ANÁLISIS NUMÉRICO, MATRICIAL E INTERPOLACIÓN
(Grado en Matemáticas)
Junio 2023

INSTRUCCIONES:

`MATERIAL PERMITIDO:`

- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario.
- El **libro de texto** de la asignatura (o una copia impresa del ebook) *Introducción al Cálculo Numérico* de Carlos Moreno González.

`DURACIÓN:` 120 minutos.

Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre y fecha.

P 1. (3 puntos) Se considera un sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuya matriz de coeficientes viene dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considerando los métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel, demuestre que uno de ellos converge y el otro no.

P 2. Se considera el siguiente producto escalar en el espacio de funciones continuas $C[-\pi/2, \pi/2]$:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) f(x) g(x) dx\,,$$

que verifica la relación $\langle x^2, \mathbf{1} \rangle = \frac{\pi^2}{2} - 4$, donde $\mathbf{1}$ representa a la función constante igual a uno.

(i) (2.5 puntos) Encuentre una sucesión de polinomios ortogonales q_0, q_1, q_2 con coeficiente principal uno y de grados $0, 1, 2$ respectivamente.

(ii) (1 punto) Utilizando el apartado anterior, encuentre el valor de los nodos y coeficientes en la siguiente fórmula de cuadratura Gaussiana

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) f(x) dx \approx \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1)$$

para que la fórmula sea exacta en polinomios del mayor grado posible.

P 3. Considere la siguiente fórmula de derivación numérica

$$f'(x_0) \approx \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$$

donde $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto arbitrario y $h > 0$.

(i) (1.5 puntos) Asumiendo que f es de clase C^3, encuentre una expresión del error de aproximación.

(ii) (1 punto) Para la función $f(x) = \cos(x)$, proporcione una cota explícita del error de aproximación que se comete en el caso $x_0 = 1$ y $h = 0.01$.

(iii) (1 punto) Determine el mayor grado de los polinomios para los que la fórmula anterior es exacta.

Solución del Problema 1. En el caso de Jacobi, la matriz M es la identidad, de modo que

$$H_J = \mathrm{Id} - M^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Calculamos su polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1/2-\lambda^2 & -1/2+\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1/2-\lambda^2 & -1/2+\lambda \\ 0 & -\lambda+1 & 1+2\lambda \\ 1/2 & -1/2 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1/2-\lambda^2 & -1/2+\lambda \\ -\lambda+1 & 1+2\lambda \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-2\lambda^3 - \tfrac{5}{2}\lambda)$$

lo que proporciona los valores propios $\lambda = 0, \pm\frac{\sqrt{5}}{2}i$. El máximo de los módulos de los valores propios será pues $\rho(H_J) = \sqrt{5}/2 > 1$. Luego el método de Jacobi no converge.

En el caso del método de Gauss-Seidel, tenemos que

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

cuya inversa se calcula fácilmente como

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

de modo que

$$H_G = \mathrm{Id} - M^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

Al tratarse esta última de una matriz triangular (superior), sabemos que sus autovalores corresponden a los elementos de la diagonal principal, de modo que su radio espectral será $\rho(H_G) = 1/2 < 1$. Por tanto, este último sí converge.

$\square$

Solución del Problema 2.

(i) Observemos que como el intervalo es simétrico con respecto al origen y la función peso $\cos(x)$ es par, entonces se tiene que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\cos(x)dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3\cos(x)dx = 0$$

usando el cambio de variable $y = -x$, es decir, $\langle x, \mathbf{1}\rangle = \langle x^3, \mathbf{1}\rangle = 0$. También podemos calcular fácilmente

$$\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)dx = \mathrm{sen}(\pi/2) - \mathrm{sen}(-\pi/2) = 2\,.$$

Observemos que la condición $\langle x, \mathbf{1}\rangle = 0$ nos permite tomar $q_0(x) = \mathbf{1}$ y $q_1(x) = x$. Para encontrar $q_2(x) = x^2 + bx + c$ imponemos las condiciones de ortogonalidad

$$0 = \langle q_0, q_2\rangle = \langle \mathbf{1}, x^2\rangle + b\langle \mathbf{1}, x\rangle + c\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \frac{\pi^2}{2} - 4 + 0b + 2c\,,$$

$$0 = \langle q_1, q_2\rangle = \langle x, x^2\rangle + b\langle x, x\rangle + c\langle x, \mathbf{1}\rangle = 0 + \left(\tfrac{\pi^2}{2} - 4\right) b + 0c\,.$$

De las ecuaciones se deduce que $b = 0$ y $c = -\frac{\pi^2}{4} + 2$ y, por tanto

$$q_2(x) = x + 2 - \frac{\pi^2}{4}\,.$$

Un razonamiento alternativo se haría siguiendo el comentario de la página 96 del texto base, según el cual, en el caso de un intervalo simétrico con resp. el origen y una función par (como es nuestro caso) tenemos que $a_n = 0$ para cada n en el teorema 14 y podemos construir la sucesión de polinomios como $q_0(x) = 1$, $q_1(x) = x$, $q_2(x) = xq_1(x) - b_2q_0(x) = x^2 - b_2$. Aplicando la fórmula de dicho teorema $b_2 = \langle x^2, \mathbf{1}\rangle / \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \frac{\pi^2}{4} - 2$.

(ii) La clave es usar el comentario que aparece tras el Teorema 26. Elegimos los nodos como las raíces del polinomio $q_2(x) = x^2 + 2 - \frac{\pi^2}{4}$, que son

$$x_0 = \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2} \quad , \quad x_1 = -\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 2}\,.$$

Imponiendo que la fórmula sea exacta para polinomios $p_0 = \mathbf{1}$ y $p_1(x) = x$, tenemos las condiciones

$$2 = \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \alpha_0 + \alpha_1\,,$$

$$0 = \langle \mathbf{1}, x\rangle = \alpha_0\left(-\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4} - 2}\right) + \alpha_1\sqrt{\tfrac{\pi^2}{4} - 2}\,,$$

de donde se deduce que $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Dicha fórmula será exacta para polinomios de grado menor o igual que tres. Podríamos haber planteado también un sistema

$$\begin{aligned} 2 &= \langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle = \alpha_0 + \alpha_1\,, \\ 0 &= \langle \mathbf{1}, x\rangle = \alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \\ \frac{\pi^2}{2} - 4 &= \langle \mathbf{1}, x^2\rangle = \alpha_0 x_0^2 + \alpha_1 x_1^2 \\ 0 &= \langle \mathbf{1}, x^3\rangle = \alpha_0 x_0^3 + \alpha_1 x_1^3 \end{aligned}$$

Observemos que de la primera ecuación se deduce que, al menos, uno de los coeficientes es no nulo. Podemos suponer que es $\alpha_0 \neq 0$, intercambiando los papeles con α_1 en caso contrario. De la segunda y cuarta ecuación, se deduce que $0 = \alpha_0 x_0 x_1^2 - \alpha_0 x_1^3 = \alpha_0 x_1^2(x_0 - x_1)$. Como $\alpha_0 \neq 0$, entonces hay dos posibilidades. La primera es que $x_1 = 0$, en cuyo caso $x_0 = 0 = x_1$ por la segunda ecuación, lo que entraría en contradicción con la tercera ecuación. Por tanto, necesariamente debe ser $x_0 - x_1 = 0$, y además, $x_0 = x_1 \neq 0$. De aquí se deduce ya que $\alpha_0 = \alpha_1 = 2$ y que $x_i = \pm\frac{\pi^2}{2} - 2$. En otras palabras, cualquier fórmula de cuadratura que sea exacta para polinomios de grado menor o igual que tres, debe tener los nodos y coeficientes que hemos calculado más arriba.

□

Solución del Problema 3. Si escribimos los desarrollos de Taylor de $f(x_0+h)$ y $f(x_0+2h)$ alrededor de x_0 llegamos a

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}h^3 \,,$$

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)(2h) + \frac{f''(x)}{2!}(2h)^2 + \frac{f^{(3)}(\xi')}{3!}(2h)^3 \,,$$

para ciertos $\xi \in [x, x+h]$ y $\xi' \in [x, x+2h]$. Por tanto,

$$-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h) = f'(x)(2h) + 4\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}h^3 - \frac{f^{(3)}(\xi')}{3!}(2h)^3 \,.$$

Dividiendo por $2h$, llegamos a la fórmula

$$\frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} = f'(x) + 2\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}h^2 - \frac{f^{(3)}(\xi')}{3!}4h^2 \tag{1}$$

Para ver el apartado (ii), observemos que la fórmula anterior (1) nos permite deducir que la fórmula de derivación es exacta la polinomios de grado menor o igual que dos, ya que la derivada tercera es constantemente igual a cero en ese caso. Para ver que dos es el grado máximo de exactitud, tenemos que probar que existe un polinomio de grado 3 para el que la fórmula no es exacta. Tomando, por ejemplo, $f(x) = x^3$ en el punto $x = 0$ y $h = 1$, tenemos que la aproximación es:

$$\frac{-3f(0) + 4f(0+1) - f(0+2)}{2} = \frac{4-8}{2} = -2 \neq 0 = f'(0) \,.$$

Para la función $f(x) = \cos(x)$, usando que $|f^{(3)}(x)| \leq 1$ para todo x, podemos estimar usando (1)

$$|f'(x_0) - F(x_0)| \leq \frac{2h^2}{3!} + \frac{4h^2}{3!} = \frac{6h^2}{6} = h^2 = 10^{-4} \,.$$

NOTA: También podríamos habernos planteado usar el resto de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}h^3 + o(h^3) \,,$$

$$f(x+2h) = f(x) + f'(x)(2h) + \frac{f''(x)}{2!}(2h)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(2h)^3 + o(h^3) \,,$$

obteniendo:

$$\frac{-3f(x) + 4f(x+h) - f(x+2h)}{2h} = f'(x) - \frac{f^{(3)}(x_0)}{3} + o(h^2) \,.$$

También se ha dado por buena esta identidad. Aunque el sumando $o(h^2)$ hace que no sea lo suficientemente explícita como para ser aplicada al segundo apartado. □