Pregunta 1 (2,5 puntos) En el espacio $\mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,2]$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a dos, se define

$$\langle P, G\rangle = \int_0^2 (2-t)P(t)G(t)\,dt\,.$$

Se pide:
a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,2]$.
b) Determine una base ortonormal, respecto de este producto interno, del subespacio $F \subset \mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,2]$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a uno.

Pregunta 2 (2 puntos)
Sea F el subespacio vectorial de $\ell^2(\mathbb{N})$ definido mediante

$$F = \Big\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\colon \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\Big\}\,.$$

Demuestre que F es denso en ℓ^2.

Pregunta 3 (3 puntos) Sea c_{00}, el subespacio vectorial de $\ell^2(\mathbb{N})$ de las sucesiones complejas que tienen sólo un número finito de términos no nulos, dotado de la norma y del producto interno de $\ell^2(\mathbb{N})$. Sea la aplicación $T\colon c_{00} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida para todo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ mediante $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(x_n/n)$

a) Demuestre que T es una forma lineal acotada tal que $\|T\| \le \big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\big)^{1/2}$.
b) Demuestre que no existe $y \in c_{00}$ tal que $T(x) = \langle x, y\rangle$ para todo $x \in c_{00}$.
c) ¿Contradice el apartado anterior el teorema de representación de Riesz?

Pregunta 4 (2,5 puntos) Sabiendo que

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$$

es el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(x) = |\cos x|$ en $L^2[0,\pi]$, determine el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}\,.$$