EXÁMENES ANTERIORES

1.- Discutir el sistema en función del valor de y . Calcular las soluciones para los valores de y que hacen el sistema compatible

Sea la matriz , entonces

Si , entonces el igual a número de incógnitas, el sistema es compatible determinado y se resuelve por Cramer.

Si

Si , entonces , el sistema es incompatible.

Si el sistema es compatible indeterminado.

2.- Discutir y calcular las soluciones del sistema de ecuaciones con incógnitas

Sistema compatible indeterminado

3.- Sea una matriz de orden . Demostrar que si es impar, (es la matriz identidad) y , entonces .

4.- Sea una matriz de orden . Si , demostrar que .

5.- Sean números reales que y consideremos la matriz

i) Probar que la matriz es simétrica (es decir), siendo la matriz identidad de orden 3.

ii) Demostrar que .

Es muy fácil, ya que

6.- Sean y dos matrices y respectivamente. Calcular los rangos de ambas sabiendo que .

Por la hipótesis, no pueden ser matrices cuadradas. Supongamos por ejemplo . Entonces, , y como es una matriz cuadrada de orden , su rango no es máximo y su determinante es nulo. Por hipótesis entonces, , y como tiene orden resulta . Pero tanto como tienen rango , luego concluimos que su rango es exactamente .

7.- Dadas las matrices , . Calcular el valor de para que .

Como

entonces

8.- Si dos matrices no necesariamente cuadradas cumplen que (matriz identidad de orden), demostrar que entonces ambas tienen rango máximo.

Sean ,

Si

Si se procede de forma análoga.

9.- Sean y números reales y consideremos los subespacios de dados por las ecuaciones siguientes (respecto de la base estándar de)

Calcular las dimensiones de y . ¿Existen valores de y para los que ?

Las dimensiones de y se calculan como sigue

Como y tienen la misma dimensión, la condición equivale a . Por otro lado, una base de es la formada por los vectores , luego la condición equivale a que esos dos vectores estén en .

Sustituyendo sus coordenadas en las ecuaciones de se concluye que eso ocurre si y sólo si

En consecuencia, si y sólo si .

10.- Sea una base del espacio vectorial , sea el subespacio vectorial del que unas ecuaciones implícitas respecto de son

y sea . Obtener una base del espacio vectorial cociente y calcular las coordenadas, respecto de dicha base, de la clase .

Resolviendo las ecuaciones implícitas de , obtenemos las paramétricas

de modo que los vectores cuyas coordenadas son , forman una base de . Añadiendo los vectores y obtenemos una base de , luego generan un suplementario de y sus clases son una base del cociente .

Para la segunda parte, las coordenadas buscadas cumplen , esto es, . Las coordenadas de respecto de son

luego está en el subespacio si y sólo si esas coordenadas cumplen las ecuaciones implícitas de

Resolviendo este sistema obtenemos .

11.- Sea una base de un espacio vectorial y sean: i) el subespacio con ecuaciones respecto de . ii) el subespacio de generado por los vectores , , .

a) Calcular las dimensiones de y .

Dimensión de

b) Calcular las dimensiones de y .

La ecuación implícita de es

, son los vectores de la forma , por lo tanto tiene dimensión , así

12.- Estudiar si es un subespacio vectorial de .

Son los vectores de la forma , como los dos vectores son independientes es un subespacio vectorial de dimensión .

13.- Sea el espacio vectorial de los polinomios en la variable con coeficientes reales. Se considera en los polinomios , , . Estudiar si

forman una base del subespacio vectorial , de los polinomios reales de grado menor o igual a dos.

Una base la forman

Entonces es un sistema generador formado por tres vectores en un espacio vectorial de dimensión tres, luego es una base.

14.- Calcular las bases de los subespacios de y , siendo y el subespacio vectorial generado por los vectores y .

Como , entonces los vectores son de la forma , por tanto los vectores ,, generan y son independientes, luego forman una base.

Como está generado por los vectores de y no pertenece a , los vectores anteriores con el forman una base de .

Conocemos que

Puesto que , forma una base de .

15.- Sea el espacio vectorial de las matrices cuadradas con coeficientes en y sean y . Calcular las bases de los subespacios y .

Si escribimos y , entonces es muy fácil demostrar que una base de es y una base de es . Por lo tanto y .

Como el vector , se tiene que y , luego las bases serán las de y las de .

16.- Dado el espacio vectorial y los subespacios

a) Estudiar si es igual a .

No lo es, puesto que el pertenece a pero no pertenece a .

b) Estudiar si es suma directa.

No es directa, puesto que pertenece a .

c) Estudiar si es suma directa de y .

Si lo es, ya que y .

17.- Sean y dos bases de y sea la aplicación lineal tal que , , . Determinar la matriz asociada a respecto a la base en el espacio de partida y la base en el espacio de llegada.

Resolviendo el sistema se tiene

La matriz asociada a es