Pregunta 1 (2 puntos)
Sean tres subconjuntos cualesquiera A, B y C de un conjunto no vacío U tales que $A \cup B = A \cup C$ y $A \cap B = A \cap C$. Demuestre que $B = C$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Sean los subconjuntos $A, A' \subset X$ y $B \subset Y$.

a) Demuestre que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

b) Determine razonadamente si se cumplen las inclusiones $f(A \Delta A') \subset f(A) \Delta f(A')$ y $f(A) \Delta f(A') \subset f(A \Delta A')$, siendo Δ la diferencia simétrica de conjuntos.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
En el conjunto de matrices cuadradas de orden 2 se consideran los subconjuntos

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ \det(A) = ad - bc \neq 0 \right\}$$

y

$$F = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \det(B) = ad - bc = 1 \right\}.$$

a) Determine razonadamente si H es un grupo con el producto usual de matrices.

b) Determine razonadamente si F es un grupo con el producto usual de matrices.

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Dados los números $z, z' \in \mathbb{C}$, se pide:

a) Demuestre que $|zz'| = |z||z'|$.

b) Demuestre que $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$ y determine una condición necesaria y suficiente para que la desigualdad sea una igualdad.