Problema 2. *Sean G,H grupos abelianos finitos tales que $G\times G \simeq H\times H$. Demuestra que $G \simeq H$.*

Solución. Para demostrar esta proposición utilizaramos el teorema de estructua de grupos abelianos finitos. Sea

$$G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$$
$$H \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z}$$

la descomposición de G y H en producto directo de grupos cíclicos. Además estas descomposiciones son únicas ya que asumimos que cada m_i y n_i divide a m_{i-1} n_{i-1} respectivamente. El producto directo $G \times G$ será

$$G \times G \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m_r\mathbb{Z}$$

donde hemos utilizado la conmutatividad del producto directo. Volviendo a aplicar el teorema de estructura vemos que esta descomposición es única salvo isomorfismos, ya que cada m_i divide a m_{i-1}, y obviamente m_i divide a m_i. Aplicamos el mismo razonamiento para $H \times H$:

$$H \times H \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_s\mathbb{Z} \ ,$$

Como tenemos que $G\times G \simeq H\times H$ y utilizando el teorema de estructura que los grupos abelianos finitos concluimos que $r = s$ y $m_i = m_i$ para todo $i = 1, \ldots r$. Luego se verifica que $G \simeq H$.