CAMBIO DE VARIABLE EN UNA INTEGRAL DOBLE

Integral doble en coordenadas curvilíneas.
La transformación de una integral doble haciéndola pasar de coordenadas rectangulares (x, y) a polares (u, v) ligadas con las rectangulares por las relaciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ donde las funciones $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ tienen derivadas parciales continuas en la región *D'* del plano $uO'v$ y el jacobiano de la transformación en la región *D'* no se anula.

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

Con todo ello se establece una correspondencia recíproca unívoca y continua en ambas direcciones entre los puntos de la región *D* del plano xOy y los de la región *D'* del plano $uO'v$
En este caso, la fórmula de la transformación de la integral doble tiene el aspecto:

$$\iint_D f(x, y)dx\, dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v))|J|du\, dv$$

Para el caso de coordenadas polares:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \rho} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} = \rho$$

En ese caso, si la región de integración está determinada por dos semirrectas $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ que salen del polo y por dos curvas $\rho = \rho_1(\theta),\ \rho = \rho_2(\theta)$, donde $\rho = \rho_1(\theta),\ \rho = \rho_2(\theta)$ son funciones unívocas para $\alpha \le \theta \le \beta,\ \ \rho_1(\theta) \le \rho_2(\theta)$ entonces la integral doble se calcula aplicando la fórmula:

$$\iint_D F(\rho,\theta)\rho d\rho\, d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho,\theta)\rho\, d\rho$$

donde $F(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$, además, en primer lugar se calcula $\displaystyle\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} F(\rho,\theta)\rho\, d\rho$ en la cual se considera θ constante.

Ejercicios:

1. Calcular la integral:

2.

$\displaystyle\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\ dy$ si *D* es el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \le a^2$

Solución: Haciendo $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho \operatorname{sen}\theta$, obtenemos:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\theta}\,\rho d\rho\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho^2 d\rho = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3\Big|_0^a d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi a^3}{6}$$

2. Calcular $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy$ si la región D es el cuadrado limitado por las rectas

$$x+y=1,\ x-y=1,\ x+y=3,\ x-y=-1$$

Solución:
Vamos a hacer el cambio de variable: $x+y=u,\ x-y=v$ de donde:

$$x=\frac{1}{2}(u+v) \qquad y=\frac{1}{2}(u-v)$$

Esta transformación geométricamente corresponde a:

El jacobiano de la transformación es:

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente:

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{D'} u^2v^2\,du\,dv$$

Puesto que la región *D'* limita también un cuadrado, entonces:

$$\iint_D (x+y)^3(x-y)^2\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3du\int_{-1}^1 v^2dv = \frac{1}{2}\int_1^3 u^3\left[\frac{v^3}{3}\right]_{-1}^1 du = \frac{20}{3}$$

Ejercicios propuestos:

3. $\iint_D \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)dx\,dy$ si D es el círculo $x^2+y^2\le\pi^2$

4. $\iint_D \frac{dx\,dy}{x^2+y^2+1}$ si la región D está limitada por la semicircunferencia $y=\sqrt{1-x^2}$ y el eje OX.

5. $\iint_D (x^2+y^2)dx\,dy$ si la región D está limitada por la circunferencia $x^2+y^2=2ax$

6. $\iint_D \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy$ si la región D está limitada por las líneas $x^2+y^2=\frac{\pi^2}{9}$, $x^2+y^2=\pi^2$

CÁLCULO DEL ÁREA DE UNA FIGURA PLANA

El área de una figura plana limitada por la región D se calcula por medio de la integral:

$$S=\iint_D dx\,dy$$

Si la región D está definida, por ejemplo, por las desigualdades $a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$ entonces:

$$S = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy$$

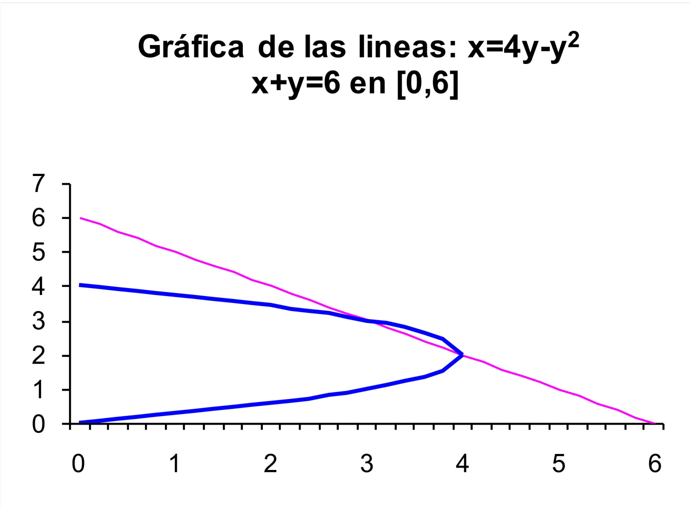
Si la región *D*, en coordenadas polares está definida por las desigualdades $\alpha \le \theta \le \beta$, $\varphi(\theta) \le \theta \le f(\theta)$, entonces:

$$S = \iint_D \rho \, d\rho \, d\theta = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi(\theta)}^{f(\theta)} \rho \, d\rho$$

7. Calcular el área de la figura plana limitada por las líneas $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$

Solución:

En primer lugar vamos a calcular las coordenadas de los puntos de intersección de las curvas dadas.



$$4y - y^2 = 6 - y \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \Rightarrow (4,2) \\ y = 3 \Rightarrow (3,3) \end{cases}$$

$$S = \iint_D dx\,dy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 [x]_{6-y}^{4y-y^2} dy = \int_2^3 (-y^2 + 5y - 6) dy = \left[-\frac{y^3}{3} + \frac{5y^2}{2} - 6y \right]_2^3 = \frac{1}{6} \mathbf{u^2}$$

Nota: De la misma forma podríamos haber resuelto la integral planteando la integral doble:

$$S = \int_3^4 dx \int_{6-x}^{2+\frac{1}{2}\sqrt{16-4x}} dy = \int_3^4 \left(\frac{1}{2}\sqrt{16-x} - 4 + x \right) dx = \left[\frac{-1}{12}(16-4x)^{3/2} - 4x + \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = \frac{1}{6} \mathbf{u^2}$$

CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UN CUERPO

El volumen de un cuerpo cilíndrico limitado de arriba por la superficie $z = f(x,y)$, de abajo por el plano $z = 0$ y de costado por la superficie cilíndrica recta que corta sobre el plano xOy la región *D* viene determinada por:

$$V = \iiint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

8. Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies $y = 1 + x^2$, $z = 3x$, $y = 5$, $z = 0$ en el primer octante.

Solución:

El cuerpo cuyo volumen queremos calcular, está limitado arriba por el plano $z = 3x$, de costado por el cilindro parabólico $y = 1 + x^2$ y el plano $y = 5$ y abajo por el plano $z = 0$. La región *D* está limitada por la parábola $y = 1 + x^2$ y las rectas $y = 5$, $x = 0$ (1[er] octante). Por consiguiente:

$$V = \iiint_D 3x\,dx\,dy = 3\int_0^2 x\,dx \int_{1+x^2}^5 dy = 3\int_0^2 [y]_{1+x^2}^5\,dx = \mathbf{12u^3}$$

9. Calcular el volumen del cuerpo limitado por las **s**uperficies:

$$z = 1 - x^2 - y^2 \quad y = x, \quad y = x\sqrt{3} \quad z = 0$$

en el primer octante.