Ajustar a la página | Vista de página | Lectura en voz alta

Considérese un problema de decisión en el que el espacio de acciones es $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y el espacio de estados de la naturaleza es $\Theta = [0, 1]$, siendo las funciones de pérdida:

$$L(\theta, a_1) = 3\theta + 1; \qquad L(\theta, a_2) = 4 - 4\theta; \qquad L(\theta, a_3) = \theta + 2$$

a) Determinar con el criterio minimax las acciones óptimas no aleatorizadas y las acciones óptimas aleatorizadas.

b) Establecer la acción Bayes frente a cualquier distribución a priori π sobre $\Theta = [0, 1]$, y especificar el riesgo Bayes correspondiente.

c) Indicar cuáles son las distribuciones a priori menos favorables y el riesgo Bayes asociado.

Scanned with CamScanner

(a) Sin considerar acciones aleatorias tenemos:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\theta, a_2) > \mathcal{L}(\theta, a_1) \\ \mathcal{L}(\theta, a_3) > \mathcal{L}(\theta, a_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-4\theta > 3\theta+1 \to \frac{3}{7} > \theta \\ \theta+2 > 3\theta+1 \Rightarrow \frac{1}{2} > \theta \end{cases}$$

si $\theta < \frac{3}{7}$ a_1 domina a_2, a_3

Por tanto, si $\theta < \frac{3}{7}$ la acción óptima es a_1.

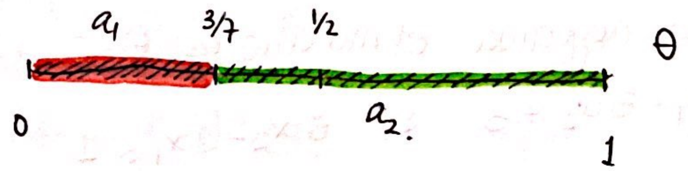
$$\begin{cases} \mathcal{L}(\theta, a_1) > \mathcal{L}(\theta, a_2) \\ \mathcal{L}(\theta, a_3) > \mathcal{L}(\theta, a_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\theta+1 > 4-4\theta \Rightarrow \theta > \frac{3}{7} \\ \theta+2 > 4-4\theta \Rightarrow \theta > \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

si $\theta > \frac{3}{7}$ a_2 domina a_1, a_3

Por último:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(\theta, a_2) > \mathcal{L}(\theta, a_3) \\ \mathcal{L}(\theta, a_1) > \mathcal{L}(\theta, a_3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-4\theta > \theta+2 \Rightarrow \frac{2}{5} > \theta \\ 3\theta+1 > \theta+2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \theta \end{cases}$$

absurdo, a_3 no puede dominar a ambas opciones. pues $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$.
(o domina a a_2 ó a a_1)



$$a^* = \begin{cases} a_1 & \text{si } \theta \leq \frac{3}{7} \\ a_2 & \text{si } \theta \geq \frac{3}{7} \end{cases}$$

(en caso de $\theta = \frac{3}{7}$ cogemos cualquiera de ellas).

Supongamos ahora que tomamos una acción aleatorizada:

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, 1-\alpha_1-\alpha_2)$$

La función de pérdida es:

$$\mathcal{L}(\theta, \alpha) = \int_A \mathcal{L}(\theta, a)\, \alpha(\partial a) =$$

$$= \alpha_1 \mathcal{L}(\theta, a_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(\theta, a_2) + (1-\alpha_1-\alpha_2)\mathcal{L}(\theta, a_3) =$$

$$= \alpha_1 \cdot (3\theta+1) + \alpha_2 (4-4\theta) + (1-\alpha_1-\alpha_2)(\theta+2) =$$

$$= \alpha_1 (3\theta+1-\theta-2) + \alpha_2 (4-4\theta-\theta-2) + (\theta+2) =$$

Scanned with CamScanner

$= \alpha_1 (2\theta - 1) + \alpha_2 (2 - 5\theta) + (\theta + 2)$

En función de θ es:

$\theta (2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 1) + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2)$

que es una recta. Para encontrar el minmax:

$$\min_{\alpha \in A^*} \max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta, \alpha)$$

hallamos $\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta, \alpha)$ que, al ser $\mathcal{L}(\theta, \alpha)$ una recta tenemos:

1. Si la pendiente es positiva, por ser θ acotado el máximo es $\theta = 1$ (Teorema Weierstrass) $(2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 1 > 0)$
2. Si la pendiente es negativa, el máximo es $\theta = 0$. $(2\alpha_1 - 5\alpha_2 + 1 < 0)$

$$\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta, \alpha) = \begin{cases} \alpha_1 - 3\alpha_2 + 3 & \text{si } 5\alpha_2 - 2\alpha_1 \leq 1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2 & \text{si } 5\alpha_2 - 2\alpha_1 \geq 1 \end{cases}$$

Ahora buscamos el mínimo de la función anterior para cada rama:

Min $\alpha_1 - 3\alpha_2 + 3$

s.a.

$5\alpha_2 - 2\alpha_1 \leq 1$

$0 \leq \alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$

			1	-3	0	0
			α_1	α_2	α_a	α_b
c^B	z	0	-1	3	0	0
0	α_a	1	-2	5	1	0
0	α_b	1	1	1	0	1

	1	-3	0	0
	α_1	α_2	α_a	α_b
12/5	1/5	0	-3/5	0
1/5	-2/5	1	1/5	0
4/5	7/5	0	-1/5	1

			1	-3	0	0
			α_1	α_2	α_a	α_b
c^B	z	12/5	0	0	<0	<0
-3	α_2	1/5	0	1	1/15	2/3
1	α_1	0	1	0	1/3	5/3

(solución ~~degenerada~~)

El simplex nos da $\vec{\alpha} = (4/7, 3/7, 0)$ con un valor

~~$V_\alpha = \frac{4}{7} \frac{3^2}{7} + 3 =$~~ ~~$V_\alpha = \frac{15}{7} \frac{8}{7} + 3$~~

$$V_\alpha = \frac{4}{7} - 3\left(\frac{3}{7}\right) + 3 = -\frac{5}{7} + 3 = \boxed{\frac{16}{7}}$$

Análogamente calculamos:

$$\text{Mín } -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2$$

s.a.

$$5\alpha_2 - 2\alpha_1 \geq 1$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \vec{\alpha} = (4/7, 3/7, 0)$$

$$V_\alpha = -\frac{4}{7} + \frac{6}{7} + 2 = \boxed{\frac{16}{7}}$$

Concluimos que la solución minmax es: $\vec{\alpha}(4/7, 3/7, 0)$ con valor de problema $\frac{16}{7}$

(b) Asumimos que θ se distribuye aleatoriamente ~~en~~ (concentrada en $[0,1]$) con densidad π.

Definimos el riesgo Bayes como $r(\pi, a) = \int_\Theta \mathcal{L}(\theta, a)\, \pi(d\theta)$

si π es absolutamente continua:

$$r(\pi, a_1) = \int_0^1 (2\theta + 1)\, \pi(\theta)\, d\theta = 2\int_0^1 \theta\, \pi(\theta)\, d\theta + \int_0^1 \pi(\theta)\, d\theta =$$

$$= 3\, E_\pi[\theta] + 1$$

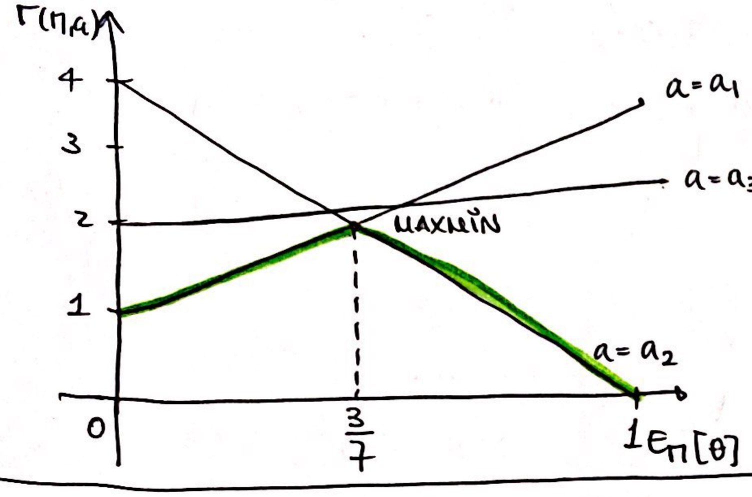
$$r(\pi, a_2) = \int_0^1 (4 - 4\theta)\, \pi(\theta)\, d\theta = 4 - 4E_\pi[\theta]$$

$$r(\pi, a_3) = \int_0^1 (\theta + 2)\, \pi(\theta)\, d\theta = E_\pi[\theta] + 2$$

$r^* = \inf_{a \in A} r(\pi, a)$ nos da el ~~[illegible]~~ mínimo riesgo Bayes frente a π y la acción con la que conseguirlo.

Scanned with CamScanner

Sabiendo que $\theta \in [0,1] \Rightarrow E_\pi[\theta] \in [0,1]$.



La acción Bayes es $a^* = \begin{cases} a_1 & \text{si } E_\pi[\theta] \leq 3/7 \quad r^* = 3E_\pi[\theta] + 1 \\ a_2 & \text{si } E_\pi[\theta] \geq 3/7 \quad r^* = 4 - 4E_\pi[\theta] \end{cases}$

(c) La distribución menos favorable (sabemos por el teorema minimax) que produce el mismo valor esperado $(V = \frac{16}{7})$ que la solución desde las acciones aleatorizadas.

se corresponde con el valor maxmin de la gráfica, es decir

las distribuciones menos favorables son aquellas que cumplen $E_\pi[\theta] = \frac{3}{7}$ y producen un pérdida (como mucho) de $V = \frac{16}{7}$.