Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2018, 1ª. Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Endomorfismo diagonalizable.

(b) Forma cuadrática.

(c) Producto escalar.

(d) Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial.

Ejercicio 1: (2 puntos)

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $g : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal y $\Phi(v) = g(v, v)$ una forma cuadrática. Demuestre que $f_\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $f_\Phi(u, v) = \frac{1}{2}[\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$ es una forma bilineal simétrica.

Ejercicio 2: (3 puntos)

(a) Demuestre que si A es una matriz de orden n tal que $A^2 + A - 2I_n = 0$, entonces A es diagonalizable. Hágalo utilizando un polinomio anulador.

(b) ¿Cuáles son las posibles matrices de Jordan semejantes a A?

Ejercicio 3: (3 puntos)

Sea f la isometría de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Clasifique la isometría determinando los elementos geométricos que la caracterizan (eje y ángulo de giro y/o base de simetría, según corresponda).

(b) Halle todos los planos $f-$invariantes que contengan exactamente dos rectas invariantes.

Soluciones

Ejercicio 1: Proposición 7.16 parte(2), página 260.

Ejercicio 2:
(a) Demuestre que si A es una matriz de orden n tal que $A^2+A-2I_n=0$, entonces A es diagonalizable. Hágalo utilizando un polinomio anulador.
(b) ¿Cuáles son las posibles matrices de Jordan semejantes a A?

Solución: (a) De la ecuación $A^2+A-2I_n=0$ se deduce que $q(t)=t^2+t-2=(t-1)(t+2)$ es un polinomio anulador de A. Entonces, el polinomio mínimo de A, $m_A(t)$, que es divisor de $q(t)$, puede ser alguno de los siguientes:

(1) $m_A(t)=t-1$

(2) $m_A(t)=t+2$

(3) $m_A(t)=(t-1)(t+2)$

En cualquiera de los casos la matriz A es diagonalizable, pues su polinomio mínimo no tiene raíces múltiples, y esto implica que los bloques de Jordan de la correspondiente matriz de Jordan semejante a A son todos de tamaño 1×1. Es una consecuencia del Teorema 6.22, pág. 246, y se explica en la Observación de la pág. 247.

(b) Las matrices de Jordan semejantes a A dependerán del polinomio mínimo. Distinguiendo cada caso:

(b.1) Si $m_A(t)=t-1$, entonces el único autovalor de A es 1 y por ser la matriz de Jordan diagonal es $J=I_n$.

(b.2) $m_A(t)=t+2$, entonces el único autovalor de A es -2 y por ser la matriz de Jordan diagonal es $J=-2I_n$.

(b.3) $m_A(t)=(t-1)(t+2)$, entonces A tiene dos autovalores $\lambda_1=1$ y $\lambda_2=-2$ de multiplicidades algebraicas a_1 y a_2 tales que $a_1+a_2=n$. La matriz de Jordan semejante a A es, salvo permutación de bloques, la matriz diagonal

$$J=\operatorname{diag}(1,\overset{a_1}{\ldots},1,-2,\overset{a_2}{\ldots},-2)$$

Ejercicio 3: Sea f la isometría de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Clasifique la isometría determinando los elementos geométricos que la caracterizan (eje y ángulo de giro y/o base de simetría, según corresponda).
(b) Halle todos los planos $f-$invariantes que contengan exactamente dos rectas invariantes.

Solución: (a) Para determinar el tipo de isometría determinamos la dimensión del subespacio vectorial de los vectores fijos por f:

$$\dim V_1 = \dim \operatorname{Ker}(f - \mathrm{Id}) = 3 - \operatorname{rg}(A - I_3) = 3 - 1 = 2$$

Entonces, al ser V_1 un plano la isometría es una simetría ortogonal de base dicho plano.
Unas ecuaciones implícitas del plano base de la simetría f son $(A - I_3)X = 0$, es decir:

$$\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} - 1 & \frac{-2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} - 1 & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Simplificando se obtiene la única ecuación linealmente independiente que determina el plano

$$V_1 \equiv \{2x + y + z = 0\}$$

(b) Si P es un plano invariante que contiene exactamente dos rectas invariantes, pongamos $R_1 = L(v_1)$ y $R_2 = L(v_2)$, entonces v_1 y v_2 son dos autovectores asociados a autovalores distintos (en este caso los únicos posibles son 1 y -1 y la matriz de la restricción de f a P en la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$, de P, es (véase el caso 2.1, página 228)

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f|_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Así, tomando todos los posibles $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_{-1}$ determinaremos todos los planos pedidos.
En primer lugar, V_{-1} es el subespacio propio asociado al autovalor -1 que en el caso de una simetría ortogonal hiperplano es la recta ortogonal a la base de la simetría:

$$V_{-1} = V_1^{\perp} = L((2,1,1)) \ \Rightarrow \ v_2 = (2,1,1)$$

Los vectores del plano V_1 se obtienen resolviendo la ecuación lineal homogénea $2x + y + z = 0$ y son de la forma

$$V_1 = \{(\alpha, \beta, -2\alpha - \beta) : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

Entonces, los planos pedidos son de la forma:

$$P_{\alpha,\beta} = L((\alpha, \beta, -2\alpha - \beta), \ (2,1,1)) \ \text{ con } \ (\alpha, \beta) \neq (0,0)$$

todos ellos contienen a la recta V_{-1}.

Otro modo de resolver este apartado es hacerlo es desde la forma canónica de Jordan y obtener los planos invariantes respecto de la base de Jordan. Es decir, dada la base $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal tal que

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

en esta base se hace el mismo razonamiento anterior, pero las ecuaciones y coordenadas son más sencillas. Los planos invariantes son de la forma $L(v_1) \oplus L(v_2)$ con $v_1 \in V_1 = L(u_1, u_2)$ y $v_2 \in V_{-1} = L(v_3)$. Luego

$$P_{\alpha,\beta} = L(\alpha u_1 + \beta u_2, u_3), \quad \text{con} \quad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

y sus ecuaciones respecto de la base $\mathcal{B}'$ son $P_{\alpha,\beta} \equiv \{\beta x - \alpha y = 0\}$. Se trata del haz de planos que contiene a la recta V_{-1}. Todos ellos son perpendiculares al plano base de la simetría.