① a) $x \in Y \cap Z \Leftrightarrow x \in Y$ y $x \in Z$:

i) $x \in Y \Leftrightarrow x = \underbrace{\pm\sqrt{1-z^2}}_{\Downarrow} - 1$

$z^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq z \leq 1$ $\Big\} \Rightarrow -2 \leq x \leq 0$

ii) $x \in Z \Leftrightarrow x = \pm\underbrace{\sqrt{1-y^2}}_{\Downarrow} + 1$

$y^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq 1$ $\Big\} \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$

i), ii) implica que $x=0 \Rightarrow (0+1)^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z=0$

$\Rightarrow (0-1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y=0$

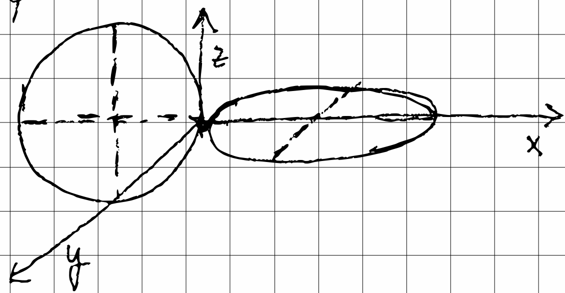
b) Tenemos que los cilindros Y, Z son conexos por caminos. Como $Y \cap Z = (0,0,0) \neq \emptyset \Rightarrow X = Y \cup Z$ es conexo por caminos

c) Sean los conjuntos

$A = \{(x,0,z) \in \mathbb{R}^3 : (x+1)^2 + z^2 = 1\}$

$B = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + y^2 = 1\}$

Veamos que el lazo $A \cup B$ es un retracto de deformación de X.



Sea $i : A \cup B \longrightarrow X$ la aplicación inclusión

$$r : X \longrightarrow A \cup B \,,\; \begin{cases} r(p) = (x,0,z) & \text{si } p \in Y \\ r(p) = (x,y,0) & \text{si } p \in Z \end{cases}$$

$Y \cap Z = \{0,0,0\}$ y $r((0,0,0)) = (0,0,0)$ por lo que r está bien definida.

Tenemos que $r(p) = p \quad \forall\, p \in A \cup B$, pues,

Si $p \in A$, $p = (x,0,z)$ y $A \subset Y \Rightarrow r(p) = (x,0,z) = p$

Si $p \in B$, $p = (x,y,z)$ y $B \subset Z \Rightarrow r(p) = (x,y,0) = p$

Sea $F : X \times I \longrightarrow X$

$$(p,t) \longrightarrow (1-t)p + t\,r(p)$$

Tenemos que :

- $F(p,0) = p$
- $F(p,1) = r(p)$
- Sea $p \in A \cup B$, $F(p,t) = (1-t)p + t\, r(p) = (1-t)p + p = p$ $\forall\, t \in I$.
- F es continua,

Tenemos que por definición de $r(p)$ que $\|r(p)\| \leq \|p\|$, de modo que :

$$\|F(p,t)\| = \|(1-t)p + t\,r(p)\| \leq |1-t|\,\|p\| + \underbrace{|t|\,\|r(p)\| \leq}_{t \in [0,1]} 2|t|\,\|p\|$$

por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, si $|t|\,\|p\| < \varepsilon/2$

$$\|F(p,t)\| < 2\, \varepsilon/2 = \varepsilon .$$

- Como $A \cup B$ es un retracto de deformación de X, la aplicación inclusión i induce un isomorfismo:

$$\pi(A \cup B, x_0) \simeq \pi(X, x_0)$$

donde tenemos que $\pi(A\cup B, x_0) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Por lo tanto:

$\pi(X, (0,0,0)) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$

(2) (1) a) Como $\mathbb{B} = \mathbb{P} \# \mathbb{P}$ y $\mathbb{T} \# \mathbb{P} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P}$, tenemos que la suma conexa de 6 botellas de Klein es equivalente a la suma conexa de 2b planos proyectivos y dependiendo de si p es par o impar:

- Si p impar:

$S = \mathbb{T}^{t + (p+2b-1)/2} \# \mathbb{P}$

- Si p par:

$S = \mathbb{T}^{t + \frac{p+2b-2}{2}} \# \mathbb{P}$

2) Si S se expresa en función de la suma conexa de planos proyectivos, teniendo en cuenta que,

$$\mathbb{T} \# \mathbb{P} = \mathbb{P} \# \mathbb{P} \# \mathbb{P},$$

$$S = \mathbb{P}^{2t+p+2b}$$

3) Si S se puede expresar como suma de botellas de Klein, teniendo en cuenta que

$$\mathbb{B} = \mathbb{P} \# \mathbb{P}$$

$$S = \mathbb{B}^{b+t+p/2}$$ de modo que p es par.

(b) $t = \frac{1}{5}(t+b+p/2-1)$; $8t-2b-p+2=0$

$p = \frac{1}{3}\cdot(2t+p+2b)$; $p-b-t=0$

$b = \frac{1}{2}\cdot(b+t+p/2)$; $2b-2t-p=0$

$$\left.\begin{array}{l} p-b-t=0 \\ 2b-2t-p=0 \end{array}\right\} b=3t, \quad p=4t$$

$8t-6t-4t+2=0 \Rightarrow 2t=2 \Rightarrow t=1$, $b=3$, $p=4$

(c) Tenemos que S es la suma conexa de 12 planos proyectivos.

③ Tenemos que $u(0)=f(0)=v(0)$ y $u(1)=g(1)=v(1)$ y

$$F: I\times I \longrightarrow X$$

$$(t,s) \longrightarrow F(t,s)=(1-s)u(t)+s\,v(t)$$

$F(t,0)=u(t)$, $F(t,1)=v(t)$

es continua. u, v pertenecen a la clase de equivalencia de $[f\cdot g]$.