Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2015/2016, Junio, 1ª y 2ª semana

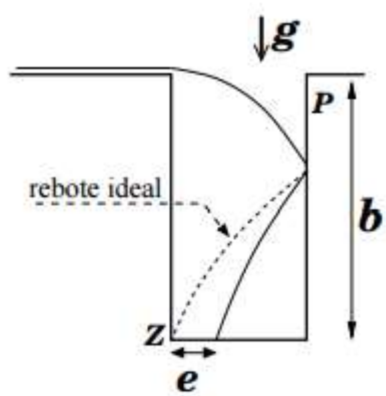
1ª Semana

1. Una partícula de masa *m* se desplaza con velocidad constante *v* de izquierda a derecha sobre una superficie horizontal en dirección a un pozo de anchura *a* y profundidad *b* (ver figura). Tras sobrepasar el borde izquierdo del pozo y empezar a caer, la partícula choca contra la pared derecha del pozo y rebota. Sabemos que si el choque fuera elástico la partícula llegaría exactamente a la esquina inferior izquierda del pozo, *Z*.

a) Calcule la velocidad inicial *v* en función de *a*, *b* y la aceleración gravitatoria *g*. **(0.5 puntos)**

b) Calcule la velocidad justo antes del primer choque con la pared en función de *a*, *b* y *g*. **(0.5 puntos)**

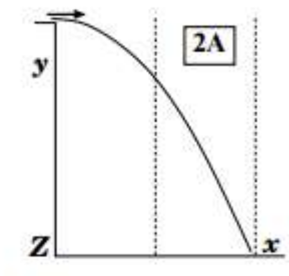
c) Determine la distancia *e* con respecto a esa esquina *Z* donde cae la partícula en función de los datos del problema y del coeficiente de restitución *r* (el cociente entre las componentes horizontales de velocidad justo después y antes del choque). **(1 punto)**



Solución

-Cálculo de la velocidad inicial, v.

Descompongamos la velocidad con la que choca contra la partícula con la pared derecha del pozo, *u*, en sus componentes horizontal, u_x, y vertical, u_y. La componente vertical, u_y, no varía. Si el choque es elástico la componente horizontal tras el choque tiene el mismo módulo y dirección opuesta, $u'_x = u_x$. Es decir, podemos estudiar el movimiento como si fuera una caída libre:



El problema se reduce a un tiro parabólico desde una altura *b* con un alcance de *2a*.

El tiempo de caída viene dado por el movimiento en vertical, el que tarda en recorrer la altura, *b*:

$$b = \frac{1}{2} g t^2 \text{ , de donde } t = \sqrt{\frac{2b}{g}}$$

Durante el cual recorre la distancia horizontal:

$2a = vt$, de donde obtenemos la velocidad inicial de la partícula

$$v = a\sqrt{\frac{2g}{b}}$$

-Cálculo del choque con la pared derecha.

De la velocidad inicial obtenemos el tiempo, t_1, que tarda en alcanzar la pared opuesta.

$$a = v\, t_1 \text{ , } t_1 = \frac{a}{v} = \sqrt{\frac{b}{2g}}$$

La distancia vertical recorrida es:

$$y_1 = \frac{1}{2} g t_1^2 = \frac{b}{4}$$

Y las componentes de la velocidad, v', justo antes del choque son

$$v'_x = v = a\sqrt{\frac{2g}{b}} \text{ y } v'_y = g\, t_1 = \sqrt{\frac{bg}{2}}$$

-Después del choque.

Velocidad

$$v''_x = r\, v'_x = r\, a\sqrt{\frac{2g}{b}} \text{ y } v''_y = v'_y = \sqrt{\frac{bg}{2}}$$

-Llegada al suelo.

Tiempo que tarda en recorrer la distancia que le falta, $\frac{3}{4}b$:

$\frac{3}{4}b = v''_y t_2 + \frac{1}{2}g t_2^2$, que reescribimos como

$$t_2^2 + \sqrt{\frac{2g}{b}}\, t_2 - t_2 \frac{3b}{2g} = 0$$

de donde

$$t_2 = \frac{-\sqrt{\frac{2g}{b}} \pm \sqrt{\frac{2g}{b} + \frac{6g}{b}}}{2} = \sqrt{\frac{b}{2g}}$$

En ese tiempo recorre la distancia

$$d = v''_x t_2 = r\ \ a\sqrt{\frac{2g}{b}}\sqrt{\frac{b}{2g}} = r\, a$$

Por lo que la distancia pedida es

$$e = a - a\, r = a\,(1 - r)$$

2. Sobre una partícula de masa 8 kg que está limitada a moverse en el eje X sólo actúa una fuerza conservativa que depende de su posición según la expresión:

$$\vec{F}(x) = -3\ x\ e^{-x^2}\ \vec{\imath}$$

En la posición *x = 0*, la partícula tiene una velocidad de 0,5 m/s. Calcule la expresión del momento angular de la partícula (en función de *x*) respecto a un punto situado en la posición ***r*** *= (0, 3, 2)*. **(2,5 puntos)**

<u>Solución</u>

Si integramos la expresión de la fuerza obtenemos la energía potencial de la partícula:

$$U(x) = -\int F(x)dx = -\frac{3}{2}e^{-x^2}$$

En la posición x=0 conocemos la energía total, la suma de la energía cinética y la potencial

$$E_0 = K_0 + U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}8\ 0.25 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

Esta energía se conserva:

$$E = U(x) + K(x) = -\frac{3}{2}e^{-x^2} + 4\, v(x)^2 = -\frac{1}{2}$$

De donde podemos calcular la velocidad en cualquier punto de la trayectoria

$$v(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}}$$

De donde podemos calcular el momento angular según la expresión:

$$\vec{L}(x) = \vec{r}\ \times \vec{p}$$

El vector posición $\vec{r} = (x, 0,0) - (0, 3, 2) = (x, -3, 2)$ de donde obtenemos

$$\vec{L}(x) = 8\ (x, -3, 2) \times (v, 0\ ,0) = 8\ v(x)\ (0, -2, 3)$$

Y la solución es

$$\vec{L}(x) = 4\ \sqrt{\frac{3}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}}\ (0, -2, 3)$$

3. Supongamos que realizamos el mismo experimento en diferentes planetas. El experimento consiste en situarnos a una distancia *R* del centro del planeta (la misma para todos los planetas) y medir la distancia vertical recorrida durante un segundo por un cuerpo que se suelta en caída libre. Si después representamos gráficamente el valor obtenido en función de la masa del planeta, describir lo más precisamente posible la función que obtendremos. ¿Qué variará en esa representación gráfica si cambiamos la distancia *R* del experimento? **(1,5 puntos)**

Solución

La ecuación del experimento en el planeta *i* será

$$s_i = \frac{1}{2}g_i t^2 = \frac{1}{2}g_i$$

donde g_i el la aceleración gravitatoria a la distancia *R* que supondremos constante durante la caída ya que la variación de altura es completamente despreciable con respecto al radio del planeta:

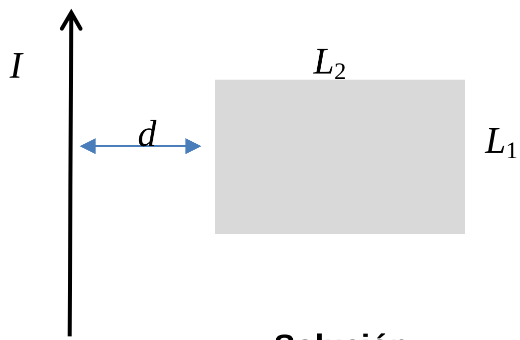
$$g_i = G\frac{M_i}{R^2}\ ,$$

de modo que la distancia recorrida será

$$s_i = \frac{1}{2}g_i = \frac{G}{2R^2}M_i$$

Vemos que obtenemos una función lineal y su representación gráfica será una recta que pasa por el origen con pendiente $\frac{G}{2R^2}$. Al cambiar *R* obtendremos el mismo resultado pero con diferente pendiente.

4. El campo magnético creado por un conductor rectilíneo muy largo que transporta una corriente *I* en un punto situado a una distancia *r* perpendicular al conductor tiene módulo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Calcular el flujo magnético que atraviesa la región rectangular sombreada de dimensiones $L_1 \times L_2$ indicada en la figura, debido a la corriente de la izquierda. **(2,5 puntos)**



Solución

El flujo magnético que atraviesa una superficie se define como

$$d\phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

En nuestro problema sabemos que el campo magnético creado por el conductor rectilíneo es perpendicular a la superficie del cuadrado en cualquier punto del mismo, así que tenemos

$$d\phi_m = BdA = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA.$$

Para obtener el flujo total debemos integrar sobre todo el área del cuadrado tomando como diferencial de área una lámina infinitesimalmente estrecha $dA = L_1 dr$:

$$\phi_m = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA = \int_d^{d+L_2} \frac{\mu_0 I L_1}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I L_1}{2\pi} \ln\left(\frac{d+L_2}{d}\right)$$

5. Supongamos un electrón que se mueve con una energía cinética igual a su masa en reposo. Calcular la velocidad de la partícula en relación a la velocidad de la luz. **(1,5 puntos)**

Solución

La energía cinética de una partícula relativista tiene la forma:

$$E_c = E_T - E_0 = (m - m_0)c^2$$

Según el enunciado, el electrón tiene una energía cinética igual a su energía en reposo, de modo que

$$E_c = E_0 \quad \Rightarrow \quad m = 2m_0$$

siendo *m* la masa relativista:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Despejando obtenemos que

$$v = \sqrt{\frac{3}{4}}c = 0,866c$$

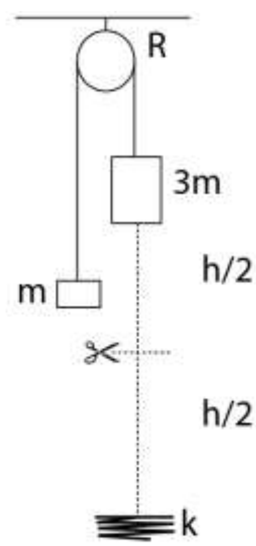
2ª Semana

1. Sea el sistema de la figura, formado por dos masas *m* y *3m* unidas por una cuerda de masa despreciable que pasa por una polea de radio *R* y momento de inercia *I*. La cuerda no desliza sobre la polea y la hace girar sin ningún rozamiento. Debajo de la masa *3m*, en la misma línea vertical y a una distancia *h*, hay una plataforma de masa despreciable que descansa sobre un muelle de constante *k*.

Se deja el sistema libre desde una situación inicial de reposo y cuando la partícula *3m* ha recorrido una distancia *h/2* se corta la cuerda. La masa *3m* cae entonces sobre la plataforma y la máxima contracción del muelle es *x*.

a) Calcule la velocidad de la masa 3*m* en el momento de cortar la cuerda. **(1,5 puntos)**

b) Si *x* tiene la siguiente expresión $x = \sqrt{\frac{4\,m\,g\,h}{k}}$, encuentre la expresión del momento de inercia de la polea en función del resto de datos del problema. Desprecie cualquier efecto del rozamiento con el aire. Considere que la máxima contracción del muelle es mucho menor que la distancia *h/2.* **(1,5 puntos)**



<u>Solución.</u>

Distinguimos entre 3 momentos del sistema formado por la masa *3m* y el muelle:

-Ruptura de la cuerda (subíndice 1). Masa *3m* con velocidad v_1, E_1 = Energía total de la masa *3m*.

-Llegada de la masa *3m* a la plataforma (subíndice 2). E_2 = Energía total de la masa *3m*.

-Máxima contracción del muelle (subíndice 3). $E_3 = Em_3$ = Energía acumulada en el muelle.

Por conservación de la energía tenemos que la energía total de la masa *3m* en las situaciones 1 2 son iguales, $E_1 = E_2$, e iguales a la energía acumulada en el muelle, $E_1 = E_2 = Em_3$.

Por tanto, solo es necesario calcular la energía en la situación 1 e igualarla a la energía del muelle. En la situación 1, la masa *3m* tiene energía cinética (es necesario calcular la velocidad) y energía potencial, $E_1 = K_1 + U_1$.

Para calcular la velocidad de la masa *3m* necesitamos calcular la aceleración del sistema de dos masas y la polea.

Planteamos el diagrama de fuerzas y las ecuaciones para cada elemento

$$3m\,g - T_1 = 3m\,a_1$$

$$T_1 R - T_2 R = I\,\alpha \quad \rightarrow \quad T_1 - T_2 = \frac{I}{R^2}\,a_1$$

$$T_2 - m\,g = m\,a_1$$

Sumando las expresiones y despejando la aceleración:

$$a_1 = \frac{2\,m\,g\,R^2}{I + 4\,m\,R^2}$$

Sabiendo que la masa parte del reposo, cuando llegue a la situación 1 tendemos que

$$v_1 = a_1\,t$$

$$\frac{h}{2} = \frac{a_1\,t^2}{2}$$

De donde $v_1 = \sqrt{h\,a_1} = \sqrt{\frac{2\,m\,g\,h\,R^2}{I+4\,m\,R^2}}$

Con esto ya podemos calcular la energía cinética en 1

$$K_1 = \frac{1}{2} 3m\, v_1^2 = \frac{3\, m^2\, g\, h\, R^2}{I + 4\, m\, R^2}$$

Y la energía potencial respecto a la plataforma (siendo estrictos habría que calcularla respecto a la posición final, después de que se haya contraído el muelle, pero el enunciado nos dice que podemos despreciar este último efecto):

$$U_1 = 3m\, g \frac{h}{2}$$

Tenemos pues que la energía total en la situación 1 y en la 2 es:

$$E_1 = E_2 = 3m\, g \frac{h}{2} + \frac{3\, m^2\, g\, h\, R^2}{I + 4\, m\, R^2}$$

Toda esa energía se invierte en la contracción del muelle, por lo que

$$Em_3 = \frac{k}{2} x^2 = 3m\, g \frac{h}{2} + \frac{3\, m^2\, g\, h\, R^2}{I + 4\, m\, R^2}$$

Si sustituimos la fórmula para la elongación del muelle dada en el enunciado:

$$\frac{k}{2} \frac{4\, m\, gh}{k} = 3m\, g \frac{h}{2} + \frac{3\, m^2\, g\, h\, R^2}{I + 4\, m\, R^2}$$

Podemos despejar el valor de I:

$$\frac{mgh}{2} = \frac{3\, m^2\, g\, h\, R^2}{I + 4\, m\, R^2}$$

$$I + 4\, m\, R^2 = 6\, m\, R^2$$

$$I = 2\, m\, R^2$$

2. Sobre una masa *m* = 1 kg que se mueve a lo largo del eje X actúa una única fuerza de modo que su posición en función del tiempo es:

$$x(t) = 3\, e^{2\, t} + 5\, e^2\ .$$

Calcular el trabajo desarrollado por la fuerza sobre la partícula para moverla desde la posición inicial, en *t = 0*, hasta la posición $x(t_f) = 8\, e^2$. **(1,5 puntos)**

Solución

En primer lugar es fácil obtener que el tiempo final vale: $t_f = 1$ s Podemos resolver el problema de dos formas.

(a) Aplicando el teorema del trabajo-energía cinética: $W = \Delta E_c$. Para ello necesitamos la expresión de la velocidad, la cual obtenemos derivando:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = 6e^{2t}.$$

Por lo tanto:

$$W = \frac{1}{2}m\left(v_f^{\,2} - v_i^{\,2}\right) = 18\left(e^4 - 1\right) \text{ J}$$

(b) A partir de la definición de trabajo $W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$. Para ello necesitamos la fuerza, que la obtenemos a partir de la aceleración:

$$F = ma = m\frac{dv(t)}{dt} = 12e^{2t} \text{ N}$$

Integrando obtenemos

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx = \int_{t_i}^{t_f} Fv\,dt = 72\int_{t_i=0}^{t_f=1} e^{4t}\,dt = 18\left(e^4 - 1\right) \text{ J}$$

3. Supongamos el experimento que consiste en colgar una masa *m* de un muelle de masa despreciable que obedece la ley de Hooke con constante *k*.
- Si realizamos el mismo experimento en la superficie de la Tierra y en la superficie de la Luna, ¿cuál será el cociente entre los estiramientos producidos en el muelle sabiendo que la masa de la Tierra es aproximadamente 81,4 veces la de la Luna, mientras que su radio es 3,7 veces más grande?
- Supongamos que el experimento consiste ahora en colocar la misma masa *m* en el platillo de una balanza e ir añadiendo pesas en el otro platillo hasta conseguir el equilibrio de la balanza. Discutir razonadamente dónde deberemos colocar más pesas, ¿en la superficie terrestre o en la lunar? **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

En el equilibrio tenemos

$$mg = kx \rightarrow x = \frac{mg}{k}$$

Comparando tendremos.

$$\frac{x_T}{x_L} = \frac{\frac{mg_T}{k}}{\frac{mg_L}{k}} = \frac{M_T R_L^{\,2}}{R_T^{\,2} M_L} = \frac{81,4}{\left(3,7\right)^2} = 5,95$$

La balanza compara masas, por lo que el número de pesas será, evidentemente, el mismo.

4. Tenemos un cilindro hueco que podemos considerar infinitamente largo con radio interior R_1 y radio exterior R_2 ($R_1 < R_2$). El cilindro tiene una densidad lineal de carga λ (carga por metro lineal de cilindro). Calcular el campo eléctrico creado por esta distribución de carga a cualquier distancia r del eje del cilindro. **(1,5 puntos)**

Solución

Podemos calcular el campo eléctrico de forma muy sencilla aplicando el teorema de Gauss

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = 4\pi k Q_{\text{interior}},$$

y considerando superficies cilíndricas de radio *r* y longitud *L* coaxiales con el tubo. Como consecuencia de la simetría del problema, el campo será perpendicular a la dirección del tubo y su módulo dependerá exclusivamente de la distancia radial *r* del punto de observación al eje del tubo. Como el campo será perpendicular al vector superficie de las dos bases de la superficie cilíndrica considerada, sólo la superficie lateral, de área $A = 2\pi r L$, contribuirá al flujo, por lo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2kQ_{\text{interior}}}{Lr}\hat{\mathbf{n}}$$

siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el vector unitario normal a la dirección del tubo en el punto considerado.
Cuando $r < R_1$, la carga encerrada en el interior del cilindro es nula, por lo que

$$\mathbf{E}(r < R_1) = 0\ \hat{\mathbf{n}}$$

Cuando $R_1 < r < R_2$, la carga encerrada en el interior del cilindro será

$$Q_{\text{interior}} = V \times \rho = L\pi\left(r^2 - R_1^2\right) \times \frac{L\lambda}{L\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)} = L\lambda\frac{\left(r^2 - R_1^2\right)}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$$

$$\mathbf{E}(R_1 < r < R_2) = \frac{2kQ_{\text{interior}}}{Lr}\hat{\mathbf{n}} = \frac{2k\lambda}{r}\frac{\left(r^2 - R_1^2\right)}{\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\hat{\mathbf{n}}$$

Si consideramos $r > R_2$ la carga encerrada será

$$Q_{\text{interior}} = \lambda L,$$

de modo que obtenemos

$$\mathbf{E}(r) = \frac{2k\lambda}{r}\hat{\mathbf{n}}$$

5. El campo magnético creado por un conductor rectilíneo muy largo que transporta una corriente *I* en un punto situado a una distancia *r* perpendicular al conductor tiene módulo $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Calcular, a partir de la definición de flujo

magnético, el flujo magnético que atraviesa una esfera de radio R cuyo diámetro coincide el eje del conductor. **(1,5 puntos)**

Solución

Por la ley de Gauss del magnetismo sabemos que el flujo neto del campo a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero. En este caso es fácil comprobarlo ya que

$$\phi_m = \oint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\, dA = \phi_m = \oint_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{r}}\; dA$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ es el vector radial unitario. Como las líneas de campo creadas por el conductor siguen los paralelos de la esfera tenemos que $\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0$ idénticamente en todos los puntos de la superficie de la esfera, de modo que las líneas de campo no atraviesan nunca la esfera y el flujo neto es cero.

6. Supongamos una nave espacial que se mueve con una cierta velocidad respecto a la Tierra, la cual se puede considerar en reposo. Un observador situado en la Tierra observa un reloj situado en la nave y se da cuenta de que por cada segundo transcurrido en el reloj de la nave, en su reloj terrestre han transcurrido 1,3 s. Si nos situamos en la nave y ahora es el astronauta el que observa el reloj de la Tierra, por cada segundo transcurrido en el reloj de la Tierra, ¿cuánto habrá transcurrido en su reloj? **(1 punto)**

Solución

El resultado es exactamente el mismo. En ambos casos 1 s es el tiempo propio del sistema y 1,3 s el tiempo en el sistema que se mueve.