Introducción a las ecuaciones diferenciales   Febrero de 2020

Alumno...

Nota.- Hacer cada problema en páginas distintas, simplificando al máximo la respuesta y remarcándola claramente (en un recuadro), Escribir también la solución (excepto las demostraciones) en los recuadros de esta hoja, que se debe entregar junto con el ejercicio.

1º) a) Resolver (expresando y como función de x) la ecuación diferencial $3xy^2y' - 2y^3 = x$. Se deben hallar todas las soluciones posibles, indicando expresamente cuáles son los máximos conjuntos abiertos en que estas funciones están definidas y además son derivables.

$$\boxed{\begin{array}{c} y = (-x)^{\frac{1}{3}}, \text{ definida y derivable en el conjunto abierto } J = \mathbb{R} - \{0\}. \\ \text{Para } A \neq 0,\ \ y = (Ax^2 - x)^{\frac{1}{3}}, \text{ definida y derivable en el conjunto abierto } J = \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{A}\}. \end{array}}$$

(Nótese que el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ es unión de dos intervalos abiertos; y si $A \neq 0$, el conjunto $\mathbb{R} - \{0, \frac{1}{A}\}$ es unión de tres intervalos abiertos).

b) Hallar un intervalo abierto I y una función dos veces derivable $y = f(x)$ definida en I verificando: 1) $y'' = 8e^y$ (en todo punto $x \in I$). / 2) $0 \in I$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$. /
3) I es el mayor intervalo abierto en el que es posible definir una función que satisfaga las condiciones anteriores.

$$\boxed{y = -2\log(1-2x), \text{ definida en el intervalo abierto } (\leftarrow, \tfrac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} / x < \tfrac{1}{2}\}.}$$

2º) Determinar, si existe, una función $y = f(x)$, definida y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$, y positiva (en todos los puntos de $\mathbb{R} - \{0\}$), con la siguiente propiedad: En cada punto de su gráfica, la tangente no es horizontal, y el área del triángulo que forma dicha tangente con los ejes de coordenadas tiene área constante igual a 2. (Se debe expresar $y = f(x)$ como función de x). (Si no existiera ninguna función así, demostrar por qué).

$$\boxed{y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ si } x > 0 \\ -\frac{1}{x}, \text{ si } x < 0 \end{cases}.} \quad (x \neq 0)$$

3º) Hallar (expresando y como función de x) la solución general de la ecuación diferencial

$y''' + y'' + 2y' + 2y = 18xe^{-x}$.

$$\boxed{y = (3x^2 + 4x + A)e^{-x} + B\cos(\sqrt{2}\,x) + C sen(\sqrt{2}\,x), \quad \text{siendo } A, B \text{ y } C \text{ constantes reales arbitrarias.}}$$

4º) Supongamos que k es un número real mayor o igual que cero, y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación verificando que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demostrar que, si $k < 1$, entonces existe un número real a, y solamente uno, tal que $f(a) = a$. (Teorema del punto fijo).

b) En el caso de que sea $k = 1$, poner un ejemplo en que la ecuación $f(x) = x$ tenga más de una solución (poner un ejemplo distinto de la identidad), otro ejemplo en que tenga solución única, y otro ejemplo en que no tenga solución. (Si alguno de los ejemplos anteriores, para $k = 1$, no pudiera darse, demostrarlo).

$$\boxed{\text{I- } f(x) = |x|. \text{ / II.- } f(x) = -x. \text{ / III.- } f(x) = x + 1.}$$

1º) a) Se considera la ecuación diferencial $3xy^2y' - 2y^3 = x$.

Si ponemos $u = y^3$, se tiene que $u' = 3y^2y'$, y la ecuación dada se convierte en $xu' - 2u = x$.

Nótese que la función constante $u = 0$ no es solución de esta ecuación.

La ecuación homogénea asociada es $xu' - 2u = 0 \Leftrightarrow xu' = 2u$.

Si la función u es distinta de cero en un punto, entonces, puesto que u es continua, también es distinta de cero en un entorno de ese punto.

Para $u \neq 0$, y $x \neq 0$, tenemos que $\frac{u'}{u} = \frac{2}{x}$.

Integrando, $\log|u| = 2\log|x| + A$, siendo A una constante; luego $|u| = e^A x^2$, con $e^A > 0$.

Así pues, $u = kx^2$, siendo k una constante, es la solución general de la ecuación homogénea. Es inmediato comprobar que en efecto es solución, para cualquier valor de la constante k.

(Nótese que, si $k = \pm e^A$, entonces $k \neq 0$; pero para $k = 0$, la función constante $u = 0$ también es solución de la ecuación homogénea).

Poniendo $u = k(x)x^2$, siendo $k(x)$ una función derivable, y sustituyendo en la ecuación $xu' - 2u = x$, obtenemos que debe ser

$x^3 k'(x) = x$, para todo $x \in I$. En consecuencia, para $x \neq 0$, $k'(x) = \frac{1}{x^2}$.

Integrando, $k(x) = -\frac{1}{x} + A$, siendo A una constante; función definida (y derivable) para $x \neq 0$.

Es inmediato comprobar que la función $u = Ax^2 - x$ es solución de la ecuación $xu' - 2u = x$.

Puesto que $u = y^3$, tenemos que $y = \sqrt[3]{Ax^2 - x} = (Ax^2 - x)^{\frac{1}{3}}$, siendo A cualquier constante real;

función definida y derivable para $Ax^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow Ax^2 \neq x \Leftrightarrow x \neq 0$ y $Ax \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ y, si $A \neq 0, x \neq \frac{1}{A}$.

Así pues, las soluciones son:

— La función $y = (-x)^{\frac{1}{3}}$, definida y derivable en el conjunto abierto $J = \mathbb{R} - \{0\}$.

— Para cualquier constante $A \neq 0$, la función $y = (Ax^2 - x)^{\frac{1}{3}}$, definida y derivable en el conjunto abierto $J = \mathbb{R} - \{0, \frac{1}{A}\}$.

(Nótese que el conjunto $\mathbb{R} - \{0\}$ es unión de dos intervalos abiertos; y si $A \neq 0$, el conjunto $\mathbb{R} - \{0, \frac{1}{A}\}$ es unión de tres intervalos abiertos).

1º) b) Poniendo $y' = p$, tenemos que $y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dy'}{dy} = p\frac{dp}{dy}$.

Así pues, $8e^y = p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{2}\frac{d(p^2)}{dy}$. Luego $\frac{d(p^2)}{dy} = 16e^y$.

Integrando con respecto a y, tenemos que $p^2 = 16e^y + K$, siendo K una constante.

Puesto que $y(0) = 0$, $p(0) = y'(0) = 4$, se tiene que $16 = 16 + K \Leftrightarrow K = 0$.

En consecuencia, $y' = p = \sqrt{16e^y} = 4e^{\frac{y}{2}}$.

Por tanto, $e^{-\frac{y}{2}}y' = 4$. Integrando con respecto a x, obtenemos que $-2e^{-\frac{y}{2}} = 4x + C$, siendo C una constante.

Ya que $y(0) = 0$, se tiene que $C = -2$.

Luego $e^{-\frac{y}{2}} = 1 - 2x$. Debe ser pues $1 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Para $x \neq \frac{1}{2}$, tenemos que $e^{\frac{y}{2}} = \frac{1}{1-2x}$. Luego $\frac{y}{2} = \log\left|\frac{1}{1-2x}\right| = -\log|1 - 2x|$.

Por consiguiente, $y = -2\log|1 - 2x|$, función definida y derivable para $x \neq \frac{1}{2}$.

Puesto que I debe ser un intervalo, con $0 \in I$, la solución es la función $y = -2\log|1 - 2x| = -2\log(1 - 2x) = -\log(1 - 2x)^2 = \log\frac{1}{(1-2x)^2}$, definida en el intervalo abierto $(\leftarrow, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R}/x < \frac{1}{2}\}$.

Es inmediato comprobar que el intervalo y la función así obtenidas cumplen las condiciones del enunciado.

2º) La ecuación de la recta tangente en un punto es $Y - y = y'(X - x)$.

Nos dicen que la tangente no es horizontal (en ningún punto), Por tanto, se tiene que, en cada punto, $y' \neq 0$, y la recta tangente corta a los ejes de coordenadas.

Dado un punto (x,y) de la gráfica, es fácil calcular el punto de corte de la tangente con el eje vertical, que es el punto $(0, y - y'x)$;

y con el eje horizontal, que es el punto $(x - \frac{y}{y'}, 0)$ (nótese que $y' \neq 0$).

El área del triángulo cuyos vértices son estos dos puntos y el origen de coordenadas $(0,0)$ viene dada por $\frac{1}{2}|y - y'x|\left|x - \frac{y}{y'}\right| = \frac{1}{2}\frac{(y-y'x)^2}{|y'|}$.

Se tiene que $\frac{1}{2}\frac{(y-y'x)^2}{|y'|} = 2 \Leftrightarrow (y - y'x)^2 = 4|y'|$.

Si $y' > 0$, entonces $(y - y'x)^2 = 4y'$. (I)

Derivando (nótese que al hacerlo podemos añadir soluciones, pues funciones distintas pueden tener la misma derivada), tenemos que

$2(y - y'x)(-y''x) = 4y'' \Leftrightarrow (y - y'x)y''x = -2y''$. (II)

Si $y'' = 0$ (en un abierto), entonces $y' = a$, $y = ax + b$. Se tiene que

$(y - y'x)^2 = 4y' \Leftrightarrow b^2 = 4a$. Y nótese que $a \neq 0$ (por la hipótesis del enunciado).

Así pues, cualquier recta de la forma $y = \frac{b^2}{4}x + b$, siendo $b \neq 0$, satisface la condición del área (como es fácil comprobar), pero no cumple que la función sea positiva en todos los puntos de $\mathbb{R} - \{0\}$; luego no es la solución que nos piden.

Nótese que, si y'' es continua, y además $y'' \neq 0$ en un punto, entonces y'' también es distinta de cero en un entorno del punto.

Para $y'' \neq 0$, de (II) se deduce que $(y - y'x)x = -2$.

Puesto que $x \neq 0$ (de acuerdo con la hipótesis del enunciado), $y - y'x = -\frac{2}{x}$. (III)

La ecuación homogénea asociada es $y - y'x = 0 \Leftrightarrow y'x = y$. Para $x \neq 0$, y ya que $y' \neq 0$, se tiene que $y \neq 0$,

$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$. Integrando, $\log|y| = \log|x| + B$, siendo B uma constante; luego $y = \pm e^B x = kx$, siendo $k = \pm e^B \neq 0$.

Poniendo $y = k(x)x$, siendo $k(x)$ una función derivable, y sustituyendo en (III), obtenemos que $-k'(x)x^2 = -\frac{2}{x} \Leftrightarrow k'(x) = \frac{2}{x^3}$.

Integrando, tenemos que $k(x) = -\frac{1}{x^2} + b$, siendo b una constante.

Por tanto, $y = -\frac{1}{x} + bx$, función definida y derivable para $x \neq 0$, con derivada $y' = \frac{1}{x^2} > 0$.

Sustituyendo en (II), tenemos que $-\frac{2}{x} = y - y'x = -\frac{2}{x} + bx \Leftrightarrow 0 = bx$, siendo $x \neq 0$. Luego debe ser $b = 0$.

Es inmediato comprobar que la función $y = -\frac{1}{x}$, definida y derivable para $x \neq 0$, satisface la ecuación (I).

Ahora bien, esta función sólo es positiva, como nos piden, para $x < 0$.

Consideremos ahora el caso en que $y' < 0$.

Se obtiene la ecuación $(y - y'x)^2 = -4y'$ (I´).

Es inmediato comprobar que una función y es solución de (I´) si, y solamente si, la función opuesta $-y$ es solución de (I). Por tanto, las soluciones de (I´) son las que ya hemos obtenido para (I), cambiadas de signo, como también puede obtenerse reiterando los cálculos.

Por tanto, serían las rectas $y = -\frac{b^2}{4}x + b$, siendo $b \neq 0$, que no cumplen la condición de ser positivas en todos los puntos de $\mathbb{R} - \{0\}$;

y las dos ramas de la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, que es positiva si y sólo si $x > 0$.

En consecuencia, la única función que cumple todas las condiciones del enunciado es

$y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ si } x > 0 \\ -\frac{1}{x}, \text{ si } x < 0 \end{cases}$. (Nótese que y está definida, y es derivable, en el conjunto abierto $\mathbb{R} - \{0\}$, tal como nos piden).

(La comprobación es inmediata).

Veamos otra forma de resolver la ecuación (I).

Suponiendo $y' > 0$, entonces

$(y - y'x)^2 = 4y' \Leftrightarrow y^2 + x^2(y')^2 - 2xyy' = 4y' \Leftrightarrow x^2(y')^2 - 2(xy+2)y' + y^2 = 0.$

Puesto que $x \neq 0$, lo anterior equivale a que

$$y' = \frac{2(xy+2) \pm \sqrt{4(x^2y^2+4+4xy) - 4x^2y^2}}{2x^2} = \frac{xy+2 \pm \sqrt{4+4xy}}{x^2} = \frac{xy+2 \pm 2\sqrt{1+xy}}{x^2}. \quad (*)$$

Para que esto tenga sentido, debe ser $1 + xy \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq -xy$.

Podemos resolver la ecuación anterior mediante un cambio de variable.

Por ejemplo, si ponemos $1 + xy = u$ (nótese que $u \geq 0$), entonces

$xy + 2 = xy + 1 + 1 = u + 1$, $y = \frac{u-1}{x}$ (nótese que $x \neq 0$),

$y' = \frac{u'x - u + 1}{x^2}$, y la ecuación (*) se convierte en

$u'x - u + 1 = u + 1 \pm 2\sqrt{u}$, que equivale a

$u'x = 2u \pm 2\sqrt{u} \Leftrightarrow u' = 2\frac{u \pm \sqrt{u}}{x}$.

Si $u \pm \sqrt{u} = 0$ en cada punto de un intervalo, entonces $u = \pm\sqrt{u}$, luego $u^2 = u \Leftrightarrow u = 0$ o $u = 1$.

Si $u = 0$ en un intervalo, entonces $y = -\frac{1}{x}$, $y' = \frac{1}{x^2} > 0$. Puesto que debe ser $y \geq 0$ según indica el enunciado, obtenemos $\boxed{y = -\frac{1}{x}, \text{ para } x < 0}$.

Si $u = 1$ en un intervalo, entonces $xy = 0$ en ese intervalo; ya que $x \neq 0$, debe ser $y = 0$ en un intervalo, luego $y' = 0$, y no se cumple que $y' \neq 0$.

Por tanto, debe ser $u \neq 1$ en algún punto, y por continuidad también será $u \neq 1$ en un entorno de ese punto.

En un intervalo abierto en el que sea $u \neq 0$, $u \neq 1$, se tiene que $u \pm \sqrt{u} \neq 0$, y en este caso tenemos que

$\frac{u'}{u \pm \sqrt{u}} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{u'}{2(u \pm \sqrt{u})} = \frac{1}{x}$.

Integrando (nótese que $\frac{1}{2}\frac{u'}{u \pm \sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}(\frac{1}{\sqrt{u} \pm 1})u'$), tenemos que $\log(\sqrt{u} \pm 1) = \log x + A$, siendo A una constante.

Luego $\sqrt{u} \pm 1 = Bx$, siendo $B = e^A > 0$. Así pues, $\sqrt{u} = Bx \pm 1$, luego $1 + xy = u = (Bx \pm 1)^2 = B^2x^2 \pm 2Bx + 1$.

Por tanto, en este caso, $y = B^2x \pm 2B$, siendo $B > 0$; o lo que es lo mismo, $y = \frac{b^2}{4}x + b$, poniendo $b = \pm\frac{B}{2} \neq 0$. Esta posible solución, que obviamente es una recta (para cualquier valor de $b \neq 0$), aunque cumple la condición del área, no cumple otra de las condiciones del enunciado, pues no es positva en todos los puntos de $\mathbb{R} - \{0\}$; y nótese que tampoco es negativa en todos esos puntos.

Análogamente se procede para $y' < 0$. Como antes, también podemos ahorrar cálculos viendo que, si y es una solución de la ecuación (I) para $y < 0$, entonces $-y$ es solución de la misma ecuación con $(-y)' > 0$. Y obtenemos así $\boxed{y = \frac{1}{x}, \text{ para } x > 0}$.

En consecuencia, obtenemos, del mismo modo que antes, que la única función que cumple todas las condiciones del enunciado es

$y = \frac{1}{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{x}, \text{ si } x > 0 \\ -\frac{1}{x}, \text{ si } x < 0 \end{cases}$. (Nótese que y está definida, y es derivable, en el conjunto abierto $\mathbb{R} - \{0\}$, tal como nos piden).

(La comprobación es inmediata).

3º) La ecuación homogénea asociada es $y''' + y'' + 2y' + 2y = 0$.

El polinomio asociado es $r^3 + r^2 + 2r + 2 = 0$, y es inmediato comprobar que una de sus raíces es $r = -1$.

Se tiene, recurriendo a la división de polinomios, que $r^3 + r^2 + 2r + 2 = (r+1)(r^2+2)$. Las raíces de $r^2 + 2$ son complejas y son $r = \sqrt{2}\, i$, $r = -\sqrt{2}\, i$.

Se sigue que la solución general de la ecuación homogénea es $y = Ae^{-x} + B\cos(\sqrt{2}\, x) + Csen(\sqrt{2}\, x)$, siendo A, B y C constantes reales arbitrarias.

(La comprobación es inmediata).

Busquemos ahora una solución particular de la ecuación completa $y''' + y'' + 2y' + 2y = 18xe^{-x}$.

Ya que $y = Ae^{-x}$ es solución de la ecuación homogénea, para cualquier número real A, teniendo en cuenta lo indicado en el libro (Tomo II, página 98, Nota 2), que por otro lado es fácil comprobar,

si ponemos $y = x(ax+b)e^{-x} = (ax^2 + bx)e^{-x}$, podemos determinar las constantes a y b para obtener una solución particular.

Se tiene que $y' = (-ax^2 + [2a-b]x + b)e^{-x}$,

$y'' = (ax^2 + [-4a+b]x + [2a-2b])e^{-x}$, $y''' = (-ax^2 + [6a-b]x + [-6a+3b])e^{-x}$.

Sustituyendo en la ecuación completa, obtenemos que

$([6a - 4a + 4a - b + b - 2b + 2b]x + [-6a + 3b + 2a - 2b + 2b])e^{-x} =$

$= (6ax + [-4a+3b])e^{-x} = 18xe^{-x}$,

igualdad que se verifica si $6a = 18$ y $-4a + 3b = 0$, lo cual equivale a que $a = 3$ y $b = \frac{4}{3}a = 4$.

Así, una solución particular de la ecuación completa es $y = (3x^2 + 4x)e^{-x}$.

(La comprobación es inmediata).

Por tanto, la solución general es la función

$y = (3x^2 + 4x)e^{-x} + Ae^{-x} + B\cos(\sqrt{2}\, x) + Csen(\sqrt{2}\, x) =$

$= (3x^2 + 4x + A)e^{-x} + B\cos(\sqrt{2}\, x) + Csen(\sqrt{2}\, x)$,

siendo A, B y C constantes reales arbitrarias.

4º) a) La demostración viene en el libro (pág. 345). La haremos aquí también.

Fijemos arbitrariamente $x_0 \in \mathbb{R}$. Ponemos $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_{n+1} = f(x_n)$.

Nótese que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, se verifica que $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \le k|x_n - x_{n-1}| \le k^n|x_1 - x_0|$,

como se prueba inmediatamente por inducción.

La sucesión de números reales así obtenida es de Cauchy. En efecto, puesto que $k \in]0,1[$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\nu \in \mathbb{N}$ tal que $k^\nu < \frac{\varepsilon}{1+|x_1-x_0|}$.

Si $m > n \ge \nu$, se verifica que $|x_m - x_n| \le |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \ldots + |x_{n+1} - x_n| \le$

$\le k^{m-1}|x_1 - x_0| + k^{m-2}|x_1 - x_0| + \ldots + k^n|x_1 - x_0| = (k^{m-1} + k^{m-2} + \ldots + k^n)|x_1 - x_0| =$

$= \frac{k^n - k^m}{1-k}|x_1 - x_0| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0| < k^n|x_1 - x_0| \leq k^\nu|x_1 - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{1+|x_1-x_0|}|x_1 - x_0| < \varepsilon.$

Por tanto, la sucesión (x_n) es convergente. Llamemos b a su límite.

Se verifica, puesto que la aplicación f es continua (como inmediatamente se comprueba, ya que es contractiva), que

$f(b) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} x_n = b.$

Así pues, existe un punto fijo, b.

Para probar la unicidad, supongamos que a y b fueran dos puntos fijos. Se tendría entonces que

$|a - b| = |f(a) - f(b)| \leq k|a - b|.$

Si fuera $a \neq b$, entonces $|a - b| > 0$, y se tendría que $1 \leq k$; lo cual es una contradicción, pues $k < 1$.

Debe ser pues $a = b$.

4º) b) Suponemos ahora que $k = 1$.

Un ejemplo (distinto de la identidad) en que la ecuación $f(x) = x$ tiene más de una solución.- $f(x) = |x|$.

Un ejemplo en que la ecuación $f(x) = x$ tiene solución única.- $f(x) = -x$.

Un ejemplo en que la ecuación $f(x) = x$ no tiene solución.- $f(x) = x + 2$.