# Tema 5: Aplicaciones lineales

#### 1. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales

**Definición 5.1.** Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo  $\mathbb{K}$ . Una aplicación  $f:V\to W$  se dice lineal si verifica:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$
  
 $f(\alpha \mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ 

**Proposición 5.1.** Si  $f: V \longrightarrow W$  es lineal, entonces,

- (I) f(0) = 0.
- (II)  $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u}).$
- (III) Si L es un subespacio vectorial,  $f(L) = \{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in L\}$  también es un subespacio vectorial.

**Proposición 5.2.** Sea L un subespacio de dimensión k y f una aplicación lineal, entonces f(L) es un subespacio de dimensión menor o igual que k.

**Teorema 5.1.** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una base de V. Sean  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$  n vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única aplicación lineal  $f: V \longrightarrow W$  tal que  $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$ ,  $1 \le i \le n$ .

### 2. Matriz de una aplicación lineal.

## 3. Operaciones entre aplicaciones lineales

**Proposición 5.3.** Si A y B son las matrices de las aplicaciones f y g en las bases B y B', respectivamente, entonces

- (I) A + B es la matriz de la aplicación f + g en las citadas bases.
- (II)  $\alpha A$  es la matriz de la aplicación  $\alpha \cdot f$  en las mismas bases.

**Proposición 5.4.** Si  $f \in \mathcal{L}(V, W), g \in \mathcal{L}(W, X), A = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(f)$  y  $B = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_X}(g)$  entonces

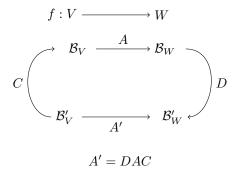
$$BA = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_X}(g \circ f).$$

Teorema 5.2. Sea f una aplicación lineal de V en W. Entonces,

- (I) La inversa de una aplicación lineal es lineal  $y(f^{-1})^{-1} = f$ .
- (II) f es invertible si y solo si es biyectiva.
- (III) Si  $f: V \to W$  es biyectiva y tiene a  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  como matriz asociada respecto de ciertas bases, entonces  $f^{-1}$  tiene como matriz asociada respecto de las mismas bases a  $A^{-1}$ .

# 4. Cambio de base en una aplicación lineal

$$C = M_{\mathcal{B}_V'}^{\mathcal{B}_V}$$
  $D = M_{\mathcal{B}_W'}^{\mathcal{B}_W'}$   $A = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(f)$   $A' = M_{\mathcal{B}_V'}^{\mathcal{B}_W'}(f)$ 



#### 5. Núcleo y rango de una aplicación lineal

**Definición 5.2.** Sea  $f: V \to W$  una aplicación. Se define el *núcleo* de f como el conjunto

$$\ker(f) = \{ \mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \}$$

Se define la imagen de f como

$$Im(f) = \{ \mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \text{ tal que } f(\mathbf{v}) = \mathbf{w} \}$$
$$= \{ f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V \} = f(V)$$

**Proposición 5.5.** Sea  $f: V \to W$  una aplicación lineal, entonces  $\ker(f)$  y  $\operatorname{Im}(f)$  son subespacios vectoriales de V y W, respectivamente.

**Proposición 5.6.** Sea  $f: V \to W$  una aplicación lineal. Entonces, f es inyectiva si y sólo si  $\ker(f) = \{0\}$ .

**Proposición 5.7.** Sea  $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  una base de V. Entonces el conjunto

$$\{f(\mathbf{e}_1),\ldots,f(\mathbf{e}_n)\}$$

es un sistema generador de Im(f).

**Teorema 5.3.** Sea  $f: V \to W$  lineal. Entonces

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Corolario 5.4. Sea  $f: V \to W$  lineal con matriz asociada A respecto de ciertas bases. Entonces,

- (I) f es inyectiva si y sólo si  $\operatorname{rango}(A) = \dim(V)$ .
- (II) f es sobreyectiva si y sólo si  $\operatorname{rango}(A) = \dim(W)$ .

**Teorema 5.5.** Sea  $f: V \to W$  lineal. Si  $\dim(V) = \dim(W)$ , son equivalentes:

- (I) f es biyectiva.
- (II) f es inyectiva.
- (III) f es sobreyectiva.
- (IV)  $\ker(f) = \{0\}.$
- (v) rango $(f) = \dim(V)$ .