EXAMEN 4.

PREGUNTA 1. Probar que si una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es continua entonces es integrable.

PREGUNTA 2 Hallar $I=\int \frac{dx}{\cos^2(x)}$

Evidentemente es $tg(x)+K$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+K\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Nota: ¡Hay alumnos que la hecho mal y otros que le ha llevado una hoja entera!

PREGUNTA 3. Estudiar la convergencia de la integral

$$I=\int_{1+}^{3-}\frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}$$

$$\int_{1-}^{3+}\frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}} = \underbrace{\int_{1-}^{c}\frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}_{I_1} + \underbrace{\int_{c}^{3+}\frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}_{I_2}$$

$\underline{I_1}$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}{\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}} = \lim_{x\to 1+}\frac{1}{\sqrt{3-x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

luego I_1 y $\int_{1+}^{c}\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$ tienen el mismo carácter

Pero

$$\int_{1}^{c}\frac{1}{(x-1)^{1/2}} = \left.\frac{(x-1)^{1/2}}{1/2}\right|_{1}^{c} = 2(c-1) < +\infty$$

Por tanto I_1 es convergente

I_2

$$\lim_{x\to 3-}\frac{\frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}{\frac{1}{\sqrt{(3-x)}}} = \lim_{x\to 3-}\frac{1}{\sqrt{(x-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

luego I_2 y $\int_{c}^{3}\frac{1}{\sqrt{(3-x)}}$ tienen el mismo carácter pero

$$\int_c^{3^-} \frac{1}{\sqrt{(3-x)}}\,dx = -\frac{(3-x)^{1/2}}{1/2}\Big|_c^3 = 2(3-c)^{1/2}$$

Por tanto I_2 es convergente

luego I es convergente

Nota: Algunos estudiantes han decidido calcularla bien convirtiéndola en una beta.

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}} = \left\{\begin{array}{l} t=(x-1) \quad x=t+1 \\ dx=dt \\ (3-x)=(2-t) \\ x=1 \to t=0 \\ x=3 \to t=2 \end{array}\right\} = \int_0^2 (2-t)^{-1/2}\, t^{-1/2}\,dt$$

$$= \left\{\begin{array}{l} t=2u \\ dt=2du \\ t=0 \to u=0 \\ t=2 \to u=1 \end{array}\right\} = \underbrace{\int_0^1 (1-u)^{-1/2}\, u^{-1/2}\,du}_{\beta(1/2,1/2)} = \sqrt{\pi}\sqrt{\pi} = \pi$$

o bien calculando una primitiva

$$\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}} = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$$

$$= \operatorname{arcosen}(x-2)\Big|_1^3 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

PREGUNTA 4. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_1^\infty \frac{(1+\log(x))^n}{n!}$ $x>0$. Hallar la suma.

Criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(1+\log(x))^n}{n!}}{\frac{(1+\log(x))^{n+1}}{(n+1)!}} = \lim \frac{1+\log(x)}{n+1} = 0$$

luego converge $\forall x>0$

si hacemos el cambio $t = 1+\log(x)$ $\quad \sum_1^\infty \frac{t^n}{n!} = e^t - 1$

luego $\quad \sum_1^\infty \frac{(1+\log(x))^n}{n!} = e^{1+\log(x)} - 1 = e\cdot x - 1.$