- **[4 Puntos] Problema 1.-** Considerar el sistema dinámico unidimensional

$$\dot{x} = kx + x^3 - x^5$$

a) Encontrar los puntos fijos y clasificarlos.

b) Supongamos que, partiendo de $k = 0$ y $x = 1$ se disminuye k muy despacio, hasta alcanzar el valor $k = -1/2$. Describa la evolución del valor estacionario de x a medida que disminuye k y represéntela en el plano kx en la cuadrícula proporcionada.

c) ¿Cómo evoluciona el valor estacionario de x si, terminado el proceso anterior, volvemos a aumentar k muy despacio hasta alcanzar el valor $k = 1/2$? Represente dicha evolución en el plano kx en la cuadrícula proporcionada.

a) Los puntos fijos verifican $\dot{x} = 0$. Así resolvemos la ecuación

$$kx + x^3 - x^5 = 0 \quad \rightarrow \quad x(k + x^2 - x^4) = 0$$

Una primera solución es $x_0{*} = 0 \quad \forall k$

Por otro lado tenemos $k + x^2 - x^4 = 0$. Con el cambio de variable $y = x^2$ tenemos $y^2 - y - k = 0$, de donde $y_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}$, y por tanto

$$x_{1,2,3,4}{*} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{1+4k}}{2}}$$

Para $k < -1/4$, ninguno de los 4 puntos fijos está definido.

Para $-1/4 \le k < 0$ los cuatro puntos están definidos.

Para $k = 0$, los cuatro puntos quedan en dos $x_{1,2}{*} = \pm 1$ (siendo los otros dos nulos)

Para el caso $k > 0$ solo dos de los cuatro puntos estan definidos, a saber $x_{1,2}{*} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}}$

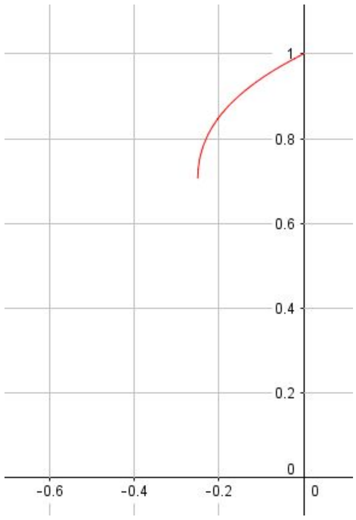
Clasificamos los 5 puntos según su estabilidad, recurriendo a la linealización por medio de la derivada de $f(x) = k + x^3 - x^5$ evaluada en los respectivos puntos fijos.

$$f\,'(x) = 3x^2 - 5x^4$$

i) Para $x_0{*} = 0$, $f\,'(x_0{*}) = 0$ lo que no nos permite obtener conclusión alguna. Analizando el valor de $f(x)$ en el entorno de cero, veremos que la función con $k \ge 0$, es negativa para valores negativos de *x* y positiva para valores positivos de *x*, y por tanto el punto es INESTABLE.
Para valores $-1/4 \le k < 0$ toma valores positivos para valores negativos de *x*, y valores negativos para valores positivos de *x*, luego es ESTABLE.
Para valores $k < -1/4$ el punto de nuevo es INESTABLE

ii) Para $x_{1,2}{*} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}}$, $f\,'(x_{1,2}{*}) = 3\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2} - 5\left(\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}\right)^2 <$ 0, y por tanto son ESTABLES

iii) $x_{3,4}* = \pm\sqrt{\dfrac{1-\sqrt{1+4k}}{2}}$, $f'(x_{3,4}*) = 3\dfrac{1-\sqrt{1+4k}}{2} - 5\left(\dfrac{1-\sqrt{1+4k}}{2}\right)^2 > 0$, es decir son puntos fijos INESTABLES

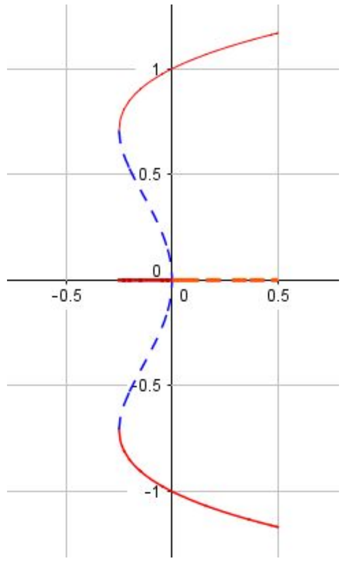


b) Partiendo del punto fijo $x_1 = 1$, para $k = 0$, conforme k decrece el punto fijo $x_1* = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1+4k}}{2}}$, toma valores decrecientes hasta $k = -1/4$, donde vale $x_1* = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Para valores $k < -1/4$ no está definido

c) Partiendo de $k = -1/4$, tenemos tres puntos fijos, el 0 que es ESTABLE y otros dos, $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ambos semiestables.

Conforme aumenta, en $-1/4 < k < 0$, hay 5 puntos fijos, el cero que es estable, los dos puntos fijos que se encuentran en $|x| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ que son inestables, y los otros dos puntos en $|x| > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ que son ESTABLES.



A partir de $k = 0$, el origen vuelve a ser inestable y solo hay ya otros dos puntos fijos que son ambos estables.

(Pág. 59 del texto base)

□

- **[3 Puntos] Problema 2.-** Considerar el siguiente sistema dinámico bidimensional:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy + 2x \\ \dot{y} &= 1 - y^2 \end{aligned}$$

a) Encontrar los puntos fijos y clasificarlos.

b) Dibujar las nulclinas.

c) Esbozar el campo de vectores en la cuadrícula proporcionada.

a) Los puntos fijos son las soluciones al sistema $\begin{cases} xy + 2x = 0 \\ 1 - y^2 = 0 \end{cases}$

De la segunda ecuación tenemos $y = \pm 1$. Sustituyendo en la primera ecuación tenemos para ambos valores de y, $x = 0$.
Así tenemos dos puntos fijos, a saber $(0,-1)$, $(0, 1)$.

Para clasificarlos según su estabilidad, linealizamos el sistema. La matriz jacobiana es

$$J = \begin{pmatrix} y+2 & x \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

i) Evaluamos la jacobiana en el punto $(0,-1)$:

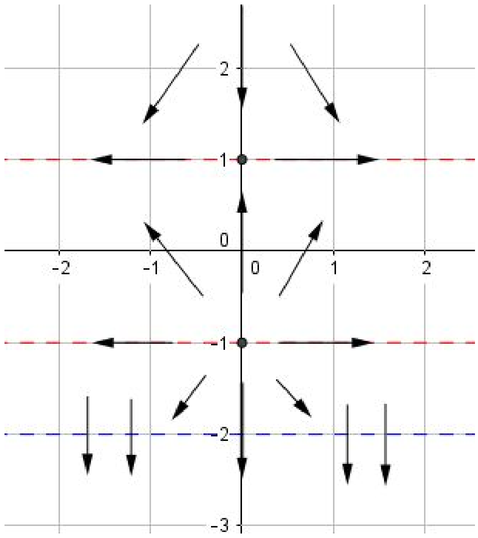
$$J_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta = -2, \;\; \tau = -1$$

Se trata por tanto de un PUNTO SILLA (determinante negativo)

ii) Evaluamos la jacobiana en el punto (0, 1):

$$J_{(0,-1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \Delta = 6, \;\; \tau = 5$$

Ahoa el determinante es positivo. Veamos el valor del discriminane: $\tau^2 - 4\Delta = 25 - 24 = 1 > 0$, y siendo positivo, sabemos que ambos autovalores son reales, y por ser la traza positiva, tenemos un NODO INESTABLE



b, c) Las nulclinas son:

$\dot{x} = xy + 2x = 0$ (componente horizontal nula), es decir la curva $y = -2$

$\dot{y} = 1 - y^2 = 0$ (componente vertical nula), es decir la curva $y^2 = 1 \quad \rightarrow \quad |y| = 1$

Calculamos los autovalores y autovectores para el punto silla: $\lambda_1 = 1, \;\lambda_2 = -2$, siendo los autovectores respectivamente (1, 0) (colector inestable), y (0, 1) (colector estable).

Dibujamos el campo de vectores a la derecha

□

- **[3 Puntos] Problema 3.-** Responder las siguientes cuestiones sobre mapas unidimensionales.

  a) ¿Puede el mapa $x_{n+1} = rx_n(1-x_n)^2$ tener un punto fijo superestable? Si la respuesta es afirmativa, encontrarlo. Si no, demostrar que no existe.

  b) Encontrar, si existe, una función real f_1 tal que $f_1(f_1(x)) = x^2$ y otra función f_2 tal que $f_2(f_2(x)) = 1 - x^2$.

a) De existir tal punto fijo, debe verificar $f'(x^*) = 0$. Veamoslo:

$$f'(x^*) = r(1-x)^2 - 2rx(1-x) = r(1-2x+x^2) - 2rx + 2rx^2 = r - 2rx + rx^2 - 2rx + 2rx^2 =$$
$$= 3rx^2 - 4rx + r = 0$$

Por tanto, $x = \dfrac{4r \pm \sqrt{16r^2 - 12r^2}}{6r} = \dfrac{4r \pm \sqrt{4r^2}}{6r} = \dfrac{4r \pm 2r}{6r} = \dfrac{1}{3}$

Por tanto $x = \dfrac{1}{3}$ es el único valor que verifica $f'(x) = 0$. Para que este valor sea punto fijo debe verificar a su vez

$$r\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^2 \overset{??}{=} \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad r\frac{4}{27} = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad r = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

Así pues para el valor del parámetro $r = \dfrac{9}{4}$, efectivamente existe un punto fijo superestable, que corresponde a $x^* = \dfrac{1}{3}$

b) La función f_1 tal que $f_1(f_1(x)) = x^2$ es $f_1(x) = x^{\sqrt{2}}$, pues

$$f_1(f_1(x)) = f_1(x^{\sqrt{2}}) = (x^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = x^2$$

Creo que la función f_2 no existe, pero no sé razonarlo

□