Solución Prueba Presencial Junio 2014. 1^a semana

1 de junio de 2014

1. Describir el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que define la ecuación

$$\rho = 3\cos\phi + \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta$$

en coordenadas esféricas.

Solución: Multiplicando por ρ ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
\rho^2 &= 3\rho\cos\phi + \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\
x^2+y^2+z^2 &= 3z+y \\
x^2+y^2-y+\frac{1}{4}+z^2-3z+\frac{9}{4} &= \frac{10}{4} \\
x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 &= \frac{10}{4}
\end{aligned}$$

que es la ecuación de una esfera de radio $r = \sqrt{10}/2$ con centro en el punto $C = (0, 1/2, 3/2)$.

2. Hallar la ecuación de un plano tangente a la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ descrita por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 16z + 54 = 0$$

en el punto $P = (1, 2, 3)$.

Solución: Consideremos la función

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y - 16z + 54$$

entonces la superficie S es el conjunto de nivel cero de F.

$$\nabla F(x, y, z) = (2x - 4, 2y - 8, 2z - 16)$$

y concretamente

$$\nabla F(1, 2, 3) = (-2, -4, -10)$$

que es un vector ortogonal a S en el punto $(1, 2, 3)$. Para siimplificar consideramos el vector paralelo al anterior $(1, 2, 5)$ y la ecuación del plano será:

$$(x - 1) \cdot 1 + (y - 2) \cdot 2 + (z - 3) \cdot 5 = 0$$

que es lo mismo que

$$x + 2y + 5z = 20$$

3. Hallar los polinomios de Taylor de grados 2 y 3 de la función

$$f(x, y) = \frac{1 + x}{1 + x + y^3}$$

en un entorno de $(0, 0)$.

Solución: La función f la podemos escribir

$$f(x, y) = (1 + x)\frac{1}{1 + x + y^3}$$

por otra parte

$$g(t) = \frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n, \quad t \in (-1, 1)$$

entonces

$$f(x, y) = (1 + x)g(x + y^3) = (1 + x)\left[1 - (x + y^3) + (x + y^3)^2 - (x + y^3)^3 + \cdots\right]$$

y tomando los términos de grado ≤ 3 en el desarrollo dentro del paréntesis tenemos el polinomio de grado 3 de f en el entorno de $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= (1 + x)\left[1 - x + x^2 - y^3 - x^3\right] \\ &= 1 - y^3 \end{aligned}$$

Truncando de nuevo el polinomio tenemos el de grado 2

$$P_2(x, y) = 1$$

También podríamos haber aplicado la fórmula de Taylor para resolver este ejercicio, aunque esto nos lleva a realizar más cálculos. En el caso del polinomio de grado 2 tenemos

$$P_2(x, y) = f(0, 0) + \frac{1}{1!}\mathrm{grad} f(0, 0)(x, y) + \frac{1}{2!}(x, y)Hf(0, 0)(x, y)^t$$

Las derivadas parciales primeras en un entorno de $(0, 0)$ son

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= \frac{y^3}{(1 + x + y^3)^2} \Rightarrow f_1(0, 0) = 0 \\ f_2(x, y) &= \frac{-3y^2 - 3xy^2}{(1 + x + y^3)^2} \Rightarrow f_2(0, 0) = 0 \end{aligned}$$

y las segundas

$$
\begin{aligned}
f_{11}(x,y) &= \frac{-2y^3}{(1+x+y^3)^3} \\
f_{22}(x,y) &= \frac{(-6y-6xy)(1+x+y^3)+6y^2(3y^2+3xy^2)}{(1+x+y^3)^3} \\
f_{12}(x,y)=f_{21}(x,y) &= \frac{3y^2+3xy^2-3y^5}{(1+x+y^3)^3}
\end{aligned}
$$

y entonces la matriz hessiana de f en el punto $(0,0)$ es

$$
Hf(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

y tenemos el polinomio de grado 2, $P_2(x,y)=1$ obtenido antes.

4. Sea la función

$$
f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^3(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}
$$

- Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.
- Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
- Estudiar la continuidad de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$.
- ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Solución: Para estudiar la continuidad pasamos a coordenadas polares y tenemos

$$
\lim_{\rho\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3\rho^2}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0}\frac{\operatorname{sen}\rho^2}{\rho^2}\cdot\lim_{\rho\to 0}\operatorname{sen}^2\rho^2 = 1\cdot 0 = 0
$$

y la función es continua.

Las parciales primeras en $(0,0)$ son

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen}^3 h^2}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 h^2}{h^3} = \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h^2}{h^2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 h^2}{h} = 1\cdot 0 = 0
$$

Por simetría tenemos también $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Calculamos las parciales primeras en un entorno de $(0,0)$

$$
\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{6x(x^2+y^2)\operatorname{sen}^2(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2)-2x\operatorname{sen}^3(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}
$$

y pasamos a coordenadas polares para calcular el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad = \quad \lim_{\rho \to 0} \frac{6\rho^3 \cos^3\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta \cdot \cos\rho^2 - 2\rho\cos\theta \cdot \operatorname{sen}^3\rho^2}{\rho^4} = 0$$

y lo mismo para la parcial respecto de y, por lo que las derivadas parciales primeras son continuas en un entorno de $(0,0)$ y esto implica que f es diferenciable en ese punto.