Cuestiones y problemas
Tema 3. Principios de conservación de la mecánica clásica: Conservación de la energía mecánica

Una persona lanza una pelota de 1 kg hacia arriba con una velocidad inicial de 50 m/s. Ésta alcanza una altura de 50 m antes de comenzar a caer hacia abajo.¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento del aire si suponemos que es constante a lo largo de todo el ascenso de la pelota?

Solución:

El trabajo de la fuerza de rozamiento será igual a la pérdida de energía mecánica:

$$W_{roz} = \Delta E_m = E_{m,f} - E_{m,i} = mgh - \frac{1}{2}mv^2$$

$$W_{roz} = -760 \text{ J}$$

Como la fuerza de rozamiento es constante el trabajo realizado por la misma valdrá $W_{roz} = -F_{roz}h$ (el signo negativo indica que la fuerza actúa en sentido contrario al desplazamiento, proviene del producto escalar $W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{x}$), de donde obtenemos que el módulo de dicha fuerza será $F_{roz} = 15.2\text{ N}$ (es importante darse cuenta de que éste es el módulo de la fuerza, la expresión vectorial de esta fuerza será $\mathbf{F} = -15.2\mathbf{j}\text{ N}$ siendo **j** el vector unitario que indica la dirección hacia arriba).

Para que una fuerza que actúa sobre una partícula en un espacio tridimensional sea conservativa es suficiente:

a) que la fuerza dependa de la posición
b) que la fuerza no dependa del tiempo
c) que la fuerza sea central

Solución:

En un movimiento tridimensional en el que la fuerza es sólo función de la posición es una condición necesaria pero no suficiente para que sea una fuerza conservativa. Si la fuerza es central (está dirigida hacia un punto fijo en el espacio y su magnitud depende sólo de la distancia a ese punto) si que es conservativa.

La energía potencial de un objeto de 3 Kg viene dada por $U(x) = 3x^2 - x^3$, donde *U* se expresa en Julios y *x* en metros. Analizar en qué posiciones se encuentra este objeto en equilibrio y como es la estabilidad del equilibrio. Si la energía total de la partícula es 10 J, ¿cuál es el módulo de la velocidad para $x = 2\text{ m}$?

Solución:

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$$F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, 2$$

En $x = 0$ tenemos equilibrio estable ya que $F(0+\delta x) < 0$ y $F(0-\delta x) > 0$

En $x = 2$ tenemos equilibrio inestable ya que $F(2+\delta x) > 0$ y $F(2-\delta x) < 0$

$U(2) = 4\text{ J}$, por tanto la energía cinética es 6 J y la velocidad es 2 m/s.

Supongamos que representamos la energía potencial $U(x)=x^4$ frente a x. Si un punto material es inicialmente colocado con velocidad nula en el punto x=0,
a) se desplazará en el sentido de las x positivas
b) no se moverá
c) se desplazará en el sentido de las x negativas
Solución:
Veamos cual es la fuerza que experimenta el punto material en x = 0.

$$F(x)=-\frac{dU}{dx}=-4x^3$$

Entonces $F(0)=0$ y la partícula no se moverá.

Se quiere subir una masa m a una altura h. Utilizamos un plano inclinado sin rozamiento. En comparación con el levantamiento vertical:
a) nos permite realizar menos trabajo
b) permite utilizar una fuerza menor
c) permite ahorrar potencia
Solución:
Como se trata de fuerzas conservativas, el trabajo realizado no depende de la forma en que la partícula se mueve de un punto a otro, sino de sus posiciones inicial y final. En este caso el trabajo total suministrado es el mismo, e igual al aumento de energía potencial de la masa: mgh.
Lo que si que es cierto es que nos permite utilizar una fuerza menor. En el levantamiento vertical la fuerza utilizada tiene que ser mayor o igual al propio peso del cuerpo mg, mientras que en el caso del plano inclinado, la fuerza utilizada puede ser menor: $mg\sin\alpha$, donde α es el ángulo de inclinación del plano. En cuanto a la potencia, ésta no sólo depende de la fuerza empleada para subir la masa sino de la velocidad con la que sube. Por ejemplo, podemos subir verticalmente la masa muy despacio y la potencia empleada será menor que si la subimos por el plano inclinado muy rápidamente. Así que no podemos afirmar nada al respecto.

Un cuerpo de masa *m* describe una trayectoria circular con movimiento uniforme. ¿Qué trabajo ha realizado la fuerza centrípeta en media vuelta? Razonar la respuesta
Solución:
El trabajo efectuado por la fuerza centrípeta es 0 ya que su dirección es perpendicular en todo momento al vector desplazamiento del cuerpo.

Demostrar que la potencia transmitida sobre una partícula por la fuerza neta que actúa sobre ella se iguala con la tasa de variación en el tiempo de la energía cinética de la partícula.
Solución:
La potencia neta es $\frac{dW_{\text{neta}}}{dt}=\mathrm{F}_{\text{neta}}\cdot \mathrm{v}=m\mathrm{a}\cdot \mathrm{v}=m\mathrm{v}\cdot\frac{d\,\mathrm{v}}{dt}=\frac{m}{2}\frac{d\,\mathrm{v}^2}{dt}=\frac{dE_c}{dt}$.

Una persona de 80 Kg de masa salta desde 5 metros de altura a una cama elástica que puede considerarse como un resorte vertical sin masa, cuya constante elástica vale 2000N/m. ¿Cuál es la máxima deformación de la cama? (Tomar g=9.8 m/s^2)
Solución:

Esta cuestión se resuelve utilizando el principio de conservación de la energía mecánica. Si tomamos como origen de la energía potencial la superficie de la cama elástica sin deformación, tenemos que la energía total inicial es la potencial de la persona: $E_i = mgh = 3920\ J$.

En el momento de máxima deformación de la cama elástica, la energía cinética es cero, por lo que sólo tenemos que considerar la energía potencial de la persona (negativa, puesto que la persona se encuentra por debajo del origen de energía) y la de la cama que es considerada como un resorte: $E_f = -mgd + \frac{1}{2}kd^2$, donde hemos denominado *d* a la máxima deformación de la cama.

Igualando obtenemos que $d \approx 2.41\,\mathrm{m}$.

Un bloque de 1 kg que se desplaza por un plano horizontal choca contra un resorte horizontal de masa despreciable cuya constante de fuerza es 2 N/m. El bloque comprime el resorte deformándolo 4 m y se para. Si el coeficiente de rozamiento entre el bloque y la superficie horizontal es de 0.25, ¿cuál era la velocidad del bloque en el instante del choque?

Solución:

La diferencia entre al energía cinética inicial del bloque, y la energía final, dada por la energía potencial del resorte, es la energía disipada por el rozamiento entre el bloque y el plano. Esta última viene dada por el trabajo que realiza la fuerza de rozamiento: $W_{roz} = -F_{roz}d = -mg\mu d$, donde *d* es la distancia durante la que actúa la fuerza de rozamiento (4 m en nuestro problema). Podemos escribir entonces:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kd^2 = m\mu gd$$

Despejando la velocidad obtenemos $v = 7.18$ m/s.

Un bloque de 10 kg de masa, inicialmente en reposo, se encuentra sobre una superficie horizontal, con un cierto coeficiente de rozamiento. Al actuar sobre el cuerpo una fuerza horizontal constante F=30 N se observa que la velocidad del cuerpo después de haber recorrido 1 m era de 2 m/s.

Calcular:

- La energía disipada por la fuerza de rozamiento.

- Si tras haber recorrido 1 m la fuerza F deja de actuar ¿qué distancia recorre el bloque antes de detenerse?

- ¿Cuánto vale el coeficiente de rozamiento dinámico de la superficie?

Solución:

Masa del bloque: m = 10kg

Fuerza aplicada: F = 30N

La forma más sencilla de resolver este problema es por conservación de la energía: la variación de la energía cinética del bloque es igual al trabajo realizado por las fuerzas aplicadas.

Las fuerzas aplicadas en este caso son F y la fuerza de rozamiento R = $\mu \cdot m \cdot g$. Como ambas son constantes a lo largo de la trayectoria, tenemos que el trabajo realizado es sencillamente

$$W = W_F - W_R = (F - R) \cdot L = (30N - R)\ m$$

siendo L el espacio recorrido L = 1m.

Dado que la velocidad inicial es nula, la variación de energía cinética es igual a la energía cinética final

$$\Delta Ec = Ecf - Eci = Ecf = 1/2 \cdot m \cdot v^2 = 1/2 \cdot 10kg \cdot (2m/s)^2 = 20\ J$$

Sustituyendo en W_F - W_R = ΔEc encontramos directamente

$$W_R = W_F - \Delta Ec = 30- 20 = 10 \text{ J}$$

Como la fuerza de rozamiento es constante a lo largo de la trayectoria, el resultado anterior implica que

$$W_R = R\cdot L = 10 \text{ J}$$

De donde deducimos el valor de la fuerza de rozamiento experimentada por el bloque

$$R = 10 \text{ N}$$

que es la misma independientemente de que se apliquen o no otras fuerzas, ya que R = $\mu\cdot m\cdot g$.

Una vez calculada R, la forma más sencilla de resolver este apartado es volver a aplicar conservación de la energía. En este caso la única fuerza que se aplica sobre el cuerpo es el rozamiento, la energía cinética inicial de este apartado coincide con la energía cinética final del apartado anterior, y la energía cinética final es cero. Por tanto:

$$R\cdot L_2 = \Delta Ec$$
$$10\text{N} \cdot L_2 = 20 \text{ J}$$

Siendo L_2 la distancia recorrida desde que se deja de aplicar la fuerza F hasta que el bloque se detiene. Despejando

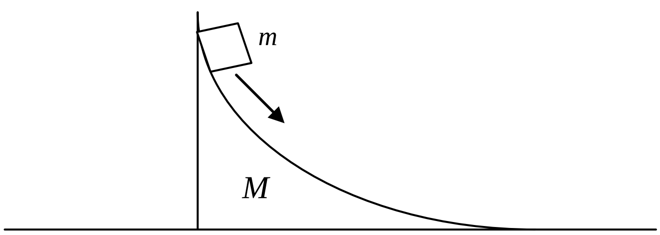
$$L_2 = 20 \text{ J} / 10\text{N} = 2\text{m}$$

Con esto el desplazamiento total desde el principio es L + L_2 = 3m

Una vez calculada R, por medio de R = $\mu\cdot m\cdot g$ es trivial calcular el valor del coeficiente de rozamiento μ

$$\mu = R / (m\cdot g) = 10\text{N} / (10\text{kg}\cdot 9.81\text{m/s}^2) = 0.102$$

Un bloque de masa *m* se desliza sin rozamiento por una rampa de masa *M* tal y como se muestra en la figura. Esta rampa está colocada sobre una mesa por la que puede deslizar sin rozamiento. Si el bloque comienza a deslizarse desde una altura *h*, ¿cuánto vale el módulo de la velocidad de la rampa en el instante en el que el bloque sale de la rampa?.



Solución:
Como no hay rozamiento la energía mecánica se conserva en todo momento. Por lo tanto podemos escribir:

$$mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 .$$

También tenemos conservación del momento lineal en la dirección *x*. Como inicialmente el momento lineal es 0, el momento lineal final también tiene que ser 0: $MV = mv$

De estas dos ecuaciones obtenemos que $V = \sqrt{\dfrac{2m^2 gh}{M(m+M)}}$.

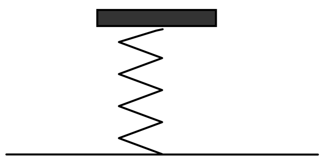
Dos bloques se atan a los extremos de una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea sin rozamiento, también de masa despreciable. Los dos bloques tienen masas m_1 y m_2, con $m_2 > m_1$, y están inicialmente en reposo. Determinar la velocidad de cada bloque cuando el más pesado ha caído una distancia *h*.

Solución:
Inicialmente la energía cinética del sistema es cero, puesto que los bloques están en reposo. Esta misma energía cuando los bloques llevan una velocidad v es $\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$. Por otra parte, la variación de energía potencial para la masa m_1 cuando haya subido una altura h es $m_1 gh$; para la masa m_2 tendremos $-m_2 gh$ al haber "bajado" (por ser la más pesada) la misma altura h. La variación de la energía total (cinética + potencial) es nula:

$$\tfrac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + m_1 gh - m_2 gh = 0$$

Despejando v obtenemos la velocidad solicitada.

Una balanza de muelle es, básicamente, un dinamómetro al revés; es decir, un muelle vertical en cuyo extremo hay una plataforma de masa despreciable donde se pone el cuerpo que se quiere pesar (ver figura). Al poner el cuerpo sobre la balanza, el muelle se comprime y la balanza convierte esa compresión en masa. Si la constante del muelle *K* vale 10^4 N/m:
- ¿Cuánto vale la masa que queremos medir, *m*, en función de la compresión del muelle, *x*?
- Si una persona de 50 kg salta sobre la balanza desde una altura de 0,1 m, ¿qué masa máxima indicará la balanza?



Solución:
Igualando fuerzas (peso y fuerza restauradora del muelle) tenemos que:

$$m = Kx/g = 1020x \text{ kg}$$

Cuando la persona cae sobre la balanza, su energía potencial gravitatoria se transforma en energía cinética y energía potencial elástica del muelle. En el punto más bajo, la velocidad de la persona será nula y la compresión del muelle será máxima. En ese instante, tenemos que

$$-\Delta E_{\text{potencial\_persona}} = \Delta E_{\text{potencial\_muelle}}$$

$$mg(h+x) = \frac{1}{2}Kx^2$$

Despejando tenemos que

$$x = \frac{2mg + \sqrt{(2mg)^2 + 8mghK}}{2K} = 0{,}16 \text{ m}$$

Aplicando la fórmula anterior obtenemos finalmente la masa pedida en el enunciado

$$m = Kx/g = 1020x = 163 \text{ kg}$$

Una cadena flexible de longitud total *L* descansa sin rozamiento sobre el borde de una mesa, con una parte de la cadena de longitud y_0 colgando verticalmente de ella. La cadena empezará a caer progresivamente. Calcular la aceleración de la cadena en su deslizamiento por el borde de la mesa y la velocidad de la misma cadena en el instante en que abandona la mesa e inicia su caída libre es

Solución:

Sea *y* la porción de cadena que cuelga, si la masa total de la cadena es *m*, entonces la masa de la parte que cuelga es $\frac{my}{L}$. De acuerdo con la segunda ley de Newton tenemos

$$\frac{my}{L} g = ma \rightarrow a = \frac{gy}{L}$$

La segunda parte del problema se puede resolver de muchas formas, las más cómoda e intuitiva es por conservación de energía mecánica. Tomemos como referencia para la energía potencial la superficie de la mesa donde descansa la cadena. La energía mecánica inicial es la energía potencial de la cadena. La parte de la cadena que descansa inicialmente sobre la mesa tiene energía potencial 0 mientras que la porción que cae de longitud y_0 tiene una energía potencial $-\frac{my_0}{L} g \frac{1}{2} y_0$, donde $\frac{my_0}{L}$ es la masa, y $-\frac{1}{2} y_0$ la altura del centro de masas de la porción. La energía mecánica final será la suma de la energía potencial final $-mg\frac{1}{2}L$ y la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$. Igualando la energía mecánica inicial y la final, y despejando la velocidad obtenemos

$$v = \sqrt{\frac{g\left(L^2 - y_0^2\right)}{L}}.$$

El cañón de una escopeta tiene una longitud de 1 m y la fuerza que impulsa el proyectil viene dada por la expresión $f = 0.1 \cdot (200 - x)$, donde la fuerza está expresada en Newtons y *x* , que es la distancia medida a lo largo del cañón, está en centímetros. La masa del proyectil es de 5 gramos. Calcular:

- El trabajo que realiza la fuerza en el interior del cañón es:

- La velocidad del proyectil en el momento de salir del cañón es:

- La energía cinética del proyectil en el momento en que sale del cañón es (1 caloría = 4.18 Julios):

Solución:

$$W = \int_{x=0}^{x=100} f(x)dx = \int_{x=0}^{x=100} 0.1(200-x)dx = 1500 \text{ N cm} = 15 \text{ J}.$$

Ese trabajo sobre el proyectil incrementa su energía cinética en 15 J (3.6 calorías). Por lo tanto $\frac{1}{2}mv^2 = 15 \text{ J}$ y obtenemos que $v = 77.46 \text{ m/s}$.

Se lanza un bloque de masa *m* con velocidad inicial v_0 sobre la parte superior de un muelle con constante *K* colocado verticalmente. Suponiendo que el bloque se lanza sobre el muelle desde una altura inicial *h*, calcular:

1. La energía cinética máxima del bloque.

2. La compresión máxima del muelle.

3. El valor de la compresión del muelle para el que la energía cinética del bloque es la décima parte de su valor máximo.

Solución:

Dado que el enunciado no menciona que existan fuerzas de rozamiento supondremos que éstas son despreciables, por tanto, la energía del sistema (masa + muelle) se conserva. El enunciado tampoco dice en qué dirección se lanza la masa m, de manera que supondremos que se lanza en la dirección vertical. Por otra parte, como la energía se conserva, el sentido con el que se lanza la masa inicialmente es irrelevante para lo que se pregunta en el problema.

Tomamos un sistema de referencia en el que la coordenada x representa la altura sobre la parte superior del muelle. En estas condiciones la energía total del sistema es:

$a.$ desde el instante en el que se lanza el bloque hasta que entra en contacto con el muelle (es decir, para $x > 0$)

$$E = E_{cinética} + E_{potencial\ gravitatoria}$$

$b.$ a partir del instante en el que el bloque ha entrado en contacto con el muelle (es decir, para $x < 0$)

$$E = E_{cinética} + E_{potencial\ gravitatoria} + E_{potencial\ elástica}$$

siendo

$$E_{potencial\ gravitatoria} = mgx$$
$$E_{potencial\ elástica} = \frac{1}{2}kx^2$$

En todo momento la energía total del sistema es constante e igual a su valor inicial

$$E(t) = E(t=0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh$$

por tanto, en el resto del problema vamos a considerar la energía total del sistema como un parámetro (E) cuyo valor es conocido.

Despejando encontramos que la energía cinética de la masa está dada en función de x por

$$E_{cinética} = E - mgx \qquad \text{para } x > 0$$

$$E_{cinética} = E - mgx - \frac{1}{2}kx^2 \qquad \text{para } x < 0$$

1.

Para calcular el punto en el que se alcanza la energía cinética máxima tenemos que calcular el máximo de la $E_{cinética}$ como función de x. Derivando respecto de x e igualando a cero encontramos que la energía cinética máxima se alcanza en el punto

$$x = -\frac{mg}{k}$$

Sustituyendo, el valor máximo de la energía cinética es

$$E_{cinética\ máxima} = E + \frac{(mg)^2}{2k}$$

Observaciones:

- Como puede verse, el punto en el que se alcanza la energía cinética máxima está *por debajo* de la posición inicial del muelle y la correspondiente energía cinética máxima es *mayor* a la energía cinética que tiene el bloque en el instante en el que entra en contacto con el muelle (dada por la energía inicial E).

  También es interesante observar que el punto que hemos encontrado para la $E_{cinética\ máxima}$ corresponde a la posición de equilibrio, dada por $F = 0$, siendo F la resultante de las fuerzas gravitatoria y elástica

  $$F = -mg - kx$$

  Como estamos despreciando cualquier tipo de fuerza de rozamiento, si la masa m se queda fija al muelle, entonces quedará oscilando indefinidamente en torno a esta posición de equilibrio; si considerásemos algún tipo de fuerza de rozamiento esta posición de equilibrio sería la posición final en la que la masa quedaría en reposo, una vez disipada toda su energía inicial. Si no se queda fija al muelle y no existe rozamiento alguno, la masa volverá a subir hasta su altura inicial y repetirá de forma periódica todo el movimiento.
- Para entender físicamente el resultado que hemos encontrado vamos a fijarnos en la aceleración del bloque. Desde el instante inicial hasta que el bloque entra en contacto con el muelle la aceleración es sencillamente $a = -g$. Una vez que el bloque ha entrado en contacto con el muelle la fuerza neta aplicada es $F = -mg - kx$ de manera que su aceleración es

  $$a = -g - \frac{kx}{m}$$

  Una vez que el bloque entra en contacto con el muelle comienza a *desacelerarse*, pero su velocidad de caída sigue aumentando hasta el punto en el que se anula la aceleración, dado claramente por $F = 0 \;\Rightarrow\; x = -mg/k$.
- En este apartado es muy interesante considerar los límites de muelle muy débil ($k \to 0$) y muelle muy rígido ($k \to \infty$):
  - En el límite de muelle muy débil tenemos que el punto donde se alcanza la energía cinética máxima tiende a $-\infty$ (al tender k a 0), al mismo tiempo que la energía cinética máxima tiende a $+\infty$. Lógicamente, si la fuerza recuperadora del muelle es muy pequeña el objeto sigue cayendo, y acelerándose, durante mucho tiempo.
  - Por el contrario, en el límite de muelle prácticamente rígido encontramos que el punto donde se alcanza la energía cinética máxima tiende a 0 (al tender k a ∞), al mismo tiempo que la energía cinética máxima tiende a la energía inicial E. Si la fuerza recuperadora del muelle se hace infinitamente grande frente a la gravitatoria el objeto rebotará y subirá hasta su altura inicial si no existen fuerzas disipativas.

2.
En el punto en que se alcanza la compresión máxima el bloque está en reposo, de tal forma que la energía del sistema en ese instante es sólo elástica y potencial, pero no cinética. El punto en el que el muelle alcanza la compresión máxima está dado entonces por la solución de la ecuación:

$$E_{cinética} = 0$$

es decir

$$E - mgx - \frac{1}{2}kx^2 = 0$$

La solución es

$$x = -\left(\frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2E}{k}}\right)$$

la otra raíz no tiene significado físico.

Observaciones:

- Podemos comprobar que en el límite $k \to 0$ la posición de máxima compresión tiende a $-\infty$, y que en el límite $k \to \infty$ la posición de máxima compresión tiende a 0, que es lo que intuitivamente cabía esperar. (De hecho, considerar estos 2 casos límite es una de las posibles formas de decidir cuál de las 2 raíces de la ecuación cuadrática es la que tiene significado físico. La otra manera de ver cuál de las 2 raíces es la que tiene significado físico es considerar el caso $E = 0$, correspondiente a que el objeto se deposita con velocidad inicial nula sobre el muelle.)

3.
En el punto en el que la energía cinética del bloque es la décima parte de su valor máximo se cumple

$$E_{cinética} = \frac{1}{10} E_{cinética\ máxima}$$

sustituyendo

$$E - mgx - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{10}\left(E + \frac{(mg)^2}{2k}\right)$$

es decir

$$9E - \frac{(mg)^2}{2k} - 10mgx - 5kx^2 = 0$$

por tanto el punto donde se cumple la condición dada es

$$x = -\left(\frac{mg}{k} + \frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2E}{k}}\right)$$

la otra raíz no tiene significado físico.

Una persona se decide a practicar el peligroso deporte conocido como "puenting"; para ello se lanza desde un puente colgado de una cuerda elástica de longitud *L* y constante recuperadora *K*. La persona tiene una masa *m* y su velocidad inicial en la dirección de la caída es v_0. Este problema es exactamente igual al anterior. Aunque en los apartados anteriores hayamos despreciado el rozamiento con el aire, es evidente que esta fuerza es relevante en la realidad, ya que las velocidades alcanzadas son bastante altas. En particular, el rozamiento con el aire es el responsable de que, transcurrido cierto número de oscilaciones, se alcance un estado de equilibrio. Calcule la posición de este punto de equilibrio.

Solución:

El equilibrio se obtiene cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre el saltador es nula. Si escogemos el origen de coordenadas en el punto desde donde se produce el salto y sentido positivo hacia abajo, la fuerza recuperadora tendrá la forma $-K\left(x-L\right)\vec{i}$ y el peso $mg\vec{i}$. La posición de equilibrio $x_{equilibrio}$ será la solución de la suma de fuerzas igual a 0:

$$mg = K(x_{equilibrio} - L)$$

de donde

$$x_{equilibrio} = L + \frac{mg}{k}$$

Si por el contrario consideramos el mismo sistema de referencia utilizado en el citado problema, es decir, el origen de alturas en el punto en el que la cuerda se ha desplegado completamente sin estirarse, y sentido positivo hacia arriba, la fuerza recuperadora tendrá la forma $-Kx\vec{i}$ y el peso $-mg\vec{i}$. La posición de equilibrio $x_{equilibrio}$ será de nuevo la solución de la suma de fuerzas igual a 0:

$$mg = -Kx_{equilibrio}$$

de donde

$$x_{equilibrio} = -\frac{mg}{k}$$

Un bloque de 1 kg se lanza hacia arriba por un plano inclinado 30º con una velocidad inicial de 5 m/s y recorre una distancia de 1 m sobre el plano hasta llegar al punto más alto. ¿Volverá el bloque al punto de partida? Si es así calcular la velocidad con la que vuelve.

Solución:

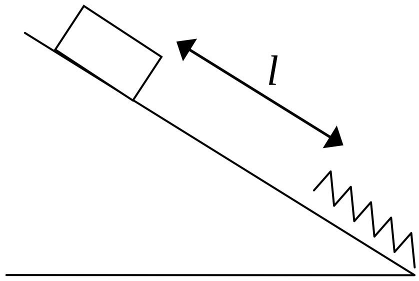
Para resolver este problema hay que darse cuenta de que durante la ascensión del bloque por el plano inclinado se disipa energía mecánica (la energía mecánica no se conserva), por lo que está actuando una fuerza de rozamiento:

$$W_{roz} = -\Delta E_m$$

$$W_{roz} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl\sin\alpha = 7.6 \text{ N}$$

Como $W_{roz} = F_{roz}l$ obtenemos que $F_{roz} = 7.6 \text{ N}$. Podemos pensar que se trata de un rozamiento dinámico y que la fuerza de rozamiento estático será mayor. En cualquier caso, en el momento en el que el bloque llega al punto más alto y su velocidad es nula, no volverá a bajar ya que la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento es mayor que la componente tangencial al plano del peso, que “empuja” al bloque a volver a bajar por el plano, y que vale $P_{\tan} = mg\sin\alpha = 4.9 \text{ N}$, por lo que el bloque no bajará.

Un bloque de masa 1 kg se encuentra sobre un plano inclinado un ángulo 45º con la horizontal; su coeficiente de rozamiento dinámico con el plano es 0,1. Partiendo del reposo desliza una longitud *l* = 1m hasta chocar con un resorte de masa despreciable y constante *K* = 1000 N/m, situado de forma paralela al plano tal y como se muestra en la figura.



1. Calcular la máxima compresión del muelle.
2. ¿Cuál debería ser el mínimo valor del coeficiente de rozamiento estático μ_e para que una vez alcanzado el punto de máxima compresión el bloque no se moviese?
3. Si el bloque se quedara pegado al muelle y no hubiese rozamiento alguno entre el bloque y el plano, describir lo más precisamente posible el movimiento futuro del bloque.

Solución:
Llamemos *x* a la máxima deformación del muelle. Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica tenemos que:

$$E_i - E_f = W_{roz}$$

$$Mg(l+x)(\sin\alpha) - \frac{1}{2}Kx^2 = Mg(\cos\alpha)\mu_d(l+x)$$

Despejando *x* obtenemos que la máxima compresión del muelle es de 0,12 m.

En el momento de máxima compresión, el bloque se encuentra en reposo y las fuerzas que actúan sobre él son: la fuerza de recuperación del muelle (dirección paralela al plano inclinado y sentido hacia arriba) y la fuerza de rozamiento estático y la componente tangencial del peso, (ambas con dirección paralela al plano pero sentido hacia abajo). Para que no se mueva de debe cumplir:

$$Kx \le mg\sin\alpha + mg\mu_e\cos\alpha$$

Despejando μ_e obtenemos que el valor mínimo del coeficiente de rozamiento estático debe ser de 16,3.

Si no existe disipación de la energía, el bloque describirá un movimiento armónico simple de frecuencia angular $\omega = \sqrt{k/m}$ alrededor de la posición de equilibrio *x* sobre el plano dada por

$$Kx = mg\sin\alpha\ ,$$

donde hemos situado el origen $x = 0$ en el extremo libre del muelle sin deformar y el sentido positivo hacia abajo.

Una partícula desliza libremente sin rozamiento sobre una superficie situada en el plano XY. La dirección del movimiento con respecto a un sistema de referencia en reposo situado en el origen de coordenadas es el eje X y el sentido es el positivo. Al aplicar una fuerza constante sobre la partícula, la dirección del movimiento no cambia pero la energía cinética de la partícula disminuye de 49 a 9 J.

- Calcular la componente F_x del vector fuerza si la partícula se ha desplazado una distancia de 10 m durante el intervalo de tiempo en el que la fuerza ha sido aplicada. ¿Qué podemos decir de las otras dos componentes de la fuerza, F_y y F_z ?

- Analicemos ahora el mismo fenómeno desde un sistema de referencia inercial que se mueve con una velocidad de 5 m/s en la dirección y sentido positivo del eje X con respecto al primer sistema de referencia en reposo. La masa de la partícula es de 2 kg y el intervalo de tiempo durante el cual la fuerza es aplicada es de 2 s. Comprobar que la velocidad inicial del objeto con respecto a este sistema es de 2 m/s, obtener la velocidad final y calcular el desplazamiento de la partícula durante esos 2 s con respecto a este nuevo sistema de referencia.

- De la resolución del apartado anterior se puede comprobar que la energía cinética del objeto con respecto al sistema de referencia móvil no ha variado a pesar de la fuerza. ¿Significa esto que la fuerza no ha efectuado ningún trabajo sobre la partícula? Razonar la respuesta.

Solución:

Como la fuerza no cambia la dirección del movimiento, la componente Y debe ser nula mientras que la componente Z debe tener sentido negativo para que pueda ser compensada por la reacción de la superficie (si fuera positiva la dirección del movimiento variaría). A partir de los datos podemos calcular la componente X. El trabajo de dicha fuerza debe ser igual a la variación de la energía cinética:

$$W_{F_x} = \Delta E_c$$
$$F_x s = E_{c,f} - E_{c,i}$$
$$F_x = \frac{E_{c,f} - E_{c,i}}{s} = -4 \text{ N}$$

La aceleración debe ser la misma en los dos sistemas de referencia, puesto que se mueven con velocidades relativas constantes: $\mathbf{a} = (-2, 0, 0) \text{ m/s}^2$.

La energía cinética inicial con respecto a OX es de 49 J, lo que da una velocidad de 7 m/s. Como OX' se mueve con una velocidad de 5 m/s con respecto a OX, entonces la velocidad de la partícula con respecto a OX' es de 2 m/s. Como la aceleración es constante, tenemos que

$$v'_f = v'_i + a\Delta t = -2 \text{ m/s}.$$

Es interesante darse cuenta que el desplazamiento de la partícula durante el tiempo de aplicación de la fuerza con respecto al sistema OX' es nulo:

$$v'^2_f - v'^2_i = 2as' \;\rightarrow\; s' = 0 \text{ m}$$

Esto también se podría haber deducido a partir de las ecuaciones de la posición de la partícula con respecto a los dos sistemas:

$$x'(t) = x(t) - x_0 - vt$$

siendo x_0 la posición del origen de OX' con respecto a OX en el tiempo $t = 0$ y v la velocidad con la que se mueve OX' con respecto a OX.

Como se puede apreciar

$$x'(t_1) = x(t_1) - x_0 - vt_1$$
$$x'(t_2) = x(t_2) - x_0 - vt_2$$

y restando obtenemos

$$s' = x'(t_2) - x'(t_1) = x(t_2) - x(t_1) - v(t_2 - t_1) = 0$$

puesto que $x(t_2) - x(t_1) = 10 \text{ m}$ y $v(t_2 - t_1) = 10 \text{ m}$

Con respecto al sistema de referencia OX', la energía cinética inicial es igual a la final, por lo que el trabajo total realizado por la fuerza sobre la partícula es nulo. Sin embargo, sí que ha realizado un trabajo.
Al cabo del primer segundo, la velocidad final con respecto a OX' es cero y el espacio recorrido es

$$v'^2_f - v'^2_i = 2as' \;\rightarrow\; s' = 1\ \mathrm{m}.$$

El trabajo realizado por la fuerza es

$$W_F' = F_x s' = -4\ \mathrm{J}$$

Después del siguiente segundo, la velocidad final es $-2\ \mathrm{m/s}$ por lo que el espacio recorrido con respecto a OX' es $s' = -1\ \mathrm{m}$. Como la velocidad es negativa, fuerza y desplazamiento tienen el mismo sentido, por lo que el trabajo es positivo

$$W_F = F_x s = 4\ \mathrm{J}$$

Por consiguiente, el trabajo total de la fuerza con respecto a OX' es nulo, lo que es consistente con una variación nula de la energía cinética.

Sobre un muelle vertical de masa despreciable y de constante recuperadora *k* se deposita suavemente una masa *m*. Si despreciamos cualquier rozamiento:

–**Calcular la amplitud de la oscilación que experimentará la masa.**

–**Calcular el trabajo realizado sobre la masa por la fuerza elástica del muelle desde el momento en el que depositamos la masa hasta el punto de máxima compresión del muelle. Interpretar el valor y el signo del trabajo obtenido.**

Solución:
Tomamos como origen de alturas la posición inicial del muelle. Aplicando la conservación de la energía obtenemos la posición más baja de la oscilación:

$$0 = mgh_{\min} + \frac{1}{2}kh_{\min}^2 \;\rightarrow\; h_{\min} = -\frac{2mg}{k}$$

Como la posición de equilibrio es $h_0 = -\dfrac{mg}{k}$, la amplitud de la oscilación será

$$h_0 - h_{\min} = \frac{mg}{k}$$

El trabajo realizado por la fuerza recuperadora vale

$$W_{\text{muelle}} = \int_{h=0}^{h=h_{\min}} \mathbf{F}_{\text{elástica}} \cdot d\mathbf{h} = \int_{h=0}^{h=h_{\min}} -khdh = -\frac{1}{2}kh_{\min}^2$$

El signo negativo indica que es el muelle el que recibe trabajo de la masa y que este trabajo es igual a la ganancia de energía potencia elástica del muelle. Como se puede comprobar, el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la masa es igual a la variación de su energía cinética (*Teorema de las Fuerzas Vivas*). En efecto, el trabajo realizado por el peso vale:

$$W_{\text{peso}} = \int_{h=0}^{h=h_{\min}} \mathbf{p} \cdot d\mathbf{h} = \mathbf{p} \cdot \int_{h=0}^{h=h_{\min}} d\mathbf{h} = \mathbf{p} \cdot \Delta\mathbf{h} = mg\left|h_{\min}\right| = -mgh_{\min}$$

donde hemos tenido en cuenta que $h_{\min}$ es negativa. El trabajo total será:

$$\Delta E_c = W_{\text{total}} = W_{\text{gravedad}} + W_{\text{muelle}} = -mgh_{\min} - \frac{1}{2}kh_{\min}^2 = 0$$

Una fuerza *F* tira de un bloque de masa *m* inicialmente en reposo sobre un plano inclinado un ángulo α sobre la horizontal. La fuerza actúa hacia arriba y paralela al plano. El coeficiente de

rozamiento es μ. Queremos saber la velocidad del bloque después de recorrer una distancia *d* sobre el plano.
Resolver el problema:
- Aplicando la segunda ley de Newton.
- Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica, que establece que la variación de la energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas.
- Aplicando el teorema trabajo-energía cinética (o teorema de las fuerzas vivas), que establece que el trabajo total realizado sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética.
Solución:
- Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección tangencial al plano tenemos que:

$$F - mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\mu = ma$$

$$a = \frac{F - mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\mu}{m}$$

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2d\,\frac{F - mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\mu}{m}}$$

- Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica tenemos que el incremento de energía mecánica es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas: F y la fuerza de rozamiento:

$$\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mg\Delta h = \frac{1}{2}mv^2 + mgd\sin\alpha$$

$$W_{n.c.} = W_F + W_{Fr} = Fd - \mu dmg\cos\alpha$$

Igualando tenemos que

$$v = \sqrt{\frac{2d}{m}\left(F - mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\mu\right)}$$

- Aplicando el teorema trabajo-energía cinética (o teorema de las fuerzas vivas) tenemos que el incremento de la energía cinética es igual al trabajo de todas las fuerzas, conservativas y no conservativas: F, fuerza de rozamiento y componente tangencial del peso:

$$W = W_F + W_{Fr} + W_{P_t} = \Delta E_c$$

$$Fd - \mu dmg\cos\alpha - dmg\sin\alpha = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2d}{m}\left(F - mg\sin\alpha - mg\cos\alpha\mu\right)}$$

Dos veleros sobre hielo de masas *m* y 2*m*, respectivamente, compiten en un lago helado horizontal sin fricción. Los dos veleros parten de la posición de salida con velocidad cero y describen una trayectoria rectilínea hasta llegar a la meta. En todo momento de la competición la velocidad y la intensidad de la fuerza del viento son constantes.
- Si la energía cinética con la que llegan a la meta es la misma, ¿cuál tendrá la vela más grande? Razonar la respuesta.
- ¿Qué velero llegará antes?
Solución:
Independientemente del tamaño de la vela, como la velocidad e intensidad del viento son constantes la fuerza que actuará sobre cada velero $\mathbf{F}_i$ será constante. Sabemos que la variación de la energía cinética viene dada por el trabajo realizado por esta fuerza sobre el velero:

$$\Delta E_{c,i} = W_i = \int_0^s \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{s} = \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{s} = F_i s$$

Como la variación de la energía cinética es la misma en los dos veleros, igualando obtenemos que las fuerzas totales que actúan sobre los dos veleros son iguales:

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_2$$

Cuanto mayor sea la vela, es razonable suponer que mayor será la fuerza del viento sobre el velero por lo que deducimos que las velas serán también iguales.
Como las fuerzas son constantes, las aceleraciones experimentadas por ambos veleros serán constantes. La aceleración será mayor en el caso del velero de menor masa:

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{F}_1}{m} > \mathbf{a}_2 = \frac{\mathbf{F}_2}{2m}$$

por lo que éste llegará antes.

Una persona salta hacia el suelo desde una cierta altura *h* con una velocidad inicial v_0. Lo hace de tres formas distintas: a) salta hacia arriba; b) salta hacia abajo y c) salta horizontalmente. Ordenar las tres opciones en función del golpe o impacto que recibe el saltador al llegar al suelo. Podemos definir como golpe o impacto la fuerza media F_m que experimenta la persona al chocar contra el suelo.

<u>Solución:</u>
Podemos suponer que el choque dura un intervalo de tiempo Δt en los tres casos. Tenemos que

$$F_{\mathrm{m}} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{Cmv}{\Delta t},$$

siendo *C* una constante que nos indica si hay rebote completo y por tanto conservación de la energía mecánica ($C = 2$), si no hay rebote y por tanto el choque es perfectamente inelástico ($C = 1$), o que vale $1 < C < 2$ para los casos intermedios. Evidentemente supondremos que el valor de *C* es el mismo para los tres casos, por lo que el golpe sólo dependerá de la velocidad con la que el saltador impacta en el suelo.
Aplicando el principio de conservación de la energía mecánica tenemos, para los casos (a) y (b):

$$mgh + \frac{1}{2}mv_{0y}{}^2 = \frac{1}{2}mv_y{}^2 \quad \Rightarrow \; v_y = \sqrt{2gh + v_0{}^2}$$

mientras que para el caso (c):

$$mgh + \frac{1}{2}mv_{0x}{}^2 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_y{}^2 + v_x{}^2\right)$$

Como $v_x = v_{0x}$, finalmente obtenemos

$$v_y = \sqrt{2gh}$$

Resulta evidente, por tanto, que el golpe será mayor y por igual en los casos (a) y (b), y menor en el caso (c).

Una partícula desliza libremente sin rozamiento sobre una superficie situada en el plano XY. La dirección del movimiento con respecto a un sistema de referencia en reposo situado en el origen de coordenadas es el eje X y el sentido es el positivo. Al aplicar una fuerza constante sobre la partícula, la dirección del movimiento no cambia pero la energía cinética de la partícula disminuye de 49 a 9 J. Calcular la componente F_x del vector fuerza si la partícula se ha desplazado una distancia de 10 m durante el intervalo de tiempo en el que la fuerza ha sido aplicada. ¿Qué podemos decir de las otras dos componentes de la fuerza, F_y y F_z?

<u>Solución:</u>
Como la fuerza no cambia la dirección del movimiento, la componente Y debe ser nula mientras que la componente Z debe tener sentido negativo para que pueda ser compensada por la reacción de la

superficie (si fuera positiva la dirección del movimiento variaría). A partir de los datos podemos calcular la componente X. El trabajo de dicha fuerza debe ser igual a la variación de la energía cinética:

$$W_{F_x} = \Delta E_c$$

$$F_x s = E_{c,f} - E_{c,i}$$

$$F_x = \frac{E_{c,f} - E_{c,i}}{s} = -4 \text{ N}$$

Por consiguiente, la fuerza que actúa sobre la partícula tendrá la expresión:

$$\mathbf{F} = (-4, 0, -F_z) \text{ N}$$