Geometría diferencial de curvas y superficies.

Junio 2018

Duración 2 horas

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (3 puntos)

a) Probar que la curva C con parametrización $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$\alpha(t) = (t^2 + t + 1, 2t^2 + 3t + 4, 5t^2 + 6t - 1)$$

está contenida en un plano.

b) Hallar el vector binormal a C en el punto $(1, 4, -1)$. Hallar un plano que contenga a C.

Ejercicio 2. (3 puntos).

a) Probar que el conjunto $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y^2 + z^3\}$ es una superficie y obtener una carta $(\mathbb{R}^2, \varphi, \mathbb{R}^3)$ de modo que $\varphi(\mathbb{R}^2) = S$.

b) Definir una orientación en S y calcular la primera y segunda forma fundamental para un punto genérico de S.

c) ¿Cuánto vale la curvatura de Gauss en los puntos de S de la forma $(y^2, y, 0)$?

Ejercicio 3. (4 puntos)

Sea $c = (U, \varphi, A)$ una carta de la superficie M. Dada la parametrización de curva plana $\beta : I \to U \subset \mathbb{R}^2$ y $\beta'(t) \neq (0, 0)$ para todo $t \in I$. Enunciar y demostrar las fórmulas que relacionan $\beta_i'(t)$, $\beta_k''(t)$, donde $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t))$, y los símbolos de Christoffel cuando $\varphi \circ \beta : I \to M$ es una parametrización geodésica y $\varphi(\beta(I))$ es una geodésica de M.

Soluciones

Ejercicio 1.

a) En primer lugar comprobamos que no hay puntos de inflexión. Esto se comprueba por ser $\alpha'(t)$ y $\alpha''(t)$ linealmente independientes. Como $\alpha'(t) = (2t+1, 4t+3, 10t+6)$, $\alpha''(t) = (2,4,10)$ y $\alpha'(t) \times \alpha''(t) = (6,2,-2) \neq (0,0,0)$, para todo t, luego no hay puntos de inflexión. Además como $\alpha'(t) \times \alpha''(t)$ es proporcional y con el mismo sentido que el vector binormal, tenemos que $B_\alpha(t) = \frac{1}{\|(6,2,-2)\|}(6,2,-2) = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)$ es constante, de donde es inmediato, por la definición de torsión $\tau_\alpha(t) = -\langle N_\alpha(t), B'_\alpha(t)\rangle = 0$ y por la Proposición 2.32 se tiene que la curva es plana.

También, una vez comprobado que no hay puntos de inflexión se puede calcular la torsión usando la fórmula de la Proposición 2.34 en la página 59, de donde:

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|^2}$$

y como $\alpha'''(t) = (0,0,0)$, para todo t, se tiene que $\tau_\alpha(t) = 0$ y finalizar aplicando la Proposición 2.32.

b) Hemos visto que $B_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)$ es constante, en particular $B_\alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)$.

La curva está contenida en el plano osculador de cualquier punto (al ser plana el plano osculador es el mismo en todos los puntos). Por ejemplo el plano osculador en $(1,4,-1)$ es:

$$\langle (x-1, y-4, z+1), B'_\alpha(0)\rangle = 0$$

es decir $\langle (x-1, y-4, z+1), B'_\alpha(0)\rangle = \left\langle (x-1, y-4, z+1), \frac{1}{\sqrt{11}}(3,1,-1)\right\rangle = 0$, que equivale a:

$$3x + y - z - 8 = 0$$

Ejercicio 2.

a) Basta construir una carta $(\mathbb{R}^2, \varphi, \mathbb{R}^3)$ de modo que $\varphi(\mathbb{R}^2) = S$. Definimos:

$$\begin{aligned} \varphi \quad &: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ \varphi(u,v) \quad &= \quad (u^2+v^3, u, v) \end{aligned}$$

entonces $(\mathbb{R}^2, \varphi, \mathbb{R}^3)$ es un caso particular de carta de Monge, de donde tenemos un atlas formado por una carta para toda la superficie, y por tanto tenemos que S es superficie.

Otro método es considerar la aplicación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x,y,z) = x - y^2 - z^3$ y probar que 0 es un valor regular. En efecto $\nabla F(x,y,z) = (1, -2y, -3z^2)$

que es siempre distinto de $(0,0,0)$, además $F(0,0,0) = 0$, luego $\{(x,y,z) : F(x,y,z) = 0\} \neq \varnothing$.

b) Como $\varphi(\mathbb{R}^2) = S$, una orientación para toda la superficie es:

$$\begin{aligned}\nu_S(\varphi(u,v)) &= \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)}{\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right\|} = \frac{(2u,1,0) \times (3v^2,0,1)}{\|(2u,1,0) \times (3v^2,0,1)\|} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}}(1,-2u,-3v^2)\end{aligned}$$

También se puede considerar

$$\nu_S(x,y,z) = \frac{\nabla F(x,y,z)}{\|\nabla F(x,y,z)\|}$$

Los primeros coeficientes fundamentales para la carta $(\mathbb{R}^2, \varphi, \mathbb{R}^3)$ son:
$g_{11} = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)\right\rangle = \langle (2u,1,0), (2u,1,0)\rangle = 4u^2+1$
$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right\rangle = \langle (2u,1,0), (3v^2,0,1)\rangle = 6uv^2$
$g_{22} = \left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right\rangle = \langle (3v^2,0,1), (3v^2,0,1)\rangle = 9v^4+1$

De donde se tiene que la matriz de la primera forma fundamental respecto de la base $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ de T_pS es:

$$\begin{bmatrix} 4u^2+1 & 6uv^2 \\ 6uv^2 & 9v^4+1 \end{bmatrix}$$

Para la segunda forma fundamental necesitamos las segundas derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}(u,v) = (2,0,0),\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}(u,v) = (0,0,0),\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}(u,v) = (6v,0,0)$$

Entonces los segundos coeficientes fundamentales para la carta $(\mathbb{R}^2, \varphi, \mathbb{R}^3)$ son:
$L_{11} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}}(1,-2u,-3v^2), (2,0,0)\right\rangle = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}}$
$L_{12} = L_{21} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}}(1,-2u,-3v^2), (0,0,0)\right\rangle = 0$
$L_{22} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}}(1,-2u,-3v^2), (6v,0,0)\right\rangle = \frac{6v}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}}$

Luego la matriz de la segunda forma fundamental respecto a la base $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v), \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)\right)$ es:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}} & 0 \\ 0 & \frac{6v}{\sqrt{1+4u^2+9v^4}} \end{bmatrix}$$

c) Los puntos en los que hemos de calcular la curvatura son $\varphi\{(u,0) : u \in \mathbb{R}\}$. Usaremos la fórmula:

$$K_M(p) = \frac{\det II_p}{\det I_p}.$$

En los puntos $p \in \varphi\{(u,0) : u \in \mathbb{R}\}$ se tiene que

$$\det II_p = \det \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

y $\det I_p$ es siempre no nulo, por tanto $K_M(p) = 0$ en los puntos pedidos.

Ejercicio 3.
Proposición 6.5 del Capítulo 6, enunciado y demostración, páginas 195-196