Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2016, 1ª Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)
Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Isometría vectorial.
(b) Polinomio anulador y polinomio mínimo.
(c) Forma cuadrática y forma polar.
(d) Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial.

Ejercicio 1: (2 puntos) Proposición 8.14, pág. 291
Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestre que si los vectores $v_1, \ldots, v_k$ de V son ortogonales dos a dos, entonces son linealmente independientes.

Ejercicio 2: (3 puntos) Análogo al ejercicio 2, 1ª PEC 2017
Sea $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$ una matriz invertible de orden 3 que cumple: $A^{-1} = \dfrac{A^2 - 5A + 7I_3}{3}$
(a) Determine un polinomio anulador de A.
(b) Sabiendo que A no es diagonalizable, determine las posibles matrices de Jordan semejantes a A.

Ejercicio 3: (3 puntos) Ejercicio 7.15, pág. 433
(a) Determine la matriz de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

(1) El conjugado de la recta $R = L(1, 0, 0)$ es $R^c \equiv x + y + z = 0$.

(2) $\Phi(0, 0, 1) = 1$.

(3) La signatura de Φ es $(1, 0)$.

(b) Encuentre una base de vectores conjugados

Soluciones

Ejercicio 2:
Sea $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ una matriz invertible de orden 3 que cumple:

$$A^{-1} = \frac{A^2 - 5A + 7I_3}{3}$$

(a) Determine un polinomio anulador de A.
(b) Sabiendo que A no es diagonalizable, determine las posibles matrices de Jordan semejantes a A.

Solución: (a) Multiplicando por A en ambos miembros de la ecuación dada se tiene

$$AA^{-1} = \frac{A^3 - 5A^2 + 7A}{3} \Rightarrow 3I_3 = A^3 - 5A^2 + 7A \Rightarrow A^3 - 5A^2 + 7A - 3I_3 = 0$$

luego el polinomio $p(t) = t^3 - 5t^2 + 7t - 3$ es un polinomio anulador de A.
(b) Factorizamos el polinomio anulador ya que las raíces del polinomio característico de A también son raíces de $p(t)$.

$$p(t) = (t-1)^2(t-3)$$

Entonces, los posibles autovalores de A son 1 y/o 3 (podría ser autovalor alguno de ellos o los dos).
El polinomio mínimo de A, $m_A(t)$ cumple las siguientes condiciones
(1) es divisor de $p(t)$, y
(2) dado que A no es diagonalizable, tiene que tener alguna raíz múltiple (si todas las raíces del polinomio mínimo fuesen de grado 1, entonces todos los bloques de Jordan serían de tamaño 1 y A sería diagonalizable).
Ambas condiciones hacen que se tengan las siguientes posibilidades

$$m_A(t) = (t-1)^2 \quad \text{o bien} \quad m_A(t) = (t-1)^2(t-3)$$

Las raíces del polinomio mínimo son los autovalores de A y la multiplicidad algebraica de estas raíces en el polinomio mínimo indica el tamaño del bloque de Jordan más grande asociado al autovalor correspondiente.

Caso 1 Si $m_A(t) = (t-1)^2$, entonces $\lambda = 1$ es el único autovalor de A y la única raíz del polinomio característico, que será $p_A(t) = (1-t)^3$; y en la matriz de Jordan J_1 semejante a A hay un bloque de orden 2. En definitiva, salvo permutación de bloques, J_1 es

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Caso 2 Si $m_A(t) = (t-1)^2(t-3)$, entonces $p_A(t) = -m_A(t)$, y así A tiene dos autovalores $\lambda_1 = 1$ doble con el bloque de Jordan más grande de tamaño 2, y $\lambda_2 = 3$ simple. Luego la matriz de Jordan semejante a A es (salvo permutación de bloques)

$$J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$