Introducción a los espacios de Hilbert

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1

Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $x, y \in \mathcal{H}$ tales que $x, y \neq 0$.
Se tiene que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si y sólo si:

a) x e y son ortogonales.
b) x e y son linealmente dependientes.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 2

Sea $F = \left\{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N})\colon x_{2n} = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\right\}$. Se tiene:

a) F no es un subespacio cerrado de $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) $F^{\perp} = \{0\}$.

c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 3

En el espacio vectorial $\mathcal{C}[-1,1]$ de las funciones continuas
$f\colon [-1,1] \to \mathbb{C}$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}\,dt$,
sea $F = \{f \in \mathcal{C}[-1,1]\colon f(0) = 0\}$. Se tiene:

a) F es un subespacio cerrado de $\mathcal{C}[-1,1]$.

b) $F^{\perp} = \{0\}$.

c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 4

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado.
La implicación, $\langle T(x), x\rangle = 0,\ \forall x \in \mathcal{H} \Longrightarrow T = 0$, es cierta en los siguientes casos:

p; si $\mathcal{H}$ es real.
q; si $\mathcal{H}$ es complejo.
r; si $T = T^*$.

a) En los casos p y q.

b) En los casos q y r.

c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 5

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado tal que $T^2 = 0$. Se tiene:

a) $\ker(T) \cap \ker(T^*) = \ker(T + T^*)$.

b) $T = 0$.

c) Ninguna de las otras dos opciones.

Soluciones

Ejercicio 1

Sabemos por el teorema de Pitágoras que si x e y son ortogonales entonces $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$. Sin embargo, si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, desarrollando se obtiene $\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$, es decir, $\mathrm{Re}\langle x, y\rangle = 0$. Por tanto, si $\mathcal{H}$ es complejo, puede ocurrir que $\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\langle x, y\rangle + \mathrm{Im}\langle x, y\rangle i = \mathrm{Im}\langle x, y\rangle i \neq 0$ y por tanto x e y no sean ortogonales.

Si x e y son linealmente dependientes entonces $x = \alpha y$ con $\alpha \neq 0$ y se tiene $\|x+y\|^2 = \|(\alpha+1)y\|^2 = |\alpha+1|^2\|y\|^2$ mientras que $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \big(|\alpha|^2+1\big)\|y\|^2$. Como no es cierto para cualquier $\alpha \in \mathbb{C}$ que $|\alpha+1|^2 = |\alpha|^2 + 1$, no se puede concluir que $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ si x e y son linealmente independientes.

En consecuencia la opción correcta es la c).

Ejercicio 2

Veamos que F es cerrado. Sea $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ una sucesión convergente a x en $\ell^2(\mathbb{N})$ siendo para cada n, $x^{(m)} \in F$, $x^{(m)} = \{x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, x_3^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots\}$, con $x_{2k}^{(m)} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, y $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Como para cada subíndice k se tiene

$$|x_k^{(m)} - x_k| \leq \|x^{(m)} - x\|_2$$

para k, la sucesión de números complejos $\{x_k^{(m)}\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a x_k. Por tanto, $x_{2k} = \lim_m x_{2k}^{(m)} = 0$ y en consecuencia, $x \in F$.

Obviamente $F^{\perp} \neq \{0\}$. Por ejemplo, $e = \{0, 1, 0, 0, 0 \ldots\} \in F^{\perp}$ pues para todo $x \in F$ $\langle e, x\rangle = x_2 = 0$.

En consecuencia la opción correcta es la c).

Ejercicio 3

Veamos que F no es cerrado. Sea

$$f_n(t) = \begin{cases} n|t| & \text{si } |t| \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Obviamente $f_n \in F$ y además la sucesión $\{f_n\}$ converge a la función constante $f \equiv 1$ pues

$$\|f - f_n\|^2 = \int_{-1}^{1} |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 2\int_0^{1/n} (1-nt)^2 dt = \Big[t + \frac{1}{3}n^2t^3 - nt^2\Big]_0^{1/n} = \frac{1}{3n}$$

Sin embargo $f \notin F$ pues $f(0) = 1$.

Veamos que $F^{\perp} = \{0\}$. Sea $f \in F^{\perp}$. Si fuera f no nula existe $t \in [-1, 1]$ tal que $f(t) = 0$. Además si $f(0) = 0$ resulta que $f \in F$ y en consecuencia $\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = 0$ y por tanto $f = 0$. Así pues $f(0) \neq 0$. Como f es continua sea n_0 tal que $f(x) \neq 0$ si $x \in [-1/n_0, 1/n_0]$. Sean las funciones continuas g_n definidas mediante

$$g_n(t) = \begin{cases} n|t|f(t) & \text{si } |t| \leq \frac{1}{n} \\ f(t) & \text{si } |t| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

Obviamente $g_n \in F$ y además para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\int_{|t|>1/n} |f(t)|^2 \leq \langle f, g_n\rangle = 0$$

y en consecuencia $f(t) = 0$ para todo $|t| \geq 1/n$. Por tanto, $f = 0$.

En consecuencia la opción correcta es la b).

Ejercicio 4

p: En el caso real la implicación no tiene por qué ser cierta. Véase el ejemplo del libro al final de la p.130.

q: En el caso complejo, la implicación se deduce del lema 6.28, tomando $S = 0$.

r: Sabemos que si T es autoadjunto entonces $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \left|\langle T(x), x\rangle\right|$. En consecuencia, si T es autoadjunto y $\langle T(x), x\rangle = 0$, $\forall x \in \mathcal{H}$ entonces $\|T\| = 0$ y por tanto $T = 0$.

La implicación es cierta en los casos q y r.

Ejercicio 5

La inclusión $\ker(T) \cap \ker(T^*) \subset \ker(T + T^*)$ es evidente pues si $x \in \ker(T) \cap \ker(T^*)$ entonces $T(x) = T^*(x) = 0$, de modo que $(T + T^*)(x) = 0$ y por tanto $x \in \ker(T + T^*)$.
Inversamente, si $x \in \ker(T + T^*)$ entonces $T^*(x) = -T(x)$. Se tiene:

$$\|T^*(x)\|^2 = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = -\langle T^*(x), T(x)\rangle = -- \langle x, T(T(x))\rangle = 0$$

De modo que $T^*(x) = 0$ y en consecuencia $T(x) = -T^*(x) = 0$. Por tanto, $x \in \ker(T) \cap \ker(T^*)$.

En general, no se tiene que cumplir que $T = 0$. Por ejemplo si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y se define T mediante $T(e_1) = e_2$ y $T(e_k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, T define un operador lineal acotado tal que $T^2 = 0$ y sin embargo $T \neq 0$.

En consecuencia la opción correcta es la a).