# TEORÍA DE LA DECISIÓN
## Exámenes

*Curso 2019/2020 - 1ª Semana*

Un problema de decisión consta de dos acciones posibles $a_1$ y $a_2$ y tres estados de la naturaleza $\theta_1, \theta_2$ y $\theta_3$. Las pérdidas asociadas son

|  | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | 4 | 0 | 1 |
| $a_2$ | −1 | 3 | 2 |

A) Determinar la acción aleatorizada minimax y el valor del problema de decisión.
B) Determinar la acción aleatorizada óptima con el criterio de Savage.
C) Determinar la acción Bayes frente a cada distribución a priori $\pi$ sobre los estados de naturaleza. Deducir la distribución menos favorable $\pi_0$ y el mínimo riesgo Bayes frente a $\pi_0$.

Antes de tomar la decisión se puede realizar un experimento con dos resultados posibles $x_1$ o $x_2$, cuyas probabilidades, según los estados de la naturaleza son:

|  | $\theta_1$ | $\theta_2$ | $\theta_3$ |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,3 | 0,5 | 0,8 |
| $x_2$ | 0,7 | 0,5 | 0,2 |

D) Determinar la regla de decisión Bayes frente a cada distribución $\pi$ sobre los estados de la naturaleza.
E) Calcular los riesgos frente a $\pi$ de las reglas de decisión que son reglas Bayes para alguna distribución $\pi$.

*Solución:*

A) Para la decisión aleatorizada $\boldsymbol{a} = (\alpha, 1-\alpha)$, las funciones de pérdida son

$$L(\theta_1, \boldsymbol{a}) = 5\alpha - 1 \qquad L(\theta_2, \boldsymbol{a}) = -3\alpha + 3 \qquad L(\theta_3, \boldsymbol{a}) = -\alpha + 2$$

Se tiene que

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta, \boldsymbol{a}) = \begin{cases} -3\alpha + 3 & \alpha \leq 1/2 \\ 5\alpha - 1 & \alpha > 1/2 \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que el valor del problema de decisión es

$$V = \min_{\boldsymbol{a} \in A^*} \max_{\theta \in \Theta} L(\theta, \boldsymbol{a}) = 3/2$$

y se consigue con la acción aleatorizada $\boldsymbol{a} = (1/2, 1/2)$.

B) La función de decepción viene dada para cada estado de naturaleza y cada acción aleatorizada $\boldsymbol{a} = (\alpha, 1-\alpha)$, por

$$D(\theta_1, \boldsymbol{a}) = 5\alpha \qquad D(\theta_2, \boldsymbol{a}) = -3\alpha + 3 \qquad L(\theta_3, \boldsymbol{a}) = -\alpha + 1$$

Se trata de aplicar ahora el criterio minimax. Se tiene que

$$\max_{\theta \in \Theta} D(\theta, \alpha) = \begin{cases} -3\alpha + 3 & \alpha \leq 3/8 \\ 5\alpha & \alpha > 3/8 \end{cases}$$

cuyo mínimo se alcanza en $\alpha = 3/8$. Por tanto, la acción aleatorizada óptima con el criterio de Savage es $\boldsymbol{\alpha} = (3/8, 5/8)$.

C) Sea $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, 1 - \pi_1 - \pi_2)$ una distribución a priori sobre los estados de naturaleza, que debe verificar $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1$. Sabemos que, para cada distribución a priori sobre los estados de naturaleza, existe una decisión no aleatorizada que alcanza el mínimo riesgo Bayes, dado que el conjunto de decisiones es finito y el número de estados también. Para cada distribución a priori $\boldsymbol{\pi}$, se tiene que

$$L(\boldsymbol{\pi}, a_1) = 3\pi_1 - \pi_2 + 1 \qquad\qquad L(\boldsymbol{\pi}, a_2) = \pi_1 + \pi_2 + 2$$

Se trata de dos planos que se cortan a lo largo de la recta

$$\pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{2}$$

Por tanto, se tiene que

- Si $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 > \pi_1 - \frac{1}{2},$ entonces $r(\boldsymbol{\pi}) = 3\pi_1 - \pi_2 + 1$ y la acción Bayes es $a_1$.
- Si $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{2},$ entonces $r(\boldsymbol{\pi}) = 2\pi_1 + \frac{3}{2}$ y tanto $a_1$ como $a_2$, como todas las acciones aleatorizadas son acciones Bayes.
- Si $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 < \pi_1 - \frac{1}{2},$ entonces $r(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 + \pi_2 + 2$ y la acción Bayes es $a_2$.

Sabemos que la distribución menos favorable hace que la acción minimax también sea Bayes. Como la acción minimax es aleatorizada, $\boldsymbol{\alpha} = (1/2, 1/2)$, entonces la única posibilidad es que estemos en el segundo caso de los anteriores. Es decir, la distribución menos favorable debe verificar

$$0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad r(\boldsymbol{\pi}) = 2\pi_1 + \frac{3}{2}$$

y, con estas condiciones, se trata de maximizar dicho riesgo Bayes, que aumenta con $\pi_1$. Por tanto, se tiene que debe ser

$$\boldsymbol{\pi}_0 = (3/4, 1/4) \qquad \text{y} \qquad r(\boldsymbol{\pi}_0) = 3$$

D) Supongamos que, a priori, se tiene la distribución $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, 1 - \pi_1 - \pi_2)$ sobre los estados de la naturaleza, con las mismas condiciones que en el apartado anterior. Sea $X$ el resultado del experimento, se tiene entonces

$$P\{X = x_1\} = 0,3\pi_1 + 0,5\pi_2 + 0,8(1 - \pi_1 - \pi_2) = -0,5\pi_1 - 0,3\pi_2 + 0,8$$

$$P\{X = x_2\} = 0,7\pi_1 + 0,5\pi_2 + 0,2(1 - \pi_1 - \pi_2) = 0,5\pi_1 + 0,3\pi_2 + 0,2$$

Se tiene entonces que

$$\pi\{\theta_1 \mid X = x_1\} = \frac{3\pi_1}{-5\pi_1 - 3\pi_2 + 8}$$

$$\pi\{\theta_2 \mid X = x_1\} = \frac{5\pi_2}{-5\pi_1 - 3\pi_2 + 8}$$

$$\pi\{\theta_3 \mid X = x_1\} = \frac{8 - 8\pi_1 - 8\pi_2}{-5\pi_1 - 3\pi_2 + 8}$$

$$\pi\{\theta_1 \mid X = x_2\} = \frac{7\pi_1}{5\pi_1 + 3\pi_2 + 2}$$

$$\pi\{\theta_2 \mid X = x_2\} = \frac{5\pi_2}{5\pi_1 + 3\pi_2 + 2}$$

$$\pi\{\theta_3 \mid X = x_2\} = \frac{2 - 2\pi_1 - 2\pi_2}{5\pi_1 + 3\pi_2 + 2}$$

Vamos a estudiar ahora las diferentes reglas de decisión Bayes en función de la distribución $\boldsymbol{\pi}$.

- Si resulta $X = x_1$, podemos tomar $d(x_1) = a_1$ o $d(x_1) = a_2$.

$$\sum_{i=1}^{3} L(\theta_1, d(x_1))\,\pi\{\theta_i \mid X = x_i\} = \frac{8 + 4\pi_1 - 8\pi_2}{-5\pi_1 - 3\pi_2 + 8} \qquad \text{para } d(x_1) = a_1$$

$$\sum_{i=1}^{3} L(\theta_1, d(x_1))\,\pi\{\theta_i \mid X = x_i\} = \frac{16 - 19\pi_1 - \pi_2}{-5\pi_1 - 3\pi_2 + 8} \qquad \text{para } d(x_1) = a_2$$

Hay que estudiar ahora para qué distribuciones a priori es mejor una u otra decisión. Son iguales en

$$\pi_1 = \frac{8}{23} + \frac{7}{23}\pi_2$$

Por tanto, se tiene que

$$d_\pi^*(x_1) = \begin{cases} a_1 & \pi_1 < \frac{8}{23} + \frac{7}{23}\pi_2 \\ a_2 & \pi_1 \geq \frac{8}{23} + \frac{7}{23}\pi_2 \end{cases}$$

Hacemos lo mismo con $d(x_2)$. Se tiene que

$$\sum_{i=1}^{3} L(\theta_1, d(x_2))\,\pi\{\theta_i \mid X = x_i\} = \frac{2 + 26\pi_1 - 2\pi_2}{5\pi_1 + 3\pi_2 + 2} \qquad \text{para } d(x_2) = a_1$$

$$\sum_{i=1}^{3} L(\theta_1, d(x_2))\,\pi\{\theta_i \mid X = x_i\} = \frac{4 - 11\pi_1 + 11\pi_2}{5\pi_1 + 3\pi_2 + 2} \qquad \text{para } d(x_2) = a_2$$

La frontera se tiene en

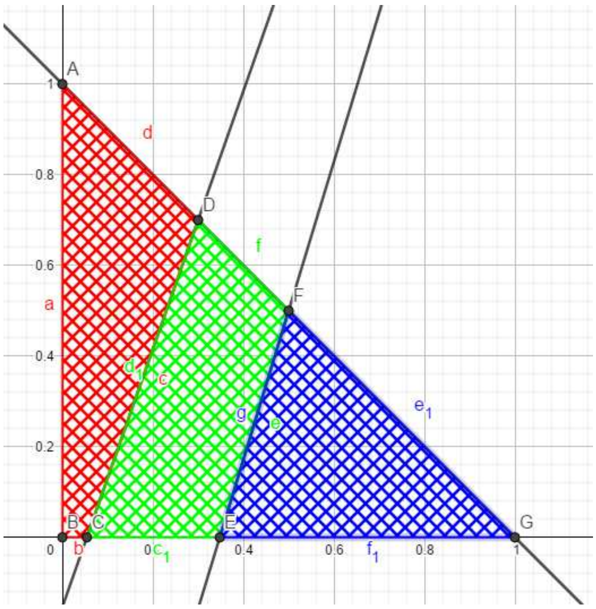
$$\pi_1 = \frac{2}{37} + \frac{13}{37}\pi_2$$

Por tanto, se tiene que

$$d_\pi^*(x_2) = \begin{cases} a_1 & \pi_1 < \frac{2}{37} + \frac{13}{37}\pi_2 \\ a_2 & \pi_1 \geq \frac{2}{37} + \frac{13}{37}\pi_2 \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que

- Si $\pi_1 < \frac{2}{37} + \frac{13}{37}\pi_2$ , $\pi_1 + \pi_2 \leq 1$ entonces $d_\pi^*(x_1) = d_\pi^*(x_2) = a_1$ . (Rojo)
- Si $\frac{2}{37} + \frac{13}{37}\pi_2 \leq \pi_1 < \frac{8}{23} + \frac{7}{23}\pi_2$ , $\pi_1 + \pi_2 \leq 1$ entonces $d_\pi^*(x_1) = a_1$ , $d_\pi^*(x_2) = a_2$. (Verde)
- Si $\pi_1 \geq \frac{8}{23} + \frac{7}{23}\pi_2$ , $\pi_1 + \pi_2 \leq 1$ entonces $d_\pi^*(x_1) = d_\pi^*(x_2) = a_2$ . (Azul)




E) Como se ha visto en el apartado anterior, las reglas de decisión que son reglas Bayes para alguna distribución $\pi$ son $d_1 = (a_1, a_1)$, $d_2 = (a_1, a_2)$, $d_3 = (a_2, a_2)$. Vamos a calcular el riesgo Bayes para cada una de ellas.

**TEORÍA DE LA DECISIÓN**
**Exámenes**

Se tiene que

$$R(\theta_1, d_1) = 4 \qquad R(\theta_2, d_1) = 0 \qquad R(\theta_3, d_1) = 1$$

$$R(\theta_1, d_2) = 0,5 \qquad R(\theta_2, d_2) = 1,5 \qquad R(\theta_3, d_2) = 1,2$$

$$R(\theta_1, d_3) = -1 \qquad R(\theta_2, d_3) = 3 \qquad R(\theta_3, d_3) = 2$$

Por tanto, los riesgos Bayes son

$$\hat{r}(\pi, d_1) = 3\pi_1 - \pi_2 + 1$$

$$\hat{r}(\pi, d_2) = -0,7\pi_1 + 0,3\pi_2 + 1,2$$

$$\hat{r}(\pi, d_3) = -3\pi_3 + \pi_2 + 2$$