Introducción a las Ecuaciones Diferenciales / 2ª semana. / Febrero de 2017

Alumno..

Nota.- Simplificar al máximo la respuesta y remarcarla claramente (en un recuadro). Escribir también la solución (excepto las demostraciones) en los recuadros de esta hoja, que se debe entregar junto con el ejercicio.

1º) Se considera la ecuación diferencial $(x+2y+1)y' = 4x - y + 1$. Se pide:

a) Hallar, expresando y como función de x, todas las soluciones cuya gráfica es una recta.

b) Hallar, expresando y como función de x, todas las soluciones que no están definidas en toda la recta real; y decir cuál es el máximo conjunto abierto I en el que está definida cada una de ellas. (Si no existiera ninguna, indicar por qué).

2º) Resolver, expresando y como función de x, y hallando todas las soluciones posibles, las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y\cos x - y' sen x = y^2 sen(2x)$.

Decir también cuál es el máximo conjunto abierto I, siendo $\frac{\pi}{2} \in I$, en el que está definida cada solución que verifique $y(\frac{\pi}{2}) \leq 1$.

b) $x(y')^2 + y^2 = 2$.

Decir cuál es el máximo conjunto abierto en el que está definida cada solución.

(Sugerencia: una de las formas de hacerlo es hallar una relación entre x, y', e y'' ; y considerar el cambio $u = y'\sqrt{x}$ si $x > 0$, $u = y'\sqrt{-x}$ si $x < 0$).

3º) Hallar un intervalo abierto I y una función derivable $f : I \to R$ verificando que $0 \in I$; $f(0) = -1$; y en cada punto $P(x,y)$ de la gráfica de f, la normal a la gráfica corta al eje horizontal en un punto Q, que dista del eje vertical tres veces más que el punto P.

Hallar todas las soluciones posibles, expresando $y = f(x)$ como función de x, y exigiendo en cada caso que el intervalo abierto I sea el mayor posible.

4º) Supongamos que (g_n) es una sucesión equicontinua y decreciente de funciones reales, definidas en R, que converge puntualmente a una función $g : R \to R$. Se pide:

a) Poner un ejemplo en que la sucesión (g_n) sea uniformemente equicontinua, y otro ejemplo en que no lo sea. (Si alguno de estos ejemplos no pudiera darse, indicar por qué).

b) Poner un ejemplo en que la función g sea continua, y un ejemplo en que no lo sea. (Si alguno de estos casos no fuera posible, indicar por qué).

c) Decir, demostrando la respuesta, si es posible siempre, o no, extraer de (g_n) una subsucesión que converja uniformemente.

1º) a) Una forma de hacerlo sería hallar todas las soluciones, y ver después las que tienen como gráfica una recta.

Ahora bien, puesto que en este apartado sólo nos piden estas últimas, también podemos, de una forma muy elemental, ver cuáles son las rectas que satisfacen la ecuación dada.

En el plano, una recta, en la que y sea función de x, es una recta que no es vertical, y se expresa como $y = ax + b$, siendo a y b números reales cualesquiera (fijos), como fácilmente se comprueba.

Dados dos números reales a y b, la función $y = ax + b$ es derivable, y su derivada es $y' = a$.

Sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos que la recta $y = ax + b$ es solución de la ecuación dada si, y solamente si, para todo número real x se verifica:

$(x + 2ax + 2b + 1)a = 4x - (ax + b) + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (-4 + 2a + 2a^2)x + (2ab + a + b) = 1.$

Y esto, como fácilmente se comprueba, equivale a:

$-4 + 2a + 2a^2 = 0$, $2ab + a + b = 1 \Longleftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2 + a + a^2 = (-1 + a)(2 + a) = 0, 2ab + a + b = 1 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 1$ o $a = -2$, $2ab + a + b = 1 \Leftrightarrow a = 1$, $2b + 1 + b = 1$, o bien $a = -2$, $-4b - 2 + b = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a = 1, b = 0$, o bien $a = -2, b = -1$.

Por tanto, hay dos soluciones, y sólo dos, cuya gráfica es una recta. Son:

$y = x$ (recta diagonal de los cuadrantes primero y tercero), $y = -2x - 1$.

(Sustituyendo, se comprueba que, en efecto, tanto $y = x$ como $y = -2x - 1$ son soluciones de la ecuación dada. Además, son las únicas soluciones cuya gráfica es una recta, de acuerdo con lo que acabamos de ver. Obsérvese que lo hemos resuelto utilizando procedimientos elementales.)

---

b) Una forma de hacerlo será hallar todas las soluciones (ahora sí), y ver cuáles son las que no están definidas en toda la recta real.

Las rectas $x + 2y + 1 = 0$, $4x - y + 1 = 0$ se cortan en el punto $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$, como es fácil comprobar.

Se tiene que $x + 2y + 1 = (x + \frac{1}{3}) + 2(y + \frac{1}{3})$, $4x - y + 1 = 4(x + \frac{1}{3}) - (y + \frac{1}{3})$. Por tanto, la ecuación dada puede ponerse así:

$[(x + \frac{1}{3}) + 2(y + \frac{1}{3})]y' = 4(x + \frac{1}{3}) - (y + \frac{1}{3})$.

Si ponemos $X = x + \frac{1}{3}$, $Y = y + \frac{1}{3}$, entonces $Y' = y'$, y la ecuación diferencial queda en la forma

$[X + 2Y]Y' = 4X - Y$.

Si Y es una función derivable de X, solución de la ecuación diferencial dada, y en un punto dado (X, Y) se verificase que $X + 2Y = 0$, entonces sería también $4X - Y = 0$, luego $X = Y = 0$. Por tanto, si Y es una función derivable de X, solución de la ecuación diferencial dada, y en un punto dado $X \neq 0$, entonces debe ser $X + 2Y \neq 0$.

Para $X \neq 0$, podemos poner pues $Y' = \frac{4X-Y}{X+2Y} = \frac{4-\frac{Y}{X}}{1+2\frac{Y}{X}}$.

Para $X \neq 0$, sea $U = \frac{Y}{X}$. Se tiene que, si Y es una función derivable de X, U también lo es (para $X \neq 0$). Además, $Y = UX$.

Por tanto, $Y' = U'X + U$ (siendo $X \neq 0$). Se tiene pues que

$U'X + U = \frac{4-U}{1+2U} \Leftrightarrow \quad U'X = \frac{4-U}{1+2U} - U = \frac{4-2U-2U^2}{1+2U} = 2\frac{2-U-U^2}{1+2U} = 2\frac{(1-U)(2+U)}{1+2U}$.

Si $(1-U)(2+U) = 0$, entonces $1-U = 0$ o $2+U = 0$.

Si $1-U = 0$, entonces $U = 1$, luego $Y = X$. Es fácil comprobar (y lo hemos visto en el apartado anterior) que $Y = X$ (o, lo que es equivalente, $y = x$) es una solución de la ecuación diferencial dada. Además, en este caso, $U' = 0$.

Si $2+U = 0$, entonces $U = -2$, luego
$Y = -2X \Leftrightarrow y + \frac{1}{3} = -2x - \frac{2}{3} \Leftrightarrow y = -2x-1$. Es fácil comprobar (también lo hemos visto en el apartado anterior) que $y = -2x-1$ es una solución de la ecuación diferencial dada. Además, en este caso, $U' = 0$.

Supongamos pues que $X \neq 0$, $(1-U)(2+U) \neq 0$. En este caso,
$U'X = 2\frac{(1-U)(2+U)}{1+2U} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{2}{X} = \frac{1+2U}{(1-U)(2+U)} = \frac{1}{1-U} - \frac{1}{2+U}$.

Por tanto, integrando, se tiene que
$2\log|X| = -\log|1-U| - \log|2+U| + K = -\log|(1-U)(2+U)| + K \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log|(1-U)(2+U)| = -2\log|X| - K = \log\frac{1}{X^2} - K$.

Y, en consecuencia, $|(1-U)(2+U)| = \frac{C}{X^2}$, siendo $C > 0$. Por tanto,
$(1-U)(2+U) = -U^2 - U + 2 = \frac{E}{X^2}$, siendo $E \neq 0$.

Luego $U^2 + U - 2 + \frac{D}{X^2} = 0$, con $D \neq 0$.

Resolviendo, obtenemos que, para $X \neq 0$, $\frac{Y}{X} = U = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8+\frac{A}{X^2}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{B}{X^2}}$, con $B = \frac{A}{4} \neq 0$.

O lo que es lo mismo, $\frac{Y}{X} = U = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{1 + \frac{L}{X^2}}$, con $L \neq 0$.

Se tiene pues que $Y = -\frac{X}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{X^2 + L}$, con $L \neq 0$.

Sustituyendo $(Y = y + \frac{1}{3},\ X = x + \frac{1}{3})$, tenemos que

$y + \frac{1}{3} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{6} \pm \frac{3}{2}\sqrt{(x+\frac{1}{3})^2 + L}$, con $L \neq 0$; o lo que es lo mismo,

$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{(x+\frac{1}{3})^2 + L}$, siendo $L \neq 0$.

Un sencillo cálculo (sustituyendo y en la ecuación inicial) muestra que, en efecto, la expresión así obtenida es solución de la ecuación del enunciado, en cualquier intervalo abierto donde $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{(x+\frac{1}{3})^2 + L}$ esté bien definida y sea derivable, y para cualquier valor de la constante L.

Obsérvese que, de hecho, si pusiéramos $L = 0$ en la expresión anterior se obtendrían las dos rectas $y = x$, $y = -2x-1$, que son soluciones de la ecuación dada según hemos visto ya. Obviamente, en este caso, las dos funciones $y = x$, $y = -2x-1$ están bien definidas, y son derivables, en toda la recta real R. Por tanto, el máximo conjunto abierto I donde están definidas es $I = R$, que obviamente es un intervalo.

Si $L > 0$, las dos funciones $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{(x+\frac{1}{3})^2 + L}$ (son dos funciones, según tomemos positiva o negativa la raíz cuadrada) también están bien definidas y son derivables en toda la recta real R, pues $(x+\frac{1}{3})^2 + L \geq L > 0$ para cualquier valor $x \in R$. Por tanto, para $L > 0$, también es $I = R$.

Si $L < 0$, las dos funciones $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{(x+\frac{1}{3})^2 + L}$ están bien definidas si, y solamente si, $(x+\frac{1}{3})^2 + L \geq 0$; y ambas funciones son derivables si, y solamente si, $(x+\frac{1}{3})^2 + L > 0$. Ahora bien, para $L < 0$, se tiene que $-L > 0$, y

$(x+\frac{1}{3})^2 + L > 0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{3})^2 > -L \Leftrightarrow \left|x+\frac{1}{3}\right| > \sqrt{-L} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+\frac{1}{3} > \sqrt{-L}$, o bien $-(x+\frac{1}{3}) = -x-\frac{1}{3} > \sqrt{-L} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} + \sqrt{-L}$, o bien $x < -\frac{1}{3} - \sqrt{-L} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \notin [-\frac{1}{3} - \sqrt{-L}, -\frac{1}{3} + \sqrt{-L}] \Leftrightarrow x \in R - [-\frac{1}{3} - \sqrt{-L}, -\frac{1}{3} + \sqrt{-L}]$.

Resumiendo, la ecuación dada admite como soluciones las funciones de la forma $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{(x+\frac{1}{3})^2 + L}$, para cualquier constante real L, y éstas son todas las soluciones posibles. Si $L \geq 0$, entonces las funciones dadas están definidas en toda la recta real R, que es obviamente el máximo conjunto abierto I en el que están definidas. Si $L < 0$, entonces el máximo conjunto abierto I en el que están definidas, las dos soluciones dadas, es $I = R - [-\frac{1}{3} - \sqrt{-L}, -\frac{1}{3} + \sqrt{-L}]$.

Y estas últimas soluciones, para $L < 0$, son las que no están definidas en toda la recta real, como nos pide el enunciado de este apartado.

Obsérvese que, dado un número $L < 0$, el conjunto abierto $I = R - [-\frac{1}{3} - \sqrt{-L}, -\frac{1}{3} + \sqrt{-L}]$ no es un intervalo, sino que es unión de los dos intervalos abiertos disjuntos

$I_1 =]\leftarrow, -\frac{1}{3} - \sqrt{-L}[= \left\{x \in R / x < -\frac{1}{3} - \sqrt{-L}\right\}$,

$I_2 =]-\frac{1}{3} + \sqrt{-L}, \rightarrow [= \left\{x \in R / x > -\frac{1}{3} + .\sqrt{-L}\right\}$.

Aunque sea elemental, conviene que hagan algún dibujo para verlo mejor, para valores negativos "fáciles" de L. (Por ejemplo, para $L = -1$, o para $L = -4$, o para $L = -\frac{4}{9}$).

Nótese también que, dado un número real L,

$(x+\frac{1}{3})^2 + L = x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} + L = x^2 + \frac{2}{3}x + T$, poniendo $T = \frac{1}{9} + L$.

Y que $L < 0 \Leftrightarrow T < \frac{1}{9}$.

2º) a) Queremos hallar todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial $y\cos x - y' senx = y^2 sen(2x)$.

Es inmediato comprobar que la función constante $y = 0$, definida en toda la recta real ($I = R$), es solución de la ecuación dada.

Para $y \neq 0$, se tiene, dividiendo por y^2, que

$\frac{1}{y}\cos x - \frac{y'}{y^2} senx = sen(2x)$. O lo que es lo mismo, $\frac{1}{y}\cos x + (\frac{1}{y})' senx = sen(2x)$.

Poniendo $u = \frac{1}{y}$, $u\cos x + u' senx = sen(2x)$.

La ecuación homogénea asociada, $v\cos x + v' senx = 0 \Leftrightarrow v\cos x = -v' senx$,

tiene como solución $\log|v| = -\log|senx| + C$ (para $v \neq 0 \neq senx$), luego $v = \frac{k}{senx} = k\cos ecx$.

Si ponemos $u = \frac{g}{senx}$, siendo $g(x)$ una función derivable, la ecuación dada se convierte en

$\frac{g\cos x}{senx} - \frac{g\cos x}{senx} + g' = sen(2x)$.

Luego $g' = sen(2x) = 2senx\cos x$; y por tanto, $g = sen^2 x + K$,

$u = senx + \frac{K}{senx} = \frac{sen^2x+K}{senx}$.

Así pues, $y = \frac{1}{u} = \frac{senx}{sen^2x+K}$, función definida para $sen^2x + K \neq 0$.

Es inmediato comprobar que, paa cualquier valor de la constante K, la función así obtenida es en efecto una solución de la ecuación dada.

Resumiendo, las soluciones son:

— La función constante $y = 0$, definida en $I = R$.

— La función $y = \frac{senx}{sen^2x+K}$, siendo K una constante cualquiera, función definida para $sen^2x + K \neq 0$.

Se pide también cuál es el máximo conjunto abierto I, siendo $\frac{\pi}{2} \in I$, en el que está definida cada solución que verifique $y(\frac{\pi}{2}) \leq 1$.

La función constante $y = 0$ verifica esa condición, pues $y(\frac{\pi}{2}) = 0 \leq 1$. Y esta función constante está definida en $I = R$.

Si $y = \frac{senx}{sen^2x+K}$, siendo K una constante, se tiene que $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{1+K}$ (debe ser $K \neq -1$); y

$\frac{1}{1+K} \leq 1$ si, y solamente si, o bien $K \geq 0$ (en cuyo caso $0 < \frac{1}{1+K} \leq 1$),

o bien $K < -1$ (en cuyo caso, $1 + K < 0$, y $\frac{1}{1+K} < 0 < 1$).

(En caso contrario, si $-1 < K < 0$, se tiene que $0 < 1 + K < 1$, y $\frac{1}{1+K} > 1$).

Tanto si $K > 0$, como si $K < -1$, la solución $y = \frac{senx}{sen^2x+K}$ está definida en toda la recta real; es decir, en el conjunto abierto $I = R$.

Si $K = 0$, obtenemos la solución $y = \frac{1}{senx}$, que está definida para $senx \neq 0$; es decir, en el conjunto abierto $I = \left\{x \in R/x \neq k\pi, \text{ con } k \in Z\right\}$.

Resumiendo, las soluciones que cumplen la condición del enunciado son:

— La función constante $y = 0$, definida en $I = R$.

— Cualquier función de la forma $y = \frac{senx}{sen^2x+K}$, siendo K una constante estrictamente positiva o estrictamente menor que -1; función definida también en $I = R$.

— La función $y = \frac{1}{senx}$, definida en el conjunto abierto $I = \left\{x \in R/x \neq k\pi, \text{ con } k \in Z\right\}$.

2º) b) Queremos hallar todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial $x(y')^2 + y^2 = 2$.

Se tiene que $x(y')^2 + y^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = 2 - x(y')^2$.

Debe ser pues $2 - x(y')^2 \geq 0$, e $y = \pm\sqrt{2 - x(y')^2}$.

Para $2 - x(y')^2 > 0$, tenemos que $y' = \frac{-(y')^2-2xy'y''}{2\sqrt{2-x(y')^2}} = -\frac{(y')^2+2xy'y''}{2\sqrt{2-x(y')^2}} = y'\frac{y'+2xy''}{2\sqrt{2-x(y')^2}}$.

Si $y' = 0$, en todo punto, entonces la función y es constante, $y = k$. Sustituyendo en la ecuación de partida, se obtiene que una función constante $y = k$ es solución si, y solamente si, $k^2 = 2$.

Así pues, las dos funciones constantes $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, ambas definidas en toda la recta real ($I = R$), son soluciones de la ecuación dada.

Veamos si puede haber además otras soluciones. Si y es una solución con $y' \neq 0$, entonces se sigue de lo antes visto que debe ser

$1 = \frac{y'+2xy''}{2\sqrt{2-x(y')^2}}$, $2\sqrt{2 - x(y')^2} = y' + 2xy''$ (i);

lo cual nos da una relación entre x, y', e y''.

De acuerdo con la sugerencia del enunciado, hagamos primero el cambio $u = y'\sqrt{x}$, para $x > 0$.

Siendo $x > 0$, y haciendo este cambio, obtenemos que $u^2 = (y')^2 x$,

$u' = y''\sqrt{x} + \frac{y'}{2\sqrt{x}} = \frac{2y''x+y'}{2\sqrt{x}}$, luego $2y''x + y' = 2u'\sqrt{x}$.

De acuerdo con lo anterior y con (i),

debe ser $2\sqrt{2 - x(y')^2} = 2\sqrt{2-u^2} = 2u'\sqrt{x}$, siendo $x > 0$, $2 - x(y')^2 = 2 - u^2 > 0$.

Luego $\frac{u'}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, con $x > 0$, $2 > u^2$.

Es decir, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}u'}{\sqrt{1-(\frac{u}{\sqrt{2}})^2}}$, con $x > 0$, $1 > (\frac{u}{\sqrt{2}})^2$.

Integrando, $2\sqrt{x} + C = arcsen(\frac{u}{\sqrt{2}})$, siendo C una constante arbitraria, para $x > 0$; luego $\frac{u}{\sqrt{2}} = sen(2\sqrt{x} + C)$, y tenemos que

$y'\sqrt{x} = u = \sqrt{2}\, sen(2\sqrt{x} + C)$, siendo $x > 0$. Por tanto,

$y' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} sen(2\sqrt{x} + C)$, para $x > 0$. Integrando, resulta que

$y = -\sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + C) = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + C + \pi) = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + K)$

(poniendo $K = C + \pi$), función definida en el intervalo abierto $R_+ = \{x \in R/x > 0\}$.

Conviene comprobarlo. Sustituyendo en la ecuación inicial, tenemos que

$x(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} sen(2\sqrt{x} + K))^2 + (\sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + K)^2 = 2sen^2(2\sqrt{x} + K) + 2\cos^2(2\sqrt{x} + K) = 2$

Por tanto, la función obtenida, $y = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + K)$, definida para $x > 0$, es en efecto una solución, para cualquier valor de la constante K.

Obsérvese que, dada cualquier constante B, la función $y = -\sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + B)$, definida para $x > 0$, es una de las anteriores, pues

$-\sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + B) = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + B + \pi) = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + K)$, siendo $K = B + \pi$.

Obsérvese también que, dada una constante A, la función $y = \sqrt{2}\, sen(2\sqrt{x} + A)$ es una de las anteriores, pues

$\sqrt{2}\, sen(2\sqrt{x} + A) = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + A - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + K)$, siendo $K = A - \frac{\pi}{2}$.

Siguiendo con la sugerencia del enunciado, hagamos ahora el cambio $u = y'\sqrt{-x}$, para $x < 0$.

Siendo $x < 0$, y haciendo este cambio, obtenemos que $u^2 = (y')^2(-x) = -(y')^2 x$,

$u' = y''\sqrt{-x} - \frac{y'}{2\sqrt{-x}} = \frac{-2y''x-y'}{2\sqrt{-x}} = -\frac{2y''x+y'}{2\sqrt{-x}}$, luego $2y''x + y' = -2u'\sqrt{-x}$.

De acuerdo con lo anterior y con (i),

debe ser $2\sqrt{2 - x(y')^2} = 2\sqrt{2+u^2} = -2u'\sqrt{-x}$, siendo $x < 0$, $2 - x(y')^2 = 2 + u^2 > 0$.

Luego $\frac{u'}{\sqrt{2+u^2}} = \frac{-1}{\sqrt{-x}}$, con $x < 0$.

Es decir, $\frac{-1}{\sqrt{-x}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}u'}{\sqrt{1+(\frac{u}{\sqrt{2}})^2}}$, con $x < 0$.

Integrando, $2\sqrt{-x} + K = \arg Sh(\frac{u}{\sqrt{2}})$, siendo K una constante arbitraria, para $x < 0$; luego $\frac{u}{\sqrt{2}} = Sh(2\sqrt{-x} + K)$, y tenemos que

$y'\sqrt{-x} = u = \sqrt{2}\, Sh(2\sqrt{-x} + K)$, siendo $x < 0$. Por tanto,

$y' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-x}} Sh(2\sqrt{-x} + K)$, para $x < 0$. Integrando, resulta que

$y = -\sqrt{2}\, Ch(2\sqrt{-x} + K)$, función definida en el intervalo abierto $R_- = \{x \in R / x < 0\}$.

Los cálculos anteriores también pueden hacerse considerando $-\sqrt{2}$ en vez de $\sqrt{2}$ (o análogamente, la opuesta a alguna de las raíces que aparecen); y entonces podemos obtener, para cada constante K, la función

$y = \sqrt{2}\, Ch(2\sqrt{-x} + K)$, función definida en el intervalo abierto $R_- = \{x \in R / x < 0\}$.

Conviene comprobarlo. Sustituyendo en la ecuación inicial, tenemos que

$x(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-x}} Sh(2\sqrt{-x} + K))^2 + (\sqrt{2}\, Ch(2\sqrt{-x} + K))^2 =$

$= \frac{2x}{-x}(Sh(2\sqrt{-x} + K))^2 + 2(Ch(2\sqrt{-x} + K))^2 = 2(-Sh^2(2\sqrt{-x} + K) + Ch^2(2\sqrt{-x} + K)) =$

Por tanto, las funciones obtenidas, $y = \sqrt{2}\, Ch(2\sqrt{-x} + K)$, $y = \sqrt{2}\, Ch(2\sqrt{-x} + K)$ ambas definidas para $x < 0$, son en efecto soluciones, para cualquier valor de la constante K.

Resumiendo, tenemos que las soluciones son:

—Las funciones constantes $y = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, ambas definidas en toda la recta real $(I = R)$.

— Las funciones de la forma $y = \sqrt{2}\cos(2\sqrt{x} + K)$, siendo K cualquier constante, definidas en el intervalo abierto $I = R_+ = \{x \in R / x > 0\}$.

— Las funciones de la forma $y = \sqrt{2}\, Ch(2\sqrt{-x} + K)$, siendo K cualquier constante, definidas en el intervalo abierto $I = R_- = \{x \in R / x < 0\}$.

— Las funciones de la forma $y = -\sqrt{2}\, Ch(2\sqrt{-x} + K)$, siendo K cualquier constante,

definidas en el intervalo abierto $I = R_- = \{x \in R / x < 0\}$.

(Hay otras formas de hacerlo. Cualquier procedimiento correcto conduce al mismo resultado.)

3º) Se pide hallar un intervalo abierto I y una función derivable $f : I \to R$ verificando que $0 \in I$; $f(0) = -1$; y en cada punto $P(x,y)$ de la gráfica de f, la normal a la gráfica corta al eje horizontal en un punto Q, que dista del eje vertical tres veces más que el punto P.

Si la normal a la gráfica de la función pedida, en un punto $P(x,y)$, corta al eje horizontal en un punto que dista del eje vertical tres veces más que el punto P, entonces dicha normal no puede ser vertical, a menos que sea $x = 0$.

Por tanto, si $x \neq 0$, entonces debe ser $y' = f'(x) \neq 0$.

Si $y' \neq 0$, la recta normal a la gráfica en el punto $P(x,y)$ tiene como ecuación

$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$.

El eje horizontal tiene como ecuación $Y = 0$. En consecuencia, si llamamos $(X,0)$ al punto de corte de la normal considerada con el eje horizontal, debe cumplirse que

$-y = -\frac{1}{y'}(X - x) \Leftrightarrow yy' = X - x \Leftrightarrow X = x + yy'$.

Por tanto, el punto de corte, de la normal a la gráfica en el punto $P(x,y)$ con el eje horizontal, es el punto $Q(x + yy', 0)$. (Siendo $y' \neq 0$).

Ahora escribimos la condición de que la distancia del punto Q al eje vertical sea tres veces la distancia del punto P al eje vertical:

$|x + yy'| = 3|x| \quad \Leftrightarrow \quad x + yy' = 3x$, o bien $x + yy' = -3x$.

En el primer caso, si $x + yy' = 3x$, entonces $yy' = 2x \Leftrightarrow (\frac{1}{2}y^2)' = (x^2)'$.

Integrando, $\frac{1}{2}y^2 = x^2 + C$, siendo C una constante; luego $y^2 = 2x^2 + K$ (poniendo $K = 2C$).

Debe ser pues $2x^2 + K \geq 0$.

Obtenemos así, para cada constante K, las dos funciones $y = \sqrt{2x^2 + K}$, $y = -\sqrt{2x^2 + K}$, funciones ambas definidas para $2x^2 + K \geq 0$.

Si $K = 0$, obtenemos las dos rectas $y = \sqrt{2}\,x$, $y = -\sqrt{2}\,x$, funciones definidas y derivables en toda la recta real $I = R$.

(Conviene hacer un dibujo para comprobar gráficamente que estas dos rectas complen la condición pedida).

Si $K > 0$, entonces las dos funciones $y = \sqrt{2x^2 + K}$, $y = -\sqrt{2x^2 + K}$ también están definidas, y son derivables, en toda la recta real, $I = R$.

Además, si $K > 0$, la normal a la gráfica de estas dos funciones es vertical si, y solamente si, $x = 0$.

Si $K < 0$, entonces las dos funciones consideradas están definidas, y además son derivables, para

$2x^2 + K > 0 \Leftrightarrow x^2 > -\frac{K}{2} \Leftrightarrow |x| > \sqrt{-\frac{K}{2}} \Leftrightarrow x > \sqrt{-\frac{K}{2}}$, o bien $x < -\sqrt{-\frac{K}{2}}$.

Por tanto, si $K < 0$, las funciones consideradas están definidas y son derivables en los intervalos abiertos

$I = \left\{x \in R / x > \sqrt{-\frac{K}{2}}\right\} = (\sqrt{-\frac{K}{2}}, \rightarrow)$, y también

$I = \left\{x \in R / x < -\sqrt{-\frac{K}{2}}\right\} = (\leftarrow, -\sqrt{-\frac{K}{2}})$.

Un sencillo cálculo, que conviene hacer, permite comprobar que todas las funciones obtenidas cumplen, en efecto, la condición del enunciado.

En el segundo caso, si $x + yy' = -3x$, entonces $yy' = -4x \Leftrightarrow (\frac{1}{2}y^2)' = (-2x^2)'$.

Integrando, $\frac{1}{2}y^2 = -2x^2 + C$, siendo C una constante; luego $y^2 = -4x^2 + K = K - 4x^2$ (poniendo $K = 2C$).

Debe ser pues $K - 4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{K}{4} \geq x^2$.

La desigualdad anterior sólo tiene sentido si $K \geq 0$.

Si $K = 0$, debe ser $x = 0$; y el conjunto $\{0\}$, conjunto formado sólo por el punto 0, no es abierto.

Por tanto, debe ser $K > 0$. Y se obtienen las funciones $y = \sqrt{K - 4x^2}$, $y = -\sqrt{K - 4x^2}$;

funciones que definidas. y además son derivables, para

$K - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{K}{4} > x^2 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{K}{4}} = \frac{\sqrt{K}}{2} > |x| \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{K}}{2} < x < \frac{\sqrt{K}}{2} \Leftrightarrow x \in (-\frac{\sqrt{K}}{2}, \frac{\sqrt{K}}{2})$.

(Nótese que, para cada constante $K > 0$, estas dos soluciones son las partes superior e inferior de la elipse $y^2 + 4x^2 = K$; y que la normal a la gráfica es vertical si y sólo si $x = 0$).

Un sencillo cálculo, que conviene hacer, permite comprobar que estas funciones cumplen, en efecto, la condición del enunciado. Y del mismo modo que para el primer caso, puede hacerse algún dibujo, con valores "fáciles" de K, para verlo también gráficamente, en ambos casos, y así entender mejor la diferencia entre ellos.

Por tanto, las soluciones son:

— Las funciones $y = \sqrt{2x^2 + K}$, $y = -\sqrt{2x^2 + K}$, siendo $K \geq 0$; funciones definidas y derivables en toda la recta real $I = R$.

(En particular, si $K = 0$, se obtienen las rectas $y = \sqrt{2}\,x$, $y = -\sqrt{2}\,x$).

— Las funciones $y = \sqrt{2x^2 + K}$, $y = -\sqrt{2x^2 + K}$, siendo $K < 0$; definidas y derivables en el intervalo abierto $I = (\sqrt{-\frac{K}{2}}, \rightarrow)$.

— Las funciones $y = \sqrt{2x^2 + K}$, $y = -\sqrt{2x^2 + K}$, siendo $K < 0$; definidas y derivables en el intervalo abierto $I = (\leftarrow, -\sqrt{-\frac{K}{2}})$.

— Las funciones $y = \sqrt{K - 4x^2}$, $y = -\sqrt{K - 4x^2}$, siendo $K > 0$; definidas y derivables en el intervalo abierto $I = (-\frac{\sqrt{K}}{2}, \frac{\sqrt{K}}{2})$.

Puesto que en el enunciado se dice que debe ser $0 \in I$, y $f(0) = -1$, las únicas soluciones que cumplen esa condición son las siguientes, como fácilmente se comprueba:

— La función $y = -\sqrt{2x^2 + 1}$, definida y derivable en toda la recta real $I = R$.

— La función $y = -\sqrt{1 - 4x^2}$, definida y derivable en el intervalo abierto $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Y estas dos soluciones son las que nos piden.

4º) 4º) Suponemos que (g_n) es una sucesión equicontinua y decreciente de funciones reales, definidas en R, que converge puntualmente a una función $g : R \to R$. Se piden ejemplos para varios casos, si los hay. Procuraremos poner ejemplos bien sencillos, aunque puede haber muchos ejemplos más. Si no hubiera ningún ejemplo, hay que probar por qué.

a) 1) Poner un ejemplo en que la sucesión (g_n) sea uniformemente equicontinua.

Es inmediato comprobar que la sucesión de funciones constantes $g_n = \frac{1}{n+1}$ $(n \in N)$ es uniformemente equicontinua y decreciente, y converge puntualmente a la función constante $g = 0$.

De forma análoga, otro ejemplo sería considerar las funciones g_n dadas por $g_n(x) = x + \frac{1}{n+1}$ $(n \in N,\ x \in R)$. Esta sucesión de funciones (g_n) también es uniformemente equicontinua y decreciente, como fácilmente se comprueba, y converge puntualmente a la función $g(x) = x$.

(Se pueden poner muchos ejemplos más, pero sólo nos piden uno, y ya hemos puesto dos. Conviene que sean sencillos.)

a) 2) Poner un ejemplo en que la sucesión (g_n) no sea uniformemente equicontinua.

La función $g(x) = x^2$ es continua pero no es uniformemente continua (como es fácil comprobar), y es límite puntual de la sucesión constante (y, por tanto, decreciente) de funciones $(g_n) = g$ (es decir, $g_n(x) = x^2$, para todo $n \in N$ y $x \in R$). Obviamente, esta sucesión es equicontinua, pero no es uniformemente equicontinua.

Pongamos otro ejemplo. La sucesión de funciones (g_n) dada por $g_n(x) = x^2 + \frac{1}{n+1}$, para todo $x \in R$ $(n \in N)$, es equicontinua y decreciente, y converge puntualmente a la función $g(x) = x^2$. Ahora bien, esta sucesión no es uniformemente equicontinua, como trivialmente se comprueba.

(Al igual que en el apartado anterior, se pueden poner muchos ejemplos más, pero sólo nos piden uno, y ya hemos puesto dos. Conviene que sean sencillos.)

b) 1) Poner un ejemplo en que la función g sea continua.

Cualquiera de los ejemplos que hemos puesto en el apartado anterior sirve, pues en todos ellos la función g es continua.

Otro ejemplo puede ser la sucesión de funciones (g_n) dada por $g_n(x) = \frac{|x|}{1+n}$, para todo $x \in R$ y $n \in N$. Es inmediato comprobar que esta sucesión es equicontinua (de hecho, es uniformemente equicontinua) y es decreciente, y converge puntualmente a la función constante $g = 0$, que es continua.

b) 2) Poner un ejemplo en que la función g no sea continua. (Si no fuera posible, indicar por qué).

No es posible, pues el límite puntual de una sucesión equicontinua de funciones es siempre una función continua.

La demostración está hecha en el libro (Teorema 3.1.l, página 328). Por otra parte, es fácil hacerla directamente.

En efecto, en las condiciones del enunciado, dado cualquier punto $x \in R$, y dado $\varepsilon > 0$,

puesto que la sucesión (g_n) es equicontinua, existe $\delta > 0$ tal que, si $z \in R$ y $|z - x| < \delta$, entonces

$|g_n(z) - g_n(z)| \leq \varepsilon$, para todo $n \in N$.

Por tanto, si $z \in R$ y $|z - x| < \delta$, entonces

$|g(z) - g(z)| = \left|(\lim_{n\to\infty} g_n(z) - \lim_{n\to\infty} g_n(x)\right| = \left|\lim_{n\to\infty} (g_n(z) - g_n(x))\right| = \lim_{n\to\infty} |g_n(z) - g_n(z)|$
$\leq \varepsilon$.

Luego la función g es continua en cada punto $x \in R$, y por tanto es continua.

c) Decir, demostrando la respuesta, si es posible siempre, o no, extraer de (g_n) una subsucesión que converja uniformemente.

Puesto que la sucesión de funciones (g_n) converge a la función g, cualquier subsucesión (g_{n_k}) de (g_n) converge también a la función g.

Si esta convergencia fuera uniforme, entonces la función g sería el límite uniforme de una sucesión equicontinua de funciones, y por tanto sería uniformemente continua.

Ahora bien, en el apartado a)2 (de este problema) se puso un ejemplo en que la función g no es uniformemente continua.

Por tanto, no siempre es posible extraer de (g_n) una subsucesión que converja uniformemente.

Obsérvese que este resultado no contradice el Teorema 4.1.1 del libro (páginas 328-329), porque aquí las funciones que consideramos están definidas en toda la recta real R.

(La convergencia de la sucesión (g_n), y por tanto de cualquier subsucesión suya, sí sería uniforme en cualquier intervalo compacto $[a,b]$, donde $a,b \in R$ y $a \leq b$).