MATEMÁTICA DISCRETA Curso 2020-21

Prueba de evaluación continúa

La extensión máxima de la respuesta es un folio por las dos caras

No hace falta copiar el enunciado, **hay que subir el resultado en un documento pdf o jpeg**.

Para puntar en cada apartado es necesario razonar bien la respuesta.

Problema

A) Sea $n > 1$ un número natural compuesto. Sea $a > 1$ otro número natural tal que a y n son primos entre sí.

Diremos que n es un *pseudoprimo* en la base a si se satisface que $a^{n-1} \equiv 1$ mod(n).

1. Demostrar que 286 es un pseudoprimo en la base 3. (5 puntos)

Podeis utilizar la siguiente propiedad de los pseudoprimos: Se n un pseudoprimo en la base a, y supongamos que para algún $k < n - 1$ que satisface que $a^k \equiv 1$ mod(n) y que $a^t \not\equiv 1$ mod(n), si $t < k$. Entonces que k es un divisor de n-1.

B) Halle el resto de la división del número $1^3 + 2^3 + \ldots + 99^3$ por 11. (5 puntos)

Solución

A) Los divisores de $285 = 3 \cdot 5 \cdot 19$ son los números 1, 3, 5, 15, 19, 57, 95 y 285. Como $3^5 = 243 < 286$, entonces $3^5 \equiv (-43)$mod(286) . Así pues escribimos $3^{10} \equiv (-43)^2 \equiv 133$ mod(286), y por lo tanto $3^{15} \equiv 133(-43) \equiv 1$ mod(286). Luego $3^{285} = (3^{15})^{19} \equiv 1$ mod(286) y, así el número 286 es un pseudoprimo en la base 3.

B) Recordemos que todo número natural n puede escribirse de la forma $n = 11a + r$, con $0 \leq r < 11$. En ese caso, tendremos $n^3 \equiv r^3$ mod(11). Por tanto, basta calcular los restos r^3 mod(11) para $r = 1, \ldots 10$.

$$
\begin{aligned}
1^3 &\equiv 1 \text{ mod } (11)\\
2^3 &\equiv 8 \text{ mod } (11)\\
3^3 &\equiv 5 \text{ mod } (11)\\
4^3 &\equiv 9 \text{ mod } (11)\\
5^3 &\equiv 4 \text{ mod } (11)\\
6^3 &\equiv 7 \text{ mod } (11)\\
7^3 &\equiv 2 \text{ mod } (11)\\
8^3 &\equiv 6 \text{ mod } (11)\\
9^3 &\equiv 3 \text{ mod } (11)\\
10^3 &\equiv 10 \text{ mod } (11)
\end{aligned}
$$

Vemos que $\sum_{i=1}^{10} r^i \equiv 0$ mod(11). Por tanto, $\sum_{i=1}^{99} n^i \equiv 0$ mod(11). Luego el resto de la división es 0.