Examen de Matemática Discreta

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema 1

a) Demostrar que si $d \mid m$ y si $a \equiv b \operatorname{mod}(m)$ entonces $a \equiv b \operatorname{mod}(d)$. (1,5 puntos)

b) Demostrar que $10^n + 3 \cdot 4^{n+2} + 5,$ es divisible por 9 para todo n entero

positivo. (2 puntos)

Solución

a) 1-5.11 del libro de teoría

b) Solamente tenemos que demostrar que $10^n + 3.4^{n+2} + 5 \equiv 0 \operatorname{mod}(9)$.

$10 \equiv 1 \operatorname{mod}(9) \Rightarrow 10^n \equiv 1 \operatorname{mod}(9)$

$4^3 \equiv 1 \operatorname{mod}(9), 4^4 \equiv 4 \operatorname{mod}(9), 4^5 \equiv 7 \operatorname{mod}(9), 4^6 \equiv 1 \operatorname{mod}(9), 4^7 \equiv 4 \operatorname{mod}(9), 4^8 \equiv 7 \operatorname{mod}$

Luego $3.4^n \equiv 3 \operatorname{mod}(9) \Rightarrow 3.4^{n+2} \equiv 3 \operatorname{mod}(9)$, por lo tanto

$10^n + 3.4^{n+2} + 5 \equiv (1 + 3 - 4) \operatorname{mod}(9) \equiv 0 \operatorname{mod}(9)$.

Problema 2

a) Hallar una condición necesaria y suficiente sobre r para que K_r sea bipartito. (1,5 puntos)

b) Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo que tiene al menos tres vértices. Demostrar que G tiene un vértice de grado igual o menor que cinco. (1,5 puntos).

Solución

a) El grafo K_2 es evidentemente bipartito. Consideremos K_3. Sean sus vértices v_1, v_2, v_3. Supongamos que existe una coloración $\pi \to \{0,1\}$ con $\pi(v_1) = 0$ y $\pi(v_2) = 1$ (o viceversa). Ahora bien $\pi(v_3)$ tiene que ser necesariamente 0 ó 1, y en cualquier caso se contradice con la definición de coloración con dos colores. Así pues K_3 no es bipartito.

Sea K_r con $r > 3$. Cualquier subconjunto de tres vértices de K_r forman un subgrafo isomorfo a K_3, por lo tanto K_r tampoco es bipartito. Por lo tanto el único grafo completo bipartito es K_2.

b) Sea p el número de vértices y q el número de aristas de G y supongamos que el grado de cada vértice v de G , $g(v) \geqq 6.$ Pero $2q$ es igual a la suma de los grados de los vértices de G, es decir $2q \geqq 6p.$ Por lo tanto, $q \geqq 3p > 3p - 6,$ que contradice la fórmula que relaciona vértices y aristas de los grafos planos y conexos 2-4.9 del libro $(q \leqslant 3p - 6)$.

Problema 3

a) Calcular el coeficiente del término $x_1^3 x_2^2 x_5^5$ del desarrollo de $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^{10}$. (1 punto)

b) Elija cuatro vocales incluyendo la A y ocho consonantes incluyendo la B:

i) Hallar el número m de palabras de cinco letras que contengan dos vocales diferentes y tres consonantes diferentes que pueden formarse con las letras elegidas.

ii) Calcular también cuántas palabras de cinco letras se pueden formar si éstas comienzan en la letra A y contienen la letra B, teniendo también dos vocales diferentes y tres consonantes diferentes, con las letras elegidas. (2,5 puntos)

Solución

a) Observamos primero que $x_1^3 x_2^2 x_5^5$, es igual a $x_1^3 x_2^2 x_3^0 x_4^0 x_5^5$. El coeficiente será $\binom{10}{3\,2\,0\,0\,5} = \frac{10!}{3!2!5!}$

b) Se pueden seleccionar dos vocales de entre las cuatro de $\binom{4}{2}$ formas y tres consonantes de entre las ocho de $\binom{8}{3}$ formas. Además las cinco letras se pueden colocar como una palabra de $5!$ formas. Así

$m = \binom{4}{2}\binom{8}{3}5! = 6.56.120 = 40320.$

En el segundo caso la otra vocal se puede selecionar de 3 formas, las otras dos consonantes se pueden elegir de $\binom{7}{2}$ formas. y las cuatro letras que siguen a la A se pueden colocar de $4!$ formas. Así

$m = 3\binom{7}{2}4! = 3.21.24 = 1512.$

Nota: En el apartado a) había una errata en el coeficiente, donde ponía ocho tendría que poner 10. Este apartado siempre le he corregido a favor del alumno, es decir si no ha escrito nada he ponderado la nota sobre 10, es decir la nota la he multiplicado por 10 y la he dividido por 9. Si no se ha dado cuenta y ha escrito la fórmula bien con el ocho también se la he dado por buena y si dice que es imposible porque no coinciden la suma de los coeficientes con el grado, también se la he dado por buena.