Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2 puntos)(0,75+0,75+0,5)
Se definen las aplicaciones f y g mediante:

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N} \\ (n,m) &\longmapsto f(n,m) = mn \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g: \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ n &\longmapsto g(n) = \big(n, (n+1)^2\big) \end{aligned}$$

a) Determine razonadamente si f es inyectiva o sobreyectiva.

b) Determine razonadamente si g es inyectiva o sobreyectiva.

c) Determine $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución: a) f no es inyectiva pues por ejemplo, $f(1,6) = f(2,3) = 6$ y sin embargo $(1,6) \neq (2,3)$.
f es sobreyectiva pues para todo $p \in \mathbb{N}$ existe $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tal que $f(n,m) = p$. Basta tomar $(n,m) = (p,1)$.

b) g es inyectiva pues si $g(n) = g(n')$ entonces $\big(n, (n+1)^2\big) = \big(n', (n'+1)^2\big)$ y por tanto, $n = n'$.
g no es sobreyectiva, por ejemplo, para $(1,2) \in \mathbb{N}^2$ no existe ningún n tal que $g(n) = (1,2)$ pues de $\big(n, (n+1)^2\big) = (1,2)$ se obtiene $n = 1$ y $4 = 2$.

c)

$$\begin{aligned} f \circ g: \quad \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto f(g(n)) = f\big(n, (n+1)^2\big) = n(n+1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \circ f: \quad \mathbb{N}^2 &\longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ (n,m) &\longmapsto g(f(n,m)) = g(mn) = \big(mn, (mn+1)^2\big) \end{aligned}$$

Pregunta 2 (3 puntos)
Se define en $\mathbb{N}^*$ la relación $\ll$ dada por:

$$a \ll b \quad \text{si y sólo si} \quad \text{existe } \ n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } b = a^n$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}^*$.

b) Si $A = \{2, 4, 8\}$, estudie la existencia, y en su caso explicítelos, de cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales del conjunto A.

Solución: a) Veamos que $\ll$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}^*$.

Es reflexiva pues $a \ll a$ para todo $a \in \mathbb{N}^*$. Basta tomar $n = 1$.

Es antisimétrica: sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ tales que $a \ll b$ y $b \ll a$. Existen $n, m \in \mathbb{N}^*$ tales que $b = a^n$ y $a = b^m$. Por tanto, $a = b^m = (a^n)^m = a^{nm}$ y en consecuencia, $a = 1$ o $nm = 1$. Si $nm = 1$ entonces $n = m = 1$ (pues $n, m \in \mathbb{N}^*$) y por tanto $a = b$. Si $a = 1$ entonces $b = 1^n = 1$, y también, se deduce que $a = b$.

Es transitiva: sean $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ tales que $a \ll b$ y $b \ll c$. Existen $n, m \in \mathbb{N}^*$ tales que $b = a^n$ y $c = b^m$. En consecuencia, $c = b^m = (a^n)^m = a^{nm}$. Por tanto, $a \ll c$.

Es orden parcial. Por ejemplo, no se cumple que $2 \ll 3$ y tampoco $3 \ll 2$. Veamos que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

b) Observemos que $A = \{2, 2^2, 2^3\}$. Las cotas superiores de un elemento a son todos los elementos de la forma a^n con $n \in \mathbb{N}^*$, por tanto, las cotas superiores de A es el conjunto de las cotas superiores comunes a todos los elementos de A, es decir a la intersección de los conjuntos $\{2^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{2^{2n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\{2^{3n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Se obtiene que el conjunto de cotas superiores de A es $\{2^{6n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. El supremo de A es la menor (para el orden $\ll$) de las cotas superiores que en este caso es 2^6. El conjunto A no tiene máximo pues el supremo de A no es un elemento de A. En A, tanto 4 como 8 son elementos maximales de A pues no existen elementos en A, p y q , tales que $4 \ll p$ y $p \neq 4$ o $8 \ll q$ y $q \neq 8$.

Las cotas inferiores de A se limitan al conjunto unitario $\{2\}$. En este caso como $2 \in A$, resulta que $2 = \inf(A) = \min(A)$ y además 2 es el único elemento minimal.

Pregunta 3 (2 puntos)

Se define por recurrencia la sucesión u_n mediante: $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ se cumple:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$$

Solución: i) Las desigualdades $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$ son ciertas para $n = 1$ pues $u_1 = \sqrt{\dfrac{1+u_0}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y por tanto $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_1 \leq 1$.

ii) Supongamos que las desigualdades $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq u_n \leq 1$ son ciertas para n. Teniendo en cuenta la expresión de $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ y las desigualdades anteriores se tiene que

$$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \leq \frac{1+u_n}{2} \leq \frac{1+1}{2} = 1\,.$$

Aplicando por un lado que $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$ si $0 \leq a \leq b$ y por otro lado que $0 \leq \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$ se obtiene

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+1}{2}} = 1\,.$$

En consecuencia, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq u_{n+1} \leq 1\,.$

Pregunta 4 (3 puntos)

Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la aplicación definida mediante $f(z) = z^3 - 2z^2 + 16$. Se pide:

a) Calcule $f(-2)$, deduzca una factorización de $f(z)$ y resuelva la ecuación $f(z) = 0$.

b) Sean los números complejos $z_0 = -2$, $z_1 = 2(1+i)$ y $z_2 = 2(1-i)$.

Calcule el módulo y el argumento de los números z_0, z_1, z_2 y $\omega = \dfrac{z_0\, z_1^2}{z_2^3}$.

c) Represente en el plano complejo los puntos M_0, M_1 y M_2 cuyos afijos son respectivamente z_0, z_1 y z_2. Demuestre que el triángulo de vértices M_0, M_1 y M_2 es isósceles pero no es equilátero.

Solución: a) $f(-2) = -8 - 8 + 16 = 0$ y por tanto $z + 2$, es un factor de $f(z)$, es decir

$$f(z) = (z+2)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

Desarrollando se obtiene $z^3 - 2z^2 + 16 = z^3 + (\alpha+2)z^2 + (\beta + 2\alpha)z + 2\beta$. Igualando coeficientes de los términos de mismo grado resulta, $\alpha = -4$ y $\beta = 8$. Por tanto:

$$f(z) = (z+2)(z^2 - 4z + 8)$$

Resolvemos la ecuación $z^2 - 4z + 8 = 0$. El discriminante de la ecuación es $\Delta = 16 - 32 = -16$. En consecuencia, las soluciones son:

$$z_1 = \frac{4+4i}{2} = 2 + 2i \quad \text{y} \quad z_2 = \frac{4-4i}{2} = 2 - 2i$$

Por tanto las soluciones de la ecuación son $z_0 = -2$, $z_1 = 2(1+i)$ y $z_2 = 2(1-i)$.

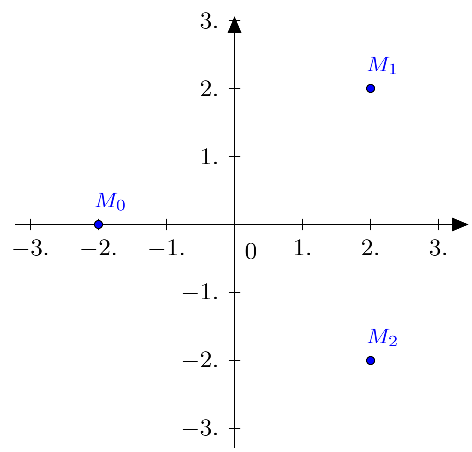
b) Por un lado, $z_0 = -2 = 2_\pi$. A su vez $|z_1| = |z_2| = \sqrt{2+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y por tanto

$$\begin{aligned} z_1 &= 2(1+i) = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = (2\sqrt{2})_{\pi/4} \\ z_2 &= 2(1-i) = 2\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = (2\sqrt{2})_{7\pi/4} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} |\omega| &= \frac{|z_0|\,|z_1|^2}{|z_2|^3} = \frac{2\cdot 8}{8\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg\,\omega &= \arg\,z_0 + 2\arg\,z_1 - 3\arg\,z_2 = \pi + 2\pi/4 + 3\pi/4 = 9\pi/4 = \pi/4\,[\text{ mód } 2\pi] \end{aligned}$$

c)



Calculamos la longitud de los lados del triángulo:
Longitud del lado M_0M_1; $|z_1 - z_0| = |4 + 2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.
Longitud del lado M_0M_2; $|z_2 - z_0| = |4 - 2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$.
Longitud del lado M_1M_2; $|z_2 - z_1| = |-4i| = \sqrt{16} = 4$
Por tanto, el triángulo de vértices M_0, M_1 y M_2 es isósceles pero no es equilátero.