

# Exámenes de la asignatura *Modelización*

Juan Luis Castaño Fernández

30 de octubre de 2017

## ÍNDICE

1 Mayo de 2013	2
2 Junio de 2013	9
3 Septiembre de 2013 – Convocatoria ordinaria	14
4 Septiembre de 2013 – Convocatoria de reserva	27
5 Mayo de 2014	31
6 Junio de 2014	38
7 Septiembre de 2014 – Convocatoria ordinaria	46
8 Septiembre de 2014 – Convocatoria de reserva	52
9 Mayo de 2015	57
10 Junio de 2015	64
11 Septiembre de 2015 – Convocatoria ordinaria	70
12 Septiembre de 2015 – Convocatoria de reserva	75
13 Mayo de 2016	78
14 Junio de 2016	84
15 Septiembre de 2016 – Convocatoria ordinaria	90
16 Septiembre de 2016 – Convocatoria de reserva	95
17 Mayo de 2017	99
18 Junio de 2017	105
19 Referencias bibliográficas	112

## MAYO DE 2013

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 1.1.** La función  $f(x)$ , cuya gráfica se representa en la figura 1, es cuasiconvexa en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Cuestión 1.2.** La cardinalidad de la base de ciclos del grafo de la figura 2 es igual a 4.

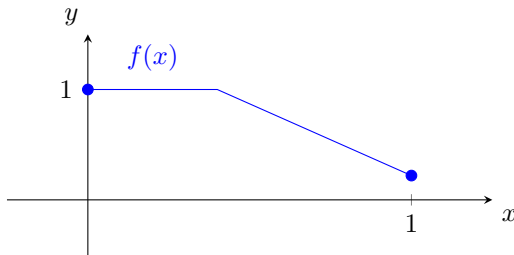


Figura 1: Gráfica de la función  $f(x)$ .

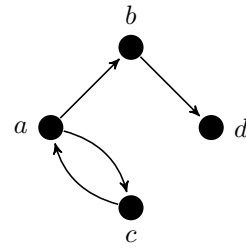


Figura 2: Grafo para la cuestión 1.2.

**Problema 1.1.** Se desea localizar el máximo de la función  $\theta(\lambda) = -2\lambda^2 + \lambda + 4$ , en el intervalo  $I = [-5, 5]$ , mediante el método de búsqueda de Fibonacci.

- Determinar el número  $n$  de iteraciones necesarias para obtener un intervalo de incertidumbre cuya longitud sea a lo sumo el 15 % de la longitud del intervalo original.
- Escribir la expresión general que proporciona el algoritmo para los sucesivos extremos del intervalo de incertidumbre.
- Realizar las  $n$  iteraciones, desarrollando una tabla en la cual figuren los sucesivos extremos del intervalo y los valores que toma la función en ellos.
- Utilizar  $\epsilon = \frac{1}{9}$  como constante para colocar el último punto y determinar el intervalo de incertidumbre final.
- Aproximar el punto en que se alcanza el máximo de la función mediante el punto medio del intervalo de incertidumbre final.

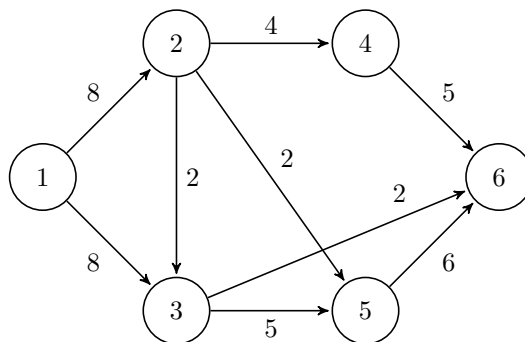


Figura 3: Grafo para el problema 1.2.

**Problema 1.2.** Consideremos la red de flujo representada en la figura 3, en donde la fuente es el vértice 1, el sumidero el vértice 6 y el número de cada arco indica su capacidad. Calcular el flujo máximo que puede enviarse desde la fuente al sumidero, por enumeración de todos los posibles cortes que pueden establecerse en la red y determinación de la capacidad de cada uno de ellos.

**Solución de la cuestión 1.1. VERDADERO.** Sea  $a \in (0, 1)$  el punto donde la función  $f(x)$  pasa de ser constante a ser estrictamente decreciente, tal y como se representa en la figura 4.

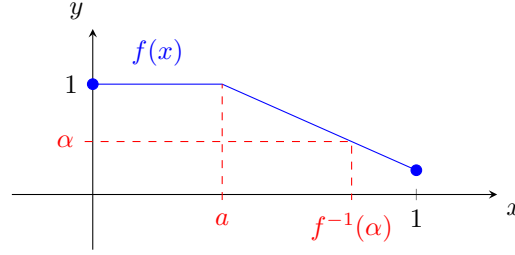


Figura 4: Gráfica de la función  $f(x)$ .

Según la definición 1.18 (Ramos, 2017: 53), para que la función  $f(x) : S \rightarrow \mathbb{R}$  dada sea una función cuasiconvexa ha de verificarse

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\},$$

para cualesquiera  $x_1, x_2 \in S$  y  $\lambda \in (0, 1)$ , puesto que  $S = [0, 1]$  es un conjunto convexo no vacío. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $x_1 \leq x_2$ , y diferenciamos entre varios casos:

- Supongamos que  $x_1 = x_2$ . El resultado en este caso es trivial

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_1) = f(x_1) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\}.$$

- Supongamos que  $0 \leq x_1 < x_2 \leq a$ . El resultado es relativamente sencillo

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_1 < a \implies 0 \leq \lambda x_1 < \lambda a \\ 0 < x_2 \leq a \implies 0 < (1 - \lambda)x_2 \leq (1 - \lambda)a \end{array} \right\} \implies 0 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \lambda a + (1 - \lambda)a = a \implies$$

$$\implies f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = 1 = f(x_1) = f(x_2) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\}.$$

- Supongamos que  $0 \leq x_1 \leq a < x_2 \leq 1$ . Una vez más, el resultado buscado es sencillo

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq x_1 < 1 \implies 0 \leq \lambda x_1 < \lambda \\ 0 < x_2 \leq 1 \implies 0 < (1 - \lambda)x_2 \leq 1 - \lambda \end{array} \right\} \implies 0 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \lambda + (1 - \lambda) = 1 \implies$$

$$\implies f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq 1 = f(x_1) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\}.$$

- Y supongamos que  $a \leq x_1 < x_2 \leq 1$ . En este caso, teniendo en cuenta que la función  $f(x)$  es estrictamente decreciente en  $[a, 1]$ , tal y como se puede observar en la figura 4,

$$x_1 < x_2 \implies x_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_1 < \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 < \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2 = x_2 \implies$$

$$\implies f(x_2) < f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < f(x_1) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\}.$$

De forma más sencilla, se podría razonar que la función  $f(x)$  es cuasiconvexa aplicando el teorema 1.14 (Ramos, 2017: 54), y sabiendo que la función  $f$  tiene inversa en el intervalo  $[a, 1]$ . En efecto, consideramos el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in S \mid f(x) \leq \alpha\};$$

que como se puede ver en la figura 4, será de la forma

$$S_\alpha = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha < f(1), \\ \{1\} & \text{si } \alpha = f(1), \\ [f|_{[a,1]}^{-1}(\alpha), 1] & \text{si } f(1) < \alpha < 1, \\ S = [0, 1] & \text{si } \alpha \geq 1; \end{cases}$$

y para cualquier valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un conjunto convexo, y como  $S = [0, 1]$  es un conjunto no vacío y convexo, entonces  $f(x)$  es una función cuasiconvexa.

**Solución de la cuestión 1.2. FALSO.** El único ciclo elemental en el grafo  $G$  dado es  $\mu^1 = [a, c, a]$ , y por tanto una base de ciclos es  $\{\mu^1\}$ , cuya cardinalidad o número ciclomático es  $\nu(G) = 1$ .

Alternativamente, el grafo  $G$  dado tiene  $n = 4$  vértices,  $m = 4$  arcos y  $p = 1$  componente conexa, por lo que su cardinalidad es, según el teorema 2.2 (Ramos, 2017: 230),

$$\nu(G) = m - n + p = 4 - 4 + 1.$$

**Solución del problema 1.1.** El problema planteado es

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && \theta(\lambda) = -2\lambda^2 + \lambda + 4, \\ &\text{Sujeto a} && -5 \leq \lambda \leq 5. \end{aligned}$$

O, equivalentemente

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && \omega(\lambda) = -\theta(\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda - 4, \\ &\text{Sujeto a} && -5 \leq \lambda \leq 5; \end{aligned}$$

donde función  $\omega(\lambda)$  es estrictamente cuasiconvexa.

(a) La longitud final aceptable para el intervalo de incertidumbre es

$$\ell = \frac{15}{100} \cdot (b_1 - a_1) = \frac{15}{100} (5 - (-5)) = 1,5.$$

Buscamos un número  $n$  tal que

$$F_n > \frac{b_1 - a_1}{\ell} = \frac{b_1 - a_1}{\frac{15}{100}(b_1 - a_1)} = \frac{100}{15} \simeq 6,67;$$

y como  $F_5 = 8$ , resulta ser  $n = 5$ .

(b) La expresión general que se pide es:

■ Si  $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ ,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \lambda_k, & \lambda_{k+1} &= \mu_k, \\ b_{k+1} &= b_k, & \mu_{k+1} &= a_{k+1} + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}). \end{aligned}$$

■ Y si  $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ ,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k, & \mu_{k+1} &= \lambda_k, \\ b_{k+1} &= \mu_k, & \lambda_{k+1} &= a_{k+1} + \frac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1}). \end{aligned}$$

(c) Paso inicial.

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1) = a_1 + \frac{F_3}{F_5}(b_1 - a_1) = -5 + \frac{3}{8}(5 - (-5)) = -1,25;$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1) = a_1 + \frac{F_5}{F_6}(b_1 - a_1) = -5 + \frac{5}{8}(5 - (-5)) = 1,25;$$

$$\omega(\lambda_1) = 2\lambda_1^2 - \lambda_1 - 4 = 2 \cdot (-1,25)^2 - (-1,25) - 4 = 0,375;$$

$$\omega(\mu_1) = -2\mu_1^2 + \mu_1 + 4 = 2 \cdot 1,25^2 - 1,25 - 4 = -2,125.$$

Paso 1,  $k = 1$ .

$$\omega(\lambda_1) > \omega(\mu_1).$$

Paso 2.

$$a_2 = \lambda_1 = -1,25; \quad \lambda_2 = \mu_1 = 1,25;$$

$$b_2 = b_1 = 5; \quad \mu_2 = a_2 + \frac{F_2}{F_3}(b_2 - a_2) = -1,25 + \frac{3}{5}(5 - (-1,25)) = 2,5.$$

Paso 4.

$$\omega(\lambda_2) = \omega(\mu_1) = -2,125;$$

$$\omega(\mu_2) = 2\mu_2^2 - \mu_2 - 4 = 2 \cdot 2,5^2 - 2,5 - 4 = 6.$$

Paso 1,  $k = 2$ .

$$\omega(\lambda_2) \leq \omega(\mu_2).$$

Paso 3.

$$a_3 = a_2 = -1,25; \quad \mu_3 = \lambda_2 = 1,25;$$

$$b_3 = \mu_2 = 2,5; \quad \lambda_3 = a_3 + \frac{F_1}{F_3}(b_3 - a_3) = -1,25 + \frac{1}{3}(2,5 - (-1,25)) = 0.$$

Paso 4.

$$\omega(\lambda_3) = 2\lambda_3^2 - \lambda_3 - 4 = 2 \cdot 0^2 - 0 - 4 = -4;$$

$$\omega(\mu_3) = \omega(\lambda_2) = -2,125.$$

Paso 1,  $k = 3$ .

$$\omega(\lambda_3) \leq \omega(\mu_3).$$

Paso 3.

$$a_4 = a_3 = -1,25; \quad \mu_4 = \lambda_3 = 0;$$

$$b_4 = \mu_3 = 1,25; \quad \lambda_4 = a_4 + \frac{F_0}{F_2}(b_4 - a_4) = -1,25 + \frac{1}{2}(1,25 - (-1,25)) = 0.$$

Paso 4.

$$\omega(\lambda_4) = 2\lambda_4^2 - \lambda_4 - 4 = 2 \cdot 0^2 - 0 - 4 = -4;$$

$$\theta(\mu_4) = \theta(\lambda_3) = -4.$$

En realidad no habría sido necesario evaluar  $\omega(\lambda_4)$  y  $\omega(\mu_4)$ , puesto que al ser  $\lambda_4 = \mu_4$  también es  $\omega(\lambda_4) = \omega(\mu_4)$ , y lo único que necesitamos es comparar esos dos valores. Como  $k = n - 2$  hemos finalizado

las iteraciones. Los resultados obtenidos se resumen en el cuadro 1, en el que se incluyen también los cálculos que se realizan en el siguiente apartado.

$k$	$a_k$	$b_k$	$\lambda_k$	$\mu_k$	$\theta(\lambda_k)$	$\theta(\mu_k)$
1	-5,00	5,00	-1,25	1,25	0,375	-2,125
2	-1,25	5,00	1,25	2,50	-2,125	6,000
3	-1,25	2,50	0,00	1,25	-4,000	-2,125
4	-1,25	1,25	0,00	0,00	-4,000	-4,000
5	0,00	1,25	0,00	0,11	-4,000	-4,086

Cuadro 1: Iteraciones del método de búsqueda de Fibonacci.

(d) Estamos en el paso 5 del algoritmo.

$$\lambda_5 = \lambda_4 = 0; \quad \mu_5 = \lambda_4 + \varepsilon = 0 + \frac{1}{9} = \frac{1}{9} \simeq 0,111;$$

$$\omega(\lambda_5) = \omega(\lambda_4) = -4; \quad \omega(\mu_5) = 2\mu_5^2 - \mu_5 - 4 \simeq 2 \cdot 0,111^2 - 0,111 - 4 \simeq -4,086.$$

Dado que  $\omega(\lambda_5) > \omega(\mu_5)$  hacemos

$$a_5 = \lambda_5 = 0; \quad b_5 = b_4 = 1,25.$$

El intervalo de incertidumbre final es, por tanto,

$$[a_5, b_5] = [0; 1,25]$$

y tiene por longitud

$$1,25 - 0 = 1,25 < 1,5 = \ell.$$

(e) El punto medio del intervalo de incertidumbre, que es la aproximación que hemos obtenido para el mínimo de la función  $\omega$ , o máximo de la función  $\theta$ , es

$$\frac{0 + 1,25}{2} = 0,625.$$

Por curiosidad, el valor real del máximo de la función  $\theta$  es  $\lambda = 0,25$ .

**Solución del problema 1.2.** Consideramos todos los cortes simples que dejan a la fuente (vértice 1) en una de las componentes conexas,  $X_1$ , y al sumidero (vértice 6) en la otra,  $X_6$ . Cada arco del corte es tal que

(a) O bien tiene su vértice inicial en  $X_1$  y su vértice final en  $X_6$ ,

(b) O bien tiene su vértice inicial en  $X_6$  y su vértice final en  $X_1$ .

La capacidad de cada corte es, según la definición 2.85 (Ramos, 2017: 300), la suma de las capacidades de los arcos que cumplen la propiedad (a).

Los posibles cortes que cumplen estas propiedades junto con sus capacidades se recogen en el cuadro 2, y entonces podemos aplicar la proposición 2.13 (Ramos, 2017: 301) y sabemos que el flujo máximo será menor o igual al mínimo de la capacidad de los cortes realizados, y será por tanto de 12 unidades como máximo. Aunque no se pide, a continuación se obtiene el mismo resultado aplicando el algoritmo del flujo máximo.

Corte	$X_1$	$X_6$	Capacidad
$\{(1, 2), (1, 3)\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	$8 + 8 = 16$
$\{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$8 + 2 + 2 + 4 = 16$
$\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (3, 6)\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4, 5, 6\}$	$8 + 0 + 2 + 5 = 15$
$\{(2, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 6)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	$4 + 2 + 5 + 2 = 13$
$\{(1, 3), (2, 3), (2, 5), (4, 6)\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{3, 5, 6\}$	$8 + 2 + 2 + 5 = 17$
$\{(1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{3, 4, 6\}$	$8 + 2 + 4 + 0 + 6 = 20$
$\{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$	$8 + 0 + 0 + 2 + 6 = 16$
$\{(2, 5), (3, 5), (3, 6), (4, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5, 6\}$	$2 + 5 + 2 + 5 = 14$
$\{(2, 4), (3, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{4, 6\}$	$4 + 2 + 6 = 12$
$\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{3, 6\}$	$8 + 2 + 0 + 5 + 6 = 21$
$\{(3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{6\}$	$2 + 5 + 6 = 13$

Cuadro 2: Cortes para el problema 1.2.

Paso inicial. Tomamos como flujo inicial para todos los arcos cero. En este caso todos arcos son incrementables.

Primera iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{8, 2, 5, 6\} = 2$ , por lo que incrementamos todos los flujos de dicha cadena en 2 unidades. El resultado está representado en la figura 5.

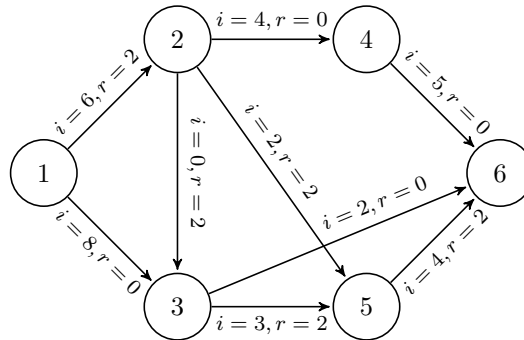


Figura 5: Primera iteración.

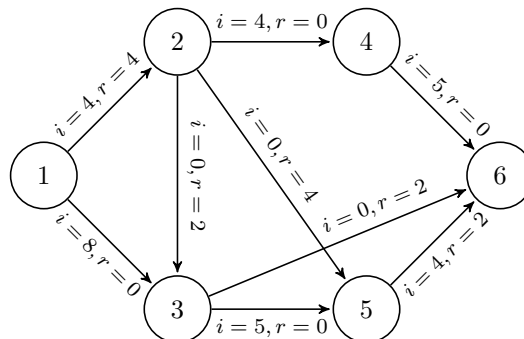


Figura 6: Segunda iteración.

Segunda iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{6, 2, 2, 2\} = 2$ , por lo que incrementamos

todos los flujos de dicha cadena en 2 unidades. El resultado está representado en la figura 6.

Tercera iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 2), (2, 4), (4, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{4, 4, 5\} = 4$ , por lo que incrementamos todos los flujos de dicha cadena en 4 unidades. El resultado está representado en la figura 7.

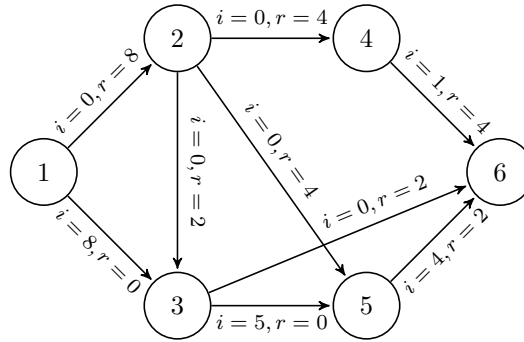


Figura 7: Tercera iteración.

Cuarta iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 3), (3, 5), (5, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{8, 5, 4\} = 4$ , por lo que incrementamos todos los flujos de dicha cadena en 4 unidades. El resultado está representado en la figura 8.

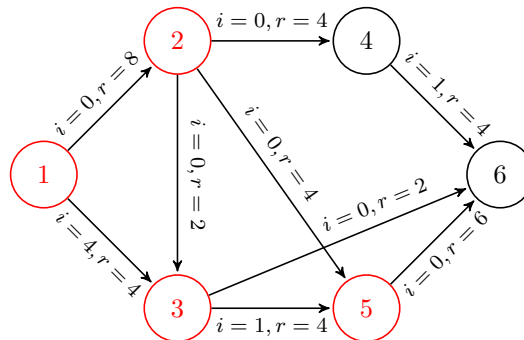


Figura 8: Cuarta iteración.

No hay más posibles cadenas de aumento de flujo. Esto se puede ver aplicando el algoritmo del aumento de flujo, cuyo coloreado se ha representado en la figura 8. El flujo que tenemos actualmente es el flujo máximo, y queda determinado por el corte formado por los arcos que tienen el vértice inicial coloreado y el final no,  $\{(2, 4), (3, 6), (5, 6)\}$ , y que son arcos saturados. Dicho flujo máximo es

$$c(2, 4) + c(3, 6) + c(5, 6) = 4 + 2 + 6 = 12.$$



## JUNIO DE 2013

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 2.1.** La función  $f(x)$  cuya gráfica se representa en la figura 9 es cuasiconvexa en el intervalo  $[0, 1]$ .

**Cuestión 2.2.** La cardinalidad de la base de cociclos del grafo de la figura 10 es igual a 3.

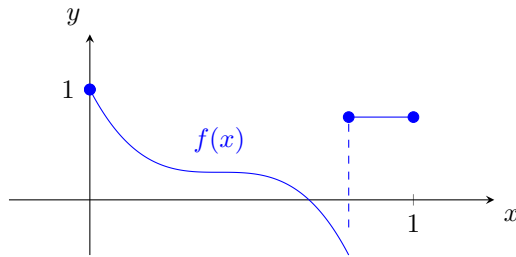


Figura 9: Gráfica de la función  $f(x)$ .

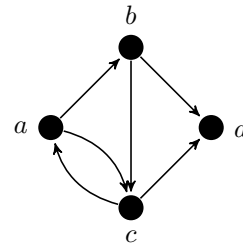


Figura 10: Grafo para la cuestión 2.2.

**Problema 2.1.** Consideremos la función  $f(x_1, x_2) = (x_2^2 - x_1)^2 - \sqrt{x_2}$ . Se parte del punto  $x_0 = (0, 1)$  y se quiere encontrar el mínimo de la función a lo largo de la dirección  $d = (1, 2)$ , en un intervalo de longitud 1.

- Plantear la búsqueda del mínimo como un problema de búsqueda lineal en un intervalo, definiendo la función unidimensional que hay que minimizar y el intervalo de incertidumbre.
- Determinar el número  $n$  de iteraciones del método de la sección áurea que hay que realizar para reducir el intervalo de incertidumbre a una longitud menor o igual que el 15 % de la longitud del intervalo inicial. (Dato: valor del número áureo 1,618).
- Realizar las  $n$  iteraciones, desarrollando una tabla en la cual figuren los sucesivos extremos del intervalo y los valores que toma la función en ellos.
- Determinar la aproximación del mínimo dada por el punto medio del intervalo final.

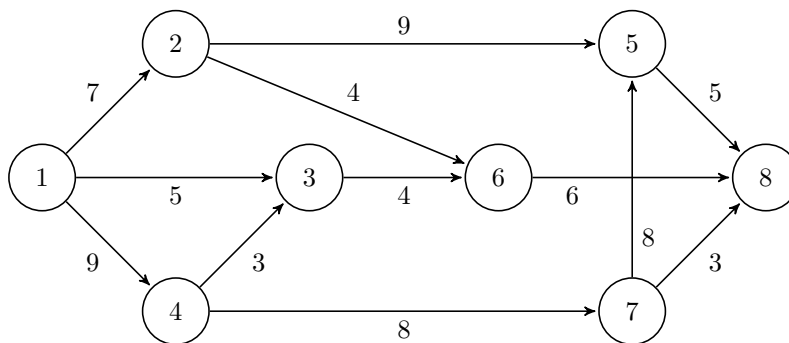


Figura 11: Grafo para el problema 2.2.

**Problema 2.2.** Consideremos la red de flujo representada en la figura 11, en donde la fuente es el vértice 1, el sumidero el vértice 8 y el número de cada arco indica su capacidad. Calcular el flujo máximo que puede enviarse desde la fuente al sumidero, por enumeración de todos los posibles cortes que pueden establecerse en la red y determinación de la capacidad de cada uno de ellos.

**Solución de la cuestión 2.1. VERDADERO.** La función a estudiar es  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , siendo  $S = [0, 1]$  un conjunto no vacío y convexo. Sea  $a \in (0, 1)$  el único punto de discontinuidad de la función  $f(x)$ . Se puede observar que  $f(x)$  es estrictamente decreciente en  $[0, a)$  por lo que existe su función inversa en dicho intervalo. Aplicando el teorema 1.14 (Ramos, 2017: 54) podemos ver que la función  $f(x)$  es cuasiconvexa. En efecto, consideramos el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in S \mid f(x) \leq \alpha\};$$

que como se puede ver en la figura 12, será de la forma

$$S_\alpha = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \alpha \leq \lim_{x \rightarrow a^-} f|_{[0,a]}^{-1}(x), \\ [f|_{[0,a]}^{-1}(\alpha), a) & \text{si } \lim_{x \rightarrow a^-} f|_{[0,a]}^{-1}(x) < \alpha < f(a), \\ [f|_{[0,a]}^{-1}(\alpha), 1] & \text{si } f(a) \leq \alpha < 1, \\ S = [0, 1] & \text{si } \alpha \geq 1; \end{cases}$$

y para cualquier valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un conjunto convexo, y en consecuencia  $f(x)$  es una función cuasiconvexa.

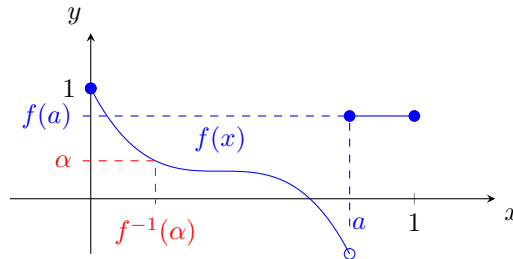


Figura 12: Gráfica de la función  $f(x)$ .

**Solución de la cuestión 2.2. VERDADERO.** Ejemplo 2.32 (Ramos, 2017: 229). El grafo  $G$  dado tiene  $n = 4$  vértices,  $m = 6$  arcos y  $p = 1$  componente conexa. Según el teorema 2.2 (Ramos, 2017: 230), la cardinalidad de la base de cociclos es

$$\lambda(G) = n - p = 4 - 1 = 3.$$

**Solución del problema 2.1.**

(a) El mínimo buscado estará entre los puntos de la forma

$$(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = (0, 1) + \frac{\lambda}{\sqrt{5}}(1, 2), \quad \lambda \in [0, 1] \implies \begin{cases} x_1(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{5}}, \\ x_2(\lambda) = 1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{5}}, \end{cases} \quad \lambda \in [0, 1].$$

Sustituimos y obtenemos la función  $\theta(\lambda)$  a minimizar.

$$\theta(\lambda) = f(x_1(\lambda), x_2(\lambda)) = \left( \left( 1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{5}} \right)^2 - \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \right)^2 - \sqrt{1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{5}}} = \left( \frac{4}{5}\lambda^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}\lambda + 1 \right)^2 - \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\lambda}.$$

Así, el problema planteado es:

$$\text{Minimizar} \quad \theta(\lambda) = \left( \frac{4}{5}\lambda^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}\lambda + 1 \right)^2 - \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\lambda},$$

$$\text{Sujeto a} \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Y hay que tener en cuenta que la función  $\theta$  así definida es estrictamente cuasiconvexa en el intervalo  $[0, 1]$  (se puede ver que su segunda derivada es estrictamente positiva en dicho intervalo).

(b) En cada iteración realizada la longitud del intervalo se multiplica por el factor

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi - 1 \simeq 0,618.$$

Si el intervalo inicial de incertidumbre es  $[a_1, b_1]$ , tras realizar  $n$  iteraciones tendremos un intervalo de longitud

$$\alpha^n(b_1 - a_1).$$

Y si queremos que esa longitud sea menor o igual que un valor  $\ell > 0$ ,

$$\alpha^n(b_1 - a_1) \leq \ell \implies \alpha^n \leq \frac{\ell}{b_1 - a_1} \implies n \log \alpha \leq \log \frac{\ell}{b_1 - a_1} \implies n \geq \frac{\log \ell - \log(b_1 - a_1)}{\log \alpha}.$$

En nuestro caso queremos que

$$\ell = \frac{15}{100}(b_1 - a_1) = \frac{15}{100}(1 - 0) = 0,15;$$

y entonces

$$n \geq \frac{\log \ell - \log(b_1 - a_1)}{\log \alpha} = n \geq \frac{\log \frac{15}{100}(b_1 - a_1) - \log(b_1 - a_1)}{\log \alpha} \simeq \frac{\log 0,15}{\log 0,618} \simeq 3,942; .$$

y habrá que realizar al menos  $n = 4$  iteraciones.

(c) Paso inicial.

$$\lambda_1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1) \simeq 0 + (1 - 0,618)(1 - 0) = 0,382;$$

$$\mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1) = 0 + 0,618(1 - 0) = 0,618;$$

$$\theta(\lambda_1) \simeq \theta(0,382) \simeq 1,496;$$

$$\theta(\mu_1) \simeq \theta(0,618) \simeq 3,311.$$

Paso principal,  $k = 1$ ,  $\theta(\lambda_1) \leq \theta(\mu_1)$ .

$$a_2 = a_1 = 0; \quad \mu_2 = \lambda_1 \simeq 0,382;$$

$$b_2 = \mu_1 \simeq 0,618; \quad \lambda_2 = a_2 + (1 - \alpha)(b_2 - a_2) \simeq 0 + (1 - 0,618)(0,618 - 0) \simeq 0,236;$$

$$\theta(\lambda_2) \simeq \theta(0,236) \simeq 0,753;$$

$$\theta(\mu_2) = \theta(\lambda_1) \simeq 1,496.$$

Paso principal,  $k = 2$ ,  $\theta(\lambda_2) \leq \theta(\mu_2)$ .

$$a_3 = a_2 = 0; \quad \mu_3 = \lambda_2 \simeq 0,236;$$

$$b_3 = \mu_2 \simeq 0,382; \quad \lambda_3 = a_3 + (1 - \alpha)(b_3 - a_3) \simeq 0 + (1 - 0,618)(0,382 - 0) \simeq 0,146;$$

$$\theta(\lambda_3) \simeq \theta(0,146) \simeq 0,408;$$

$$\theta(\mu_3) = \theta(\lambda_2) \simeq 0,753.$$

Paso principal,  $k = 3$ ,  $\theta(\lambda_3) \leq \theta(\mu_3)$ .

$$a_4 = a_3 = 0; \quad \mu_4 = \lambda_3 \simeq 0,146;$$

$$b_4 = \mu_3 \simeq 0,236; \quad \lambda_4 = a_4 + (1 - \alpha)(b_4 - a_4) \simeq 0 + (1 - 0,618)(0,236 - 0) \simeq 0,090;$$

$$\theta(\lambda_4) \simeq \theta(0,090) \simeq 0,232;$$

$$\theta(\mu_4) = \theta(\lambda_3) \simeq 0,408.$$

Paso principal,  $k = 4$ ,  $\theta(\lambda_4) \leq \theta(\mu_4)$ .

$$a_5 = a_4 = 0; \quad b_5 = \mu_4 \simeq 0,146;$$

y como

$$b_5 - a_5 \simeq 0,146 - 0 = 0,146 < 0,15 = \ell;$$

hemos terminado la búsqueda (cosa que ya sabíamos puesto que hemos realizado las  $n = 4$  iteraciones previstas). Los resultados obtenidos se resumen en el cuadro 3.

$k$	$a_k$	$b_k$	$\lambda_k$	$\mu_k$	$\theta(\lambda_k)$	$\theta(\mu_k)$
1	0,000	1,000	0,382	0,618	1,496	3,311
2	0,000	0,618	0,236	0,382	0,753	1,496
3	0,000	0,382	0,146	0,236	0,408	0,753
4	0,000	0,236	0,090	0,146	0,232	0,408
5	0,000	0,146				

Cuadro 3: Iteraciones del método de la sección áurea.

(d) La aproximación obtenida, si tomamos el punto medio del último intervalo hallado es

$$\bar{\lambda} \simeq \frac{0 + 0,146}{2} \simeq 0,0729.$$

Para ese valor de  $\lambda$ , el punto en el que la función  $f$  presenta el mínimo será  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , con

$$\bar{x}_1 = x_1(\bar{\lambda}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\bar{\lambda} \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}0,0729 \simeq 0,0326;$$

$$\bar{x}_2 = x_2(\bar{\lambda}) = 1 + 2\frac{2}{\sqrt{5}}\bar{\lambda} \simeq 1 + \frac{2}{\sqrt{5}}0,0729 \simeq 1,065;$$

y en dicho punto la función toma el valor

$$f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \theta(\bar{\lambda}) \simeq 0,183.$$

Es fácil comprobar que la función  $\theta$ , que tiene derivada positiva en el intervalo  $[0, 1]$  presenta su mínimo en  $x = 0$ .

**Solución del problema 2.2.** Consideramos todos los cortes simples que dejan a la fuente (vértice 1) en una de las componentes conexas,  $X_1$ , y al sumidero (vértice 8) en la otra,  $X_8$ . Cada arco del corte es tal que

- (a) O bien tiene su vértice inicial en  $X_1$  y su vértice final en  $X_8$ ,
- (b) O bien tiene su vértice inicial en  $X_8$  y su vértice final en  $X_1$ .

La capacidad de cada corte es, según la definición 2.85 (Ramos, 2017: 300), la suma de las capacidades de los arcos que cumplen la propiedad (a).

Los posibles cortes que cumplen estas propiedades junto con sus capacidades se recogen en el cuadro 4, y entonces podemos aplicar la proposición 2.13 (Ramos, 2017: 301) y sabemos que el flujo máximo será menor o igual al mínimo de la capacidad de los cortes realizados, y será por tanto de 14 unidades como máximo.

Corte	$X_1$	$X_8$	Capacidad
$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4)\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$7 + 5 + 9 = 21$
$\{(1, 3), (1, 4), (2, 5), (2, 6)\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$5 + 9 + 9 + 4 = 27$
$\{(1, 2), (1, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 3)\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4, 5, 6, 7, 8\}$	$7 + 9 + 9 + 4 + 4 + 0 = 33$
$\{(1, 2), (1, 3), (4, 3), (4, 7)\}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$	$7 + 5 + 3 + 8 = 23$
$\{(1, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 3)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6, 7, 8\}$	$9 + 9 + 4 + 4 + 0 = 26$
$\{(1, 3), (2, 5), (2, 6), (4, 3), (4, 7)\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{3, 5, 6, 7, 8\}$	$5 + 9 + 4 + 0 + 8 = 26$
$\{(1, 3), (1, 4), (2, 6), (5, 8)\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{3, 4, 6, 7, 8\}$	$5 + 9 + 4 + 5 = 23$
$\{(1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 6), (6, 8)\}$	$\{1, 2, 6\}$	$\{3, 4, 5, 7, 8\}$	$5 + 9 + 9 + 0 + 6 = 29$
$\{(1, 2), (3, 6), (4, 7)\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{2, 5, 6, 7, 8\}$	$7 + 4 + 8 = 19$
$\{(1, 2), (1, 4), (2, 6), (4, 3), (6, 8)\}$	$\{1, 3, 6\}$	$\{2, 4, 5, 7, 8\}$	$7 + 9 + 0 + 0 + 6 = 22$
$\{(1, 2), (1, 3), (4, 3), (7, 5), (7, 8)\}$	$\{1, 4, 7\}$	$\{2, 3, 5, 6, 8\}$	$7 + 5 + 3 + 8 + 3 = 26$
$\{(2, 5), (2, 6), (3, 6), (4, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5, 6, 7, 8\}$	$9 + 4 + 4 + 8 = 25$
$\{(1, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 3), (5, 8), (7, 5)\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{4, 6, 7, 8\}$	$9 + 4 + 4 + 0 + 5 + 0 = 22$
$\{(1, 4), (2, 5), (4, 3), (6, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 6\}$	$\{4, 5, 7, 8\}$	$9 + 9 + 0 + 6 = 24$
$\{(1, 3), (2, 6), (4, 3), (4, 7), (5, 8), (7, 5)\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{3, 6, 7, 8\}$	$5 + 4 + 3 + 8 + 5 + 0 = 25$
$\{(1, 3), (2, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 7), (6, 8)\}$	$\{1, 2, 4, 6\}$	$\{3, 5, 7, 8\}$	$5 + 9 + 0 + 3 + 8 + 6 = 31$
$\{(1, 3), (2, 5), (2, 6), (4, 3), (7, 5), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 4, 7\}$	$\{3, 5, 6, 8\}$	$5 + 9 + 4 + 3 + 8 + 3 = 28$
$\{(1, 3), (1, 4), (3, 6), (5, 8), (6, 8), (7, 5)\}$	$\{1, 2, 5, 6\}$	$\{3, 4, 7, 8\}$	$5 + 9 + 0 + 5 + 6 + 0 = 25$
$\{(1, 3), (1, 4), (2, 6), (4, 7), (5, 8), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 5, 7\}$	$\{3, 4, 6, 8\}$	$5 + 9 + 4 + 0 + 5 + 3 = 26$
$\{(1, 2), (2, 6), (4, 7), (6, 8)\}$	$\{1, 3, 4, 6\}$	$\{2, 5, 7, 8\}$	$7 + 0 + 8 + 6 = 21$
$\{(1, 2), (3, 4), (4, 7)\}$	$\{1, 3, 4, 7\}$	$\{2, 5, 6, 8\}$	$7 + 4 + 8 = 19$
$\{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (4, 3), (5, 8), (7, 8)\}$	$\{1, 4, 5, 7\}$	$\{2, 3, 6, 8\}$	$7 + 5 + 0 + 3 + 5 + 3 = 23$
$\{(2, 6), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (7, 5)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{6, 7, 8\}$	$9 + 4 + 8 + 5 + 0 = 26$
$\{(2, 9), (4, 7), (6, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 6\}$	$\{5, 7, 8\}$	$9 + 8 + 6 = 23$
$\{(2, 5), (2, 6), (3, 6), (7, 5), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 7\}$	$\{5, 6, 8\}$	$9 + 4 + 4 + 8 + 3 = 28$
$\{(1, 4), (4, 3), (5, 8), (6, 8), (7, 5)\}$	$\{1, 2, 3, 5, 6\}$	$\{4, 7, 8\}$	$9 + 0 + 5 + 6 + 0 = 20$
$\{(1, 4), (2, 6), (3, 6), (4, 3), (5, 8), (4, 7), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 5, 7\}$	$\{4, 6, 8\}$	$9 + 4 + 4 + 0 + 5 + 0 + 3 = 25$
$\{(1, 3), (3, 6), (4, 3), (4, 7), (5, 8), (6, 8), (7, 5)\}$	$\{1, 2, 4, 5, 6\}$	$\{3, 7, 8\}$	$5 + 0 + 3 + 8 + 5 + 6 + 0 = 27$
$\{(1, 3), (2, 6), (4, 3), (5, 8), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 4, 5, 7\}$	$\{3, 6, 8\}$	$5 + 4 + 3 + 5 + 3 = 20$
$\{(1, 3), (1, 4), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 8), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 5, 6, 7\}$	$\{3, 4, 8\}$	$5 + 9 + 0 + 0 + 5 + 6 + 3 = 28$
$\{(1, 2), (2, 5), (3, 6), (5, 8), (7, 8)\}$	$\{1, 3, 4, 5, 7\}$	$\{2, 6, 8\}$	$7 + 9 + 4 + 5 + 3 = 28$
$\{(4, 7), (5, 8), (6, 8), (7, 5)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{7, 8\}$	$8 + 5 + 6 + 0 = 19$
$\{(2, 6), (3, 6), (5, 8), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$	$\{6, 8\}$	$4 + 4 + 5 + 3 = 16$
$\{(2, 5), (6, 8), (7, 5), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$	$\{5, 8\}$	$9 + 6 + 8 + 3 = 26$
$\{(5, 8), (6, 8), (7, 8)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	$\{8\}$	$5 + 6 + 3 = 14$

Cuadro 4: Cortes para el problema 2.2.

## SEPTIEMBRE DE 2013 – CONVOCATORIA ORDINARIA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 3.1.** Si  $f$  es una función estrictamente cuasiconvexa y diferenciable entonces es también pseudoconvexa.

**Cuestión 3.2.** La función

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$$

puede utilizarse como función barrera para resolver, mediante el algoritmo de la función barrera, el problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x), \\ \text{Sujeto a} & g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m; \end{array}$$

resultando la función auxiliar  $f(x) + \mu B(x)$ , siendo  $\mu > 0$  un parámetro de penalización.

**Problema 3.1.** Consideremos el problema de encontrar un punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  perteneciente al conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y + x^2 \leq 0; y - x \leq 0\}$$

que menos diste del punto  $(2, 1)$ .

- (a) Plantear un problema de programación no lineal cuya solución óptima sea el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  buscado.
- (b) Representarlo gráficamente.
- (c) Resolverlo utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- (d) Interpretar gráficamente las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

**Problema 3.2.** Una compañía desea determinar la mejor política, durante un ciclo de cinco años, para la adquisición, mantenimiento y reemplazamiento de una determinada máquina que emplea en su actividad empresarial. El coste de compra de una máquina nueva es de 12 000 euros, precio que se considera que se va mantener a lo largo del ciclo. Los costes de mantenimiento y el precio de venta de la máquina en el mercado de segunda mano dependen de los años de uso y vienen recogidos en la tabla siguiente.

Años de uso	Costes de mantenimiento (euros)	Precio venta segunda mano (euros)
0	2 000	—
1	4 000	7 000
2	5 000	6 000
3	9 000	2 000
4	12 000	1 000

La decisión de comprar una máquina nueva o mantener la máquina existente se toma al comienzo de cada año.

- (a) Plantear un modelo de camino mínimo en un grafo para determinar la política óptima de adquisición, mantenimiento y reemplazamiento, a lo largo del ciclo de cinco años.

(b) Resolver el modelo mediante el algoritmo de Dijkstra.

(c) Interpretar la solución.

**Solución de la cuestión 3.1. FALSO.** Consideremos por ejemplo la función  $f(x) = x^3$  definida en el intervalo convexo y no vacío  $(-2, 2)$ , que es diferenciable y estrictamente creciente en dicho intervalo. Sean  $x_1, x_2 \in (-2, 2)$ , con  $x_1 < x_2$ , y sea  $\lambda \in (0, 1)$ . Entonces,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^3 < (\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2)^3 = x_2^3 = f(x_2) = \max \{f(x_1), f(x_2)\};$$

por lo que  $f(x)$  es estrictamente cuasiconvexa. Sin embargo,  $f(x)$  no es pseudoconvexa, puesto que tiene un punto de inflexión,  $x = 0$  en el intervalo  $(-2, 2)$ . En efecto, se tiene que

$$-1 = (-1)^3 = f(-1) < f(0) = 0^3 = 0, \quad f'(0)(-1 - 0) = 0;$$

que claramente no cumple con la definición 1.22 (Ramos, 2017: 63) de función pseudoconvexa.

**Solución de la cuestión 3.2. FALSO.** Según la definición 1.51 (Ramos, 2017: 184), una función barrera para el problema primal dado ha de ser de la forma

$$B(x) = \sum_{i=1}^m \phi(g_i(x)),$$

siendo  $\phi$  una función de una variable continua en el conjunto  $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$  y verificando

$$\forall y < 0 : \phi(y) \geq 0, \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \phi(y) = \infty.$$

En nuestro caso

$$\phi(y) = \frac{1}{y},$$

que no verifica la primera propiedad propuesta,

$$\phi(-1) = \frac{1}{-1} = -1 < 0.$$

**Solución del problema 3.1.**

(a) El problema de programación no lineal que se plantea para encontrar el punto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , punto del conjunto  $S$  más cercano al punto  $(2, 1)$ , es:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_1(x, y) = \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2}, \\ \text{Sujeto a} \quad & g_1(x, y) = -y + x^2 \leq 0, \\ & g_2(x, y) = y - x \leq 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente, y por facilidad, también podemos plantear el problema de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_2(x, y) = (x - 2)^2 + (y - 1)^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & g_1(x, y) = -y + x^2 \leq 0, \\ & g_2(x, y) = y - x \leq 0. \end{aligned}$$

Consultando la representación gráfica que da en el siguiente apartado en la figura 13, se puede apreciar que el mínimo buscado es el punto  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ .

- (b) Para la representación gráfica del problema dado en el apartado anterior dibujamos las curvas  $y = x^2$  e  $y = x$ , así como el recinto delimitado por ambas (el conjunto  $S$ , que en este caso es la región factible del problema). Se dibuja también el punto  $(2, 1)$  desde el cual se quiere minimizar la distancia. Con todo ello obtenemos la figura 13.

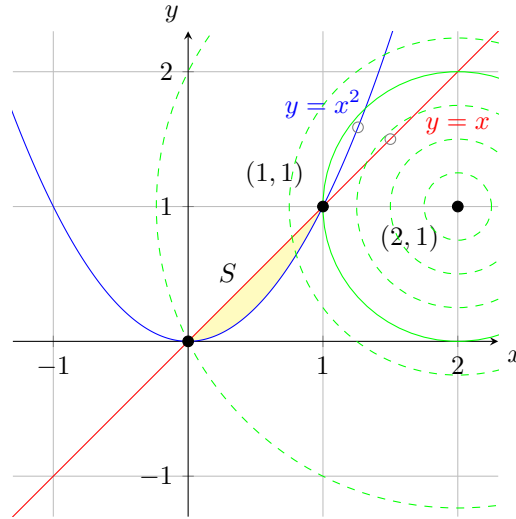


Figura 13: Representación gráfica del problema 3.1.

- (c) Las funciones  $f_2$ ,  $g_1$  y  $g_2$  son diferenciables en  $\mathbb{R}^2$ , y en particular lo serán tanto en el conjunto  $S$  como en el punto  $(1, 1)$  solución del problema. Además, los gradientes de las funciones  $g_1$  y  $g_2$  son,

$$\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

y son independientes en el punto óptimo (en realidad lo son en cualquier punto tal que  $x \neq \frac{1}{2}$ ). Con todo lo anterior, las condiciones KKT para el problema son

$$\begin{aligned} \nabla f_2(\bar{x}, \bar{y}) + \mu_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}) + \mu_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y}) &= 0, \\ \mu_1 g_1(\bar{x}, \bar{y}) &= 0, \\ \mu_2 g_2(\bar{x}, \bar{y}) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Operando,

$$\begin{aligned} 2(x - 2) + 2\mu_1 x - \mu_2 &= 0; \\ 2(y - 1) - \mu_1 + \mu_2 &= 0; \\ \mu_1(-y + x^2) &= 0; \\ \mu_2(y - x) &= 0; \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema empezando, por ejemplo, por la última ecuación. Para que esta se satisfaga hay dos posibilidades, que estudiamos por separado:

- $\mu_2 = 0$ . En ese caso, el resto de las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 2(x - 2) + 2\mu_1 x &= 0; \\ 2(y - 1) - \mu_1 &= 0; \\ \mu_1(-y + x^2) &= 0; \\ \mu_1 &\geq 0. \end{aligned}$$



De las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$2(y-1)(-y+x^2)=0 \implies \begin{cases} y=1, \\ y=x^2. \end{cases}$$

Si  $y=1$  inmediatamente obtenemos  $\mu_1=0$  y  $x=2$ . Pero el punto  $(2,1)$  no es un punto de la región factible, por lo que se descarta. Si  $y=x^2$ , de la segunda ecuación podemos deducir

$$\mu_1 = 2(x^2 - 1),$$

lo que llevado a la primera nos deja la ecuación

$$2(x-2) + 2(x^2-1)x = 0 \implies x^3 - 2 = 0 \implies x = \sqrt[3]{2} \implies \begin{cases} y = \sqrt[3]{4}, \\ \mu_1 = 2(\sqrt[3]{4} - 1). \end{cases}$$

Una vez más, el punto  $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$  no está en la región factible, por lo que también se descarta. En conclusión, no hay ninguna solución válida con  $\mu_2=0$ .

- $y=x$ . En ese caso, el resto de las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 2(x-2) + 2\mu_1 x - \mu_2 &= 0; \\ 2(x-1) - \mu_1 + \mu_2 &= 0; \\ \mu_1(-x+x^2) &= 0; \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Factorizando la última ecuación,

$$\mu_1 x(x-1) = 0 \implies \begin{cases} \mu_1 = 0, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{cases}$$

Si  $\mu_1=0$ , sustituimos en las dos primeras ecuaciones, lo que nos lleva a

$$\left. \begin{aligned} 2(x-2) - \mu_2 &= 0 \\ 2(x-1) + \mu_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies 2(x-2) + 2(x-1) = 0 \implies x = y = \frac{3}{2}.$$

Una vez más obtenemos un punto fuera de la región factible.

Si  $x=y=0$  entonces  $\mu_1=-6$  y  $\mu_2=-4$ . Se obtiene una solución que tampoco es válida por ser  $\mu_1$  y  $\mu_2$  negativos (y que coincide con el máximo de la función  $f_2$  con las restricciones del problema).

Por último, si  $x=y=1$  y  $\mu_1=\mu_2=2$ , se obtiene el punto  $(1,1)$ . Este punto es el mínimo de la función  $f_2$ , sujeta a las restricciones dadas, como ya sabíamos de antemano.

- (d) En la figura 14 se representan los vectores

$$-\nabla f_2(1,1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 \nabla g_1(1,1) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 \nabla g_2(1,1) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

lo que permite ver gráficamente que se satisface la ecuación

$$\nabla f_2(\bar{x}, \bar{y}) + \mu_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}) + \mu_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y}) = \mathbf{0}.$$

También es evidentemente que se satisfacen las restricciones de holgura, puesto que el punto óptimo es un punto de corte de las curvas  $g_1(x,y)=0$  y  $g_2(x,y)=0$ , y entonces

$$\mu_1 g_1(\bar{x}, \bar{y}) = \mu_2 g_2(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

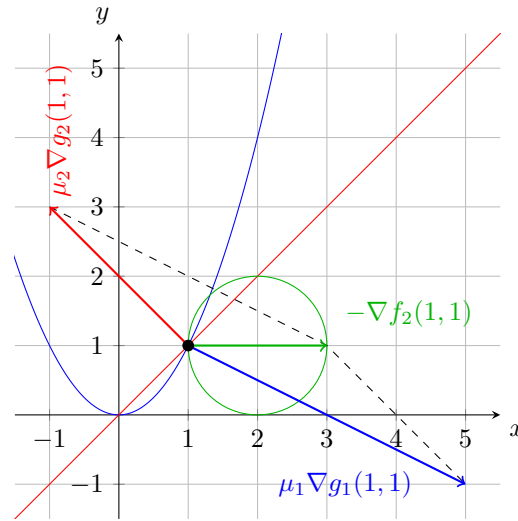


Figura 14: Interpretación gráfica de las condiciones KKT para el problema 3.1.

**Solución del problema 3.2.**

- (a) En primer lugar completamos la tabla de costes de mantenimiento y reemplazamiento, en la que se calculan los costes totales el año en que cambiamos la máquina (coste de compra menos el precio de venta de segunda mano más coste de mantenimiento). Los resultados se recogen en el cuadro 5.

Años de uso	Costes de mantenimiento	Precio venta segunda mano	Costes tras renovación
0	2	—	$12 - 0 + 2 = 14$
1	4	7	$12 - 7 + 2 = 7$
2	5	6	$12 - 6 + 2 = 8$
3	9	2	$12 - 2 + 2 = 12$
4	12	1	$12 - 1 + 2 = 13$

Cuadro 5: Costes de mantenimiento y reemplazamiento en miles de euros.

A continuación llevamos los datos anteriores a un grafo. Para dibujarlo hay que tener en cuenta que a final de año siempre tenemos dos posibilidades: cambiar o no la máquina. En el grafo que se representa en la figura 15 los vértices están etiquetados como 0 (inicio del periodo de estudio), 5 (fin del periodo de estudio) y  $xCy$  (se llega al final del año  $x$  con una máquina cambiada al final de año  $y$ ). Por otra parte, un camino horizontal indica que se mantiene la máquina, mientras que un camino descendente indica un cambio de la máquina. La primera línea horizontal de nodos sigue un camino en el que no se reemplaza la máquina, la segunda indica que se produce un reemplazamiento al final del primer año, y así sucesivamente. Cada línea vertical de nodos indica las posibles situaciones al final de un año concreto del periodo de estudio.

El grafo propuesto se puede simplificar considerablemente. Se puede eliminar el vértice 0, del que solo surge un posible camino (los costes del primer año son fijos: compra de la máquina más el mantenimiento). También se pueden eliminar los caminos inferiores que parten de los vértices  $4Cy$  por ser más largos (al final del cuarto año siempre va a ser preferible mantener la máquina sea cual sea su edad que comprar una nueva). Con estas indicaciones podemos dibujar la figura 16.

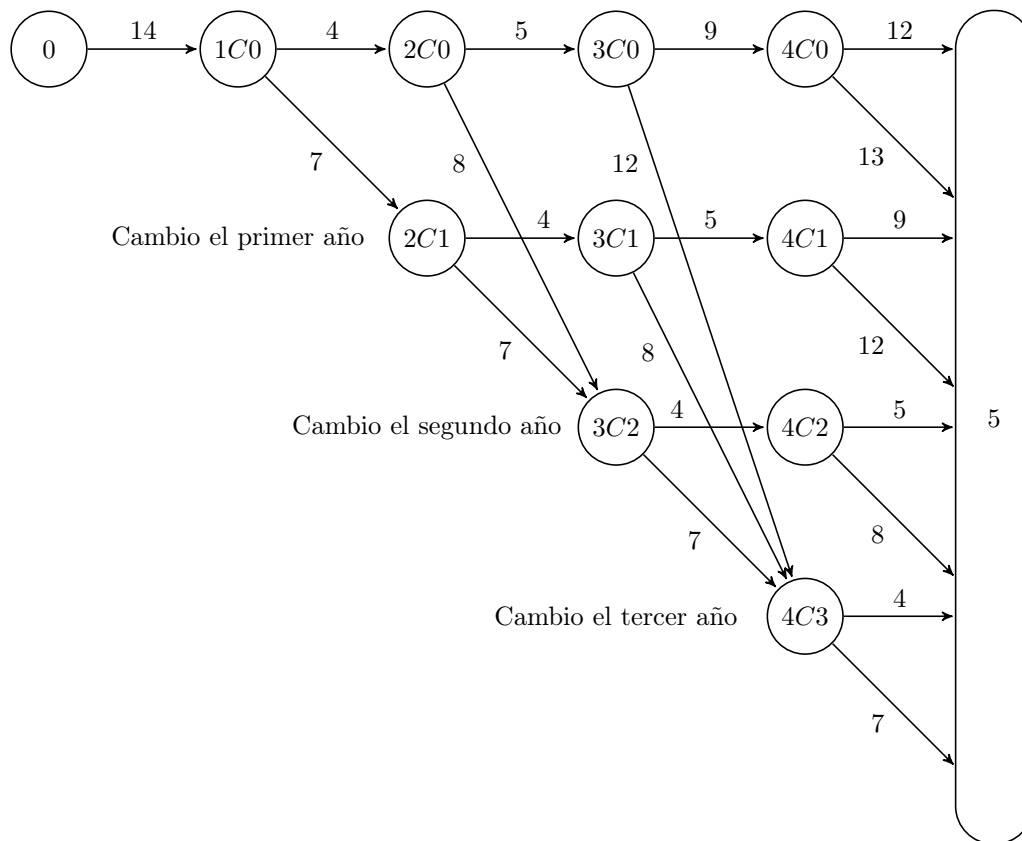


Figura 15: Grafo para el problema 3.2.

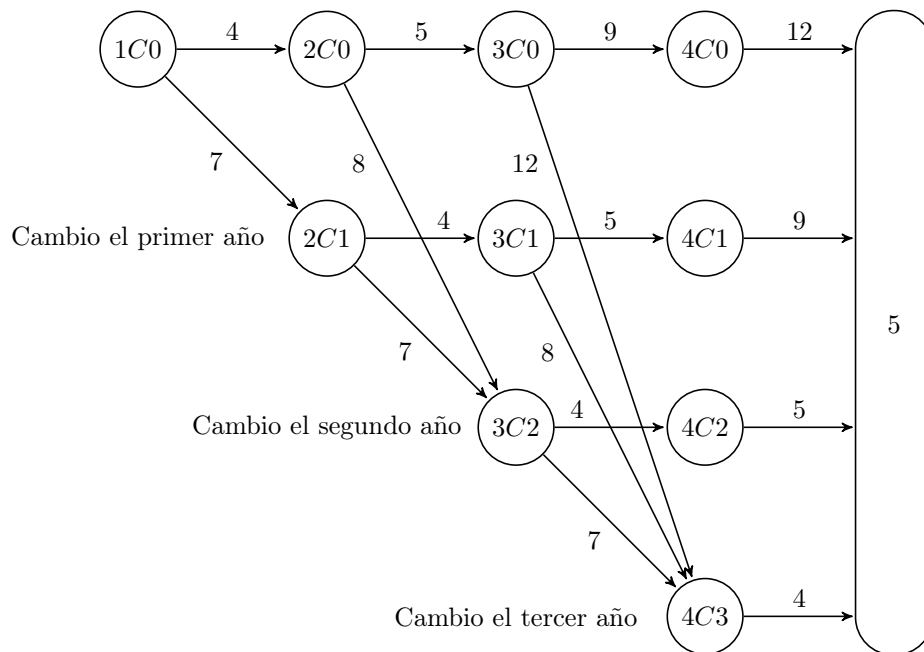


Figura 16: Grafo simplificado para el problema 3.2.

(b) Paso inicial. Hacemos  $d(1C0) = 0$  y  $d(x) = \infty$  para  $x \neq 1C0$ . Coloreamos el vértice  $1C0$ .

Primera iteración,  $y = 1C0$ .

$$\begin{aligned}
 d(2C0) &= \min \{d(2C0), d(1C0) + a(1C0, 2C0)\} = \min \{\infty, 0 + 4\} = 4; \\
 d(3C0) &= \min \{d(3C0), d(1C0) + a(1C0, 3C0)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(1C0) + a(1C0, 4C0)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty; \\
 d(2C1) &= \min \{d(2C1), d(1C0) + a(1C0, 2C1)\} = \min \{\infty, 0 + 7\} = 7; \\
 d(3C1) &= \min \{d(3C1), d(1C0) + a(1C0, 3C1)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C1) &= \min \{d(4C1), d(1C0) + a(1C0, 4C1)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty; \\
 d(3C2) &= \min \{d(3C2), d(1C0) + a(1C0, 3C2)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C2) &= \min \{d(4C2), d(1C0) + a(1C0, 4C2)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(1C0) + a(1C0, 4C3)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(1C0) + a(1C0, 5)\} = \min \{\infty, 0 + \infty\} = \infty.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $2C0$ . El resultado se representa en la figura 17.

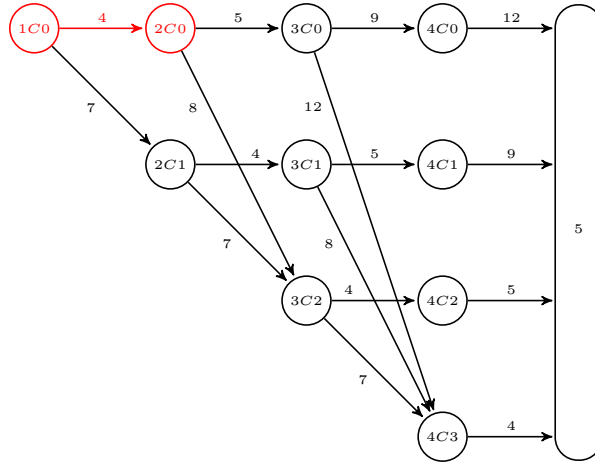


Figura 17: Grafo para el problema 3.2 tras la primera iteración.

Segunda iteración,  $y = 2C0$ .

$$\begin{aligned}
 d(3C0) &= \min \{d(3C0), d(2C0) + a(2C0, 3C0)\} = \min \{\infty, 4 + 5\} = 9; \\
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(2C0) + a(2C0, 4C0)\} = \min \{\infty, 4 + \infty\} = \infty; \\
 d(2C1) &= \min \{d(2C1), d(2C0) + a(2C0, 2C1)\} = \min \{7, 4 + \infty\} = 7; \\
 d(3C1) &= \min \{d(3C1), d(2C0) + a(2C0, 3C1)\} = \min \{\infty, 4 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C1) &= \min \{d(4C1), d(2C0) + a(2C0, 4C1)\} = \min \{\infty, 4 + \infty\} = \infty; \\
 d(3C2) &= \min \{d(3C2), d(2C0) + a(2C0, 3C2)\} = \min \{\infty, 4 + 8\} = 12; \\
 d(4C2) &= \min \{d(4C2), d(2C0) + a(2C0, 4C2)\} = \min \{\infty, 4 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(2C0) + a(2C0, 4C3)\} = \min \{\infty, 4 + \infty\} = \infty; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(2C0) + a(2C0, 5)\} = \min \{\infty, 4 + \infty\} = \infty.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $2C1$ . El resultado se representa en la figura 18.

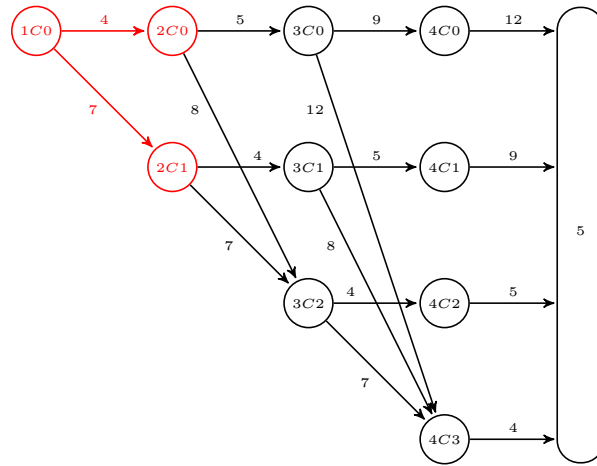


Figura 18: Grafo para el problema 3.2 tras la segunda iteración.

Tercera iteración,  $y = 2C1$ .

$$\begin{aligned}
 d(3C0) &= \min \{d(3C0), d(2C1) + a(2C1, 3C0)\} = \min \{9, 7 + \infty\} = 9; \\
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(2C1) + a(2C1, 4C0)\} = \min \{\infty, 7 + \infty\} = \infty; \\
 d(3C1) &= \min \{d(3C1), d(2C1) + a(2C1, 3C1)\} = \min \{\infty, 7 + 4\} = 11; \\
 d(4C1) &= \min \{d(4C1), d(2C1) + a(2C1, 4C1)\} = \min \{\infty, 7 + \infty\} = \infty; \\
 d(3C2) &= \min \{d(3C2), d(2C1) + a(2C1, 3C2)\} = \min \{12, 7 + 7\} = 12; \\
 d(4C2) &= \min \{d(4C2), d(2C1) + a(2C1, 4C2)\} = \min \{\infty, 7 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(2C1) + a(2C1, 4C3)\} = \min \{\infty, 7 + \infty\} = \infty; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(2C1) + a(2C1, 5)\} = \min \{\infty, 7 + \infty\} = \infty.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $3C0$ . El resultado se representa en la figura 19.

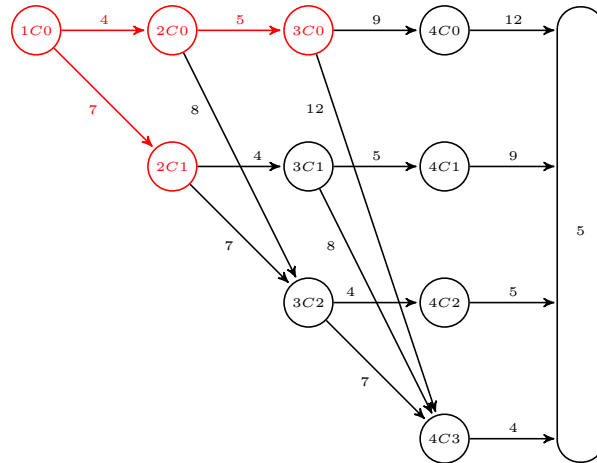


Figura 19: Grafo para el problema 3.2 tras la tercera iteración.

Cuarta iteración,  $y = 3C0$ .

$$\begin{aligned}
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(3C0) + a(3C0, 4C0)\} = \min \{\infty, 9 + 9\} = 18; \\
 d(3C1) &= \min \{d(3C1), d(3C0) + a(3C0, 3C1)\} = \min \{11, 9 + \infty\} = 11; \\
 d(4C1) &= \min \{d(4C1), d(3C0) + a(3C0, 4C1)\} = \min \{\infty, 9 + \infty\} = \infty; \\
 d(3C2) &= \min \{d(3C2), d(3C0) + a(3C0, 3C2)\} = \min \{12, 9 + \infty\} = 12; \\
 d(4C2) &= \min \{d(4C2), d(3C0) + a(3C0, 4C2)\} = \min \{\infty, 9 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(3C0) + a(3C0, 4C3)\} = \min \{\infty, 9 + 12\} = 21; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(3C0) + a(3C0, 5)\} = \min \{\infty, 9 + \infty\} = \infty.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $3C1$ . El resultado se representa en la figura 20.

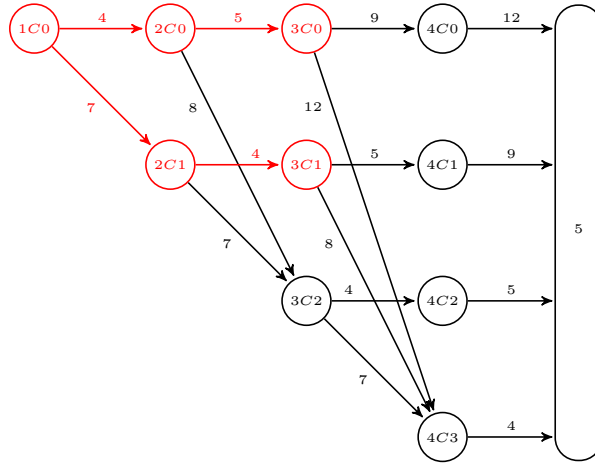


Figura 20: Grafo para el problema 3.2 tras la cuarta iteración.

Quinta iteración,  $y = 3C1$ .

$$\begin{aligned}
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(3C1) + a(3C1, 4C0)\} = \min \{18, 11 + \infty\} = 18; \\
 d(4C1) &= \min \{d(4C1), d(3C1) + a(3C1, 4C1)\} = \min \{\infty, 11 + 5\} = 16; \\
 d(3C2) &= \min \{d(3C2), d(3C1) + a(3C1, 3C2)\} = \min \{12, 11 + \infty\} = 12; \\
 d(4C2) &= \min \{d(4C2), d(3C1) + a(3C1, 4C2)\} = \min \{\infty, 11 + \infty\} = \infty; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(3C1) + a(3C1, 4C3)\} = \min \{21, 11 + 8\} = 19; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(3C1) + a(3C1, 5)\} = \min \{\infty, 11 + \infty\} = \infty.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $3C2$ . El resultado se representa en la figura 21.

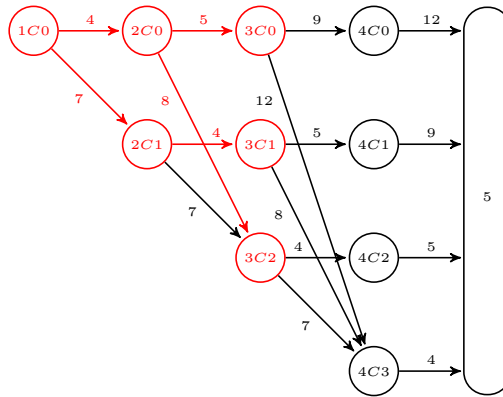


Figura 21: Grafo para el problema 3.2 tras la quinta iteración.

Sexta iteración,  $y = 3C2$ .

$$\begin{aligned}
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(3C2) + a(3C2, 4C0)\} = \min \{18, 12 + \infty\} = 18; \\
 d(4C1) &= \min \{d(4C1), d(3C2) + a(3C2, 4C1)\} = \min \{16, 12 + \infty\} = 16; \\
 d(4C2) &= \min \{d(4C2), d(3C2) + a(3C2, 4C2)\} = \min \{\infty, 12 + 4\} = 16; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(3C2) + a(3C2, 4C3)\} = \min \{21, 12 + 7\} = 19; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(3C2) + a(3C2, 5)\} = \min \{\infty, 12 + \infty\} = \infty.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $4C1$ . El resultado se representa en la figura 22.

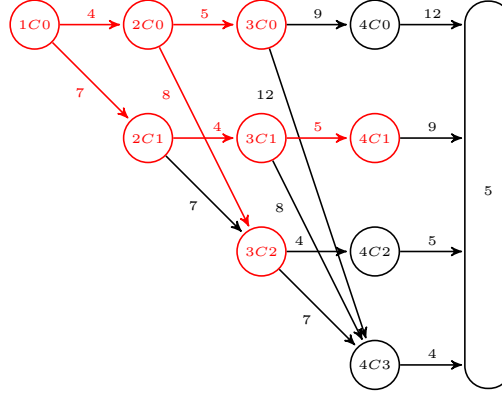


Figura 22: Grafo para el problema 3.2 tras la sexta iteración.

Séptima iteración,  $y = 4C1$ .

$$\begin{aligned}
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(4C1) + a(4C1, 4C0)\} = \min \{18, 16 + \infty\} = 18; \\
 d(4C2) &= \min \{d(4C2), d(4C1) + a(4C1, 4C2)\} = \min \{16, 16 + \infty\} = 16; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(4C1) + a(4C1, 4C3)\} = \min \{19, 16 + \infty\} = 19; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(4C1) + a(4C1, 5)\} = \min \{\infty, 16 + 9\} = 25.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $4C2$ . El resultado se representa en la figura 23.

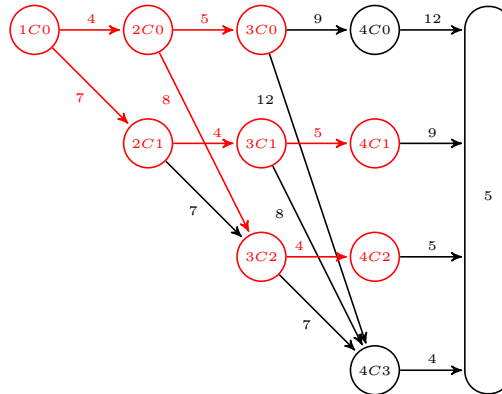


Figura 23: Grafo para el problema 3.2 tras la séptima iteración.

Octava iteración,  $y = 4C2$ .

$$\begin{aligned}
 d(4C0) &= \min \{d(4C0), d(4C2) + a(4C2, 4C0)\} = \min \{18, 16 + \infty\} = 18; \\
 d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(4C2) + a(4C2, 4C3)\} = \min \{19, 16 + \infty\} = 19; \\
 d(5) &= \min \{d(5), d(4C2) + a(4C2, 5)\} = \min \{25, 16 + 5\} = 21.
 \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $4C0$ . El resultado se representa en la figura 24.

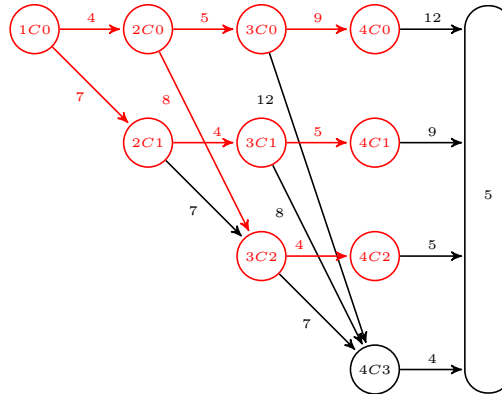


Figura 24: Grafo para el problema 3.2 tras la octava y ultima iteración.

Novena iteración,  $y = 4C0$ .

$$\begin{aligned} d(4C3) &= \min \{d(4C3), d(4C0) + a(4C0, 4C3)\} = \min \{19, 19 + \infty\} = 19; \\ d(5) &= \min \{d(5), d(4C0) + a(4C0, 5)\} = \min \{21, 19 + 12\} = 21. \end{aligned}$$

Se colorea el vértice  $4C3$ . El resultado se representa en la figura 25.

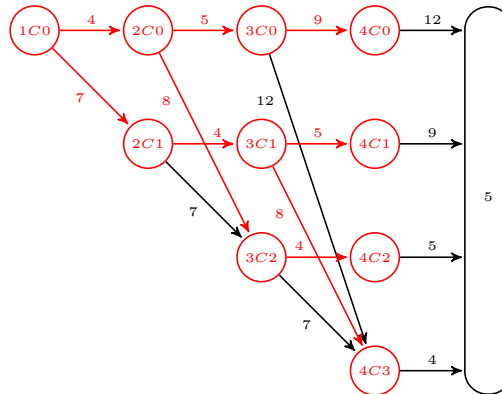


Figura 25: Grafo para el problema 3.2 tras la novena iteración.

Décima iteración,  $y = 4C3$ .

$$d(5) = \min \{d(5), d(4C3) + a(4C3, 5)\} = \min \{21, 19 + 4\} = 21.$$

Se colorea el vértice 5 y hemos terminado. El resultado se representa en la figura 26.

El camino más corto es que recorre los arcos  $(1C0, 2C0)$ ,  $(2C0, 3C2)$ ,  $(3C2, 4C2)$  y  $(4C2, 5)$ , con una longitud total de  $4 + 8 + 4 + 5 = 21$  unidades. En el cuadro 6 se resumen todas las iteraciones realizadas.



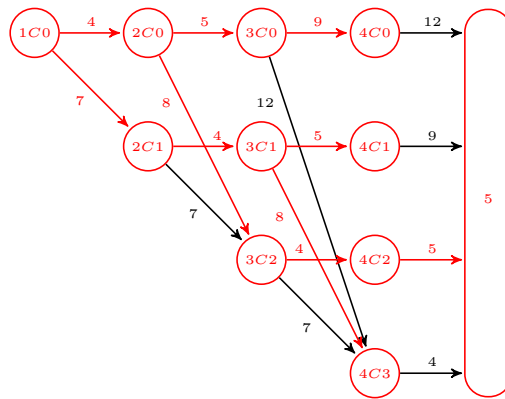


Figura 26: Grafo para el problema 3.2 tras la décima y última iteración.

Iteración	1	2	3	4	5
Distancia	0	4	7	9	11
Vértice	1C0	2C0	2C1	3C0	3C1
1C0	—	—	—	—	—
2C0	$4 + 0 = 4$	—	—	—	—
3C0	$\infty$	$5 + 4 = 9$	<b>9</b>	—	—
4C0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$9 + 9 = 18$	18
2C1	$7 + 0$	<b>7</b>	—	—	—
3C1	$\infty$	$\infty$	$4 + 7 = 11$	<b>11</b>	—
4C1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$5 + 11 = 16$
3C2	$\infty$	$8 + 4 = 12$	12	12	<b>12</b>
4C2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4C3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$12 + 9 = 21$	$8 + 11 = 19$
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

Iteración	6	7	8	9	10
Distancia	12	16	16	18	19
Vértice	3C2	4C1	4C2	4C0	4C3
4C0	18	18	<b>18</b>	—	—
4C1	<b>16</b>	—	—	—	—
4C2	$12 + 4 = 16$	<b>16</b>	—	—	—
4C3	19	19	19	<b>19</b>	—
5	$\infty$	$9 + 16 = 25$	$16 + 5 = 21$	21	<b>21</b>

Cuadro 6: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 3.2.

- (c) Volvemos a añadir el vértice 0 al grafo, y la solución obtenida se representa en la figura 27. La política óptima para la empresa es renovar la máquina solo al final del segundo año. En este caso tiene unos costes totales, de adquisición, mantenimiento y reemplazamiento de 35 000 euros.

$$14 + 4 + 8 + 4 + 5 = 35.$$

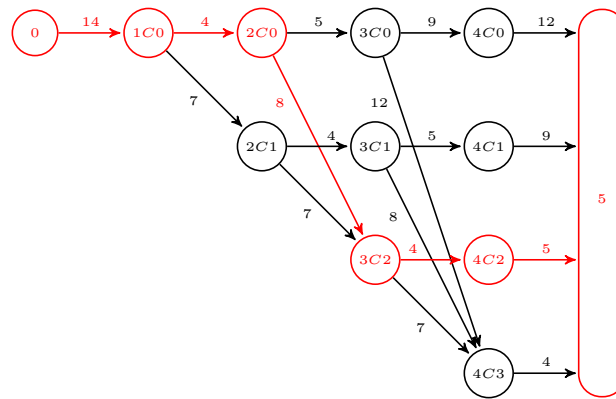


Figura 27: Solución del problema 3.2.

## SEPTIEMBRE DE 2013 – CONVOCATORIA DE RESERVA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 4.1.** En el método de búsqueda de Fibonacci la longitud del intervalo de incertidumbre se reduce en la iteración  $k$  de acuerdo con el factor

$$\frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}},$$

siendo  $n$  el número total de observaciones y  $\{F_i\}$  la sucesión de Fibonacci.

**Cuestión 4.2.** La función

$$P(x) = \sum_{i=1}^m \min \{0, g_i(x)\}$$

puede utilizarse como función penalidad exterior para resolver, mediante el método de las penalizaciones exteriores, el problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x), \\ &\text{Sujeto a} && g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

resultando la función auxiliar  $f(x) + \mu P(x)$ , siendo  $\mu > 0$  un parámetro de penalización.

**Problema 4.1.** Sea  $A$  una matriz  $n \times n$  simétrica<sup>1</sup> y definida positiva. Sea  $c \in \mathbb{R}^n$  un vector no nulo y  $b \in \mathbb{R}$ . Consideremos el problema de programación no lineal siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && f(x) = c^t x, \\ &\text{Sujeto a} && x^t A x \leq b. \end{aligned}$$

- (a) Resolverlo utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- (b) Representar gráficamente el problema e interpretar la solución óptima.
- (c) ¿Cómo varía el valor óptimo que toma la función objetivo frente a modificaciones del parámetro  $b$  del lado derecho de las restricciones?

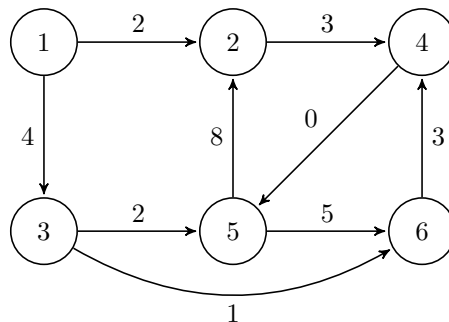


Figura 28: Grafo para el problema 4.2.

<sup>1</sup>Se han cambiado las dimensiones del problema original, que parecían no tener sentido.

**Problema 4.2.** Sea el grafo representado en la figura 28, donde los números sobre los arcos representan longitudes.

- Determinar mediante el algoritmo de Dijkstra el camino más corto desde el vértice a 1 a cualquier otro vértice del grafo, indicando la correspondiente longitud.
- Representar en el grafo la arborescencia de expansión de los caminos más cortos determinada por el algoritmo.

**Solución de la cuestión 4.1. VERDADERO.** En una iteración cualquiera partimos del intervalo de incertidumbre  $[a_k, b_k]$ , y se calculan los puntos

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k); \quad \mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k).$$

El nuevo intervalo de incertidumbre  $[b_{k+1}, a_{k+1}]$  será  $[a_k, \mu_k]$  si  $\theta(\lambda_k) > \theta(\mu_k)$ , o  $[\lambda_k, b_k]$  si  $\theta(\lambda_k) \leq \theta(\mu_k)$ . En cualquiera de los dos casos,

$$\begin{aligned} b_{k+1} - a_{k+1} &= b_k - \lambda_k = b_k - \left( a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \right) = \frac{F_{n-k+1} - F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k); \\ b_{k+1} - a_{k+1} &= \mu_k - a_k = \left( a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k) \right) - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}(b_k - a_k). \end{aligned}$$

**Solución de la cuestión 4.2. FALSO.** Según la definición 1.48 (Ramos, 2017: 174), una función de penalización exterior para el problema primal dado ha de ser de la forma

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^m \phi(g_i(x)),$$

siendo  $\phi$  una función de una variable continua en el conjunto  $\{y \in \mathbb{R} \mid y < 0\}$  y verificando

$$\forall y \leq 0 : \phi(y) = 0, \quad \forall y > 0 : \phi(y) > 0.$$

En nuestro caso

$$\phi(y) = \min\{0, y\},$$

que no verifica la primera propiedad propuesta,

$$\phi(-1) = \min\{0, -1\} = -1.$$

**Solución del problema 4.1.**

- La función  $f(x) = c^t x$  es diferenciable y convexa en  $\mathbb{R}^n$ , y por tanto también es pseudoconvexa. En efecto, sean  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in (0, 1)$ . Se tiene que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = c^t(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda c^t x + (1 - \lambda)c^t y = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

La función  $g(x) = x^t A x - b$  es diferenciable y convexa en  $\mathbb{R}^n$ , y por tanto también cuasiconvexa. En efecto, sean una vez más  $x, y \in \mathbb{R}^n$  y  $\lambda \in (0, 1)$ . Por ser  $A$  simétrica y definida positiva, se tiene que

$$\begin{aligned} g(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= g(y + \lambda(x - y)) = (y + \lambda(x - y))^t A (y + \lambda(x - y)) - b = \\ &= y^t A y + 2\lambda(x - y)^t A y + \lambda^2(x - y)^t A (x - y) - b \leq y^t A y + 2\lambda(x - y)^t A y + \lambda(x - y)^t A (x - y) - b = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y^t Ay + 2\lambda x^t Ay + 2\lambda y^t Ay + \lambda x^t Ax - 2\lambda x^t Ay + \lambda x^t Ax - b = \\
&= \lambda x^t Ax + (1 - \lambda)y^t Ay - \lambda b - (1 - \lambda)b = \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y).
\end{aligned}$$

Los gradientes de las funciones  $f$  y  $g$  son respectivamente

$$\nabla f = c, \quad \nabla g = (A + A^t)x = 2Ax.$$

Entonces las condiciones KKT del problema, que en este caso son condiciones suficientes, son

$$\begin{aligned}
\nabla f(x) + \mu \nabla g(x) &= 0, \\
\mu g(x) &= 0, \\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
c + 2\mu Ax &= 0, \\
\mu(x^t Ax - b) &= 0, \\
\mu &\geq 0.
\end{aligned}$$

Descartamos la posibilidad de que  $\mu = 0$  puesto que en ese caso solo se satisfaría la primera ecuación en el caso trivial  $c = 0$ . Por otra parte,  $A$  es definida positiva y por lo tanto admite inversa. Teniendo en cuenta lo dicho, y operando la primera ecuación,

$$x = -\frac{1}{2\mu}A^{-1}c.$$

Por ser  $A$  definida positiva sabemos que  $x^t Ax \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , y si además  $x^t Ax = 0$  la única solución sería  $x = 0$ . Suponemos, por tanto  $b > 0$  para que la segunda ecuación tenga solución distinta de la trivial, y sustituyendo del valor de  $x$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\mu(x^t Ax - b) = 0 &\implies x^t Ax - b = 0 \implies \left(-\frac{1}{2\mu}A^{-1}c\right)^t A \left(-\frac{1}{2\mu}A^{-1}c\right) - b = 0 \implies \\
&\implies \frac{1}{4\mu^2}c^t A^{-1}c - b = 0 \implies \mu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^t A^{-1}c}{b}}.
\end{aligned}$$

Entonces, el único punto que satisface las condiciones KKT es

$$\bar{x} = -\sqrt{\frac{b}{c^t A^{-1}c}}A^{-1}c,$$

y como ya se ha razonado es el mínimo global del problema dado.

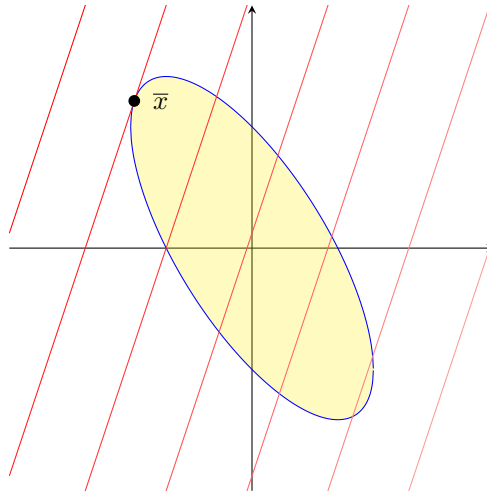


Figura 29: Resolución gráfica del problema 4.1.

(b) En la figura 28 se representa el problema dado. La región factible es la zona sombreada, y las curvas de nivel de la función  $f$  son las rectas paralelas representadas.

(c) Si el valor del parámetro  $b$  se multiplica por una constante  $k \geq 0$ , el nuevo punto óptimo será de la forma

$$\bar{x}' = -\sqrt{\frac{b'}{c^t A^{-1} c}} A^{-1} c = -\sqrt{\frac{kb}{c^t A^{-1} c}} A^{-1} c = \bar{x} \sqrt{k}.$$

En este caso, tanto la región factible como el óptimo se les aplica un factor de escala de valor  $\sqrt{k}$ . Y si  $k < 0$  ya se ha visto que obtenemos un problema sin solución, puesto que no hay ningún punto dentro de la región factible.

#### Solución del problema 4.2.

(a) Las iteraciones del algoritmo de Dijkstra se recogen en el cuadro 7, y el grafo coloreado resultado de efectuar dicho algoritmo se representa en la figura 30.

Iteración	1	2	3	4	5	Mínima distancia al vértice 1
Distancia	0	2	4	5	5	
Vértice	1	2	3	4	5	
1	—	—	—	—	—	—
2	$0 + 2 = \mathbf{2}$	—	—	—	—	2
3	$0 + 4 = 4$	<b>4</b>	—	—	—	4
4	$\infty$	$2 + 3 = 5$	<b>5</b>	—	—	5
5	$\infty$	$\infty$	$4 + 2 = 6$	$5 + 0 = \mathbf{5}$	—	5
6	$\infty$	$\infty$	$4 + 1 = 5$	5	<b>5</b>	5

Cuadro 7: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 4.2.

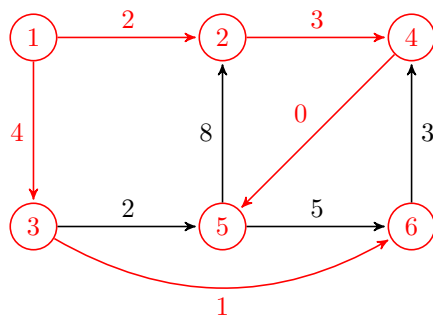


Figura 30: Grafo para el problema 4.2 tras la última iteración.

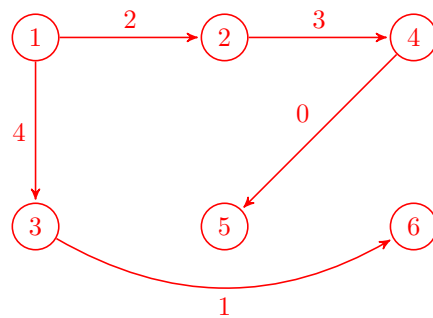


Figura 31: Arborescencia obtenida mediante el algoritmo de Dijkstra para el problema 4.2.

(b) La arborescencia pedida es la formada por los arcos coloreados de la figura 30. Por más claridad se representa de nuevo en la figura 31 eliminando los arcos no coloreados.

## MAYO DE 2014

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 5.1.** Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  una función estrictamente cuasiconvexa y diferenciable y sea  $\bar{x}$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) = 0$ . Entonces  $\bar{x}$  es necesariamente un mínimo global de  $f$ .

**Cuestión 5.2.** En el grafo representado en la figura 32, la sucesión de arcos  $\mu = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$  es un ciclo elemental.

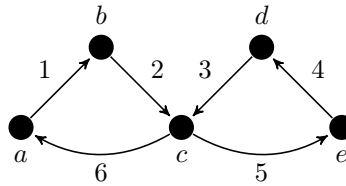


Figura 32: Grafo para la cuestión 5.2.

**Problema 5.1.** Consideremos el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && 2x_1 + 3x_2^2, \\ &\text{Sujeto a} && x_1^2 + 3x_2^2 \leq 4, \\ &&& x_1^2 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Encontrar la solución óptima global utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

**Problema 5.2.** Consideremos una red de flujo con seis vértices,  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  y  $v_6$ , donde la fuente es el vértice  $v_1$  y el sumidero es el vértice  $v_6$ . En la matriz  $C$  vienen dadas las capacidades  $c_{ij}$  de cada arco  $(v_i, v_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ , en donde  $c_{ij} = 0$  indica la ausencia en la red del arco  $(v_i, v_j)$ .

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

- Dibujar la red, indicando los vértices, arcos y capacidades.
- Encontrar el flujo máximo desde la fuente al sumidero mediante el algoritmo del flujo máximo.
- Identificar el corte mínimo y comprobar que el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

**Solución de la cuestión 5.1. FALSO.** Consideremos, por ejemplo, la función

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \rightarrow f(x, y) = x^3 \in \mathbb{R}^1.$$

Veamos que  $f$  es estrictamente cuasiconvexa. Sean  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^2$  de la forma  $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$  y  $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ , y con  $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2)$ .

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2) \implies x_1^3 < x_2^3 \implies x_1 < x_2.$$

Sea  $\lambda \in (0, 1)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{x}_2) &= f(\lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)(x_2, y_2)) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \\ &= (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)^3 < (\lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2)^3 = x_2^3 = f(\mathbf{x}_2) = \max \{f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, el gradiente de  $f$  en el punto  $\bar{\mathbf{x}} = (0, 0)$  es nulo

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

a pesar de que como se puede ver en la figura 33 dicho punto no es un mínimo de  $f$ , sino un punto de silla.

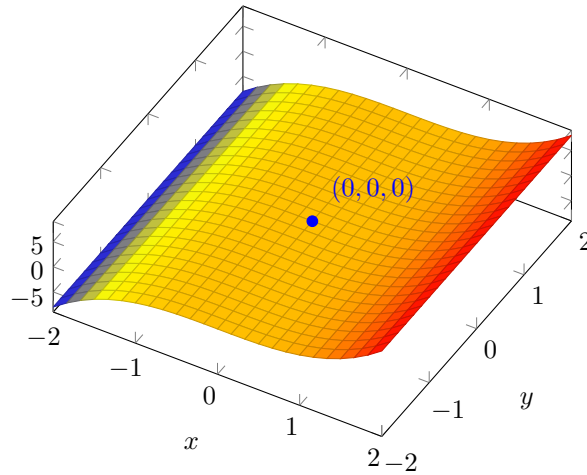


Figura 33: Gráfica de la función estrictamente cuasiconvexa  $f(x, y) = x^3$ .

Para poder garantizar que la función  $f$  posee un mínimo en un punto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla f(\bar{x}) = 0$  hace falta que  $f$  sea pseudoconvexa en  $\bar{x}$ , según el teorema 1.24 (Ramos, 2017: 72).

**Solución de la cuestión 5.2. FALSO.** La sucesión de arcos dada es un ciclo, pero no es un ciclo elemental, ya que encuentra dos veces el vértice  $c$ , sin que este sea el vértice inicial y final.

**Solución del problema 5.1.** El problema dado es equivalente a

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2 - 4 \leq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Las condiciones KKT para el problema con la formulación dada son

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) + \mu_1 \nabla g_1(x_1, x_2) + \mu_2 \nabla g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1 g_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_2 g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$



Calculamos los gradientes necesarios,

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -6x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Y sustituyendo,

$$\begin{aligned} -2 + 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 x_1 &= 0, \\ -6x_2 + 6\mu_1 x_1 - \mu_2 &= 0, \\ \mu_1(x_1^2 + 3x_2^2 - 4) &= 0, \\ \mu_2(x_1^2 - x_2) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema empezando, por ejemplo, por la última ecuación. Para que esta se satisfaga hay dos posibilidades, que estudiamos por separado:

- $\mu_2 = 0$ . En este caso el resto de las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} 2\mu_1 x_1 &= 1, \\ x_2 &= \mu_1 x_1, \\ \mu_1(x_1^2 + 3x_2^2 - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Combinando la primera y segunda ecuaciones obtenemos  $x_2 = 1$ , que sustituido en la tercera ecuación nos lleva a

$$\mu_1(x_1^2 - 1) = 0 \implies \begin{cases} \mu_1 = 0, \\ x_1 = -1, \quad \mu_1 = 1; \\ x_1 = 1, \quad \mu_1 = 1. \end{cases}$$

Descartamos la solución  $\mu_1 = 0$ , puesto que no satisface la primera ecuación, y la tercera puesto que  $\mu_1 < 0$ . Obtenemos el punto  $(1, 1)$ .

- $x_2 = x_1^2$ . Y en este caso el resto de las ecuaciones son:

$$\begin{aligned} -2 + 2\mu_1 x_1 + 2\mu_2 x_1 &= 0, \\ -6x_1^2 + 6\mu_1 x_1 - \mu_2 &= 0, \\ \mu_1(3x_1^4 + x_1^2 - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo la tercera ecuación se obtiene o bien  $\mu_1 = 0$ , o bien

$$3x_1^4 + x_1^2 - 4 = 0 \implies x_1^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} = \frac{-1 \pm 7}{6} \implies \begin{cases} x_1^2 = 1 \implies x_1 = \pm 1, \\ x_1^2 = -\frac{4}{3}. \end{cases}$$

Si  $x_1 = 1$  obtenemos el punto ya hallado en el apartado anterior,  $(1, 1)$ . Y si  $x_1 = -1$  se calculan los multiplicadores,

$$\left. \begin{aligned} \mu_1 + \mu_2 &= -1 \\ -6\mu_1 - \mu_2 &= -6 \end{aligned} \right\} \implies \mu_1 = \frac{7}{5}, \quad \mu_2 = -\frac{12}{5} < 0;$$

y se descarta esta solución por ser  $\mu_2 < 0$ . Y si  $\mu_1 = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} -2 + 2\mu_2 x_1 &= 0 \\ -6x_1^2 - \mu_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies -2 - 12x_1^3 = 0 \implies x_1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{6}};$$

$$x_2 = x_1^2 = \left(-\frac{1}{\sqrt[3]{6}}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{6^2}}; \quad \mu_2 = -6x_1^2 = -\sqrt[3]{6} < 0.$$

Una vez más  $\mu_2 < 0$  y descartamos la solución obtenida (se puede comprobar que este punto es el máximo de la función  $f$  con las restricciones del problema).

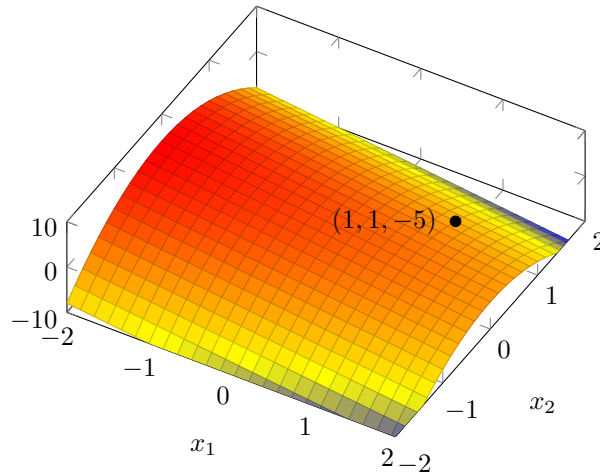


Figura 34: Gráfica de la función  $f(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2^2$ .

El único punto encontrado que satisface las condiciones KKT es el punto  $(1, 1)$ , y en dicho punto los gradientes de las restricciones activas (las dos) son independientes.

$$\nabla g_1(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Mediante las representaciones gráficas de la función  $f$  en la figura 34, y de la región factible junto con las curvas de nivel de  $f$  en la figura 35, podemos comprobar que el punto hallado mediante las condiciones KKT es realmente el óptimo global del problema.

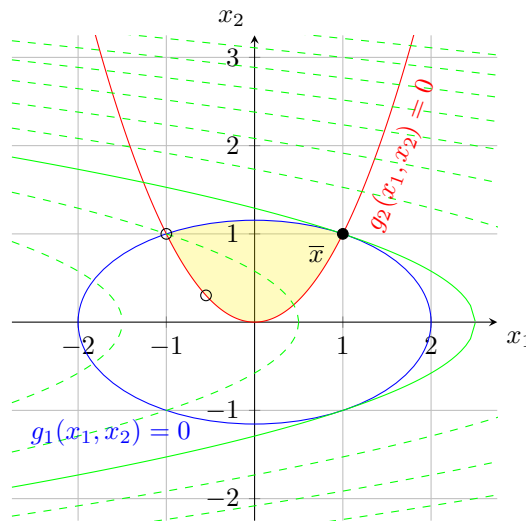


Figura 35: Resolución gráfica del problema 5.1.

También se puede comprobar que el punto  $(1, 1)$  es el mínimo global del problema sin recurrir a la representación gráfica. Sabemos que

$$f(1, 1) = -3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2 = -5.$$

Y sea  $(x_1, x_2) \in S$ , donde  $S$  representa la región factible,

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \leq x_2, x_1^2 + 3x_2^2 \leq 4\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} x_1^2 + 3x_2^2 \leq 4 &\implies 3x_2^2 \leq 4 - x_1^2 \implies -3x_2^2 \geq x_1^2 - 4 \implies \\ \implies f(x_1, x_2) = -2x_1 - 3x_2^2 &\geq -2x_1 + x_1^2 - 4 = (x_1 - 1)^2 - 5 \geq -5 = f(1, 1). \end{aligned}$$

### Solución del problema 5.2.

- (a) La red se representa en grafo de la figura 36. Los números sobre los arcos indican las capacidades de estos.

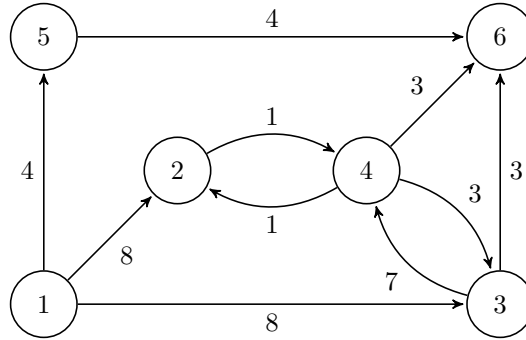


Figura 36: Grafo para el problema 5.2.

- (b) Paso inicial. Tomamos como flujo inicial para todos los arcos cero. En este caso todos arcos son incrementables.

Primera iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{8, 1, 3, 3\} = 1$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 1 unidad. El resultado está representado en la figura 37. En esta figura y en las siguientes, las coordenadas  $(i, r)$  que aparecen sobre cada arco indican que por dicho arco se puede incrementar el flujo en  $i$  unidades y se puede reducir en  $r$  unidades.

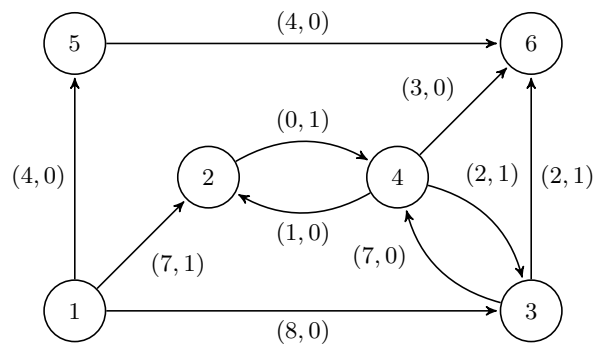


Figura 37: Primera iteración.

Segunda iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 3), (3, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{8, 2\} = 2$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 2 unidades. El resultado está representado en la figura 38.

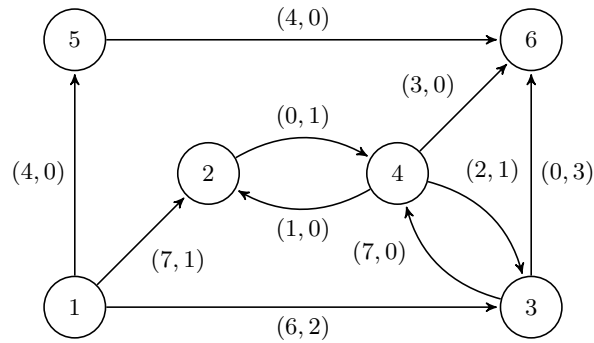


Figura 38: Segunda iteración.

Tercera iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo (1, 5), (5, 6). El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{4, 4\} = 4$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 4 unidades. El resultado está representado en la figura 39.

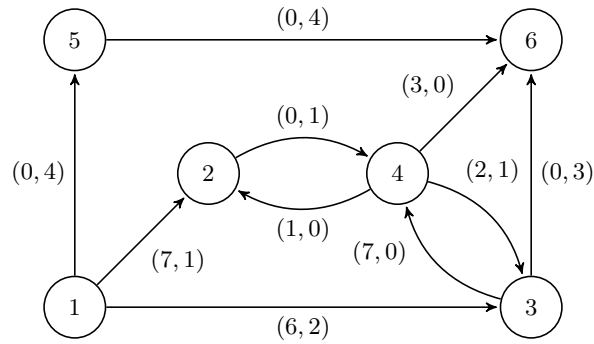


Figura 39: Tercera iteración.

Cuarta iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo (1, 3), (3, 4), (4, 6). El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{6, 7, 3\} = 3$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 3 unidades. El resultado está representado en la figura 40.

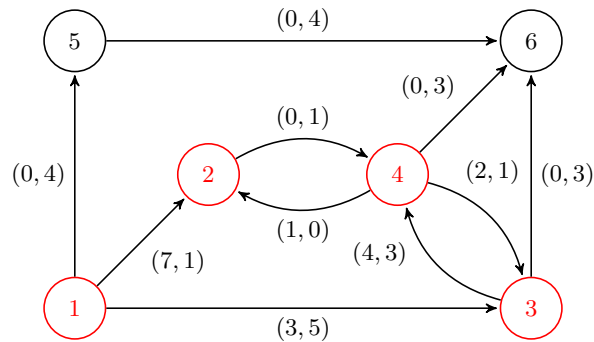


Figura 40: Cuarta iteración.

No hay más posibles cadenas de aumento de flujo. Esto se puede ver aplicando el algoritmo del aumento de flujo, cuyo coloreado se ha representado en la figura 40. El flujo que tenemos actualmente es el flujo

máximo, y queda determinado por el corte formado por los arcos que tienen el vértice inicial coloreado y el final no,  $\{(1, 5), (3, 6), (4, 6)\}$ , y que son arcos saturados. Dicho flujo máximo es

$$c(1, 5) + c(3, 6) + c(4, 6) = 4 + 3 + 3 = 10.$$

(c) Consideramos todos los cortes simples que dejan a la fuente (vértice 1) en una de las componentes conexas,  $X_1$ , y al sumidero (vértice 6) en la otra,  $X_6$ . Cada arco del corte es tal que

- (1) O bien tiene su vértice inicial en  $X_1$  y su vértice final en  $X_6$ ,
- (2) O bien tiene su vértice inicial en  $X_6$  y su vértice final en  $X_1$ .

La capacidad de cada corte es, según la definición 2.85 (Ramos, 2017: 300), la suma de las capacidades de los arcos que cumplen la propiedad (1).

Los posibles cortes que cumplen estas propiedades junto con sus capacidades se recogen en el cuadro 8, y entonces podemos aplicar la proposición 2.13 (Ramos, 2017: 301) y sabemos que el flujo máximo será menor o igual al mínimo de la capacidad de los cortes realizados, y será por tanto de 10 unidades como máximo. En este caso coincide con el resultado obtenido en el apartado anterior mediante el algoritmo del flujo máximo.

Corte	$X_1$	$X_6$	Capacidad
$\{(1, 2), (1, 3), (1, 5)\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	$8 + 8 + 4 = 20$
$\{(1, 3), (1, 5), (2, 4), (4, 2)\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$8 + 4 + 1 + 0 = 13$
$\{(1, 2), (1, 5), (3, 4), (4, 3), (3, 6)\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4, 5, 6\}$	$8 + 4 + 7 + 0 + 3 = 22$
$\{(1, 2), (1, 3), (5, 6)\}$	$\{1, 5\}$	$\{2, 3, 4, 6\}$	$8 + 8 + 4 = 20$
$\{(1, 5), (2, 4), (3, 4), (3, 6), (4, 2), (4, 3)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	$4 + 1 + 7 + 3 + 0 + 0 = 15$
$\{(1, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 3), (4, 6)\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{3, 5, 6\}$	$8 + 4 + 0 + 3 + 3 = 18$
$\{(1, 3), (2, 4), (4, 2), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{3, 4, 6\}$	$8 + 1 + 0 + 4 = 13$
$\{(1, 2), (1, 5), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (4, 6)\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{3, 4, 6\}$	$8 + 4 + 0 + 3 + 1 + 3 = 19$
$\{(1, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 3), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$	$8 + 7 + 3 + 0 + 4 = 22$
$\{(1, 5), (3, 6), (4, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5, 6\}$	$4 + 3 + 3 = 10$
$\{(2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{4, 6\}$	$1 + 7 + 0 + 0 + 4 = 12$
$\{(1, 3), (3, 4), (4, 3), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{3, 6\}$	$8 + 0 + 3 + 3 + 4 = 18$
$\{(1, 2), (2, 4), (3, 6), (4, 2), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{2, 6\}$	$8 + 0 + 3 + 1 + 3 + 4 = 19$
$\{(3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{6\}$	$3 + 3 + 4 = 10$

Cuadro 8: Cortes para el problema 5.2.

## JUNIO DE 2014

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 6.1.** En un problema de programación no lineal de minimización con función objetivo  $f$  diferenciable, cualquier dirección factible  $\mathbf{d}$  que forme un ángulo estrictamente agudo con el vector gradiente de  $f$  en un punto  $x$  es una dirección factible de mejora en  $x$ .

**Cuestión 6.2.** El conjunto  $S = \{c\}$  es un conjunto de articulación del grafo representado en la figura 41.

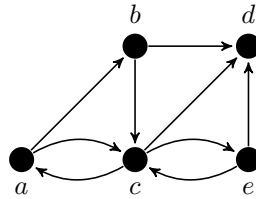


Figura 41: Grafo para la cuestión 6.2.

**Problema 6.1.** Consideremos el siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & c_1 x_1 + c_2 x_2^2, \\ \text{Sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Establecer las condiciones han de cumplir las constantes  $c_1$  y  $c_2$  para que:

- (a) El punto  $(1, 0)$  sea un máximo local del problema.
- (b) El punto  $(1, 0)$  sea un máximo global del problema.

**Problema 6.2.** Consideremos una red de flujo con seis vértices,  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  y  $v_6$ , donde la fuente es el vértice  $v_1$  y el sumidero es el vértice  $v_6$ . En la matriz  $C$  vienen dadas las capacidades  $c_{ij}$  de cada arco  $(v_i, v_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ , en donde  $c_{ij} = 0$  indica la ausencia en la red del arco  $(v_i, v_j)$ .

$$C = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 8 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \end{array}.$$

- (a) Dibujar la red, indicando los vértices, arcos y capacidades.
- (b) Encontrar el flujo máximo desde la fuente al sumidero mediante el algoritmo del flujo máximo.

- (c) Identificar el corte mínimo y comprobar que el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.

**Solución de la cuestión 6.1. FALSO.** En un problema de minimización una dirección de mejora es equivalente a una dirección de descenso. Demostraremos que  $\mathbf{d}$  no es una dirección de descenso, de forma similar a la demostración del teorema 1.21 (Ramos, 2017: 69).

Sea  $\varphi$  el ángulo agudo que forman el gradiente de  $f$  y la dirección  $\mathbf{d}$ . Se tiene que

$$\nabla f(x)^t \mathbf{d} = \|\nabla f(x)\| \|\mathbf{d}\| \cos \varphi > 0.$$

Puesto que  $f$  es diferenciable en  $x$  podemos escribir

$$f(x + \lambda \mathbf{d}) = f(x) + \lambda \nabla f(x)^t \mathbf{d} + \lambda \|\mathbf{d}\| \alpha(x, \lambda, \mathbf{d}),$$

con  $\alpha(x, \lambda, \mathbf{d}) \rightarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow 0$ . si reordenamos y dividimos por  $\lambda$ ,

$$\frac{f(x + \lambda \mathbf{d}) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^t \mathbf{d} + \|\mathbf{d}\| \alpha(x, \lambda, \mathbf{d}).$$

Puesto que se ha visto que  $\nabla f(x)^t \mathbf{d} > 0$  y dado que  $\alpha(x, \lambda, \mathbf{d}) \rightarrow 0$  cuando  $\lambda \rightarrow 0$ , ha de existir un  $\delta > 0$  tal que

$$\nabla f(x)^t \mathbf{d} + \|\mathbf{d}\| \alpha(x, \lambda, \mathbf{d}) > 0$$

para todo  $\lambda \in (0, \delta)$  y por tanto

$$\frac{f(x + \lambda \mathbf{d}) - f(x)}{\lambda} > 0$$

de lo cual se sigue que  $f(x + \lambda \mathbf{d}) > f(x)$ , es decir,  $\mathbf{d}$  no es una dirección de descenso de  $f$  en  $x$  (más bien sería una *dirección de ascenso*).

**Solución de la cuestión 6.2. FALSO.** Según la definición 2.44 (Ramos, 2017: 218) de conjunto de articulación, dado el grafo conexo  $G = (X, U)$  de la figura 41, para que  $S = \{c\}$  sea un conjunto de articulación el subgrafo de  $G$  generado por  $X - S$  ha de ser no conectado. Pero el subgrafo de  $G$  generado por  $X - S = \{a, b, d, e\}$  es el representado en la figura 42, y es claramente conexo.

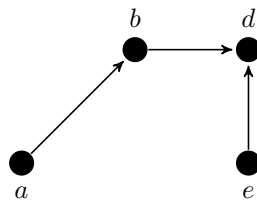


Figura 42: Subgrafo de  $G$  generado por  $X - S = \{a, b, d, e\}$ .

**Solución del problema 6.1.** El problema dado es equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = -c_1 x_1 - c_2 x_2^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0, \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Obsérvese que independientemente de los valores de las constantes  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , las funciones  $f$ ,  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$  son diferenciables; que la región factible del problema es el conjunto  $S$  sombreado en la figura 43; y que de la misma figura se puede deducir que el cono de direcciones factibles para el punto  $\bar{x} = (1, 0) \in S$  es el conjunto

$$\mathcal{D} = \{\mathbf{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq d_2 < -d_1\}.$$

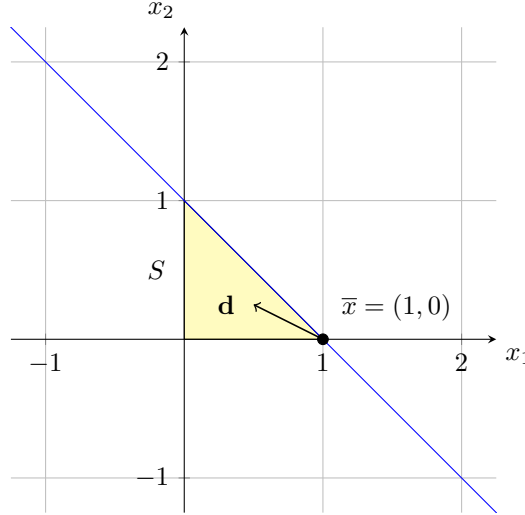


Figura 43: Región factible  $S$  para el problema 6.1.

Estudiaremos el problema a través de las condiciones de óptimo de Karush-Kuhn-Tucker. Si el punto  $\bar{x} = (1, 0) \in S$  es una solución óptima local entonces existen  $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$  tales que

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 0) + \mu_1 \nabla g_1(1, 0) + \mu_2 \nabla g_2(1, 0) + \mu_3 \nabla g_3(1, 0) &= 0, \\ \mu_1 g_1(1, 0) &= 0, \\ \mu_2 g_2(1, 0) &= 0, \\ \mu_3 g_3(1, 0) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Calculamos los gradientes,

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} -c_1 \\ -2c_2 x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(1, 0) = \begin{pmatrix} -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \nabla g_1(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obsérvese que los gradientes correspondientes a las restricciones activas,  $\nabla g_1(1, 0)$  y  $\nabla g_3(1, 0)$ , son independientes. Sustituimos los resultados hallados en las condiciones KKT. Las ecuaciones de holguras complementarias correspondientes a  $g_1$  y  $g_3$  son identidades, por tratarse de restricciones activas, y de la correspondiente a  $g_2$  obtenemos  $\mu_2 = 0$ . La ecuación de los gradientes nos proporciona el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} -c_1 + \mu_1 - \mu_2 &= 0 \\ \mu_1 - \mu_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \mu_1 = \mu_3 = c_1.$$

Y como los multiplicadores  $\mu_i$  han de ser no negativos, necesariamente ha de ser  $c_1 \geq 0$ . Sabemos, por tanto, que si  $c_1 < 0$  el punto estudiado,  $\bar{x} = (1, 0)$  no es el óptimo local buscado, puesto que no satisface las condiciones KKT. Falta confirmar si lo es cuando  $c_1 \geq 0$ , condición necesaria pero no suficiente. Veamos qué sucede separando varios casos, en función del signo de la constante  $c_2$  y de si se anula o no la constante  $c_1$ .



- Supongamos que  $c_2 \leq 0$ . La función  $f$  se esboza en la figura 44 para el caso  $c_1 > 0$  aunque los resultados que se obtienen a continuación son también válidos para  $c_1 = 0$ . En este caso  $f$  es una función convexa en  $\mathbb{R}^2$ , y por tanto también pseudoconvexa. Comprobaremos esta afirmación mediante el teorema 1.6 (Ramos, 2017: 41). Sean  $x, y \in \mathbb{R}^2$  de la forma  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$ .

$$\begin{aligned} (\nabla f(y) - \nabla f(x))^t (y - x) &= ((-c_1, -2c_2 y_2) - (-c_1, -2c_2 x_2)) \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix} = \\ &= (0, -2c_2(y_2 - x_2)) \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ y_2 - x_2 \end{pmatrix} = -2c_2(y_2 - x_2)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, las funciones que caracterizan a las restricciones,  $g_1$ ,  $g_2$  y  $g_3$ , también son funciones convexas, por ser funciones afines. Y por la misma razón son funciones cuasiconvexas. En esta situación las condiciones KKT son suficientes para poder garantizar que el punto  $\bar{x} = (1, 0)$  es un punto óptimo global del problema.

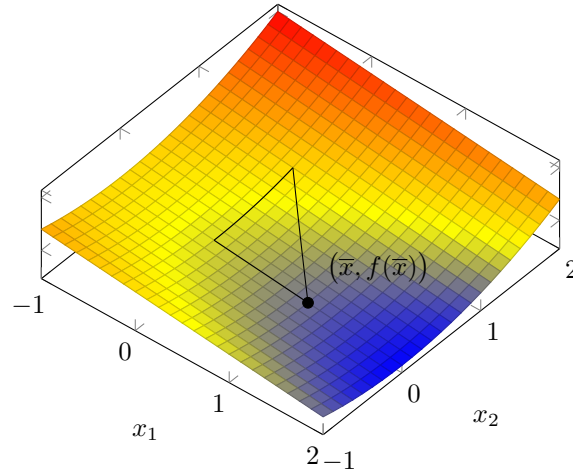


Figura 44: Gráfica de la función  $f$  para  $c_1 > 0$  y  $c_2 < 0$ .

- Supongamos que  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$ . En este caso la función  $f$  se esboza en la figura 45. Sea  $\mathbf{d} \in \mathcal{D}$  una dirección factible. Entonces,

$$\nabla f(\bar{x})^t \mathbf{d} = (-c_1, 0) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = -c_1 d_1 \geq 0.$$

Ninguna dirección factible para el punto  $\bar{x}$  es una dirección de descenso en dicho punto, por lo que podemos afirmar que  $\bar{x}$  es un óptimo local del problema (obsérvese que este razonamiento habría sido válido también para el apartado anterior, puesto que no depende del signo de  $c_2$ ).

Si  $c_2 > c_1$ , sea  $\bar{y} = (0, 1) \in S - \{\bar{x}\}$ . Tenemos que

$$f(\bar{y}) = f(0, 1) = -c_2 < -c_1 = f(1, 0) = f(\bar{x}),$$

por lo que  $\bar{x}$  no es un óptimo global del problema.

Y si  $c_2 \leq c_1$ , sea  $\bar{y} \in S - \{\bar{x}\}$  de la forma  $\bar{y} = (y_1, y_2)$ , del que sabemos que

$$0 \leq y_1 < 1, \quad 0 \leq y_2 \leq 1 - y_1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} f(\bar{y}) = f(y_1, y_2) &= -c_1 y_1 - c_2 y_2^2 \geq -c_1 y_1 - c_1 y_2^2 = -c_1 (y_1 + y_2^2) \geq -c_1 (y_1 + (1 - y_1)^2) = \\ &= -c_1 (y_1^2 - y_1 + 1) = -c_1 \left( \left( y_1 - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right) \geq -\frac{3}{4} c_1 > -c_1 = f(1, 0) = f(\bar{x}); \end{aligned}$$

por lo que en este caso  $\bar{x}$  es un óptimo global del problema.

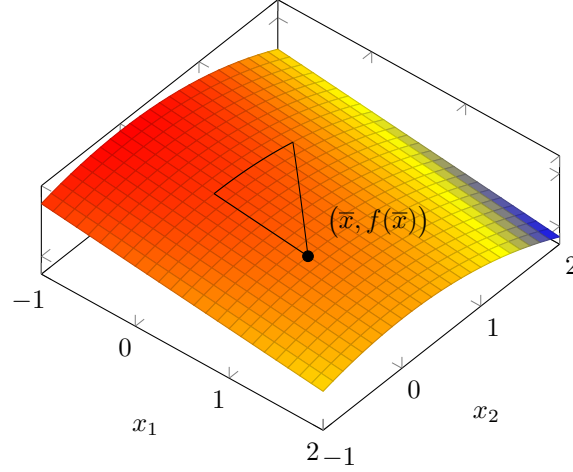


Figura 45: Gráfica de la función  $f$  para  $c_1 > 0$  y  $c_2 > 0$ .

- Por último, supongamos que  $c_1 = 0$  y  $c_2 > 0$ . En este caso la función  $f$  se esboza en la figura 46. Se comprueba fácilmente que el punto  $\bar{x} = (1, 0)$  no es un óptimo local del problema. Consideramos la dirección  $\mathbf{d} = (-1, 1) \in \mathcal{D}$ , y sean  $\lambda \in (0, 1)$  e  $\bar{y} = \bar{x} + \lambda \mathbf{d}$ . Entonces

$$\bar{y} = \bar{x} + \lambda \mathbf{d} = (1, 0) + \lambda(-1, 1) = (1 - \lambda, \lambda);$$

$$f(\bar{y}) = f(1 - \lambda, \lambda) = -c_2 \lambda^2 < 0 = f(\bar{x});$$

y en consecuencia  $\mathbf{d}$  es una dirección factible de descenso para el punto  $\bar{x}$ , por lo que este no puede ser un óptimo local del problema.

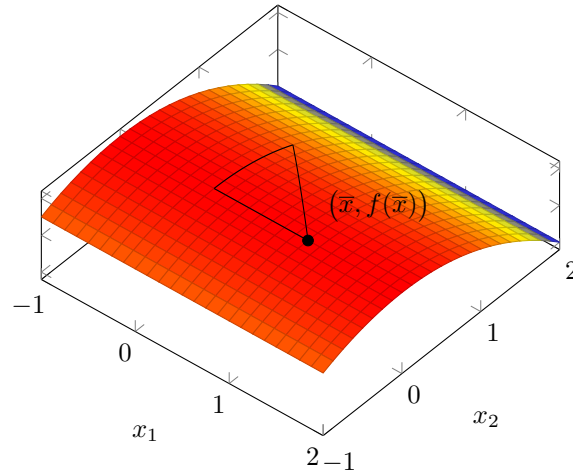


Figura 46: Gráfica de la función  $f$  para  $c_1 = 0$  y  $c_2 > 0$ .

En conclusión:

- (a) El punto  $(1, 0)$  será un máximo local del problema original siempre y cuando  $c_1 \geq 0$ .
- (b) El punto  $(1, 0)$  será un máximo global del problema original siempre y cuando  $c_1 \geq 0$  y  $c_2 \leq c_1$ .

### Solución del problema 6.2.

- (a) La red se representa en grafo de la figura 47. Los números sobre los arcos indican las capacidades de estos.

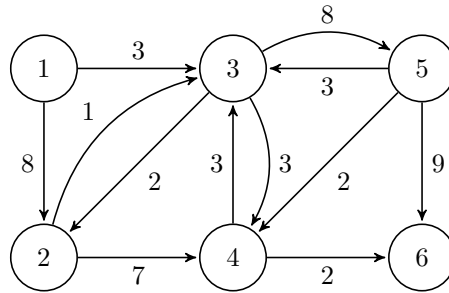


Figura 47: Grafo para el problema 6.2.

- (b) Paso inicial. Tomamos como flujo inicial para todos los arcos cero. En este caso todos arcos son incrementables.

Primera iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 2)$ ,  $(2, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(4, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{8, 1, 3, 2\} = 1$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 1 unidad. El resultado está representado en la figura 48. En esta figura y en las siguientes, las coordenadas  $(i, r)$  que aparecen sobre cada arco indican que por dicho arco se puede incrementar el flujo en  $i$  unidades y se puede reducir en  $r$  unidades.

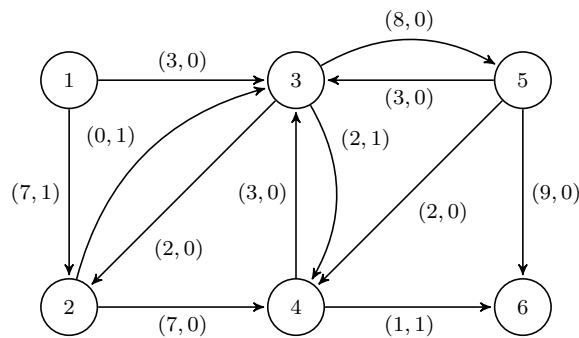


Figura 48: Primera iteración.

Segunda iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 2)$ ,  $(2, 4)$ ,  $(4, 3)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(5, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{7, 7, 3, 8, 9\} = 3$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 3 unidades. El resultado está representado en la figura 49.

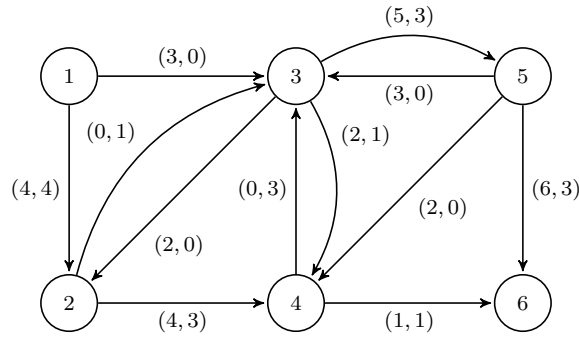


Figura 49: Segunda iteración.

Tercera iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo (1, 2), (2, 4), (4, 6). El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{4, 4, 1\} = 1$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 1 unidad. El resultado está representado en la figura 50.

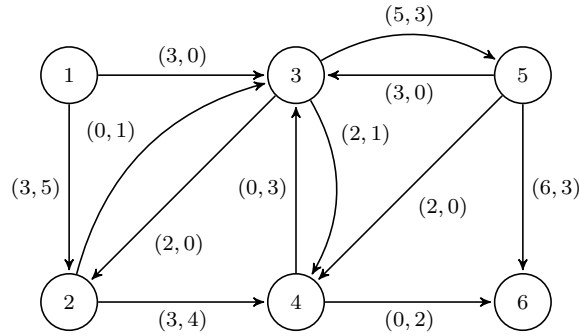


Figura 50: Tercera iteración.

Cuarta iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo (1, 2), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (5, 6). El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{3, 3, 1, 5, 6\} = 1$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 1 unidad. El resultado está representado en la figura 51.

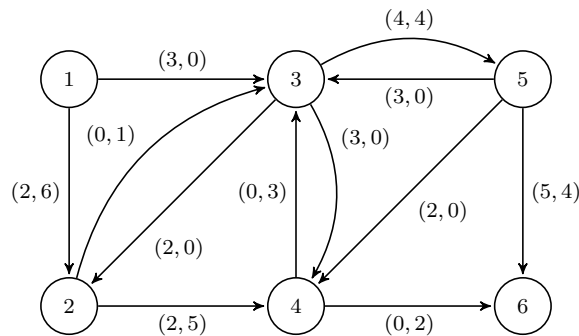


Figura 51: Cuarta iteración.

Quinta iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo (1, 3), (3, 5), (5, 6). El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{3, 4, 5\} = 3$ , por lo que incrementamos todos los flujos involucrados en 3 unidades. El resultado está representado en la figura 52.

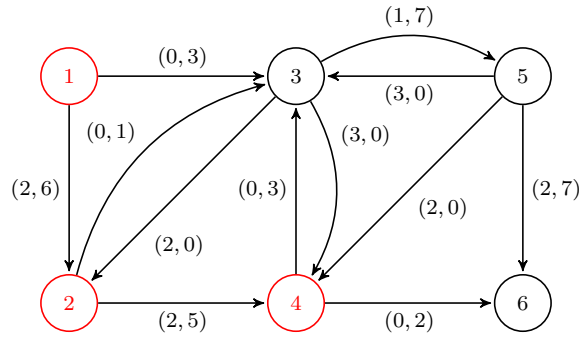


Figura 52: Quinta iteración.

No hay más posibles cadenas de aumento de flujo. Esto se puede ver aplicando el algoritmo del aumento de flujo, cuyo coloreado se ha representado en la figura 52. El flujo que tenemos actualmente es el flujo máximo, y queda determinado por el corte formado por los arcos que parten de un vértice coloreado y llegan a un vértice no coloreado,  $(1,3)$ ,  $(2,3)$ ,  $(4,3)$ ,  $(4,6)$ , y que son arcos saturados. Dicho flujo máximo es

$$c(1,3) + c(2,3) + c(4,3) + c(4,6) = 3 + 1 + 3 + 2 = 9.$$

(c) Consideramos todos los cortes simples que dejan a la fuente (vértice 1) en una de las componentes conexas,  $X_1$ , y al sumidero (vértice 6) en la otra,  $X_6$ . Cada arco del corte es tal que

- (1) O bien tiene su vértice inicial en  $X_1$  y su vértice final en  $X_6$ ,
- (2) O bien tiene su vértice inicial en  $X_6$  y su vértice final en  $X_1$ .

La capacidad de cada corte es, según la definición 2.85 (Ramos, 2017: 300), la suma de las capacidades de los arcos que cumplen la propiedad (1).

Los posibles cortes que cumplen estas propiedades junto con sus capacidades se recogen en el cuadro 9, y entonces podemos aplicar la proposición 2.13 (Ramos, 2017: 301) y sabemos que el flujo máximo será menor o igual al mínimo de la capacidad de los cortes realizados, y será por tanto de 9 unidades como máximo. En este caso coincide con el resultado obtenido en el apartado anterior mediante el algoritmo del flujo máximo.

Corte	$X_1$	$X_6$	Capacidad
$\{(1,2), (1,3)\}$	$\{1\}$	$\{2,3,4,5,6\}$	$8 + 3 = 11$
$\{(1,3), (2,3), (2,4), (3,2)\}$	$\{1,2\}$	$\{3,4,5,6\}$	$3 + 1 + 7 + 0 = 11$
$\{(1,2), (2,3), (3,2), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)\}$	$\{1,3\}$	$\{2,4,5,6\}$	$8 + 0 + 2 + 3 + 8 + 0 + 0 = 21$
$\{(2,4), (3,4), (3,5), (4,3), (5,3)\}$	$\{1,2,3\}$	$\{4,5,6\}$	$7 + 3 + 8 + 0 + 0 = 18$
$\{(1,3), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (4,6)\}$	$\{1,2,4\}$	$\{3,5,6\}$	$3 + 1 + 0 + 0 + 3 + 2 = 9$
$\{(1,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,5), (4,6), (5,3), (5,4)\}$	$\{1,3,4\}$	$\{3,4,6\}$	$8 + 0 + 0 + 2 + 8 + 2 + 0 + 0 = 20$
$\{(1,2), (2,3), (3,2), (3,4), (4,3), (5,4), (5,6)\}$	$\{1,3,5\}$	$\{2,4,6\}$	$8 + 2 + 3 + 0 + 2 + 9 = 24$
$\{(3,5), (4,6), (5,3), (5,4)\}$	$\{1,2,3,4\}$	$\{5,6\}$	$8 + 2 + 0 + 0 = 10$
$\{(2,4), (3,4), (4,3), (5,4), (5,6)\}$	$\{1,2,3,5\}$	$\{4,6\}$	$7 + 3 + 0 + 2 + 9 = 21$
$\{(1,3), (2,3), (3,2), (3,4), (3,5), (4,3), (4,6), (5,3), (5,6)\}$	$\{1,2,4,5\}$	$\{3,6\}$	$3 + 0 + 2 + 3 + 8 + 0 + 2 + 0 + 9 = 27$
$\{(1,2), (2,3), (2,4), (3,2), (4,6), (5,6)\}$	$\{1,3,4,5\}$	$\{2,6\}$	$8 + 0 + 0 + 2 + 2 + 9 = 21$
$\{(4,6), (5,6)\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{6\}$	$2 + 9 = 11$

Cuadro 9: Cortes para el problema 6.2.

## SEPTIEMBRE DE 2014 – CONVOCATORIA ORDINARIA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 7.1.** La función  $f(x) = \log x$  es cuasicóncava en  $\mathbb{R}^1$  pero no es cuasiconvexa en  $\mathbb{R}^1$ .

**Cuestión 7.2.** Una cadena de un grafo que no encuentra dos veces el mismo vértice se llama cadena simple.

**Problema 7.1.** Una compañía envasa dos tipos de preparados vitamínicos A y B. Los costes de adquisición de un envase son, respectivamente,  $c_A = 3$  y  $c_B = 4$  euros. La demanda mensual de envases es  $a = 22 - 16p_A + 18p_B$  para el preparado A y  $b = 20 + 15p_A - 20p_B$  para el preparado B, donde  $p_A$  y  $p_B$  son los respectivos precios de venta de un envase de cada tipo.

- Plantear un modelo de programación no lineal para encontrar los precios de venta de cada envase, a fin de maximizar los beneficios netos (ganancias – costes) de la empresa.
- Encontrar su solución óptima por el método de Newton-Raphson, partiendo del punto  $(0, 0)$ .
- Supongamos que, por consideraciones comerciales, el precio de venta del preparado A no puede superar los 9 euros. Replantear el problema y encontrar su solución utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker.

**Problema 7.2.** Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto entre los vértices 1 y 8 del grafo de la figura 53, explicando detalladamente el transcurso de las iteraciones.

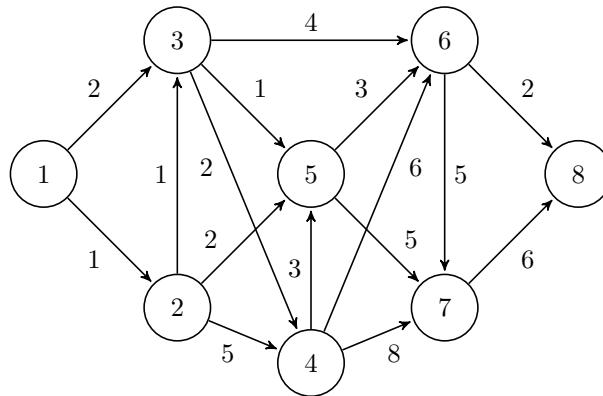


Figura 53: Grafo para el problema 7.2.

**Solución de la cuestión 7.1. FALSO.** La función  $f(x) = \log x$  es cuasiconvexa y cuasicóncava en su dominio de definición,  $(0, +\infty)$ .

Veamos que  $f$  es cuasiconvexa. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , y consideramos el conjunto

$$S_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : \log x \leq \alpha\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq e^\alpha\} = (0, e^\alpha],$$

que por ser un intervalo es un conjunto convexo. En aplicación del teorema 1.14 (Ramos, 2017: 54) podemos afirmar que  $f$  es una función cuasiconvexa.

Veamos que  $f$  es cuasicóncava, o análogamente, que  $g = -f$  es cuasiconvexa. Sea  $\beta \in \mathbb{R}$ , y consideramos el conjunto

$$S_\beta = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq \beta\} = \{x \in \mathbb{R} : -\log x \leq \beta\} = \{x \in \mathbb{R} : x \geq e^{-\beta}\} = [e^{-\beta}, +\infty),$$

que una vez más por ser un intervalo es un conjunto convexo. Con el mismo razonamiento que en el caso anterior,  $g$  es una función cuasiconvexa, y por tanto  $f$  es una función cuasicóncava.

Las funciones  $f$  y  $g$  implicadas en los razonamientos anteriores se representan en la figura 54.

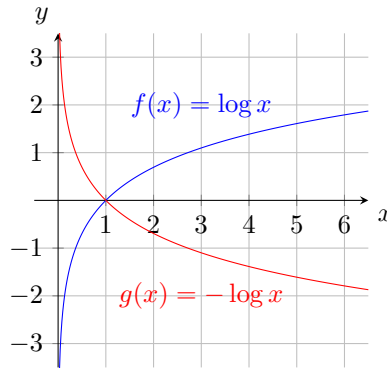


Figura 54: Gráficas de las funciones  $f(x) = \log x$  y  $g(x) = -\log x$ .

**Solución de la cuestión 7.2. FALSO.** Según las definiciones 2.35 y 2.36 (Ramos, 2017: 215), una cadena que no encuentra dos veces el mismo vértice se llama cadena *elemental*, mientras que una cadena *simple* es aquella que no usa dos veces el mismo arco.

**Solución del problema 7.1.** Suponiendo que se adquieran y se vendan exactamente el número de unidades demandadas, las ganancias  $G$ , los costes  $C$  y los beneficios netos  $F$  tienen las siguientes expresiones:

$$G = ap_A + bp_B = (22 - 16p_A + 18p_B)p_A + (20 + 15p_A - 20p_B)p_B = -16p_A^2 - 20p_B^2 + 33p_Ap_B + 22p_A + 20p_B;$$

$$C = 3a + 4b = 3(22 - 16p_A + 18p_B) + 4(20 + 15p_A - 20p_B) = 12p_A - 26p_B + 146;$$

$$F = G - C = -16p_A^2 - 20p_B^2 + 33p_Ap_B + 10p_A + 46p_B - 146.$$

En adelante, y por comodidad llamaremos  $x = p_A$  e  $y = p_B$  a los precios de venta respectivos de los preparados A y B.

(a) Con la notación indicada, el problema es

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && -16x^2 - 20y^2 + 33xy + 10x + 46y - 146, \\ &\text{Sujeto a} && x \geq 0, \\ &&& y \geq 0. \end{aligned}$$

Equivalentemente, y escrito en la forma habitual,

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x, y) = 16x^2 + 20y^2 - 33xy - 10x - 46y + 146, \\ &\text{Sujeto a} && g_1(x, y) = -x \leq 0, \\ &&& g_2(x, y) = -y \leq 0. \end{aligned}$$

(b) Calculamos el gradiente de  $f$ , y la matriz hessiana de  $f$ , y su inversa.

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 32x - 33y - 10 \\ 40y - 33x - 46 \end{pmatrix}, \quad H(x, y) = \begin{pmatrix} 32 & -33 \\ -33 & 40 \end{pmatrix}, \quad H(x, y)^{-1} = \frac{1}{191} \begin{pmatrix} 40 & 33 \\ 33 & 32 \end{pmatrix}.$$

En el método de Newton, una vez obtenido el punto  $\mathbf{x}_k$ , realizamos la iteración  $k$  para obtener el punto  $\mathbf{x}_{k+1}$  mediante la expresión

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - H(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Sustituyendo,

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} - \frac{1}{191} \begin{pmatrix} 40 & 33 \\ 33 & 32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32x_k - 33y_k - 10 \\ 40y_k - 33x_k - 46 \end{pmatrix} = \frac{1}{191} \begin{pmatrix} 1918 \\ 1802 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 10,04 \\ 9,43 \end{pmatrix}.$$

viendo el resultado anterior, independientemente del punto inicial elegido, las sucesivas iteraciones nos dan siempre el mismo valor,

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} = \frac{1}{191} \begin{pmatrix} 1918 \\ 1802 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 10,04 \\ 9,43 \end{pmatrix};$$

y en particular

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 10,04 \\ 9,43 \end{pmatrix}, \quad \nabla f(\mathbf{x}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

por lo que el proceso se termina tras realizar la primera iteración (independientemente del punto inicial elegido y del valor  $\varepsilon > 0$  de finalización). La compañía debería vender los preparados del tipo A a un precio  $p_A = \bar{x} \simeq 10,04$  euros y los preparados del tipo B a un precio  $p_B = \bar{y} \simeq 9,43$  euros para maximizar sus beneficios.

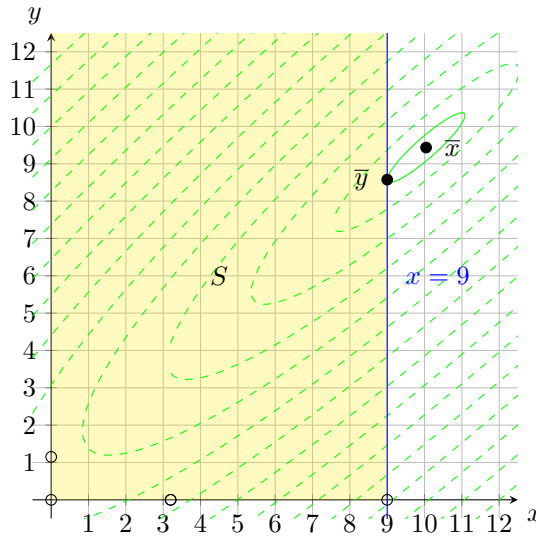


Figura 55: Resolución gráfica del problema 7.1.

(c) Con la restricción añadida, el nuevo problema es

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x, y) = 16x^2 + 20y^2 - 33xy - 10x - 46y + 146, \\ &\text{Sujeto a} && g_1(x, y) = -x \leq 0, \\ &&& g_2(x, y) = -y \leq 0, \\ &&& g_3(x, y) = x - 9 \leq 0. \end{aligned}$$



En la figura 55 se muestra una representación de la región factible  $S$ , y las curvas de nivel de la función  $f$ , así como la solución  $\bar{x}$  del apartado anterior y la solución  $\bar{y}$  para este apartado.

Para el nuevo problema, las condiciones KKT son

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) + \mu_1 \nabla g_1(x, y) + \mu_2 \nabla g_2(x, y) + \mu_3 \nabla g_3(x, y) &= 0, \\ \mu_1 g_1(x, y) &= 0, \\ \mu_2 g_2(x, y) &= 0, \\ \mu_3 g_3(x, y) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Calculamos los gradientes de las funciones asociadas las restricciones, puesto que el gradiente de  $f$  ya se ha calculado en el apartado anterior.

$$\nabla g_1(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Y sustituimos,

$$\begin{aligned}32x - 33y - 10 - \mu_1 + \mu_3 &= 0, \\ 40y - 33x - 46 - \mu_2 &= 0, \\ -\mu_1 x &= 0, \\ -\mu_2 y &= 0, \\ \mu_3(x - 9) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0.\end{aligned}$$

Estudiamos por separado cada una de las posibles combinaciones de valores que satisfacen las ecuaciones de las holguras complementarias, puesto que estas se pueden obtener de inmediato.

- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} 32x - 33y - 10 = 0, \\ 40y - 33x - 46 = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto hallado en el apartado anterior,

$$\bar{x} = \frac{1}{191} \begin{pmatrix} 1918 \\ 1802 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 10,04 \\ 9,43 \end{pmatrix};$$

que no es válida en este caso al no satisfacer la tercera restricción.

- $\mu_1 = \mu_2 = 0, x = 9$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -33y + \mu_3 + 278 = 0, \\ 40y - 343 = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 9 \\ \frac{343}{40} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8,575 \end{pmatrix}, \quad \mu_3 = \frac{199}{40} \geq 0;$$

y obtenemos un punto factible que satisface las condiciones KKT.

- $\mu_1 = \mu_3 = 0, y = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} 32x - 10 = 0, \\ -33x - \mu_2 - 46 = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto

$$\begin{pmatrix} \frac{16}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = -\frac{758}{5} < 0;$$

que no satisface las condiciones KKT.

- $\mu_1 = 0, x = 9, y = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} 278 + \mu_3 = 0, \\ -343 + \mu_2 = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto

$$\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = 343, \quad \mu_3 = -278 < 0;$$

que no satisface las condiciones KKT.

- $\mu_2 = \mu_3 = 0, x = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -33y - \mu_1 - 10 = 0, \\ 40y - 46 = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{23}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,15 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = -\frac{959}{20} < 0;$$

que no satisface las condiciones KKT.

- $\mu_3 = 0, x = y = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -\mu_1 - 10 = 0, \\ -\mu_2 - 46 = 0. \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_1 = -10 < 0, \quad \mu_2 = -46 < 0;$$

que no satisface las condiciones KKT.

Por tanto, el único punto de la región factible encontrado que satisface las condiciones KKT es el punto

$$\bar{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8,575 \end{pmatrix}.$$

En este caso solo hay una restricción activa, la correspondiente a  $g_3$ . Además,  $f$  es una función convexa en  $\mathbb{R}^2$  puesto que su matriz hessiana  $H(\mathbf{x})$  es definida positiva para cualquier  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , y las funciones asociadas a las restricciones, (y en particular la restricción activa  $g_3$ ), son convexas, por ser afines. En consecuencia  $f$  es pseudoconvexa en  $\bar{x}$ , y  $g_3$  es cuasiconvexa en  $\bar{x}$ , punto que satisface las condiciones KKT, y que por tanto es la solución óptima global del problema.

En las condiciones de este apartado la compañía debería vender los preparados del tipo A a un precio  $p_A = 9$  euros y los preparados del tipo B a un precio  $p_B = 8,575$  euros para maximizar sus beneficios.

En la figura 56 se representa la gráfica de la función  $f$  y las soluciones tanto de este apartado como del anterior.

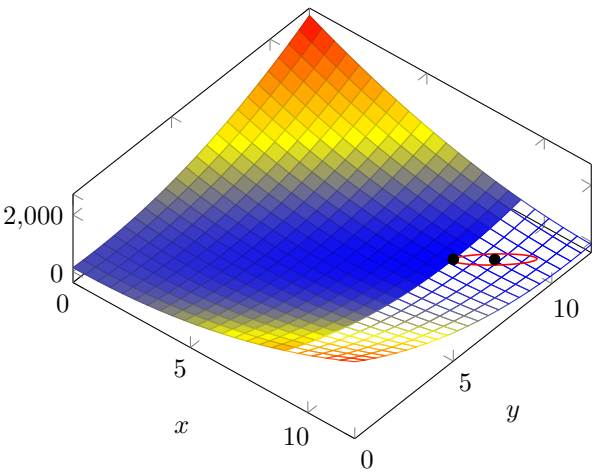


Figura 56: Gráfica de la función  $f(x, y)$ .

**Solución del problema 7.2.** Las iteraciones del algoritmo de Dijkstra se recogen en el cuadro 10, y el grafo coloreado resultado de efectuar dicho algoritmo se representa en la figura 57. Se puede ver que el camino más corto desde el vértice 1 hasta el vértice 8 es el que recorre los arcos  $(1, 3)$ ,  $(3, 6)$  y  $(6, 8)$ , con una longitud total de  $2 + 4 + 2 = 8$ .

Iteración	1	2	3	4	5	6
Distancia	0	1	2	3	3	6
Vértice	1	2	3	4	5	6
2	$0 + 1 = \mathbf{1}$	–	–	–	–	–
3	$0 + 2 = \mathbf{2}$	<b>2</b>	–	–	–	–
4	$\infty$	$1 + 5 = 6$	$2 + 1 = \mathbf{3}$	–	–	–
5	$\infty$	$1 + 2 = \mathbf{3}$	$2 + 1 = \mathbf{3}$	<b>3</b>	–	–
6	$\infty$	$\infty$	$2 + 4 = 6$	6	<b>6</b>	–
7	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$3 + 8 = 11$	$3 + 5 = 8$	8
8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$6 + 2 = \mathbf{8}$

Cuadro 10: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 7.2.

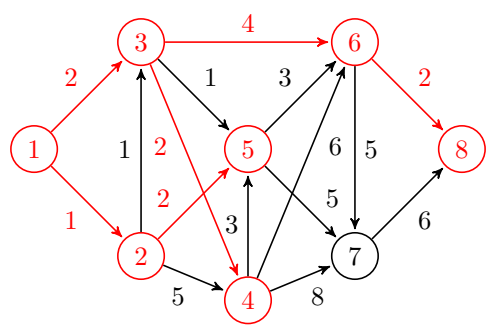


Figura 57: Grafo para el problema 7.2 tras la última iteración.

## SEPTIEMBRE DE 2014 – CONVOCATORIA DE RESERVA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 8.1.** La función  $f(x_1, x_2) = x_1x_2$  es cuasicóncava en  $\mathbb{R}^2$ .

**Cuestión 8.2.** Una cadena de un grafo que no utiliza dos veces el mismo arco se llama cadena elemental.

**Problema 8.1.** Sea el problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x_1, x_2) = -4 - 3(1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2, \\ \text{Sujeto a} & 3x_1 + x_2 = 5. \end{array}$$

Resolverlo mediante el método de la penalización exterior con función de penalidad pérdida cuadrática.

**Problema 8.2.** Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto entre los vértices 1 y 6 del grafo de la figura 58, explicando detalladamente el transcurso de las iteraciones.

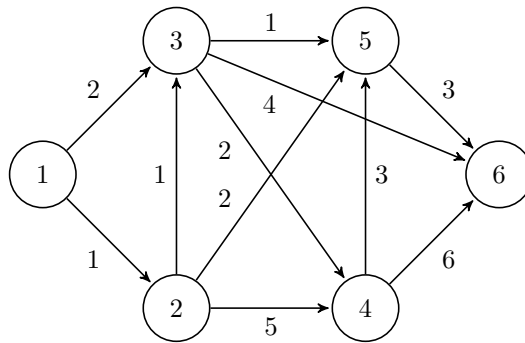


Figura 58: Grafo para el problema 8.2.

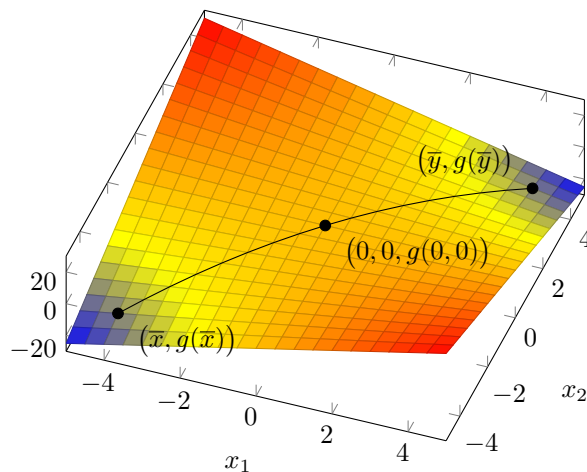


Figura 59: Gráfica de la función  $g(x_1, x_2) = -x_1x_2$ .

**Solución de la cuestión 8.1. FALSO.** Para que la función  $f$  sea cuasicóncava, la función  $g = -f$  habría de ser cuasiconvexa, pero esta no lo es. Veamos que  $g$  no cumple la definición 1.18 (Ramos, 2017: 53) de función cuasiconvexa. Sean, por ejemplo, los puntos  $\mathbf{x} = (-4, -4), \mathbf{y} = (4, 4) \in \mathbb{R}^2$ , y sea  $\lambda = \frac{1}{2} \in (0, 1)$ . Se tiene que

$$\left. \begin{array}{l} g(\mathbf{x}) = g(-4, -4) = -16 \\ g(\mathbf{y}) = g(4, 4) = -16 \end{array} \right\} \Rightarrow \max \{g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\} = -16;$$

$$g(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) = g\left(\frac{1}{2}(4, 4) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(-4, -4)\right) = g(0, 0) = 0 > -16 = \max \{g(\mathbf{x}), g(\mathbf{y})\}.$$

En conclusión, la función  $g = -f$  no es cuasiconvexa, y por tanto, la función  $f$  no es cuasicóncava. El resultado obtenido se aprecia fácilmente en la gráfica de la función  $g$  dibujada en la figura 59.

**Solución de la cuestión 8.2. FALSO.** Según las definiciones 2.35 y 2.36 (Ramos, 2017: 215), una cadena que no encuentra dos veces el mismo arco se llama cadena *simple*, mientras que una cadena *elemental* es aquella que no usa dos veces el mismo vértice.

**Solución del problema 8.1.** El problema dado es equivalente a:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & -f(x_1, x_2) = 4 + 3(1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2, \\ \text{Sujeto a} & 3x_1 + x_2 - 5 = 0. \end{array}$$

Y su resolución gráfica se representa en la figura 60.

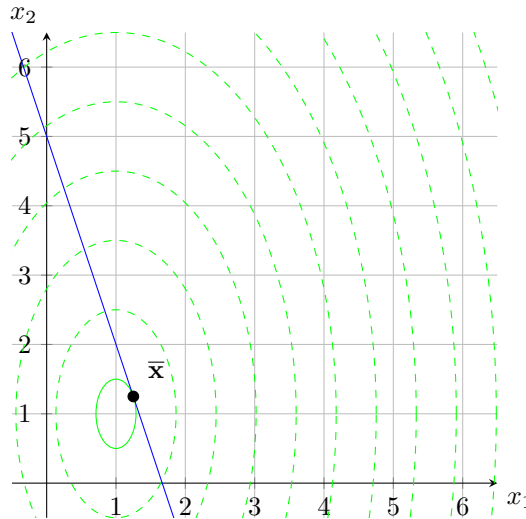


Figura 60: Resolución gráfica del problema 8.1.

El problema penalizado es:

$$\text{Minimizar} \quad F(x_1, x_2) = 4 + 3(1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2 + \mu(3x_1 + x_2 - 5)^2.$$

El vector gradiente de  $F$  y su matriz hessiana son

$$\nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} -6(1 - x_1) + 6\mu(3x_1 + x_2 - 5) \\ -2(1 - x_2) + 2\mu(3x_1 + x_2 - 5) \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 F(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6 + 18\mu & 6\mu \\ 6\mu & 2 + 2\mu \end{pmatrix}.$$

El punto óptimo de la función  $F$  es aquel que verifique que

$$\nabla F(x_1, x_2) = 0 \implies \begin{cases} x_1 - 1 + \mu(3x_1 + x_2 - 5) = 0, \\ x_2 - 1 + \mu(3x_1 + x_2 - 5) = 0. \end{cases}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$x_1 - x_2 = 0 \implies x_2 = x_1,$$

lo que sustituido en la primera ecuación nos lleva a

$$x_1 - 1 + \mu(3x_1 + x_1 - 5) = 0 \implies x_1(1 + 4\mu) = 1 + 5\mu \implies x_1 = x_2 = \frac{1 + 5\mu}{1 + 4\mu}.$$

Por otra parte, los valores propios de  $\nabla^2 F(x_1, x_2)$  son

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 6 + 18\mu - \lambda & 6\mu \\ 6\mu & 2 + 2\mu - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies (6 + 18\mu - \lambda)(2 + 2\mu - \lambda) - 36\mu^2 = 0 \implies \\ & \implies \lambda^2 - (8 + 20\mu)\lambda + (6 + 18\mu)(2 + 2\mu) - 36\mu^2 = 0 \implies \lambda^2 - 4(5\mu + 2)\lambda + 12(4\mu + 1) = 0 \implies \\ & \implies \lambda = \frac{4(5\mu + 2) \pm \sqrt{16(5\mu + 2)^2 - 48(4\mu + 1)}}{2} = \\ & = \frac{4(5\mu + 2) \pm 4\sqrt{25\mu^2 + 8\mu + 1}}{2} = 2(5\mu + 2) \pm 2\sqrt{25\mu^2 + 8\mu + 1}. \end{aligned}$$

Como cabe esperar, uno de los valores propios tiende a infinito cuando  $\mu$  tiene a infinito, por lo que la matriz  $\nabla^2 F(x_1, x_2)$  está mal condicionada, lo que nos plantea dificultades para valores grandes del parámetro de penalización. Para solventar dichas dificultades resolveremos el problema mediante el método SUMT<sup>2</sup>.

El problema a resolver por el método SUMT, para la iteración  $k$ -ésima es:

$$\text{Minimizar } F(x_1, x_2) = 4 + \underbrace{3(1 - x_1)^2 + (1 - x_2)^2}_{g(x_1, x_2)} + \mu_k \underbrace{(3x_1 + x_2 - 5)^2}_{\alpha(x_1, x_2)}.$$

Elegimos<sup>3</sup>, por ejemplo, como valores iniciales  $\mu_1 = 0, 1$ ,  $\beta = 10 > 1$ , y  $\varepsilon = 0,001 > 0$ . Así, la primera iteración sería

$$\mathbf{x}_2 = \left( \frac{1 + 5\mu_1}{1 + 2\mu_1}, \frac{1 + 5\mu_1}{1 + 2\mu_1} \right) \simeq (1,0714; 1,0714);$$

$$g(\mathbf{x}_2) \simeq g(1,0714; 1,0714) = 4 + 3(1 - 1,0714)^2 + (1 - 1,0714)^2 \simeq 4,0204;$$

$$\alpha(\mathbf{x}_2) \simeq \alpha(1,0714; 1,0714) = (3 \cdot 1,0714 + 1,0714 - 5)^2 \simeq 0,5102;$$

$$\mu_1 \alpha(\mathbf{x}_2) = 0,0510;$$

Como  $\mu_1 \alpha(\mathbf{x}_2) > \varepsilon$  hacemos  $\mu_2 = \beta \mu_1 = 1$  y realizamos la segunda iteración. Repetimos el proceso hasta que  $\mu_k \alpha(\mathbf{x}_{k+1}) < \varepsilon$ , cosa que sucede tras la cuarta iteración. Los resultados de las iteraciones realizadas se recogen en el cuadro 11, y su representación gráfica se dibuja en la figura 61. Se puede observar que se ha llegado a un valor realmente próximo a la solución exacta del problema, que es el punto  $\bar{\mathbf{x}} = (1,25; 1,25)$ .

<sup>2</sup>Sequential Unconstrained Minimization Technique.

<sup>3</sup>En este problema no es relevante el punto de partida, aunque en problemas más complejos puede ser necesario para determinar el siguiente punto aplicando, por ejemplo, el método de Newton.

$k$	$\mu_k$	$\mathbf{x}_{k+1}$	$g(\mathbf{x}_{k+1})$	$\alpha(\mathbf{x}_{k+1})$	$F(\mathbf{x}_{k+1})$	$\mu_k \alpha(\mathbf{x}_{k+1})$
1	0,1	(1,0714; 1,0714)	4,0204	0,5102	4,0714	0,0510
2	1	(1,2000; 1,2000)	4,1600	0,0400	4,2000	0,0400
3	10	(1,2439; 1,2439)	4,2380	0,0006	4,2439	0,0059
4	100	(1,2494; 1,2494)	4,2488	0,0000	4,2494	0,0006

Cuadro 11: Iteraciones del método SUMT para el problema 8.1.

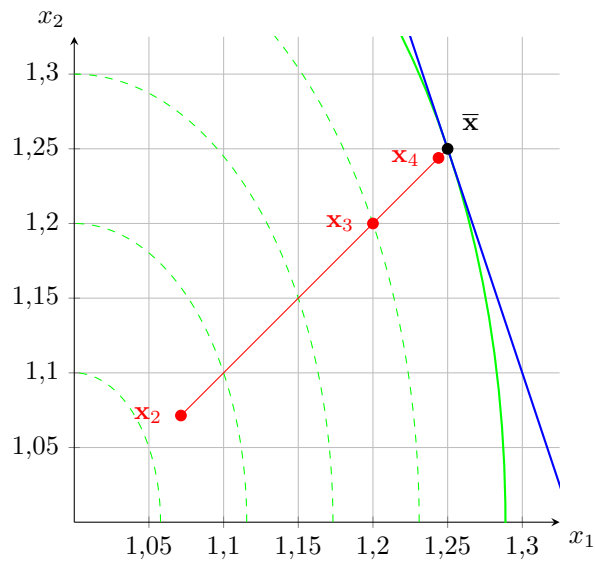


Figura 61: Resolución gráfica del problema 8.1.

**Solución del problema 8.2.** Las iteraciones del algoritmo de Dijkstra se recogen en el cuadro 12, y el grafo coloreado resultado de efectuar dicho algoritmo se representa en la figura 62. Se puede ver que el camino más corto desde el vértice 1 hasta el vértice 6 es el que recorre los arcos (1,2), (2,3) y (3,6), con una longitud total de  $1 + 1 + 4 = 6$ .

Iteración	1	2	3	4	4
Distancia	0	1	2	3	4
Vértice	1	2	3	5	5
2	$0 + 1 = \mathbf{1}$	—	—	—	—
3	$0 + 2 = 2$	<b>2</b>	—	—	—
4	$\infty$	$1 + 5 = 6$	$2 + 2 = 4$	<b>4</b>	—
5	$\infty$	$1 + 2 = 3$	<b>3</b>	—	—
6	$\infty$	$\infty$	$2 + 4 = 6$	6	<b>6</b>

Cuadro 12: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 8.2.

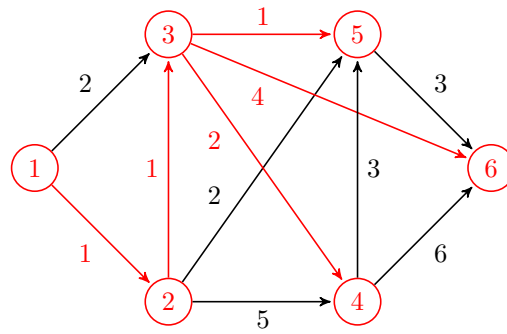


Figura 62: Grafo para el problema 8.2 tras la última iteración.



## MAYO DE 2015

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 9.1.** La convergencia del método de Newton-Raphson para el cálculo de extremos de una función real de variable real dos veces diferenciable está asegurada independientemente del punto inicial elegido.

**Cuestión 9.2.** La matriz de incidencia del grafo

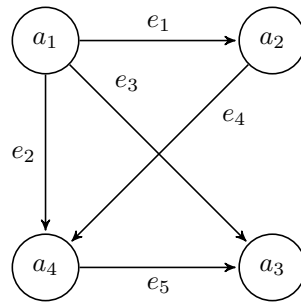


Figura 63: Grafo para la cuestión 9.2.

es la matriz

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

**Problema 9.1.** Encontrar la solución óptima del siguiente problema de programación no lineal mediante la aplicación de las condiciones de óptimo de Karush-Khun-Tucker.

$$\begin{aligned} \text{Maximizar} \quad & f(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2 - x_1^3 - x_2^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & x_1 + x_2 \leq 1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

**Problema 9.2.** Una compañía desea interconectar sus sucursales mediante fibra óptica. El esquema de las conexiones posibles se puede representar mediante el grafo de la figura 64, en el cual los nodos son los puntos que hay que conectar y los números sobre los arcos significan el coste del tendido de cable de fibra óptica entre los respectivos nodos. Establecer un modelo de optimización en redes para determinar de qué manera se ha de realizar la operación para que resulte lo más económica posible y encontrar su solución óptima mediante el correspondiente algoritmo. Expresar con detalle los elementos del modelo, los pasos del algoritmo e interpretar la solución.

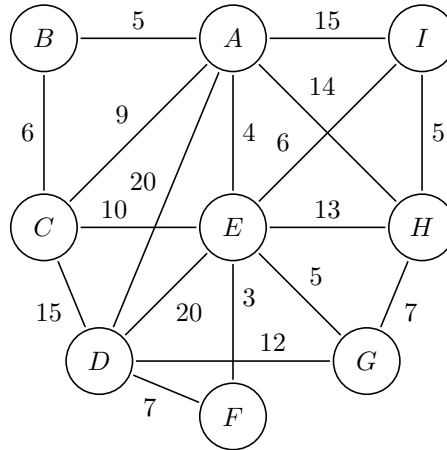


Figura 64: Grafo para el problema 9.2.

**Solución de la cuestión 9.1. FALSO.** En general, la sucesión generada por el método de Newton puede no converger. A pesar de ser dos veces diferenciable, la función podría no tener un mínimo, o la matriz hessiana podría no tener inversa, por citar solo algunas posibilidades.

**Solución de la cuestión 9.2. FALSO.** En el elemento  $g_{ij}$  de la matriz de incidencia de un grafo es, según la definición 2.33 (Ramos, 2017: 214), de la forma:

- 1 si el arco  $j$  empieza en el vértice  $i$ .
- $-1$  si el arco  $j$  termina en el vértice  $i$ .
- 0 en otro caso.

Según la citada definición, la matriz de incidencia para el grafo de la figura 63 es

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

**Solución del problema 9.1.** El problema dado es equivalente al siguiente, cuya resolución gráfica se puede ver en la figura 65:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_1(x_1, x_2) = -3x_1 - 4x_2 + x_1^3 + x_2^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0, \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas necesarias.

$$\nabla f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -3 + 3x_1^2 \\ -4 + 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6x_1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

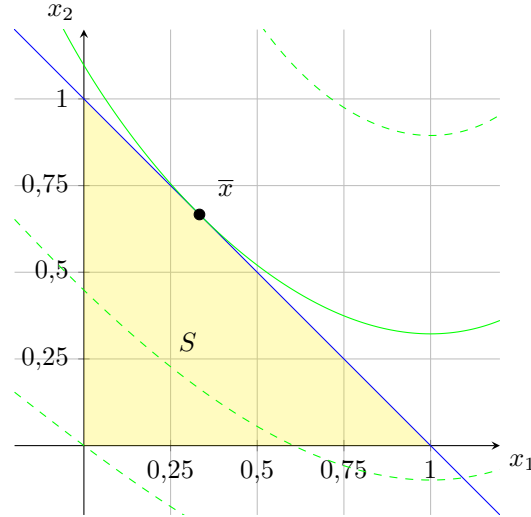


Figura 65: Resolución gráfica del problema 9.1.

Para el nuevo problema, las condiciones KKT son

$$\begin{aligned} \nabla f_1(x_1, x_2) + \mu_1 \nabla g_1(x_1, x_2) + \mu_2 \nabla g_2(x_1, x_2) + \mu_3 \nabla g_3(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1 g_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_2 g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_3 g_3(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} -3 + 3x_1^2 + \mu_1 - \mu_2 &= 0, \\ -4 + 2x_2 + \mu_1 - \mu_3 &= 0, \\ \mu_1(x_1 + x_2 - 1) &= 0, \\ -\mu_2 x_1 &= 0, \\ -\mu_3 x_2 &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Estudiamos por separado cada una de las posibles combinaciones de valores que satisfacen las ecuaciones de las holguras complementarias, puesto que estas se pueden obtener de inmediato.

- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -3 + 3x_1^2 = 0, \\ -4 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Y las soluciones,

$$x_1 = \pm 1, \quad x_2 = 2;$$

pero ninguno de los puntos está en la región factible.

- $\mu_1 = \mu_2 = 0, x_2 = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -3 + 3x_1^2 = 0, \\ -4 - \mu_3 = 0. \end{cases}$$

Y las soluciones

$$x_1 = \pm 1, \quad \mu_3 = -4 < 0;$$

que no son válidas por ser  $\mu_3 < 0$  (una de ellas tampoco es factible).

- $\mu_1 = \mu_3 = 0, x_1 = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -3 - \mu_2 = 0, \\ -4 - 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Y la solución

$$x_2 = -2, \quad \mu_2 = -3 < 0;$$

que no es válida tanto por no ser factible como por ser  $\mu_2 < 0$ .

- $\mu_1 = 0, x_1 = x_2 = 0$ . En este caso las dos primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -3 - \mu_2 = 0, \\ -4 - \mu_3 = 0. \end{cases}$$

Y la solución

$$\mu_2 = -3 < 0, \quad \mu_3 = -4 < 0;$$

que no es válida por ser  $\mu_2 < 0$  y  $\mu_3 < 0$ .

- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = \mu_3 = 0$ . En este caso las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -3 + 3x_1^2 + \mu_1 = 0, \\ -4 + 2x_2 + \mu_1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Restando las dos primeras ecuaciones obtenemos

$$1 + 3x_1^2 - 2x_2 = 0,$$

y sumándole dos veces la tercera al resultado,

$$3x_1^2 + 2x_1 - 1 = 0 \implies x_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6} \implies \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_1 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Descartamos la primera solución por no ser factible, y para  $x_1 = \frac{1}{3}$  el resto de las incógnitas son

$$x_2 = 1 - x_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad \mu_1 = 4 - 2x_2 = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0, x_2 = 0$ . En este caso las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -3 + 3x_1^2 + \mu_1 = 0, \\ -4 + \mu_1 - \mu_3 = 0, \\ x_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Y la solución

$$x_1 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_3 = -4 < 0;$$

que no es válida por ser  $\mu_3 < 0$ .

- $\mu_1 \neq 0, \mu_3 = 0, x_1 = 0$ . En este caso las tres primeras ecuaciones son

$$\begin{cases} -3 + \mu_1 - \mu_2 = 0, \\ -4 + 2x_2 + \mu_1 = 0, \\ x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Y la solución

$$x_2 = 1, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = -3 < 0;$$

que no es válida por ser  $\mu_2 < 0$ .

En resumen, el único punto factible que verifica las condiciones KKT es el punto  $\bar{x} = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ . En dicho punto solo hay una restricción activa, la correspondiente a  $g_3$ . Además, la matriz hessiana de  $f_1$  en dicho punto es definida positiva, por lo que  $f_1$  es una función convexa en  $\bar{x}$ , y las funciones asociadas a las restricciones, (y en particular la restricción activa), son convexas, por ser afines. En consecuencia  $f_1$  es pseudoconvexa en  $\bar{x}$ , y  $g_3$  es cuasiconvexa en  $\bar{x}$ , punto que satisface las condiciones KKT, y que por tanto es la solución óptima global del problema.

En la figura 66 se representa la gráfica de la función  $f_1$  y la solución buscada.

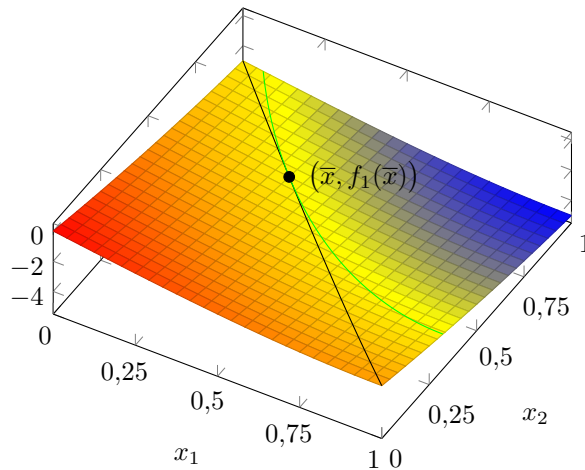


Figura 66: Gráfica de la función  $f_1(x_1, x_2)$ .

**Solución del problema 9.2.** Resolvemos el problema mediante el algoritmo del árbol de expansión mínimo. En primer lugar ordenamos las aristas en orden ascendente de peso, obteniendo:

$$(E, F), (A, E), (A, B), (E, G), (H, I), (B, C), (E, I), (D, F), (G, H), \\ (A, C), (C, E), (E, H), (A, H), (A, I), (C, D), (A, D), (D, E).$$

Inicialmente todas las aristas están sin colorear y todos los buckets están vacíos.

Primera iteración. Seleccionamos la arista  $(E, F)$ , la coloreamos de azul y colocamos los vértices  $E$  y  $F$  en el bucket 1.

Segunda iteración. Seleccionamos la arista  $(A, E)$ . Como  $E$  está en el bucket 1 y  $A$  no está en ninguno coloreamos la arista de azul e incluimos el vértice  $A$  en el bucket 1.

Tercera iteración. Seleccionamos la arista  $(A, B)$ . Como  $A$  está en el bucket 1 y  $B$  no está en ninguno coloreamos la arista de azul e incluimos el vértice  $B$  en el bucket 1.

Cuarta iteración. Seleccionamos la arista  $(E, G)$ . Como  $E$  está en el bucket 1 y  $G$  no está en ninguno coloreamos la arista de azul e incluimos el vértice  $G$  en el bucket 1.

Quinta iteración. Seleccionamos la arista  $(H, I)$ . Como  $H$  e  $I$  no están en ningún bucket coloreamos la arista de azul e incluimos los vértices  $H$  e  $I$  en el bucket 2.

Sexta iteración. Seleccionamos la arista  $(B, C)$ . Como  $B$  está en el bucket 1 y  $C$  no está en ninguno coloreamos la arista de azul e incluimos el vértice  $C$  en el bucket 1.

Séptima iteración. Seleccionamos la arista  $(E, I)$ . Como  $E$  está en el bucket 1 e  $I$  está en el bucket 2 coloreamos la arista de azul y añadimos todos los elementos del bucket 2 al bucket 1, dejando el bucket 2 vacío.

Octava iteración. Seleccionamos la arista  $(D, F)$ . Como  $F$  está en el bucket 1 y  $D$  no está en ninguno coloreamos la arista de azul e incluimos el vértice  $D$  en el bucket 1.

Todos los vértices del grafo están en el bucket 1, por lo que hemos llegado al final del algoritmo. Las aristas coloreadas de azul constituyen el árbol de expansión mínimo buscado. La solución se puede observar en la figura 67 y la figura 68, y un resumen de las iteraciones realizadas se recoge en el cuadro 13.

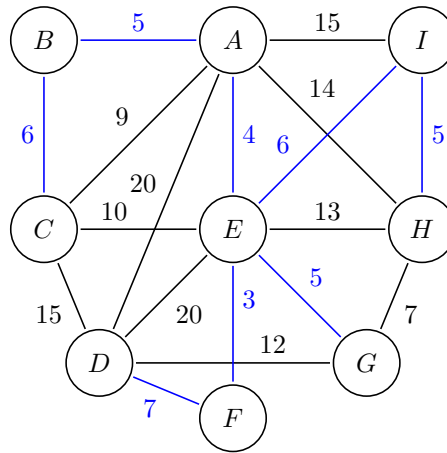


Figura 67: Grafo coloreado para el problema 9.2 tras la última iteración.

Iteración	Arista	Color	Bucket 1	Bucket 2
0			–	–
1	$(E, F)$	azul	$E, F$	–
2	$(A, E)$	azul	$A, E, F$	–
3	$(A, B)$	azul	$A, B, E, F$	–
4	$(E, G)$	azul	$A, B, E, F, G$	–
5	$(H, I)$	azul	$A, B, E, F, G$	$H, I$
6	$(B, C)$	azul	$A, B, C, E, F, G$	$H, I$
7	$(E, I)$	azul	$A, B, C, E, F, G, H, I$	–
8	$(D, F)$	azul	$A, B, C, D, E, F, G, H, I$	–

Cuadro 13: Resumen de las iteraciones del algoritmo del árbol de expansión mínimo para el problema 9.2.

La compañía debe realizar las conexiones que se indican en el árbol de expansión de la figura 68 para que los costes sean mínimos. En ese caso los costes serán (siguiendo el orden en el que se colorearon las aristas de azul):

$$3 + 4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 = 41.$$

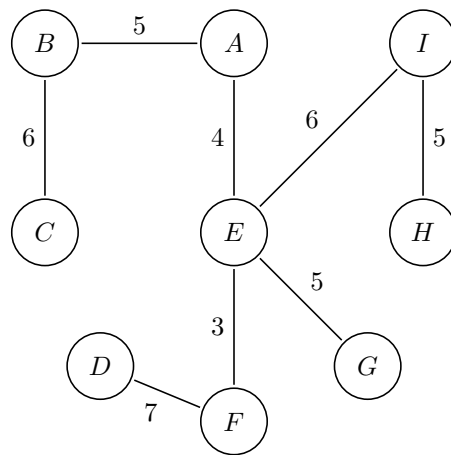


Figura 68: Árbol de expansión mínimo para el problema 9.2.

## JUNIO DE 2015

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 10.1.** El multiplicador de Lagrange asociado con una restricción de un problema de programación no lineal se puede definir como la razón de cambio de la función objetivo con respecto a un pequeño incremento en el lado derecho de la restricción.

**Cuestión 10.2.** La matriz de adyacencia del grafo

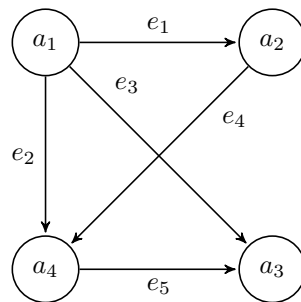


Figura 69: Grafo para la cuestión 10.2.

es la matriz

$$\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

**Problema 10.1.** Encontrar el máximo de la función

$$f(x_1, x_2) = -(x_1 - 3)^3 - (x_2 - 4)^2 + 1$$

mediante el método de Newton-Raphson. Tomar como punto inicial el punto  $(0, 0)$ .

**Problema 10.2.** Una compañía desea interconectar sus sucursales mediante fibra óptica. El esquema de las conexiones posibles se puede representar mediante el grafo de la figura 70, en el cual los nodos son los puntos que hay que conectar y los números sobre los arcos significan el coste del tendido de cable de fibra óptica entre los respectivos nodos. La compañía tiene una sede central en el nodo 1 y está dividida en dos grandes divisiones: una formada por los nodos 2, 3, 4 y 6; y otra formada por los nodos 5, 7, 8 y 9. Debido a restricciones operativas, las conexiones entre divisiones deben pasar por la sede central, es decir, no se desea conectar directamente un nodo de una división con un nodo de la otra división. Establecer un modelo de optimización en redes para determinar de qué manera se ha de realizar la operación para que resulte lo más económica posible y encontrar su solución óptima mediante el correspondiente algoritmo. Expresar con detalle los elementos del modelo, los pasos del algoritmo e interpretar la solución.



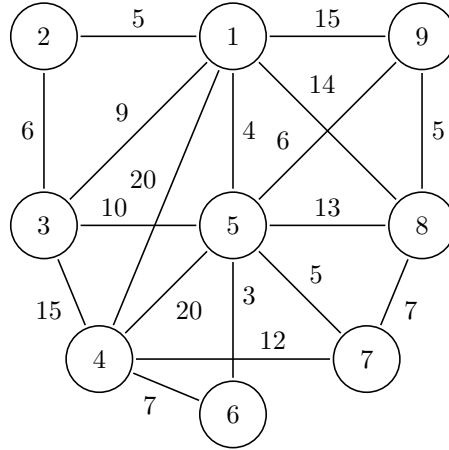


Figura 70: Grafo para el problema 10.2.

**Solución de la cuestión 10.1. VERDADERO**, el multiplicador de Lagrange asociado con una restricción es la razón de cambio de la función objetivo en el punto óptimo con respecto a un pequeño incremento en el lado derecho de la restricción, **pero cambiada de signo**. En efecto, consideramos el problema de programación no lineal dado por:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(\mathbf{x}), \\ &\text{Sujeto a} && g_i(\mathbf{x}) \leq c_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Por simplicidad se incluyen solo restricciones de desigualdad, aunque lo que se deduce a continuación también sería válido si alguna de las restricciones (o todas) fuesen de igualdad. Sea  $j \in \{1, \dots, m\}$ , y consideramos la restricción correspondiente,

$$g_i(\mathbf{x}) \leq c_j.$$

Sea  $\bar{\mathbf{x}}$  el punto óptimo del problema que se obtiene para los valores  $\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m$ . Evidentemente, un cambio en el valor de  $c_j$  puede suponer una variación del punto óptimo obtenido y de los correspondientes multiplicadores de Lagrange. Sea  $M$  el valor de la función objetivo  $f$  en el punto óptimo. Entonces podemos escribir, teniendo en cuenta las condiciones KKT (por las que todos los términos del sumatorio que sigue se han de anular),

$$M(c_j) = f(\bar{\mathbf{x}}(c_j)) = f(\bar{\mathbf{x}}(c_j)) + \sum_{i=1}^m \mu_i (g_i(\bar{\mathbf{x}}(c_j)) - c_i) = \mathcal{L}(\bar{\mathbf{x}}(c_j), \bar{\mu}_1(c_j), \dots, \bar{\mu}_m(c_j)).$$

Realizamos el cambio de variable

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \bar{\mathbf{x}}(c_j), \\ \mu_i^* &= \bar{\mu}_i(c_j), \quad i = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

y transformamos la expresión anterior en

$$M(c_j) = \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mu_1^*, \dots, \mu_m^*, c_j).$$

Derivamos, aplicando la regla de la cadena y teniendo en cuenta de nuevo las condiciones KKT,

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dc_j}(c_j) &= \frac{d}{dc_j} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mu_1^*, \dots, \mu_m^*, c_j) = \nabla \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mu_1^*, \dots, \mu_m^*, c_j) \frac{d\bar{\mathbf{x}}(c_j)}{dc_j} + \frac{\partial}{\partial c_j} \mathcal{L}(\mathbf{x}^*, \mu_1^*, \dots, \mu_m^*, c_j) \frac{dc_j}{dc_j} = \\ &= \underbrace{\left[ \nabla f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* \nabla (g_i(\mathbf{x}^*) - c_i) \right]}_0 \frac{d\mathbf{x}^*}{dc_j} + \frac{\partial}{\partial c_j} \left[ f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i^* (g_i(\mathbf{x}^*) - c_i) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial}{\partial c_j} f(\mathbf{x}^*) + \sum_{i=1}^m \mu_i \frac{\partial}{\partial c_j} (g_i(\mathbf{x}^*) - c_i) = \mu_j \frac{\partial}{\partial c_j} (g_j(\mathbf{x}^*) - c_j) = -\mu_j.$$

**Solución de la cuestión 10.2. FALSO.** Según la definición 2.32 (Ramos, 2017: 214), el elemento  $a_{ij}$  de la matriz de adyacencia de un grafo es igual al número de arcos que parten del vértice  $x_i$  hacia el vértice  $x_j$ , o sea, a la multiplicidad de  $x_i$  a  $x_j$ ,

$$a_{ij} = m_G^+(x_i, x_j).$$

Teniendo en cuenta lo dicho, la matriz de adyacencia para el grafo de la figura 69 es

$$\begin{matrix} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

La matriz que se da es la matriz de incidencia del grafo.

**Solución del problema 10.1.** El problema a resolver es equivalente a: Encontrar la solución óptima del siguiente problema de programación no lineal mediante la aplicación de las condiciones de óptimo de Karush-Khun-Tucker.

$$\text{Minimizar } g(x_1, x_2) = -f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^3 + (x_2 - 4)^2 - 1.$$

Calculamos el gradiente de  $g$ , y la matriz hessiana de  $g$ , y su inversa, que estará definida siempre y cuando  $x_1 \neq 3$ .

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 3(x_1 - 3)^2 \\ 2(x_2 - 4) \end{pmatrix}, \quad H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 6(x_1 - 3) & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \\ H(x_1, x_2)^{-1} &= \frac{1}{6(x_1 - 3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3(x_1 - 3) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En el método de Newton, una vez obtenido el punto  $\mathbf{x}_k$ , realizamos la iteración  $k$  para obtener el punto  $\mathbf{x}_{k+1}$  mediante la siguiente expresión

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - H(\mathbf{x}_k)^{-1} \nabla f(\mathbf{x}_k).$$

Sustituimos los resultados anteriores y operamos,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1^{k+1} \\ x_2^{k+1} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - \frac{1}{6(x_1^k - 3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3(x_1^k - 3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3(x_1^k - 3)^2 \\ 2(x_2^k - 4) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^k - 3 \\ 2(x_2^k - 4) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1^k + 3 \\ 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Las primeras iteraciones realizadas partiendo del punto  $(0, 0)$  se recogen en el cuadro 14. Es inmediato ver que el proceso iterativo converge<sup>4</sup> al punto  $\bar{\mathbf{x}} = (3, 4)$ , aunque en este caso dicho punto es un punto de silla para la función  $g$  (y por tanto también para  $f$ ) cosa que se puede ver fácilmente en la figura 71, aunque comprobaremos de forma analítica. Sea  $\varepsilon > 0$  y consideramos los puntos  $(3 + \varepsilon, 4)$  y  $(3 - \varepsilon, 4)$ . Entonces,

$$\begin{aligned} f(3 + \varepsilon, 4) &= -(3 + \varepsilon - 3)^3 - (4 - 4)^2 + 1 = -\varepsilon^3 + 1 < 1 = f(3, 4); \\ f(3 - \varepsilon, 4) &= -(3 - \varepsilon - 3)^3 - (4 - 4)^2 + 1 = \varepsilon^3 + 1 > 1 = f(3, 4). \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Sería sencillo resolver la ecuación en diferencias en la primera componente, y obtendríamos  $x_1^k = 3(1 - 2^{1-k})$ .

$k$	$x_1^k$	$x_2^k$
1	0	0
2	1,5	4
3	2,25	4
4	2,625	4
5	2,8125	4
6	2,90625	4
7	2,953125	4
8	2,9765625	4

Cuadro 14: Primeras iteraciones del método de Newton para el problema 10.1.

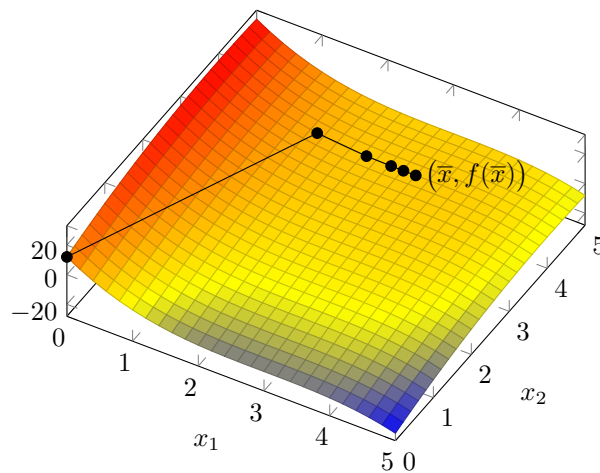
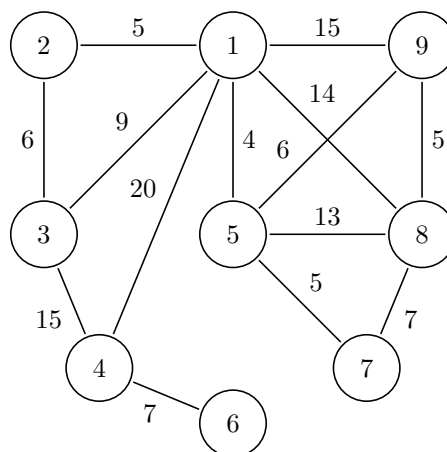
Figura 71: Gráfica de la función  $f(x_1, x_2)$  y primeras iteraciones del método de Newton.

Figura 72: Grafo modificado para el problema 10.2.

**Solución del problema 10.2.** El problema nos indica que debemos descartar como posibles las conexiones que van de una división de la compañía, formada por los nodos  $\{2, 3, 4, 6\}$ , a la otra formada por  $\{5, 7, 8, 9\}$ .

Modificamos el grafo de la figura 70 eliminando los arcos que conectan un vértice de cada uno de los conjuntos anteriores, y obtenemos el grafo de la figura 72.

Sobre el grafo así modificado resolvemos el problema mediante el algoritmo del árbol de expansión mínimo. En primer lugar ordenamos las aristas en orden ascendente de peso:

$$(1, 5), (1, 2), (5, 7), (8, 9), (2, 3), (5, 9), (4, 6), (7, 8), (1, 3), (5, 8), (1, 8), (1, 9), (3, 4), (1, 4).$$

En el cuadro 15 se recoge un resumen de las iteraciones realizadas hasta concluir con el algoritmo. La solución se puede observar en la figura 73 y la figura 74.

Iteración	Arista	Color	Bucket 1	Bucket 2
0			–	–
1	(1, 5)	azul	1, 5	–
2	(1, 2)	azul	1, 2, 5	–
3	(5, 7)	azul	1, 2, 5, 7	–
4	(8, 9)	azul	1, 2, 5, 7	8, 9
5	(2, 3)	azul	1, 2, 3, 5, 7	8, 9
6	(5, 9)	azul	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9	–
7	(4, 6)	azul	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9	4, 6
8	(7, 8)	naranja	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9	4, 6
9	(1, 3)	naranja	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9	4, 6
10	(5, 8)	naranja	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9	4, 6
11	(1, 8)	naranja	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9	4, 6
12	(1, 9)	naranja	1, 2, 3, 5, 7, 8, 9	4, 6
13	(3, 4)	azul	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	–

Cuadro 15: Resumen de las iteraciones del algoritmo del árbol de expansión mínimo para el problema 10.2.

La compañía debe realizar las conexiones que se indican en el árbol de expansión de la figura 74 para que los costes sean mínimos. En ese caso los costes serán (siguiendo el orden en el que se colorearon las aristas de azul):

$$4 + 5 + 5 + 5 + 6 + 6 + 7 + 15 = 53.$$

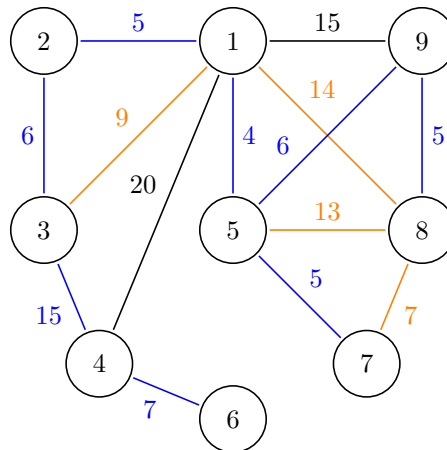


Figura 73: Grafo coloreado para el problema 10.2 tras la última iteración.

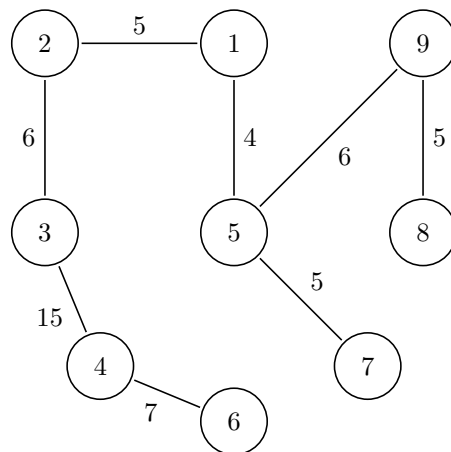


Figura 74: Árbol de expansión mínimo para el problema 10.2.

## SEPTIEMBRE DE 2015 – CONVOCATORIA ORDINARIA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 11.1.** La región factible de un problema de programación no lineal puede ser un conjunto convexo aun cuando las funciones de restricción no sean convexas ni cóncavas.

**Cuestión 11.2.** Un grafo  $G = (X, U)$  tiene un grafo parcial que es un árbol si y solo si  $G$  es conectado.

**Problema 11.1.** Resolver, utilizando las condiciones de Kuhn-Tucker, el problema de programación no lineal siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) = x_1^2 - x_2, \\ \text{Sujeto a} & x_1 + x_2 = 6, \\ & x_1 \geq 1, \\ & x_1^2 + x_2^2 \leq 26. \end{array}$$

**Problema 11.2.** Consideremos la red de flujo representada en la figura 75, en donde la fuente es el vértice 1, el sumidero el vértice 6 y el número de cada arco indica su capacidad.

- (a) Calcular el flujo máximo que puede enviarse desde la fuente al sumidero, por enumeración de todos los posibles cortes que pueden establecerse en la red y determinación de la capacidad de cada uno de ellos.
- (b) Establecer el flujo de cada arco en la solución óptima.

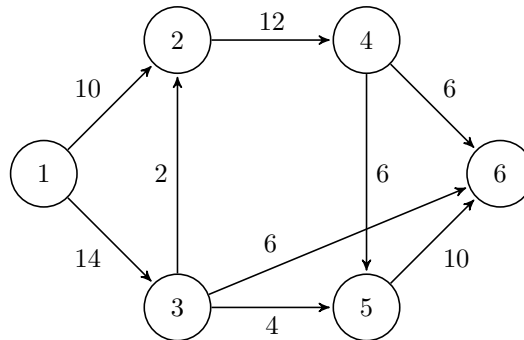
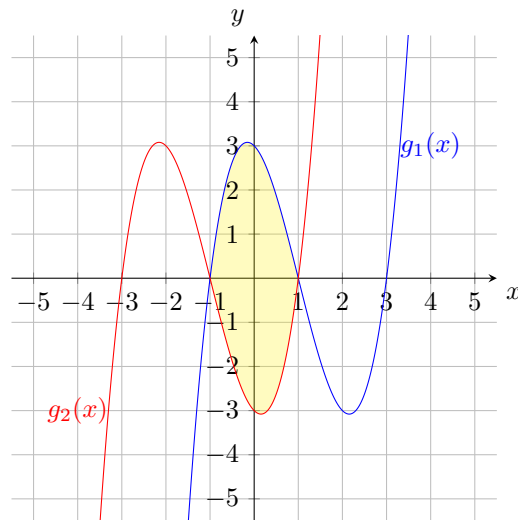


Figura 75: Grafo para el problema 11.2.

**Solución de la cuestión 11.1. FALSO.** Consideramos, por ejemplo, el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x), \\ \text{Sujeto a} & g_1(x) = (x-1)^3 - 4(x-1) \leq 0, \\ & g_2(x) = (x+1)^3 - 4(x+1) \geq 0. \end{array}$$

Las funciones asociadas a las restricciones,  $g_1$  y  $g_2$ , no son ni cóncavas ni convexas, pero la región factible sí es un conjunto convexo, tal y como se puede ver en la figura 76.

Figura 76: Gráficas de las funciones  $g_1$  y  $g_2$ .

**Solución de la cuestión 11.2. VERDADERO.** Es el teorema 2.5 (Ramos, 2017: 238). Si  $G$  no fuese conectado entonces ningún grafo parcial de  $G$  podría ser conectado. Por lo tanto  $G$  no tendría un grafo parcial que fuese un árbol.

Supongamos ahora que  $G$  es conectado. Busquemos un arco tal que cuando se elimina dicho arco del grafo este sigue siendo conectado. Si no existiese tal arco entonces  $G$  es un árbol. Si existe tal arco, eliminemos dicho arco del grafo, busquemos otro arco del grafo que cumpla la misma condición y repitamos el razonamiento. Finalmente, cuando no sea posible eliminar más arcos con dicha característica, el grafo resultante será un árbol cuyo conjunto de vértices es el conjunto  $X$ .

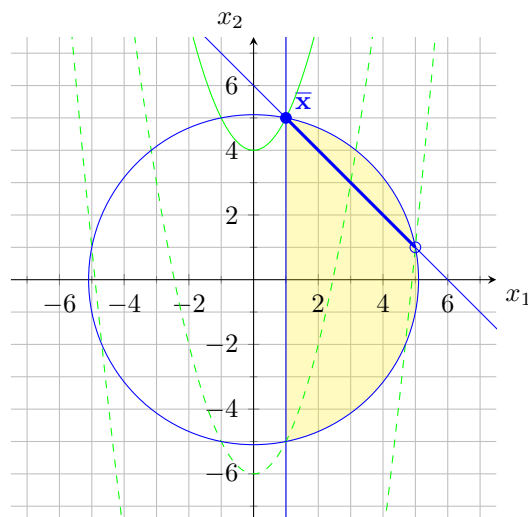


Figura 77: Representación gráfica del problema 11.1.

**Solución del problema 11.1.** El problema dado se puede escribir de la forma habitual tal y como se muestra a continuación, y su representación gráfica se da en la figura 77.

$$\begin{aligned}
&\text{Minimizar} && f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2, \\
&\text{Sujeto a} && g_1(x_1, x_2) = -x_1 + 1 \leq 0, \\
&&& g_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 26 \leq 0, \\
&&& h_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6 = 0,
\end{aligned}$$

Y las condiciones KKT para el problema propuesto son

$$\begin{aligned}
\nabla f(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^2 \mu_i \nabla g_i(x_1, x_2) + \nu_1 \nabla h_1(x_1, x_2) &= 0, \\
\mu_1 g_1(x_1, x_2) &= 0, \\
\mu_2 g_2(x_1, x_2) &= 0, \\
\mu_1, \mu_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Calculamos los gradientes necesarios,

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla h_1(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
2x_1 - \mu_1 + 2\mu_2 x_1 + \nu_1 &= 0, \\
-1 + 2\mu_2 x_2 + \nu_1 &= 0, \\
\mu_1(-x_1 + 1) &= 0, \\
\mu_2(x_1^2 + x_2^2 - 26) &= 0, \\
\mu_1, \mu_2 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Resolvemos las ecuaciones, empezando por los posibles valores que satisfacen las holguras complementarias.

- $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . De la segunda ecuación obtenemos  $\nu_1 = 1$ , de la primera  $x_1 = -\frac{1}{2}$ , y de restricción de igualdad  $x_2 = \frac{13}{2}$ . El punto obtenido no pertenece a la región factible.
- $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ . Sustituyendo en la primera, segunda y cuarta ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned}
2x_1 + 2\mu_2 x_1 + \nu_1 &= 0, \\
-1 + 2\mu_2 x_2 + \nu_1 &= 0, \\
x_1^2 + x_2^2 - 26 &= 0.
\end{aligned}$$

De la última ecuación y de la restricción de igualdad obtenemos los valores de  $x_1$  y  $x_2$ .

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 6 = 0 &\implies x_2 = 6 - x_1; \\
x_1^2 + x_2^2 - 26 = 0 &\implies x_1^2 + (6 - x_1)^2 = 26 \implies 2x_1^2 - 12x_1 + 10 = 0 \implies x_1^2 - 6x_1 + 5 = 0 \implies \\
&\implies x_1 = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \implies \begin{cases} x_1 = 1, & x_2 = 5; \\ x_1 = 5, & x_2 = 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Restamos las dos primeras ecuaciones, y despejamos  $\mu_2$ ,

$$2x_1 + 1 + 2\mu_2(x_1 - x_2) = 0 \implies \mu_2 = \frac{2x_1 + 1}{2(x_2 - x_1)},$$

y de la segunda despejamos  $\nu_1$ ,

$$\nu_1 = 1 - 2\mu_2 x_2.$$

Las posibles soluciones son

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 5, \quad \mu_2 = \frac{3}{8} > 0, \quad \nu_1 = -\frac{11}{4};$$



$$x_1 = 5, x_2 = 1, \mu_2 = -\frac{11}{8} < 0, \nu_1 = \frac{15}{4};$$

pero descartamos la segunda posibilidad por ser  $\mu_2 < 0$ .

- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$ . Sustituyendo en la primera, segunda y tercera ecuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} 2x_1 - \mu_1 + \nu_1 &= 0, \\ -1 + \nu_1 &= 0, \\ -x_1 + 1 &= 0, \end{aligned}$$

Sabemos que  $x_1 = 1$ , y de la restricción de igualdad que  $x_2 = 5$ . Además,  $\nu_1 = 1$  y

$$\mu_1 = 2x_1 + \nu_1 = 11.$$

- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$ . Sustituyendo en las cuatro ecuaciones,

$$\begin{aligned} 2x_1 - \mu_1 + 2\mu_2 x_1 + \nu_1 &= 0, \\ -1 + 2\mu_2 x_2 + \nu_1 &= 0, \\ -x_1 + 1 &= 0, \\ x_1^2 + x_2^2 - 26 &= 0. \end{aligned}$$

De las dos ultimas ecuaciones se obtiene  $x_1 = 1$  y  $x_2 = \pm 5$ . Si  $x_2 = -5$  el punto no está satisface la restricción de igualdad, y la otra posibilidad corresponde a una solución ya hallada.

El único punto que satisface las condiciones KKT es  $\bar{\mathbf{x}} = (1, 5)$ , aunque no podemos garantizar que dicho punto sea un punto óptimo del problema, puesto que los gradientes de  $g_1$ ,  $g_2$  y  $h_1$  no son independientes. Podríamos haber resuelto el problema sin tener en cuenta la primera restricción, pues no se altera la región factible, y entonces si podríamos estudiar las condiciones KKT. La representación gráfica de la figura 77 o la figura 77 ya permite ver que el punto  $\bar{\mathbf{x}}$  es el mínimo global del problema. De todas formas demostraremos que eso es así.

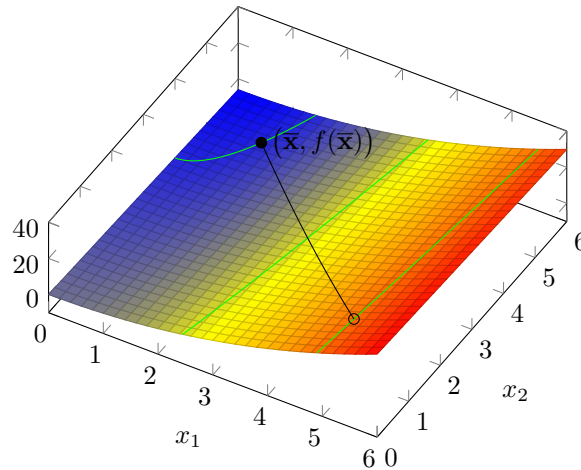


Figura 78: Gráfica de la función  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$ .

Teniendo en cuenta que la región factible del problema es el conjunto

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 6 - x_1, 1 \leq x_1 \leq 5\},$$

sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in S$ . Entonces,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 = x_1^2 - (6 - x_1) = x_1^2 + x_1 - 6 \geq 1^2 + 1 - 6 = -4 = f(1, 5) = f(\bar{\mathbf{x}}).$$

**Solución del problema 11.2.**

(a) Consideramos todos los cortes simples que dejan a la fuente (vértice 1) en una de las componentes conexas,  $X_1$ , y al sumidero (vértice 6) en la otra,  $X_6$ . Cada arco del corte es tal que

- (1) O bien tiene su vértice inicial en  $X_1$  y su vértice final en  $X_6$ ,
- (2) O bien tiene su vértice inicial en  $X_6$  y su vértice final en  $X_1$ .

La capacidad de cada corte es, según la definición 2.85 (Ramos, 2017: 300), la suma de las capacidades de los arcos que cumplen la propiedad (1).

Los posibles cortes que cumplen estas propiedades junto con sus capacidades se recogen en el cuadro 16, y entonces podemos aplicar la proposición 2.13 (Ramos, 2017: 301) y sabemos que el flujo máximo será menor o igual al mínimo de la capacidad de los cortes realizados, y será por tanto de 22 unidades como máximo.

Corte	$X_1$	$X_6$	Capacidad
$\{(1, 2), (1, 3)\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	$10 + 14 = 24$
$\{(1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$14 + 12 + 0 = 26$
$\{(1, 2), (3, 2), (3, 4), (3, 6)\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4, 5, 6\}$	$10 + 2 + 4 + 6 = 22$
$\{(2, 4), (3, 5), (3, 6)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	$12 + 4 + 6 = 22$
$\{(1, 3), (3, 2), (4, 5), (4, 6)\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{3, 5, 6\}$	$14 + 0 + 6 + 6 = 26$
$\{(1, 2), (3, 2), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$	$10 + 2 + 6 + 0 + 10 = 28$
$\{(3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5, 6\}$	$4 + 6 + 6 + 6 = 22$
$\{(2, 4), (3, 6), (4, 5), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{4, 6\}$	$12 + 6 + 0 + 10 = 28$
$\{(1, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{3, 6\}$	$14 + 0 + 0 + 6 + 10 = 30$
$\{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{2, 6\}$	$10 + 0 + 2 + 6 + 6 + 10 = 34$
$\{(3, 6), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{6\}$	$6 + 6 + 10 = 22$

Cuadro 16: Cortes para el problema 11.2.

(b) Una posible solución es la representada en el grafo de la figura 79, en la que el flujo coincide con el calculado en el apartado anterior, y es de 22 unidades.

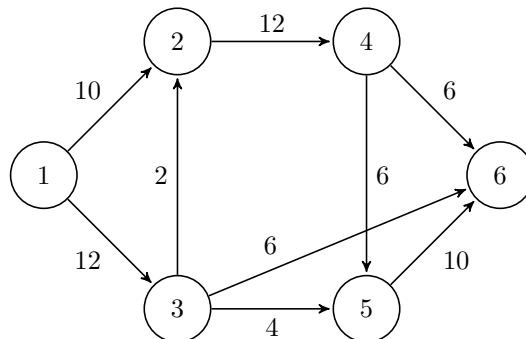


Figura 79: Flujo máximo para el problema 11.2.

## SEPTIEMBRE DE 2015 – CONVOCATORIA DE RESERVA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 12.1.** Una función estrictamente cuasiconvexa es necesariamente cuasiconvexa.

**Cuestión 12.2.** Si  $G = (X, U)$  es un grafo fuertemente conectado que tiene al menos un arco entonces cada arco del grafo pertenece a un circuito.

**Problema 12.1.** Sea el problema de programación no lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & f(x_1, x_2) = -4 - 3(1 - x_1)^2 - (1 - x_2)^2, \\ \text{Sujeto a} & 3x_1 + x_2 = 5. \end{array}$$

- (a) Representarlo geométricamente e interpretarlo.
- (b) Resolverlo utilizando el método de las penalizaciones con función de penalización pérdida cuadrática.

**Problema 12.2.** Consideremos la red de flujo representada en la figura 80, en donde la fuente es el vértice 1, el sumidero el vértice 6 y el número de cada arco indica su capacidad.

- (a) Calcular el flujo máximo que puede enviarse desde la fuente al sumidero, por enumeración de todos los posibles cortes que pueden establecerse en la red y determinación de la capacidad de cada uno de ellos.
- (b) Establecer el flujo de cada arco en la solución óptima.

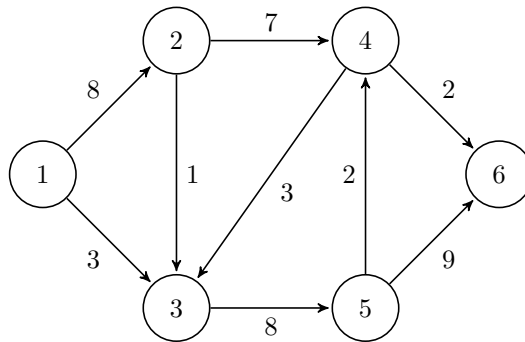


Figura 80: Grafo para el problema 12.2.

**Solución de la cuestión 12.1. VERDADERO.** Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente cuasiconvexa, sean  $x_1, x_2 \in S$  y sea  $\lambda \in (0, 1)$ . Si  $x_1 = x_2$  se tiene que

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_1) = f(x_1) = f(x_2) = \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

Y si  $x_1 \neq x_2$ , atendiendo a la definición de función estrictamente cuasiconvexa,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

En cualquiera de los dos casos,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\},$$

por lo que  $f$  es una función cuasiconvexa.

**Solución de la cuestión 12.2. VERDADERO.** Teorema 2.9 (Ramos, 2017: 247). Por la definición 2.65 (Ramos, 2017: 247), un grafo  $G = (X, U)$  es fuertemente conectado si para cada par de vértices  $x, y \in X$  existe un camino  $\mu_1[x, y]$  y un camino  $\mu_2[y, x]$ . Sea  $G = (X, U)$  un grafo conectado que contiene al menos un arco, y sea  $(a, b)$  un arco de  $G$ . Como existe un camino de  $b$  a  $a$  entonces el arco  $(a, b)$  está contenido en un circuito.

**Solución del problema 12.1.** Es idéntico al problema 8.1, de la página 52.

**Solución del problema 12.2.**

(a) Consideramos todos los cortes simples que dejan a la fuente (vértice 1) en una de las componentes conexas,  $X_1$ , y al sumidero (vértice 6) en la otra,  $X_6$ . Cada arco del corte es tal que

- (1) O bien tiene su vértice inicial en  $X_1$  y su vértice final en  $X_6$ ,
- (2) O bien tiene su vértice inicial en  $X_6$  y su vértice final en  $X_1$ .

La capacidad de cada corte es, según la definición 2.85 (Ramos, 2017: 300), la suma de las capacidades de los arcos que cumplen la propiedad (1).

Los posibles cortes que cumplen estas propiedades junto con sus capacidades se recogen en el cuadro 17, y entonces podemos aplicar la proposición 2.13 (Ramos, 2017: 301) y sabemos que el flujo máximo será menor o igual al mínimo de la capacidad de los cortes realizados, y será por tanto de 9 unidades como máximo.

Corte	$X_1$	$X_6$	Capacidad
$\{(1, 2), (1, 3)\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	$8 + 3 = 11$
$\{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$3 + 1 + 7 = 11$
$\{(1, 2), (2, 3), (3, 5), (4, 3)\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4, 5, 6\}$	$8 + 0 + 8 + 0 = 16$
$\{(2, 4), (3, 5), (4, 3)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	$7 + 8 + 0 = 15$
$\{(1, 3), (2, 3), (4, 3), (4, 6), (5, 4)\}$	$\{1, 2, 4\}$	$\{3, 5, 6\}$	$3 + 1 + 3 + 2 + 0 = 9$
$\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (5, 4)\}$	$\{1, 3, 4\}$	$\{2, 5, 6\}$	$8 + 0 + 0 + 8 + 2 + 0 = 18$
$\{(1, 2), (2, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$	$8 + 0 + 0 + 2 + 9 = 19$
$\{(3, 5), (4, 6), (5, 4)\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$\{5, 6\}$	$8 + 2 + 0 = 10$
$\{(2, 4), (4, 3), (5, 4), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{4, 6\}$	$7 + 0 + 2 + 9 = 18$
$\{(1, 3), (2, 3), (3, 5), (4, 3), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{3, 6\}$	$3 + 1 + 0 + 3 + 2 + 9 = 18$
$\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{2, 6\}$	$8 + 0 + 7 + 2 + 9 = 26$
$\{(4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{6\}$	$2 + 9 = 11$

Cuadro 17: Cortes para el problema 12.2.

(b) Una posible solución es la representada en el grafo de la figura 81, en la que el flujo coincide con el calculado en el apartado anterior, y es de 9 unidades.

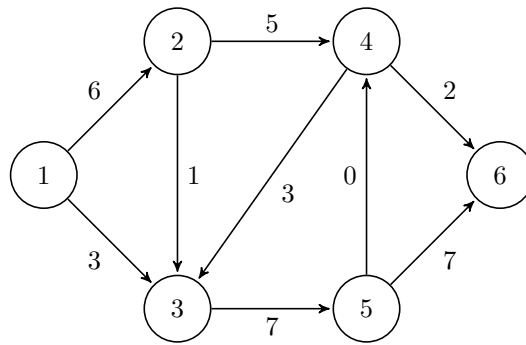


Figura 81: Flujo máximo para el problema 12.2.

## MAYO DE 2016

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 13.1.** Sean  $f_1$  y  $f_2$  funciones convexas. Entonces la función  $f(x) = \min \{f_1(x), f_2(x)\}$  es una función convexa.

**Cuestión 13.2.** En el grafo representado en la figura 82 el vector de representación del cociclo  $w(A)$ , siendo  $A = \{a, b, c\}$ , es  $w_A = (0, 0, 0, 0, 1, 1, -1)$ .

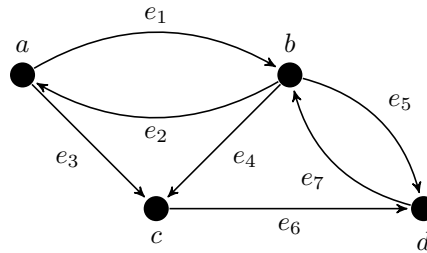


Figura 82: Grafo para la cuestión 13.2.

**Problema 13.1.** Una compañía planea distribuir un nuevo producto de consumo cuyo coste unitario de fabricación es de 0,10 euros. El departamento de mercadotecnia estima que el número de unidades  $n$  que se pueden vender diariamente es función de su precio de venta  $p$  y se puede aproximar mediante la expresión

$$n = \frac{1000}{p^2}.$$

- Plantear un modelo de optimización para determinar el precio que debe asignarse al producto a fin de maximizar el beneficio neto de la empresa, es decir, ingresos por ventas menos costes de producción.
- Encontrar la solución del modelo mediante las condiciones teóricas de óptimo.
- Aproximar la solución mediante el método de Fibonacci, con las siguientes especificaciones: intervalo de incertidumbre inicial  $[0; 0,3]$ ; longitud final aceptable del intervalo de incertidumbre  $\ell \leq 0,01$ ; constante para distinguir los puntos finales  $\epsilon = 0,005$ .

**Problema 13.2.** Se desea construir una red de carreteras para unir cinco núcleos de población. En la tabla siguiente se muestra el coste estimado de construcción del tramo que une cada pareja de núcleos cuando es posible realizarlo, mientras que la ausencia del dato indica que no se puede construir el correspondiente tramo.

Núcleo	Núcleo				
	N1	N2	N3	N4	N5
N1	0	3	5	11	9
N2	3	0	3	9	8
N3	5	3	0	–	10
N4	11	9	–	0	7
N5	9	8	10	7	0

- (a) Plantear un modelo de redes para representar las posibles carreteras y su coste de construcción.
- (b) Identificar mediante la utilización del correspondiente algoritmo la red de carreras que permite conectar entre sí todos los núcleos de población con el menor coste posible.

**Solución de la cuestión 13.1. FALSO.** Consideremos por ejemplo las funciones convexas  $f_1(x) = (x+1)^2$  y  $f_2(x) = (x-1)^2$ , y sea

$$f(x) = \min \{f_1(x), f_2(x)\} = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq 0, \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Sean  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$  y  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= f\left(\frac{1}{2} \cdot (-1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot 1\right) = f(0) = (0+1)^2 = 1 > \\ &> 0 = \frac{1}{2}(-1+1)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(1-1)^2 = \frac{1}{2}f(-1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)f(1) = \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2); \end{aligned}$$

lo que confirma que  $f$  no es una función convexa. En la figura 83 se puede ver una interpretación gráfica del problema.

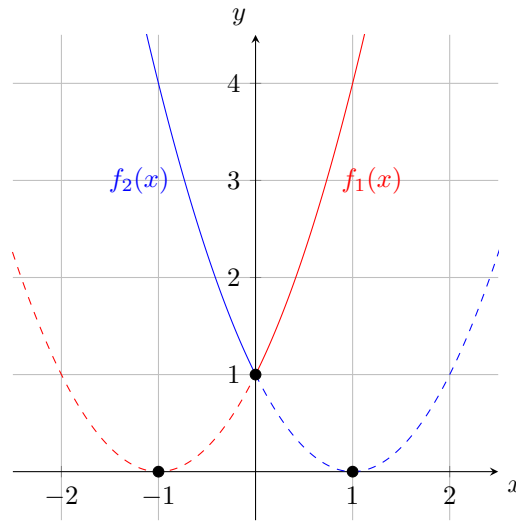


Figura 83: Gráficas de las funciones  $f_1$  (en rojo),  $f_2$  (en azul) y  $f$  (en línea discontinua).

**Solución de la cuestión 13.2. VERDADERO.** Calculemos los conjuntos de arcos incidentes exteriores e interiores a  $A = \{a, b, c\}$ , que son respectivamente

$$w^+(A) = \{e_5, e_6\}, \quad w^-(A) = \{e_7\}.$$

Teniendo en cuenta la definición 2.48 (Ramos, 2017: 220) de vector de representación de un cociclo, sabemos que  $w_A = (w_1, w_2, \dots, w_7)$ , con

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin w(A), \\ 1 & \text{si } i \in w^+(A), \\ -1 & \text{si } i \in w^-(A). \end{cases}$$

Por tanto,  $w_A = (0, 0, 0, 0, 1, 1, -1)$ .

**Solución del problema 13.1.** Si llamamos  $I(p)$ ,  $C(p)$  y  $B(p)$  respectivamente a las funciones que permiten calcular los ingresos, costes y beneficios en función del precio de venta unitario  $p$ , estas funciones son

$$I(p) = pn(p) = \frac{1000}{p}, \quad C(p) = 0, 10n(p) = \frac{100}{p^2}, \quad B(p) = I(p) - C(p) = \frac{1000}{p} - \frac{100}{p^2}.$$

(a) El problema a resolver es:

$$\text{Maximizar } B(p) = \frac{1000}{p} - \frac{100}{p^2}.$$

O, equivalentemente,

$$\text{Minimizar } \theta(p) = -B(p) = \frac{100}{p^2} - \frac{1000}{p}.$$

(b) Escribimos la función  $\theta$  en forma potencial y obtenemos sus dos primeras derivadas.

$$\theta(p) = 100p^{-2} - 1000p^{-1}, \quad \theta'(p) = -200p^{-3} + 1000p^{-2} = 200p^{-3}(-1 + 5p),$$

$$\theta''(p) = 600p^{-4} - 2000p^{-3} = 200p^{-4}(3 - 10p).$$

Las condiciones suficientes de segundo orden de óptimo local son, según el teorema 1.23 (Ramos, 2017: 71), para una función de una variable

$$\theta'(\bar{p}) = 0, \quad \theta''(\bar{p}) > 0.$$

Buscamos los puntos que satisfagan dichas condiciones, teniendo en cuenta que la función  $\theta$  está definida en  $(0, +\infty)$ .

$$\theta'(p) = 0 \implies 200p^{-3}(-1 + 5p) = 0 \implies -1 + 5p = 0 \implies p = 0, 2;$$

$$\theta''(0, 2) = 200 \cdot 0,2^{-4}(3 - 10 \cdot 0, 2) = 0, 32 > 0.$$

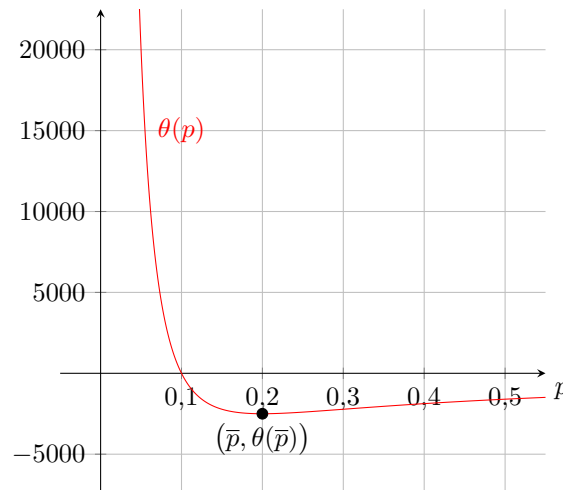


Figura 84: Gráfica de la función  $\theta(p)$ .

Por tanto, el mínimo de la función  $\theta$ , y el beneficio máximo, se alcanzan cuando el precio de venta unitario es  $\bar{p} = 0, 2$ . En principio hemos obtenido un mínimo local, pero como

$$0 < p < 0, 2 \implies -1 < -1 + 5p < 0 \implies \theta'(p) < 0,$$



$$p > 0, 2 \implies -1 + 5p > 0 \implies \theta'(p) > 0;$$

entonces  $\theta$  es decreciente a la izquierda de  $\bar{p}$  y creciente a su derecha, por lo que el  $\bar{p}$  es también un mínimo global. En la figura 84 se puede ver la representación gráfica de la función  $\theta(p)$  y el mínimo obtenido.

(c) Con el intervalo de incertidumbre el problema a resolver es ahora:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \theta(p) = \frac{100}{p^2} - \frac{1000}{p}, \\ \text{Sujeto a} \quad & 0 < p \leq 0, 3. \end{aligned}$$

En este caso la función  $\theta$  es convexa para cualquier  $p \in [0; 0, 3]$  de la región factible, puesto que

$$0 < p \leq 0, 3 \implies 3 - 10p \geq 0 \implies 200p^{-4}(3 - 10p) \geq 0 \implies \theta''(p) \geq 0.$$

Determinamos el número de iteraciones necesarias para el algoritmo de Fibonacci. Para ello, buscamos un número  $n$  tal que

$$F_n > \frac{b_1 - a_1}{\ell} = \frac{0, 3 - 0}{0, 01} = 30;$$

y como  $F_8 = 34$ , resulta ser  $n = 8$ .

Paso inicial.

$$\lambda_1 = a_1 + \frac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1) = a_1 + \frac{F_6}{F_8}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{13}{34}(0, 3 - 0) \simeq 0, 1147;$$

$$\mu_1 = a_1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}(b_1 - a_1) = a_1 + \frac{F_7}{F_8}(b_1 - a_1) = 0 + \frac{21}{34}(0, 3 - 0) \simeq 0, 1853;$$

$$\theta(\lambda_1) = \frac{100}{\lambda_1^2} - \frac{1000}{\lambda_1} \simeq \frac{100}{0, 1147^2} - \frac{1000}{0, 1147} \simeq -1117, 69;$$

$$\theta(\mu_1) = \frac{100}{\mu_1^2} - \frac{1000}{\mu_1} \simeq \frac{100}{0, 1853^2} - \frac{1000}{0, 1853} \simeq -2484, 25.$$

Paso 1,  $k = 1$ .

$$\theta(\lambda_1) > \theta(\mu_1).$$

Paso 2.

$$a_2 = \lambda_1 \simeq 0, 1147; \quad b_2 = b_1 = 0, 3; \quad \lambda_2 = \mu_1 \simeq 0, 1853;$$

$$\mu_2 = a_2 + \frac{F_6}{F_7}(b_2 - a_2) \simeq 0, 1147 + \frac{13}{21}(0, 3 - 0, 1147) \simeq 0, 2294.$$

Paso 4.

$$\theta(\lambda_2) = \theta(\mu_1) \simeq -2484, 25;$$

$$\theta(\mu_2) \simeq \theta(0, 2294) \simeq -2458, 91.$$

Paso 1,  $k = 2$ .

$$\theta(\lambda_2) \leq \theta(\mu_2).$$

Paso 3.

$$a_3 = a_2 \simeq 0, 1147; \quad b_3 = \mu_2 \simeq 0, 2294; \quad \mu_3 = \lambda_2 \simeq 0, 1853;$$

$$\lambda_3 = a_3 + \frac{F_4}{F_6}(b_3 - a_3) \simeq 0, 1147 + \frac{5}{13}(0, 2294 - 0, 1147) \simeq 0, 1588.$$

Paso 5.

$$\theta(\lambda_3) \simeq \theta(0, 1588) \simeq -2331, 96;$$

$$\theta(\mu_3) = \theta(\lambda_2) \simeq -2484,25.$$

Procedemos de forma análoga hasta llegar a  $k = n - 2 = 6$ .

Paso 5.

$$\lambda_8 = \lambda_7 \simeq 0,2029; \quad \mu_8 = \lambda_7 + \varepsilon \simeq 0,2029 + 0,05 \simeq 0,2079;$$

$$\theta(\lambda_8) = \theta(\lambda_7) \simeq -2499,47; \quad \theta(\mu_8) \simeq \theta(0,2079) \simeq -2496,35.$$

Dado que  $\theta(\lambda_8) \leq \theta(\mu_8)$  hacemos

$$a_8 = a_7 \simeq 0,1941; \quad b_8 = \lambda_8 = 0,2029.$$

Hemos finalizado el algoritmo, obteniendo que la solución óptima pertenece al intervalo  $[0,1941; 0,2029]$ .

Los resultados de todas las iteraciones se recogen en el cuadro 18.

$k$	$a_k$	$b_k$	$\lambda_k$	$\mu_k$	$\theta(\lambda_k)$	$\theta(\mu_k)$
1	0,0000	0,3000	0,1147	0,1853	-1117,69	-2484,25
2	0,1147	0,3000	0,1853	0,2294	-2484,25	-2458,91
3	0,1147	0,2294	0,1588	0,1853	-2331,96	-2484,25
4	0,1588	0,2294	0,1853	0,2029	-2484,25	-2499,47
5	0,1853	0,2294	0,2029	0,2118	-2499,47	-2492,28
6	0,1853	0,2118	0,1941	0,2029	-2497,70	-2499,47
7	0,1941	0,2118	0,2029	0,2029	-2499,47	-2499,47
8	0,1941	0,2029	0,2029	0,2079	-2499,47	-2496,35

Cuadro 18: Iteraciones del método de búsqueda de Fibonacci.

El punto medio del intervalo actual de incertidumbre, que es la aproximación que hemos obtenido para el mínimo de la función  $\theta(p)$ , o máximo de la función  $B(p)$ , es

$$\frac{0,1941 + 0,2029}{2} \simeq 0,1985.$$

Se puede observar que está lo suficientemente próximo al valor real del mínimo de la función  $\theta$ ,  $\bar{p} = 0,2$ , calculado en el apartado anterior.

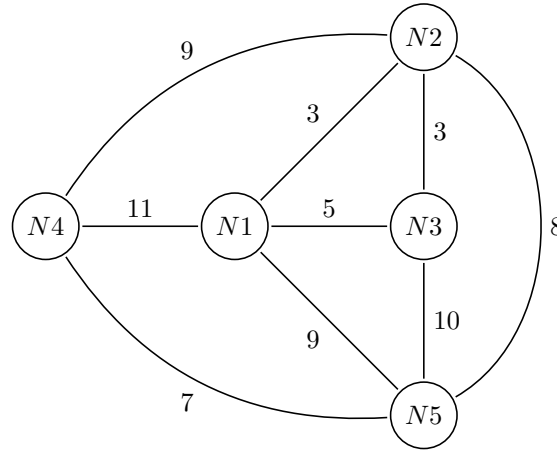


Figura 85: Grafo para el problema 13.2.

**Solución del problema 13.2.**

- (a) Representamos los datos del cuadro de costes en el grafo de la figura 85, en el que los números sobre cada arista representan el coste estimado de la construcción del correspondiente tramo de carretera. El problema que se plantea es obtener el árbol de expansión mínimo de dicho grafo.
- (b) Resolvemos el problema mediante el algoritmo del árbol de expansión mínimo. En primer lugar ordenamos las aristas en orden ascendente de peso, obteniendo:

$$(N1, N2), (N2, N3), (N1, N3), (N4, N5), (N2, N5), (N1, N5), (N2, N4), (N3, N5), (N1, N4).$$

En el cuadro 19 se recoge un resumen de las iteraciones realizadas hasta concluir con el algoritmo. La solución se puede observar en la figura 86 y la figura 87.

Iteración	Arista	Color	Bucket 1	Bucket 2
0			–	–
1	$(N1, N2)$	azul	$N1, N2$	–
2	$(N2, N3)$	azul	$N1, N2, N3$	–
3	$(N1, N3)$	naranja	$N1, N2, N3$	–
4	$(N4, N5)$	azul	$N1, N2, N3$	$N4, N5$
5	$(N2, N5)$	azul	$N1, N2, N3, N4, N5$	–

Cuadro 19: Iteraciones del algoritmo del árbol de expansión mínimo para el problema 13.2.

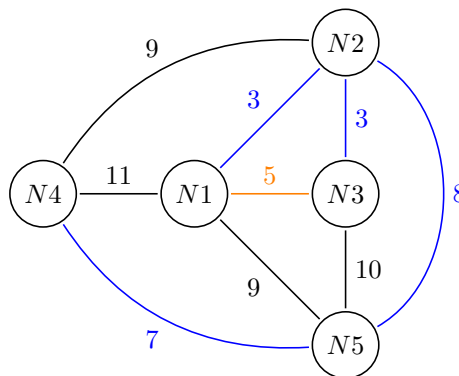


Figura 86: Grafo coloreado para el problema problema 13.2 tras la última iteración.

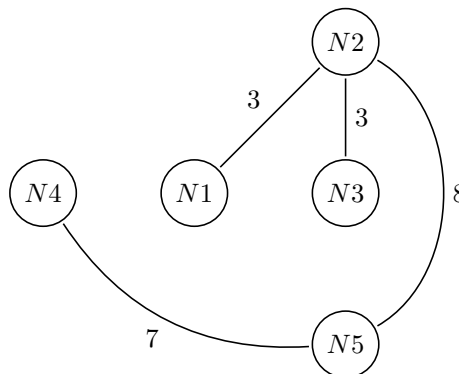


Figura 87: Árbol de expansión mínimo para el problema problema 13.2.

## JUNIO DE 2016

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 14.1.** La función  $f : E_2 \rightarrow E_1$  definida por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2}$$

es convexa.

**Cuestión 14.2.** Sea  $\ell$  un arista cualquiera de un grafo  $G = (X, U)$ . Entonces siempre es posible construir un árbol de expansión que contiene a dicha arista  $\ell$ .

**Problema 14.1.** Consideremos el siguiente problema de programación no lineal.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2, \\ \text{Sujeto a} & 2x_1 + x_2 \leq 6. \end{array}$$

- (a) Hacer una representación gráfica del problema y dar una interpretación geométrica del mismo.
- (b) Plantear y resolver las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- (c) Encontrar la solución óptima del problema a partir del resultado del apartado (b) justificando la respuesta.

**Problema 14.2.** En un país llamado Zelandia el dinero se contabiliza en zeds. Los billetes pueden tener un valor cualquiera  $v$ , siendo  $v$  un entero positivo. En cambio solo se utilizan  $n$  tipos de monedas de metal con valores  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , donde  $m_i, i = 1, \dots, n$  son también enteros positivos. Se plantea estudiar el problema de si es posible realizar el cambio de cualquier billete a monedas y, en los casos en que sea posible, averiguar cuál es el menor número de monedas necesario para ello. Para ello se desea utilizar un modelo del camino más corto en un grafo.

- (a) Considerar el caso particular en que el billete tiene un valor  $v = 8$  y se dispone de tres tipos de monedas cuyos valores son 1, 3 y 5 zeds. Definir el grafo y encontrar la solución del problema del camino más corto mediante el algoritmo de Dijkstra.
- (b) Generalizar el modelo del apartado anterior al caso general en el que el billete tiene un valor  $v$  y se dispone de  $n$  monedas con valores  $m_1, m_2, \dots, m_n$ .

**Solución de la cuestión 14.1. FALSO.** Sean, por ejemplo, los puntos  $\mathbf{x} = (1, 1)$  e  $\mathbf{y} = (-1, -1)$ , y sea  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} f(\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y}) &= f\left(\frac{1}{2}(1, 1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right)(-1, -1)\right) = f(0, 0) = (0 - 0)^2 + \frac{1}{1 + 0^2 + 0^2} = 1 > \\ &> \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \left( (1 - 1)^2 + \frac{1}{1 + 1^2 + 1^2} \right) + \frac{1}{2} \left( (-1 + 1)^2 + \frac{1}{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} f(1, 1) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) f(-1, -1) = \lambda f(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Por tanto, la función  $f$  no es convexa. Esto se puede comprobar en su gráfica, que se representa en la figura 88.

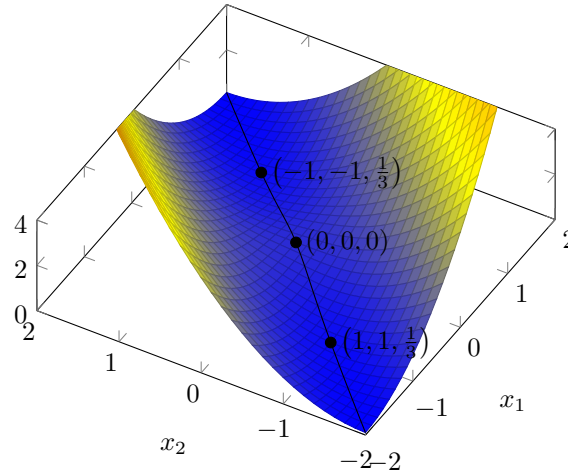


Figura 88: Gráfica de la función  $f(x_1, x_2)$ .

**Solución de la cuestión 14.2. FALSO.** Si el grafo es no conectado no se puede construir un árbol de expansión, independientemente de que incluya o no a la arista  $\ell$ .

**Solución del problema 14.1.**

- (a) En la representación gráfica de la figura 89 se pueden ver la región factible (sombreada) y algunas curvas de nivel de la función  $f$ , junto con el punto óptimo global del problema,  $\bar{x}$ .

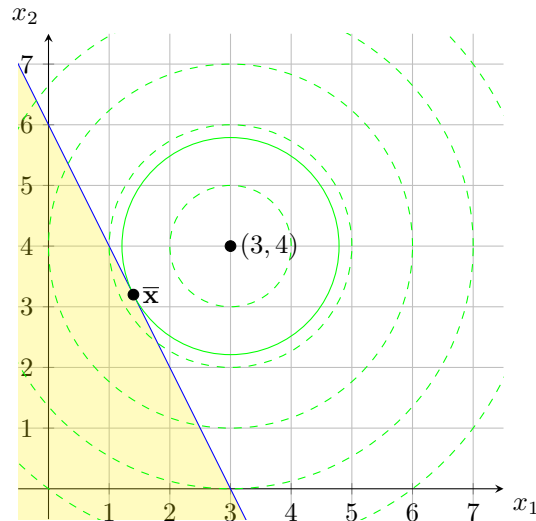


Figura 89: Representación gráfica del problema 14.1.

Podemos interpretar que buscamos el punto de la región factible,

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + x_2 \leq 6\},$$

más próximo al punto  $(3, 4)$ , aunque en realidad la función  $f$  modeliza el cuadrado de la distancia a dicho

punto. La solución, que se puede obtener de forma sencilla geoméricamente, es el punto

$$\bar{\mathbf{x}} = \left( \frac{7}{5}, \frac{16}{5} \right).$$

(b) El problema dado se puede reformular de la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2, \\ \text{Sujeto a} & g(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 - 6 \leq 0. \end{array}$$

Calculamos las derivadas necesarias.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 4) \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Y planteamos las condiciones KKT,

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) + \mu \nabla g(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu g(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 3) + 2\mu &= 0, \\ 2(x_2 - 4) + \mu &= 0, \\ \mu(2x_1 + x_2 - 6) &= 0, \\ \mu &\geq 0. \end{aligned}$$

Si  $\mu = 0$  obtenemos el punto  $(3, 4)$ , que no pertenece a la región factible. Y si  $\mu \neq 0$ , de las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$\left. \begin{aligned} 2(x_1 - 3) + 2\mu &= 0 \implies (x_1 - 3) = -\mu \\ 2(x_2 - 4) + \mu &= 0 \implies 2(x_2 - 4) = -\mu \end{aligned} \right\} \implies x_1 - 3 = 2(x_2 - 4) \implies x_1 - 2x_2 + 5 = 0;$$

y de la tercera

$$2x_1 + x_2 - 6 = 0.$$

Resolviendo el sistema formado por ambas y despejando el multiplicador, obtenemos

$$\bar{\mathbf{x}} = \left( \frac{7}{5}, \frac{16}{5} \right), \quad \mu = \frac{8}{5} > 0.$$

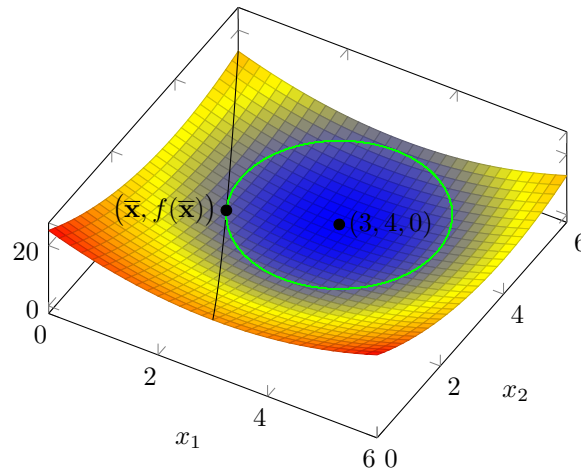


Figura 90: Representación gráfica tridimensional del problema 14.1.

- (c) Sabemos que  $f$  es una función convexa, por ser su matriz hessiana  $\nabla^2 f(x_1, x_2)$  definida positiva, y por tanto es pseudoconvexa. Además,  $g$  también es una función convexa, por ser afín, y por tanto es cuasiconvexa. En estas condiciones, según el teorema 1.29 (Ramos, 2017: 86), el punto  $\bar{x}$  es el punto óptimo global del problema. En la figura 90 se puede ver una representación tridimensional de la solución hallada.

#### Solución del problema 14.2.

- (a) En la figura 91 se dibuja un grafo que representa la situación del problema. En cada nodo se representa el dinero que falta por cambiar. Los arcos que conectan dos nodos indican la situación inicial y final tras entregar una moneda. Consideramos, por tanto, que todos los arcos tienen longitud 1.

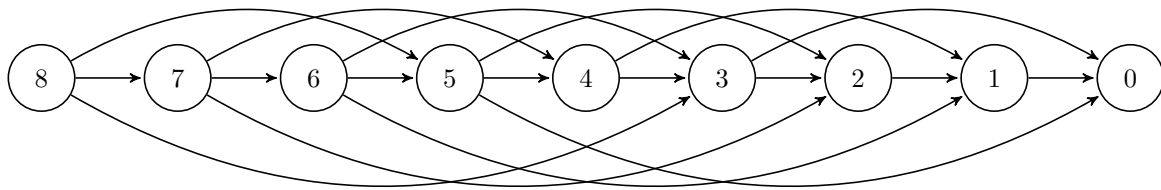


Figura 91: Grafo para el problema 14.2.a.

Las iteraciones del algoritmo de Dijkstra se recogen en el cuadro 20, y el grafo coloreado resultado de efectuar dicho algoritmo se representa en la figura 92. Se puede ver que el camino más corto desde el vértice 8 hasta el vértice 0 es el que recorre los arcos  $(8, 5)$  y  $(5, 0)$ , con una longitud total de  $1 + 1 = 2$ . Dicho de otra forma, el cambio de un billete de 8 zeds a monedas se ha de hacer con una moneda de 3 y otra de 5 zeds para que sea con el menor número de monedas posible.

Iteración	1	2	3	4
Distancia	0	1	1	1
Vértice	8	7	5	3
8	—	—	—	—
7	$0 + 1 = \mathbf{1}$	—	—	—
6	$\infty$	$1 + 1 = 2$	2	2
5	$0 + 1 = 1$	<b>1</b>	—	—
4	$\infty$	$1 + 1 = 2$	2	—
3	$0 + 1 = 1$	1	<b>1</b>	—
2	$\infty$	$1 + 1 = 2$	2	2
1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
0	$\infty$	$\infty$	$1 + 1 = 2$	<b>2</b>

Cuadro 20: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 14.2.a.

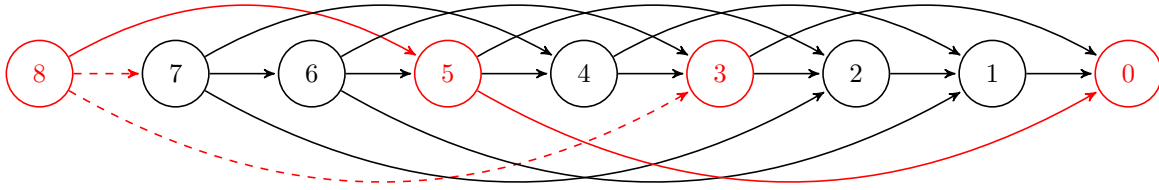


Figura 92: Solución para el problema 14.2.a.

Si desarrollamos en un árbol las iteraciones realizadas obtenemos el representado en la figura 93. Una vez más los nodos representan el dinero que falta por cambiar en cada situación, y en este caso los números sobre los arcos indican la denominación de la moneda necesaria para pasar de un nodo a otro. Cuando se alcanza un nodo ya obtenido, se descarta (se colorea de gris en el árbol) puesto que ya se ha llegado a él con anterioridad, o sea, por un camino más corto o igual al actual. El número de arcos de un nodo a otro indica el número de monedas necesarias.

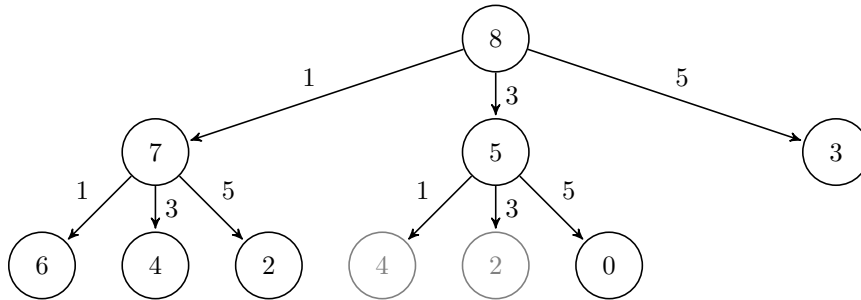
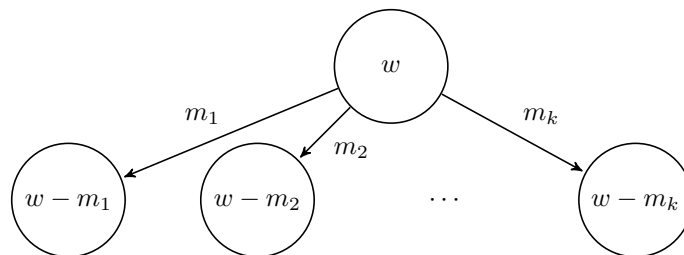


Figura 93: Grafo para el problema 14.2.a.

- (b) El árbol representado en la figura 93 nos da un procedimiento que se puede generalizar, tal y como se pide. Supongamos que queremos cambiar el billete de denominación  $v$  en el menor número posible de monedas con denominaciones  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Podemos suponer que

$$v > 0, \quad m_n > \dots > m_2 > m_1 > 0.$$

Procedemos agrupando los nodos en tres conjuntos: el conjunto  $A$  de nodos examinados en exploraciones anteriores, el conjunto  $P$  de los nodos pendientes a examinar en la iteración en curso, y el conjunto  $N$  de los nodos nuevos alcanzados en la iteración en curso y que serán los que se examinarán en la siguiente iteración.

Figura 94: Subgrafo generado por  $\Gamma^+(w)$  para el problema 14.2.b.



Paso inicial. El conjunto  $A$  está vacío, y el conjunto  $P$  contiene únicamente al nodo  $v$ . Inicializamos el contador de iteraciones,  $i = 1$ .

Iteraciones. Vaciamos el conjunto  $N$ . A cada nodo  $w$  del conjunto  $P$  le restamos cada una de las denominaciones de las monedas menores que dicho valor  $w$ . Si se obtiene cero hemos terminado, y el cambio se puede hacer con  $i$  monedas. En caso contrario añadimos el valor obtenido al conjunto  $N$ , salvo cuando este ya esté incluido en el conjunto  $A$ . Si al terminar este proceso el conjunto  $N$  sigue vacío hemos terminado y no es posible realizar el cambio. En otro caso incrementamos el contador de iteraciones  $i$ , añadimos los elementos de  $P$  al conjunto  $A$ , y hacemos el nuevo conjunto  $P$  igual a  $N$ .

El procedimiento descrito se escribe de manera formal en el algoritmo 1, y la figura 94 da una idea intuitiva de la exploración que se hace en cada iteración.

---

**Algoritmo 1** Cambio con las mínimas monedas.

---

**Require:** Denominación del billete,  $v$ , y denominación de las monedas  $m_1, m_2, \dots, m_n$

**Ensure:**  $v > 0$ ;  $m_n > \dots > m_2 > m_1 > 0$

```

1:  $A := \emptyset, P := \{v\}, i := 1$ 
2: while  $P \neq \emptyset$  do
3:   for all  $w \in P$  do
4:      $N := \emptyset, j = 1$ 
5:     while  $m_j \leq w$  do
6:        $x := w - m_j$ 
7:       if  $x = 0$  then
8:         return Mínimo cambio:  $i$  monedas
9:       else if  $x \notin A$  then
10:         $N := N \cup \{x\}, j := j + 1$ 
11:      end if
12:    end while
13:  end for
14:  if  $N = \emptyset$  then
15:    return No se puede hacer el cambio
16:  else
17:     $A := A \cup P, P := N, i := i + 1$ 
18:  end if
19: end while

```

---

## SEPTIEMBRE DE 2016 – CONVOCATORIA ORDINARIA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 15.1.** La función  $f(x) = \min\{0, -x\}$  es pseudoconvexa en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ .

**Cuestión 15.2.** Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices,  $m$  arcos y  $p$  componentes conexas. Entonces la cardinalidad de la base de ciclos es igual a  $n - m + p$ .

**Problema 15.1.** Consideremos el siguiente problema de programación no lineal.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \\ & x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- (a) Hacer una representación gráfica del problema y dar una interpretación geométrica del mismo.
- (b) Plantear y resolver las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- (c) Encontrar la solución óptima del problema a partir del resultado del apartado (b) justificando la respuesta.

**Problema 15.2.** Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto entre los vértices 1 y 5 del grafo representado en la figura 95, explicando detalladamente el transcurso de las iteraciones.

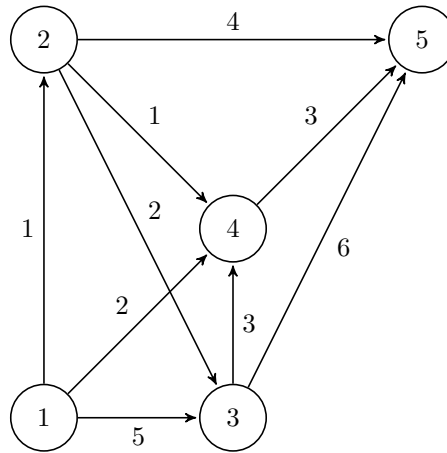
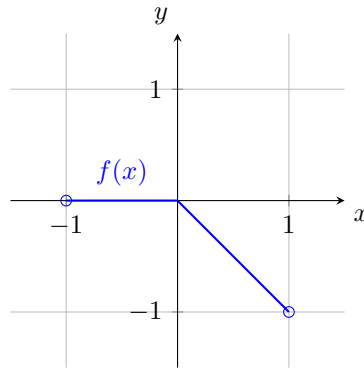


Figura 95: Grafo para el problema 15.2.

**Solución de la cuestión 15.1.** **FALSO.** Según la definición 1.22 (Ramos, 2017: 63) de función pseudoconvexa, para que una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  tenga esta característica ha de ser diferenciable en el conjunto abierto y no vacío  $S$ . En el caso en estudio  $f(x) = \min\{0, -x\}$  no es diferenciable en el punto  $x = 0 \in S = (-1, 1)$ . La representación gráfica de  $f$  se da en la figura 96.

Figura 96: Gráfica de la función  $f(x) = \min\{0, -x\}$ .

**Solución de la cuestión 15.2. VERDADERO.** Teorema 2.2 (Ramos, 2017: 230).

### Solución del problema 15.1.

- (a) En la representación gráfica de la figura 97 se pueden ver la región factible (sombreada) y algunas curvas de nivel de la función  $f$ , junto con el punto óptimo global del problema,  $\bar{x}$ .

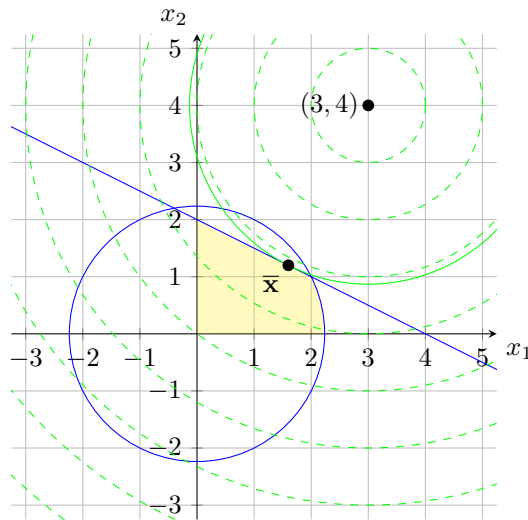


Figura 97: Representación gráfica del problema 15.1.

Podemos interpretar que buscamos el punto de la región factible,

$$S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 5, x_1 + 2x_2 \leq 4, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\},$$

más próximo al punto  $(3, 4)$ , aunque en realidad la función  $f$  modeliza el cuadrado de la distancia a dicho punto. La solución, que se puede obtener de forma sencilla geométicamente, es el punto

$$\bar{x} = \left( \frac{8}{5}, \frac{6}{5} \right).$$

(b) El problema dado se puede reformular de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 5 \leq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0, \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_1 \leq 0, \\ & g_4(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas necesarias.

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= 2 \begin{pmatrix} x_1 - 3 \\ x_2 - 4 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \\ \nabla g_2(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_4(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y planteamos las condiciones KKT,

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) + \sum_{i=1}^4 \mu_i \nabla g_i(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1 g_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_2 g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_2 g_3(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_4 g_4(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 3) + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 - \mu_3 &= 0, \\ 2(x_2 - 4) + 2\mu_1 x_2 + 2\mu_2 - \mu_4 &= 0, \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 5) &= 0, \\ \mu_2(x_1 + 2x_2 - 4) &= 0, \\ -\mu_3 x_1 &= 0, \\ -\mu_4 x_2 &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolvemos las ecuaciones KKT separando en varios casos, en función de si se anulan o no los multiplicadores  $\mu_i$ .

- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$ . En este caso la solución es  $(3, 4) \notin S$ .
- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(3, 0) \notin S$  y  $\mu_4 = -8 < 0$ .
- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_4 = 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(0, 4) \notin S$  y  $\mu_3 = -6 < 0$ .
- $\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 \neq 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(0, 0) \in S, \mu_3 = -6 < 0$  y  $\mu_4 = -8 < 0$ .
- $\mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = 0, \mu_2 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}) \in S, \mu_2 = \frac{15}{5} > 0$ .
- $\mu_1 = \mu_3 = 0, \mu_2 \neq 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(4, 0) \notin S, \mu_2 = -2 < 0$  y  $\mu_4 = -12 < 0$ .
- $\mu_1 = \mu_4 = 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(0, 2) \notin S, \mu_2 = 2 > 0$  y  $\mu_3 = -4 < 0$ .
- $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso no hay solución.

- $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0, \mu_1 \neq 0$ . En este caso las soluciones son  $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \notin S, \mu_1 = -1 + \sqrt{5} > 0$ ; y  $\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right) \notin S, \mu_1 = -1 - \sqrt{5} < 0$ .
- $\mu_2 = \mu_3 = 0, \mu_1 \neq 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso las soluciones son  $(\sqrt{5}, 0) \notin S, \mu_1 = -1 + \frac{3}{\sqrt{5}} > 0, \mu_4 = -8 < 0$ ; y  $(-\sqrt{5}, 0) \notin S, \mu_1 = -1 - \frac{3}{\sqrt{5}} < 0, \mu_4 = -8 < 0$ .
- $\mu_2 = \mu_4 = 0, \mu_1 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso las soluciones son  $(0, \sqrt{5}) \notin S, \mu_1 = -1 + \frac{4}{\sqrt{5}} > 0, \mu_3 = -6 < 0$ ; y  $(0, -\sqrt{5}) \notin S, \mu_1 = -1 - \frac{4}{\sqrt{5}} < 0, \mu_3 = -6 < 0$ .
- $\mu_2 = 0, \mu_1 \neq 0, \mu_3 \neq 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso no hay solución.
- $\mu_3 = \mu_4 = 0, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$ . En este caso las soluciones son  $(2, 1) \in S, \mu_1 = -\frac{1}{3} < 0, \mu_2 = \frac{10}{3} > 0$ ; y  $(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}) \notin S, \mu_1 = -\frac{5}{3} < 0, \mu_2 = \frac{82}{15} > 0$ .
- $\mu_3 = 0, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso no hay solución.
- $\mu_4 = 0, \mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso no hay solución.
- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0, \mu_4 \neq 0$ . En este caso no hay solución.

El único punto que satisface las condiciones KKT y está dentro de la región factible es el ya calculado en la interpretación geométrica del problema, en el apartado anterior:

$$\bar{\mathbf{x}} = \left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right) \in S, \quad \mu_1 = \mu_3 = \mu_4 = 0, \quad \mu_2 = \frac{15}{5} > 0.$$

- (c) Sabemos que  $f$  es una función convexa, por ser su matriz hessiana  $\nabla^2 f(x_1, x_2)$  definida positiva, y por tanto es pseudoconvexa. Además, la única restricción activa en el punto  $\bar{\mathbf{x}}$ ,  $g_2$ , también es una función convexa, por ser afín, y por tanto es cuasiconvexa. En estas condiciones, según el teorema 1.29 (Ramos, 2017: 86), el punto  $\bar{\mathbf{x}}$  es el punto óptimo global del problema. En la figura 98 se puede ver una representación tridimensional de la solución hallada.

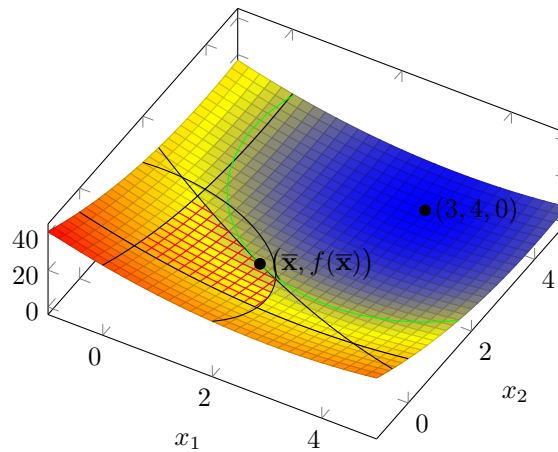


Figura 98: Representación gráfica tridimensional del problema 15.1.

**Solución del problema 15.2.** Las iteraciones del algoritmo de Dijkstra se recogen en el cuadro 21, y el grafo coloreado resultado de efectuar dicho algoritmo se representa en la figura 99. Se puede ver que el camino más corto desde el vértice 1 hasta el vértice 5 es el que recorre los arcos (1, 2), y (2, 5), con una longitud total de  $1 + 4 = 5$ .

Iteración	1	2	3	4
Distancia	0	1	2	3
Vértice	1	2	4	3
1	–	–	–	–
2	$0 + 1 = \mathbf{1}$	–	–	–
3	$0 + 5 = 5$	$1 + 3 = 3$	<b>3</b>	–
4	$0 + 2 = 2$	<b>2</b>	–	–
5	$\infty$	$1 + 4 = 5$	5	<b>5</b>

Cuadro 21: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 15.2.

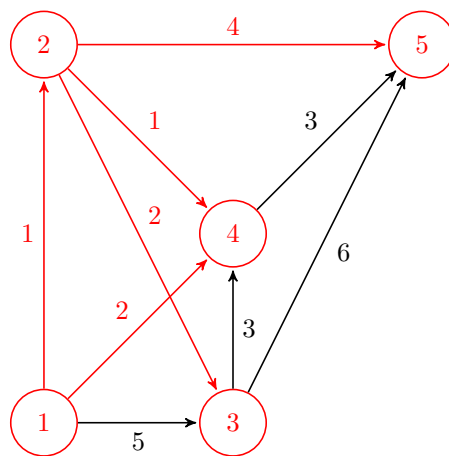


Figura 99: Grafo para el problema 15.2 tras la última iteración.

## SEPTIEMBRE DE 2016 – CONVOCATORIA DE RESERVA

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 16.1.** La función  $f(x) = \max\{0, x\}$  es pseudoconvexa en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ .

**Cuestión 16.2.** Sea  $G$  un grafo con  $n$  vértices,  $m$  arcos y  $p$  componentes conexas. Entonces la cardinalidad la base de cociclos es igual a  $m - p$ .

**Problema 16.1.** Consideremos el siguiente problema de programación no lineal.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, \\ \text{Sujeto a} & x_1^2 + x_2^2 \leq 9, \\ & -x_1 - x_2 + 1 \geq 0. \end{array}$$

- (a) Hacer una representación gráfica del problema y dar una interpretación geométrica del mismo.
- (b) Plantear y resolver las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- (c) Encontrar la solución óptima del problema a partir del resultado del apartado (b) justificando la respuesta.

**Problema 16.2.** Utilizar el algoritmo de Dijkstra para encontrar el camino más corto entre los vértices 1 y 5 del grafo representado en la figura 100, explicando detalladamente el transcurso de las iteraciones.

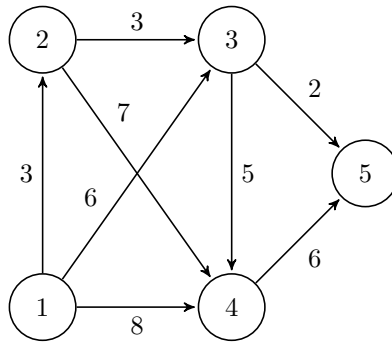
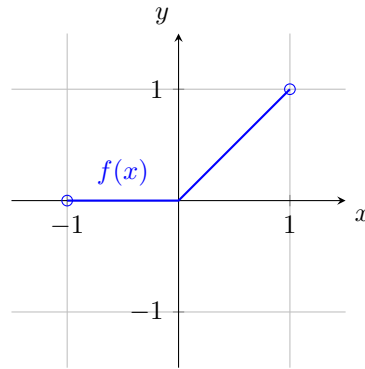


Figura 100: Grafo para el problema 16.2.

**Solución de la cuestión 16.1. FALSO.** Según la definición 1.22 (Ramos, 2017: 63) de función pseudoconvexa, para que una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  tenga esta característica ha de ser diferenciable en el conjunto abierto y no vacío  $S$ . En el caso en estudio  $f(x) = \max\{0, x\}$  no es diferenciable en el punto  $x = 0 \in S = (-1, 1)$ . La representación gráfica de  $f$  se da en la figura 101.

Figura 101: Gráfica de la función  $f(x) = \max\{0, x\}$ .

**Solución de la cuestión 16.2. FALSO.** Según el teorema 2.2 (Ramos, 2017: 230), si  $G$  es un grafo con  $n$  vértices,  $m$  arcos y  $p$  componentes conexas entonces la cardinalidad la base de cociclos es  $\lambda(G) = n - p$ .

#### Solución del problema 16.1.

- (a) En la representación gráfica de la figura 102 se pueden ver la región factible  $S$  (sombreada) y algunas curvas de nivel de la función  $f$ , junto con el punto óptimo global del problema,  $\bar{x}$ . Una interpretación geométrica podría ser buscar el punto de la superficie  $f(S)$  de menor altura. La solución, que se puede obtener de forma sencilla gráficamente, es el punto  $\bar{x} = (0, -3)$ .

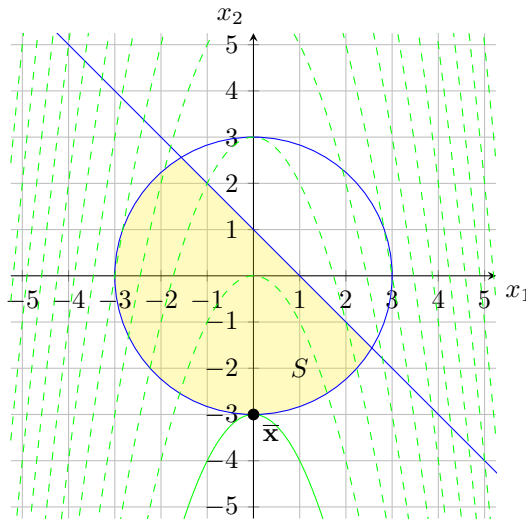


Figura 102: Representación gráfica del problema 16.1.

- (b) El problema dado se puede reformular de la forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2, \\ &\text{Sujeto a} && g_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 9 \leq 0, \\ &&& g_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0. \end{aligned}$$



Calculamos las derivadas necesarias.

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla g_1(x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 g_2(x_1, x_2) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y planteamos las condiciones KKT,

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) + \mu_1 \nabla g_1(x_1, x_2) + \mu_2 \nabla g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1 g_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_2 g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo,

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2\mu_1 x_1 + \mu_2 &= 0, \\ 1 + 2\mu_1 x_2 + \mu_2 &= 0, \\ \mu_1(x_1^2 + x_2^2 - 9) &= 0, \\ \mu_2(x_1 + x_2 - 1) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolvemos las ecuaciones KKT separando en varios casos, en función de si se anulan o no los multiplicadores  $\mu_1$  y  $\mu_2$ .

- $\mu_1 = \mu_2 = 0$ . En este caso no hay solución.
- $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in S$ ,  $\mu_2 = -1 < 0$ .
- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$ . En este caso las soluciones son:

$$\begin{aligned} (0, 3) &\notin S, \quad \mu_2 = -\frac{1}{6} < 0; \\ (0, -3) &\in S, \quad \mu_2 = \frac{1}{6} > 0; \\ \left(\sqrt{\frac{17}{2}}, \frac{1}{2}\right) &\notin S, \quad \mu_1 = -1 < 0; \\ \left(-\sqrt{\frac{17}{2}}, \frac{1}{2}\right) &\in S, \quad \mu_1 = -1 < 0. \end{aligned}$$

- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0$ . En este caso las soluciones son:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}, \frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right) &\in S, \quad \mu_1 = -\frac{1}{2} < 0, \quad \mu_2 = -\frac{1 - \sqrt{17}}{2} > 0; \\ \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right) &\in S, \quad \mu_1 = -\frac{1}{2} < 0, \quad \mu_2 = -\frac{1 + \sqrt{17}}{2} < 0. \end{aligned}$$

El único punto que satisface las condiciones KKT y está dentro de la región factible es el ya calculado en la interpretación geométrica del problema, en el apartado anterior:

$$\bar{\mathbf{x}} = (0, -3) \in S, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \frac{1}{6} > 0.$$

- (c) Tanto la función  $f$  como la función  $g_2$  asociada a la única restricción activa en el punto  $\bar{x}$  son funciones convexas, por ser  $\nabla^2 f(x_1, x_2)$  semidefinida positiva y  $\nabla^2 g_2(x_1, x_2)$  definida positiva. En esas condiciones  $f$  es pseudoconvexa y  $g$  cuasiconvexa, y según el teorema 1.29 (Ramos, 2017: 86), el punto  $\bar{x}$  es el punto óptimo global del problema. En la figura 103 se puede ver una representación tridimensional de la solución hallada.

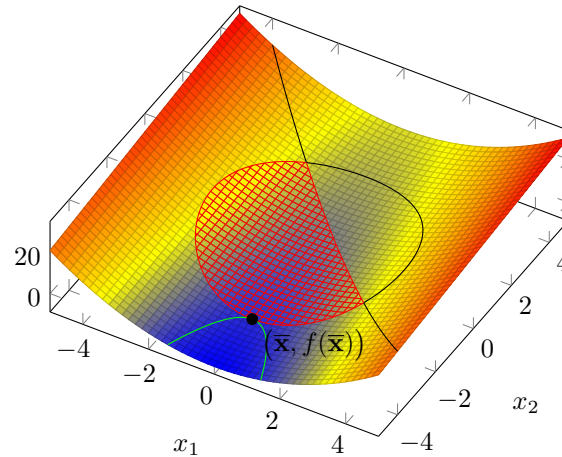


Figura 103: Representación gráfica tridimensional del problema 16.1.

**Solución del problema 16.2.** Las iteraciones del algoritmo de Dijkstra se recogen en el cuadro 22, y el grafo coloreado resultado de efectuar dicho algoritmo se representa en la figura 104. Se puede ver que el camino más corto desde el vértice 1 hasta el vértice 5 es el que recorre los arcos (1, 2), (2, 3) y (3, 5), con una longitud total de  $3 + 3 + 2 = 8$ .

Iteración	1	2	3
Distancia	0	3	6
Vértice	1	2	3
1	—	—	—
2	$0 + 3 = \mathbf{3}$	—	—
3	$0 + 7 = 7$	$3 + 3 = \mathbf{6}$	—
4	$0 + 8 = 8$	8	8
5	$\infty$	$\infty$	$6 + 2 = \mathbf{8}$

Cuadro 22: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 16.2.

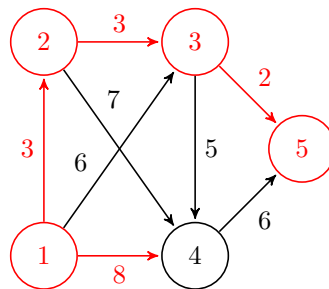


Figura 104: Grafo para el problema 16.2 tras la última iteración.

## MAYO DE 2017

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 17.1.** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces  $f$  es pseudoconvexa.

**Cuestión 17.2.** En el grafo representado en la figura 105, si  $A$  es el subconjunto de vértices  $A = \{a, b\}$  entonces el vector de representación del cociclo  $w(A)$  es  $(1, 0, 1, 1, 1, -1)$ .

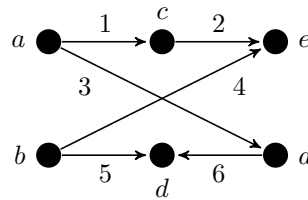


Figura 105: Grafo para la cuestión 17.2.

**Problema 17.1.** Considerar el problema de programación matemática siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = 9x_1^2 + 4x_2^2 - 18x_1 - 16x_2 + 25, \\ \text{Sujeto a} \quad & -3x_1 - x_2 + 6 \leq 0, \\ & 3x_1 + 2x_2 - 9 \leq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

- Comprobar que las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son suficientes en este caso para determinar si un punto  $x^*$  es solución óptima.
- Resolver el problema utilizando únicamente las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.
- Verificar gráficamente la solución obtenida.

**Problema 17.2.** Una empresa desea establecer un plan para el mantenimiento y reemplazamiento de una máquina durante un horizonte de 4 años. Al comienzo de cada año, hay que decidir si se ha de reemplazar la máquina, o bien se puede mantener en funcionamiento durante un año adicional. La máquina puede mantenerse en servicio a lo sumo durante 3 años. La tabla siguiente muestra los costes que conlleva el mantenimiento y reemplazo de la máquina en función del año de adquisición y de los años de funcionamiento.

- Plantear un modelo de camino mínimo en una red para determinar el plan óptimo de mantenimiento y reemplazamiento de la empresa.
- Encontrar la solución óptima mediante el algoritmo de Dijkstra e interpretarla adecuadamente.

Máquina adquirida al inicio del año	Coste de mantenimiento y reemplazamiento en función del número de años en que está operativa (euros)		
	1 año	2 años	3 años
1	4 000	5 400	9 800
2	4 300	6 200	8 700
3	4 800	7 100	–
4	4 900	–	–

**Solución de la cuestión 17.1. FALSO.** Según la definición 1.22 (Ramos, 2017: 63) de función pseudoconvexa, para que una función  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  tenga esta característica ha de ser diferenciable en el conjunto abierto y no vacío  $S$ . En el caso en estudio  $f(x)$  no es diferenciable en el punto  $x = 0 \in S = \mathbb{R}$ . La representación gráfica de  $f$  se da en la figura 106.

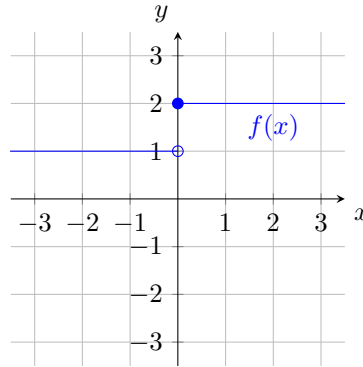


Figura 106: Gráfica de la función  $f(x)$ .

**Solución de la cuestión 17.2. FALSO.** Según la definición 2.48 (Ramos, 2017: 220) de vector de representación de un cociclo, si el grafo  $G = (X, U)$  tiene un cociclo  $w(A)$ , con  $A \subset X$ , su vector de representación  $w = (w_1, w_2, \dots, w_m)$  es de la forma

$$w_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin w(A), \\ 1 & \text{si } i \in w^+(A), \\ -1 & \text{si } i \in w^-(A). \end{cases}$$

En nuestro caso,

$$\left. \begin{array}{ll} 1 \in w^+(A) & \Rightarrow w_1 = 1 \\ 2 \notin w(A) & \Rightarrow w_2 = 0 \\ 3 \in w^+(A) & \Rightarrow w_3 = 1 \\ 4 \in w^+(A) & \Rightarrow w_4 = 1 \\ 5 \in w^+(A) & \Rightarrow w_5 = 1 \\ 6 \notin w(A) & \Rightarrow w_6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow w = (1, 0, 1, 1, 1, 0).$$

**Solución del problema 17.1.**

- (a) En la representación gráfica de la figura 107 se pueden ver la región factible  $S$  (sombreada) y algunas curvas de nivel de la función  $f$ , junto con el punto óptimo global del problema,  $\bar{x}$ .

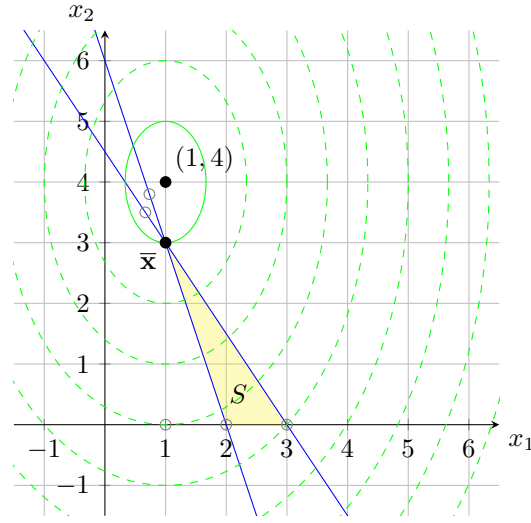


Figura 107: Representación gráfica del problema 17.1.

El problema dado se puede reformular de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x_1, x_2) = 9(x_1 - 1)^2 + 4(x_2 - 4)^2, \\ \text{Sujeto a} \quad & g_1(x_1, x_2) = -3x_1 - x_2 + 6 \leq 0, \\ & g_2(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 - 9 \leq 0, \\ & g_3(x_1, x_2) = -x_2 \leq 0. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas necesarias.

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} 18(x_1 - 1) \\ 8(x_2 - 4) \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}, \\ \nabla g_1(x_1, x_2) &= \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sea  $\bar{x} \in S$  un punto que satisface las condiciones KKT. Como se puede ver en la figura 107, a lo sumo hay dos restricciones activas, y los gradientes de las funciones  $g_i$  tomados de dos en dos son independientes. La función  $f$  es convexa por ser su matriz hessiana definida positiva, y las funciones  $g_i$  son convexas por ser funciones afines. En esta situación,  $f$  es pseudoconvexa y las funciones  $g_i$  son cuasiconvexas, y según el teorema 1.29 (Ramos, 2017: 86) el punto  $\bar{x}$  es una solución óptima global del problema.

(b) Escribimos las condiciones KKT para el problema tal cual se ha planteado en el apartado anterior.

$$\begin{aligned} \nabla f(x_1, x_2) + \mu_1 \nabla g_1(x_1, x_2) + \mu_2 \nabla g_2(x_1, x_2) + \mu_3 \nabla g_3(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1 g_1(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_2 g_2(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_3 g_3(x_1, x_2) &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas ya calculadas,

$$\begin{aligned} 18(x_1 - 1) - 3\mu_1 + 3\mu_2 &= 0, \\ 8(x_2 - 4) - \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 &= 0, \\ \mu_1(-3x_1 - x_2 + 6) &= 0, \\ \mu_2(3x_1 + 2x_2 - 9) &= 0, \\ -\mu_3x_2 &= 0, \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones estudiando por separado los distintos casos que se presentan en función de si se anula o no los multiplicadores  $\mu_i$ .

- $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ . En este caso la solución es  $(1, 4) \notin S$ .
- $\mu_1 = \mu_2 = 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso la solución es el punto  $(1, 0) \in S, \mu_3 = -32 < 0$ .
- $\mu_1 = \mu_3 = 0, \mu_2 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(\frac{2}{3}, \frac{7}{2}) \notin S, \mu_2 = 2 > 0$ .
- $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(2, 0) \in S, \mu_2 = 6 > 0, \mu_3 = -20 < 0$ .
- $\mu_2 = \mu_3 = 0, \mu_1 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(\frac{11}{15}, \frac{19}{5}) \notin S, \mu_1 = -\frac{8}{5} < 0$ .
- $\mu_2 = 0, \mu_1 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(3, 0) \in S, \mu_1 = 12 > 0, \mu_3 = -44 < 0$ .
- $\mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso la solución es  $(1, 3) \in S, \mu_1 = \mu_2 = 8 > 0$ .
- $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0, \mu_3 \neq 0$ . En este caso no hay solución.

El único punto de la región factible que satisface las condiciones KKT es  $\bar{x} = (1, 3)$ , y como ya se ha razonado en el apartado anterior, este ha de ser un punto óptimo global del problema.

- (c) El resultado obtenido en el apartado anterior coincide con lo ya dibujado en la figura 107.

### Solución del problema 17.2.

- (a) Dibujamos un grafo que represente las distintas posibilidades del problema, los números sobre los arcos indican el coste en cientos. Hay que tener en cuenta que a final de año siempre tenemos dos posibilidades: cambiar o no la máquina. La excepción es al final del tercer año si no se ha hecho un cambio previo, puesto que se ha superado el tiempo de servicio de la máquina y es necesario hacer el cambio. En el grafo que se representa en la figura 108 los vértices están etiquetados como 0 (inicio del primer año y del periodo de estudio), 4 (final del cuarto año y del periodo de estudio) y  $xCy$  (se llega al final del año  $x$  con una máquina cambiada al final de año  $y$ ). Por otra parte, un camino horizontal indica que se mantiene la máquina, mientras que un camino descendente indica un cambio de la máquina. La primera línea horizontal de nodos sigue un camino en el que no se reemplaza la máquina, la segunda indica que se produce un reemplazamiento al final del primer año, y así sucesivamente. Cada línea vertical de nodos indica las posibles situaciones al final de un año concreto del periodo de estudio.

El grafo propuesto se puede simplificar considerablemente. Se puede eliminar el vértice 0, del que solo surge un posible camino (los costes del primer año son fijos: compra de la máquina más el mantenimiento). También se pueden eliminar los caminos horizontales que parten de los vértices  $3Cy$  por ser más *largos* (al final del tercer año siempre va a ser preferible cambiar la máquina sea cual sea su edad que mantener la que había). Con estas indicaciones podemos dibujar la figura 109.

- (b) El camino más corto es que recorre los arcos  $(1C0, 2C1)$ ,  $(2C1, 3C2)$  y  $(3C2, 4)$ , con una longitud total de  $43 + 48 + 49 = 140$  unidades. En el cuadro 23 se resumen todas las iteraciones realizadas. Si volvemos

a añadir el vértice 0 al grafo, aumentamos el coste ya obtenido en los 40 cientos del primer año. La política óptima para la empresa es renovar todos los años. En este caso tiene unos costes totales, de mantenimiento y reemplazamiento de 18 000 euros.

Iteración	1	2	3	4	5
Distancia	0	43	54	91	105
Vértice	1C0	2C1	2C0	3C2	3C1
1C0	–	–	–	–	–
2C0	$0 + 54 = 54$	<b>54</b>	–	–	–
3C0	$\infty$	$\infty$	$54 + 98 = 152$	152	152
2C1	$0 + 43 = \mathbf{43}$	–	–	–	–
3C1	$\infty$	$43 + 62 = 105$	105	<b>105</b>	–
3C2	$\infty$	$43 + 68 = 91$	<b>91</b>	–	–
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$91 + 49 = 140$	<b>140</b>

Cuadro 23: Resumen de las iteraciones del algoritmo Dijkstra para el problema 17.2.

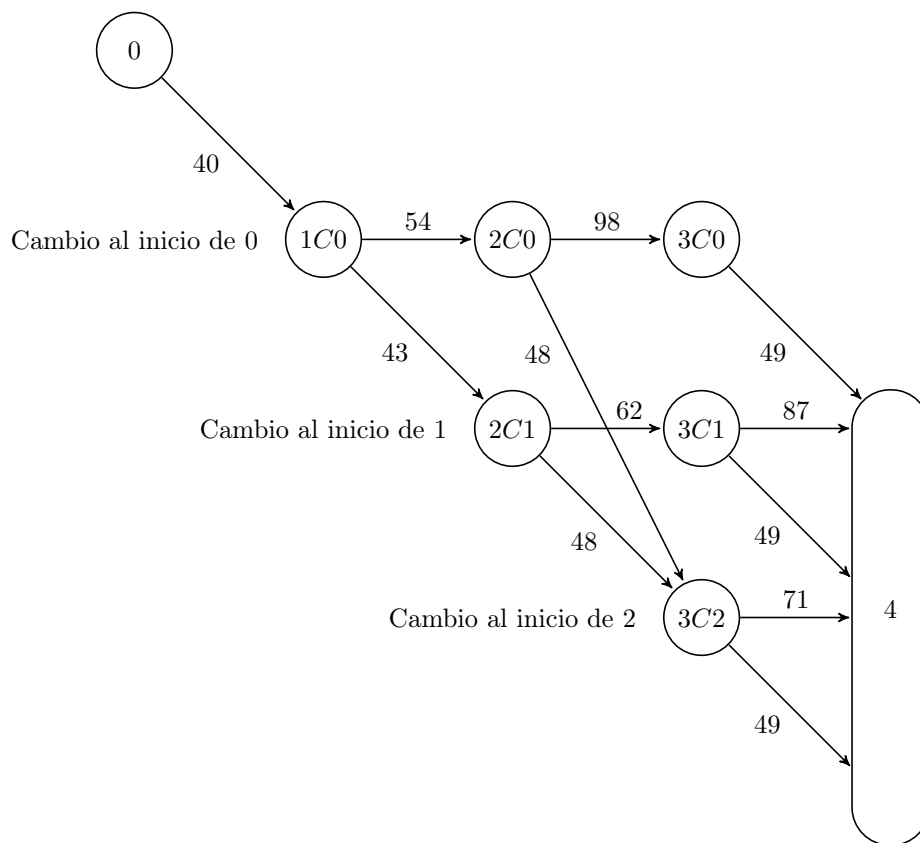


Figura 108: Grafo para el problema 17.2.

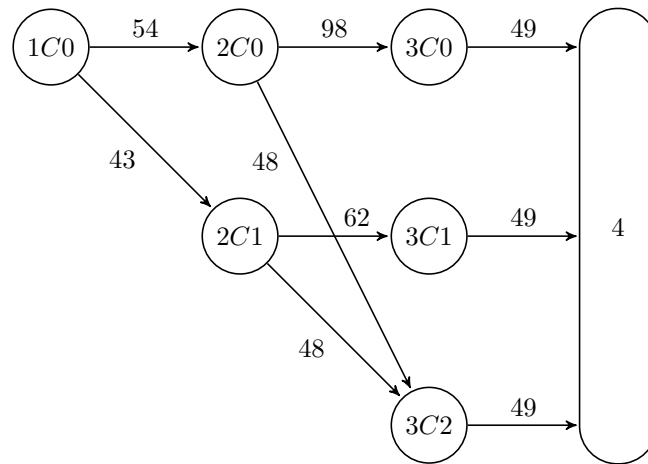


Figura 109: Grafo simplificado para el problema 17.2.

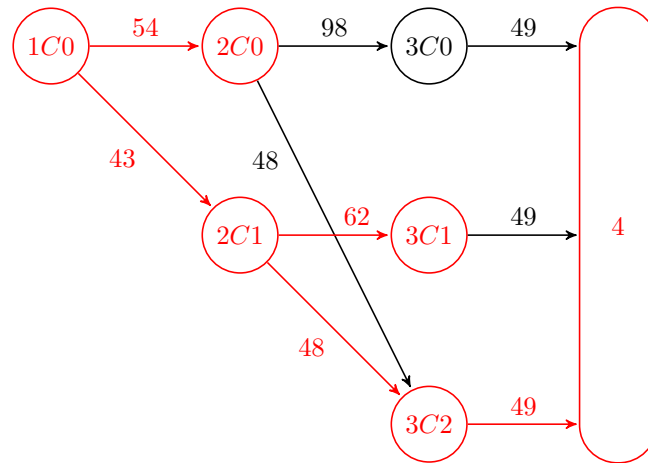


Figura 110: Grafo para el problema 17.2 tras la última iteración.



## JUNIO DE 2017

**Teoría.** Responder **VERDADERO** o **FALSO** a cada una de las cuestiones siguientes, justificando brevemente la respuesta:

**Cuestión 18.1.** Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0, \\ 2 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Entonces  $f$  es cuasiconvexa.

**Cuestión 18.2.** En el grafo representado en la figura 111, el conjunto  $w^+(A)$  integrado por el conjunto de arcos que salen del subconjunto de vértices  $A = \{a, b\}$  es un cocircuito elemental.

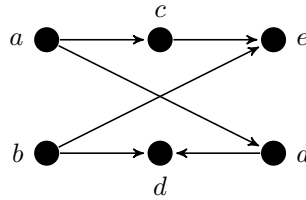


Figura 111: Grafo para la cuestión 18.2.

**Problema 18.1.** Sea el problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} && f(x) = \sum_{j=1}^n a_j \log(x_j + c_j), \\ &\text{Sujeto a} && \sum_{j=1}^n x_j \leq b, \\ &&& x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

donde  $a_j > 0$ ,  $c_j > 0$ ,  $b > 0$  son constantes. Encontrar la solución óptima  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , utilizando las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

**Problema 18.2.** Consideremos una red de flujo con seis vértices,  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  y  $v_6$ , donde la fuente es el vértice  $v_1$  y el sumidero es el vértice  $v_6$ . En la matriz  $C$  vienen dadas las capacidades  $c_{ij}$  de cada arco  $(v_i, v_j)$ ,  $i, j = 1, \dots, 6$ , en donde  $c_{ij} = 0$  indica la ausencia en la red del arco  $(v_i, v_j)$ .

$$C = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 10 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 8 & 11 & 2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

(a) Dibujar la red, indicando los vértices, arcos y capacidades.

- (b) Encontrar el flujo máximo desde la fuente al sumidero mediante el algoritmo del flujo máximo.
- (c) Identificar el corte mínimo y comprobar que el valor del flujo máximo es igual a la capacidad del corte mínimo.
- (d) Supongamos que la capacidad  $c_{46}$  del arco  $(v_4, v_6)$  se cambia al valor 7. Discutir el efecto de este cambio en la solución óptima encontrada en (b).

**Solución de la cuestión 18.1. VERDADERO.** Sean  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  y supongamos que  $x_1 \leq x_2$ , y sea  $\lambda \in (0, 1)$ . Tenemos en cuenta que la función  $f$  es creciente en todo su dominio (se representa en la figura 112), esto es, que

$$a \leq b \implies f(a) \leq f(b).$$

Entonces,

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \leq \lambda x_2 + (1 - \lambda)x_2 = x_2 \implies f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq f(x_2) = \max \{f(x_1), f(x_2)\}.$$

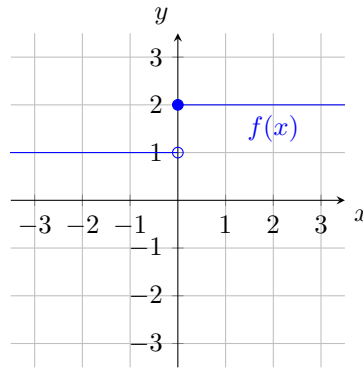


Figura 112: Gráfica de la función  $f(x)$ .

**Solución de la cuestión 18.2. VERDADERO.** Según la definición 2.50 de cocircuito (Ramos, 2017: 221), un cocircuito es un cociclo  $w(A)$  en el cual todos los arcos están dirigidos en la misma dirección, es decir, o todos entran en  $A$ , o todos salen de  $A$ . Como se verifica que  $w(A) = w^+(A)$ , o sea, todos los arcos de  $w(A)$  salen de  $A$ , podemos afirmar que  $w^+(A) = w(A)$  es un cocircuito.

**Solución del problema 18.1.** Podemos reescribir el problema de la forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f_0(x) = -f(x) = -\sum_{j=1}^n a_j \log(x_j + c_j), \\ \text{Sujeto a} \quad & g_0(x) = \sum_{j=1}^n x_j - b \leq 0, \\ & g_j(x) = -x_j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Calculamos las derivadas necesarias.

$$\nabla f_0(x) = \begin{pmatrix} -\frac{a_1}{x_1 + c_1} \\ -\frac{a_2}{x_2 + c_2} \\ \vdots \\ -\frac{a_n}{x_n + c_n} \end{pmatrix}; \quad \nabla^2 f_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{a_1}{(x_1 + c_1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_2}{(x_2 + c_2)^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_n}{(x_n + c_n)^2} \end{pmatrix};$$

$$\nabla g_0(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -\delta_{1j} \\ -\delta_{2j} \\ \vdots \\ -\delta_{nj} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Así, las condiciones KKT para el problema son

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x) + \sum_{i=0}^n \mu_i \nabla g_i(x) &= 0; \\ \mu_j g_j(x) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, n; \\ \mu_j &\geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Y, sustituyendo,

$$\begin{aligned} -\frac{a_j}{x_j + c_j} + \mu_0 - \mu_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \mu_0 \left( \sum_{i=1}^n x_i - b \right) &= 0; \\ -\mu_j x_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n; \\ \mu_j &\geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Sea  $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  un punto factible que satisface las condiciones KKT para algunos  $\bar{\mu}_0, \bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_n$ . Por hipótesis han de ser

$$\bar{x}_j \geq 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n;$$

$$\bar{\mu}_j \geq 0, \quad \forall j = 0, 1, \dots, n;$$

En particular, ha de ser  $\bar{\mu}_0 > 0$  puesto que en caso contrario para cada  $j > 0$ ,

$$\bar{\mu}_j = -\frac{a_j}{\bar{x}_j + c_j} < 0.$$

Entonces,

$$\bar{\mu}_0 \left( \sum_{i=1}^n \bar{x}_i - b \right) = 0 \implies \sum_{i=1}^n \bar{x}_i = b > 0,$$

y como los  $\bar{x}_i$  son no negativos ha de haber alguno de ellos no nulo. Consideremos los siguientes conjuntos de índices:

$$N = \{1, 2, \dots, n\}; \quad I = \{i \in N : \bar{x}_i = 0\}, \quad N \setminus I = \{i \in N : \bar{x}_i > 0\} \neq \emptyset.$$

Sea  $j \in N \setminus I$ , y por tanto, tal que  $\bar{x}_j > 0$  y  $\bar{\mu}_j = 0$ . Se tiene que

$$-\frac{a_j}{\bar{x}_j + c_j} + \bar{\mu}_0 = 0 \implies \bar{x}_j = \frac{a_j}{\bar{\mu}_0} - c_j.$$

Y si  $j \in I$  sabemos que  $\bar{x}_j = 0$  y  $\bar{\mu}_j \geq 0$ . En resumen,

$$\bar{x}_j = \max \left\{ \frac{a_j}{\bar{\mu}_0} - c_j, 0 \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Entonces,

$$\sum_{i=1}^n \bar{x}_i = b \implies \sum_{i=1}^n \max \left\{ \frac{a_i}{\bar{\mu}_0} - c_i, 0 \right\} = b.$$

Si renombramos

$$\bar{\nu} = \frac{1}{\bar{\mu}_0}, \quad d_i = \frac{c_i}{a_i};$$

se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \max \left\{ \frac{a_i}{\bar{\mu}_0} - c_i, 0 \right\} = b \implies \sum_{i=1}^n \max \left\{ a_i \left( \frac{1}{\bar{\mu}_0} - \frac{c_i}{a_i} \right), 0 \right\} = b \implies \sum_{i=1}^n \max \{ a_i(\bar{\nu} - d_i), 0 \} = b.$$

El problema obtenido es un problema tipo *water-filling*, que se puede consultar en el ejemplo 5.2 del texto de Boyd & Vandenberghe (2004: 245). Podemos pensar que  $a_i$  y  $d_i$  son respectivamente la superficie y la altura del terreno en el tramo  $i$ -ésimo de una región que queremos inundar con un volumen de agua  $b$ . Tras la inundación el agua alcanzará la altura  $\bar{\nu}$ , y en cada tramo tendrá una profundidad  $\bar{x}_i$ , tal y como se ilustra en la figura 113.

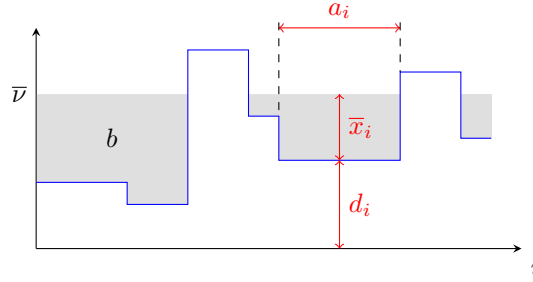


Figura 113: Esquema del problema *water-filling*.

La figura anterior y su interpretación nos proporcionan una estrategia para calcular la incógnita  $\bar{\nu}$ . Hemos de rellenar de agua los huecos en orden decreciente de profundidad, hasta llegar al volumen  $b$  deseado. En la práctica, definimos la permutación  $\rho : N \rightarrow N$  tal que

$$i \neq j \implies \rho(i) \neq \rho(j);$$

$$d_{\rho(1)} \leq d_{\rho(2)} \leq \dots \leq d_{\rho(n)}.$$

Con ayuda de la permutación  $\rho$  reordenamos la ecuación anterior, y hacemos la correspondiente representación en la figura 114.

$$\sum_{i=1}^n \max \{ a_{\rho(i)}(\bar{\nu} - d_{\rho(i)}), 0 \} = b.$$

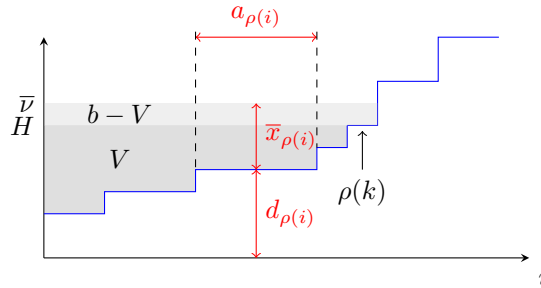


Figura 114: Esquema reordenado del problema *water-filling*.

En primer lugar hemos de calcular el valor de  $k$  que indica hasta qué tramo, numerado como  $\rho(k)$ , llegará el agua.

$$k = \max \left\{ \ell \in N : \sum_{i=1}^{\ell} a_{\rho(i)}(d_{\rho(\ell)} - d_{\rho(i)}) < b \right\}.$$

Conocido el valor de  $k$ , podemos determinar  $\bar{v}$  de la ecuación siguiente, y por tanto también  $\bar{\mu}_0$ .

$$\sum_{i=1}^k a_{\rho(i)}(\bar{v} - d_{\rho(i)}) = b \implies \bar{v} = H + \frac{b - V}{\sum_{i=1}^k a_{\rho(i)}},$$

siendo

$$V = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \\ \sum_{i=1}^{k-1} a_{\rho(i)}(d_{\rho(k)} - d_{\rho(i)}) & \text{si } k > 1; \end{cases} \quad H = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1, \\ d_{\rho(k-1)} & \text{si } k > 1. \end{cases}$$

Por último,

$$\bar{x}_{\rho(j)} = \begin{cases} \bar{v} - d_{\rho(j)} & \text{si } 1 \leq j \leq k, \\ 0 & \text{si } k < j \leq n. \end{cases}$$

Para evitar el cálculo de los multiplicadores y ver que son no negativos, lo cual sería muy complicado, razonaremos que el problema ha de tener solución única. El teorema de Weierstrass (Bazaraa *et al.*, 2006: 49) nos garantiza que ha de tener solución puesto que buscamos el un mínimo de una función continua en un conjunto no vacío y compacto. Habrá, por tanto, al menos un punto  $\bar{x}$  de la región factible que verifica las condiciones KKT. Dicho punto no puede activar simultáneamente todas las restricciones, y los gradientes de un conjunto cualesquiera de  $l$  funciones  $g_j$ , con  $j \in N$  y  $1 \leq l \leq n$ , son independientes. Por otra parte, la función  $f_0$  y las funciones  $g_j$  son convexas, la primera por ser su matriz hessiana definida positiva y las demás por ser funciones afines. En esas condiciones el teorema 1.29 (Ramos, 2017: 86) nos garantiza que el punto  $\bar{x}$  hallado es un óptimo global del problema. Pero como la función  $f$  es en realidad estrictamente convexa, dicho punto ha de ser único.

### Solución del problema 18.2.

- (a) La red se dibuja en el grafo de la figura 115, y los números sobre los arcos indican las capacidades máximas de estos.

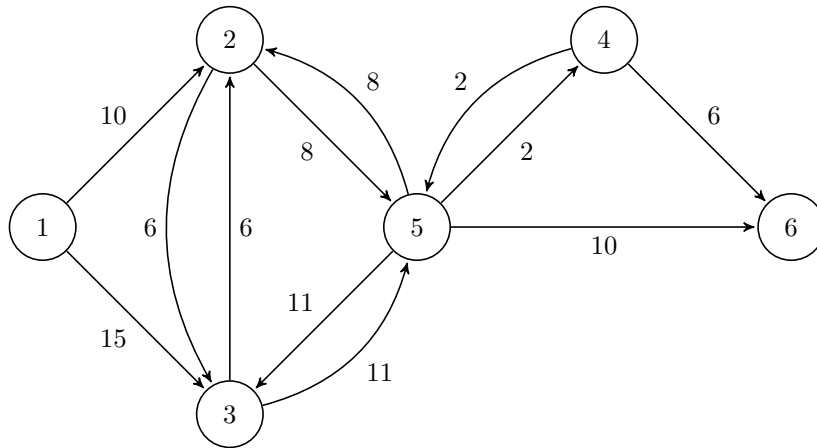


Figura 115: Grafo para el problema 18.2.

- (b) Paso inicial. Tomamos como flujo inicial para todos los arcos cero. En este caso todos arcos son incrementables.

Primera iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 3)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(5, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{15, 11, 10\} = 10$ , por lo que incrementamos todos los flujos de dicha cadena en 10 unidades. El resultado está representado en la figura 116. En esta figura y en las siguientes, las coordenadas  $(i, r)$  que aparecen sobre cada arco indican que por dicho arco se puede incrementar el flujo en  $i$  unidades y se puede reducir en  $r$  unidades.

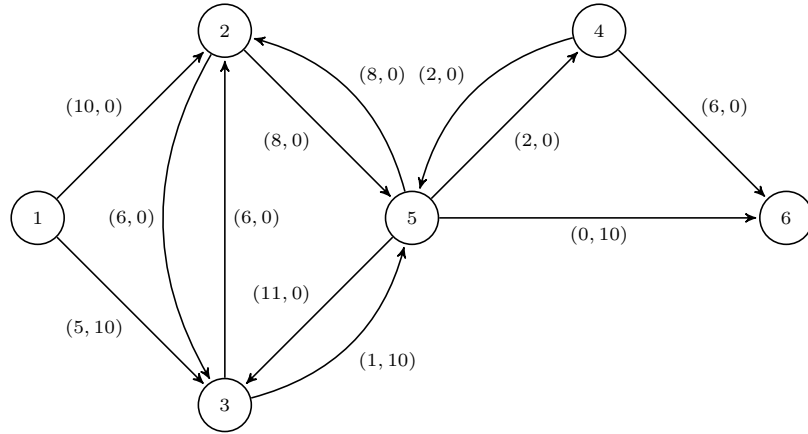


Figura 116: Grafo para el problema 18.2 tras la primera iteración.

Segunda iteración. Buscamos una cadena de aumento de flujo. Por ejemplo  $(1, 2)$ ,  $(2, 5)$ ,  $(5, 4)$ ,  $(4, 6)$ . El mínimo de los posibles incrementos de flujo en dicha cadena es  $\min\{10, 8, 2, 6\} = 2$ , por lo que incrementamos todos los flujos de dicha cadena en 2 unidades. El resultado está representado en la figura 117.

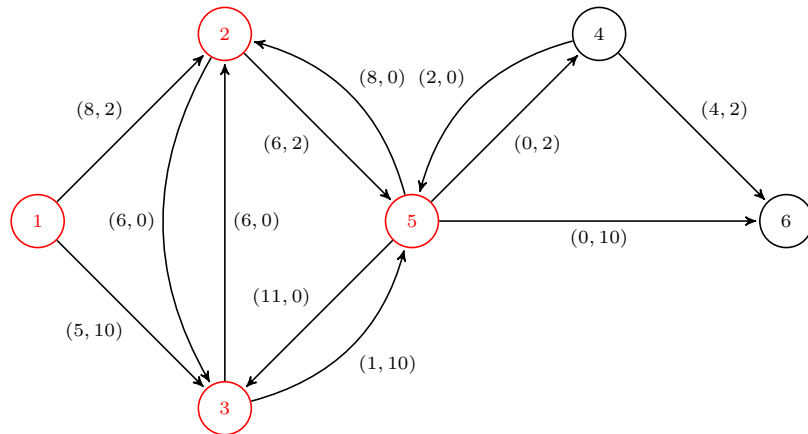


Figura 117: Grafo para el problema 18.2 tras la segunda iteración.

No hay más posibles cadenas de aumento de flujo. Esto se puede ver aplicando el algoritmo del aumento de flujo, cuyo coloreado se ha representado en la figura 117. El flujo que tenemos actualmente es el flujo máximo, y queda determinado por el corte formado por los arcos que tienen el vértice inicial coloreado y el final no,  $(5, 4)$ ,  $(5, 6)$ , y que son arcos saturados. Dicho flujo máximo es

$$c(5, 4) + c(5, 6) = 2 + 2 + 10 = 12.$$

(c) Consideramos todos los cortes simples que dejan a la fuente (vértice 1) en una de las componentes conexas,  $X_1$ , y al sumidero (vértice 6) en la otra,  $X_6$ . Cada arco del corte es tal que

- (1) O bien tiene su vértice inicial en  $X_1$  y su vértice final en  $X_6$ ,
- (2) O bien tiene su vértice inicial en  $X_6$  y su vértice final en  $X_1$ .

La capacidad de cada corte es, según la definición 2.85 (Ramos, 2017: 300), la suma de las capacidades de los arcos que cumplen la propiedad (1).

Los posibles cortes que cumplen estas propiedades junto con sus capacidades se recogen en el cuadro 24, y aplicando la proposición 2.13 (Ramos, 2017: 301) y sabemos que el flujo máximo será menor o igual al mínimo de la capacidad de los cortes realizados, y será por tanto de 12 unidades como máximo.

Corte	$X_1$	$X_6$	Capacidad
$\{(1, 2), (1, 3)\}$	$\{1\}$	$\{2, 3, 4, 5, 6\}$	$10 + 15 = 25$
$\{(1, 3), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (5, 2)\}$	$\{1, 2\}$	$\{3, 4, 5, 6\}$	$15 + 6 + 8 + 0 + 0 = 29$
$\{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 5), (5, 3)\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4, 5, 6\}$	$10 + 0 + 6 + 11 + 0 = 27$
$\{(2, 5), (3, 5), (5, 2), (5, 3)\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{4, 5, 6\}$	$8 + 11 + 0 + 0 = 19$
$\{(1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 5), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 5\}$	$\{3, 4, 6\}$	$15 + 6 + 0 + 0 + 0 + 11 + 2 + 10 = 44$
$\{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 5\}$	$\{2, 4, 6\}$	$10 + 0 + 0 + 6 + 0 + 8 + 2 + 10 = 36$
$\{(4, 5), (5, 4), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 5\}$	$\{4, 6\}$	$0 + 2 + 10 = 12$
$\{(1, 3), (2, 3), (3, 2), (3, 5), (4, 6), (5, 3), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$	$\{3, 6\}$	$15 + 6 + 0 + 0 + 6 + 11 + 10 = 48$
$\{(1, 2), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 6), (5, 2), (5, 6)\}$	$\{1, 3, 4, 5\}$	$\{2, 6\}$	$10 + 0 + 0 + 6 + 6 + 8 + 10 = 40$
$\{(4, 6), (5, 6)\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5\}$	$\{6\}$	$6 + 10 = 16$

Cuadro 24: Cortes para el problema 18.2.

(d) El arco  $(4, 6)$  no es un arco saturado en la solución óptima encontrada, por lo que si aumentamos el flujo máximo que puede circular por él no cambia ni la solución óptima ni el flujo máximo determinado en el segundo apartado.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAZARAA, Mokhtar S.; SHERALI, Hanif D.; SHETTY, C.M., *Nonlinear Programming. Theory and Algorithms*, 3<sup>rd</sup> ed., Hoboken (New Jersey, US), Wiley, 2006, ISBN 978-0-471-48600-8, 853 p.

BERTSEKAS, Dimitri P., *Nonlinear Programming*, 2<sup>nd</sup> ed., Belmont (Massachusetts, US), Athenea Scientific, 1999, ISBN 978-1-886529-00-7, 777 p.

BOYD, Stephen; VANDENBERGHE, Lieven, *Convex Optimization*, Cambridge (UK), Cambridge University Press, 2004, ISBN 978-0-521-83378-3, 716 p.

RAMOS MÉNDEZ, Eduardo, *Modelización*, 2<sup>a</sup> ed., Madrid (ES), Ediciones Académicas, 2017, ISBN 978-84-946052-1-5, 356 p.