No se permite el uso de ningún tipo de material.

Todas las respuestas deben estar justificadas.

Ejercicio 1. (2 puntos) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y sea $\mathbb{R} - A$ su complementario. Demostrar que

$$\operatorname{adh}(\mathbb{R} - A) = \mathbb{R} - \operatorname{int}(A).$$

Ejercicio 2. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -x & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

¿Existe $\lim_{x \to a} f(x)$ para algún $a \in \mathbb{R}$?

Ejercicio 3. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $|f(x)| \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en $x = 0$.

Ejercicio 4. (2 puntos) Estudiar la continuidad y derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } \ x < 0 \\ x + \cos x & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}$$

según los valores del parámetro real λ.

Ejercicio 5. (2 puntos) Se considera la sucesión (a_n) definida de forma recurrente por

$$a_1 = 1, \qquad a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n a_{n-1} \quad \text{para } n \geq 2.$$

a) ¿Es convergente la sucesión (a_n)? Justificar la respuesta. En caso afirmativo, calcular su límite.

b) ¿Es convergente la serie $\sum_n a_n^2$? Justificar la respuesta.

Tiempo: 2 horas