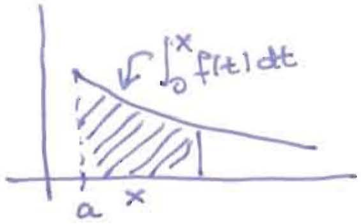
Dada una función f continua tal que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a, \text{ entonces}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = a.$$

SOLUCIÓN:



Que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \geq 0$ tal que si $t \in [N_\varepsilon, +\infty)$ entonces

$$|f(t) - a| < \varepsilon/2$$

Observación $\dfrac{\int_0^x a\,dt}{x} = a \dfrac{\int_0^x dt}{x} = \dfrac{ax}{x} = a.$

Sea $\varepsilon > 0$

$$\left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt - a \right| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt - \frac{1}{x} \int_0^x a\,dt \right|$$

$$= \left| \frac{1}{x} \int_0^x (f(t) - a)\,dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^x |f(t) - a|\,dt =$$

$$= \frac{1}{x} \left[\int_0^{N_\varepsilon} |f(t) - a|\,dt + \int_{N_\varepsilon}^x |f(t) - a|\,dt \right]$$

donde hemos tomado $x > N_\varepsilon$. Tomando x suficiente-mente grande $\frac{1}{x} \int_0^{N_\varepsilon} |f(t) - a|\,dt \leq \varepsilon/2$ y

$$\frac{1}{x} \int_{N_\varepsilon}^x |f(t) - a|\,dt \leq \frac{1}{x} \int_{N_\varepsilon}^x \varepsilon/2\,dt = \frac{1}{x}(x - N_\varepsilon) \cdot \varepsilon/2$$

$$\leq \varepsilon/2.$$

Por lo que $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = a.$

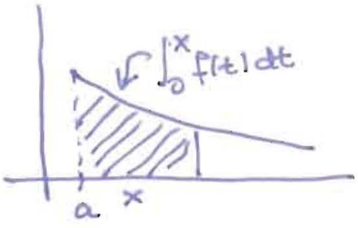
Nota importante: la regla de L'Hôpital es aplicable si se da la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Esto ocurre si $\int_0^\infty f(t)\,dt = \pm\infty$, por ejemplo cuando $a \neq 0$. En el caso $a = 0$, no se puede aplicar.

Dada una función f continua tal que

$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x) = a, \text{ entonces}$$

$$\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = a.$$

SOLUCIÓN:



Que $\lim\limits_{x\mapsto +\infty} f(x) = a$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N_\varepsilon \geq 0$ tal que si $t \in [N_\varepsilon, +\infty)$ entonces

$$|f(t) - a| < \varepsilon/2$$

Observación $\dfrac{\int_0^x a\,dt}{x} = a\dfrac{\int_0^x dt}{x} = \dfrac{ax}{x} = a.$

Sea $\varepsilon > 0$

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - a\right| = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt - \frac{1}{x}\int_0^x a\,dt\right|$$

$$= \left|\frac{1}{x}\int_0^x (f(t)-a)dt\right| \leq \frac{1}{x}\int_0^x |f(t)-a|\,dt =$$

$$= \frac{1}{x}\left[\int_0^{N_\varepsilon} |f(t)-a|\,dt + \int_{N_\varepsilon}^x |f(t)-a|\,dt\right]$$

donde hemos tomado $x > N_\varepsilon$. Tomando x suficientemente grande $\frac{1}{x}\int_0^{N_\varepsilon} |f(t)-a|\,dt \leq \varepsilon/2$ y

$$\frac{1}{x}\int_{N_\varepsilon}^x |f(t)-a|\,dt \leq \frac{1}{x}\int_{N_\varepsilon}^x \varepsilon/2\,dt = \frac{1}{x}(x-N_\varepsilon)\cdot\varepsilon/2$$

$$\leq \varepsilon/2.$$

Por lo que $\lim\limits_{x\mapsto\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = a.$

Nota importante: la regla de L'Hôpital es aplicable si se da la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Esto ocurre si $\int_0^\infty f(t)\,dt = \pm\infty$, por ejemplo cuando $a \neq 0$. En el caso $a=0$, no se puede aplicar.

PROBLEMA

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^{n-1}$

a) Calcular el radio de convergencia y el intervalo de convergencia.

b) Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$.

Solución:

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1$

Luego $\frac{1}{\rho} = 1$; $\rho = 1$. Por tanto $(-1,1)$ la serie converge. En $x=1$ y $x=-1$ la serie no converge porque $\lim_{n\to\infty} n(n+1) \neq 0$ y $\lim_{n\to+\infty} (n(n+1))(-1)^{n-1} \neq 0$

En intervalo de convergencia es $(-1,1)$.

b) Sabemos que $g(x) = \sum_0^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\quad x \in (-1,1]$

$$g'(x) = \sum_1^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

y

$$g''(x) = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots = \left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} =$$

$$= \sum_2^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_1^{\infty} (n+1)\cdot n \cdot x^{n-1}$$

La suma pedida es $g''(1/3) = \frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3} = \frac{27}{8}\cdot 2 = \frac{27}{4}$

PROBLEMA

a) Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}$

b) Calcular $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2n^2+2kn+k^2}}$

Solución: a) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+(x+1)^2}} = \left\{ \begin{array}{l} t = x+1 \\ dt = dx \end{array} \right\} =$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \log\left(\sqrt{1+t^2}+t\right) = \left\{ \begin{array}{l} \text{deshaciendo} \\ \text{el cambio} \end{array} \right\}$

$= \log\left(\sqrt{1+(x+1)^2} + (x+1)\right) + K.$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{2+2\left(\frac{k}{n}\right)+\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+2x+x^2}} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^2+2kn+k^2}}$

Pero

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+2x+x^2}} = \log(\sqrt{5}+2) - \log(\sqrt{2}+1) =$

$= \log\left(\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{2}+1}\right)$

PROBLEMA

Se considera la sucesión

$$c_n(t) = \cos(\lambda n t)\, e^{-nt} \quad t \in [0, +\infty),\ \lambda \neq 0.$$

a) Calcúlese el límite puntual de la sucesión $c_n(t)$ y probar que es uniformemente convergente sobre la semirrecta $[a, +\infty)$ con $a > 0$.

b) Probar que la sucesión $c_n(t)$ no converge uniformemente en $[0, +\infty)$.

SOLUCIÓN:

a) Obsérvese que $|\cos(\lambda n t)| \leq 1 \quad \forall t > 0 \quad \forall n$.

Fijado $t > 0$

$$\lim_{n \to \infty} |c_n(t)| \leq \lim_{n \to +\infty} e^{-nt} = 0$$

En $t = 0$ $\quad c_n(0) = 1$

luego el límite puntual es $c(t) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0. \end{cases}$

Si $t \in [a, +\infty)$ con $a > 0$

$$|c_n(t)| = |\cos(\lambda n t) \cdot e^{-nt}| \leq |e^{-nt}| \leq e^{-an}$$

y cuando n tiende a $+\infty$

$$\lim_{n \to \infty} e^{-an} = 0$$ y la convergencia es uniforme.

b) $\{c_n(t)\}$ no converge uniformemente puesto que cada $c_n(t)$ es continua y el límite puntual $c(t)$ no lo es en $[0, +\infty)$.

PROBLEMA

Sea la función $g(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen}(tx)}{x}\, dt$

a) Considerando x fija, hacer el cambio $s = tx$ obteniendo $g(x)$ como una integral en ds. Calcular $g(x)$ explícitamente.

b) Calcular $g'(x)$.

SOLUCIÓN:

Fijado x hacemos el cambio $s = tx$, $ds = x\, dt$ y por tanto

$$g(x) = \int_0^{x^2} \frac{\operatorname{sen}(s)}{x^2}\, ds = \frac{1}{x^2} \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(s)\, ds =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-\cos(s)\right)\Big|_0^{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \cos(x^2)\right)$$

b) $$g'(x) = +\frac{2x \operatorname{sen}(x^2)}{x^2} + \left(\frac{-2}{x^3}\right)\left(1 - \cos(x^2)\right) =$$

$$= \frac{2 \operatorname{sen}(x^2)}{x} - \frac{2}{x^3} + \frac{2\cos(x^2)}{x^3}$$

PROBLEMA

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua y sea

$$F(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt.$$

a) Decir en qué puntos $x \in \mathbb{R}$ existe y calcular $F'(x)$

b) Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, demostrar que $\lim_{x \to \infty} F(x) = \ell$

SOLUCIÓN:

a) Como $f(t)$ es continua por el Teorema fundamental del Cálculo F está definida para todo x, es derivable y $F'(x) = \frac{1}{2}\left[f(x+1) - f(x-1)\right]$

b) $$\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = \frac{1}{2} f(\xi)\left[(x+1) - (x-1)\right]$$ por el

Teorema del valor medio, con $\xi \in (x-1, x+1)$

por tanto

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} f(\xi)\left[x+1-x+1\right] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} f(\xi) = \lim_{\substack{\xi \to +\infty \\ \xi \in (x-1, x+1)}} f(\xi) = \ell.$$