Ejercicio 2.7.3 pág. 25

Sea $S^2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=1\right\}$ y ψ la carta dada por las coordenadas polares cuya inversa es $x = \sin v \cos u = \cos u \sin v$, $y = \sin v \sin u$, $z = \cos v$.

Sea $f : S^2 \to S^2$ la aplicación inducida por el automorfismpo de $\mathbb{R}^3$ con matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Calcular $f_*(\frac{\partial}{\partial \psi^1})_m$, $f_*(\frac{\partial}{\partial \psi^2})_m$, siendo m un punto genérico de S^2.

RESOLUCIÓN

En el apartado a) presento la justificación teórica;

en el b) aplica el a) para obtener los cálculos que permiten llegar al resultado;

Aconsejo vivamente a que entiendan bien los dos apartados, apesar de que en un examen no se pedirá la justificación teórica.

a) Empecemos por calcular $\partial/\partial\psi^1$ y $\partial/\partial\psi^2$ utilizando la teoría del curso para, entonces, proceder a calcular f.

Por la definición de f_* del texto, (pag. 23)

$\partial/\partial\psi^1 = \psi_*^{-1}(\partial/\partial u) = \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u} = (\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^i_{\psi(m)} \frac{\partial}{\partial x_i}$ (vector de $\mathbb{R}^3$)

$\partial/\partial\psi^2 = \psi_*^{-1}(\partial/\partial v) = \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial v} = (\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial v})^i_{\psi(m)} \frac{\partial}{\partial x^i}$

Designemos $(\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^i$ por ψ_u^i y $(\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial v})^i$ por ψ_v^i ,

Esto es, $\partial/\partial\psi^1 = (\psi_u^1, \psi_u^2, \psi_u^3)$ y $\partial/\partial\psi^2 = (\psi_v^1, \psi_v^2, \psi_v^3)$

Ahora, tomando el campo $\partial/\partial\psi^1$

(para $\partial/\partial\psi^2$ es idéntico, pero la notación se cargaría mucho al considerar los dos casos $\partial/\partial\psi^j, j = 1, 2$; además, las variables son u y v, no hay índices)

$f_*(\partial/\partial\psi^1_m) =$ Notese que en este caso las dos cartas son la misma, la de coordenadas polares,

$= f_*(\psi_u^i \frac{\partial}{\partial x^i})\psi(m)$ (**)

Aplicando (pág 23, o mejor aún, pág 20, pues es donde está la justificación: $v = v(\psi^i)\partial/\partial\psi^i$; notar que $\psi(m) = (x^1(m), x^2(m), x^3(m)\ )$

(**) $= f_*(\psi_u^i \frac{\partial}{\partial x^i})x^k(m)\frac{\partial}{\partial x^k} = \psi_u^i \frac{\partial(x^k \circ f)}{\partial x^i}_{(m)} \frac{\partial}{\partial x^k}_{f(m)}$ $(*)$

Nota: $x^k \circ f = f^k$ es la coordenada de orden k de
$f(x,y,z) = (\frac{\sqrt{2}}{2}(x+z), y, -\frac{\sqrt{2}}{2}(x-z))$
Así: $\quad f^1(x,y,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+z) \quad f^2(x,y,z) = y \quad f^1(x,y,z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-z)$

tenemos que $\quad (*) = \ (\psi_u^i \ \sum \frac{\partial f^k}{\partial x^i}{}_{(m)}) \frac{\partial}{\partial x^k}{}_{f(m)}$

Y esto es el vector
$(\psi_u^1 \ \frac{\partial f^1}{\partial x^1}{}_{(m)} + \psi_u^2 \ \frac{\partial f^1}{\partial x^2}{}_{(m)} + \psi_u^3 \ \frac{\partial f^1}{\partial x^3}{}_{(m)}, \psi_u^1 \ \frac{\partial f^2}{\partial x^1}{}_{(m)} + \psi_u^2 \ \frac{\partial f^2}{\partial x^2}{}_{(m)} + \psi_u^3 \ \frac{\partial f^2}{\partial x^3}{}_{(m)}, \psi_u^1 \ \frac{\partial f^3}{\partial x^1}{}_{(m)} +$
$\psi_u^2 \ \frac{\partial f^3}{\partial x^2}{}_{(m)} + \psi_u^3 \ \frac{\partial f^3}{\partial x^3}{}_{(m)})$
en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^k}{}_{f(m)} \right\} (k = 1,2,3$ de $T_{f(m)}\mathbb{R}^3$

Ahora bien, este vector es también la imagen $Df_m(\partial/\partial\psi_1)$, de

$\partial/\partial\psi^1 = (\psi_u^1, \psi_u^2, \psi_u^3)$ por la matriz jacobiana $\begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \frac{\partial f^1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2} & \frac{\partial f^2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f^3}{\partial x_1} & \frac{\partial f^3}{\partial x_2} & \frac{\partial f^3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ de f

Hemos probado entonces:

$$f_*(\partial/\partial\psi_m^1) = Df_m(\partial/\partial\psi_1)$$

donde $\partial/\partial\psi_m^1 = (\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^i_{\psi(m)} \ \frac{\partial}{\partial x_i} = (\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^1_{\psi(m)}, \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^2_{\psi(m)}, \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^3_{\psi(m)})$

que hemos notado por simplificación: $(\psi_u^1, \psi_u^2, \psi_u^3)$

b) Luego, **PARA RESOLVER EL EJERCICIO solo hay que calcular:**

$\partial/\partial\psi^1_{m=\psi^{-1}(a,b)} = (\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^1_{\psi(m)=(a,b)}, \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^2_{\psi(m)=(a,b)}, \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial u})^3_{\psi(m)=(a,b)}) =$

$= (-\sin a \sin b, \cos a \sin b, 0)$

$\partial/\partial\psi_m^2 = (\frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial v})^1_{\psi(m)=(a,b)}, \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial v})^2_{\psi(m)=(a,b)}, \frac{\partial(\psi^{-1})}{\partial v})^3_{\psi(m)=(a,b)}) = (\cos a \cos b, \sin a \cos b, -\sin b)$

Por ejemplo, si $(a,b) = (0, \frac{\pi}{2})$ obtenemos la base de $T_{(1,0,0)}M = \left\langle \partial/\partial\psi_m^1 = (0,1,0), \partial/\partial\psi_m^2 = (0,0,-1) \right\rangle$

La aplicación f es un automorfismo de $\mathbb{R}^3$; y sabemos que la derivada de una aplicación lineal es ella misma;

Luego:

$f_*(\partial/\partial\psi^1_m) = Df_m(-\sin a \sin b, \cos a \sin b, 0) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin a \sin b \\ \cos a \sin b \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \sin b \\ \cos a \sin b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \sin b \end{pmatrix}$$

$para(a,b) = (0, \frac{\pi}{2}) \qquad f_*(\partial/\partial\psi^1_{(1,0,0)}) = f_*(0,1,0) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad).$$

Para $\partial/\partial\psi^2_m$:
$f_*(\partial/\partial\psi^2_m) = Df_m(\cos a \cos b, \sin a \cos b, -\sin b)=$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos a \cos b \\ \sin a \cos b \\ -\sin b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a \cos b - \sin b) \\ \sin a \cos b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos a \cos b + \sin b) \end{pmatrix}$$

$para(a,b) = (0, \frac{\pi}{2}) \qquad f_*(\partial/\partial\psi^2_{(1,0,0)}) = f_*(0,0,-1) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$