⁕ Duración del examen: dos horas ⁕

⁕ No se permite el uso de ningún tipo de material ⁕

Ejercicio 1) (2 puntos) Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} (e^{-x}y+1)u_y + e^{-x}u_x = x \\ u(0,y) = y^2. \end{cases}$$

a) Demostrar que (P) tiene solución única.

b) Encontrar la solución de (P).

⁕

Ejercicio 2) (4 puntos) Utilizando el método de variables separadas, hallar la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{rr} + u_{\theta\theta} + u = 0, \quad 0 < r < 1,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ u(0,\theta) = \sin(2\theta),\ u \text{ acotada} \\ u(r,\frac{\pi}{2}) = u(r,\frac{3\pi}{2}) = 0 \end{cases}$$

⁕

Ejercicio 3) (4 puntos)

a) Calcular la serie de Fourier en senos

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

de la función

$$f(x) := \begin{cases} x & 0 \le 1 \le \frac{1}{2} \\ 1-x & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

definida en el intervalo $[0,1]$, y deducir el valor de $\sum_{k\ge 0} 1/(2k+1)^2$ y de $\sum_{k\ge 1} 1/k^2$.

b) ¿En qué puntos x del intervalo cerrado $[0,1]$ la serie $S(x)$ converge a $f(x)$? (Justificar la respuesta)

c) Hallar el conjunto C de los $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie $S(x)$ converge.

d) ¿En qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ la serie $S(x)$ converge uniformemente? (Justificar la respuesta)

e) Calcular $S(x)$ para $x \in C$ y, si existe, $S(\pi)$.