Unidad didáctica 3: Espacios vectoriales

3.1 Introducción

El conjunto de soluciones de un sistema lineal así como el conjunto de las matrices de un orden dado tienen propiedades comunes: la combinación lineal de dos soluciones de un sistema es otra solución del sistema, y la combinación lineal de dos matrices del mismo orden es otra matriz del mismo orden. Estas "combinaciones lineales" son la base del Método de Gauss que ha impregnado hasta ahora -y lo seguirá haciendo- todo lo visto.

Generalizando lo que ha pasado con los sistemas lineales y las matrices, aparece la estructura abstracta de **espacio vectorial**. Las combinaciones lineales de los elementos de un espacio vectorial, a los que llamaremos **vectores**, producen nuevos elementos de dicho espacio, nuevos vectores. Así, los conjuntos de matrices o de soluciones de sistemas lineales son ejemplos de espacios vectoriales.

Comenzamos con el concepto abstracto de espacio vectorial V, que es una estructura algebraica ligada a un cuerpo de números K que será el de los reales: $\mathbb{R}$, o el de los complejos $\mathbb{C}$. En el espacio vectorial se podrán operar sus elementos entre sí (la operación normalmente se denotará como "+") y se podrán multiplicar por los elementos del cuerpo, a los que se llamará **escalares**; de modo que las operaciones cumplan las 8 propiedades enunciadas en la pág. 89.

A los elementos del espacio vectorial V se les suele denotar por letras latinas como u, v, w ... o también x, y, z ...; mientras que se suelen utilizar las letras griegas α, β, γ o también λ (lambda), μ (mu)..., para denotar a los escalares.

Un espacio vectorial que jugará un papel importante será $K^n = \mathbb{R}^n \ o \ \mathbb{C}^n$ formado por secuencias ordenadas de n elementos de K, también llamadas n-uplas. Esto es

$$K^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \quad x_i \in K\}.$$

En la Sección 3.1 conoceremos los conceptos más importantes del espacio vectorial: combinación lineal, dependencia e independencia lineal de vectores. Será importantísimo tenerlos muy claros.

Desde la Sección 3.2 centraremos el estudio en los espacios vectoriales de tipo finito o de **dimensión finita**, que son los únicos que trabajaremos en este curso. En un espacio vectorial de dimensión finita se puede encontrar un conjunto finito de vectores $\{v_1, \dots, v_k\}$, de modo que podamos obtener todos los vectores del espacio mediante combinaciones lineales de ellos. A un conjunto de vectores tal se le denomina **sistema generador** o sistema de generadores (pág. 98). Estaremos interesados en encontrar sistemas generadores que tengan el número mínimo de vectores, a los que llamaremos **bases**, y que estarán caracterizados por el hecho de que los vectores sean linealmente independientes. Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos al que se denomina **dimensión** (Teorema 3.18, pág. 101), y todo conjunto de vectores linealmente independiente se puede ampliar hasta obtener una base (**Teorema de ampliación de la base**, pág. 104).

Dada una base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de un K-espacio vectorial V de dimensión n, se cumple que cualquier vector *v* de *V* se puede escribir <u>de modo único</u> como combinación lineal de los elementos de la base
$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n$,
con $x_1, \dots, x_n$ escalares, a los que se denomina **coordenadas** de *v* en la base *B*. Este hecho es importantísimo pues permite, fijada una base B, identificar todo vector con sus coordenadas respecto a dicha base, lo que expresaremos del siguiente modo:

$$v = (x_1, \dots, x_n)_B$$

"v es el vector de coordenadas $(x_1, \dots, x_n)$ respecto de la base B". Así, se representan los vectores de un espacio vectorial mediante elementos de K^n, facilitando su manipulación y el uso de matrices para el estudio de espacios y subespacios.

La Sección 3.4 se dedica al rango de un conjunto de vectores que es el mayor número de vectores linealmente independientes que contiene. Una forma muy cómoda de estudiar el rango es representar los vectores mediante coordenadas, disponerlos en las filas de una matriz, y estudiar el rango de la matriz.

Un mismo vector v tiene distintas coordenadas respecto de distintas bases B y B', y podemos obtener una matriz que nos permita obtener las coordenadas de un vector en una base dada B', conocidas sus coordenadas en otra base B, se hace a utilizando una matriz que se denomina **matriz de cambio de base** de B a B' (pág. 113). Esto se hará en la Sección 3.5.

En la sección 3.6 nos interesaremos por los subconjuntos no vacíos U de un espacio vectorial V que, en sí mismos, tienen estructura de espacio vectorial, a los que llamaremos **subespacios vectoriale**s (pág. 116). Todos ellos contienen al vector 0. Si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es un sistema generador de un subespacio U, lo denotaremos por $U = L(u_1, \dots, u_m)$. De un subespacio vectorial nos interesará determinar un sistema generador, una base y su dimensión.

La representación de vectores mediante coordenadas respecto de una B, permite también definir cualquier subespacio vectorial U, de un espacio vectorial V, como el conjunto de vectores cuyas coordenadas son el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo, al que llamaremos **ecuaciones implícitas o cartesianas** del subespacio respecto de B. Las ecuaciones son condiciones que tienen que cumplir las coordenadas de un vector para que pertenezca al subespacio. El conjunto de soluciones de las ecuaciones implícitas se denominan **ecuaciones paramétricas** del subespacio y a partir de ellas se puede determinar fácilmente una base.

Una vez que se tiene una representación de los subespacios vectoriales mediante ecuaciones y de los vectores mediante coordenadas - todo ello relativo a una base fijada-, en las Secciones 3.8 y 3.9 se construyen nuevos subespacios vectoriales haciendo distintos tipos de operaciones con ellos:

- Intersección de subespacios
- Suma de subespacios
- Cociente módulo un subespacio.

3.2 Conceptos más importantes

Sección 3.1. Dependencia e independencia lineal

- Espacio vectorial: operaciones y propiedades.
- Combinación lineal de vectores. Dependencia e independencia lineal.

Sección 3.2. Sistemas Generadores

- Sistema de generadores, base y dimensión.
- Coordenadas de un vector respecto de una base.
- Isomorfismo de coordenadas.
- Matriz de cambio de base o de cambio de coordenadas.
- Teorema de prolongación de la base.

Sección 3.3 Rango Generadores

- Rango de un conjunto de vectores
- Matriz de coordenadas de un conjunto de vectores respecto de una base (por filas y por columnas).
- Conjuntos de vectores equivalentes.
- Matriz de cambio de base.

Sección 3.6. Subespacios vectoriales

- Subespacio vectorial. Subespacio trivial o cero. Subespacio propio.
- Recta, plano e hiperplano.
- Subespacio generado por un conjunto de vectores.

- Ecuciones paramétricas e implícitas de un subespacio.
- Combinación lineal de vectores. Dependencia e independencia lineal.
- Intersección y suma de subespacios. Suma directa.
- Subespacios suplementarios.
- Fórmula de Grassman.
- Cociente de un espacio vectorial módulo un subespacio.

3.3 Resultados del aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con precisión y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) más importantes.

Se desarrollarán las siguientes habilidades:

- Demostrar que un conjunto dado tiene estructura de espacio vectorial.
- Encontrar un sistema generador y una base de un subespacio vectorial.
- Determinar las coordenadas de un vector en distintas bases. Obtener la matriz de cambio de base o cambio de coordenadas.
- Determinar el rango de un conjunto de vectores.
- Determinar unas ecuaciones implícitas y/o paramétricas de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores.
- Dados dos subespacios vectoriales V_1 y V_2 de un espacio vectorial V, determinar ecuaciones, dimensión y base de $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$ $y\ del\ cociente\ \ V/V_1$.
- Determinar si la suma de dos subespacios es directa.
- Determinar un suplementario de un subespacio vectorial dado.
-