“Sea ϕ*x* un enunciado que contiene una variable *x* y que se convierte en una proposición cuando se le asigna a *x* cualquier significado determinado fijo. Entonces ϕ*x* se llama una ‘función proposicional’”
“Una clase es […] todos los objetos que satisfacen una función proposicional”

Russell & Whitehead, *Principia Mathematica*

1. Explique si podemos dar cuenta de los conjuntos cantorianos en términos de funciones proposicionales. (3 puntos)
2. Explique si podemos dar cuenta de la noción fregeana de *número* en términos de funciones proposicionales (3 puntos).

Explique si podemos usar el concepto de clase para interpretar el Axioma de Selección de Zermelo. (4 puntos)

1.

Dado un conjunto A, podríamos denominar su función característica como la función X_A definida desde el dominio de todos los posibles objetos de una misma naturaleza hasta el conjunto {0, 1} tal que esta función toma el valor 1 para los elementos que pertenecen a A y el valor 0 para aquellos que no pertenecen a A. Una función construida de esta forma determina de forma inequívoca la composición del conjunto.

Observamos que tal construcción define un conjunto cantoriano y no lo que Cantor denomina como pluralidad inconsistente. En efecto, los elementos que fundamentan las paradojas de Russell y de Burali-Forti no tienen cabida en esta definición, ya que “la clase de todas las clases que no son miembros de si misma” o “el sistema de todos los ordinales” no son elementos del dominio de esta función.

Comentario professor:

El hilo para responder a esta pregunta está en la cuestión 8 de las PEC (“¿Por qué no toda “pluralidad bien definida” sería un conjunto en el sentido de Cantor?”). Como os decía en mi comentario:

[…] Una vía que explorarán Frege y Russell es la de definir los conjuntos como si fueran conceptos, entidades semánticas que contribuyen, por ejemplo, a decidir si una proposición es verdadera o falsa (además de lógicos, ambos autores fueron filósofos del lenguaje). De ahí, la dificultad de las paradojas -Burali-Forti, etc: delatan la existencia de conjuntos que apelan a conceptos mal definidos. Como algunos de vosotros apuntáis, Cantor no suponía la equivalencia entre conjunto y concepto. De ahí que no tuviera dificultad en aceptar pluralidades inconsistentes, aunque denominase conjunto sólo a aquellas que sean consistentes.

Para responder correctamente a esta pregunta, hay que explicar la diferencia entre la definición de conjunto de Cantor y la de Russell, explicando cómo las "pluralidades inconsistentes" no se pueden definir en términos de funciones proposicionales.
Aquí tendrías 2 puntos. Aunque tu respuestas va bien encaminada, no entras en los detalles de la diferencia entre las concepciones de Cantor y Russell para explicarlo. Y siendo una asignatura de historia conviene explicitarlo

2.

Frege no entiende el número como un objeto en sí mismo, sino como lo que tienen en común todos los conceptos de la misma numerosidad. Dicho de otra forma, cada número representa la clase de equivalencia de todos los objetos que tienen la misma numerosidad.

La definición anterior, además de no dar una forma constructiva de determinar los números, genera un grado de libertad en la elección de los "conceptos" cuya numerosidad genere el número que acaba invalidándolo. Por ejemplo, surge un problema cuando se obtiene el número correspondiente a la numerosidad del conjunto de todos los conceptos.

Esta contradicción impide fundamentar el significado de número en estos términos, y por tanto también definirlo en términos de funciones proposicionales.

Comentario professor:
Para responder conviene empezar por ver qué dice Torretti sobre la noción fregeana de número: en la p. 160, podéis leer "Frege exige una definición de número que certifique la unicidad del uno, el dos, el tres, etc. Como veremos, esta exigencia lo indujo a la contradicción que arruina su teoría". Hay que explicar entonces este proyecto de Frege, tal como os pedía en la pregunta 13 de las PEC.

Como sabéis, la contradicción que arruinó su teoría fue formulada por el propio Russell. Para resolverla, Russell desarrolló la teoría de los tipos lógicos, sobre la que os digo en mi comentario del a pregunta 13:

Pero las paradojas que surgieron de este proyecto supusieron, en última instancia, la separación de lógica y matemáticas: los conjuntos no podrían definirse como conceptos sin incurrir en ellas. La teoría de los tipos de Russell mostró los costes de adoptar un punto de vista intensional riguroso (los objetos se multiplicaban, uno por tipo).

Es decir, se acaba la unicidad que pretendía Frege para los números. Explicar la conexión entre funciones proposicionales y teoría de los tipos la expone Torretti en la sección 2.4 de su libro. Se pueden construir explicaciones más simples o más complicadas a partir de esas páginas, pero con las más simples (a partir de las pp. 180-183) ya os doy los 3 puntos completos de la pregunta

Aquí te daría también 2 puntos por la misma razón: falta algo de perspectiva histórica en tu respuesta.

3.

El axioma de Selección, tal como lo enuncia Zermelo, indica que para toda familia de conjuntos no vacía se puede crear un conjunto con un elemento de cada uno. En este sentido parece claro que el ámbito de aplicación de este axioma son los conjuntos, y no pluralidades mal definidas.

Adicionalmente, la mala definición de pluralidad que puede generar el concepto de clase provoca situaciones en las que no sería posible aplicar este axioma. Por ejemplo, en el caso de la paradoja del barbero, si el barbero fuera el único habitante del pueblo al que refiere la paradoja, no sería posible elegir ningún elemento de la clase de "personas que no se cortan el pelo a sí mismas" ni determinar que éste fuera un conjunto vacío.

Comentarios professor:

Esta pregunta es, con diferencia, la menos obvia. Pero la solución la encontráis en el texto de I. Jané, "¿De qué trata la teoría de conjuntos?" (en la carpeta de Recursos). Dice Jané (p. 13):

Para Russell, por el contrario, "toda clase está definida por alguna función proposicional que es verdadera de los miembros de la clase y falsa de lo demás" (Russell 1919, pág. 183); en consecuencia, aunque se vio obligado a usar el axioma de elección, hubo de reconocer la imposibilidad de justificarlo, ya que "a no ser que podamos hallar una regla para seleccionar [un objeto de cada parte], no sabremos que una selección es siquiera teóricamente posible" (Russell 1919, pág. 126).

Aun sin leer el texto de Jané, se puede llegar a la misma conclusión a partir de mi comentario a las PEC (9-10), citando la Wikipedia:

La dificultad aparece cuando no hay una elección natural de elementos de cada conjunto. Si no se pueden hacer elecciones explícitas, ¿cómo saber que existe el conjunto deseado?
En el enunciado de esta pregunta os digo "“Una clase es [...] todos los objetos que satisfacen una función proposicional”. Si el axioma de elección no nos permite determinar los objetos que satisfacen una clase, ¿cómo podría Russell justificarlo? Esta yo creo que es tu respuesta más desencaminada, porque dices "En este sentido parece claro que el ámbito de aplicación de este axioma son los conjuntos, y no pluralidades mal definidas." Pero aquí te estoy preguntando por las clases russellianas, que pretenden evitar las pluralidades mal definidas. Lo que dices sobre la paradoja del barbero, no sé si lo entiendo bien porque si es el único habitante del pueblo, ¿por qué no podríamos establecer que la clase de “personas que no se cortan el pelo a sí mismas” es un conjunto vacío?