Problema 2. *Sean A y G grupos, A abeliano. Denotamos* $\hom(G, A)$ *a la familia de todos los homomorfismos GA.*

1. *Comprobar que* $\hom(G, A)$ *es un grupo con la operación* $(f, g) \longrightarrow fg$*, donde* $(fg)(x) = f(x)g(x)$ *para cada* $x \in G$

2. *Demostrar que* $\hom(Z, A)$ *es isomorfo a* A.

Solución. Veamos que $\hom(G, A)$ es grupo con la operación $(fg)(x) = f(x)(y)$.

1. Asociatividad. Sea $f, g, h \in \hom(G, A)$, entonces
$$((fg)h)(x) = (fg)(x)\ h(x) = f(x)\ g(x)\ h(x) = f(x)\ (gh)(x) = (f(gh))(x)$$
para todo $x \in G$

2. Elemento neutro. La aplicación que asocia a cada elemento la identidad en A, es el elemento neutro.:
$$(f1)(x) = f(x)\ 1(x) = f(x)\ 1_A = f(x)$$
Obviamente la aplicación $1(x) = 1_A$ es homomorfismo.

3. Elemento inverso. Para todo $f \in \hom(G, A)$ la aplicación $f'(x) = f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ es la inversa de f:
$$(ff') = f(x)\ f'(x) = f(x)\ f(x)^{-1} = 1_A = 1(x)\ .$$

Ahora demostraremos que $\hom(Z, A)$ es isomorfo a A. Sea $f \in \hom(Z, A)$, Definimos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \hom(Z, A) & \longrightarrow & A \\ & f & \mapsto & f(1)\ . \end{array}$$

Es homomorfismo con respecto a la operación de $\hom(Z, A)$ definida anteriormente:

$$\phi(fg) = (fg)(1) = f(1)\ g(1) = \phi(f)\ \phi(g)\ .$$

Calculamos su núcleo. Sea $f \in \hom(Z, A)$ tal que

$$\phi(f) = f(1) = 1_A\ .$$

Como tenemos que $Z = \langle 1 \rangle$, entonces

$$f(n) = f(n1) = f(1)^n = 1_A\ ,$$

para todo $n \in Z$. Luego $f = 1$ y por tanto $\ker \phi = \{1\}$ lo que implica que ϕ es inyectiva. Además ϕ es sobreyectiva, ya que para todo $a \in A$ tenemos que el homomorfismo f definido por

$$f(n) = a^n\ ,$$

verifica que $\phi(f) = f(1) = a^1 = a$. Para completar la demostración sólo nos falta ver que f es de hecho un homomorfismo:

$$f(n + m) = a^{n+m} = a^n\ a^m = f(n)\ f(m)\ .$$

Concluimos que ϕ es un isomorfismo entre $\hom(Z, A)$ y A.