Pregunta 1 (Valor: 1.5 la resolución correcta y 1 la presentación ordenada)

Enuncie y demuestre la conocida expresión de integración por partes.
Solución: Ver Vol 1 p.403 del texto base.

Pregunta 2 (Valor: 1.5 la resolución correcta y 0.5 la presentación ordenada)

Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale que $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{2n}$. Determine:

1. El conjunto de $\mathbb{R}$ para el cual existe la función f límite puntual de dicha sucesión de funciones.
2. El conjunto de $\mathbb{R}$ para el cual existe la función $F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$.

Solución:
Dado que

$$\begin{cases} \text{Si } |x|>1 & x^{2n} = (x^2)^n \to \infty \\ \text{Si } |x|=1 & x^{2n} = (x^2)^n \to 1 \\ \text{Si } |x|<1 & x^{2n} = (x^2)^n \to 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \text{Si } |x|>1 & \dfrac{x^{2n}}{2n} \to \infty \\ \text{Si } |x|=1 & \dfrac{x^{2n}}{2n} \to 0 \\ \text{Si } |x|<1 & \dfrac{x^{2n}}{2n} \to 0 \end{cases}$$

La función límite puntual está definida en el intervalo $[1,1]$ y su valor es $f(x) = 0$.

Si se considera una serie de potencias de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \qquad \text{siendo } a_k = \frac{1}{k} \text{ si } k = 2n \text{ y } a_k = 0 \text{ si } k = 2n+1; \quad n \in \mathbb{N}$$

Como

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \ ,$$

el radio de convergencia es 1.

Sin embargo, para $x = 1$ y $x = -1$ se obtiene la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$, que diverge.

La función F sólo está definida en el intervalo $(-1,1)$.

Pregunta 3 (Valor: 2 la resolución correcta y 1 la presentación ordenada)

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{\log(1/x)} & x \in (0,1]. \\ \dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}} & x \in (1,\infty). \end{cases}$$

Estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int_{0+}^{+\infty} f(x)dx$$

Calcule su valor en el caso de que sea una integral impropia convergente.

Solución:
Por la definición de la función f se tiene que

$$\int_{0+}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0+}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx$$

Para el estudio del primer sumando se aplica el cambio de variable $u = \log(1/x)$ se obtiene

$$\int_{0+}^{1} f(x)dx = \int_{0+}^{1} \sqrt[4]{\log(1/x)}dx = \int_{+\infty}^{0} -u^{1/4}e^{-u}du = \int_{0}^{+\infty} u^{1/4}e^{-u}du = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right).$$

Para el estudio del segundo sumando se aplica que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{x\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{x^2}} = 1 \neq 0$$

y que la integral $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ converge. Del segundo criterio de comparación se deduce que la integral $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$ converge. Así pues la integral $\displaystyle\int_{0+}^{+\infty} f(x)dx$ es convergente.

Para determinar el valor de esta integral tan sólo queda determinar el valor de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$.
Al realizar el cambio de variable $x = \operatorname{tg} x$ se tiene que ($x = 1 \iff y = \pi/4$ y $x \to \infty \iff y \to \pi/2$)

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2-} \frac{1}{\operatorname{tg} y\ \sqrt{\operatorname{tg}^2 y+1}\ \cos^2 y}dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2-} \frac{1}{\operatorname{sen} y}dy = \int_{\pi/4}^{\pi/2-} \frac{\operatorname{sen}^2(y/2)+\cos^2(y/2)}{2\operatorname{sen}(y/2)\cos(y/2)}dy =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2-} \frac{\operatorname{sen}(y/2)+}{2\cos(y/2)}dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2-} \frac{\cos(y/2)}{2\operatorname{sen}(y/2)}dy = \Big[\log|\cos(y/2)| - \log|\operatorname{sen}(y/2)|\Big]_{\pi/4}^{\pi/2-} = \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Así pues,

$$\int_{0+}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0+}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{+\infty} f(x)dx = \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) + \log\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}.$$

Pregunta 4 (Valor: 1.5 la resolución correcta y 1 la presentación ordenada)

SOBRE ESTE PROBLEMA HAY QUE HECER UNAS SERIE DE CONSIDERACIONES A LA HORA EVALUAR LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

1º El enunciado decía: Determine una función continua f definida en el intervalo $[-2, 2]$ de la que se sabe su función derivada es la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{x^3-2x^2+3x-3} & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2\log(x) & \text{si } \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Debería decir:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+x+1-1}{x^3-3x^2+4x-12} & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ x^2\log(x) & \text{si } \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

Solución: **De lo que debería decir y que se entienda la resolución**
La expresión de de g: la función racional en el intervalo $[-2, 1]$ se puede escribir de la forma

$$\frac{2x^2+x+1-1}{x^3-3x^2+4x-12} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x^2+4} \longrightarrow A = 1, B = 0, C = 1.$$

puesto que

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 12 = (x-3)(x^2+4) \longrightarrow \frac{2x^2-1}{x^3-2x^2+3x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4},$$

f es una función continua en el intervalo $[-2,1]$, al ser suma de dos funciones continuas en ese intervalo, puesto que no se anula ningún denominador.

La función g es una función continua en el intervalo $(1,2]$ por ser producto de dos funciones continuas en ese intervalo. Así pues la función g es una función integrable en $[-2,2]$.

Así pues, la función f puede ser expresada de la forma:

$$f(x) = \int_{-2}^{1} g(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{2t^2+t+1-1}{t^3-3t^2+4t-12}dt & \text{si } x \in [-2,1]. \\ \displaystyle\int_{-2}^{1} \frac{2t^2+t+1-1}{t^3-3t^2+4t-12}dt + \int_{1}^{x} t^2 \log t \; dt & \text{si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Por una parte se tiene

$$\int \frac{2t^2-1}{t^3-2t^2+3t-3}dt = \int \frac{1}{t-3}dt + \int \frac{1}{t^2+4}dt = \log|t-3| + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}.$$

Por otra, si se opta por aplicar la integración por partes ($\int UdV = UV - \int VdU$) utilizando $U = \log t$ y $dV = t^2$, se tiene:

$$V = \frac{1}{3}t^3, \quad dU = \frac{1}{t}dt, \quad \int t^2 \log t \; dt = \frac{1}{3}t^3 \log t - \int \frac{1}{3}t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 \log t - \frac{1}{9}t^3.$$

Además,

$$\int_{-2}^{1} \frac{2t^2+t+1-1}{t^3-3t^2+4t-12}dt = \left[\log|t-3| + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2}\right]_{-2}^{1} = \log\frac{2}{5} - \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\arg\frac{1}{2}.$$

Así pues

$$f(x) = \begin{cases} \log|x-3| + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2} - \log 5 - \frac{3}{8}\pi + K & \text{si } x \in [-2,1]. \\ \frac{1}{3}x^3 \log t - \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{9} + \log\frac{2}{5} - \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2}\arg\frac{1}{2} + K & \text{si } x \in (1,2]. \end{cases} \quad \forall K \in \mathbb{R}.$$

Solución: **Consideraciones al problema que se presentó en el enunciado**
El polinomio x^3-2x^2+3x-3 no tiene raíces racionales. Al menos tiene una raíz real, pero es irracional. Los métodos de aproximación de raíces no nos sirven, pues no se podrá factorial el polinomio, por lo cual se deben utilizar la técnica de Cardano para resolver la ecuación

$$x^3-2x^2+3x-3=0.$$

En el proceso, resulta que el discriminate es positivo, por lo que esa ecuación tiene una única raíz real de expresión

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{29}}{6} + \frac{43}{54}} - \frac{5}{9\sqrt[3]{\frac{\sqrt{29}}{6} + \frac{43}{54}}} + \frac{2}{3}.$$

Es imaginable que el polinomio se descompone en un producto de un factor lineal y otro cuadrático, ahora bien, trabajar con ese número es desalentador. Como puede enterdense la descomposición en factores simples es bastante compleja para un problema de examen.

Una vez superado esa descomposición el resto es como se sigue en la anterior solución.

Solución: **Indicación de la corrección de este ejercicio para evaluar**
Se valorará las razones que expongan los estudiantes sobre esa integral racional (hasta un 0.5). En este problema se valorará sólo la segunda integral por partes con una valoración de hasta 1.5 por resolución y hasta 0.5 por exposición y presentación ordenada.