicación es sobreyectiva. Como la dimensión del núcleo es $3 - \mathrm{rango}(A) = 1$, la aplicación no puede ser inyectiva, y por tanto no es biyectiva.

   Una base de $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ será cualquier base de $\mathbb{R}^2$, por ejemplo, la canónica. En cuanto al $\mathrm{Ker}(f)$, hemos de resolver el sistema

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{array} \right.$$

   y una base estará formada por $(0,0,1)$.

5. Decidir **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS:

   5.a) Si un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es compatible determinado, entonces la matriz A es cuadrada.

   5.b) Si V_1 y V_2 son dos subespacios vectoriales tales que

$$\dim(V_1) = \dim(V_2) = \dim(V_1 \cap V_2)$$

   entonces $V_1 = V_1 + V_2$.

   5.c) No puede existir un endomorfismo f cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B}_1$ sea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ y respecto de una base $\mathcal{B}_2$ sea $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   5.d) Si A es una matriz cuadrada de orden 7 cuyos únicos autovalores son 1, 2 y 3, que verifica $\dim(E_1(1)) = \dim(E_2(1)) = 4$, $\dim(E_1(2)) = \dim(E_2(2)) = 1$ y $\dim(E_1(3)) = 1$. Entonces A es diagonalizable.

Solución:

5.a) Falso, el sistema formado por las ecuaciones $x_1 = 1$, $2x_1 = 2$ es compatible determinado y su matriz no es cuadrada.

5.b) Verdadero, como $V_1 \cap V_2 \subset V_1$ y tienen la misma dimensión, entonces $V_1 = V_1 \cap V_2$. Del mismo modo $V_2 = V_1 \cap V_2$, luego $V_1 = V_2$, y por tanto $V_1 = V_2 = V_1 + V_2$.

5.c) Verdadero, ya que ambas matrices no tienen el mismo determinante.

5.d) Falso, puesto que el autovalor 1 tiene multiplicidad 4, el autovalor 2 tiene multiplicidad 2 y por tanto el autovalor 3 tiene multiplicad 2, pero $\dim(E_1(3)) \neq 2$.

Examen Extraordinario de Álgebra (2° Parcial) **7 de Septiembre de 2004**

---

1. **[2 ptos.]** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & a & 3 \\ 0 & 0 & 2 & a \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a la matriz es diagonalizable? En caso de no ser diagonalizable, obtener las posibles formas canónicas de Jordan.

Solución:

Es fácil calcular el polinomio característico de A, que resulta $(1-\lambda)(2-\lambda)^3$, de modo que los autovalores son $\lambda = 1$ simple y $\lambda = 2$ triple. Está claro que A será diagonalizable si $\dim(E_1(2)) = 3$. Basta entonces estudiar el rango de la matriz $A - 2I$:

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & a & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

resultando que si $a = 0$, el rango es 2, y si $a \neq 0$, el rango es 3. En consecuencia, si $a = 0$, $\dim E_1(2) = 2$, y si $a \neq 0$, $\dim E_1(2) = 1$; en ningún caso, A puede ser diagonalizable.

Veamos cómo son las formas de Jordan en los casos anteriores. Si $a = 0$, entonces es claro que $\dim(E_2(2)) = 3$ (pues debe ser mayor que $\dim(E_1(2))$ y no pasar de 3), en cuyo caso, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$ y la partición de multiplicidad es $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, lo que corresponde a una caja de tamaño dos y una de tamaño uno.

Si $a \neq 0$, debemos averiguar el valor de $\dim(E_2(2))$, viendo el rango de $(A-2I)^2$:

$$(A - 2I)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3+a & 2+3a \\ 0 & 0 & 0 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que vale siempre dos, de modo que $\dim(E_2(2)) = 2$ y la partición de multiplicidad correspondiente es $3 = 1 + 1 + 1$. Finalmente, las cajas de Jordan son:

$$J = \left(\begin{array}{cc|c|c} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ \hline & & 2 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right), \qquad J = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & \\ \hline & & & 1 \end{array}\right).$$

2. **[3 ptos.]** En el espacio $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos, con coeficientes reales, se considera el producto escalar

$$\langle p(x), q(x)\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

y el conjunto

$$M = \{p(x) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}.$$

Se pide:

2.a) Hallar una base ortogonal de M.

2.b) Hallar una base de $M^{\perp}$.

2.c) Hallar el polinomio $p(x) \in M$ que hace mínimo el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 1 - p(x))^2\,dx$$

.

Solución:

2.a) Para obtener una base de M basta considerar un polinomio genérico $p(x) = x_1 + x_2 x + x_3 x^2$, e imponer su pertenecia a M, es decir,

$$\left.\begin{array}{l} p(0) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \\ p'(0) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Base de } M\text{: } (0,0,1) \to x^2$$

Como se trata de un único elemento, ya es una base ortogonal.

2.b) Para calcular una base de $M^{\perp}$, basta exigir a un polinomio genérico que su producto escalar con la base de M sea nulo:

$$\int_{-1}^{1} (x_1 + x_2 x + x_3 x^2)x^2\,dx = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{5}x_3 = 0$$

de donde se obtiene la base: $\{(-\frac{3}{5}, 0, 1), (0,1,0)\}$, o en forma polinomial

$$\{-\frac{3}{5} + x^2, x\}.$$

2.c) El polinomio buscado corresponde a la proyección ortogonal de $x^2 + 1$ sobre M, que será el elemento de M, es decir, αx^2 tal que

$$\int_{-1}^{1} (x^2 + 1 - \alpha x^2)x^2\,dx = 0 \Rightarrow (1-\alpha)\frac{2}{5} + \frac{2}{3} = 0,$$

que corresponde a $\alpha = \frac{8}{3}$. El polinomio buscado es $\frac{8}{3}x^2$.

3. **[2 ptos.]** Sea A la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ de matriz

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular la descomposición polar de A.

Solución: En primer lugar calculamos $B = A^T A$:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

A continuación calculamos $S = B^{1/2}$ a través de la forma de Jordan. Es fácil encontrar los autovalores y autovectores que son $\lambda = 1$ con autovector $(1, -1)$ y $\lambda = 9$ con autovector $(1, 1)$. Así,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Para calcular S^{-1} procedemos de forma similar:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

y finalmente, $O = AS^{-1}$:

$$O = AS^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **[1.5 ptos.]** Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal definida por:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2.$$

Se pide:

4.a) Hallar la matriz A de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

4.b) Hallar la matriz B de f respecto de la base $\{(2, 1), (1, -1)\}$.

4.c) Hallar la matriz P tal que $B = P^T AP$.

Solución:

4.a) Es fácil obtener

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.b) Directamente podemos calcular:

$$\begin{aligned} f((2,1),(2,1)) &= 3, \\ f((2,1),(1,-1)) &= 9, \\ f((1,-1),(2,1)) &= 0, \\ f((1,-1),(1,-1)) &= 6, \end{aligned}$$

luego

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

4.c) La matriz P corresponderá a una matriz de cambio de base, pues

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{y} \text{ y } f(\mathbf{x}_{\mathcal{B}},\mathbf{y}_{\mathcal{B}}) = (P\mathbf{x}_{\mathcal{B}})^T A(P\mathbf{y}_{\mathcal{B}}), = \mathbf{x}_{\mathcal{B}}^T P^T A P \mathbf{y}_{\mathcal{B}},$$

de modo que la matriz buscada será la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la canónica, esto es

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. **[1.5 ptos.]** En el transcurso de la resolución de un problema de programación lineal mediante el método simplex se llega a la siguiente tabla:

	c	-3	-2	0	0	0	
c_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
-3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	5	1	-3	5
-2	x_2	0	1	-2	0	1	2
	costes						

Obtener la solución y el valor óptimo mediante iteración del método simplex.

Solución:

Si calculamos los costes reducidos obtenemos:

	c	-3	-2	0	0	0	
c_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
-3	x_1	1	0	1	0	0	4
0	x_4	0	0	5	1	-3	5
-2	x_2	0	1	-2	0	1	2
	costes	0	0	1	0	-2	**-16**

de modo que la variable entrante (la única positiva) es x_3 y la saliente x_4 (la que da el menor cociente entre $\{\frac{4}{1}, \frac{5}{5}\}$). Iterando resulta

	c	-3	-2	0	0	0	
c_B	base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	**b**
-3	x_1	1	0	0	-1/5	3/5	3
0	x_3	0	0	1	1/5	-3/5	1
-2	x_2	0	1	0	2/5	-1/5	4
	costes	0	0	0	-1/5	-7/5	-17

que corresponde a la solución óptima: $(3, 4, 1, 0, 0)$ con coste -17.

EXAMEN ALGEBRA, FEBRERO 2006

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

- Escribe tus apellidos, nombre y grupo (A o B) en todas las hojas que entregues.
- Usa solamente una hoja por problema. No mezcles dos problemas en una misma hoja.
- No se puede usar calculadora de ningún tipo.
- Las notas se harán públicas el da 8 de febrero, al final de la mañana.
- Las soluciones de los problemas puedes encontrarlas en copistería.

PROBLEMAS

1. (1.5 puntos) Resuelve el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 - 22x_3 &= -33, \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1, \\ 5x_1 + 103x_2 + 41x_3 &= -160. \end{aligned}$$

2. (1 punto) Encuentra el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} 11 & 5 & 4 \\ 24 & 11 & 10 \\ 10 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. (2.5 puntos) Encuentra bases y ecuaciones de los cuatro subespacios determinados por la matriz dada, de sus intersecciones y de sus sumas (en total ocho subespacios)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 10 & 6 & -3 & 6 \\ 2 & 13 & 10 & -5 & 11 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Una editorial analiza las ventas realizadas de los libros de uno de sus mejores autores durante los últimos cuatro años, reflejadas en la tabla

año	1	2	3	4
venta (en millones)	1	1.5	3	5

   (a) (1.5 puntos) Hallar el ajuste lineal por el método de los mínimos cuadrados.

   (b) (0.5 puntos) ¿Cuántos libros de dicho autor espera vender la editorial en el quinto año?

5. (1.5 puntos) Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o no.

   - Existe una matriz A cuyo núcleo contiene $(1,3)$ y cuya imagen contiene $(3,1)$.
   - Existe una matriz A de modo que la dimensión de su núcleo es 1 más la dimensión del núcleo de su traspuesta.
   - Existe una matriz A cuya imagen es perpendicular a su núcleo.
   - Existe una matriz A cuyas columnas suman el vector nulo y sus filas un vector de unos.

6. (1.5 puntos) Encuentra la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXAMEN ALGEBRA, JUNIO 2006

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

NOMBRE:

Grupo:

- ESCRIBE CLARAMENTE TU NOMBRE Y GRUPO EN LAS LINEAS DE ARRIBA.
- No se pueden usar **calculadoras** de ningún tipo.
- Las soluciones de los problemas se pueden descargar de la página web de la asignatura.
- Las notas se harán públicas el día 16 de junio, viernes, al final de la mañana.

PROBLEMAS

Cada uno de los problemas que siguen vale 2 puntos.

1. Considera una aplicación lineal $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, y varias bases en ambos espacios. En $\mathbf{R}^2$, la base canónica C_2 y la base B_2 formada por los vectores $\{(1,2),(0,1)\}$. En $\mathbf{R}^3$, tenemos las bases canónica C_3 y B_3 formada por los vectores $\{(1,0,1),(1,-1,0),(0,1,0)\}$. Todos los vectores que aparecen están dados respecto de las bases canónicas respectivas. La aplicación lineal f viene determinada unívocamente por la información

$$f(1,2) = (1,0,1), \quad f(0,1) = (2,1,0).$$

Escribe la matriz F de dicha aplicación lineal en las bases en $\mathbf{R}^2$ y $\mathbf{R}^3$ que se indican en cada caso:

(a) B_2 y C_3:

$$F = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

(b) B_2 y B_3:

$$F = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}.$$

(c) C_2 y B_3:

$$F = \left(\quad \quad \right).$$

(d) C_2 y C_3:

$$F = \left(\quad \quad \right).$$

2. Responde **verdadero** o **falso** a las siguientes cuestiones y razona brevemente tus respuestas.

(a) El conjunto de matrices

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a - b + c + d = 0.5 \right\}$$

es subespacio vectorial de las matrices 2×2 con entradas reales.
Respuesta:
Razón:

(b) Las aplicaciones $f(x,y) = (x+y, x+2y)$ y $g(x,y) = (2x-y, -x+y)$ son inversa una de la otra.
Respuesta:
Razón:

(c) Cuando $a + b = c + d$ la matriz

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tiene como autovector $(1,1)$ y como autovalores $b - d$ y $a + d$.
Respuesta:
Razón:

(d) El conjunto de polinomios

$$\left\{1, x+3, (x+3)^2, (x+3)^3\right\}$$

es una base del espacio de polinomios con coeficientes reales de grado no superior a tres.
Respuesta:
Razón:

3. Hallar la potencia n-ésima de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

La solución de este problema aparece a continuación, pero en ella hay cuatro errores que debes encontrar, señalándolos en el texto (subrayando o haciendo un círculo) y después corregir en el espacio que se proporciona.

La potencia n-ésima de una matriz se calcula mediante su forma de Jordan según la fórmula $A^n = PJ_A^nP^{-1}$. Por tanto, necesitamos encontrar la forma de Jordan de A y la matriz del cambio de base P, y su inversa P^{-1}.

Cálculo de autovalores. El polinomio característico de A es el determinante

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b & b \\ b & a-\lambda & b \\ b & b & a-\lambda \end{vmatrix}.$$

Si en primer lugar, sustituimos la tercera columna por ella misma menos la primera, y después, cambiamos la segunda fila por ella misma más la tercera, podemos desarrollar el determinante por la tercera columna y encontrar una factorización completa del polinomio característico en la forma

$$-(\lambda - a + b)^2(\lambda - a - 2b).$$

Por tanto encontramos dos autovalores: $\lambda_1 = a + 2b$, sencillo, y $\lambda_2 = a - b$, doble.

Estudiamos los autovectores asociados a cada uno de ellos. Con respecto al primero, debemos encontrar una base del núcleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} -2b & b & b \\ b & -2b & b \\ b & b & -2b \end{pmatrix}.$$

Encontramos un único autovector $(1, 1, 1)$. Con respecto al segundo, debemos encontrar una base del núcleo de la matriz

$$\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}.$$

Una posible base está formada por los vectores $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$. En consecuencia la matriz P del cambio será

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su inversa es

$$P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, la potencia solicitada será el resultado de realizar la operación

$$A^n = PJ_A^nP^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (a+2b)^n & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^n & 1 \\ 0 & 0 & (a-b)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tras realizar estas operaciones y organizar el resultado, obtenemos

$$A^n = \frac{(a+2b)^n}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{(a-b)^n}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Primer error. Corrección:

Segundo error. Corrección:

Tercer error. Corrección:

Cuarto error. Corrección:

4. La producción de dos partes, A y B, de una determinada máquina requieren operar en ellas mediante cinco procesos distintos L, S, D, M y G. Los tiempos que requieren cada uno de estos procesos sobre cada parte vienen especificados en la tabla siguiente (datos en horas por unidad)

Parte	L	S	D	M	G
A	0.6	0.4	0.1	0.5	0.2
B	0.8	0.1	0.2	0.4	0.3

El número de procesos de cada clase disponible son: L, 10; S, 3; D, 4; M, 6; G, 5. Cada uno de ellos puede usarse durante 8 horas diarias, 30 días al mes. Se pide

(a) Determinar el plan de producción para maximizar el número total de partes A y B en un mes.

(b) Si el número de A debe ser igual al de B, ¿ cuál sería el mejor plan de producción?

En la solución por etapas de este problema que sigue a continuación, debes completar lo que falta.

(a) Elección de incógnitas y signo:

$x \mapsto$

$y \mapsto$

(b) Coste a maximizar:

(c) Restricciones: una por cada proceso

$L \mapsto$

$S \mapsto$

$D \mapsto$

$M \mapsto$

$G \mapsto$

(d) Representación gráfica de la región factible o posible (boceto comentado):

(e) Resolución gráfica: rectas paralelas al coste y último punto de contacto con la región factible (boceto comentado).

(f) Solución. Punto óptimo: . Número de piezas máximo:

Si el número de piezas de los dos tipos debe ser idéntico, entonces el número de piezas máximo de ambos tipos es:

5. Sea A una aplicación cuya matriz con respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Razona que A es ortogonal. Encuentra una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ en la que A tenga como matriz su forma canónica real de Jordan.

Resuelve este problema en el espacio que sigue a continuación.

EXAMEN ALGEBRA, FINAL JUNIO 2006

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

PROBLEMAS

1. (2 puntos) Para la matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 1 & 10 & 6 & -3 & 6 \\ 2 & 13 & 10 & -5 & 11 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$
responde verdadero (V) o falso (F) a las siguientes cuestiones.

   (a) (V) Una base de su núcleo está formada por los vectores
   $$(-22,-2,7,0,0),(11,1,0,7,0),(-32,-1,0,0,7).$$

   (b) (F) Un conjunto válido de ecuaciones del núcleo de su traspuesta es
   $$x_1+x_2-2x_3=0, 3x_1+6x_2+11x_3-7x_4=0.$$

   (c) (F) Una base de la imagen de su traspuesta está formada por los vectores
   $$(1,3,4,-2,5),(0,7,2,-1,1),(0,0,0,0,-1).$$

   (d) (V) Un sistema de ecuaciones válido de su imagen es
   $$2x_1-x_3+x_4=0, 2x_2-x_3-x_4=0.$$

Solución.

Es fácil comprobar que rango$A=2$, lo que significa que dim(ker(A))$=5-3=2$, dim(ker(A^T))$=4-2=2$, dim(im(A))$=2$ y dim(im(A^T))$=2$.

(a) Esos tres vectores están en el núcleo de A pues su producto por A es cero, y forman un conjunto de 3 vectores independientes. Como la dimensión de este subespacio es 3, forman una base del mismo.

(b) Nótese que el vector (por ejemplo) $(1,1,1,20/7)$ verifica estas dos ecuaciones, y sin embargo, no pertenece al núcleo de la traspuesta puesto que el producto de este vector por A no da el vector nulo.

(c) Se ha comentado más arriba que este subespacio tiene dimensión 2, luego no puede tener una base formada por 3 vectores.

(d) Como la dimensión de este subespacio de $\mathbf{R}^4$ es 2, tiene un sistema de ecuaciones formado por 2 ecuaciones. Basta comprobar que los vectores formados por los coeficientes de estas dos ecuaciones multiplicados por A (en este orden) dan el vector nulo (las ecuaciones de la im$A$ están determinadas por una base del kerA^T).

2. (1 punto) Señala el resultado del determinante siguiente

$$\begin{vmatrix} 11 & 5 & 4 & 0 \\ 24 & 11 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 12 & 7 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

   (a) -7
   (b) 7 (†).
   (c) 14
   (d) 7234/4322
   (e) Ninguno de los resultados anteriores

   Solución.
   Nótese que cambiando la cuarta fila por ella misma el doble de la tercera, desembocamos en el determinante

$$\begin{vmatrix} 11 & 5 & 4 & 0 \\ 24 & 11 & 10 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 5 & 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

   Desarrollando por la cuarta columna, se comprueba que el determinante solicitado es el determinante

$$\begin{vmatrix} 11 & 5 & 4 \\ 24 & 11 & 10 \\ 10 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

   cambiado de signo. Este determinante se calculó en el examen del primer parcial y vale -7.

3. (2 puntos) Construye en cada situación siguiente una matriz A con las propiedades solicitadas o razona que es imposible encontrarla.

   (a) Una de sus filas es el vector $(1,-1,1)$ y este vector está es su núcleo.
   Razón por la que es imposible encontrarla. Al multiplicar la fila $(1,-1,1)$ por el vector $(1,-1,1)$ debería darnos cero para que dicho vector esté en el núcleo, pero esto es imposible pues este producto es una suma de cuadrados $1+1+1=3$.

   (b) Una de sus columnas es el vector $(1,-1,1)$ y este vector está es su núcleo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (c) Su imagen contiene $(1,1,5)$ y $(0,3,1)$, y su núcleo contiene $(1,1,2)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

   (d) Tamaño 3×3 y núcleo e imagen coinciden.
   Razón por la que es imposible encontrarla. Sabemos que

$$\dim \ker A = 3 - \text{rango } A, \dim \text{im } A = \text{rango } A.$$

   Pero si ambos espacios deben coincidir, entonces sus dimensiones también, es decir, debemos tener

$$3 - \text{rango } A = \text{rango } A.$$

   Esta ecuación es imposible para un número entero positivo.

4. (2 puntos) Encuentra la matriz de la proyección ortogonal P (respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$) sobre el plano de ecuación $x - y - 2z = 0$. ¿Cómo puedes comprobar que tu resultado es el correcto?

   Solución.

   Encontramos una base del plano sobre el que proyectamos, por ejemplo, $u_1 = (1, -1, 0)$, $u_2 = (2, 0, 1)$, y la completamos con un vector ortogonal a ambos que viene dado por los coeficientes de la ecuación del plano $u_3 = (1, -1, -2)$. La proyección P que nos solicitan viene determinada por las condiciones

   $$P(u_1) = u_1, \quad P(u_2) = u_2, \quad P(u_3) = 0.$$

   En consecuencia, en la base B formada por estos tres vectores su matriz será

   $$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Realizamos ahora el cambio de base a la base canónica C, a través de la fórmula

   $$P_C = DP_BD^{-1}$$

   si D es la matriz de cambio de la base B a la canónica C. Tenemos que

   $$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Por lo tanto, encontramos que

   $$P = P_C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Como comprobación, basta mostrar que $Pu_1 = u_1$, $Pu_2 = u_2$ y $Pu_3 = 0$ que eran las propiedades que caracterizan a P.

5. (1.5 puntos) Completa las frases que se te dan relativas a la siguiente afirmación. Si tenemos dos matrices A y B de tamaños $n \times m$ y $m \times d$, respectivamente, tales que ambas son de rango máximo, $m = n + d$ y $AB = 0$, podemos asegurar que

   (a) Una base del núcleo de A está formada por **las columnas de B**.

   (b) Una base del complemento ortogonal del núcleo de A está formada por **las filas de A**.

   (c) Una base de la imagen de B está formada por **las columnas de B**.

   (d) Una base del complemento ortogonal de la imagen de B está formada por **las filas de A**.

6. (1.5 puntos) ¿Para qué valores de m y n, el núcleo de la matriz

   $$\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ n & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   es no trivial?

   Solución.

   La pregunta formulada equivale a determinar los valores de los dos parámetros m y n de modo que el rango de la matriz sea inferior a 3. Como dicho rango no coincide con el de su traspuesta y no depende de la ordenación de filas y columnas, por conveniencia computacional, vamos a estudiar dicho rango en la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & n \\ 1 & -1 & -m & -2 \end{pmatrix}.$$

El tratamiento cuidadoso de esta matriz mediante el método de Gauss nos lleva a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -n-10 \\ 0 & 0 & 1-m & -2n-17 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia para que el rango no llegue a 3, debemos asegurar que la última fila es una fila de ceros, es decir, $n = -17/2$ y $m = 1$.

7. (1.5 puntos) Considera el conjunto de restricciones en el plano $\mathbf{R}^2$ dadas por

$$x_2 \geq 0, \quad 0 \leq x_1 \leq 3, \quad -x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 4.$$

En cada caso de los que siguen, indica en qué punto o puntos se alcanza el valor máximo de las siguientes funciones coste:

(a) $f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, punto(s): $(3, 1)$.

(b) $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, punto(s): $(3, 1)$ y $(3/2, 5/2)$ (y todas sus combinaciones convexas).

(c) $f(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$, punto(s): $(3/2, 5/2)$.

Solución.

Es sencillo dibujar la región factible en $\mathbf{R}^2$ determinada por estas desigualdades. Los vértices de dicha región son $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 1)$ y $(3/2, 5/2)$, luego los máximos de las tres funciones lineales tienen que tomarse dentro de estos cinco puntos. Es entonces inmediato encontrar estos puntos.

8. (2 puntos) Encuentra las formas canónicas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Resuelve este problema según el esquema que sigue.

(a) Autovalores de A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$.

(b) Multiplicidad algebraica de cada autovalor: 2 y 1, respectivamente.

(c) Multiplicidad geométrica de cada autovalor: 2 y 1, respectivamente.

(d) Base del $\ker(A - \lambda I)$ para cada autovalor: $\{(0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$ y $\{(1, 0, -2)\}$.

(e) Forma canónica de A:

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(f) Matriz P_A del cambio:

$$P_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(g) Comprobación: $P_A J_A = A P_A$. Esta matriz común es

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Autovalores de B: $\lambda = 0$.

(b) Multiplicidad algebraica de cada autovalor: 3.

(c) Multiplicidad geométrica de cada autovalor: 1.

(d) Base del $\ker(B - \lambda I)$ para cada autovalor: $(1, -1, 0)$.

(e) Forma canónica de B:

$$J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(f) Matriz P_B del cambio:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(g) Comprobación: $P_B J_B = B P_B$.Esta matriz común es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

9. (2 puntos) En $\mathbf{R}^3$, se consideran dos bases, la canónica C y la formada por una reordenación de los vectores de C, concretamente $B = \{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$. Para la aplicación lineal dada por $A(x,y,z) = (x+y, z, x+z)$, da las cuatro matrices de A en las bases que se indican.

(a) C y C:

$$A_C^C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) B y C:

$$A_C^B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) C y B:

$$A_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) B y B:

$$A_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

10. (1.5 puntos) Encuentra $A^{1/2}$ y $B^{1/2}$ para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Comprueba tus resultados.

Solución.

Se trata de encontrar la forma de Jordan en cada caso, de modo que $A = PJ_AP^{-1}$, y calcular $PJ_A^{1/2}P^{-1}$ y lo mismo para B. En el caso de A se encuentra

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$A^{1/2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y, efectivamente, se comprueba que $A^{1/2}A^{1/2} = A$.

Para la matriz B, tenemos

$$J_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

y

$$B^{1/2} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

11. (1.5 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

¿es posible encontrar una base en $\mathbf{R}^2$ de modo que la forma de A en dicha base sea precisamente B? Si es así, encuentra una tal base y comprueba que, efectivamente, la base que das cumple el requisito que se le pide.

Solución.

Sabemos que si las columnas de una tal base se colocan en una matriz P, entonces debemos tener $B = P^{-1}AP$, o de modo equivalente para evitar trabajar con una inversa, $PB = AP$. Ahora las matrices A y B son datos y las entradas de P son incógnitas. Si ponemos

$$P = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

la identidad anterior se escribe, identificando entrada a entrada, como

$$-x + 2y = x - 2z, \quad 2y = y - 2w, \quad -z + 2w = -x, \quad 2w = -y.$$

Este sistema es compatible y resolviéndolo se llega a $x = z - 2w$, $y = -2w$ con z y w parámetros libres. Basta por tanto dar dos valores a estos parámetros y construir la matriz, teniendo la precaución de que la matriz resultante no sea singular para que sus columnas sean dos vectores independientes. Por ejemplo, si tomamos $z = w = -1$, tendremos la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

que efectivamente verifica la condición $PB = AP$. La base solicitada es por tanto $(1, -1), (2, -1)$.

12. (1.5 puntos) Si P_2 (el espacio vectorial de los polinomios de grado no superior a 2) está dotado con el producto escalar determinado por

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2, q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2, \quad p \cdot q = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2,$$

encontrar las matrices de la aplicación lineal derivación $D(p) = p'$ y de su adjunta respecto de la base canónica de P_2.

Solución.

Mediante la identificación de un polinomio de P_2 con el vector de sus coeficientes en $\mathbf{R}^3$, nos damos cuenta que el producto escalar usual en $\mathbf{R}^3$ coincide con el producto escalar que debemos usar. Además, la base canónica de P_2 equivale a la base canónica de $\mathbf{R}^3$ que es ortonormal para el producto escalar usual. Por tanto la matriz de una aplicación adjunta se obtiene trasponiendo. Por otro lado, tenemos

$$D(1,0,0) = \frac{d}{dt} 1 = 0 = (0,0,0), \quad D(0,1,0) = \frac{d}{dt} t = 1 = (1,0,0), \quad D(0,0,1) = \frac{d}{dt} t^2 = 2t = (0,2,0).$$

En consecuencia,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

EXAMEN ALGEBRA, SEPTIEMBRE 2006

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

---

NOMBRE:

Grupo:

- ESCRIBE CLARAMENTE TU NOMBRE Y GRUPO EN LAS LINEAS DE ARRIBA.
- No se pueden usar **calculadoras** de ningún tipo.
- Las notas se harán públicas el día 8 de septiembre, viernes, al final de la mañana.

PROBLEMAS

1. (1.5 puntos) La producción de dos partes, A y B, de una determinada máquina requieren operar en ellas mediante cinco procesos distintos L, S, D, M y G. Los tiempos que requieren cada uno de estos procesos sobre cada parte vienen especificados en la tabla siguiente (datos en horas por unidad)

Parte	L	S	D	M	G
A	0.6	0.4	0.1	0.5	0.2
B	0.8	0.1	0.2	0.4	0.3

   El número de procesos de cada clase disponible son: L, 10; S, 3; D, 4; M, 6; G, 5. Cada uno de ellos puede usarse durante 8 horas diarias, 30 días al mes. Se pide

   (a) Determinar el plan de producción para maximizar el número total de partes A y B en un mes.

   (b) Si el número de A debe ser igual al de B, ¿cuál sería el mejor plan de producción?

2. (2 puntos) Construye en cada situación siguiente una matriz A con las propiedades solicitadas o razona que es imposible encontrarla.

   (a) Una de sus filas es el vector $(1, -1, 1)$ y este vector está en su núcleo.

   (b) Una de sus columnas es el vector $(1, -1, 1)$ y este vector está en su núcleo.

   (c) Su imagen contiene $(1, 1, 5)$ y $(0, 3, 1)$ y su núcleo contiene $(1, 1, 2)$.

   (d) Tiene tamaño 3×3 y su núcleo e imagen coinciden.

3. (1.5 puntos) Encuentra la matriz P, respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$, de la simetría respecto del plano de ecuación $x - y - 2z = 0$. ¿Cómo puedes comprobar que tu resultado es correcto?

4. (2 puntos) Encuentra las formas canónicas de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. (1.5 puntos) Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

¿es posible encontrar una base de $\mathbf{R}^2$ de modo que la forma de A en dicha base sea precisamente B? Si es así, encuentra una tal base y razona si es única esta base o puede haber muchas.

6. (1.5 puntos) Dada la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

¿es posible encontrar una base de $\mathbf{R}^3$ de modo que la matriz del producto escalar usual respecto de esta base sea precisamente P? Si es así, encuentra una tal base.

EXAMEN ALGEBRA, ENERO 2007

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

- ESCRIBE CLARAMENTE TU NOMBRE Y GRUPO EN CADA HOJA QUE ENTREGUES.
- No se aceptará más de una hoja por problema y no se deben mezclar dos problemas distintos en una misma hoja.
- La duración del examen es de tres horas.
- No se pueden usar calculadoras de ningún tipo.
- Las soluciones de los problemas se pueden descargar de la página web de la asignatura.
- Las notas se harán públicas el día 26 de enero, viernes, al final de la mañana.

PROBLEMAS

Cada uno de los problemas que siguen valen 2 puntos.

1. Razona en cada caso si puede encontrarse una aplicación lineal F con las propiedades dadas.

   (a) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (2,2,2)$, $F(1,1,0) = (3/2,1,1)$.
   (b) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (1,1,1)$, $F(0,0,2) = (0,0,0)$.
   (c) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (1,1,1)$, $F(-1,1,1) = (2,2,2)$.
   (d) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (1,1,1)$, $F(-1,1,1) = (1,1,1)$.

2. Resuelve el sistema siguiente, y comprueba que la solución que das es, efectivamente, la solución del sistema.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3 \\ -x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3. \end{array}\right.$$

3. Dada la siguiente matriz, encuentra generadores y ecuaciones de los cuatro subespacios que determina.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

4. Decide y razona en cada caso si las afirmaciones que siguen son correctas o no. En caso de no serlo, da un contraejemplo.

(a) El conjunto de vectores de $\mathbf{R}^3$ determinado por la ecuación

$$|x_1| + x_2 + x_3 = 0$$

es un subespacio de $\mathbf{R}^3$.

(b) Si A es una matriz simétrica, entonces su núcleo y su imagen son complementos ortogonales.

(c) Si el núcleo y la imagen de una matriz cuadrada A son complementos ortogonales, entonces A es simétrica.

(d) Los vectores $(1,1,1,1)$ y $(1,1,-1,-1)$ forman una base del subespacio

$$L((1,1,0,0),(0,0,1,1),(9,9,11,11)).$$

5. Encuentra la proyección ortogonal de los vectores de la base canónica de $\mathbf{R}^3$ sobre el subespacio L de ecuaciones $x_1+x_2+x_3 = x_1-x_2-x_3 = 0$. Da la matriz de dicha proyección ortogonal. Lo mismo para el complemento ortogonal de L (proyecciones de los vectores de la base canónica y matriz de la proyección correspondiente).

SOLUCIONES

1. En cada situación planteada se trata de comprobar si la posible aplicación lineal F respeta las combinaciones lineales. En concreto, si el rango de los vectores de partida es dos o menor, las imágenes correspondientes deben respetar la dependencia lineal existente entre los vectores de partida.

   (a) De los tres vectores $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$ y $(1,1,0)$, dos son independientes y el tercero es dependiente. En concreto, $(1,1,0) = (1/2)(1,1,1) + (1/2)(1,1,-1)$. En consecuencia, esta misma relación debe verificarse con los vectores imágenes correspondientes. Como esto no es cierto pues no es verdad que

   $$F(1,1,0) = \frac{1}{2}F(1,1,1) + \frac{1}{2}F(1,1,-1)$$

   concluimos que no hay tal aplicación lineal.

   (b) En esta situación tenemos

   $$(0,0,2) = (1,1,1) - (1,1,-1), \quad F(0,0,2) = F(1,1,1) - F(1,1,1),$$

   luego sí que existe una tal aplicación lineal.

   (c) El conjunto de vectores formado por $(1,1,1)$, $(1,1,-1)$ y $(-1,1,1)$ es independiente, luego sí puede existe una tal aplicación lineal con independencia de cuáles sean las imágenes de estos vectores.

   (d) Lo mismo que en el apartado anterior.

2. Intercambiando el orden de las ecuaciones, y aplicando el método de Gauss, se obtiene

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 11 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 18 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 19 & -9 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 19 & -9 & 10 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 29 & 29 \end{array}$$

   De esta última forma triangular del sistema, encontramos la solución $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$. Se comprueba inmediatamente sustituyendo en el sistema original que ésta es, efectivamente, la solución.

3. Se trata de aplicar el método de Gauss a la matriz A dada, y su traspuesta, y resolver los sistemas homogéneos correspondientes. En concreto

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -4 & -4 & 11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

   Una posible base para las soluciones del sistema homogeneo correspondiente es $(1,-1,0,0,0)$, $(0,0,-1,1,0)$, $(-5,0,3,0,2)$. Con estos datos podemos dar generadores y ecuaciones de los dos subespacios $\ker A$ e $\mathrm{im} A^T$. En concreto

   - ecuaciones de $\ker A$: $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 4x_5 = -2x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0$;
   - generadores de $\ker A$: $(1,-1,0,0,0)$, $(0,0,-1,1,0)$, $(-5,0,3,0,2)$;
   - ecuaciones de $\mathrm{im} A^T$: $x_1 - x_2 = -x_3 + x_4 = -5x_1 + 3x_3 + 2x_5 = 0$;
   - generadores de $\mathrm{im} A^T$: $(1,1,-1,-1,4)$, $(0,0,-2,-2,3)$.

Realizamos ahora el mismo proceso con A^T para obtener

$$\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & -4 \\ 4 & -1 & 11 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rrr} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

La solución de este sistema homogeneo tiene por base al vector único $(-3,-1,1)$. De manera inmediata se obtiene

- ecuaciones de kerA^T: $x_1 - x_2 + 2x_3 = x_2 + x_3 = 0$;
- generadores de kerA^T: $(-3,-1,1)$;
- ecuaciones de im$A$: $-3x_1 - x_2 + x_3 = 0$;
- generadores de im$A$: $(1,-1,2)$, $(0,1,1)$.

4. (a) Este conjunto no es un subespacio de $\mathbf{R}^3$. Basta con comprobar que los dos vectores $(1,-1,0)$ y $(-1,-1,0)$ están en este subespacio, pues verifican su ecuación; sin embargo la combinación lineal $(1,-1,0)+(-1,-1,0) = (0,-2,0)$ no está en el subespacio pues no verifica la ecuación. La presencia del valor absoluto en la variable x_1 indica que este conjunto de vectores no es un subespacio.

   (b) Sabemos que ker$A^\perp =$imA^T. Pero si $A = A^T$, entonces im$A =$imA^T y, en consecuencia, en este caso es cierto que el ker$A$ y la im$A$ son complementos ortogonales.

   (c) Según el apartado anterior, si ker$A$ e im$A$ son complementos ortogonales, podemos concluir que im$A =$imA^T, pero esto no supone necesariamente que A deba ser simétrica. Por ejemplo la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   no es simétrica. No obstante ker$A$ es trivial (solo contiene al vector nulo) y la imagen es todo $\mathbf{R}^2$. Luego son complementos ortogonales.

   (d) Quizás el modo más eficiente de comprobar que es cierto este enunciado es encontrando las ecuaciones de L. Resolviendo el sistema homogeneo con ecuciones que provienen de los vectore generadores de L mediante el método de Gauss, se encuentra inmediatamente una base de las soluciones en los vectores $(1,-1,0,0)$, $(0,0,1,-1)$. Por tanto L tiene dimensión 2 y sus ecuaciones son $x_1 - x_2 = x_3 - x_4 = 0$. Como los dos vectores $(1,1,1,1)$ y $(1,1,-1,-1)$ verifican estas ecuaciones y son independientes, forman base de L.

5. Si resolvemos el sistema homogeneo con las dos ecuaciones dadas, encontramos una base del subespacio L, que en este caso, es de dimensión 1. En efecto, el vector $(0,1,-1)$ es el vector director de la recta L (subespacio de dimensión 1) por el origen. Cuando queremos proyectar sobre un subespacio de dimensión 1, tenemos una fórmula directa que es

$$P_L v = \frac{v \cdot a}{|a|^2} a$$

si $a = (0,1,-1)$ es el vector que genera L. En este caso, no tenemos más que aplicar esta fórmula a los tres vectores de la base canónica $v = e_1 = (1,0,0)$, $v = e_2 = (0,1,0)$, $v = e_3 = (0,0,1)$, obteniendo

$$P_L e_1 = 0, \quad P_L e_2 = (0,1/2,-1/2), \quad P_L e_3 = (0,-1/2,1/2).$$

La matriz de la proyección en la base canónica es la que tiene por columnas estos tres vectores que acabamos de escribir

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por otro lado sabemos que las proyecciones sobre L y sobre su complemento ortogonal $L^{\perp}$ siempre verifican $P_L v + P_{L^{\perp}} v = v$ para cualquier vector v. Esto significa que $P_{L^{\perp}}$ =identidad$-P_L$. En consecuencia, la matriz de $P_{L^{\perp}}$ es la diferencia entre la identidad y la matriz anterior

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

y las proyecciones de los tres vectores de la base canónica sobre $L^{\perp}$ son precisamente las tres columnas de esta matriz $(1,0,0)$, $(0,1/2,1/2)$, $(0,1/2,1/2)$.

EXAMEN ALGEBRA, Mayo 2007

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

- ESCRIBE CLARAMENTE TU NOMBRE Y GRUPO EN TODAS LAS HOJAS QUE ENTREGUES.
- No se pueden usar **calculadoras** de ningún tipo.
- Las soluciones de los problemas se pueden descargar de la página web de la asignatura.
- Las notas se harán públicas el día 28 de mayo, lunes, al final de la mañana.
- NO MEZCLES MATERIAL DE DOS PROBLEMAS DISTINTOS EN UNA MISMA HOJA.

PROBLEMAS

1. Razona brevemente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Cada apartado vale 0.5 puntos.

   (a) Si en el espacio $V = \mathcal{C}([-\pi, \pi])$ con el producto escalar usual ortogonalizamos la base formada por las funciones $\{1, x, x\mathrm{sen}\, x\}$ y encontramos la base $\{1, \cos x, \mathrm{sen}\, x\}$.

   (b) Un autovalor de la matriz A dada es $\lambda = 2$ con autovector $u = (-1, 1, 2)$.

   $$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (c) No se pueden encontrar matrices 3×3 que sean simétricas y ortogonales al mismo tiempo, distintas de la identidad.

   (d) La proyección ortogonal del polinomio

   $$p(t) = t^3 - t^2 + t - 1$$

   sobre el subespacio generado por $\left\{t - 1, t + 1, t^2 - 3t\right\}$ respecto del producto escalar dado por la integral definida del producto en el intervalo $[-1, 1]$ es el polinomio

   $$q(t) = -\frac{8}{3\sqrt{2}} + \frac{16}{15}\sqrt{\frac{3}{2}}t - \sqrt{\frac{8}{45}}(t^2 - 1/3).$$

   (e) La matriz del producto escalar usual en $\mathbf{R}^3$ respecto a la base formada por los vectores

   $$\{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (-1, 1, 0)\}$$

   es

   $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(f) Las matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & \text{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \text{-1} \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \text{-1} \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & \text{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

son independientes en el espacio de las matrices 2×2.

(g) Los coeficientes de Fourier de la función $2x - 1$ en la base trigonométrica de senos y cosenos vienen dados por

$$a_0 = -1, \quad a_j = 1, \quad b_j = 2(-1)^{j+1}j.$$

(h) Las coordenadas del polinomio

$$P(t) = -t^3 + 5t^2 - 27t + 33$$

en la base formada por los polinomios $\{p(t), p'(t), p''(t), p'''(t)\}$, donde

$$p(t) = t^3 + t^2 + t + 1$$

son $(-1, 2, -5, 7)$.

2. (2 puntos) Encuentra la matriz (en la base canónica de $\mathbf{R}^3$) de la proyección ortogonal sobre la recta de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Una vez encontrada, calcula su forma de Jordan y una base del cambio.

3. (1.5 puntos) Para la familia de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 5 & \text{-1} \\ x & 1 \end{pmatrix},$$

discute su forma de Jordan (real) para cada valor de $x \in \mathbf{R}$.

4. (1 punto) Encuentra el valor máximo y el punto o puntos donde se alcanza para el problema

$$\text{Maximiza} \quad x_1 - x_2$$

sujeto a las restricciones

$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 \leq 2, \quad 2x_1 + x_2 \leq 2, \quad -x_1 + 2x_2 \leq 2, \quad -2x_1 + x_2 \leq 2, \\ &x_1 - 2x_2 \leq 2, \quad 2x_1 - x_2 \leq 2, \quad -x_1 - 2x_2 \leq 2, \quad -2x_1 - x_2 \leq 2. \end{aligned}$$

5. (1.5 puntos) Sea A la matriz dada mediante el producto

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \text{-1} & 2 \\ 0 & 1 & \text{-1} \\ 1 & 5 & \text{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{-1/2} & 1 & 0 \\ 0 & \text{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \text{-1} & \text{-6} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si partimos del vector inicial $x_0 = (1, 1, 1)$, encuentra el límite

$$\lim_{n \to \infty} A^n x_0.$$

SOLUCIONES del Examen Parcial de Mayo. Algebra Lineal.

1. (a) Es falso, pues los subespacios generados por ambos conjuntos de funciones son distintos. Por ejemplo la función x NO es combinación lineal de 1, $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$. Si una base se obtuviera de la otra mediante ortogonalización, deberían generar el mismo subespacio.

   (b) Es cierto, basta comprobar que $Au = 2u$. Esta identidad significa precisamente que u es autovector de A correspondiente al autovalor 2.

   (c) Sí se pueden encontrar. Que A sea autoadjunta significa que $A = A^T$ y que sea ortogonal significa que $A^T = A^{-1}$. Luego tal matriz A debe ser simétrica y además coincidir con su inversa. Por ejemplo,
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d) El polinomio dado sí es la proyección ortogonal indicada. Para comprobar esto es interesante darse cuenta que el subespacio generado por $\{t-1, t+1, t^2-3t\}$ es el mismo que el generado por la base canónica de los polinomios de grado no superior a 2. Por tanto basta ortogonalizar tal base canónica y usar esta base para realizar los cálculos en vez de la base dada. Por tanto, la base $\{1, t, t^2-1/3\}$ es una base ortogonal de los polinomios de grado no superior a 2. De modo que hay que calcular las integrales
$$b_1 = \int_{-1}^{1} p(t)\,dt, \quad b_2 = \int_{-1}^{1} p(t)t\,dt, \quad b_3 = \int_{-1}^{1} p(t)(t^2-1/3)\,dt,$$
además de
$$a_1 = \int_{-1}^{1} 1^2\,dt, \quad a_2 = \int_{-1}^{1} t^2\,dt, \quad a_3 = \int_{-1}^{1} (t^2-1/3)^2\,dt.$$
La proyección será el polinomio
$$\frac{b_1}{\sqrt{a_1}}1 + \frac{b_2}{\sqrt{a_2}}t + \frac{b_3}{\sqrt{a_3}}(t^2-1/3),$$
que coincide con el polinomio dado.

   (e) La matriz dada NO es la matriz del producto escalar respecto a la base dada. Basta comprobar que el producto de los dos primeros vectores es
$$(1,0,1)\cdot(1,0,-1) = 0$$
sin embargo las entradas correspondientes a la fila dos, columna uno (o columna dos, fila uno) es -1.

   (f) Observamos que la segunda columna de las cuatro matrices es la misma. Esto significa que cualquier combinación lineal de las cuatro matrices tendrá una segunda columna que será un múltiplo de esta columna común, y por tanto las cuatro matrices no pueden formar un conjunto generador del espacio de matrices 2×2 que tiene dimensión. En consecuencia, no pueden ser independientes.

   (g) Los coeficientes de Fourier de cualquier función $f(x)$ vienen dados por las integrales
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \quad a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(jx)\,dx, \quad a_j = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(jx)\,dx.$$
l Si, en particular, $f(x) = h(x) + \alpha g(x)$ entonces los coeficientes de Fourier de f serán la suma de los de h más el producto de α por los de h. De esta manera, para encontrar los de $f(x) = 2x-1$, es suficiente conocer los de $g(x) = x$ y los de $h(x) = 1$. Los de g, se calcularon en clase
$$a_0 = a_j = 0, \quad b_j = \frac{(-1)^{j+1}}{j}.$$

Como h es una constante, se tiene que

$$a_0 = 1, \quad a_j = b_j = 0, j \geq 0.$$

Finalmente, los coeficientes de $f(x)$ serán

$$a_0 = -1, \quad a_j = 0, j \geq 1, \quad b_j = 2\frac{(-1)^{j+1}}{j}, j \geq 1.$$

(h) No hay más que comprobar que en verdad se tiene

$$P(t) = -p(t) + 2p'(t) - 5p''(t) + 7p'''(t).$$

2. Sabemos que cuando se trata de encontrar la matriz de una proyección ortogonal sobre un subespacio, debemos primero decidir si es más ventajoso encontrarla directamente o a través de la matriz de la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal. Esta decisión depende esencialmente de las dimensiones del subespacio y su complemento ortogonal. En este ejemplo, el subespacio L sobre el que debemos proyectar tiene dimensión 2, mientras que su complemento ortogonal $L^{\perp}$ tendrá, por tanto, dimensión 1. Decidimos en consecuencia proyectar sobre el complemento ortogonal $L^{\perp}$ que está generado por el vector normal a L cuyas coordenadas son precisamente los coeficientes de la ecuación de L, es decir, $n = (1, 1, -1)$. La proyección ortogonal de cualquier vector $x \in \mathbf{R}^3$ será por tanto

$$P_{L^{\perp}} x = \frac{x \cdot n}{|n|^2} n.$$

Si ponemos $x = (x_1, x_2, x_3)$, tendremos

$$P_{L^{\perp}} x = \frac{x_1 + x_2 - x_3}{3}(1, 1, -1) = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_2 - x_3, -x_1 - x_2 + x_3),$$

o en forma matricial

$$P_{L^{\perp}} x = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

La matriz solicitada será por tanto la diferencia de la matriz identidad con esta última matriz, es decir,

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A continuación tenemos que encontrar la forma de Jordan de esta matriz A y una matriz P de cambio de base. Por supuesto que podemos seguir todo el proceso usual para encontrar la forma de Jordan y una matriz de cambio de base. Pero teniendo presente la procedencia de la matriz A como matriz de la proyección sobre un plano, e insistiendo en la idea de que la razón de la forma de Jordan es encontrar bases adaptadas a A en las que la matriz de la proyección sea lo más sencilla, concluimos que una base adaptada a dicho proyección estará formada por una base del subespacio L, por ejemplo $\{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1)\}$ y un vector del complemento ortogonal, el propio vector $n = (1, 1, -1)$. En consecuencia,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Respecto a esta base, como

$$P_L u_1 = u_1, \quad P_L u_2 = u_2, \quad P_L n = 0,$$

la matriz será

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que, efectivamente, es la forma de Jordan de A.

3. El polinomio característico es

$$0 = \begin{vmatrix} 5-\lambda & \text{-}1 \\ x & 1-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) + x = \lambda^2 - 6\lambda + 5 + x.$$

Por tanto las raíces vendrán dadas por

$$\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{16-4x}}{2} = 3 \pm \sqrt{4-x}.$$

Distinguimos por tanto tres situaciones:

(a) $x < 4$: dos raíces reales distintas. En este caso la forma de Jordan es diagonal

$$\begin{pmatrix} 3+\sqrt{4-x} & 0 \\ 0 & 3-\sqrt{4-x} \end{pmatrix}.$$

(b) $x = 4$: una única raíz real. El ranto de la matriz $A - 4$ identidad es uno, por lo que la forma de Jordan no es diagonal

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) $x > 4$: dos raíces complejas conjugadas. La forma de Jordan real será

$$\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{x-4} \\ \text{-}\sqrt{x-4} & 3 \end{pmatrix}.$$

4. En primer lugar comprobamos que la región de admisibilidad A en el plano determinada por las ocho desigualdades indicadas corresponde al polígono de ocho lados centrado en el origen con vértices $(1,0)$, $(2/3, 2/3)$, $(0,1)$, $(-2/3, 2/3)$, $(-1,0)$, $(-2/3,-2/3)$, $(0,-1)$, $(2/3,-2/3)$. Las rectas de coste constante son las de ecuación $x_1 - x_2 = c$. Para $c = 0$, se trata de la diagonal que pasa por el origen e interseca a A. La recta paralela que pasa por el vértice $(1,0)$ tiene por coste $c = 1$. De este modo comprobamos que cuando aumenta el coste, las rectas de coste constante se deslizan hacia abajo. El último punto de contacto con A es el vértice $(2/3,-2/3)$ con coste máximo $2/3 - (-2/3) = 4/3$.

5. Observamos fácilmente que las matrices primera y tercera del producto que determina A son inversa una de la otra, es decir,

$$A = PJP^{-1}.$$

Como J (la matriz central) es una forma canónica, resulta que nos están dando A a través de su descomposición de Jordan. En consecuencia, sabemos que

$$A^k = PJ^kP^{-1},$$

y además $J = D + N$ donde D es la diagonal de J y N es la parte no diagonal. Observamos que $N^2 = 0$ y todas las potencias sucesivas. Por tanto, según la fórmula del binomio,

$$J^k = (D+N)^k = D^k + kD^{k-1}N = \begin{pmatrix} (-1/2)^k & 0 & 0 \\ 0 & (-1/2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 & (-1/2)^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$J^k = \begin{pmatrix} (-1/2)^k & k(-1/2)^{k-1} & 0 \\ 0 & (-1/2)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es fácil encontrar que

$$\lim_{k\to\infty} J^k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y en este caso, si llamamos J_0 esta matriz,

$$\lim_{k\to\infty} A^k x_0 = \lim_{k\to\infty} PJ^kP^{-1}x_0 = PJ_0P^{-1}x_0,$$

y después de realizar este producto encontramos que el límite solicitado es el vector

$$(4, -2, -8).$$

EXAMEN ALGEBRA, JUNIO 2007

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

Examen final: problemas 3, 4 y 6 del primer parcial y problemas 1, 2 y 4 del segundo

Primer parcial.

1. (1 punto) Encuentra la matriz inversa de
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (2 puntos) Razona en cada caso si puede encontrarse una aplicación lineal F con las propiedades dadas.
   (a) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (2,2,2)$, $F(1,1,0) = (3/2,1,1)$.
   (b) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (1,1,1)$, $F(0,0,2) = (0,0,0)$.
   (c) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (1,1,1)$, $F(-1,1,1) = (2,2,2)$.
   (d) $F(1,1,1) = (1,1,1)$, $F(1,1,-1) = (1,1,1)$, $F(-1,1,1) = (1,1,1)$.

3. (2 puntos) Considera la aplicación lineal de $\mathbf{R}^4$ en $\mathbf{R}^2$ dada por las fórmulas
$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 2x_3, 2x_2 + 3x_4).$$
   (a) Encuentra su matriz respecto de las bases canónicas.
   (b) Determina los subespacios núcleo e imagen de F dando una base y las ecuaciones de cada uno.
   (c) Encuentra la matriz de F respecto a la base canónica en $\mathbf{R}^4$ y la base $B = \{(1,3),(2,1)\}$ en $\mathbf{R}^2$.

4. (1 punto) Dado el subesapcio L de $\mathbf{R}^3$ generado por los vectores $(1,0,0), (-1,1,0), (2,1,0)$, encuentra la proyección ortogonal del vector $v = (1,1,1)$ sobre L.

5. (2 puntos) Considera el subespacio L de $\mathbf{R}^3$ de ecuación $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.
   (a) Encuentra una base de L.
   (b) Encuentra una base ortogonal de L (para el producto escalar usual).
   (c) Determina las coordenadas en ambas bases del vector $v = (0,1,2)$.
   (d) Calcula la proyección del vector $u = (2,1,0)$ sobre L.
   (e) Halla el vector de L más próximo a $u = (2,1,0)$.
   (f) Determina una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ que contenta la base dada en el segundo apartado.

6. (2 puntos) Elige una base de $\mathbf{R}^3$ y escribe la matriz del giro de ángulo $\pi/2$ alrededor del eje con dirección $(1,1,-1)$, respecto de esta base.

Segundo parcial.

1. (2 puntos) Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & s & 0 \\ 0 & -1 & t \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$
donde s y t son dos parámetros reales.
   (a) Decide para qué valores de s y t la matriz A es diagonalizable.
   (b) Para los valores para los que NO sea diagonalizable, encuentra su forma de Jordan y la matriz de cambio correspondiente (en función de s y t).

2. (1,5 puntos) En el espacio vectorial
$$V = \{f : [0,1] \to \mathbf{R} : f \text{ es derivable}, f(0) = 0\},$$
se considera el producto escalar
$$f \cdot g = \int_0^1 f'(x)g'(x)\,dx.$$
   (a) Ortogonaliza las funciones $f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$.
   (b) Halla la proyección ortogonal de $f(x) = e^{-x} - 1$ sobre el subespacio generado por f_1 y f_2.

3. (1.5 puntos) En el espacio P_3 de los polinomios con coeficientes reales de grado no superior a 3, se considera la aplicación
$$F(p) = e^{-x}\frac{d}{dx}(e^x p(x)).$$
   (a) Razona que F es una aplicaión lineal.
   (b) ¿Es inyectiva? Encuentra su núcleo.
   (c) Da su matriz respecto de la base $\{1, x+1, x^2+x+1, x^3+x^2+x+1\}$.

4. (1.5 puntos) Considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Para el vector $x_0 = (3, 2)$, encuentra el límite
$$\lim_{n\to\infty} A^n x_0.$$

5. (1.5 puntos) Encuentra el valor máximo y el punto o puntos donde se alcanza para el problema
$$\text{Maximiza} \quad x_1 - x_2$$
sujeto a las restricciones
$$\begin{array}{llll} x_1 + 2x_2 \le 2, & 2x_1 + x_2 \le 2, & -x_1 + 2x_2 \le 2, & -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, & 2x_1 - x_2 \le 2, & -x_1 - 2x_2 \le 2, & -2x_1 - x_2 \le 2. \end{array}$$

6. (2 puntos) Se considera la aplicación lineal $T : M^{2\times2} \to M^{2\times2}$ dada por
$$T(A) = A - A^T$$
Se pide:
   (a) Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal T respecto a la base canónica de $M^{2\times2}$.
   (b) Calcula el núcleo y la imagen de la aplicación lineal. ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva?
   (c) ¿Es T diagonalizable? En caso afirmativo, escribe la matriz en forma diagonal y da la matriz de cambio de base.

Soluciones del Examen final de Algebra, Junio 2007

Primer parcial.

1. Aplicamos el método de Gauss a la matriz ampliada con la identidad

1	-2	0	0	1	0	0	0
0	1	-1	0	0	1	0	0
0	0	1	-1	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	0	1

Observamos que si sustituimos la tercera fila por ella más la cuarta obtenemos una nueva tercera fila

0	0	1	0	0	0	1	1

Si sustituimos la segunda fila de la matriz por esta nueva tercera fila (y no por la tercera fila original), se obtiene inmediatamente una nueva seguna fila

0	1	0	0	0	1	1	1

Finalmente, si sustituimos la primera fila original por ella más el doble de esta última segunda fila, se obtiene una nueva primera fila

1	0	0	0	1	2	2	2

Así hemos encontrado la inversa

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Problema 1 del parcial de enero.

3. La matriz de F respecto de las bases canónicas se obtiene sin más que escribir los coeficientes, en filas, de las fórmulas proporcionadas; es decir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

El núcleo de F tendrá ecuaciones

$$x_1 - 2x_3 = 2x_2 + 3x_4 = 0,$$

puesto que el núcleo está formado por todos los vectores tales que $F = 0$. Encontrar una base para este subespacio es por tanto resolver el sistema homogeneo anterior. Se encuentra fácilmente que una tal base es $(2, 0, 1, 0), (0, 3, 0, -2)$. Con respecto a la imagen, observamos que su dimensión es precisamente el rango de F que es 2. Por tanto la imagen es todo $\mathbf{R}^2$ que no tiene ecuaciones (no hay restricciones para los vectores de $\mathbf{R}^2$).

Para encontrar la matriz de F respecto de la base canónica y la base B dada, es suficiente encontrar la matriz del cambio de la base canónica de $\mathbf{R}^2$ a la base B, y multiplicarla por la matriz del primer apartado. La matriz de este cambio tiene por columnas las coordenadas de los vectores de la base canónica en la base B, es decir se trata de la inversa de

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

que es

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia, la matriz solicitada será el producto

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Nótese que el rango de los tres vectores dados es 2 puesto que los tres tienen tercera componente nula. El subespacio generado se encuentra fácilmente que es $x_3 = 0$. Por tanto la proyección ortogonal será $(1,1,0)$.

5. Encontrar una base para L es en definitiva resolver el sistema homogeneo con esa única ecuación. Se encuentra una posible base en $(-2,1,0),(1,0,1)$. Podemos ortogonalizar esta base y encontrar así una nueva base de L que es ortogonal. Mediante el proceso de Gram-Schmidt se encuentra sin dificultad $(-2,1,0),(1/5,2/5,1)$; o bien, por evitar los denominadores, $(-2,1,0),(1,2,5)$.

   Encontrar las coordenadas de un vector en una base dada consiste en expresarlo como combinación lineal de los vectores de esa base. En esta situación debemos encontrar los números

   $$(0,1,2) = t_1(-2,1,0) + t_2(1,0,1), \quad (0,1,2) = s_1(-2,1,0) + s_2(1,2,5).$$

   Encontrar estos dos juegos de coordenadas se reduce a resolver los sistemas lineales correspondientes. Su solución (única) son, respectivamente,

   $$t_1 = 1, t_2 = 2, \quad s_1 = 1/5, s_2 = 2/5.$$

   Una vez que tenemos una base ortogonal del subespacio L, encontrar la proyección de cualquier vector es sencillo

   $$Pu = \frac{u \cdot (-2,1,0)}{5}(-2,1,0) + \frac{u \cdot (1,2,5)}{30}(1,2,5).$$

   Sustituyendo u, se obtiene

   $$Pu = \frac{1}{3}(4,-1,2).$$

   Este mismo vector Pu es el vector más próximo de L a u, por la propiedad fundamental de la proyección ortogonal.

   Para completar la base ortogonal de L obtenida antes, $(-2,1,0),(1,2,5)$, basta añadirle el vector ortogonal al subespacio L que viene dado por los coeficientes de su ecuación, es decir, la base $(-2,1,0),(1,2,5),(1,2,-1)$ es una base ortogonal de $\mathbf{R}^3$.

6. La base de $\mathbf{R}^3$ que se debe elegir debe estar adaptada al giro solicitado pues sabemos que en este caso la matriz adquiere una forma particularmente simple. En concreto, un vector de la base será el eje de giro que es $(1,1,-1)$. Los otros dos vectores deberán ser una base ortogonal del plano con vector normal dado por el eje de giro. En concreto buscamos una base del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, por ejemplo, $(1,0,1),(1,-1,0)$, y la ortogonalizamos para encontrar $(1,0,1),(-1,2,1)$. Si G representa este giro, sabemos que

   $$G(1,1,-1) = (1,1,-1), \quad G(1,0,1) = (-1,2,1), \quad G(-1,2,1) = (-1,0,-1).$$

   Por tanto la matriz de G en esta base será

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Segundo parcial

1. Como para cualesquiera valores de s y t la matriz dada es triangular superior, se ve con claridad que los autovalores siempre son $\lambda_1 = -1$ doble y $\lambda_2 = 2$ sencillo. En consecuencia que la matriz sea o no diagonalizable depende del rango de la matriz $A + I$ (siendo I la matriz identidad). Es muy sencillo comprobar que este rango es 2 si $s \neq 0$ y es 1 si $s = 0$. Así pues, A es diagonalizable si $s = 0$ y no diagonalizable si $s \neq 0$ (con independencia del valor de t).

   Supongamos ahora que $s \neq 0$, de modo que A no es diagonalizable. Sabemos por tanto que en este caso su forma de Jordan será
$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
   Para encontrar la matriz del cambio de base, sabemos que el tercer vector de la base debe ser un vector generador del núcleo de $A - 2I$. Esta matriz es
$$\begin{pmatrix} -3 & s & 0 \\ 0 & -3 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   y un vector no nulo de su núcleo debe ser una solución no nula del sistema homogeneo con esta matriz de sistema. Podemos tomar (para evitar los denominadores) $u_3 = (st, 3t, 9)$. El segundo vector de la base debe ser un vector del nucleo de $(A + I)^2$ que no esté en el núcleo de $A + I$. Estas matrices son
$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (A + I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & st \\ 0 & 0 & 3t \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$
   Por tanto como segundo vector de la base nos vale $u_2 = (0, 1, 0)$ (pero no vale $(1, 0, 0)$). Y entonces, el primer vector será $u_1 = (A - I)u_2 = (s, 0, 0)$ (aquí es esencial que $s \neq 0$). Por tanto la matriz de cambio de base será
$$P = \begin{pmatrix} s & 0 & st \\ 0 & 1 & 3t \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Pongamos g_1 y g_2 para las funciones ortgonalizadas. De acuerdo con el proceso de Gram-Schmidt, tomamos $g_1(x) = f_1(x) = x$ y buscamos $g_2(x)$ en la forma $g_2(x) = f_2(x) + \lambda f_1(x) = x^2 + \lambda x$, de modo que el parámetro λ se elija para que g_1 y g_2 sean ortogonales, es decir,
$$\int_0^1 g_1'(x) g_2'(x)\, dx = \int_0^1 (2x + \lambda)\, dx = 0.$$
   Esto lleva a tomar $\lambda = -1$, y por tanto $g_2(x) = x^2 - x$.

   Una vez que tenemos una base ortogonal, es sencillo encontrar proyecciones ortogonales sin más que aplicar la fórmula
$$Pf = \frac{f \cdot g_1}{g_1 \cdot g_1} g_1 + \frac{f \cdot g_2}{g_2 \cdot g_2} g_2.$$
   Debemos por tanto, realizar las cuatro integraciones
$$\int_0^1 (-e^{-x})\, dx, \quad \int_0^1 (-e^{-x})(2x - 1)\, dx, \quad \int_0^1 1\, dx, \quad \int_0^1 (2x - 1)^2\, dx.$$
   Para la segunda, usamos integración por partes, y así encontramos estos cuatro valores $e^{-1} - 1$, $3e^{-1} - 1$, 1 y 1/3. Por tanto, la proyección pedida será
$$(e^{-1} - 1)x + 3(3e^{-1} - 1)(x^2 - x) = 3(3e^{-1} - 1)x^2 + 2(1 - 4e^{-1})x.$$

3. Para comprobar que la aplicación dada es lineal, basta con comprobar como actúa sobre una combinación lineal cualquiera de dos polinomios

$$F(t_1p_1 + s_2p_2) = e^{-x}(e^x(t_1p_1(x) + t_2p_2(x)))' = e^{-x}(t_1e^xp_1(x) + t_2e^xp_2(x))'.$$

Como t_1 y t_2 son números y la derivada de una suma es la suma de las derivadas, podemos escribir

$$F(t_1p_1 + s_2p_2) = t_1e^{-x}(e^xp_1(x))' + t_2e^{-x}(e^xp_2(x))'.$$

Pero esta última expresión no es otra cosa que $t_1F(p_1) + t_2F(p_2)$, y por tanto F es lineal.

El núcleo de esta aplicación lineal está formado por todos los polinomios de P_3 tales que $F(p) = 0$. Luego un tal polinomio debe verificar $e^{-x}(e^xp(x))' = 0$. Como la exponencial no es la función cero (de hecho nunca se anula), no queda más remedio que $(e^xp(x))' = 0$. Las únicas funciones con derivada nula son las constantes, luego para alguna constante c, deberíamos tener $e^xp(x) = c$ y, en consecuencia, $p(x) = ce^{-x}$. Pero esta función no es un polinomio a menos que $c = 0$ en cuyo caso $p = 0$. Esto significa que el núcleo de F sobre P_3 está formado sólo por el polinomio nulo, y por tanto F es inyectiva.

Para encontrar la matriz de F respesto de la base dada no tenemos más que expresar las imágenes mediante F de los cuatro polinomios de la base proporcionada con sus coordenadas respecto a ella misma. en realidad, usando la regla de la derivada de un producto, encontramos que

$$F(p) = e^{-x}(e^xp(x))' = e^{-x}(e^xp(x) + e^xp'(x)) = p(x) + p'(x).$$

Por tanto

$$F(1) = 1 \mapsto (1, 0, 0, 0), \quad F(1 + x) = 2 + x \mapsto (1, 1, 0, 0)$$
$$F(1 + x + x^2) = 2 + 3x + x^2 \mapsto (-1, 2, 1, 0), \quad F(1 + x + x^2 + x^3) = x^3 + 4x^2 + 3x + 2 \mapsto (-1, -1, 3, 1).$$

La matriz será por tanto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Tal y como nos dan la matriz A parece que nos están danto su descomposición mediante su forma de Jordan. Esto sería así si las matrices primera y tercera fueran una inversa de la otra. Pero en este ejemplo esto no es así. Por tanto hay que realizar la multiplicación y encontrar la forma de Jordan. Encontramos que

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Su descomposición de Jordan es muy fácil de encontrar

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La potencia enésima de A es por tanto

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero la potencia en el medio es nula en cuanto $n \geq 2$, lo cual se comprueba en un momento. En consecuencia $A^n = 0$ y el límite pedido es el vector nulo. En realidad el límite es el vector nulo con independencia el punto inicial.

5. Es el mismo problema del parcial de mayo.

6. La base canónica del espacio $M^{2\times 2}$ esta formada por las cuatro matrices
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
Sus imágenes mediante la aplición lineal dada son, respectivamente, las matrices
$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$
Las coordenadas de estas cuatro últimas matrices respecto de la base canónica anterior son
$$(0,0,0,0),\quad (0,1,-1,0),\quad (0,-1,1,0),\quad (0,0,0,0).$$
Por tanto la matriz de la aplicación lineal T será
$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$
Sabemos que el núcleo de T está formado por todas las matrices cuya imagen es la matriz nula, es decir, $A-A^T=0$, y esto significa que la matriz A es simétrica. Por tanto el núcleo de T está formado por todas las matrices simétricas. Por otro lado la imagen de T está generada por las columnas de su matriz. Observamos que el rango de la matriz es uno, y por tanto su imagen está generada por la columna $(0,1,-1,0)$ que corresponde a la matriz
$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$
La imagen está generada por esta matriz. En consecuencia T no es ni inyectiva (el núcleo no se reduce a la matriz nula) ni sobreyectiva (la imagen no es el total).

Es muy fácil encontrar que las raices del polinomio característico son $\lambda_1=0$, triple y $\lambda_2=2$ sencillo. La matriz será diagonalizable si la multiplicada geométrica de $\lambda_1=0$ es 3. Como hemos observado antes que el rango de la matriz 4×4 es uno, la multiplicada geométrica efectivamente es 3, y por tanto dicha matriz es diagonalizable con forma diagonal
$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}.$$
Para encontrar la matriz del cambio necesitamos tres matrices independientes del núcleo de $A-0I=A$ que sabemos que está formado por las matrices simétricas. Podemos tomar
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$
Con respecto al autovalor 2, debemos elegir una matriz de modo que $A-A^T=2A$, es decir, $A=-A^T$, por ejemplo
$$\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$
Por tanto la matriz de cambio es
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

EXAMEN ALGEBRA, SEPTIEMBRE 2007

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

1. (1.5 puntos) Considera la matriz
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ t & -1 & 0 \\ t & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$
Encuentra la forma de Jordan y la matriz de cambio según los valores de t.

2. (1.5 puntos) Sabiendo que una cierta aplicación lineal $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ transforma los vectores $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ en los vectores $(1,0,0)$, $(2,4,-2)$, $(2,5,-1)$, respectivamente, encuentra la matriz de F respecto a la base canónica y respecto a la base formada por los tres primeros vectores.

3. (2 puntos) Elige una base de $\mathbf{R}^3$ y escribe la matriz de la simetría respecto a la recta determinada por $(1,1,-1)$, respecto a esta base.

4. (1.5 puntos) Dada la aplicación lineal F en el espacio de polinomios de grado no superior a 3 determinada por las condiciones
$$F(1) = 2 - x - x^3, \quad F(x) = 3x + x^3, \quad F(x^2) = 4x^2, \quad F(x^3) = x + 3x^3,$$
decidir si se trata de una aplicación ortogonal y/o autoadjunta respecto al producto escalar
$$p \cdot q = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

5. (1.5 puntos) Dados los subespacios L_1 y L_2 donde L_1 es el subespacio generado por $(1,-1,2,1)$, $(1,-2,0,-1)$, $(2,-3,2,2)$ y L_2 tiene por ecuaciones $x_1 - x_4 = x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, determinar los subespacios $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$ mediante bases y ecuaciones. ¿Es cierto que $\mathbf{R}^4 = L_1 \bigoplus L_2$? Razona tu respuesta.

6. (2 puntos) Se considera la aplicación lineal $T : M^{2\times 2} \to M^{2\times 2}$ dada por
$$T(A) = A + A^T$$
Se pide:
   (a) Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal T respecto a la base canónica de $M^{2\times 2}$.
   (b) Calcula el núcleo y la imagen de la aplicación lineal. ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva?
   (c) ¿Es T diagonalizable? En caso afirmativo, escribe la matriz en forma diagonal y da la matriz de cambio de base.

Soluciones del Examen final de Algebra, Septiembre 2007

1. Como para cualquier valor de t la matriz dada es triangular superior, se ve con claridad que los autovalores siempre son $\lambda_1 = -1$ doble y $\lambda_2 = 3$ sencillo. En consecuencia que la matriz sea o no diagonalizable depende del rango de la matriz $A+I$ (siendo I la matriz identidad). Esta matriz es

$$A+I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ t & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es muy sencillo comprobar que este rango es 2 si $t \neq 0$ y es 1 si $t = 0$. Así pues, A es diagonalizable si $t = 0$ y no diagonalizable si $t \neq 0$. Si $t = 0$, la propia matriz A ya viene dada en forma diagonal de modo que no hay que realizar ningún cambio de base (con respecto a la canónica) y por la tanto la matriz de cambio es la identidad I. El caso interesante es cuando $t \neq 0$. En este caso la forma de Jordan será

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar una matriz de cambio, tenemos que estudiar el cuadrado

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4t & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Debemos elegir un vector de este núcleo que no esté en el núcleo de $A+I$, por ejemplo, $u_2 = (-4, 0, t)$. El primer vector será $u_1 = (A+I)u_2 = (0, -4t, 0)$. Y el tercer vector corresponderá a un autovector asociado al autovalor sencillo, por ejemplo, $u_3 = (0, 0, 1)$. Nótese que la matriz $A - 3I$ es

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ t & -4 & 0 \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz de cambio de base será

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4t & 0 & 0 \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Llamemos B a la base formada por los vectores $\{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ y C a la canónica. La información que nos dan sobre F la podemos trasladar directamente a una matriz diciendo que la matriz de F respecto a las bases B en partida y C en llegada, y la matriz del cambio de B a C son, respectivamente,

$$F_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las matrices que nos solicitan son $F_{C\to C}$ y $F_{B\to B}$. Las fórmulas del cambio nos dan

$$F_{C\to C} = F_{B\to C} C_{C\to B}, \quad F_{B\to B} = C_{C\to B} F_{B\to C}.$$

La matriz $C_{C\to B}$ es la inversa de $C_{B\to C}$. Tras un cálculo sencillo, tenemos

$$C_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto

$$F_{C\to C} = F_{B\to C}C_{C\to B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_{B\to B} = C_{C\to B}F_{B\to C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. La base de $\mathbf{R}^3$ que se debe elegir debe estar adaptada a la simetria solicitada pues sabemos que en este caso la matriz adquiere una forma particularmente simple. En concreto, un vector de la base será el eje de simetría que es $(1, 1, -1)$. Los otros dos vectores deberán ser una base ortogonal del plano con vector normal dado por el propio eje de simetría. En concreto, buscamos una base del plano de ecuación $x_1 + x_2 - x_3 = 0$, por ejemplo, $(1, 0, 1), (1, -1, 0)$. Si S representa esta simetría, sabemos que

$$S(1, 1, -1) = (1, 1, -1), \quad S(1, 0, 1) = (-1, 0, -1), \quad S(-1, 2, 1) = (1, -2, -1).$$

Por tanto la matriz de S en esta base será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \text{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \text{-1} \end{pmatrix}.$$

4. Vamos a trabajar en la base canónica de P_3. En esta base necesitamos encontrar la matriz A de F y la matriz B del producto escalar. Una vez encontradas estas dos matrices, el criterio para decidir si F es autoadjunta es $BA = A^T B$ o no. De la misma manera, el criterio para decidir si F es ortogonal es comprobar si $A^T BA = B$ o no. Encontramos fácilmente estas dos matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{pmatrix}.$$

Es sencillo comprobar que BA y $A^T B$ no coinciden y por tanto la matriz NO es autoadjunta. Con respecto a la ortogonalidad, y con el fin de evitar la triple multiplicación $A^T BA$, es suficiente comprobar que

$$1 \cdot x^2 = 1/3, \quad F(1) \cdot F(x^2) = \int_0^1 (2 - x - x^3)4x^2\, dx \neq 1/3.$$

Esto significa que la matriz F tampoco es ortogonal pues si lo fuera estos productos escalares deberían ser iguales.

5. Nos centramos en primer lugar en encontrar las ecuaciones de L_1 y los generadores de L_2. Con respecto a la primera tarea resolvemos el sistema lineal con ecuaciones dadas por los coeficientes de los tres vectores

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1. \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{matrix}$$

Una base para sus soluciones es el vector $(-4, -2, 1, 0)$. Por tanto la ecuación de L_1 será $-4x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$. Para encontrar una base de L_2 resolvemos el sistema homogeneo formado por sus ecuaciones

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{matrix}.$$

Una posible base de L_2 está formada por los vectores $(0, 2, 1, 0)$ y $(1, -1, 0, 1)$.

En este caso los generadores de $L_1 + L_2$ es la reunión de las bases de L_1 y L_2, es decir, $(1, -1, 2, 1)$, $(1, -2, 0, -1)$, $(2, -3, 2, 2)$, $(0, 2, 1, 0)$, $(1, -1, 0, 1)$. El rango de estos cinco vectores es cuatro que coincide con la dimensión de $\mathbf{R}^4$, por lo tanto $L_1 + L_2 = \mathbf{R}^4$ (no hay ecuaciones, y una base es la canónica). Con respecto a la intersección, sabemos que sus ecuaciones son todas las ecuaciones reunidas. Para encontrar una base del sistema correspondiente, resovleos el sistema homogeneo con las tres ecuaciones (una de L_2 y dos de L_1)

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 0 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -4 \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{matrix}.$$

Una base de $L_1 \cup L_2$ está formada por el único vector $(0, 2, 1, 0)$.

$\mathbf{R}^4$ NO es suma directa de L_1 y L_2 pues su intersección no es el subespacio trivial nulo.

6. La base canónica del espacio $M^{2\times 2}$ esta formada por las cuatro matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus imágenes mediante la aplición lineal dada son, respectivamente, las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de estas cuatro últimas matrices respecto de la base canónica anterior son

$$(2, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 1, 0), \quad (0, 1, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 2).$$

Por tanto la matriz de la aplicación lineal T será

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que el núcleo de T está formado por todas las matrices cuya imagen es la matriz nula, es decir, $A + A^T = 0$, y esto significa que la matriz A es antisimétrica $A^T = -A$. Por tanto el núcleo de T está formado por todas estas matrices. Por otro lado la imagen de T está generada por las columnas de su matriz. Observamos que el rango de la matriz es tres, pues una columna está repetida y las otras tres son independientes, y por tanto su imagen está generada por las matrices

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La imagen está generada por estas tres matrices. En consecuencia T no es ni inyectiva (el núcleo no se reduce a la matriz nula) ni sobreyectiva (la imagen no es el total).

Es muy fácil encontrar que las raices del polinomio característico son $\lambda_1 = 0$, sencillo y $\lambda_2 = 2$ triple. La matriz será diagonalizable si la multiplicidad geométrica de $\lambda_2 = 2$ es 3. Es muy fácil ver que el rango de la matriz

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es efectivamente 1, de modo que la multiplicidad geométrica es 3, y la matriz es diagonalizable. Su forma diagonal es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz del cambio necesitamos tres matrices independientes del núcleo de $A-2I$ que está dada más arriba. Es muy fácil obtener estas tres matrices, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con respecto al autovalor 0, debemos elegir una matriz del núcleo de A que tiene dimensión uno. Basta tomar cualquier matriz antisimétrica según se ha comentado antes, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz de cambio es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

EXAMEN ALGEBRA, ENERO 2008

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

- ESCRIBE CLARAMENTE TU NOMBRE Y GRUPO EN CADA HOJA QUE ENTREGUES.
- No se aceptará más de una hoja por problema y no se deben mezclar dos problemas distintos en una misma hoja.
- La duración del examen es de tres horas.
- No se pueden usar calculadoras de ningún tipo.
- Las soluciones de los problemas se pueden descargar de la página web de la asignatura.
- Las notas se harán públicas el día 31 de enero, jueves, al final de la mañana.

PROBLEMAS

1. (1.5 puntos) Determina el rango de la siguiente matriz según los valores de los dos parámetros a y b
$$\begin{pmatrix} a & b & a & b \\ a^2 & -1 & -b & -b \\ b & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (1.5 puntos) Encuentra alguna solución del sistema
$$\begin{cases} 100x_1 + 101x_2 + 102x_3 = 203 \\ 101x_1 + 102x_2 + 103x_3 = 205 \\ 102x_1 + 103x_2 + 105x_3 = 209. \end{cases}$$

3. (2 puntos) En $\mathbf{R}^3$ se consideran las dos bases
$$\mathcal{B}' = \{(1,-1,0),(2,0,1),(1,1,-2)\}, \quad \mathcal{B} = \{(1,0,-1),(2,1,0),(1,-2,1)\}.$$
Encuentra las coordenadas en $\mathcal{B}'$ de los tres vectores cuyas coordenadas en $\mathcal{B}$ son $(1,0,-1)$, $(2,1,0)$ y $(1,-2,1)$.

4. (1.5 puntos) Dado el subespacio L de $\mathbf{R}^5$ generado por los vectores
$$(1,0,1,2,0), \quad (2,0,2,-1,1), \quad (1,-1,0,1,0),$$
encuentra generadores y ecuaciones de L, $L^\perp$, $L+L^\perp$ y $L\cap L^\perp$.

5. (1.5 puntos) Considera el subespacio L del problema anterior. Encuentra la proyección ortogonal sobre L de los tres vectores siguientes
$$(1,0,0,0,0), \quad (0,0,1,0,0), \quad (2,0,-1,0,0).$$

6. (2 puntos) Considera el subespacio L de $\mathbf{R}^3$ de ecuación $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$.

   (a) Encuentra una base de L.

   (b) Encuentra una base ortogonal de L (para el producto escalar usual).

   (c) Determina las coordenadas en ambas bases del vector $v = (0, 1, 2)$.

   (d) Calcula la proyección del vector $u = (2, 1, 0)$ sobre L.

   (e) Halla el vector de L más próximo a $u = (2, 1, 0)$.

   (f) Determina una base ortonormal de $\mathbf{R}^3$ que contenta la base dada en el segundo apartado.

SOLUCIONES

1. Tras una reorganización de filas y columnas para apoyarnos en un pivote numérico no nulo (la unidad), debemos determinar el rango de la matriz

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & b \\ b & a & b & a \\ -b & -b & -1 & a^2 \end{matrix}.$$

Varios pasos del método de Gauss conducen a

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & a-b & b & a-b^2 \\ 0 & 0 & -1 & a^2+b^2 \end{matrix}.$$

Aquí se distinguen claramente dos casos:

(a) $a \neq b$: rango 3.

(b) $a = b$: la matriz se reduce a

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & b-b^2 \\ 0 & 0 & -1 & 2b^2 \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} 1 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & -2b^2 \\ 0 & 0 & 0 & b-b^2+2b^3 \end{matrix}.$$

El rango de esta matriz viene dictado por el término $b(2b^2 - b + 1)$ que sólo puede anularse si $b = 0$. En consecuencia concluimos que si $a = b \neq 0$ el rango sigue siendo 3, mientras que si $a = b = 0$ el rango es 2.

2. La matriz ampliada del sistema es

$$\begin{matrix} 100 & 101 & 102 & 203 \\ 101 & 102 & 103 & 205. \\ 102 & 103 & 105 & 209 \end{matrix}$$

Si restamos la segunda fila menos la primera nos queda la fila $(1, 1, 1, 2)$ que es mucho más fácil a la hora de operar. De este modo el sistema solicitado es equivalente a

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 100 & 101 & 102 & 203. \\ 102 & 103 & 105 & 209 \end{matrix}$$

Mediante al método de Gauss es ahora fácil encontrar el sistema equivalente triangular

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3, \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{matrix}$$

con solución única $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

3. El modo más directo es encontrar la matriz del cambio $C_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'}$. Sabemos que las dos bases que nos proporcionan nos dan las matrices del cambio

$$C_{\mathcal{B}'\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad C_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz que necesitamos será por tanto

$$C_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = (C_{\mathcal{B}'\to\mathcal{C}})^{-1}\, C_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}.$$

Esta operación la podemos hacer aplicando el método de Gauss a la matriz conjunta

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2, \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

buscando la matriz identidad en el primer bloque. Tras realizar estas operaciones encontramos que

$$C_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}'} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas en $\mathcal{B}'$ de los vectores cuyas coordenadas se dan en $\mathcal{B}$ se obtienen sin más que multiplicar por esta matriz. Estos productos son, respectivamente,

$$(-1,0,1), \quad \frac{1}{2}(1,2,3), \quad (3,-2,-1).$$

4. Para encontrar una base de $L^\perp$ necesitamos las ecuaciones de L y esto lo podemos hacer aplicando el método de Gauss a la matriz cuyas filas son los generadores de L

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & -1 & 1. \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Observamos que el primer bloque cuadrado de esta matriz tiene rango 2, luego no nos sirve para transformarlo en la identidad. Si intercalamos la última fila en el segundo puesto (y recordamos este cambio para deshacerlo al final), podemos trabajar con la matriz

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1, \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

que transformada convenientemente proporciona

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5. \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

El bloque complementario a la matriz unidad, tras trasponer, cambiar el signo y completar con la matriz unidad del tamaño oportuno, nos da

$$\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}.$$

Para conseguir una base de $L^\perp$ debemos deshacer el cambio de columnas que hicimos al principio. Esto consiste en devolver la segunda columna al último lugar. Así, obtenemos una base de $L^\perp$ en los vectores

$$(-1,-1,1,0,0), \quad (-2,-1,0,1,5).$$

Sabiendo la relación entre generadores y ecuaciones de L y $L^\perp$ así como el hecho de que $L \otimes L^\perp = \mathbf{R}^5$, concluimos que:

(a) Generadores de L: los proporcionados en el enunciado, pues son independientes.

(b) Ecuaciones de L: $-x_1 - x_2 + x_3 = 0$, $-2x_1 - x_2 + x_4 + 5x_5 = 0$.

(c) Generadores de $L^{\perp}$: $(-1,-1,1,0,0)$, $(-2,-1,0,1,5)$.

(d) Ecuaciones de $L^{\perp}$: $x_1 + x_3 + 2x_4 = 0$, $2x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0$, $x_1 - x_2 + x_4 = 0$.

(e) Ecuaciones de $L + L^{\perp}$: no hay ecuaciones pues es el total.

(f) Generadores de $L + L^{\perp}$: la base canónica de $\mathbf{R}^5$.

(g) Ecuaciones de $L \cap L^{\perp} = \{0\}$: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.

(h) Generadores de $L \cap L^{\perp} = \{0\}$: no hay generadores pues es el subespacio trivial.

5. Sabemos que para calcular proyecciones ortogonales debemos explorar las dos posibilidades de proyectar sobre L o sobre $L^{\perp}$. Por el problema anterior sabemos que la dimensión menor es la de $L^{\perp}$ y en consecuencia, resulta ventajoso proyectar sobre $L^{\perp}$. Una base ortogonal de este subespacio, se encuentra rápidamente mediante el método de G-S aplicado a la base encontrada en el problema anterior

$$(-1,-1,1,0,0), \quad (1,0,1,-1,-5).$$

Estamos ahora en disposición de calcular las proyecciones ortogonales solicitadas:

$$\begin{aligned} P_{L^{\perp}}(1,0,0,0,0) &= \frac{-1}{3}(-1,-1,1,0,0) + \frac{1}{28}(1,0,1,-1,-5) = \frac{1}{84}(31,28,-25,-3,-15) \\ P_{L^{\perp}}(0,0,1,0,0) &= \frac{1}{3}(-1,-1,1,0,0) + \frac{1}{28}(1,0,1,-1,-5) = \frac{1}{84}(-25,-28,31,-3,-15). \end{aligned}$$

Por esta razón

$$\begin{aligned} P_L(1,0,0,0,0) &= (1,0,0,0,0) - P_{L^{\perp}}(1,0,0,0,0) = \frac{1}{84}(53,-28,25,3,15), \\ P_L(0,0,1,0,0) &= (0,0,1,0,0) - P_{L^{\perp}}(0,0,1,0,0) = \frac{1}{84}(25,28,53,3,15). \end{aligned}$$

Con respecto al tercer vector, tenemos, por la linealidad de la proyección ortogonal, que

$$P_L(2,0,-1,0,0) = 2P_L(1,0,0,0,0) - P_L(0,0,1,0,0) = \frac{1}{84}(81,-84,-3,3,15).$$

6. Encontrar una base para L es en definitiva resolver el sistema homogeneo con esa única ecuación. Se encuentra una posible base en $(-2,1,0),(1,0,1)$. Podemos ortogonalizar esta base y encontrar así una nueva base de L que es ortogonal. Mediante el proceso de Gram-Schmidt se encuentra sin dificultad $(-2,1,0),(1/5,2/5,1)$; o bien, por evitar los denominadores, $(-2,1,0),(1,2,5)$.

Encontrar las coordenadas de un vector en una base dada consiste en expresarlo como combinación lineal de los vectores de esa base. En esta situación debemos encontrar los números

$$(0,1,2) = t_1(-2,1,0) + t_2(1,0,1), \quad (0,1,2) = s_1(-2,1,0) + s_2(1,2,5).$$

Encontrar estos dos juegos de coordenadas se reduce a resolver los sistemas lineales correspondientes. Su solución (única) son, respectivamente,

$$t_1 = 1, t_2 = 2, \quad s_1 = 1/5, s_2 = 2/5.$$

Una vez que tenemos una base ortogonal del subespacio L, encontrar la proyección de cualquier vector es sencillo

$$Pu = \frac{u\cdot(-2,1,0)}{5}(-2,1,0) + \frac{u\cdot(1,2,5)}{30}(1,2,5).$$

Sustituyendo u, se obtiene

$$Pu = \frac{1}{3}(4, -1, 2).$$

Este mismo vector Pu es el vector más próximo de L a u, por la propiedad fundamental de la proyección ortogonal.

Para completar la base ortogonal de L obtenida antes, $(-2, 1, 0), (1, 2, 5)$, basta añadirle el vector ortogonal al subespacio L que viene dado por los coeficientes de su ecuación, es decir, la base $(-2, 1, 0), (1, 2, 5), (1, 2, -1)$ es una base ortogonal de $\mathbf{R}^3$.

EXAMEN ALGEBRA, MAYO 2008

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

- ESCRIBE CLARAMENTE TU NOMBRE Y GRUPO EN CADA HOJA QUE ENTREGUES.
- No se aceptará más de una hoja por problema y no se deben mezclar dos problemas distintos en una misma hoja.
- La duración del examen es de tres horas.
- No se pueden usar calculadoras de ningún tipo.
- Las soluciones de los problemas se pueden descargar de la página web de la asignatura.
- Las notas se harán públicas el día 6 de junio, viernes, al final de la mañana.
- **LOS SEIS PRIMEROS PROBLEMAS CORRESPONDEN AL FINAL. LOS ULTIMOS SEIS PROBLEMAS (a partir del 4) CORRESPONDEN AL SEGUNDO PARCIAL**

PROBLEMAS

1. (1.5 puntos) Encuentra la matriz, respecto de la base canónica de $\mathbf{R}^3$, de la simetría con respecto al plano generado por los vectores $(1,0,1)$ y $(1,1,0)$. ¿Cómo puedes descartar errores en tus cálculos y asegurar que la matriz que das es la solicitada?

2. Considera el sistema lineal
$$x_1 + x_2 = 1, \quad 2x_1 - x_2 = 2, \quad -2x_1 + 4x_2 = 7.$$
   (a) (0.5 puntos) Razona que el sistema es incompatible.
   (b) (1 punto) Encuentra su solución por mínimos cuadrados.

3. (2 puntos) Sabiendo que la aplicación lineal A lleva los vectores
$$u_1 = (1,0,0), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,1,1)$$
en
$$w_1 = (2,1,2), w_2 = (3,1,2), w_3 = (6,2,3),$$
respectivamente, encontrar la matriz de A respecto de las bases canónica en salida y $\{u_1, u_2, u_3\}$ en llegada. Comprueba que la matriz que das es en efecto la matriz solicitada, descartando errores.

4. Sea $E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \in \mathbf{M}^{2x2}(\mathbf{R}) : z = x + y \right\}$ y la aplicación lineal $f : E \to E$ dada por
$$f \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3x + 3z \\ -2x - y & x - y + 3z \end{pmatrix}$$

(a) (0.5 puntos) Razona que E es un subespacio vectorial de $\mathbf{M}^{2x2}(\mathbf{R})$ y da una base del mismo.

(b) (0.75 puntos) Encuentra la matriz de f respecto de la base que has dado en el apartado anterior.

(c) (0.75 puntos) Obtener una base del núcleo y de la imagen de la aplicación f.

5. (1 punto) En el espacio vectorial $V = \mathcal{C}[-1,1]$, con el producto escalar $\langle f,g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$, se considera la función $f(x) = e^x$. Encuentra el polinomio $p(x)$ de grado menor o igual que dos más próximo a f.

6. (2 puntos) Encuentra una matriz B (si es posible) de modo que $B^2 = A$ donde

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -2 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

(Indicación. ¿Qué tienes que hacer con la descomposición de Jordan de $A = CJC^{-1}$?).

7. (1.25 puntos) En el espacio vectorial de los polinomios se considera el producto escalar

$$\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx.$$

Encuentra la proyección ortogonal del polinomio $p(x) = x^2 - 3x$ sobre el subespacio generado por su derivada.

8. (2 puntos) Un cierto sistema obedece la ley de recurrencia $X_{j+1} = AX_j$ donde X_j es un vector con tres componentes. La matriz A viene descompuesta como

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si inicialmente el sistema está en $(20, 30, 50)$, razona y encuentra el vector límite cuando $j \to \infty$.

9. Una empresa de paquetería especializada empaqueta el material en dos modelos de paquetes: el 1 con 200 kg de peso, y el 2 con 100 kg. Cada semana debe empaquetar un máximo de 40000 kgs de material, con un mínimo de 100 paquetes y de tal manera que, por restricciones del embalaje, el número de paquetes del tipo 2 no puede exceder en ningún caso en 100 unidades al número de paquetes del tipo 1. Si el precio de los paquetes del tipo 1 es de 75 euros, mientras que el del tipo 2 es de 50 euros, ¿cuántos paquetes de cada tipo se deben usar para maximizar beneficios?

(a) (0.75 puntos) Plantea el problema como un problema de programación lineal.

(b) (1 punto) Resuelve el problema gráficamente y da la solución: el número de paquetes de cada tipo y el beneficio máximo.

SOLUCIONES. Parcial de Mayo-2008 de Algebra Lineal.

1. Encontrar directamente la matriz de la simetría solicitada puede resultar muy tedioso. En cambio, elegir una base adaptada a dicha simetría y escribir la matriz de la misma en dicha base puede resultar muy directo. Después hay que realizar el cambio de base. En efecto, en la base de $\mathbf{R}^3$ formada por una base del plano y el vector normal, la matriz de la simetría será

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

pues la simetría no cambia los vectores del plano y cambia el signo (simetriza) a los vectores ortogonales al mismo. En el enunciado nos dan ya una base del plano $u_1 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$, la cual debemos completar hasta una base de $\mathbf{R}^3$ con un vector ortogonal a dicho plano. Este vector será un generador del complemento ortogonal. Las ecuaciones de dicho complemento son $x_1 + x_3 = x_1 + x_2 = 0$, y una solución no nula es $u_3 = (1,-1,-1)$. Sea $\mathcal{B}$ la base formada por estos tres vectores. La matriz C del cambio de esta base a la canónica, y su inversa son, respectivamente,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la matriz de la simetría en la base canónica será, de acuerdo con la fórmula del cambio,

$$\overline{A} = CAC^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para asegurarse de que los cálculos están bien basta comprobar que la acción de esta matriz sobre los tres vectores de la base $\mathcal{B}$ es la que se ha indicado más arriba, es decir, $\overline{A}u_1 = u_1$, $\overline{A}u_2 = u_2$, $\overline{A}u_3 = -u_3$. Esto se comprueba inmediatamente.

2. Es muy sencillo comprobar que el sistema no es compatible pues los rangos de las matrices del sistema y la ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

no coinciden: el primero es dos, mientras que el segundo es tres. A pesar de ser incompatible, sabemos que siempre se puede obtener la "solución" por mínimos cuadrados sin más que reemplazar el vector de términos independientes b por su proyección sobre el subespacio im$A$, si A es la matriz del sistema. Además sabemos que tal proyección viene dada por la fórmula $A(A^TA)^{-1}A^Tb$, luego el sistema $Ax = b$ se transforma en $Ax = A(A^TA)^{-1}A^Tb$. Como sabemos que este sistema tiene solución única, podemos "simplificar" la matriz A de la izquierda (aunque NO es una matriz cuadrada) y llegar a que la solución por mínimos cuadrados es $x = (A^TA)^{-1}A^Tb$; o multiplicando por (A^TA), queda el sistema $A^TAx = A^Tb$ que es el sistema de partida $Ax = b$ multiplicado por A^T. Este nuevo sistema, en este caso, es un sistema 2×2 compatible determinado que, después de simplificar, se reduce a las ecuaciones

$$x_1 - x_2 = -1, \quad -x_1 + 2x_2 = 3.$$

La solución se encuentra inmediatamente $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

3. Si observamos que los dos conjuntos de vectores

$$\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}, \quad \overline{\mathcal{B}} = \{w_1, w_2, w_3\},$$

son bases de $\mathbf{R}^3$, es sencillo razonar que la matriz de A respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\overline{\mathcal{B}}$, en salida y en llegada respectivamente, será la identidad. Además tenemos las matrices de ambos cambios

$$C = C_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{C} = C_{\overline{\mathcal{B}}\to\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrix de A en las bases solicitadas será por tanto

$$A_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = C_{\overline{\mathcal{B}}\to\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}\to\overline{\mathcal{B}}} C_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = C_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} C_{\overline{\mathcal{B}}\to\mathcal{C}} \text{ identidad } C_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = C^{-1}\overline{C}C^{-1}.$$

Un cálculo rápido nos da

$$A_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para comprobar que ésta es efectivamente la matriz solicitada, basta ver que la imagen de u_1 (en la base canónica) es el vector w_1, y lo mismo para los demás. El vector u_1 tiene coordenadas $(1, 0, 0)$ en la base canónica. De este modo

$$A_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} u_1 = (1, -1, 2)$$

que son las coordenadas de la imagen en la base de llegada que es $\mathcal{B}$. Luego las coordenadas de este vector en la base canónica serán

$$u_1 - u_2 + 2u_3 = (2, 1, 2) = w_1.$$

Los mismo se comprueba con los otros dos

$$A_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} u_2 = (2, -1, 2) \mapsto 2u_1 - u_2 + 2u_3 = w_2, \quad A_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} u_3 = (4, -1, 3) \mapsto 4u_1 - u_2 + 3u_3 = w_3.$$

4. (a) La condición para que E sea un subespacio es que sea estable por combinaciones lineales, es decir, cualquier combinación lineal de matrices de E seguirá siendo una matriz de E. Esto es fácil de comprobar, pues dos matrices cualesquiera de E serán de la forma

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & x_i \\ y_i & x_i + y_i \end{pmatrix}, \quad x_i, y_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2.$$

Una combinación lineal de estas dos será

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & x_1 \\ y_1 & x_1 + y_1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ y_2 & x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & \alpha_1(x_1 + y_1) + \alpha_2(x_2 + y_2) \end{pmatrix},$$

que es otra matriz de E. Puesto que las matrices de E son de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & x \\ y & x + y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

con x e y números arbitrarios, concluimos que estas dos matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

forman una base de E, las coordenadas respecto a esta base son los elementos de la contradiagonal y E es un subespacio de dimensión 2 de $\mathbf{M}^{2\times 2}$.

(b) Puesto que E es un subespacio de dimensión 2, su matriz respecto de cualquier base será una matriz 2×2 cuyas columnas serán las coordenadas en la base elegida de las imágenes de las matrices de la misma base (cuando usamos la misma base en salida y en llegada). En concreto, usando la base del apartado anterior, tendremos

$$f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \mapsto (6,-2), \quad f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto (3,-1),$$

y la matriz será

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Sabemos que el núcleo de f está formado por los vectores que se aplican en el vector cero. Usando la matriz y la base usadas en los apartados anteriores, la matrices del núcleo tendrán coordenadas (x, y) (respecto de la base usada) tales que

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego $y = -2x$, y las matrices del núcleo serán de la forma

$$x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 2x\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ -2x & -x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

con x arbitrario. Es decir, el núcleo es el subespacio generado por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Con respecto a la imagen, hacemos el mismo producto de antes sin igualar a cero

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x+3y \\ -2x-y \end{pmatrix},$$

y usamos estas coordenadas

$$(6x+3y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (2x+y)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6x+3y \\ -2x-y & 4x+2y \end{pmatrix} = (2x+y)\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

En consecuencia, como $2x + y$ es arbitrario, la imagen es el subespacio generado por la matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Se nos está solicitando la proyección ortogonal de la función $f(x) = e^x$ sobre el subespacio de los polinomios de grado no superior a dos con respecto al producto escalar dado. En esta situación el camino más directo consiste en encontrar una base ortogonal a partir de la base canónica $\{1, x, x^2\}$ mediante Gram-Schmidt, y usar esta nueva base para encontrar la proyección solicitada. En realidad una tal base ya la encontramos en clase: $\{1, x, x^2 - 1/3\}$. Por lo tanto, el polinomio que nos piden será

$$p(x) = \frac{\langle e^x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}1 + \frac{\langle e^x, x\rangle}{\langle x, x\rangle}x + \frac{\langle e^x, x^2\rangle}{\langle x^2, x^2\rangle}x^2.$$

Los producto escalares involucrados suponen calcular las integrales

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx, \int_{-1}^{1} x^2\,dx, \int_{-1}^{1} x^4\,dx, \int_{-1}^{1} e^x\,dx, \int_{-1}^{1} xe^x\,dx, \int_{-1}^{1} x^2e^x\,dx.$$

Las dos últimas se realizan por partes. Los resultados concretos son, respectivamente,

$$2, 2/3, 2/5, e - e^{-1}, 2e^{-1}, e - 5e^{-1}.$$

Así

$$p(x) = \frac{e - e^{-1}}{2} + 3e^{-1}x + 5\frac{e - 5e^{-1}}{2}x^2.$$

6. Buscamos la descomposición de Jordan de A.

   (a) Búsqueda de autovalores.

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & 7-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & -2 \\ -6+\lambda & 7-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 & -2 \\ 0 & 8-\lambda & -4 \\ 0 & -2 & 10-\lambda \end{vmatrix}.$$

   Desarrollando por la primera columna

$$(6-\lambda)(\lambda^2 - 18\lambda + 72).$$

   Los autovalores son $\lambda_1 = 6$, doble, y $\lambda_2 = 12$, sencillo.

   (b) Búsqueda de autovectores. Para λ_1 debemos encontrar una base del núcleo de la matriz $A - 6$ identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

   El rango es 1, luego la multiplicidad geométrica es 2 y podemos encontrar dos autovectores independientes que deben ser solución de $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$. Elegimos $(1, 1, 1)$ y $(1, -1, 0)$. Para λ_2, examinamos la matriz

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   En este caso el rango es 2, la multiplicidad geométrica 1, y un autovector es $(1, 1, -2)$.

   (c) Como todas las multiplicidades coinciden, la forma canónica J es diagonal. La matriz C se obtiene colocando los autovectores (de manera ordenada) en columnas.

$$J = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Como los autovalores han salido positivos, se puede extraer la raíz cuadrada de J. Así la matriz B será

$$B = C\sqrt{J}C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

es decir,

$$B = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 5+\sqrt{2} & -1+\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ -1+\sqrt{2} & 5+\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} & 2+4\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

7. Cuando hay que proyectar un vector p (polinomio) sobre el subespacio generado por un único vector q (polinomio), la fórmula siempre es la misma

$$\frac{\langle p,q\rangle}{\langle q,q\rangle}q.$$

En la situación en la que $q=p'$, los productos escalares son

$$\langle p,p'\rangle=\int_0^1 p(x)p'(x)\,dx=\frac{1}{2}(p(1)^2-p(0)^2)=2,$$

y

$$\langle p',p'\rangle=\int_0^1 p'(x)^2\,dx=\frac{13}{3}.$$

Por tanto, la proyección es

$$\frac{6}{13}(2x-3).$$

8. Tal y como aparece en el enunciado, nos están dando la descomposición de Jordan de la matriz A. Sabemos que la fórmula general en estas circunstancias es $X_j=A^jX_0$. Por tanto, tenemos que calcular A^j. Si $A=CJC^{-1}$, se tiene que $A^j=CJ^jC^{-1}$. Ahora bien, $J^j=(D+N)^j$ donde D es la parte diagonal de J y N la parte no diagonal. Como ambas matrices conmutan, y además $N^2=0$, por el binomio de Newton tenemos

$$J^j=(D+N)^j=D^j+jD^{j-1}N=\begin{pmatrix}1/2^j & j/2^{j-1} & 0\\ 0 & 1/2^j & 0\\ 0 & 0 & 2^j\end{pmatrix}.$$

Así pues, como $C^{-1}X_0=20(-3,5,0)$

$$X_j=A^jX_0=CJ^jC^{-1}X_0=10\begin{pmatrix}(10j+2)/2^j\\ (3-10j)/2^j\\ 5/2^j\end{pmatrix}.$$

Se comprueba inmediatamente que

$$\lim_{j\to\infty}X_j=(0,0,0).$$

9. (a) Pongamos x_1 y x_2 el número de paquetes de cada tipo que se pretenden usar semanalmente. Para plantear el problema de programación lineal, debemos establecer la función de beneficios y las restricciones adecuadas. Con respecto a la primera, es claro que se expresa en la forma $75x_1+50x_2$. Las restricciones serán:

   i. $200x_1+100x_2\le 40000$: cada semana no se pueden empaquetar más de 40000 kgs;
   ii. $x_1+x_2\ge 100$: no se pueden usar menos de 100 paquetes;
   iii. $x_2\le x_1+100$: el número de paquetes del tipo 2 no pueden superar el número de paquetes de tipo 1 en más de 100 unidades;
   iv. $x_1,x_2\ge 0$: el número de paquetes no puede ser un número negativo.

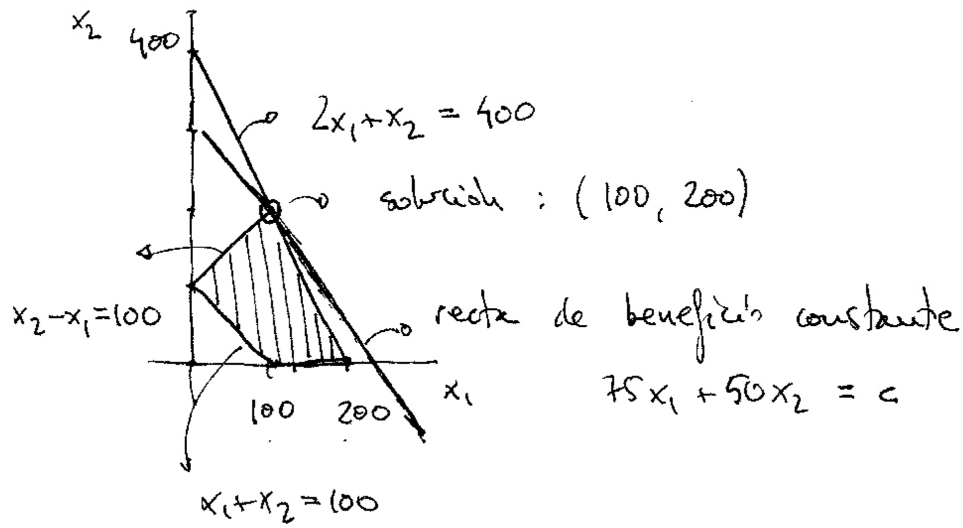
   Por lo tanto el problema consistirá en

$$\text{Maximizar}\quad 75x_1+50x_2$$

   sujeto a las restricciones

$$2x_1+x_2\le 400,\quad x_1+x_2\ge 100,\quad x_2-x_1\le 100,\quad x_1,x_2\ge 0.$$

(b) Según el boceto de la figura la solución es $x_1 = 100$, $x_2 = 200$ con un beneficio máximo de $75 \times 100 + 50 \times 200 = 17.500$ euros.



EXAMEN FINAL DE ALGEBRA, JULIO 2008

Universidad de Castilla-La Mancha, ETS Ingenieros Industriales

- ESCRIBE CLARAMENTE TU NOMBRE Y GRUPO EN CADA HOJA QUE ENTREGUES.
- No se aceptará más de una hoja por problema y no se deben mezclar dos problemas distintos en una misma hoja.
- La duración del examen es de tres horas.
- No se pueden usar calculadoras de ningún tipo.
- Las soluciones de los problemas se pueden descargar de la página web de la asignatura.
- Las notas se harán públicas el día 21 de julio, lunes, al final de la mañana.

PROBLEMAS

1. (2 puntos) Consideremos las aplicaciones lineales de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$
$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= (x+2y+3z, x+2y+4z, 4x+2y+z) \\ h(x,y,z) &= (3x-y, 2z, x+y+z). \end{aligned}$$
Encuentra una tercera aplicación lineal g de $\mathbf{R}^3$ en $\mathbf{R}^3$ de modo que se tenga $g \circ f = h$, es decir, la composición de g y f es h. Asegúrate de que los cálculos están bien hechos.

2. Sea $S = \{B \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R}) : BA = AB\}$ el conmutador de A con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R})$ una matriz dos por dos.
(a) (0.5 puntos) Razonar que S es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R})$.
(b) (1 punto) Encontrar una base de S y su dimensión.

3. Consideremos $\mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R})$ el subespacio vectorial de las matrices 2x2 y sea $P^2_{\mathbf{R}}[x]$ el subespacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a 2.
Con los espacios vectoriales dados, definimos la aplicación $\phi : \mathcal{M}_{2x2}(\mathbf{R}) \to P^2_{\mathbf{R}}[x]$ tal como sigue
$$\phi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a-b)x^2 + (c+d)x.$$
(a) (0.5 puntos) Razonar que la aplicación ϕ es lineal.
(b) (0.75 puntos) Determinar el núcleo y la imagen de ϕ. Calcular razonadamente las dimensiones de ambos.
(c) (1 punto) Encontrar la matriz de la aplicación ϕ respecto de las bases canónicas.
(d) (1 punto) Hallar la matriz de la aplicación respecto de la base canónica en el espacio de inicio de las matrices 2x2 y la base $\{1+x^2, 3x+x^2, 5\}$ en espacio de llegada $P^2_{\mathbf{R}}[x]$.

4. Considera la matriz
$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
dependiendo del parámetro $a \in \mathbf{R}$.

   (a) (0.75 puntos) Hallar los autovalores de $M(a)$ y encontrar los valores del parámetro a para los que $M(a)$ es diagonalizable. Razona tus respuestas.

   (b) (1 punto) Para el caso particular $a = 0$, obtener la matriz de Jordan y la base de Jordan correspondiente (o matriz del cambio).

5. En un habitat determinado, x_0 e y_0 son las poblaciones iniciales de conejos y zorros, respectivamente. Se sabe que el número de conejos en cualquier mes es la mitad de la población de conejos del mes anterior; y que el número de zorros en dicho mes es la suma de la población de zorros más la mitad de los conejos en el mes anterior.

   (a) (0.5 puntos) Describir el sistema dinámico mediante una ley de recurrencia lineal.

   (b) (1 punto) Determinar las poblaciones de zorros y conejos cuando el número de meses crece indefinidamente. ¿Se extinguirán alguna de las especies mencionadas ? Razona la respuesta.

SOLUCIONES. Final de Julio-2008 de Algebra Lineal.

1. Los dados proporcionados nos permiten escribir directamente las matrices de las aplicaciones lineales f y h, respecto a la base canónica, si copiamos los coeficientes de las fórmulas por filas
$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Como la composición de aplicacines lineales se traduce en el producto de matrices, nos están solicitando una matriz G de manera que $GF = H$, es decir, suponiendo que F es no singular, $G = HF^{-1}$. Sabemos que este producto se puede hacer directamente mediante el método de Gauss, si escribimos en bloque las traspuestas de F y G, aplicamos Gauss para obtener la identidad en el primer bloque y la matriz G será la traspuesta del segundo bloque. Es decir si a la matriz
$$F^T|H^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
le aplicamos el método de Gauss (teniendo cuidado en las cuentas) obtenemos
$$\mathrm{id}|F^{-T}H^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -11/2 & -2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 23/6 & 2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 7/6 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}.$$
Si transponemos el segundo bloque en esta última matriz, obtenemos
$$G = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -33 & 23 & 7 \\ -12 & 12 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Para asegurarnos de que los cálculos están bien no hay más que comprobar que, efectivamente, $GF = H$.

2. Para el primer apartado, basta considerar dos matrices B_1 y B_2 de S, tomar una combinación lineal arbitraria $B = \alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2$ y razonar que dicha combinación lineal vuelve a ser una matriz de S. En efecto, el criterio para que cualquier matriz B esté en S es que conmute con A, y puesto que B_1 y B_2 sí conmutan, tendremos:
$$BA = (\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2)A = \alpha_1 B_1 A + \alpha_2 B_2 A = \alpha_1 AB_1 + \alpha_2 AB_2 = A(\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2) = AB.$$
Para encontrar una base de S, el modo más directo es encontrar sus ecuaciones escribiendo una matriz genérica
$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$
y exigiendo que $BA = AB$. Si realizamos estas dos multiplicaciones e igualamos, se obtiene
$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+w \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y & x \\ 2z+w & z \end{pmatrix}.$$
Esta igualdad es posible si $y = z$ y $2z + w = x$. Estas son las ecuaciones. Como estas ecuaciones forman un sistema independiente (el rango de la matriz del sistema es 2) y tenemos 4 incógnitas, resulta que la dimensión de S es la diferencia, 2, y para encontrar una base, basta tomar dos soluciones independientes del sistema anterior, por ejemplo,
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (a) Basta comprobar que la aplicación lineal ϕ respeta las combinaciones lineales. Efectivamente, por un lado la propia definición de ϕ nos lleva a

$$\phi\left(\alpha_1\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\right)=(\alpha_1a_1+\alpha_2a_2-\alpha_1b_1-\alpha_2b_2)x^2+(\alpha_1c_1+\alpha_2c_2+\alpha_1d_1+\alpha_2d_2)x.$$

Reagrupando y factorizando, esta última expresión se puede reescribir como

$$\alpha_1((a_1-b_1)x^2+(c_1+d_1)x)+\alpha_2((a_2-b_2)x^2+(c_2+d_2)x).$$

Por tanto se ve con claridad en esta última expresión que

$$\phi\left(\alpha_1\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\right)=\alpha_1\phi\left(\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\right)+\alpha_2\phi\left(\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}\right).$$

(b) El núcleo de cualquier aplicación lineal está formado por los vectores del espacio inicial que son llevados al cero del espacio final. En nuestro caso, estará formado por las matrices que ϕ lleva al polinomio nulo, esto es, las matrices

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\text{ tales que } a-b=0, c+d=0.$$

Están son por tanto las ecuaciones del núcleo. Como estas dos ecuaciones son independientes (el rango de sistema es 2) y la dimensión del espacio de matrices 2×2 es 4, la dimensión del núcleo es la diferencia 2. Con respecto a la imagen, nos planteamos qué polinomios pueden obtenerse como imágenes de cualquier matriz de partida. Por la propia definición de ϕ, tales polinomios no pueden tener término independiente. Pero aparte de esto, no hay ninguna otra restricción pues la diferencia $a-b$ y la suma $c+d$ pueden tomar cualquier valor prefijado de antemano. Esto significa que el supespacio imagen de ϕ es el generado por $\{x^2,x\}$. La dimensión es por tanto también 2.

(c) Sabemos que la matriz de cualquier aplicación lineal respecto a bases dadas se escribe por columnas, siendo éstas las coordenadas en la base de llegada de las imágenes de los vectores de la base de salida. En este caso, la base de salida es

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

y la de llegada

$$1, x, x^2.$$

Tenemos que

$$\phi\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=x^2\mapsto(0,0,1),\quad \phi\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=-x^2\mapsto(0,0,-1),$$
$$\phi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=x\mapsto(0,1,0),\quad \phi\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=x\mapsto(0,1,0).$$

La matriz será por tanto

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

(d) La matriz de cambio de la nueva base B dada a la canónica C podemos escribirla directamente

$$C_{B\to C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Si $F_{C\to C}$ es la matriz del apartado anterior, por la fórmulas del cambio tendremos

$$F_{C\to B} = C_{B\to C}^{-1} F_{C\to C}.$$

Esta operación se puede hacer directamente mediante el método de Gauss escribiendo la matriz $C_{B\to C}|F_{C\to C}$ y transformando en $\mathrm{id}|F_{C\to B}$. Explícitamente, será

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad \mapsto \quad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/5 & 1/5 & 1/15 & 1/15 \end{matrix}.$$

La matriz solicitada es el segundo bloque.

4. (a) El polinomio característico es el determinante de la matriz $M(a) - \lambda$ identidad. En este caso desarrollando por la segunda fila o columna, se encuentra inmediatamente que

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & a^2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & a^2 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4a^2).$$

Las tres raices se encuentran inmediatamente: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1+2a$, $\lambda_3 = 1-2a$. Por tanto, si a es distinto de cero, tenemos tres autovalores reales distintos de una matriz 3×3 y, en consecuencia, la matriz es diagonalizable.

(b) Cuando $a = 0$, tenemos que los tres autovalores anteriores son iguales luego tenemos un único autovalor, $\lambda = 1$, triple. Para determinar su multiplicidad geométrica, estudiamos el rango de la matriz

$$M(0) - \text{ identidad} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente el rango es 1, y por tanto, la multiplicidad geométrica del autovalor 1 es 2 (3 menos el rango). Esto nos lleva a que la forma de Jordan de $M(0)$ es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para encontrar la matriz de cambio, tomamos cualquier vector que no esté en el núcleo de la matriz anterior, por ejemplo $u_3 = (1,0,0)$. A partir de éste, construimos $u_2 = (M(0) - \text{identidad})u_3 = (0,0,4)$. Finalmente, u_1 lo tomamos en el núcleo de $M(0)-$identidad (que sea autovalor) pero independiente de u_2. Nos vale $u_1 = (0,1,0)$. La matriz será

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. (a) De acuerdo con el enunciado del problema, si x_n e y_n denotan las poblaciones en el mes n de conejos y zorros, respectivamente, entonces se sabe que

$$x_n = x_{n-1}/2, \quad y_n = y_{n-1} + x_{n-1}/2,$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad X_n = AX_{n-1}.$$

(b) Sabemos por tanto que $X_n = A^n X_0$, si $X_0 = (x_0, y_0)$. En consecuencia debemos calcular la potencia A^n. Para ello encontramos la forma de Jordan de A. En este caso, es muy sencillo mostrar que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

de modo que la forma de Jordan es diagonal y la matriz de cambio es el primer factor en el producto anterior. Por tanto

$$A^n X_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X_0 = \begin{pmatrix} 1/2^n & 0 \\ 1 - 1/2^n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0/2^n \\ y_0 + x_0 - x_0/2^n \end{pmatrix}.$$

Cuando $n \to \infty$, concluimos que

$$A^n X_0 = (0, y_0 + x_0),$$

luego los conejos desaparecen, mientras que los zorros aumentan su población hasta la suma de las dos poblaciones iniciales.

Examen Final de Álgebra (1$^{\text{er}}$ Parcial) **22 de Mayo de 2009**

1. **[2.5 ptos.]** Calcular el determinante de la siguiente matriz de orden n:

$$\begin{pmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{pmatrix}$$

2. **[3.5 ptos.]** Se consideran los espacios vectoriales

$$V_1 = \left\{ p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] : (x-1) \text{ divide a } p(x) \right\}$$
$$V_2 = \left\{ p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] : (x+1) \text{ divide a } p(x) \right\};$$

donde $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ es el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos en la variable x. Hallar una base y la dimension de V_1, V_2, $V_1 + V_2$ y $V_1 \cap V_2$.

3. **[4 ptos.]** Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida como la simetría axial de eje el plano

$$V \equiv \{x - y + 2z = 0\}$$

Se pide:

(a) Encontrar la matriz de f respecto de una base apropiada.

(b) Encontrar la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

1

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ \vdots & & & & \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix} \overset{C_1 \to C_1 + C_2 + \cdots C_n}{=} \begin{vmatrix} x+a(n-1) & a & \cdots & a \\ x+a(n-1) & x & \cdots & a \\ \vdots & & & \\ x+a(n-1) & a & \cdots & x \end{vmatrix} =$$

$$\overset{\begin{pmatrix} F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \\ \vdots \\ F_n - F_1 \end{pmatrix}}{=} \begin{vmatrix} x+a(n-1) & a & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = (x-a(n-1))(x-a)^{n-1}$$

2 Calculemos una base de V_1:

Si $p(x) = x_1 + x_2 \cdot x + x_3 x^2 \in V_1 \Rightarrow (x-1)$ divide a $p(x)$, lo que significa que $x=1$ es raíz de $p(x) \Rightarrow p(1)=0 \Rightarrow x_1+x_2+x_3=0$

Esto es un sistema de ecuaciones implícitas de V_1. $\dim V_1 = 3 - \operatorname{rang}(1\ 1\ 1) = 2$

Resolviendo: $x_2=1, x_3=0 \to x_1=-1 \rightsquigarrow (-1,1,0)$ que corresponde a $-1+x$

$x_2=0, x_3=1 \to x_1=-1 \rightsquigarrow (-1,0,1)$ " " " $-1+x^2$

Del mismo modo con V_2: $p(x)=x_1+x_2 \cdot x+x_3 \cdot x^2$

$x+1$ divide a $p(x) \Rightarrow p(-1)=0 \Rightarrow x_1-x_2+x_3=0$

$\dim V_2 = 2$, y una base es $(1,1,0), (1,0,-1)$

es decir, los polinomios $1+x$, $1-x^2$.

Para calcular V_1+V_2 tomamos el sistema generador formado por

$(1,-1,0)$, $(1,0,-1)$, $(1,1,0)$ y $(1,0,-1)$, como

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(V_1+V_2)=3 \Rightarrow V_1+V_2 = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$$

Usando la fórmula de la dimensión:

$$\underbrace{\dim(V_1+V_2)}_{3} + \underbrace{\dim(V_1\cap V_2)}_{1} = \underbrace{\dim V_1}_{2} + \underbrace{\dim V_2}_{2} \Rightarrow \dim(V_1\cap V_2)=1$$

Como además vemos que $1-x^2 \in V_1$ y a $V_2 \Rightarrow 1-x^2 \in V_1\cap V_2$

Una base de $V_1\cap V_2$ está formada por $1-x^2$

3 a) Como se trata de una simetría respecto del plano V, elegimos una base formada por dos vectores cualesquiera del plano y un vector ortogonal a éste:

$$x-y+2z=0 \longrightarrow \begin{matrix} y=1,\ z=0 \rightarrow (1,1,0) \\ y=0,\ z=1 \rightarrow (-2,0,1) \end{matrix}$$

El vector ortogonal corresponde a los coeficientes de $x,y,z \rightarrow (1,-1,2)$

Es evidente que

$$\left.\begin{matrix} f(1,1,0) = (1,1,0) \\ f(-2,0,1) = (-2,0,1) \end{matrix}\right\} \text{ pues están en el plano}$$

$$f(1,-1,2) = (-1,1,-2) \ \} \text{ porque es ortogonal al plano}$$

De este modo, si $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-2,0,1), (1,-1,2)\}$ es la base escogida,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv A$$

b) Para calcular la matriz de f en la base canónica efectuamos un cambio de base:

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "A"] & \mathcal{B} \arrow[d, bend left, "P"] \\ \mathcal{B}_c \arrow[u, bend left, "P^{-1}"] \arrow[r, "A'"'] & \mathcal{B}_c \end{tikzcd}$$

Se tendrá que $A' = M_{\mathcal{B}_c}(f) = P\,A\,P^{-1}$ donde P es la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}_c$, es decir

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente $$M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Examen Final de Álgebra (2º Parcial) **22 de Mayo de 2009**

1. **[2 ptos.]** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de la que se sabe que $\lambda = -1$ es un autovalor de multiplicidad 5 y que

$$E_1(-1) = L((1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1),(0,-1,2,-3,0))$$
$$E_2(-1) = L((0,1,0,0,0),(1,0,0,0,0),(0,0,0,0,1),(0,0,2,-3,0))$$

Calcula **razonadamente** la forma de Jordan de A y una matriz de paso.

2. **[2 ptos.]** En el espacio $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[t]$ de polinomios de grado menor o igual que dos, con coeficientes reales, se considera el producto escalar

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\, dt$$

y el conjunto

$$M = \{p(t) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[t] : \; p(0) = p'(0) = 0\}.$$

Se pide:

2.a) Hallar una base ortogonal de $M^{\perp}$.

2.b) Hallar el polinomio $p(t) \in M$ que hace mínimo el valor de la integral

$$\int_{-1}^{1} (t^2 + 1 + p(t))^2\, dt$$

.

3. **[1.5 ptos.]** Encontrar el polinomio $p(x) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[x]$ que mejor aproxima a los puntos $(1,1)$, $(2,4)$, $(3,7)$ y $(4,9)$, mediante el método de los mínimos cuadrados.

4. **[3 ptos.]** Considera la forma bilineal definida en $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ por

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 5x_1y_1 + 5x_2y_2 + 2x_3y_3 + 8x_1y_2 + 5x_1y_3 - x_3y_1 + 3x_2y_3 + x_3y_2$$

4.a) Determina la matriz de la forma bilineal A en la base canónica de $\mathbb{R}^3$. ¿Es A simétrica?

4.b) Encuentra la descomposición de A como suma de dos formas bilineales: una simétrica y otra antisimétrica.

4.c) Sea $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática asociada a la forma bilineal A. Hallar la matriz de C respecto de la base canónica.

4.d) Encontrar una matriz D diagonal y una matriz P ortogonal tal que $C = P^T DP$.

4.e) Calcular el rango y la signatura de C y clasificarla, es decir, decidir si C es (semi)definida positiva o negativa, o es indefinida.

5. **[1.5 ptos.]** Resolver **razonadamente** las siguientes cuestiones (cada uno de estos apartados son independientes):

5.a) Si A es una matriz de orden n tal que verifica $A^2 - A - I = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) No existe A^{-1}.

B) Si existe A^{-1} entonces $A^{-1} = A - I$.

C) Solo existe A si $A = I$.

D) Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

5.b) Encontrar una matriz real que satisfaga $A^2 - A + I = 0$.

5.c) Sea A una forma bilineal antisimétrica (es decir, $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -A(\mathbf{y}, \mathbf{x})$). ¿Cómo es la forma cuadrática asociada a A?

(1) Como la matriz A es de orden 5 y el autovalor dado tiene multiplicidad 5, sabemos que no hay más autovalores.

Como $\dim(E_1(-1)) = 3$ y $\dim(E_2(-1)) = 4 \Rightarrow \dim(E_3(-1)) = 5$, es decir $E_3(-1) = \mathbb{R}^5$

Así $q_1 = 3$, $q_2 = 4$, $q_3 = 5 \Rightarrow p_1 = 3$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$ y la partición de multiplicidad es

$5 = 3+1+1$, que corresponde a 1 caja de tamaño 3

0 " " " 2

2 " " " 1

La forma canónica de Jordan es

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c|c} -1 & 1 & & & \\ & -1 & 1 & & \\ & & -1 & & \\ \hline & & & -1 & \\ \hline & & & & -1 \end{array}\right)$$

Para calcular la matriz de paso construimos la tabla

$(p_3=1)$	$E_3(-1)$	$(0,0,0,1,0)$
$(p_2=1)$	$E_2(-1)$	$(2,3,-2,3,0)$
$(p_1=3)$	$E_1(-1)$	$(4,2,-4,6,0)$, $(1,0,0,0,0)$, $(0,0,0,0,1)$

Luego

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 a) Obtenemos primero una base de M; para ello tomamos $p(t) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ de la forma $p(t) = x_0 + x_1 \cdot t + x_2 t^2$ e imponemos

$$\left.\begin{array}{l} p(0)=0 \Rightarrow x_0 = 0 \\ p'(0)=0 \Rightarrow x_1 = 0 \end{array}\right\}$$

Así pues una base de M la forma el vector $(0,0,1)$, es decir el polinomio t^2.

Para encontrar $M^\perp$ imponemos que $q(t) \in M^\perp \Leftrightarrow \int_{-1}^{1} t^2 \cdot q(t)\,dt = 0$

con $q(t) = x_0 + x_1 \cdot t + x_2 t^2 \Rightarrow \int_{-1}^{1} t^2(x_0 + x_1 t + x_2 t^2)\,dt = x_0 \cdot \frac{2}{3} + x_2 \frac{2}{5} = 0 \Rightarrow$ Resolviendo:

se obtienen los vectores $(0,1,0)$, $(1,0,-\frac{5}{3})$ es decir, los polinomios

$\{ t, \; 1 - \frac{5}{3}t^2 \}$

Se observa que esto es una base ortogonal pues $\int_{-1}^{1} t \cdot (1 - \frac{5}{3}t^2)\,dt = 0$

b) Dado que $\int_{-1}^{1} (t^2+1+p(t))^2\,dt = \| t^2+1 - (-p(t)) \|^2$, encontrar el mínimo equivale a buscar la proyección sobre M del polinomio t^2+1. (que será $-p(t)$).

Luego buscamos $q(t) = \alpha \cdot t^2$ tal que $t^2+1-\alpha t^2$ sea ortogonal a M

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1} (t^2+1-\alpha t^2)t^2\,dt = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} + (1-\alpha)\frac{2}{5} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{8}{3}$$

El polinomio buscado será $p(t) = -\frac{8}{3}t^2$

3) Se busca una función $y = a + bx$ que interpole los puntos dados. Es decir

$$\left.\begin{array}{l} a+b=1 \\ a+2b=4 \\ a+3b=7 \\ a+4b=9 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

que resolvemos de forma aproximada.

Basta con:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 66 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -3/2 \\ b = \frac{27}{10} \end{array}$$

La recta buscada es $y = -\frac{3}{2} + \frac{27}{10}x$

4) a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ No es una forma bilineal simétrica.

b) $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \Rightarrow \frac{1}{2}(A + A^T) = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2}(A - A^T) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) $C(\bar{x}) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

La matriz de C es

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

d) Calculamos la forma de Jordan de C:

$$|C-\lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1+\lambda & 0 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 9-\lambda & 2 \\ 2 & 4 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)\left[(9-\lambda)(2-\lambda) - 8\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - 11\lambda + 10\right] = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-10)$$

Autovalores $\lambda = 1$ (doble), $\lambda = 10$ (simple)

$\lambda = 10 \to E_1(10) = \ker(C - 10I) \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (2,2,1)$

$\lambda = 1 \Rightarrow E_1(1) = \ker(C - I) \Rightarrow 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \to (-1,0,2), (-1,1,0)$

Como los vectores $(-1,0,2)$ y $(-1,1,0)$ no son ortogonales, los ortogonalizamos por Gram-Schmidtz: (obsérvese que sí son ortogonales al $(2,2,1)$)

$\bar{x}_1 = (-1,1,0),\ \bar{x}_2 = (-1,0,2) \longrightarrow \bar{y}_1 = (-1,1,0),\ \bar{y}_2 = (-1,0,2) + \alpha\cdot(-1,1,0)$

tal que $y_1 \perp y_2 \Rightarrow \langle (-1,0,2) + \alpha(-1,1,0), (-1,1,0) \rangle = 0$

$\Rightarrow 1 + 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow y_2 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2\right)$

Normalizamos:

$$\frac{(2,2,1)}{\|(2,2,1)\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{(-1,1,0)}{\|(-1,1,0)\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$\frac{(-1/2,-1/2,2)}{\|(-1/2,-1/2,2)\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Así pues

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 2/3 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ 1/3 & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e) Como los autovalores de D son todos positivos $\Rightarrow$ C es definida positiva. Su rango es 3 y su signatura $(3,0)$

(5) a) B es correcta pues si $\exists A^{-1} \Rightarrow 0 = A^{-1}(A^2 - A - I) = A - I - A^{-1} = 0$
$\Rightarrow A^{-1} = A - I$

b) Cualquier matriz de orden dos que tenga como polinomio característico $\lambda^2 - \lambda + 1$, es decir como raíces $\frac{1 \pm \sqrt{3}\,i}{2}$. Tomando la forma de Jordan real encontraremos una de estas matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix}$$

c) Si A es una forma bilineal antisimétrica entonces la forma cuadrática asociada es la forma nula $A(\bar{x},\bar{y}) = -A(\bar{y},\bar{x}) \Rightarrow C(\bar{x}) = A(\bar{x},\bar{x}) = -A(\bar{x},\bar{x})$
$= -C(x) \Rightarrow C \equiv 0$

Convocatoria Extraordinaria de Álgebra (1er Parcial) **16 de Julio de 2009**

1. **[3.5 ptos.]** En $\mathbb{R}^3$ se considera la base canónica y el conjunto de vectores

$$\mathcal{B}' = \{(1,-1,-1),(0,-1,0),(-2,1,0)\}$$

   (a) Probar que $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Calcular las coordenadas del vector $\vec{u} = (2,1,2)$ respecto de la base $\mathcal{B}'$.

   (c) Hallar la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

   (d) Determinar el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ cuyas dos primeras coordenadas son las mismas y la última coordenada es opuesta respecto de ambas bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. ¿Es este conjunto un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?

2. **[3.5 ptos.]** Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_1+x_2-x_3, x_3)$$

   Calcular la dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas de los subespacios:

   (a) $\mathrm{Ker}(f)$.

   (b) $\mathrm{Im}(f)$.

   (c) $f(M)$, donde $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3 = 0\}$.

3. **[3 ptos.]** Se considera el subespacio vectorial M de matrices cuadradas 2×2 definido de la forma siguiente

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

   y la aplicación $f : M \longrightarrow M$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b-a \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

   Se pide

   (a) Dar una base de M.

   (b) Probar que f es lineal.

   (c) Calcular la matriz de la aplicación lineal f con respecto a la base encontrada en el apartado (a).

   (d) Estudiar si dicha aplicación f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva

Convocatoria Extraordinaria de Álgebra (2º Parcial) **16 de Julio de 2009**

1. **[3 ptos.]** Sea A la aplicación cuya matriz respecto de la base canónica es
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   (a) Halla la forma canónica de Jordan de A (compleja y real) y la correspondiente matriz de paso.
   (b) ¿Es A ortogonal? Interpreta geométricamente esta aplicación.

2. **[3.5 ptos.]** Se considera $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que uno, dotado del producto escalar:
$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_{-1}^{1} p(s)q(s)\, ds,$$
y la aplicación $T : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t] \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$ definida por
$$T(p(t)) = \int_0^1 \big((\lambda - \tfrac{1}{2}t)p'(s) + (t + 2\lambda)p(s)\big)\, ds$$
   (a) Determinar una base ortonormal de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$.
   (b) Hallar los valores de λ tales que la aplicación T sea autoadjunta.
   (c) Hallar el polinomio $p(t) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$ que mejor aproxima al polinomio $t^2 - 1$ en la norma inducida por el producto escalar dado.

3. **[1.5 ptos.]** Determinar los valores de α para los cuales la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ dada por
$$x^2 + 4y + 2\alpha xy + 2\alpha yz$$
es:
   (a) definida negativa,
   (b) semidefinida positiva,
   (c) indefinida.

4. **[2 ptos.]** Se dan las sucesiones recurrentes:
$$\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n &= 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{aligned}$$
con $u_0 = -2$ y $v_0 = 6$. Hallar u_n y v_n en función de n.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE ÁLGEBRA (2º PARCIAL) 16-JULIO-2009

1

a) $|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_3 \to C_3 - C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$\overset{F_3 \to F_3+F_2}{=} \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1+\lambda \\ 2 & -1-\lambda & 0 \end{vmatrix} = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$

$= -(1+\lambda)(\lambda^2+1)$

Autovalores $\lambda=-1$, $\lambda=i$, $\lambda=-i$

$\lambda=-1 \Rightarrow \quad A+I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{matrix} \to (0,-1,1)$

$\lambda = i \Rightarrow \quad A-iI = \begin{pmatrix} 1-i & -1 & -1 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 1 & 0 & -1-i \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + (-1-i)x_2 = 0 \\ x_1 + (-1-i)x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (2, 1-i, 1-i)$

$\lambda=-i$ (por ser conjugado) $\Rightarrow (2, 1+i, 1+i)$

Forma de Jordan (compleja) y matriz de paso

$J_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & i & \\ & & -i \end{pmatrix} \qquad P_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1-i & 1+i \\ 1 & 1-i & 1+i \end{pmatrix}$

Forma de Jordan (real) y matriz de paso

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & 1 \\ & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Como la forma de Jordan real tiene ese aspecto $\Rightarrow$ A es ortogonal y por tanto corresponde a un movimiento que resulta una simetría respecto del plano de vector normal $(0,-1,1)$, combinado con un giro de ángulo -90° sobre ese plano

---

2 a) Ortonormalizamos la base $\{1, t\}$ de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$

$\bar{y}_1 = 1$, $\bar{y}_2 = t + \alpha \cdot 1$ con $\langle \bar{y}_1, \bar{y}_2 \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (t+\alpha)\,dt = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$

Base ortogonal: $\{1, t\}$; Base ortonormal: $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \right\}$

b) Calculamos T en esta base: $T\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^1 \left[\left(\lambda - \frac{1}{2}t\right) \cdot 0 + (t+2\lambda)\frac{1}{\sqrt{2}} \right] ds =$

$$= (t+2\lambda)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$T\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\right) = \int_0^1 \left[\left(\lambda - \frac{1}{2}t\right)\sqrt{\frac{3}{2}} + (t+2\lambda)\sqrt{\frac{3}{2}}\,s \right] ds$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\lambda - \cancel{\frac{1}{2}t} + \cancel{\frac{1}{2}t} + \lambda \right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, 2\lambda$$

Escribimos el resultado como combinación lineal de la base:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(t+2\lambda\right) = \alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \beta\sqrt{\frac{3}{2}}t \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \alpha = 2\lambda \rightarrow \left(2\lambda, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$2\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda = \alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \beta(t-1/2) \Rightarrow \beta = 0, \quad \alpha = 2\sqrt{3}\lambda \rightarrow \left(2\sqrt{3}\lambda, 0\right)$$

Matriz de T en la base ortonormal: $\begin{pmatrix} 2\lambda & 2\sqrt{3}\lambda \\ 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$

Para que T sea autoadjunta la matriz tiene que ser simétrica $\Rightarrow \lambda = \frac{1}{6}$

c) Dado que tenemos una base ortonormal, el polinomio buscado, que corresponde a la proyección de t^2-1 sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$ se calcula:

$$P(t^2-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, t^2-1 \right\rangle + \sqrt{\frac{3}{2}}t\cdot\left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}t, t^2-1 \right\rangle$$

$$= -\frac{2}{3}$$

4 La matriz de la forma cuadrática dada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 1, \ \Delta_2 = 4-\alpha^2 \qquad \Delta_3 = -\alpha^2$$

a) No puede ser definida negativa pues $\Delta_1 > 0$.

b) Para ser semidefinida positiva, $\Delta_3 \geq 0 \Rightarrow \alpha = 0$

c) Para $\alpha \neq 0$, como $\Delta_3 < 0$ y no es definida negativa tiene que haber autovalores con signo distinto. $\Rightarrow$ Es indefinida $\forall \alpha \neq 0$

5

$$\left.\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n &= 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} u_{n-2} \\ v_{n-2} \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la forma de Jordan de $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Autovalores: $|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0 \rightarrow$

$\lambda = 6, \ \lambda = -2$

Autovectores: $\lambda = 6 \rightarrow -3x_1 + 3x_2 = 0 \rightarrow (1,1)$

$\lambda = -2 \rightarrow 5x_1 + 3x_2 = 0 \rightarrow (-3,5)$

Teniendo en cuenta que $(u_0, v_0) = (-2,6) = (1,1) + (-3,5)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= 6^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)^n \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Luego $\begin{cases} u_n = 6^n - 3 \cdot (-2)^n \\ v_n = 6^n + 5 \cdot (-2)^n \end{cases}$

Soluciones Examen Parcial de Álgebra (2º Parcial) **21 de Mayo de 2010**

1. **[1.5 ptos.]** Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
de la que se sabe que $\lambda = 2$ es un autovalor de multiplicidad 5,
$$E_1(2) = L((1,0,0,1,1),(0,1,0,1,1),(0,0,1,-1,0))$$
y $(A-2I)^2 = 0$. Calcula **razonadamente** la forma de Jordan de A y una matriz de paso.

Solución: Puesto que A es de dimensión 5 y $\lambda = 2$ es autovalor de multiplicidad 5 no puede haber más autovalores. Como la multiplicidad geométrica de $\lambda = 2$ es $\dim(E_1(2)) = 3$, la matriz no es diagonalizable. Estudiamos el espacio $E_2(2)$, que, dado que $(A-2I)^2 = 0$, tiene dimensión 5 así que se trata del espacio ambiente $\mathbb{R}^5$ y es además el subespacio máximo. Como base de $E_2(2)$ escogemos cualquier base de $\mathbb{R}^5$, pero por comodidad, consideramos una que contenga a los vectores de $E_1(2)$, por ejemplo:
$$\{(1,0,0,1,1),(0,1,0,1,1),(0,0,1,-1,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$$
Con estos datos tenemos que $q_0 = 0$, $q_1 = 3$, $q_2 = 5$ y por tanto $p_1 = 3$ y $p_2 = 2$. La partición de multiplicidad es $5 = 3+2$. A esta partición le corresponden 2 cajas de tamaño 2 y 1 de tamaño 1.

Para la matriz de paso, debemos considerar $p_2 = 2$ vectores de $E_2(2)$ que no estén en $E_1(2)$ (los que hemos usado para ampliar a una base de $\mathbb{R}^5$) y a continuación los multiplicamos por la matriz $A-2I$, resultando $(0,1,0,1,1)$ y $(-1,0,0,-1,-1)$. Finalmente, en el nivel $E_1(2)$ completamos con un tercer vector de este espacio (independiente con los otros). Es evidente que podemos coger $(0,0,1,-1,0)$.

$p_2 = 2$	$E_2(-3)$	$(0,0,0,1,0)$	$(0,0,0,0,1)$	
$p_1 = 3$	$E_1(-3)$	$(0,1,0,1,1)$	$(-1,0,0,-1,-1)$	$(0,0,1,-1,0)$

La matrices resultantes son:
$$J = \left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ \hline & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & \\ \hline & & & & 2 \end{array}\right) \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **[1.5 ptos.]** Se supone que la posición de una partícula en el plano en un instante n está determinada por su posición en el instante $n-1$ según las ecuaciones
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

Si en el instante inicial, la partícula se encuentra en el punto (x_0, y_0), con $x_0+y_0 = 1$, estudiar la posición de la partícula cuando $n \to \infty$.

Solución: Si denotamos por

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

tenemos un sistema dinámico del tipo $X_n = AX_{n-1}$, cuya solución es $X_n = A^n X_0$, con $X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$. Para calcular A^n, obtenemos sus autovalores y autovectores, resultando $\lambda = 1$ y $\lambda = -\frac{7}{15}$. En realidad no es necesario calcular los autovalores directamente, pues vemos que se trata de una matriz de Markov (sus columnas suman 1, por lo tanto debe tener algún autovalor 1 y el resto menor que 1). Al tomar límite, sólo nos interesa lo que pasa con el autovalor 1, cuyo autovector asociado es $(5, 6)$, el otro autovector $\mathbf{v_2}$ no nos hace falta calcularlo. Así pues

$$X_n = \alpha \cdot 1^n \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \beta \left(-\tfrac{7}{15}\right)^n \mathbf{v_2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Finalmente, puesto que es un sistema de Markov, la suma de las componentes del vector inicial X_0 debe ser igual a la suma de las componentes del vector final, luego $\alpha = \frac{1}{11}$, y el estado límite es el punto $\left(\frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right)$

3. **[1.5 ptos.]** Encontrar la recta que mejor aproxima a los puntos $(1, 1)$, $(2, 4)$, $(3, 7)$ y $(4, 8)$, mediante el método de los mínimos cuadrados.

   Solución: Buscamos una recta del tipo $y = ax + b$ que satisfaga

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 4 \\ 3a + b = 7 \\ 4a + b = 8 \end{cases}$$

   Puesto que este sistema no tiene solución (está sobredeterminado), buscamos una solución aproximada por mínimos cuadrados. Para ello,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   que resulta

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 20 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{12}{5},\ b = -1$$

4. **[2.5 ptos.]** Se considera $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que uno, dotado del producto escalar:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \int_0^1 p(s)q(s)\, ds,$$

y la aplicación $A : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t] \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$ definida por

$$A(p(t)) = \int_0^1 ((\lambda - t)p'(s) + \lambda p(s))\ ds$$

4.a) Determinar una base ortonormal de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$.

4.b) Hallar los valores de λ tales que la aplicación A sea autoadjunta.

4.c) Hallar el polinomio $p(t) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}[t]$ que mejor aproxima al polinomio t^2 en la norma inducida por el producto escalar dado.

Solución:

4.a) Consideramos la base canónica de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ y la ortonormalizamos mediante Gram-Schmidt. Denotando por $\mathbf{x}_1 = 1$ y $\mathbf{x}_2 = t$, el primer vector será $\mathbf{y}_1 = 1$ y el segundo $\mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 - \alpha \mathbf{y}_1$ con la condición $\langle \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_1 \rangle = 0$. Es decir,

$$\int_0^1 (t - \alpha) \cdot 1\, dt = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

Así pues los vectores 1 y $t - \frac{1}{2}$ son ortogonales, y por tanto

$$\{1, \sqrt{12}(t - \tfrac{1}{2})\}$$

es una base ortonormal.

4.b) Escribimos la matriz de A respecto de esta base ortonormal. Primero calculamos las imágenes de los vectores de la base anterior:

$$A(1) = \lambda, \quad A(\sqrt{12}(t - \tfrac{1}{2}) = \sqrt{12}(\lambda - t)$$

y luego escribimos sus coordenadas respecto de esta base:

$$A(1) = (\lambda, 0),\ A(\sqrt{12}(t - \tfrac{1}{2})) = (\sqrt{12}(\lambda - \tfrac{1}{2}), -1) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \lambda & \sqrt{12}(\lambda - \frac{1}{2}) \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para que sea autoadjunta $\lambda = \frac{1}{2}$

4.c) Nos piden la proyección ortogonal de t^2 sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Usando la base ortogonal sabemos que $\mathcal{P}_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}}(t^2) = \langle t^2, 1 \rangle \cdot 1 + \langle t^2, \sqrt{12}(t - \frac{1}{2}) \rangle \cdot \sqrt{12}(t - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3} + t - \frac{1}{2} = t - \frac{1}{6}$

5. **[1.5 ptos.]** Sea $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal dada por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5.a) Hallar la descomposición polar de A.

5.b) Encuentra la imagen por A del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Haz un dibujo.

Solución:

5.a) Calculamos en primer lugar la aplicación auxiliar $B = A^T A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Como B ya es diagonal, es inmediato calcular $S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Finalmente

$$O = AS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5.b) Es claro que S es una dilatación de tamaño 2 en el eje X y deja igual el eje Y, mientras que O es una rotación de ángulo $\pi/2$. El resultado aplicado al cuadrado $[0,1] \times [0,1]$ es el rectángulo $[-1,0] \times [0,2]$

6. **[1.5 ptos.]**

6.a) Probar que si $\lambda \neq 0$ es autovalor de A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.

6.b) Sea

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Probar que los autovalores de A son reales y negativos.

6.c) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Probar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

Solución:

6.a) Si λ es autovalor de A asociado al autovector $\mathbf{x}$, esto significa $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Multiplicando por A^{-1}

$$A^{-1}A\mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$$

lo que significa que $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}.

6.b) En primer lugar, los autovalores de A son todos números reales porque la matriz es simétrica. Por otro lado, el Teorema de los círculos de Gersghorin nos dice que los autovalores se encuentras en los círculos $C_3(-4)$, $C_4(-6)$, $C_4(-5)$ y $C_3(-4)$, donde $C_r(s)$ denota el círculo de centro s y radio r. Por tanto es evidente que los autovalores son negativos.

6.c) Puesto que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$$

y los vectores son ortonormales, es decir, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$ y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se tiene $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2 \Rightarrow \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{2}$

Examen Final de Álgebra (2º Parcial) **7 de Junio de 2010**

1. **[2 ptos.]** Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
de la que se sabe que $\lambda = 1 + 2i$ es un autovalor de multiplicidad 2,
$$E_1(1+2i) = L((2,0,1+i,0)) \text{ y } (0,i,0,1) \in E_2(1+2i)$$
Calcula **razonadamente** las formas de Jordan compleja y real de A y las correspondientes matrices de paso.

Solución: Como se trata de una matriz real, los autovalores complejos deben venir junto con sus conjugados, de manera que $1 - 2i$ también es autovalor de multiplicidad dos, y no habrá más autovalores.

Puesto que el espacio $\dim(E_1(1+2i)) = 1$ necesitamos ir al espacio $E_2(1+2i)$ que estará generado por los vectores $(2,0,1+i,0)$ y $(0,i,0,1)$ (nótese que son independientes y que $E_1(1+2i) \subset E_2(1+2i)$). Por tanto $E_2(1+2i)$ es el subespacio máximo. La partición de multiplicidad de este autovalor es $2 = 1 + 1$, que corresponde a una caja de orden dos.

Como $\mathbf{v}_2 = (0,i,0,1) \notin E_1(1+2i)$, consideramos el vector $\mathbf{v}_1 = (A - (1+2i)I)\mathbf{v}_2 = (1+i,0,i,0)$, siendo $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ los vectores que aporta este autovalor a la base.

Para el autovalor $1-2i$ se tendrá la misma partición de multiplicidad y los vectores conjugados de los anteriormente obtenidos. Así pues la forma de Jordan compleja y la matriz de paso son
$$J_{\mathbb{C}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1+2i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1-2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2i \end{array}\right) \qquad P_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 1-i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
Para obtener la forma real de Jordan prestamos atención sólo a lo aportado por uno de los autovalores complejos, resultando
$$J_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \qquad P_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **[2 ptos.]** Se considera la sucesión $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_n = 3x_{n-1} - \frac{5}{4}x_{n-2}$, para $n \geq 2$. Demostrar que:
$$x_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(5^n - 1\right), \quad \forall n \geq 0.$$
Solución: Si llamamos $X_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$, entonces podemos reescribir la sucesión del siguiente modo
$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

y llamando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{5}{4} & 3 \end{pmatrix}$ sabemos que $X_n = A^{n-1}X_1$ donde $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculando autovalores y autovectores de A obtenemos $\lambda = \frac{5}{2}$ con autovector asociado $(2,5)$, y $\lambda = \frac{1}{2}$ con autovector asociado $(2,1)$. Puesto que A es diagonalizable, los autovectores obtenidos forman base y podemos escribir

$$X_0 = (0,1) = -\frac{1}{4}(2,1) + \frac{1}{4}(2,5)$$

luego

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^{n-1}X_1 = \left[-\tfrac{1}{4}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4}\left(\tfrac{5}{2}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right]$$

de donde obtenemos que $x_n = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{5}{2}\right)^{n-1} 5 = \frac{1}{2^{n+1}}(-1+5^n)$.

3. **[1.5 ptos.]** Un estudio refleja que el déficit en % respecto del P.I.B. de un determinado país en los últimos cuatro años viene dado por la siguiente tabla:

año	1	2	3	4
déficit (en %)	1	1,5	3	5

3.a) Hallar el ajuste lineal por el método de los mínimos cuadrados.

3.b) ¿Cuál es el déficit esperado en el quinto año?

Solución:

3.a) Buscamos una recta del tipo $y = ax + b$ que satisfaga

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 1{,}5 \\ 3a + b = 3 \\ 4a + b = 5 \end{cases}$$

Puesto que este sistema no tiene solución (está sobredeterminado), buscamos una solución aproximada por mínimos cuadrados. Para ello,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1{,}5 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

que resulta

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 10,5 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 1,35,\ b = -0,75$$

3.b) Para $x = 5$ el valor esperado es $y = 1,35 \cdot 5 - 0,75 = 6$.

4. **[3.5 ptos.]** Sea $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices cuadradas de orden dos dotado del producto escalar siguiente:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4,$$

y consideremos el conjunto de matrices antisimétricas

$$M = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A = -A^T\}$$

4.a) Determinar una base ortonormal de $M^{\perp}$.

4.b) Sea $S = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A = A^T\}$ el conjunto de matrices simétricas y sea $T : S \longrightarrow S$ la aplicación siguiente:
$$T\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_2 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$
¿Es T una aplicación autoadjunta? ¿Es T una aplicación ortogonal? Razona tus respuestas.

4.c) Sea $D = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal. Calcula la proyección ortogonal de D sobre S y la proyección ortogonal de D sobre M.

Solución:

4.a) En primer lugar obtendremos una base de M. Una matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ estará en M si
$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 & -x_3 \\ -x_2 & -x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases}$$
Resolviendo el sistema obtenemos que una base de M es $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. El conjunto $M^{\perp}$ vendrá dado por la matrices tales que
$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow x_2 - x_3 = 0$$
Resolviendo obtenemos las matrices
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
que conforman una base de $M^{\perp}$. Es fácil observar que son ortogonales, y por tanto una base ortonormal será
$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

4.b) Es faćil darse cuenta de que el conjunto S coincide con $M^{\perp}$, luego hemos calculado en el apartado anterior una base ortonormal. Calculamos la matriz de T respecto de esta base, y escribimos sus coordenadas en esa misma base:
$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \quad (0,0,1)$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad (0,1,0)$$
$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \longrightarrow \quad (1,0,0)$$

Luego la matriz de T es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obviamente es autoadjunta pues es simétrica, y es fácil comprobar que $AA^T = I$, luego también es ortogonal.

4.c) Dado que cualquier matriz diagonal D pertenece al conjunto S (pues es combinación lineal de los elementos de su base) es evidente que la proyección ortogonal sobre S es la propia D, y puesto que $M^\perp = S$, obviamente $S^\perp = M$, así que la proyección ortogonal sobre M es la matriz nula.

5. **[1 pto.]** Probar que los vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales si y sólo si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|$

Nótese que

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

y del mismo modo:

$$\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Obviamente ambas expresiones coinciden si y sólo si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$, lo que prueba el enunciado.

Convocatoria Extraordinaria de Álgebra (2º Parcial) **9 de Julio de 2010**

1. **[2 ptos.]** Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & -4 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de la que se sabe que $\lambda = -2$ es un autovalor de multiplicidad 3, $\lambda = 1 - i$ es un autovalor simple y además,

$$E_1(-2) = L((0,1,0,1,1)), \quad E_2(-2) = L((0,0,0,1,0),(0,1,0,0,1)),$$
$$E_3(-2) = L((0,0,0,1,0),(1,-1,0,0,0),(0,1,0,0,1))$$
$$E_1(1-i) = L((0,0,1,-1,-i))$$

Calcula **razonadamente** las formas de Jordan real y compleja de A y las correspondientes matrices de paso.

Solución: Como se trata de una matriz real, los autovalores complejos deben venir junto con sus conjugados, de manera que $1+i$ también es autovalor (simple) y $E_1(1+i) = L(0,0,1,-1,i)$. Como son ambos autovalores simples y nos dan sus autovectores asociados, no hay nada más que hacer.

Para el autovalor -2 está claro que $q_1 = 1$, $q_2 = 2$ y $q_3 = 3$, siendo $E_3(-2)$ el subespacio máximo. Así $p_1 = p_2 = p_3 = 1$ y la partición de multiplicidad es $3 = 1+1+1$ que corresponde a una caja de tamaño tres. La tabla de espacios queda

$p_3 = 1$	$E_3(-2)$	$(1,-1,0,0,0)$
$p_2 = 1$	$E_2(-2)$	$(0,0,0,-1,0)$
$p_1 = 1$	$E_1(-2)$	$(0,-1,0,-1,-1)$

y la forma de Jordan compleja y la matriz de paso son:

$$J_{\mathbb{C}} = \left(\begin{array}{ccc|c|c} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1-i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1+i \end{array}\right) \qquad P_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -i & i \end{pmatrix}$$

Para obtener la forma real de Jordan prestamos atención sólo a lo aportado por uno de los autovalores complejos, resultando

$$J_{\mathbb{C}} = \left(\begin{array}{ccc|cc} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad P_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. **[2 ptos.]** Se considera la sucesión recurrente $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$, para $n \geq 2$. Escríbela como un sistema dinámico bidimensional y prueba que:

$$x_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right), \quad \forall n \geq 0.$$

Solución: Si llamamos $X_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$, entonces podemos reescribir la sucesión del siguiente modo

$$\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-2} \\ x_{n-1} \end{pmatrix}$$

y llamando $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sabemos que $X_n = A^{n-1}X_1$ donde $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculando autovalores y autovectores de A obtenemos $\lambda = 2$ con autovector asociado $(1, 2)$, y $\lambda = -1$ con autovector asociado $(1, -1)$. Puesto que A es diagonalizable, los autovectores obtenidos forman base y podemos escribir

$$X_0 = (1, 1) = \frac{2}{3}(1, 2) + \frac{1}{3}(1, -1)$$

luego

$$X_n = \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = A^{n-1}X_1 = \left[\tfrac{2}{3}2^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3}(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$$

de donde obtenemos que $x_n = \frac{2}{3}2^{n-1} \cdot 2 + \frac{1}{3}(-1)^{n-1} \cdot (-1) = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$.

3. **[2 ptos.]** Resolver de forma aproximada el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x_1 - x_3 & = & 1 \\ x_1 + x_2 & = & 0 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 & = & 1 \end{array}\right\}$$

Solución: Si consideramos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

para resolver de forma aproximada el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ necesitamos calcular $\mathcal{P}_{\mathrm{Im}(A)}(\mathbf{b})$, es decir, la proyección ortogonal de $\mathbf{b}$ sobre el espacio $\mathrm{Im}(A)$, que está generado por las columnas de A. Una base de este espacio es $\{(0, 1, -1), (-1, 0, -2)\}$. De modo que buscamos un vector

$$\mathbf{y} = \alpha(0, 1, -1) + \beta(-1, 0, -2)$$

tal que $\mathbf{b} - \mathbf{y} \in \mathrm{Im}(A)^{\perp}$. Es decir,

$$\begin{array}{l} \langle (1, 0, 1) - \alpha(0, 1, -1) - \beta(-1, 0, -2), (0, 1, -1) \rangle = 0 \\ \langle (1, 0, 1) - \alpha(0, 1, -1) - \beta(-1, 0, -2), (-1, 0, -2) \rangle = 0 \end{array} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{6}, \ \beta = -\frac{2}{3}$$

luego la proyección es $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{7}{2})$. Resolviendo el sistema (que resulta compatible indeterminado), para cada $t \in \mathbb{R}$ tenemos una solución aproximada de la forma $(t, \frac{1}{6} - t, -\frac{2}{3} + 2t)$.

4. **[3 ptos.]** Sea $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[t]$ el conjunto de polinomios en la variable t de grado menor o igual que tres dotado del producto escalar siguiente:

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p_0q_0 + p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3,$$

si

$$p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3, \quad q(t) = q_0 + q_1t + q_2t^2 + q_3t^3$$

Consideremos el conjunto

$$M = \{p(t) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[t] : \int_{-1}^{1} p(t)\,dt = 0\}$$

4.a) Determinar una base ortonormal de M.

4.b) Determina una base de $M^{\perp}$.

4.c) Sea $T : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[t] \longrightarrow \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[t]$ la aplicación siguiente:

$$T(p(t)) = p(t) - \lambda p'(t)$$

Calcular λ para que T sea una aplicación autoadjunta

4.d) Sea $q(t) = 1 + t$. Calcula la proyección ortogonal de $q(t)$ sobre M.

Solución:

4.a) Dado un polinomio $p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3$, éste estará en M si

$$\int_{-1}^{1} \left(p_0 + p_1t + p_2t^2 + p_3t^3\right)\,dt = 0 \Rightarrow 2p_0 + \frac{2}{3}p_2 = 0$$

que corresponde a un sistema de ecuaciones implícitas de M. Resolviendo (usando como parámetros p_0, p_1, p_3) se tiene

$$(1, 0, -3, 0) \to 1 - 3t^2, \quad (0, 1, 0, 0) \to t, \quad (0, 0, 0, 1) \to t^3$$

Luego una base de M es $\{1 - 3t^2, t, t^3\}$. Se comprueba fácilmente que esta base es ortogonal, de modo que sólo hay que normalizarla para obtener una base ortonormal, que en este caso es

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}(1 - 3t^2), t, t^3\right\}$$

4.b) $M^{\perp}$ está generado por los vectores que satisfacen:

$$\langle p(t), 1 - 3t^2\rangle = 0, \quad \langle p(t), t\rangle = 0, \langle p(t), t^3\rangle = 0$$

resultando el sistema de ecuaciones implícitas

$$p_0 - 3p_2 = 0, \quad p_1 = 0, \quad p_3 = 0$$

Una base estará formada por el polinomio $3 + t^2$.

4.c) Para calcular la matriz de T usamos la base canónica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[t]$, que con el producto escalar dado es ortonormal. Así

$$T(1) = 1,\ T(t) = t - \lambda,\ T(t^2) = t^2 - 2\lambda t,\ T(t^3) = t^3 - 3\lambda t^2$$

y la matriz es

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que será autoadjunta si $\lambda = 0$.

4.d) Como es habitual, buscamos un polinomio de M de la forma

$$\alpha(1 - 3t^2) + \beta t + \gamma t^3$$

tal que $1 + t - \alpha(1 - 3t^2) - \beta t - \gamma t^3$ sea ortogonal a M, es decir

$$\left.\begin{array}{c} \langle 1 + t - \alpha(1 - 3t^2) - \beta t - \gamma t^3, 1 - 3t^2\rangle = 0 \\ \langle 1 + t - \alpha(1 - 3t^2) - \beta t - \gamma t^3, t\rangle = 0 \\ \langle 1 + t - \alpha(1 - 3t^2) - \beta t - \gamma t^3, t^3\rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{10},\ \beta = 1, \gamma = 0$$

La proyección es $\frac{1}{10}(1 - 3t^2) + t$.

5. **[1 pto.]** Sea A una matriz ortogonal (es decir, $A^{-1} = A^T$) con autovalor λ. Probar que $\frac{1}{\lambda}$ también es autovalor de A.

Solución: Sabemos que si λ es autovalor de A, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^{-1}, pero como A es ortogonal, $A^{-1} = A^T$. Luego $\frac{1}{\lambda}$ es autovalor de A^T, y como A y A^T tienen los mismos autovalores, entonces $\frac{1}{\lambda}$ es también autovalor de A.

Álgebra – Soluciones – Grados de Ingeniería Industrial **31 de enero de 2011**

1. [**1 pto.**] Encontrar la forma polar del número complejo $z = \left(\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}$. Determina el signo de $\mathrm{Re}(z)$ y $\mathrm{Im}(z)$.

   Solución:

   Calculamos el módulo y el argumento de $\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$

   $$\left|\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 5, \quad \arg\left(\frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{\pi}{3}$$

   (nótese que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$). Así pues $z = 5^{10}e^{i\frac{10\pi}{3}} = 5^{10}e^{i\frac{4\pi}{3}}$ que se encuentra en el tercer cuadrante, es decir $\mathrm{Re}(z) < 0$ y $\mathrm{Im}(z) < 0$.

2. [**1.5 ptos.**] Se considera el sistema de ecuaciones

   $$\begin{cases} x - 2y + z = -2 \\ -x + y + az = 1 \\ 2x + ay + 4z = -2 \end{cases}$$

   2.a) Discutir el sistema en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

   2.b) Para $a = -3$, encontrar una solución aproximada del sistema mediante el método de los mínimos cuadrados.

   Solución:

   2.a) Está claro que el rango de la matriz de coeficientes es mayor o igual que dos (usando las dos primeras filas y columnas). Si calculamos su determinante:

   $$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & a \\ 2 & a & 4 \end{vmatrix} = -(a+2)(a+3)$$

   Luego si $a \neq -2$ ó $a \neq -3$ el rango de la matriz de coeficientes es tres (y por tanto el de la ampliada también), luego se trata de un sistema compatible determinado.

   Si $a = -2$, orlando las dos primeras filas y columnas con la columna del término independiente, el rango es dos, luego se trata de un sistema compatible indeterminado.

   Finalmente, si $a = -3$, orlando del mismo modo resulta rango tres, y por tanto un sistema incompatible.

   2.b) Para resolver por mínimos cuadrados basta considerar el sistema

   $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   es decir,

   $$\begin{cases} 6x - 9y + 12z = -7 \\ -9x + 14y - 17z = 11 \\ 12x - 17t + 26z = -13 \end{cases} \quad \Rightarrow \left(\frac{1}{3} - 5z, 1 - 2z, z\right)$$

3. **[1.5 ptos.]** Encontrar la matriz respecto de la base canónica de la simetría con respecto al plano de ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Solución:

En primer lugar elegimos unos vectores que formen base y que sean fáciles de transformar. Para ello tomamos dos vectores independientes del plano $x_1 - x_2 + x_3 = 0$, por ejemplo, $(1,1,0)$ y $(1,0,-1)$ y un vector perpendicular a éste, es decir, de su ortogonal: $(1,-1,1)$. Ahora sabemos que si denotamos por f a la simetría, por $\mathcal{B}$ a la base formada por los vectores $\{(1,1,0),(1,0,-1),(1,-1,1)\}$ y por $\mathcal{B}_c$ a la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{array}{r} f(1,1,0) = (1,1,0) \\ f(1,0,-1) = (1,0,-1) \\ f(1,-1,1) = (-1,1,-1) \end{array} \Rightarrow A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente hacemos un cambio de base para obtener la matriz $C = M_{\mathcal{B}_c}(f)$, ayundándonos del diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}_c \arrow[d, "I"] \\ \mathcal{B}_c \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{B}_c \end{tikzcd}$$

donde C es la matriz buscada, I la matriz identidad y P la matriz de cambio de base de la canónica a $\mathcal{B}$. Así,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

4. **[1.5 ptos.]** Sea $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

de la que se sabe que $\lambda = -2$ es un autovalor de multiplicidad 4,

$$E_1(-2) = L((1,0,0,1),(0,1,0,1)) \text{ y } E_2(-2) = L((1,0,0,1),(0,1,0,1),(1,0,0,0))$$

Calcula **razonadamente** la forma de Jordan de A y una matriz de paso.

Solución:

Como $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ y $\lambda = -2$ es un autovalor de multiplicidad 4 ya no hay más autovalores. Puesto que $\dim(E_1(-2)) = 2$ y $\dim(E_2(-2)) = 3$ está claro que $\dim(E_3(-2)) = 4$ y éste es el subespacio máximo. Además, como el espacio ambiente es $\mathbb{R}^4$, $E_3(-2) = \mathbb{R}^4$. La partición de multiplicidad para el autovalor es $4 = 2 + 1 + 1$. Para construir la tabla de subespacios consideramos:

$p_3 = 1$	$E_3(-2)$	$(0,0,1,0)$
$p_2 = 1$	$E_2(-2)$	$(2,0,0,1)$
$p_2 = 2$	$E_1(-2)$	$(1,1,0,2)$, $(1,0,0,1)$

donde $(0,0,1,0)$ ha sido escogido en $\mathbb{R}^4 \backslash E_2(-2)$,

$$(2,0,0,1)^T = (A+2I)(0,0,1,0)^T, \quad (1,1,0,2)^T = (A+2I)(2,0,0,1)^T$$

y $(1,0,0,1)$ ha sido escogido en $E_1(-2)$, independiente de $(1,1,0,2)$.

La tabla de espacios nos dice que hay una caja de tamaño 3 y otra de tamaño 1, y la forma de Jordan y la matriz de paso son

$$J = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **[1 pto.]** En un experimento de laboratorio con ratones, éstos se encuentran ante dos posibles caminos A y B. Si el ratón escoge el camino A recibe como recompensa queso, mientras que si escoge el camino B, recibe, además de queso, una descarga eléctrica. Los ratones aprenden deprisa, de manera que si un día escogen el camino A, el 90 % vuelve a escoger A al día siguiente, mientras que si escogen B, el 70 % va a A al día siguiente. ¿Cuál es el porcentaje de ratones que irá por cada camino tras un tiempo suficientemente largo?

Solución:

Llamamos x_n e y_n a la probabilidad que tiene el ratón de haber escogido el camino A ó B, respectivamente, en el día n. Así pues

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}9x_n + 0{,}7y_n \\ y_{n+1} = 0{,}1x_n + 0{,}3y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}7 \\ 0{,}1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Obviamente se trata de un sistema de Markov, de modo que la tendencia del mismo dependerá del autovector estacionario, esto es, el autovector asociado al autovalor 1. Calculando $\ker(A - I)$, con A la matriz del proceso,

$$\ker(A - I) = \{(7,1)\}$$

Por tanto el estado límite será un múltiplo de este vector. Como estamos considerando probabilidades, éste será el vector $(\frac{7}{8}, \frac{1}{8})$, que determina las probabilidades de estar en los caminos A y B pasado suficiente tiempo.

6. **[2 ptos.]** Se considera $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos, dotado del producto escalar:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

y la aplicación $T : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ definida por

$$T(p(x)) = p(x) + p(-x)$$

6.a) Halla la matriz de T respecto de la base canónica de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

6.b) Calcular una base de $\ker(T)$, de $\operatorname{Im}(T)$ y de $\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T)$.

6.c) Determinar una base ortogonal de $\ker(T)^{\perp}$.

6.d) Hallar la proyección ortogonal sobre $\ker(T)$ del polinomio x^2.

Solución:

6.a) Calculamos

$$\begin{array}{r} T(1)=2 \\ T(x)=0 \\ T(x^2)=2x^2 \end{array} \quad \Rightarrow T=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

6.b) Obviamente, una base de $\mathrm{Im}(T)$ está formada por $\{2, 2x^2\}$, mientras que $\ker(T)$ se obtiene resolviendo el sistema $2x_1 = 0$, $2x_3 = 0$, cuya base será $(0, 1, 0)$, esto es, el polinomio x.

Para obtener $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T)$ basta observar que $\ker(T) + \mathrm{Im}(T) = \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (pues la unión de las bases tiene claramente dimensión 3), luego por la fórmula de la dimensión $\dim(\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T)) = 0$ y por tanto $\ker(T) \cap \mathrm{Im}(T) = \{0\}$.

6.c) Para determinar $\ker(T)^\perp$ buscamos polinomios $p(x) = x_1 + x_2x + x_3x^2$ tales que su producto escalar con una base de $\ker(T)$, esto es x, sea cero:

$$\int_{-1}^{1} x(x_1 + x_2x + x_3x^2)\, dx = \frac{2}{3}x_2 = 0 \Rightarrow \text{Base: } \{1, x^2\}$$

Para ortogonalizar estos vectores usamos el método de Gram-Schmidtz:

$$\mathbf{y}_1 = 1, \quad \mathbf{y}_2 = x^2 - \alpha, \text{ tal que } \langle 1, x^2 - \alpha \rangle = 0$$

esto es,

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - \alpha)\, dx = \frac{2}{3} - 2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

y una base ortogonal será $\{1, x^2 - \frac{1}{3}\}$.

6.d) La proyección de x^2 sobre $\ker(T) = L(\{x\})$ será un vector de la forma αx, tal que $x^2 - \alpha x$ sea ortogonal a $\ker(T)$, esto es,

$$\langle x^2 - \alpha x, x \rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} (x^2 - \alpha x)x\, dx = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

de modo que la proyección es el polinomio 0.

7. **[1.5 ptos.]**

7.a) Se sabe que la forma de Jordan de una matriz es

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Halla las dimensiones de todos los espacios $E_j(\lambda)$, para todos los autovalores de la matriz.

7.b) Partiendo del vector inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (0,0,0,0)$, escribe las dos primeras iteraciones del método de Jacobi para el sistema $J\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde J es la matriz del apartado anterior y $\mathbf{b} = (1,2,3,4)^T$.

7.c) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores ortonormales en $\mathbb{R}^n$. Probar que $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| = \sqrt{2}$.

Solución:

7.a) Como el autovalor -3 aparece en una caja de tamaño 3, su multiplicidad es 3 y su partición debe ser $3 = 1+1+1$, es decir

$$\dim(E_1(-3)) = 1, \quad \dim(E_2(-3)) = 2, \quad \dim(E_3(-3)) = 3$$

Por otro lado, es evidente que $\dim E_1(2) = 1$.

7.b) El método de Jacobi resuelve el sistema de la forma

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{3}(1 - x_2^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{1}{3}(2 - x_3^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = -1 \\ x_4^{(k+1)} = 2 \end{cases}$$

luego $\mathbf{x}^{(1)} = (-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1, 2)$ y $x^{(2)} = (-\frac{5}{9}, -1, -1, 2)$

7.c) Puesto que $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle$ y

$$\langle \mathbf{u}-\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 2$$

pues los vectores son ortogonales, se obtiene lo buscado.

Álgebra – **Soluciones** – Plan antiguo **31 de enero de 2011**

1. [**1.5 ptos.**] Dados los subespacios L_1 y L_2 donde L_1 es el subespacio generado por los vectores $(1,-1,2,1)$, $(1,-2,0,-1)$ y $(2,-3,2,0)$ y L_2 tiene por ecuaciones $x_1 - x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, determinar la dimensión y una base de los subespacios $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$. ¿Es cierto que $\mathbb{R}^4 = L_1 \oplus L_2$?

   Solución:

   En primer lugar vemos si los vectores que generan L_1 son independientes. Calculamos

   $$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

   luego $\dim(L_1) = 2$ y una base está formada por $\{(1,-1,2,1),(1,-2,0,-1)\}$.

   Para L_2, puesto que la matriz de coeficientes del sistema tiene rango dos, resolvemos usando x_3 y x_4 como parámetros, para obtener los vectores $(0,\frac{1}{2},1,0)$ y $(1,-\frac{1}{2},0,1)$, luego $\dim(L_2) = 2$ y una base está formada por $\{(0,1,2,0),(2,-1,0,2)\}$.

   Para calcular $L_1 + L_2$ estudiamos

   $$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4$$

   luego $\dim(L_1 + L_2) = 4$ y por tanto $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^4$. Por la fórmula de la dimensión:

   $$\dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2)$$

   se obtiene de inmediato que $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$, de modo que $\mathbb{R}^4 = L_1 \oplus L_2$.

2. [**2.5 ptos.**] Considera la aplicación lineal

   $$\begin{array}{rrcl} A: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \mathbf{x} & \longmapsto & A(\mathbf{x}) = (2x_1 + 3x_2 + 4x_3, x_1 + x_3, -x_1 - x_3) \end{array}$$

   y el producto escalar habitual en $\mathbb{R}^3$.

   2.a) Calcula la matriz de la aplicación adjunta de A respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   2.b) Calcula una base del $\ker(A)$.

   2.c) Calcula una base ortonormal del $\ker(A)^\perp$.

   2.d) Calcula la proyección ortogonal del vector $(1,1,1)$ sobre el espacio $\text{Im}(A)$.

   2.e) Calcula una solución aproximada del sistema

   $$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   por el método de los mínimos cuadrados.

Solución:

2.a) Puesto que estamos considerando el producto escalar habitual y la base canónica es ortonormal, para calcular la matriz de la aplicación adjunta de A bastará trasponer la matriz de A respecto de la base canónica. Es inmediato ver que tal matriz es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2.b) Puesto que el rango$(A) = 2$, entonces $\dim(\ker(A)) = 1$ y una base se obtendrá resolviendo el sistema (previa eliminación de las ecuaciones redundantes, por ejemplo, la tercera):

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Base de } \ker(A) = \{(-1, -\frac{2}{3}, 1)\}$$

2.c) $\ker(A^\perp$ está generado por las soluciones del sistema $-x_1 - \frac{2}{3}x_2 + x_3 = 0$, de manera que $\dim(\ker(A)^\perp) = 2$ y una base se obtendrá resolviendo la ecuación anterior, cuyas soluciones independientes son $\{(1,0,1), (0,1,\frac{2}{3})\}$.

Ortogonalizamos estos vectores mediante Gram-Schmidtz:

$$\mathbf{y}_1 = (1,0,1), \ \mathbf{y}_2 = (0,1,\frac{2}{3}) - \alpha(1,0,1), \text{ tal que } \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \rangle = 0$$

resultando $\mathbf{y}_2 = (-\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$. Finalmente, dividimos por la norma para obtener una base ortonormal

$$\{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}), (-\tfrac{1}{\sqrt{11}}, \tfrac{3}{\sqrt{11}}, \tfrac{1}{\sqrt{11}})\}$$

2.d) Puesto que el espacio $\mathrm{Im}(A)$ está generado por los vectores $(2,1,-1)$ y $(3,0,0)$, la proyección ortogonal será una combinación lineal de estos dos vectores, es decir

$$\mathcal{P}_{\mathrm{Im}(A)}(1,1,1) = \alpha(2,1,-1) + \beta(3,0,0) = (2\alpha + 3\beta, \alpha, -\alpha)$$

de manera que $(1,1,1) - (2\alpha + 3\beta, \alpha, -\alpha) \perp \mathrm{Im}(A)$, es decir

$$\begin{cases} (1 - 2\alpha - 3\beta, 1 - \alpha, 1 + \alpha) \cdot (2,1,-1) = 0 \Rightarrow 3\alpha + 3\beta = 1 \\ (1 - 2\alpha - 3\beta, 1 - \alpha, 1 + \alpha) \cdot (3,0,0) = 0 \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 1 \end{cases}$$

Luego $\alpha = 0$ y $\beta = \frac{1}{3}$, y por tanto la proyección es el vector $(1,0,0)$.

2.e) Para resolver por mínimos cuadrados usamos la proyección obtenida en el apartado anterior y resolvemos el sistema $A(\mathbf{x}) = (1,0,0)^T$ cuya solución es $(-t, \frac{1-2t}{3}, t)$.

3. **[1.5 ptos.]** Se consideran los espacios $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, polinomios de grado menor o igual que tres, y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, matrices cuadradas de orden dos. Sea $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por:

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = \begin{pmatrix} a & b - c \\ c - d & 0 \end{pmatrix}$$

Se pide:

3.a) Matriz de f respecto de las bases canónicas de ambos espacios.

3.b) Dadas las bases de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{B}_1 = \{1, 1+x, 1+x+x^2, 1+x+x^2+x^3\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

respectivamente, hallar la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

3.c) Decidir si f es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

Solución:

3.a) Calculemos

$$f(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad f(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f(x^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

de modo que la matriz respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3.b) Denotando por $\mathcal{B}_{\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}}$ la base canónica de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ y por $\mathcal{B}_{\mathcal{M}_2}$ la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, podemos considerar el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_{\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}} \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}_{\mathcal{M}_2} \arrow[d, "P_2"] \\ \mathcal{B}_1 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{B}_2 \end{tikzcd}$$

donde C es la matriz buscada, P_1 la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a la canónica de $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ y P_2 la matriz de cambio de base de la canónica de $\mathcal{M}_2$ a $\mathcal{B}_2$. Así pues, $C = P_2 A P_1$, donde

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

3.c) Puesto que se trata de un endomorfismo, bastará averiguar el valor de $\det(A) = 0$, luego la aplicación no es ni inyectiva ni sobreyectiva, y por tanto no es biyectiva.

4. **[2 ptos.]** Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.a) Estudiar para qué valores de α la matriz es diagonalizable.

4.b) Para $\alpha = 1$, encontrar la forma canónica de Jordan.

Solución:

4.a) El polinomio característico de A es $(\lambda - 2\alpha)^2(\lambda - \alpha)(\lambda - (\alpha + 1))$.

Está claro que si $\alpha = 0$, entonces los autovalores son $\lambda = 0$ triple y $\lambda = 1$ simple. Si $\alpha = 1$, entonces $\lambda = 2$ es autovalor triple y $\lambda = 1$ es simple. Mientras que si $\alpha \neq 0, 1$, entonces $\lambda = 2\alpha$ es un autovalor doble, $\lambda = \alpha$ y $\lambda = \alpha + 1$ son simples.

Para estudiar si la matriz es o no diagonalizable nos centramos en los autovalores múltiples. Si $\alpha = 0$, debemos comprobar $\dim(E_1(0))$, esto es, estudiamos rango(A), que en este caso es 2, luego $\dim(E_1(0)) = 2$ y la matriz no es diagonalizable.

Para $\alpha = 1$, miramos $\dim(E_1(2))$ a través del rango$(A - 2I)$, que también es 2, luego $\dim(E_1(2)) = 2$ y tampoco es diagonalizable.

Finalmente, si $\alpha \neq 0, 1$, miramos $\dim(E_1(2\alpha))$ estudiando rango$(A - 2\alpha I)$ que resulta 3, y por tanto $\dim(E_1(2\alpha)) = 1$, y la matriz no es diagonalizable.

4.b) Ya hemos visto que para $\alpha = 1$ el autovalor triple es $\lambda = 2$ y $\dim(E_1(2)) = 2$, por tanto $\dim(E_2(2)) = 3$ y es el subespacio máximo. La partición de multiplicidad para este autovalore es $3 = 2 + 1$ a la que le corresponde una caja de tamaño 2 y una de tamaño 1. La forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **[1.5 ptos.]** Se dan las sucesiones recurrentes

$$\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n &= 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{aligned}$$

con $u_0 = 2$ y $v_0 = 0$. Hallar u_n y v_n en función de n.

Solución:

Tenemos un sistema dinámico de la forma:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Calculamos autovalores y autovectores de la matriz del sistema, obteniéndose autovalores 6 y -2 y autovectores asociados $(1, 1)$ y $(-3, 5)$, respectivamente. Ahora calculamos α y β tales que

$$(2, 0) = \alpha(1, 1) + \beta(-3, 5) \Rightarrow \alpha = \frac{5}{4},\ \beta = -\frac{1}{4}$$

de manera que

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{4} 6^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}(-2)^n \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_n = \frac{5}{4}6^n + \frac{3}{4}(-2)^n \\ v_n = \frac{5}{4}6^n - \frac{5}{4}(-2)^n \end{cases}$$

6. **[1 pto.]**

6.a) Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que tiene un autovalor igual a 3 y un autovector asociado $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$. Calcula el valor de la suma de todos los elementos de A.

6.b) Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores ortogonales en $\mathbb{R}^n$. Probar que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|$.

Solución:

6.a) Como $\mathbf{v} = (1, 1, \ldots, 1)$ es un autovector asociado al autovalor 3, $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$. Ahora bien, $A\mathbf{v}$ nos proporciona un vector cuyas componentes son iguales a la suma de los elementos de cada fila de A, por tanto, cada fila de A suma 3. Luego la suma de todos los elementos de A es $3n$.

6.b) Puesto que $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle$ y $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\
\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle
\end{aligned}$$

Como los vectores son ortogonales $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, de donde se tiene la igualdad.

Soluciones – Álgebra – Grados de Ingeniería Industrial **24 de junio de 2011**

1. **[1 pto.]** Escribir en forma cartesiana el número complejo $\dfrac{(1-\sqrt{3}i)^8}{(\sqrt{3}+i)^2}$

Solución: Escribimos numerador y denominador en forma polar:

$$1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}, \qquad \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$

Luego

$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^8}{(\sqrt{3}+i)^2} = \frac{2^8 e^{-\frac{8\pi}{3}i}}{2^2 e^{\frac{2\pi}{6}i}} = 2^6\frac{e^{-\frac{2\pi}{3}i}}{e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2^6 e^{-\pi i} = -64$$

2. **[1 pto.]** Evaluar el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ n & 0 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & 0 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ n & 0 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & 0 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 0 & 1 \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[j=2,\dots,n]{F_j-F_1} \begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 1-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}n!$$

3. **[2.25 ptos.]** Sea $\mathcal{B}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y consideremos el conjunto

$$\mathcal{B}' = \{(-2,1,5),(-3,3,4),(-1,0,3)\}$$

3.a) Demostrar que $\mathcal{B}'$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

3.b) Halla el conjunto de vectores que tiene las mismas coordenadas respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

3.c) Si $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal definida por

$$f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, x_2+x_3, x_1-x_3)$$

halla las siguientes matrices: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$, $M_{\mathcal{B}}(f)$, $M_{\mathcal{B}'}(f)$ y $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f)$.

3.d) Dado el subespacio $L=\{x_1+x_3=0\}$ calcular la dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas de $f(L)$.

Solución:

3.a) Puesto que estamos en $\mathbb{R}^3$ que tiene dimensión 3, para probar que $\mathcal{B}'$ es base, bastará comprobar que los vectores son l.i. Calculando el rango de la matriz

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ -3 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3$$

se obtiene la independencia.

3.b) Si calculamos la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, ésta es

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

De modo que los vectores que tienen las mismas coordenadas en ambas bases son aquellos que verifican:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -3x_1 - 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right.$$

Se observa que la matriz del sistema tiene rango 2, luego resolviendo las dos primeras ecuaciones, usando x_1 como parámetro, se obtiene que el conjunto de vectores con las mismas coordenadas en ambas bases es $\alpha(2, -1, -3)$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

3.c) La matriz más sencilla de todas será $M_{\mathcal{B}}(f)$, pues estamos usando la base canónica en el espacio origen y final. Así,

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El resto de matrices se obtiene a partir de esta usando cambios de base:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

3.d) Obtenemos en primer lugar una base de L, resolviendo el sistema. Se tiene que $L = L((1, 0, -1), (0, 1, 0))$, por tanto, $f(L)$ es el espacio generado por $f(1, 0, -1)$ y $f(0, 1, 0)$, es decir:

$$f(L) = L((0, -1, 2), (1, 1, 0))$$

Puesto que estos dos vectores son independientes, $\dim(f(L)) = 2$, y un sistema de ecuaciones implícitas se puede obtener mediante:

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

4. **[1.5 ptos.]** Sea $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ la aplicación cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

de la que se sabe que $\lambda = 4$ es un autovalor de multiplicidad 5,

$$E_1(4) = L((1, -1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$$
$$E_2(4) = L((1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1))$$

Calcula **razonadamente** la forma de Jordan de A y una matriz de paso.

Solución:

Puesto que estamos en $\mathbb{R}^5$, $\dim(E_1(4)) = 3$, $\dim(E_2(4)) = 4$ y el autovalor tiene multiplicidad 5, está claro que $\dim(E_3(4)) = 5 \Rightarrow E_3(4) = \mathbb{R}^5$ y no hay más autovalores.

Puesto que $E_3(4)$ tiene dimensión igual a la multiplicidad del autovalor, es el subespacio máximo, y a partir de aquí podemos construir la tabla de espacios, teniendo en cuenta que $q_1 = 3$, $q_2 = 4$, $q_3 = 5$; y por tanto, $p_1 = 3$, $p_2 = 1$ y $p_3 = 1$:

$p_3 = 1$	$E_3(4)$	$(0,0,1,0,0)$		
$p_2 = 1$	$E_2(4)$	$(0,2,0,0,0)$		
$p_1 = 3$	$E_1(4)$	$(0,0,2,-2,0)$	$(1,-1,0,0,0)$	$(0,0,0,0,1)$

Así, la forma de Jordan y la matriz de paso son:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 4 & 1 & & & \\ & 4 & 1 & & \\ & & 4 & & \\ \hline & & & 4 & \\ \hline & & & & 4 \end{array}\right) \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **[1 pto.]** Sea la sucesión $1, 1, 3, 5, 11, 21, \ldots$, i.e. $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$. Encontrar la expresión del término x_n en función de n.

Solución:

Calculamos la ecuación característica: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ y de aquí obtenemos sus raíces, que son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$, de modo que la solución general de la ecuación en diferencias es

$$x_n = c_1 2^n + c_2(-1)^n$$

Ajustando los datos: $x_0 = 1$ y $x_1 = 1$, obtenemos $c_1 + c_2 = 1$ y $2c_1 - c_2 = 1$, por tanto la expresión de x_n es

$$x_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$$

6. **[2 ptos.]** Se considera $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos, dotado del producto escalar:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

6.a) Encontrar una base para el subespacio vectorial:

$$M = \{p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[-1,1] : xp'(x) = 2p(x)\}$$

6.b) Halla la proyección ortogonal del polinomio $2x^2$ sobre M.

6.c) Calcular la dimensión y una base de $M^\perp$.

6.d) Calcula la proyección ortogonal sobre $M^\perp$ de $2x^2$.

6.e) Sea $T : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la aplicación que a cada polinomio le hace corresponder su proyección ortogonal sobre M. Obtén la matriz de la aplicación en la base que consideres oportuna.

Solución:

6.a) Consideramos $p(x) = x_0 + x_1 x + x_2 x^2$ e imponemos la restricción que nos define M:

$$x(x_1 + 2x_2 x) = 2(x_0 + x_1 x + x_2 x^2) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Base: } (0,0,1)$$

Así pues, una base de M es $\{x^2\}$.

6.b) Puesto que $2x^2$ pertenece a M, su proyección es el propio polinomio $2x^2$.

6.c) Puesto que $M^\perp$ es el complemento ortogonal de M, su dimensión será $3-1=2$. Para obtener una base buscamos $p(x)=x_0+x_1x+x_2x^2$ tal que

$$\langle p(x), x^2\rangle = 0 \Rightarrow \int_{-1}^{1} \left(x_0x^2+x_1x^3+x_2x^4\right)\,dx = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}x_0+\frac{2}{5}x_2=0$$

que nos da como solución $(0,1,0)$ y $(1,0,-\frac{5}{3})$, es decir, la base es $\{x, 1-\frac{5}{3}x^2\}$

6.d) Dado que M y $M^\perp$ son ortogonales, la proyección de cualquier elemento de M sobre $M^\perp$ es el vector nulo.

6.e) Si consideramos la base $\{x, 1-\frac{5}{3}x^2, x^2\}$ sabemos que $T(x)=0$, $T(1-\frac{5}{3}x^2)=0$ (por la misma razón que en el apartado anterior) y $T(x^2)=x^2$, de modo que en esta base, la matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. **[1.25 ptos.]** Una empresa de ordenadores analiza las ventas realizadas de portátiles durante los últimos cuatro años, reflejadas en la tabla

año	1	2	3	4
venta (en millones)	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$	5

7.a) Hallar el ajuste lineal por el método de los mínimos cuadrados.

7.b) ¿Cuántos portátiles espera vender el quinto año?

Solución:

7.a) Buscamos una función $y=ax+b$ que resuelva el sistema

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 2a+b=\frac{3}{2} \\ 3a+b=\frac{7}{2} \\ 4a+b=5 \end{cases}$$

Como el sistema no tiene solución, lo resolvemos por mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{69}{2} \\ 11 \end{pmatrix}$$

resultando $a=\frac{7}{5}$, $b=-\frac{3}{4}$.

7.b) El quinto año esperarán vender $y=\frac{7}{5}\cdot 5-\frac{3}{4}=\frac{25}{4}$.

Álgebra Lineal – Titulación de Ingeniería Industrial **24 de junio de 2011**

1. **[1.5 ptos.]** Se considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ -x+y+\alpha z=1 \\ 2x+\alpha y+4z=-2 \end{cases}$$

1.a) Discutir el sistema en función de los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

1.b) Para $\alpha=-3$, encontrar una solución aproximada del sistema mediante el método de los mínimos cuadrados.

Solución:

1.a) Está claro que el rango de la matriz de coeficientes es mayor o igual que dos (usando las dos primeras filas y columnas). Si calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 4 \end{vmatrix} = -(\alpha+2)(\alpha+3)$$

Luego si $\alpha \neq -2$ ó $\alpha \neq -3$ el rango de la matriz de coeficientes es tres (y por tanto el de la ampliada también), luego se trata de un sistema compatible determinado.

Si $\alpha=-2$, orlando las dos primeras filas y columnas con la columna del término independiente, el rango es dos, luego se trata de un sistema compatible indeterminado.

Finalmente, si $\alpha=-3$, orlando del mismo modo resulta rango tres, y por tanto un sistema incompatible.

1.b) Para resolver por mínimos cuadrados basta considerar el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

es decir,

$$\begin{cases} 6x-9y+12z=-7 \\ -9x+14y-17z=11 \\ 12x-17t+26z=-13 \end{cases} \Rightarrow \left(\tfrac{1}{3}-5z, 1-2z, z\right)$$

2. **[1.5 ptos.]** Sea $A:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación cuya matriz en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

de la que se sabe que $\lambda=-2$ es un autovalor de multiplicidad 4, una base de $E_1(-2)$ es $\{(1,0,0,1),(0,1,0,1)\}$ y

$$(A+2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula **razonadamente** la forma de Jordan de A y una matriz de paso.

Solución:

Como $E_1(-2)$ no es el subespacio máximo (pues tiene dimensión 2 y la multiplicidad del autovalor es 4), hemos de calcular $E_2(-2)$. Puesto que nos dan $(A+2I)^2$, que tiene rango 1, es fácil obtener una base:

$$E_2(-2) = L(((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1))$$

$E_2(-2)$ tampoco es el subespacio máximo, y como tiene dimensión 3, está claro que $E_3(-2)$ tiene dimensión 4, es el subespacio máximo, y además $E_3(-2) = \mathbb{R}^4$. Así pues, $q_1 = 2$, $q_2 = 3$ y $q_3 = 4$, resultando que $p_1 = 2$, $p_2 = 1$ y $p_3 = 1$. Con estos datos podemos construir la siguiente tabla de espacios,

$p_3 = 1$	$E_3(-2)$	$(0,0,1,0)$	
$p_2 = 1$	$E_2(-2)$	$(2,0,0,1)$	
$p_1 = 2$	$E_1(-2)$	$(1,1,0,2)$	$(1,0,0,1)$

Así, la forma de Jordan y la matriz de paso son:

$$J = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & & \\ & -2 & 1 & \\ & & -2 & \\ \hline & & & -2 \end{array}\right) \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. **[2 ptos]** Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 - x_3, 2x_3)$$

Calcular la dimensión y una base de los subespacios:

3.a) $\ker(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$.

3.b) $f(M)$, donde $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.

3.c) $M^\perp$ y $f(M)^\perp$.

3.d) ¿Es cierto que $M^\perp \perp f(M)$? Calcula la proyección ortogonal sobre M de los vectores de $f(M)$.

Solución:

3.a) Calculemos en primer lugar la matriz de f respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Sabemos que el espacio $\mathrm{Im}(f)$ está generado por las columnas de A. Como esta matriz tiene rango 2, entonces $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$, y una base es $\{(1,1,0), (1,-1,2)\}$.
Para $\ker(f)$, bastará resolver el sistema con matriz A,

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,-1,0)$$

Es decir, $\dim(\ker(f)) = 1$ y una base es $\{(1,-1,0)\}$.

3.b) Para calcular $f(M)$ bastará con obtener una base de M, y calcular sus imágenes. Resolviendo la ecuación que define M se tiene:

$$M = L((1,-1,0),(0,1,-1)) \Rightarrow f(M) = L((f(1,-1,0), f(0,1,-1))$$

Como $f(1,-1,0) = (0,0,0)$ y $f(0,1,-1) = (0,2,-2)$, entonces $\dim(f(M))) = 1$ y una base es $\{(0,2,-2)\}$.

3.c) Para calcular $M^\perp$ basta considerar las filas de la matriz del sistema que define a M, esto es $(1,1,1)$. Así $\dim(M^\perp) = 1$ y una base es $\{(1,1,1)\}$.
$f(M)^\perp$ se obtiene mediante el sistema

$$(0,2,-2) \cdot (x_1, x_2, x_3) = 0 \Rightarrow x_2 - x_3 = 0$$

de modo que $\dim(f(M)^\perp) = 2$ y una base está formada por $(1,0,0)$ y $(0,1,1)$

3.d) Es inmediato comprobar que $(1,1,1) \cdot (0,2,-2) = 0$, luego ambos espacios son ortogonales. Esto significa que $f(M) \subset M$, y por tanto, al proyectar los vectores de $f(M)$ sobre M se obtienen los mismos vectores.

4. **[2 ptos.]** Se consideran los espacios $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, matrices cuadradas de orden dos, y $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, polinomios de grado menor o igual que dos y sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la aplicación lineal definida por:

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+b)x^2 - (c+d)x + (b-c)$$

Se pide:

4.a) Matriz de T respecto de las bases canónicas de ambos espacios.

4.b) Dadas las bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$,

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

respectivamente, hallar la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$.

4.c) Decidir si T es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

4.d) ¿Existe algún polinomio $p(x) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ tal que la ecuación $T(A) = p(x)$ no tenga solución? Razona tu repuesta.

4.e) Encontrar todas las matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tales que $T(A) = x^2 + x + 2$.

Solución:

4.a) Calculamos la imagen de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x^2+1, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -x-1, \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -x$$

luego la matriz respecto de las bases canónicas es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4.b) Es claro que

$$M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^{\mathcal{B}'_c}_{\mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B}_c$ y $\mathcal{B}'_c$ son las bases canónicas de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ y $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, respectivamente. Usando el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_c \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}'_c \arrow[d, "M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}'_c}"] \\ \mathcal{B}_1 \arrow[u, "M^{\mathcal{B}_c}_{\mathcal{B}_1}"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{B}_2 \end{tikzcd}$$

y teniendo en cuenta que $M^{\mathcal{B}_2}_{\mathcal{B}'_c} = (M^{\mathcal{B}'_c}_{\mathcal{B}_2})^{-1}$, la matriz buscada es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4.c) Basta mirar el rango de la matriz A (que es 3), de modo que $\dim(\ker(T)) = 4 - 3 = 1$, luego la aplicación no es inyectiva (y por tanto, no biyectiva), mientras que $\dim(\mathrm{Im}(T)) = 3 = \dim(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})$, luego la aplicación es sobreyectiva.

4.d) Dado que la aplicación es sobreyectiva, cualquier elemento del espacio de llegada (es decir, cualquier polinomio de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$) es la imagen de un elemento del espacio de partida (es decir, de una matriz de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$), de modo que no existe ningún polinomio de manera que la ecuación $T(A) = p(x)$ no tenga solución.

4.e) Bastará resolver el sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

cuya solución general es $\begin{pmatrix} t & 1-t \\ -1-t & t \end{pmatrix}$.

5. **[1.5 ptos.]** Se dan las sucesiones recurrentes

$$\begin{aligned} u_n &= 3u_{n-1} + 3v_{n-1} \\ v_n &= 5u_{n-1} + v_{n-1} \end{aligned}$$

con $u_0 = 0$ y $v_0 = 8$. Hallar u_n y v_n en función de n.

Solución:

Podemos escribir:

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Calculando los autovalores ($\lambda = 6$ y $\lambda = -2$) y los autovectores ($(1,1)$ y $(-3,5)$, respectivamente), entonces

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^n \left[3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \right] = 3 \cdot 6^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-2)^n \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Luego,

$$u_n = 3\left(6^n - (-2)^n\right), \quad v_n = 3 \cdot 6^n + 5 \cdot (-2)^n$$

6. **[1.5 ptos.]** Responder razonadamente:

6.a) ¿Puede una aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ ser sobreyectiva?

6.b) Si una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ tiene un autovalor nulo, ¿puede ser inyectiva?

6.c) Una aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con un autovalor nulo, ¿puede ser ortogonal?, ¿y autoadjunta?

Solución:

6.a) Como la matriz de la aplicación tendrá tamaño 4×3, su rango máximo será 3, de modo que nunca se podrá tener que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^4$, luego no puede ser sobreyectiva.

6.b) Si una aplicación tiene un autovalor nulo, significa que $\dim(\ker(A)) > 0$, pues $\ker(A)$ corresponde al espacio de autovectores asociado al autovalor nulo. Como $\ker(A)$ no es el espacio nulo, la aplicación no puede ser inyectiva.

6.c) Si una aplicación tiene un autovalor nulo, entonces su determinante es nulo, y por tanto no puede ser ortogonal (su determinante tendría que ser ± 1). Sí puede ser autoadjunta. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es un aplicación autoajunta (matriz simétrica), con un autovalor nulo.

Álgebra – Grados de Ingeniería Industrial **16 de enero de 2012**

1. **[1 pto.]** Encontrar la forma binomial de todos los números complejos z con parte real negativa tales que $z^6 = 8$.

   Solución:

   Escribimos 8 en forma polar: $8 = 8e^{2k\pi}$, de modo que $z = 8^{\frac{1}{6}} = \sqrt{2}e^{\frac{2k\pi}{6}}$, habiendo 6 valores distintos. Los que tienen parte real negativa corresponderán a ángulos comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2}$, esto es, para $k = 2$, $k = 3$ y $k = 4$:
   $$\sqrt{2}e^{\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \quad \sqrt{2}e^{\pi} = -\sqrt{2}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{4\pi}{3}} = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

2. **[1 pto.]** Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n tales que $A \neq \mathbf{0}$, $B \neq \mathbf{0}$ y $AB = \mathbf{0}$. Demostrar que $\det(A) = \det(B) = 0$.

   Solución:

   Supongamos que $\det(A) \neq 0$; en tal caso A sería una matriz invertible, y por tanto $\mathbf{0} = AB \Rightarrow A^{-1}\mathbf{0} = A^{-1}AB = B \neq \mathbf{0}$, lo que es una contradicción. El mismo razonamiento funciona para B.

3. **[2.5 ptos.]** En el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y los conjuntos
   $$L_1 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AP = \mathbf{0}\}$$
   $$L_2 = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : AP - PA = \mathbf{0}\}$$

   Se pide:

   3.a) Probar que L_1 es un subespacio vectorial.

   3.b) Hallar la dimensión y una base de L_1, L_2, $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$. ¿Es $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = L_1 \oplus L_2$?

   3.c) ¿Pertenece la matriz P a alguno de los subespacios anteriores? En caso afirmativo, halla las coordenadas de la matriz P en la base que hayas obtenido del subespacio al que pertenece.

   3.d) Ampliar la base de $L_1 \cap L_2$ encontrada en el apartado $(3b)$ a una base de L_2 de tal forma que las coordenadas de la matriz P en la nueva base sean las opuestas de las obtenidas en el apartado $(3c)$.

   3.e) Calcular la matriz de cambio de base entre la base de L_2 encontrada en el apartado $(3b)$ y la base encontrada en el apartado $(3d)$.

   Solución:

   3.a) Consideremos $A, B \in L_1$ y probemos que $\alpha A + \beta B$ también pertenece a L_1, cualesquiera que sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En efecto,
   $$(\alpha A + \beta B)P = \alpha AP + \beta BP = \mathbf{0}$$
   pues $AP = BP = \mathbf{0}$, por pertenecer a L_1.

   3.b) Para obtener unas ecuaciones de L_1 consideramos una matriz $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, e imponemos la condición $AP = \mathbf{0}$. De aquí,
   $$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 & -x_1 + x_2 \\ x_3 - x_4 & -x_3 + x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right.$$
   Para obtener la dimensión y una base basta observar que el rango de la matriz del sistema es dos, luego $\dim(L_1) = 4 - 2 = 2$, y resolviendo obtenemos la base de L_1:
   $$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
   Procedemos de igual modo con L_2: imponiendo la condición $AP - PA = \mathbf{0}$ se tiene:
   $$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 + x_3 & -x_1 + x_4 \\ x_1 - x_4 & x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right.$$

con $\dim(L_2) = 2$ y base

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Para la suma, basta considerar el conjunto

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y estudiar su independencia. Es fácil ver que

$$\text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

luego $\dim(L_1 + L_2) = 3$ y una base está formada por (por ejemplo)

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Por último, para obtener $L_1 \cap L_2$, usamos la fórmula de la dimensión (Teorema 4.12) para obtener que $\dim(L_1 \cap L_2) = 1$, lo cual significa que el rango de la matriz del sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

es 3. Es inmediato ver que las tres primeras ecuaciones son independientes. Resolviendo para $x_4 = 1$, se obtiene la base de $L_1 \cap L_2$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Como $L_1 \cap L_2$ no es el espacio nulo, no se tiene que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sea suma directa de L_1 y L_2.

3.c) Basta ver si P verifica alguno de los sistemas obtenidos en el apartado anterior. Se observa que $P \in L_2$. Para obtener las coordenadas de P en la base de L_2 calculada basta encontrar α y β tales que

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = -1$$

Luego $P = (1, -1)_{L_2}$.

3.d) Como $L_1 \cap L_2$ tiene dimensión 1 y L_2 tiene dimensión 2, bastará encontrar una matriz de L_2, independiente con $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que las coordenadas de P en esta nueva base sean $(-1, 1)$. Es decir

$$P = (-1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

Es evidente que la matriz buscada es $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.e) Debemos calcular la matriz de cambio de base entre las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Para ello debemos escribir los vectores de $\mathcal{B}_1$ como combinación lineal de los vectores de $\mathcal{B}_2$. Así,

$$\left.\begin{array}{l}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \alpha_2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = 0,\ \beta_1 = \frac{1}{2}\\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

Luego la matriz de cambio de base es

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4. **[1.5 ptos.]** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que:
   - $\ker(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$
   - $\mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$
   - Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(1,1,1) = (\lambda + 1, -2\lambda)$

   4.a) Calcular la matriz de f en las bases canónicas de los espacios correspondientes.

   4.b) ¿Existe algún vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(\mathbf{x}) = (2,3)$? Razonar la respuesta.

   Solución:

   4.a) Para determinar f precisamos conocer la imagen de una base de $\mathbb{R}^3$. En primer lugar obtenemos una base de $\ker(f)$ resolviendo el sistema (nótese que $\dim(\ker(f)) = 3 - 1 = 2$, y una base es $\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$). De modo que $f(1,1,0) = (0,0)$ y $f(-1,0,1) = (0,0)$. Para determinar f completamente necesitamos conocer la imagen de un tercer vector independiente con los dos anteriores. Como nos dan $f(1,1,1)$ y $(1,1,1)$ es independiente con la base de $\ker(f)$, ya disponemos de la imagen de una base de $\mathbb{R}^3$.

   Para determinar λ basta observar que el vector $(\lambda + 1, -2\lambda)$ debe pertenecer a la imagen de f, luego $\lambda + 1 - 2\lambda = 0$, y de aquí $\lambda = 1$.

   Así pues, la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,1,0), (-1,0,1), (1,1,1)\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

   $$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

   Para calcular la matriz respecto de las bases canónicas nos bastará realizar un cambio de base, atendiendo al siguiente diagrama:

   $$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "I"] \\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

   La matriz buscada, C, será $C = AP$, donde P es la matriz de cambio de base de la canónica de $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{B}$, esto es

   $$P = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

   4.b) Para que $f(\mathbf{x}) = (2,3)$, el vector $(2,3)$ debe pertenecer a la imagen de f, lo cual no ocurre (pues $2+3 \neq 0$).

5. **[1.5 ptos.]** Se considera la matriz

   $$A = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 3\\ -6 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 3 & 0 & -6\\ -3 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

   de la que se sabe que $\ker(A - 3iI) = L((1,0,-2,i), (0,1,-i,0))$. Calcula **razonadamente** las formas de Jordan compleja y real de A y las correspondientes matrices de paso.

   Solución:

Nos dan un autovalor, $\lambda = 3i$, y dos autovectores asociados $(1, 0, -2, i)$ y $(0, 1, -i, 0)$. Como la matriz es real, debe haber otro autovalor $-3i$, con autovectores asociados $(1, 0, -2, -i)$ y $(0, 1, i, 0)$. Como la matriz es de orden 4 y tenemos dos autovalores dobles ya no puede haber más autovalores, y puesto que hay cuatro autovectores independientes, además A es diagonalizable. Es decir,

$$J = \begin{pmatrix} 3i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -i & -2 & i \\ i & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

Para la forma real, basta reinterpretar el resultado:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. **[1 pto.]** La posición de una partícula situada en el plano en el instante t viene dada por:

$$\begin{cases} x_t = -\frac{1}{2}x_{t-1} + y_{t-1} \\ y_t = -\frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{1}{2}y_{t-1} \end{cases}$$

Estudiar el estado $\lim\limits_{t\to+\infty}(x_t, y_t)$ para cada estado inicial (x_0, y_0).

Solución:

La matriz del sistema dinámico es $A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ y el polinomio característico es $\lambda^2 + \frac{1}{4}$, cuyas raíces son $\frac{1}{2}i$ y $-\frac{1}{2}i$. La forma polar de uno de los autovalores es $\frac{1}{2}i = \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}$, de modo que la solución general del sistema vendrá dada por

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \mathbf{C_1}\left(\frac{1}{2}\right)^t \cos\left(\frac{t\pi}{2}\right) + \mathbf{C_2}\left(\frac{1}{2}\right)^t \sin\left(\frac{t\pi}{2}\right)$$

con $\mathbf{C}_i$ vectores que no precisamos determinar, pues el límite que nos interesa es claramente $(0, 0)$.

7. **[1.5 ptos.]** Considérese $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual.

7.a) Expresar el vector $\mathbf{w} = (-1, 2, 5, 0)$ de la forma $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ donde $\mathbf{w}_1$ está en el subespacio L generado por los vectores $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1, 2)$ y $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 0, 1)$, y $\mathbf{w}_2$ es ortogonal a L.

7.b) Obtener la dimensión y una base de $L^\perp$.

Solución:

7.a) Se deduce del enunciado que $\mathbf{w}_1$ es la proyección ortogonal de $\mathbf{w}$ sobre L. La proyección se calcula de forma habitual:

$$\mathbf{w}_1 = \alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 = (-\alpha, \beta, \alpha, 2\alpha + \beta)$$

con las condiciones

$$\langle \mathbf{w} - \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 6 - 4\alpha - 2\beta = 0, \quad \langle \mathbf{w} - \mathbf{w}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 2 - 2\alpha - 2\beta = 0$$

Es decir, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, de modo que $\mathbf{w}_1 = (-1, 0, 1, 2)$ y $\mathbf{w}_2 = \mathbf{w} - \mathbf{w}_1 = (0, 2, 4, -2)$.

7.b) $L^\perp$ está formado por los vectores ortogonales a L. Puesto que estamos usando el producto escalar habitual, el sistema que determina a $L^\perp$ tiene como matriz, la formada por los vectores de L por filas, esto es

$$\begin{aligned} -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

La dimensión de $L^\perp$ será 2 y una base se obtiene resolviendo el sistema: $\{(1, 0, 1, 0), (0, -1, -2, 1)\}$

Álgebra Lineal – Titulación de Ingeniería Industrial **16 de enero de 2012**

1. **[1.5 ptos.]** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que:
   - $\ker(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$
   - $\mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : x_1 - 2x_2 = 0\}$
   - Existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(2,0,1) = (\lambda + 1, \lambda)$

   1.a) Calcular la matriz de f en las bases canónicas de los espacios correspondientes.

   1.b) ¿Existe algún vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $f(\mathbf{x}) = (3,1)$? Razonar la respuesta.

   Solución:

   1.a) Para determinar f precisamos conocer la imagen de una base de $\mathbb{R}^3$. En primer lugar obtenemos una base de $\ker(f)$ resolviendo el sistema (nótese que $\dim(\ker(f)) = 3-1 = 2$, y una base es $\{(1,-1,0),(1,0,1)\}$). De modo que $f(1,-1,0) = (0,0)$ y $f(1,0,1) = (0,0)$. Para determinar f completamente necesitamos conocer la imagen de un tercer vector independiente con los dos anteriores. Como nos dan $f(2,0,1)$ y $(2,0,1)$ es independiente con la base de $\ker(f)$, ya disponemos de la imagen de una base de $\mathbb{R}^3$.

   Para determinar λ basta observar que el vector $(\lambda+1, \lambda)$ debe pertenecer a la imagen de f, luego $\lambda + 1 - 2\lambda = 0$, y de aquí $\lambda = 1$.

   Así pues, la matriz de f respecto de la base $\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(1,0,1),(2,0,1)\}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

   $$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}} = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Para calcular la matriz respecto de las bases canónicas nos bastará realizar un cambio de base, atendiendo al siguiente diagrama:

   $$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "I"] \\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \end{tikzcd}$$

   La matriz buscada, C, será $C = AP$, donde P es la matriz de cambio de base de la canónica de $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{B}$, esto es

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

   1.b) Para que $f(\mathbf{x}) = (3,1)$, el vector $(3,1)$ debe pertenecer a la imagen de f, lo cual no ocurre (pues $3 - 2 \cdot 1 \neq 0$).

2. **[1 pto.]** Se considera la aplicación lineal $f_\lambda : \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x] \longrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ definida por

   $$f(p(x)) = \int_0^1 (x^2 + x)(t + \lambda)p'(t) + (t + 2\lambda)p(t)\, dt$$

   Encontrar los valores de λ para los que la aplicación dada es biyectiva.

   Solución: Calcularemos la matriz de la aplicación en la base canónica de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$. Para ello:

   $$f(1) = \int_0^1 (x^2 + x)(t + \lambda) \cdot 0 + (t + 2\lambda) \cdot 1\, dt = \tfrac{1}{2} + 2\lambda$$

   $$f(x) = \int_0^1 (x^2 + x)(t + \lambda) \cdot 1 + (t + 2\lambda) \cdot t\, dt = (x^2 + x)(\tfrac{1}{2} + \lambda) + \tfrac{1}{3} + \lambda$$

   $$f(x^2) = \int_0^1 (x^2 + x)(t + \lambda) \cdot 2t + (t + 2\lambda) \cdot t^2\, dt = (x^2 + x)(\tfrac{2}{3} + \lambda) + \tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3}\lambda$$

De modo que la matriz de f respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2\lambda + \frac{1}{2} & \lambda + \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{4} \\ 0 & \lambda + \frac{1}{2} & \lambda + \frac{2}{3} \\ 0 & \lambda + \frac{1}{2} & \lambda + \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Se observa que $|A| = 0$, $\forall \lambda$, por lo que f no es nunca biyectiva.

3. **[2 ptos.]** Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a \\ 3 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Estudiar cuándo la matriz A es o no diagonalizable en función de los valores de a y b. Para $a = 1$ y $b = 3$ obtener la forma de Jordan y una matriz de paso.

Solución:

Calculamos el polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & a \\ 3 & 0 & b-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda)(b-\lambda)$$

De modo que, si $b \neq -1, 3$ la matriz es diagonalizable cualquiera que sea a. Los casos a estudiar corresponderán a $b = -1$ y $b = 3$.

Si $b = -1$, tenemos un autovalor simple, $\lambda = 3$ y uno doble, $\lambda = -1$. Para este autovalor,

$$\text{rango}(A + I) = \text{rango} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

Es decir, $\dim(E_1(-1)) = 1$ si $a \neq 0$, luego la matriz no es diagonalizable, y $\dim(E_1(-1)) = 2$ si $a = 0$, y la matriz es diagonalizable.

Para $b = 3$, el autovalor simple es ahora $\lambda = -1$ y el doble $\lambda = 3$. Así,

$$\text{rango}(A - 3I) = \text{rango} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & a \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2, \ \forall a$$

por tanto $\dim(E_1(3)) = 1$ y la matriz no es diagonalizable.

Para el caso $b = 3$, $a = 1$ ya sabemos que la matriz no es diagonalizable, y al tener un autovalor doble y uno simple está claro que

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Para la matriz de paso calculamos bases de $E_1(-1)$, $E_1(3)$ y $E_2(3)$:

$$E_1(-1) = L((0,1,0)), \quad E_1(3) = L((0,1,4)), \quad E_2(3) = L((0,1,4),(4,0,3))$$

y luego calculamos

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$$

obteniéndose la matriz de paso:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix}$$

4. **[1 pto.]** Se considera el sistema dinámico

$$\begin{cases} x_n = -x_{n-1} - 3y_{n-1} \\ y_n = 2x_{n-1} + 4y_{n-1} \end{cases}$$

Encontrar todos los valores α y β no nulos tales que si el dato inicial es $x_0 = \alpha$, $y_0 = \beta$, entonces la solución del sistema es $x_n = \alpha$, $y_n = \beta$, $\forall n$.

Solución: Puesto que queremos que la solución sea constante, se deberá tener que $A^k\mathbf{x} = \mathbf{x}$, para todo k. Es decir, $\mathbf{x}$ debe ser un autovector asociado al autovalor $\lambda = 1$ de A (si existe), donde

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda = 1$ que son solución del sistema $2x_1 + 3x_2 = 0$, es decir, vectores del espacio $L(3, -2)$. Así pues, para $\alpha = 3a$ y $\beta = -2a$, cualquiera que sea $a \neq 0$, obtenemos soluciones constantes.

5. **[2.5 ptos.]** Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y el subespacio L formado por las soluciones de la ecuación $x_1 + 2x_2 = 0$. Se pide:

5.a) Encuentra la dimensión y una base de L.

5.b) Obtener una base ortogonal de L.

5.c) Determina las coordenadas del vector $(2, -1, 3)$ en cada una de las bases obtenidas en los apartados anteriores.

5.d) Determina una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base obtenida en el apartado $(5b)$.

5.e) Calcular la proyección ortogonal sobre L del vector $(1, 1, 1)$.

5.f) Obtener el vector de $L^\perp$ más cercano al vector $(1, 1, 1)$.

Solución:

5.a) Puesto que la matriz del sistema que define a L tiene rango 1, $\dim(L) = 3 - 1 = 2$. Para obtener una base, resolvemos el sistema con dos parámetros obteniendo los vectores $\{(-2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.

5.b) Se observa que los vectores anteriores ya son ortogonales, por lo que una base ortogonal de L es la misma.

5.c) Las coordenadas del vector $(2, -1, 3)$ en la base anterior, teniendo en cuenta que $(2, -1, 3) = (-1) \cdot (-2, 1, 0) + 3 \cdot (0, 0, 1)$, son $(-1, 3)$.

5.d) Para obtener una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a los vectores $\{(-2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ basta encontrar un tercer vector que sea ortogonal a ambos, esto es, un vector que resuelva el sistema

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow (1, 2, 0)$$

Así pues, una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ es $\{(-2, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 2, 0)\}$

5.e) Para calcular la proyección ortogonal de $(1, 1, 1)$ sobre L, dado que la base de L es ortogonal, simplemente calculamos

$$\alpha = \frac{\langle(-2, 1, 0), (1, 1, 1)\rangle}{\|(-2, 1, 0)\|^2} = -\frac{1}{5}, \quad \beta = \frac{\langle(0, 0, 1), (1, 1, 1)\rangle}{\|(0, 0, 1)\|^2} = 1$$

por tanto, la proyección es el vector $\mathbf{x} = (\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}, 1)$.

5.f) El vector pedido es la proyección ortogonal de $(1, 1, 1)$ sobre $L^\perp$, esto es $\mathcal{Q}_L(1, 1, 1)$. Dado que hemos calculado $\mathcal{P}_L(1, 1, 1)$ es inmediato de obtener pues

$$(1, 1, 1) = \mathcal{P}_L(1, 1, 1) + \mathcal{Q}_L(1, 1, 1) \Rightarrow \mathcal{Q}_L(1, 1, 1) = (1, 1, 1) - (\tfrac{2}{5}, -\tfrac{1}{5}, 1) = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{6}{5}, 0)$$

6. **[1 pto.]** Encontrar la recta que mejor aproxime a los puntos $(2,1)$, $(3,2)$, $(4,3)$ y $(5,2)$.

   Solución:

   Buscamos una recta de la forma $y = ax + b$ que pase por los puntos dados. De modo que se ha de resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ 3a + b = 2 \\ 4a + b = 3 \\ 5a + b = 2 \end{cases}$$

   Puesto que este sistema no tiene solución, resolvemos de forma aproximada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 54 & 14 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 8 \end{pmatrix}$$

   La recta es $y = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$.

7. **[1 pto.]** Sea A una matriz cuadrada de orden n tal que la suma de los elementos de cada una de sus filas es cero. Probar que $\text{rango}(A) < n$.

   Solución:

   Si la suma de todos los elementos de cada fila es nula significa que si consideramos los vectores formados por las columas de la matriz A, llamémosles $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, entonces

$$\mathbf{a}_1 + \cdots + \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

   Es decir, estos vectores son linealmente dependientes, luego la matriz no puede tener rango n.

Soluciones del Examen de Álgebra – Grados de Ingeniería Industrial **19 de junio de 2012**

1. **[1 pto.]** Encontrar la forma binomial de todos los números complejos con parte real positiva tales que
$$z^3 = \frac{(1-\sqrt{3}i)^8}{(\sqrt{3}+i)^2}$$
Se recuerdan las relaciones trigonométricas de los ángulos más comunes:
$$\operatorname{sen}\tfrac{\pi}{6} = \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2}, \quad \cos\tfrac{\pi}{6} = \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}, \quad \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4} = \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Solución:

Escribimos $1-\sqrt{3}i$ y $\sqrt{3}+i$ en forma polar:
$$1-\sqrt{3}i = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}, \quad \sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$$
A partir de aquí,
$$\frac{(1-\sqrt{3}i)^8}{(\sqrt{3}+i)^2} = \frac{2^8 e^{-\frac{8\pi}{3}i}}{2^2 e^{\frac{\pi}{3}i}} = 2^6 e^{-3\pi i} = 2^6 e^{-\pi i}$$
luego
$$z^3 = 2^6 e^{-\pi i + 2k\pi i} \Rightarrow z = 2^2 e^{-\frac{\pi}{3}i + \frac{2k\pi}{3}i}, \quad k = 0,1,2$$
Los números con parte real positiva corresponden a $k=0$ y $k=1$, es decir
$$z = 2^2 e^{-\frac{\pi}{3}i} = 2 - 2\sqrt{3}i, \quad z = 2^2 e^{\frac{\pi}{3}i} = 2 + 2\sqrt{3}i$$

2. **[2.5 ptos.]** En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar habitual se consideran los subespacios L_1 y L_2, donde L_1 es el subespacio generado por los vectores $(1,-1,2,1)$, $(1,-2,0,-1)$ y $(2,-3,2,0)$ y L_2 tiene por ecuaciones $x_1 - x_4 = 0$, $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$, se pide:

2.a) Determinar la dimensión y una base de los subespacios $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$. ¿Es cierto que $\mathbb{R}^4 = L_1 \oplus L_2$?

2.b) Obtener una base ortogonal de L_1.

2.c) Determinar $L_2^{\perp}$.

2.d) Calcular la proyección ortogonal del vector $(2,1,0,0)$ sobre L_1.

Solución:

2.a) Como
$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$$
entonces $\dim(L_1) = 2$, una base está formada por $(1,-1,2,1)$ y $(1,-2,0,1)$, y un sistema de ecuaciones se obtiene mediante
$$\operatorname{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
Para L_2, está claro que $\dim(L_2) = 4 - 2 = 2$ y obtenemos una base resolviendo el sistema
$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2,\ x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0,\ x_4 = 2 \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 0 \end{cases}$$

luego una base está formada por $(0,1,2,0)$ y $(2,-1,0,2)$.

Entonces, una base de L_1+L_2 saldrá de

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 2\end{pmatrix}=4$$

es decir $\dim(L_1+L_2)=4$ y por tanto $L_1+L_2=\mathbb{R}^4$.
Por la fórmula de la dimensión, $\dim(L_1\cap L_2)=0$ y así $L_1\cap L_2=\{\mathbf{0}\}$.
En conclusión $\mathbb{R}^4=L_1\oplus L_2$.

2.b) Ortogonalizamos L_1 mediante Gram-Schmidtz:

$$\mathbf{y}_1=(1,-1,2,1),\quad \mathbf{y}_2=(1,-2,0,-1)-\alpha(1,-1,2,1)$$

con la condición $\langle \mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2\rangle=0$, es decir,

$$(1,-1,2,1)\cdot(1-\alpha,-2+\alpha,-2\alpha,-1-\alpha)=2-7\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{2}{7}$$

y una base ortogonal estará formada por $(1,-1,2,1)$ y $\left(\frac{5}{7},-\frac{12}{7},-\frac{4}{7},-\frac{9}{7}\right)$.

2.c) Puesto que estamos usando el producto escalar habitual y L_2 viene dado por el sistema

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1\\ 1 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

una base de $L_2^{\perp}$ viene dada por los vectores $(1,0,0,-1)$ y $(1,2,-1,0)$.

2.d) Para determinar la proyección del vector $(2,1,0,0)$ sobre L_1 usamos la base ortogonal obtenida, pues entonces la proyección es

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{L_1}(2,1,0,0)=\\ &=\frac{(2,1,0,0)\cdot(1,-1,2,1)}{\|(1,-1,2,1)\|^2}(1,-1,2,1)+\frac{(2,1,0,0)\cdot\left(\frac{5}{7},-\frac{12}{7},-\frac{4}{7},-\frac{9}{7}\right)}{\|\left(\frac{5}{7},-\frac{12}{7},-\frac{4}{7},-\frac{9}{7}\right)\|^2}\left(\frac{5}{7},-\frac{12}{7},-\frac{4}{7},-\frac{9}{7}\right)\\ &=\frac{1}{7}(1,-1,2,1)-\frac{1}{19}\left(\frac{5}{7},-\frac{12}{7},-\frac{4}{7},-\frac{9}{7}\right)=\left(\frac{2}{19},-\frac{1}{19},\frac{6}{19},\frac{4}{19}\right)\end{aligned}$$

3. **[2.5 ptos.]** Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ una aplicación lineal tal que: $\ker(f)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3: x_2-x_3=0\}$. Se pide:

3.a) Dar una base de $\ker(f)$.

3.b) Calcular la $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

3.c) Si además se sabe que $f(0,1,0)=(2,1)$, calcular la matriz de f en las bases canónicas de los espacios correspondientes.

3.d) ¿Existe algún vector $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(\mathbf{x})=(1,2)$? En caso negativo, encontrar un vector $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3$ tal que $\|f(\mathbf{x})-(1,2)\|$ sea lo más pequeño posible, donde la norma dada es la inducida por el producto escalar habitual de $\mathbb{R}^2$.

Solución:

3.a) Resolviendo el sistema se tiene: $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$.

3.b) Por la fórmula de la dimensión, $\dim(\mathbb{R}^3)=\dim(\mathrm{Im}(f))+\dim(\ker(f))$, luego $\dim(\mathrm{Im}(f))=1$.

3.c) Tenemos que

$$f(1,0,0)=(0,0),\quad f(0,1,1)=(0,0),\quad f(0,1,0)=(2,1)$$

luego si consideramos la base $\mathcal{B}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$, la matriz de f respecto de $\mathcal{B}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(f)=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Para obtener la matriz de f respecto de las bases canónicas usamos el habitual cambio de base:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "I"] \\
\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

Teniendo en cuenta que

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$$

la matriz buscada es

$$C=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

3.d) Como $\dim(\mathrm{Im}(f))=1$ y $(2,1)$ es un vector de la imagen, una base estará formada por el vector $(2,1)$ y por tanto no hay posibilidad de que $(1,2)$ esté también en la imagen. Entonces, un vector que hace que $\|f(\mathbf{x})-(1,2)\|$ sea lo más pequeño posible será la solución por mínimos cuadrados del sistema:

$$\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&0\\2&1\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&1\\-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&5&-5\\0&-5&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}\Rightarrow x_2-x_3=\frac{4}{5}\Rightarrow \text{Sol: }(\alpha,\beta,\frac{4}{5}+\beta)$$

4. **[2 ptos.]** Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}\alpha&-\alpha&0&0\\0&\alpha+1&1-\alpha&0\\0&0&2\alpha&0\\1&1&2&2\alpha\end{pmatrix}$$

donde $\alpha\in\mathbb{R}$.

4.a) Estudiar para qué valores de α la matriz es diagonalizable.

4.b) Para $\alpha=1$, encontrar la forma canónica de Jordan.

Solución:

4.a) Calculamos los autovalores de A:

$$\begin{vmatrix} \alpha-\lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha+1-\lambda & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2\alpha-\lambda \end{vmatrix} = (2\alpha-\lambda)^2(\alpha-\lambda)(\alpha+1-\lambda)$$

Entonces,

$$\begin{cases} \text{si } \alpha \neq 0,1 \Rightarrow \text{hay 3 autovalores: } \alpha,\ \alpha+1 \text{ (simples) y } 2\alpha \text{ (doble)} \\ \text{si } \alpha = 0 \Rightarrow \text{hay 2 autovalores: 0 (triple) y 1} \\ \text{si } \alpha = 1 \Rightarrow \text{hay 2 autovalores: 1 (simple) y 2 (triple)} \end{cases}$$

luego habrá que estudiar las dimensiones de los espacios correspondientes a los autovalores múltiples. En el primer caso ($\alpha \neq 0,1$), solo es preciso estudiar

$$\dim(E_1(2\alpha)) = 4 - \text{rango}\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha+1 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4-3 = 1$$

luego no es diagonalizable.

En el segundo caso $\alpha = 0$, el autovalor triple es $\lambda = 0$ y

$$\dim(E_1(0)) = 4 - \text{rango}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4-2 = 2$$

y tampoco es diagonalizable.

Finalmente, para $\alpha = 1$, el autovalor $\lambda = 2$ es triple y

$$\dim(E_1(2)) = 4 - \text{rango}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4-2 = 2$$

y tampoco es diagonalizable.

En conclusión no es diagonalizable para ningún valor de α.

4.b) Para el caso $\alpha = 1$, los autovalores son $\lambda = 1$ (simple) y $\lambda = 2$ (triple). En el apartado anterior hemos visto que $\dim(E_1(2)) = 2$, luego $\dim(E_2(2)) = 3$ y éste es el subespacio máximo. Así pues, la partición de multiplicidad del autovalor $\lambda = 2$ es $3 = 2+1$, y le corresponde una caja de tamaño 2 y una caja de tamaño 1. La forma canónica de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5. **[1 pto.]** Sea la sucesión $1, 0, -\frac{1}{4}, \ldots$, esto es $x_n = x_{n-1} - \frac{1}{4}x_{n-2}$. Encontrar la expresión del término x_n en función de n.

Solución:

Se trata de una ecuación en diferencias cuya ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{4} = 0$, de modo que sus autovalores son $\lambda = \frac{1}{2}$ (doble). La solución general de la ecuación viene dada por

$$x_n = c_1 \left(\frac{1}{2}\right)^n + c_2 n \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

y fijamos las constantes sabiendo que $x_0 = 1$ y $x_1 = 0$, es decir

$$\begin{cases} x_0 = 1 \Rightarrow c_1 = 1 \\ x_1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1 \end{cases}$$

Es decir, la expresión final es $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (1-n)$.

6. **[1 pto.]** Responder razonadamente las siguientes cuestiones:

   6.a) ¿Existe alguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$?

   6.b) Si 0 es un autovalor simple de una aplicación $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, ¿cuál es $\dim(\ker(g))$?

   Solución:

   6.a) No puede existir, pues la matriz de una tal aplicación tendría tamaño 2×3 y por tanto su rango como máximo sería 2, mientras que para que el $\ker(f)$ sea nulo, el rango de dicha matriz tendría que ser 3.

   6.b) Como $E_1(0) = \ker(g - 0I) = \ker(g)$ está claro que $\dim(\ker(g)) = 1$, pues el autovalor es simple.

Soluciones del examen de Álgebra Lineal – Titulación de Ingeniería Industrial **19 de junio de 2012**

1. **[2.5 ptos.]** Se considera $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar habitual y el subespacio L formado por las soluciones de la ecuación $x_1 - 3x_2 = 0$. Se pide:

   1.a) Encuentra la dimensión y una base de L.

   1.b) Determina las coordenadas del vector $(3, 1, 1)$ en la base obtenida en el apartado anterior.

   1.c) Determina una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ que contenga a la base obtenida en el apartado $(1a)$.

   1.d) Calcular la proyección ortogonal sobre L del vector $(1, 0, 1)$.

   1.e) Obtener el vector de $L^\perp$ más cercano al vector $(1, 0, 1)$.

   Solución:

   1.a) Está claro que $\dim(L) = 3 - \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2$, y una base se obtiene resolviendo el sistema, dando lugar a $(3, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

   1.b) Si ponemos $(3, 1, 1) = \alpha(3, 1, 0) + \beta(0, 0, 1)$ entonces $\alpha = \beta = 1$ y las coordenadas en la base de L son $(1, 1)$.

   1.c) Obsérvese que $(3, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ son ortogonales. Luego basta encontrar un vector (x_1, x_2, x_3) tal que $(x_1, x_2, x_3) \cdot (3, 1, 0) = 0$ y $(x_1, x_2, x_3) \cdot (0, 0, 1) = 0$, que da lugar al sistema

   $$3x_1 + x_2 = 0, \;\; x_3 = 0 \Rightarrow (1, -3, 0)$$

   La base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ es $\{(3, 1, 0), (0, 0, 1), (1, -3, 0)\}$

   1.d) Como la base de L es ortogonal, la proyección es

   $$\mathcal{P}_L(1, 0, 1) = \frac{(1, 0, 1) \cdot (3, 1, 0)}{\|(3, 1, 0)\|^2}(3, 1, 0) + \frac{(1, 0, 1) \cdot (0, 0, 1)}{\|(0, 0, 1)\|^2}(0, 0, 1) = \tfrac{3}{10}(3, 1, 0) + (0, 0, 1) = \left(\tfrac{9}{10}, \tfrac{3}{10}, 1\right)$$

   1.e) Nos piden la proyección ortogonal del $(1, 0, 1)$ sobre $L^\perp$, es decir $\mathcal{Q}_L(1, 0, 1)$. Dado que

   $$(1, 0, 1) = \mathcal{P}_L(1, 0, 1) + \mathcal{Q}_L(1, 0, 1) \Rightarrow \mathcal{Q}_L(1, 0, 1) = (1, 0, 1) - \left(\tfrac{9}{10}, \tfrac{3}{10}, 1\right) = \left(\tfrac{1}{10}, -\tfrac{3}{10}, 0\right)$$

2. **[1.5 ptos.]** Considera la aplicación lineal

   $$\begin{array}{rccl} A: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \mathbf{x} & \longmapsto & A(\mathbf{x}) = (-x_1 + x_3, x_1 - x_3, -x_1 + x_2) \end{array}$$

   2.a) Calcula la matriz de la aplicación A respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

   2.b) Calcula una base del $\ker(A)$ y un sistema de ecuaciones implícitas de $\text{Im}(A)$.

   2.c) ¿Se verifica que $\ker(A) \oplus \text{Im}(A) = \mathbb{R}^3$?

   Solución:

   2.a) La matriz de A en las base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   2.b) Como $\text{rango}(A) = 2$, entonces $\dim(\ker(f)) = 3 - 2 = 1$ y un base se obtiene resolviendo el sistema

   $$-x_1 + x_3 = 0, \;\; -x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow (1, 1, 1)$$

   La $\text{Im}(f)$ vendrá dada por los vectores columna de A, luego una base está formada por $(1, -1, 0)$ y $(0, 0, 1)$, y obviamente $\dim(\text{Im}(f)) = 2$. Un sistema de ecuaciones implícitas se obtiene de

   $$\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

2.c) El espacio $\ker(f)+\mathrm{Im}(f)$ viene dado por los vectores $(1,1,1)$, $(1,-1,0)$ y $(0,0,1)$. Como

$$\text{rango}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=3\Rightarrow \ker(f)+\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$$

Por la fórmula de la dimensión, $\dim(\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f))=0$ luego se verifica $\mathbb{R}^3=\ker(f)\oplus\mathrm{Im}(f)$.

3. **[1.5 ptos.]** En $\mathbb{R}^3$ se considera la recta vectorial L generada por el vector $(1,1,1)$. Encontrar la matriz de la aplicación lineal en la base canónica correspondiente a un giro de $180°$ respecto de L.

Solución:

Encontremos primero la matriz del giro f en una cierta base, y luego cambiaremos de base. Como se trata de un giro respecto de la recta L, generada por el $(1,1,1)$ es evidente que

$$f(1,1,1)=(1,1,1)$$

Por otra parte, si consideramos un plano perpendicular a la recta, esto es, el plano $x_1+x_2+x_3=0$, los vectores de ese plano se transforman en su vector opuesto, luego

$$f(-1,1,0)=(1,-1,0),\quad f(-1,0,1)=(1,0,-1)$$

Así pues, sin consideramos la base $\mathcal{B}=\{(1,1,1),(-1,1,0),(-1,0,1\}$, la matriz del giro respecto de la base $\mathcal{B}$ en el espacio de partida y la base canónica en el espacio de llegada es

$$A=M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}}(f)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Finalmente hacemos el cambio de base

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \arrow[d, "I"] \\ \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "C"] & \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

donde P es la matriz de cambio de base de la canónica de $\mathbb{R}^3$ a $\mathcal{B}$:

$$P=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$

y

$$C=AP=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

4. **[1.5 ptos.]** Sea $A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ la aplicación cuya matriz en la base canónica es

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 2 & -2\\ -1 & -1 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

de la que se sabe que $\lambda=3$ es un autovalor de multiplicidad 4, una base de $E_1(3)$ es $\{(-1,1,0,0),(1,0,-1,1)\}$ y $(A-3I)^2=0$. Calcula **razonadamente** la forma de Jordan de A y una matriz de paso.

Solución:

Está claro que $\lambda=3$ es el único autovalor, además $\dim(E_1(3))=2$ y $\dim(E_2(3))=4$, luego $E_2(3)$ es el subespacio máximo, $q_1=2$, $q_2=4$ y por tanto $p_1=2$, $p_2=2$. La partición de multiplicidad es $4=2+2$ a la que le corresponde 2 cajas de tamaño 2:

$$J=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right)$$

Para calcular la matriz de paso basta observar que $E_2(3) = \mathbb{R}^4$, luego cualquier base de $\mathbb{R}^4$ nos es válida (por ejemplo, la canónica). Construimos la tabla:

$E_2(3)$	$(0,0,1,0)$	$(0,0,0,1)$
$E_1(3)$	$(1,0,-1,1)$	$(1,1,-2,2)$

en la que hemos cogido dos vectores $\mathbb{R}^4$ que no estuvieran en $E_1(3)$, y los hemos multiplicado por $A - 3I$. La matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **[1.5 ptos.]** Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dado el vector $\mathbf{x}_0 = (2,1)$, encontrar $\lim\limits_{n\to\infty} A^n\mathbf{x}_0$.

Solución:

Nótese que nos han dado la forma canónica de A y la matriz de paso. Más aun, A tiene un autovalor doble $\lambda = 1$ y el único autovector es el $(2,1)$ que coincide con $\mathbf{x}_0$, por tanto

$$A^n\mathbf{x}_0 = 1^n\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_0 \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbf{x}_0$$

El estado límite es $(2,1)$.

6. **[1.5 ptos.]** Encontrar el polinomio de segundo grado que mejor aproxime a los puntos $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ y $(3,5)$.

Solución:

Buscamos un polinomio de la forma $y = ax^2 + bx + c$ que interpole estos puntos, luego se ha de cumplir:

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \\ 9a + 3b + c = 5 \end{cases}$$

Como el sistema no tiene solución, lo resolvemos mediante mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

esto es

$$\begin{pmatrix} 98 & 36 & 14 \\ 36 & 14 & 6 \\ 14 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 23 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow a = \frac{1}{4},\ b = \frac{11}{20},\ c = \frac{21}{20}$$

luego el polinomio es $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{11}{20}x + \frac{21}{20}$.

Álgebra – Grados de Ingeniería Industrial **Soluciones** **14 de enero de 2013**

1. **[1 pto.]** Obtener la expresión cartesiana del número complejo

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}\right)^6$$

Solución:

$$\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}\right)^6 = \left(\frac{2e^{-\frac{\pi}{3}i}}{e^{\frac{3\pi}{4}i}}\right)^6 = 2^6 e^{-\frac{13\pi}{2}} = -64i$$

2. **[3.5 ptos.]** En el espacio vectorial $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ con el producto escalar:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = 2a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ y $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$, se consideran los subespacios

$$W_1 = \{p(x) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] : p(1) = p'(0) = 0\}, \qquad W_2 = L(\{x^2 - x + 1\})$$

2.a) Encontrar una base de W_1 y un sistema de ecuaciones implícitas de W_2.

2.b) ¿Pertenece el polinomio $x^3 - x^2$ a alguno de los subespacios anteriores? En caso afirmativo, encontrar las coordenadas de este polinomio en la base del espacio al que pertenece.

2.c) Hallar la dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas del subespacio $W_1 + W_2$.

2.d) Ampliar la base de $W_1 + W_2$ obtenida en el apartado anterior a una base de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$, tal que las coordenadas del polinomio $x^3 + x^2 + x + 1$ sean $(1, 1, 1, 1)$.

2.e) Obtener la matriz de cambio de base entre la base obtenida en el apartado anterior y la base canónica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$.

2.f) Calcular la proyección ortogonal del polinomio $x^3 + 1$ sobre $W_2^{\perp}$.

Solución:

2.a)

$$p(x) = x_1 + x_2x + x_3x^2 + x_4x^3 \Rightarrow \begin{cases} p(1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ p'(0) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-1,0,1,0) \to x^2 - 1 \\ (-1,0,0,1) \to x^3 - 1 \end{cases}$$

Base de W_1: $\{x^2 - 1, x^3 - 1\}$.

$$x^2 - x + 1 \to (1,-1,1,0) \Rightarrow \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ x_1 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{cases}$$

Sistema de ecuaciones implícitas de W_2: $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, $x_4 = 0$.

2.b) $x^3 - x^2 = (-1)(x^2 - 1) + (x^3 - 1) \Rightarrow$ Coordenadas: $(-1, 1)$.

2.c) Sistema generador de $W_1 + W_2$: $\{x^2 - 1, x^3 - 1, x^2 - x + 1\}$

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(W_1 + W_2) = 3$$

Base de $W_1 + W_2$: $\{x^2 - 1, x^3 - 1, x^2 - x + 1\}$.
Sistema de ecuaciones implícitas de $W_1 + W_2$:

$$\text{rango}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

2.d)
$$x^3+x^2+x+1=(1)\cdot(x^2-1)+(1)\cdot(x^3-1)+(1)\cdot(x^2-x+1)+(1)\cdot q(x)$$
luego $q(x)=-x^2+2x+2$.

2.e)
$$\begin{pmatrix}-1&-1&1&2\\0&0&-1&2\\1&0&1&-1\\0&1&0&0\end{pmatrix}$$

2.f) Es más rápido calcular $\mathcal{P}_{W_2}(x^3+1)$ pues $x^3+1=\mathcal{P}_{W_2}+\mathcal{P}_{W_2^\perp}\Rightarrow\mathcal{P}_{W_2^\perp}=x^3+1-\mathcal{P}_{W_2}$
$$\mathcal{P}_{W_2}(x^3+1)=\alpha(x^2-x+1):\quad\langle(x^3+1)-\alpha(x^2-x+1),x^2-x+1\rangle=0\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}$$
Luego $\mathcal{P}_{W_2}(x^3+1)=\frac{1}{2}(x^2-x+1)\Rightarrow\mathcal{P}_{W_2^\perp}(x^3+1)=x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

3. **[2 ptos.]** Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una aplicación lineal de la que sabemos que:

- $\ker(f)^\perp=L((1,2,0),(0,1,0))$
- $f^{-1}(1,0,1)=(0,1,0)$
- $(2,0,1)$ es un autovector de f asociado a $\lambda=2$.

Se pide:

3.a) Hallar la matriz respecto de la base canónica de f.

3.b) ¿Existe algún vector $\mathbf{x}$ tal que $f(\mathbf{x})=(1,1,1)$? En caso negativo, encontrar todos los vectores $\mathbf{x}$ que minimizan $\|f(\mathbf{x})-(1,1,1)\|$.

Solución:

3.a) $\ker(f)=\{x_1+2x_2=0,\ x_2=0\}\Rightarrow$ Base: $(0,0,1)$. Luego $f(0,0,1)=(0,0,0)$.
$f^{-1}(1,0,1)=(0,1,0)\Rightarrow f(0,1,0)=(1,0,1)$
$(2,0,1)$ es autovector asociado a $\lambda=2\Rightarrow f(2,0,1)=2\cdot(2,0,1)=(4,0,2)$. Como
$$(4,0,2)=f(2,0,1)=2f(1,0,0)+f(0,0,1)=2f(1,0,0)\Rightarrow f(1,0,0)=(2,0,1)$$
Luego la matriz respecto de la base canónica es
$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$$

3.b) La imagen de f está generada por $(2,0,1)$ y $(1,0,1)$. Es evidente que $(1,1,1)$ no está en la imagen. Para encontrar $\mathbf{x}$ que minimiza $\|f(\mathbf{x})-(1,1,1)\|$ resolvemos por mínimos cuadrados el sistema
$$\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\0&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
esto es,
$$\begin{pmatrix}5&3&0\\3&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\mathbf{x}=(0,1,\alpha)$$

4. **[1.5 ptos.]** Dada la matriz
$$A=\begin{pmatrix}-2&1&0&-1\\1&-2&0&-1\\-1&-3&-3&2\\2&2&0&-5\end{pmatrix}$$
sabemos que:

- -3 es un autovalor de multiplicidad 4
- $E_1(-3) = L((0,0,1,0),(1,1,0,2))$
- $(A+3I)^2 = \mathbf{0}$

Obtener **razonadamente** la forma canónica de Jordan y una matriz de paso.

Solución:

Está claro que no hay más autovalores y que el espacio máximo es $E_2(-3)$ pues $\dim(E_2(-3)) = 4$. Además $E_2(-3) = \mathbb{R}^4$. Se tiene que $q_1 = 2$, $q_2 = 4$ y por tanto $p_1 = 2$ y $p_2 = 2$. La partición de multiplicidad es $4 = 2+2$. A esta partición le corresponden 2 cajas de tamaño 2, es decir:

$$J = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

La tabla de espacios es

$p_2 = 2$	$E_2(-3)$	$(1,0,0,0)$	$(0,0,0,1)$
$p_1 = 2$	$E_1(-3)$	$(1,1,-1,2)$	$(-1,-1,2,-2)$

y la matriz de paso queda:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. **[1 pto.]** Resolver la ecuación en diferencias:

$$x_{k+4} - x_{k+3} - x_{k+1} + x_k = 0$$

con los datos iniciales $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$.

Solución: La ecuación característica es $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1 = 0$. Buscando raíces por Ruffini encontramos que

$$\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda + 1 = (\lambda-1)^2(\lambda^2+\lambda+1)$$

luego hay una raíz real doble (1) y dos raíces complejas conjugadas $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Como $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{\frac{2\pi}{3}i}$, la solución general es

$$x_k = c_1\cos(\tfrac{2\pi k}{3}) + c_2\operatorname{sen}(\tfrac{2\pi k}{3}) + c_3 + c_4 k$$

Los datos se traducen en:

$$\begin{array}{c} c_1 + c_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 + c_3 + 2c_4 = 2 \\ c_1 + c_3 + 3c_4 = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = -1 \\ c_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ c_3 = 1 \\ c_4 = 0 \end{array}$$

y la solución será: $x_k = -\cos(\frac{2\pi k}{3}) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}(\frac{2\pi k}{3}) + 1$.

6. **[1 pto.]** Responder **razonadamente**:

6.a) Si A es una matriz de orden n tal que verifica $A^2 - A + I = 0$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A) No existe A^{-1}.

B) Si existe A^{-1} entonces $A^{-1} = I - A$.

C) Solo existe A si $A = I$.

D) Ninguna de las anteriores afirmaciones es correcta.

6.b) Una matriz $A \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tiene un autovalor $\lambda = 2$ cuya partición de multiplicidad es $7 = 3+2+1+1$. Calcular rango$(A-2I)^2$.

Solución:

6.a) La afirmación correcta es la B, pues si $A^2 - A + I = 0$ y existe A^{-1}, multiplicando esta expresión resulta:

$$A^{-1}(A^2 - A + I) = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow A - I + A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = I - A$$

6.b) Con esta partición de multiplicidad, $\dim(E_1(2)) = 3$, $\dim(E_2(2)) = 5$, luego $\text{rango}(A - 2I)^2 = 9 - 5 = 4$.

Álgebra – Convocatoria Extraordinaria **17 de junio de 2013**

1. **[1 pto.]** Obtener la forma binomial de todos los números complejos z tales que $z^6 = -8$, con $\text{Re}(z) < 0$.

   Solución:

   Escribimos -8 en forma polar: $-8 = 8e^{(\pi+2k\pi)i}$. Por tanto, $z = 8^{\frac{1}{6}}e^{(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})i} = \sqrt{2}e^{(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3})i}$, que para $k = 0, 1, \ldots, 5$ proporciona seis números distintos. Los que tienen parte real negativa corresponden a $k = 2$ y $k = 3$, esto es

$$z_1 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{6}i} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

2. **[2 ptos.]** En el espacio vectorial $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ con el producto escalar:

$$\langle A, B\rangle = \text{tr}(A^T B)$$

   donde $\text{tr}(A)$ denota la traza de la matriz A (la suma de los elementos diagonales), se consideran los subespacios

$$L_1 = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A + A^T = 0\} \text{ y } L_2 = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) : A - A^T = 0\}$$

   Calcular la dimensión y una base de los espacios L_1, L_2, $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1^{\perp}$ y $L_2^{\perp}$.

   Solución:

   Para L_1 tomamos $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ e imponemos la condición $A + A^T = 0$,

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_2 = 0 \\ 2x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

   Resolviendo el sistema se encuentra que $\dim(L_1) = 1$ y una base está formada por $\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

   Para L_2:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \; x_2 - x_3 = 0$$

   Resolviendo, $\dim(L_2) = 3$ y una base está formada por $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

   Para $L_1 \cap L_2$ basta estudiar el sistema formado por las ecuaciones de ambos espacios:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

cuya solución es claramente $(0,0,0,0)$, luego $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$, es decir $L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$. Por la fórmula de la dimensión se tiene fácilmente que $\dim(L_1 + L_2) = 4$, luego $L_1 + L_2 = \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$.

Para $L_1^\perp$ basta encontrar las matrices tales que

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} -x_3 & x_1 \\ -x_4 & x_2 \end{pmatrix} = x_2 - x_3 = 0$$

Obsérvese que el sistema para $L_1^\perp$ es el mismo que para L_2, es decir, $L_1^\perp = L_2$. Como consecuencia, $L_2^\perp = (L_1^\perp)^\perp = L_1$.

3. **[1 ptos.]** Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ una aplicación lineal de la que sabemos que:

   - $\ker(f) = \{x_1 + x_2 = 0\}$
   - $f^{-1}(1,1) = (1,1,1,1)$

   Calcula $f(1,2,3,4)$.

   Solución: Una base de $\ker(f)$ está formada por las soluciones independientes del sistema dado, esto es, $\{(-1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$. Así pues

$$f(-1,1,0,0) = (0,0),\ f(0,0,1,0) = (0,0),\ f(0,0,0,1) = (0,0)$$

   y $f(1,1,1,1) = (1,1)$. Si consideramos la base $\mathcal{B} = \{(-1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1)\}$, la matriz de f en la base $\mathcal{B}$ y la base canónica de $\mathbb{R}^2$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Para calcular $f(1,2,3,4)$ escribimos el vector $(1,2,3,4)$ en coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$:

$$(1,2,3,4) = \alpha_1(-1,1,0,0) + \alpha_2(0,0,1,0) + \alpha_3(0,0,0,1) + \alpha_4(1,1,1,1) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha_1 + \alpha_4 = 1 \\ \alpha_1 + \alpha_4 = 2 \\ \alpha_2 + \alpha_4 = 3 \\ \alpha_3 + \alpha_4 = 4 \end{cases}$$

   Luego $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = \frac{3}{2}$, $\alpha_3 = \frac{5}{2}$, $\alpha_4 = \frac{3}{2}$. Finalmente,

$$f(1,2,3,4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4. **[2 ptos.]** Se considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & -2a+1 & -2a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Estudiar, en función de los valores de a, su forma de Jordan.

   Solución:

   Como la matriz es triangular superior, los autovalores son $\lambda = a$ (doble) y $\lambda = 1$ (doble), siempre que $a \neq 1$. Si $a = 1$, habría un único autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad 4.

Para el caso $a \neq 1$, veamos $\dim(E_1(a))$ y $\dim(E_1(1))$.

$$A - aI = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a+1 & -2a+1 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}, \quad A - I = \begin{pmatrix} a-1 & a & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & -2a+1 & -2a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que si $a = 0$, $\text{rango}(A - aI) = 2$, luego $\dim(E_1(a)) = 2$, mientras que si $a \neq 0$ (y $a \neq 1$), $\text{rango}(A - aI) = 3$, luego $\dim(E_1(a)) = 1$. En ambos casos $\text{rango}(A - I) = 2$, luego $\dim(E_1(1)) = 2$.

Como los autovalores en este caso son dobles, concluimos que para $a = 0$, la matriz es diagonalizable, y su forma de Jordan será

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{caso } a = 0]$$

y para $a \neq 1$, $a \neq 0$, el autovalor a no aporta dos autovectores, luego es un caso no diagonalizable. No es necesario calcular las cajas, pues es inmediato que tiene que ser una caja de tamaño dos para el autovalor a:

$$J = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{caso } a \neq 0, 1]$$

Para $a = 1$, tenemos un autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad 4 y $\text{rango}(A - I) = 2$, luego $\dim(E_1(1)) = 2$. Calculamos $(A - I)^2$, cuyo rango es 1 y por tanto $\dim(E_2(1)) = 3$; eso implica que $\dim(E_3(2)) = 4$, que es el subespacio máximo. La partición de multiplicidad en este caso es $4 = 2 + 1 + 1$ que corresponde a una caja de tamaño 3 y 1 de tamaño 1. La forma de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad [\text{caso } a = 1]$$

5. **[1.5 ptos.]**

5.a) Encuentra una solución por el método de mínimos cuadrados del sistema

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 = 2 \\ 2x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

5.b) Calcular la proyección ortogonal del vector $(1, 2, 3, 4)$ sobre el espacio L generado por los vectores $\{(1, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 2)\}$.

Solución:

5.a) Basta multiplicar por la matriz traspuesta del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = 4 \end{array}$$

5.b) Nótese que el espacio L es el mismo espacio que el generado por las columnas de la matriz del sistema del apartado anterior. Además, resolver un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ por mínimos cuadrados equivale a resolver el sistema $A\mathbf{x} = \mathcal{P}_L(\mathbf{b})$. Así pues,

$$\mathcal{P}_L(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

6. **[1.5 pto.]** Resolver la ecuación en diferencias:

$$x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = k$$

con los datos iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 0$.

Solución:

En primer lugar hemos de resolver la ecuación homogénea asociada: $x_{k+2} + 2x_{k+1} + x_k = 0$. Para ello consideramos la ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ cuyas raíces son $\lambda = -1$ (doble). Es decir, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_k^{(h)} = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k$$

A continuación buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea, usando para ello la forma que tiene el término no homogéneo. Como se trata de un polinomio de grado uno, buscamos una solución del tipo $x_k^{(p)} = Ak + B$. Imponiendo la ecuación, resulta:

$$(A(k+2) + B) + 2(A(k+1) + B) + (Ak + B) = k \Rightarrow 4Ak + 4A + 4B = k \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4A = 1 \\ 4A + 4B = 0 \end{array} \right.$$

De aquí obtenemos una solución particular: $x_k^{(p)} = \frac{1}{4}k - \frac{1}{4}$.

Finalmente, la solución general de la ecuación no homogénea será: $x_k = c_1(-1)^k + c_2 k(-1)^k + \frac{1}{4}k - \frac{1}{4}$. Imponiendo las condiciones iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ se tiene que $c_1 = -c_2 = \frac{5}{4}$, siendo la solución final:

$$x_k = \frac{5}{4}(-1)^k - \frac{5}{4}k(-1)^k + \frac{1}{4}k - \frac{1}{4}$$

7. **[1 pto.]** Responder **razonadamente**:

7.a) Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = 0$. ¿Es A invertible?

7.b) De una aplicación f no nula sabemos que $\ker(f) = \mathrm{Im}(f)$. ¿Puede ser f biyectiva?

Solución:

7.a) A no puede ser invertible pues $\det(A^2) = \det(A)\det(A) = 0 \Rightarrow \det(A) = 0$.

7.b) Para que f sea biyectiva, debería ser inyectiva, lo cual significa que $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$, luego $\mathrm{Im}(f) = \{\mathbf{0}\}$. Pero como f no es la aplicación nula, no puede tener como imagen el vector cero, por tanto no puede ser biyectiva.

Álgebra – Convocatoria Ordinaria – **Soluciones** **15 de enero de 2014**

1. **[1.5 ptos.]** Sea z un número complejo correspondiente a un vértice de un hexágono regular inscrito en la circunferencia de centro el origen y radio 2. Si sabemos que el $\arg(z) = \arg(w)$, donde w es la raíz del polinomio $w^3 + 2w^2 + 2w + 1$ que tiene parte imaginaria positiva, calcular la forma binomial de los números complejos que corresponden a los vértices del hexágono que son adyacentes a z.

   Solución:

   Calculemos en primer lugar la raíz del polinomio $w^3 + 2w^2 + 2w + 1$ que tiene parte imaginaria positiva. Para ello, buscamos primero una raíz entera mediante el método de Ruffini, obteniéndose fácilmente que $w = -1$ es raíz, y el resto de la división es el polinomio $w^2 + w + 1$, cuyas raíces son $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ y $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Obviamente, la raíz que buscamos es $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, cuyo argumento principal es $\frac{2\pi}{3}$. Así pues z es el número complejo de argumento principal $\frac{2\pi}{3}$ y de módulo 2, es decir $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

   Como los vértices que buscamos son los adyacentes a z y la diferencia de ángulos entre dos vértices consecutivos de un hexágono regular es $\frac{2\pi}{6}$, éstos serán

   $$z_1 = 2e^{(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3})i}, \quad z_2 = 2e^{(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3})i}$$

   que en forma binomial son $z_1 = -2$ y $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$.

2. **[1.5 ptos.]** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando una factorización LU:

   $$\left\{\begin{aligned} -x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 6 \\ 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}\right.$$

   Solución:

   Procedemos en primer lugar a realizar el método de Gauss sobre la matriz de coeficientes

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

   El primer paso debe corresponder a un cambio de filas, lo que significa que la factorización LU de A no es posible directamente, sino sobre una permutación previa. Si consideramos la matriz

   $$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   entonces realizamos el método de Gauss sobre

   $$PA = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

   Y ahora, a partir de la matriz identidad, realizamos las operaciones inversas, en orden invero:

   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = L$$

   Es fácil comprobar que $LU = PA$. Para resolver el sistema inicial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, multiplicamos por P y usamos la descomposición LU:

   $$PA\mathbf{x} = P\mathbf{b} \Rightarrow LU\mathbf{x} = P\mathbf{b} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \\ L\mathbf{y} &= P\mathbf{b} \end{aligned}\right.$$

de manera que resolvemos $L\mathbf{y} = P\mathbf{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 6 \\ y_2 = 4 \\ 2y_1 - 2y_2 + y_3 = 2 \Rightarrow y_3 = -2 \end{cases}$$

y luego resolvemos $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_2 + 2x_3 = 4 \\ -2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

3. **[2 ptos.]** Sea $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un endomorfismo definido por

$$f(A) = A + A^T$$

Se pide:

3.a) Calcula la matriz de la aplicación f en la base canónica.

3.b) Calcula la dimensión y una base de $\ker(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$.

3.c) Dado el subespacio $M = \{A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : A = A^T\}$, obtener su dimensión y una base, y probar que $f(M) = M$.

3.d) Si definimos $g : M \to M$ como $g(A) = f(A)$, calcular la matriz de g respecto de la base de M obtenida en el aparatado anterior y probar que $g = 2I$, con I la aplicación identidad.

Solución:

3.a) Calculemos:

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Luego la matriz de f en la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.b) Para obtener $\ker(f)$ resolvemos el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Como $\operatorname{rank}(A) = 3$, se tendrá que $\dim(\ker(f)) = 4 - 3 = 1$ y el sistema a resolver es

$$2x_1 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0, \quad 2x_4 = 0$$

Usando como parámetro $x_3 = 1$, obtenemos como base de $\ker(f)$: $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

Para $\operatorname{Im}(f)$, dado que $\operatorname{rank}(A) = 3$ entonces $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 3$ y una base estará formada por

$$\left\{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\right\}$$

3.c) Para una base de M:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}^T \Rightarrow x_2 = x_3$$

luego $\dim(M) = 3$ y una base estará formada por

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Por su parte, $f(M)$ estará generado por

$$f\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

Es ahora evidente que $\dim(f(M))=3$, y además $f(M)\subset M$, pues las imágenes obtenidas están en M. De aquí, $f(M)=M$.

3.d) Para calcular la matriz de g en la base de M obtenida en el apartado anterior, usamos sus imágenes, que ya han sido calculadas. Escribiendo las coordenadas de dichas imágenes respecto de la citada base, la matriz de g es

$$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Es evidente que $g=2I$.

4. **[2 ptos.]** Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & -2 & -1 & -1\\ 3 & 0 & -3 & -3 & 1\\ -2 & 2 & 3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -2 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

de la que se sabe que $\lambda=-1$ es un autovalor de multiplicidad 3, $\lambda=2+i$ es un autovalor simple y además,

$$\begin{gathered}E_1(-1)=L((1,0,0,1,0),(0,1,0,0,-1)),\\ E_2(-1)=L((1,-1,1,0,0),(1,0,0,1,0),(1,-1,0,1,1))\\ (-1,-2+i,2,-1,1)\in\ker(A-(2+i)I)\end{gathered}$$

Calcula **razonadamente** las formas de Jordan real y compleja de A y las correspondientes matrices de paso.

Solución:

Dado que la matriz es real, de orden 5 y que tenemos un autovalor de multiplicidad 3, y un autovalor complejo simple, está claro que el autovalor que falta es $\lambda=2-i$, también simple.

Para el autovalor $\lambda=-1$ de multiplicidad 3 tenemos que $\dim(E_1(-1))=2$ y $\dim(E_2(-1))=3$, de modo que el subespacio máximo es $E_2(-1)$. La partición de multiplicidad será $3=2+1$, a la que le corresponde una caja de tamaño 2 y una caja de tamaño 1.

Dado que los otros autovalores son simples, $\lambda=2+i$ y $\lambda=2-i$, la forma de Jordan compleja de A es

$$J_{\mathbb{C}}=\left(\begin{array}{cc|c|c|c}-1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2+i & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2-i\end{array}\right)$$

Para la matriz de paso compleja, tenemos por un lado:

$p_2=1$	$E_2(-1)$	$\mathbf{u}_1^2=(1,-1,1,0,0)$
$p_1=2$	$E_1(-1)$	$\mathbf{u}_1^1=(0,-1,0,0,1),\ (1,0,0,1,0)$

Nótese que $(A+I)(1,-1,1,0,0)^T=(0,-1,0,0,1)$.

Para el autovalor $2+i$ tenemos un autovector asociado $(-1,-2+i,2,-1,1)$, y por tanto para $2-i$ le corresponderá el vector $(-1,-2-i,2,-1,1)$. La matriz de paso compleja es:

$$P_{\mathbb{C}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0 & -2+i & -2-i\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

La forma de Jordan real y la correspondiente matriz de paso son:

$$J_{\mathbb{R}} = \left(\begin{array}{cc|c|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right), \quad P_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. **[2 ptos.]** En el espacio vectorial $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$ se considera el producto escalar:

$$\langle p(x), q(x)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

y el subespacio $W = L(\{-2x^2 - x + 1\})$. Se pide:

5.a) Calcular la matriz del producto escalar dado respecto de la base canónica de $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}[x]$.

5.b) Calcular una base ortogonal de $W^{\perp}$.

5.c) Calcular la proyección ortogonal del polinomio $x^2 + x + 1$ sobre W.

Solución:

5.a) Calculemos:

$$\langle 1, 1\rangle = 3, \quad \langle 1, x\rangle = 0, \quad \langle 1, x^2\rangle = 2, \quad \langle x, x\rangle = 2, \quad \langle x, x^2\rangle = 0, \quad \langle x^2, x^2\rangle = 2$$

Luego la matriz del producto escalar es:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

5.b) Calculemos primero una base de $W^{\perp}$, que está formado por todos los polinomios ortogonales a $-2x^2 - x + 1$, esto es:

$$\langle -2x^2 - x + 1, p(x)\rangle = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

que resulta la ecuación: $-x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$. La dimensión de $W^{\perp}$ es 2 y una base estará formada por los polinomios $\{x - 2, x^2 - 2\}$.
Para obtener una base ortogonal de $W^{\perp}$, usaremos el método de Gram-Schmidtz:

$$\mathbf{y}_1 = x - 2, \quad \mathbf{y}_2 = x^2 - 2 + \alpha(x - 2), \text{ con } \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\rangle = 0$$

Como

$$0 = \langle \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\rangle = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 - 2\alpha \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix} = 14\alpha + 8 \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{7}$$

De modo que una base ortogonal viene dada por $\{x - 2, x^2 - \frac{4}{7}x - \frac{6}{7}\}$

5.c) La proyección de $x^2 + x + 1$ sobre W será un polinomio de la forma $\alpha(-2x^2 - x + 1)$ tal que

$$\langle x^2 + x + 1 - \alpha(-2x^2 - x + 1), -2x^2 - x + 1\rangle = 0$$

Esto es,

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha & 1 + \alpha & 1 + 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = -5\alpha - 5 = 0 \Rightarrow \alpha = -1$$

Luego la proyección buscada es el polinomio $2x^2 + x - 1$.

6. **[1 pto.]** Si A es la matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ de una aplicación lineal correspondiente a un giro de eje la recta r, calcular las ecuaciones de r en coordenadas canónicas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \{(1,0,0),(1,1,0),(0,1,1)\}$$

Solución:

Al tratarse de un giro, los vectores de la recta que corresponde a su eje verifican que $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$, es decir, son autovectores asociados al autovalor 1. Por tanto, buscamos los vectores del espacio $\ker(A - I)$, es decir, las soluciones del sistema

$$\left\{ \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

que tiene un grado de libertad. Un autovector es: $(1,1,1)_{\mathcal{B}}$. Nótese que como la matriz A está referida a la base $\mathcal{B}$, estas coordenadas también están referidas a dicha base. Para obtener las ecuaciones en coordenadas canónicas debemos cambiar de base. La matriz de la base $\mathcal{B}$ a la base canónica vendrá dada por:

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el vector $(1,1,1)_{\mathcal{B}}$ tiene por coordenadas canónicas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones de la recta en coordenadas canónicas son:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right.$$

Álgebra – Convocatoria Extraordinaria **16 de junio de 2014**

1. **[1 pto.]** Se sabe que los números complejos z_1, z_2 y z_3 son las raíces cúbicas de un cierto número w. Si $z_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, calcular z_2, z_3 y w y expresarlos en forma binomial.

   Solución: Escribimos los números en forma polar para facilitar los cálculos: $|z_1| = 3$, $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6}$. Como z_1 es la raíz cúbica de w, entonces $z_1^3 = w$, es decir, $w = 3^3 e^{3\frac{\pi}{6}i} = 27i$.

   Para calcular z_2 y z_3 obtenemos las otras raíces cúbicas de $27i$:

   $$(27i)^{\frac{1}{3}} = \left(27e^{\frac{\pi}{2}i+2k\pi i}\right)^{\frac{1}{3}} = 3e^{\frac{\pi}{6}i+\frac{2k\pi}{3}i}, \quad k = 0, 1, 2$$

   Para $k = 0$ ya tenemos z_1, para $k = 1$, se tendrá $z_2 = 3e^{\frac{5\pi}{6}i} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$, y para $k = 2$, $z_3 = 3e^{\frac{3\pi}{2}i} = -3i$.

2. **[1.5 ptos.]** Discutir, en función de los valores de a, el siguiente sistema de ecuaciones:

   $$\begin{cases} x + y + z = a \\ x + ay + a^2 z = a \\ x + a^2 y + az = a \\ x + y + az = 0 \end{cases}$$

   Solución:

   Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

   Es fácil obtener que si $a \neq 1$, el menor

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)^2 \neq 0$$

   de manera que $\operatorname{rank}(A) = 3$ si $a \neq 1$. Si $a = 1$, es evidente que $\operatorname{rank}(A) = 1$.

   Veamos ahora el rango de la matriz ampliada:

   $$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a^2 & a \\ 1 & a^2 & a & a \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

   Si $a \neq 1$, estudiamos el único menor de orden 4:

   $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & a^2 & a \\ 1 & a^2 & a & a \\ 1 & 1 & a & a \end{vmatrix} = a^2(a+2)(a-1)$$

   De modo que si $a = 0$ ó $a = -2$, entonces $\operatorname{rank}(A^*) = 3$ y por tanto el sistema será compatible determinado.

   Si $a \neq 0, -2, 1$ entonces $\operatorname{rank}(A^*) = 4$ y el sistema será incompatible. Por último, si $a = 1$, está claro que $\operatorname{rank}(A^*) = 2$ y el sistema será también incompatible.

3. **[2 ptos.]** Sea $f : \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal definida por

$$f(a + bx + cx^2 + dx^3) = \begin{pmatrix} a - b - c + d & 2a - b - c - 3d \\ 3a - 2b - 2c - 2d & a - 4d \end{pmatrix}$$

Se pide:

3.a) Calcula la matriz A de la aplicación f en la bases canónicas de los espacios correspondientes.

3.b) Calcula la dimensión y una base del $\ker(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

3.c) Dado el subespacio $M = \{p(x) \in \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x] : p(1) = 0,\ p'''(0) = 0\}$, obtener su dimensión y una base.

3.d) Calcular la dimensión y una base del espacio $f(M)$.

Solución:

3.a) Calculamos las imágenes de la base canónica de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}[x]$ y escribimos sus coordenadas respecto de la base canónica de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow (1, 2, 3, 1) \\ f(x) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (-1, -1, -2, 0) \\ f(x^2) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow (-1, -1, -2, 0) \\ f(x^3) &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow (1, -3, -2, -4) \end{aligned}$$

La matriz será:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & -3 \\ 3 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

3.b) Calculamos en primer lugar el $\mathrm{rank}(A) = 2$. Para resolver el que genera $\ker(f)$ resolvemos las ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 - 4x_4 &= 0 \end{aligned} \right.$$

con parámetros x_3 y x_4, obteniéndose los vectores $(0, -1, 1, 0)$ y $(4, 5, 0, 1)$ que corresponden a los polinomios $-x + x^2$ y $4 + 5x + x^3$. Por tanto $\dim(\ker(f)) = 2$ y una base está formada por dichos polinomios. Para $\mathrm{Im}(f)$, está claro que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$ y una base está formada por los vectores columna que proporcionan el rango: $(1, 2, 3, 1)$ y $(-1, -1, -2, 0)$, que corresponden a las matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

3.c) Para obtener una base de M consideramos un polinomio genérico $p(x) = x_1 + x_2 x + x_3 x^2 + x_4 x^3$ e imponemos las condiciones:

$$\begin{aligned} &p(1) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ &p'''(0) = 0 \Rightarrow x_4 = 0 \end{aligned}$$

que constituyen un sistema de ecuaciones implícitas de M. Obtenemos una base resolviendo el sistema, teniendo en cuenta que

$$\mathrm{rank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \dim(M) = 4 - 2 = 2$$

Una base estará formada por los polinomios $1 - x^2$ y $x - x^2$.

3.d) Para obtener $f(M)$ nos bastará calcular las imágenes de una base:

$$f(1 - x^2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(x - x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es claro que $\dim(f(M)) = 1$ y una base está formada por la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

4. **[1.5 ptos.]** Sea $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$ un endomorfismo cuya matriz respecto de la base canónica es A. Si el polinomio característico de A es $p(\lambda) = (\lambda - 3)^5(\lambda + 2)^2$ y

$$\operatorname{rank}(A - 3I) = \alpha, \quad \operatorname{rank}(A + 2I) = \beta$$

4.a) ¿Para qué valores de α y β es f diagonalizable?

4.b) Para $\alpha = 4$ y $\beta = 6$, calcular todas las posibles formas de Jordan de A.

Solución:

4.a) Como los autovalores son $\lambda = 3$ de multiplicidad 5 y $\lambda = -2$ de multiplicidad 2, para que sea diagonalizable se debe tener

$$\dim(E_1(3)) = 7 - \operatorname{rank}(A - 3I) = 7 - \alpha = 5, \quad \dim(E_1(-2)) = 7 - \operatorname{rank}(A + 2I) = 7 - \beta = 2$$

Luego $\alpha = 2$ y $\beta = 5$.

4.b) Si $\alpha = 4$ entonces $\dim(E_1(3)) = 7 - 4 = 3$, que indica que no es el subespacio máximo. Aquí se pueden dar dos situaciones: o bien $\dim(E_2(3)) = 4$ (y por tanto $\dim(E_3(3)) = 5$), o bien $\dim(E_2(3)) = 5$ y ya estamos en el subespacio máximo. Por tanto caben dos posibilidades para la partición de multiplicidad de $\lambda = 3$: $5 = 3 + 1 + 1$ ó $5 = 3 + 2$.

Si $\beta = 6$ está claro que $\dim(E_1(-2)) = 1$, por tanto $\dim(E_2(-2)) = 2$ y la partición de multiplicidad ha de ser $2 = 1 + 1$.

Las posibilidades de formas de Jordan son:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|cc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|cc|c|cc} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

5. **[1 pto.]** Hallar el vector del subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 0, -1, 2)$, $(1, 1, 0, 1)$ y $(1, 2, 1, 0)$ que está más cerca del vector $(1, 1, 0, 7)$. ¿Cuál es esa distancia mínima entre este vector y el subespacio?

Solución: Está claro que nos piden la proyección ortogonal del vector $(1, 1, 0, 7)$ sobre el subespacio generado por los tres vectores dados.

En primer lugar comprobamos si los tres vectores son independientes, hecho que no se verifica, de modo que nos quedamos sólo con los vectores independientes, por ejemplo, los dos primeros. Si denotamos por $L = \langle(1, 0, -1, 2), (1, 1, 0, 1)\rangle$, buscamos entonces un vector de la forma:

$$\mathbf{v} = \alpha(1, 0, -1, 2) + \beta(1, 1, 0, 1), \text{ tal que } (1, 1, 0, 7) - \mathbf{v} \perp L.$$

Es decir,

$$\begin{array}{l} \langle(1, 1, 0, 7) - \alpha(1, 0, -1, 2) - \beta(1, 1, 0, 1), (1, 0, -1, 2)\rangle = 0 \\ \langle(1, 1, 0, 7) - \alpha(1, 0, -1, 2) - \beta(1, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 1)\rangle = 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 15 - 6\alpha - 3\beta = 0 \\ 9 - 3\alpha - 3\beta = 0 \end{array} \right.$$

de donde se obtiene $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Es decir, el vector buscado es $\mathbf{v} = (3, 1, -2, 5)$.

La distancia se obtiene calculando la norma del vector error: $\|(1, 1, 0, 7) - (3, 1, -2, 5)\| = \sqrt{12}$.

6. **[1 pto.]** Dado el subespacio de $\mathbb{R}^4$:

$$L \equiv \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Calcular la dimensión, una base y un sistema de ecuaciones implícitas de $L^\perp$.

Solución:

Puesto que estamos usando el producto escalar habitual, y dado que L viene dado en la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

es inmediato que una base de $L^\perp$ está formada por los vectores $(1, -3, 1, 1)$ y $(2, -5, 1, 2)$. La dimensión es por tanto 2 y un sistema de ecuaciones implícitas se obtiene:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ x_1 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = 0$$

esto es: $x_1 - x_4 = 0$, $-x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$.

7. **[1 pto.]** Si A es la matriz respecto de la base $\mathcal{B}$ de una aplicación lineal correspondiente a una simetría plana, calcular las ecuaciones del plano de simetría en coordenadas canónicas, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \{(2, 1, 1), (1, 1, -1), (0, -1, 1)\}$$

Solución: El plano de simetría de A viene dado por los autovectores asociados al autovalor 1, es decir, por el espacio $\ker(A - I)$: $2x_1 - 3x_2 - x_3 = 0$. Una base de este espacio está generada por los vectores $(1, 0, 2)_{\mathcal{B}}$ y $(0, 1, -3)_{\mathcal{B}}$. Nótese que puesto que la matriz A está referida a la base $\mathcal{B}$, estos vectores también. Para averiguar las ecuaciones del plano en coordenadas canónicas, bastará cambiar de base estos vectores. Es inmediato que

$$\begin{aligned} (1, 0, 2)_{\mathcal{B}} &= 1 \cdot (2, 1, 1) + 2 \cdot (0, -1, 1) = (2, -1, 3), \\ (0, 1, -3)_{\mathcal{B}} &= 1 \cdot (1, 1, -1) - 3 \cdot (0, -1, 1) = (1, 4, -4) \end{aligned}$$

Las ecuaciones vendrán dadas por

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -4 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 8x_1 - 11x_2 - 9x_3 = 0$$

8. **[1 pto.]** Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores independientes de un espacio vectorial V y sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Si

$$f(\mathbf{v}_1) = f(\mathbf{v}_2) = \cdots = f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

decidir **razonadamente** si las siguientes afirmaciones son o no ciertas:

8.a) Si $\dim V = n$, entonces f es la aplicación nula.

8.b) Si $\dim V > n$ entonces f es la aplicación nula.

8.c) Si f es la aplicación nula, entonces $\dim V < n$.

Solución:

8.a) Cierto. Por la fórmula de la dimensión para aplicaciones

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

como los vectores $\mathbf{v}_i$ están en $\ker(f)$ y son independientes, entonces $\dim(\ker(f)) \geq n$, y como $\dim(V) = n$, entonces $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 0$, es decir, f es la aplicación nula.

8.b) Falso. Si $\dim V > n$, entonces podría existir $\mathbf{w} \in V$ linealmente independiente con los $\mathbf{v}_i$ tal que $f(\mathbf{w}) \neq \mathbf{0}$, y por tanto f no será la aplicación nula.

8.c) Falso. Si los $\mathbf{v}_i$ son independientes, entonces $\dim V$ no puede ser inferior a n.