Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación.

a) Demuestre que $\forall B \subset Y$ se tiene que $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$.

b) Demuestre que f es inyectiva si sólo si $\forall A \subset X$ se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$.

Solución: a) Demostremos que $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$ viendo que $y \in f(f^{-1}(B))$ si y sólo si $y \in f(X) \cap B$. En efecto,

$$\begin{aligned} y \in f(f^{-1}(B))) &\iff \exists x \in f^{-1}(B) \text{ tal que } y = f(x) \\ &\iff \exists x \in X \text{ tal que } y = f(x) \in B \\ &\iff y \in f(X) \cap B \end{aligned}$$

b) Supongamos que f es inyectiva. Veamos que $\forall A \subset X$ se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$.

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(f(A))) &\Longrightarrow y = f(x) \in f(A) \\ &\Longrightarrow \exists x' \in A \text{ tal que } y = f(x) = f(x') \\ &\Longrightarrow x = x' \in A, \text{ donde se ha tenido en cuenta que } f \text{ es inyectiva} \end{aligned}$$

La inclusión inversa, $A \subset f^{-1}(f(A))$, es cierta incluso si f no es una aplicación inyectiva. En efecto:

$$x \in A \Longrightarrow f(x) \in f(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$$

Recíprocamente,veamos el contrarecíproco. En efecto, si f no es inyectiva, entonces existen $a, b \in X$ tales que $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$. Tomando $A = \{a\}$, se cumple que $f^{-1}(f(A)) \neq A$ pues $b \in f^{-1}(f(A))$ puesto que $f(b) \in f(A)$.

Comentarios: La expresión $f^{-1}(B)$ no implica necesariamente que f sea biyectiva. En efecto, toda aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ es una relación, $f \subset X \times Y$ y tiene por tanto sentido la relación inversa f^{-1}. Esta relación inversa no es una aplicación salvo que f sea biyectiva, véase el texto base p.98. Los conjuntos originales de $y \in Y$ y de B de la relación f son:

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \ \text{ y } \ f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Cada uno de los dos subconjuntos puede ser el conjunto vacío, tener un elemento o tener más de un elemento. Por ejemplo, si $X = Y = \mathbb{R}$ y f es tal que $f(x) = x^2$ tenemos que $f^{-1}\big([4, 9]\big) = [-3, -2] \cup [2, 3]$, $f^{-1}(\{-2\}) = f^{-1}(-2) = \varnothing$ o $f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$.

No es cierto en general que $f(f^{-1}(B)) = B$, $f^{-1}(f(A)) = A$ o $f^{-1}(f(x)) = x$. Por ejemplo, para la función anterior si se toma $B = \{-1, 1, 4\}$ se tiene que $f^{-1}(B) = \{-2, -1, 1, 2\}$ y en consecuencia $f(f^{-1}(B)) = \{1, 4\} \neq B$. O si se toma $x = 2$ siendo entonces $f(2) = 4$ y $f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(4) = \{-2, 2\}$. Cuando la aplicación f es inyectiva y no sobreyectiva la relación f^{-1} sigue sin ser una aplicación pues aquellos elementos $y \in Y$ tales que $y \notin f(X)$ cumplen que $f^{-1}(y) = \emptyset$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sean X un conjunto no vacío y $\preceq$ una relación de orden en X. Se define en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$A \,\mathcal{R}\, B \quad \text{si y sólo si} \quad A = B \text{ o } \ (\forall a \in A \ \forall b \in B \ a \preceq b)$$

Determine razonadamente si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia o de orden en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$.

Solución: $\mathcal{R}$ es una relación de orden.

$\mathcal{R}$ es una relación reflexiva en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ ya que $A \,\mathcal{R}\, A$ pues $A = A$.

$\mathcal{R}$ es una relación antisimétrica en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. En efecto sean A y $B \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ tales que $A \,\mathcal{R}\, B$ y $B \,\mathcal{R}\, A$. Veamos que $A = B$. Por reducción al absurdo, si $A \neq B$ entonces $\exists a \in A$ tal que $a \notin B$ o $\exists b \in B$ tal que $b \notin A$. Si $\exists a \in A$ tal que $a \notin B$, como $B \neq \emptyset$ existe un elemento $y \in B$. De $A \,\mathcal{R}\, B$ se deduce que $a \preceq y$ mientras que de $B \,\mathcal{R}\, A$ se obtiene que $y \preceq a$. Por tanto, $a = y$ y por consiguiente $a \in B$ en contradicción con la elección de a tal que $a \notin B$. El caso donde $\exists b \in B$ tal que $b \notin A$ es análogo.

$\mathcal{R}$ es una relación transitiva en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. En efecto, sean A, B y $C \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ tales que $A \,\mathcal{R}\, B$ y $B \,\mathcal{R}\, C$. Se cumple que ($A = B$ o $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \preceq b$) y ($B = C$ o $\forall b \in B\ \forall c \in C\ b \preceq c$). Por tanto, $A = B = C$ o ($A = B$ y $\forall b \in B\ \forall c \in C\ b \preceq c$) o ($B = C$ y $\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \preceq b$) o ($\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \preceq b$ y $\forall b \in B\ \forall c \in C\ b \preceq c$). En consecuencia, en cualquiera de los casos se cumple que $A = C$ o $\forall a \in A\ \forall c \in C\ a \preceq c$. Es decir, $A \,\mathcal{R}\, C$.

$\mathcal{R}$ no es en general una relación simétrica en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$. Por ejemplo si $X = \mathbb{N}$ y la relación $\preceq$ es el orden usual en $\mathbb{N}$ se tiene que para $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 6, 7\}$ se cumple que $A \,\mathcal{R}\, B$ y sin embargo, no es cierto que $B \,\mathcal{R}\, A$.
Nota: En general, $\mathcal{R}$ no es una relación simétrica si existen dos elementos distintos $a, b \in X$ tales que $a \preceq b$. Basta tomar $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$. Se cumple que $A \,\mathcal{R}\, B$ y sin embargo no se cumple que $B \,\mathcal{R}\, A$ pues si fuera $B \,\mathcal{R}\, A$ entonces $b \preceq a$ y por tanto $a = b$.

Comentarios:

1. La relación $\mathcal{R}$ de este ejercicio es una disyunción de dos relaciones:

   i) La relación $\mathcal{R}_1$ definida en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ que es la relación de igualdad de conjuntos

   ii) La relación $\mathcal{R}_2$ definida en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ mediante $A \,\mathcal{R}_2\, B \quad$ si y sólo si $\quad (\forall a \in A\ \forall b \in B\ a \preceq b)$.

   No se deben estudiar las dos relaciones por separado pues se pueden llegar a conclusiones falsas. Así, dos relaciones pueden ser transitivas y sin embargo la disyunción de ambas relaciones no serlo. Por ejemplo, si en $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ consideramos la relación $\mathcal{R}_2$, siendo $\preceq$ el orden usual de $\mathbb{N}$, y definimos las relaciones $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}$ mediante

   $$A \,\mathcal{S}_1\, B \quad \text{si y sólo si} \quad A \supset B$$
   $$A \,\mathcal{S}\, B \quad \text{si y sólo si} \quad A \mathcal{S}_1 B \text{ o } A \mathcal{R}_2 B$$

   las dos relaciones, $\mathcal{R}_2$ y $\mathcal{S}_1$ son transitivas, y sin embargo la relación $\mathcal{S}$ no lo es: para $D = \{1, 2, 8\}$, $A = \{1, 2\}$ y $B = \{4, 6, 7\}$ se cumple que $D \,\mathcal{S}\, A$, pues $D \supset A$ ($D \,\mathcal{R}_1\, A$), y $A \,\mathcal{S}\, B$, pues cualquier elemento de A precede a cualquier elemento de B ($A \,\mathcal{R}\, B$). Sin embargo, no se cumple que $D \,\mathcal{S}\, B$ pues ni el conjunto D contiene al conjunto B, ni cualquier elemento de D precede a cualquier elemento de B, por ejemplo, 8.

   Por tanto, en el estudio de la propiedad transitiva de la relación $\mathcal{R}$, debe constar de alguna manera que en los cuatro casos posibles a los que da lugar la hipótesis $A \,\mathcal{R}\, B$ y $B \,\mathcal{R}\, C$, que son,

   i) $A \,\mathcal{R}_1\, B$ y $B \,\mathcal{R}_1\, C$ ii) $A \,\mathcal{R}_1\, B$ y $B \,\mathcal{R}_2\, C$ iii) $A \,\mathcal{R}_2\, B$ y $B \,\mathcal{R}_1\, C$ iv) $A \,\mathcal{R}_2\, B$ y $B \,\mathcal{R}_2\, C$
   se concluye en todos ellos que $A \,\mathcal{R}\, C$.

   Algo similar ocurre con la propiedad antisimétrica. Así, dos relaciones pueden ser antisimétricas y sin embargo la disyunción de ambas relaciones no serlo: en el ejemplo anterior, se escoge $A' = \{1\}$ y $A = \{1, 2\}$ y se cumple que $A \,\mathcal{S}\, A'$, pues $A \supset A'$ y $A' \,\mathcal{S}\, A$, pues el único elemento de A', 1, precede a todos los elementos de A.

2. La relación $\mathcal{R}_2$ no es en general en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ una relación de equivalencia pero tampoco es en general una relación de orden a pesar de que $\preceq$ sea una relación de orden en X. Además de no ser en general simétrica, tampoco es reflexiva. Obsérvese que

   $$A \,\mathcal{R}_2\, A \quad \text{si y sólo si} \quad (\forall a \in A\ \forall b \in A\ a \preceq b)$$

   y **NO** la intepretación errónea de $a \preceq a$, $\forall a \in A$. Esto último asegura que la relación $\preceq$ es reflexiva en A pero no indica nada sobre la relación $\mathcal{R}_2$. Por ejemplo, si consideramos de nuevo $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\varnothing\}$ con la relación $\mathcal{R}_2$, siendo $\preceq$ el orden usual de $\mathbb{N}$, el conjunto $A = \{1, 2\}$ no está relacionado consigo mismo mediante la relación $\mathcal{R}_2$. No es cierto que cualquier elemento de A preceda a cualquier elemento de A. Por ejemplo, 2 no precede a 1.

Pregunta 3 (3 puntos)
Sea $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) Calcule razonadamente el valor de $f(0)$.

b) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(-x) = -f(x)$.

c) Demuestre por inducción sobre n, que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(nx) = nf(x)$$

Deduzca que también es cierto $\forall n \in \mathbb{Z}$.

d) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{Q}$ se cumple que $f(x) = kx$ siendo $k = f(1)$.

Solución: a) Como $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, resulta que $f(0) = 0$.
b) De $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$ se obtiene que $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.
c) i) Para $n = 0$ se tiene que $f(0x) = f(0) = 0 = 0f(x)$.
ii) Supongamos que $f(nx) = nf(x)$ y veamos que $f\big((n+1)x\big) = (n+1)f(x)$. En efecto:

$$f\big((n+1)x\big) = f(nx + x) = f(nx) + f(x) = nf(x) + f(x) = (n+1)f(x)$$

Por tanto $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(nx) = nf(x)$.
Teniendo en cuenta el apartado b), $f\big((-n)x\big) = f(-nx) = -f(nx) = -\big(nf(x)\big) = -nf(x)$ por lo que la igualdad $f(nx) = nf(x)$ es válida si $n \in \mathbb{Z}$.
d) Sea $x = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ siendo $q \in \mathbb{N}^*$ y $p \in \mathbb{Z}$. Por un lado, de $f(1) = f\big(q \cdot \dfrac{1}{q}\big) = qf\big(\dfrac{1}{q}\big)$ se deduce $f\big(\dfrac{1}{q}\big) = \dfrac{f(1)}{q}$. En consecuencia, $f(x) = f\big(p \cdot \dfrac{1}{q}\big) = pf\big(\dfrac{1}{q}\big) = p\dfrac{f(1)}{q} = f(1)\dfrac{p}{q} = f(1)x$.

Comentarios:

1. En el apartado a), el razonamiento

$$f(0) = f(x - x) = f(x) - f(x) = 0$$

no es válido salvo que se demuestre previamente que $f(x-x) = f(x)-f(x)$. Esta igualdad utiliza el resultado del apartado b). Lo único que se puede utilizar es que $f(x - x) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. Esto último sirve para demostrar b) una vez demostrado a) o para demostrar a) si previamente se ha demostrado b).

2. Un comentario similar al anterior merece el razonamiento utilizado en el apartado b),

$$f(-x) = f(0 - x) = f(0) - f(x) = -f(x)$$

ya que en la igualdad $f(0 - x) = f(0) - f(x)$ se está utilizando lo que se quiere demostrar. De nuevo lo que se puede aplicar es que $f(0 - x) = f(0 + (-x)) = f(0) + f(-x)$ que en este caso no conduce a nada.

Pregunta 4 (2 puntos)
Si $E(a)$ denota la parte entera de cualquier $a \in \mathbb{R}$, demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$E(x) + E(y) \leqslant E(x + y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$$

Solución: Sabemos que la parte entera $E(a)$ de un número $a \in \mathbb{R}$ es, por definición, el único número entero que cumple que

$$E(a) \leq a < E(a) + 1$$

La existencia y unicidad de este número están demostradas en la proposición 6.11 del texto base. Es fácil deducir de esta definición (y también de la demostración de la proposición 6.11) que la parte entera de a es el máximo de los números enteros k tales que $k \leq a$ pues si k es un número entero tal que $k > E(a)$ entonces $k \geq E(a) + 1$ y en consecuencia $k > a$.

Aplicando lo anterior se tiene $\left\{ \begin{array}{lll} E(x) & \leq x < & E(x)+1 \\ E(y) & \leq y < & E(y)+1 \end{array} \right.$ y en consecuencia ,

$$E(x) + E(y) \leq x + y < E(x) + E(y) + 2$$

Por un lado, $E(x) + E(y)$ es un número entero y $E(x) + E(y) \leq x + y$. Aplicando que $E(x + y)$ es el máximo de los números enteros k tales que $k \leq x + y$ que se obtiene que $E(x) + E(y) \leq E(x + y)$.
Por otro lado, como $E(x+y) \leq x+y$, si aplicamos que $x+y < E(x)+E(y)+2$ se obtiene que $E(x+y)$ y $E(x)+E(y)$ son dos números enteros tales que $E(x + y) < E(x) + E(y) + 2$. En consecuencia $E(x + y) \leq E(x) + E(y) + 1$.

Comentarios i) Las demostraciones matemáticas de las propiedades de la parte entera exigen una definición rigurosa de este concepto. Por ejemplo, la utilización de las desigualdades $E(a) \leq a \leq E(a) + 1$, no suelen ser suficientes pues estas desigualdades no definen unívocamente este número entero, ya que si a es entero es cierto que $E(a) \leq a \leq E(a) + 1$, pero también es cierto que $E(a) - 1 \leq a \leq E(a)$.

ii) Cuando algunos alumnos hablan de la parte decimal del número real x, tendrían que definir exactamente qué entienden por esto concepto. Si se refieren a $x - E(x)$, obsérvese que en ese caso quizás "la parte decimal"no siempre represente lo que ellos piensan pues por ejemplo, para $x = -4/3$ cuya expresión decimal es $-1,\overset{\frown}{3}$, se tiene que $E(x) = -2$ y por tanto $x - E(x) = 2/3$ cuya expresión decimal es $0,\overset{\frown}{6}$.

iii) A lo largo del ejercicio muchos alumnos utilizan resultados "intuitivos"sobre la parte entera, no siempre verdaderos, que aplican para establecer el resultado. Cualquier resultado que se utilice debe demostrarse para que el ejercicio se valore. Muchas veces presuponen ciertas cosas que son bastante más difíciles de demostrar que la propiedad que se pide demostrar.