1.4.2

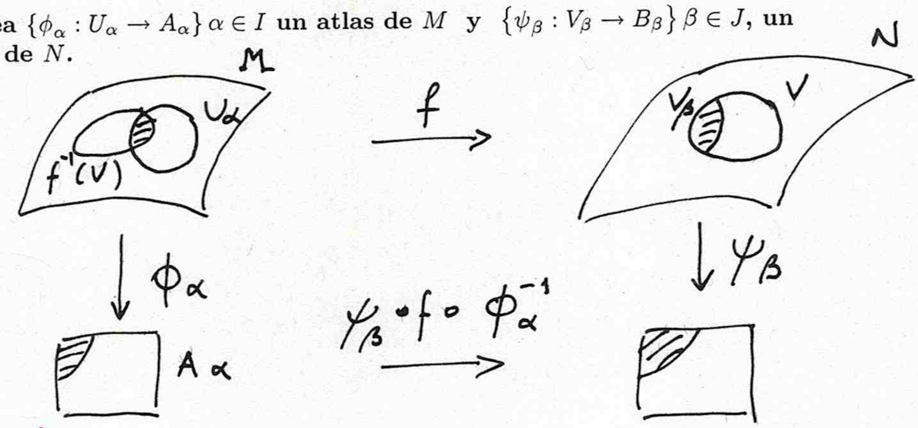
Sean M y N dos variedades diferenciables y
$f : M \to N$ una aplicación diferenciable. Entonces f es contínua.

R: (una de las maneras de resolver)

Hay que demostrar que cualquier que sea el abierto V de N, se tiene que $f^{-1}(V)$ (imagen recíproca de V por f) es un abierto de M.

Notese que se dice " $f^{-1}(V)$ es la imagen recíproca de V por f " y no por f^{-1} visto que *por definición,* $f^{-1}(V) = \{x \in M : f(x) \in V\}$*;*
de hecho, ni siquiera se sabe si existe la función f^{-1}.

Sea $\{\phi_\alpha : U_\alpha \to A_\alpha\}\ \alpha \in I$ **un atlas de** M **y** $\{\psi_\beta : V_\beta \to B_\beta\}\ \beta \in J$**, un atlas de** N**.**



Consideremos los α de I tal que $f^{-1}(V) \cap U_\alpha \neq \varnothing$

Ahora bien, cada $\phi_\alpha\left[(U_\alpha \cap f^{-1}(V)\right]$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$ por definición de diferenciabilidade de f.

(Pues es el dominio de $\psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$ para cada tal β que $V \cap V_\beta \neq \varnothing$; ver la segunda, pero equivalente, definición).

Por lo tanto

$U_\alpha \cap f^{-1}(V) = \phi_\alpha^{-1}\left\{\phi_\alpha\left[(U_\alpha \cap f^{-1}(V)\right]\right\}$ **es un abierto de M por definición de topología de M** (pues es la imagen recíproca, por ϕ_α, de $\phi_\alpha\left[(U_\alpha \cap f^{-1}(V)\right]$ de $\mathbb{R}^n$).

Como $f^{-1}(V) = \cup_{\alpha \in I}(U_\alpha \cap f^{-1}(V))$ resulta que es también un abierto de M.

Notese que un abierto de N es la imagen recíproca, por una carta de N, de un abierto de N
(o la unión de tales imágenes recíprocas: $V = \cup_{\beta \in J}\psi_\beta^{-1}(V \cap B_\beta)$).