No se permite el uso de ningún tipo de material.

Todas las respuestas deben estar justificadas.

Ejercicio 1. (2 puntos) Se define por recurrencia la sucesión (a_n) siendo

$$a_{n+1} = \frac{4(a_n - 1)}{a_n} \quad \text{para todo } n > 1 \ \text{ y } \ a_1 > 2.$$

Estudiar la convergencia de la sucesión (a_n) y, en caso de ser convergente, calcular su límite.

Ejercicio 2. (2 puntos)

a) Definir interior, exterior y frontera de un conjunto $A \subset \mathbb{R}$.

Sean A y B dos subconjuntos de $\mathbb{R}$.

b) Demostrar que $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int}(A) \cap \operatorname{int}(B)$.

c) Demostrar que $\operatorname{int}(A \cup B) \supset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$.

d) ¿Es cierto que $\operatorname{int}(A \cup B) \subset \operatorname{int}(A) \cup \operatorname{int}(B)$? Demostrarlo si es cierto; dar un contraejemplo si no es cierto.

Ejercicio 3. (2 puntos) Calcular justificadamente

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{x}.$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Calcular los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad y de convexidad de la función

$$f(x) = (e^x - 1)^{1/2}.$$

Determinar sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

Ejercicio 5. (2 puntos) Sea a un número real no negativo. Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{a^{2n} + a^n + 1}$$

en función de los valores de a.

Tiempo: 2 horas