

EXAMEN 2.

1. Dar una condición necesaria y suficiente para que una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada sea integrable Riemann. Demostrarlo.

2. $\int_0^1 (\ln(x))^4 dx$ $\ln(x) = -t$
 $x = e^{-t}$ $dx = -e^{-t} dt$

$$= \int_{\infty}^0 (-t)^4 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt = \Gamma(p) \quad p-1=4 \quad p=5$$

$$I = \Gamma(5) = 4!$$

Note: Por partes y con cuidado se puede hacer aunque es largo.

3. Sea $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

$$t = x^2$$

$$1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

$$\text{Como } \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots$$

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \dots$$

$$\text{Luego } f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

4. $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$= \arctan(x) - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = u \rightarrow du = dx \\ \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2} (1+x^2)^{-1} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{1}{2} \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+x^2)} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{2} \arctg(x)$$

$$I = \frac{1}{2} \arctg x - \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$