⁕ DURACIÓN DEL EXAMEN: DOS HORAS ⁕

⁕ NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE MATERIAL ⁕

EJERCICIO 1) **(2 puntos)** Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} 2yu_y + xu_x = 4yx^2u \\ u(-2,y) = 1. \end{cases}$$

a) Demostrar que (P) tiene solución única.

b) Encontrar la solución de (P).

⁕

EJERCICIO 2) **(4 puntos)** Utilizando el método de variables separadas, hallar la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + 2u_y = 0, \quad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0 \\ u_y(x,0) = 0, \quad u(x,\pi) = 2\cos^2 x \end{cases}$$

⁕

EJERCICIO 3) **(4 puntos)**

a) Calcular la serie de Fourier en cosenos

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

de la función x^2 en el intervalo $[0,1]$.

b) Recordemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

¿En qué puntos x del intervalo cerrado $[0,1]$ la serie $S(x)$ converge a x^2? (Justificar la respuesta)

c) Hallar el conjunto C de los $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie $S(x)$ converge.

d) ¿En qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ la serie $S(x)$ converge uniformemente? (Justificar la respuesta)

e) Calcular $S(x)$ para $x \in C$.