Geometría Básica. Junio 2015.

Duración 2 horas. **No se permite ningún tipo de material**.

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (3 puntos) Se considera un triángulo isósceles $\triangle\{M, N, O\}$ donde $MO = NO$. Sea $P \in r_{MO}$ de modo que O sea el punto medio del segmento $[P, M]$. Probar que el triángulo $\triangle\{M, N, P\}$ es rectángulo.

Ejercicio 2. (4 puntos) Recuérdese que se dice que dos figuras del plano son semejantes si existe una semejanza que transforma una en la otra.

A. Dados dos cuadriláteros (X_1, X_2, X_3, X_4) y (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) tales que $\angle X_i = \angle Y_i$, $i = 1, ..., 4$, ¿se puede asegurar que dichos cuadriláteros son semejantes?

B. Dados dos cuadriláteros (Z_1, Z_2, Z_3, Z_4) y (R_1, R_2, R_3, R_4) tales que $Z_iZ_{i+1} = R_iR_{i+1}$, $i = 1, 2, 3$ y $Z_4Z_1 = R_4R_1$, ¿se puede asegurar que dichos cuadriláteros son semejantes?

Ejercicio 3. (3 puntos) Describir todos los tipos de isometrías impares (que invierten la orientación) del espacio, indicando los conjuntos de puntos fijos y como se expresan las isometrías de cada tipo como composición de reflexiones.

SOLUCIONES:

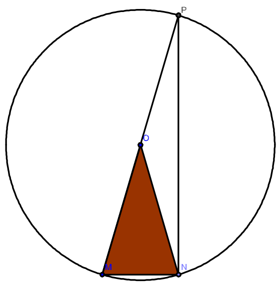
Ejercicio 1.

La solución más rápida: Se traza la circunferencia con centro en O y de radio OM. Esta circunferencia pasa por M, N y P. Además MP es un diámetro de la circunferencia por lo que el ángulo con vértice N del triángulo $\triangle\{M, N, P\}$ es recto y dicho triángulo es rectángulo.

El método más usado:

Por ser el triángulo $\triangle\{M, N, O\}$ isósceles con $OM = ON$ $\measuredangle M = \measuredangle_{\triangle\{M,N,O\}} N$ y por tanto $\measuredangle_{\triangle\{M,N,O\}} O = \pi - 2\measuredangle_{\triangle\{M,N,O\}} N$.

Por otro lado, como $OP = OM = ON$, el triángulo $\triangle\{N, P, O\}$ es también isósceles con $ON = OP$, con lo que $\measuredangle P = \measuredangle_{\triangle\{N,P,O\}} N$ y entonces $\measuredangle_{\triangle\{N,P,O\}} O = \pi - 2\measuredangle_{\triangle\{N,P,O\}} N$.



Además $\pi = \measuredangle_{\triangle\{M,N,O\}} O + \measuredangle_{\triangle\{N,P,O\}} O$, luego:

$$\pi = \pi - 2\measuredangle_{\triangle\{M,N,O\}} N + \pi - 2\measuredangle_{\triangle\{N,P,O\}} N$$

De donde:

$$\measuredangle_{\triangle\{M,N,P\}} N = \measuredangle_{\triangle\{M,N,O\}} N + \measuredangle_{\triangle\{N,P,O\}} N = \pi/2$$

Hay muchos otros modos válidos para resolver este ejercicio y descubiertos por varios compañeros. Esquemáticamente:

- El triángulo $\triangle\{M,N,P\}$ es la imagen por la homotecia de razón 2 y centro M de $\triangle\{M, \text{medio}[M,N], O\}$, luego $r_{\text{medio}[M,N],O}$ es paralela a $r_{N,P}$. Por ser $\triangle\{M,N,O\}$ isósceles $r_{\text{medio}[M,N],O} \perp r_{M,N}$, luego $r_{N,P} \perp r_{M,N}$ y $\triangle\{M,N,P\}$ es rectángulo.

- Usando la fórmula del coseno y el recíproco del teorema de Pitágoras, ...

Ejercicio 2.

Ver solución dada en el texto base.

Justificación:

A. Un cuadrado C con $X_1X_2 = X_2X_3 = X_3X_4 = X_4X_1 = 1$ y un rectángulo R tal que $Y_1Y_2 = Y_3Y_4 = 1$ y $Y_2Y_3 = Y_4Y_1 = 2$. Suponiendo que fueran semejantes por una semejanza s de razón k por un lado se tendría que $k = 1$ para que s transformara alguno de los lados de C al lado Y_1Y_2 y por otro $k = 2$ para que s transforme alguno de los lados de C al lado Y_2Y_3, lo que es absurdo.

B. Tomando un cuadrado con lados de longitud 1 y un rombo con lados de longitud 1 y dos ángulos que miden $\pi/3$ y otros dos que miden $2\pi/3$. No existe semejanza entre ellos pues las semejanzas consevan ángulos.

Ejercicio 3.

Reflexión sobre un plano

Reflexión con deslizamiento

Reflexión-rotación