Pregunta 1 (3 puntos)
Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo tal que $N \geq 2$. Sea $F_N = \left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \colon \sum_{n=1}^{N} x_n = 0\right\}$.

a) Demuestre que F_N es un subespacio vectorial cerrado de $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) Demuestre que $F_N^{\perp} = \left\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N}) \colon x_1 = x_2 = \cdots = x_N \text{ y } x_n = 0 \text{ si } n > N\right\}$.

c) Sea $\mathbf{e}_1 = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = 1$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 2$. Calcule la distancia de $\mathbf{e}_1$ a F_N.

Pregunta 2 (2 puntos) Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ un sistema de $\mathcal{H}$ tal que

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots, N\},\ \|x_i\| \geq 1 \quad \text{y} \quad \forall x \in \mathcal{H}\ ,\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|\langle x, x_i\rangle\right|^2.$$

Demuestre que $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Sea la aplicación:

$$\begin{aligned} T\colon \quad & \ell^2(\mathbb{N}) && \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} && \longmapsto T(x) = \{\alpha_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

a) Demuestre que el operador lineal T es acotado si y sólo si la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Determine en ese caso la norma de T.

b) Supongamos que $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. ¿Qué debe cumplir $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para que T sea un operador autoadjunto?

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sabiendo que la transformada de Fourier de la función $g(t) = e^{-|t|}$ es $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{1}{1+\omega^2}$ se pide:

a) La transformada de Fourier de $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

b) La transformada de Fourier de $h(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$.
Indicación: calcule previamente una primitiva de h.

c) La transformada de Fourier de $k(t) = \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$.

d) La transformada de Fourier de $f^2(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$.
Indicación: exprese f^2 en función f y k.