Tema 4: Espacios vectoriales

1. La estructura de espacio vectorial

Definición 4.1. Un conjunto V se dice que es un *espacio vectorial sobre el cuerpo* $\mathbb{K}$ (o un abreviadamente un $\mathbb{K}$-espacio vectorial) si existen en él las siguientes operaciones:
una operación interna (*suma*):

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longrightarrow & \mathbf{x} + \mathbf{y} \end{array}$$

y una operación externa (*producto por escalar*):

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\alpha, \mathbf{x}) & \longrightarrow & \alpha \cdot \mathbf{x} \end{array}$$

verificando:

(I) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

(II) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$

(III) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(IV) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

(V) $1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}$

(VI) $\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{u}) = (\alpha\beta) \cdot \mathbf{u}$

(VII) $(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{u} = \alpha \cdot \mathbf{u} + \beta \cdot \mathbf{u}$

(VIII) $\alpha \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha \cdot \mathbf{u} + \alpha \cdot \mathbf{v}$

Proposición 4.1. Sea V un e.v. Se verifican las siguientes propiedades:

(I) El elemento neutro de un e.v. es único.

(II) El elemento opuesto de un e.v. es único.

(III) $0 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{u} \in V$.

(IV) El elemento opuesto de $\mathbf{u}$ es $(-1) \cdot \mathbf{u}$.

(V) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

2. Independencia lineal

Definición 4.2. Sea V un e.v. y sean $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ vectores de V. Se dice que $\mathbf{v}$ es *combinación lineal* (o que *depende linealmente*) de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, si existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

Se dirá combinación lineal *no nula* si algún $\alpha_i \neq 0$.

Proposición 4.2.

(i) El vector nulo es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores.

(ii) Un vector cualquiera $\mathbf{v}$ siempre es combinación lineal de cualquier conjunto de vectores que contenga al propio $\mathbf{v}$.

Definición 4.3. Se dice que los vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son *linealmente dependientes (l.d.)* si podemos escribir el vector $\mathbf{0}$ como combinación lineal no nula de ellos. Dicho de otro modo, si existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ *no todos nulos* tales que

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n$$

En caso contrario se dirá que los vectores son *linealmente independientes (l.i.)*, lo que ocurrirá si cualquier combinación lineal de los vectores $\mathbf{v}_i$ igualada al vector nulo, implica que todos los escalares deben ser nulos, es decir,

$$\mathbf{0} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{v}_n \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$

Proposición 4.3.

(i) Si $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son vectores linealmente dependientes, existe algún $\mathbf{v}_j$ que es combinación lineal de los demás.

(ii) Todo conjunto finito de vectores entre los cuales se encuentre el vector $\mathbf{0}$ es linealmente dependiente.

(iii) Todo conjunto finito de vectores linealmente independientes no puede contener un subconjunto propio linealmente dependiente.

Teorema 4.1. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ con $\operatorname{rango}(A) = r$. Entonces existen r filas (o columnas) de A linealmente independientes, esto es, hay r vectores de $\mathbb{K}^n$ correspondientes a sus filas (o de $\mathbb{K}^m$ correspondientes a sus columnas) linealmente independientes, de manera que el resto se expresa como combinación lineal de éstas.*

Definición 4.4. Se denomina *rango de un conjunto de vectores* al mayor número de ellos que son linealmente independientes.

Teorema 4.2. *En $\mathbb{K}^n$, todo conjunto de vectores formado por $n+1$ vectores es linealmente dependiente.*

3. Bases y dimensión de un espacio vectorial

Definición 4.5. Sea V un e.v. Un conjunto de vectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ se dice *sistema generador* (o *conjunto generador*) de V si cualquier vector $\mathbf{u} \in V$ se puede poner como combinación lineal de ellos.

Lema 4.4. Sea V un e.v. con $\dim V = n$. Sea $\mathcal{S}$ un sistema generador de V. Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$, con $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ conjuntos disjuntos[1] tales que los elementos de $\mathcal{S}_2$ se escriben como combinación lineal de los elementos de $\mathcal{S}_1$, entonces $\mathcal{S}_1$ es sistema generador.

Definición 4.6. Sea V un e.v. Un conjunto finito de vectores $\{\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n\}$ es una *base* de V si es un conjunto linealmente independiente y sistema generador.

Teorema 4.3. *Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \ldots \mathbf{u_n}\}$ una base de un e.v. V. Entonces $\forall \mathbf{u} \in V$ existen unos únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que*

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n \tag{1}$$

Definición 4.7. A los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de (1) se les denominan *coordenadas* de $\mathbf{u}$ en la base $\mathcal{B}$, y se notará por

$$\mathbf{u}_{\mathcal{B}} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)_{\mathcal{B}}$$

Proposición 4.5. Supongamos que el e.v. V posee una base formada por n elementos. Entonces, todo conjunto de m vectores, con $m > n$ es l.d.

Teorema 4.4. *Todas las bases de un e.v. poseen el mismo número de elementos.*

[1] Esto es, $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \emptyset$.

Definición 4.8. Se llama *dimensión* de un espacio vectorial V al número de elementos de cualquiera de sus bases, y se notará por $\dim(V)$.

Proposición 4.6. Sea V es un e.v. de dimensión n. Todo conjunto de n vectores l.i. forma una base de V.

Proposición 4.7 (Ampliación de bases)**.** Sea V un espacio vectorial de $\dim V = n$. Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ con $k < n$, es un conjunto l.i. entonces existen $n - k$ vectores, $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$, tales que el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base de V.

Proposición 4.8. Si $\mathcal{S}$ es un sistema generador de un e.v. V de dimensión n, entonces existe $\mathcal{S}_1$ un subconjunto de $\mathcal{S}$ que es base de V.

Corolario 4.5. *Si V es un e.v. con $\dim V = n$, se tiene:*

(I) *Todo conjunto de n vectores l.i. es una base.*

(II) *Todo conjunto con más de n vectores es l.d.*

(III) *Todo sistema generador tiene al menos n elementos.*

(IV) *Todo sistema generador de n elementos es una base.*

Definición 4.9. Un conjunto infinito de vectores de un e.v. V es l.i. si cualquier subconjunto suyo es l.i. Si existe un tal conjunto se dirá que V es de *dimensión infinita.*

4. Cambios de base

Teorema 4.6. *La matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es invertible y su inversa es la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.*

5. Subespacios vectoriales

Definición 4.10. Sea V un e.v. sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y $W \subset V$ un subconjunto suyo. Se dice que W es un *subespacio vectorial* (o variedad lineal) de V si W es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las operaciones definidas en V.

Proposición 4.9. W es un subespacio vectorial si y sólo si $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in W$, $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, α, $\beta \in \mathbb{K}$.

Definición 4.11. Sean $\mathbf{u}_1$, ..., $\mathbf{u}_k$ vectores de un e.v. V. Se define el conjunto

$$W = L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{u}_i : \alpha_i \in \mathbb{K} \right\}$$

es decir, el conjunto de todas las posibles combinaciones lineales que se pueden hacer con los vectores dados. Este conjunto se denomina *subespacio engendrado por* $\mathbf{u}_1$, ..., $\mathbf{u}_k$ y a tales vectores se les denomina sistema generador de W.

Proposición 4.10. $W = L(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k)$ es un subespacio vectorial de V.

Teorema 4.7. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, con $\operatorname{rango}(A) = r$. El conjunto de soluciones del sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un subespacio vectorial generado por cualesquiera $k = n - r$ soluciones linealmente independientes.*

Teorema 4.8. *Recíprocamente, todo subespacio vectorial de $\mathbb{K}^n$ de dimensión k puede determinarse a través de las soluciones de un sistema lineal homogéneo.*

5.1. Operaciones con subespacios

Teorema 4.9. *Sean L_1 y L_2 dos subespacios vectoriales de V. Si $L_1 \subset L_2$ y $\dim(L_1) = \dim(L_2)$ entonces $L_1 = L_2$.*

Definición 4.12. Dados dos subespacios L_1, L_2 de un e.v. V se define la *suma* de L_1 y L_2 por

$$L_1 + L_2 = \{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 : \mathbf{u}_1 \in L_1,\ \mathbf{u}_2 \in L_2\}$$

Igualmente definimos la *intersección* de L_1 y L_2 por

$$L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in L_1,\ \mathbf{u} \in L_2\}$$

Teorema 4.10. *Si L_1 y L_2 son subespacios vectoriales, entonces $L_1 + L_2$ y $L_1 \cap L_2$ también son subespacios vectoriales.*

Teorema 4.11. *Sean L_1 y L_2 dos subespacios de un e.v. V. Se verifica:*

(I) *Si $\mathcal{B}_1$ es una base de L_1 y $\mathcal{B}_2$ es una base de L_2, entonces $L_1 + L_2 = L(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$, esto es, $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ es un sistema generador de $L_1 + L_2$.*

(II) *Si $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un sistema de ecuaciones implícitas de L_1 y $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ es un sistema de ecuaciones implícitas de L_2, entonces,*

$$\left.\begin{array}{r} A\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ B\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

es un sistema de ecuaciones implícitas de $L_1 \cap L_2$.

Teorema 4.12 (Fórmula de la dimensión)**.** *Si L_1 y L_2 son subespacios de un e.v. V se verifica:*

$$\dim(L_1) + \dim(L_2) = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$$

Definición 4.13. Un e.v. V es *suma directa* de dos subespacios L_1 y L_2 si y sólo si

$$L_1 + L_2 = V \quad \text{y} \quad L_1 \cap L_2 = \{\mathbf{0}\}$$

Se notará $V = L_1 \oplus L_2$.

Teorema 4.13. *Son equivalentes:*

(I) $V = L_1 \oplus L_2$.

(II) $\forall v \in V$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, *con* $\mathbf{v}_1 \in L_1$, $\mathbf{v}_2 \in L_2$, *únicos.*