Examen Matemática discreta

Andrés Rodríguez Carmonet

Febrero 2021 Semana 2

Pregunta 1: Los números $3^{4n} - 2^{4n}$ con $n > 0$ son divisibles por 7 sí:

1) n es par y múltiplo de 7

2) n es impar y múltiplo de 3

3) n es par y múltiplo de 3

Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

$\boxed{\text{A}}$ Una afirmación.

$\boxed{\text{B}}$ Dos afirmaciones.

$\boxed{\text{C}}$ Las tres afirmaciones.

Operando la expresión:

$3^{4n} - 2^{4n} = 9^{2n} - 16^n = 2^{2n} - 2^n \equiv 0 \text{ mód } 7 = 2^n(2^n - 1) \equiv 0 \text{ mód } 7$

Calculamos los restos potenciales de 2 mód 7:

$$2^0 \equiv 1 \text{ mód } 7 \qquad 2^1 \equiv 2 \text{ mód } 7 \qquad 2^2 \equiv 4 \text{ mód } 7 \qquad 2^3 \equiv 1 \text{ mód } 7$$

Luego $2^n \equiv [1, 2, 4]$ mód 7, por lo que partiendo de la expresión factorizada obtenida anteriormente, podemos concluir que:

- $2^n \not\equiv 0$ mód 7

- $2^n - 1 \equiv 0 \text{ mód } 7 \Rightarrow 2^n \equiv 1 \text{ mód } 7 \Longleftrightarrow n = 3k$

Sabemos que por el algoritmo de la división todo número entero n puede expresarse como $n = 3k + r$ con $r = 0, 1, 2$, luego:

a) Si $n = 3k \Rightarrow 2^n = (2^3)^k = 8^k \equiv 1^k \equiv 1 \text{ mód } 7 \Rightarrow 7 \mid (2^n - 1)$

b) Si $n = 3k + 1 \Rightarrow 2^n = (2^3)^k \cdot 2 = 8^k \cdot 2 \equiv 2 \text{ mód } 7$

c) Si $n = 3k + 2 \Rightarrow 2^n = (2^3)^k \cdot 2^2 = 8^k \cdot 4 \equiv 4 \text{ mód } 7$

Por tanto, **sólo dos afirmaciones son correctas**.

Nota: También podía haberse aplicado el Pequeño Teorema de Fermat:
Si $n = 3k \Rightarrow 3^{4n} - 2^{4n} = (3^6)^{2k} - (2^6)^{2k} \equiv 1^{2k} - 1^{2k} \text{ mód } 7 \equiv 0 \text{ mód } 7$

■

Pregunta 2: Sea $A = \{3k + 4,\ k = 0, 1, \ldots, 38\}$ y sea x el número de elementos de A que son primos con el número 120.

$\boxed{\text{A}}$ Entonces x es un número con $9 \leq x < 13$

$\boxed{\text{B}}$ Entonces x es un número con $13 \leq x < 16$

$\boxed{\text{C}}$ Entonces x es un número con $16 \leq x < 19$

Tenemos que:
$|A| = 38 - 0 + 1 = 39$
$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
$\tau(120) = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16$ *divisores*

Luego x será:

$x = |A| - |\dot{2}| - |\dot{3}| - |\dot{5}| + |2 \dot{\cap} 5|$

Calculamos:

$$|\dot{2}| = \left\lceil \frac{|A|}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{39}{2} \right\rceil = 20$$

Algebraicamente sería:

$3k + 4 \equiv 0 \text{ mód } 2 \Rightarrow k = 2n$
$|\dot{2}| = 3(2n) + 4 = 6n + 4$
$4 \leq 6n + 4 \leq 118 \Rightarrow 0 \leq 6n \leq 114 \Rightarrow 0 \leq n \leq 19 \Rightarrow 20$ *elementos*

$|\dot{3}| = \emptyset$

$|\dot{5}| = \left[\frac{|A|}{5}\right] = \left[\frac{39}{5}\right] = 8$

Algebraicamente sería:

$3k + 4 \equiv 0 \text{ mód } 5 \Rightarrow 3k \equiv 1 \text{ mód } 5 \Rightarrow k \equiv 2 \text{ mód } 5 \Rightarrow k = 2 + 5n$
$|\dot{5}| = 3(2 + 5n) + 4 = 15n + 10$
$4 \leq 15n + 10 \leq 118 \Rightarrow -6 \leq 15n \leq 108 \Rightarrow 0 \leq n \leq 7 \Rightarrow 8 \ elementos \ (4 \ pares)$

Luego:

$x = |A| - |\dot{2}| - |\dot{3}| - |\dot{5}| + |2 \dot{\cap} 5| = 39 - 20 - 0 - 8 + 4 = 15$

Por tanto la ópción correcta es la **B**.

■

Pregunta 3: Sea x un número natural que satisface $x \equiv 2 \text{ mód } 5, \ x \equiv 1 \text{ mód } 7, \ x \equiv 4 \text{ mód } 11$. Entonces una de las siguientes afirmaciones es correcta:

A Existe x verificando las ecuaciones con $40 \leq x < 60$

B Existe x verificando las ecuaciones con $80 \leq x < 100$

C Existe x verificando las ecuaciones con $60 \leq x < 80$

Aplicando el Teorema chino del Resto:

Cuadro 1: TCR

Indice	m_i	t_i	Sol part.: x_i	Ec. Asoc.	Ec.Red	Sol part.: y_i	$t_i x_i y_i$	
1	5	77	2	$77y \equiv 1 mod(5)$	$2y \equiv 1 mod(5)$	3	462	
2	7	55	1	$55y \equiv 1 mod(7)$	$6y \equiv 1 mod(7)$	6	330	
3	11	35	4	$35y \equiv 1 mod(11)$	$2y \equiv 1 mod(11)$	6	840	
	385						1632	92

$x = 385\lambda + 1632 = 385\lambda + \mathbf{92}, \ con \ \lambda \in \mathbb{Z}$

Por tanto la ópción correcta es la **B**.

■

Pregunta 4: Sea G un grafo conexo y plano. Entonces:

A Siempre hay un vértice con grado menor o igual a 5.

B Siempre hay un vértice con grado menor o igual a 7.

C Siempre hay un vértice con grado menor o igual a 6.

Corolario 2-4.9: Sea $G = (V, E)$ un grafo plano conexo, con $\#V > 2$. Entonces:

$$\#E \leq 3\#V - 6$$

Primer Teorema de la Teoría de Grafos: Sean $G = (V, E)$ un grafo, $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ el conjunto de vértices y $\#E$ el número de aristas. Entonces:

$$2\#E = \sum_{i=1}^{n} gr(v_i)$$

Sea $\#V = n$ y supongamos que para todo vértice v_i, con $i = 1, \ldots, n$, $gr(v_i) \geq 6$. Entonces:

$$2\#E = \sum_{i=1}^{n} gr(v_i) \geq 6n \Rightarrow \#E \geq 3n$$

lo que contradice que G sea plano. Se deduce por tanto que no todos los vértices puedan tener grado estrictamente mayor que 5, por lo que existe al menos un vértice G cuyo grado es a lo sumo 5. Luego la opción correcta es la **A**. ■

Pregunta 5: Sea un grafo G con 10 vértices $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ y aristas $v_i v_j$, con $|i - j|$ impar. Entonces:

1) El grafo es euleriano.

2) El grafo es hamiltoniano.

3) El grafo es plano.

Estudiar cuantas afirmaciones son correctas:

A Una afirmación.

B Dos afirmaciones.

C Las tres afirmaciones.

1) El grafo es euleriano.

Cada v_i con i impar tiene arista con cada v_j con j par para que $|i-j|$ sea impar. El mismo argumento se puede utilizar para cada v_i con i par. Como hay 5 vértices con índice par y 5 con índice impar, cada vértice v_i tiene grado 5. Lo cual imposibilita que sea euleriano por teorema 2-2.12. Luego **G no es euleriano**.

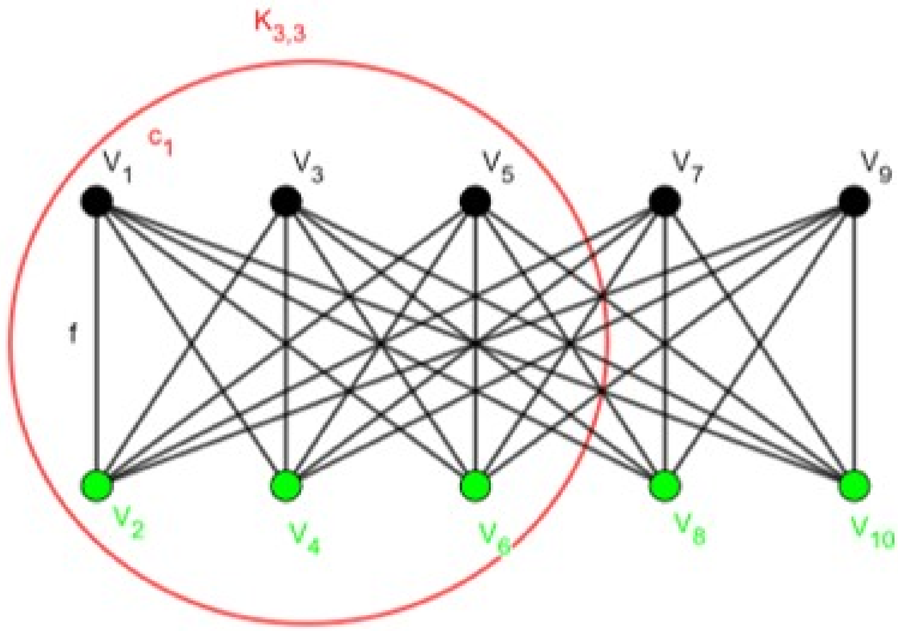
2) El grafo es hamiltoniano.

Sí es hamiltoniano puesto que existe un ciclo hamiltoniano, $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{10}, v_1\}$.

3) El grafo es plano.

Aplicando el corolario 2-4.9 ya que G es conexo:
$\#E \leq 3\#V - 6 \Rightarrow \dfrac{10 * 5}{2} \nleq 3 * 10 - 6 \Rightarrow 25 \nleq 24$ Luego G **no es plano**.

O también aplicando el teorema 2-4.15 (**Teorema de Kuratowski**): Un grafo G es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo que sea isomorfo a una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$.



Grafo G.

Luego la opción correcta es la **A**.

■

Pregunta 6: En una clase de la uiversidad hay 80 alumnos de los cuales 40 estudian Matemática Discreta, 15 estudian Álgebra lineal, 20 Geometría Básica, 8 cada par de asignaturas anteriores y 5 de las tres asinaturas. ¿Cuantos alumnos quedan en la clase que no estudian dichas asignaturas?

A 26

B 22

C 24

Sea A el conjunto de alumnos de la clase y sea S el conjunto de alumnos de la clase que no estudian dichas asignaturas. Entonces, aplicando el principio de Inclusión-Exclusión,:
$|S| = |A| - |MD| - |AL| - |GB| + |MD \cap GB| + |MD \cap AL| + |AL \cap GB| + |MD \cap AL \cap GB|$
$|S| = 80 - 40 - 15 - 20 + 8 + 8 + 8 - 5 = \mathbf{24}$

Luego la opción correcta es la **C**.

■

Pregunta 7: El número de forma de colocar 45 bolas de golf indistinguibles en 10 bolsas, $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, de modo que en la bolsa x_i para i par, haya al menos i bolas.

A Es $\binom{24}{15}$.

B Es $\binom{24}{13}$.

C Es $\binom{22}{15}$.

Al ser bolas indistinguibles, estamos hablando de combinaciones con repetición:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{10} = 45$$

Realizando la asignación de las i bolas en las bolsas x_i con i par nos queda:

$$x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots + x'_{10} = 45 - 30 \Rightarrow x'_1 + x'_2 + x'_3 + \ldots + x'_{10} = 15$$

Luego:

$$CR(n + k - 1, k) = \binom{10 + 15 - 1}{15} = \binom{\mathbf{24}}{\mathbf{15}}$$

Luego la opción correcta es la **A**.

■

Pregunta 8: Sea p un número primo. Entonces:

1) Si $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$, entonces p divide a $\binom{p+1}{j}$.

2) Si $j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, entonces p divide a $\binom{p}{j}$.

3) Si $j \in \{1, 2, \ldots, p+1\}$, entonces p divide a $\binom{p+1}{j}$.

Estudiar cuántas de las anteriores afirmaciones son correctas:

A Una afirmación es correcta.

B Ninguna afirmación es correcta.

C Dos afirmaciones son correctas.

Basta tomar $j = 1$ y obtenemos que para las expresiones 1) y 3) $p \nmid p+1$, en la expresión 2) obtenemos que $p \mid p$, luego solo se cumple la opción 2). Tan solo faltaría comprobar que p divide:

$$p \mid \binom{p}{j}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$$

Para ello desarrollemos el número combinatorio:

$$\binom{p}{j} = \frac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{j!} = p \cdot \frac{(p-1)\ldots(p-j+1)}{j!} = p \cdot \frac{a}{b}, \quad mcd(a,b) = 1 \ \wedge \ a, b \in \mathbb{N}$$

Es claro que tanto a como b son números naturales al ser producto de números naturales, y como toda fracción podemos reducirla a su representante de clase, esto es, hacerla irreducible y obtener que $mcd(a, b) = 1$. Seguimos operando:

$$b \cdot \binom{p}{j} = p \cdot a$$

Partiendo de que todo número combinatorio es entero, ademas la parte derecha de la igualdad pertenece a $\mathbb{Z}$ luego la parte izquierda también, y de que $p \nmid b$ puesto que b es producto de factores pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \ldots, p-1\}$ coprimos (y menores) con p, podemos concluir:

$$p \mid \binom{p}{j}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, p-1\} \quad QED$$

Luego la opción correcta es la **A**.

■