Cálculo de Probabilidades I — Septiembre 2014

Ejercicio 1. Se dispone de n monedas, cada una con probabilidades de cara y cruz iguales a p y q, con $p + q = 1$, respectivamente. En un primer lanzamiento se lanzan las n monedas. En el segundo lanzamiento se vuelven a lanzar las monedas cuyo resultado haya sido cruz, sin tocar las monedas que hayan resultado cara. Se repite iterativamente este procedimiento de tal forma que en el lanzamiento k se lanzan las monedas que hayan sido cruz en el lanzamiento $k - 1$, sin tocar las monedas que hayan sido cara.

Sea X_k, para $k \geq 1$, la variable aleatoria que indica el número de caras entre las n monedas tras el lanzamiento k-ésimo, y sea T_n el lanzamiento en el que, por primera vez, las n monedas son cara.

(a) Probar que X_k tiene distribución binomial $B(n, 1 - q^k)$.

(b) Hallar la función de probabilidad de X_{k+1} condicionado por $X_k = j$.

(c) Determinar la función de probabilidad de T_n (se sugiere establecer que $\{T_n > k\} = \{X_k < n\}$) y probar que

$$\mathrm{E}[T_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[1 - (1 - q^k)^n\right] = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{1 - q^j}.$$

(Puede probarse que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[T_n]/\log n = -1/\log q$.)

Ejercicio 2. El mus se juega con una baraja española de cuarenta cartas con los siguientes valores:

$$A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, S, C, R.$$

El 2 se asimila al as (A) y el 3 se asimila al rey (R). Se reparten cuatro cartas al azar a un jugador. Se dice que tiene "duples" cuando tiene dos dobles parejas o cuatro cartas iguales (por ejemplo: $355R$, $A222$, $66CC$). Se dice que tiene "medias" cuando tiene tres cartas iguales y no tiene "duples" (por ejemplo: $A22S$ o $777R$).

(a) Calcular la probabilidad de tener "duples".

(b) Calcular la probabilidad de tener "medias".

Ejercicio 1.
(a) Cada una de las n monedas es lanzada sucesivamente hasta que resulta cara. La probabilidad de que, en la k-ésima etapa del experimento, una moneda sea cruz es q^k, pues los k lanzamientos han debido ser cruz. La probabilidad de que sea cara es, por tanto, $1 - q^k$. Puesto que los lanzamientos de las n monedas son independientes, se tiene que X_k tiene distribución binomial de parámetros $B(n, 1 - q^k)$.
(b) Si $X_k = j$, para algún $0 \leq j \leq n$, entonces en el siguiente lanzamiento se lanzan $n - j$ monedas. Los posibles valores de X_{k+1} son $r = j, j+1, \ldots, n$, y será $X_{k+1} = r$ cuando de esas $n - j$ monedas $r - j$ hayan resultado cara. Por tanto,

$$\mathrm{P}\{X_{k+1} = r \mid X_k = j\} = \binom{n-j}{r-j} p^{r-j} q^{n-r}.$$

Informalmente, puede decirse que X_{k+1} se distribuye como j más una binomial $B(n-j, p)$.
(c) Se cumple en efecto que $T_n > k$ precisamente cuando $X_k < n$ puesto que el instante T_n es posterior a k cuando en el k-ésimo lanzamiento aún no se han obtenido n caras. Así,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{T_n > k\} &= \mathrm{P}\{X_k < n\} \\
&= 1 - \mathrm{P}\{X_k = n\} \\
&= 1 - (1 - q^k)^n.
\end{aligned}$$

Esta expresión es válida para $k \geq 0$. Se deduce que, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{T_n = k\} &= \mathrm{P}\{T_n > k-1\} - \mathrm{P}\{T_n > k\} \\
&= (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n.
\end{aligned}$$

El valor de $\mathrm{E}[T_n]$ se deduce directamente de la igualdad

$$\mathrm{E}[T_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\{T_n > k\}.$$

Ejercicio 2.
(a) El número de formas de repartir 4 cartas a un jugador es $\binom{40}{4} = 91390$. Para obtener duples se tiene que dar alguna de las siguientes posibilidades (disjuntas), para las que se indica el número de posibilidades.

- 4 reyes o 4 ases: $2 \cdot \binom{8}{4} = 140$.
- 4 cartas iguales, que no sean ases o reyes: $6 \cdot \binom{4}{4} = 6$.
- doble pareja de ases y reyes: $\binom{8}{2} \cdot \binom{8}{2} = 784$.
- doble pareja de ases o reyes, y de otra carta que no sea ni as ni rey: $2 \cdot \binom{8}{2} \cdot 6 \cdot \binom{4}{2} = 2016$.
- doble pareja de cartas que no sean ni as ni rey: $\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2} = 540$.

En total, hay 3486 manos posibles con duples, por lo que la probabilidad pedida es

$$\frac{3486}{91390} \simeq 3{,}8\,\%.$$

(b) Para obtener medias se tiene que dar alguna de las siguientes posibilidades (disjuntas), para las que se indica el número de posibilidades.

- 3 reyes o 3 ases: $2 \cdot \binom{8}{3} \cdot 32 = 3584$.
- 3 cartas iguales, que no sean ases o reyes: $6 \cdot \binom{4}{3} \cdot 36 = 864$.

En total, hay 4448 manos posibles con medias, por lo que la probabilidad pedida es

$$\frac{4448}{91390} \simeq 4{,}9\,\%.$$