Cuestiones y problemas
Tema 3: Gravitación

Un satélite se mueve con velocidad constante en una órbita circular alrededor de la Tierra. Si su aceleración es 8,14 m/s^2 y el periodo de su órbita es de 97 minutos, calcular el radio de la órbita.
Solución:
La aceleración del satélite es la aceleración centrípeta:

$$g = \frac{v^2}{r} = \varpi^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{T^2 a}{4\pi^2} \approx 7000\text{Km}$$

La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular estacionaria en torno al planeta Venus es ϖ = 1.45 10^{-4} rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es *L* = 2.2 10^{12} kg m^2 s^{-1}. Determinar la masa del satélite.
(Dato: Masa de Venus 4.87 10^{24} kg, $\mathrm{G} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2/kg^2}$).
Solución:
Si el satélite describe una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta responsable de su movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2}$$

de donde obtenemos que $R = [GM/\omega^2]^{1/3}$ = 24906 km. Como el momento angular es $L = I\omega$, siendo el momento de inercia $I = mR^2$, despejando llegamos a m = 24.46 kg.

Un agujero negro es el estado final de una estrella de gran masa cuya fuerza gravitatoria es tan intensa que impide que la propia luz escape del mismo. Supongamos que tenemos un astro de masa *M* y radio *R*. Deducir como debe ser la relación M/R para que la velocidad de escape de ese astro sea mayor que la luz. Comparar esa relación con la de la Tierra, sabiendo que $M_T = 5.98\,10^{24} kg$ y $R_T = 6370 km$. (*Datos:* $c = 2{,}998\,10^8 m/s$; $G = 6{,}672\,10^{-11}\ Nm^2/kg^2$)
Solución:
La velocidad de escape debe ser mayor que la de la luz:

$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} > c \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{R} > 6.75\,10^{26} kg/m$$

Con la ayuda de la segunda y tercera ley de Kepler se puede deducir la expresión de la ley de Newton de gravitación universal. Empieza el argumento suponiendo, en primera aproximación, una órbita circular de un planeta alrededor del Sol, por ejemplo. La fuerza centrípeta a la que está sometido el planeta es $F_c = \omega^2 R$, siendo ω la velocidad angular del planeta y *R* el radio de giro.
Continúe el argumento para llegar a que la fuerza ejercida por el Sol es inversamente proporcional al radio al cuadrado, sabiendo que ω está relacionado con el período de rotación e invocando posteriormente la tercera ley de Kepler.
Acudiendo al principio de acción y reacción entre el Sol y el planeta, obtenga finalmente la forma conocida de la ley de Newton de la gravitación universal.

<u>Solución:</u>
La fuerza centrípeta tiene la expresión:

$$F_c = m\omega^2 R = \frac{4\pi^2 mR}{T^2}$$

siendo *T* el período de la órbita. Aplicando la 3ª ley de Kepler:

$$T^2 = \frac{R^3}{k_1}$$

donde k_1 una constante independiente de la masa del planeta, y sustituyendo en la expresión de la fuerza centrípeta demostramos lo que se pedía:

$$F_c = k_1 \frac{4\pi^2 m}{R^2}$$

El planeta debe ejercer una fuerza de reacción sobre el Sol igual y opuesta a F_c

$$F_2 = k_2 \frac{4\pi^2 M}{R^2}$$

donde *M* es la masa del Sol. Igualándolas tenemos que

$$mk_1 = Mk_2 = KMm$$

siendo *K* otra constante universal. Finalmente, si sustituimos este resultado en la expresión de la fuerza llegamos a la Ley de Newton para la gravitación universal:

$$F_c = 4\pi^2 K \frac{mM}{R^2} = G\frac{mM}{R^2}$$

Un proyectil es lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0. Si suponemos que esta velocidad es mayor que la velocidad de escape, el proyectil se alejará indefinidamente de la Tierra tendiendo a alcanzar una velocidad constante. Despreciando la resistencia del aire, calcular esta velocidad límite en función de v_0, G, R_T y M_T.
<u>Solución:</u>
Esta velocidad se alcanzará en el límite $r \to \infty$, en el que $U_f(r \to \infty) \to 0$. Aplicando conservación de energía tenemos:

$$E_{c,i} + U_i = E_{c,f} + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = \frac{1}{2}mv_f^2 + 0$$

Despejando se obtiene $v_f = \sqrt{v_0^2 - \dfrac{2GM_T}{R_T}}$

Supuesta la Tierra esférica de radio R_0 y homogénea (densidad constante), calcular la profundidad *h´* a la que debe introducirse un cuerpo para que su peso sea el mismo que a una altura *h* sobre la superficie.

<u>Solución:</u>
Debemos igualar el peso del cuerpo a una altura *h*:

$$P = G\frac{mM}{(R_0 + h)^2}$$

con el peso a una profundidad *h´*:

$$P = G\frac{mM´}{(R_0 - h´)^2}$$

siendo

$$M´ = Vd = \frac{4}{3}\pi(R_0 - h´)^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi(R_0)^3} = M\frac{(R_0 - h´)^3}{(R_0)^3}$$

Despejando obtenemos

$$h´ = R_0 - \frac{(R_0)^3}{(R_0 + h)^2}$$

El radio de la órbita terrestre es 1.46x10^{11}m y el de Urano 2.87x10^{12}m. ¿Cuál es el período de Urano?

<u>Solución:</u>
De acuerdo con la Tercera Ley de Kepler

$$T^2 \propto r^3 .$$

Entonces tenemos

$$T_{Urano} = T_{Tierra}\sqrt{\frac{r^3_{Urano}}{r^3_{Tierra}}} \approx 31833.46 \text{ días}$$

Supuesto solamente conocidos el radio de la Tierra ($R = 6.4 \cdot 10^6$ metros), la distancia Tierra-Luna ($r = 60R$) y el valor de la gravedad en la superficie terrestre ($g = 9.8 \quad m/s^2$), calcular la velocidad de la Luna en su movimiento alrededor de la Tierra.

<u>Solución:</u>
La fuerza que la Tierra ejerce sobre una masa *m* en su superficie es:

$$F = G\frac{M_T m}{R^2} = mg .$$

Y la fuerza sobre esa masa, suponiendo que está girando en la misma órbita de la Luna, a una distancia *r* será:

$$F´ = G\frac{M_T m}{r^2} = ma_n$$

donde a_n es la aceleración centrípeta en la órbita lunar. Dividiendo ambas expresiones tenemos que

$$a_n = g\frac{R^2}{r^2} = 2.72\,10^{-3} m/s^2$$

Entonces: $v_{Luna} = \sqrt{ra_n} = 1.02\,10^3 m/s$ y la solución es la c).

Sabiendo que el radio de la órbita de la Luna alrededor de la tierra es *R*, y que su periodo de revolución es *T*, ¿cuánto vale la masa de la Tierra?

<u>Solución:</u>
La fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre la Luna es la responsable del movimiento de rotación de la última sobre la primera. Podemos escribir por tanto que

$$G\frac{M_T m_L}{R^2} = m_L \omega^2 R = m_L \frac{4\pi^2}{T^2} R .$$

Despejando M_T obtenemos que $M_T = \frac{4\pi^2}{GT^2} R^3$.

Un satélite artificial de masa *m* describe una trayectoria circular de radio *r*=25000km. R_{Tierra}=6370 km, valor de la gravedad en la superficie terrestre *g*=9.8 m/s^2
- ¿cuánto vale el periodo de su revolución?
- Deducir cómo depende la energía total del satélite *E* (Energía potencial + Energía cinética) con el radio de la órbita. (tomar como origen de energías para la energía potencial gravitatoria *U*=0 cuando *r*=∞)
- Supongamos ahora que en un instante dado, debido al rozamiento, el satélite pierde energía, ¿qué ocurrirá?

<u>Solución:</u>
La fuerza de atracción gravitatoria que la Tierra ejerce sobre el satélite es la responsable de su movimiento de rotación. Podemos escribir por tanto que

$$G\frac{M_T m}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2} r .$$

Despejando T^2 obtenemos que $T^2 = \frac{4\pi^2}{M_T G} r^3$. Como $g = \frac{GM_T}{R_T^{\ 2}}$, tenemos finalmente que

$T^2 = \frac{4\pi^2}{gR_T^{\ 2}} r^3$ y el periodo vale 10 h 56 min.

La energía potencial del satélite viene dada por la expresión $U = -\frac{GM_T m}{r}$ (cuando $r \to \infty$, $U \to 0$).

La forma de obtenerla aparece en cualquier libro de texto de la asignatura.
Su energía cinética es deducida de la primera ecuación utilizada en este problema

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2} \quad \to \quad E_c = \frac{1}{2} m v^2 = G\frac{M_T m}{2r} .$$

Sumando ambas energías obtenemos que la energía total del satélite $E = E_c + U = -G\frac{M_T m}{2r}$.

Vemos pues que cuanto mayor es el radio de la órbita, mayor es la energía total del satélite (ya que es negativa). Por tanto, si el satélite pierde energía, *r* disminuirá y descenderá a una órbita de radio menor.

Al disminuir *r*, la energía cinética (dada por $G\frac{M_T m}{2r}$) aumentará y su velocidad será mayor.

Supóngase que la densidad de la Tierra es uniforme, ρ, y que no existen rozamientos. Se practica un túnel siguiendo un diámetro terrestre y se deja caer una partícula de masa *m* por el mismo. Calcular la fuerza que actuaría sobre la partícula y su movimiento.
(<u>*DATOS:*</u> $\rho = 5.51 \cdot 10^3 \quad kg/m^3$; $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\ Nm^2 kg^{-2}$.)

Solución:
Deseamos hallar la fuerza gravitatoria sobre una masa *m* en un punto situado a una distancia *r* del centro de la Tierra, siendo $r < R_T$. La única contribución al campo en dicho punto se debe a la masa *M* dentro del radio *r* , cuyo valor es

$$M = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

La fuerza gravitatoria sobre esa masa valdrá entonces

$$F = -m\frac{4G\rho\pi r^3}{3r^3} r = -\frac{4G\rho\pi m}{3} r = -kr$$

siendo $k = \dfrac{4G\rho\pi m}{3}$.

La aceleración en la dirección radial es

$$a = \frac{F}{m} = -\frac{4G\rho\pi}{3} r .$$

Ésta es la ecuación de un movimiento armónico simple con frecuencia angular $\varpi^2 = \dfrac{4G\rho\pi}{3}$. El periodo es $T = \dfrac{2\pi}{\varpi} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{4G\rho\pi}{3}}} \approx 1\,\text{hora}\ 24\,\text{minutos}.$

Un satélite cercano a la superficie de la Tierra tarda unos 90 minutos en orbitar alrededor de ésta. Este es el mismo que tardaría en hacerlo si, en lugar de hacerlo alrededor de la Tierra, lo hiciese alrededor de la Luna, aun siendo su radio mucho menor. ¿Qué se puede decir de la densidad de La Tierra y de la Luna?

Solución:
La densidad de la tierra es $\dfrac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$ mientras que la de la luna vale $\dfrac{M_L}{\frac{4}{3}\pi R_L^3}$. Supongamos que el satélite tiene una masa *m*. La ecuación de la dinámica para su movimiento alrededor de la tierra es

$$G\frac{M_T m}{R_T^2} = m\frac{v_T^2}{R_T}$$

Como $v_T = \omega_T R_T$ podemos escribir

$$G\frac{M_T}{R_T^3} = \varpi_T^2$$

En el caso del giro alrededor de la luna tenemos

$$G\frac{M_L}{R_L^3} = \varpi_L^2$$

Como el periodo de la órbita es el mismo en los dos casos, tenemos que $\omega_T = \omega_L$. Igualando las dos ecuaciones anteriores llegamos a

$$\frac{M_L}{R_L^3} = \frac{M_T}{R_T^3} ,$$

de donde se deduce que ambas tienen la misma densidad.

Un objeto celeste esférico tiene una frecuencia de rotación sobre sí mismo de 30 vueltas por segundo. Su masa es de $M \approx 2\times 10^{30}$ kg, (Dato: $G = 6,7\times 10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$). Calcular:
- La densidad mínima que debe tener para poder mantener su forma esférica.
- El máximo radio posible del objeto.
- En realidad la densidad del objeto es del orden de la densidad nuclear, que es tres órdenes de magnitud superior a la mínima calculada para no desintegrarse. Este nuevo dato, ¿en cuanto altera la estimación del radio?

Solución:
La condición necesaria y suficiente para mantener la forma esférica del objeto celeste es que para todo elemento de masa *m* en su superficie debe cumplirse que

$$\frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R \le G\frac{mM}{R^2},$$

es decir, que la fuerza atractiva gravitatoria sea suficiente para mantener la rotación. De lo contrario, la superficie se desintegraría porque la atracción no proporciona la fuerza centrípeta suficiente para que la masa de la superficie gire alrededor del planeta.
De la ecuación anterior obtenemos que la densidad ρ debe satisfacer la siguiente condición:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \ge G\frac{3\omega^2}{4G\pi} \approx 1.3\,10^{14}\ \mathrm{kg/m^3}$$

El radio del objeto celeste debe ser

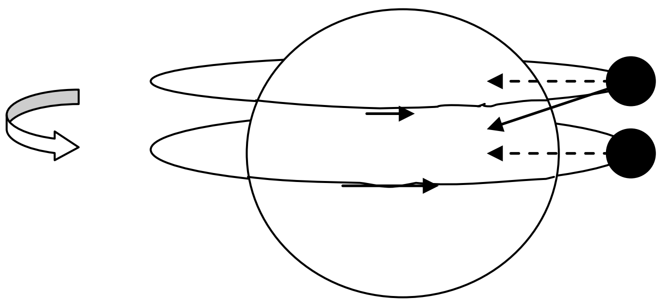
$$R \le \left(\frac{3M}{4\pi\rho_{\min}}\right)^{\frac{1}{3}} = 1.5\,10^5\ \mathrm{m} = 150\ \mathrm{Km}$$

Nos dicen ahora que, en realidad, la densidad del objeto es tres órdenes de magnitud mayor a la calculada en a): $\rho \approx 1.3\,10^{17}\ \mathrm{kg/m^3}$. La nueva estimación del radio da 15 Km.

Un satélite geoestacionario es aquél cuya posición permanece siempre en la vertical de un determinado punto e la superficie terrestre. Estos satélites se encuentran:
a) En la vertical de un punto de latitud 45º Norte
b) En la vertical de un punto de latitud 0º
c) Pueden estar en la vertical de puntos en cualquier latitud

- La distancia al centro de la Tierra de la posición de estos satélites: (Masa Tierra =5.98 10^{24} kg, G=6.67 10^{-11} Nm^2/kg^2)
a) depende de para qué se utilice el satélite
b) es siempre de 42.000 km
c) es siempre de 420 km

Solución:
Al permanecer siempre en la vertical de un determinado punto, los satélites geoestacionarios giran con la misma velocidad angular que lo hace la tierra. La única fuerza que actúa sobre ellos es la atracción gravitatoria que está siempre dirigida hacia el centro de la Tierra. La fuerza gravitatoria entonces debe ejercer de fuerza centrípeta responsable del movimiento circular de los cuerpos. La fuerza centrípeta siempre apunta hacia el centro del giro.



En la figura vemos porqué un satélite geoestacionario tiene que estar siempre en la vertical de un punto de latitud 0º, es decir, sobre el Ecuador. Sólo en esa latitud, la fuerza gravitatoria puede ejercer como fuerza centrípeta ya que tendrían la misma dirección. En cualquier otra latitud, por ejemplo la ilustrada en la figura ($\approx 25^{\circ}$), la fuerza centrípeta (flecha con trazo discontinuo) y la gravitacional (flecha con trazo continuo) no coinciden en dirección, por lo que el satélite jamás podrá estar siempre sobre el mismo punto, girando con la tierra, únicamente por atracción gravitatoria.
La distancia *d* de estos satélites a la Tierra viene determinada por la igualdad entre la fuerza centrípeta y la gravitatoria:

$$\frac{mv^2}{d} = m\omega^2 d = G\frac{mM}{d^2}.$$

Despejando obtenemos $d \approx 42000\,\mathrm{Km}$.

Sabiendo que la gravedad en la superficie de la Luna es 1/5 de la terrestre, calcular la velocidad que se debe comunicar a un cuerpo en la superficie de la Luna para que escape a la atracción lunar y se aleje para siempre (velocidad de escape). La velocidad de escape en la Tierra es 11.2 km/s y $R_T = 3.66\,R_L$.

Solución:

Condiciones energéticas para el escape: $-G\frac{Mm}{R} + \frac{1}{2}mv^2 = 0$

En la Luna

$$v_L^{\ 2} = G\frac{2M_L}{R_L} = 2g_{0L}R_L$$

En la Tierra

$$v_T^{\ 2} = G\frac{2M_T}{R_T} = 2g_{0T}R_T$$

Dividiendo

$$v_L^{\ 2} = v_T^{\ 2}\frac{g_{0L}}{g_{0T}}\frac{R_L}{R_T} = \frac{v_T^{\ 2}}{5\cdot 3.66} \quad \Rightarrow \quad v_L = 2.6\,\mathrm{km/s}$$

Se quiere poner un satélite de 1000 kg. en órbita circular alrededor de la Tierra. Para ello, se lanza desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 5 km/s. Cuando el satélite alcanza la altura máxima se la impulsa para que describa una órbita circular alrededor de la Tierra. Determinar la velocidad con la que se le debe impulsar para que tenga lugar el movimiento circular ($g_0 = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ y $R_{Tierra} = 6370\,\mathrm{Km}$)

Solución:

Primero debemos averiguar cual es la altura máxima alcanzada. Si elegimos el origen de energía potencial $U = 0$ cuando $r = \infty$, la expresión de la energía potencial en función de la altura es

$$U = -G\frac{M_T m}{r}$$

Por lo tanto, igualando energías tenemos que

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T} = -G\frac{M_T m}{r}$$

Como $g_0 R_T^{\ 2} = GM_T$, tenemos que

$$\frac{1}{2}mv^2 - g_0 R_T m = -\frac{g_0 {R_T}^2 m}{r}$$

de donde $r = 7965\,\text{km}$.
Ahora tenemos que

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{M_T m}{r^2}$$

de donde $v = 7.066\,\text{km/s}$

A distancias de la superficie de la Tierra muy pequeñas comparadas con el radio terrestre R_T se suele considerar que la aceleración gravitatoria es constante y que tiene un valor $g = 9.81\ \text{m/s}^2$. Calcular el error (en porcentaje) que se comete al aproximar la aceleración real mediante g a una altura *h* de la superficie terrestre sabiendo que $h/R_T = 63700^{-1}$.

Solución:
La Ley de la Gravitación de Newton a una altura h tiene la forma

$$F = G\frac{Mm}{(R_T + h)^2}$$

por lo que la aceleración correcta vale

$$g' = G\frac{M}{(R_T + h)^2}$$

mientras que la aproximación es

$$g = G\frac{M}{R_T^2}$$

El error viene dado por:

$$\varepsilon = \frac{|g' - g|}{g'} = (R_T + h)^2 \left| \frac{1}{(R_T + h)^2} - \frac{1}{R_T^2} \right| = \left(\frac{2R_T h + h^2}{R_T^2} \right) = \left(\frac{2h}{R_T} + \frac{h^2}{R_T^2} \right) \overset{h/R_T \ll 1}{\approx} \frac{2h}{R_T}$$
$$= 3.14 \cdot 10^{-5} = 0.00314\%$$

La velocidad angular con la que un satélite de 25 kg de masa describe una órbita circular en torno al planeta Venus es ω = 1'45.10^{-4} rad/s. ¿Qué energía sería necesaria para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular ω = 10^{-4} rad/s?
(Dato: Masa de Venus 4'87.10^{24} Kg, $\text{G} = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2$)

Solución:
Si el satélite está en una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta que le obliga a describir la órbita es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:

$mv^2/r = GMm/r^2$

de donde: $r = [G.M/w^2]^{1/3} = [6'67.10^{-11} .4'87.10^{24} /(1'45.10^{-4})^2]^{1/3} = 24906$ km
La energía necesaria para cambiar la órbita del satélite será la diferencia de energías entre las dos órbitas:
$E = E_2 - E_1 = (Ec + Ep)_2 - (Ec + Ep)_1$
$Ec = m.v^2/2 = (G.M.m/r)/2$
$Ep = - G.M.m/r$
$Ec + Ep = (G.M.m/r)/2 - G.M.m/r = -(G.M.m/r)/2$
Para w_1 = 1'45.10^{-4} el radio de la órbita es r_1 = 24906 km

y su energía (Ec + Ep)$_1$ = - 6'67.10^{-11}.4'87.10^{24}. 24'46 /(2.24'906.10^6) = - 1'6.10^8 Julios
Para $w_2 = 1.10^{-4}$ el radio de la órbita es: r_2 = [G.M/w^2]$^{1/3}$ = 31907 Km
y su energía (Ec + Ep)$_2$ = - 6'67.10^{-11}.4'87.10^{24}. 24'46 /(2.31'907.10^6) = - 1'25.10^8 Julios
La energía a suministrar al satélite será:
E =- 1'25.10^8 + 1'6.10^8 = 0'35.10^8 Julios

La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular estacionaria en torno al planeta Venus es ω = 1'45.10^{-4} rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es L= 2'2.10^{12} kg m^2 s^{-1}. Determinar la masa del satélite.
(Dato: Masa de Venus 4'87.10^{24} kg, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$).

Solución:
Si el satélite está en una órbita estacionaria, la fuerza centrípeta que le obliga a describir la órbita es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce Venus sobre el satélite:
$mv^2 /r = GMm/r^2$
de donde: r = [G.M/w^2]$^{1/3}$ = [6'67.10^{-11} .4'87.10^{24} /(1'45.10^{-4})^2]$^{1/3}$ = 24906 km
El momento angular es L = I.w , siendo el momento de inercia I = m.r^2
L = m.r^2.w, m = L /(w.r^2) = 2'2.10^{12} /[1'45.10^{-4} .(24'906.10^6)^2] = 24'46 kg

Las mareas se producen como consecuencia de las fuerzas gravitatorias ejercidas por el Sol y la Luna sobre los océanos de la Tierra. A pesar de que la fuerza ejercida por el Sol sobre el océano es mucho mayor que la ejercida por la Luna, ésta produce un efecto mucho mayor sobre las mareas, debido a que lo que es importante en ese caso es la diferencia de fuerzas que se observa dependiendo que la Luna o el Sol se encuentren a un lado de la tierra o al otro, tal y como se muestra en este problema.
DATOS:
Constante de gravitación universal G = 6,673 ·10^{-11} N m^2 / kg^2
Radio terrestre R = 6400 km
Distancia promedio al sol r_{Sol} = 150 ·10^6 km
Distancia promedio a la Luna r_{Luna} = 4 ·10^5 km
Masa del sol $M_{Sol} = 2 \cdot 10^{30}$ kg
Masa de la Luna $M_{Luna} = 7 \cdot 10^{22}$ kg

- Calcular el cociente entre las fuerzas ejercidas por el Sol y la Luna.
Solución:
Según la ley de la gravitación de Newton, la fuerza ejercida por el sol sobre un objeto de masa m situado en la tierra (p. ej. un océano) es:

$F_{Sol} = G * M_{Sol} * m / (r_{Sol})^2$

Análogamente, la fuerza ejercida por la luna sobre este objeto será

$F_{Luna} = G * M_{Luna} * m / (r_{Luna})^2$

y su cociente es:

$F_{Sol} / F_{Luna} = 179$

Por tanto la fuerza ejercida por el Sol es casi 200 veces mayor que la ejercida por la Luna.

- Diferenciando la ley de la gravitación de Newton calcular la variación de fuerza (*dF*) que se produce como consecuencia de una variación pequeña (*dr*) en la posición. A partir del resultado

anterior demostrar que la
variación relativa de fuerza está dada por *dF/F* = -2 *dr* / *r*.
Solución:
La ley de la gravitación de Newton establece que la fuerza de atracción que experimentan 2 cuerpos de masas M y m, separados una distancia r, es:

$F = G * M * m / r^2$

La variación de F producida por una pequeña variación dr en la distancia es:

$dF = (dF/dr) * dr = -2 * (G * M * m / r^3) * dr$

esto se puede poner como

$dF = -2 * (F / r) * dr$

y por tanto la variación relativa en la fuerza es

$dF / F = -2 * dr / r$

- La variación máxima de la distancia desde el Sol o la Luna a un océano en un día completo (producida como consecuencia de la rotación de la tierra) es igual al diámetro terrestre. Teniendo esto en cuenta, calcular el cociente entre las variaciones máximas de las fuerzas ejercidas por el Sol y la Luna como consecuencia de la rotación terrestre.
Solución:
Teniendo en cuenta los resultados del apartado anterior, las variaciones máximas que experimentan las fuerzas ejercidas por Sol y la Luna sobre los océanos, debidas a la rotación de la tierra, son

$dF_{Sol} = F_{Sol} * (-2 * dr / r_{Sol})$

$dF_{Luna} = F_{Luna} * (-2 * dr / r_{Luna})$

donde la variación de distancia inducida por la rotación de la tierra (dr) es, en ambos casos, el doble del radio de la tierra.

Si calculamos el cociente entre estas variaciones encontramos

$dF_{Sol} / dF_{Luna} = 0.48$

Por tanto, la variación máxima de la fuerza ejercida por el Sol es aproximadamente la mitad de intensa que la variación máxima de la fuerza ejercida por la Luna. De ahí se deduce el mayor efecto de la Luna sobre las mareas a pesar de que la fuerza de atracción de la Luna es mucho menos intensa que la del Sol.

La expresión de la energía potencial gravitatoria tiene la forma:

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} + U_0$$

siendo U_0 una constante que depende del origen r_0 de energía potencial, es decir, aquel punto que hace $U(r_0) = 0$. Deducir esta expresión a partir del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria.
Solución:
La fuerza de atracción gravitatoria

$$\mathbf{F}(r) = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = -F(r)\hat{\mathbf{r}}$$

mientras que la definición de energía potencial establece que:

$$dU = -dW = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F(r)dr$$

siendo $d\mathbf{r} = dr\hat{\mathbf{r}}$.
Integrando obtenemos

$$U(r) = \int F(r)dr = -G\frac{Mm}{r} + U_0$$

donde U_0 es una constante de integración y que se deduce a partir del origen r_0 de energía potencial ($U(r_0) = 0$) considerado, que puede ser cualquiera. Por ejemplo, cuando consideramos el origen de energía en el infinito $U(r = \infty) = 0$ tenemos que $U_0 = 0$.

La expresión de la energía potencial gravitatoria tiene la forma:

$$U(r) = -G\frac{Mm}{r} + U_0$$

siendo U_0 una constante que depende del origen r_0 de energía potencial, es decir, aquel punto que hace $U(r_0) = 0$.

- En muchos casos se suele calcular la energía potencial para una altura h con respecto a la superficie de la Tierra, donde se sitúa el origen de energías. Obtener la expresión para $U(h)$.

- En lugar de la expresión que acabamos de obtener, se suele utilizar de forma habitual la expresión $U(h) = mgh$, siendo $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, deducir cómo se llega a esta expresión y explicar qué aproximación se ha hecho.

<u>Solución:</u>

Escribamos la ecuación inicial en función de h

$$U(h) = -G\frac{Mm}{R_T + h} + U_0$$

Si situamos el origen de energía en el punto $h = 0$: $U(0) = 0$, tenemos que

$$U(h=0) = -G\frac{Mm}{R_T} + U_0 = 0 \quad \rightarrow \quad U_0 = G\frac{Mm}{R_T}$$

Sabemos que $g = G\frac{M}{R_T^{\,2}}$, por lo que sustituyendo llegamos a

$$U(h) = -R_T^{\,2}\frac{mg}{R_T + h} + mgR_T = \frac{mgR_T h}{R_T + h} = \frac{mgh}{1 + h/R_T} \overset{h/R_T \ll 1}{\approx} mgh$$