Cálculo de Probabilidades II— Febrero 2016 — Primera semana

Cuestión 1. (2 puntos) Indicar cuáles son los tipos de distribuciones unidimensionales que se distinguen y proporcionar la definición de cada uno de ellos.

Cuestión 2. (2 puntos) Enunciar la Ley Fuerte de los grandes números para una sucesión de variables aleatorias independientes. Enunciar también el resultado relativo al caso de variables independientes e igualmente distribuidas.

Ejercicio 1. (6 puntos) En el interior de un triángulo de lados a, b y c se elige un punto P al azar. Si A, B y C representan las distancias de P a los respectivos lados, calcular:

a) $P\{A < B\}$,

b) $P\{A < C \mid A < B\}$.

c) Demostrar que $\{A < B, A < C\}$ y $\{B < C\}$ son sucesos independientes.

Ejercicio 2. (4 puntos) Para elegir un ángulo α en el intervalo $(0, \pi/2)$, se escoge un punto P sobre la diagonal AC de un cuadrado $ABCD$ de lado 1, a distancia X de A, y se considera el ángulo $\alpha = \widehat{ABP}$.

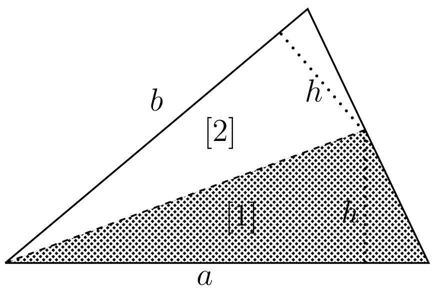
a) Determinar la distribución que debe tener X para que α tenga distribución uniforme en $(0, \pi/2)$.

b) Determinar en tal caso la función de distribución del área del cuadrado situada en el semiplano limitado por la recta BP y que contiene al punto A.

Nota máxima 10.

Solución

1. a)

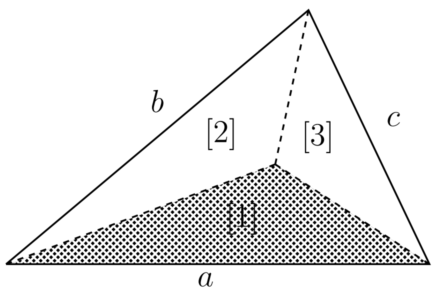


La bisectriz de un ángulo está compuesta por los puntos que equidistan de sus dos lados. Por tanto, el suceso $\{A < B\}$ es el triángulo [1], sombreado en la figura, situado entre el lado a y la bisectriz del ángulo que forman los lados a y b. Como el punto P se elige al azar, cada región tiene probabilidad proporcional a su área y será

$$\mathrm{P}\{A < B\} = \frac{\text{área [1]}}{\text{área [1]+área [2]}} = \frac{ah/2}{ah/2 + bh/2} = \frac{a}{a+b}$$

donde h es la altura común de ambos triángulos [1] y [2].

b) Trazando las otras dos bisectrices, el suceso $\{A < C\} \cap \{A < B\}$ corresponde a posiciones del punto P dentro del triángulo [1], sombreado en la figura adjunta. Por consiguiente, si d es la distancia común a los tres lados del punto de intersección de las tres bisectrices, se tiene



$$\mathrm{P}\{A < C, A < B\} = \frac{\text{área [1]}}{\text{área [1]+área [2]+área [3]}} = \frac{ad/2}{ad/2 + bd/2 + cd/2} = \frac{a}{a+b+c}.$$

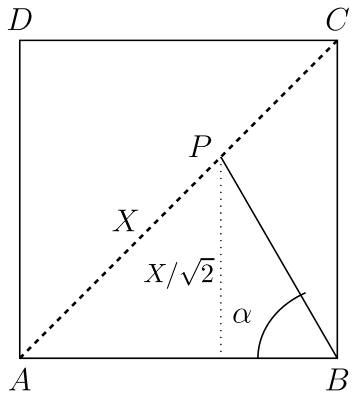
Así pues, elegido un punto P al azar en un triángulo, la probabilidad de que cada lado sea el más próximo a P es proporcional a la longitud de dicho lado (igual a la longitud del lado dividida por el perímetro).

c) Según los resultados anteriores, se verifica

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{A < B < C\} &= \mathrm{P}\{B < C\} - \mathrm{P}\{B < C, B < A\} = \frac{b}{b+c} - \frac{b}{a+b+c} \\ &= \frac{b}{b+c}\,\frac{a}{a+b+c} = \mathrm{P}\{B < C\}\,\mathrm{P}\{A < C,\, A < B\}\end{aligned}$$

lo cual significa que los sucesos $\{B < C\}$ y $\{A < B, A < C\}$ son independientes. Dicho de otra manera, saber que el lado a es el más próximo a P no da ninguna información sobre cual de las distancias a los otros lados es menor.

2.



a) En función de X el ángulo α queda determinado por la condición

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{X/\sqrt{2}}{1 - X/\sqrt{2}} \qquad \text{de donde} \qquad X = \frac{\sqrt{2}\,\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha}.$$

Si α ha de tener densidad uniforme $f(\alpha) = 2/\pi$ en el intervalo $(0, \pi/2)$, la densidad de X tendrá que ser

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{2(1 - \sqrt{2}x + x^2)} = \frac{\sqrt{2}}{\pi(1 - \sqrt{2}x + x^2)} \quad \text{para} \quad x \in (0, \sqrt{2})$$

puesto que $d\alpha = \dfrac{\sqrt{2}\,dx}{2(1 - \sqrt{2}x + x^2)}$ y el recorrido $\alpha \in [0, \pi/2]$ se corresponde con $x \in [0, \sqrt{2}]$.

b) Sea S el área de la región del cuadrado situada por debajo de la recta BP. Si $S \leq 1/2$, es $S = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, puesto que se trata de un triángulo de lados 1 y $\operatorname{tg}\alpha$. Por consiguiente

$$\mathrm{P}\{S \leq s\} = \mathrm{P}\{\alpha \leq \operatorname{arc\,tg} 2s\} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} 2s \quad \text{si } 0 \leq s \leq 1/2.$$

En cambio, cuando $S > 1/2$, es $S = 1 - \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha}$ puesto que S es el área total del cuadrado menos el de un triángulo de lados 1 y $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = 1/\operatorname{tg}\alpha$. En consecuencia

$$\mathrm{P}\{S \leq s\} = \mathrm{P}\{\operatorname{tg}\alpha \geq 1/2(1-s)\} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2(1-s)} \quad \text{si } 1/2 \leq s \leq 1.$$

Cálculo de Probabilidades II— Febrero 2016 — Segunda semana

Cuestión 1. (2 puntos) Enunciar los teoremas de caracterización de la convergencia en distribución de una sucesión de distribuciones F_n, (a) en términos de convergencia de integrales y (b) en términos de convergencia de las funciones características.

Cuestión 2. (2 puntos) Si $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ es una variable aleatoria k-dimensional, con momentos de segundo orden finitos, indicar la definición del hiperplano de regresión de X_1 sobre $(X_2, \ldots, X_k)$ y su expresión en términos de la matriz de covarianzas $\mathbf{\Sigma}$.

Ejercicio 1. (4 puntos) Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución exponencial de parámetro 1.

(a) Calcular la probabilidad de que la distancia de Y a X sea inferior a r, condicionada por $X = x$ (según que sea $x \geq r$ o $x < r$). Deducir la probabilidad de que la distancia de Y a X sea inferior a r.

(b) Determinar la densidad conjunta de $U = X$ y $V = Y - X$. Confirmar con ello el último resultado de (a). ¿Son U y V independientes?

Ejercicio 2. (4 puntos) Dos trenes A y B llegan a una estación independientemente en instantes uniformemente distribuidos en $[0, T]$ y tienen paradas de duraciones fijas a y b respectivamente, siendo $a, b < T$.

a) Determinar la probabilidad de que ambos coincidan en la estación.

b) Supuesto que coinciden, hallar la probabilidad de que A haya llegado antes que B.

Nota máxima 10.

Solución

1. a) Supuesto que $X = x \geq r$, como Y tiene densidad e^{-y} para $y > 0$, es

$$\mathrm{P}\{|Y - x| < r\} = \int_{x-r}^{x+r} e^{-y}\, dy = e^{-x}(e^{r} - e^{-r}).$$

En el caso $X = x < r$, resulta

$$\mathrm{P}\{|Y - x| < r\} = \int_{0}^{x+r} e^{-y}\, dy = 1 - e^{-x-r}.$$

Como X se elige también con densidad e^{-x} para $x > 0$, se obtiene

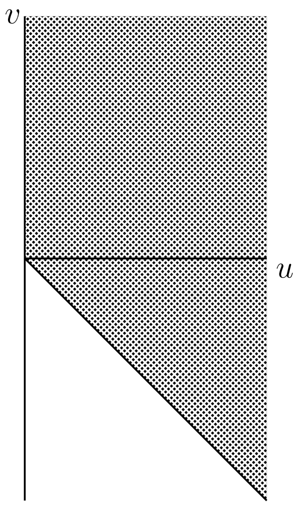
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{|Y - X| < r\} &= \int_0^r (1 - e^{-x-r})e^{-x}\, dx + \int_r^\infty e^{-x}(e^{r} - e^{-r})e^{-x}\, dx \\ &= 1 - e^{-r} - \frac{1}{2}\, e^{-r}(1 - e^{-2r}) + \frac{1}{2}\,(e^{r} - e^{-r})e^{-2r} = 1 - e^{-r}\end{aligned}$$

Así pues, la distancia entre dos valores elegidos con distribución exponencial tiene la misma distribución exponencial.

b) (X, Y) son independientes y exponenciales de parámetro 1, así que su densidad conjunta es $f(x, y) = e^{-x-y}$ en la región $x, y > 0$. La densidad conjunta de $U = X$ y $V = Y - X$ se obtiene de la transformación $u = x, v = y - x$ cuya inversa es $x = u, y = u + v$, ambas con jacobiano $J = 1$. Así pues

$$\tilde{f}(u, v) = e^{-2u-v} = e^{-2u}e^{-v}$$

en la región $u > 0, u + v > 0$ representada en la figura.



Las densidades marginales de U y V resultan

$$\tilde{f}_1(u) = e^{-2u} \int_{-u}^{\infty} e^{-v}\, dv = e^{-u} \quad \text{para } u > 0,$$

que naturalmente coincide con la de X; mientras que

$$\tilde{f}_2(v) = \begin{cases} e^{-v} \int_0^\infty e^{-2u}\, du = \frac{1}{2}\, e^{-v} & \text{para } v > 0 \\ e^{-v} \int_{-v}^\infty e^{-2u}\, du = \frac{1}{2}\, e^{v} & \text{para } v < 0. \end{cases}$$

de forma que $V = Y - X$ tiene distribución de Laplace (pág. 70). La densidad de $|V|$ es entonces

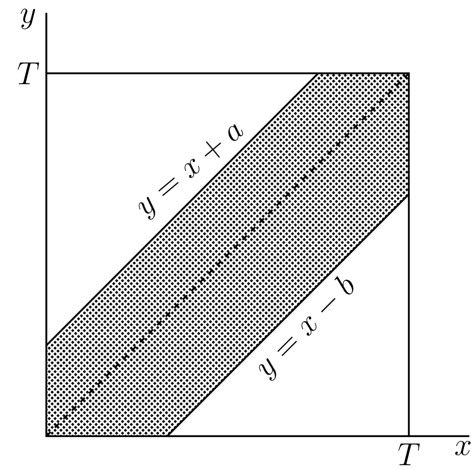
$$\tilde{f}_2(v) + \tilde{f}_2(-v) = e^{-v} \quad \text{para } v > 0.$$

Ello confirma el resultado de (a): la distribución de $|Y - X|$ es exponencial de parámetro 1. Evidentemente, U y V no son independientes: $\tilde{f}(u, v) \neq \tilde{f}_1(u) \cdot \tilde{f}_2(v)$. Ni siquiera es rectangular la región en la que está concentrada la distribución de (U, V).

2. Sean X e Y los instantes de llegada de ambos trenes A y B, que son independientes y ambos con distribución uniforme en $[0, T]$. Los trenes coinciden en la estación si se cumple alguna de las desigualdades:

$$X < Y < X + a \qquad Y < X < Y + b.$$

La primera indica que B llega después que A, pero antes de que A se marche; con la segunda, A llega después que B, pero mientras B está parado.



a) Como (X, Y) tiene distribución uniforme en el cuadrado $[0, T]^2$, la región C definida por las desigualdades anteriores (sombreada en la figura) tiene probabilidad

$$\mathrm{P}(C) = \frac{T^2 - (T-a)^2/2 - (T-b)^2/2}{T^2} = 1 - \frac{1}{2}(1 - a/T)^2 - \frac{1}{2}(1 - b/T)^2$$

calculada restando del área total el área de los dos triángulos que componen el complementario C^c.

b) Si D es el suceso B llega después que A, $D \cap C$ es el trapecio definido por las desigualdades $X < Y < X + a$. Por tanto

$$\mathrm{P}(D|C) = \frac{\mathrm{P}(D \cap C)}{\mathrm{P}(C)} = \frac{[T^2/2 - (T-a)^2/2]/T^2}{\mathrm{P}(C)} = \frac{1/2 - (1 - a/T)^2/2}{1 - (1 - a/T)^2/2 - (1 - b/T)^2/2}.$$

Cálculo de Probabilidades 2 — Septiembre 2016

Cuestión (2 puntos) Enunciar el *Teorema Central del Límite* (de Lévy) para una sucesión $\{X_j\}$ de variables independientes e idénticamente distribuidas. Explicar cómo se utiliza y en qué consiste la *corrección por continuidad* cuando los términos X_j tienen valores enteros.

Ejercicio (8 puntos) Se elige un punto P al azar en el interior del triángulo rectángulo de vértices $O:(0,0)$, $A:(1,0)$ y $B:(0,\sqrt{3})$ (cuyos ángulos agudos miden $\pi/3$ y $\pi/6$ respectivamente).

(a) Determinar directamente la función de distribución de la distancia D de P a la hipotenusa del triángulo.

(b) Calcular la mediana, la media y la varianza de D.

Si P se elige al azar en el interior del triángulo equilátero de vértices $A':(-1,0)$, $A:(1,0)$ y $B:(0,\sqrt{3})$,

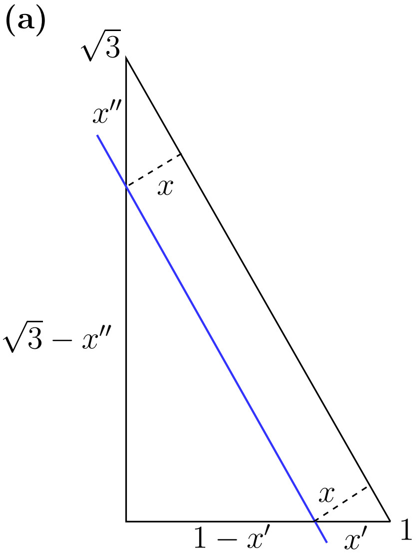
(c) Determinar la distribución conjunta de las distancias U y V de P a los lados AB y $A'B$ ([1]). ¿Son U y V independientes?

(d) Calcular las curvas de regresión de V sobre U y de U sobre V. ¿Cuáles son las rectas de regresión correspondientes?

[1] Se recuerda que la distancia del punto (p,q) a la recta $ax+by+c=0$ es $|ap+bq+c|/\sqrt{a^2+b^2}$.

Solución

Ejercicio
(a)



En el triángulo rectángulo de la figura, de área $S = \sqrt{3}/2$, la región de los puntos cuya distancia a la hipotenusa es superior a x es el triángulo situado por debajo de la línea azul, que dista x de la hipotenusa. Teniendo en cuenta la medida de los ángulos, los segmentos x' y x'' cumplen

$$\frac{x}{x'} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad \frac{x}{x''} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2};$$

con lo cual

$$x' = \frac{2}{\sqrt{3}}\,x \quad \text{y} \quad x'' = 2x.$$

Por consiguiente, el área del triángulo de lados $1-x'$ y $\sqrt{3}-x''$ proporciona

$$\mathrm{P}\{D > x\} = \frac{(1-2x/\sqrt{3})(\sqrt{3}-2x)}{\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-2x)^2}{3}$$

cuando x está comprendido entre 0 y $\sqrt{3}/2$ (máximo valor de la distancia del origen a la hipotenusa). Es decir, la función de distribución de la distancia D es

$$F(x) = 1 - \frac{(\sqrt{3}-2x)^2}{3} \quad \text{para } x \in (0, \sqrt{3}/2)$$

mientras que la densidad resulta

$$f(x) = \frac{4(\sqrt{3}-2x)}{3} \quad \text{para } x \in (0, \sqrt{3}/2).$$

(b) La mediana es el valor M para el cual $F(M) = 1/2$; o sea

$$(\sqrt{3}-2M)^2 = \frac{3}{2} \quad \text{de donde} \quad M = \frac{\sqrt{3}}{2}\Big(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \simeq 0'2536.$$

Por su parte, la media de D vale

$$\mathrm{E}[D] = \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}/2} (\sqrt{3}-2x)x\,dx = \frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0'2887.$$

Así mismo

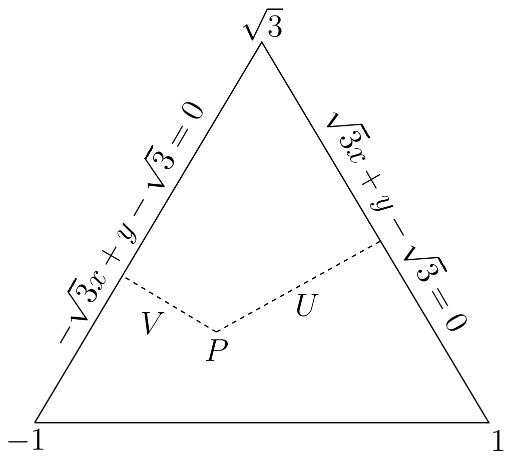
$$\mathrm{E}[D^2] = \frac{4}{3}\int_0^{\sqrt{3}/2} (\sqrt{3}-2x)x^2\,dx = \frac{1}{8}$$

de modo que la varianza de D es $V(D) = 1/8 - 1/12 = 1/24$.

(c)

Ahora, el punto P, de coordenadas x, y, se elige en el triángulo equilátero adjunto y las distancias U y V a los lados son

$$\begin{cases} U = \dfrac{\sqrt{3} - \sqrt{3}x - y}{2} \\[2ex] V = \dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{3}x - y}{2} \end{cases}$$



de manera que se cumple

$$\begin{cases} 2U - \sqrt{3} = -\sqrt{3}x - y \\[2ex] 2V - \sqrt{3} = \sqrt{3}x - y. \end{cases}$$

Por consiguiente

$$\begin{cases} x = \dfrac{V - U}{\sqrt{3}} \\[2ex] y = \sqrt{3} - (U + V) \end{cases},$$

transformación cuyo jacobiano vale

$$J = \begin{vmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Puesto que la densidad conjunta de (x, y) es uniforme en el triángulo equilátero, se tiene

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{en } T$$

con lo cual la densidad conjunta de (U, V) resulta

$$g(u, v) = \frac{1}{\sqrt{3}} \, \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

en el triángulo transformado T' definido por las desigualdades $U, V > 0$ y $U + V < \sqrt{3}$. (De hecho el lado AB se transforma en $U = 0$, el lado $A'B$ se transforma en $V = 0$ y el lado AA', donde $y = 0$, se transforma en $U + V = \sqrt{3}$.) En definitiva, la distribución conjunta de (U, V) es uniforme en el triángulo T' y U y V no son independientes.

(d) La densidad marginal de U es

$$g_1(u) = \frac{2}{3} \int_0^{\sqrt{3}-u} dv = \frac{2(\sqrt{3} - u)}{3}$$

con lo cual la densidad de V condicionada por $U = u$ resulta

$$g(v|u) = \frac{1}{\sqrt{3} - u} \quad \text{para } v \in (0, \sqrt{3} - u)$$

siempre que $u \in (0, \sqrt{3})$. Así pues, condicionado por $U = u$, V tiene distribución uniforme en $(0, \sqrt{3} - u)$, cuya media es

$$\mathrm{E}[V|U = u] = \frac{\sqrt{3} - u}{2}$$

y proporciona tanto la curva como la recta de regresión de V sobre U.
Por simetría, la curva y la recta de regresión de U sobre V coinciden con $U = (\sqrt{3} - v)/2$ cuando $v \in (0, \sqrt{3})$.