FACULTAD DE CIENCIAS

GRADO EN MATEMÁTICAS

Modelización

Resumen realizado por

Jose Maria Buades Rubio

Marzo-2021

Modelización

1. El Modelo de Programación No Lineal

1.1 Definiciones

Definición 1.1. Problema de Programación Matemática

$$\text{Optimizar } f(x)$$
$$\text{sujeto a } x \in S$$

siendo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un vector de E_n, $f : E_n \longrightarrow E_1$ y $S \subset E_n$, un subconjunto cualquiera.

Sin restricciones: $S = E_n$.
Con restricciones: $S = \{x \in X \subset E_n \,|\, g_i(x_i) \leq 0, i = 1, \ldots, m; \quad h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, l\}$.

Definición 1.2. Problema de Programación No Lineal

Minimizar $f(x)$
sujeto a

$$\begin{array}{ccll} g_i(x) & \leq & 0 & i = 1, \ldots, m \\ h_i(x) & = & 0 & i = 1, \ldots, l \\ x & \in & X & \end{array}$$

siendo $f, g_1, \ldots, g_m, h_1, \ldots, h_l$ funciones definidas en E_n, con valores en E_1, X un subconjunto de E_n y x un vector de n componentes.

Definición 1.3. Problema de Programación No Lineal: Formulación Alternativa

Hallar, si existe $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ perteneciente a la región factible
$S = \{x \in X \subset E_n \,|\, g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m; \ldots h_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, l\}$
tal que $f(x) \geq f(\bar{x})$, para todo $x \in S$.

Definición 1.4. Mínimo local Fuerte del problema de Programación No Lineal

Un punto $\bar{x}$ es un mínimo local fuerte del problema de programación no lineal si existe un entorno de $\bar{x}$, $N_\epsilon(\bar{x})$ con $\epsilon > 0$, tal que

a) $f(x)$ está definida en $N_\epsilon(\bar{x})$.
b) $f(\bar{x}) \leq f(x)$ para todo $x \in S\ cupN_\epsilon(\bar{x})$, $x \neq \bar{x}$.
c) $\bar{x}$ no es un mínimo local fuerte.

Definición 1.6. Mínimo Global del Problema de Programación No Lineal

Un punto $\bar{x}$ es un mínimo global si

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in S$$

1.2 Solución Gráfica de un Problema de Programación No Lineal

Cuando se tiene dos o tres variables se puede realizar una representación en el plano o en el espacio y llegar a la solución mediante un razonamiento. Determinar la región S, Representar las curvas de nivel de $f(x)$, Hallar el punto de S que minimiza $f(x)$.

1.3 Ejemplos de Problemas de Programación No Lineal

- Diseño de Prototipos
- Localización de Equipos
- Modelo de Producción-Inventario
- Modelo de Construcción de una autopista
- Un Modelo para la Administración Óptima de Recursos Hidráulicos
- Ajuste de Curvas
- Estimación de Modelos de Correlación para Tablas de Contingencia

2. Funciones Convexas y Generalizaciones

2.1 Definiciones y Propiedades Básicas

Definición 1.7. Función Convexa y Función Estrictamente Convexa

Sea $f : S \subset E_n \longrightarrow E_1$, siendo S un conjunto convexo no vacío. La función f se dice convexa en S si para $x_1, x_2 \in S$, $\lambda \in (0, 1)$ se cumple

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

La función se dice estrictamente convexa si la desigualdad anterior es estricta para $x_1 \neq x_2$, $x_1, x_2 \in S$, $\lambda \in (0, 1)$.

Definición 1.8. Función Cóncava y Función Estrictamente Cóncava

Una función $f : \S \longrightarrow E_1$ se dice cóncava si y solo si $-f$ es convexa. La función f se dice estrictamente cóncava si y solo si $-f$ es estrictamente convexa.

Definición 1.9. Conjunto de nivel α de una Función Convexa

Sea f una función convexa en un conjunto convexo S y α un número real. Entonces el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in S \mid f(x) \leq \alpha\}$$

se denomina conjunto de nivel α de f.

Proposición 1.1

Sea S un conjunto convexo no vacío en E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$ una función convexa. Entonces para cualquier número real α el conjunto de nivel $S_\alpha = \{x \in S \mid f(x) \leq \alpha\}$ es un conjunto convexo.

2.1.1 Continuidad de las funciones convexas

Teorema 1.1

Sea S un conjunto abierto convexo de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$ convexa. Entonces f es continua en S.

Corolario 1.1

Una función convexa f definida en un convexo $S \subset E_n$ es continua en su interior.

2.1.2 Derivada Direccional de una Función Convexa

Definición 1.10. Derivada Direccional de una Función Convexa

Sea S un conjunto no vacío de E_n, y sea $f : S \longrightarrow E_1$. Sea $\bar{x} \in S$ y d un vector distinto de cero tal que $\bar{x} + \lambda d \in S$ para $\lambda > 0$ y suficientemente pequeño. La derivada direccional de f en $\bar{x}$ a lo largo de d, denotada por $f'(\bar{x}; d)$, viene definida por el siguiente límite si existe:

$$f'(\bar{x}; d) = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

Proposición 1.2

Sea S un conjunto convexo no vacío de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$ convexa. Sea $\bar{x} \in S$ y d un vector distinto de cero tal que $\bar{x} + \lambda d \in S$ para $\lambda > 0$ y suficientemente pequeño. Entonces existe el siguiente límite

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(\bar{x} + \lambda d) - f(\bar{x})}{\lambda}$$

2.1.3 Subgradiente de una Función Convexa

Definición 1.11. Grafo de una función

Sea S un conjunto no vacío de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$. El conjunto

$$\{(x, f(x)) \in E_{n+1} \,|\, x \in S\}$$

se llama el grafo de la función.

Definición 1.12. Epigrafo

Sea S un conjunto no vacío de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$. Se llama epigrafo de f y se denota por Epi$f$ al conjunto de E_{n+1} definido por

$$\text{Epi}f = \{(x, y) \in E_{n+1} \,|\, x \in S, y \in E_1 \quad y \geq f(x)\}$$

Definición 1.13. Hipografo

Sea S un conjunto no vacío de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$. Se llama hipografo de f y se denota por Hip$f$ al conjunto de E_{n+1} definido por

$$\text{Epi}f = \{(x, y) \in E_{n+1} \,|\, x \in S, y \in E_1 \quad y \leq f(x)\}$$

Teorema 1.2

Sea $S \subset E_n$ un conjunto convexo no vacío y sea $f : S \subset E_n \longrightarrow E_1$. Entonces f es convexa si y solo si Epi$f$ es un conjunto convexo

Corolario 1.2

En las condiciones del teorema 1.2, f es cóncava solo si Epi$f$ es convexo.

Definición 1.14. Subgradiente

Sea S un conjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$ convexa. Se llama subgradiente de f en $\bar{x}$ a un vector ξ tal que:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \quad \text{ para todo } x \in S$$

Análogamente, si f es cóncava se llama subgradiente de f en $\bar{x} \in S$ a un vector ξ tal que:

$$f(x) \leq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \quad \text{ para todo } x \in S$$

Teorema 1.3

Sea $S \subset E_n$ un conjunto convexo no vacío y sea $f : S \longrightarrow E_1$ convexa. Entonces dado $\bar{x} \in Int(S)$ existe un vector ξ tal que el hiperplano

$$H = \{(x, y) \,|\, y = f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x})\} \subset E_{n+1}$$

soporta a Epi$f$ en $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. En particular

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \quad x \in S$$

esto es, ξ es un subgradiente de f.

Corolario 1.3

Sea $S \subset E_n$ convexo no vacío y sea $f : S \longrightarrow E_1$ estrictamente convexa. Entonces para $\bar{x} \in Int(S)$ existe un vector ξ tal que

$$f(x) > f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \quad x \in S, x \neq \bar{x}$$

Teorema 1.4

Sea $S \subset E_n$ convexo no vacío y sea $f : S \longrightarrow E_1$. Supongamos que para cada punto $\bar{x} \in Int(S)$ existe un vector subgradiente ξ tal que

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \xi^t(x - \bar{x}) \quad x \in S$$

Entonces f es convexa en $Int(S)$.

2.2 Funciones Convexas Diferenciables

2.2.1 Funciones Convexas Diferenciables

Definición 1.15. Función Diferenciable

Sea $S \subset E_n$ un conjunto no vacío y sea $f : S \longrightarrow E_1$. La función f se dice diferenciable en $\bar{x} \in Int(S)$ si existe un vector $\nabla f(\bar{x})$, llamado el vector gradiente de f, y una función $\alpha : E_n \longrightarrow E_1$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|\alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) \quad x \in S$$

donde $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$. La función f se dice diferenciable en el conjunto abierto $S' \subset S$ si es diferenciable en cada punto de S'.

Proposición 1.3

Sea $S \subset E_n$ un conjunto convexo no vacío y $f : S \longrightarrow E_1$ convexa. Supongamos que f es diferenciable en $\bar{x} \in Int(S)$. Entonces la colección de subgradientes de f en $\bar{x}$ es el conjunto unitario $\{\nabla f(\bar{x})\}$.

Teorema 1.5

Sea $S \subset E_n$ un conjunto convexo no vacío y abierto y sea $f : S \longrightarrow E_1$, f diferenciable en S. Entonces f es convexa si y solo si para cualquier $\bar{x} \in S$ se tiene

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) \qquad \text{para todo } x \in S$$

Similarmente f es estrictamente convexa si y solo si para cualquier $\bar{x} \in S$ se tiene

$$f(x) > f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) \qquad \text{para todo } x \in S, \quad x \neq \bar{x}$$

Teorema 1.6

Sea $S \subset E_n$ un conjunto convexo no vacío y abierto y $f : S \longrightarrow E_1$, f diferenciable en S. Entonces f es convexa si y solo si para cada $x_1, x_2 \in S$ se cumple

$$\left[\nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)\right]^t (x_2 - x_1) \geq 0$$

Análogamente, f es estrictamente convexa si y solo si para cada $x_1, x_2 \in S$ distintos tenemos

$$\left[\nabla f(x_2) - \nabla f(x_1)\right]^t (x_2 - x_1) > 0$$

2.2.2 Funciones Convexas Dos Veces Diferenciables

Definición 1.16. Función Diferenciable Dos Veces

Sea $S \subset E_n$ un conjunto no vacío y sea $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f se dos veces diferenciable en $\bar{x} \in Int(S)$ si existe un vector $\nabla f(\bar{x})$, una matriz simétrica, $n \times n$, $H(\bar{x})$ llamada matriz Hessiana y una función $\alpha : E_n \longrightarrow E_1$ tal que

$$f(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) + \frac{1}{2}(x - \bar{x})^t H(\bar{x})(x - \bar{x}) + \|x - \bar{x}\|^2 \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) \quad x \in S$$

para cada $x \in S$, siendo $\lim\limits_{x \to \bar{x}} \alpha(\bar{x}; x - \bar{x}) = 0$.
La función f se dice dos veces diferenciable en el conjunto abierto $S' \subset S$ si es dos veces diferenciable en cada punto de S'.

Definición 1.17. Caracterización de una matriz cuadrada

Sea A una matriz $n \times n$. Se dice que A es

- Semidefinida positiva. Si para todo $y \in E_n$ se tiene $y^t A y \geq 0$.
- Semidefinida negativa. Si para todo $y \in E_n$ se tiene $y^t A y \leq 0$.
- Definida positiva. Si para todo $y \in E_n, y \neq 0$ se tiene $y^t A y > 0$.
- Definida negativa. Si para todo $y \in E_n, y \neq 0$ se tiene $y^t A y < 0$.

A es indefinida si no verifica ninguna de las condiciones anteriores

Teorema 1.7

Sea A una matriz $n \times n$. Consideremos la forma cuadrática dad por la expresión $F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j = y^t A y$, donde $y \in E_n$. Entonces se cumple:

- La forma F, y por tanto la matriz A, es definida positiva (negativa) si y solo si todos los valores propios de la matriz A son positivos (negativos).
- La forma F es semidefinida positiva (negativa) si y solo si todos los valores propios de la matriz A son no negativos (positivos) habiendo al menos uno igual a cero.

Teorema 1.8

Se verifican los resultados siguientes:

a) Condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática F sea definida positiva es que se cumpla
$$H_1 > 0, H_2 > 0, \ldots, H_n > 0$$

b) Condición necesaria y suficiente para que la forma cuadrática F sea definida negativa es que se cumpla
$$H_1 < 0, H_2 > 0, h_3 < 0, \ldots, (-1)^n H_n > 0$$

Teorema 1.9

Sea $S \subset E_n$ un conjunto no vacío, abierto y convexo y sea $f : S \longrightarrow E_1$ dos veces diferenciable en S. Entonces f es convexa si y solo si la matriz Hessiana es semidefinida positiva en cada punto de S.

Teorema 1.10

Sea $S \subset E_n$ un conjunto no vacío, abierto, convexo y $f : S \longrightarrow E_1$ dos veces diferenciable.

a) Si la matriz Hessiana H de f es definida positiva en cada punto de S entonces f es estrictamente convexa.

b) Si f es estrictamente convexa entonces su matriz Hessiana es semidefinida positiva.

2.3 Máximos y Mínimos de Funciones Convexas

2.3.1 Minimización de una Función Convexa

Teorema 1.11

Sea $S \subset E_n$ un convexo no vacío y $f : S \longrightarrow E_1$. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array}$$

Supongamos que $\bar{x} \in S$ es una solución óptima local del problema

1. Si f es convexa entonces $\bar{x}$ es una solución óptima global.
2. Si f es estrictamente convexa entonces $\bar{x}$ es la única solución óptima global.

Teorema 1.12

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función convexa, y sea S un conjunto no vacío de E_n. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array}$$

El punto $\bar{x} \in S$ es solución óptima de este problema si y solo si f tiene un subgradiente ξ en $\bar{x}$ tal que

$$\xi^t(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in S$$

Corolario 1.4

Bajo las hipótesis del teorema 1.12, si S es abierto entonces $\bar{x}$ es una solución óptima del problema si y solo si existe un subgradiente cero de f en $\bar{x}$. En particular, si $S = E_n$ entonces $\bar{x}$ es un mínimo global si y solo si existe un subgradiente cero de f en $\bar{x}$.

Corolario 1.5

Además de las hipótesis del teorema 1.12 supongamos que f es diferenciable. Entonces $\bar{x}$ es una solución óptima del problema si y solo si

$$\nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) \geq 0 \quad \text{con } x \in S$$

Además, si S es abierto $\bar{x}$ es una solución óptima si y solo si $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

2.3.2 Maximización de un Función Convexa

Teorema 1.13

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función conveza y sea $S \subset E_n$, un convexo no vacío. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array}$$

Si $\bar{x} \in S$ es una solución local óptima entonces $\xi^t(x - \bar{x}) \leq 0$, para cada $x \in S$, en donde ξ es un subgradiente de f en $\bar{x}$.

Corolario 1.6

Si además de las hipótesis del teorema 1.13 suponemos que f es diferenciable entonces si $\bar{x}$ es una solución óptima local se verifica que $\nabla f(\bar{x})^t(x - \bar{x}) \leq 0$ para todo $x \in S$.

2.4 Generalización de Funciones Convexas

2.4.1 Funciones Cuasiconvexas

Definición 1.18. Función Cuasiconvexa y Función Cuasicóncava

Sea $f : S \longrightarrow E_1$, siendo $S \subset E_n$ convexo no vacío. La función f se dice cuasiconvexa si para cada $x_1, x_2 \in S$ es válida la desigualdad

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \lambda \in (0, 1)$$

Alternativamente se puede escribir

$$x_1, x_2 \in S, \lambda \in (0, 1), f(x_1) \leq f(x_2) \quad \Longrightarrow f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq f(x_2)$$

Una función f se dice cuasicóncava si $-f$ es cuasiconvexa.

Corolario 1.7

Si f es convexa, entonces f es cuasiconvexa. Si f es cóncava, entonces f es cuasicóncava.

Teorema 1.14

Sea $f : S \longrightarrow E_1$ en donde $S \subset E_n$ es un conjunto convexo no vacío. La función es cuasiconvexa si y solo si

$$S_\alpha = \{x \,|\, x \in S, \quad f(x) \leq \alpha\}$$

es un conjunto convexo para cualquier número real α.

Teorema 1.15

Sea S un conjunto compacto no vacío poliédrico de E_n y sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función cuasiconvexa continua. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Maximizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array}$$

Entonces existe una solución óptima $\bar{x}$ del problema, siendo $\bar{x} \in S$ un punto extremo.

2.4.2 Funciones Cuasi Diferenciables

Teorema 1.16

Sea S un conjunto convexo no vacío abierto de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$ diferenciable en S. Entonces f es cuasiconvexa si y solo si una de las dos condiciones equivalentes siguientes es válida

1. Si $x_1, x_2 \in S$ y $f(x_1) \leq f(x_2)$ entonces $\nabla f(x_w)^t(x_1 - x_2) \leq 0$.
2. Si $x_1, x_2 \in S$ y $\nabla f(x_w)^t(x_1 - x_2) > 0$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$.

2.4.3 Funciones Estrictamente Cuasiconvexas

Definición 1.19. Función Estrictamente Cuasiconvexa y Función Estrictamente Cuasicóncava

Sea $f : S \longrightarrow E_1$, siendo S un conjunto convexo no vacío de E_n. La función f se dice estrictamente cuasiconvexa si para cada $x_1, x_2 \in S$, con $f(x_1) \neq f(x_2)$, se tiene

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) < \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \text{para } \lambda \in (0,1)$$

La función f se dice estrictamente cuasicóncava si $-f$ es estrictamente cuasiconvexa.

Proposición 1.4

Una función $f : S \subset E_n \longrightarrow E_1$, siendo S convexo, es estrictamente cuasiconvexa si para $x_1, x_2 \in S$ tales que $f(x_1) < f(x_2)$ se verifica que

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right) < f(x_2) \quad \text{para } \lambda \in (0,1)$$

Proposición 1.5

a) Si f es convexa en un conjunto convexo entonces es estrictamente cuasiconvexa.
b) Si f es cóncavaen un conjunto convexo entonces es estrictamente cuasicóncava.

Como sabemos, si una función es estrictamente convexa (cóncava) entonces es también convexa (cóncava). Sin embargo, si una función es estrictamente cuasiconvexa no tiene por qué ser necesariamente cuasiconvexa, como se comprueba con el ejemplo: Anomalía de Karamardian.

Definición 1.20. Función Semicontinua Inferiormente y Semicontinua Superiormente

Sea S un conjunto no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es semicontinua inferiormente en $\bar{x} \in S$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x - \bar{x}\| < \delta \Longrightarrow f(x) - f(\bar{x}) > -\epsilon$$

Análogamente, se dice semicontinua superiormente en $\bar{x} \in S$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x - \bar{x}\| < \delta \Longrightarrow f(x) - f(\bar{x}) < \epsilon$$

Proposición 1.6

Sea $S \subset E_n$, convexo no vacío y $f : S \longrightarrow E_1$ estrictamente cuasiconvexa y semicontinua inferiormente. Entonces f es cuasiconvexa.

Teorema 1.17

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función estrictamente cuasiconvexa. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array}$$

en donde S es un conjunto convexo no vacío de E_n. Si $\bar{x}$ es una solución óptimo local, entonces $\bar{x}$ es una solución óptimo global.

2.4.4 Funciones Fuertmente Cuasiconvexas

Definición 1.21. Función Fuertemente Cuasiconvexa

Sea $S \subset E_n$ un convexo no vacío y sea $f : S \longrightarrow E_1$. La función f se dice fuertemente cuasiconvexa si para cada $x_1, x_2 \in S$, con $x_1 \neq x_2$ tenemos

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\} \quad \lambda \in (0, 1)$$

La función se dice fuertemente cuasicóncava si $-f$ es fuertemente cuasiconvexa.

Proposición 1.7

Una función $f : S \subset E_n \longrightarrow E_1$, siendo S convexo, es fuertemente cuasiconvexa si para $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$ y $f(x_1) < f(x_2)$ se verifica que $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < f(x_2)$ para $\lambda \in (0, 1)$.

Proposición 1.8

a) Si f es una función estrictamente convexa entonces f es fuertemente cuasiconvexa.
b) Si f es una función fuertemente cuasiconvexa entonces f es estrictamente cuasiconvexa.
c) Si f es una función fuertemente cuasiconvexa entonces f es cuasiconvexa.

Teorema 1.18

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función fuertemente cuasiconveza. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array}$$

donde $S \subset E_n$ es convexo no vacío. Si $\bar{x}$ es una solución local óptima, entonces es la única solución global óptima.

2.4.5 Funciones Pseudoconvexas

Definición 1.22. Función Pseudoconvexa y Pseudocóncava

Sea S un conjunto abierto no vacío de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$ una función diferenciable en S. La función f se dice que es pseudoconvexa si

$$x_1, x_2 \in S, \quad \nabla f(x_1)^t (x_2 - x_1) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) \geq f(x_1)$$

o equivalentemente

$$x_1, x_2 \in S, \quad f(x_2) < f(x_1) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(x_1)^t (x_2 - x_1) < 0$$

La función se dice pseudocóncava si $-f$ es pseudoconvexa.

Definición 1.23. Función Estrictamente Pseudoconvexa y Estrictamente Pseudocóncava

Sea S un conjunto abierto no vacío de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$ una función diferenciable en S. La función f se dice que es estrictamente pseudoconvexa si

$$x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2, \quad \nabla f(x_1)^t (x_2 - x_1) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

o equivalentemente

$$x_1, x_2 \in S, x_1 \neq x_2, \quad f(x_2) \leq f(x_1) \quad \Longrightarrow \quad \nabla f(x_1)^t (x_2 - x_1) < 0$$

La función se dice estrictamente pseudocóncava si $-f$ es estrictamente pseudoconvexa.

Teorema 1.19

Sea $S \subset E_n$ abierto no vacío y convexo. Sea $f : S \longrightarrow E_1$ una función diferenciable y pseudoconvexa en S. Entonces f es estrictamente cuasiconvexa y cuasiconvexa.

Teorema 1.20

Sea S un subconjunto abierto y convexo de E_n y sea $f : S \longrightarrow E_1$ una función estrictamente pseudoconvexa. Entonces f es fuertemente cuasiconvexa.

2.5 Convexidad en un Punto

Definición 1.24. Convexidad en un Punto

Sea S un subconjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es convexa en $\bar{x}$ si y solamente si

$$f(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x) \leq \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda x) f(x) \quad \lambda \in (0, 1), x \in S$$

Definición 1.25. Convexidad Estricta en un Punto

Sea S un subconjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es estrictamente convexa en $\bar{x}$ si y solamente si

$$f(\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)x) < \lambda f(\bar{x}) + (1 - \lambda x) f(x) \quad \lambda \in (0, 1), x \in S, x \neq \bar{x}$$

Definición 1.26. Cuasiconvexidad en un Punto

Sea S un subconjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es cuasiconvexa en $\bar{x}$ si y solamente si

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)x) \leq \max\{f(\bar{x}), f(x)\} \quad \lambda \in (0,1), x \in S$$

Definición 1.27. Cuasiconvexidad Estricta en un Punto

Sea S un subconjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es cuasiconvexa en $\bar{x}$ si y solamente si

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)x) < \max\{f(\bar{x}), f(x)\} \quad \lambda \in (0,1), x \in S, f(x) \neq f(\bar{x})$$

Definición 1.28. Cuasiconvexidad Fuerte en un Punto

Sea S un subconjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es fuertemente cuasiconvexa en $\bar{x}$ si y solamente si

$$f(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)x) < \max\{f(\bar{x}), f(x)\} \quad \lambda \in (0,1), x \neq \bar{x}$$

Definición 1.29. Pseudoconvexidad en un Punto

Sea S un subconjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es pseudoconvexa en $\bar{x}$ si y solamente si

$$\left.\begin{array}{rcl} \nabla f(\bar{x})(x-\bar{x}) & \geq & 0 \\ x & \in & S \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \geq f(\bar{x})$$

Definición 1.30. Pseudoconvexidad Estricta en un Punto

Sea S un subconjunto convexo no vacío de E_n y $f : S \longrightarrow E_1$. Se dice que f es estrictamente pseudoconvexa en $\bar{x}$ si y solamente si

$$\left.\begin{array}{rcl} \nabla f(\bar{x})(x-\bar{x}) & \geq & 0 \\ x \in S, x & \neq & \bar{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > f(\bar{x})$$

3. Condición de Óptimo en Programación No Lineal

3.1 Problemas Sin Restricciones

3.1.1 Condiciones necesarias de Óptimo

Definición 1.31. Dirección de Descenso

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ y $\bar{x} \in E_n$. Se dice que un vector $d \in E_n$ es una dirección de descenso de f en $\bar{x}$ si existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + \lambda d) < f(\bar{x}) \quad \text{para todo } \lambda \in (0, \delta)$$

Teorema 1.21

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ diferenciable en $\bar{x}$. Un vector d tal que $\nabla f(\bar{x})^t d < 0$ es una dirección de descenso de f en $\bar{x}$.

Corolario 1.8. Condición Necesaria de Primer Orden

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función diferenciable en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es un mínimo local de f entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Teorema 1.22. Condiciones Necesarias de Segundo Orden

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función dos veces diferenciable en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es un mínimo local entonces $\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $H(\bar{x})$ es semidefinida positiva.

3.1.2 Condiciones Suficientes de Óptimo

Teorema 1.23. Condiciones Suficientes de Segundo Orden

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función dos veces diferenciable en $\bar{x}$. Si $\nabla f(\bar{x}) = 0$ y $H(\bar{x})$ es definida positiva entonces $\bar{x}$ es un mínimo local.

Teorema 1.24

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$ una función pseudoconvexa en $\bar{x}$. Entonces $\bar{x}$ es un mínimo global si y solo si $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

3.2 Problemas Con Restricciones de Desigualdad

Definición 1.32. Dirección Factible y Cono de Direcciones Factibles

Sea S un conjunto no vacío de E_n. Sea $\bar{x} \in \mathscr{C}lS$. El cono de las direcciones factibles de S en $\curvearrowleft$, denotado por $\mathscr{D}$, viene dado por:

$$\mathscr{D} = \{d \,|\, d \neq 0, \quad \bar{x} + \lambda d \in S, \quad \text{para todo } \lambda \in (0, \delta), \text{ para algun } \delta > 0\}$$

Cada vector no nulo $d \in \mathscr{D}$ se llama dirección factible.

Teorema 1.25. Condición Geométrica de Óptimo

Consideremos el problema P

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in S \end{array}$$

en donde $f : E_n \longrightarrow E_1$ y S es un conjunto no vacío de E_n. Supongamos que f es diferenciable en $\bar{x} \in S$. Si $\bar{x}$ es una solución local óptima, entonces $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{D} = \emptyset$ siendo

$$\mathscr{F}_0 = \{d \,|\, \nabla f(\bar{x})^t d < 0\}$$

el cono de direcciones de descenso y $\mathscr{D}$ el cono de direcciones factibles.

Teorema 1.26. Condición Geométrica de Óptimo para Problemas con Restricciones de Desigualdad

Sea $g_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, 2, \ldots, m$ y sea X un subconjunto abierto no vacío de E_n. Consideremos el siguiente problema P

$$\begin{array}{rll} \text{Minimizar} & f(x) & \\ \text{sujeto a} & g_i(x) \leq 0 & i = 1, \ldots, m \\ & x \in S & \end{array}$$

Sea $\bar{x} \in X$ un punto factible y sea $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$ el conjunto de índices correspondiente a las restricciones activas en $\bar{x}$. Además, supongamos que $f, g_i, i \in I$, son diferenciables en $\bar{x}$ y que g_i, $i \notin I$, son continuas en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es un mínimo local entonces $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{G}_0 = \emptyset$, siendo

$$\begin{array}{rcll} \mathscr{F}_0 & = & \{d \,|\, \nabla f(\bar{x})^t d < 0\} & \\ \mathscr{G}_0 & = & \{d \,|\, \nabla g_i(\bar{x})^t d < 0\} & i \in I \end{array}$$

Observaciones

Hay varias situaciones en las cuales las condiciones del teorema se satisfacen trivialmente incluso para puntos que no son óptimos

a) Sea $\bar{x}$ factible tal que $\nabla f(\bar{x}) = 0$. En este caso el conjunto de direcciones de descenso $\mathscr{F}_0 = \{d \,|\, \nabla f(\bar{x})^t d < 0\} = \emptyset$ y por tanto trivialmente $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{G}_0 = \emptyset$. Así pues cualquier $\bar{x}$ factible con $\nabla f(\bar{x}) = 0$ satisface las condiciones de óptimo del teorema 1.26

b) Análogamente, cualquier $\bar{x}$ factible con $\nabla g_i(\bar{x}) = 0$, para algún $i \in I$ satisface las condiciones de optimalidad trivialmente.

c) Consideremos el problema siguiente con una restricción de igualdad

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g_(x) = 0 \end{array}$$

El problema se puede poner de la siguiente forma equivalente

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & g_1(x) \leq 0 \\ & g_2(x) \leq 0 \end{array}$$

siendo $g_1(x) = g_(x)$, $g_2(x) = -g(x)$. Sea $\bar{x}$ un punto factible tal que $g(\bar{x}) = 0$. Entonces $g_1(\bar{x}) = 0$, $g_2(\bar{x}) = 0$ y $\nabla g_1(\bar{x}) = -g_2(\bar{x})$ por lo que no puede existir ningún vector d que verifique simultáneamente las condiciones $\nabla g_1(\bar{x})^t d < 0$ y $\nabla g_2(\bar{x})^t d < 0$. Así pues $\mathscr{G}_0 = \emptyset$ y también $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{G}_0 = \emptyset$, por lo que la condición se satisface trivialmente en cualquier punto factible.

3.2.1 Condiciones de Óptimo de Fritz John

Teorema 1.27. Condiciones Necesarias de Fritz Hohn para Problemas con Restricciones de Desigualdad

Sea X un conjunto abierto no vacío de E_n, $f : E_n \longrightarrow E_1$ y $g_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, m$. Sea $\bar{x}$ una solución factible y sea $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. Supongamos que f y g_i, $i \in I$ son diferenciables en $\bar{x}$ y que $g_i, i \notin I$, son continuas en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es una solución óptima local del problema P, entonces existen escalares $\mu_0, \mu_i, i \in I$, tales que

$$\begin{array}{rcl} \mu_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) & = & 0 \\ \mu_0, \mu_i & \geq & 0 \quad i \in I \\ (\mu_0, \mu_I) & \neq & (0,0) \end{array}$$

siendo μ_I el vector cuyas componentes son $\mu_i, i \in I$. Las condiciones anteriores se conocen como condiciones necesarias de Fritz John para óptimo local del problema P.
Si además $g_i, i \notin I$ son también diferenciables, las condiciones de Fritz John se pueden escribir de la siguiente forma equivalente

$$\begin{array}{rcl} \mu_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) & = & 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) & = & 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ \mu_0, \mu_i & \geq & 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ (\mu_0, \mu) & \neq & (0,0) \end{array}$$

siendo μ el vector cuyas componentes son $\mu_i, i = 1, \ldots, m$.
Observaciones

1. Los escalares $\mu_0, \mu_i, i = 1, \ldots, m$, se suelen llamar multiplicadores de Lagrange (generalizados) o multiplicadores de Fritz John.
2. La condición $\mu_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1, \ldots, m$ se llama condición de holgura complementaria, o de complementariedad de las holguras. Esta condición afirma que
   a) Si $g_i(\bar{x}) < 0$ entonces $\mu_i = 0$, es decir, si la restricción g_i no es activa en $\bar{x}$ entonces su multiplicador asociado μ_i es nulo.
   b) Si $\mu_i > 0$ entoces $g_i(\bar{x}) = 0$, es decir, si un multiplicador μ_i es positivo entonces su restricción asociada g_i es activa en $\bar{x}$.

   Observemos que la condición no excluye, en general, el caso en que tanto $g_i(\bar{x})$ como μ_i sean ambos nulos. Si ocurre que $g_i(\bar{x})$ y μ_i no pueden ser simultáneamente cero, se dice que la condición de holgura complementaria se verifica de manera estricta, o bien que se da la complementariedad estricta de las holguras.
3. Se se denota $\nabla g(\bar{x}) = (\nabla g_i(\bar{x}))_{i=1,\ldots,m}$ a la matriz Jacobiana de las restricciones, es decir, a la matriz $n \times m$ cuya i-ésima columna es el vector $\nabla g_i(\bar{x})$, y $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$, entonces

las condiciones de Fritz John pueden escribirse de la siguiente forma vectorial

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla f(\bar{x}) + \nabla g(\bar{x})\mu &= 0 \\ \mu^t g(\bar{x}) &= 0 \\ (\mu_0, \mu) &\geq (0,0) \\ (\mu_0, \mu) &\neq (0,0) \end{aligned}$$

Observaciones debidas al ejemplo de Kuhn y Tucker

a) Si en un punto $\bar{x}$ se cumple que $\nabla f(\bar{x}) = 0$, o $\nabla g_i(\bar{x}) = 0$ para algún $i \in I$, entonces en $\bar{x}$ se satisfacen las condiciones de Fritz John poniendo $\mu_0, \mu_i > 0$ cualesquiera y los demás multiplicadores iguales a cero.

b) Si se tiene una restricción del tipo $g(x) = 0$, las condiciones de Fritz John se satisfacen introduciendo dos restricciones $g(x) \leq 0$ y $-g(x) \leq 0$ con multiplicadores de Lagrange $\mu_1 = \mu_2 = \alpha > 0$ cualesquiera.

3.2.2 Condiciones de Óptimo de Karush, Kuhn y Tucker (KKT)

Teorema 1.28. Condiciones Necesarias de Karush, Kuhn y Tucker (KKT) para Problemas con Restricciones de Desigualdad

Sea X un conjunto abierto en E_n. Sean $f : E_n \longrightarrow E_1$, $g_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, m$. Consideremos el problema P

$$\begin{array}{rrcl} \text{Minimizar} & f(x) & & \\ \text{sujeto a} & g_i(x) & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x & \in & X \end{array}$$

Sea $\bar{x}$ una solución factible y sea $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. Supongamos que f y g_i, $i \in I$ son diferenciables en $\bar{x}$ y que $g_i, i \notin I$, son continuas en $\bar{x}$. Además, supongamos que $\nabla g_i(\bar{x}), i \in I$, son linealmente independientes. Si $\bar{x}$ es una solución óptima local del problema P, entonces existen escalares μ_i, $i \in I$ tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i &\geq 0 \quad i \in I \end{aligned}$$

Si suponeos que $g_i, i \notin I$, son también diferenciables en $\bar{x}$ entonces las condiciones anteriores pueden escribirse de la forma siguiente

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) &= 0 \\ \mu_i g_i(\bar{x}) &= 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ \mu_i &\geq 0 \quad i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

Teorema 1.29. Condiciones Suficientes de Karush, Kuhm y Tucker para Problemas con Restricciones de Desigualdad

Sea $X \subset E_n$ un conjunto abierto y sean $f : E_n \longrightarrow E_1$, $g_i : E_n \longrightarrow E_1$ con $i = 1, \ldots, m$. Consideremos el problema P

$$\begin{array}{rrcl} \text{Minimizar} & f(x) & & \\ \text{sujeto a} & g_i(x) & \leq & 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ & x & \in & X \end{array}$$

Sea $\bar{x}$ una solución factible y sea $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. Supongamos que f es pseudoconvexa en $\bar{x}$y que g_i es pseudoconvexa y diferenciable en $\bar{x}$ para cada $i \in I$. Supongamos además que en $\bar{x}$ se verifican las condiciones de KKT, es decir, existen $\mu_i \geq 0$, $i \in I$ tales que

$$\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) = 0$$

entonces $\bar{x}$ es una solución óptima global del problema P.

3.3 Problemas Con Restricciones de Igualdad y Desigualdad

3.3.1 Condiciones de Óptimo de Tipo Geométrico

Teorema 1.30

Sea $X \subset E_n$ un conjunto abierto no vacío, $g : E_n \longrightarrow E_1$, $g_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, m$ y $h_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, l$. Consideremos el siguiente problema P

$$\begin{array}{rrcll} \text{Minimizar} & f(x) & & & \\ \text{sujeto a} & g_i(x) & \leq & 0 & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) & = & 0 & i = 1, \ldots, l \\ & x & \in & X & \end{array}$$

Supongamos que $\bar{x}$ es una solución óptima local y sea $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. Supongamos que g_i, $i \notin I$, es continua en $\bar{x}$, f, g_i, $i \in I$, son diferenciables en $\bar{x}$ y que h_i, $i = 1, \ldots, l$, son continuamente diferenciables en $\bar{x}$. Si $\nabla h_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, l$ son linealmente independientes, entonces $\mathscr{F}_0 \cap \mathscr{G}_0 \cap \mathscr{H}_0 = \emptyset$, en donde

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}_0 & = & \{d \,|\, \nabla f(\bar{x})^t d < 0\} \\ \mathscr{G}_0 & = & \{d \,|\, \nabla g_i(\bar{x})^t d < 0 \quad i \in I\} \\ \mathscr{H}_0 & = & \{d \,|\, \nabla h_i(\bar{x})^t d = 0 \quad i = 1, \ldots, l\} \end{array}$$

3.3.2 Condiciones de Óptimo de Fritz John

Teorema 1.31. Condiciones Necesarias de Fritz John para Problemas con Restricciones de Desigualdad e Igualdad

Sea $X \subset E_n$ un conjunto abierto no vacío, $f : E_n \longrightarrow E_1$, $g_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, m$ y $h_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, l$. Consideremos el problema P

$$\begin{array}{rrcll} \text{Minimizar} & f(x) & & & \\ \text{sujeto a} & g_i(x) & \leq & 0 & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) & = & 0 & i = 1, \ldots, l \\ & x & \in & X & \end{array}$$

Sea $\bar{x}$ una solución factible, $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. Sea $g_i, i \notin I$ continua en $\bar{x}, f, g_i, i \in I$, diferenciables en $\bar{x}$ y $h_i, i = 1, \ldots, l$ continuamente diferenciables en $\bar{x}$. Si $\bar{x}$ es una solución óptima local del problema P, entonces existen escalares $\mu_0, \mu_i, i \in I$ y $v_i, i = 1, \ldots, l$, tales que

$$\begin{array}{rcl} \mu_0 \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} v_i \nabla h_i(\bar{x}) & = & 0 \\ \mu_0, \mu_i & \geq & 0 \quad i \in I \\ (\mu_0, \mu_I, v) & \neq & (0, 0, 0) \end{array}$$

donde $\mu_I = (\mu_i)_{i\in I}$, $v = (v_1, \ldots, v_l)$. Si además, $g_i, i \notin I$, es también diferenciable en $\bar{x}$ entonces las condiciones anteriores se pueden escribir de la siguiente forma equivalente

$$\begin{array}{rcl} \mu_0\nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} v_i\nabla h_i(\bar{x}) & = & 0 \\ \mu_0, \mu_i & \geq & 0 \quad i = 1, \ldots, m \\ (\mu_0, \mu, v) & \neq & (0,0,0) \\ \mu_i g_i(\bar{x}) & = & 0 \end{array}$$

donde $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$.

3.3.3 Condiciones de Óptimo de Karush, Kuhn y Tucker

Teorema 1.32. Condiciones Necesarias de Karush, Kuhn y Tucker para Problemas con Restricciones de Desigualdad e Igualdad

Sea $X \subset E_n$ un conjunto abierto no vacío, $f : E_n \longrightarrow E_1$, $g_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, m$ y $h_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, l$. Consideremos el problema P

$$\begin{array}{rrcll} \text{Minimizar} & f(x) & & & \\ \text{sujeto a} & g_i(x) & \leq & 0 & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) & = & 0 & i = 1, \ldots, l \\ & x & \in & X & \end{array}$$

Sea $\bar{x}$ una solución factible, $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. Supongamos que $f, g_i, i \in I$, son diferenciables en $\bar{x}, g_i, i \notin I$ son continuas en $\bar{x}$ y h_i, $i = 1, \ldots, l$ son continuamente diferenciables en $\bar{x}$. Supongamos además que $\nabla g_i(\bar{x})$, $i \in I$, $\nabla h_i(\bar{x})$, $i = 1, \ldots, l$ son linealmente independientes. Si $\bar{x}$ es una solución local del problema P entonces existen escalaras $\mu_i, i \in I, v_i, i = 1, \ldots, l$ tales que

$$\begin{array}{rcll} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i\in I}\mu_i\nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} v_i\nabla h_i(\bar{x}) & = & 0 & \\ \mu_i & \geq & 0 & i \in I \end{array}$$

Si además, $g_i, i \notin I$, es también diferenciable en $\bar{x}$, las condiciones anteriores se pueden escribir de la forma

$$\begin{array}{rcll} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m}\mu_i\nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} v_i\nabla h_i(\bar{x}) & = & 0 & \\ \mu_i g_i(\bar{x}) & = & 0 & i = 1, \ldots, m \\ \mu_i & \geq & 0 & \end{array}$$

Teorema 1.32. Condiciones Suficientes de Karush, Kuhn y Tucker para Problemas con Restricciones de Desigualdad e Igualdad

Sea $X \subset E_n$ un conjunto abierto no vacío, $f : E_n \longrightarrow E_1$, $g_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, m$ y $h_i : E_n \longrightarrow E_1$, $i = 1, \ldots, l$. Consideremos el problema P

$$\begin{array}{rrcll} \text{Minimizar} & f(x) & & & \\ \text{sujeto a} & g_i(x) & \leq & 0 & i = 1, \ldots, m \\ & h_i(x) & = & 0 & i = 1, \ldots, l \\ & x & \in & X & \end{array}$$

Sea $\bar{x}$ una solución factible, $I = \{i \text{ tal que } g_i(\bar{x}) = 0\}$. Supongamos que en $\bar{x}$ se verifican las condiciones necesarias de primer orden de KKT, es decir, existen $\bar{\mu}_i$, $\bar{v}_i$ tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \bar{\mu}_i \nabla g_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{l} \bar{v}_i \nabla h_i(\bar{x}) &= 0 \\ \bar{\mu}_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Sea $J = \{i \text{ tales que } \bar{v}_i > 0\}$ y $K = \{i \text{ tales que } \bar{v}_i < 0\}$. Supongamos que

- f es pseudoconvexa en $\bar{x}$
- g_i es cuasiconvexa en $\bar{x}$ para $i \in I$
- h_i es cuasiconvexa en $\bar{x}$ para $i \in J$
- h_i es cuasicóncava en $\bar{x}$ para $i \in K$

Entonces $\bar{x}$ es la solución óptima global para el problema P.

4. Algoritmos de Programación No Lineal

4.1 Algoritmos y Convergencia

4.1.1 Conceptos Básicos

Definición 1.33. Algoritmo

Un algoritmo para resolver el problema P es un proceso iterativo que genera una sucesión de puntos de acuerdo con un conjunto preciso de instrucciones junto con un criterio de terminación.

Definición 1.34. Aplicación Algorítmica

Una aplicación algorítmica A es una aplicación de punto a conjunto que a cada punto de un dominio $X \subset E_n$ le asigna un conjunto de X.

- Dado un punto inicial x_1, la aplicación algorítmica genera una sucesión $x_1, x_2, x3, \ldots$, donde $x_{k+1} \in A(x_k)$ para cada k.
- La transformación de x_k en x_{k+1} constituye una iteración del algoritmo.

4.1.2 Convergencia de Algoritmos

1.35. Convergencia de la Aplicación Algorítmica

Se dice que la aplicación Algorítmica A converge en el conjunto $Y \subset X$ si, partiendo de un punto $x_1 \in Y$ el límite de cualquier subsucesión convergente generada por el algoritmo pertenece a un determinado conjunto solución Ω.

Ejemplos típicos de conjuntos solución son:

1. $\Omega = \{\bar{x} \,|\, \bar{x}$ es una solución óptima local del problema $\}$
2. $\Omega = \{\bar{x} \,|\, f(\bar{x}) \leq b\}$ siendo b un valor aceptable para la función objetivo.
3. $\Omega = \{\bar{x} \,|\, f(\bar{x}) < CI + \epsilon\}$, siendo CI una cota inferior conocida para la función objetivo y ϵ un valor de tolerancia dado.
4. $\Omega = \{\bar{x} \,|\, \bar{x} \in S, f(\bar{x}) - f(\hat{x}) < \epsilon\}$, siendo $\hat{x}$ el óptimo global y $\epsilon > 0$.
5. $\Omega = \{\bar{x} \,|\, \bar{x} \in S\}$, siendo $\bar{x}$ un punto que satisface las condiciones necesarias o suficientes de Karush, Kuhn y Tucker.
6. $\Omega = \{\bar{x} \,|\, \bar{x} \in S\}$, siendo $\bar{x}$ un punto que satisface las condiciones necesarias de Fritz John.

Definición 1.36. Aplicación Algorítmica Cerrada

Sean X e Y dos conjuntos no vacíos cerrados de E_p y E_q respectivamente. Sea $A : X \longrightarrow Y$ una aplicación punto a conjunto. La aplicación A se dice cerrada en $x \in X$ si

$$\left.\begin{array}{ll} x_k \in X & x_k \longrightarrow x \\ y_k \in A(x_k) & y_k \longrightarrow y \end{array}\right\} \Longrightarrow y \in A(x)$$

La aplicación A se dice cerrada en $Z \subset X$ si es cerrada en cada $x \in Z$.

Definición 1.34. Convergencia de Aplicaciones Algorítmicas

Sea $X \subset E_n$ cerrado no vacío y $\Omega \subset X$ un conjunto solución no vacío. Sea $A : X \longrightarrow X$ una aplicación punto a conjunto. Dado $x_1 \in X$ la sucesión $\{x_k\}$ se genera iterativamente de la forma siguiente

- Si $x_k \in \Omega$ entonces FINALIZAR.
- En otro caso, sea $x_{k+1} \in A(x_k)$, reemplazar k por $k+1$ y repetir.

Supongamos que la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ producida por el algoritmo está contenida en un subconjunto compacto de X y supongamos que existe una función continua α, llamada función de descenso, tal que $\alpha(y) < \alpha(x)$ para $x \in \Omega$ e $y \in A(x)$. Si la aplicación A es cerrada sobre el complementario de Ω entonces:

a) O bien el algoritmo se detiene después de un número finito de pasos en un punto perteneciente a Ω.

b) O bien genera una sucesión infinita $\{x_k\}$ tal que:
   1. Cualquier subsucesión convergente de $\{x_k\}$ tiene un punto límite en Ω, es decir, todos los puntos de acumulación de $\{x_k\}$ pertenecen a Ω.
   2. $\alpha(x_k) \longrightarrow \alpha(x)$ para algún $x \in \Omega$.

Corolario 1.9

Bajo las hipótesis del teorema 1.34, si Ω está formado por un único punto $\{\bar{x}\}$, entonces la sucesión $\{x_k\}$ converge a $\bar{x}$.

Definición 1.37. Criterios Prácticos para la Finalización de un Algoritmo

Sea $\epsilon > 0$ arbitrario, N un número entero positivo. Los siguientes criterios pueden utilizarse para la finalización de un algoritmo

1. $\|x_{k+N} - x_k\| < \epsilon$
2. $\dfrac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|x_k\|} < \epsilon$
3. $\alpha(x_k) - \alpha(x_{k+N}) < \epsilon$
4. $\left\|\dfrac{\alpha(x_k) - \alpha(x_{k+1})}{\alpha(x_k}\right\| < \epsilon$
5. $\alpha(x_k) - \alpha(\bar{x}) < \epsilon$ siendo $\bar{x} \in \Omega$

El último criterio es particularmente útil si $\alpha(\bar{x})$ se conoce. Por ejemplo, cuando se trata de un problema de minimización sin restricciones se puede poner $\alpha(x) = \|\nabla f(x)\|$ y $\Omega = \{x \mid \nabla f(x) = 0\}$. Por tanto, $\alpha(\bar{x}) = 0$.

4.1.3 Composición de Aplicaciones Algorítmicas

Definición 1.38. Composición de Aplicaciones Algorítmicas

Sean X, Y y Z conjuntos no vacíos cerrados de E_n, E_p y E_q respectivamente. Sea $B : X \longrightarrow Y$, $C : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones punto a conjunto. La aplicación compuesta $A = CB$ se define como la aplicación punto a conjunto $A : X \longrightarrow Z$ con:

$$A(x) = \bigcup \{C(y) \,|\, y \in B(x)\}$$

Teorema 1.35

Sean X, Y y Z conjuntos no vacíos cerrados de E_n, E_p y E_q respectivamente. Sean $B : X \longrightarrow Y$, $C : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones punto a conjunto y consideremos la aplicación compuesta $A = CB$. Supongamos que B es cerrada en x y que C es cerrada en $B(x)$. Además supongamos que si $x_k \longrightarrow x$ e $y_k \in B(x_k)$ entonces existe una subsucesión convergente de $\{y_k\}$. Entonces A es cerrada en x.

Corolario 1.10

Sean X, Y y Z conjuntos no vacíos cerrados de E_n, E_p y E_q respectivamente. Sean $B : X \longrightarrow Y$ y $C : Y \longrightarrow Z$ aplicaciones punto a conjunto. Supongamos que B es cerrada en x, C es cerrada en $B(x)$ e Y es compacto. Entonces $A = CB$ es cerrada en x.

Corolario 1.11

Sean X, Y y Z conjuntos no vacíos cerrados de E_n, E_p y E_q respectivamente. Sea $B : X \longrightarrow Y$ una función y $C : Y \longrightarrow Z$ una aplicación de punto a conjunto. Si B es continua en x y C es cerrada en $B(x)$ entonces $A = CB$ es cerrada en x.

Teorema 1.36. Convergencia de Algoritmos con Aplicaciones Compuestas

Sea $X \subset E_n$ cerrado y sea $\Omega \subset X$ un conjunto solución no vacío. Sea $\alpha : E_n \longrightarrow E_1$ una aplicación continua y sea $C : X \longrightarrow X$ una aplicación de punto a conjunto. Supongamos que C es tal que dado $x \in X$ entonces $\alpha(y) \leq \alpha(x)$ para cada $y \in C(x)$. Sea $B : X \longrightarrow X$ una aplicación de punto a conjunto que es cerrada sobre el complementario de Ω y supongamos que para cada $y \in B(x)$ y $x \notin \Omega$ se cumple $\alpha(y) < \alpha(x)$.
Consideremos ahora el algoritmo definido por la aplicación compuesta $A = CB$. Dado $x_1 \in X$, supongamos que la sucesión se genera como sigue:

- Si $x_k \in \Omega$ FINALIZAR.
- En otro caso, sea $x_{k+1} \in A(x_k)$, reemplazar k por $k+1$ y repetir.

Supongamos que el conjunto $\Lambda = \{x \text{ tal que } \alpha(x) \leq \alpha(x_1)\}$ es compacto. Entonces

a) O bien el algoritmo se detiene en un número finito de pasos en un punto de Ω.
b) O bien todos los puntos de acumulación de $\{x_k\}$ pertenecen a Ω.

4.2 Mimización a lo Largo de Direcciones Independientes

Teorema 1.37. Minimización a lo Largo de Direcciones Independientes

Sea $f : E_n \longrightarrow E_1$, diferenciable. Consideremos el problema

$$\begin{array}{rl} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & x \in E_n \end{array}$$

Consideremos un algoritmo para resolver el problema anterior cuya aplicación algorítmica A viene definida por la regla siguiente:
"El vector $y \in A(x)$ significa que y se obtiene minimizando f secuencialmente a lo largo de las direcciones $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_n$ a partir de x. Las direcciones pueden depender de x y tiene norma 1."
Supongamos que se verifican las propiedades siguientes:

1. Existe un $\epsilon > 0$ tal que $det[D(x)] \geq \epsilon$ para cada $x \in E_n$, siendo $D(x)$ la matriz $n \times n$ cuyas columnas son las direcciones de búsqueda.
2. El mínimo de f a lo largo de cualquier recta de E_n es único.

Dado un punto de partida x_1 supongamos que el algoritmo genera una sucesión $\{x_k\}$ de la manera siguiente:

- Si $\nabla f(x_k) = 0$ entonces el algoritmo se detiene en x_k.
- En otro caso $x_{k+1} \in A(x_k)$, k se reemplaza por $k+1$ y se repite el proceso.

Si la sucesión $\{x_k\}$ está contenida en un conjunto compacto de E_n entonces cada cpunto de acumulación x de la sucesión $\{x_k\}$ satisface $\nabla f(x) = 0$.

4.3 Comparación entre Algoritmos

Criterios a tener en cuenta:

- **Generalidad**. Hace referencia a la variedad de problemas. Problemas sin restricciones, con restricciones, asumiendo diferenciabilidad, etc.
- **Robustez** o fiabilidad. Capacidad para resolverlos con precisión razonable. Algunos funcionan bien para problemas de pequeña escala, otros de gran escala.
- **Precisión**. Medida de la calidad de los puntos obtenidos después de un número razonable de iteraciones. Interesa que alcance la solución en pocas iteraciones, y además dicha solución sea factible.
- **Sensibilidad**. Estabilidad de los resultados proporcionados frente a ligeras perturbaciones.
- **Esfuerzo computacional**. Se puede medir en tiempo, número de iteraciones, etc.
- **Convergencia**. Posibilidad de demostrar que el algoritmo converge. Algunos algoritmos no está demostrado pero convergen en pocas iteraciones.
- **Orden de convergencia**. Rapidez de convergencia.

4.3.1 Orden de Convergencia de Un Algoritmo

Definición 1.39. Orden de Convergencia de una Sucesión de Números Reales

Sea $\{r_k\}$ una sucesión de números reales que converge a un punto límite $\bar{r}$. Se llama orden de convergencia de $\{r_k\}$ al supremo de los números no negativos p tales que verifican:

$$0 \leq \overline{\lim_{k \to \infty}} \frac{\|r_{k+1} - \bar{r}\|}{\|r_k - \bar{r}\|^p} < +\infty$$

Definición 1.40. Convergencia Lineal

Si la sucesión $\{r_k\}$ converge a $\bar{r}$ de tal manera que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\|r_{k+1} - \bar{r}\|}{\|r_k - \bar{r}\|} = \beta < 1$$

entonces la convergencia se dice lineal

Definición 1.41. Covergencia Superlineal

Si la sucesión $\{r_k\}$ converge a $\bar{r}$ de tal manera que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|r_{k+1} - \bar{r}\|}{\|r_k - \bar{r}\|} = 0$$

entonces la convergencia se dice superlineal

Proposición 1.9

Si la sucesión $\{r_k\}$ converge a $\bar{r}$ con un orden de convergencia $p > 1$ entonces el orden de convergencia es superlineal.

El caso particular de convergencia superlineal con $p = 2$ suele denominarse convergencia cuadrática.

5. Algoritmos de Optimización Sin Restricciones

6. Algoritmos de Optimización Con Restricciones

7. Graos

8. Árboles y Arborescencia

9. Caminos

10. Flujos