Problema 1. *Sea $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias definidas por*

$$X_n = \begin{cases} X_{n-1} + Y_{n-1} - m & \text{si } X_{n-1} \geq m \\ X_{n-1} + Y_{n-1} & \text{si } X_{n-1} < m \end{cases}$$

siendo $X_0 = 0$ e $\{Y_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de variables independientes entre sí, tales que

$$\mathrm{P}\{Y_n = i\} = p_i > 0 \qquad \text{para } 0 \leq i \leq m$$

cualquiera que sea n. Probar que $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una cadena de Markov y hallar su distribución límite.

Solución:

Puesto que contienen la misma información las variables

$$\{X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}\} \quad \text{e} \quad \{Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-2}, X_{n-1}\}$$

e Y_{n-1} es independiente de $Y_0, \ldots, Y_{n-2}$, se tiene

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\{X_n = j \,|\, X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1}\} = \\ &\quad = \mathrm{P}\{X_n = j \,|\, Y_0, Y_1, , \ldots, Y_{n-2}, X_{n-1}\} \\ &\quad = \mathrm{P}\{Y_{n-1} = j - X_{n-1} + m\, I_{\{X_{n-1} \geq m\}} \,|\, Y_0, Y_1, \ldots, Y_{n-2}, X_{n-1}\} \\ &\quad = \mathrm{P}\{Y_{n-1} = j - X_{n-1} + m\, I_{\{X_{n-1} \geq m\}} \,|\, X_{n-1}\} \\ &\quad = \mathrm{P}\{X_n = j \,|\, X_{n-1}\}. \end{aligned}$$

Luego $\{X_n\}$ es una cadena de Markov. El espacio de estados es $E = \{0,\, 1,\, 2, \ldots,\, 2m-1\}$ y la matriz de transición

$$\begin{array}{r|cccccccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & \ldots & m-1 & m & m+1 & \ldots & 2m-2 & 2m-1 \\
\hline
0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m & & & & \\
1 & & p_0 & p_1 & \cdots & p_{m-2} & p_{m-1} & p_m & & & \\
2 & & & p_0 & \cdots & p_{m-3} & p_{m-2} & p_{m-1} & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\
m-1 & & & & & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\
m & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m & & & & \\
m+1 & & p_0 & p_1 & \cdots & p_{m-2} & p_{m-1} & p_m & & & \\
\vdots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \\
2m-2 & & & & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_m & \\
2m-1 & & & & & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} & p_m \\
\hline
\end{array}$$

La hipótesis $p_i > 0$ asegura que todos los estados intercomunican, puesto que todos comunican con $m-1$ y m y, a su vez, $m-1$ comunica con $\{m-1, \ldots, 2m-1\}$, mientras que m comunica con $\{0, \ldots, m\}$.

Para obtener la distribución estacionaria, nótese que agrupando los estados i e $i+m$ (para $i = 0, \ldots, m-1$) se obtiene la matriz:

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & \ldots & m-1 \\
\hline
0 & p_0+p_m & p_1 & p_2 & \cdots & p_{m-1} \\
1 & p_{m-1} & p_0+p_m & p_1 & \cdots & pm-2 \\
2 & p_{m-2} & p_{m-1} & p_0+p_m & \cdots & p_{m-3} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
m-1 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_0+p_m \\
\hline
\end{array}
$$

cuyas colúmnas suman 1 y tiene, por tanto, distribución estacionaria

$$\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right)$$

Debe ser pues:

$$\pi_i \; + \; \pi_{i+m} \; = \; \frac{1}{m} \qquad \text{para cada} \qquad i = 0, \ldots, m-1.$$

Por consiguiente la distribución estacionaria es

$$
\begin{array}{ll}
\pi_0 = p_0/m & \pi_m = (1-p_0)/m \\
\pi_1 = (p_0+p_1)/m & \pi_{m+1} = (1-p_0-p_1)/m \\
\pi_2 = (p_0+p_1+p_2)/m & \pi_{m+2} = (1-p_0-p_1-p_2)/m \\
\quad \vdots & \quad \vdots \\
\pi_{m-1} = (1-p_m)/m & \pi_{2m-1} = p_m/m
\end{array}
$$

que constituye, también, la distribución límite puesto que los estados son aperiódicos (por ser $p_0 > 0$).

Problema 2. *En una cadena de producción cada unidad tiene probabilidad p de ser defectuosa. Se utiliza el plan de muestreo siguiente:*
I) Se observan todas las unidades hasta encontrar tres seguidas no defectuosas; entonces se pasa a la fase (II).
II) se espera a que se hayan producido r unidades y se observa una de las r elegida al azar. Si la observada es defectuosa se vuelve a la fase (I) y, en caso contrario, se sigue efectuando la fase (II).

a) Plantear la cadena de Markov correspondiente, hallar la distribución límite y utilizarla para calcular la proporción de piezas que se controlan.

b) Hallar la probabilidad de que la pieza n-ésima observada lo sea durante la fase (II).

Solución:
a) Consideremos que transcurre una etapa cada vez que una pieza es observada y distinguimos los estados:
$i = 0, 1, 2$ si la pieza es observada en la realización del primer paso y es la i-ésima no defectuosa observada consecutivamente.
II si la pieza es observada en la realización del segundo paso.
La matriz de transición es entonces

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ II \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & II \end{array} \\ \left|\begin{array}{cccc} p & 1-p & & \\ p & & 1-p & \\ p & & & 1-p \\ p & & & 1-p \end{array}\right| \end{array} = \mathrm{P}.$$

cuya distribución estacionaria cumple

$$\left.\begin{array}{l} \pi_0 = p\,(\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3) \\ \pi_1 = \pi_0\,(1-p) \\ \pi_2 = \pi_1\,(1-p) \\ \pi_3 = (\pi_2 + \pi_3)(1-p) \\ 1 \;= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{array}{l} \pi_0 = p \\ \pi_1 = p\,(1-p) \\ \pi_2 = p\,(1-p)^2 \\ \pi_3 = p\,(1-p)^3 \end{array}\right.$$

y, dado que en el paso 2 se coge una pieza de cada r, la proproción de piezas controladas es

$$p + p\,(1-p) + p\,(1-p)^2 + \frac{1}{r}(1-p)^3 = 1 - (1-p)^3\,\frac{r-1}{r}.$$

b) Como

$$\mathrm{P}^2 = \begin{pmatrix} p & p(1-p) & (1-p)^2 & \\ p & p(1-p) & & (1-p)^2 \\ p & p(1-p) & & (1-p)^2 \\ p & p(1-p) & & (1-p)^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{P}^3 = \begin{pmatrix} p & p(1-p) & (1-p)^2 & (1-p)^3 \\ p & p(1-p) & (1-p)^2 & (1-p)^3 \\ p & p(1-p) & (1-p)^2 & (1-p)^3 \\ p & p(1-p) & (1-p)^2 & (1-p)^3 \end{pmatrix} = \mathrm{P}^n \quad \text{para cada}\, n$$

Para $n \geq 3$, la probabilidad de que la pieza n-ésima observada corresponda al estado II es

$$\pi_3 = (1-p)^3.$$

Problema 3. *Los siguientes datos describen los hábitos de votación en un país que cuenta con dos partidos políticos A y B. Un votante que vota por A tiene probabilidad 0'3 de votar a B en la siguiente elección y probabilidad 0'2 de abstenerse. Un votante de B tiene probabilidad 0'1 de votar a A la vez siguiente y 0'3 de abstenerse. Por fín, un votante que se abstiene, en la siguiente elección puede votar por A o B con probabilidades iguales, 0'4. Inicialmente el partido B ha ganado con un 65 % de los votos, sin que se produjese una abstención apreciable.*

a) Determinar el resultado de la n-ésima elección y la situación límite, mucho tiempo después.

b) Hallar el tiempo medio que tarda un partidario de A en votar por primera vez a B.

c) Calcular la distribución del número de abstenciones de un votante de B antes de votar por primera vez a A.

Solución:
a) Los estados del espacio $E = \{A, B, 0\}$ corresponden a las tres posibilidades: votar a A, votar a B o abstenerse. Entre ellos, la matriz de transición es

$$\begin{array}{c|ccc|} & \text{A} & \text{B} & 0 \\ \hline \text{A} & 0'5 & 0'3 & 0'2 \\ \text{B} & 0'1 & 0'6 & 0'3 \\ 0 & 0'4 & 0'4 & 0'2 \\ \hline \end{array} = \text{P}.$$

cuya descomposición de Jordan es

$$\text{P} = H \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (3+\sqrt{13})/20 & \\ & & (3-\sqrt{13})/20 \end{pmatrix} H^{-1}$$

donde

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 26 & 26 \\ 1 & -22'294 & 100'294 \\ 1 & 11'377 & -219'377 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} 0'290 & 0'464 & 0'246 \\ 0'025 & -0'019 & -0'006 \\ 0'003 & 0'001 & 0'004 \end{pmatrix}$$

Como la distribución inicial es $p^0 = (0'35, 0'65, 0)$, la distribución en la etapa n será

$$p^{(n)} = (0'35, 0'65, 0) H \begin{pmatrix} 1 & & \\ & (3+\sqrt{13})^n/20^n & \\ & & (3-\sqrt{13})^n/20^n \end{pmatrix} H^{-1}$$

$$= \left(0'29 - 0'135 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{20}\right)^n + 0'223 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{20}\right)^n , \right.$$
$$0'464 + 0'102 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{20}\right)^n + 0'074 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{20}\right)^n ,$$
$$\left. 0'246 + 0'032 \left(\frac{3+\sqrt{13}}{20}\right)^n - 0'0297 \left(\frac{3-\sqrt{13}}{20}\right)^n \right)$$

Cuando $n \to \infty$, se obtiene la distribución límite $\pi = (0'29, 0'464, 0'246)$. Alternativamente, el sistema de ecuaciones

$$(\pi_A, \pi_B, \pi_0) \begin{pmatrix} 0'5 & 0'3 & 0'2 \\ 0'1 & 0'6 & 0'3 \\ 0'4 & 0'4 & 0'2 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_0), \qquad \pi_A + \pi_B + \pi_0 = 1$$

proporciona la distribución estacionaria:

$$\pi_a = \frac{20}{69} = 0'29, \quad \pi_B = \frac{32}{69} = 0'464, \quad \pi_0 = \frac{17}{69} = 0'246$$

independiente de la distribución inicial.

b) Si m_A y m_0 son los tiempos medios que tarda en votar a B un ciudadano que acaba de votar a A y uno que acaba de abstenerse respectivamente, se cumple

$$\left. \begin{aligned} m_A &= 0'5\, m_A + 0'2\, m_0 + 1 \\ m_0 &= 0'4\, m_A + 0'2\, m_0 + 1 \end{aligned} \right\} \text{ de donde } \left\{ \begin{aligned} m_A &= 25/8 = 3'125 \\ m_B &= 45/16 = 2'8125 \end{aligned} \right.$$

c) El número medio de abstenciones de un votante en la n-ésima elección es

$$0'246 + 0'032\,(0'3303)^n \; - \; 0'297\,(-0'0303)^n$$

Por tanto , durante las k primeras será

$$\sum_{n=1}^{k} 0'246 \; + \; 0'032\,(0'3303)^n \; - \; 0'297\,(-0'0303)^n =$$
$$= 0'2464\, k + 0'032 \frac{0'3303 - (0'3303)^{k+1}}{0'6697} + 0'297\, \frac{0'3303 + (-0'3303)^{k+1}}{1'0303}$$

Problema 4. *Dos urnas I y II contienen tres bolas blancas y dos negras y una blanca y dos negras respectivamente. Se efectuan extracciones con reemplazamiento de acuerdo con la siguiente regla: La primera bola se extrae de I; a partir de ese momento la extracción se hace de I si la bola anterior fue negra, y de II si fue blanca. Hallar:*

a) la probabilidad de que la n-ésima bola se extraiga de II.

b) el tiempo medio entre dos extracciones consecutivas de la urna II.

c) Se decide detener las extracciones cuando el número de negras supere en dos al de blancas o el blancas supere en tres al de negras. Hallar el número esperado de extracciones que se realizarán.

d) En las condiciones de (c), hallar el número esperado de veces que se producirá empate entre el número de blancas y el de negras.

Solución:
a) Entre extracciones de la urna I y las de la urna II la evolución se produce con matriz de transición

$$\begin{array}{c|cc|} & I & II \\ \hline I & 2/5 & 3/5 \\ II & 2/3 & 1/3 \\ \hline \end{array} = \mathrm{P}$$

La descomposición de Jordan de P, elevada a n, proporciona

$$\begin{aligned} \mathrm{P}^n &= \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & (-4/15)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{19} \\ &= \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 10+9(-4/15)^n & 9-9(-4/15)^n \\ 10-10(-4/15)^n & 9+10(-4/15)^n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La n-ésima bola se extrae de II con probabilidad

$$\frac{9-9(-4/15)^n}{19}\,.$$

b) La distribución estacionaria es $\left(\frac{10}{19}, \frac{9}{19}\right)$ luego, el tiempo medio entre dos extracciones de la urna II es 19/9.

c) Representaremos por

iB : hay i blancas más que negras y la última es blanca
iN : hay i blancas más que negras y la última es negra

donde $i = -2, -1, 0, 1, 2, 3$. Entre tales situaciones la matriz de transición es

$$
\begin{array}{c|cccccccc|}
 & -2N & -1N & 0N & 0B & 1N & 1B & 2B & 3B \\
\hline
-2N & 1 & & & & & & & \\
-1N & 2/5 & & & 3/5 & & & & \\
0N & & 2/5 & & & & 3/5 & & \\
0B & & 2/3 & & & & 1/3 & & \\
1N & & & 2/5 & & & & 3/5 & \\
1B & & & 2/3 & & & & 1/3 & \\
2B & & & & & 2/3 & & & 1/3 \\
3B & & & & & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Llamando m_{iB} y m_{iN} a la duración esperada del juego desde el estado inicial iB ó iN respectivamente, se tiene

$$
\left.\begin{aligned}
m_{-1N} &= \frac{3}{5}m_{0B} + 1 \\
m_{0N} &= \frac{2}{5}m_{-1N} + \frac{3}{5}m_{1B} + 1 \\
m_{0B} &= \frac{2}{3}m_{-1N} + \frac{1}{3}m_{1B} + 1 \\
m_{1N} &= \frac{2}{5}m_{0N} + \frac{3}{5}m_{2B} + 1 \\
m_{1B} &= \frac{2}{3}m_{0N} + \frac{1}{3}m_{2B} + 1 \\
m_{2B} &= \frac{2}{3}m_{1N} + 1
\end{aligned}\right\}
\quad \text{de donde} \quad
\left\{\begin{aligned}
m_{-1N} &= \frac{922}{163} \\
m_{1N} &= \frac{1374}{163} \\
m_{0N} &= \frac{1409}{163} \\
m_{1B} &= \frac{1462}{163} \\
m_{0B} &= \frac{1265}{163} \\
m_{2B} &= \frac{1079}{163}
\end{aligned}\right.
$$

Como la situación inicial es realmente $0N$, la duración media es $1409/163 \simeq 8'64$.

d) Las probabilidades de alcanzar el estado $0B$ desde cada estado cumplen

$$
\left.\begin{aligned}
f_{-1N} &= \frac{3}{5} \\
f_{0N} &= \frac{2}{5}f_{-1N} + \frac{3}{5}f_{1B} \\
f_{0B} &= \frac{2}{3}f_{-1N} + \frac{1}{3}f_{1B} \\
f_{1N} &= \frac{2}{5}f_{0N} + \frac{3}{5}f_{2B} \\
f_{1B} &= \frac{2}{3}f_{0N} + \frac{1}{3}f_{2B} \\
f_{2B} &= \frac{2}{3}f_{1N}
\end{aligned}\right\}
\quad \text{de donde} \quad
\left\{\begin{aligned}
f_{-1N} &= \frac{3}{5} \\
f_{0N} &= \frac{54}{115} \\
f_{0B} &= \frac{182}{345} \\
f_{1N} &= \frac{36}{115} \\
f_{1B} &= \frac{44}{115} \\
f_{2B} &= \frac{24}{115}
\end{aligned}\right.
$$

Por tanto

$$P_{0B,0B}(1) = \frac{182}{345}\,(1 + P_{0B,0B}\,(1)) \qquad \text{o bien} \qquad P_{0B,0B}(1) = \frac{182}{163}$$

con lo cual

$$P_{0N,0B}(1) = \frac{54}{115}\,(1 + P_{0B,0B}(1)) = \frac{162}{163}$$

es el número esperado de visitas al estado $0B$ desde el estado inicial. Análogamente las probabilidades de alcanzar $0N$ cumplen

$$\left.\begin{aligned} f_{-1N} &= \frac{3}{5} f_{0B} \\ f_{0N} &= \frac{2}{5} f_{-1N} + \frac{3}{5} f_{1B} \\ f_{0B} &= \frac{2}{3} f_{-1N} + \frac{1}{3} f_{1B} \\ f_{1N} &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} f_{2B} \\ f_{1B} &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} f_{2B} \\ f_{2B} &= \frac{2}{3} f_{1N} \end{aligned}\right\} \quad \text{o sea} \quad \left\{\begin{aligned} f_{-1N} &= \frac{22}{81} \\ f_{0N} &= \frac{242}{405} \\ f_{0B} &= \frac{110}{243} \\ f_{1N} &= \frac{2}{3} \\ f_{1B} &= \frac{22}{27} \\ f_{2B} &= \frac{4}{9} \end{aligned}\right.$$

Por tanto

$$P_{0N,0N}(1) = \frac{242}{163}$$

es el número esperado de visitas al estado $0N$ desde el estado inicial. En total el número esperado de empates antes del final del juego es

$$P_{0N,0B}(1) + P_{0N,0N}(1) = \frac{162 + 242}{163} = \frac{404}{163}$$

sin contar el empate inicial.

Problema 5. *En una urna hay igual número de bolas blancas y negras. Se extraen sucesivamente bolas al azar y se devuelven a la urna junto con un número de bolas del mismo color, igual al número de las que había de dicho color antes de la extracción. Hallar:*

a) la probabilidad de que el primer color del que llega a haber 16 veces más bolas que del otro no sea el primero del que hubo el doble de bolas.

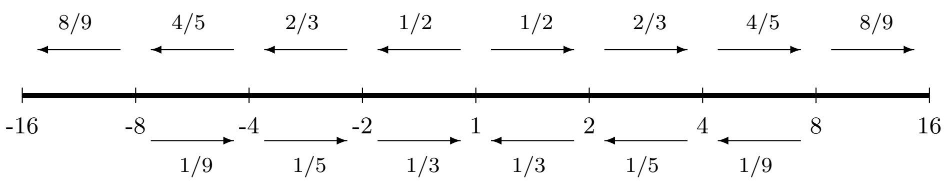
b) el número medio de veces que hay el mismo número de bolas de ambos colores antes de que llegue a haber 16 veces más bolas de un color que del otro.

c) el número medio de extracciones precisas para tener 16 veces más bolas de un color que del otro.

d) la distribución del número de extracciones precisas para tener 8 veces más bolas de un color que del otro.

Solución:

a) El estado i indicará que hay i veces más blancas que negras, mientras que $-i$ indica que hay i veces más negras que blancas. Las probabilidades de transición se muestran en el diagrama siguiente:



El primer color del que hay doble número de bolas es el blanco si la primera transición lleva al estado 2. Y el primer color del que llega a haber 16 veces más bolas es negro si se alcanza el estado -16 antes que el 16. Las probabilidades f_i de llegar al estado -16, desde i, cumplen:

$$\left.\begin{aligned} f_8 &= \frac{1}{9} f_4 \\ f_4 &= \frac{1}{5} f_2 + \frac{4}{5} f_8 \\ f_2 &= \frac{1}{3} f_1 + \frac{2}{3} f_4 \\ f_1 &= \frac{1}{2} \quad \text{(por simetría)} \end{aligned}\right\} \quad \text{o bien} \quad \left\{\begin{aligned} f_8 &= \frac{1}{9} f_4 \\ f_4 &= \frac{9}{41} f_2 \\ f_2 &= \frac{41}{105} f_1 \\ f_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

Luego $f_2 = 41/210$ es la probabilidad de que, si primero se dobla el número de bolas blancas, sea negro el primer color que supera en 16 veces al contrario. Simétricamente la misma probabilidad hay de que, a pesar de que la primera bola extraída sea negra, las blancas alcancen primero la proporción de 16 veces el número de negras.

b) El estado de la urna se caracterizará ahora por el cociente del número de bolas del color más abundante dividido por el número de bolas del color menos abundante (independientemente de cual sea el blanco o el negro). Deteniendo las extracciones cuando se alcanza el estado 16, la matriz de transición resulta:

	1	2	4	8	16
1		1			
2	1/3		2/3		
4		1/5		4/5	
8			1/9		8/9
16					1

Las probabilidades de alcanzar el estado 1, desde i, cumplen

$$\left.\begin{aligned} f_2 &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} f_4 \\ f_4 &= \frac{1}{5} f_2 + \frac{4}{5} f_8 \\ f_8 &= \frac{1}{9} f_4 \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad f_2 = \frac{45}{105},\ f_4 = \frac{9}{105},\ f_8 = \frac{1}{105}$$

La probabilidad de regresar al estado 1 es pues $f_1 = f_2 = 45/105$ y el número esperado de visitas al 1 antes de la absorción viene dado por

$$P_{1,1}(1) = f_1[1 + P_{1,1}(1)]$$

es decir $P_{1,1}(1) = 41/64$ o bien, contando la visita inicial, $105/64 \simeq 1'64$.

c) Con la misma matriz del apartado anterior, si m_i es el tiempo medio hasta la absorción, partiendo de i, se cumple

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= m_2 + 1 \\ m_2 &= \frac{1}{3} m_1 + \frac{2}{3} m_4 + 1 \\ m_4 &= \frac{1}{5} m_2 + \frac{4}{5} m_8 + 1 \\ m_8 &= \frac{1}{9} m_4 + 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{es decir} \quad \left\{\begin{aligned} m_1 &= m_2 + 1 \\ m_2 &= m_4 + 2 \\ m_4 &= m_8 + \frac{7}{4} \\ m_8 &= \frac{43}{32} \end{aligned}\right.$$

con lo que resulta $m_1 = 195/32 \simeq 6'09$.

d) Sea $q_i^{(n)}$ la probabilidad de que en la etapa n todavía no se haya alcanzado el estado 8, si la posición inicial es i. El análisis de la primera transición establece que se verifica

$$\begin{aligned} q_1^{(n)} &= q_2^{(n-1)} \\ q_2^{(n)} &= \frac{1}{3} q_1^{(n-1)} + \frac{2}{3} q_4^{(n-1)} \\ q_4^{(n)} &= \frac{1}{5} q_2^{(n-1)} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación intermedia resulta

$$q_2^{(n)} = \frac{1}{3} q_2^{(n-2)} + \frac{2}{15} q_2^{(n-2)}$$

Además es $q_2^{(1)} = 1$ y $q_2^{(2)} = 1 - 8/15 = 7/15$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} q_2^{(3)} &= \frac{7}{15} \\ q_2^{(4)} &= \left(\frac{7}{15}\right)^2 \\ q_2^{(5)} &= \left(\frac{7}{15}\right)^2 \\ q_2^{(6)} &= \left(\frac{7}{15}\right)^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

y, en general,

$$q_2^{(n)} = \left(\frac{7}{15}\right)^{[n/2]}.$$

Resulta entonces

$$q_1^{(n)} = \left(\frac{7}{15}\right)^{[(n-1)/2]}.$$

En definitiva, si N es el número de extracciones precisas para que haya 8 veces más bolas de un color que del otro, se tiene

$$\mathrm{P}\{N > n\} = \left(\frac{7}{15}\right)^{[(n-1)/2]}$$

con lo cual

$$\mathrm{P}\{N = n\} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{8}{15}\left(\dfrac{7}{15}\right)^{(n-3)/2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Problema 6. *Una persona dispone de n paraguas que transporta, cuando llueve, de su casa a su trabajo y viceversa, dejando el paraguas donde se encuentre, si no llueve. Suponiendo que cada vez que sale a la calle llueve o no, con probabilidades p y $1-p$, independientemente en cada ocasión, calcular a la larga la proporción de veces que se moja, por no tener paraguas disponibles en el lugar en que se encuentra.*

Solución:
Tomaremos como estado del sistema el número $(0, 1, 2, \ldots, n)$ de paraguas de que dispone la persona en el lugar en el que se encuentra; cada viaje representa una etapa, de manera que la matriz de transición es:

$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\
\hline
0 & & & & & & & 1 \\
1 & & & & & & 1-p & p \\
2 & & & & & 1-p & p & \\
\vdots & & & & & & & \\
n-2 & & & 1-p & p & & & \\
n-1 & & 1-p & p & & & & \\
n & 1-p & p & & & & & \\
\hline
\end{array}
$$

A la larga, la proporción de veces que se encuentra en cada situación i viene dada por el término π_i de la distribución estacionaria, y se verifica

$$
\begin{array}{rcl}
\pi_0 & = & (1-p)\,\pi_n \\
\pi_1 & = & (1-p)\,\pi_{n-1} \;+\; p\,\pi_n \\
\pi_2 & = & (1-p)\,\pi_{n-2} \;+\; p\,\pi_{n-1} \\
 & \vdots & \\
\pi_{n-2} & = & (1-p)\,\pi_2 \;+\; p\,\pi_3 \\
\pi_{n-1} & = & (1-p)\,\pi_1 \;+\; p\,\pi_2 \\
\pi_n & = & \pi_0 \;+\; p\,\pi_1
\end{array}
$$

La primera ecuación y la última muestran que $\pi_n = \pi_1$; la segunda asegura entonces que $\pi_{n-1} = \pi_n$; la penúltima que $\pi_2 = \pi_n$, etc. En definitiva

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \ldots = \pi_{n-1} = \pi_n.$$

Como ha de ser $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$ se obtiene

$$n\pi_1 + \pi_0 = 1$$

que, junto con la primera ecuación, proporciona

$$\pi_n = \frac{1}{n+1-p} \qquad \text{y} \qquad \pi_0 = \frac{1-p}{n+1-p}$$

Una proporción π_0 de veces, no dispone de paraguas y, por tanto, la proporción de veces que se moja será

$$p\,\pi_0 = \frac{p(1-p)}{n+1-p}$$

Problema 7. *Dos personas A y B compiten lanzando un dado, por turnos, con las siguientes reglas: Si sale 1 ó 6 el jugador gana; si sale 3 continua lanzando y, en los demás casos, pasa el turno a su contrincante. Empieza lanzando A.*

a) Calcular la probabilidad de ganar de cada jugador.

b) Hallar la distribución del número de lanzamientos que realiza A y su media.

c) Si el que lanza tiene que poner una peseta en el plato y el ganador se lo lleva todo, determinar el beneficio esperado de cada jugador.

Solución:
a) Los estados de $E = \{A, B, GA, GB\}$ describen las posibles situaciones del juego: distinguen el jugador que realiza el lanzamiento o bien cual de los dos ha obtenido la victoria. La matriz de transición es

	A	B	GA	GB
A	1/6	1/2	1/3	
B	1/2	1/6		1/3
GA			1	
GB				1

Sea g_i la probabilidad de que gane A si está tirando i

$$\left.\begin{aligned} g_A &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\, g_A + \frac{1}{2}\, g_B \\ g_B &= \frac{1}{2}\, g_A + \frac{1}{6}\, g_B \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{aligned} g_A &= \frac{5}{8} \\ g_B &= \frac{3}{8} \end{aligned}\right.$$

El jugador que empieza a tirar gana con probabilidad $5/8$ y su contrincante con probabilidad $1 - 5/8 = 3/8$.

b) Sea f_i la probabilidad de llegar a A desde i y V_A el número de veces que lanza A.

$$\left.\begin{aligned} f_A &= \frac{1}{6}\, f_A + \frac{1}{2}\, f_B \\ f_B &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\, f_B \end{aligned}\right\} \quad \text{cuya solución es} \quad \left\{\begin{aligned} f_A &= \frac{7}{15} \\ f_B &= \frac{3}{5} \end{aligned}\right.$$

Luego

$$P\{V_A = k \,|\, X_0 = A\} = f_{AA}^{k-1}\,(1 - f_{AA}) = \left(\frac{7}{15}\right)^{k-1} \frac{8}{15} \quad \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Por tanto

$$E[X] = E[x = k \mid X_0 = A] = \sum_{k-1}^{\infty} k \left(\frac{7}{15}\right)^{k-1} \frac{8}{15} = \frac{8}{15}\left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{15}{8}$$

c) Si se sabe que va a ganar A, las probabilidades de transición son*

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \text{A} & \text{B} & \text{GA} \\
\hline
\text{A} & 1/6 & 3/10 & 8/15 \\
\text{B} & 5/6 & 1/6 & \\
\text{GA} & & & 1 \\
\hline
\end{array} = \text{P}.$$

La duración media de estas partidas, m_i, partiendo de i, cumple

$$\left.\begin{aligned} m_A &= \frac{1}{6}\, m_A + \frac{3}{10}\, m_B + 1 \\ m_B &= \frac{5}{6}\, m_A + \frac{1}{6}\, m_B + 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{aligned} m_A &= \frac{51}{20} \\ m_B &= \frac{75}{20}. \end{aligned}\right.$$

Por tanto A se lleva, $51/20$ con probabilidad $5/8$ (o nada con probabilidad $3/8$). Además, en cada partida, la cantidad media que pone A es $15/8$. Luego el beneficio esperado es:

$$\frac{5}{8}\frac{51}{20} - \frac{15}{8} = -\frac{9}{32}$$

Por supuesto el beneficio esperado por B es $9/32$.

*Por ejemplo

$$P\{X_1 = B \mid X_0 = A, X_\infty = GA\} = \frac{1/2\, 3/8}{5/8} = \frac{3}{10}$$

$$P\{X_1 = A \mid X_0 = A, X_\infty = GA\} = \frac{1/2\, 5/8}{3/8} = \frac{5}{6}, \text{ etc}\ldots$$

Problema 8. *En las partidas a un determinado juego entre A y B, cada uno gana la mitad de las veces; en cambio A gana a C, 3 de cada 4 partidas y B gana a C, 3 de cada 5 partidas. Piensan organizar un torneo entre los tres, en el que el perdedor de cada partida cede su puesto al que no ha jugado y consigue la victoria el que logre ganar a sus dos adversarios consecutivamente. Como C es el jugador más flojo, se le da la oportunidad de elegir los jugadores de la partida inicial.*

a) ¿Cuál debe ser la elección de C?

b) Hallar el número medio de partidas que se jugarán.

c) Hallar el número medio de veces que se enfrentarán A y B.

Solución:
a) Cada estado IJ significa que I ha ganado la partida anterior y se enfrenta a J. En cambio I^* representa la victoria de I. Así, el espacio de estados es

$$E = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB, A^*, B^*, C^*\}$$

La matriz de transición será entonces

$$\begin{array}{c} \\ AB \\ AC \\ BA \\ BC \\ CA \\ CB \\ A^* \\ B^* \\ C^* \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} AB & AC & BA & BC & CA & CB & A^* & B^* & C^* \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccccccccc} & & & 1/2 & & & 1/2 & & \\ & & & & & 1/4 & 3/4 & & \\ & 1/2 & & & & & & 1/2 & \\ & & & & 2/5 & & & 3/5 & \\ 3/4 & & & & & & & & 1/4 \\ & & 3/5 & & & & & & 2/5 \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & 1 \end{array}\right| \end{array} = \text{P.}$$

Si g_k representa la probabilidad de que gane C, cuando se está en la situación

k, será

$$\left.\begin{aligned} g_{AB} &= \frac{1}{2}\, g_{BC} \\ g_{AC} &= \frac{1}{4}\, g_{CB} \\ g_{BA} &= \frac{1}{2}\, g_{AC} \\ g_{BC} &= \frac{2}{5}\, g_{CA} \\ g_{CA} &= \frac{3}{4}\, g_{AB} + \frac{1}{4} \\ g_{CB} &= \frac{3}{5}\, g_{BA} + \frac{2}{5} \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{aligned} g_{AB} &= \frac{2}{34} \\ g_{AC} &= \frac{4}{37} \\ g_{BA} &= \frac{2}{37} \\ g_{BC} &= \frac{4}{34} \\ g_{CA} &= \frac{10}{34} \\ g_{CB} &= \frac{16}{37} \end{aligned}\right.$$

C puede elegir entre las distribuciones iniciales:

▶ (0, 1/2, 0, 1/2, 0, 0, 0, 0, 0), si la primera partida la juegan A y B. Su probabilidad de ganar es así:

$$\frac{1}{2}\,\frac{4}{37} + \frac{1}{2}\,\frac{4}{34} \simeq 0'113.$$

▶ (3/4, 0, 0, 0, 0,1/4, 0, 0, 0), si primero juegan C y A. Con lo cual su probabilidad de ganar es:

$$\frac{3}{4}\,\frac{2}{34} + \frac{1}{4}\,\frac{16}{37} \simeq 0'152.$$

▶ (0, 0, 3/5, 0, 2/5, 0, 0, 0, 0), si primero juegan C y B. En cuyo caso su probabilidad de ganar es:

$$\frac{3}{5}\,\frac{2}{37} + \frac{2}{5}\,\frac{10}{34} \simeq 0'150.$$

Luego C debe elegir enfrentarse primero con A.

b) Si m_k es el número medio de partidas que se juegan desde desde k (sin contar la inicial), será

$$\left.\begin{aligned} m_{AB} &= \frac{1}{2}\, m_{BC} + 1 \\ m_{AC} &= \frac{1}{4}\, m_{CB} + 1 \\ m_{BA} &= \frac{1}{2}\, m_{AC} + 1 \\ m_{BC} &= \frac{2}{5}\, m_{CA} + 1 \\ m_{CA} &= \frac{3}{4}\, m_{AB} + 1 \\ m_{CB} &= \frac{3}{5}\, m_{BA} + 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{se deduce} \quad \left\{\begin{aligned} m_{AB} &= 2 \\ m_{AC} &= \frac{56}{37} \\ m_{BA} &= \frac{65}{37} \\ m_{BC} &= 2 \\ m_{CA} &= \frac{5}{2} \\ m_{CB} &= \frac{76}{37} \end{aligned}\right.$$

Habida cuenta de la distribución inicial $p^{(0)} = (3/4, 0, 0, 0, 0, 1/4, 0, 0, 0)$ (y de la partida que inicia la evolución), resulta como número medio de partidas a jugar:

$$\frac{3}{4}\, m_{AB} + \frac{1}{4}\, m_{CB} + 1 = \frac{3}{4}\, 2 + \frac{1}{4}\, \frac{76}{37} \; + 1 = \frac{223}{74} \simeq 3'013.$$

c) Si f_k es la probabilidad de llegar a AB desde k, se cumple

$$\left.\begin{array}{l} f_{AB} = \frac{1}{2}\, f_{BC} \\ f_{BC} = \frac{2}{5}\, f_{CA} \\ f_{CA} = \frac{3}{4} \\ f_{AC} = f_{CB} = f_{BA} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{con lo cual} \quad \left\{\begin{array}{l} f_{AB} = \frac{3}{20} \\ f_{BC} = \frac{3}{10} \\ f_{CA} = \frac{3}{4} \end{array}\right.$$

Análogamemte si h_k es la probabilidad de llegar a BA desde k:

$$\left.\begin{array}{l} h_{AB} = h_{BC} = h_{CA} = 0 \\ h_{AC} = \frac{1}{4}\, h_{CB} \\ h_{BA} = \frac{1}{2}\, h_{AC} \\ h_{CB} = \frac{3}{5} \end{array}\right\} \quad \text{luego} \quad \left\{\begin{array}{l} h_{CB} = \frac{3}{5} \\ h_{AC} = \frac{3}{20} \\ h_{BA} = \frac{3}{40} \end{array}\right.$$

Si P_{ij} es el número medio de visitas a j desde el estado i (sin contar la inicial) será:

$$\begin{array}{rcl} P_{AB,AB} &=& \frac{3}{20}(1 + P_{AB,AB}) \quad \Rightarrow \quad P_{AB,AB} = \frac{3}{17} \\ P_{CB,AB} &=& f_{CB}(1 + P_{AB,AB}(1)) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} P_{BA,BA} &=& \frac{3}{40}(1 + P_{BA,BA}) \quad \Rightarrow \quad P_{BA,BA} = \frac{3}{37} \\ P_{AB,BA} &=& h_{AB}(1 + P_{BA,BA}(1)) = 0 \\ P_{CB,BA} &=& \frac{3}{5}(1 + P_{BA,BA}) = \frac{24}{37} \end{array}$$

Y, el número medio de partidas entre A y B resulta

$$\frac{3}{4}\left(1 + \frac{3}{37}\right) + \frac{1}{4}\frac{24}{37} = \frac{657}{629} \simeq 1'044.$$

Problema 9. *Se dispone de N urnas; sucesivamente se van colocando bolas en una urna elegida al azar e independientemente en cada ocasión.*

a) Hallar el número medio de bolas que han de colocarse para que todas las urnas estén ocupadas.

b) Hallar el número medio de bolas que han de colocarse para que alguna urna contenga más de una bola.

Solución:
a) El número X_n de urnas ocupadas tras colocar n bolas constituye una cadena de Markov con espacio de estados $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ y matriz de transición

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & \ldots & N-1 & N \end{array} \\
\boxed{\begin{array}{cccccc}
 & 1 & & & & \\
 & \frac{1}{N} & 1-\frac{1}{N} & & & \\
 & & \frac{2}{N} & 1-\frac{2}{N} & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \\
 & & & & 1-\frac{1}{N} & \frac{1}{N} \\
 & & & & & 1
\end{array}}
\end{array}$$

Si m_k es el número de etapas que se tarda en llegar a N desde k, será

$$\begin{aligned}
m_0 &= m_1 + 1 \\
m_1 &= \frac{1}{N} m_1 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) m_2 + 1 \\
m_2 &= \frac{2}{N} m_2 + \left(1 - \frac{2}{N}\right) m_3 + 1 \\
&\vdots \\
m_{N-1} &= \left(1 - \frac{1}{N}\right) m_{N-1} + \frac{1}{N} m_N + 1 \\
m_N &= 0
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
m_{N-1} &= N \\
m_{N-2} &= N + \frac{N}{2} \\
m_{N-3} &= N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} \\
&\vdots \\
m_0 &= N + \frac{N}{2} + \frac{N}{3} + \cdots + \frac{N}{N} = N\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

b) Sea X el número de bolas que hay que colocar para que alguna urna contenga más de una bola. Supuesto que $1 \leq k \leq N$, para que sea $X > k$, las k primeras bolas deben ser colocadas en urnas distintas; es decir

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X > k) &= 1 \cdot \frac{N-1}{N} \cdot \frac{N-2}{N} \cdots \frac{N-k+1}{N} \\ &= \frac{(N-1)!}{(N-k)!\, N^{k-1}} = \frac{N!}{(N-k)!\, N^k} = \binom{N}{k} \frac{k!}{N^k} \end{aligned}$$

Por otra parte, para $k > N$ es

$$P(X > k) = 0.$$

Dado que $\mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$ resulta

$$\mathrm{E}[X] = 1 + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{k!}{N^k}$$

La expresión anterior sólo es fácil de calcular para pequeños valores de N, pero puede demostrarse que crece como $\sqrt{N}$. Más concretamente

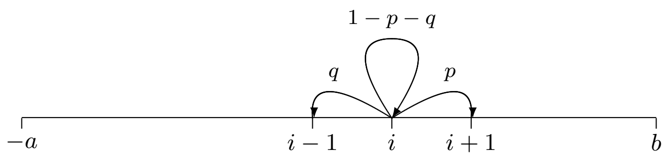
$$\frac{1 + \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \frac{k!}{N^k}}{\sqrt{N}} \quad \longrightarrow \quad \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{cuando } N \to \infty.$$

Problema 10. *Dos jugadores A y B disponen de un capital de a y b pesetas respectivamente. Juegan partidas sucesivas en las que A gana con probabilidad p, B con probabilidad q y se produce empate con probabilidad $1-p-q$. En cada partida el ganador recibe una peseta del perdedor.*

a) Hallar la probabilidad de que A arruine a B y la de que B arruine a A. Examinar en particular el caso $p=q$ (como límite cuando $q \to p$).

b) Hallar el número medio de partidas que han de jugarse para que alguno de los jugadores se arruine. Examinar en particular el caso $p=q$.

Solución:
Sea X_n el beneficio de A después de n partidas: $-a \leq X_n \leq b$. La evolución de X_n responde al diagrama:



donde $-a$ y b son estados absorbentes que representan la ruina de A y B respectivamente.
a) Si f_i es la probabilidad de llegar a b partiendo de i, se verifica

$$f_i = p\, f_{i+1} + (1-p-q) f_i + q f_{i-1} \qquad \text{con} \quad f_{-a} = 0 \ \text{ y } \ f_b = 1.$$

La ecuación en diferencias: $p f_{i+1} - (p+q) f_i + q f_{i-1} = 0$ tiene por ecuación característica

$$p\lambda^2 - (p+q)\lambda + q = 0$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = q/p$. La solución general es pues: $C + D(q/p)^i$ y con las condiciones en los extremos resulta

$$f_i = \frac{(q/p)^i - (q/p)^{-a}}{(q/p)^b - (q/p)^{-a}} \ .$$

Análogamente

$$f_i' = \frac{(q/p)^b - (q/p)^i}{(q/p)^b - (q/p)^{-a}}$$

es la probabilidad de que se arruine A partiendo de i. Desde luego $f_i + f_i' = 1$ de manera que alguno de los dos acaba por arruinarse.
Cuando $q/p \to 1$, se obtiene

$$f_i = \frac{i+a}{b+a}, \qquad \text{y} \qquad f_i' = \frac{b-i}{b+a} \ .$$

b) Si m_i, es el número medio de partidas hasta la ruina de algún jugador partiendo de i, se verifica

$$m_i = pm_{i+1} + (1-p-q)m_i + qm_{i-1} + 1 \qquad \text{con} \quad m_{-a} = m_b = 0.$$

La ecuación: $m_i = pm_{i+1} + (1-p-q)m_i + qm_{i-1} + 1 = 0$ tiene como solución particular ci con $c = 1/(q-p)$, luego la solución general será

$$C + D\left(\frac{q}{p}\right)^i + \frac{i}{q-p}.$$

Y, con las condiciones $m_a = m_b = 0$, se obtiene

$$m_i = \frac{b+a}{p-q}\,\frac{(q/p)^i - (q/p)^b}{(q/p)^b - (q/p)^{-a}} + \frac{b-i}{p-q}\,.$$

En el caso $p = q$, la ecuación en diferencias se reduce a

$$m_{i+1} - 2m_i + m_{i-1} + \frac{1}{p} = 0$$

que tiene como solución particular ci^2 siendo $c = -1/(2p)$; mientras que la solución general de la ecuación homogénea ($m_{i+1} - 2m_i + m_{i-1} = 0$) es $C + Di$. Será pues:

$$m_i = C + Di - \frac{i^2}{2p} \qquad \text{de donde} \qquad m_i = \frac{(b-i)(i+a)}{2p}.$$

Problema 11. *a) Utilizar los resultados del ejercicio anterior para determinar la probabilidad de que un recorrido aleatorio, partiendo de* 0*, alcance alguna vez la posición* $b > 0$ *(y la posición* $-a < 0$*). Deducir que el recorrido aleatorio tiene sus estados transitorios si* $p \neq q$ *y recurrentes nulos si* $p = q$*.*
b) Determinar el número esperado de visitas al estado b *antes del primer regreso al origen.*

Solución:
a) • Para $b > 0$, partiendo del origen y con una barrera absorbente en $-a < 0$, la probabilidad de llegar a b es

$$f_0 = \frac{1 - (q/p)^{-a}}{(q/p)^b - (q/p)^{-a}} \ .$$

Cuando $a \to \infty$ la barrera en $-a$ desaparece y resulta

$$f_0 \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } q < p \\ (p/q)^b & \text{si } q > p. \end{cases}$$

• Para $-a < 0$, partiendo del origen y con una barrera absorbente en $b > 0$, la probabilidad de llegar a a es

$$f'_0 = \frac{(q/p)^b - 1}{(q/p)^b - (q/p)^{-a}}$$

y, cuando $b \to \infty$, se obtiene

$$f'_0 \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } q > p \\ (q/p)^a & \text{si } q < p. \end{cases}$$

Cualquier estado i tiene el mismo comportamiento que el origen, así que los resultados anteriores proporcionan la probabilidad total, $f_{i,j}$, de alcanzar el estado j desde el estado i:

$$f_{i,j} = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} 1 & \text{si } j > i \\ (q/p)^{i-j} & \text{si } j < i \end{array}\right\} & \text{en el caso } p > q \\ \\ \left.\begin{array}{ll} (p/q)^{j-i} & \text{si } j > i \\ 1 & \text{si } j < i \end{array}\right\} & \text{en el caso } p < q \end{cases}$$

En ambos casos todos los estados intercomunican ($f_{i,j} > 0$) y no pueden ser recurrentes (pues, si no sería $f_{i,j} = 1$ para todo i y j). De hecho

$$f_{i,i} = \begin{cases} 1 - p - q + p\dfrac{q}{p} + q = 1 - p + q & \text{si } p > q \\ \\ 1 - p - q + p + q\dfrac{p}{q} = 1 - q + p & \text{si } p < q \end{cases}$$

Para $p = q$, la probabilidad de alcanzar $b > 0$ desde el origen

$$f_0 = \frac{a}{b+a} \longrightarrow 1 \quad \text{si } a \to \infty$$

y la probabilidad de llegar a $-a < 0$

$$f_0' = \frac{b}{b+a} \longrightarrow 1 \quad \text{si } b \to \infty$$

Es decir, desde el origen se alcanza, con seguridad, cualquier estado, tanto positivo como negativo. Lo mismo ocurre desde cualquier otro punto, así que $f_{i,j} = 1$ para cualquiera i, j. Por consiguiente, todos los estados son recurrentes.
Sin embargo, son recurrentes nulos, pues el tiempo medio para salir del intervalo $(-a, b)$:

$$m_0 = \frac{ba}{2p}$$

tiende a infinito tanto si $a \to \infty$ como si $b \to \infty$. Ello indica que, sin barreras, cualquier trayecto (por ejemplo, de i a $i+1$ o bien de $i+1$ a i) tiene una duración media infinita.

b) Supongamos que es $b > 0$ y, tras la primera transición desde el origen, situemos una barrera absorbente en 0.
• Cuando es $p > q$, es

$$\begin{aligned} f_{1,b} &= \frac{q/p - 1}{(q/p)^b - 1} = p^{b-1}\,\frac{p-q}{p^b - q^b} \\ f_{b-1,b} &= \frac{(q/p)^{b-1} - 1}{(q/p)^b - 1} = p\,\frac{p^{b-1} - q^{b-1}}{p^b - q^b} \\ f_{b+1,b} &= \frac{q}{p} \quad \text{(la barrera no actúa).} \end{aligned}$$

Por tanto

$$f_{b,b} = 1 - p - q + p\,\frac{q}{p} + q\,p\,\frac{p^{b-1} - q^{b-1}}{p^b - q^b} = 1 - p^b\,\frac{p-q}{p^b - q^b}$$

El número esperado de visitas a b, desde b, incluida la inicial es entonces

$$1 + P_{b,b}(1) = \frac{1}{1 - f_{b,b}} = \frac{p^b - q^b}{p^b\,(p-q)}$$

con lo cual

$$P_{1,b}(1) = f_{1,b}\,(1 + P_{b,b}(1)) = \frac{1}{p}$$

es el número esperado de visitas a b, antes del primer regreso al origen, desde el estado 1. Desde el origen, el número esperado de visitas a b, antes de regresar al origen, será $p(1/p) = 1$.

• Cuando $p < q$, $f_{1,b}$ y $f_{b-1,b}$ conservan el mismo valor, pero $f_{b+1,b} = 1$. Luego

$$f_{b,b} = 1 - p - q + p + qp\,\frac{p^{b-1} - q^{b-1}}{p^b - q^b} = 1 - q^b\,\frac{p - q}{p^b - q^b}$$

y

$$1 + P_{b,b}(1) = \frac{p^b - q^b}{q^b\,(p - q)}$$

de manera que

$$P_{1,b}(1) = \frac{p^{b-1}}{q^b}$$

y el número esperado de visitas a b, antes de regresar al origen resulta $(p/q)^b$.

• Cuando $p = q$ es previsible que el número esperado de visitas a b, antes de regresar al origen, será 1. De hecho

$$f_{1,b} = \frac{1}{b}, \qquad f_{b-1,b} = \frac{b-1}{b} \qquad \text{y} \qquad f_{b+1,b} = 1$$

con lo cual

$$f_{b,b} = 1 - 2p + p + p\frac{b-1}{b} = 1 - \frac{p}{b} \qquad \text{y} \qquad 1 + P_{b,b}(1) = \frac{b}{p}$$

de donde, nuevamente, $P_{1,b}(1) = 1/p$. El resultado es, por tanto, el mismo que en el caso $p > q$.

Lo que ocurre para estados a la izquierda del origen puede deducirse, por simetría, de los resultados anteriores: el número esperado de visitas que recibe $-a < 0$, antes del primer regreso al origen, será 1 si $q \geq p$ y $(q/p)^a$ cuando $q < p$.

Problema 12. *A una estación férrea llegan vagones vacíos para ser revisados y eventualmente cargados. Inicialmente pasan al taller de revisión de donde tienen probabilidad $0'8$ de salir al cabo de un día. Una vez revisados los vagones son almacenados en un depósito para que, cono pronto al día siguiente, sean cargados o bien enviados hacia otras estaciones; así 2/3 van hacia otras estaciones y 1/4 al muelle de carga. De los vagones en el muelle de carga, al día siguiente, 5/6 salen de viaje y el resto vuelve cargado al depósito a esperar nueva carga. Hallar:*

a) Número medio de días que transcurren desde que un vagón llega a la estación hasta que la abandona.

b) Porcentaje de vagones que salen vacíos y cargados.

c) Distribución del número de días que pasa un vagón en la estación hasta salir hacia algún destino.

d) Si los vagones que salen de viaje regresan a la estación al cabo de un tiempo medio de tres días, determinar la proporción de tiempo que pasan a la larga en cada dependencia de la estación.

Solución:

Cada vagón evoluciona entre el taller (T), el muelle de carga (M), el depósito (D) y el exterior (E), de acuerdo con la matriz de transición

$$\begin{array}{c|cccc|} & T & D & M & E \\ \hline T & 1/5 & 4/5 & & \\ D & & 1/12 & 1/4 & 2/3 \\ M & & 1/6 & & 5/6 \\ E & & & & 1 \\ \hline \end{array}$$

a) Si m_i, es el número medio de días hasta llegar a E desde i, se verifica

$$\left.\begin{aligned} m_T &= \frac{1}{5}m_T + \frac{4}{5}m_D + 1 \\ m_D &= \frac{1}{12}m_D + \frac{1}{4}m_M + 1 \\ m_M &= \frac{1}{6}m_D + 1 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{aligned} m_D &= \frac{10}{7} \\ m_M &= \frac{26}{21} \\ m_T &= \frac{75}{28} \end{aligned}\right.$$

El tiempo medio hasta que un vagón abandona la estación es $m_T = 2'68$ días.

b) Para detener los vagones que saldrían cargados hagamos M absorbente y calculemos la probabilidad de acabar en M:

$$\left.\begin{aligned} f_{TM} &= \frac{1}{5} f_{TM} + \frac{4}{5} f_{DM} \\ f_{DM} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} f_{DM} \end{aligned}\right\} \quad \text{luego} \quad f_{TM} = f_{DM} = \frac{3}{11}$$

Es decir, la proporción de los vagones que pasan por el muelle de carga es $3/11 = 27'27\,\%$.

c) La descomposición de Jordan de la matriz de transición, elevada a n, es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 48 & 24 \\ 1 & 0 & 3 & -11 \\ 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (1/5)^n & & \\ & & (1/4)^n & \\ & & & (-1/6)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 55 \\ 55 & -480 & -600 & 1025 \\ 0 & 11 & 11 & -22 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{55}$$

por tanto

$$p_{TE}^{(n)} = 1 + \frac{205}{11}\frac{1}{5^n} - \frac{96}{5}\frac{1}{4^n} - \frac{24}{55}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

es la probabilidad de salir de la estación antes o en la etapa n.

d) Para que la duración media de la permanencia en E sea de 3 días, cambiemos la última fila de la matriz de transición en la forma:

	T	D	M	E
T	1/5	4/5		
D		1/12	1/4	2/3
M		1/6		5/6
E	1/3			2/3

Entonces, la distribución estacionaria cumple

$$\left.\begin{aligned} \pi_T &= \frac{1}{5}\pi_T + \frac{1}{3}\pi_E \\ \pi_D &= \frac{4}{5}\pi_T + \frac{1}{12}\pi_D + \frac{1}{6}\pi_M \\ \pi_M &= \frac{1}{4}\pi_D \\ \pi_E &= \frac{2}{3}\pi_D + \frac{5}{6}\pi_M + \frac{2}{3}\pi_E \\ 1 &= \pi_T + \pi_D + \pi_M + \pi_E \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{aligned} \pi_T &= \frac{35}{159} \\ \pi_D &= \frac{32}{159} \\ \pi_M &= \frac{8}{159} \\ \pi_E &= \frac{84}{159} \end{aligned}\right.$$

que son las proporciones de tiempo que los vagones pasan en cada estado.