PROBLEMA 5. Tema 22 (3 puntos)

Se dispone de 2 barras de longitud L, inicialmente a temperaturas T_1 y T_2 (supondremos $T_2 > T_1$), ambas con densidad ρ, calor específico c_p, y conductividades térmicas k_1 y $k_2 = 3k_1$ respectivamente.

En un instante determinado (que tomaremos como $t = 0$) unimos estas barras una a continuación de la otra, formando una única barra de longitud $2L$ con conductividad térmica discontinua en su punto central (que tomaremos como $x = 0$). Suponiendo que los extremos libres de ambas barras se mantienen a sus respectivas temperaturas iniciales, el objetivo de este problema es calcular la evolución temporal del sistema desde el instante inicial hasta que se alcanza (al menos de manera aproximada) la distribución estacionaria de temperaturas a la que tiende el sistema.

Las ecuaciones que gobiernan la evolución temporal de este sistema son las siguientes:

- En primer lugar el campo de temperaturas $T = T(x,t)$ a cada lado de la discontinuidad ($x = 0$) cumple la ecuación de conservación de la energía, que para este sistema toma la forma de la conocida *ecuación del calor*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

  donde la difusividad térmica $\alpha = k/(\rho c_p)$ es $\alpha = \alpha_1 = k_1/(\rho c_p)$ en $x < 0$ y $\alpha = \alpha_2 = k_2/(\rho c_p) = 3\alpha_1$ en $x > 0$

- Las condiciones iniciales del sistema son:

$$T(x, t = 0) = T_1 \quad \text{en } x < 0$$

$$T(x, t = 0) = T_2 \quad \text{en } x > 0$$

- La condiciones de contorno en los extremos libres de las 2 barras son que éstos se mantienen a sus respectivas temperaturas iniciales, por tanto:

$$T(x = -L, t) = T_1 \qquad T(x = L, t) = T_2$$

- Por último, las condiciones de contorno para el punto de discontinuidad son, por un lado, la continuidad del campo de temperaturas:

$$T(x = 0_-, t) = T(x = 0_+, t)$$

  Por otro lado la conservación del flujo de calor en dicho punto:

$$k_1 \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0_-} = k_2 \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0_+}$$

  de modo que la discontinuidad en el valor de la conductividad térmica en $x = 0$ va a introducir una discontinuidad en la primera derivada de $T(x)$ en dicho punto.

Problema adimensional

En principio podría parecer que para resolver este problema numéricamente es necesario introducir valores concretos para los parámetros T_1, T_2, L, etc. Sin embargo esto no es así, para verlo definimos las siguientes variables adimensionales:

- Temperatura adimensional u:
$$u \equiv \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad T = T_1 + (T_2 - T_1)u$$
- Longitud adimensional y:
$$y \equiv \frac{x}{L}, \qquad \frac{\partial^n}{\partial x^n} = \frac{1}{L^n}\frac{\partial^n}{\partial y^n}$$
- Tiempo adimensional τ:
$$\tau \equiv \frac{t}{L^2/\alpha_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\alpha_1}{L^2}\frac{\partial}{\partial \tau}$$

En términos de estas variables adimensionales el problema matemático que hay que resolver es el siguiente:

$$u_\tau = u_{yy}, \text{ en } -1 < y < 0, \qquad\qquad u_\tau = 3u_{yy}, \text{ en } 0 < y < 1$$

con condiciones iniciales

$$u(y, \tau = 0) = 0, \text{ en } y < 0, \qquad\qquad u(y, \tau = 0) = 1, \text{ en } y > 0$$

y condiciones de contorno

$$u(y = -1, \tau) = 0, \qquad\qquad u(y = 1, \tau) = 1$$
$$u(y = 0^-, \tau) = u(y = 0^+, \tau)$$
$$u_y(y = 0^-, \tau) = 3u_y(y = 0^+, \tau)$$

Vemos que tenemos dos problemas –acoplados– de primer orden en t y segundo orden en y, por lo que tenemos dos condiciones iniciales y 4 condiciones de contorno.

El objetivo de este ejercicio es aproximar la evolución temporal del sistema por medio del método pseudoespectral de colocación ortogonal. Pare ello en primer lugar descompondremos el dominio en dos intervalos [-1,0] y [0,1], y realizaremos un cambio de variable $y \to z$ para rescalar los dos dominios al intervalo $z \in [-1,1]$, de modo que podamos utilizar directamente la base de Chebyshev:

$$z = 2y + 1 \quad \text{para} \quad -1 < y < 0$$
$$z = 2y - 1 \quad \text{para} \quad 0 < y < 1$$

Las soluciones espectrales tendrán la forma:

$$\left.\begin{aligned} A_N(z,\tau) &= \sum_{n=0}^{N} a_n(\tau) T_n(z) \\ B_M(z,\tau) &= \sum_{n=0}^{M} b_n(\tau) T_n(z) \end{aligned}\right. \qquad \text{para} \quad -1 < z < 1$$

Como los dos dominios tienen el mismo tamaño y por las propiedades del problema es esperable un comportamiento similar en ambos dominios, utilizaremos el mismo número de puntos de colocación $M = N$, dados por la cuadratura de Lobatto de $N+1$ puntos:

$$z_i = -\cos\left(\frac{i\pi}{N}\right) \quad i = 0,\dots,N ,$$

reservando los extremos de los dos intervalos para fijar las cuatro condiciones de contorno.

Tenemos $2(N+1)$ coeficientes –dependientes del tiempo- que deberemos obtener de un sistema con el mismo número de ecuaciones. Como el operador diferencial es lineal, el sistema de ecuaciones para los coeficientes será lineal.

Tras el cambio de variables, las funciones residuo que se deben anular en los puntos de colocación vendrán dada por la aplicación de los siguientes operadores diferenciales sobre las aproximaciones $A_N(z,\tau)$ y $B_N(z,\tau)$, respectivamente

$$L_A = \partial_\tau - 4\partial_{zz}$$
$$L_B = \partial_\tau - 12\partial_{zz}$$

Las $2(N+1)$ ecuaciones que determinan la matriz de colocación serán

$$(1):\ \sum_{n=0}^{N} a_n(\tau)T_n(-1) = 0 \qquad \text{(condición contorno extremo izquierdo)}$$

$$(2):\ \sum_{n=0}^{N} b_n(\tau)T_n(1) = 1 \qquad \text{(condición contorno extremo derecho)}$$

$$(3):\ \sum_{n=0}^{N} a_n(\tau)T_n(1) - \sum_{n=0}^{N} b_n(\tau)T_n(-1) = 0 \qquad \text{(condición contorno punto medio: continuidad de la temperatura)}$$

$$(4):\ \sum_{n=0}^{N} a_n(\tau)T_{n,z}(1) - 3\sum_{n=0}^{N} b_n(\tau)T_{n,z}(-1) = 0 \quad \text{(condición contorno punto medio: continuidad del flujo de calor)}$$

$$(5a):\ \sum_{n=0}^{N} L_A\left[a_n(\tau)T_n(z)\right]\Big|_{z=z_i} = 0 \quad i = 1,\dots,N-1 \quad \text{(colocación de la función residuo en el primer dominio)}$$

$$(6a):\ \sum_{n=0}^{N} L_B\left[b_n(\tau)T_n(z)\right]\Big|_{z=z_i} = 0 \quad i = 1,\dots,N-1 \quad \text{(colocación de la función residuo en el segundo dominio)}$$

Obsérvese que se han quitado en la colocación los puntos extremos por ser utilizados en las condiciones de contorno.

Este sistema nos proporcionará un sistema de ecuaciones -tanto algebraicas (1)-(4), como diferenciales (5*a*) y (6*a*)- para los coeficientes espectrales que deberá ser integrado en el tiempo y que dependerá de $2(N-1)$ condiciones iniciales. Estas condiciones iniciales vendrán impuestas por la condición inicial del problema aplicada en los puntos de colocación

$$(5b):\ \sum_{n=0}^{N} a_n(\tau=0)T_n(z_i) = 0 \qquad i = 1,\dots,N-1$$

$$(6b):\ \sum_{n=0}^{N} b_n(\tau=0)T_n(z_j) = 1 \qquad j = 1,\dots,N-1$$

Vemos que se han quitado los extremos libres $i=0$ y $j=N$ porque esas condiciones ya están implícitas en las ecuaciones (1) y (2) respectivamente. También se han quitado los puntos en contacto $i=N$ y $j=0$ porque se ha asumido la condición de continuidad del campo de temperatura en la Ec. (3). Esto nos deja $2(N-1)$ ecuaciones para las condiciones iniciales de los coeficientes espectrales, que coinciden con las $2(N-1)$ ecuaciones diferenciales dadas en (5*a*) y (6*a*).

Llegados es este punto caben dos alternativas, la integración analítica (pues tenemos un sistema de ecuaciones lineales de primer orden) o la integración numérica.

Integración analítica

En programas de álgebra simbólica como *Mathematica* o *Maple* la integración analítica puede ser realizada mediante la función *DSolve*[ ] o *dsolve*( ), respectivamente, obteniéndose así funciones analíticas para los coeficientes $a_n(\tau)$ y $b_n(\tau)$. La solución de nuestro problema tendrá la forma

$$u_N(y,\tau)=\sum_{n=0}^{N} a_n(\tau)T_n\left(2y+1\right) \qquad \text{para} \quad -1<y<0$$

$$u_N(y,\tau)=\sum_{n=0}^{N} b_n(\tau)T_n\left(2y-1\right) \qquad \text{para} \quad 0<y<1$$

La gran ventaja que tiene la integración analítica es que proporciona la solución exacta del sistema de ecuaciones (aunque sigue siendo una solución aproximada del problema original) y esto nos puede proporcionar una información muy valiosa sobre la solución real del problema (comportamiento asintótico, escalas características, parámetros relevantes…). Para órdenes bajos ($N<10$) es posible trabajar con precisión infinita si estamos realizando los cálculos con estos programas de manipulación simbólica. Para órdenes mayores es ya necesario trabajar con precisión finita y los errores de redondeo pueden llegar a ser significativos. En cualquier caso, el tiempo de cálculo de la integración analítica crece rápidamente con el orden, llegando a hacerse inasumible si trabajamos con un PC estándar. En ese caso es más conveniente recurrir a la integración numérica, mucho más rápida.

Atención: Hemos detectado que algunos programas como *Mathematica* tienen problemas a la hora de integrar un sistema de ecuaciones mixto (ecuaciones algebraicas y ecuaciones diferenciales), dando lugar a soluciones erróneas si utilizamos la función *DSolve*[ ]. En ese caso es conveniente transformar el sistema a un sistema completo de ecuaciones diferenciales derivando las ecuaciones (1)-(4) con respecto al tiempo, y utilizando las ecuaciones originales como condiciones de contorno. De este modo, la Ec. (1) por ejemplo se desdoblaría y quedaría del siguiente modo:

$$\text{(1a):} \quad \sum_{n=0}^{N} a_{n,\tau}(\tau)T_n(-1)=0$$

$$\text{(1b):} \quad \sum_{n=0}^{N} a_n(0)T_n(-1)=0$$

y debería hacerse lo mismo con (2), (3) y (4). En cualquier caso, siempre que se utiliza un integrador deberá comprobarse que la solución proporcionada verifica las ecuaciones diferenciales de partida.

Como guía para la comprobación, para $N=2$ obtenemos:

$$a_1(\tau)=\frac{3}{104}\left(13-\sqrt{13}\exp\left[\frac{4}{3}\left(-7+\sqrt{13}\right)\tau\right]+\sqrt{13}\exp\left[-\frac{4}{3}\left(7+\sqrt{13}\right)\tau\right]\right)$$

$$b_1(\tau)=\frac{1}{104}\left(13+3\sqrt{13}\exp\left[\frac{4}{3}\left(-7+\sqrt{13}\right)\tau\right]-3\sqrt{13}\exp\left[-\frac{4}{3}\left(7+\sqrt{13}\right)\tau\right]\right)$$

Integración numérica

La integración numérica es llevada a cabo en *Mathematica* con la función *NDSolve*[ ], y en *Maple* con *dsolve*(…, numeric,…), dando como resultado un polinomio que interpola la solución numérica en los puntos de la discretización. Excepto en problemas muy simples (lineales) con un número pequeño de términos, este es el método más aconsejable para revolver problemas complejos (no lineales) con órdenes altos.

Ejercicio 1 **(0,3 puntos)**

Calcular de manera analítica el estado estacionario al que este sistema tiende de manera asintótica. Para ello resuelva el problema exacto adimensional haciendo cero todas las derivadas temporales (y prescindiendo de las condiciones iniciales lógicamente).

Ejercicio 2 **(1,7 puntos)**

Integrar de forma numérica las ecuaciones obtenidas en el método de colocación ortogonal con descomposición del dominio. <u>Presentar y discutir los siguientes resultados</u>:

(a) Representar en una misma gráfica la solución aproximada $u_{20}(y,\tau)$ en el intervalo $-1<y<1$ para diversos tiempos $\tau=0,\ 0.0001, 0.001,\ 0.01,\ 0.1,\ 0.3\ \text{y}\ 1$.

(b) Obtener el estado estacionario de esta solución aproximada y compararlo con el estado estacionario exacto obtenido en el ejercicio anterior. Para ello podemos evaluar la solución aproximada $u_{20}(y,\tau)$ en un tiempo grande relativo a la evolución del sistema ($\tau\to\infty$). ¿Coincide este límite con la solución estacionaria del problema exacto? ¿Varía este límite con el orden *N* de la aproximación? En el caso en que varíe, ¿cómo lo hace?

(c) Una definición de error podría ser la integral de la función residuo en el dominio del problema:

$$\mathrm{E}_N(\tau)=\int_{-1}^{0}\left|u_{N,\tau}(y,\tau)-u_{N,yy}(y,\tau)\right|dy+\int_{0}^{1}\left|u_{N,\tau}(y,\tau)-3u_{N,yy}(y,\tau)\right|dy$$

Representar gráficamente cómo varía este error en el tiempo en el intervalo $\tau\in[0,1]$ para la aproximación de orden $N=5$.

(d) Representar gráficamente la evolución temporal $\tau\in[0,2]$ de los cuatro primeros coeficientes $a_0(\tau)$, $a_1(\tau)$, $a_2(\tau)$, $a_3(\tau)$. Se debe emplear una gráfica para cada coeficiente. En cada gráfica se debe mostrar los resultados obtenidos para $N = 3,\ 5\ \text{y}\ 10$. Analizar los valores asintóticos de estos coeficientes en relación al estado estacionario.

(e) Para ver la convergencia de la serie, en el caso $N = 10$ mostraremos en una misma gráfica la variación del coeficiente espectral $a_n(\tau)$ con el orden *n* para cuatro tiempos: $\tau = 0,\ 0.01,\ 0.1$ y 1. Lo mismo para $b_n(t)$. Discutir de forma cualitativa la convergencia de los coeficientes de la expansión espectral y cómo varía ésta con el tiempo.

Ejercicio 3 (1 punto)

El objetivo de este ejercicio es resolver el problema adimensional mediante colocación ortogonal pero sin descomponer el dominio. Consideraremos, por tanto, un único intervalo $y \in [-1,1]$ con los puntos de colocación dados por la cuadratura de Lobatto. Explique cómo ha resuelto el problema. ¿Qué dificultad aparece? Discuta los resultados que obtiene en este caso.