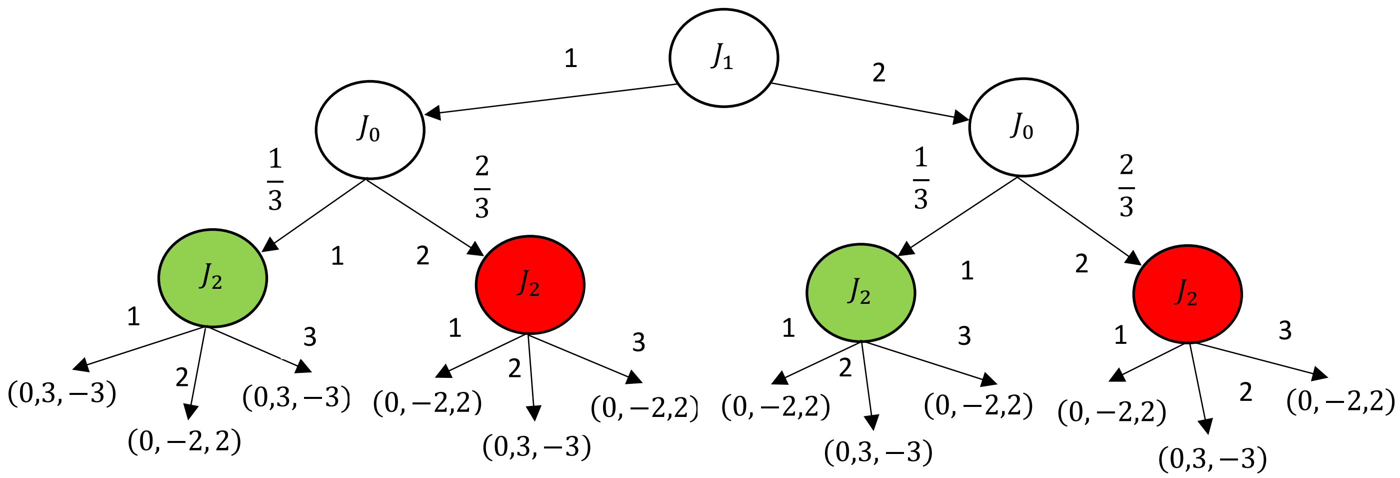
EJERCICIO 1:

Tenemos tres jugadores representados por J_i con $i = \{0,1,2\}$ y cada fase del juego queda determinada por el jugador que aparece en el nodo de la forma extensiva. Omitimos los nodos terminales y los sustituimos, por sencillez, por el vector de ganancias $\vec{p}(s_i) = (p_0, p_1, p_2)$, que representa las ganancias p_i de cada jugador i al jugarse la estrategia s_i.

Como no se menciona recompensa alguna para J_0 asumimos que no recibe nada, esto es

$p_1 = 0$ en todos los nodos terminales, simplificamos el análisis del juego si consideramos a J_0 como "la naturaleza" (sin intereses en el juego) y nos centramos en los jugadores J_1 y J_2.

Estamos ante un juego de información imperfecta, donde hemos clasificado en verde los nodos en que J_2 sabe que J_0 juega 1 y en rojo los nodos en que J_2 sabe que J_0 juega 2. De manera que si J_0 juega 1, J_2 no sabe en cual de los dos nodos verdes se encuentra.



Las estrategias de cada jugador las simplificamos como, izquierda (I), derecha (D) o centro (C) según corresponda por sencillez en la notación.

- J_1: $\{I, D\}$ $(I{:}\ x = 1,\ D{:}\ x = 2)$
- J_2: $\{II, IC, ID, CI, CC, CD, DI, DC, DD\}(I{:}\ z = 1,\ C{:}\ z = 2,\ D{:}\ z = 3)$

Por ejemplo, II quiere decir que el jugador J_2 juega I si $y = 1$ y juega I si $y = 2$.

Las estrategias de J_2 son independientes de lo que haya jugado J_1, ya que lo desconoce.

Utilizaremos la recompensa esperada para calcular las entradas de la matriz que se corresponderá con la recompensa de J_2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} I & D \end{array} \leftarrow J_1/J_2 \downarrow \\ M = & \begin{pmatrix} 1/3 & 2 \\ -3 & -4/3 \\ 1/3 & 2 \\ 2 & 1/3 \\ -4/3 & -3 \\ 2 & 1/3 \\ 1/3 & 2 \\ -3 & -4/3 \\ 1/3 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} II \\ IC \\ ID \\ CI \\ CC \\ CD \\ DI \\ DC \\ DD \end{matrix} \end{array}$$

Por ejemplo, $m_{1,1}$ se corresponde con la recompensa esperada de J_2 cuando se juega la estrategia: I para J_1 e II para J_2, calculada como:

$$m_{1,1} = \frac{1}{3}(-3) + \frac{2}{3}(2) = \frac{1}{3}$$

Vemos que hay estrategias que se pueden eliminar de la matriz, ya que producen unas recompensas idénticas, como las filas {1,3,7,9}, las filas {2,8} y las filas {4,6}

Quitando estrategias redundantes tenemos una matriz reducida:

$$M_{red} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2 \\ -3 & -4/3 \\ 2 & 1/3 \\ -4/3 & -3 \end{pmatrix}$$

La primera fila representa al conjunto de estrategias $\{II, ID, DI, DD\}$ y la segunda fila representa las estrategias $\{IC, DC\}$ y la tercera representa las estrategias $\{CI, CD\}$. La cuarta fila es la estrategia CC.

Podemos ver en la matriz M_{red} que la fila 3 domina a las filas 2 y 4, por lo que podemos eliminarlas de la matriz:

$$M_{red} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2 \\ 2 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (juego\ simétrico)$$

En ausencia de filas o columnas dominadas, utilizamos una estrategia mixta, consistente en asignar probabilidades a cada fila, de manera que al jugador de columnas J_1 le sea indiferente jugar una columna u otra (análogamente para el jugador de filas):

- J_2: el par $(p, 1-p)$ verifica

$$\frac{1}{3}p + 2(1-p) = 2p + \frac{1}{3}(1-p)$$
$$p = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) es\ el\ par\ buscado\ con\ un\ valor\ de\ juego\ V(G) = \frac{7}{6}$$

- J_1: el par $(q, 1-q)$ es idéntico al anterior por ser M_{red} simétrica.

SOLUCIÓN:

J_2 debe escoger entre un par de acciones (a_1, a_2) con $a_1 \in \{II, ID, DI, DD\}$ y

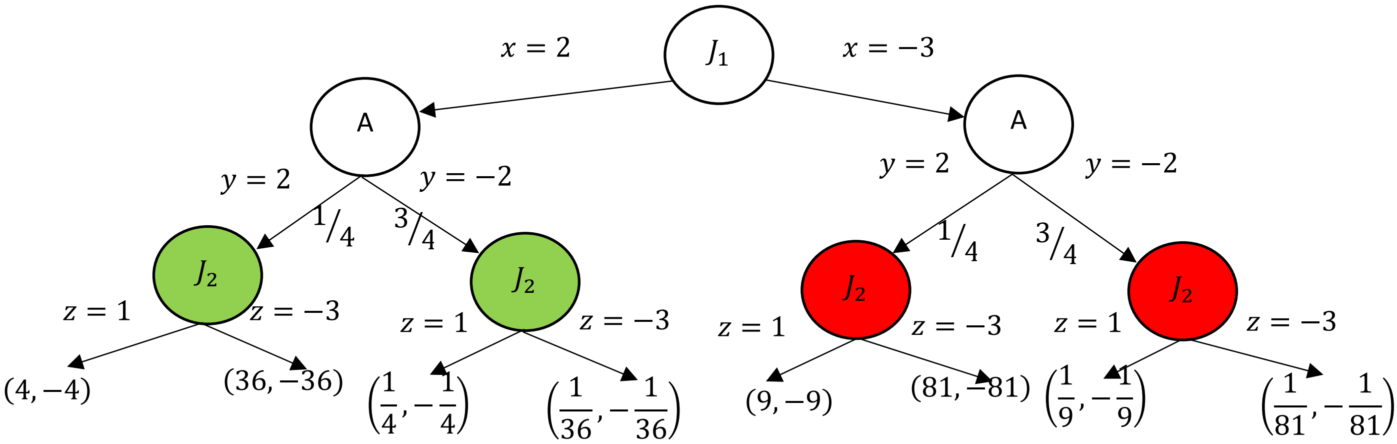
$a_2 \in \{CI, CD\}$ con probabilidad $(1/2, 1/2)$ y J_1 debe escoger entre (I, D) con probabilidad $(1/2,1/2)$, lo que resulta en un valor de juego: $V(G) = 7/6$ para J_2 y $-7/6$ para J_1.

Ejercicio 2:

Al tratarse de un juego bipersonal de suma nula, si no se menciona la recompensa del jugador 2, asumiremos que es la contraria a la que percibe J_1.

Los nodos verdes representan el conjunto de información de que dispone J_2 cuando J_1 juega $x = 2$, y análogamente los nodos rojos son la información de J_2 cuando J_1 juega $x = -3$. Es decir, supongamos que J_1 juega $x = 2$, J_2 sabe lo que ha jugado J_1, pero desconoce en cuál de los dos nodos verdes (resultados de la acción aleatoria) se encuentra.

Según las reglas del juego tendremos la siguiente forma extensiva:



Definimos la notación de estrategias para construir la forma normal:

1. Los movimientos de J_1 serán izquierda (I) o derecha (D) según el valor que tome x en el diagrama del juego, $I \rightarrow x = 2$ y $D \rightarrow x = -3$, por tanto: $A_{J_1} = \{I, D\}$

2. Análogamente, los movimientos de J_2 serán izquierda (I) o derecha (D) según el valor de z en el diagrama, y según el movimiento que haya realizado J_1, por tanto, sus acciones son: $A_{J_2} = \{ID, II, DI, DD\}$ es decir:
   $ID \rightarrow z = 1 \; si \; x = 2 \; y \; z = -3 \; si \; x = -3$.
3. El conjunto de estrategias es: $S = \{IID, III, IDI, IDD, DID, DII, DDI, DDD\}$

Calcularemos las entradas de la forma normal del juego a través de la ganancia esperada:

$$\vec{\pi}_i(S_1, \ldots, S_n) = \sum Prob(S_1, \ldots, S_n; w) p_i(w)$$

$$M = \begin{array}{cc|c} I & D & \leftarrow J_1/J_2 \downarrow \\ \end{array}$$

$$M = \begin{pmatrix} -19/16 & -547/27 \\ -19/16 & -7/3 \\ -433/38 & -7/3 \\ -433/38 & -547/27 \end{pmatrix} \begin{array}{c} ID \\ II \\ DI \\ DD \end{array}$$

$$m_{i,j} \; es \; la \; recompensa \; de \; J_2 \; y \; \left(-m_{i,j}\right) \; la \; recompensa \; de \; J_1$$

Hemos calculado las entradas con las recompensas esperadas según la acción aleatoria A, por ejemplo:

$$M_{1,1} = \frac{1}{4}(-4) + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = -1 - \frac{3}{16} = -\frac{19}{16}$$

Que corresponde a $x = 2 \; y \; z = 1$.

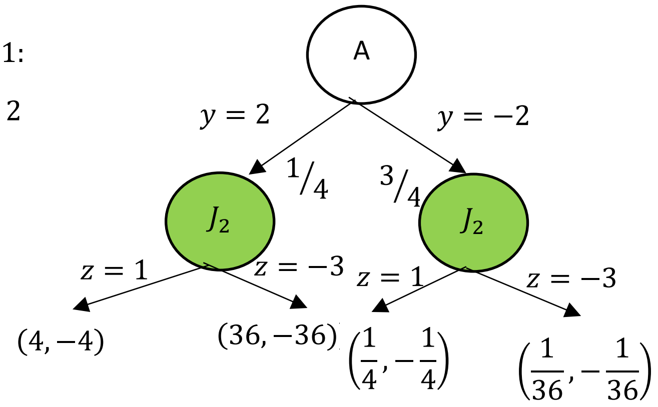
(Podemos resolver el juego por varios caminos, expondré todos los métodos en este ejercicio y en el resto de los ejercicios usaremos el más conveniente a efectos prácticos)

<u>*Usando subjuegos basados en los conjuntos de información:*</u>

Al ser un juego de información imperfecta, nos centraremos en el jugador J_2 y su respuesta más acertada ante la acción aleatoria, después induciremos la respuesta que deberá dar J_1:

$Subjuego\;\; 1$:

$rama \; x = 2$

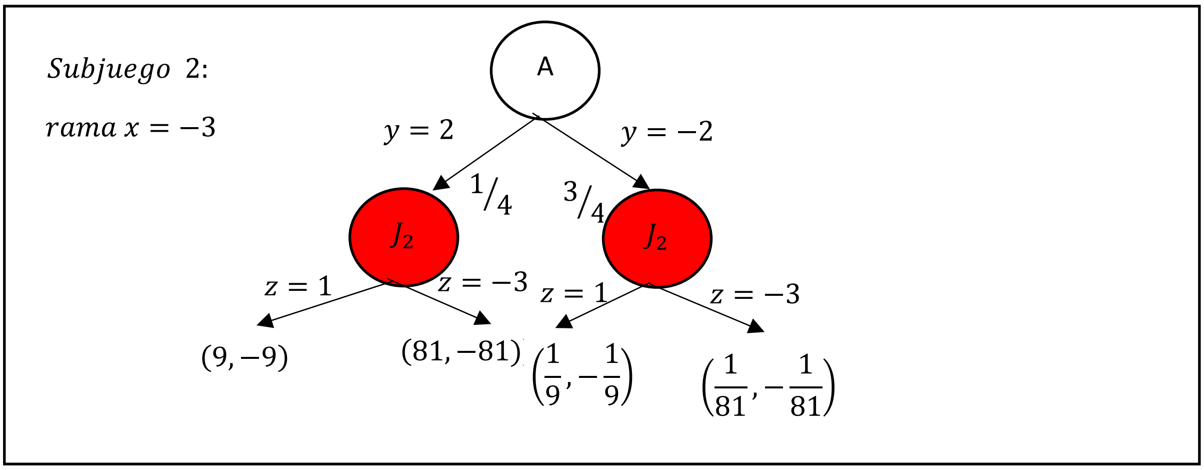


Podemos resolver la elección de J_2 como un problema de decisión, tal que los estados del experimento aleatorio son conocidos con probabilidades $(\alpha, 1-\alpha)$:

$J_2\backslash Experimento$	$\alpha = \frac{1}{4}, \quad y = 2 \rightarrow \quad (I)$	$\alpha = \frac{3}{4}, \quad y = -2 \quad \rightarrow \ (D)$
III	-4	-1/4
IID	-4	-1/4
IDI	-36	-1/36
IDD	-36	-1/36

La menor perdida esperada se obtiene para III, IID con valor: $p_2(IID) = p_2(III) = -\frac{49}{48}$.

(Podríamos usar mas criterios para discernir entre las acciones que son "más buenas que otras" pero el criterio de la ganancia esperanza es el mas práctico en este caso)



Construimos la tabla de decisión:

$J_2\backslash Experimento$	$\alpha = \frac{1}{4}, \quad y = 2 \rightarrow \quad (I)$	$\alpha = \frac{3}{4}, \quad y = -2 \quad \rightarrow \ (D)$
DII	-9	-1/9
DID	-81	-1/81
DDI	-9	-1/9
DDD	-81	-1/81

La menor perdida esperada se obtiene para DDI, DII con valor: $p_2(DDI) = p_2(DII) = -\frac{7}{3}$.

Ahora bien, si J_1 es racional, maximizará su ganancia, lo cual sucede jugando D y como J_2 quiere minimizar su pérdida, jugará $DI\ o\ II$.

Pero J_1 tiene incentivos a abandonar DDI por IDI, por tanto J_2 solo puede jugar II. La solución óptima para ambos será DII.

En la terminología del enunciado la solución es:

$$J_1\ jugará\ x = \ -3$$

$$J_2\ jugará\ z = 1\ \ si\ x = 2\ \ y\ z = 1\ si\ x = -3$$

$$el\ valor\ de\ juego\ V_{(1)}(G) = \frac{7}{3}\ para\ J_1\ \ y\ V_{(2)}(G) = -\frac{7}{3}\ para\ J_2$$

<u>Por dominancia:</u>

$$M = \begin{pmatrix} -19/16 & -547/27 \\ -19/16 & -7/3 \\ -433/38 & -7/3 \\ -433/38 & -547/27 \end{pmatrix}$$

Aplicando un orden léxicográfico observamos que:

$$\left(-\frac{433}{38},-\frac{547}{27}\right) \leq \left(-\frac{19}{16},-\frac{547}{27}\right) \leq \left(-\frac{19}{16},-\frac{7}{3}\right)\ \ La\ fila\ 2\ domina\ a\ las\ filas\ 4\ y\ 1$$

$$\left(-\frac{433}{38},-\frac{7}{3}\right) \leq \left(-\frac{19}{16},-\frac{7}{3}\right)\ \ La\ fila\ 2\ domina\ la\ fila\ 3$$

La solución se encuentra por tanto en la matriz reducida:

$$\begin{array}{cccc} & I & D & \\ \bar{M} = & \left(-\frac{19}{16}\right. & \left.-\frac{7}{3}\right) & II \end{array}$$

Quedando J_2 en elección única, el jugador J_1 optará por jugar D por reportarle la mayor ganancia de las dos restantes.

<u>SOLUCIÓN</u>

Por la dominancia, J_2 deberá jugar II, y J_1 jugará D para maximizar su ganancia. El equilibrio está en DII, con valor de juego: $V(G) = -7/3$ para J_2 y $7/3\ para\ J_1$.

Usando los puntos de silla de la matriz M:

Tenemos que calcular los valores:

$$V_r(M) = \max_i \min_j m_{i,j}$$

$$V_r(M) = \max\left\{-\frac{7}{3}, -\frac{433}{38}, -\frac{547}{27}, -\frac{547}{27}\right\}$$

$$V_r(M) = -\frac{7}{3} \quad para\ m_{2,2}$$

Análogamente tenemos:

$$V_c(M) = \min_i \max_j m_{i,j}$$

$$V_c(M) = \min\left\{-\frac{19}{16}, -\frac{7}{3}\right\}$$

$$V_c(M) = -\frac{7}{3}\ para\ m_{2,2}$$

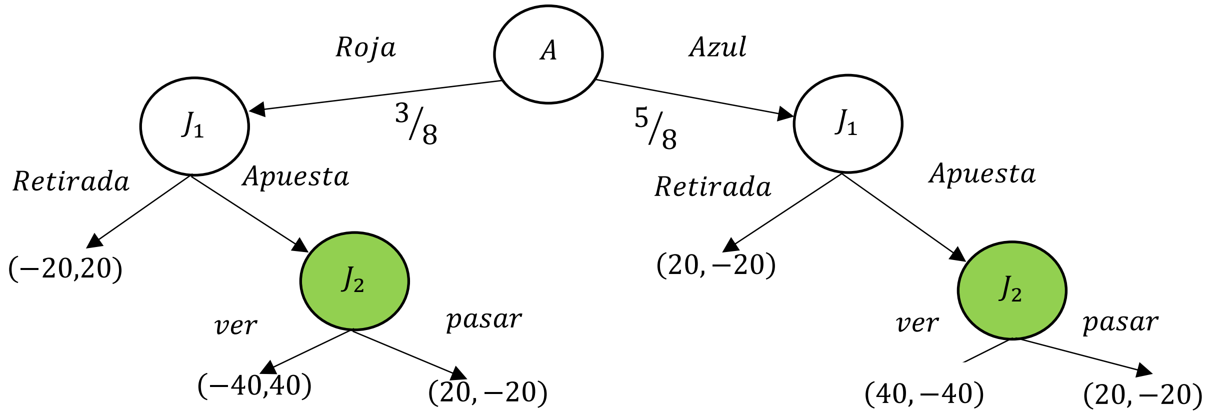
SOLUCIÓN

El equilibrio del juego se encuentra en la estrategia: DII, que define un punto de silla en la matriz del juego M, con un valor para el juego:

$$V_r(M) = V_c(M) = -\frac{7}{3}\ para$$

EJERCICIO 3:

FORMA EXTENSIVA



Consideraremos la extracción de la bola una acción aleatoria cuyo resultado solo conoce el jugador J_1.

Los nodos verdes representan el conjunto de información de J_2, es decir, J_2 conoce en qué fase del juego se encuentra, pero desconoce en cuál de los nodos verdes está, concretamente, el color de la bola extraída por J_1.

Las acciones se denotarán según sea derecha o izquierda en base al diagrama:

- J_1: izquierda (I) = retirada, derecha (D) = apuesta.
- J_2: izquierda (I)= ver, derecha (D) $=$ pasar.

Por otro lado, J_1 tiene dos estrategias, que pueden variar según el resultado de la extracción de la bola, por lo que las estrategias de J_1 denotaran con un par:

$$(x, y) \quad tal\ que \quad x = \{D, I\}\ e\ y = \{D, I\}$$

$$x\ cuando\ sale\ roja \quad e \quad y\ \ cuando\ sale\ azul$$

Y las estrategias de J_2 se componen solo de $\{I, D\}$ ya que desconoce el color de la bola.

El conjunto de estrategias total es: $\{IID, III, IDI, IDD, DID,\ DII, DDI, DDD\}$.

Construiremos la forma normal utilizando el orden de estrategias $\{DI, DD, ID, II\}$, para J_1 y para J_2 usaremos el orden $\{I, D\}$.

Para las entradas de la matriz utilizaremos la recompensa esperada de las estrategias utilizadas:

$$\vec{\pi}_i(S_1, \dots, S_n) = \sum Prob(S_1, \dots, S_n; w) p_i(w)$$

Con estas consideraciones, la forma normal es:

$$\begin{array}{cc} & I \qquad D \quad \leftarrow J_2/J_1 \downarrow \\ M = & \begin{pmatrix} -5/2 & 20 \\ 10 & 20 \\ 35/2 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{c} DI \\ DD \\ ID \\ II \end{array} \end{array}$$

Donde $m_{i,j}$ representa la recompensa esperada de J_1, la recompensa de J_2 será $-m_{i,j}$.

Por ejemplo $m_{1,1} = \frac{3}{8}(-40) + \frac{5}{8}(-20) = -\frac{5}{2}$

Para resolver el juego vemos que la fila 2 domina la fila 1, y que la fila 3 domina la fila 4, por lo que podemos eliminar las filas de la matriz:

$$M_{red} = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 35/2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matriz carece de puntos de silla, lo mas razonable es una estrategia mixta que vuelva al jugador contrario indiferente entre sus elecciones posibles en la matriz reducida:

- J_1: el par $(p, 1-p)$ verificará:

$$10p + \frac{35}{2}(1-p) = 20p + 5(1-p)$$
$$p = \frac{5}{9}$$
$$\left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}\right) \textit{ es el par buscado con un valor de juego } V(G) = \frac{40}{3}$$

- J_2: el par $(q, 1-q)$ verificará:

$$10q + 20(1-q) = \frac{35}{2}q + 5(1-q)$$

$$q = \frac{6}{9}$$

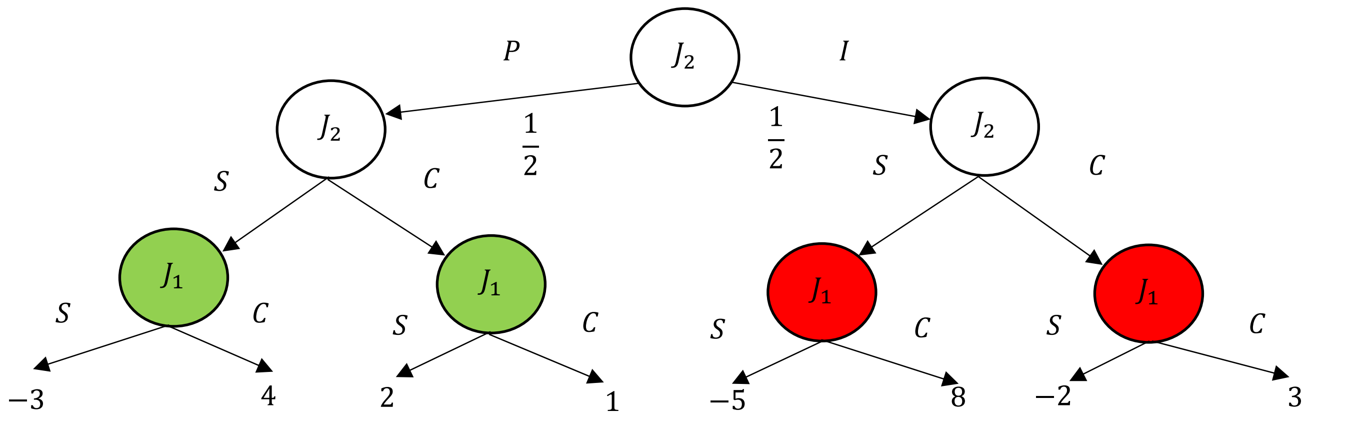
$$\left(\frac{6}{9}, \frac{3}{9}\right) \textit{ es el par buscado con un valor de juego } V(G) = \frac{40}{3}$$

SOLUCIÓN:

El jugador J_1 debe sortear las acciones (DD, ID) con probabilidad $(5/9, 4/9)$ y el jugador J_2 debe sortear las acciones (I, D) con probabilidad $(6/9,3/9)$, lo que les reporta un valor de juego: $V_1(G) = 40/3$ para J_1 y $V_2(G) = -40/3$ para J_2.

EJERCICIO 4:

FORMA EXTENSIVA:



Los nodos verdes y rojos se corresponden con los conjuntos de información del jugador J_1, donde se aprecia que conoce el resultado del dado, pero desconoce las intenciones de J_2. Es decir, si el resultado del dado es par, J_1 sabe que se encuentra en los nodos verdes, pero desconoce en cuál de ellos se encuentra tras la acción de J_2.

Las posibles acciones de cada jugador son:

- J_1: $\{S, C\}$
- J_2: $\{S, C\}$

Denotaremos las estrategias de ambos jugadores con un par de valores:

$$(x, y) \quad tal\ que \quad x = \{S, C\}\ e\ y = \{S, C\}$$

$$x\ cuando\ sale\ par \quad e \quad y\ \ cuando\ sale\ impar$$

El conjunto total de estrategias es:

$$\{SSSS, SSSC, SSCS, SSCC, SCSS, SCSC, SCCS, SCCC, CSSS, CSSC, CSCS, CSCC, CCSS, CCSC, CCCS, CCCC\}$$

Sin pérdida de generalidad, consideramos que las recompensas descritas corresponden a J_1, y cambiadas de signo a J_2. De no ser así, basta invertir los signos de las operaciones que vamos a realizar.
Como tenemos una acción aleatoria, para calcular las entradas de la matriz del juego, debemos emplear la recompensa esperada:

$$\vec{\pi}_i(S_1, \dots, S_n) = \sum Prob(S_1, \dots, S_n; w)p_i(w)$$

Con estas consideraciones, construimos la forma normal con J_1 como jugador de filas, con un orden de estrategias definido como al inicio:

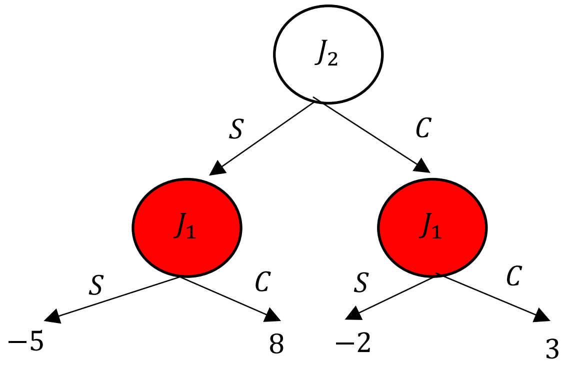
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} SS & SC & CS & CC \end{array} \leftarrow J_2/J_1 \downarrow \\ M = & \begin{pmatrix} -4 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 6 \\ -\frac{5}{2} & 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} & 5 & -2 & \frac{9}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} SS \\ SC \\ CS \\ CC \end{array} \end{array}$$

Por ejemplo: $m_{1,1} = \frac{1}{2}(-3) + \frac{1}{2}(-5) = 4$

$$donde\ m_{i,j}\ son\ recompensas\ de\ J_1\ y - m_{i,j}\ recompensas\ para\ J_2$$

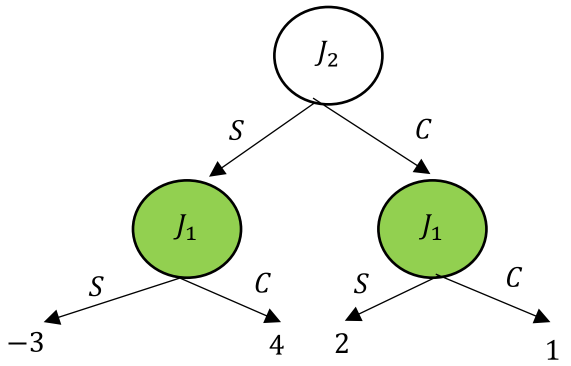
Resolvemos el juego a través de los subjuegos que genera la acción aleatoria inicial:

SUBJUEGO 1: PUNTUACIÓN IMPAR



En este caso vemos claramente en el diagrama que para J_1, la acción C domina estrictamente a la acción S. Por tanto, en caso de salir impar, J_1 jugará siempre C. Sabiendo esto, si J_2 es racional, jugará C, para minimizar sus pérdidas.

SUBJUEGO 2: PUNTUACIÓN PAR



Si J_1 desconoce en qué nodo se encuentra, parece razonable que tome su decisión S o C acorde a un par de probabilidades $(p, 1-p)$. Jugando según ese sorteo, J_1 querrá que a J_2 le resulte indiferente qué acción escoger desde el punto de vista de la recompensa esperada:

$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ $la\ matriz\ del\ subjuego\ 1\ t.q.\ m_{i,j}\ la\ recompensa\ de\ J_1\ y - m_{i,j}\ la\ de\ J_2$

El par óptimo para J_1 viene dado por la ecuación:

$$p(-3) + (1-p)(4) = p(2) + (1-p)(1)$$

$$-7p + 4 = p + 1 \quad \rightarrow \quad p = \frac{3}{8}$$

La recompensa de J_1 será en promedio $11/8$ y para J_2 será $-11/8$.

Por otro lado, J_2 también querrá volver indiferente a J_1, por lo que puede escoger un par $(q, 1 - q)$ para decidir entre S o C, dicho par verifica:

$$-3q + 2(1 - q) = 4q + (1 - q)$$

$$q = \frac{1}{8}$$

SOLUCIÓN

Si el resultado del dado es impar J_1 jugará a cambiar el plan (C) y J_2 jugará a cambiar el plan (C). Con un valor de subjuego $V_1 = 3$

Si el resultado del dado es par, se jugarán estrategias mixtas con ternas de probabilidad:

$$\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) \ para \ \ J_1 \ entre \ (S, C)$$

$$\left(\frac{1}{8}, \frac{7}{8}\right) \ para \ J_2 \ entre \ (S, C)$$

Con un valor de subjuego $V_2 = 11/8$

Considerando las probabilidades de los resultados del dado, el valor del juego completo es:

$$V(G) = \frac{1}{2}V_1 + \frac{1}{2}V_2$$

$$V(G) = \frac{35}{16} \ para \ J_1 \ y \ \ -\frac{35}{16} \ para \ J_2$$