Sea la función $f(x) = \log(x^2+1) - \int_0^x \frac{1}{t^2+1}\,dt$, probar que para $x \geqslant 1/2$ la función es creciente.

Si $b \geqslant a \geqslant 1/2$, ¿Es cierto que

$$\log\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) \geqslant \int_a^b \frac{1}{t^2+1}\,dt.$$

SOLUCIÓN:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{2x-1}{x^2+1}$$

Si $x \geqslant 1/2$ $2x-1 \geqslant 0$ y $f'(x) \geqslant 0$ luego la función es creciente.

Si $b \geqslant a \geqslant 1/2$ entonces $f(a) \leq f(b)$ y

$$\log(b^2+1) - \int_0^b \frac{1}{t^2+1}\,dt \geqslant \log(a^2+1) - \int_0^a \frac{1}{t^2+1}\,dt$$

y por tanto

$$\log\left(\frac{b^2+1}{a^2+1}\right) \geqslant \int_a^b \frac{1}{t^2+1}\,dt.$$

Calcular $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$

SOLUCIÓN

Hacemos el cambio $\operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx = \dfrac{1}{1+t^2}\,dt \\ \cos x = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}} \end{cases}$$

por tanto

$$I = \int (1+t^2)^2 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int (1+t^2)\,dt = t + \frac{t^3}{3} + K$$

$$I = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + K.$$

Otro método: $\sec^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$I = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,(1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx =$$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} + \int \frac{1}{\cos^2 x}\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + K.$$

Desarrollar la serie de potencias la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ y studiar la convergencia de dicha serie.

SOLUCIÓN: Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$f^{IV}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{IV}(0) = 0$

$\vdots \qquad \vdots$

$1 = 2\cdot 0 + 1$

$3 = 2\cdot 1 + 1$

$5 = 2\cdot 2 + 1$

luego la serie es $\sum_0^\infty (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$|f^{(n)}(x)| \leq 1$, luego stá uniformemente acotado y por el teorema de convergencia

$$\operatorname{sen} x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Calcular el límite de la sucesión definida por

$$a_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$$

Solución:

$$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2+1} + \frac{n^2}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2+n^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \cdots + \frac{1}{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$$

pero esto es la suma Riemann de la función

$\frac{1}{1+x^2}$ asociada a la partición $\{0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < 1\}$

luego

$$\lim_n a_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Hallar $\int_0^1 \sqrt{1-x^5}\, dx$

Solución: Hacemos el cambio

$$x^5 = t \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{5} t^{-4/5}\, dt \\ x = 1 \to t = 1 \\ x = 0 \to t = 0 \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{5} \int_0^1 t^{-4/5} (1-t)^{1/2}\, dt = \frac{1}{5} \beta(p,q)$$

donde $p - 1 = -\frac{4}{5}$ $\quad p = \frac{1}{5}$

$q - 1 = 1/2$ $\quad q = 3/2$

$$I = \frac{1}{5} \beta\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{5} \frac{\Gamma(1/5)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(17/10)}.$$

Desarrollar en serie de potencias de x la función $\log(x^2+4x+3)$

solución:

Si derivamos $\log(x^2+4x+3)$ resulta

$$\frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{1+x} + \frac{1/3}{(1+x/3)} =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n x^n + \sum_0^\infty \frac{1}{3}(-1)^n \left(\frac{x}{3}\right)^n =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n x^n \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}}\right)$$

cuyo intervalo de convergencia es $(-1,1)$ pues

$$\frac{1}{\rho} = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =$$

$$= \lim_n \frac{\frac{3^{n+2}+1}{3^{n+2}}}{\frac{3^{n+1}+1}{3^{n+1}}} = \lim_n \frac{1}{3} \frac{3+1/3^{n+1}}{1+1/3^{n+1}} = 1$$

Integrando pues

$$\int_0^x \frac{2x+4}{x^2+4x+3} = \log(x^2+4x+3) - \log(3) =$$

$$= \sum_0^\infty (-1)^n \left(1+\frac{1}{3^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

por tanto

$$\log(x^2+4x+3) = \log 3 + \sum_0^\infty (-1)^n \left(1+\frac{1}{3^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$x \in (-1,1)$.