**Ejercicio 7.4: Si** $A_1, A_2, \cdots, A_n$ **independientes**

**1.Demostrar:** $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$

Por las leyes de Morgan y por la independencia (de los $A_i$ o de sus contrarios $A_i^c$ ):

$$P(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 1 - P[(\cup_{i=1}^{n} A_i)^c] = 1 - P[(\cap_{i=1}^{n} A_i^c)] = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P(A_i))$$

**2. Calcular la probabilidad de que se cumplan exactamente "m" de ellos siendo $P(A_i)=p$ .**

Si se cumplen sólo los m primeros, tenemos por la independencia:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_m \cap A_{m+1}^c \cap A_{m+2}^c \cap \cdots A_n^c) = p^m (1-p)^{n-m}$$

Pero podemos elegir la posición de los "m" de $\binom{n}{m}$ maneras,

y todas las cadenas con la misma probabilidad:

$$P_{[m]} = \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m}$$

**Ejercicio 7.8.** $N$ **tiradores disponen de** $k$ **cartuchos cada uno y disparan independientemente. Las probabilidades de hacer diana son** $p_i$ **y cada uno deja de disparar cuando hace diana.**

**1. Por lo menos uno consigue diana:**

Si $D_i = \text{hacer diana el tirador i}$ hay que calcular $P(\cup_{i=1}^{N} D_i)$

Tomando complementarios $D_i^c = \text{Tirador i,falla los k tiros}$.

Entonces: $P(D_i^c) = (1 - p_i)^k$ ,por indepedencia de tiros.

$$P(\cup_{i=1}^{N} D_i) = 1 - P[(\cup_{i=1}^{N} D_i)^c] = 1 - P(\cap_{i=1}^{N} D_i^c) = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i)^k$$

Esta igualdad por independencia entre tiradores.

**2. Todos consiguen hacer diana.**

$$P(D_i) = 1 - P(D_i^c) = 1 - (1 - p_i)^k$$

$$P(\cap_{i=1}^{N} D_i) = \prod_{1=1}^{N} [1 - (1 - p_i)^k]$$

Esto también por independencia entre tiradores.

**Ejercicio 7.6. Una urna contiene $n$ bolas numeradas de $1$ a $n$. Se realizan $r$ extracciones con reposición. Halla la probabilidad de que el máximo resultado obtenido sea $k$, para $1 \leq k \leq n$. ¿Cuál es el resultado si las extracciones se realizan sin reposición?**

***1. Con reposición:***

$A_i = \{ \text{iª-extracción} \leq k \}$

Si **Máximo=M** entonces $\{M = k\} = \{M \leq k\} - \{M \leq k-1\}$ y como el segundo suceso está incluido en el primero:

$$P(\{M = k\}) = P(\{M \leq k\}) - P(\{M \leq k-1\})$$

$$\{M \leq k\} = \cap_{i=1}^{r} A_i \quad \Rightarrow \quad \text{(ind.)} \quad \Rightarrow \quad P(\{M \leq k\}) = P(\cap_{i=1}^{r} A_i) = \left(\frac{k}{n}\right)^r$$

y análogamente para $\{M \leq k-1\}$.

El resultado será $P(\{M = k\}) = \left(\frac{k}{n}\right)^r - \left(\frac{k-1}{n}\right)^r$

## 2. Sin reposición:

Al no haber independencia:

$$P(\{M \le k\}) =$$

$$= P(\cap_i A_i) = ¿P(A_1) P(A_2 | A_1) P(A_3 | A_1 A_2) \cdots P(A_r | A_1 A_2 \cdots A_{r-1}) =$$

$$= \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{k-2}{n-2} \cdots \frac{k-r+1}{n-r+1}$$

Análogamente para $P(\{M \le k-1\})$

El resultado será:

$$P(\{M = k\}) = P(\{M \le k\}) - P(\{M \le k-1\}) =$$

$$= \left( \frac{k}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \cdot \frac{k-2}{n-2} \cdots \frac{k-r+1}{n-r+1} \right) - \left( \frac{k-1}{n} \cdot \frac{k-2}{n-1} \cdot \frac{k-3}{n-2} \cdots \frac{k-r}{n-r+1} \right)$$

**Ejercicio 7.10.** Se lanza una moneda, con probabilidad p de cara, hasta que aparecen dos veces consecutivas el mismo resultado. Determinar la probabilidad de que sean necesarios k lanzamientos exactamente. $(q=1-p)$

**k=par**

$$\left.\begin{array}{ll} \underbrace{CXCXCX....CX}_{k-2}\,CC & \Rightarrow p^{k/2+1}q^{k/2-1} \\ \underbrace{XCXCXC....XC}_{k-2}\,XX & \Rightarrow p^{k/2-1}q^{k/2+1} \end{array}\right\} \Rightarrow p^{k/2-1}q^{k/2-1}\left(p^2+q^2\right)$$

**k=impar**

$$\left.\begin{array}{ll} \underbrace{CXCXCX....XC}_{k-2}\,XX & \Rightarrow p^{(k-1)/2}q^{(k-1)/2+1} \\ \underbrace{XCXCXC....CX}_{k-2}\,CC & \Rightarrow p^{(k-1)/2+1}q^{(k-1)/2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} p^{(k-1)/2}q^{(k-1)/2}(p+q)= \\ =p^{(k-1)/2}q^{(k-1)/2} \end{array}\right.$$

**Ejercicio 7.11.** Se lanza n veces una moneda con probabilidad p de cara. Probar que la probabilidad de obtener un número par de caras es $p_n = \left[1+(1-2\mathrm{p})^n\right]/2$ .

**Por inducción:**

Si n=2. $p_2 = P(XX) + P(CC) = (1-p)^2 + p^2 = [1+(1-2\mathrm{p})^2]/2$

Si se cumple para n-1, se cumple para n.

$$p_n = p_{n-1} \cdot P(X) + (1-p_{n-1}) P(C) =$$

$$= \frac{[1+(1-2\mathrm{p})^{n-1}]}{2} \cdot (1-p) + \left(1 - \frac{[1+(1-2\mathrm{p})^{n-1}]}{2}\right) \cdot p =$$

$$= \frac{[1+(1-2\mathrm{p})^{n-1}]}{2} \cdot (1-p-p) + p = \frac{[1+(1-2\mathrm{p})^{n-1}] \cdot (1-2\mathrm{p}) + 2\mathrm{p}}{2} =$$

$$= \frac{1-2\mathrm{p}+(1-2\mathrm{p})^n + 2\mathrm{p}}{2} = \frac{1+(1-2\mathrm{p})^n}{2}$$

**<u>Otro método:</u> Si el resultado no se incluye, hay que resolver la ecuación recurrente:**

--Si una ecuación recurrente es homogénea $p_n = a p_{n-1}$ la solución es fácil: $p_n = a^n p_0$

--Si no es homogénea: $p_n = a p_{n-1} + b$

1° Hallamos uns sucesión cte "k" que sea solución:

$$p_n = a p_{n-1} + b \Rightarrow k = ak + b \Rightarrow k = b/(1-a)$$

2° Restando obtenemos una ecuación homogénea

$$p_n - k = a(p_{n-1} - k) \Rightarrow p_n - k = a^n (p_0 - k)$$

**En nuestro problema:**

$$p_n = p_{n-1}(1-p) + (1-p_{n-1})p = (1-2\mathrm{p})\, p_{n-1} + p$$

La sucesión cte. solución es: $k = p/(1-1+2\mathrm{p}) = 1/2$

La solución, como $p_0 = 1$ :

$$p_n - 1/2 = (1-2\mathrm{p})^n (1-1/2) \Rightarrow p_n = 1/2\,[1 + (1-2\mathrm{p})^n]$$

**Ejercicio 7.14.**

**1. Se lanza un dado sucesivamente. Calcular la probabilidad de que aparezcan 3 cincos antes que 7 resultados pares.**

Algunos ejemplos quitando los resultados irrelevantes (que no sean ni 5 ni P):

$$\underbrace{55}5 \qquad \underbrace{P5P5PP}5 \qquad \underbrace{PPPPPP55}5$$

Nos fijamos que tiene que haber 2 cincos y k pares $(0 \le k \le 6)$ antes del tercer cinco. Fijado cada k hay que colocar los 2 cincos entre las 2+k posiciones.

Luego $P_{(3C,7P)} = \sum_{k=0}^{6} \binom{2+k}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{3}{6}\right)^k$

**2. Generalizar el resultado calculando la probabilidad de que aparezcan $i$ caras antes que $j$ cruces, al lanzar sucesivamente una moneda con probabilidad $p$ de cara.**

Antes de la cara $i$, hay $i-1$ caras y $k$ cruces (entre $0$ y $j-1$)

$$\underbrace{CC\cdots C}_{i-1}\underbrace{XX\cdots X}_{k}C$$

Fijado $k$ cruces, tenemos que colocar $i-1$ caras entre $1-i+k$ posiciones.

$$P_{(iC,\,jX)}=\sum_{k=0}^{j-1}\binom{i-1+k}{i-1}p^i(1-p)^k$$