El Sr. García y el crupier de un casino disponen cada uno de dos cartas, una de ellas numerada con 1 y la otra con 2, entre las cuales cada uno elige una para jugar a "pares y nones": si la suma de las puntuaciones de las cartas elegidas es par, gana la banca y si es impar, gana el Sr. García, siendo el pago la suma de las puntuaciones. Se considera que el crupier elige su carta al azar sin que se conozca la distribución de probabilidad $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$

a) Determinar la acción aleatorizada óptima del Sr. García con el criterio de Wald y el valor del problema de decisión.

b) Con el criterio de Savage ¿cuál es la acción aleatorizada óptima del Sr. García?.

c) Determinar la acción Bayes del Sr. García frente a cada distribución a priori $\boldsymbol{\pi}$. Deducir la distribución menos favorable $\boldsymbol{\pi}_0$ y el mínimo riesgo Bayes frente a $\boldsymbol{\pi}_0$.

En una segunda fase, el jugador tiene la opción de preguntar al crupier el número de la carta que ha elegido. El crupier responderá la verdad con probabilidad 2/3 y mentirá con probabilidad 1/3.

En este caso:

d) Determinar la regla de decisión Bayes del Sr. García, en función de la distribución a priori $\boldsymbol{\pi}$ y de la respuesta del crupier.

e) Calcular para el Sr. García el mínimo riesgo Bayes frente a cada $\boldsymbol{\pi}$, la distribución menos favorable y el valor del problema.

a) Con el criterio de Wald, buscamos la acción maximin.

Las ganancias son:

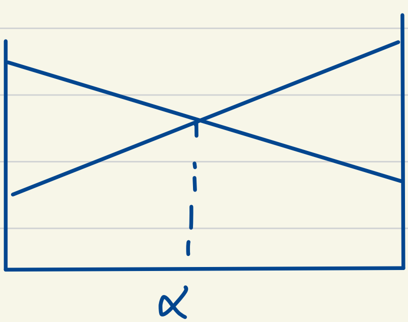
A	$\theta=1$	$\theta=2$
1	1	-2
2	-1	2

θ = Decisión Banca

Suponiendo una acción $\alpha=(p, 1-p)$ el riesgo para cada estado θ es:

$$r(\alpha, \theta_1) = \alpha - (1-\alpha) = 2\alpha - 1$$

$$r(\alpha, \theta_2) = -2\alpha + 2(1-\alpha) = -4\alpha + 2$$



Igualando tenemos

$$2\alpha - 1 = -4\alpha + 2$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

Luego el criterio de Wald nos indica sacar la mitad de las veces pares y la mitad nones.

El valor del problema es $r(½, \theta_1) = \frac{2}{2} - 1 = 0$

b) La función de arrepentimiento nos queda:

A	$\theta = 1$	$\theta = 2$
1	1	-2
2	-1	2

Regret

A	$\theta = 1$	$\theta = 2$
1	0	4
2	2	0

Aplicando el criterio minimax de nuevo nos queda:

$$\left.\begin{array}{l} r(\alpha, \theta_1) = 2(1-\alpha) \\ r(\alpha, \theta_2) = 4\alpha \end{array}\right\} \quad 2 - 2\alpha = 4\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

Luego el criterio de Savage indica jugar impar ⅓ de las veces.

c) Suponemos una distribución a priori $\pi = (\pi_1, 1-\pi_1)$.

El riesgo de cada acción es:

$$r(1) = 1 \cdot \pi_1 - 2(1-\pi_1) = 3\pi_1 - 2$$
$$r(2) = -\pi_1 + 2(1-\pi_1) = -3\pi_1 + 2$$

$$r(1) > r(2) \Rightarrow 3\pi_1 - 2 > -3\pi_1 + 2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6\pi_1 > 4$$
$$\pi_1 > 2/3$$

Luego la acción Bayes es Nones (1) si $\pi_1 > 2/3$ (elegimos la de mayor riesgo dado que son ganancias).

Y lógicamente si $\pi_1 < 2/3$ la acción debe ser Pares.

La distribución más desfavorable es $\pi_1 = 2/3$

que hace Bayes tanto los pares como nones.

Si $\pi_1 = 2/3$, el riesgo de (1) es: $2/3 - 2 \cdot 1/3 = 0$ que lógicamente coincide con el valor maximin.

d) Las respuestas del crupier se pueden representar:

	$\theta=1$	$\theta=2$
$R=1$	2/3	1/3
$R=2$	1/3	2/3

R = respuesta

Donde vemos que si ha elegido 1, responderá 1 2/3 de las veces.

Como solo tenemos 4 posibles reglas de decisión, calculamos el riesgo de cada una:

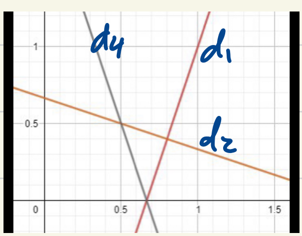
Nota $d(X, y)$ indica que si el crupier Responde 1 elijo X y si responde 2 elijo y.

Las cuatro reglas son
$$\begin{cases} d(1,1) = d_1 \\ d(1,2) = d_2 \\ d(2,1) = d_3 \\ d(2,2) = d_4 \end{cases}$$

Con pagos asociados:

	$\theta = 1$	$\theta = 2$	Riesgo frente π
d_1	1	-2	$3\pi - 2$
d_2	$1/3$	$2/3$	$\pi/3 + 2/3$
d_3	$-1/3$	$2/3$	$-\pi/3 - 2/3$
d_4	-1	2	$-3\pi + 2$

d_3 está dominada por d_2, luego no la tenemos en cuenta. Representamos los riesgos frente a π:



Lo cual nos da como acción Bayes

d_4 si $\pi \leq 0'5$

d_2 si $0'5 \leq \pi \leq 4/5$

d_1 si $\pi \geq 4/5$