Cálculo de Probabilidades I

Tema 11

Tema 11. Pruebas repetidas

- Introducción
- Distribución binomial y la aproximación de Poisson
- La aproximación normal a la distribución binomial

Tema 11. Pruebas repetidas

- Introducción
- Distribución binomial y la aproximación de Poisson
- La aproximación normal a la distribución binomial
  - Criterios de convergencia de sucesiones de variables aleatorias

Tema 11. Pruebas repetidas

- Introducción
- Distribución binomial y la aproximación de Poisson
- La aproximación normal a la distribución binomial
  - Criterios de convergencia de sucesiones de variables aleatorias
- Ley débil de los grandes números
- Ley fuerte de los grandes números

Introducción

- Pruebas repetidas
- Distribución empírica (Tema2)

Introducción. Formalización

- Consideremos un experimento aleatorio, en el que nos fijaremos en un suceso A , y también en su complementario A^c, que denominaremos éxito y fracaso. Se denomina esquema Bernouilli.
- Si repetimos este experimento un número finito de veces (n), consideramaos Xn el número total de éxitos

Introducción. Formalización

Introducción. Formalización

$$P\{X_n = k\} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

$$E[X_n] = np \qquad \text{y} \qquad \sigma^2(X_n) = np(1-p)$$

11.2 La distribución binomial y la aproximación de Poisson

- Ejemplos

11.2 La distribución binomial y la aproximación de Poisson

Teorema de Poisson: *Si n tiende a infinito y p tiende a cero, de tal manera que el producto np converge a una constante λ, se verifica*

$$\lim \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

para cada $k \leq n$.

11.2 La distribución binomial y la aproximación de Poisson

11.3 La aproximación normal de la distribución binomial

- Cuando np tiene valores grandes entonces la aproximación dada por el Teorema de Poisson no es buena, entonces primero se resolvió para valores de p=1/2 por Moivre, luego Laplace lo extendió a un valor arbitrario de p teniendo que ver con la distribución normal, que ya se introdujo en el tema 5.

11.3 La aproximación normal de la distribución binomial

Teorema de de Moivre-Laplace: *Cuando n tiende a infinito, si k tiende hacia infinito de manera que*

$$x_k = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

se mantiene acotado en valor absoluto por alguna constante A, se cumple

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\, e^{-x_k^2/2} \tag{11.1}$$

en el sentido de que el cociente de ambos miembros converge a 1. Más

11.3 La aproximación normal de la distribución binomial

- Ejemplo

11.3 La aproximación normal de la distribución binomial

Corolario: *Si X_n es una variable aleatoria con distribución binomial $B(n, p)$ y*

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$$

para cualesquiera $a < b \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\mathrm{P}\{a < Z_n \leq b\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \qquad (11.4)$$

cuando n tiende a infinito. En las mismas condiciones, se tiene también

$$\mathrm{P}\{Z_n \leq y\} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-x^2/2} dx \qquad (11.5)$$

para cualquier $y \in \mathbb{R}$.

11.3 La aproximación normal de la distribución binomial

- Ejemplos

11.3 La aproximación normal de la distribución binomial

- Tipificación, operación que consiste en restar a una variable su media y dividir por su desviación típica.
- Caso de esta operación es el corolario anterior, donde Xn es una B(n,p) y hemos efectuado la transformación

$$Z_n = \frac{X_n - np}{\sqrt{npq}}$$

Criterios de convergencia de sucesiones de variables aleatorias

- Como en el caso de sucesiones numéricas, estudiaremos diversos casos de convergencia de sucesiones de variables aleatorias.

Definición 16.1 *Una sucesión* $\{X_n\}$ *de variables aleatorias, definidas en el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, **converge casi seguro** *a otra variable aleatoria* X *si el suceso* $A = \{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)\}$ *cumple* $\mathrm{P}(A) = 1$. *En tal caso, se escribe* $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ *o bien* $X_n \longrightarrow X$ P-c.s.

Definición 16.2 *Una sucesión* $\{X_n\}$ *de variables aleatorias, definidas en el espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, **converge en probabilidad** *a otra variable aleatoria* X, *y se representa* $X_n \xrightarrow{P} X$, *si*

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0 \quad \text{para cualquier } \varepsilon > 0. \qquad (16.2)$$

Definición 16.4 *Una sucesión* F_n *de funciones de distribución* **converge débilmente** *hacia una función de distribución* F, *si* $F_n(x) \to F(x)$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$ *que sea un punto de continuidad de* F. *Se indica* $F_n \xrightarrow{d} F$.
Una sucesión de variables aleatorias X_n **converge en distribución** *hacia una variable aleatoria* X, *si sus funciones de distribución* F_n *convergen débilmente hacia la función de distribución* F *de* X. *Se representa* $X_n \xrightarrow{d} X$.

Criterios de convergencia de sucesiones de variables aleatorias

11.4 La ley débil de los grandes números

Ley de los grandes números de Bernouilli: *Si X_n tiene distribución binomial $B(n,p)$, para cualquier $\varepsilon > 0$, se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

11.5 La ley fuerte de los grandes números

- Nota.- Este apartado tiene una complejidad grande y no será objeto de examen
- El principal resultado, también generalizado
- Si Xn=B(n,p) entonces Xn/n converge c.s. a p , debido a que la distribución binomial verifica las hipótesis del teorena (pag. 246-247)

Ejercicios

11.2 En una página de un libro caben 3000 letras y la imprenta estima que se comete una errata en dos de cada 100 000 letras. Determinar

1. la probabilidad de que en una página haya 2 erratas.
2. la probabilidad de que en una página haya más de una errata.
3. la probabilidad de que un libro de 300 páginas contenga más de 15 erratas.
4. la probabilidad de que haya 12 páginas con alguna errata.

11.6 En una población de 10 000 habitantes se declara una epidemia que, por experiencias anteriores, se sabe que afectará a uno de cada tres individuos. El tratamiento de la enfermedad requiere de una caja de antibióticos por paciente. Calcular el número de cajas que deben enviarse a la población para que haya una probabilidad $0'999$ de que ningún paciente se quede sin tratamiento.