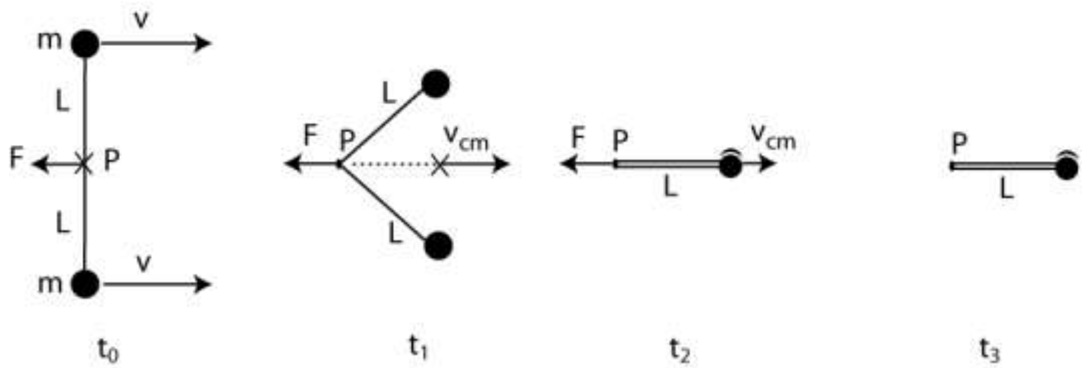
Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2017/2018, Junio, 1ª y 2ª semana

1ª Semana

1. Dos partículas idénticas están conectadas por un trozo de cuerda de longitud 2L sobre una mesa de aire (rozamiento nulo). Las partículas, ambas con masa m, están inicialmente a una distancia 2L y moviéndose de forma paralela con velocidades constantes iguales, de módulo v y dirección perpendicular a la cuerda que las une. En un determinado momento (t_0 en la figura) se ejerce una fuerza constante F en dirección opuesta al movimiento hasta que frena el conjunto formado por la cuerda y las partículas. Durante el frenado, las partículas se acercan (t_1 en la figura) hasta que se juntan (t_2 en la figura) y finalmente se detienen (t_3 en la figura).

Calcule la distancia d recorrida por el punto central de la cuerda (P) desde el instante en el que empieza a actuar la fuerza F hasta que las partículas se detienen. Compruebe la solución en el límite en el que L se hace cero. **(2 puntos)**
(Considere que la cuerda es inextensible y tiene masa despreciable. La X en la figura señala la posición del centro de masas).



Solución

a) Considere el sistema de las dos partículas y la cuerda. El trabajo realizado por la fuerza F sobre el centro de masas tiene que ser igual a la variación de la energía cinética del sistema.

$$W = K_0$$

La energía cinética inicial es

$$K_0 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\, m\, v^2\right)$$

El trabajo realizado por la fuerza es:

$$W = \int_0^{\Delta x} \vec{F}_{neta\ ext} \cdot d\vec{l}_{cm} = F \cdot \Delta x$$

donde Δx es la distancia recorrida por el centro de masas, igual a la distancia recorrida por el punto P más la longitud L:

$$\Delta x = d + L$$

por tanto,

$$d = \frac{m\,v^2}{F} - L$$

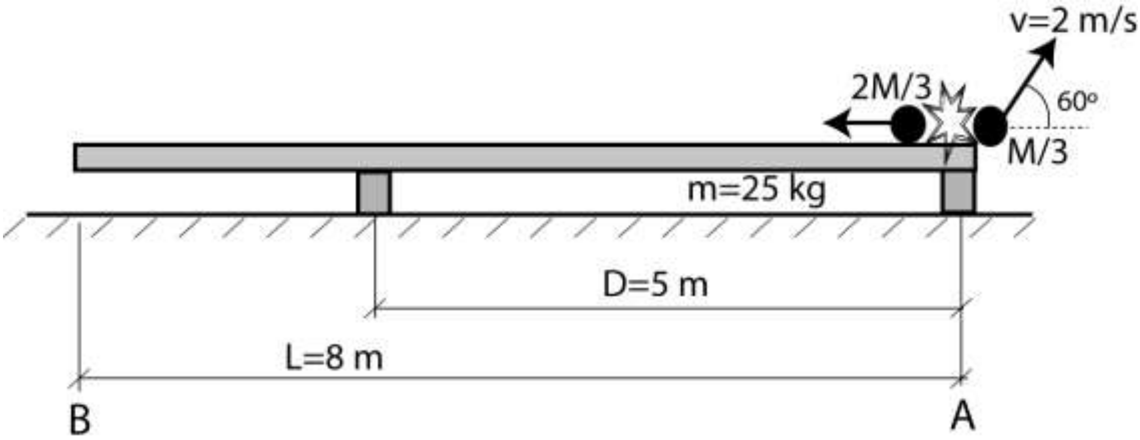
Comprobamos que si la separación de las partículas fuera cero (L=0) la distancia recorrida sería $d = \frac{m\,v^2}{F}$, que es igual a la distancia recorrida por una partícula de masa 2m con velocidad inicial v, frenada por una fuerza F:

$$F = 2m\,a \quad \rightarrow\ a = \frac{F}{2m}$$

$$v_f = v_0 - a\,t \quad \rightarrow\ t = \frac{v}{a}$$

$$d = v_0\,t - \frac{1}{2}a\,t^2 \ \ \rightarrow\ \ d = \frac{v^2}{a} - \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2a} = \frac{m\,v^2}{F}$$

2. Una viga rectangular uniforme de longitud L=8 m y masa m=25 kg está apoyada, sin fijación, sobre dos postes separados por una distancia D=5 m. En el instante inicial, una partícula de masa M que estaba en reposo en el extremo A explota, dividiéndose en dos partículas de masas M/3 y 2M/3. La partícula de masa M/3 se aleja de la viga con velocidad de modulo v= 2 m/s, formando un ángulo de 60º con la horizontal (ver figura) y la partícula de masa 2M/3 se desliza sobre la viga, sin rozamiento, en dirección al extremo B. Calcule la masa M sabiendo que la viga se empezará a mover al cabo de t=14 s. **(2 puntos)**



Solución

Calculemos primero la posición de la partícula 2M/3 que desliza sobre la viga trasel tiempo t. Por conservación del momento antes y después de la explosión:

0= 2M/3 v’ + M/3 v

la partícula que se dirige hacia el extremo B saldrá con velocidad opuesta a la partícula de masa M/3, con módulo v’=1 m/s. La componente vertical de esta velocidad será anulada por la fuerza normal de la viga, con lo que la partícula se moverá por la viga con una velocidad horizontal constante de V= v’ cos60º = 0.5 m/s. Por tanto, la partícula recorre una distancia x= v t = 0.5 14 = 7 m.

En el momento en el que la viga se despega del soporte A gira en sentido anti-horario sobre el soporte central. Esto ocurre justo después de que el torque neto sobre ese soporte central se anule. Para ello, el torque del centro de masas de la viga y el debido a la masa 2M/3 tienen que ser iguales:

$$(7-5)\frac{2Mg}{3} = 25\ 1g \quad \rightarrow \quad M = 18.75\ kg$$

3. Una carga puntual positiva q está situada en el punto $(a,0,0)$ y otra carga igual pero negativa se encuentra en el punto $(-a,0,0)$. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa un círculo de radio R situado en el plano $x=0$ con su centro en el origen de coordenadas. **(2,5 puntos)**

Solución

El flujo eléctrico se define como

$$\phi = \int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Por consiguiente, para calcular el flujo deberemos calcular el campo producido por las dos cargas en la superficie de interés.

Podemos hacer uso de la simetría del problema para simplificar los cálculos. En primer lugar, debido al producto escalar con el vector normal a la superficie, que viene dado por el vector $\mathbf{i}$ (vector unitario en la dirección X), sólo nos interesa la componente perpendicular a la superficie, esto es, la componente x del campo. En segundo lugar, es fácil darse cuenta que esta componente será constante en cualquier anillo circular de nuestro círculo. Por lo tanto, si consideramos un anillo circular de espesor dr y radio r, la componente x del campo eléctrico producido por las dos cargas será:

$$E_x = -2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{a}{\left(a^2+r^2\right)^{3/2}}$$

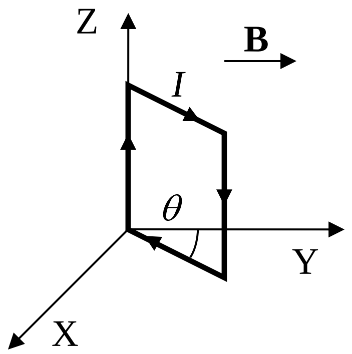
El flujo que atravesará ese anillo de superficie $dS = 2\pi r dr$ será

$$d\phi = E_x 2\pi r dr$$

y el flujo total vendrá dado por la integral sobre toda la superficie circular

$$\phi = \int_{r=0}^{R} d\phi = -\frac{q}{\varepsilon_0}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$$

4. En la figura se muestra un hilo conductor con forma de cuadrado de lado L por el que circula una corriente de intensidad I en el sentido mostrado. Este circuito se encuentra dentro de un campo magnético uniforme de intensidad B dirigido en el sentido positivo del eje Y. Calcular el vector fuerza ejercido por el campo sobre cada lado del cuadrado y el vector momento necesario para mantener el cuadrado en la posición indicada suponiendo que éste pudiese girar alrededor del eje Z. **(2 puntos)**



Solución

La fuerza que ejerce el campo magnético sobre un lado es:

$$\mathbf{F} = L\mathbf{I}\times\mathbf{B},$$

donde $\mathbf{B} = B\mathbf{j}$.

Para el lado horizontal de arriba tenemos que el vector corriente es $\mathbf{I} = I(\sin\theta, \cos\theta, 0)$ y por tanto

$$\mathbf{F}_1 = L\mathbf{I}\times\mathbf{B} = LIB\sin\theta\,\mathbf{k}$$

Para el lado vertical de la derecha tenemos que el vector corriente es $\mathbf{I} = -.I\mathbf{k}$ y por tanto

$$\mathbf{F}_2 = L\mathbf{I}\times\mathbf{B} = LIB\,\mathbf{i}$$

Para el lado horizontal de abajo tenemos que el vector corriente es $\mathbf{I} = -I(\sin\theta, \cos\theta, 0)$ y por tanto

$$\mathbf{F}_3 = L\mathbf{I}\times\mathbf{B} = -LIB\sin\theta\,\mathbf{k}$$

Para el lado vertical del eje Z tenemos que el vector corriente es $\mathbf{I} = -I\mathbf{k}$ y por tanto

$$\mathbf{F}_4 = L\mathbf{I}\times\mathbf{B} = -LIB\,\mathbf{i}$$

Sin consideramos el giro alrededor del eje Z, sólo el momento de $\mathbf{F}_2$ contribuye. Por consiguiente, el momento que tendremos que aplicar para que el cuadrado no gire será:

$$\mathbf{M} = -\mathbf{r}\times\mathbf{F}_2,$$

donde $\mathbf{r} = L(\sin\theta, \cos\theta, 0)$. Si hacemos el producto vectorial obtenemos

$$\mathbf{M} = L^2 IB\cos\theta\,\mathbf{k}$$

5. Un observador situado en el sistema S observa dos eventos separados en el espacio por 600 m y en el tiempo por 8×10^{-7} s. ¿Existe algún sistema de referencia S' en el que el orden temporal de los eventos se invierta? Si es así, determinar la velocidad mínima con la que debe moverse S' con respecto a S para que esto suceda. **(1,5 puntos)**

Recordamos que las transformaciones de Lorentz son:

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

Solución

Si aplicamos la transformación de Lorentz tenemos que para que se invierta el orden temporal de los dos sucesos se debe cumplir que:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) < 0$$

Es decir, que

$$v > c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0,4c$$

lo cual es posible. Por lo tanto, cualquier sistema moviéndose a una velocidad con respecto a S mayor que $0,4c$ verá invertido el orden temporal de los dos sucesos. Esto es posible porque los dos eventos no pueden estar conectados por una relación de causalidad, ya que la velocidad de la señal que los conectaría es mayor que la luz (físicamente imposible)

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 2,5c$$

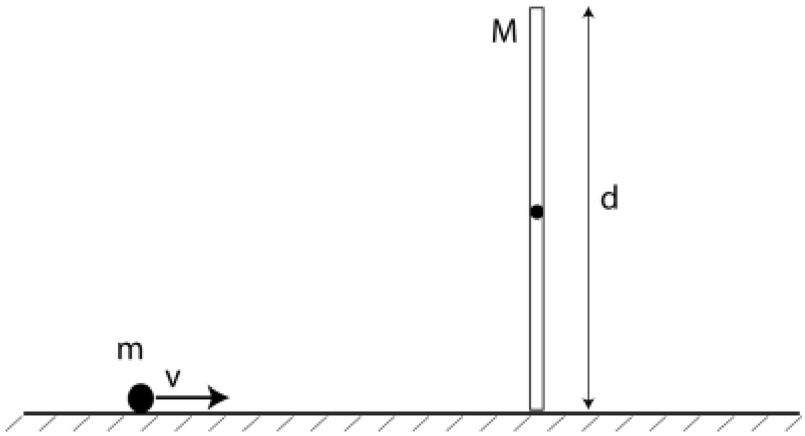
lo cual es físicamente imposible.

2ª Semana

1. Una partícula de masa m se desliza sin rozamiento sobre una superficie horizontal con una velocidad constante v. Se encuentra con el extremo de una barra de masa M=2m cuyo centro es fijo, produciéndose una colisión elástica. La barra estaba inicialmente en reposo y gira, sin pérdidas por rozamiento, en sentido anti-horario después del choque. Encuentre la velocidad de la partícula, módulo y dirección, y la velocidad angular de la barra después del choque. **(2.5 puntos)**

El momento de inercia de una barra respecto a su punto central es:

$$I = \frac{Md^2}{12}$$



Solución

En un choque elástico se conserva la energía, además, como no actúan fuerzas externas se conserva también el momento angular del sistema.

Conservación de la energía:

$$K_{m0} = K_{mf} + K_{rot}$$

$$\frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\,{v'}^2}{2} + \frac{I\,w^2}{2} \quad , \quad I = \frac{Md^2}{12} = \frac{md^2}{6}$$

$$\frac{m\,v^2}{2} = \frac{m\,{v'}^2}{2} + \frac{m\,d^2 w^2}{12} \quad \rightarrow \quad v^2 = {v'}^2 + \frac{d^2 w^2}{6}$$

Conservación del momento angular tomando como origen de coordenadas el punto fijo de giro de la barra en los instantes previo y posterior al choque:

$$\frac{m\,v\,d}{2} = \frac{m\,v'\,d}{2} + I\,w \quad \rightarrow \quad \frac{m\,v\,d}{2} = \frac{m\,v'\,d}{2} + \frac{md^2 w}{6}$$

$$v = v' + \frac{dw}{3} \quad \rightarrow \quad dw = 3\,(v - v') \quad \rightarrow \quad d^2 w^2 = 9\,(v^2 + v'^2 - 2v\,v')$$

sustituyendo esta última expresión en la ecuación encontrada para la conservación de la energía:

$$v^2 = {v'}^2 + \frac{9\,(v^2 + {v'}^2 - 2v\,v')}{6} \quad \rightarrow \quad v^2 = {v'}^2 + \frac{3}{2}v^2 - 3v\,v' + \frac{3}{2}{v'}^2$$

$$5v'^2 - 6v\,v' + v^2 = 0$$

que tiene como soluciones $v' = v$ y $v' = v/5$, siendo la segunda la solución que estamos buscando.
Es decir, la partícula continúa en la misma dirección con un quinto de su velocidad, transmitiendo el resto de su momento angular y energía a la barra que gira con velocidad angular

$$w = \frac{12\, v}{5d}$$

2. Una partícula de masa m se deja en reposo sobre un plano inclinado 45º grados con la horizontal, sobre el que desliza sin rozamiento una distancia d en un tiempo t. Cuando se deja en reposo la partícula sobre un plano con el que tiene un coeficiente de rozamiento μ, la partícula tarda un tiempo $t' = n \cdot t$ en recorrer la misma distancia d. Encuentre la expresión del coeficiente de rozamiento μ en función de n. (1.5 puntos)

Solución

En el plano inclinado sin rozamiento, el bloque desliza con una aceleración

$$a = g \sin\theta$$

en el plano inclinado con rozamiento, la aceleración es

$$a' = g\,(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

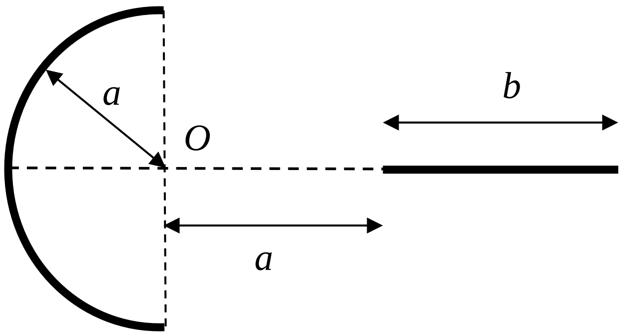
La relación entre la distancia recorrida (común en ambos casos) y los tiempos y aceleraciones viene dada por

$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a't'^2 \quad \rightarrow \quad \frac{a}{a'} = \frac{t'^2}{t^2} = \frac{n^2t^2}{t^2} = n^2$$

$$\frac{a}{a'} = n^2 \quad \rightarrow \quad \frac{g\sin\theta}{g\,(\sin\theta - \mu\cos\theta)} = \frac{\sin 45}{\sin 45 - \mu\cos 45} = \frac{1}{1-\mu} = n^2$$

$$\mu = 1 - \frac{1}{n^2}$$

3. Consideremos la distribución de carga indicada en la figura. A la izquierda tenemos un alambre semicircular de radio a y cuyo centro O coincide con el origen de coordenadas. Este alambre tiene espesor despreciable y está uniformemente cargado con una densidad lineal de carga λ_1. A la derecha tenemos otro alambre rectilíneo de longitud b también cargado uniformemente con una densidad lineal de carga λ_2. La distancia entre el origen de coordenadas O y el lado más próximo del alambre rectilíneo es también a. Calcular la relación que debe existir entre las cargas de los dos alambres para que el campo eléctrico en el punto O sea nulo. **(3 puntos)**



Solución

Por simetría, los campos eléctricos producidos por los dos alambres en el punto O sólo tienen componente x.

Para calcular el campo producido por el primer alambre consideraremos un segmento infinitesimal de longitud dl en un punto del alambre que forma un ángulo θ con el eje X. La carga de este segmento será $dq = \lambda_1 dl = \lambda_1 a d\theta$, y la componente x del campo eléctrico que genera en el punto O será:

$$dE_x = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{a^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_1}{a}\cos\theta d\theta$$

Integrando obtenemos el campo total en el punto O

$$\mathbf{E}_1 = \int dE_x\, \mathbf{i} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_1}{a}\int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta d\theta\, \mathbf{i} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda_1}{a}\mathbf{i}$$

Podemos hacer lo mismo para el segundo alambre, considerando ahora un segmento infinitesimal de longitud dx (con carga $dq = \lambda_2 dx$) situado a una distancia x del punto O. Tenemos:

$$\mathbf{E}_2 = -\int dE_x\, \mathbf{i} = -\frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x=a}^{a+b}\frac{1}{x^2}dx\, \mathbf{i} = \frac{\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a}\right)\mathbf{i}$$

Haciendo que $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$ obtenemos la relación buscada

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{a}{2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}\right) = \frac{b}{2(a+b)}$$

4. Por un conductor rectilíneo situado en el eje Y circula una corriente de 20 A en el sentido positivo. Calcular la fuerza que el campo magnético $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ T ejerce por metro de longitud del conductor. **(1,5 puntos)**

Solución

La fuerza que un campo magnético ejerce sobre un segmento de corriente tiene la forma

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L}\times\mathbf{B}$$

En nuestro caso tenemos $L = \mathbf{j}$ m. Operando obtenemos

$$\mathbf{F} = I\mathbf{L}\times\mathbf{B} = \mathbf{B} = 60\mathbf{i} - 40\mathbf{k} \text{ N}$$

5. Dos observadores S y S’ se aproximan uno hacia el otro con un velocidad relativa v suficientemente próxima a c como para considerar efectos relativistas. Para el observador situado en S, la distancia inicial que le separa de S’ es L. Calcular el tiempo transcurrido hasta el encuentro medido por el observador S’. **(1,5 puntos)**

Recordamos que las transformaciones de Lorentz son:

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

<u>Solución</u>

Podemos revolver este problema de varias formas. Por ejemplo, el tiempo medido por S será:

$$\Delta t = \frac{L}{v},$$

y los dos eventos (evento 1: S’ a una distancia L y evento 2: S’ a una distancia 0) ocurren en dos puntos diferentes del espacio. Sin embargo, para el observador situado en S’ el tiempo medido será el tiempo propio entre los eventos, ya que ambos suceden en el mismo punto en S’, de modo que bastará con aplicar la dilatación del tiempo:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_P \quad \Rightarrow \quad \Delta t_P = \gamma^{-1}\Delta t = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\frac{L}{v}$$

Otro modo de resolverlo es situarnos directamente en S’. La distancia propia entre los dos eventos es $L_P = L$, de modo que S’ verá una distancia contraída:

$$L' = \gamma^{-1} L$$

Desde S’, el tiempo que tarda S en recorrer la distancia L' será

$$\Delta t' = \frac{L'}{v} = \gamma^{-1}\frac{L}{v} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\frac{L}{v}$$

Por último, también podríamos haber resuelto el problema aplicando directamente las ecuaciones de Lorentz:

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right) = \gamma\left(\frac{L}{v} - \frac{vL}{c^2}\right) = \frac{L\gamma}{v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{L\gamma^{-1}}{v}$$