Definiciones Álgebra Lineal 2

UNED

2018-2019

Valores propios y vectores propios de un endomorfismo

1. Un escalar $\lambda \in K$ diremos que es autovalor o valor propio de un endomorfismo f si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Se denomina espectro de f al conjunto formado por todos los autovalores del endomorfismo.
2. Un vector $v \in V$ se dice que es un autovector o vector propio asociado a un autovalor λ de f sii $f(v) = \lambda v$. Al conjunto formado por todos los vectores propios asociados a un autovalor λ se le denomoina subespacio propio asociado a λ y se denomina V_λ.

Polinomio característico

Sea f un endomorfismo de un $K-$ espacio vectorial V de dimensión n y A una matriz de f respecto a una base B. Se denomina polinomio característico de f, o de A, al polinomio de grado n en la indeterminada λ, $p_f(\lambda)$=det$(A - \lambda I)$. Este polinomio es un invariante lineal.

Endomorfismo diagonalizable

Un endomorfismo f se dice que es diagonalizable si existe una base B tal que la matriz de f en dicha base, $M_B(f)$, es diagonal. Además, una matriz cuadrada A se dice que es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal D, es decir, si existe una matriz regular P tal que $D = P^{-1}AP$. Como definición alternativa podríamos decir que una matriz cuadrada A es diagonalizable sii el endomorfismo cuya matriz en cierta base es A es diagonalizable. Además, un endomorfismo f es diagonalizable sii existe una base de V formada por autovectores de f. Un endomorfismo es diagonalizable sii:

1. La suma de las multiplicidades algebraicas de los autovalores es igual a la dimensión del endomorfismo.
2. Las multiplicidades algebraicas y geométricas de cada autovalor coinciden.

Multiplicidad algebraica y geométrica de un autovalor

Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ autovalores distintos de un endomorfismo f. Llamamos:

- Multiplicidad algebraica del autovalor λ_i a su multiplicidad como raíz del polinomio característico, y la denotaremos por a_i.
- Multiplicidad geométrica del autovalor λ_i a la dimensión del subespacio propio asociado dimV_{λ_i} y la denotaremos por g_i. Es decir, $g_i = \text{dim}V_{\lambda_i} = n - \text{rg}(A - \lambda_i I)$.

Bloque de Jordan y matriz de Jordan

- Un bloque de Jordan de orden n es una matriz cuadrada de orden n, que denotaremos por $B_n(\lambda)$, tal que $b_{ii} = \lambda$ con $\lambda \in K$ para $i = 1, ..., n$, $b_{i,i-1} = 1$ para $i = 2, ..., n$; y el resto de elementos iguales a 0.
- Una matriz de Jordan es una matriz cuadrada diagonal por bloques de modo que los bloques de la diagonal son bloques de Jordan.

Subespacio f-invariante

Un subespacio vectorial U de V se dice que es invariante por un endomorfismo f de V, o f-invariante, si se cumple $f(U) \subset U$. Equivalentemente, $U = L(v_1, ..., v_k)$ es un subespacio invariante sii $f(v_1), ..., f(v_k) \in U$.

Restricción de una aplicación lineal a un subespacio invariante

Dada una aplicación cualquiera $F : A \to B$ y S un subconjunto de A, entonces se llama aplicación restricción de f a S a la aplicación $f|_S : S \to B$ definida por $s \mapsto f(s)$. Se trata de la misma aplicación f pero con un dominio restringido.

Subespacios propios generalizados asociados a un autovalor

Se denomina subespacio propio generalizado i-ésimo asociado a un autovalor λ de un endomorfismo f, al subespacio vectorial $K^i(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{ Id})^i$. El subespacio propio generalizado primero coincide con el subespacio propio.

Subespacio máximo asociado a un autovalor

Existe un subespacio propio generalizado tal que tiene la dimensión máxima y los siguientes coinciden con él. Este subespacio propio generalizado se denomina subespacio máximo $M(\lambda) = K^k(\lambda) = \text{Ker}(f - \lambda \text{ Id})^k$

Forma canónica de Jordan

Sea f un endomorfismo de un K-espacio vectorial V. Diremos que f admite una forma canónica de Jordan si existe una base B de V tal que la matriz de f respecto a dicha base es una matriz de Jordan, a la que se llama forma canónica de Jordan de f. Esta matriz de única salvo permutación de bloques de Jordan.

Subespacios f-invariantes reducibles e irreducibles

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial real V y U un subespacio f-invariante.

1. U es reducible si se puede descomponer en suma directa de subespacios f-invariantes no triviales
2. U es irreducible en caso contrario

Teorema de Cayley-Hamilton

Si $p_f(t) \in K[t]$ es el polinomio característico de un endomorfismo f entonces $p_f(f) = 0$.

Polinomio anulador y polinomio mínimo

Diremos que un polinomio $p(t)$ anula a un enfomorfismo f o que es un polinomio anulador de f si $p(f)$ es el endomorfismo nulo, $p(f) = 0$. En términos matriciales, si A es una matriz cualquiera de f, entonces $p(A)$ es la matriz nula o también $p(A) = 0$.

Se denomina polinomio mínimo anulador de un endomorfismo f al polinomio $m_f(t) \in K[t]$ mónico de grado mínimo que anula a f. Todo autovalor de f es raíz de cualquier polinomio anulador de f. El polinomio mínimo es divisor del polinomio característico y tiene sus mismas raíces (salvo multiplicidades).

Forma bilineal

Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V, una aplicación $f : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice que es forma bilineal si cumple, para todo vector $u, v, w \in V$ y escalar $a, b \in K$:

1. $f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$
2. $f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$

Es decir, que la aplicación f es lineal en las cos componentes.

Matriz y rango de una forma bilineal

La matriz de la forma bilineal f respecto de una base B en un espacio vectorial de dimensión finita está formada por las imágenes de cada par de vectores de la base por la aplicación f. Se llama rango de la forma bilineal f al rango de cualquier matriz de f.

Forma bilineal simétrica y antisimétrica

Una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ se dice que es:

1. Simétrica si $f(u, v) = f(v, u) \forall u, v \in V$. Esto implica $A = A^t$.
2. Antisimétrica si $f(u, v) = -f(v, u) \forall u, v \in V$. Esto implica $A = -A^t$.

Forma cuadrática y su forma polar

Se llama forma cuadrática asociada a la forma bilineal f de V a la aplicación $\Phi : V \to K$ definida por $\Phi(v) = f(v, v)$. Se caracteriza por:

1. $\Phi(\lambda v) = \lambda^2 \Phi(v)$
2. La aplicación $f_\Phi = V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $f_\Phi(u, v) = \frac{1}{2}[\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$ es una forma bilineal simétrica que se denomina forma polar de Φ

Vectores conjugados

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica:

1. Dos vectores $u, v \in V$ se dice que son conjugados respecto a f si $f(u, v) = 0$
2. Un vector $u \in V$ no nulo conjugado de sí mismo se denomina autoconjugado o isótropo
3. El núcleo o radical de f es el conjunto Ker(f)=$\{u \in V : f(u, u) = 0 \;\; \forall v \in V\}$
4. Una forma bilineal se dice que es no degenerada si Ker(f)=0.

Los mismos conceptos existen para formas cuadráticas. Dos vectores son conjugados respecto a una forma cuadrática Φ si lo son respecto de su forma polar. El núcleo de Φ es el núcelo de la forma polar y Φ es no degenerada sii su forma polar no lo es.

Conjugado de un subconjunto

Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica. Se llama conjugado de un subconjunto $S \subset V$ respecto a f y se denota por S^c al conjunto formado por todos los vectores que son conjugados de todos los vectores de S. En particular, V^c =Ker(f) y $0^c = V$

Forma cuadrática diagonalizada

Dada una forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{K}$ y una base B de V se dice que Φ está diagonalizada o está escrita como suma de cuadrados, respecto a B, si la matriz de Φ en dicha base es diagonal y su expresión analítica es $\Phi(x) = X^t D X = d_1 x_1^2 + ... + d_n x_n^2$. Toda forma bilineal $f : V \times V \to K$ admite una matriz diagonal tal que los elementos de la diagonal principal son igual a 1, -1 o 0.

Clasificación de formas bilineales

Una forma bilineal simétrica f se dice que es:

1. Definida positiva si $f(v,v) > 0 \;\; \forall v \in V, v \neq 0$
2. Semidefinida positiva si $f(v,v) \geq 0 \;\; \forall v \in V$ y $f(v,v) = 0$ para algún $v \neq 0$
3. Definida negativa si $f(v,v) < 0 \;\; \forall v \in V, v \neq 0$
4. Semidefinida negativa si $f(v,v) \leq 0 \;\; \forall v \in V$ y $f(v,v) = 0$ para algún $v \neq 0$
5. Indefinida en cualquier otro caso

Ley de inercia de Sylvester y signatura de una forma bilineal

Sea f una forma bilineal simétrica y real, y Φ la forma cuadrática asociada. En cualquier matriz diagonal de f el número de elementos positivos p y negativos q es siempre el mismo, siendo $p + g =$rg(f). El par (p,q) es la signatura de f o de Φ.

Criterio de Sylvester

Sea A una matriz cualquiera de una forma bilineal f y $\Delta_i, i = 1, ..., n$ los menores principales de la matriz A. Entonces:

1. f es definida positiva sii $\Delta_i =$det$A_i > 0 \;\; \forall i = 1, ..., n$.
2. f es definida negativa sii $(-1)^i \Delta_i > 0 \;\; \forall i = 1, ..., n$.

1 Matrices semejantes y congruentes

1. Dos matrices A y B de orden n en $\mathbb{K}$ son semejantes si existe una matriz regular (o invertible) P tal que $P^{-1}AP = B$. La semejanza es una clase de conjugación.
2. Dos matrices A y B de orden n en $\mathbb{K}$ son congruentes si existe una matriz regular (o invertible) P tal que $P^t AP = B$. La congruencia es una relación de equivalencia.

Diagonalización por congruencia

Método para la diagonalización de matrices simétricas. Dada una matriz A simétrica se busca encontrar una matriz regular P y una matriz diagonal D tales que A y D sean congruentes: $D = P^t AP$. Para ello, se aplican operaciones elementales a las filas de A y las mismas operaciones a sus columnas hasta obtener la matriz diagonal D, y las mismas operaciones elementales se aplican a las filas de I_n para obtener la matriz P^t. Las filas de P^t son las coordenadas en la base inicial de una base de vectores con la cual A es diagonal. Asociando A a una forma bilineal simétrica, estos vectores son conjugados.

Producto escalar

Un producto escalar en un espacio vectorial real V es una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$ simétrica y definida positiva. Dado que un producto escalar es una forma bilineal, se puede definir su matriz respecto de una base. Esta matriz también se suele llamar matriz métrica o matriz de Gram.

Norma de un vector

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Se define la norma o longitud de un vector $v \in V$ como el número real no negativo $||v|| = \sqrt{< v, v >}$.

Ortogonalidad

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores u y v se dice que son ortogonales y se denota por $u \perp v$ si son conjugados por $<, >$, es decir si $< u, v >= 0$. Un conjunto de vectores no nulos es un conjunto ortogonal si los vectores son ortogonales dos a dos.

Base ortogonal y ortonormal

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Una base ortogonal de V es una base formada por un conjunto ortogonal, y una base ortonormal es una base ortogonal cuyos vectores son unitarios, es decir, tienen norma 1.

Coeficientes de Fourier de un vector respecto de una base

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y $B = v_1, ..., v_n$ una base ortogonal. Las coordenadas de un vector $u \in V$ respecto de la base B son los denominados coeficientes de Fourier de u respecto de B.:

$$u = \left(\frac{< u, v_1 >}{||v_1||^2}, ..., \frac{< u, v_n >}{||v_n||^2} \right)_B$$

Subespacios ortogonales y complemento ortogonal

Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados dos conjuntos S y T de V se dice que son ortogonales, y se denota por $S \perp T$ si se cumple que todos los vectores de S son ortogonales a todos los de T y viceversa. Es decir, si $< s, t >= 0 \;\; \forall s \in S, \forall t \in T$. Dado un subconjunto $S \subset V$ llamaremos ortogonal de S, y lo denotaremos por $S^\perp$ al conjunto conjugado de S por $<, >$:

$$S^\perp = \{v \in V : v \perp s \;\; \forall s \in S\}$$

Si U es un subespacio vectorial de V, entonces se tiene la siguiente descomposición en suma directa: $V = U \oplus U^\perp$. Por ser $U^\perp$ suplementario de U también se le suele llamar suplemento o complemento ortogonal de U.

Proyección ortogonal de un vector

Sean $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo, U un subespacio vectorial de V y v un vector cualquiera de V. Llamaremos proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio U, $\text{proy}_U(v)$ al único vector tal que $\text{proy}_U(v) \in U$ y $v - \text{proy}_U(v) \in U^\perp$.

Distancia

La distancia entre dos vectores v y u es $\text{dist}(u, v) = ||v - u||$.
La distancia de un vector v al subespacio vectorial U es $\text{dist}(v, U) = \text{mín}\,\{||v - u||, u \in U\}$

Espacios normados y espacios métricos

Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dotado de una norma se denomina normado. Un conjunto E en el que hay definida una distancia se denomina espacio métrico. En un espacio normado, a partir de una norma se puede definir una distancia.

Teorema espectral

Sea f un endomorfismo simétrico de un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión finita, $V \neq 0$. Entonces, existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f. En forma matricial, se puede decir que toda matriz simétrica real A de orden n es ortogonalmente diagonalizable, es decir, existe una matriz ortogonal P y una matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

Regla de Descartes

Sea $p(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$ para $i = 0, ..., n$ y $a_n \neq 0$ un polinomio de grado n que tiene n raíces reales, no necesariamente distintas. Consideramos la sucesión formada por los coeficientes $(a_n, ..., a_0)$ y eliminamos los que sean iguales a 0. Entonces, el número de raíces positivas del polinomio, contadas con su multiplicidad, es igual al número de cambios de signo entre los coeficientes consecutivos de la sucesión obtenida.

Isometría vectorial o transformación ortogonal

Sean $(V, <,>)$ y $(V', <,>')$ dos espacios vectoriales euclídeos. Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es una isometría vectorial o transformación ortogonal si cumple $< u, v >=< f(u), f(v) >' \quad \forall u, v \in V$.

Grupo ortogonal

Se denomina grupo ortogonal $\mathcal{O}(V)$ al conjunto de los isomorfismos ortogonales o isometrías de V que para la operación composición de operaciones tiene estructura de grupo. El grupo ortogonal es un subgrupo del grupo lineal general $GL(V)$ formado por los isomorfismos de V.

Isometrías vectoriales métricamente equivalentes

Sean $f, g \in \mathcal{O}(V)$ isometrías vectoriales de $(V, <,>)$. Diremos que f y g son métricamente equivalentes sii existe otra isometría h tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Rotación y reflexión

Sea f una isometría de un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$, y A una matriz de f respecto a una base ortonormal. Se dice que f es una rotación si det$A$=1, y que f es una reflexión si det$A$=-1. Las rotaciones conservan la orientación y las reflexiones la invierten. El grupo $\mathcal{O}^+(V)$ formado por las isometrías con determinante 1, llamado grupo de rotaciones de V, es un subgrupo del grupo ortogonal. El conjunto formado por las reflexiones no es un subgrupo, ya que la composición de dos reflexiones es una rotación.