Tema 5: Aplicaciones lineales

1. Aplicaciones lineales entre espacios vectoriales

Definición 5.1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$. Una aplicación $f : V \to W$ se dice *lineal* si verifica:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$$
$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$$

Proposición 5.1. Si $f : V \longrightarrow W$ es lineal, entonces,

(I) $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

(II) $f(-\mathbf{u}) = -f(\mathbf{u})$.

(III) Si L es un subespacio vectorial, $f(L) = \{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in L\}$ también es un subespacio vectorial.

Proposición 5.2. Sea L un subespacio de dimensión k y f una aplicación lineal, entonces $f(L)$ es un subespacio de dimensión menor o igual que k.

Teorema 5.1. *Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base de V. Sean $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ n vectores cualesquiera de W. Entonces existe una única aplicación lineal $f : V \longrightarrow W$ tal que $f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$, $1 \leq i \leq n$.*

2. Matriz de una aplicación lineal.

3. Operaciones entre aplicaciones lineales

Proposición 5.3. Si A y B son las matrices de las aplicaciones f y g en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, respectivamente, entonces

(I) $A + B$ es la matriz de la aplicación $f + g$ en las citadas bases.

(II) αA es la matriz de la aplicación $\alpha \cdot f$ en las mismas bases.

Proposición 5.4. Si $f \in \mathcal{L}(V, W)$, $g \in \mathcal{L}(W, X)$, $A = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(f)$ y $B = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}_X}(g)$ entonces

$$BA = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_X}(g \circ f).$$

Teorema 5.2. *Sea f una aplicación lineal de V en W. Entonces,*

(I) *La inversa de una aplicación lineal es lineal y $(f^{-1})^{-1} = f$.*

(II) *f es invertible si y solo si es biyectiva.*

(III) *Si $f : V \to W$ es biyectiva y tiene a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ como matriz asociada respecto de ciertas bases, entonces f^{-1} tiene como matriz asociada respecto de las mismas bases a A^{-1}.*

4. Cambio de base en una aplicación lineal

$$C = M_{\mathcal{B}'_V}^{\mathcal{B}_V} \qquad D = M_{\mathcal{B}_W}^{\mathcal{B}'_W} \qquad A = M_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}(f) \qquad A' = M_{\mathcal{B}'_V}^{\mathcal{B}'_W}(f)$$

$$f : V \longrightarrow W$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_V \arrow[r, "A"] & \mathcal{B}_W \arrow[d, bend left=90, "D"] \\ \mathcal{B}'_V \arrow[u, bend left=90, "C"] \arrow[r, "A'"'] & \mathcal{B}'_W \end{tikzcd}$$

$$A' = DAC$$

5. Núcleo y rango de una aplicación lineal

Definición 5.2. Sea $f : V \to W$ una aplicación. Se define el *núcleo* de f como el conjunto

$$\ker(f) = \{\mathbf{v} \in V : f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Se define la *imagen* de f como

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{\mathbf{w} \in W : \exists \mathbf{v} \in V \text{ tal que } f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} \\ &= \{f(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in V\} = f(V) \end{aligned}$$

Proposición 5.5. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal, entonces $\ker(f)$ y $\operatorname{Im}(f)$ son subespacios vectoriales de V y W, respectivamente.

Proposición 5.6. Sea $f : V \to W$ una aplicación lineal. Entonces, f es inyectiva si y sólo si $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

Proposición 5.7. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base de V. Entonces el conjunto

$$\{f(\mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$$

es un sistema generador de $\operatorname{Im}(f)$.

Teorema 5.3. *Sea $f : V \to W$ lineal. Entonces*

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Corolario 5.4. *Sea $f : V \to W$ lineal con matriz asociada A respecto de ciertas bases. Entonces,*

(I) *f es inyectiva si y sólo si* $\operatorname{rango}(A) = \dim(V)$.

(II) *f es sobreyectiva si y sólo si* $\operatorname{rango}(A) = \dim(W)$.

Teorema 5.5. *Sea $f : V \to W$ lineal. Si* $\dim(V) = \dim(W)$, *son equivalentes:*

(I) *f es biyectiva.*

(II) *f es inyectiva.*

(III) *f es sobreyectiva.*

(IV) $\ker(f) = \{\mathbf{0}\}$.

(V) $\operatorname{rango}(f) = \dim(V)$.