Problema 5. *Demostrar que para un grupo G las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G es conmutativo.*
2. *$f : G \to G : x \mapsto x^{-1}$ es homomorfismo.*
3. *$g : G \to G : x \mapsto x^2$ es homomorfismo.*

Solución. Demostraremos las diferentes implicaciones:

(1) $\Rightarrow$ (2). Dados dos elementos $x, y \in G$, entonces la aplicación f será

$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = f(y)f(x) = f(x)f(y) \ ,$$

donde en la última igualdad hemos utilizado que G es abeliano. Luego como vemos f es homomorfismo de grupos.

(2) $\Rightarrow$ (3). Dados dos elementos $x, y \in G$ veamos que g es homomorfismo, dado que f lo es:

$$g(xy) = (xy)^2 = xyxy = xf((yx)^{-1})y = xf(x^{-1}y^{-1})y = xf(x^{-1})f(y^{-1})y = xxyy = x^2y^2 = g(x)g(y)$$

(3) $\Rightarrow$ (1). Como g es homomorfismo tenemos que

$$xyxy = (xy)^2 = g(xy) = g(x)g(y) = x^2y^2 = xxyy \ .$$

Operando con x^{-1} por la izquierda y con y^{-1} por la derecha obtenemos que

$$yx = xy \ ,$$

para todo $x, y \in G$. Luego G es abeliano.