Cálculo de Probabilidades I

Temas: 1 y 2

Grado en Matemáticas

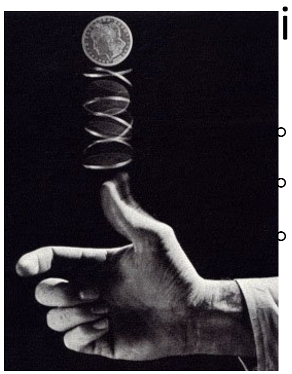
Tutor Online: Sergio García Sánchez. CA Albacete

Tema 1: La experiencia del azar

- ## 1.1 El concepto de azar
  - Leyes ≠ Azar
  - Determinismo ≠ Aleatorio

- *¿Cómo osamos hablar de leyes del azar? ¿No es, acaso, el azar la antítesis de cualquier ley?* Bertrand Rusell

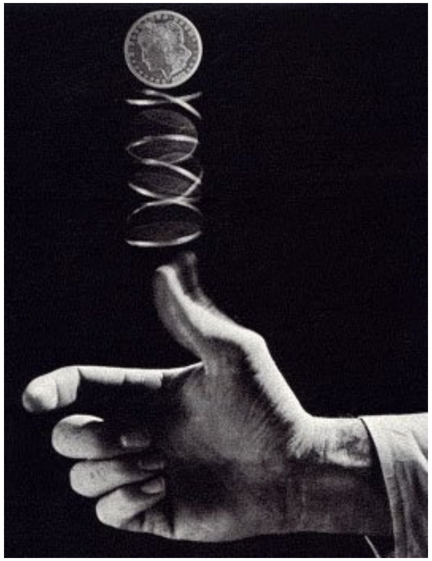
- Entenderemos por **experimento aleatorio** cualquier situación que, realizada en las mismas condiciones, proporcione un resultado imposible de predecir a priori.



  - Lanzar un dado
  - Extraer una carta de una baraja
  - Se lanza una moneda. Si sale cara se extrae de una urna U1, con una determinada composición de bolas de colores, una bola y si sale cruz de extrae de una urna U2, con otra determinada composición de bolas de colores, una bola.

Tema 1: La experiencia del azar

- 1.2 La idea de probabilidad
  - Frecuencia que presenta un suceso después de numerosas observaciones del fenómeno
  - En un fenómeno aleatorio, **la probabilidad** de cada uno de los acontecimientos posibles **es un número entre 0 y 1.**
  - No es sencillo asignar probabilidades a sucesos. Ejemplo 1.3 del libro de texto, páginas 9 y 10.

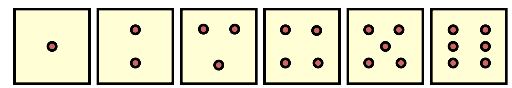


Tema 2: El modelo matemático de probabilidad

2.2 Espacio muestral y sucesos

- Cuando se realiza un experimento aleatorio, diversos resultados son posibles. El conjunto de todos los resultados posibles se llama **espacio muestral (Ω)**

- *Ejemplo:*
  - *Experimento aleatorio: Lanzar un dado*
  - *Espacio muestral:* Ω = {1,2,3,4,5,6}



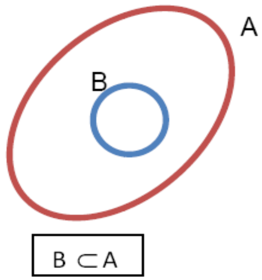
- Se llama **suceso** o evento a un subconjunto de dichos resultados. Distinguiremos entre sucesos simples (o indivisibles) y compuestos (o divisibles).

- *Ejemplo: el suceso A = "que el resultado sea par": A = {2, 4, 6} es un suceso compuesto.*

- **Suceso seguro = Ω** **Suceso imposible:** ∅ (vacío)

Tema 2: El modelo matemático de probabilidad

- Se llama suceso **<u>unión</u>** de A y B, **A ∪ B**, al formado por los resultados experimentales que están en A o en B (incluyendo los que están en ambos).
- Se llama suceso **<u>intersección</u>** de A y B, **A ∩ B**, al formado por los resultados experimentales que están simultáneamente en A y B. Dos sucesos son mutuamente <u>excluyentes</u> o <u>incompatibles</u> si A ∩ B = Ø, donde Ø es el conjunto vacío.
- Suceso **<u>complementario</u>**: $A^c = \Omega - A$
- <u>Inclusión</u>: B⊂A.



Se lee: B incluido en A

- Observemos que un suceso y su complementario son siempre mutuamente excluyentes y su unión es todo el espacio E.

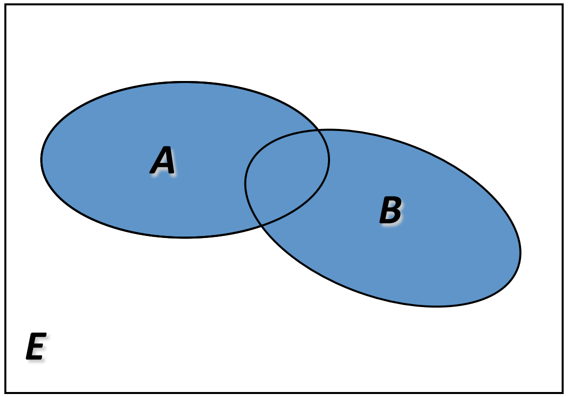
$$A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$$

- La unión y la intersección de múltiples sucesos se define de forma similar:

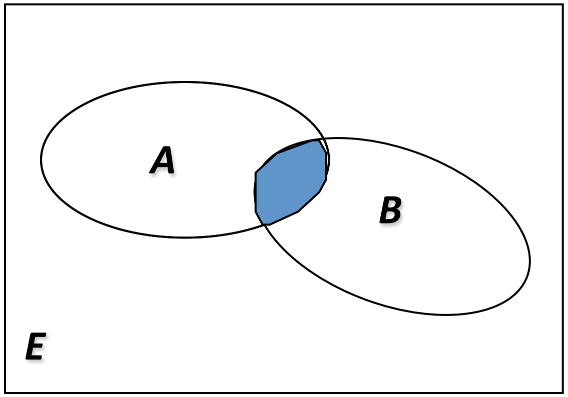
$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \qquad \bigcap_{j=1}^{m} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m$$

Tema 2: El modelo matemático de probabilidad

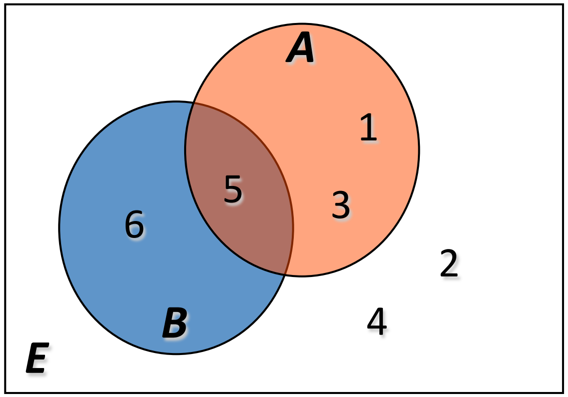
Diagramas de Venn



Unión $A \cup B$



Intersección $A \cap B$



$A=\{1,3,5\}$, $B=\{5,6\}$
$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

Sigamos con el dado:

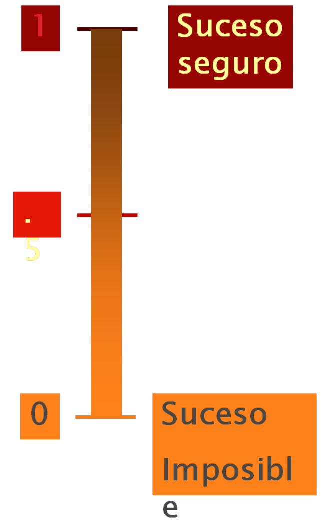
Sucesos A= *Un número impar*, B= *Un número mayor que 4.*

$A^c=\{2, 4, 6\}$ $\quad$ $B^c=\{1, 2, 3, 4\}$

$A \cup B=\{1, 3, 5, 6\}$ $\quad$ $A \cap B = \{5\}$

$(A \cup B)^c=\{2, 4\}$ $\quad$ $(A \cap B)^c = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

Tema 2: El modelo matemático de probabilidad



- ## 2.3 El concepto de probabilidad

La Teoría de la Probabilidad, como disciplina matemática, puede y debe ser desarrollada a partir de unos axiomas, de la misma manera que la Geometría o el Álgebra. Andrei Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*.

- ### Definición axiomática de probabilidad

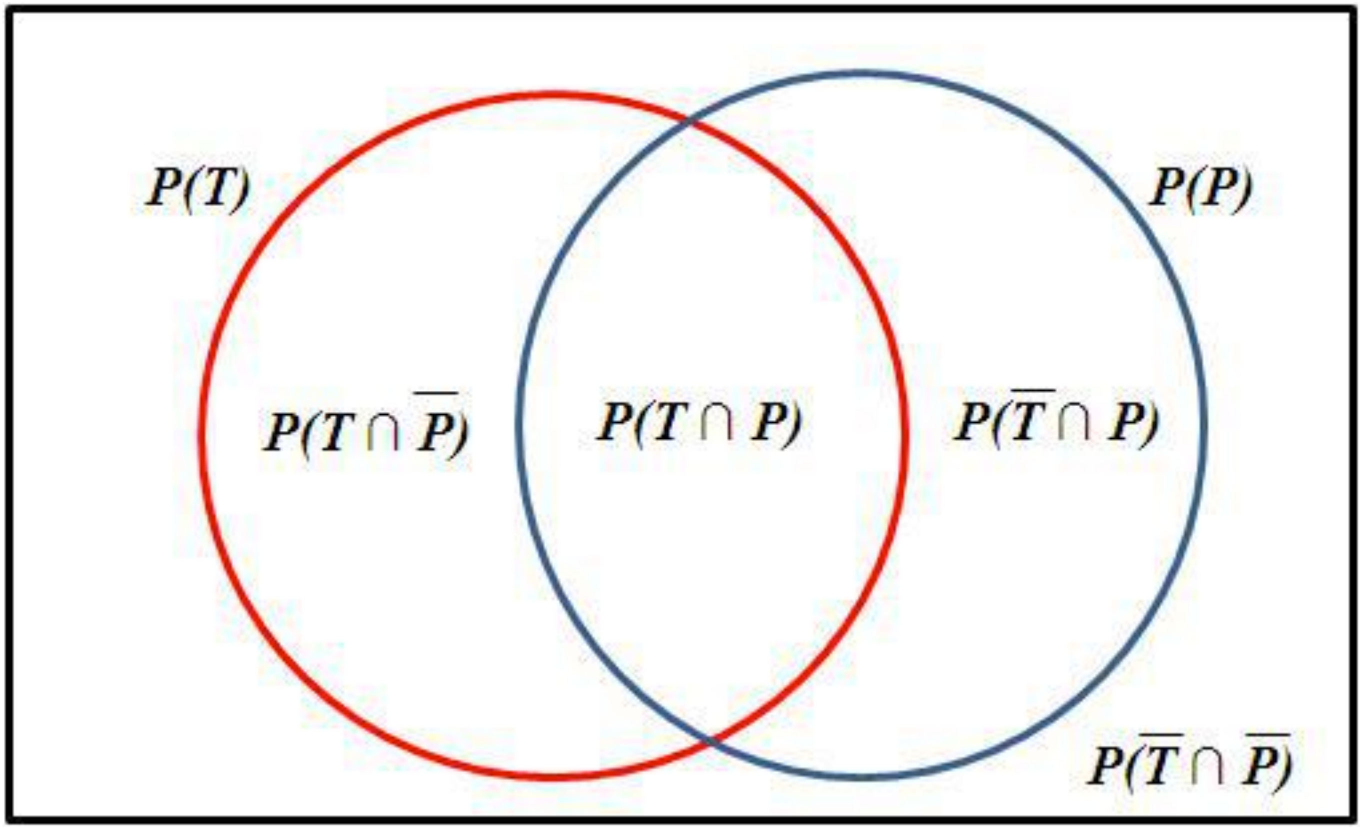
Se llama probabilidad a cualquier función *P* que asigna a cada suceso *A* del espacio muestral Ω un valor numérico *P(A)*, verificando los siguientes axiomas:

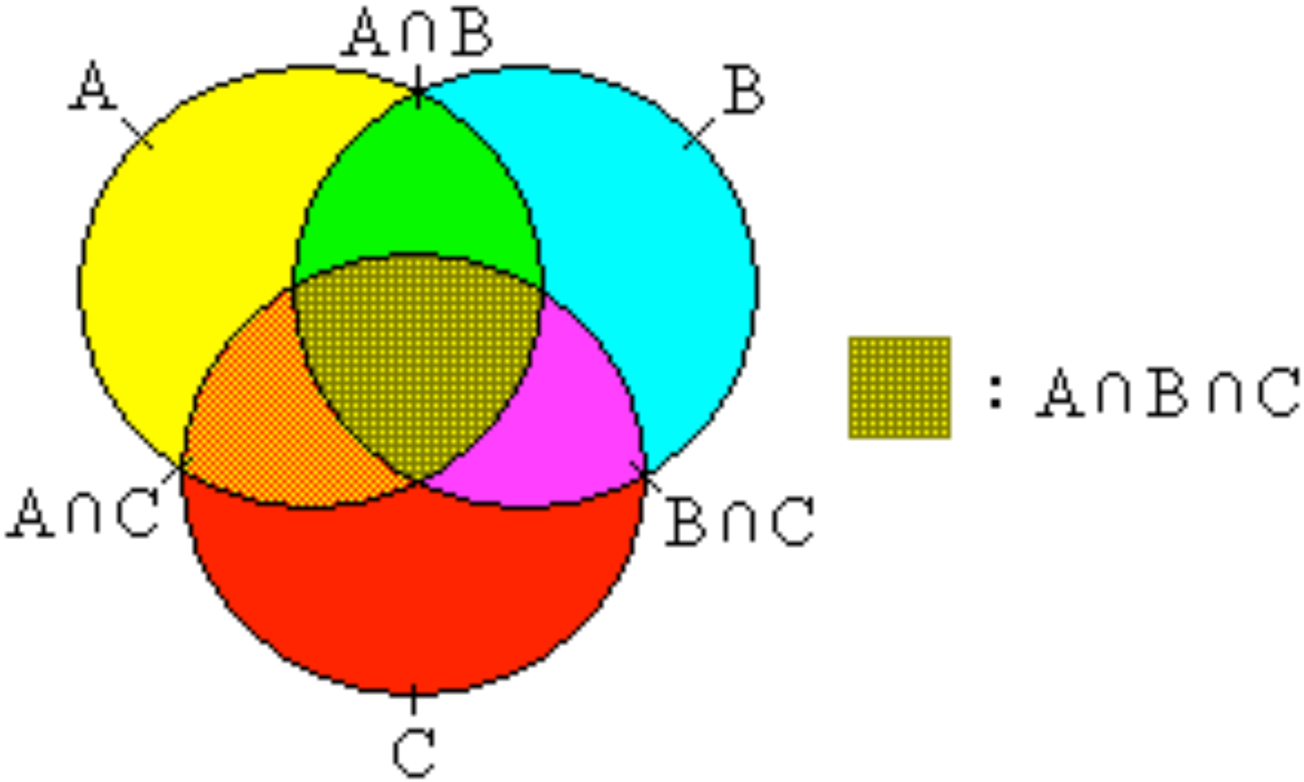
- (1) No negatividad: $0 \leq P(A)$
- (2) Normalización: $P(\Omega) = 1$
- (3) Aditividad: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \emptyset$

(donde Ø es el conjunto vacío).

Tema 2: El modelo matemático de probabilidad

- 2.4 Primeras propiedades de la probabilidad
  - *Si* $A \subset B \subset \Omega$ *, entonces* $P(A) \leq P(B)$
  - *Si* $A \subset B \subset \Omega$ *, entonces* $P(B-A) = P(B \cap A^c) = P(B) - P(A)$
  - *Para cualquier* $A \subset \Omega$, $P(A^c)=1 - P(A)$
  - $P(\emptyset)=0$
  - *Sean A y B dos sucesos cualquiera, entonces* $P(B)=P(B \cap A)+P(B - A)$
  - $P(A \cup B)=P(A)+P(B) - P(A \cap B)$
  - *Si* $A_1, A_2, \ldots A_n$ *son disjuntos dos a dos, es decir,* $A_i \cap A_j = \emptyset$, entonces
    $$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$
  - *En espacios de probabilidad finitos* (Ω, P)*, sea* $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ *y* $A=\{w_{i1}, w_{i2}, \ldots, w_{in}\}$ *un suceso, entonces:* $P(A)=P(\{w_{i1}\})+ P(\{w_{i2}\})+\ldots+ P(\{w_{in}\})$ *con* $P(\{w_1\})+ P(\{w_2\})+\ldots+ P(\{w_n\}) =1$


$P(T)$
$P(P)$
$P(T \cap \overline{P})$
$P(T \cap P)$
$P(\overline{T} \cap P)$
$P(\overline{T} \cap \overline{P})$



$$
\begin{aligned}
p(A \cup B \cup C) = {} & p(A) + p(B) + p(C) \\
& - p(A \cap B) - p(B \cap C) - p(A \cap C) \\
& + p(A \cap B \cap C)
\end{aligned}
$$