TEORÍA DE LA DECISIÓN
Exámenes

Curso 2019/2020 - 1ª Semana

Un problema de decisión consta de dos acciones posibles a_1 y a_2 y tres estados de la naturaleza θ_1, θ_2 y θ_3. Las pérdidas asociadas son

	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	4	0	1
a_2	-1	3	2

A) Determinar la acción aleatorizada minimax y el valor del problema de decisión.
B) Determinar la acción aleatorizada óptima con el criterio de Savage.
C) Determinar la acción Bayes frente a cada distribución a priori π sobre los estados de naturaleza. Deducir la distribución menos favorable π_0 y el mínimo riesgo Bayes frente a π_0.

Antes de tomar la decisión se puede realizar un experimento con dos resultados posibles x_1 o x_2, cuyas probabilidades, según los estados de la naturaleza son:

	θ_1	θ_2	θ_3
x_1	0,3	0,5	0,8
x_2	0,7	0,5	0,2

D) Determinar la regla de decisión Bayes frente a cada distribución π sobre los estados de la naturaleza.
E) Calcular los riesgos frente a π de las reglas de decisión que son reglas Bayes para alguna distribución π.

Solución:

A) Para la decisión aleatorizada $\boldsymbol{a} = (\alpha, 1-\alpha)$, las funciones de pérdida son

$$L(\theta_1, \boldsymbol{a}) = 5\alpha - 1 \qquad L(\theta_2, \boldsymbol{a}) = -3\alpha + 3 \qquad L(\theta_3, \boldsymbol{a}) = -\alpha + 2$$

Se tiene que

$$\max_{\theta \in \Theta} L(\theta, \boldsymbol{a}) = \begin{cases} -3\alpha + 3 & \alpha \le 1/2 \\ 5\alpha - 1 & \alpha > 1/2 \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que el valor del problema de decisión es

$$V = \min_{\boldsymbol{a} \in A^*} \max_{\theta \in \Theta} L(\theta, \boldsymbol{a}) = 3/2$$

y se consigue con la acción aleatorizada $\boldsymbol{a} = (1/2, 1/2)$.

B) La función de decepción viene dada para cada estado de naturaleza y cada acción aleatorizada $\boldsymbol{a} = (\alpha, 1-\alpha)$, por

$$D(\theta_1, \boldsymbol{a}) = 5\alpha \qquad D(\theta_2, \boldsymbol{a}) = -3\alpha + 3 \qquad L(\theta_3, \boldsymbol{a}) = -\alpha + 1$$

Se trata de aplicar ahora el criterio minimax. Se tiene que

$$\max_{\theta \in \Theta} D(\theta, \boldsymbol{\alpha}) = \begin{cases} -3\alpha + 3 & \alpha \leq 3/8 \\ 5\alpha & \alpha > 3/8 \end{cases}$$

cuyo mínimo se alcanza en $\alpha = 3/8$. Por tanto, la acción aleatorizada óptima con el criterio de Savage es $\boldsymbol{\alpha} = (3/8, 5/8)$.

C) Sea $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, 1 - \pi_1 - \pi_2)$ una distribución a priori sobre los estados de naturaleza, que debe verificar $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1$. Sabemos que, para cada distribución a priori sobre los estados de naturaleza, existe una decisión no aleatorizada que alcanza el mínimo riesgo Bayes, dado que el conjunto de decisiones es finito y el número de estados también. Para cada distribución a priori $\boldsymbol{\pi}$, se tiene que

$$L(\boldsymbol{\pi}, a_1) = 3\pi_1 - \pi_2 + 1 \qquad\qquad L(\boldsymbol{\pi}, a_2) = \pi_1 + \pi_2 + 2$$

Se trata de dos planos que se cortan a lo largo de la recta

$$\pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{2}$$

Por tanto, se tiene que

- Si $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 > \pi_1 - \frac{1}{2}$, entonces $r(\boldsymbol{\pi}) = 3\pi_1 - \pi_2 + 1$ y la acción Bayes es a_1.
- Si $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{2}$, entonces $r(\boldsymbol{\pi}) = 2\pi_1 + \frac{3}{2}$ y tanto a_1 como a_2, como todas las acciones aleatorizadas son acciones Bayes.
- Si $0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 < \pi_1 - \frac{1}{2}$, entonces $r(\boldsymbol{\pi}) = \pi_1 + \pi_2 + 2$ y la acción Bayes es a_2.

Sabemos que la distribución menos favorable hace que la acción minimax también sea Bayes. Como la acción minimax es aleatorizada, $\boldsymbol{\alpha} = (1/2, 1/2)$, entonces la única posibilidad es que estemos en el segundo caso de los anteriores. Es decir, la distribución menos favorable debe verificar

$$0 \leq \pi_1 + \pi_2 \leq 1, \pi_2 = \pi_1 - \frac{1}{2} \qquad \text{y} \qquad r(\boldsymbol{\pi}) = 2\pi_1 + \frac{3}{2}$$

y, con estas condiciones, se trata de maximizar dicho riesgo Bayes, que aumenta con π_1. Por tanto, se tiene que debe ser

$$\boldsymbol{\pi}_0 = (3/4, 1/4) \qquad \text{y} \qquad r(\boldsymbol{\pi}_0) = 3$$