FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I.

PROBLEMAS PARA PREPARAR LA PRUEBA PRESENCIAL.

Curso 2015-16

1. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ que forman entre sí un ángulo de $\pi/4$. Probar que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$.

2. Sean $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores del espacio $\mathbb{R}^3$ tales que $\|\mathbf{u}\| = 1$, $\|\mathbf{v}\| = 2$, $\|\mathbf{w}\| = 3$ y el ángulo entre dos cualesquiera de ellos es $\pi/3$. Calcular $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\|$.

   Solución: Se tiene que $\cos(\pi/3) = 1/2$. Entonces

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\|^2 &= (\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot(\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}) \\
&= (\mathbf{u},\mathbf{u}) + (\mathbf{v},\mathbf{v}) + (\mathbf{w},\mathbf{w}) + 2(\mathbf{u},\mathbf{v}) + 2(\mathbf{u},\mathbf{w}) + 2(\mathbf{v},\mathbf{w}) \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\frac{\pi}{3} + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\frac{\pi}{3}2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\frac{\pi}{3} \\
&= 14 + 4 + 3 + 4 \\
&= 25
\end{aligned}
$$

   y entonces $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}\| = \sqrt{25} = 5$.

3. Encontrar la ecuación del plano que:

   a) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por $(1, 0, 0)$.

   b) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ y pasa por el punto $(5, -1, 0)$.

   Solución:

   a) El vector normal al plano es $\mathbf{n} = \mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ y la ecuación de éste será

$$(x-1) + (y-0) + (z-0) = 0$$

   es decir

$$x + y + z = 1$$

   b) El vector de dirección de la recta tiene que ser perpendicular al plano, es decir podemos tomar como vector normal $\mathbf{n} = (5, 0, 2)$, y la ecuación del plano se obtiene finalmente al imponer que el punto $(5, -1, 0)$ pertenece a éste:

$$5\cdot(x-5) + 0\cdot(y+1) + 2\cdot(z-0) = 0$$

   o lo que es lo mismo

$$5x + 2z = 25$$

4. Hallar la intersección de los planos $x + 2y + z = 0$ y $x - 3y - z = 0$.

Solución: Se trata de encontrar los puntos que satisfacen el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ x - 3y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

que es equivalente al sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y & = & -z \\ x - 3y & = & z \end{array} \right.$$

De la segunda ecuación tenemos

$$x = z + 3y \tag{1}$$

y sustituyendo en la primera

$$z + 5y = -z \Rightarrow y = -\frac{2}{5}z$$

y sustituyendo este valor en (1) tenemos

$$x = z - \frac{6}{5}z = -\frac{1}{5}z$$

esto nos da la siguiente ecuación paramétrica de la intersección

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5}\lambda, -\frac{2}{5}\lambda, \lambda\right)$$

que es la de una recta que pasa por el origen, ya que los dos planos pasan por el origen.

El sistema del inicio lo podríamos haber resuelto del siguiente modo: sumando las dos ecuaciones y restando la segunda a la primera, tenemos respectivamente

$$2x - y = 0 \text{ y } 5y = -2z$$

e igualando se tiene

$$2x = y = -\frac{5}{2}z \equiv \frac{x}{1/2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-5/2}$$

que es la ecuación

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{-2/5} = \frac{z}{1}$$

que equivale la paramétrica calculada antes.

Tambien podríamos haber resuelto el sistema utilizando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

.

5. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ dos vectores con normas 4 y 2 respectivamente. Si $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = 5$, calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.

6. Calcular la distancia desde el origen de $\mathbb{R}^3$ al plano de ecuación $x + 2y + 3z = 4$.

7. Encontrar la ecuación del plano que:

   a) Es perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ y pasa por $(1, 0, 0)$.

   b) Es perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$.

   Solución:

   a) El vector normal al plano es $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ y la ecuación de éste será

   $$(x - 1) + (y - 0) + (z - 0) = 0$$

   es decir

   $$x + y + z = 1$$

   b) El vector de dirección de la recta tiene que ser perpendicular al plano, es decir podemos tomar como vector normal $\mathbf{n} = (5, 0, 2)$, y la ecuación del plano se obtiene finalmente al imponer que el punto $(5, -1, 0)$ pertenece a éste:

   $$5 \cdot (x - 5) + 0 \cdot (y + 1) + 2 \cdot (z - 0) = 0$$

   o lo que es lo mismo

   $$5x + 2z = 25$$

8. Hallar la intersección de los planos $x + 2y + z = 0$ y $x - 3y - z = 0$.

   Solución: Se trata de encontrar los puntos que satisfacen el siguiente sistema

   $$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y + z & = & 0 \\ x - 3y - z & = & 0 \end{array} \right.$$

   que es equivalente al sistema

   $$\left\{ \begin{array}{rcr} x + 2y & = & -z \\ x - 3y & = & z \end{array} \right.$$

   De la segunda ecuación tenemos

   $$x = z + 3y \tag{2}$$

   y sustituyendo en la primera

   $$z + 5y = -z \Rightarrow y = -\frac{2}{5}z$$

   y sustituyendo este valor en (1) tenemos

   $$x = z - \frac{6}{5}z = -\frac{1}{5}z$$

esto nos da la siguiente ecuación paramétrica de la intersección

$$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{5}\lambda, -\frac{2}{5}\lambda, \lambda\right)$$

que es la de una recta que pasa por el origen, ya que los dos planos pasan por el origen.

El sistema del inicio lo podríamos haber resuelto del siguiente modo: sumando las dos ecuaciones y restando la segunda a la primera, tenemos respectivamente

$$2x - y = 0 \ \text{ y } \ 5y = -2z$$

e igualando se tiene

$$2x = y = -\frac{5}{2}z \equiv \frac{x}{1/2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-5/2}$$

que es la ecuación

$$\frac{x}{-5} = \frac{y}{-2/5} = \frac{z}{1}$$

que equivale la paramétrica calculada antes.

Tambien podríamos haber resuelto el sistema utilizando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 2 \\ z & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}} \quad , \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}$$

.

9. Obtener un vector unitario con componente $\mathbf{k}$ positiva que sea perpendicular a los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ y $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

   Solución: Un vector perpendicular a los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ es el producto vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

   Tenemos que $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \sqrt{101}$, pero el vector $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tiene la componente $\mathbf{k}$ negativa, por lo que el vector pedido es

$$-\frac{1}{\sqrt{101}}|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{\sqrt{101}}(-7\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 4\mathbf{k})$$

10. Verificar las siguientes igualdades

    a) $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

b) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$.

c) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w}$.

d) $(t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) = t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$

e) $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.

Solución:

a) El vector $\mathbf{u}$ forma un ángulo 0 consigo mismo. Por ello tenemos $|\mathbf{u} \times \mathbf{u}| = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \operatorname{sen} 0 = 0$ y entonces $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$. Tambien se puede ver que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = 0$$

ya que en el determinante tenemos dos filas iguales.

b) Tenemos

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$$

teniendo en cuenta que permutamos dos filas.

c) Teniendo en cuenta de nuevo las propiedades de los determinantes

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 + v_1 & u_2 + v_2 & u_3 + v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} (t\mathbf{u}) \times \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ tu_1 & tu_2 & tu_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = t \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ tv_1 & tv_2 & tv_3 \end{vmatrix} = \\ &= t(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \times (t\mathbf{v}) \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \\ &= u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = \\ &= u_1 u_2 u_3 - u_1 v_2 u_3 - u_2 u_1 v_3 + u_2 v_1 u_3 + u_3 u_1 v_2 - u_3 v_1 u_2 = 0. \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{v} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) = 0.$$

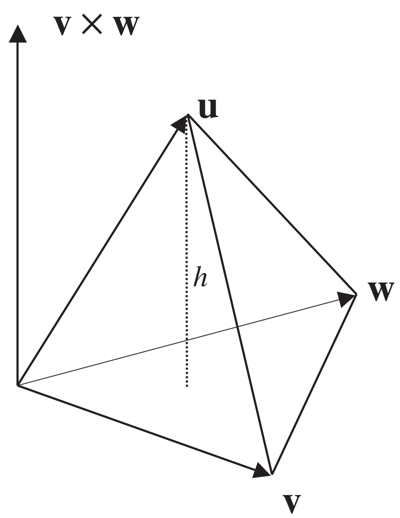
11. El volumen de un tetraedro es $\frac{1}{3}A \cdot h$, donde A es el área de la base y h la altura medida perpendicularmente desde el vértice opuesto a la base. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ tres vectores que coinciden con las aristas del tetraedro, que concurren en un vértice. Demostrar que el volumen del tetraedro puede expresarse como

$$V = \frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} |$$

Solución:

La base del tetraedro es el triángulo que definen los dos vectores $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$, cuya área es

$$A = \frac{1}{2}|\mathbf{v} \times \mathbf{w}|$$



La altura h del tetraedro es igual a la longitud de la proyección de $\mathbf{u}$ sobre el vector $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ (este vector es perpendicular a la base). Tenemos

$$h = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})|}{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}$$

Y tenemos que el volumen del tetraedro es

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{6}|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})| = \frac{1}{6}| \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} |.$$

12. Demostrar que el plano que pasa por los tres puntos $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ está formado por los puntos $P = (x, y, z)$ tales que

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

Solución: El vector $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ es ortogonal al plano determinado por A, B y C. Este vector define el plano como el conjunto de puntos $P = (x, y, z)$ tal que $\overrightarrow{PC}$ es un vector combinación lineal de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ y por tanto $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{PC} = 0$. Expresando esta última ecuación tenemos

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

y restando a la segunda fila, la tercera y cambiándola de signo se tiene

$$\begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0$$

ahora procediendo de manera análoga con la primera fila y reordenando después, tenemos la condición del enunciado.

13. Mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

Solución: Sea $\epsilon > 0$. Por una parte tenemos que $|x|^3 < (x^2 + y^2)^{3/2}$ y por la desigualdad triangular tenemos

$$|f(x, y)| = |\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}| \leq |\frac{2(x^2 + y^2)^{3/2}}{x^2 + y^2}| = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

y entonces si elegimos $\delta = \epsilon/2$ tenemos que $|f(x, y)| < \epsilon$ si $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. Resulta que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$.

14. Describir el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que describe la ecuación

$$\rho = 2\cos\phi + 4\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta$$

en coordenadas esféricas.

Solución: Recordamos que la relación entre coordeandas esféricas y cartesianas es

$$\begin{aligned} x &= \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\theta \\ y &= \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}$$

Multiplicando por ρ ambos miembros de la igualdad tenemos

$$\begin{aligned} \rho^2 &= 2\rho\cos\phi + 4\rho\,\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2z + 4x \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z + 4 + 1 &= 5 \\ (x - 2)^2 + y^2 + (z - 1)^2 &= 5 \end{aligned}$$

que es la ecuación de una esfera de radio $\sqrt{5}$ centrada en el punto $(2,0,1)$.

15. Calcular

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xyz)}{xyz}$$

Solución: La función

$$g(t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} t}{t} & \text{si } t \neq 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

es continua en todo $\mathbb{R}$. Sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x,y,z) = xyz$. La función h es continua en todo $\mathbb{R}^3$ por ser una función polinómica. Si hacemos la composción $f = g \circ h$, resulta que f es una función continua en todo $\mathbb{R}^3$ porque es composición de funciones continuas, en particular lo es en el punto $(0,0,0)$ y esto quiere decir que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z) = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{\operatorname{sen}(xyz)}{xyz} = f(0,0,0) = g(h(0,0,0)) = g(0) = 1.$$

16. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos xy - 1}{x^2y^2}$$

Solución: Ver la solución del ejercicio anterior.

17. Demostrar la continuidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: Vamos a demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

Sea $\epsilon > 0$. Tenemos que

$$|\frac{x2y}{x^2+y^2}| = \frac{|x||xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}|x| < \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}\delta.$$

Entonces basta tomar $\delta = 2\epsilon$ para asegurar que si $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces $|f(x,y) - 0| < \epsilon$ y entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

18. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^\alpha y^\beta}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$ en función de los valores de α y β. **Solución:** Si $(x,y) \rightarrow< (0,0)$ evaluando f en la recta $y = mx$ cerca del origen tenemos

$$f(x,y) = \frac{m^\beta}{1+m+m^2} x^{\alpha+\beta-2}$$

por lo que si $\alpha + \beta - 2 = 0$ no existe límite ya que depende de la inclinación de la recta. Si $\alpha + \beta - 2 < 0$, el límite sería ∞, es decir que no existiría límite. Sólo nos queda la alternativa $\alpha + \beta - 2 > 0$, esto es, $\alpha + \beta > 2$ y en coordenadas polares tenemos

$$f(x,y) = \frac{r^{\alpha+\beta} \cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{r^2(1+\cos\theta \operatorname{sen}\theta)} = r^{\alpha+\beta-2} \frac{\cos^\alpha\theta \operatorname{sen}^\beta\theta}{1+\cos\theta \operatorname{sen}\theta}$$

y como $\frac{1}{2} \leq 1 + \cos\theta \operatorname{sen}\theta$ resulta que

$$f(x,y) \leq 2r^{\alpha+\beta-2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0).$$

19. Describir utilizando coordenadas polares las curvas de nivel de la función

$$f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

Solución: En coordenadas polares tenemos

$$f(r,\theta) = \frac{2r^2 \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{r^2} = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = \operatorname{sen} 2\theta$$

y los conjuntos de nivel L_c distintos del vacío son aquellos para $-1 \leq c \leq 1$. La función $\operatorname{sen} 2\theta$ es periódica de período π y su gráfica corta a la recta $y = c$ en cuatro puntos si $-1 < c < 1$. Como el período es π estos puntos se pueden agrupar en dos con abscisas θ_1 y θ_2 donde $0 < \theta_1, \theta_2 < \pi$ y sus trasladados $\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi$.

Esto se traduce diciendo que existen θ_1, θ_2 tales que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 &= \frac{c}{2} \\ \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

esto quiere decir que las rectas $\theta = \theta_1$ y $\theta = \theta_2$ (en coordenadas polares) son curvas de nivel de f. Los valores $\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi$ no añaden nada nuevo porque representan las mismas rectas. Los casos $c = -1, 1$ nos darán de manera análoga una recta cada uno. Así los conjuntos de nivel L_c son un par de rectas que se cortan en el origen si $-1 < c < 1$, la recta $\theta = \pi/4$ si $c = 1$ y la recta $\theta = 3\pi/4$ si $c = -1$.

20. Determinar aquellos puntos de la superficie descrita por la ecuación $x^2+2y^2+3z^2=4$, en donde el vector $\mathbf{n}=(3,2,1)$ es normal a la superfice.

Solución: La superficie descrita por la ecuación puede considerarse una superficie de nivel de la función $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4$. Un vector normal a esta superficie de nivel, en un punto genérico (x,y,z) es:

$$\operatorname{grad}(F)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)=(2x,4y,6z)$$

y claramente también lo es el vector $t\,(2x,4y,6z)\,,t\neq 0$. Imponiendo la condición del enunciado tenemos, haciendo $\lambda=1/t$

$$(2x,4y,6z)=\lambda\,(3,2,1)$$

por lo tanto un punto (x,y,z) de la superficie que tenga ese vector normal tiene que ser de la forma

$$\left(\frac{3\lambda}{2},\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{6}\right)$$

pero además tenemos que imponer la condición de que este punto pertenezca a la superfcie, ya que al derivar perdemos la información de esta ecuación. Resulta entonces

$$\frac{9}{4}\lambda^2+\frac{2}{4}\lambda^2+\frac{3}{36}\lambda^2=4$$

de donde

$$\lambda=\pm\sqrt{\frac{72}{51}}$$

y los puntos que resultan son

$$\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{72}{51}},\frac{1}{2}\sqrt{\frac{72}{51}},\frac{1}{6}\sqrt{\frac{72}{51}}\right)\ \text{ y }\ \left(-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{72}{51}},-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{72}{51}},-\frac{1}{6}\sqrt{\frac{72}{51}}\right).$$

21. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función diferenciable que tiene un máximo local en el punto $(x_0,f(x_0))$. Sea $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ la superficie de revolución generada al girar la gráfica de $z=f(x)$ alrededor del eje z. ¿Para qué puntos de esta superficie es normal el vector $\mathbf{n}=(0,0,1)$?

Solución: Si vemos la superficie como el conjunto de nivel L_0 de la función $F(x,y,z)=-z+f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$, un vector normal a esta superficie es

$$\operatorname{grad}(F)=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

y entonces

$$\operatorname{grad}(F)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),1\right)$$

de donde se deduce que el vector $\mathbf{n}$ es normal en los puntos $(0,0,f(0))$ y en los de la circunferencia $C = \{(x_0 \cos\theta, x_0 \operatorname{sen}\theta, f(x_0)), 0 \le \theta < 2\pi\}$.

22. Sea $F(x,y) = f(x+3y, 2x-y)$, siendo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $\operatorname{grad} f(0,0) = (4,-3)$, hallar la derivada de F en el origen, según el vector $\mathbf{v} = (1,1)$ en la dirección de ese mismo vector.

Solución: Si llamamos g a la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(x,y) = (x+3y, 2x-y)$, tenemos que el jacobiano de esta función en $(0,0)$ es

$$\mathbf{D}g(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

La función F es la composición $F = f \circ g$ y además $g(0,0) = (0,0)$, entonces aplicando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} \mathbf{D}F(0,0) &= \mathbf{D}(f \circ g)(0,0) = \mathbf{D}f(g(0,0)) \cdot \mathbf{D}g(0,0) = \mathbf{D}f(0,0) \cdot \mathbf{D}g(0,0) \\ &= (4,-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = (-2, 15) \end{aligned}$$

y la derivada según el vector $(1,1)$ es

$$\mathbf{D}_{(1,1)}F(0,0) = (-2,15) \cdot (1,1) = 13.$$

y para calcular la derivada en la dirección de ese vector, primero lo normalizamos y tendríamos el vector $\mathbf{v}_0 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ y entonces la derivada direccional será

$$\mathbf{D}_{(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})}F(0,0) = (-2,15) \cdot (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) = \frac{13}{\sqrt{2}}.$$

23. Sea $F(x,y) = f(x+y, 3x+5y, 3xy, x^3y^5)$, donde $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^4$. Si $\operatorname{grad} f(0,0,0,0) = (a,b,c,d)$, hallar la derivada de F en el origen, en la dirección del vector unitario $\mathbf{v} = (e_1, e_2)$.

Solución: Tenemos que $F = f \circ g$ donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ es la función definida por $g(x,y) = (x+y, 3x+5y, 3xy, x^3y^5)$. La matriz jacobiana de g en (x,y) es

$$\mathbf{D}g(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 3y & 3x \\ 3x^2y^5 & 5x^3y^4 \end{pmatrix}$$

Para calcular la derivada que pide el enunciado necesitamos la matriz jacobiana de F en el punto $(0,0)$, y por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{D}F(0,0) &= \mathbf{D}(f \circ g)(0,0) = \mathbf{D}f(0,0,0,0) \cdot \mathbf{D}g(0,0) \\ &= (a,b,c,d) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (a+3b, a+5b) \end{aligned}$$

y la derivada pedida es

$$\mathbf{D}F(0,0)(e_1, e_2) = (a+3b, a+5b) \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (a+3b)e_1 + (a+5b)e_2.$$

24. Sea $F(x,y) = f(x^2 - y^2, 2xy)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Si $\text{grad} f(0,2) = (3,-1)$, ¿Cuál es la dirección de máximo crecimiento de F en el punto $(1,1)$?

Solución: Tenemos que encontrar el vector $\text{grad}F(1,1)$. Tenemos

$$\mathbf{D}g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}g(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

y entonces en el punto $(1,1)$ se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{D}F(1,1) &= \mathbf{D}(f \circ g)(1,1) = \mathbf{D}f(0,2) \cdot \mathbf{D}g(1,1) \\ &= (3,-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = (4,-8) \end{aligned}$$

que indica la dirección pedida.

25. Hallar los valores máximo y mínimo de la función

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$$

Solución: Las derivadas parciales primeras de f son[1]

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= (y - 2x^2y)e^{-x^2-y^2} \\ f_2(x,y) &= (x - 2y^2x)e^{-x^2-y^2} \end{aligned}$$

e igualando estas derivadas a cero tenemos las condiciones para los puntos críticos

$$\begin{aligned} y(1-2x^2) &= 0 \\ x(1-2y^2) &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtinen los cinco puntos $(0,0)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.([2])

Por simple inspección podemos comprobar que

[1]En este ejercicio utilizaremos la notación $f_1(x,y)$ para referirnos a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, análogamente sería $f_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. Esta notación aunque no es utilizada en el libro también es válida y se deja a la elección del alumno utilizar la que le guste más. En otro ejercicio comentaremos la correspondiente para las derivadas segundas.

[2]Obsérvese que para indicar las cuatro posibles combinaciones de signo en los puntos de coordenadas $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ lo escribimos de esta forma y no $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, en este caso estaríamos indicando únicamente los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$
\begin{aligned}
f(0,0) &= 0\\
f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{2}e^{-1} > 0\\
f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{1}{2}e^{-1} < 0
\end{aligned}
$$

y como $f(x,y)$ tiende a 0 cuando x^2+y^2 tiende a ∞, podemos asegurar que los valores $\frac{1}{2}e^{-1}$ y $-\frac{1}{2}e^{-1}$ son valores extremos absolutos de f. El razonamiento podría ser el siguiente para ver que $(1/2)e^{-1}$ es un máximo absoluto: consideremos el valor $(1/4)e^{-1}$, entonces existe un número $R>0$ tal que si $x^2+y^2 \geq R$ se tiene $|f(x,y)| \leq (1/4)e^{-1}$, con lo que en esta región no se puede alcanzar un máximo absluto.

Por otra parte podemos asegurar que f tiene máximo y mínimo absolutos en el disco cerrado $x^2+y^2 \leq R$, (Teorema 7, pg.212 del libro base). Podemos descartar que en la frontera del disco $x^2+y^2=R$ se alcance un máximo absoluto porque ahí se tiene $|f| \leq (1/4)e^{-1} < (1/2)e^{-1}$. Sólo nos queda el interior del disco, pero como f es derivable en todo $\mathbb{R}$, un (x_0,y_0) distinto de los anteriores donde f alcanzase un valor extremo tendría que verificar $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$, que es imposible.

Con lo hecho hasta aquí, ya respondemos a la pregunta del problema, que simplemente pide hallar los valores máximo y mínimo de f. Para clasificar estos puntos críticos, podemos deducir que los cuatro puntos donde hay extremos absolutos, son puntos también de extremos relativos, y no tendríamos que analizar el Hessiano en estos puntos. Sin embargo no tenemos información del punto $(0,0)$ y en este caso si tenemos que recurrir al Hessiano.

Siguiendo con la notación que estamos utlizando, $f_{ij}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x,y)$, tenemos:

$$
\begin{aligned}
f_{11}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}(4x^3y-6xy)\\
f_{12}(x,y) = f_{21}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}(4x^2y^2-2x^2-2y^2-1)\\
f_{22}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}(4xy^3-6xy)
\end{aligned}
$$

y el Hessiano en $(0,0)$ es

$$
H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} f_{11}(0,0) & f_{12}(0,0)\\ f_{21}(0,0) & f_{22}(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}
$$

y resulta que el determinante de esta matriz $\Delta = 1$, pero $\Delta_1 = 0$, por lo que la matriz es indefinida y el punto $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

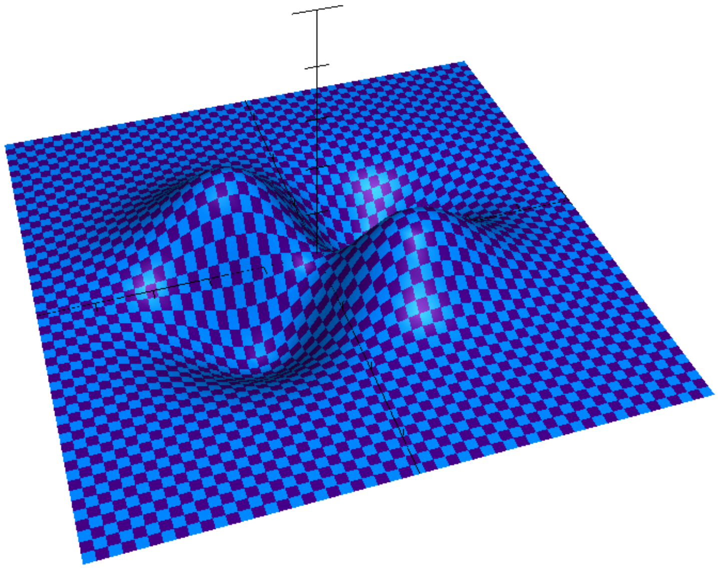


Figura 1: Gráfica de $f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}$.

Como ilustración se incluye una imagen de la gráfica de f, que no es necesaria para contestar a la pregunta correctamente.

26. Estudiar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{1 - y + x^2 + y^2}$$

Solución: La función puede expresarse

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

y como todos los sumandos del denominador son mayores o iguales que cero, el valor mínimo de éste, y máximo de f se alcanza cuando $x = 0$ e $y = 1/2$ y se trata de un máximo absoluto. Además

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= \frac{-2x}{(1 - y + x^2 + y^2)^2} \\ f_2(x,y) &= \frac{1 - 2y}{(1 - y + x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

y para obtener los puntos críticos tenemos que resolver

$$\begin{aligned} -2x &= 0 \\ 1-2y &= 0 \end{aligned}$$

de dond tenemos la única solución $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$. Por lo tanto este es el único punto crítico de f y se trata de un máximo absoluto.

Como ilustración se incluye una imagen de la gráfica de f, que no es necesaria para contestar a la pregunta correctamente.

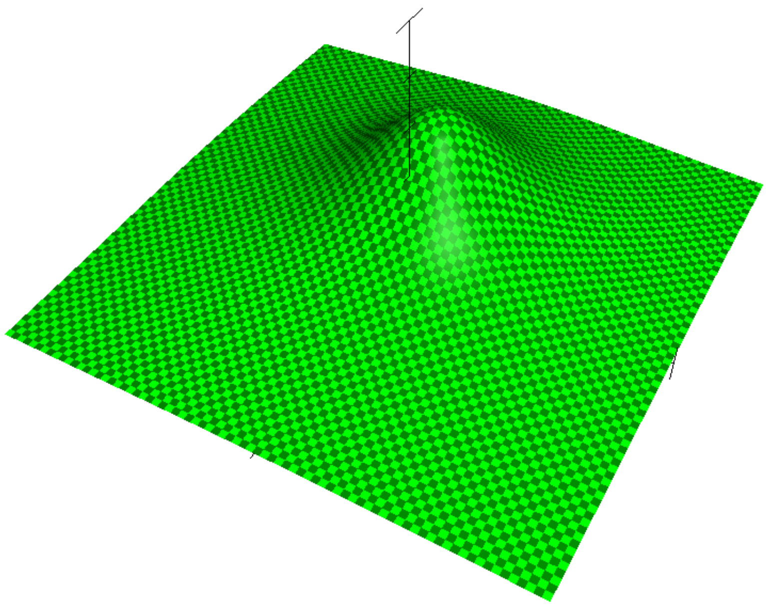


Figura 2: Gráfica de $f(x,y) = \dfrac{1}{1-y+x^2+y^2}$.

27. Sea f la función definida por

$$f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}, \quad (x \neq y)$$

¿Existe alguna función $\bar{f}$ continua en todo $\mathbb{R}^2$ y tal que $\bar{f} = f$ en el dominio de f?

Solución: El dominio de f es $D(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq y\big\}$.

Por otra parte tenemos[3]

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y} \quad = \quad x^2 + xy + y^2$$

Si consideramos un punto genérico $(x_0, x_0) \notin D(f)$, vemos que la expresión del segundo miembro nos da el valor $3x^2$ en ese punto, esto quiere decir que

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 3x_0^2$$

y entonces si definimos

$$\bar{f}(x,y) = x^2 + xy + y^2$$

esta función cumple los requisitos que se pedían, dicho de otro modo es una extensión continua de f a todo $\mathbb{R}^2$.

28. Indicar la versión de la regla de la cadena para calcular $\dfrac{df}{dt}$ si $f(x,y,z) = xyze^{x+y+z}$, donde $x = g(t), y = h(t), z = k(t)$.

Solución: Se tiene la siguiente composición

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\quad G \quad} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\qquad f \qquad} \mathbb{R}$$

$$t \longrightarrow (g(t), h(t), k(t))$$

$$(x,y,z) \longrightarrow f(x,y,z)$$

y las matrices jacobianas son

$$\mathbf{D}G(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{dg}{dt} \\[2ex] \dfrac{dh}{dt} \\[2ex] \dfrac{dk}{dt} \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}f(x,y,z) = \big(yze^{x+y+z}(x+1), xze^{x+y+z}(y+1), xye^{x+y+z}(z+1)\big)$$

[3] Estamos utilizando la igualdad $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, o más generalmente

$$x^n - y^n = (x-y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1})$$

.

de donde se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dt} &= \mathbf{D}f(g(t),h(t),k(t)) = \mathbf{D}f(x,y,z)\cdot\mathbf{D}G(t) \\
&= h(t)k(t)e^{g(t)+h(t)+k(t)}(g(t)+1)\frac{dg}{dt} + g(t)k(t)e^{g(t)+h(t)+k(t)}(h(t)+1)\frac{dh}{dt} + \\
&\quad g(t)h(t)e^{g(t)+h(t)+k(t)}(k(t)+1)\frac{dk}{dt}.
\end{aligned}$$

29. Calcular el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^n}$$

donde n es un entero par.

Solución: Como n es par, tenemos que

$$x^2 \leq x^2 + y^n, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

y entonces

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^n} \leq \frac{x^2y^2}{x^2} = y^2$$

en particular

$$0 \leq \left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^n}\right| \leq y^2$$

y como sabemos que el límite de la función de dos variables $f(x,y) = y^2$ cuando $(x,y) \to (0,0)$ es 0, aplicando la definición de límite a esta función, tenemos para cada $\epsilon > 0$ un entorno U de $(0,0)$ tal que para todos los puntos $(x,y)| \in U$, es $f(x,y) = y^2 \leq \epsilon$, pero por la desigualdad anterior también se tiene para los $(x,y)| \in U$

$$\left|\frac{x^2y^2}{x^2+y^n}\right| \leq \epsilon$$

y como esto se verifica para todo ϵ lo que estamos diciendo es que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^n} = 0.$$

30. Calcular las derivadas parciales primeras de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

en el punto $(0,0)$. ¿Es continua esta función en $(0,0)$?

Solución:

Para calcular las derivadas parciales tenemos que recurrir a la definición de éstas

$$\begin{aligned} f_1(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = 0 \\ f_2(0,0) &= 0, \quad \text{por simetría.} \end{aligned}$$

sin embargo podemos comprobar que la función no es continua en $(0,0)$, si calculamos el límite tendiendo a $(0,0)$ a través de una recta $y = kx$ tenemos

$$\lim_{(x,y)\to(0,0), y=kx} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0), y=kx} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$$

y resulta que el valor del límite depende de la recta por la que nos acerquemos al origen, con lo cuál no existe.

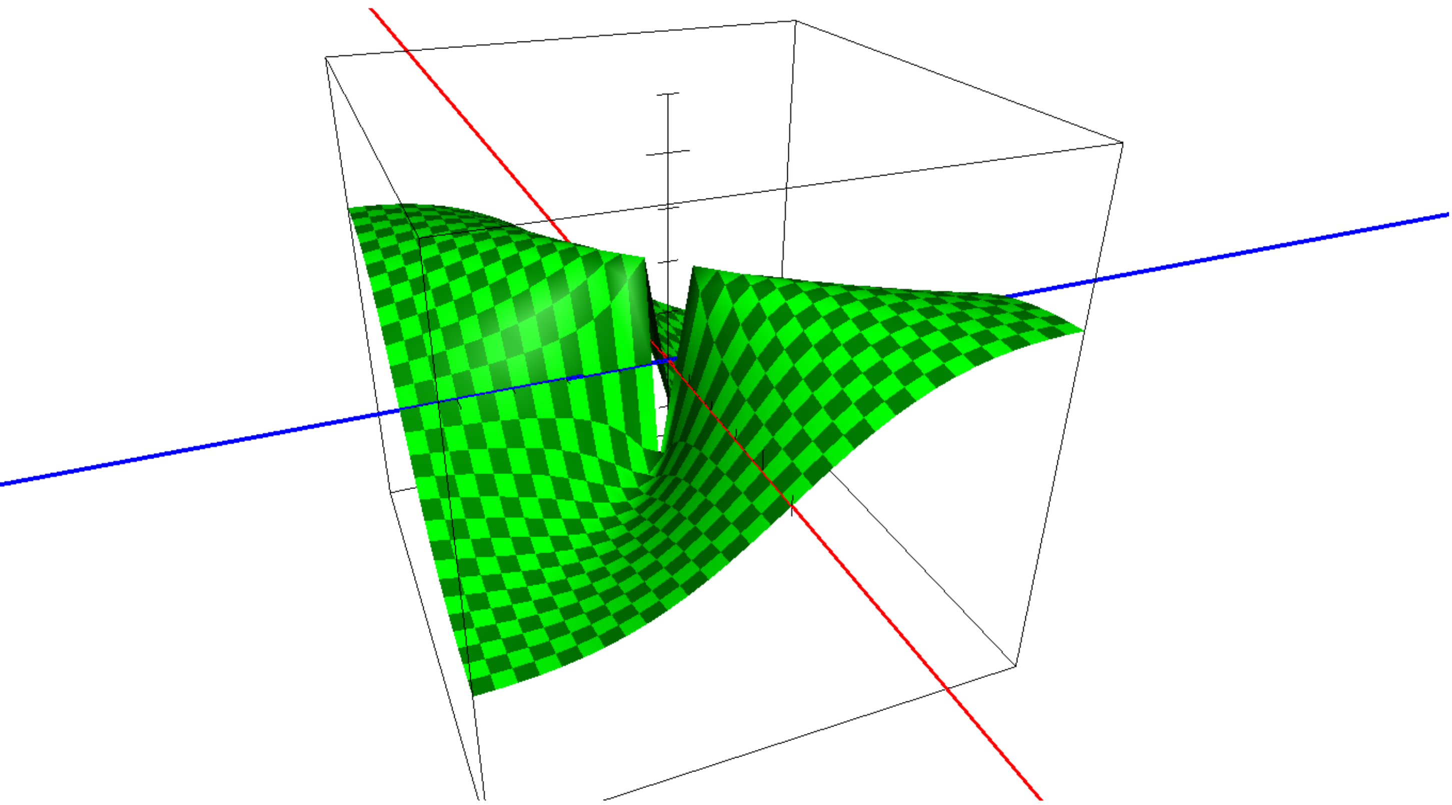


Figura 3: Gráfica de $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$. En rojo el eje x y en azul el eje y, estos ejes están contenidos en la gráfica de f salvo en el origen, lo que da una idea de porque las derivadas parciales son 0.

31. Sea $A = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Probar que la función $f : A \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+y} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } (x,y) = \left(x, -x^2\right) \text{ y } x \neq 0 \end{cases}$$

tiene el mismo límite en $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta contenida en A que pase por $(0,0)$ y tiene límites distintos a lo largo de parábolas de la forma $y = \lambda x^2$.

32. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = (x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y} \quad \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0$$
$$f(0,y) = f(x,0) = 0.$$

Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Solución: Claramente la función es continua en $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ y } y \neq 0\}$ por ser composición de funciones continuas. De la desigualdad

$$\left|(x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y}\right| \leq |x+y|$$

se deduce que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y} = 0$$

Por otra parte si consideramos un punto de $\mathbb{R}^2 - A$, por ejemplo $(a,0)$ con $a \neq 0$ tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(a,0)} (x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y} \quad = \quad \left(a\operatorname{sen}\frac{1}{a}\right)\lim_{(x,y)\to(a,0)} \operatorname{sen}\frac{1}{y}$$

pero este límite no existe. De esta forma podemos concluir que el único punto de A donde f es continua es el $(0,0)$.

33. Comprobar que las siguientes funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tienen límite en $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta pero no tienen límite en ese punto.

$$f(x,y) = \frac{y}{y+x^2} \text{ si } y \neq -x^2 \qquad f(x,-x^2) = 1$$
$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad f(0,0) = 0.$$

34. Sea $M = \mathbb{R}^2 - \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ o } y = 0\}$ y $f(x,y) = (x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{xy}$.

i) Probar que existe $\lim_{(x,y)\in M,\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y hallar su valor.

ii) Demostrar que no existen los límites

$$\lim\nolimits_{(x,y)\in M,\ (x,y)\to(0,a)} f(x,y) \quad \lim\nolimits_{(x,y)\in M,\ (x,y)\to(a,0)} f(x,y)$$

para $a \neq 0$.

iii) Describir el conjunto de puntos (a,b) de $\mathbb{R}^2$ donde no existe

$$\lim_{(x,y)\in M,\ (x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Nota: Una condición *necesaria* para que el límite $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ exista y sea L, es que si los siguientes límites iterados

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) \quad \text{y} \quad \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right)$$

existen, deben valer L.

Consideremos la función

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

para demostrar que la condición anterior no es *suficiente*. En este caso existen los límites iterados cuando $(x,y)\to(0,0)$ pero el límite de la función no existe. Podemos comprobar también que los límites iterados de la función

$$f\,(x,y) = (x+y)\,\text{sen}\,\frac{1}{x}\,\text{sen}\,\frac{1}{y}$$

no existen y sin embargo el límite de la función es 0 cuando $(x,y)\to(0,0)$.

35. Sea la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x+\text{sen}\,(x+y)}{x+y} & \text{si } x+y\neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y=0. \end{cases}$$

Estudiar su continuidad en $\mathbb{R}^2$ y describir el conjunto de los puntos de discontinuidad.

36. Sean p y q dos números enteros positivos y $f: D\to\mathbb{R}$ la función

$$f\,(x,y) = \frac{x^py^q}{x^2+y^2-xy}$$

donde $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>0\right\}$. Estudiar la continuidad de f.

37. Obtener las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f\,(x,y) = \left(4x^2y^4-3x^2+8y^3\right)^3$.

b) $f\,(x,y) = \arcsin\dfrac{y}{x}+\arccos\dfrac{x}{y}$.

c) $f\,(x,y) = x+y+xy+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$.

d) $f\,(x,y) = (2x+3y)^x+(2x+3y)^y$.

e) $f\,(x,y) = \log\dfrac{1-\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}$.

f) $f(x,y,z) = \log\left(\frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y}\right).$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 3\left(4x^2y^4 - 3x^2 + 8y^3\right)^2\left(8xy^4 - 6x\right) \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 3\left(4x^2y^4 - 3x^2 + 8y^3\right)^2\left(16x^2y^3 + 24y^2\right)
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}} - \frac{1}{y\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}. \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x\sqrt{1-\dfrac{y^2}{x^2}}} + \frac{x}{y^2\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= (2x+3y)^x\left(\ln(2x+3y) + \frac{2x}{2x+3y}\right) + \frac{2y(2x+3y)^y}{2x+3y}. \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= (2x+3y)^y\left(\ln(2x+3y) + \frac{3y}{2x+3y}\right) + \frac{3x(2x+3y)^x}{2x+3y}.
\end{aligned}$$

e)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{2}{1-u^2}$$

siendo $u(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ y entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. La derivada parcial respecto de y se tiene fácilmente por simetría.

f)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(y+z)(x^2-yz)}{x(x^2(y+z)+x(y^2+z^2)+yz(y+z))}. \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{(x+z)(y^2-xz)}{y(x^2(y+z)+x(y^2+z^2)+yz(y+z))}. \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{(x+y)(z^2-xy)}{z(x^2(y+z)+x(y^2+z^2)+yz(y+z))}.
\end{aligned}$$

38. Sea $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \log x_1 x_2 \cdots x_n$. Calcular

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(1, 1, ..., 1\right)$$

39. Calcular la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^3y + 5y^2$ con el plano $x = 2$, en el punto en que $y = 1$. Calcule la pendiente de la recta tangente a la curva de intersección de la superficie $z = x^2 + y^3x$ con el plano $y = 2$ en el punto en que $x = 2$.

40. Calcular las derivadas parciales de las funciones siguientes donde $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables en $\mathbb{R}$

   a) $f\left(x, y\right) = \dfrac{1 + h\left(x\right)}{1 + \left(g\left(y\right)\right)^2}$.

   b) $f\left(x, y, z\right) = g\left(z\right) h\left(g\left(x\right) h\left(y\right)\right)$.

   c) $f\left(x, y\right) = \left(g^2\left(h^3\left(y\right)\right)\right)^{h^3\left(g^2(y)\right)}$.

   d) $f(x, y, z) = (g(x))^{h(y)} + (h(y))^{g(z)}$.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{1+(g(y))^2}(1+h'(x)).\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (1+h(x)) \cdot \frac{-2g(y)g'(y)}{(1+(g(y)^2)^2}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= g(x)h'\left(g(x)h(y)\right)g'(x)h(y).\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= g(x)h'\left(g(x)h(y)\right)g(x)h'(y).\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= g'(x)h\left(g(x)h(y)\right).\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 0.\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= f(x,y)\left[3h^2((g(y))^2)\cdot h'((g(y))^2)2g(y)g'(y)\ln\left(g^2(h^3(y))\right) + h^3(g^2(y))u(y)\right]\end{aligned}$$

donde

$$u(y) = \frac{2g(h^3(y))g'(h^3(y))3h^2(y)h'(y)}{g^2(h^3(y))}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= h(y)g(x)^{h(y)-1}g'(x). \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= (g(x))^{h(y)}(\ln(g(x)))h'(y). \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= (h(y))^{g(z)}(\ln(h(y)))g'(z).
\end{aligned}$$

41. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, la función $f(x, y, z) = 2x^3 + 7y^2 + 9z^2$ y sea $\mathbf{v} = (a, b, c)$ un vector unitario en $\mathbb{R}^3$. Calcular la derivada direccional en un punto arbitrario (x, y, z) en la dirección de $\mathbf{v}$.

42. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

y $\mathbf{v} = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0)$. ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

Solución: Para calcular la derivada según $\mathbf{v}$ en el origen hacemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((0, 0) + t(a, b)) - f(0, 0)}{t} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{t^3a^2b}{t^4a^4+t^2b^2}}{t} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{t^3a^2b}{t^5a^4 + t^3b^2} = \frac{a^2}{b}
\end{aligned}$$

y si el vector $\mathbf{v}$ es $(1, 0)$ se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(0, 0) = 0$.

Sin embargo

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ y=x^2}} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4 + y^4} = \frac{1}{2} \\
\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ x=0}} \frac{x^2y}{x^4 + y^2} &= 0
\end{aligned}$$

de donde se deduce que la función no es continua en $(0, 0)$ y por lo tanto tampoco diferenciable.

43. Calcular las derivadas direccionales en la dirección del vector indicado

$$f(x,y) = 3x - 2y,\ \mathbf{v} = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) \qquad f(x,y,z) = xyz,\ \mathbf{v} = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}\right)$$
$$f(x,y) = x^2 + y^2,\ \mathbf{v} = (a,b) \text{ en el punto } (0,0) \qquad f(x,y) = xy^2 + x^2y,\ \mathbf{v} = (1,0)$$

44. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en $\mathbb{R}$. Determinar el dominio de las siguientes funciones y estudiar donde son diferenciables.

$$f(x,y) = xyg(x)g(y) \qquad f(x,y) = g(x)g(g(y)) + g(y)g(g(x))$$
$$f(x,y) = \frac{g(y)}{1+g^2(x)} \qquad f(x,y) = g(xg(y)) + xg(y)g(g(g(x)))$$

Solución: El dominio de todas ellas es $\mathbb{R}^2$ y todas son diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

45. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, y sea p un punto de U. A continuación se dan 8 afirmaciones sobre f.

a. f es diferenciable en p.

b. f es continua respecto de su primera variable en p.

c. f es continua respecto de su segunda variable en p.

d. f es continua en p en la dirección de algún vector $\mathbf{v}$.

e. f es continua en p en la dirección de todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

f. f tiene derivadas parciales en p.

g. f tiene derivadas direccionales en p en la dirección de todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$

h. f tiene derivadas parciales continuas en alguna bola B contenida en U con centro p.

Llenar el siguiente cuadro([4]):

	a	b	c	d	e	f	g	h
a								
b								
c								
d								
e								
f								
g								
h								

[4] Se pone una V en la línea i y columna j, cuando la afirmación de la línea i implique la afirmación de la columna j, y una F cuando no la implique.

Solución:

	a	b	c	d	e	f	g	h
a	V	V	V	V	V	V	V	F
b	F	V	F	V	F	F	F	F
c	F	F	V	V	F	F	F	F
d	F	F	F	V	F	F	F	F
e	F	V	V	V	V	F	F	F
f	F	V	V	V	F	V	F	F
g	F	V	V	V	V	V	V	F
h	V	V	V	V	V	V	V	V

46. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

calcular las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y estudiar la diferenciabilidad de la función f.

47. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

48. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen}\dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

49. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

50. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución: Para estudiar la continuidad en $(0,0)$ tenemos que calcular el límite de la función. Pasando a cordenadas polares

$$x = r\cos t, y = r \operatorname{sen} t$$

tenemos que

$$\frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} \quad = \quad \frac{r^3(\cos^2 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t)}{r^2} = r(\cos^2 t \operatorname{sen} t - \operatorname{sen}^3 t) \leq 2r$$

y como podemos acotar la función por r independientemente de t tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} = 0$$

y f es continua en $(0,0)$ y por tanto en todo su dominio $\mathbb{R}^2$.

Por otra parte es fácil calcular que $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$.

Para que f sea diferenciable tiene que cumplirse

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k) - f(0,0) - \lambda(h,k)|}{\|(h,k)\|} = 0$$

siendo λ la aplicación lineal que definen las derivadas parciales en $(0,0)$, esta aplicación es la diferencial. En nuestro caso tenemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{h^2k-k^3}{h^2+k^2} - 0 - 0\right|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k-k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

pero es fácil ver que este límite no existe. Si tendemos a cero por rectas $h = \lambda k$ el límite depende de la recta por la que tendamos.

51. Estudiar la continuidad y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

52. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calcular $f_{12}(0,0)$ y $f_{21}(0,0)$ y comprobar que son distintas, ¿Por qué?.

Solución: Consideremos la función

$$\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Si $(x,y)\neq(0,0)$ tenemos

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,y) &= \frac{(x^2+y^2)2y-2xy\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \varphi_2(x,y) &= \frac{2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\ \text{ por simetría}\end{aligned}$$

Como $f(x,y)=(x^2-y^2)\varphi(x,y)$,

$$\begin{aligned}f_1(x,y) &= 2x\varphi(x,y)+(x^2-y^2)\varphi_1(x,y)\\ &= 2x\varphi(x,y)-2y\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\\ f_2(x,y) &= -2y\varphi(x,y)+(x^2-y^2)\varphi_2(x,y)\\ &= -2y\varphi(x,y)+2x\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^2}\end{aligned}$$

de aquí tenemos

$$f_{12}=\frac{2(x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6)}{(x^2+y^2)^3}$$

y para $(x,y)=(0,0)$

$$f_1=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0=f_2(0,0)$$

y entonces ya podemos calcular

$$\begin{aligned}f_{12}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f_1(0,k)-f_1(0,0)}{f}=\lim_{k\to 0}\frac{-2k(k^4)}{k(k^4)}=-2\\ f_{21}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{f}=\lim_{h\to 0}\frac{2h(h^4)}{h(h^4)}=2\end{aligned}$$

Esta situación no contradice al teorema de la igualdad de las derivadas cruzadas porque las funciones f_{12} y f_{21} no son continuas en $(0,0)$. Por ejemplo, en el caso de f_{12} podemos ver que si $x\neq 0$, $f_{12}(x,x)=0$ y $f_{12}(x,0)=2$.

53. Sea la función

$$\varphi(x,y)=\begin{cases} xy\operatorname{sen}\dfrac{1}{y} & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}$$

Estudiar la diferenciabilidad de f en $(0,0)$.

Solución: Hallamos las derivadas parciales primeras en $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{k}=0\end{aligned}$$

entonces la matriz jacobiana en ese punto es $(0,0)$, es decir, que la aplicación lineal que aproxima a f tendría que ser la aplicación nula y para comprobar si f es diferenciable calculamos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(h,k)-f(0,0)-0|}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk \operatorname{sen} \dfrac{1}{k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

y por lo tanto f es diferenciable en $(0,0)$.

54. Comprobar que la siguiente función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ tienen límite en $(0,0)$ a lo largo de cualquier recta pero no tiene límite en ese punto.

$$f(x,y) = \frac{y}{y+x^2} \text{ si } y \neq -x^2, \;\; f(x,-x^2) = 1.$$

Sobre el Teorema de Taylor

El teorema de Taylor para una función f de una variable asegura (cuando f es de clase C^n) la descomposición de una función en un entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)1}(x-a)^{n+1}$$

esto es, f aparece como la suma de un polinomio y una expresión que está en función de un punto $\xi \in (a,x)$. Si f es de clase C^{n+1} podemos obtener formas interesantes del resto $R_{n+1}(x)$ y tenemos

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x)$$

donde

$$\lim_{x\to a} \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Una cuestión esencial del teorema de Taylor es que esta forma de escribir f es única en el sentido siguiente: si f (con las condiciones de diferenciabilidad anteriores) se puede escribir $f(x) = Q_n(x) + E_{n+1}(x)$, donde $Q_n(x)$ es un polinomio de grado n y

$$\lim_{x\to a} \frac{E_{n+1}}{(x-a)^n} = 0$$

entonces $Q_n(x)$ es el polinomio de Taylor P_n. Esto permite obtener expansiones de Taylor (y por lo tanto polinomios de cierto grado) a partir de otras conocidas, ya sea por sustitución u otras operaciones, como se muestran en los siguientes ejercicios

55. Calcular el desarrollo de Taylor en un entorno de $x=0$ de $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

Solución: Sustiuyendo $t = x^2$ en el desarrollo

$$\operatorname{sen} t \approx t - \frac{t^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

tenemos

$$f(x) \approx x^2 - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$$

56. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 en un entorno de $x = 0$ de $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$

Solución: Haciendo el producto de los desarrollos de e^x y $\operatorname{sen} x$ y tomando los primeros términos se tiene

$$f(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

57. Calcular los polinomios de Taylor de grados 2 y 3 de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{2 + 2x - y}$$

en un entorno de $(1, 2)$.

Solución:

El desarrollo en serie de potencias de $F(t) = \dfrac{1}{1+t}$ en un entorno de $t = 0$ es

$$F(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

hacemos el cambio de coordenadas $u = x - 1$ y $v = y - 2$, y entonces tenemos

$$f(x, y) = \frac{1}{2 + 2x - y} = \frac{1}{2 + 2(u+1) - (v+2)} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{2u-v}{2}\right)}$$

y expresarlo como desarrollo en serie de potencias, teniendo en cuenta el desarrollo de $F(t) = f(1 + tu, 2 + tv)$ y particularizando para $t = 1$

$$\begin{aligned} f(x, y) = F(1) &= \frac{1}{2}\left[1 - \frac{2u-v}{2} + \left(\frac{2u-v}{2}\right)^2 - \left(\frac{2u-v}{2}\right)^3 + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{v}{4} + \frac{u^2}{2} - \frac{uv}{2} + \frac{v^2}{8} - \frac{u^3}{2} + \frac{3u^2v}{4} - \frac{3uv^2}{8} + \frac{v^3}{16} + \cdots \end{aligned}$$

Para obtener el polinomio de grado 3 truncamos la serie en este grado y sustituimos u, v por $x - 1$, $y - 2$ y se tiene

$$\begin{aligned} P_3(x, y) &= \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)(y-2)}{2} + \frac{(y-2)^2}{8} - \\ &- \frac{(x-1)^3}{2} + \frac{3(x-1)^2(y-2)}{4} - \frac{3(x-1)(y-2)^2}{8} + \frac{(y-2)^3}{16} \end{aligned}$$

y del mismo modo para obtener el polinomio de grado 2 nos quedamos con la parte correspondiente de la serie

$$P_2(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{x-1}{2} + \frac{y-2}{4} + \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)(y-2)}{2} + \frac{(y-2)^2}{8}$$

58. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x,y) = e^{x+y}$ en un entorno del punto $(0,0)$.

Solución:

$$P_3(x,y) = 1 + x + y + \frac{1}{2!}(x^2 + 2xy + y^2) + \frac{1}{3!}(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$$

59. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x,y) = e^{xy}\operatorname{sen}(x+y)$ en un entorno del punto $(0,0)$.

Solución:

$$P_3(x,y) = x + y + \frac{1}{3!}(-x^3 + 3x^2y + 3xy^2 - y^3)$$

60. Calcular los polinomios de Taylor de grados 3 y 4 de la función $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ en un entorno del punto $(0,0)$.

Solución: El de grado 3:

$$P_3(x,y) = xy$$

y el de grado 4:

$$P_4(x,y) = xy - \frac{1}{6!}(xy^3 + yx^3)$$

61. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden en un entorno del punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ de la función

$$f(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen} x + y + z$$

Solución: La fórmula que buscamos, llamando $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, es

$$f\left(P + (x,y,z)\right) = f\left(P\right) + \operatorname{grad} f\left(P\right) \cdot (x,y,z) + \frac{1}{2}(x,y,z)Hf(P)(x,y,z)^t + r(x,y,z)$$

Tenemos en primer lugar que $f(P) = 4$, y derivando se tiene

$$\begin{aligned} f_1(x,y,z) &= \cos x - \cos(x+y+z) \\ f_2(x,y,z) &= \cos y - \cos(x+y+z) \\ f_3(x,y,z) &= \cos z - \cos(x+y+z) \end{aligned}$$

y sustituyendo

$$f_1(P) = f_2(P) = f_3(P) = 0$$

de donde el vector gradiente es el vector $(0,0,0)$. El Hessiano resulta

$$Hf = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+y+z) & \operatorname{sen}(x+y+z) & \operatorname{sen}(x+y+z) \\ \operatorname{sen}(x+y+z) & -\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x+y+z) & \operatorname{sen}(x+y+z) \\ \operatorname{sen}(x+y+z) & \operatorname{sen}(x+y+z) & -\operatorname{sen} z + \operatorname{sen}(x+y+z) \end{pmatrix}$$

y evaluando en el punto

$$Hf(P) = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

y finalmente la fórmula buscada

$$f(P + (x, y, z)) = 4 - x^2 - y^2 - z^2 - xy - xz - yz + r(x, y, z)$$

62. Clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y, z) = e^{-x^2} + e^{-y^2} + z^2$$

Solución: Empezamos por calcular las derivadas parciales de f e igualarlas a cero, como f es una función diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$, por ser composición de funciones diferenciables, en los puntos de $\mathbb{R}^2$ donde f tenga extremos locales las derivadas parciales tienen que ser cero.

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z) &= -2xe^{-x^2} \\ f_2(x, y, z) &= -2ye^{-y^2} \\ f_3(x, y, z) &= 2z \end{aligned}$$

que igualando a cero nos dan como solución única el punto $(0, 0, 0)$. El hessiano en este punto es:

$$Hf(0, 0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que es una matriz semidefinida, y por tanto se tiene un punto de ensilladura, es decir, que no se trata de un máximo ni de un mínimo.

También podemos comprobar que en una bola de radio r tan pequeño como queramos, del punto $(0, 0, 0)$, donde el valor de f es 2, hay puntos que toman valores mayores y menores que 2.

$$\begin{aligned} f(\epsilon, 0, 0) &= e^{-\epsilon^2} < 2 \\ f(0, 0, \epsilon) &= 2 + \epsilon^2 > 2 \end{aligned}$$

donde $\epsilon < r$.

63. Estudiar y clasificar los puntos críticos de la función $f(x, y) = x^2y - x^2 - y^2 + y + 3$

Solución: Hacemos las derivadas parciales primeras e igualamos a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy - 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 - 2y + 1 = 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos $x = 0$ ó $y = 1$ y sustituyendo en la segunda se tiene $y = \frac{1}{2}$ ó $x = \pm 1$. Así obtenemos los puntos críticos: $(0, \frac{1}{2}), (1, 1)$ y $(-1, 1)$.

Las derivadas de segundo orden de f son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y - 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 2x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

Aplicando el criterio de la segunda derivada:

- $(0, \frac{1}{2})$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, \frac{1}{2}) = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, \frac{1}{2}) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, \frac{1}{2}) = -2$$

  y entonces se trata de un máximo local $(A < 0, AC - B^2 > 0)$.

- $(\pm 1, 1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\pm 1, 1) = 0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\pm 1, 1) = \pm 2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\pm 1, 1) = -2$$

  y tenemos dos puntos silla $(A = 0, AC - B^2 < 0)$.

64. Sea $f(x,y) = x \ln(xy) + x$ definida en $H = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\big\}$. Estudiar los puntos críticos de f.

Solución: Si no restringimos la función f al conjunto H, ésta sólo tiene sentido en aquellos puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ donde tales que $xy > 0$ porque no existen logaritmos de números negativos.

Para calcular los puntos críticos igualamos las derivadas parciales a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \ln(xy) + \frac{xy}{xy} + 1 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^2}{xy} = 0 \end{aligned}$$

y como la primera de ellas no tiene solución (la segunda sería para $x = 0$ que no está en el dominio) resulta que f no tiene puntos críticos.

65. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \cos(\ln(x+y))}{x^2 + y^2}$$

Solución: Pasando a coordenadas polares tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 \cos(\ln(x+y))}{x^2+y^2} &= \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} \frac{r^3 \cos(\ln(r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)))}{r^2} \\ &= \lim_{(r,\theta)\to(0,0)} r\left[\cos(\ln(r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)))\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

donde el último paso se tiene del producto de una función acotada $(\cos(\ln(r(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)))$ por r (que tiende a cero).