Propuesta modelo examen curso 2020/21.
Tutoría Noubarris

@Sitokyoku

22 de diciembre de 2020

Resolver esta propuesta de modelo de examen en un tiempo de 90 minutos. Cada respuesta acertada son 1,25 puntos, las erróneas penalizan -0,6 puntos i las en blanco son 0 puntos.

Pregunta 1: Sea $M = \mathfrak{M}_{ij}$ la matriz de adyacencia de un grafo G con 10 vértices. Supongamos que $\mathfrak{M}_{ij} = 0$ *si* $i \leq 5$ *y* $j > 5$, o bien $i > 5$ y $j \leq 5$. Entonces:

$\boxed{\text{A}}$ G no es conexo.

$\boxed{\text{B}}$ G no puede ser plano.

$\boxed{\text{C}}$ G es un grafo bipartito.

La matriz de adyacencia es:

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,5} & 0 & \dots & 0 \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ m_{5,1} & \dots & m_{5,5} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & m_{6,6} & \dots & m_{6,10} \\ . & \dots & . & . & \dots & . \\ 0 & \dots & 0 & m_{10,6} & \dots & m_{10,10} \end{pmatrix}.$$

Matriz de adyacencia de M.

Observamos que los vértices quedan repartidos en dos conjuntos $\{v_1, \dots, v_5\}$ y $\{v_6, \dots, v_{10}\}$ y que no tienen ninguna arista entre uno de los vértices de un conjunto con los del otro. Por tanto el grafo G no puede ser conexo.

De aquí no podemos deducir que G sea bipartito o no sea plano porque dependerá de los $\mathfrak{m}_{ij}$ sobre los que no sabemos nada.

Por tanto sólo podemos afirmar que el grafo G no es conexo y la respuesta correcta es la **A**.

■

Pregunta 2: ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es cierta?

$\boxed{\text{A}}$ Si n es un número natural impar entonces $8|(n^2-1)$.

$\boxed{\text{B}}$ Si a y b son números naturales impares entonces $2|(a^2+b^2)$, pero $4 \nmid (a^2+b^2)$.

$\boxed{\text{C}}$ Si a y b son números naturales impares entonces $8|(a^2+b^2)$.

Si $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N} + \{0\}$, entonces:

$n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \cdot 2k' = 8k'$ que es múltiplo de 8.

La opción A es **correcta**.

Sea $a = 2t+1$ y $b = 2s+1$, entonces operando de igual manera:

$a^2 + b^2 = 4t(t+1) + 4s(s+1) + 2 = 2[2t(t+1) + 2s(s+1) + 1] = 2m, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2|(a^2+b^2)$.

$a^2 + b^2 = 4t(t+1) + 4s(s+1) + 2 = 4[t(t+1) + s(s+1)] + 2 = 4m' + 2,\ m' \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4 \nmid (a^2+b^2)$.

La opción B es **correcta**.

$a^2 + b^2 = 4t(t+1) + 4s(s+1) + 2 = 4 \cdot 2t' + 4 \cdot 2s' + 2 = 8m + 2, \quad m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 8 \nmid (a^2+b^2)$.

La opción C es **falsa**.

■

Pregunta 3: Sea $mcd(n,5) = 1$. El resto de la división $2141^{4n+1} - n^{120} - 223$ entre 5 es:

A 2.

B 3.

C 4.

Estudiemos cada sumando de la expresión módulo 5:

$$2141^{4n+1} - n^{120} - 223 \text{ mód } 5$$

- $2141 = 2140 + 1 \equiv 0 + 1 \text{ mód } 5 \equiv 1 \text{ mód } 5$

Luego:

$2141^{4n+1} \equiv 1^{4n+1} \text{ mód } 5 \equiv 1 \text{ mód } 5$

- $n^{120} = n^{4\times 30} = (n^4)^{30}$

Como $mcd(n,5) = 1$, podemos aplicar el pequeño teorema de Fermat:

$(n^4)^{30} \equiv 1^{30} \text{ mód } 5 \equiv 1 \text{ mód } 5$

- $223 = 220 + 3 \equiv 3 \text{ mód } 5$

Por tanto:

$2141^{4n+1} - n^{120} - 223 \text{ mód } 5 \equiv 1 - 1 - 3 \text{ mód } 5 \equiv (-3) \text{ mód } 5 \equiv 2 \text{ mód } 5$

La respuesta es **A**.

■

Pregunta 4: Una persona va a un supermercado y compra un total de 20 botellas de vino blanco y de vino tinto por 225 euros. El precio de cada botella es un número entero de euros. La botella de vino tinto vale 3 euros más que la botella de vino blanco. Denotamos por x la cantidad de vino tinto. Entonces:

A $1 \leq x \leq 7$.

B $8 \leq x \leq 14$.

C $15 \leq x \leq 20$.

Sea a el precio de cada botella de vino tinto. Planteamos la ecuación diofántica

$$ax + (a-3)(20-x) = 225$$

Resolviendo la ecuación:

$$3x + 20a = 285 \Rightarrow \begin{cases} a = 3t & t \in \mathbb{Z} \\ x = 95 - 20t & t \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Aplicando la condición de no negatividad, $a, x > 0$, solo nos queda una solución posible:

$(a, x) = (12, 15)$

Por tanto la respuesta correcta es la **C**.

■

Pregunta 5: Sea G un grafo n-regular y con $n+1$ vértices. Sea K_{n+1} el grafo completo de $n+1$ vértices. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?

A El grafo G es isomorfo a K_{n+1}.

B Si n es par, G no es isomorfo a K_{n+1}.

C Para algunos n el grafo no puede ser isomorfo a K_{n+1}.

Como el grafo es n-regular, cada vértice está unido por una arista con los otros n vértices. Puesto que el grafo tiene $n+1$ vértices, implica que cada vértice está unido a todos los demás. Así pues, el grafo es isomorfo a k_{n+1} y la respuesta correcta es la opción **A**.

■

Pregunta 6: Sea p un número primo impar. El resto de dividir $(p-2)!$ entre p es:

$\boxed{\text{A}}$ 1.

$\boxed{\text{B}}$ $p-1$.

$\boxed{\text{C}}$ Con los datos facilitados no se puede saber.

Sabemos por el teorema de Wilson que:

$(p-1)! \equiv -1 \text{ mód } p$

Luego:

$(p-2)! = (p-1)(p-2)! \equiv -1 \text{ mód } p \Rightarrow (-1)(p-2)! \equiv -1 \text{ mód } p \Rightarrow (p-2)! \equiv 1 \text{ mód } p$

La respuesta correcta es la **A**.

■

Pregunta 7: Sea $n \in \mathbb{N}$. Consideremos las afirmaciones:

1) Si $n \neq 1, 3$, entonces es posible expresar n como una suma de doses y de cincos. (Ejemplo: $9 = 2 + 2 + 5$).

2) Si $n \geq 14$, entonces es posible expresar n como suma de treses y de ochos.

3) Si $n \geq 11$, entonces $n + 2 < \dfrac{n^2 - n}{2}$.

Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

$\boxed{\text{A}}$ Una afirmación.

$\boxed{\text{B}}$ Dos afirmaciones.

$\boxed{\text{C}}$ Las tres afirmaciones.

1) Diferenciamos dos casos:

• Si n es par, $n = 2k$, es evidente que puede expresarse como suma de k doses:

$n = 2k = 2 + 2 + \overset{k}{\ldots} + 2$

- Si $n \neq 1, 3$ y $n = 2k+1$ impar, entonces podemos escribirlo como:

$n = 2k+1 = 2+2+ \overset{k-2}{\cdots} +2 + (2+2+1) = 2(k-2)+5$

Obsérvese que en este caso, los valores de n sobre los cuales no es posible aplicar este argumento están excluidos y por tanto esta afirmación es **cierta**.

2) Podemos escribir todo número natural n en la forma $n = 3k + r$, con $r = \{0, 1, 2\}$:

- Si $r = 0 \Rightarrow n = 3k = 3+3+ \overset{k}{\ldots} +3$ Suma de k treses, OK.

- Si $r = 1 \Rightarrow n = 3k = 3(k-5) + 5 \cdot 3 + 1 = 3(k-5) + 2 \cdot 8; \quad k = 8t+5,\ t \in \mathbb{Z}$ OK.

- Si $r = 2 \Rightarrow n = 3k = 3(k-2) + 3 + 3 + 2 = 3(k-2) + 1 \cdot 8; \quad k = 8t+2,\ t \in \mathbb{Z}$ OK.

Nuevamente, los casos en los que está transformación no es posible están excluidos, luego esta afirmación también es **cierta**.

3) La desigualdad del enunciado es equivalente a:

$$n + 2 < \frac{n^2 - n}{2} \Rightarrow 2n + 4 < n^2 - n \Rightarrow n^2 - 3n - 4 > 0 \Rightarrow (n+1)(n-4) > 0$$

Que se satisface $\forall n > 4,\ n \in \mathbb{N}$, luego también es **cierta** esta afirmación.

Por tanto la respuesta correcta es la opción **C**.

■

Pregunta 8: Dadas las cifras 1, 3, 6 y 9. ¿Cuántos números de 4 cifras en los que entren estas cifras no son palíndromos?

A 16.

B 240.

C Ninguna es cierta.

Casos totales: $\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4}\ \underline{4} = 4^4 = VR(4,4)$

Palíndromos: $\underline{4}\ \underline{4}\ \underline{1}\ \underline{1} = 4^2 = VR(4,2)$

No palíndromos: $VR(4,4) - VR(4,2) = 4^4 - 4^2 = \mathbf{240}$

■