Ejercicio 1. *Un nuevo producto se introduce en una tienda piloto para estudiar su posible comercialización en toda una red de establecimientos. Independientemente cada mes, el producto puede originar pérdidas, con probabilidad 1/3, o ganancias. Si al cabo de un año el producto no ha originado pérdidas durante dos meses consecutivos, se comercializa.*

a) Hallar la probabilidad de que el producto se comercialice.

b) Si un establecimiento particular decide, una vez comercializado el producto, que lo retirará de la venta la primera vez que se produzcan 3 meses consecutivos de pérdidas, determinar el número medio de meses durante los cuales ha obtenido ganancias y la distribución de dicho número.

Solución:
a) Cada mes el producto puede producir ganancias (G), producir pérdidas a pesar de haber producido ganancias el mes anterior (P), o bien ser el segundo mes consecutivo en que el producto produce pérdidas ($2P$). Este último estado se considera absorbente puesto que, si se alcanza, el producto no se comercializa.
La matriz de transición es entonces:

$$\begin{array}{c|ccc|} & G & P & 2P \\ \hline G & 2/3 & 1/3 & \\ P & 2/3 & & 1/3 \\ 2P & & & 1 \\ \hline \end{array} = \text{ P.}$$

Como

$$\text{P}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \\ & & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+1 & 1 & -2-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+1 & 1 & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

será

$$\text{P}^{12}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & \sqrt{3}-1 & \sqrt{3}+1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{12} & \\ & & \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\sqrt{3} \\ \sqrt{3}+1 & 1 & -2-\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+1 & 1 & -2+\sqrt{3} \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

y

$$p_{G,2P}^{(12)} = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)^{12} + \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \left(\frac{1-\sqrt{3}}{3}\right)^{12}$$

es la probabilidad de que, al acabar el año, el producto no se comercialice**.

b) El planteamiento es similar aunque con un estado más ($3P$) que representa tres meses de pérdidas consecutivas, en el cual el producto se retira de la venta. Así pues, la matriz de transición es

$$\begin{array}{c|cccc|} & G & P & 2P & 3P \\ \hline G & 2/3 & 1/3 & & \\ P & 2/3 & & 1/3 & \\ 2P & 2/3 & & & 1/3 \\ 3P & & & & 1 \\ \hline \end{array} = \text{P}.$$

Las probabilidades de alcanzar el estado G, desde cada estado, son

$$\begin{aligned} f_{2P,G} &= \frac{2}{3} \\ f_{P,G} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_{2P,G} = \frac{8}{9} \\ f_{G,G} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_{P,G} = \frac{26}{27} \end{aligned}$$

Si V_G representa el número de visitas a G, será

$$P\{V_G = r \mid X_1 = G\} = (f_{GG})^{r-1} \ (1 - f_{GG}) = \left(\frac{26}{27}\right)^{r-1} \frac{1}{27}$$

para $r = 1, 2, \ldots$; mientras que

$$P\{V_G = r \mid X_1 = P\} = \begin{cases} 1 - f_{PG} = \dfrac{1}{9} & \text{para } r = 0 \\ f_{PG}\,(f_{GG})^{r-1}\,(1 - f_{GG}) & = \dfrac{8}{9}\left(\dfrac{26}{27}\right)^{r-1} \dfrac{1}{27} \\ & \text{para} \quad r = 1, 2, 3 \ldots \end{cases}$$

**Más exactamente, sería $\frac{2}{3} p_{G,2P}^{(11)} + \frac{1}{3} p_{P,2P}^{(11)}$, que coincide con el resultado anterior.

Luego

$$P\left\{V_G = r\right\} = \begin{cases} \dfrac{1}{3}\,\dfrac{1}{9} = \dfrac{1}{27} & \text{para } r = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}\,\dfrac{8}{9}\right)\left(\dfrac{26}{27}\right)^{r-1}\dfrac{1}{27} & = \left(\dfrac{26}{27}\right)^{r}\dfrac{1}{27} \\ & \text{para } r = 1, 2, 3 \ldots \end{cases}$$

Por tanto

$$E\left[V_G\right] = \sum_{r=1}^{\infty} r\left(\frac{26}{27}\right)^{r}\frac{1}{27} = 26.$$

Ejercicio 2. *Un estudiante tiene apilados sobre su mesa tres libros de consulta: 1, 2 y 3, que utiliza con frecuencias p_1, p_2 y p_3. Cuando necesita un libro, lo toma sin alterar el orden de los otros dos y al acabar de utilizarlo lo deposita encima, a la espera de la próxima consulta.*

a) Plantar la cadena de Markov que describe la ordenación de los tres libros entre dos consultas.

b) Hallar la proporción límite de tiempo que los libros pasan en el orden inicial.

c) Determinar el número medio de consultas necesario para que se produzca el orden inverso al inicial.

d) Supuesto $p_2 = 0$, obtener las probabilidades de las diversas ordenaciones posibles tras n consultas.

Solución:

a) El espacio de estados es: $E = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$. La matriz de transición entre ellos viene dada por

	(123)	(132)	(213)	(231)	(312)	(321)
(123)	p_1		p_2		p_3	
(132)		p_1	p_2		p_3	
(213)	p_1		p_2			p_3
(231)	p_1			p_2		p_3
(312)		p_1		p_2	p_3	
(321)		p_1		p_2		p_3

y la distribución inicial es $p^0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.

b) Lamando A, B, C, D, E, y F a los estados, la distribución estacionaria $\Pi = (\pi_A, \pi_B, \pi_C, \pi_D, \pi_E, \pi_F)$, cumple

$$\left.\begin{array}{l} p_1\,(\pi_A+\pi_C+\pi_D)=\pi_A \\ p_1\,(\pi_B+\pi_E+\pi_F)=\pi_B \\ p_2\,(\pi_A+\pi_B+\pi_C)=\pi_C \\ p_2\,(\pi_D+\pi_E+\pi_F)=\pi_D \\ p_3\,(\pi_A+\pi_B+\pi_E)=\pi_E \\ p_3\,(\pi_C+\pi_D+\pi_F)=\pi_F \\ \pi_A+\pi_B+\pi_C+\pi_D+\pi_E+\pi_F=1 \end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l} \pi_A+\pi_B=p_1 \\ \pi_C+\pi_D=p_2 \\ \pi_E+\pi_F=p_3 \end{array}\right.$$

con lo cual se tiene

$$\left.\begin{array}{l} p_1\,(\pi_A+p_2)=\pi_A \\ p_1\,(\pi_B+p_3)=\pi_B \\ p_2\,(p_1+\pi_C)=\pi_C \\ p_2\,(\pi_D+p_3)=\pi_D \\ p_3\,(p_1+\pi_E)=\pi_E \\ p_3\,(p_2+\pi_F)=\pi_F \end{array}\right\} \text{ o bien } \left\{\begin{array}{l} \pi_A=p_1p_2/(1-p_1) \\ \pi_B=p_1p_3/(1-p_1) \\ \pi_C=p_1p_2/(1-p_2) \\ \pi_D=p_2p_3/(1-p_2) \\ \pi_E=p_1p_3/(1-p_3) \\ \pi_F=p_2p_3/(1-p_3) \end{array}\right.$$

que son las proporciones límites de tiempo en cada estado. En concreto, la proporción límite de tiempo con los libros en el orden inicial es: $\pi_A = p_1p_2/(1-p_1)$.

c) Si m_i el número medio de consultas para llegar al estado $F(321)$, desde el estado i, será:

$$\left.\begin{array}{lcl} m_A &=& p_1\,m_A+p_2\,m_C+p_3\,m_E+1 \\ m_B &=& p_1\,m_B+p_2\,m_C+p_3\,m_E+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m_A=m_B$$

$$\left.\begin{array}{lcl} m_C &=& p_1\,m_A+p_2\,m_C+1 \\ m_D &=& p_1\,m_A+p_2\,m_D+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad m_C=m_D$$

$$m_E = p_1\,m_B+p_2\,m_D+p_3\,m_E+1$$

Resulta entonces:

$$\begin{array}{lcl} (1-p_1)\,m_A &=& p_2\,m_C+p_3\,m_E+1 \\ (1-p_2)\,m_C &=& p_1\,m_A+1 \end{array}$$

$$\begin{aligned}(1-p_3)\,m_E &= p_1 m_A + p_2 m_C + 1 = p_1 m_A + p_2\left(\frac{p_1}{1-p_2}m_A + \frac{1}{1-p_2}\right) + 1\\ &= \left(p_1 + \frac{p_1\,p_2}{1-p_2}\right) m_A + \frac{p_2}{1-p_2} + 1\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}(1-p_1)m_A &= p_2\left(\frac{p_1}{1-p_2}m_A + \frac{1}{1-p_2}\right) + \frac{p_3}{1-p_3}\left(p_1 + \frac{p_1\,p_2}{1-p_2}\right) m_A\\ &\quad + \frac{p_2\,p_3}{(1-p_2)(1-p_3)} + \frac{p_3}{1-p_3} + 1\end{aligned}$$

o bien

$$\left[1 - p_1 - \frac{p_1 p_2}{1-p_2} - \frac{p_1 p_3}{1-p_3} - \frac{p_1 p_2 p_3}{(1-p_2)(1-p_3)}\right] m_A =$$
$$= \frac{p_2}{1-p_2} + \frac{p_2 p_3}{(1-p_2)(1-p_3)} + \frac{p_3}{1-p_3} + 1$$

es decir

$$\begin{aligned}&((1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) - p_1p_2(1-p_3) - p_1p_3(1-p_2) - p_1p_2p_3)\, m_A =\\ &\qquad = p_2(1-p_3) + p_2p_3 + p_3(1-p_2) + (1-p_2)(1-p_3)\end{aligned}$$

y, en definitiva,

$$m_A = \frac{1}{p_2 p_3}$$

d) En este caso, la matriz de transición se reduce a

$$\begin{array}{c} \\ 123 \\ 132 \\ 312 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 123 & 132 & 312 \end{array} \\ \begin{pmatrix} p_1 & & p_3 \\ & p_1 & p_3 \\ & p_1 & p_3 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & p_3 & 1 \\ 1 & p_3 & 0 \\ 1 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

de forma que

$$\begin{aligned}\mathrm{P}^n &= \begin{pmatrix} 1 & p_3 & 1 \\ 1 & p_3 & 0 \\ 1 & -p_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & (p_1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p_1 & p_3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} p_1^n & p_1 - p_1^n & p_3 \\ 0 & p_1 & p_3 \\ 0 & p_1 & p_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Al cabo de n utilizaciones el orden puede ser: 123, 132 ó 312 con las probabilidades que indica la primera fila de la matriz P^n:

$$(p_1, p_1(1-p_1^{n-1}), p_3).$$

Ejercicio 3. *Un estudio sobre absentismo laboral ha estimado que un trabajador que se encuentre de baja cierta semana, tiene probabilidad 1/2 de ser dado de alta a la semana siguiente y 1/10 de requerir hospitalización la semana siguiente. Los enfermos hospitalizados continuuan así la semana siguiente con probabilidad 1/4, sin que sea posible darles de alta directamente.*
El 10 % de los trabajadores que enferman necesitan hospitalización inmediata.

a) Hallar la distribución de la duración del período de baja.

b) Calcular el número medio de semanas de hospitalización durante un período de baja.

c) Determinar la probabilidad de que durante un período de baja el enfermo requiera hospitalización.

Solución:
a) Representemos por B, H y A los tres estados posibles: BAJA, HOSPITALIZACIÓN y ALTA respectivamente. La matriz de transición será:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B & H & A \end{array} \\ \begin{array}{c} B \\ H \\ A \end{array} & \begin{pmatrix} 4/10 & 1/10 & 1/2 \\ 3/4 & 1/4 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

donde el estado A se ha hecho absorbente para contar el número de semanas hasta el alta. La distribución inicial es: $(0'9, 0'1, 0)$.
Como

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & \sqrt{129}-3 & \sqrt{129}+3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \frac{13+\sqrt{129}}{40} & \\ & & \frac{13-\sqrt{129}}{40} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8\sqrt{129} \\ 3+\sqrt{129} & 4 & -\sqrt{129}-7 \\ 3-\sqrt{129} & 4 & \sqrt{129}-7 \end{pmatrix} \frac{1}{8\sqrt{129}}$$

será

$$P^n = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 1 & \sqrt{129}-3 & \sqrt{129}+3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \left(\frac{13+\sqrt{129}}{40}\right)^n & \\ & & \left(\frac{13-\sqrt{129}}{40}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 8\sqrt{129} \\ 3+\sqrt{129} & 4 & -\sqrt{129}-7 \\ 3-\sqrt{129} & 4 & \sqrt{129}-7 \end{pmatrix} \frac{1}{8\sqrt{129}}$$

luego

$$\begin{aligned} p_{BA}^{(n)} &= 1 - \frac{\sqrt{129}+7}{2\sqrt{129}}\left(\frac{13+\sqrt{129}}{40}\right)^n - \frac{\sqrt{129}-7}{2\sqrt{129}}\left(\frac{13-\sqrt{129}}{40}\right)^n \\ p_{HA}^{(n)} &= 1 - \frac{27+\sqrt{129}}{2\sqrt{129}}\left(\frac{13+\sqrt{129}}{40}\right)^n + \frac{27-\sqrt{129}}{2\sqrt{129}}\left(\frac{13-\sqrt{129}}{40}\right)^n \end{aligned}$$

y la distribución del periodo de baja es

$$P\{T \leq n\} = 0'9\, p_{BA}^{(n)} + 0'1\, p_{HA}^{(n)}.$$

b) Las probabilidades de llegar al estado H son:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{BH} = \dfrac{4}{10}\, f_{BH} + \dfrac{1}{10} \qquad \text{o bien} \qquad f_{BH} = \dfrac{1}{6} \\ f_{HH} = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\, f_{BH} = \dfrac{3}{8} \end{array} \right.$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} P_{HH}(1) &= \frac{3}{8}\,(1 + P_{HH}(1)) \qquad \text{luego} \qquad P_{HH}(1) = \frac{3}{5} \\ P_{BH}(1) &= \frac{1}{6}\,(1 + P_{HH}(1)) = \frac{1}{6}\left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

El número medio de semanas de hospitalización es: $0'9\frac{4}{15} + 0'1\frac{3}{5} = \frac{3}{10}$.

c) Dado que $f_{BH} = 1/6$, la probabilidad de que un paciente requiera hospitalización es:

$$0'9\,\frac{1}{6} + 0'1 = \frac{1}{4}.$$

Ejercicio 4. *Demostrar que si S_n es un recorrido aleatorio simple, $|S_n|$ es también un proceso de Markov.*

Solución:
Sea $i_1, i_2, \ldots, i_r$ la trayectoria del proceso $(\,|S_n|\,)$ hasta la etapa r.
Supongamos que $i_r > 0$ y sea k el último índice con $i_k = 0$ (puede ser $k = 0$).
Como (S_n) es markoniano, será

$$P\{S_r = i_r \,|\, |S_r| = i_r, \ldots, |S_1| = i_1\} = P\{S_r = i_r \,|\, |S_r| = i_r, \ldots, S_k = 0\}$$

$$= \frac{P\{S_r = i_r, \ldots, S_{k+1} = i_{k+1} \,|\, S_k = 0\}}{P\{|S_r| = i_r, \ldots, |S_{k+1}| = i_{k+1} \,|\, S_k = 0\}}$$

$$= \frac{P\{S_r = i_r, \ldots, S_{k+1} = i_{k+1} | S_k = 0\}}{P\{S_r = i_r, \ldots, S_{k+1} = i_{k+1} | S_k = 0\} + P\{S_r = -i_r, \ldots, S_{k+1} = -i_{k+1} \,|\, S_k = 0\}}$$

Ahora bien, si la trayectoria $(i_k, \ldots, i_r)$ presenta c saltos nulos, para que sea $S_r = i_r$ tendrá que haber $(r-k-c+i_r)/2$ saltos positivos y $(r-k-c-i_r)/2$ saltos negativos. Mientras que, si $S_r = -i_r$, es al revés. Por tanto

$$P\{S_r = i_r \,|\, |S_r| = i_r, \ldots, |S_1| = i_1\} =$$

$$= \frac{p^{(r-k-c+i_r)/2}\, q^{(r-k-c-i_r)/2}\, (1-p-q)^c}{p^{(r-k-c+i_r)/2} q^{(r-k-c-i_r)/2} (1-p-q)^c + p^{(r-k-c-i_r)/2} q^{(r-k-c+i_r)/2} (1-p-q)^c}$$
$$= \frac{p^{i_r}}{p^{i_r} + q^{i_r}}$$

Naturalmente, por simetría:

$$P\{S_r = -i_r \,|\, |S_r| = i_r, \ldots, |S_1| = i_1\} = \frac{q^{i_r}}{p^{i_r} + q^{i_r}}.$$

Además, como el resultado es independiente de $i_{r-1}, \ldots, i_1$, también será

$$P\{S_r = i_r \,|\, |S_r| = i_r\} = \frac{p^{i_r}}{p^{i_r} + q^{i_r}} \quad \text{y} \quad P\{S_r = -i_r \,|\, |S_r| = i_r\} = \frac{q^{i_r}}{p^{i_r} + q^{i_r}}.$$

En definitiva, $(|S_n|)$ es markoniano puesto que

$$\begin{aligned} P\{|S_{r+1}| = j| \,|S_r| = i_r, \ldots, |S_1| = i_1\} & \\ &= P\{S_r = i_r \,|\, |S_r| = i_r\} P\{|S_{r+1}| = j \,|\, S_r = i_r\} \\ &+ P\{S_r = -i_r \,|\, |S_r| = i_r\} P\{|S_{r+1}| = j \,|\, S_r = -i_r\} \\ &= P\{|S_{r+1}| = j| \,|S_r| = i_r\}. \end{aligned}$$

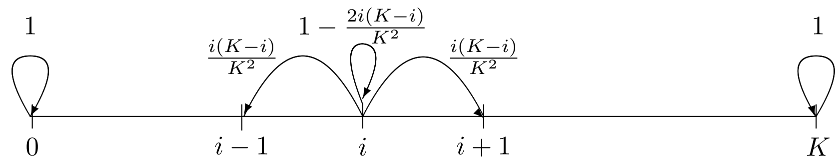
Ejercicio 5. *Los individuos de una población compuesta inicialmente por i individuos de tipo A y $K-i$ de tipo B, han acordado que cada vez que muera uno de ellos será sustituido por otro, de manera a mantener constantemente igual a K el tamaño de la población. En el momento de producirse una sustitución, la probabilidad de que el que muera sea de un tipo determinado es proporcional al número de individuos de dicho tipo, e igual probabilidad tiene el sustituto de pertenecer a dicho tipo.*

a) Calcular las probabilidades de las distintas composiciones finales de la población.

b) Obtener el número esperado de miembros de tipo A después de n sustituciones.

c) Si se añade la condición de que cuando la población tenga todos sus miembros del mismo tipo, la siguiente sustitución ha de ser del tipo contrario, determinar el número esperado de sustituciones necesarias para que se repita la composición inicial.

Solución:
Si hay i individuos de tipo A y $K-i$ de tipo B, la probabilidad de que muera uno de tipo A y sea sustituido por uno de tipo B es $\frac{i}{K} \cdot \frac{K-i}{K}$, y quedan entonces $i-1$ de tipo A. La misma probabilidad hay de que muera un B y sea reemplazado por un A, con lo cual habría $i+1$ de tipo A. En definitiva, la matriz de transición es la que representa el diagrama



a) Si f_i representa la probabilidad de que, partiendo de i, la composición final conste de 0 individuos de tipo A, será

$$f_i = \frac{i(K-i)}{K^2} f_{i-1} + \left(1 - \frac{2i(K-i)}{K^2}\right) f_i + \frac{i(K-i)}{K^2} f_{i+1}$$

para $i = 1, 2, \ldots, K-1$; mientras que $f_0 = 1$ y $f_K = 0$.

Simplificada, la ecuación se reduce a $2f_i = f_{i-1} + f_{i+1}$ y tiene por solución general: $f_i = A + Bi$. Con las condiciones $f_0 = 1, f_K = 0$ resulta

$$f_i = 1 - \frac{i}{K}$$

para todo $i = 0, \dots, K$.

b) Sea X_n el número de miembros de tipo A después de n sustituciones, entonces

$$\mathrm{E}\left[X_n \mid X_{n-1} = j\right] = (j-1)\frac{j(K-j)}{K^2} + j\left(1 - \frac{2j(K-j)}{K^2}\right) + (j+1)\frac{j(K-j)}{K^2}$$

que es igual a j. Por tanto, $E\left[X_n \mid X_{n-1}\right] = X_{n-1}$, y

$$E\left[X_n\right] = E\left[X_{n-1}\right] = \dots = E\left[X_0\right] = i.$$

c) La condición añadida sólo modifica las probabilidades de transición en los estados 0 y K que dejan de ser absorbentes para convertirse en recurrentes positivos, al igual que todos los demás estados. De hecho, la distribución estacionaria verifica

$$\left.\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{K-1}{K^2}\,\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + \left(1 - 2\,\frac{K-1}{K^2}\right)\pi_1 + \frac{2(K-2)}{K^2}\,\pi_2 \\
\pi_2 &= \frac{K-1}{K^2}\,\pi_1 + \left(1 - 2\,\frac{2(K-2)}{K^2}\right)\pi_2 + \frac{3(K-3)}{K^2}\,\pi_3 \\
&\;\vdots \\
\pi_i &= \frac{(i-1)(K-i+1)}{K^2}\pi_{i-1} + \left(1 - 2\frac{i(K-i)}{K^2}\right)\pi_i + \frac{(i+1)(K-i-1)}{K^2}\pi_{i+1} \\
&\;\vdots \\
\pi_K &= \frac{K-1}{K^2}\pi_{K-1}
\end{aligned}\right\}$$

de donde se obtiene

$$\begin{cases} \pi_1 &= \dfrac{K^2}{K-1}\,\pi_0 \\ \pi_2 &= \dfrac{2(K-1)\,\pi_1 - K^2\pi_0}{2(K-2)} = \dfrac{K^2}{2(K-2)}\,\pi_0 \\ \pi_3 &= \dfrac{4(K-2)\,\pi_2 - (K-1)\,\pi_1}{3(K-3)} = \dfrac{K^2}{3(K-3)}\,\pi_0 \\ &\vdots \\ \pi_i &= \dfrac{K^2}{i(K-1)}\,\pi_0 \\ &\vdots \\ \pi_K &= \pi_0 \end{cases}$$

Y como:

$$1 = \sum_{i=0}^{K} \pi_i = \pi_0 \left(2 + K^2 \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{i(K-i)} \right) = \pi_0 \left(2 + 2K \sum_{i=1}^{K-1} \frac{1}{i} \right),$$

el número medio de cambios necesarios para que se repita la composición inicial es:

$$\frac{1}{\pi_i} = \frac{i(K-i)}{K^2}\, 2 \left(1 + K \sum_{i=1}^{K-i} \frac{1}{i} \right).$$

Ejercicio 6. *Una cadena de Markov $\{Y_n\}$ con espacio de estados $\{-1, 0, 1\}$ tiene matriz de transición*

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$$

y distribución inicial (p_{-1}, p_0, p_1). Sea $X_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$.

a) Determinar las condiciones que debe cumplir P para que X_n sea una cadena de Markov. Si no se cumplen tales condiciones, plantear una cadena de Markov, $\{Z_n\}$, cuya evolución contenga como información la evolución del proceso $\{X_n\}$.

b) Probar que la probabilidad de que X_n alcance el valor $k > 0$ es uno si $\alpha_1(1-\beta_2) + \alpha_2\beta_1 \le \gamma_3(1-\beta_2) + \beta_3\gamma_2$.

Solución:
Por ejemplo

$$P\{X_{n+1} = i-1 \,|\, X_{n-1} = i-1, X_n = i\} = P\{Y_{n+1} = -1 \,|\, Y_n = +1\} = \gamma_1.$$

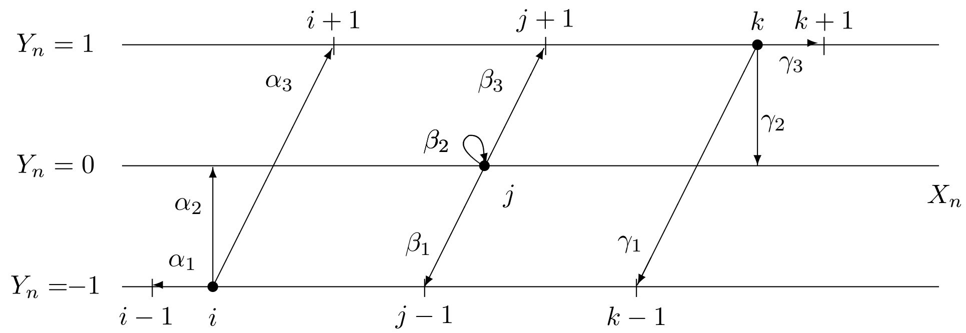
De forma similar

$$\begin{aligned}
&P\{X_{n+1} = i \,|\, X_{n-1} = i-1, X_n = i\} = \gamma_2 \\
&P\{X_{n+1} = i+1 \,|\, X_{n-1} = i-1, X_n = i\} = \gamma_3 \\
&P\{X_{n+1} = i-1 \,|\, X_{n-1} = i, X_n = i\} = \beta_1 \\
&P\{X_{n+1} = i \,|\, X_{n-1} = i, X_n = i\} = \beta_2 \\
&P\{X_{n+1} = i+1 \,|\, X_{n-1} = i, X_n = i\} = \beta_3 \\
&P\{X_{n+1} = i-1 \,|\, X_{n-1} = i+1, X_n = i\} = \alpha_1 \\
&P\{X_{n+1} = i \,|\, X_{n-1} = i+1, X_n = i\} = \alpha_2 \\
&P\{X_{n+1} = i+1 \,|\, X_{n-1} = i+1, X_n = i\} = \alpha_3
\end{aligned}$$

Según esto, para que las probabiliades de transición no dependan de X_{n-1}, debe ser

$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \quad \alpha_2 = \beta_2 = \gamma_2 \quad \text{y} \quad \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3.$$

Es pues necesario que las variables $\{Y_n\}$ sean independientes.
En caso contrario, el proceso $Z_n = (Y_n, X_n)$ es una cadena de Markov, cuyas transiciones responden al diagrama:



y distribución inicial: $p_{(-1,-1)} = p_{-1}$, $p_{(0,0)} = p_0$, $p_{(1,1)} = p_1$.

b) Sea $f_{r,i}$ a la probabilidad de alcanzar el valor $X_n = k$ desde el estado (r, i), (con $r = -1, 0, 1$ e $i \leq k$). Si $\beta_2' = 1/(1 - \beta_2)$, será:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} f_{1,i} = \gamma_3 f_{1,i+1} + \gamma_2 f_{0,i} + \gamma_1 f_{-1,i-1} \\ f_{0,i} = \beta_3 f_{1,i+1} + \beta_2 f_{0,i} + \beta_1 f_{-1,i-1} \\ f_{-1,i} = \alpha_1 f_{-1,i-1} + \alpha_2 f_{0,i} + \alpha_3 \, f_{1,i+1} \end{array} \right. \quad \Rightarrow f_{0,i} = \beta_3 \beta_2' f_{1,i+1} + \beta_1 \beta_2' f_{-1,i-1}$$

luego

$$\left\{ \begin{array}{l} f_{1,i} = (\gamma_3 + \gamma_2 \beta_3 \beta_2') f_{1,i+1} + (\gamma_1 + \gamma_2 \beta_1 \beta_2') f_{-1,i-1} \\ \\ f_{-1,i} = (\alpha_1 + \alpha_2 \beta_1 \beta_2') f_{-1,i-1} + (\alpha_3 + \alpha_2 \beta_3 \beta_2') f_{1,i+1} \end{array} \right.$$

Entonces, si $\gamma_1' = (\gamma_1 + \gamma_2 \beta_1 \beta_2')^{-1}$ y $\gamma_3' = (\gamma_1 + \gamma_2 \beta_1 \beta_2')^{-1} (\gamma_3 + \gamma_2 \beta_3 \, \beta_2')$, resulta

$$f_{-1,i-1} = \gamma_1' f_{1,i} - \gamma_3' f_{1,i+1}$$

con lo cual

$$\begin{array}{l} \gamma_1' f_{1,i+1} - \gamma_3' f_{1,i+2} = \\ \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \beta_1 \beta_2') \gamma_1' f_{1,i} - (\alpha_1 + \alpha_2 \beta_1 \beta_2') \gamma_3' f_{1,i+1} + (\alpha_3 + \alpha_2 \beta_3 \beta_2') f_{1,i+1} \end{array}$$

o bien

$$\gamma_3' f_{1,i+2} \left[(\alpha_3 + \alpha_2 \beta_3 \beta_2') - (\alpha_1 + \alpha_2 \beta_1 \beta_2') \gamma_3' - \gamma_1' \right] f_{1,i+1} + (\alpha_1 + \alpha_2 \beta_1 \beta_2') \gamma_1' f_{1,i} = 0 \qquad (**)$$

El sistema (*) tiene la solución $f_{ri} \equiv 1$, luego la ecuación anterior tiene la solución $f_{1i} \equiv 1$. Ello significa que su ecuación característica

$$\gamma_3'\lambda^2 + \left[(\alpha_3 + \alpha_2\beta_3\beta_2') - (\alpha_1 + \alpha_2\beta_1\beta_2')\gamma_3' - \gamma_1'\right]\lambda(\alpha_1 + \alpha_2\beta_1\beta_2')\gamma_1' = 0$$

tiene la raíz $\lambda = 1$ y la otra raíz es, por tanto,

$$\lambda = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2\beta_1\beta_2')}{\gamma_3'}\gamma_1'.$$

De forma que la solución general de la ecuación (**) es entonces: $A + B\lambda^i$.

• Si $\lambda \leq 1$, lo cual equivale a

$$\alpha_1 + \alpha_2\beta_1\beta_2' \leq \frac{\gamma_3'}{\gamma_1'} = \gamma_3 + \gamma_2\,\beta_3\,\beta_2'$$

o bien

$$\alpha_1\,(1-\beta_2) \,+\, \alpha_2\,\beta_1 \,\leq\, \gamma_3\,(1-\beta_2) \,+\, \beta_3\,\gamma_2$$

la solución $A + B\lambda^i$ sólo puede ser una probabilidad, para cualquier $i < 0$, en el caso de que sea $B = 0$; así que $f_{1,i} = A$ o,más exactamente $f_{1,i} = 1$ (por ser $f_{1,k} = 1$).

• Si $\lambda > 1$, con una barrera absorbente situada en $n < 0$, la solución: $f_{1,i} = A + B\lambda^i$, con las condiciones: $f_{1,k} = 1$ y $f_{1,n} = 0$ se convierte en

$$f_{1i} = \frac{\lambda^{n-k} \,-\, \lambda^{i-k}}{\lambda^{n-k} \,-\, 1}.$$

Al hacer $n \to -\infty$ resulta

$$f_{1,i} = \lambda^{i-k} = \left(\frac{\alpha_1(1-\beta_2) + \alpha_2\beta_1}{\gamma_3(1-\beta_2) + \gamma_2\beta_3}\right)^{i-k}.$$

Ejercicio 7. *De un montón de 5 bolas blancas y dos negras, se introducen 4 elegidas al azar en una urna A y las tres restantes en otra urna B. A partir de entonces, en cada etapa, se escoge una bola de A y se introduce en B y, después, se toma una bola de B y se pasa a A. Determinar*

a) El número medio de bolas negras en A después de la etapa n.

b) El número medio de etapas necesario para que se repita la situación inicial.

c) El número medio de veces que la urna A sólo contiene bolas blancas durante las k primeras etapas.

Solución:
En cualquier etapa hay 4 bolas en A y 3 en B, luego se pueden caracterizar los estados del sistema mediante el número de bolas negras en A:

	Composición	
Estado	A	B
0	$4b$	$1b\ 2n$
1	$3b\ 1n$	$2b\ 1n$
2	$2b\ 2n$	$3b$

Al tomar las bolas al azar, las probabilidades iniciales de los tres estados son

$$p_0 = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{7}{4}} = \frac{1}{7}, \quad p_1 = \frac{\binom{5}{3}\binom{2}{1}}{\binom{7}{4}} = \frac{4}{7}, \quad p_0 = \frac{\binom{5}{2}\binom{2}{2}}{\binom{7}{4}} = \frac{2}{7}$$

En cuanto a la matriz de transición, resulta

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \\ 1/8 & 11/16 & 3/16 \\ & 3/8 & 5/8 \end{pmatrix} \end{array} = P$$

a) Como $(1/4, 4/7, 2/7)\,P = (1/7, 4/7, 2/7)$, la distribución inicial es estacionaria y, en cualquier etapa, se cumple

$$p_0^{(n)} = \frac{1}{7}, \qquad p_1^{(n)} = \frac{4}{7}, \qquad p_2^{(n)} = \frac{2}{7}.$$

El número medio de bolas negras en A en la etapa n es pues:

$$\frac{4}{7} + 2 \cdot \frac{2}{7} = \frac{8}{7}.$$

b) El número medio de etapas necesarias para que se repita la situación inicial es

$$\frac{1}{\pi_0} = 7, \quad \frac{1}{\pi_1} = \frac{7}{4} \quad \text{ó} \quad \frac{1}{\pi_2} = \frac{7}{2}$$

según cual sea la situación de partida.

c) El número medio de veces que se pasa por el estado 0 durante las k primeras etapas es

$$\sum_{k=0}^{k} p_0^{(n)} = \frac{k}{7}.$$

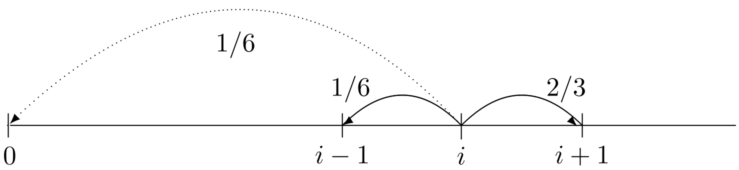
Ejercicio 8.
Dos personas organizan el siguiente juego: para empezar cada uno pone una peseta en el plato; a continuación y alternativamente lanzan un dado y si sale 1,2,3 ó 4 el que ha hecho el lanzamiento pone una nueva peseta; si sale 5 toma una peseta del plato y si sale 6 se lleva todo lo que hay en el plato. El juego termina cuando el plato queda vacío. Calcular:

a) La duración media de la partida.

b) La distribución de la cantidad máxima que llega a haber en el plato.

c) El beneficio esperado de cada jugador.

Solución:
a) La evolución se rige por las probabilidades de transición indicadas en el siguiente diagrama:



La duración media, d_i, a partir del momento en que haya i pesetas en el plato, verifica

$$d_i = \frac{2}{3}\, d_{i+1} \;+\; \frac{1}{6}\, d_{i-1} \;+\; 1$$

La ecuación homogénea $\frac{2}{3}d_{i+1} - d_i + \frac{1}{6}d_{i+1} = 0$ tiene como ecuación característica $\frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda + \frac{1}{6} = 0$, cuyas raíces son $(3 \pm \sqrt{5})/4$. La solución general de la ecuación homogénea es por tanto

$$C_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^i + C_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^i$$

Y la solución general de la ecuación completa es

$$6 + C_1 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^i + C_2 \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^i$$

puesto que $d_i = 6$ es una solución particular de dicha ecuación.

Debe ser $d_i \leq 6$ ya que, como mucho, la partida dura hasta que sale el primer 6 (lo cual ocurre, en media, tras 6 tiradas). Pero $(3+\sqrt{5})/4 > 1$, luego ha de ser $C_1 = 0$ para que la solución no tienda a infinito al crecer i.
Por otra parte, $d_0 = 0$, con lo que $C_2 = -6$ y resulta

$$d_i = 6\left[1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^i\right].$$

En particular, desde la posición inicial $i = 2$, $d_2 = 5'78$.

b) La probabilidad f_i, de que llegue a haber K pesetas en el plato, si ya hay i, verifica

$$f_i = \frac{2}{3} f_{i+1} + \frac{1}{3} f_{i-1} \qquad \text{con} \qquad f_0 = 0 \quad \text{y} \quad f_k = 1.$$

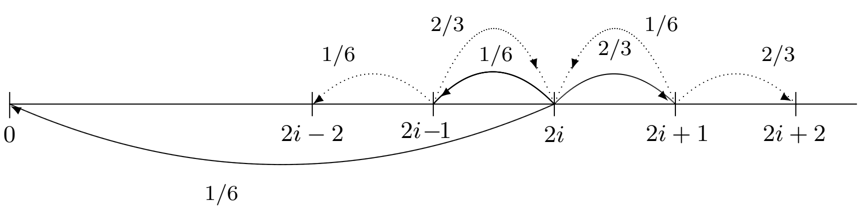
Tales condiciones determinan las constantes de la solución general de la ecuación y proporcionan

$$f_{i,K} = \frac{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^i - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^i}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{4}\right)^k - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{4}\right)^k}.$$

Desde el estado de partida $i = 2$, $f_{2,K}$ expresa la probabilidad de que la cantidad máxima que llegue a haber alcance el valor K o, dicho de otro modo,

$$\mathrm{P}\{\text{Cantidad máxima} \leq K\} = 1 - f_{2,K+1}.$$

c) El primer jugador lanza siempre cuando hay un número par de pesetas en el plato y las transiciones que pueden producirse entre dos de sus lanzamientos aparecen representadas en el siguiente diagrama.



Según ello, su beneficio esperado b_i cuando hay $2i$ pesetas en el plato cumple

$$b_i = \frac{1}{6}\cdot 2i + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{6}b_{i-1} + \frac{2}{3}b_i\right) + \frac{2}{3}\left(-1 + \frac{1}{6}b_i + \frac{2}{3}b_{i+1}\right)$$

es decir:

$$\frac{4}{9}\,b_{i+1} - \frac{7}{9}\,b_i + \frac{1}{36}\,b_{i-1} = \frac{3-2i}{6}.$$

La ecuación característica: $\frac{4}{9}\lambda^2 - \frac{7}{9}\lambda + \frac{1}{36} = 0$ tiene por raíces $(7 \pm 3\sqrt{5})/8$, además $\frac{12}{11}i - \frac{18}{121}$ es una solución particular de la ecuación completa. Luego

$$C_1\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{8}\right)^i + C_2\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{8}\right)^i + \frac{12}{11}i - \frac{18}{121}$$

es la solución general de la ecuación completa.

Ahora bien, como $(7+3\sqrt{5})/8 > 1$, si fuese $C_1 \neq 0$ el beneficio crecería exponencialmente con i; lo cual es imposible ya que el juego es menos ventajoso que el siguiente: El primer jugador nunca pone su peseta, mientras que el segundo jugador la pone siempre, hasta que el primero obtenga 6 y se lleve en media $2i+6$ pesetas (si el estado inicial es $2i$). Por consiguiente, tiene que ser $C_1 = 0$.

La condición $b_0 = 0$ determina entonces

$$b_i = \frac{18}{121}\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{8}\right)^i + \frac{12}{11}i - \frac{18}{121}.$$

En particular, una vez descontada la peseta inicial, el beneficio esperado del primer jugador es

$$b_1 - 1 = \frac{1}{11} - \frac{9}{121}\frac{1+3\sqrt{5}}{4} = -0'05.$$

Ejercicio 9. *Tres urnas contienen inicialmente 2 bolas rojas, 1 roja y una verde y dos verdes respectivamente. En cada etapa se extrae una bola al azar de cada urna y se introducen después, la de A en B, la de B en C y la de C en A.*

a) Plantear la cadena de Markov que describe la composición de las tres urnas después de cada etapa. Especificar el periodo de cada estado y el comportamiento asintótico de la cadena.

b) Hallar el número esperado de veces que la urna A contiene dos bolas rojas antes de la primera vez en que las tres urnas tienen la misma composición.

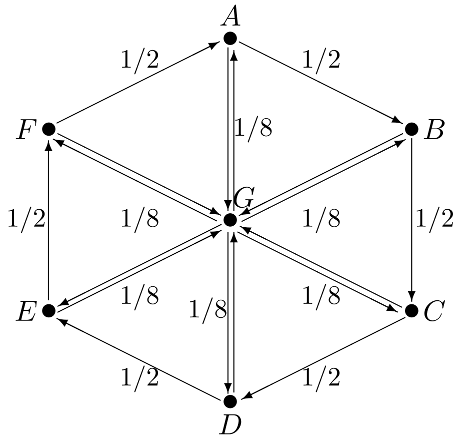
c) Hallar la distribución del número de veces que las tres urnas tienen la misma composición entre dos visitas consecutivas al estado inicial.

Solución:

a) El estado de las urnas en cada momento puede caracterizarse por el número de bolas rojas que contiene cada urna.
Partiendo del estado (2,1,0), las transiciones ocurren según la matriz:

	(2,1,0)	(1,2,0)	(0,2,1)	(0,1,2)	(1,0,2)	(2,0,1)	(1,1,1)
A : (2,1,0)		1/2					1/2
B : (1,2,0)			1/2				1/2
C : (0,2,1)				1/2			1/2
D : (0,1,2)					1/2		1/2
E : (1,0,2)						1/2	1/2
F : (2,0,1)	1/2						1/2
G : (1,1,1)	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	1/8	2/8

Dichas probabilidades de transición puden representarse mediante el diagrama sigiente



El estado G es aperiódico (pues $p_{GG} > 0$) y todos intercomunican, luego son todos aperiódicos.
P^n converge, cuando $n \to \infty$, hacia la matriz cuyas filas coinciden con la distribución estacionaria, determinada por el sistema

$$\begin{cases} \pi_A = \frac{1}{2}\pi_F + \frac{1}{8}\pi_G \\ \pi_B = \frac{1}{2}\pi_A + \frac{1}{8}\pi_G \\ \pi_C = \frac{1}{2}\pi_B + \frac{1}{8}\pi_G \\ \pi_D = \frac{1}{2}\pi_C + \frac{1}{8}\pi_G \\ \pi_E = \frac{1}{2}\pi_D + \frac{1}{8}\pi_G \\ \pi_F = \frac{1}{2}\pi_E + \frac{1}{8}\pi_G \\ \pi_G = \frac{1}{2}(\pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E + \pi_F) + \frac{2}{8}\pi_G \end{cases}$$

y la condición $1 = \pi_A + \pi_B + \pi_C + \pi_D + \pi_E + \pi_F + \pi_G$. Resulta así

$$\pi_G = \frac{1}{2}(1 - \pi_G) + \frac{1}{4}\pi_G$$

luego $\pi_G = 2/5$ y $\pi_A = \pi_B = \pi_C = \pi_D = \pi_E = \pi_F = 1/10$. En definitiva

$$\Pi = \left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5} \right).$$

b) Si se hace absorbente el estado G (que corresponde a la misma composición de las 3 urnas) resulta

$$f_{FA} = \frac{1}{2},\ f_{EA} = \frac{1}{4},\ f_{DA} = \frac{1}{8},\ f_{CA} = \frac{1}{16},\ f_{BA} = \frac{1}{32},\ f_{AA} = \frac{1}{64}$$

con lo cual

$$P_{AA}(1) = \frac{f_{AA}}{1 - f_{AA}} = \frac{1}{63}.$$

De forma análoga:

$$f_{AF} = \frac{1}{32} \qquad P_{FF}(1) = \frac{1}{63}$$

luego

$$P_{AF}(1) = f_{AF}(1 + P_{FF}(1)) = \frac{2}{63}.$$

Contando con la situación inicial, el número esperado de veces que hay 2 bolas rojas en A será: $1 + P_{AA}(1) + P_{AF}(1) = 22/21$.

c) Tras la primera transición, haciendo el estado A absorbente, resulta

$$f_{BG} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}, \qquad f_{GG} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8}\left(\frac{31}{32} + \frac{15}{16} + \frac{7}{8} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{193}{256}.$$

Por tanto, si V_G representa el número esperado de visitas a G, será

$$\mathrm{P}\{V_G = k \,|\, X_1 = B\} = \frac{31}{32}\left(\frac{193}{256}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{193}{256}\right) \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$\mathrm{P}\{V_G = k \,|\, X_1 = G\} = \left(\frac{193}{256}\right)^{k-1}\frac{63}{256} \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

con lo cual

$$\mathrm{P}\{V_G = k \,|\, X_0 = A\} = \frac{63}{64}\left(\frac{193}{256}\right)^{k-1}\frac{63}{256} \qquad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots$$

mientras que

$$P\left\{V_G = 0 \,|\, X_0 = A\right\} = \frac{1}{64}.$$

Ejercicio 10.

Una cierta máquina dispone de dos componentes iguales, de manera que una sola es capaz de mantenerla en funcionamiento. Si al principio de una semana ambas componentes están en servicio hay probabilidad 0'3 de que quede una sola en servicio al final de la semana y 0'4 de que ambas se hayan averiado. Si la semana empieza con una sola componente en servicio, la probabilidad de que la máquina continue funcionando al final de la semana es 0'4. Cuando la máquina está parada al final de una semana, la operación de recambiar ambas componentes dura una semana. Calcular

a) El número esperado de reparaciones durante las n primeras semanas, si la máquina estaba inicialmente nueva.

b) El número esperado de semanas entre dos reparaciones consecutivas.

c) Supongamos que una semana de funcionamiento produce un beneficio de 5 y la reparación cuesta 9. Existe la posibilidad de que el reparador comprobase el estado de las componentes todas las semanas y, en caso de que hubiese alguna averiada, la sustituyese, tardando una semana y cobrando 1. ¿Cuál de las dos alternativas es preferible?

Solución:

a) En cada momento hay 2, 1 ó 0 componentes en funcionamiento y la matriz de transición es

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
2 & 0'3 & 0'3 & 0'4 \\
1 & & 0'4 & 0'6 \\
0 & 1 & & \\
\hline
\end{array} = \text{P}.$$

La descomposición de Jordan de P será:

$$\text{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 5 \\ 1 & -10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -0'1 & \\ & & -0'2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ -10 & 6 & 4 \\ 22 & -11 & -11 \end{pmatrix} \frac{1}{22}.$$

con lo cual

$$\text{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 12 & 5 \\ 1 & -10 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (-0'1)^n & \\ & & (-0'2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 \\ -10 & 6 & 4 \\ 22 & -11 & -11 \end{pmatrix} \frac{1}{22}.$$

de forma que
$$p_{20}^{(n)} = \frac{1}{22}\{7 + 4(-0'1)^n - 11(-0'2)^n\}$$
es el número esperado de reparaciones que se realizan en la semana n. Por tanto, el número esperado de reparaciones en las N primeras semanas es:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{22}\{7 + 4\,(-0'1)^n - 11\,(-0'2)^n\} =$$
$$= \frac{1}{22}\left\{7n - 4\,\frac{0'1 + (-0'1)^{N+1}}{1'1} + 11\,\frac{0'2 + (-0'2)^{N+1}}{1'2}\right\}.$$

b) La distribución estacionaria cumple:

$$\left.\begin{array}{rcl} \pi_2 &=& 0'3\pi_2 + \pi_0 \\ \pi_1 &=& 0'3\pi_2 + 0'4\,\pi_0 \\ \pi_0 &=& 0'4\pi_2 + 0'6\,\pi_1 \end{array}\right\} \text{ es decir } \left\{\begin{array}{l} \pi_2 = \dfrac{10}{22} \\ \pi_1 = \dfrac{5}{22} \\ \pi_0 = \dfrac{7}{22}. \end{array}\right.$$

para que $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$
Entre dos reparaciones consecutivas, pasan en media $\frac{1}{\pi_0} = \frac{22}{7}$ de semana.

c) Con la alternativa estudiada el beneficio medio por etapa es, a la larga $(\pi_2 + \pi_1)\,5 - \pi_0\,9 = 6/11$.
La otra alternativa corresponde a la matriz de transición:

$$\begin{array}{c|ccc|} & 2 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 0'3 & 0'3 & 0'4 \\ 1 & 1 & & \\ 0 & 1 & & \\ \hline \end{array} = \text{P}$$

cuya distribución estacionaria cumple

$$\left.\begin{array}{l} \pi_2 = 0'3\,\pi_2 + \pi_1 + \pi_0 \\ \pi_1 = 0'3\,\pi_2 \\ \pi_0 = 0'4\,\pi_2 \\ 1 = \pi_2 + \pi_1 + \pi_0 \end{array}\right\} \text{ de forma que } \left\{\begin{array}{l} \pi_2 = \dfrac{10}{17} \\ \pi_1 = \dfrac{3}{17} \\ \pi_0 = \dfrac{4}{17} \end{array}\right.$$

Por tanto, el beneficio medio por etapa es ahora, a la larga,

$$\pi_2 \cdot 5 - (\pi_1 + \pi_0) \cdot 1 = \frac{50}{17} - \frac{7}{17} = \frac{43}{17}$$

y esta segunda alternativa es preferible.

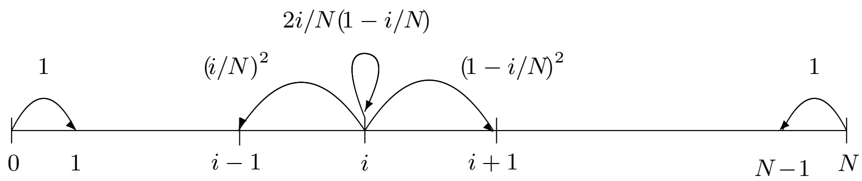
Ejercicio 11. *Dos urnas A y B contienen N bolas blancas y N bolas negras respectivamente. En cada etapa se escoge una bola al azar de cada urna y se intercambian. Determinar*

a) El número medio de cambios necesarios para que se repita la situación inicial.

b) El número medio de bolas blancas en A después de n cambios.

c) El número medio de etapas que se tarda en que la urna A sólo contenga bolas negras.

Solución:
El estado del sistema puede caracterizarse por el número de bolas negras en A y las transiciones ocurren de acuerdo con el siguiente diagrama



a) La distribución estacionaria verifica

$$\begin{cases} \pi_0 = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \pi_1 \\ \pi_1 = \pi_0 \; + 2\frac{1}{N}\left(1-\frac{1}{N}\right)\pi_1 \; + \left(\frac{2}{N}\right)^2 \pi_2 \\ \pi_2 = \left(1-\frac{1}{N}\right)^2 \pi_1 \; + 2\frac{2}{N}\left(1-\frac{2}{N}\right)\pi_2 \; + \left(\frac{3}{N}\right)^2 \pi_3 \\ \quad\vdots \\ \pi_i = \left(1-\frac{i-1}{N}\right)^2 \pi_{i-1} \; + 2\frac{i}{N}\left(1-\frac{i}{N}\right)\pi_i \; + \left(\frac{i+1}{N}\right)^2 \pi_{i+1} \\ \quad\vdots \\ \pi_N = \left(\frac{1}{N}\right)^2 \pi_{N-1} \end{cases}$$

de donde se obtiene

$$
\begin{aligned}
\pi_1 &= \tbinom{N}{1}^2 \pi_0 \\
\pi_2 &= \frac{N^2(N-1)^2}{2^2}\,\pi_0 = \binom{N}{2}^2 \pi_0 \\
&\vdots \\
\pi_{i+1} &= \frac{N^2}{(i+1)^2}\left[\frac{N^2-2i(N-i)}{N^2}\,\pi_i - \frac{(N-i+1)^2}{N^2}\,\pi_{i-1}\right] \\
&= \frac{\pi_0}{(i+1)^2}\left[(N^2-2iN+2i^2)\binom{N}{i}^2 - (N-i+1)^2\binom{N}{i-1}^2\right] \\
&= \frac{(N!)^2\,(N-i+1)^2}{(i+1)^2\,(i!)^2(N-i+1)!^2}\,\pi_0\left[N^2-2iN+2i^2-i^2\right] \\
&= \tbinom{N}{i+1}^2 \pi_0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Como ha de ser

$$1 = \sum_{i=0}^{N} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i}^2 = \pi_0 \binom{2N}{N}$$

resulta $\pi_0 = \tbinom{2N}{N}^{-1}$ con lo cual

$$\frac{1}{\pi_0} = \binom{2N}{N}$$

es el tiempo medio hasta que se repite la situación inicial.

b) Como

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,[\,X_n \,|\, X_{n-1}=i\,] &= (i-1)\frac{i^2}{N^2} + i\,2\frac{i}{N}\left(1-\frac{i}{N}\right) + (i+1)\left(1-\frac{i}{N}\right)^2 \\
&= 1 + \frac{N-2}{N} i
\end{aligned}
$$

se deduce

$$E\,[\,X_n\,] = 1 + \frac{N-2}{N}\,E\,[\,X_{n-1}\,]\,.$$

Entonces, como $\mathrm{E}[X_0] = 0$, resulta

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_1] &= 1 \\
\mathrm{E}[X_2] &= 1 + \frac{N-2}{N} \\
\mathrm{E}[X_3] &= 1 + \frac{N-2}{N} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 \\
&\vdots \\
\mathrm{E}[X_n] &= 1 + \frac{N-2}{N} + \left(\frac{N-2}{N}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{N-2}{N}\right)^{n-1} \\
&= \frac{N}{2}\left[1 - \left(\frac{N-2}{N}\right)^n\right].
\end{aligned}$$

$E[X_n]$ es el número esperado de bolas negras en A, tras n cambios; mientras que el de blancas es

$$\frac{N}{2}\left[1 + \left(\frac{N-2}{N}\right)^n\right].$$

c) El número medio, m_i, de etapas que se tarda en llegar a N desde i, verifica

$$\begin{cases}
m_0 = m_1 + 1 \\
m_1 = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 m_2 + 2\,\frac{1}{N}\left(1 - \frac{1}{N}\right) m_1 + \frac{1}{N^2} m_0 + 1 \\
\vdots \\
m_i = \left(1 - \frac{i}{N}\right)^2 m_{i+1} + 2\,\frac{i}{N}\left(1 - \frac{i}{N}\right) m_i + \left(\frac{i}{N}\right)^2 m_{i-1} + 1 \\
\vdots \\
m_{N-2} = \left(\frac{2}{N}\right)^2 m_{N-1} + 2\left(1 - \frac{2}{N}\right)\frac{2}{N} m_{N-2} + \left(1 - \frac{2}{N}\right)^2 m_{N-3} + 1 \\
m_{N-1} = 2\left(1 - \frac{1}{N}\right)\frac{1}{N} m_{N-1} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)^2 m_{N-2} + 1
\end{cases}$$

luego $m_0 - m_1 = 1$ y

$$\begin{aligned}
m_i - m_{i+1} &= \frac{N^2}{(N-i)^2} + \frac{i^2}{N-i}(m_{i-1} - m_i) \\
&= \frac{N^2}{(N-i)^2} + \frac{i^2}{(N-i)^2}\frac{N^2}{(N-i+1)^2} + \frac{i^2}{(N-i)^2}\frac{(i-1)^2}{(N-i+1)^2}(m_{i-2} - m_{i-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ldots = N^2 \sum_{j=0}^{i} \frac{i!^2}{(i-j)!^2} \frac{(N-i-1)!^2}{(N-i+j)!^2} \\
&= \frac{i!^2\,(N-i-1)!^2}{(N-1)!^2} \sum_{j=0}^{i} \binom{N}{i-j}^2 \\
&= \binom{N-1}{i}^{-2} \sum_{j=0}^{i} \binom{N}{i-j}^2
\end{aligned}
$$

Por tanto:

$$m_0 = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i}^{-2} \sum_{j=0}^{i} \binom{N}{i-j}^2 .$$

Ejercicio 12. *Dos jugadores disponen cada uno de una urna, el primero con 1 bola blanca y 2 negras y el segundo con 2 bolas blancas y 2 negras. Extraen simultáneamente una pareja de bolas cada uno y si son del mismo color las introducen en la urna del contrario, mientras que si son de colores distintos las devuelven a su urna. Gana la partida el primero que no pueda realizar su extracción.*

a) Plantear la cadena que describe la evolución de la composición de las urnas.

b) Determinar la probabilidad de ganar de cada jugador.

c) Hallar el número medio de extracciones que habrá que realizar.

d) Determinar la distribución del número de veces que el segundo jugador tiene sólo dos bolas negras en su urna.

e) Calcular el número esperado de veces que la urna del segundo jugador contiene dos bolas.

Solución:
a) Se puede describir la situación del juego mediante el contenido de la urna del primer jugador. La matriz de transición es entonces

		1B	3B	1B2N	3B2N	1B4N	3B4N
(1)	1B	1					
(2)	3B			1			
(3)	1B2N	2/9	1/18	1/2	1/9	1/9	
(4)	3B2N				1/10	3/10	6/10
(5)	1B4N				3/5		2/5
(6)	3B4N						1

Por ejemplo, si la situación es

$$\left|\begin{array}{c} 1B \\ 2N \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c} 2B \\ 2N \end{array}\right|$$

las extracciones de ambos jugadores pueden dar los siguientes resultados con las probabilidades indicadas:

a) ○ ● ⟶ 2/3

b) ● ● ⟶ 1/3

1) ○ ○ ⟶ 1/6

2) ● ● ⟶ 1/6

3) ○ ● ⟶ 2/3

la combinación de los resultados

a y 1	lleva a la situación	3B2N
a y 2	lleva a la situación	1B4N
a y 3	lleva a la situación	1B2N
b y 1	lleva a la situación	3B
b y 2	lleva a la situación	1B2N
b y 3	lleva a la situación	1B.

lo cual justifica los términos de la tercera fila de la matriz.
Los estados $1B$ y $3B4N$ representan la victoria del primero y del segundo jugador respectivamente.

b) Numerados los estados de 1 a 6, si f_i es la probabilidad de llegar a 1 ($1B$) desde i, se cumple

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= f_3 \\ f_3 &= \frac{2}{9} + \frac{1}{18} f_2 + \frac{1}{2} f_3 + \frac{1}{9} f_4 + \frac{1}{9} f_5 \\ f_4 &= \frac{1}{10} f_4 + \frac{3}{10} f_5 + \frac{6}{10} f_6 \\ f_5 &= \frac{3}{5} f_4 + \frac{2}{5} f_6 \\ f_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{aligned} f_4 &= f_5 = f_6 = 0 \\ f_3 &= f_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

Como el estado inicial es 3, cada uno gana con probabilidad 1/2.

c) Sea m_i el número medio de extracciones a realizar desde el estado i; será

$$\left.\begin{aligned} m_2 &= m_3 \ + 1 \\ m_3 &= \frac{1}{18}\, m_2 + \frac{1}{2}\, m_3 + \frac{1}{9}\, m_4 + \frac{1}{9}\, m_5 + 1 \\ m_4 &= \frac{1}{10}\, m_4 + \frac{3}{10}\, m_5 + 1 \\ m_5 &= \frac{3}{5}\, m_4 + 1 \end{aligned}\right\} \text{ luego } \left\{\begin{aligned} m_4 &= \frac{65}{36} \\ m_5 &= \frac{25}{12} \\ m_3 &= \frac{241}{72} \\ m_2 &= \frac{313}{72} \end{aligned}\right.$$

El número medio de extracciones que se realizan desde el estado inicial es $m_3 = 241/72$.

d) Sea V_4 el número de visitas al estado 4 (dos bolas negras en la urna del segundo jugador) y f_i la probabilidad de alcanzar el estado 4 desde i. Será:

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= 0 \\ f_2 &= f_3 \\ f_3 &= \frac{2}{9}f_1 + \frac{1}{18}f_2 + \frac{1}{2}f_3 + \frac{1}{9}f_4 + \frac{1}{9}f_5 \\ f_5 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}f_6 \\ f_6 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

de donde $f_2 = f_3 = \dfrac{2}{5}$ y por tanto

$$f_4 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}f_5 = \frac{7}{25}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} P\{V_0 = 0\} &= 1 - f_3 = \frac{3}{5} \\ P\{V_4 = r\} &= f_3(f_4)^{r-1}(1 - f_4) = \frac{2}{5}\left(\frac{7}{25}\right)^{r-1}\frac{18}{25} \end{aligned}$$

para $r = 1, 2, 3, \ldots$

e) La urna del segundo jugador contiene 2 bolas en los estados 4 y 5. Hay que determinar pues: $P_{34}(1) + P_{35}(1)$.
Como $f_{44} = \frac{7}{25}$, será $P_{44}(1) = \frac{7}{25}\,(\,1 + P_{44}(1)\,)$ de forma que

$$P_{44}(1) = \frac{7}{18} \quad \text{y} \quad P_{34}(1) = \frac{2}{5}\left(1 + \frac{7}{18}\right) = \frac{5}{9}.$$

Por otra parte, si g_i es la probabilidad de alcanzar el estado 5 desde i, será:

$$\begin{cases} g_1 = 0 \\ g_2 = g_3 \\ g_3 = \dfrac{2}{9}g_1 + \dfrac{1}{18}g_2 + \dfrac{1}{2}g_3 + \dfrac{1}{9}g_4 + \dfrac{1}{9} \\ g_4 = \dfrac{1}{10}g_4 + \dfrac{3}{10} + \dfrac{6}{10}g_6 \\ g_5 = \dfrac{3}{5}g_4 + \dfrac{2}{5}g_6 \\ g_6 = 0 \end{cases}$$

es decir $g_2 = g_3 = g_4 = 1/3$ y $g_5 = 1/5$. Por tanto:

$$P_{55}(1) = \frac{1}{5}\,(\,1 + P_{55}(1)\,) \qquad \text{o bien} \qquad P_{55}(1) = \frac{1}{4}$$

con lo cual

$$P_{35}(1) = \frac{1}{3}\,(\,1 + P_{55}(1)\,) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}.$$

En definitiva

$$P_{34}(1) + P_{35}(1) = \frac{5}{9} + \frac{5}{12} = \frac{35}{36}.$$