Exámenes de la asignatura *Resolución numérica de ecuaciones*

Juan Luis Castaño Fernández

8 de junio de 2017

Índice

Mayo de 2013

Ejercicio 1.1. Determinar si existe el límite de la siguiente expresión

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

justificando rigurosamente la respuesta.

Ejercicio 1.2. Enunciar y probar el teorema de Ostrowski relativo a las raíces de una ecuación escalar. Enunciar el teorema de Ostrowski relativo a las raíces de un sistema de ecuaciones no lineales. ¿Se puede aplicar el teorema de Ostrowski al punto fijo $(1,1)$, si se considera el siguiente sistema de ecuaciones no-lineales

$$\begin{aligned} x &= x^2-3y^2+3, \\ y &= 2x^3+3y^2-4? \end{aligned}$$

Ejercicio 1.3. Un test psicotécnico pide que se calcule el valor que continúa en la secuencia $\{0,1,5,19,\ldots\}$. El término *el valor que continúa* es algo ambiguo. Si intentásemos precisar el concepto, exigiendo que la secuencia fuese solución de una ecuación en diferencias finitas lineal de un paso, no homogénea, se podría encontrar una respuesta correcta. De hecho, habría una infinidad de soluciones. Para reducir el número de soluciones nos restringimos a las ecuaciones en diferencias de la forma

$$x_{n+1}+ax_n=cb^n,$$

donde a, b y c son coeficientes a determinar. ¿Cuál es el término general de esa secuencia en ese caso?

Ejercicio 1.4. Ejemplo 52 (Moreno, 2014: 276). Se considera el siguiente esquema en diferencias

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}+x_{n-1}+\frac{3}{2}hf_n$$

para aproximar la solución de un problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt}=f\big(t,x(t)\big), \quad x(t_0)=x_0.$$

Determinar si cumple la condición de la raíz. Si se aplica al problema trivial de valor inicial $f=0$, $x_0=0$, ¿qué ecuación en diferencias produce y cuál es la solución suponiendo que el valor x_1 es calculado por un método de arranque con un error igual a ϵ?

Solución del ejercicio 1.1. La expresión dada es el límite, si existe, de la sucesión

$$x_0=\sqrt{2}, \quad x_1=\sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \cdots$$

y puede ser generada mediante el método de iteración del punto fijo dado por

$$x_0=\sqrt{2}, \quad x_n=g(x_{n-1}),\ \forall n\geqslant 1, \quad g(x)=\sqrt{2+x}.$$

Hemos de ver si el método de iteración del punto fijo así construido es convergente.

Aplicamos el teorema de la contracción de Banach (Moreno, 2014: 192), que dice que si una función g de clase C^1 en un intervalo $I=[a,b]$ verifica

$$g(I)\subset I; \quad |g'(x)|<1,\ \forall x\in I;$$

entonces g posee en I un único punto fijo α, y la sucesión generada por el método de iteración del punto fijo

$$x_n=g(x_{n-1}),$$

siendo $x_0\in I$ arbitrario, es convergente a α.

Nuestra función $g(x) = \sqrt{2+x}$ es de clase C^1 en el intervalo $I = [1, 2]$. Además,

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}}; \quad g'(x) > 0, \ \forall x \in [1, 2],$$

por lo que g es una función creciente en dicho intervalo $[1, 2]$. Sea $x \in [1, 2]$, entonces

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow 1 < \sqrt{3} = g(1) \leqslant g(x) = \sqrt{2+x} \leqslant g(2) = 2 \Longrightarrow g(I) \subset I.$$

Además, y utilizando parte del razonamiento anterior

$$|g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2+x}};$$

$$1 \leqslant x \leqslant 2 \Longrightarrow \sqrt{2+x} > 1 \Longrightarrow |g'(x)| = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} < \frac{1}{2} < 1.$$

Se ha visto que la función $g(x) = \sqrt{2+x}$ satisface las condiciones del teorema de la contracción de Banach, por lo que el método iterativo del punto fijo propuesto converge a un valor $\alpha \in [1, 2]$, y entonces la expresión dada tendrá por límite dicho valor α.

Solución del ejercicio 1.2. Teorema de Ostrowski para ecuaciones escalares (Moreno, 2014: 198). Si g es una función de clase C^1 en un entorno de un punto fijo α de g y verifica que

$$|g'(\alpha)| < 1$$

entonces el método de punto fijo asociado a g es localmente convergente a α.

Demostración. Puesto que g es una función continua, existe un intervalo $I = [\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$ tal que

$$\max_{x \in I} |g'(x)| \leqslant \rho < 1.$$

Si $\{x^{(k)}\}$ es la sucesión generada por aproximaciones sucesivas, partiendo de un punto de I se tiene que

$$|\alpha - x^{(k)}| = |g(\alpha) - g(x^{(k-1)})| \leqslant \rho|\alpha - x^{(k-1)}| \leqslant \cdots \leqslant \rho^k |\alpha - x^{(0)}|,$$

lo que prueba que

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = \alpha.$$

□

Teorema de Ostrowski para ecuaciones no escalares (Moreno, 2014: 226). Si G es una función de clase C^1 en un entorno de un punto fijo α de G y verifica que

$$\rho_{G'(\alpha)} < 1,$$

entonces la sucesión generada por aproximaciones sucesivas con esta función, es localmente convergente a α.

Ejemplo 41 (Moreno, 2014: 226). La función G para el problema dado es

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - 3y^2 + 3 \\ 2x^3 + 3y^2 - 4 \end{pmatrix},$$

y su matriz jacobiana

$$G'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -6y \\ 6x^2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Si particularizamos en el punto fijo de G dado, $(1, 1)$,

$$G'(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calculamos los valores propios de $G'(1, 1)$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -6 \\ 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow (2-\lambda)(6-\lambda) + 36 = 0 \Longrightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 48 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 1 \cdot 48}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm \sqrt{-128}}{2} = 4 \pm 4\sqrt{2}i;$$

y por tanto el radio espectral de $G'(1,1)$ es

$$\rho_{G'(1,1)} = \left|4 \pm 4\sqrt{2}i\right| = 4\sqrt{3} > 1,$$

y no se puede aplicar el teorema de Ostrowski.

Solución del ejercicio 1.3. Determinamos los coeficientes a, b y c, sustituyendo los términos de la secuencia conocidos y resolviendo el sistema obtenido.

$$\begin{cases} 1 + a \cdot 0 = cb^0, \\ 5 + a \cdot 1 = cb^1, \\ 19 + a \cdot 5 = cb^2. \end{cases}$$

En la primera ecuación tenemos que $c = 1$. Sustituyendo este valor y operando en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{array}{rcrcl} 25 & + & 5a & = & 5b \\ 19 & + & 5a & = & b^2 \\ \hline 6 & & & = & 5b - b^2 \end{array} \Longrightarrow b^2 - 5b + 6 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow b = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} b = 2, \ a = 2 - 5 = -3; \\ b = 3, \ a = 3 - 5 = -2. \end{cases}$$

Tenemos dos posibilidades para le ecuación en diferencias, que estudiamos por separado.

- Si $a = -3$, $b = 2$ y $c = 1$ la ecuación en diferencias es

  $$x_{n+1} - 3x_n = 2^n,$$

  y su ecuación característica para la ecuación homogénea es

  $$\lambda - 3 = 0,$$

  que tiene por única raíz $\lambda = 3$. La solución general de la ecuación homogénea será $z_n = k_1 3^n$. Buscamos una solución particular de la forma

  $$x_n^0 = 2^n r_0.$$

  Sustituyendo en la ecuación completa se obtiene

  $$2^{n+1} r_0 - 3 \cdot 2^n r_0 = 2^n \Longrightarrow 2^n(2r_0 - 3r_0) = 2^n \Longrightarrow r_0 = -1,$$

  por lo que la solución particular y la general de la ecuación son, respectivamente

  $$x_n^0 = -2^n, \quad x_n = x_n^0 + z_n = k_1 3^n - 2^n.$$

  Por último, imponiendo las condiciones iniciales, obtenemos la solución de nuestro problema

  $$x_0 = 0 \Longrightarrow k_1 - 1 = 0 \Longrightarrow k_1 = 1;$$

  $$x_n = 3^n - 2^n; \quad x_4 = 3^4 - 2^4 = 65.$$

- Y si $a = -2$, $b = 3$ y $c = 1$ la ecuación en diferencias es

  $$x_{n+1} - 2x_n = 3^n,$$

  y su ecuación característica para la ecuación homogénea es

  $$\lambda - 2 = 0,$$

  que tiene por única raíz $\lambda = 2$. La solución general de la ecuación homogénea será $z_n = k_2 2^n$. Buscamos una solución particular de la forma

  $$x_n^0 = 3^n s_0.$$

Sustituyendo en la ecuación completa se obtiene

$$3^{n+1}s_0 - 2\cdot 3^n s_0 = 3^n \Longrightarrow 3^n(3s_0 - 2s_0) = 3^n \Longrightarrow s_0 = 1,$$

por lo que la solución particular y la general de la ecuación son, respectivamente

$$x_n^0 = 3^n, \quad x_n = x_n^0 + z_n = k_2 2^n + 3^n.$$

Por último, imponiendo las condiciones iniciales, obtenemos la solución de nuestro problema, análoga a la obtenida en el caso anterior.

$$x_0 = 0 \Longrightarrow k_2 + 1 = 0 \Longrightarrow k_2 = -1;$$

$$x_n = 3^n - 2^n; \quad x_4 = 3^4 - 2^4 = 65.$$

Solución del ejercicio 1.4. El esquema propuesto tiene como primer polinomio característico

$$\rho(r) = r^2 - \frac{1}{2}r - 1,$$

cuyas raíces son

$$\rho(r) = 0 \Longrightarrow r^2 - \frac{1}{2}r - 1 = 0 \Longrightarrow r = \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{17}{4}}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}.$$

Y como

$$\left|\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right| > 1,$$

la ecuación en diferencias que se obtiene para $h = 0$ no es estable, por lo que no se cumple el criterio de la raíz.

El problema dado, para $f = 0$ y $x_0 = 0$ conduce a la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n - x_{n-1} = 0,$$

cuya solución general es

$$x_n = c_1\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^n + c_2\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^n.$$

Imponiendo $x_0 = 0$ obtenemos $c_1 + c_2 = 0$, por lo que

$$x_n = c_1\left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^n - c_1\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^n.$$

Por otra parte, la solución exacta de la ecuación para $f = 0$ y $x = 0$ es $x(t) = 0$. Si el error cometido al determinar x_1 por un método de arranque es ϵ,

$$x_1 - x(t_1) = \epsilon \Longrightarrow x_1 = \epsilon \Longrightarrow c_1\frac{1-\sqrt{17}}{4} - c_1\frac{1+\sqrt{17}}{4} = \epsilon \Longrightarrow -c_1\frac{2\sqrt{17}}{4} = \epsilon \Longrightarrow c_1 = -\frac{2\epsilon\sqrt{17}}{17};$$

y entonces

$$x_n = \frac{2\epsilon\sqrt{17}}{17}\left[\left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{4}\right)^n\right].$$

Junio de 2013

Ejercicio 2.1. Para aproximar una raíz positiva de la ecuación

$$4x - e^x - 1 = 0$$

se desea utilizar el método de regula falsi. Se pide:

(a) Separar las raíces positivas de la ecuación mediante intervalos acotados.

(b) Aplicar el método de regula falsi a la aproximación de la menor raíz positiva (basta con calcular la primera iteración).

(c) ¿Es monótona la sucesión generada por el método de regula falsi partir del tercer término?

Ejercicio 2.2. Sea G una función definida en un conjunto cerrado y convexo $B \subset \mathbb{R}^n$ con valores en $\mathbb{R}^n$, continuamente diferenciable en B tal que el radio espectral de la matriz jacobiana es menor que 1 en cualquier punto de B y que transforma B en un subconjunto de B. ¿Tiene G un único punto fijo en B? Dar una respuesta justificada. Usar un método de relajación para construir una transformación contractiva que permita aproximar la solución del sistema, justificando su convergencia.

$$\begin{aligned} x^2 - y &= 1, \\ x + (y-1)^2 &= 6. \end{aligned}$$

Se busca la solución que está en $B = [1,3] \times [2,4]$.

Ejercicio 2.3. Calcular el determinante de la matriz $n \times n$ tridiagonal

$$A_n = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

usando una ecuación en diferencias finitas.

Ejercicio 2.4. Ejercicio 122 (Moreno, 2014: 300). Aproximar las soluciones del problema de contorno

$$-u'' = 0, \quad u(0) = 1, \quad u'(1) = 0$$

mediante un método de diferencias finitas que use una diferencia dividida retrógrada para aproximar la condición de contorno en el extremo lateral derecho. Determinar si la solución del problema aproximado es única.

Solución del ejercicio 2.1.

(a) Consideramos la función f de clase C^1 definida por

$$f(x) = 4x - e^x - 1,$$

y estudiamos su monotonía.

$$f'(x) = 4 - e^x;$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 4 - e^x = 0 \Longrightarrow x = \log 4;$$

$$f'(x) > 0,\ \forall x \in (-\infty, \log 4); \quad f'(x) < 0,\ \forall x \in (\log 4, +\infty).$$

Entonces la función f es creciente en el intervalo $(-\infty, \log 4)$ y decreciente en el intervalo $(\log 4, +\infty)$. Además,

$$f(0) = -2 < 0, \quad f(1) = 3 - e > 0, \quad f(\log 4) = 4\log 4 - 5 > 0, \quad f(3) = 11 - e^3 < 0.$$

El teorema de Bolzano (Moreno, 2014: 188) nos garantiza que existen raíces en los intervalos $[0,1]$ y $[\log 4, 3]$, y el estudio de la monotonía de la función nos garantiza que estas raíces son únicas. La ecuación, por tanto, tiene exactamente dos raíces. Ambas son positivas y se encuentran cada una de ellas en cada uno de los intervalos dados.

(b) Como se ha visto, la menor raíz positiva está contenida en el intervalo $[0,1]$. Llamamos

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1,$$

y ya sabemos del apartado anterior que $f(a_0)f(b_0) < 0$. Las iteraciones del método regula falsi se construyen mediante la expresión

$$x_{k+1} = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k)$$

siendo

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} & \text{si } f(a_{k-1})f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} b_{k-1} & \text{si } f(b_{k-1})f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En nuestro caso, la primera iteración es

$$x_1 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(b_0) = 1 - \frac{1-0}{f(1) - f(0)} f(1) =$$

$$= 1 - \frac{1-0}{(3-e) - (-2)}(3-e) = 1 - \frac{3-e}{5-e} = \frac{2}{5-e} \simeq 0,876532442.$$

Para la segunda iteración habría que tomar

$$a_1 = \begin{cases} a_0 & \text{si } f(a_0)f(x_1) < 0, \\ x_1 & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad b_1 = \begin{cases} b_0 & \text{si } f(b_0)f(x_1) < 0, \\ x_1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y así, proceder de forma análoga para obtener

$$x_2 = b_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} f(b_1).$$

Mediante una sencilla tabla de Excel se pueden obtener cuantas iteraciones sean necesarias:

k	a_k	b_k	x_{k+1}	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_{k+1})$
0	0	1,0000	0,8765	-2	0,2817	0,1036
1	0	0,8765	0,8334	-2	0,1036	0,0324
2	0	0,8334	0,8201	-2	0,0324	0,0096
3	0	0,8201	0,8161	-2	0,0096	0,0028
4	0	0,8161	0,8150	-2	0,0028	0,0008
5	0	0,8150	0,8147	-2	0,0008	0,0002
6	0	0,8147	0,8146	-2	0,0002	0,0001
7	0	0,8146	0,8145	-2	0,0001	0,0000
8	0	0,8145	0,8145	-2	0,0000	0,0000

(c) Según el teorema 33 (Moreno, 2014: 202), el método regula falsi garantiza que una de las sucesiones $\{a_k\}$ o $\{b_k\}$ es constante, puesto que f es de clase C^2 y verifica

$$f''(x) = -e^x < 0, \ \forall x \in [0,1].$$

Vista la tabla anterior, sabemos que en nuestro problema $\{a_k\}$ es constante y toma siempre el valor $a_k = a_0 = 0$. Entonces para todo k se verifica que $f(a_{k-1})f(x_k) < 0$ y que $x_k = b_k$. Teniendo en cuenta ambas expresiones,

$$f(a_{k-1})f(x_k) < 0 \Longrightarrow f(0)f(x_k) < 0 \Longrightarrow -2f(x_k) < 0 \Longrightarrow f(x_k) > 0;$$

$$x_{k+1} = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k) = x_k - \frac{x_k - a_0}{f(x_k) - f(a_0)} f(x_k) = x_k - \frac{x_k}{f(x_k) + 2} f(x_k) = \frac{2x_k}{f(x_k) + 2} < x_k.$$

Por tanto, la sucesión generada por el método regula falsi es monótona decreciente.

Solución del ejercicio 2.2. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in B$. Si G es una función continuamente diferenciable en el conjunto cerrado y convexo B y se aplica el teorema del valor medio a la función

$$[0,1] \ni t \longrightarrow g(t) = G\big(\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big) \in \mathbb{R}^n$$

en el intervalo $[0,1]$ se obtiene que

$$g(1) - g(0) = G(\mathbf{y}) - G(\mathbf{x}) = g'(\xi)$$

para algún $\xi \in [0,1]$. Aplicando además la regla de la cadena,

$$g'(\xi) = G'\big(\mathbf{x} + \xi(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

donde $G'(\mathbf{z})$ representa la matriz jacobiana de G en el punto $\mathbf{z}$. Si se usa una norma matricial subordinada a una norma en $\mathbb{R}^n$, se deduce que

$$\|G(\mathbf{y}) - G(\mathbf{x})\| = \big\|G'\big(\mathbf{x} + \xi(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big)(\mathbf{y} - \mathbf{x})\big\| \leqslant \max_{\mathbf{z} \in B} \|G'(\mathbf{z})\| \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Si además, por hipótesis

$$\rho = \max_{\mathbf{z} \in B} \|G'(\mathbf{z})\| < 1,$$

entonces, aplicando el teorema 39 (Moreno, 2014: 224), sabemos que existe un único punto fijo α de G en B.

Ejercicio 89 (Moreno, 2014: 225). Definimos la función F de la forma

$$F(x,y) = \big(x^2 - y - 1, x + (y-1)^2 - 6\big).$$

Las soluciones del sistema de ecuaciones dado son soluciones de la ecuación no escalar $F(x,y) = (0,0)$ y puntos fijos de la función $G(x,y) = (x,y) - \lambda F(x,y)$ para cualquier $\lambda \neq 0$. La matriz jacobiana de G en un punto (x,y) es

$$G'(x,y) = I - \lambda \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2(y-1) \end{pmatrix}.$$

Usando la norma $\|\cdot\|_1$,

$$\|G'(x,y)\|_1 = \max\big\{|1 - 2\lambda x| + |\lambda|, |\lambda| + |1 - 2\lambda(y-1)|\big\}.$$

Para $\lambda = \frac{1}{4}$ en el conjunto $B = [1,3] \times [2,4]$,

$$\max_{(x,y) \in B} \|G'(x,y)\|_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left\{\max_{x \in [1,3]} |2 - x|, \max_{y \in [2,4]} |3 - y|\right\} = \frac{3}{4};$$

por lo que G es una función contractiva en B de constante $\rho = \frac{3}{4}$. Por otra parte la función G transforma el conjunto convexo y cerrado B en un subconjunto de B. Efectivamente, si $(x,y) \in B$,

$$\left.\begin{array}{r} 1 \leqslant x \leqslant 3 \Longrightarrow 3 \leqslant 4x - x^2 \leqslant 4 \\ 2 \leqslant y \leqslant 4 \Longrightarrow 3 \leqslant y + 1 \leqslant 5 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 < \frac{6}{4} \leqslant \frac{1}{4}(4x - x^2 + y + 1) \leqslant \frac{9}{4} < 3;$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 \leqslant x \leqslant 3 \Longrightarrow -3 \leqslant -x \leqslant -1 \\ 2 \leqslant y \leqslant 4 \Longrightarrow 13 \leqslant -y^2 + 6y + 5 \leqslant 14 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2 < \frac{10}{4} \leqslant \frac{1}{4}(-x - y^2 + 6y + 5) \leqslant \frac{13}{4} < 4;$$

$$G(x,y) = (x,y) - \frac{1}{4}F(x,y) = \frac{1}{4}\big(4x - x^2 + y + 1, -x - y^2 + 6y + 5\big) \in B \Longrightarrow G(B) \subset B.$$

Aplicando lo demostrado anteriormente sabemos que existe una única solución α del sistema dado en B, y que esta puede ser aproximada mediante el método del punto fijo asociado a la función G.

Solución del ejercicio 2.3. Sea $x_n = \det A_n$. Desarrollando x_n por adjuntos de la primera fila obtenemos una ecuación en diferencias homogénea.

$$x_n = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 3 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & -2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \Longrightarrow x_n - 3x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = 1, \\ \lambda = 2. \end{cases}$$

Por tanto la solución general de la ecuación es de la forma

$$x_n = c_1 + c_2 2^n.$$

Si imponemos las condiciones iniciales,

$$x_1 = 3 \Longrightarrow 3 = c_1 + 2c_2, \quad x_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \Longrightarrow 7 = c_1 + 4c_2;$$

y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} c_1 & + & 2c_2 & = & 3, \\ c_1 & + & 4c_2 & = & 7; \end{array} \right.$$

obtenemos $c_1 = -1$ y $c_2 = 2$, por lo que

$$x_n = \det A_n = 2^{n+1} - 1, \ \forall n \geqslant 1.$$

Solución del ejercicio 2.4. Si aproximamos la condición dada en el extremo derecho mediante una diferencia dividida retrógrada, obtenemos

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = 0 \Longrightarrow u_N = u_{N-1}.$$

Y si sustituimos la segunda derivada por el esquema usual,

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0.$$

En conjunto, el problema discreto en diferencias es

$$u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, N-1; \quad u_0 = 1; \quad u_N = u_{N-1}.$$

O, análogamente,

$$\left.\begin{array}{r} -2u_1 + u_2 = -1 \\ u_1 - 2u_2 + u_3 = 0 \\ u_2 - 2u_3 + u_4 = 0 \\ \vdots \\ u_{N-2} - 2u_{N-1} + u_N = 0 \\ u_{N-1} - u_N = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del problema aproximado será única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes A sea no nulo. Calculamos dicho determinante, desarrollando por adjuntos de la última fila,

$$\det A = -\det A_{N-1} - \det A_{N-2}.$$

Denotamos

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

y procedemos a calcular $x_n = \det A_n$, desarrollando de nuevo por adjuntos de la última fila. Obtenemos la siguiente ecuación en diferencias:

$$x_n = -2x_{n-1} - x_{n-2}, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3.$$

El polinomio característico y sus raíces son

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1.$$

Por tanto, la ecuación general es de la forma

$$x_n = (-1)^n (c_1 + c_2 n),$$

y si imponemos las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} x_1 = -2 \Longrightarrow -c_1 - c_2 = -2, \\ x_2 = 3 \Longrightarrow c_1 + 2c_2 = 3; \end{cases}$$

obtenemos $c_1 = c_2 = 1$, por lo que la solución de la ecuación es

$$x_n = (-1)^n (1 + n).$$

Retomando, ya podemos calcular el determinante de la matriz A,

$$\det A = -\det A_{N-1} - \det A_{N-2} = -(-1)^{N-1}(1 + N - 1) - (-1)^{N-2}(1 + N - 2) = (-1)^N \neq 0.$$

Por tanto el sistema tiene solución única.

Septiembre de 2013 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 3.1. Las siguientes sucesiones:

(a) $\left\{\frac{1}{k^5}\right\}$,

(b) $\left\{\frac{2^{-k}}{k^5}\right\}$,

(c) $\left\{\frac{1}{e^k}\right\}$,

(d) $\left\{10^{-2^k}\right\}$,

están generadas por diferentes métodos para aproximar la raíz 0 de una ecuación. Determinar el tipo de convergencia que presentan y la velocidad asintótica de convergencia.

Ejercicio 3.2. Determinar si la sucesión definida por

$$x^{(k+1)} = 3 + \frac{1}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi x^{(k)}}{2}$$

para $k \geqslant 0$ y $x^{(0)} = 0$, es convergente y justificar rigurosamente la respuesta. Determinar un término a partir del cual se pueda garantizar que $x^{(k)}$ dista del límite menos que 10^{-3}.

Ejercicio 3.3. Similar al ejercicio 104 (Moreno, 2014: 255). Analizar la estabilidad de la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{n+1} + 2x_{n-1} + x_{n-3} = 0.$$

Hallar la solución de esta ecuación correspondiente a los datos iniciales

$$x_0 = x_1 = 0, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0.$$

Ejercicio 3.4. Estudiar la estabilidad del siguiente esquema en diferencias finitas

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 2u_i = 1$$

para $i = 1, \dots, N-1$

$$u_0 = u_N = 1$$

para aproximar la solución del siguiente problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 - 2u, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(0) = u(1) = 1.$$

Solución del ejercicio 3.1. Para clasificar la convergencia se calcula el límite

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|x^{(k+1)} - \alpha\right|}{\left|x^{(k)} - \alpha\right|}.$$

Si este existe, entonces:

- Si $\mu = 0$ se dice que la convergencia es superlineal.
- Si $\mu \in (0,1)$ se dice que la convergencia es lineal.
- Si $\mu = 1$ se dice que la convergencia es sublineal.

Y se define la velocidad asintótica de convergencia como el número real $R = -\log \mu$.

En todos los siguiente apartados, sabemos por hipótesis que $\alpha = 0$ es la raíz a la que convergen las sucesiones dadas.

(a) Para la sucesión
$$x^{(k)} = \frac{1}{k^5}$$
calculamos los valores de μ y R,
$$\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(k+1)^5} - 0\right|}{\left|\frac{1}{k^5} - 0\right|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^5 = 1, \quad R = -\log\mu = -\log 1 = 0.$$
En este caso la convergencia es sublineal y la velocidad asintótica de convergencia es 0.

(b) Para la sucesión
$$x^{(k)} = \frac{2^{-k}}{k^5}$$
calculamos los valores de μ y R,
$$\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{\left|\frac{2^{-(k+1)}}{(k+1)^5} - 0\right|}{\left|\frac{2^{-k}}{k^5} - 0\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^5 = \frac{1}{2}, \quad R = -\log\mu = -\log\frac{1}{2} = \log 2.$$
En este caso la convergencia es lineal y la velocidad asintótica de convergencia es $\log 2$.

(c) Para la sucesión
$$x^{(k)} = \frac{1}{e^k} = e^{-k}$$
calculamos los valores de μ y R,
$$\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{|e^{-(k+1)} - 0|}{|e^{-k} - 0|} = \lim_{k\to\infty} e^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}, \quad R = -\log\mu = -\log e^{-1} = 1.$$
En este caso la convergencia es lineal y la velocidad asintótica de convergencia es 1.

(d) Para la sucesión
$$x^{(k)} = 10^{-2^k}$$
calculamos los valores de μ y R,
$$\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{|10^{-2^{k+1}} - 0|}{|10^{-2^k} - 0|} = \lim_{k\to\infty} 10^{-2^{k+1}+2^k} = \lim_{k\to\infty} 10^{-2^k} = 0, \quad R = -\log\mu = -\log 0 = +\infty.$$
En este caso la convergencia es lineal y la velocidad asintótica de convergencia es $+\infty$. Esto indica que el orden de convergencia es superior a 1.

Diremos que una sucesión $\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ convergente a $\alpha \in \mathbb{R}$ tiene orden de convergencia al menos $p > 0$ si existen $C \in \mathbb{R}$ y $k_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo entero $k \geqslant k_0$ se verifica que
$$\frac{\left|x^{(k+1)} - \alpha\right|}{\left|x^{(k)} - \alpha\right|^p} < C.$$
En nuestro caso
$$\frac{|10^{-2^{k+1}} - 0|}{|10^{-2^k} - 0|^2} = \frac{10^{-2^{k+1}}}{10^{-2^k+1}} = 1 < 2;$$
$$\frac{|10^{-2^{k+1}} - 0|}{|10^{-2^k} - 0|^3} = \frac{10^{-2^{k+1}}}{10^{-3\cdot 2^k}} = 10^{2^k};$$
y entonces la sucesión dada tiene orden de convergencia 2.

Solución del ejercicio 3.2. La sucesión dada es la asociada al método del punto fijo para la función
$$g(x) = 3 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{2}.$$
Consideramos el intervalo $I = [2, 3]$, y veremos que en dicho intervalo la función $g(x)$ verifica las hipótesis del teorema de la contracción de Banach (Moreno, 2014: 192). En primer lugar veremos que g es decreciente en I.
$$g'(x) = \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi x}{2} \leqslant 0, \ \forall x \in [2, 3].$$

Y visto esto,

$$g(2) = 3 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\pi = 3;$$
$$g(3) = 3 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = \frac{7}{3};$$
$$x \in I \Longrightarrow 2 \leqslant x \leqslant 3 \Longrightarrow 3 = g(2) \geqslant g(x) \geqslant g(3) = \frac{7}{3} > 2 \Longrightarrow g(x) \in I \Longrightarrow g(I) \subset I.$$

Además,

$$|g'(x)| = -\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi x}{2} \leqslant -\frac{\pi}{6}\cos\pi = \frac{\pi}{6} < 1,\ \forall x \in I.$$

Por tanto la función g tiene un único punto fijo α en el intervalo $I = [2,3]$ y la sucesión generada por el método del punto fijo será convergente a α para cualquier $x^{(0)} \in I$ elegido. Y para $x^{(0)} = 0 \notin I$, como se tiene que

$$x^{(1)} = 3 + \frac{1}{3}\operatorname{sen}0 = 3 \in I,$$

la sucesión también será convergente a α.

Para garantizar que $x^{(k)}$ tenga una precisión menor que la dada podemos aplicar el teorema de estimación del error (Moreno, 2014: 195). Ya hemos acotado $|g'(x)|$ en I por el valor

$$\rho = \frac{\pi}{6} < 1,$$

por lo que sabemos que

$$|x^{(k)} - \alpha| < \frac{\rho^k}{1-\rho}|x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

Si queremos que el error cometido en la aproximación sea menor que un determinado valor ε (en este caso $\varepsilon = 10^{-1}$), o sea

$$|x^{(k)} - \alpha| < \varepsilon,$$

basta con imponer

$$\frac{\rho^k}{1-\rho}|x^{(1)} - x^{(0)}| < \varepsilon \Longrightarrow k > \frac{\log\varepsilon(1-\rho) - \log|x^{(1)} - x^{(0)}|}{\log\rho}.$$

Sustituyendo y operando,

$$k > \frac{\log 10^{-3}\left(1 - \frac{\pi}{6}\right) - \log|3-0|}{\log\frac{\pi}{6}} \simeq 13,52;$$

y en consecuencia, para tener la seguridad de alcanzar la precisión buscada hemos de realizar al menos 14 iteraciones (en realidad, se puede comprobar con cualquier programa de cálculo numérico que con 6 iteraciones es suficiente).

Solución del ejercicio 3.3. La ecuación característica es

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \Longrightarrow (\lambda^2+1)^2 = 0 \Longrightarrow (\lambda^2 - i^2)^2 = 0 \Longrightarrow (\lambda+i)^2(\lambda-i)^2 = 0.$$

Y las raíces de esta son

$$\lambda_1 = -i,\ \text{doble},$$
$$\lambda_2 = i,\ \text{doble}.$$

Según el teorema 40 (Moreno, 2014: 251), como ambas raíces son dobles y tienen módulo uno la ecuación no es estable.

Conocidas las raíces de la ecuación característica, la solución general de la ecuación es de la forma

$$x_n = (c_1 + c_2 n)\cos\frac{n\pi}{2} + (c_2 + c_3 n)\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}.$$

Imponemos las condiciones iniciales, y obtenemos

$$x_0 = 0 \Longrightarrow c_1 = 0;$$
$$x_1 = 0 \Longrightarrow (c_1 + c_2)\cos\frac{\pi}{2} + (c_3 + c_4)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 \Longrightarrow c_3 + c_4 = 0;$$
$$x_2 = -2 \Longrightarrow (c_1 + 2c_2)\cos\pi + (c_3 + 2c_4)\operatorname{sen}\pi = -2 \Longrightarrow c_1 + 2c_2 = 2;$$
$$x_3 = 0 \Longrightarrow (c_1 + 3c_2)\cos\frac{3\pi}{2} + (c_3 + 3c_4)\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} = 0 \Longrightarrow c_3 + 3c_4 = 0.$$

Resolviendo el sistema hallamos que $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 0$ y $c_4 = 0$. Por tanto, la solución buscada es

$$x_n = n\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Solución del ejercicio 3.4. Escribimos el esquema en diferencias finitas propuesto en forma matricial, teniendo en cuenta que $u_0 = u_N = 1$.

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 2u_i = 1 \Longrightarrow \frac{1}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} + 2h^2 u_i) = 1 \Longrightarrow \frac{1}{h^2}\big(-u_{i+1} + 2(1+h^2)u_i - u_{i-1}\big) = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2(1+h^2) & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2(1+h^2) & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2(1+h^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(1+h^2) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & -1 & 2(1+h^2) \end{pmatrix}}_{A^h + D^h} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1+h^2 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1+h^2 \end{pmatrix}.$$

Según el lema 5 (Moreno, 2014: 295), la matriz de coeficientes $A^h + D^h$ tiene por autovalores

$$\lambda_j^h = \frac{1}{h^2}\left(2(1+h^2) + 2\cos\frac{j\pi}{N}\right) = \frac{2}{h^2}\left(1 + h^2 + \cos\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 1, 2, \cdots, N-1.$$

En particular, el menor de ellos es

$$\lambda_{N-1}^h = \frac{2}{h^2}\left(1 + h^2 + \cos\frac{(N-1)\pi}{N}\right).$$

Y sabiendo que

$$h = \frac{1-0}{N} \Longrightarrow N = \frac{1}{h} \Longrightarrow \frac{(N-1)\pi}{N} = (1-h)\pi = \pi - \pi h \Longrightarrow \cos(\pi - \pi h) = -\cos\pi h,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4);$$

entonces

$$\lambda_{N-1}^h = \frac{2}{h^2}(1 + h^2 - \cos\pi h) = \frac{2}{h^2}\left(1 + h^2 - 1 + \frac{\pi^2 h^2}{2} + O(h^4)\right) = 2 + \pi^2 + O(h^2).$$

De lo anterior sabemos que la matriz $A^h + D^h$ tiene determinante no nulo, y por ser una matriz simétrica

$$\left\|(A^h + D^h)^{-1}\right\| = \frac{1}{\lambda_{N-1}^h},$$

también sabemos que está acotada. En consecuencia, el esquema propuesto es estable.

Septiembre de 2013 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 4.1. Ejercicio 88 (Moreno, 2014: 221). El polinomio

$$p(x) = x^5 + x + 1$$

tiene una raíz en el intervalo $[-1, 0]$. Usar el punto medio de este intervalo como punto inicial y aplicar el método de Newton. ¿Es la sucesión que así se genera convergente a la raíz? Justificar rigurosamente la respuesta.

Ejercicio 4.2. El sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$

tiene como soluciones los puntos $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Se pretende aplicar el método de Newton. Determinar el conjunto de puntos $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right)$ del primer cuadrante que podrían tomarse como iniciales para que la primera iteración de Newton estuviese definida. ¿Si el punto inicial se toma en la recta $x+y=1$, se mantendría la sucesión de iterantes $\left(x^{(k)}, y^{(k)}\right)$ en el primer cuadrante?

Ejercicio 4.3. Ejercicio 117.3 (Moreno, 2014: 284). Explicar el concepto de cero-estabilidad de un esquema multipaso. Enunciar las condiciones de la raíz. ¿Es cero-estable el siguiente esquema

$$x_{n+1} + x_n - 2x_{n-1} = \frac{h}{4}(9f_{n+1} + 3f_n)?$$

Ejercicio 4.4. ¿Qué relación existe entre los conceptos de estabilidad, consistencia y convergencia de un esquema en diferencias finitas para un problema de contorno? Ilustrar estos conceptos sobre el esquema

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 4u_i = 1$$

para $i = 1, \ldots, n-1$ y $u_0 = u_n = 1$, para aproximar la solución del siguiente problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 - 4u, \quad u(0) = u(1) = 1$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Solución del ejercicio 4.1. La función $p(x)$ es de clase C^∞ y por hipótesis contiene una raíz α en el intervalo $I = [-1, 0]$. Además

$$p'(x) = 5x^4 + 1, \quad p''(x) = 20x^3;$$
$$\frac{\text{máx}_{x\in I} |p''(x)|}{\text{máx}_{x\in I} |p'(x)|} < \frac{|20(-1)^3|}{|5 \cdot 0^4 + 1|} = 20 < \infty;$$

por lo que según el teorema 34 (Moreno, 2014: 207), la sucesión generada por el método de Newton converge localmente a la raíz α.

El método de Newton es un método de relajación definido por la función

$$g(x) = x - \frac{1}{f'(x)}f(x) = x - \frac{1}{5x^4 + 1}(x^5 + x + 1) = \frac{4x^5 - 1}{5x^4 + 1},$$

que genera la sucesión

$$x_k = \frac{4x_k^5 - 1}{5x_k^4 + 1}.$$

Tomando, tal y como se pide, $x_0 = -0,5$ y operando obtenemos

$$x_1 = \frac{4x_0^5 - 1}{5x_0^4 + 1} = \frac{4(-0,5)^5 - 1}{5(-0,5)^4 + 1} = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)^5 - 1}{5\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 1} = \frac{-\frac{1}{8} - 1}{\frac{5}{16} + 1} = -\frac{18}{21} = -\frac{6}{7} \simeq -0,857142857142857.$$

Procediendo análogamente, y ayudándonos de Excel,

$$x_2 = -0,770682194733540, \; x_3 = -0,755282953105649, \; x_4 = -0,754877935491823,$$

$$x_5 = -0,754877666246812, \; x_6 = -0,754877666246693, \; \ldots$$

Solución del ejercicio 4.2. Podemos escribir el sistema dado mediante la ecuación no escalar $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, siendo

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 1 \\ x + y - 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la matriz jacobiana de F,

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

y entonces el método de Newton para resolver la ecuación viene dado por

$$F'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k) = -F(\mathbf{x}_k) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 2x_k & 2y_k \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} - x_k \\ y_{k+1} - y_k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_k^2 + y_k^2 - 1 \\ x_k + y_k - 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ con $x_0 \geqslant 0$ e $y_0 \geqslant 0$. Para determinar $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$, hemos de resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_0^2 + y_0^2 - 1 \\ x_0 + y_0 - 1 \end{pmatrix}.$$

Y este será compatible determinado siempre y cuando $x_0 \neq y_0$. Por tanto el conjunto de puntos iniciales del primer cuadrante que hacen que la primera iteración esté definida es

$$C = \left\{ \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : \ x_0 \geqslant 0, \ y_0 \geqslant y_0, \ x_0 \neq y_0 \right\}.$$

Sea $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) \neq \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ perteneciente a la recta $x + y = 1$. Descartamos el punto $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ puesto que ya se ha visto que en ese caso la primera iteración no está definida. Se tiene que

$$y_0 = 1 - x_0.$$

Calculamos $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$,

$$\begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_0^2 + y_0^2 - 1 \\ x_0 + y_0 - 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2x_0 & 2(1 - x_0) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - (1 - x_0) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_0^2 + (1 - x_0)^2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 2x_0 & 2 - 2x_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - 1 + x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 - 2x_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - 1 + x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2 - 2x_0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x_0 - 2x_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(1 - 2x_0)} \begin{pmatrix} -1 & 2 - 2x_0 \\ 1 & -2x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_0 - 2x_0^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{x_0(1 - x_0)}{1 - 2x_0} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 - x_0 = -\dfrac{x_0(1 - x_0)}{1 - 2x_0}, \\[2ex] y_1 - 1 + x_0 = \dfrac{x_0(1 - x_0)}{1 - 2x_0}; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_0^2}{1 - 2x_0}, \\[2ex] y_1 = \dfrac{(1 - x_0)^2}{1 - 2x_0}. \end{cases}$$

Entonces,

$$x_1 y_1 = -\frac{x_0^2(1 - x_0)^2}{(1 - 2x_0)^2} \leqslant 0.$$

Por tanto, la primera iteración no está en el primer cuadrante excepto cuando

$$\frac{x_0^2(1 - x_0)^2}{(1 - 2x_0)^2} = 0 \Longrightarrow x_0^2(1 - x_0)^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = 0, \ y_0 = 1; \\ x_0 = 1, \ y_0 = 0; \end{cases}$$

O sea, excepto cuando partamos de una de las soluciones del sistema, bien el punto $(0, 1)$ o bien el punto $(0, 1)$.

Solución del ejercicio 4.3. Un esquema multipaso de la forma

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_{\hat{i}+n} + h \sum_{i=0}^{k} b_i f_{\hat{i}+n}, \quad \hat{i} = i - k + 1;$$

es cero-estable en el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0,$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existen constantes positivas C y h_0 tales que para todo $0 < h < h_0$ se cumple que

$$|z_n - x_n| \leqslant C\varepsilon$$

para todo $n \leqslant N_h$ siendo $N_h = \text{máx}\{n :\ t_n \in I\}$ y donde z_n representa la solución del sistema perturbado

$$z_{n+1} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i z_{\hat{i}+n} + h \sum_{i=0}^{k} b_i f_{\hat{i}+n} + h\delta_{n+1},$$

con las condiciones iniciales perturbadas

$$z_j = x_j + \delta_j,$$

para $j = 0, \ldots, k-1$, siempre que las perturbaciones verifiquen que $|\delta_n| \leqslant \varepsilon$ para todo $n \geqslant 0$.

El concepto de cero-estabilidad permite determinar si los errores que se producen en las aproximaciones (δ_k, $j = 0, \ldots, k-1$) y los que se producen en el curso de los cálculos (δ_j, $j \geqslant k$) vuelven inestables los cálculos posteriores.

Para comprobar si un esquema multipaso es cero-estable, es difícil manejar la definición dada anteriormente. En vez de ello es preferible aplicar el criterio de la raíz, según el teorema 45 (Moreno, 2014: 277). En el caso del esquema propuesto, el primer polinomio característico es

$$\rho(r) = r^2 + r - 2,$$

y sus raíces

$$\rho(r) = 0 \Longrightarrow r^2 + r - 2 = 0 \Longrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Longrightarrow \begin{cases} r = -2, \\ r = \ \ 1. \end{cases}$$

Dado que $|-2| > 1$ el esquema no cumple el criterio de la raíz, y por tanto no es cero-estable.

Solución del ejercicio 4.4. Según el teorema 49 (Moreno, 2014: 298), si un esquema para un problema de contorno lineal es estable y consistente con el problema entonces es convergente.

Escribimos el esquema en diferencias finitas propuesto en forma matricial, teniendo en cuenta que $u_0 = u_n = 1$.

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 4u_i = 1 \Longrightarrow \frac{1}{h^2}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} + 4h^2 u_i) = 1 \Longrightarrow \frac{1}{h^2}\big(-u_{i+1} + 2(1+2h^2)u_i - u_{i-1}\big) = 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2(1+2h^2) & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2(1+2h^2) & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2(1+2h^2) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(1+2h^2) & -1 \\ 0 & 0 & & & -1 & 2(1+2h^2) \end{pmatrix}}_{A^h + D^h} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1+h^2 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1+h^2 \end{pmatrix}.$$

Según el lema 5 (Moreno, 2014: 295), la matriz de coeficientes $A^h + D^h$ tiene por autovalores

$$\lambda_j^h = \frac{1}{h^2}\left(2(1+2h^2) + 2\cos\frac{j\pi}{n}\right) = \frac{2}{h^2}\left(1 + 2h^2 + \cos\frac{j\pi}{n}\right), \quad j = 1, 2, \cdots, n-1.$$

En particular, el menor de ellos es

$$\lambda_{n-1}^h = \frac{2}{h^2}\left(1 + 2h^2 + \cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

Y sabiendo que

$$h = \frac{1-0}{n} \Longrightarrow n = \frac{1}{h} \Longrightarrow \frac{(n-1)\pi}{n} = (1-h)\pi = \pi - \pi h \Longrightarrow \cos(\pi - \pi h) = -\cos \pi h,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4);$$

entonces

$$\lambda_{n-1}^h = \frac{2}{h^2}(1 + 2h^2 - \cos \pi h) = \frac{2}{h^2}\left(1 + 2h^2 - 1 + \frac{\pi^2 h^2}{2} + O(h^4)\right) = 4 + \pi^2 + O(h^2).$$

De lo anterior sabemos que la matriz $A^h + D^h$ tiene determinante no nulo, y por ser una matriz simétrica

$$\left\|(A^h + D^h)^{-1}\right\| = \frac{1}{\lambda_{N-1}^h},$$

también sabemos que está acotada. En consecuencia, el esquema propuesto es estable.

Por otra parte, se tiene que

$$\tau_h(x_i) = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2} + 4u(x_i) - 1 = -\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + 4u(x_i) - 1 + O(h^2) = O(h^2), \quad i = 1, 2, \ldots, n;$$

lo que prueba que el esquema es consistente con el problema.

Por tanto, del citado teorema 49, se deduce que el esquema propuesto es convergente.

Mayo de 2014

Ejercicio 5.1. Aproximar la raíz de la ecuación

$$\frac{1}{2} - 3x + x^2 + x^3 = 0$$

que está contenida en el intervalo $[1, 2]$ de acuerdo con las siguientes indicaciones:

(a) Aplicar el método de regula falsi partiendo de los puntos 1 y 2 (basta con calcular dos iteraciones).

(b) Analizar la convergencia de la sucesión generada por el método de regula falsi.

Ejercicio 5.2. Describir la primera iteración del método del gradiente con máximo descenso para encontrar el mínimo de la función

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y)\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (2, 2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

partiendo del punto $(1, 1)$.

Ejercicio 5.3. Se sabe que la ecuación en diferencias

$$6x_{n+1} - 5x_n + x_{n-1} = \frac{1}{2^n}$$

tiene una solución particular de la forma $x_n^0 = \frac{cn}{2^n}$ donde c es una constante a determinar. Hallar la solución general de la ecuación en diferencias.

Ejercicio 5.4. Enunciar el teorema de la barrera de Dahlquist sobre el orden de convergencia de un método multipaso. Se considera el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dx}{dt} = 1 + x^2, \quad x(0) = 0.$$

La solución exacta está definida en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ y tiende a ∞ cuando $t \to \frac{\pi}{2}$. Determinar el valor de la solución obtenida al usar un método de Euler explícito[1] con paso $h = \frac{\pi}{2N_h}$ en $t = \frac{\pi}{2}$ y su comportamiento cuando $N_h \to \infty$.

Solución del ejercicio 5.1.

(a) Consideramos la función f de clase C^∞ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2} - 3x + x^2 + x^3,$$

y llamamos

$$a_0 = 1, \quad b_0 = 2.$$

Las iteraciones del método regula falsi se construyen mediante la expresión

$$x_{k+1} = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k)$$

siendo

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} & \text{si } f(a_{k-1})f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} b_{k-1} & \text{si } f(b_{k-1})f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En nuestro caso, la primera iteración es

$$f(a_0) = f(1) = \frac{1}{2} - 3 \cdot 1 + 1^2 + 1^3 = -\frac{1}{2}; \quad f(b_0) = f(2) = \frac{1}{2} - 3 \cdot 2 + 2^2 + 2^3 = \frac{13}{2};$$

$$x_1 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(b_0) = 2 - \frac{2 - 1}{f(2) - f(1)} f(2) = 2 - \frac{2 - 1}{\frac{13}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)} \frac{13}{2} = 2 - \frac{13}{14} = \frac{15}{14}.$$

[1] En el original se pedía el método implícito, pero en la resolución se cambia el enunciado al método explícito y se resuelve como tal.

Para la segunda iteración habría que tomar

$$a_1 = \begin{cases} a_0 & \text{si } f(a_0)f(x_1) < 0, \\ x_1 & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad b_1 = \begin{cases} b_0 & \text{si } f(b_0)f(x_1) < 0, \\ x_1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En nuestro caso,

$$f(x_1) = f\left(\frac{15}{14}\right) = \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{15}{14} + \left(\frac{15}{14}\right)^2 + \left(\frac{15}{14}\right)^3 = -\frac{923}{2744} < 0.$$

$$f(a_0)f(x_1) > 0 \Longrightarrow a_1 = x_1 = \frac{15}{14};$$

$$f(b_0)f(x_1) < 0 \Longrightarrow b_1 = b_0 = 2.$$

Y así, procedemos de forma análoga para obtener

$$f(a_1) = f(x_1) = -\frac{923}{2744}; \quad f(b_1) = f(b_0) = \frac{13}{2};$$

$$x_2 = b_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} f(b_1) = 2 - \frac{2 - \frac{15}{14}}{\frac{13}{2} - (-\frac{923}{2744})} \frac{13}{2} = 2 - \frac{\frac{13}{14}}{\frac{18759}{2744}} \frac{13}{2} = 2 - \frac{196}{1443} \frac{13}{2} = 2 - \frac{98}{111} = \frac{124}{111}.$$

Mediante una sencilla tabla de Excel se pueden obtener cuantas iteraciones sean necesarias:

k	a_k	b_k	x_{k+1}	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_{k+1})$
0	1,0000	2,0000	1,0714	−0,5000	6,5000	−0,3364
1	1,0714	2,0000	1,1171	−0,3364	6,5000	−0,2093
2	1,1171	2,0000	1,1447	−0,2093	6,5000	−0,1240
3	1,1447	2,0000	1,1607	−0,1240	6,5000	−0,0713
4	1,1607	2,0000	1,1698	−0,0713	6,5000	−0,0403
5	1,1698	2,0000	1,1749	−0,0403	6,5000	−0,0226
6	1,1749	2,0000	1,1777	−0,0226	6,5000	−0,0126
7	1,1777	2,0000	1,1793	−0,0126	6,5000	−0,0070
8	1,1793	2,0000	1,1802	−0,0070	6,5000	−0,0039
9	1,1802	2,0000	1,1807	−0,0039	6,5000	−0,0021
10	1,1807	2,0000	1,1810	−0,0021	6,5000	−0,0012

(b) Según el teorema 33 (Moreno, 2014: 202), el método regula falsi garantiza la sucesión generada por el método regula falsi converge, puesto que f es de clase C^2 en el intervalo $[1, 2]$ y verifica

$$f'(x) = -3 + 2x + 3x^2; \quad f''(x) = 2 + 6x > 0, \ \forall x \in [1, 2].$$

Solución del ejercicio 5.2. Operamos la función $f(x, y)$ dada,

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (2, 2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^2 - xy + y^2 - 2x - 2y,$$

y calculamos su gradiente en el punto $(1, 1)$, para obtener la dirección de máximo descenso

$$\nabla f(x, y) = (2x - y - 2, -x + 2y - 2), \quad \nabla f(1, 1) = (-1, -1); \quad \mathbf{d}_0 = -\nabla f(1, 1) = (1, 1).$$

Para encontrar el tamaño del paso, ρ_0, se busca el mínimo de la función

$$g(t) = f(x^{(0)} + td_1^{(0)}, y^{(0)} + td_2^{(0)}) = f(1 + t, 1 + t) = (1 + t)^2 - 4(1 + t),$$

$$g'(t) = 2(1 + t) - 4; \quad g''(t) = 2 > 0;$$

$$g'(t) = 0 \Longrightarrow t = 1.$$

Por tanto, $\rho_0 = 1$ y entonces

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (x^{(0)}, y^{(0)}) + \rho_0(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}) = (1, 1) + (1, 1) = (2, 2).$$

Solución del ejercicio 5.3. Buscamos una solución particular de la ecuación con la forma indicada.

$$6\frac{c(n+1)}{2^{n+1}} - 5\frac{cn}{2^n} + \frac{c(n-1)}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \Longrightarrow 3c(n+1) - 5cn + 2c(n-1) = 1 \Longrightarrow -5c = 1 \Longrightarrow c = 1;$$

$$x_n^0 = \frac{cn}{2^n} = \frac{n}{2^n} = n2^{-n}.$$

Por otra parte, la ecuación característica para la ecuación homogénea es

$$6\lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot 6\cdot 1}}{2\cdot 6} = \frac{5\pm 1}{12} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{3}, \\ \lambda = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Con lo que la solución de dicha ecuación homogénea es

$$z_n = c_1 3^{-n} + c_2 2^{-n};$$

y por tanto, la solución general será

$$x_n = x_n^0 + z_n = n2^{-n} + c_1 3^{-n} + c_2 2^{-n} = c_1 3^{-n} + (c_2 + n)2^{-n}.$$

Solución del ejercicio 5.4. Teorema de la primera barrera de Dahlquist (Moreno, 2014: 281). El orden más alto de un método de k pasos cero-estable es $k+1$ si k es impar y $k+2$ si k es par.

El esquema de Euler implícito es

$$x_{n+1} = x_n + hf_n,$$

lo que aplicado a nuestro problema nos lleva a

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\pi}{2N_h}(1 + x_n^2).$$

No podemos resolver la ecuación en diferencias anterior, puesto que es no lineal, pero podemos operarla

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) \simeq x_{N_h} = x_{N_h-1} + \frac{\pi}{2N_h}(1 + x_{N_h-1}^2) \geqslant x_{N_h-1} + \frac{\pi}{2N_h} \geqslant x_0 + \sum_{k=1}^{N_h}\frac{\pi}{2N_h} \geqslant x_0 + \sum_{k=1}^{N_h}\frac{\pi}{2k} = x_0 + \frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{N_h}\frac{1}{k}.$$

Por tanto, el límite pedido será

$$\lim_{N_h\to\infty} x_{N_h} \geqslant \lim_{N_h\to\infty}\left(x_0 + \sum_{k=1}^{N_h}\frac{1}{k}\right) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = \infty.$$

Junio de 2014

Ejercicio 6.1. Se considera la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$. Las raíces de esta ecuación son puntos fijos de la función

$$g(x) = \frac{1}{a}\big(x^2 - (4-a)x + 3\big)$$

donde a es un parámetro real. Determinar el valor de a para que el método definido por $x^{(k+1)} = g\big(x^{(k)}\big)$ tenga máximo orden de convergencia hacia la raíz $x = 1$. Para $a = 2$, determinar el intervalo I más amplio posible para que la sucesión converja a 1 si $x^{(0)} \in I$.

Ejercicio 6.2. Determinar si las soluciones de la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} - x_n - x_{n-1} + x_{n-2} = 0$$

que verifiquen las condiciones iniciales

(a) $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$,

(b) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$,

(c) $x_0 = 0$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$,

son linealmente independientes. Hallar la solución correspondiente a los primeros datos iniciales.

Ejercicio 6.3. Se considera el siguiente esquema en diferencias

$$x_{n+1} = ax_{n-1} + bx_{n-2} + hf_n$$

para aproximar la solución de un problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0.$$

Hallar los valores de a y b para los que el esquema sea consistente y determinar el orden de consistencia del método correspondiente. Determinar también si es convergente.

Ejercicio 6.4. ¿Qué relación existe entre los conceptos de estabilidad, consistencia y convergencia de un esquema en diferencias finitas para un problema de contorno? Ilustrar estos conceptos sobre el esquema

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 4u_i = 1$$

para $i = 1, \ldots, n-1$ y $u_0 = u_n = 1$, para aproximar la solución del siguiente problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 - 4u, \quad u(0) = u(1) = 1$$

para $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Solución del ejercicio 6.1. La función $g(x)$ dada es una función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y se verifica que

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{a}\big(2x - (4-a)\big), \quad \frac{dg}{dx}(1) = \frac{1}{a}\big(2 - (4-a)\big) = \frac{a-2}{a};$$

$$\frac{d^2g}{dx^2}(x) = \frac{2}{a}, \quad \frac{d^2g}{dx^2}(1) = \frac{2}{a};$$

$$\forall n \geqslant 3: \quad \frac{d^ng}{dx^n}(x) = 0, \quad \frac{d^ng}{dx^n}(1) = 0.$$

Para que la sucesión generada por el método del punto fijo descrito, supuesta convergente, tenga el mayor orden de convergencia posible ha de verificarse

$$\frac{a-2}{a} = 0 \Longrightarrow a = 2,$$

y en ese caso

$$\frac{d^2g}{dx^2}(1) = 1 \neq 0,$$

por lo que el orden de convergencia será 2, según el teorema 30 (Moreno, 2014: 197).

Para $a = 2$ la función a estudiar es

$$g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 3).$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a > 0$ y $b > 0$, y consideramos el intervalo $I = [1-a, 1+b]$ que contiene a la raíz $x = 1$. Buscamos los mayores valores de los parámetros a y b que verifiquen las hipótesis del teorema de la contracción de Banach (Moreno, 2014: 192). Calculamos el valor absoluto de la derivada de la función $g(x)$,

$$g'(x) = \frac{1}{2}(2x-2) = x-1, \quad |g'(x)| = |x-1|.$$

Sea $x \in I$, entonces

$$1 - a \leqslant x \leqslant 1 + b \Longrightarrow -a \leqslant x - 1 \leqslant b \Longrightarrow |x-1| \leqslant \min\{a,b\} \Longrightarrow g(x) \leqslant \min\{a,b\}.$$

Para que se verifique $|g'(x)| < 1$ ha de ser $\min\{a,b\} < 1$ y por tanto $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$. Vista la derivada de $g(x)$ sabemos que dicha función es decreciente en el intervalo $[a-1, 1)$ y creciente en el intervalo $(1, 1+b]$, y por tanto alcanzará su valor máximo en el intervalo I en uno de sus extremos, y su valor mínimo en $x = 1$.

$$g(1-a) = \frac{1}{2}\big((1-a)^2 - 2(1-a) + 3\big) = \frac{1}{2}(a^2+2);$$

$$g(1) = \frac{1}{2}(1^2 - 2\cdot 1 + 3) = 1 \in I;$$

$$g(1+b) = \frac{1}{2}\big((1+b)^2 - 2(1+b) + 3\big) = \frac{1}{2}(b^2+2).$$

Para que $g(I) \subset I$ ha de verificarse que

$$\frac{1}{2}(b^2+2) \in I \Longrightarrow \frac{1}{2}(b^2+2) \leqslant 1+b \Longrightarrow b^2+2 \leqslant 2+2b \Longrightarrow b^2 \leqslant 2b \Longrightarrow b^2 - 2b \leqslant 0 \Longrightarrow b(b-2) \leqslant 0 \Longrightarrow b \leqslant 2;$$

$$\frac{1}{2}(a^2+2) \in I \Longrightarrow \frac{1}{2}(a^2+2) \leqslant 1+b \Longrightarrow a^2+2 \leqslant 2+2b \Longrightarrow a^2 \leqslant 2b \Longrightarrow a \leqslant \sqrt{2b}.$$

En resumen, el teorema de Banach nos garantiza que la sucesión generada por el método del punto fijo es convergente en el intervalo $I = [1-a, 1+b]$ siempre y cuando

$$0 < a \leqslant \sqrt{2b} < \sqrt{2};$$

y para que el intervalo elegido tenga la mayor amplitud posible ha de ser de la forma $\big(1-\sqrt{2}, 2\big)$.

El intervalo dado es el de mayor amplitud posible para el cual el teorema de Banach nos garantiza la convergencia, pero podría haber un intervalo de mayor amplitud en el que sin verificarse las condiciones del teorema de Banach sí se dé la convergencia de la sucesión generada por el método del punto fijo.

Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ y estudiamos la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generada por el método del punto fijo a partir de la función $g(x)$ dada para $a = 2$, que será de la forma

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} + 3) = \frac{1}{2}(x_{n-1}-1)^2 + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

- Supongamos que $x_0 \in (-1, 3)$. Demostraremos que la sucesión es monótona y acotada, y por tanto convergente. Veamos que es acotada

$$x_0 \in (-1,3) \Longrightarrow -1 < x_0 < 3 \Longrightarrow -2 \leqslant x_0 - 1 < 2 \Longrightarrow 0 \leqslant (x_0-1)^2 < 4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2}(x_0-1)^2 < 2 \Longrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2}(x_0-1)^2 + 1 < 3 \Longrightarrow 1 \leqslant x_1 < 3.$$

  Supongamos que $x_k \in [1, 3)$,

$$x_k \in [1,3) \Longrightarrow 1 \leqslant x_k < 3 \Longrightarrow\Longrightarrow 0 \leqslant x_k - 1 < 2 \Longrightarrow 0 \leqslant (x_k-1)^2 < 4 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 0 \leqslant \frac{1}{2}(x_k-1)^2 < 2 \Longrightarrow 1 \leqslant \frac{1}{2}(x_k-1)^2 + 1 < 3 \Longrightarrow 1 \leqslant x_{k+1} < 3.$$

□

Y veamos que es monótona decreciente, teniendo en cuenta lo ya demostrado, que $x_n \in [1,3)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}(x_n - 1)^2 + 1 - x_n = \frac{1}{2}x_n^2 - 2x_n + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}(x_n^2 - 4x_n + 3) = \frac{1}{2}(x_n - 3)(x_n - 1) \leqslant 0.$$

En estas condiciones sabemos que existe el límite $L \in \mathbb{R}$ de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{R}}$, y también existe y vale L el límite de cualquiera de sus subsucesiones. Por tanto

$$L = \lim_n x_n = \lim_n x_{n+1} \Longrightarrow L = \lim_n \left[\frac{1}{2}(x_n - 1)^2 + 1\right] \Longrightarrow L = \frac{1}{2}(\lim_n x_n - 1)^2 + 1 \Longrightarrow L = \frac{1}{2}(L-1)^2 + 1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow L - 1 = \frac{1}{2}(L-1)^2 \Longrightarrow 2(L-1) = (L-1)^2 \Longrightarrow (L-1)^2 - 2(L-1) = 0 \Longrightarrow (L-1)(L-3) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} L = 1, \\ \cancel{L = 3}. \end{cases}$$

Descartada la solución $L = 3$, puesto que se ha visto que la sucesión es decreciente, la única posibilidad es que

$$L = \lim_n x_n = 1.$$

- Supongamos que $x_0 \in (-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$. Demostraremos que la sucesión $\{x_{n+1}\}$ está acotada inferiormente por 3, y por tanto no puede converger a 1.

$$\left.\begin{array}{r} x_0 \leqslant -1 \Longrightarrow x_0 - 1 \leqslant -2 \\ x_0 \geqslant 3 \Longrightarrow x_0 - 1 \geqslant 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x_0 - 1)^2 \geqslant 4 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x_0 - 1) \geqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x_0 - 1)^2 + 1 \geqslant 3 \Longrightarrow x_1 \geqslant 3.$$

Supongamos que $x_k \geqslant 3$,

$$x_k \geqslant 3 \Longrightarrow x_k - 1 \geqslant 2 \Longrightarrow (x_k - 1)^2 \geqslant 4 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x_k - 1)^2 \geqslant 2 \Longrightarrow \frac{1}{2}(x_k - 1)^2 + 1 \geqslant 3 \Longrightarrow x_{k+1} \geqslant 3.$$

□

En resumen, el intervalo I de mayor amplitud posible para que dado $x_0 \in I$ la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converja a la raíz 1 es $I = (-1, 3)$.

Solución del ejercicio 6.2. La ecuación característica es

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda^2(\lambda - 1) - (\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow (\lambda^2 - 1)(\lambda - 1) = 0 \Longrightarrow (\lambda - 1)^2(\lambda + 1) = 0.$$

Y los correspondientes autovalores son $\lambda = 1$ (doble) y $\lambda = -1$ (simple). Por tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es

$$x_n = c_1 + c_2 n + c_3(-1)^n.$$

Además, el casoratiano de las soluciones dadas es

$$C^{(0)} = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right), \quad c^{(0)} = \det C^{(0)} = 1 \neq 0;$$

por lo que teniendo en cuenta el teorema 41 (Moreno, 2014: 249) las tres soluciones dadas son independientes.

Para hallar la solución correspondiente a los dados dados, $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = 0$, sustituimos y determinamos los valores de las constantes.

$$\begin{cases} x_0 = 1 & \Longrightarrow & c_1 & & & + & c_3 & = & 1, \\ x_1 = 0 & \Longrightarrow & c_1 & + & c_2 & - & c_3 & = & 0, \\ x_2 = 0 & \Longrightarrow & c_1 & + & 2c_2 & + & c_3 & = & 0. \end{cases}$$

Obtenemos

$$c_1 = \frac{3}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{1}{4};$$

y por tanto la solución buscada es

$$x_n = \frac{3}{4} - \frac{n}{2} + \frac{(-1)^n}{4} = \frac{3 - 2n + (-1)^n}{4}.$$

Solución del ejercicio 6.3. Analizamos la consistencia del método aplicando el teorema 43 (Moreno, 2014: 270). Para ello, tabulamos los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$
b	1	3	9
a	1	2	4
0	1	1	1
-1	1	0	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	$b+a-1$	$3b+2a$	$9b+4a$

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$
0	1	3
0	1	2
1	1	1
0	1	0
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	1	2

Para que el esquema sea consistente ha de verificarse

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 = 0 & \Longrightarrow \quad b+a-1=0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1+\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 = 0 & \Longrightarrow \quad -(3b+2a)+1=0; \end{cases}$$

y por tanto, han de ser $a=2$ y $b=-1$. Además,

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^2+2\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^1 = -(9b+4a)+2\cdot 2 = 5 \neq 0,$$

por lo que en este caso el orden de consistencia es 1.

Para los valores determinados $a=2$ y $b=-1$ el primer polinomio característico es

$$\rho(r) = r^3 - 2r + 1,$$

y sus raíces (aplicando la regla de Ruffini para la primera factorización),

$$\rho(r)=0 \Longrightarrow r^3-2r+1=0 \Longrightarrow (r-1)(r^2+r-1)=0 \Longrightarrow \begin{cases} r=1, \\ \\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{cases}$$

Como

$$\left|\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1,$$

No se cumple el criterio de la raíz, por lo tanto el sistema no es cero-estable y según el resultado del teorema 46 (Moreno, 2014: 280), tampoco será convergente.

Solución del ejercicio 6.4. Es idéntico al ejercicio 4.4, de la página 15.

Septiembre de 2014 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 7.1. La función $f(x) = xe^x$ transforma el intervalo $[-1, 0]$ en el intervalo $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$. La función inversa de f en $\left[-\frac{1}{e}, 0\right]$ se conoce como función de Lambert (rama -1). Para evaluar la función de Lambert se puede aplicar el método de Newton a la ecuación $xe^x = a$ para cualquier $a \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$. Analizar la convergencia del método cuando se toma como punto inicial $x^{(0)} = 0$ y cómo se comporta cuando a tiene un valor muy próximo a $-\frac{1}{e}$.

Ejercicio 7.2. Describir el método de Broyden para la resolución de sistemas no lineales. Invertir la siguiente matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

usando la fórmula de Sherman-Morrison.

Ejercicio 7.3. Hallar la solución de la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1} = 0$$

tal que $x_0 = 1$ y $x_{101} - x_{100} = 1$.

Ejercicio 7.4. Ejercicio 117 (Moreno, 2014: 284). Estudiar la consistencia, cero-estabilidad y convergencia de los siguientes esquemas

(a) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{h}{2}(3f_{n+1} - f_n)$,

(b) $x_{n+1} - x_n = \dfrac{h}{5}(3f_{n+1} - 2f_n)$,

(c) $x_{n+1} + x_n - 2x_{n-1} = \dfrac{h}{4}(9f_{n+1} + 3f_n)$.

Solución del ejercicio 7.1. Sea $a \in \left[-\frac{1}{e}, 0\right]$. Reescribimos la ecuación dada de la forma

$$xe^x = a \Longrightarrow xe^x - a = 0,$$

y llamamos h a la función de clase C^∞ en $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow h(x) = xe^x - a \in \mathbb{R}.$$

Sus dos primeras derivadas son

$$h'(x) = (x+1)e^x, \quad h''(x) = (x+2)e^x.$$

Y sabemos que h tiene al menos una raíz $\alpha \in [-1, 0]$, puesto que se verifican las hipótesis del teorema de Bolzano (Moreno, 2014: 188),

$$h(-1) = -\frac{1}{e} - a < 0, \quad h(0) = -a \geqslant 0.$$

Por otra parte, al ser $h'(x) > 0$ en el intervalo $[-1, 0]$ sabemos que h es creciente en dicho intervalo, por lo que la raíz es única. Además, el teorema 34 (Moreno, 2014: 207)

$$\frac{\max\limits_{x \in [-1,0]} |h''(x)|}{\max\limits_{x \in [-1,0]} |h'(x)|} = \frac{2}{1} = 2 < \infty$$

garantiza que el método de Newton es localmente convergente a α, y con orden de convergencia 2.

Lo estudiado hasta ahora nos garantiza la convergencia local del método, pero no nos asegura dicha convergencia cuando $x_0 = 0$. Veamos qué ocurre ese caso. La función h es estrictamente convexa en el intervalo convexo $[-1, 0]$ por ser su segunda derivada estrictamente positiva en dicho intervalo. Según el teorema 35 (Moreno, 2014: 207), como se verifica

$$-\frac{1}{e}-a=\min_{x\in[-1,0]} f(x)=f(-1)<0\leqslant f(0)=-a,$$

sabemos que la sucesión generada por el método de Newton es monótona decreciente y convergente a α, puesto que $x^{(0)}=0>\alpha$ (si $a=0$ es falso que $x^{(0)}=0>\alpha$, pero en ese caso $x^{(0)}=\alpha=0$ y el problema estaría trivialmente resuelto).

En resumen, el método de Newton estudiado, es convergente independientemente del valor de $a\in\left[-\frac{1}{e},0\right]$. Cuando la raíz buscada esté lo suficientemente próxima a $x^{(0)}=0$ podremos garantizar que el orden de convergencia es 2, pero cuando a toma valores próximos a $-\frac{1}{e}$ (y por tanto la raíz se aproxima a -1) no podemos asegurar que el orden de convergencia sea 2.

Solución del ejercicio 7.2. El método de Broyden, que generaliza el método de la secante para ecuaciones escalares, es similar al método de Newton para ecuaciones no escalares, salvo que se sustituye la matriz jacobiana de la función (que puede ser difícil de calcular) por una matriz alternativa que denominamos J_k. Así, si queremos resolver la ecuación no escalar $F(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, dada una iteración $\mathbf{x}^{(k)}$ obtenemos la siguiente iteración $\mathbf{x}^{(k+1)}$ como la única solución del sistema lineal

$$J_k(\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)})=-F(\mathbf{x}^{(k)})\Longrightarrow \mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{x}^{(k)}-J_k^{-1}F(\mathbf{x}^{(k)}).$$

La sucesión de matrices J_k^{-1} se obtiene directamente mediante la fórmula de Sherman-Morrison,

$$J_k^{-1}=J_{k-1}^{-1}-\frac{J_{k-1}^{-1}\mathbf{u}^{(k)}\left(J_{k-1}^{-1}\mathbf{v}^{(k)}\right)^t}{1+\left(\mathbf{v}^{(k)}\right)^t J_{k-1}^{-1}\mathbf{u}^{(k)}},$$

siendo los vectores $\mathbf{u}^{(k)}$ y $\mathbf{v}^{(k)}$ en cada caso

$$\mathbf{u}^{(k)}=\frac{F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)-F\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right)-J_{k-1}\left(\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\right)}{\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|},\quad \mathbf{v}^{(k)}=\frac{\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}}{\|\mathbf{x}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k-1)}\|}.$$

Una elección adecuada para la matriz inicial es $J_0=F'(\mathbf{x}^{(0)})$.

Para invertir la matriz B, podemos escribir

$$B=\begin{pmatrix} 1&0&0&\cdots&0&1\\ 0&1&0&\cdots&0&1\\ 0&0&1&\cdots&0&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&1&1\\ 0&0&0&\cdots&0&1 \end{pmatrix}=I+\begin{pmatrix} 0&0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&0&\cdots&0&1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\cdots&0&1\\ 0&0&0&\cdots&0&0 \end{pmatrix}=I+\begin{pmatrix} 0\cdot 1&0\cdot 1&0\cdot 1&\cdots&0\cdot 1&1\cdot 1\\ 0\cdot 1&0\cdot 1&0\cdot 1&\cdots&0\cdot 1&1\cdot 1\\ 0\cdot 1&0\cdot 1&0\cdot 1&\cdots&0\cdot 1&1\cdot 1\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0\cdot 1&0\cdot 1&0\cdot 1&\cdots&0\cdot 1&1\cdot 1\\ 0\cdot 0&0\cdot 0&0\cdot 0&\cdots&0\cdot 0&1\cdot 0 \end{pmatrix}=$$

$$=I+\mathbf{u}\mathbf{v}^t,$$

siendo

$$\mathbf{u}=(0,0,0,\dots,0,1);\quad \mathbf{v}=(1,1,1,\cdots,1,0).$$

Tal y como se pide, aplicamos la fórmula de Sherman-Morrison (Moreno, 2014: 230). Si la matriz A es no singular y $1+\mathbf{v}^tA^{-1}\mathbf{u}\neq 0$, entonces

$$(A+\mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1}=A^{-1}-\frac{A^{-1}\mathbf{u}(A^{-1}\mathbf{v})^t}{1+\mathbf{v}^tA^{-1}\mathbf{u}}.$$

En nuestro caso,

$$1+\mathbf{v}^tI^{-1}\mathbf{u}=1+\mathbf{v}^t\mathbf{u}=1\neq 0;$$

$$B^{-1}=(I+\mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1}=I^{-1}-\frac{I^{-1}\mathbf{u}(I^{-1}\mathbf{v})^t}{1+\mathbf{v}^tI^{-1}\mathbf{u}}=I-\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^t}{1+\mathbf{v}^t\mathbf{u}}=I-\mathbf{u}\mathbf{v}^t=$$

$$= I - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 7.3. La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0,$$

que tiene un único autovalor, $\lambda = 1$, doble. La solución general es por tanto,

$$x_n = c_1 + c_2 n.$$

Imponiendo las condiciones iniciales,

$$x_0 = 1 \Longrightarrow c_1 = 1;$$

$$x_{101} - x_{100} = 1 \Longrightarrow (c_1 + 101c_2) - (c_1 - 100c_2) = 1 \Longrightarrow c_2 = 1.$$

Por tanto,

$$x_n = 1 + n.$$

Solución del ejercicio 7.4.

(a) Para estudiar la cero-estabilidad hallamos las raíces del primer polinomio característico, $\rho(r) = r - 1$.

$$\rho(r) = 0 \Longrightarrow r - 1 = 0 \Longrightarrow r = 1.$$

La única raíz tiene módulo uno y multiplicidad uno, y por tanto el esquema satisface el criterio de la raíz, y según el teorema 45 (Moreno, 2014: 277) es cero-estable.

Analizamos la consistencia del método aplicando el teorema 43 (Moreno, 2014: 270). Para ello, tabulamos los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$
1	1	1
-1	1	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	0	1

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$
$-\frac{1}{2}$	1
$\frac{3}{2}$	1
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	1

Dado que se verifica

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 = 0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 = -1 + 1 = 0; \end{cases}$$

el esquema es consistente.

Por último, y aplicando el teorema 46 (Moreno, 2014: 280), dado que el esquema es cero-estable y consistente, también será convergente.

(b) Para estudiar la cero-estabilidad hallamos las raíces del primer polinomio característico, $\rho(r) = r - 1$.

$$\rho(r) = 0 \Longrightarrow r - 1 = 0 \Longrightarrow r = 1.$$

La única raíz tiene módulo uno y multiplicidad uno, y por tanto el esquema satisface el criterio de la raíz, y según el teorema 45 (Moreno, 2014: 277) es cero-estable.

Analizamos la consistencia del método aplicando el teorema 43 (Moreno, 2014: 270). Para ello, tabulamos los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$
1	1	1
-1	1	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	0	1

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$
$-\frac{2}{5}$	1
$\frac{3}{5}$	1
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	$\frac{1}{5}$

Dado que se verifica

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 = 0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 = -1 + \frac{1}{5} = -\frac{4}{5} \neq 0; \end{cases}$$

el esquema no es consistente.

Por último, y aplicando el teorema 46 (Moreno, 2014: 280), dado que el esquema es cero-estable pero no consistente, tampoco será convergente.

(c) Para estudiar la cero-estabilidad hallamos las raíces del primer polinomio característico, $\rho(r) = r^2 + r - 2$.

$$\rho(r) = 0 \Longrightarrow r^2 + r - 2 = 0 \Longrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Longrightarrow \begin{cases} r = -2, \\ r = \quad 1. \end{cases}$$

Como hay una raíz con módulo mayor que uno, $r = -2$, tanto el esquema no satisface el criterio de la raíz, y según el teorema 45 (Moreno, 2014: 277) no es cero-estable.

Analizamos la consistencia del método aplicando el teorema 43 (Moreno, 2014: 270). Para ello, tabulamos los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$
2	1	2
-1	1	1
-1	1	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	0	3

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$
0	1
$\frac{3}{4}$	1
$\frac{9}{4}$	1
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	3

Dado que se verifica

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 = 0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 = -3 + 3 = 0; \end{cases}$$

el esquema es consistente.

Por último, y aplicando el teorema 46 (Moreno, 2014: 280), dado que el esquema no es cero-estable, tampoco será convergente.

Septiembre de 2014 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 8.1. Si g es una función de clase C^{p+1} en un intervalo I tal que

$$\frac{d^i g}{dx^i}(\alpha) = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, p;$$

$$\frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\alpha) \neq 0;$$

para un punto fijo α de g, probar toda sucesión convergente generada el método de punto fijo asociado a g, tiene $p+1$ como orden de convergencia. Calcular el orden de convergencia en el caso del punto fijo de $g(x) = x - \cos x$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ejercicio 8.2. Usar una sucesión de polinomios de Sturm para determinar el número de autovalores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que contiene el intervalo $(0, 1)$ dependiendo del valor del parámetro α.

Ejercicio 8.3. Se desea calcular el mínimo de la función

$$f(x, y) = -2xy - 2x + x^2 + 2y^2.$$

Determinar el punto que se alcanza después de la primera iteración del método del gradiente con máximo descenso si se parte del punto $(-1, 1)$.

Ejercicio 8.4. Aproximar las soluciones del problema de contorno

$$-u'' = 0, \quad u'(0) = u'(1) = 0$$

mediante un método de diferencias finitas que use una diferencia dividida progresiva para aproximar la condición de contorno en el extremo lateral izquierdo y una retrógrada para el derecho. Determinar si la solución del problema aproximado es única para $h = \frac{1}{3}$.

Solución del ejercicio 8.1. Teorema 30 (Moreno, 2014: 197). Si escribimos el desarrollo de Taylor de la función g de orden p en torno al punto α obtenemos

$$g(x) = g(\alpha) + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n!} \frac{d^n g}{dx^n}(\alpha)(x-\alpha)^n + \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi)(x-\alpha)^{p+1} = \alpha + \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi)(x-\alpha)^{p+1},$$

siendo ξ un punto del intervalo de extremos x y α. Entonces, para $k \geqslant 0$,

$$x_{k+1} = g(x_k) = \alpha + \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi_k)(x_k - \alpha)^{p+1} \Longrightarrow x_{k+1} - \alpha = \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi_k)(x_k - \alpha)^{p+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(p+1)!} \left| \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi_k) \right| = \frac{1}{(p+1)!} \left| \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\alpha) \right|.$$

□

Sea $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Sabemos que

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \cos x \geqslant 0 \Longrightarrow g(x) = x - \cos x \leqslant x.$$

Y solo se da la igualdad cuando

$$\cos x = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{2},$$

lo que quier decir que el único punto fijo de $g(x)$ en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ es $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Por otra parte, la función g es no decreciente, puesto que

$$g'(x) = 1 + \operatorname{sen} x \geqslant 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sea $x_k \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$,

$$x_k \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x_k < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} = g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leqslant g(x_k) \leqslant x_k < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow -\frac{\pi}{2} \leqslant x_{k+1} \leqslant x_k < \frac{\pi}{2}.$$

Hemos visto que la sucesión formada a partir del método del punto fijo es monótona y acotada, por lo que también es convergente. Sin embargo, para $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ la sucesión converge hacia un valor $\beta \leqslant x_0 < \frac{\pi}{2}$ puesto que la sucesión es decreciente. Entonces, el método del punto fijo en ningún caso convergerá hacia la raíz buscada en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que como ya se ha visto es $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Solo será convergente en el caso trivial, o sea, cuando $x_0 = \alpha = \frac{\pi}{2}$.

Solución del ejercicio 8.2. Calculamos el polinomio característico de la matriz A,

$$p(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ \alpha & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + x + \alpha.$$

Aplicamos el algoritmo de Euclides a los polinomios $p_0(x) = p(x)$ y $p_1(x) = p'(x)$, y obtenemos la sucesión de polinomios de Sturm:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= -x^3 + x + \alpha, \\ p_1(x) &= -3x^2 + 1, \\ p_2(x) &= -\frac{2}{3}x - \alpha, \\ p_3(x) &= \frac{27\alpha^2}{4} - 1. \end{aligned}$$

El último polinomio hallado, $p_3(x)$, podría ser nulo. Esto sucede cuando

$$\frac{27\alpha^2}{4} - 1 = 0 \Longrightarrow \alpha = \pm\frac{2\sqrt{3}}{9},$$

y en ese caso el máximo común divisor de los polinomios $p(x)$ y $p'(x)$ es

$$p_2(x) = -\frac{2}{3}x - \alpha = -\frac{2}{3}x \mp \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

Esto indica que $p(x)$ y $p'(x)$ tienen una raíz común, o lo que es lo mismo, que $p(x)$ tiene una raíz doble. Si dividimos $p(x)$ entre el máximo común divisor hallado obtenemos el polinomio $q(x)$, con las mismas raíces que $p(x)$ pero todas ellas simples.

$$q(x) = \frac{3}{2}x^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}x - 1.$$

Nuevamente aplicamos el algoritmo de Euclides a los polinomios $p_0(x) = q(x)$ y $p_1(x) = q'(x)$ y obtenemos una sucesión de polinomios de Sturm:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= \frac{3}{2}x^2 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}x - 1, \\ p_1(x) &= 3x \mp \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ p_2(x) &= \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

En cada caso, estudiamos los signos que toman los polinomios de Sturm en el intervalo $(0, 1)$, y contamos los cambios de signos que se producen en función de los distintos valores de α. Los resultados se recogen a continuación.

	$\alpha \neq \pm\frac{2\sqrt{3}}{2}$		$\alpha = \pm\frac{2\sqrt{3}}{2}$	
i	$p_i(0)$	$p_i(1)$	$p_i(0)$	$p_i(1)$
0	α	α	-1	$\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$
1	1	-2	$\mp\frac{\sqrt{3}}{2}$	$3 \mp \frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$-\alpha$	$-\frac{2}{3} - \alpha$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
3	$\frac{27\alpha^2}{4} - 1$	$\frac{27\alpha^2}{4} - 1$		

	x	p_0	p_1	p_2	p_3	cambios	raíces
$\alpha < -\frac{2}{3}$	0	$-$	$+$	$+$	$+$	1	0
	1	$-$	$-$	$+$	$+$	1	
$\alpha = -\frac{2}{3}$	0	$-$	$+$	$+$	$+$	1	0
	1	$-$	$-$		$+$	1	
$-\frac{2}{3} < \alpha < -\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$-$	$+$	$+$	$+$	1	0
	1	$-$	$-$	$-$	$+$	1	
$\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$-$	$+$	$+$		1	1
	1	$+$	$+$	$+$		0	
$-\frac{2\sqrt{3}}{9} < \alpha < 0$	0	$-$	$+$	$+$	$-$	2	2
	1	$-$	$-$	$-$	$-$	0	
$0 < \alpha < \frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$+$	$+$	$-$	$-$	1	0
	1	$+$	$-$	$-$	$-$	1	
$\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$-$	$-$	$+$		1	0
	1	$-$	$+$	$+$		1	
$\alpha > \frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$+$	$+$	$-$	$+$	2	0
	1	$+$	$-$	$-$	$+$	2	

Se excluye en el estudio el valor $\alpha = 0$ puesto que en ese caso no se verifican las hipótesis del teorema 38 (Moreno, 2014: 213). Véase que en ese caso $p(0)p(1) = 0$. En cualquier caso, para $\alpha = 0$ el polinomio es

$$p(x) = -x^3 + x$$

y sus raíces son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, ninguna de las cuales pertenece al intervalo $(0, 1)$.

En resumen, y aplicando el citado teorema 38 a los resultados obtenidos en la tabla anterior, la matriz A solo tiene autovalores en el intervalo $(0, 1)$ cuando

$$\alpha \in \left[-\frac{2\sqrt{3}}{9}, 0\right).$$

Si $\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$ la matriz tiene exactamente un autovalor, y si $-\frac{2\sqrt{3}}{9} < \alpha < 0$ la matriz tiene exactamente dos autovalores en dicho intervalo. Como comprobación se puede hacer un esbozo de la función $p(x)$ para los valores de α relevantes, que se da en la figura 1.

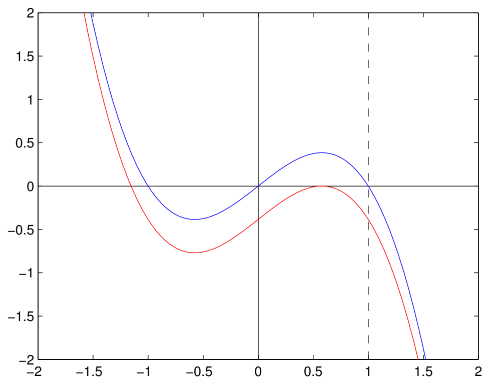

Figura 1: Gráfica de $p(x) = -x^3 + x + \alpha$ para $\alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{2}$ (en rojo) y para $\alpha = 0$ (en azul).

Solución del ejercicio 8.3. Calculamos el gradiente de $f(x, y)$ en el punto dado, $(-1, 1)$, para obtener la dirección de máximo descenso

$$\nabla f(x, y) = (-2y - 2 + 2x, -2x + 4), \quad \nabla f(-1, 1) = (-6, 6); \quad \mathbf{d}_0 = -\nabla f(1, 1) = (6, -6).$$

Para encontrar el tamaño del paso, ρ_0, se busca el mínimo de la función

$$g(t) = f(x^{(0)} + td_1^{(0)}, y^{(0)} + td_2^{(0)}) = f(-1+6t, 1-6t) = 6(1-6t)^2 + 2(1-6t),$$

$$g'(t) = -60(1-6t) - 12; \quad g''(t) = 360 > 0;$$

$$g'(t) = 0 \Longrightarrow t = \frac{1}{5}.$$

Por tanto, $\rho_0 = \frac{1}{5}$ y entonces

$$(x^{(1)}, y^{(1)}) = (x^{(0)}, y^{(0)}) + \rho_0(d_1^{(0)}, d_2^{(0)}) = (-1, 1) + \frac{1}{5}(6, -6) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}\right).$$

Solución del ejercicio 8.4. Si aproximamos la condición dada en el extremo izquierdo mediante una diferencia dividida progresiva, obtenemos

$$\frac{u_1 - u_0}{h} = 0 \Longrightarrow u_1 = u_0.$$

Análogamente, aproximamos la condición para el extremo derecho mediante una diferencia dividida retrógrada,

$$\frac{u_N - u_{N-1}}{h} = 0 \Longrightarrow u_N = u_{N-1}.$$

Y si sustituimos la segunda derivada por el esquema usual,

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 0.$$

En conjunto, el problema discreto en diferencias es

$$-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = 0, \ i = 1, 2, \dots, N-1; \quad u_1 = u_0; \quad u_N = u_{N-1}.$$

O, análogamente,

$$\left.\begin{aligned} u_0 - u_1 &= 0 \\ -u_0 + 2u_1 - u_2 &= 0 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 &= 0 \\ &\vdots \\ -u_{N-2} + 2u_{N-1} - u_N &= 0 \\ -u_{N-1} + u_N &= 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_N} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Para $h = \frac{1}{3}$ se tiene que $N = 3$, y en este caso el problema es

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_3} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La solución del problema aproximado será única siempre y cuando el determinante de la matriz de coeficientes A_3 sea no nulo. Calculamos dicho determinante, sumando a la primera fila todas las demás,

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por tanto el sistema no tiene solución única.

Mayo de 2015

Ejercicio 9.1. Determinar para qué valores de a el valor de la fracción continua

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cdots}}}$$

existe y cuál es su valor, justificando rigurosamente la respuesta.

Ejercicio 9.2. Calcular las dos primeras iteraciones del método de Newton para minimizar la función

$$f(x, y) = 10(y - x^2)^2 + (1 - x)^2$$

partiendo del punto $(1, 2)$.

Ejercicio 9.3. Ejercicio 117.3 (Moreno, 2014: 284). Explicar el concepto de cero-estabilidad de un esquema multipaso. Enunciar las condiciones de la raíz. ¿Es cero-estable el siguiente esquema

$$x_{n+1} + x_n - 2x_{n-1} = \frac{h}{4}(9f_{n+1} + 3f_n)?$$

Ejercicio 9.4. Para resolver el problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + 8u = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 16$$

se usa el siguiente esquema en diferencias finitas

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 8u_i = 0$$

con paso $h = \frac{1}{4}$. Calcular la solución del problema de contorno como la solución de la ecuación en diferencias que cumple las condiciones de contorno.

Solución del ejercicio 9.1. Sea $a \neq 0$. La expresión dada es el límite, si existe, de la sucesión

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{1}{a}, \quad x_2 = \frac{1}{a + \frac{1}{a}}, \quad x_3 = \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a}}}, \quad \cdots$$

y puede ser generada mediante el método de iteración del punto fijo dado por

$$x_0 = 0, \quad x_n = g(x_{n-1}), \ \forall n \geqslant 1, \quad g(x) = \frac{1}{a + x}.$$

La función g dada es de clase C^∞ en $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, y sus posibles puntos fijos son

$$g(x) = x \Longrightarrow \frac{1}{a + x} = x \Longrightarrow 1 = x(a + x) \Longrightarrow x^2 + ax - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4}}{2}.$$

- Si $a > 0$ veamos que g es una función contractiva en el intervalo $I_1 = \left[0, \frac{1}{a}\right]$, o sea,

  $$g\left(\left[0, \frac{1}{a}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{a}\right].$$

  En efecto,

  $$0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{a} \Longrightarrow 0 < a \leqslant a + x \leqslant a + \frac{1}{a} = \frac{a^2 + 1}{a} \Longrightarrow 0 < \frac{a}{a^2 + 1} \leqslant \frac{1}{a + x} \leqslant \frac{1}{a} \Longrightarrow 0 \leqslant g(x) \leqslant \frac{1}{a}.$$

  El teorema de Brouwer (Moreno, 2014: 191) nos garantiza que la función g tiene un punto fijo en el intervalo I_1. Evidentemente, dicho punto fijo sera en ese caso

  $$\alpha_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 4} - |a|}{2} = \frac{2}{|a| + \sqrt{a^2 + 4}} < \frac{2}{2|a|} = \frac{1}{a} \Longrightarrow \alpha_1 \in I_1, \quad \text{si } a > 0;$$

- Y, análogamente, si $a < 0$ veamos que g es una función contractiva en el intervalo $I_2 = \left[\frac{1}{a}, 0\right]$, o sea,

$$g\left(\left[\frac{1}{a}, 0\right]\right) \subset \left[\frac{1}{a}, 0\right].$$

Entonces,

$$\frac{1}{a} \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow \frac{a^2+1}{a} = a + \frac{1}{a} \leqslant a + x \leqslant a < 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{a+x} \leqslant 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} \leqslant g(x) \leqslant 0.$$

De nuevo, el teorema de Brouwer (Moreno, 2014: 191) nos garantiza que la función g tiene un punto fijo en el intervalo I_2. Evidentemente, dicho punto fijo sera ahora

$$\alpha_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2+4}}{2} = -\frac{\sqrt{a^2+4} - |a|}{2} = -\frac{2}{|a| + \sqrt{a^2+4}} > -\frac{2}{2|a|} = \frac{1}{a} \Longrightarrow \alpha_2 \in I_2, \quad \text{si } a < 0.$$

A continuación podemos ver que para cualquiera de los dos puntos fijos de g, el teorema de Ostrowski (Moreno, 2014: 198) nos garantiza la convergencia local, si el valor inicial para el método de iteración está lo suficientemente próximo al α_i buscado.

$$g'(x) = -\frac{1}{(a+x)^2}; \quad |g'(x)| = \frac{1}{(a+x)^2};$$

$$|g'(\alpha_i)| = \frac{1}{(a+\alpha_i)^2} = \frac{1}{\left(a + \frac{-a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a \pm \sqrt{a^2+4}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{\left(a \pm \sqrt{a^2+4}\right)^2} = \frac{2}{a^2 + 2 \pm a\sqrt{a^2+4}} = \frac{2}{a^2 + 2 + |a|\sqrt{a^2+4}} < 1.$$

Si además se verifica $|a| > 1$,

$$|a| > 1 \Longrightarrow a^2 > 1 \Longrightarrow \frac{1}{a^2} < 1 \Longrightarrow |g'(x)| = \frac{1}{(a+x)^2} \leqslant \frac{1}{a^2} < 1,$$

y el teorema de la contracción de Banach (Moreno, 2014: 192) nos asegura la convergencia global para cualquier $x_0 \in I_i$ en el intervalo, y en particular para $x_0 = 0 \in I_1 \cap I_2$.

Solución del ejercicio 9.2. El mínimo buscado ha de satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad -40x(y-x^2) - 2(1-x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 20xy - 20x^3 + 1 - x = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 20(y-x^2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y - x^2 = 0.
\end{aligned}$$

Equivalentemente, hemos de resolver la ecuación no escalar $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, siendo

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} 20xy - 20x^3 + 1 - x \\ y - x^2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos la matriz jacobiana de F,

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 20y - 60x^2 - 1 & 20x \\ -2x & 1 \end{pmatrix},$$

y entonces la primera iteración del método de Newton para resolver la ecuación viene dada por

$$F'(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = -F(\mathbf{x}_0) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 20y_0 - 60x_0^2 - 1 & 20x_0 \\ -2x_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 20x_0y_0 - 20x_0^3 + 1 - x_0 \\ y_0 - x_0^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -21 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -21 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 & -20 \\ 2 & -21 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente, la segunda iteración será

$$F'(\mathbf{x}_1)(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = -F(\mathbf{x}_1) \Longrightarrow \begin{pmatrix} 20y_1 - 60x_1^2 - 1 & 20x_1 \\ -2x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 20x_1y_1 - 20x_1^3 + 1 - x_1 \\ y_1 - x_1^2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} -41 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ y_1 - 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 - 1 \\ y_2 - 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -41 & 20 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Y evidentemente, hemos encontrado el mínimo buscado puesto que

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \forall k \geqslant 1.$$

Solución del ejercicio 9.3. Es idéntico al ejercicio 4.3, de la página 15.

Solución del ejercicio 9.4. Para $h = \frac{1}{4}$ la ecuación en diferencias es

$$u_{i+1} - \frac{5}{2}u_i + u_{i-1} = 0, \quad u_0 = 1, \quad u_4 = 16.$$

Su polinomio característico y las raíces de este son

$$\lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-\left(-\frac{5}{2}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} = \frac{5 \pm 3}{4} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Por tanto, la solución general de la ecuación en diferencias es

$$u_n = c_1 2^n + c_2 2^{-n}.$$

Imponemos las condiciones iniciales,

$$\begin{cases} u_0 = 1 & \Longrightarrow & c_1 + c_2 = 1, \\ \\ u_4 = 16 & \Longrightarrow & 16c_1 + \dfrac{c_2}{16} = 16; \end{cases}$$

y obtenemos $c_1 = 1$ y $c_2 = 0$. Por tanto la solución aproximada es de la forma

$$u_i = 2^n, \quad i = 0, 1, \ldots, 4.$$

Junio de 2015

Ejercicio 10.1. Enunciar la regla de los signos de Descartes. Enunciar y probar el teorema de Cauchy para separación de raíces de un polinomio y aplicar estos resultados a la separación de las raíces del polinomio

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 1$$

usando el teorema de Bolzano en intervalos de extremos enteros.

Ejercicio 10.2. Calcular el límite de la sucesión

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \ldots\right\}$$

sabiendo que numerador y denominador siguen sendas ecuaciones lineales en diferencias de segundo orden homogéneas.

Ejercicio 10.3. Determinar el valor de α para que el orden de consistencia del siguiente esquema

$$x_{n+1} - \alpha x_n - (1-\alpha)x_{n-1} = 2hf_n + \frac{h\alpha}{2}(f_{n-1} - 3f_n)$$

con el siguiente problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0,$$

sea máximo.

Ejercicio 10.4. Estudiar la estabilidad del siguiente esquema en diferencias finitas

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_{i-1} + u_{i+1} = 1$$

para $i = 1, \ldots, N-1$, $h = \frac{1}{N}$ y

$$u_0 = u_N = 1$$

para aproximar la solución del siguiente problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + 2u = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(0) = u(1) = 1.$$

Solución del ejercicio 10.1. Regla de los signos de Descartes (Moreno, 2014: 211). Sea r el número de cambios de signo que hay en el conjunto formado por los coeficientes de un polinomio p de grado n y k el número de raíces positivas de p. Entonces, $k \leqslant r$ y $r - k$ es un número par.

Teorema de Cauchy (Moreno, 2014: 211). Todas las raíces de un polinomio

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \ a_n \neq 0$$

están en el círculo del plano complejo

$$\Gamma = \left\{z \in \mathbb{C} : \ |z| < 1 + \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|\right\}.$$

Demostración. Sea

$$\eta = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left|\frac{a_i}{a_n}\right|.$$

Para una raíz arbitraria z del polinomio se tiene que

$$a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \Longrightarrow z^n = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}z + \frac{a_0}{a_n}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |z|^n = \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n}z + \frac{a_0}{a_n}\right| \leqslant \eta\left(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1\right) = \eta\frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

Si $|z| \geqslant 1+\eta$ entonces se cumple

$$|z|^n \leqslant |z|^n - 1$$

lo cual es imposible. $\square$

Para el polinomio dado,

$$p(x) = x^3 + 4x^2 - 1,$$

el número de cambios de signo en el conjunto de coeficientes $\{1,4,0,-1\}$ es $r=1$. Por tanto, para que sea $k \leqslant r$ y $r-k$ par, el polinomio ha de tener exactamente $k=1$ raíz positiva. Las raíces negativas del polinomio p son las raíces positivas del polinomio

$$q(x) = p(-x) = -x^3 + 4x^2 - 1.$$

En este caso el número de cambios de signo en el conjunto de coeficientes de q, $\{-1,4,0,-1\}$ es $r=2$, por tanto el polinomio p ha de tener o bien ninguna o bien dos raíces negativas. Además, sea

$$1+\eta = 1 + \text{máx}\left\{\frac{4}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\} = 1+4 = 5,$$

por lo que todas las raíces reales de p están en el intervalo $[-5,5]$.

Con la siguiente tabla de signos y aplicando el teorema de Bolzano (Moreno, 2014: 188) podemos concluir que la única raíz positiva de p está en el intervalo $[0,1]$, y que p tiene dos raíces negativas, una en el intervalo $[-4,-3]$ y otra en el intervalo $[-1,0]$.

x	$\operatorname{sgn} f(x)$
-5	$-$
-4	$-$
-3	$+$
-2	$+$
-1	$+$
0	$-$
1	$+$
2	$+$
3	$+$
4	$+$
5	$+$

Solución del ejercicio 10.2. Ambas ecuaciones son, por hipótesis, de la forma

$$x_{n+1} + a x_n + b x_{n-1} = 0.$$

- Para el numerador,

$$\begin{cases} y_2 + a y_1 + b y_0 = 0 \Longrightarrow 4 + 3a + b = 0, \\ y_3 + a y_2 + b y_1 = 0 \Longrightarrow 7 + 4a + 3b = 0. \end{cases}$$

  Resolviendo obtenemos $a = b = -1$, por lo que la ecuación característica es

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

  La solución general es

$$y_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

  e, imponiendo las condiciones iniciales,

$$y_0 = 1 \Longrightarrow c_1 + c_2 = 1,$$

$$y_1 = 3 \Longrightarrow c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 3 \Longrightarrow c_1\left(1+\sqrt{5}\right) + c_2\left(1-\sqrt{5}\right) = 6;$$

  obtenemos

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \quad y_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

- Para el denominador,

$$\begin{cases} z_2 + az_1 + bz_0 = 0 \Longrightarrow 3 + a + 2b = 0, \\ z_3 + az_2 + bz_1 = 0 \Longrightarrow 4 + 3a + b = 0. \end{cases}$$

  Y resolviendo también obtenemos $a = b = -1$, por lo que la ecuación característica es la misma que en el caso del numerador, y también lo es la solución general:

$$z_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

  Imponemos las condiciones iniciales del denominador,

$$z_0 = 2 \Longrightarrow c_1 + c_2 = 2,$$

$$z_1 = 1 \Longrightarrow c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 3 \Longrightarrow c_1 \left(1+\sqrt{5}\right) + c_2 \left(1-\sqrt{5}\right) = 2;$$

  obtenemos

$$c_1 = c_2 = 1, \quad z_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

La sucesión cociente, $\{\Lambda_n\}$, viene dada por

$$\Lambda_n = \frac{y_n}{z_n} = \frac{\varphi^{n+1} + (1-\varphi)^{n+1}}{\varphi^n + (1-\varphi)^n},$$

siendo φ el número áureo

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Calculamos el límite pedido,

$$\lim_n \Lambda_n = \lim_n \frac{\varphi^{n+1} + (1-\varphi)^{n+1}}{\varphi^n + (1-\varphi)^n} = \lim_n \frac{\varphi^{n+1}}{\varphi^n} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

teniendo en cuenta que

$$1 - \varphi \simeq -0,618033989 \Longrightarrow \lim_n (1-\varphi)^n = 0.$$

Solución del ejercicio 10.3. Analizamos la consistencia del método aplicando el teorema 43 (Moreno, 2014: 270). Para ello, tabulamos los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$	$\mathbf{i}^3$
$1-\alpha$	1	2	4	8
α	1	1	1	1
-1	1	0	0	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	0	$2-\alpha$	$4-3\alpha$	$8-7\alpha$

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$
$\frac{\alpha}{2}$	1	2	4
$2-\frac{3\alpha}{2}$	1	1	1
0	1	0	0
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	$2-\alpha$	$2-\frac{\alpha}{2}$	$2+\frac{\alpha}{2}$

Puesto que se verifica

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 = 0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 = -(2-\alpha) + (2-\alpha) = 0; \end{cases}$$

el esquema es consistente para cualquier valor de α. Además,

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^2 + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^1 = -(4-3\alpha) + 2\left(2 - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\alpha,$$

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^3 + 3\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^2 = -(8-7\alpha) + 3\left(2 + \frac{\alpha}{2}\right) = -2 + \frac{17\alpha}{2},$$

se puede ver que si $\alpha = 0$ tenemos orden de consistencia dos, y es el máximo posible.

Solución del ejercicio 10.4. Escribimos el esquema en diferencias finitas propuesto en forma matricial, teniendo en cuenta que $u_0 = u_N = 1$.

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+u_{i-1}+u_{i+1}=1 \Longrightarrow \frac{1}{h^2}\big(-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}+h^2(u_{i-1}+u_{i+1})\big)=1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{h^2}\big((h^2-1)u_{i+1}+2u_i+(h^2-1)u_{i-1}\big)=1 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & h^2-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h^2-1 & 2 & h^2-1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h^2-1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & h^2-1 \\ 0 & 0 & 0 & & h^2-1 & 2 \end{pmatrix}}_{A^h+D^h}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{N-2} \\ u_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Según el lema 5 (Moreno, 2014: 295), la matriz de coeficientes $A^h + D^h$ tiene por autovalores

$$\lambda_j^h = \frac{1}{h^2}\left(2+2(1-h^2)\cos\frac{j\pi}{N}\right) = \frac{2}{h^2}\left(1+(1-h^2)\cos\frac{j\pi}{N}\right), \quad j=1,2,\cdots,N-1.$$

En particular, el menor de ellos es

$$\lambda_{N-1}^h = \frac{2}{h^2}\left(1+(1-h^2)\cos\frac{(N-1)\pi}{N}\right).$$

Y sabiendo que

$$h=\frac{1-0}{N} \Longrightarrow N=\frac{1}{h} \Longrightarrow \frac{(N-1)\pi}{N}=(1-h)\pi=\pi-\pi h \Longrightarrow \cos(\pi-\pi h)=-\cos\pi h,$$

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+O(x^4);$$

entonces

$$\lambda_{N-1}^h=\frac{2}{h^2}(1-(1-h^2)\cos\pi h)=\frac{2}{h^2}\left(1-(1-h^2)\left(1-\frac{\pi^2h^2}{2}+O(h^4)\right)\right)=2+\pi^2+O(h^2).$$

De lo anterior sabemos que la matriz $A^h + D^h$ tiene determinante no nulo, y por ser una matriz simétrica

$$\left\|(A^h+D^h)^{-1}\right\|=\frac{1}{\lambda_{N-1}^h},$$

también sabemos que está acotada. En consecuencia, el esquema propuesto es estable.

Septiembre de 2015 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 11.1. Se considera la ecuación

$$x(1-e^{-x})=0.$$

Estudiar el conjunto de puntos iniciales para los que el método de Newton converge. ¿Es cuadrática la convergencia del método? ¿Qué se podría hacer para acelerar la convergencia del método?

Ejercicio 11.2. Se considera la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{n+1}-\alpha x_n-\beta x_{n-1}+\alpha\beta x_{n-2}=0,$$

donde α y β representan dos constantes positivas. Determinar para qué rango de valores de α y β la ecuación en diferencias es estable. Se consideran las tres soluciones correspondientes a los tres grupos de datos iniciales

$$x_0=1,\ x_1=0,\ x_2=0;\quad x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=0;\quad x_0=0,\ x_1=0,\ x_2=1.$$

¿Qué relación deben verificar α y β para que las tres soluciones sean independientes?

Ejercicio 11.3. Ejercicio 116 (Moreno, 2014: 283). Explicar el concepto de orden de convergencia de un esquema lineal multipaso. Determinar entre todos los esquemas lineales de un paso que pueden ser utilizados para resolver un problema de valor inicial, aquellos que tengan orden máximo.

Ejercicio 11.4. Usar el método de las diferencias finitas para aproximar la solución del siguiente problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2}+4u=4\cos(4\pi x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\quad u(0)=u(1)=0$$

usando un paso $h=\frac{1}{4}$.

Solución del ejercicio 11.1. Consideramos la función $f(x)=x(1-e^{-x})$, que es de clase $C^\infty(\mathbb{R})$. Sus dos primeras derivadas son

$$f'(x)=1+e^{-x}(x-1),\quad f''(x)=e^{-x}(2-x).$$

Por simple inspección sabemos que $f(0)=f'(0)=0$, y $f''(0)>0$ por lo que $\alpha=0$ es una raíz con multiplicidad dos de la ecuación dada.

El método de Newton aplicado a la ecuación $f(x)=0$ es un método del punto fijo definido por la función g, dada por

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{x(1-e^{-x})}{1+e^{-x}(x-1)}=\frac{x^2e^{-x}}{1+e^{-x}(x-1)}=\frac{x^2}{e^x+x-1}.$$

Haremos un esbozo de la función $g(x)$. En primer lugar, su denominador está definido por la función $g_1(x)=e^x+x-1$, de la que sabemos que

$$g'(x)=e^x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R};\quad g_1(0)=e^0+0-1=0.$$

Por tanto, la función $g_1(x)$ tiene por única raíz $\alpha=0$ y entonces $g(x)$ estará definida para cualquier $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Además, aplicando la regla de L'Hôpital, podemos calcular

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^x+1}=0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x+x-1}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x+1}=\left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Calculamos la derivada de g,

$$g'(x)=\frac{2x(e^x+x-1)-x^2(e^x+1)}{(e^x+x-1)^2}=\frac{2xe^x+x^2-2x-x^2e^x}{(e^x+x-1)^2}=\frac{x(2-x)(e^x-1)}{(e^x+x-1)^2};$$

y con ella estudiamos su monotonía.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de $g'(x)$	$+$	$+$	$-$
Monotonía	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Con la información obtenida podemos hacer un esbozo de la función g, en la figura 2.

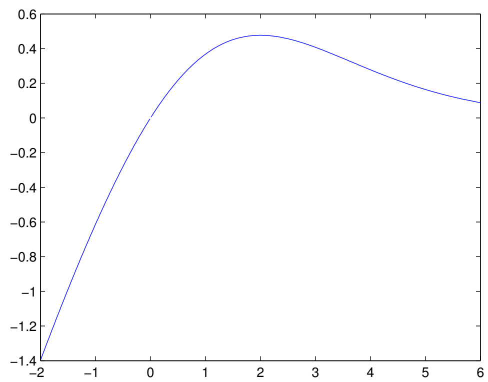

Figura 2: Gráfica de la función $g(x)$

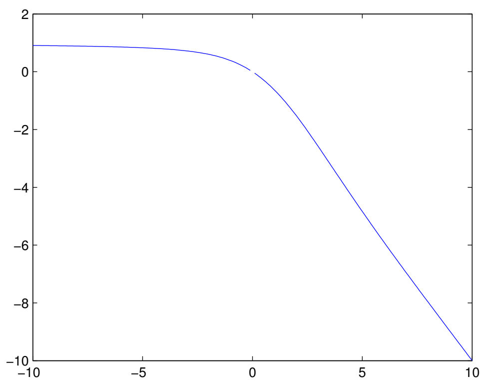

Figura 3: Gráfica de la función $h(x) = g(x) - x$

Estudiamos a continuación la función $h(x) = g(x) - x$, definida para $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y representada en la figura 3.

$$h(x) = g(x) - x = \frac{x^2}{e^x + x - 1} - x = \frac{x(1 - e^x)}{e^x + x - 1}.$$

En realidad solo necesitamos conocer los signos de h, que se pueden obtener por simple inspección, y que se recogen a continuación, junto con los de la función g.

Intervalos	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
Signo de $g(x)$	$-$	$+$
Signo de $h(x)$	$+$	$-$

Estamos en condiciones de estudiar la sucesión que obtenemos mediante el método de Newton. Separamos el estudio en función del signo del valor x_0 elegido.

- Si $x_0 < 0$ la sucesión $\{x_k\}$ es acotada y monótona creciente. Probaremos por inducción que la sucesión está acotada superiormente por 0. Por hipótesis $x_0 < 0$, y sea $x_k < 0$. Teniendo en cuenta los signos de la función g,

  $$x_k < 0 \Longrightarrow x_{k+1} = g(x_k) < 0.$$

  La sucesión es monótona creciente, cosa que deducimos de los signos de la función h, y de la acotación superior ya demostrada.

  $$x_{k+1} - x_k = g(x_k) - x_k = h(x_k) > 0.$$

  Por ser la sucesión monótona creciente también es acotada inferiormente por x_0, por lo que $\{x_k\}$ es una sucesión monótona y acotada, y en consecuencia convergente.

- Si $x_0 = 0$, estamos en el caso trivial, puesto que $x_0 = \alpha = 0$, que es la raíz buscada. No obstante, en este caso el método de Newton no está definido al ser $f'(x_0) = 0$.

- Y si $x_0 > 0$ la sucesión $\{x_k\}$ es acotada y monótona decreciente. Probaremos por inducción que la sucesión está acotada inferiormente por 0. Por hipótesis $x_0 > 0$, y sea $x_k > 0$. Teniendo en cuenta los signos de la función g,

  $$x_k > 0 \Longrightarrow x_{k+1} = g(x_k) > 0.$$

La sucesión es monótona decreciente, cosa que deducimos de los signos de la función h, y de la acotación inferior ya demostrada.

$$x_{k+1} - x_k = g(x_k) - x_k = h(x_k) < 0.$$

Por ser la sucesión monótona decreciente también es acotada superiormente por x_0, por lo que $\{x_k\}$ es una sucesión monótona y acotada, y en consecuencia convergente.

Entonces, para cualquier valor $x_0 \neq 0$ el método de Newton genera una sucesión convergente hacia $\alpha = 0$, la única raíz de la ecuación dada.

Por ser la raíz $\alpha = 0$ de la ecuación dada de multiplicidad dos, la convergencia del método de Newton será lineal en vez de cuadrática. Podemos modificarlo para que dicha convergencia sea cuadrática mediante la expresión

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

siendo m la multiplicidad de la raíz buscada (si como en este caso dicha multiplicidad es conocida de antemano). En nuestro caso $m = 2$.

Solución del ejercicio 11.2. La ecuación característica es

$$\lambda^3 - \alpha\lambda^2 - \beta\lambda + \alpha\beta = 0 \Longrightarrow \lambda^2(\lambda - \alpha) - \beta(\lambda - \alpha) = 0 \Longrightarrow (\lambda^2 - \beta)(\lambda - \alpha) = 0 \Longrightarrow (\lambda - \sqrt{\beta})(\lambda + \sqrt{\beta})(\lambda - \alpha) = 0.$$

Según el teorema 42 (Moreno, 2014: 251), la ecuación será estable si todas las raíces del polinomio característico tienen módulo menor o igual a uno, siempre que aquellas que tengan módulo uno sean raíces simples; y será fuertemente estable si todas las raíces tienen módulo menor que uno. Por tanto, la ecuación es fuertemente estable si $\alpha < 1$ y $\beta < 1$; estable si $\alpha < \beta \leqslant 1$ o $\beta < \alpha \leqslant 1$; y no estable en cualquier otro caso.

El casoratiano de las soluciones dadas es

$$c^{(0)} = \det C^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

por lo que, teniendo en cuenta el teorema 41 (Moreno, 2014: 249), las soluciones son independientes para cualesquiera valores de α y β.

Obsérvese que si $\alpha\beta = 0$ se reduce el orden de la ecuación, pero las condiciones de estabilidad para el parámetro no nulo son idénticas a las dadas anteriormente. También se reduce el orden del casoratiano, pero este sigue siendo el determinante de la matriz unidad, por lo que las soluciones siguen siendo independientes en el supuesto caso de que hubiese soluciones de la ecuación verificando el conjunto de datos iniciales dados.

Solución del ejercicio 11.3. En esquema se dice convergente cuando el error

$$e_n^h = x(t_n) - x_n$$

tiende a cero cuando se usa un método de arranque convergente. De un modo más preciso, el esquema se dice convergente si

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\leqslant i\leqslant k} |e_i^h| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \max_{0\leqslant i\leqslant N_h} |e_i^h| = 0.$$

Además, el esquema se dice convergente de orden q si

$$\lim_{h\to 0} \max_{0\leqslant i\leqslant k} |e_i^h| = O(h^q) \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} \max_{0\leqslant i\leqslant N_h} |e_i^h| = O(h^q).$$

En la práctica para saber si un esquema es convergente y su orden de convergencia utilizaremos el teorema 46 (Moreno, 2014: 280), que nos dice que será convergente solo cuando sea al mismo tiempo cero-estable y consistente, y en ese caso su orden de convergencia coincide con su orden de consistencia.

Un esquema de un paso será de la forma

$$x_{n+1} = ax_n + h(b_1 f_{n+1} + b_0 f_n).$$

Para determinar si el esquema anterior es consistente y su orden de consistencia aplicamos el teorema 43 (Moreno, 2014: 270). Par ello tabulamos los cálculos necesarios a continuación,

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$	$\mathbf{i}^3$
a	1	1	1	1
-1	1	0	0	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	$a-1$	a	a	a

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$
b_1	1	1	1
b_0	1	0	0
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	b_1+b_0	b_1	b_1

Para que el esquema sea consistente de orden dos se ha de verificar

$$\left\{\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 &= 0 &\implies&& a-1&=0,\\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1+\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 &= 0 &\implies&& -a+b_1+b_0&=0,\\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^2+2\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^1 &= 0 &\implies&& -a+2b_1&=0;\end{aligned}\right.$$

y entonces ha de ser

$$a=1,\quad b_1=b_2=\frac{1}{2}.$$

En ese caso se tiene que,

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^3+3\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^2=-a+3b_1=-1+3\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\neq 0.$$

Por lo tanto el esquema de un paso con con orden de consistencia máximo será de la forma

$$x_{n+1}=x_n+\frac{h}{2}(f_{n+1}+f_n),$$

y tiene orden de consistencia dos.

El método propuesto es cero-estable puesto que su primer polinomio característico, $\rho(r)=r-1$, tiene por única raíz $r=1$, con módulo uno y multiplicidad uno, por lo que satisface el criterio de la raíz. En consecuencia el método dado, que es cero-estable y consistente de orden dos, también será convergente de orden dos. Consultando las fórmulas que se dan en los exámenes se puede ver que el método propuesto es el método de los trapecios.

Solución del ejercicio 11.4. El esquema habitual en diferencias para resolver la ecuación es de la forma

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}+4u_i=4\cos(4\pi x_i),\quad x_i=\frac{i}{h},\quad i=1,2,\dots,N-1;\quad u_0=u_N=0.$$

Teniendo en cuenta que $h=\frac{1}{4}$ y que

$$\cos(4\pi x_i)=\cos(\pi i)=(-1)^i;$$

entonces

$$-u_{i+1}+2u_i-u_{i-1}+\frac{1}{4}u_i=\frac{(-1)^i}{4},$$

y obtenemos

$$-u_{i+1}+\frac{9}{4}u_i-u_{i-1}=\frac{(-1)^i}{4},\quad i=1,2,\dots,N-1;\quad u_0=u_N=0.$$

El sistema de ecuaciones correspondiente es

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \frac{9}{4}u_1 & - & u_2 & & & = & \frac{3}{4},\\ -u_1 & + & \frac{9}{4}u_2 & - & u_3 & = & \frac{1}{4},\\ & - & u_2 & + & \frac{9}{4}u_3 & = & \frac{3}{4}.\end{array}\right.$$

Y su solución:

$$u_1=u_3=\frac{31}{49},\quad u_2=\frac{33}{49}.$$

Septiembre de 2015 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 12.1. Establecer rigurosamente una fórmula que determine un número de iteraciones suficientes para que el error de aproximación en el método de dicotomía sea menor que una precisión dada. ¿Cuántas iteraciones son suficientes para aproximar $\sqrt{3}$ por un método de dicotomía si se toma como intervalo inicial $[1, 2]$, con un error menor que 10^{-12}?

Ejercicio 12.2. ¿Por qué el orden de convergencia del método de Newton es solamente lineal cuando la raíz que pretende aproximar tiene multiplicidad superior al 1? Justificar la respuesta y modificar el método para mantener la convergencia cuadrática. Determinar el orden de convergencia del método modificado cuando se aplica a la ecuación $e^x(x-1)^2 = 0$.

Ejercicio 12.3. Invertir la siguiente matriz de dimensión $n \times n$ con $n \neq 4$,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 3 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 3 \end{pmatrix}$$

usando la fórmula de Sherman-Morrison.

Ejercicio 12.4. Se considera el siguiente esquema en diferencias

$$x_{n+1} = ax_{n-1} + bx_{n-2} + hf_n$$

para aproximar la solución de un problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0.$$

Hallar los valores de a y b para los que el esquema sea consistente y determinar el orden de consistencia del método correspondiente. Determinar también si es convergente.

Solución del ejercicio 12.1. Sea f una función que satisface las condiciones del teorema de Bolzano (Moreno, 2014: 188) en un intervalo $I_0 = [a_0, b_0]$, esto es, f es continua en I y además $f(a_0)f(b_0) < 0$. El método de dicotomía se construye mediante el siguiente procedimiento. Dado un intervalo $I_{k-1} = [a_{k-1}, b_{k-1}]$ con $k \geqslant 1$, se evalúa $f(c_{k-1})$, siendo

$$c_{k-1} = \frac{a_{k-1} + b_{k-1}}{2}.$$

Si $f(c_{k-1}) = 0$ hemos encontrado la raíz buscada y el procedimiento se detiene. En otro caso, y en función del resultado, se elige un nuevo intervalo $I_k = [a_k, b_k]$ de la forma

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} & \text{si} \quad f(c_{k-1})f(a_{k-1}) < 0, \\ c_{k-1} & \text{si} \quad f(c_{k-1})f(a_{k-1}) > 0; \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} b_{k-1} & \text{si} \quad f(c_{k-1})f(b_{k-1}) < 0, \\ c_{k-1} & \text{si} \quad f(c_{k-1})f(b_{k-1}) > 0. \end{cases}$$

Si el procedimiento no se detiene en ningún momento, las sucesiones $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ son monótonas y acotadas, y por tanto convergentes. Además se verifica que

$$\forall k \geqslant 1 : \quad b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}, \quad f(a_k)f(b_k) < 0.$$

Por tanto el valor

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} b_k$$

verifica que

$$\big[f(\alpha)\big]^2 \leqslant 0 \Longrightarrow f(\alpha) = 0.$$

Una cota del error cometido en la aproximación k-ésima viene dada por la expresión

$$e_k = |c_k - \alpha| \leqslant \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}}.$$

Si necesitamos llegar a una precisión $\varepsilon > 0$, imponemos que

$$e_k \leqslant \varepsilon \Longrightarrow \frac{b_0 - a_0}{2^{k+1}} \leqslant \varepsilon \Longrightarrow 2^{k+1} \geqslant \frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \Longrightarrow k \geqslant \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \varepsilon}{\log 2} - 1.$$

Aplicando la expresión anterior para el intervalo inicial $I_0 = [1, 2]$ y la precisión $\varepsilon = 10^{-12}$, obtenemos

$$k \geqslant \frac{\log(2-1) - \log 10^{-12}}{\log 2} - 1 = \frac{12 \log 10}{\log 2} - 1 = 12 \log_2 10 - 1 \simeq 38,86.$$

Por tanto, para tener la seguridad de llegar a la precisión dada será necesario realizar al menos 39 iteraciones del método de dicotomía.

Solución del ejercicio 12.2. Sea f una función de clase C^m en un intervalo que contiene una raíz α de la ecuación $f(x) = 0$. Una raíz a de la ecuación $f(x) = 0$ tiene multiplicidad $m > 1$ si $f'(\alpha) = \cdots = f^{m-1)}(\alpha) = 0$ y $f^{m)}(\alpha) \neq 0$. Si se usa la regla de L'Hôpital se obtiene que

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{(x-\alpha)^m} = \frac{f^{m)}(\alpha)}{m!}; \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{(x-\alpha)^{m-1}} = \frac{m f^{m)}(\alpha)}{m!}; \quad \lim_{x\to\alpha} \frac{f''(x)}{(x-\alpha)^{m-2}} = \frac{m(m-1) f^{m)}(\alpha)}{m!}.$$

En consecuencia, la función

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

verifica

$$g'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) f''(x)}{\big[f'(x)\big]^2} = \frac{f(x) f''(x)}{\big[f'(x)\big]^2};$$

$$\lim_{x\to\alpha} g'(x) = \lim_{x\to\alpha} \frac{f(x) f''(x)}{\big[f'(x)\big]^2} = \lim_{x\to\alpha} \frac{\dfrac{f^{m)}(x)}{m!} \dfrac{m(m-1) f^{m)}(x)}{m!}}{\left[\dfrac{m f^{m)}(x)}{m!}\right]^2} = \frac{m-1}{m} = 1 - \frac{1}{m} \neq 0.$$

De acuerdo con el teorema 30 (Moreno, 2014: 197), el orden de convergencia se reduce a 1. Si la multiplicidad m de la raíz es conocida *a priori* el método de Newton puede ser modificado de modo que la iteración resultante sea

$$g(x) = x - m \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

En este caso, con el mismo razonamiento anterior, se prueba que la convergencia es cuadrática.

La ecuación dada tiene por única raíz $\alpha = 1$, que tiene multiplicidad 2. Sea la función de clase C^∞ dada por $f(x) = e^x (x-1)^2$. El método de Newton modificado viene dado por $g(x)$, definida por

$$g(x) = x - 2\frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{2e^x (x-1)^2}{e^x (x+1)(x-1)} = x - \frac{2(x-1)}{x+1} = \frac{x^2 - x + 2}{x+1} = x - 2 + \frac{4}{x+1}.$$

Calculamos las derivadas de g en la raíz $\alpha = 1$:

$$g'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}, \quad g'(1) = 1 - \frac{4}{(1+1)^2} = 0;$$

$$g''(x) = \frac{4}{(x+1)^3}, \quad g''(1) = \frac{4}{(1+1)^3} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Tal y como se ha razonado anteriormente, y recurriendo al citado teorema 30, podemos asegurar que el método de Newton modificado tiene en este caso orden dos.

Solución del ejercicio 12.3. Para invertir la matriz B, podemos escribir

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 3 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} = 4I + \begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = 4I + \begin{pmatrix} -1\cdot 1 & -1\cdot 1 & \cdots & -1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 & -1\cdot 1 & \cdots & -1\cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1\cdot 1 & -1\cdot 1 & \cdots & -1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 4I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t,$$

siendo

$$\mathbf{u} = (-1, -1, \dots, -1); \quad \mathbf{v} = (1, 1, \cdots, 1).$$

Tal y como se pide, aplicamos la fórmula de Sherman-Morrison (Moreno, 2014: 230). Si la matriz A es no singular y $1 + \mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u} \neq 0$, entonces

$$(A + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}\mathbf{u}(A^{-1}\mathbf{v})^t}{1 + \mathbf{v}^t A^{-1}\mathbf{u}}.$$

En nuestro caso,

$$1 + \mathbf{v}^t(4I)^{-1}\mathbf{u} = 1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}^t\mathbf{u} = 1 - \frac{n}{4} \neq 0;$$

$$B^{-1} = (4I + \mathbf{u}\mathbf{v}^t)^{-1} = (4I)^{-1} - \frac{(4I)^{-1}\mathbf{u}\big((4I)^{-1}\mathbf{v}\big)^t}{1 + \mathbf{v}^t(4I)^{-1}\mathbf{u}} = \frac{1}{4}I - \frac{\frac{1}{16}\mathbf{u}\mathbf{v}^t}{1 + \frac{1}{4}\mathbf{v}^t\mathbf{u}} = \frac{1}{4}I - \frac{\frac{1}{16}}{1 - \frac{n}{4}}\mathbf{u}\mathbf{v}^t = \frac{1}{4}I - \frac{1}{4(4-n)}\mathbf{u}\mathbf{v}^t =$$

$$= \frac{1}{4}I + \frac{1}{4(n-4)}\begin{pmatrix} -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4(n-4)}\begin{pmatrix} n-5 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-5 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-5 \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 12.4. Es idéntico al ejercicio 6.4, de la página 22.

Mayo de 2016

Ejercicio 13.1. Se desea resolver la ecuación

$$x = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{16}\right),$$

de la que se sabe que tiene una única raíz α en $[0,1]$. Para ello se pretende utilizar una de las siguientes iteraciones

$$x^{(k+1)} = g_1\left(x^{(k)}\right) = \operatorname{tg}\left(x^{(k)} - \frac{\pi}{16}\right),$$

$$x^{(k+1)} = g_2\left(x^{(k)}\right) = \operatorname{arc\,tg}\left(x^{(k)}\right) + \frac{\pi}{16}.$$

¿Son convergentes a α las sucesiones generadas para valores iniciales en $[0,1]$? ¿Cuál de las dos es la más eficiente? Justificar las respuestas.

Ejercicio 13.2. Probar que para toda función g de clase C^{p+1} en un intervalo I, tal que

$$\frac{d^i g}{dx^i}(\alpha) = 0, \text{ para } i = 1, \dots, p, \quad \frac{d^{p+1}}{dx^{p+1}}(\alpha) \neq 0$$

para un punto fijo α de g, toda sucesión convergente $x^{(k+1)} = g\big(x^{(k)}\big)$ tiene $p+1$ como orden de convergencia.

Se considera la función

$$g(x) = x\left(1 + x^{\frac{1}{10}}\right)^{-10}$$

y la sucesión $\left\{x^{(k)}\right\}$ generada por aplicación sucesiva de g para un valor inicial $x^{(0)}$. Probar por inducción que si $x^{(0)} = 1$, la sucesión está definida por

$$x^{(k)} = (1+k)^{-10}.$$

¿Es superlineal la convergencia de esta sucesión?

Ejercicio 13.3. Se considera el siguiente esquema

$$x_{n+1} = -x_n + x_{n-1} + x_{n-2} + 2h(f_n + f_{n-1}).$$

(a) Determinar si el esquema es consistente.

(b) Determinar si el esquema es cero-estable.

Ejercicio 13.4. Similar al ejercicio 125 (Moreno, 2014: 303). Calcular la solución aproximada del siguiente problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + 5u = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = \frac{706}{87}$$

usando un método de diferencias finitas centrado con paso $h = \frac{1}{12}$.

Solución del ejercicio 13.1. Estudiamos la función $g_1(x)$, de clase C^1 en $[0,1]$. Su derivada es

$$g_1'(x) = \frac{1}{\cos^2\left(x - \frac{\pi}{16}\right)},$$

y sabemos que

$$g_1'(x) \geqslant 1, \ \forall x \in [0,1]; \quad g_1'(x) > 1, \ \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{16}\right) \cup \left(\frac{\pi}{16}, 1\right].$$

En particular, y como $\alpha \neq \frac{\pi}{16}$, podemos garantizar que $|g_1'(\alpha)| > 1$ y por tanto, teniendo en cuenta la observación 6.2 (Quarteroni *et al.*, 2000: 259) sabemos que el método del punto fijo asociado a $g_1(x)$ es divergente para cualquier $x^{(0)} \in [0,1]$ (excepto, por supuesto, en el caso trivial en que $x^{(0)} = \alpha$).

Estudiamos la función $g_2(x)$, de clase C^∞ en $[0,1]$. Su derivada es

$$g_2'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

y sabemos que

$$\frac{1}{2} \leqslant g_2'(x) \leqslant 1, \ \forall x \in [0,1];$$

por lo que $g_2(x)$ es una función creciente en $[0,1]$. Sean $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{16}\right]$ y $x \in [\varepsilon, 1]$. Entonces,

$$g_2'(x) \leqslant \frac{1}{1+\varepsilon^2} < 1, \ \forall x \in [\varepsilon, 1].$$

Además, por ser $g_2(x)$ creciente en $[0,1]$,

$$g_2(\varepsilon) = \operatorname{arc\,tg} \varepsilon + \frac{\pi}{16} = \frac{1}{1+\varepsilon^2} + \frac{\pi}{16} > \frac{\pi}{16} \geqslant \varepsilon;$$

$$g_2(1) = \operatorname{arc\,tg} 1 + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{16} = \frac{5\pi}{16} < 1;$$

$$x \in [\varepsilon, 1] \Longrightarrow \varepsilon \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow \varepsilon < g_2(\varepsilon) \leqslant g_2(x) \leqslant g_2(1) < 1 \Longrightarrow g_2(x) \in [\varepsilon, 1].$$

Por tanto, y según el teorema de la contracción de Banach (Moreno, 2014: 192), el método del punto fijo asociado a la función g_2 es convergente en el intervalo $[\varepsilon, 1]$, y consecuentemente será convergente a la raíz α buscada para cualquier valor inicial $x^{(0)} \in (0,1]$. Y si $x^{(0)} = 0$ se tiene que

$$x^{(1)} = g(x^{(0)}) = g(0) = \operatorname{arc\,tg} 0 + \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16} \in (0,1],$$

lo que también nos garantiza la convergencia del método. El mismo teorema de la contracción nos garantiza que

$$\frac{1}{1+\alpha^2} = g'(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \frac{x^{(k+1)} - \alpha}{x^{(k)} - \alpha} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x^{(k+1)} - \alpha|}{|x^{(k)} - \alpha|} = \mu \Longrightarrow \mu \in (0,1),$$

y sabemos que la convergencia es lineal.

Solución del ejercicio 13.2. Teorema 30 (Moreno, 2014: 197). Si escribimos el desarrollo de Taylor de la función g de orden p en torno al punto α obtenemos

$$g(x) = g(\alpha) + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n!} \frac{d^n g}{dx^n}(\alpha)(x-\alpha)^n + \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi)(x-\alpha)^{p+1} = \alpha + \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi)(x-\alpha)^{p+1},$$

siendo ξ un punto del intervalo de extremos x y α. Entonces, para $k \geqslant 0$,

$$x_{k+1} = g(x_k) = \alpha + \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi_k)(x_k-\alpha)^{p+1} \Longrightarrow x_{k+1} - \alpha = \frac{1}{(p+1)!} \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi_k)(x_k-\alpha)^{p+1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|^{p+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(p+1)!} \left| \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\xi_k) \right| = \frac{1}{(p+1)!} \left| \frac{d^{p+1} g}{dx^{p+1}}(\alpha) \right|.$$

□

Demostramos por inducción la propiedad pedida. Para el caso trivial,

$$x_0 = (1+0)^{-10} = 1.$$

Y si la propiedad es cierta para $k \geqslant 0$,

$$x_k = (1+k)^{-10} \Longrightarrow x_{k+1} = g(x_k) = x_k \left(1 + x_k^{\frac{1}{10}}\right)^{-10} = (1+k)^{-10} \left(1 + \left((1+k)^{-10}\right)^{\frac{1}{10}}\right)^{-10} =$$

$$= (1+k)^{-10} \left(1 + (1+k)^{-1}\right)^{-10} = (1+k)^{-10} \left(1 + \frac{1}{1+k}\right)^{-10} = (1+k)^{-10} \left(\frac{2+k}{1+k}\right)^{-10} = (2+k)^{-10} = \left(1+(k+1)\right)^{-10}.$$

□

Estudiamos la convergencia de la sucesión $\{x_k\}$. Para ello calculamos los valores de α y μ,

$$\alpha = \lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} (1+k)^{-10} = 0;$$

$$\mu = \lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|x_k - \alpha|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\left| \frac{1}{(2+k)^{10}} - 0 \right|}{\left| \frac{1}{(1+k)^{10}} - 0 \right|} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1+k}{2+k}\right)^{10} = 1.$$

Y en este caso la convergencia es sublineal.

Solución del ejercicio 13.3.

(a) Analizamos la consistencia del método aplicando el teorema 43 (Moreno, 2014: 270). Para ello, tabulamos los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$	$\mathbf{i}^3$
1	1	3	9	27
1	1	2	4	8
-1	1	1	1	1
-1	1	0	0	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	0	4	12	34

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$
0	1	3	9
2	1	2	4
2	1	1	1
0	1	0	0
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	4	6	10

Como se verifica

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 = 0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 = -4+4=0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^2 + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^1 = -12+2\cdot 6=0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^3 + 3\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^2 = -34+3\cdot 10=-4\neq 0; \end{cases}$$

sabemos que el esquema es consistente y tiene orden de consistencia dos.

(b) El primer polinomio característico es $\rho(r) = r^3 + r^2 - r - 1$, y sus raíces son

$$\rho(r) = 0 \Longrightarrow r^3+r^2-r-1=0 \Longrightarrow r^2(r+1)-(r+1)=0 \Longrightarrow (r^2-1)(r+1)=0 \Longrightarrow (r+1)^2(r-1)=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} r=-1 & \text{doble,} \\ r=1 & \text{simple.} \end{cases}$$

Dado que hay una raíz con módulo uno y multiplicidad dos, $r=-1$, el esquema no satisface el criterio de la raíz, por lo que según el teorema 45 (Moreno, 2014: 277) no es cero-estable.

Solución del ejercicio 13.4. El esquema habitual en diferencias para resolver la ecuación es de la forma

$$-\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2} + 5u_i = 0, \quad i=1,2,\ldots,N-1; \quad u_0=1, \quad u_N=\frac{706}{87}.$$

Y teniendo en cuenta que $h=\frac{1}{12}$,

$$-u_{i+1} + \frac{293}{144}u_i - u_{i-1} = 0, \quad i=1,2,\ldots,11; \quad u_0=1, \quad u_{12}=\frac{706}{87}.$$

El polinomio característico de la ecuación en diferencias y sus raíces son

$$-\lambda^2 + \frac{293}{144}\lambda - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-\frac{293}{144} \pm \sqrt{\left(\frac{293}{144}\right)^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-1)}}{2\cdot(-1)} = \frac{293\pm\sqrt{2905}}{288}.$$

Y la solución general de la ecuación en diferencias viene dada por

$$u_i = c_1\left(\frac{293+\sqrt{2905}}{288}\right)^i + c_2\left(\frac{293-\sqrt{2905}}{288}\right)^i.$$

Imponemos las condiciones de contorno,

$$u_0 = 1 \Longrightarrow c_1 + c_2 = 1,$$

$$u_{12} = \frac{706}{87} \Longrightarrow c_1\left(\frac{293+\sqrt{2905}}{288}\right)^{12} + c_2\left(\frac{293-\sqrt{2905}}{288}\right)^{12} = \frac{706}{87},$$

y resolviendo el sistema anterior (con ayuda de un ordenador) se obtiene

$$u_i = \left(\frac{1}{2} + \frac{156682382373654716107553954 11\sqrt{2905}}{229108682343196905881532915 9170}\right)\left(\frac{293+\sqrt{2905}}{288}\right)^i +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} - \frac{15668238237365471610755395411\sqrt{2905}}{2291086823431969058815329159170}\right)\left(\frac{293-\sqrt{2905}}{288}\right)^i, \quad i=0,1,\ldots,12.$$

Junio de 2016

Ejercicio 14.1. Se considera la ecuación

$$3x^2 - \log(x+1) - 1 = 0.$$

Se pide:

(a) Separar las raíces positivas de la ecuación mediante intervalos acotados.

(b) Aplicar el método de regula falsi a la aproximación de la menor raíz positiva (basta con calcular la primera iteración).

(c) ¿Es monótona la sucesión generada por el método de regula falsi partir del tercer término?

Ejercicio 14.2. Enunciar el teorema de Ostrowski relativo a las raíces de un sistema de ecuaciones no lineales. ¿Se puede aplicar el teorema de Ostrowski al punto fijo $(1,1)$ de la función

$$\begin{aligned} G_1(x,y) &= x^2 - 3y^2 + 3, \\ G_2(x,y) &= 2x^3 + 3y^2 - 4? \end{aligned}$$

Ejercicio 14.3. Ejercicio 106 (Moreno, 2014: 257). Calcular el determinante de la matriz $n \times n$ tridiagonal

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

donde α y β son constantes positivas tales que $\alpha > 2\beta$.

Ejercicio 14.4. Diseñar un esquema lineal de 2 pasos de la forma

$$x_{n+1} = x_n + h(b_2 f_{n+1} + b_1 f_n + b_0 f_{n-1})$$

que sea de orden 3.

Solución del ejercicio 14.1.

(a) Consideramos la función f de clase C^1 definida por

$$f(x) = 3x^2 - \log(x+1) - 1,$$

y estudiamos su monotonía.

$$f'(x) = 6x - \frac{1}{x+1};$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 6x - \frac{1}{x+1} = 0 \Longrightarrow 6x = \frac{1}{x+1} \Longrightarrow 6x(x+1) = 1 \Longrightarrow 6x^2 + 6x - 1 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4\cdot 6\cdot(-1)}}{2\cdot 6} = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{12} = \frac{-3 \pm \sqrt{15}}{6}.$$

$$f'(x) < 0,\ \forall x \in \left[0, \frac{-3+\sqrt{15}}{6}\right); \quad f'(x) > 0,\ \forall x \in \left(\frac{-3+\sqrt{15}}{6}, +\infty\right).$$

Entonces la función f es decreciente en el intervalo $\left[0, \frac{-3+\sqrt{15}}{6}\right)$ y creciente en el intervalo $\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{6}, +\infty\right)$. Además,

$$f(0) = -1 < 0, \quad f\left(\frac{-3+\sqrt{15}}{6}\right) < f(0) < 0, \quad f(1) = 2 - \log 2 > 0.$$

El teorema de Bolzano (Moreno, 2014: 188) nos garantiza que existe al menos una raíz en el intervalo $\left[\frac{-3+\sqrt{15}}{6}, 1\right]$, y el estudio de la monotonía de la función nos garantiza que esta es la única raíz positiva de la función.

(b) Como se ha visto, la menor raíz positiva está contenida en el intervalo $[0, 1]$. Llamamos

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 1,$$

y ya sabemos del apartado anterior que $f(a_0)f(b_0) < 0$. Las iteraciones del método regula falsi se construyen mediante la expresión

$$x_{k+1} = b_k - \frac{b_k - a_k}{f(b_k) - f(a_k)} f(b_k)$$

siendo

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1} & \text{si } f(a_{k-1})f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} b_{k-1} & \text{si } f(b_{k-1})f(x_k) < 0, \\ x_k & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En nuestro caso, la primera iteración es

$$x_1 = b_0 - \frac{b_0 - a_0}{f(b_0) - f(a_0)} f(b_0) = 1 - \frac{1-0}{f(1) - f(0)} f(1) =$$

$$= 1 - \frac{1-0}{(2 - \log 2) - (-1)}(2 - \log 2) = 1 - \frac{2 - \log 2}{3 - \log 2} = \frac{1}{3 - \log 2} \simeq 0,433491028.$$

Para la segunda iteración habría que tomar

$$a_1 = \begin{cases} a_0 & \text{si } f(a_0)f(x_1) < 0, \\ x_1 & \text{en otro caso;} \end{cases} \qquad b_1 = \begin{cases} b_0 & \text{si } f(b_0)f(x_1) < 0, \\ x_1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y así, proceder de forma análoga para obtener

$$x_2 = b_1 - \frac{b_1 - a_1}{f(b_1) - f(a_1)} f(b_1).$$

Mediante una sencilla tabla de Excel se pueden obtener cuantas iteraciones sean necesarias:

k	a_k	b_k	x_{k+1}	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$f(x_{k+1})$
0	0,0000	1	0,4335	−1,0000	1,3069	−0,7964
1	0,4335	1	0,6480	−0,7964	1,3069	−0,2399
2	0,6480	1	0,7026	−0,2399	1,3069	−0,0513
3	0,7026	1	0,7138	−0,0513	1,3069	−0,0101
4	0,7138	1	0,7160	−0,0101	1,3069	−0,0020
5	0,7160	1	0,7164	−0,0020	1,3069	−0,0004
6	0,7164	1	0,7165	−0,0004	1,3069	−0,0001
7	0,7165	1	0,7165	−0,0001	1,3069	0,0000

(c) La función f es de clase C^2 en $[0, 1]$ y verifica

$$f''(x) = 6 - \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \ \forall x \in [0, 1].$$

Y como la derivada segunda de f no se anula, del teorema 33 (Moreno, 2014: 202) se deduce que un extremo del intervalo generado se mantiene constante (en nuestro caso $b_k = b_0 = 1$) y la sucesión generada es monótona y convergente a la raíz buscada.

Solución del ejercicio 14.2. Es idéntico al ejercicio 1.2, de la página 2.

Solución del ejercicio 14.3. Sea $x_n = \det A_n$. Desarrollando x_n por adjuntos de la primera fila obtenemos una ecuación en diferencias homogénea.

$$x_n = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & -\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{vmatrix} + \beta \begin{vmatrix} -\beta & -\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha x_{n-1} - \beta^2 x_{n-2} \Longrightarrow x_n - \alpha x_{n-1} + \beta^2 x_{n-2} = 0.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta^2 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-(-\alpha) \pm \sqrt{(-\alpha)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2}}{2 \cdot 1} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2}.$$

Como, por hipótesis

$$0 \leqslant 2\beta < \alpha \Longrightarrow 0 \leqslant 4\beta^2 < \alpha^2 \Longrightarrow \alpha^2 - 4\beta^2 > 0,$$

hay dos raíces reales y distintas,

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2};$$

y la solución general de la ecuación es de la forma

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n.$$

Imponemos las condiciones iniciales,

$$x_1 = \alpha \Longrightarrow \alpha = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2,$$

$$x_2 = \begin{vmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta^2 \Longrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2.$$

Podemos simplificar el sistema sabiendo que λ_1 y λ_2 verifican la ecuación característica,

$$\alpha^2 - \beta^2 = c_1\lambda_1^2 + c_2\lambda_2^2 \Longrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = c_1(\alpha\lambda_1 - \beta^2) + c_2(\alpha\lambda_2 - \beta^2) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \alpha(c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2) - \beta^2(c_1 + c_2) \Longrightarrow \alpha^2 - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2(c_1 + c_2) \Longrightarrow c_1 + c_2 = 1.$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones resultante

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} c_1 & + & c_2 & = & 1, \\ \lambda_1 c_1 & + & \lambda_2 c_2 & = & \alpha; \end{array} \right.$$

obtenemos

$$c_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}; \quad c_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Por tanto,

$$x_n = \det A_n = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}} \left[\left(\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta^2}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Solución del ejercicio 14.4. El esquema propuesto es cero-estable puesto que su primer polinomio característico, $\rho(r) = r^2 - r$, tiene por raíces $r = 0$ y $r = 1$, ambas con multiplicidad uno.

Para imponer que además sea consistente con el problema dado aplicamos el teorema 43 (Moreno, 2014: 270), tabulando a continuación los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$	$\mathbf{i}^3$	$\mathbf{i}^4$
1	1	2	4	8	16
-1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}^m$	0	1	3	7	15

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$	$\mathbf{i}^3$
b_0	1	2	4	8
b_1	1	1	1	1
b_2	1	0	0	0
$\mathbf{b} \cdot \mathbf{i}^m$	$b_0 + b_1 + b_2$	$2b_0 + b_1$	$4b_0 + b_1$	$8b_0 + b_1$

Para que el esquema sea consistente y orden tres ha de verificarse

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}^0 = 0, \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}^1 + \mathbf{b} \cdot \mathbf{i}^0 = -1 + b_0 + b_1 + b_2 = 0, \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}^2 + 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{i}^1 = -3 + 2(2b_0 + b_1) = 0, \\ -\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}^3 + 3\mathbf{b} \cdot \mathbf{i}^2 = -7 + 3(4b_0 + b_1) = 0; \end{array} \right.$$

y en ese caso

$$b_0 = \frac{5}{12},\ b_1 = \frac{2}{3},\ b_2 = -\frac{1}{12}.$$

Además,

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^4 + 4\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^3 = -15 + 4(8b_0 + b_1) = -15 + 4\left(8\cdot\frac{5}{12} + \frac{2}{3}\right) = 11 \neq 0,$$

para los coeficientes calculados el esquema tiene exactamente orden tres.

Por último, y aplicando el teorema 46 (Moreno, 2014: 280), dado que el esquema es cero-estable y consistente de orden tres, también será convergente de orden tres. El esquema pedido es el esquema de Adams-Moulton de dos etapas e implícito:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1}).$$

Septiembre de 2016 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 15.1.

(a) Enunciar y probar el teorema de Cauchy para la acotación de raíces de ecuaciones polinómicas.

(b) Acotar en módulo, superior e inferiormente, las raíces de la ecuación

$$\varepsilon x^7 + 2x^2 - 1 = 0,$$

donde ε es un parámetro positivo destinado a tender a 0.

Ejercicio 15.2. Se considera la sucesión de polinomios definida por la siguiente recurrencia de tres términos

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad \ldots, \quad p_{n+1}(x) = 4xp_n(x) - 4p_{n-1}(x).$$

Encontrar una expresión de $p_n(x)$ interpretando la relación anterior como una ecuación en diferencias para cada $x \in [-1, 1]$.

Ejercicio 15.3. Determinar el valor de α para el que el siguiente esquema

$$x_{n+1} - (1-\alpha)x_n - \alpha x_{n-1} = (1+\alpha)hf_n$$

sea consistente con el siguiente problema de valor inicial

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad \text{para todo } t \in I,$$

y su orden sea máximo.

Ejercicio 15.4. Para resolver el problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + u^3 = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad u(0) = 1, \quad u(1) = 1$$

se usa el siguiente esquema en diferencias finitas

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + u_i^3 = 0,$$

para $i = 1, 2, 3$, con paso $h = \frac{1}{4}$. Expresar estas ecuaciones como un sistema no lineal de ecuaciones y aplicar el método de Newton partiendo de la solución constante $u_i = 1$ para $i = 0, \ldots, 4$ (basta con efectuar una iteración).

Solución del ejercicio 15.1.

(a) Teorema de Cauchy (Moreno, 2014: 211). Todas las raíces de un polinomio

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \; a_n \neq 0$$

están en el círculo del plano complejo

$$\Gamma = \left\{ z \in \mathbb{C} : \; |z| < 1 + \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right| \right\}.$$

Demostración. Sea

$$\eta = \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left| \frac{a_i}{a_n} \right|.$$

Para una raíz arbitraria z del polinomio se tiene que

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \Longrightarrow z^n = -\left(\frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} \right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |z|^n = \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} z + \frac{a_0}{a_n} \right| \leqslant \eta \left(|z|^{n-1} + \cdots + |z| + 1 \right) = \eta \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1}.$$

Si $|z| \geqslant 1 + \eta$ entonces se cumple

$$|z|^n \leqslant |z|^n - 1$$

lo cual es imposible. $\square$

(b) Aplicando el teorema anterior,

$$\eta = \text{máx}\left\{\left|\frac{0}{\varepsilon}\right|, \left|\frac{0}{\varepsilon}\right|, \left|\frac{0}{\varepsilon}\right|, \left|\frac{0}{\varepsilon}\right|, \left|\frac{2}{\varepsilon}\right|, \left|\frac{0}{\varepsilon}\right|, \left|\frac{-1}{\varepsilon}\right|\right\} = \frac{2}{\varepsilon}.$$

Por tanto, si α es una raíz de la ecuación dada,

$$|\alpha| < 1 + \eta = 1 + \frac{2}{\varepsilon};$$

y si $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$-1 - \frac{2}{\varepsilon} < \alpha < 1 + \frac{2}{\varepsilon}.$$

Solución del ejercicio 15.2. Sea $x \in [-1,1]$, y para cada $n \geqslant 0$ llamamos $y_n = p_n(x)$. Entonces se verifica la siguiente ecuación en diferencias,

$$y_0 = 1, \; y_1 = x, \; y_{n+1} = 4xy_n - 4y_{n-1}.$$

La ecuación característica es

$$\lambda^2 - 4x\lambda + 4 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-(-4x) \pm \sqrt{(-4x)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{4x \pm 4\sqrt{x^2-1}}{2} = 2\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right).$$

Separamos en función de los valores de x, puesto que tenemos dos posibilidades distintas:

- Si $x \in (-1,1)$, existe un único $\theta \in (-\pi, \pi)$ tal que

  $$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{1-x^2}, \; \cos\theta = x.$$

  Entonces podemos escribir las raíces de la ecuación característica de la forma

  $$\lambda = 2x \pm 2i\sqrt{1-x^2} = 2(\cos\theta \pm i \operatorname{sen}\theta),$$

  y por tanto, la solución general de la ecuación es

  $$y_n = 2^n(c_1 \cos\theta n + c_2 \operatorname{sen}\theta n).$$

  Imponemos las condiciones iniciales

  $$y_0 = 1 \Longrightarrow c_1 = 1; \quad y_1 = x = \cos\theta \Longrightarrow 2c_1\cos\theta + 2c_2 \operatorname{sen}\theta = \cos\theta.$$

  Obtenemos

  $$c_1 = 1, \quad c_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\theta;$$

  y por tanto

  $$y_n = p_n(x) = 2^n\left(\cos\theta n - \frac{1}{2}\operatorname{cotg}\theta \operatorname{sen}\theta n\right),$$

  siendo $\theta = \arccos x$.

- Y si $x \in \{-1,1\}$ la ecuación característica tiene una raíz doble, $\lambda = 2x$. Por tanto,

  $$y_n(x) = (c_1 + c_2 n)(2x)^n.$$

  Imponemos las condiciones iniciales,

  $$y_0 = 1 \Longrightarrow c_1 = 1, \quad y_1 = x \Longrightarrow (c_1 + c_2)2x = x \Longrightarrow c_1 + c_2 = \frac{1}{2};$$

  y obtenemos

  $$c_1 = 1, \; c_2 = -\frac{1}{2}.$$

  En este caso la solución buscada es

  $$y_n = p_n(x) = \frac{1}{2}(2-n)(2x)^n.$$

Solución del ejercicio 15.3. Para imponer que el esquema sea consistente con el problema dado aplicamos el teorema 43 (Moreno, 2014: 270), tabulando a continuación los cálculos necesarios.

$\mathbf{a}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$	$\mathbf{i}^3$
α	1	2	4	8
$1-\alpha$	1	1	1	1
-1	1	0	0	0
$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^m$	0	$1+\alpha$	$1+3\alpha$	$1+7\alpha$

$\mathbf{b}$	$\mathbf{i}^0$	$\mathbf{i}^1$	$\mathbf{i}^2$
0	1	2	4
$1+\alpha$	1	1	1
0	1	0	0
$\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^m$	$1+\alpha$	$1+\alpha$	$1+\alpha$

El esquema es consistente puesto que independientemente del valor del parámetro α se verifica

$$\begin{cases} \mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^0 = 0, \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^1 + \mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^0 = -(1+\alpha)+(1+\alpha) = 0. \end{cases}$$

Para que sea de orden dos,

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^2 + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^1 = -(1+3\alpha)+2(1+\alpha) = 0 \Longrightarrow 1-\alpha = 0 \Longrightarrow \alpha = 1;$$

y en ese caso

$$-\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}^3 + 3\mathbf{b}\cdot\mathbf{i}^2 = -(1+7\alpha)+3(1+\alpha) = 2-4\alpha = -2 \neq 0.$$

Por tanto, el esquema propuesto es consistente y tiene orden máximo dos cuando $\alpha = 1$.

Solución del ejercicio 15.4. Para $h = \frac{1}{4}$ el esquema propuesto es

$$-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} + \frac{1}{16}u_i^3 = 0, \quad i = 1,2,3; \quad u_0 = u_4 = 1.$$

Esto conduce al sistema no lineal de ecuaciones:

$$\begin{cases} -u_2 + 2u_1 - 1 + \dfrac{1}{16}u_1^3 = 0, \\[2ex] -u_3 + 2u_2 - u_1 + \dfrac{1}{16}u_2^3 = 0, \\[2ex] -1 + 2u_3 - u_2 + \dfrac{1}{16}u_3^3 = 0. \end{cases}$$

Para aplicar el método de Newton reescribimos el sistema de la forma $F(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, siendo

$$F(\mathbf{u}) = F(u_1,u_2,u_3) = \left(-u_2 + 2u_1 - 1 + \frac{1}{16}u_1^3, -u_3 + 2u_2 - u_1 + \frac{1}{16}u_2^3, -1 + 2u_3 - u_2 + \frac{1}{16}u_3^3\right);$$

$$F'(\mathbf{u}) = F'(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} 2+\frac{3}{16}u_1^2 & -1 & 0 \\ -1 & 2+\frac{3}{16}u_2^3 & -1 \\ 0 & -1 & 2+\frac{3}{16}u_3^2 \end{pmatrix}.$$

Partimos del punto $\mathbf{u}^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, u_3^{(0)}) = (1,1,1)$, y calculamos el valor de $\mathbf{u}^{(1)} = (u_1^{(1)}, u_2^{(1)}, u_3^{(1)})$ resolviendo la siguiente ecuación

$$F'(\mathbf{u}^{(0)})(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(0)}) = -F(\mathbf{u}^{(0)}).$$

Calculamos los términos necesarios

$$F(\mathbf{u}^{(0)}) = F(1,1,1) = \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}\right); \quad F'(\mathbf{u}) = F'(u_1,u_2,u_3) = \begin{pmatrix} \frac{35}{16} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{35}{16} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{35}{16} \end{pmatrix}.$$

Y entonces,

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(0)} - \left(F'(\mathbf{u}^{(0)})\right)^{-1} F(\mathbf{u}^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{35}{16} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{35}{16} & -1 \\ 0 & -1 & \frac{35}{16} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{15504}{24955} & \frac{256}{713} & \frac{4096}{24955} \\ \frac{256}{713} & \frac{560}{713} & \frac{256}{713} \\ \frac{4096}{24955} & \frac{256}{713} & \frac{15504}{24955} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{51}{713} \\ \frac{67}{713} \\ \frac{51}{713} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{662}{713} \\ \frac{646}{713} \\ \frac{662}{713} \end{pmatrix}.$$

Septiembre de 2016 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 16.1. Aplicar el método de Sturm para separar todas las raíces del polinomio

$$p(x) = x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{16}.$$

Ejercicio 16.2. Ejercicio 91 (Moreno, 2014: 230). Aproximar una solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, \\ x + y &= 1, \end{aligned}$$

usando el método de Broyden con punto de partida $\left(x^{(0)}, y^{(0)}\right) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ (basta con calcular la primera iteración).

Ejercicio 16.3. Se considera la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{n+1} - \alpha x_n - \beta x_{n-1} + \alpha\beta x_{n-2} = 0,$$

donde α y β representan dos constantes positivas. Se consideran las tres soluciones correspondientes a los tres grupos de datos iniciales

$$x_0 = 1,\ x_1 = 0,\ x_2 = 0; \quad x_0 = 0,\ x_1 = 1,\ x_2 = 0; \quad x_0 = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Determinar las soluciones correspondientes a estos datos iniciales dependiendo de los parámetros α y β.

Ejercicio 16.4. Ejercicio 114 (Moreno, 2014: 282). Se considera el siguiente problema de valor inicial:

$$y' = xy, \quad y(0) = 1.$$

Comparar la solución obtenida en $x = 0,5$ al usar un método de Euler implícito con paso $h = 0,1$ y la solución exacta.

Solución del ejercicio 16.1. Aplicamos el teorema de Cauchy (Moreno, 2014: 211),

$$\eta = \text{máx}\left\{\frac{5}{2}, \frac{9}{16}\right\} = \frac{5}{2},$$

y sabemos que las raíces reales del polinomio $p(x)$ están en el intervalo $\left[-\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right]$, aunque por simplificar las operaciones trabajaremos con el intervalo $I = [-4, 4]$.

Aplicamos también el algoritmo de Euclides a los polinomios $p_0(x) = p(x)$ y $p_1(x) = p'(x)$, y obtenemos la sucesión de polinomios de Sturm:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{16}, \\ p_1(x) &= 4x^3 - 5x, \\ p_2(x) &= \frac{5}{4}x^2 - \frac{9}{16}, \\ p_3(x) &= \frac{16}{5}x, \\ p_4(x) &= \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

Estudiamos los signos que toman los polinomios de Sturm en los subintervalos enteros de I, y contamos las veces que estos cambian. Los resultados se recogen en la siguiente tabla:

x	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	cambios
-4	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
-3	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
-2	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	4
-1	$-$	$+$	$+$	$-$	$+$	3
0	$+$		$-$		$+$	2
1	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	1
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0

No seguimos con la inspección, puesto que ya se han encontrado las cuatro raíces del polinomio. Hay exactamente una raíz en cada uno de los intervalos siguientes: $[-2,-1]$, $[-1,0]$, $[0,1]$ y $[1,2]$.

Solución del ejercicio 16.2. La solución del sistema dado es la misma que la de la ecuación no escalar $F(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, siendo

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-1 \\ x+y-1 \end{pmatrix}.$$

La iteraciones del método de Broyden vienen dadas por la expresión

$$J_k\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = -F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right).$$

Es adecuado calcular la primera matriz de la sucesión $\{J_k\}$ como la matriz jacobiana de F en el punto inicial. Otenemos a continuación dicha matriz J_0, junto con su inversa.

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad J_0 = F'(x_0,y_0) = F'\left(1,\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad J_0^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la primera iteración del método de Broyden será

$$J_0\left(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right) = -F\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \Longrightarrow \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} - J_0^{-1}F\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Para la segunda iteración, calculamos directamente la matriz J_1^{-1} a partir de J_0^{-1} usando la fórmula de Sherman-Morrison (Moreno, 2014: 230),

$$J_1^{-1} = J_0^{-1} - \frac{J_0^{-1}\mathbf{u}^{(1)}\left(J_0^{-1}\mathbf{v}^{(1)}\right)^t}{1+\left(\mathbf{v}^{(1)}\right)^t J_0^{-1}\mathbf{u}^{(1)}};$$

siendo

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{F\left(\mathbf{x}^{(1)}\right) - F\left(\mathbf{x}^{(0)}\right) - J_0\left(\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right)}{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|}, \quad \mathbf{v}^{(1)} = \frac{\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}}{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|}.$$

Calculamos,

$$\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}; \quad \left\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4};$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{10}}\left[\begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}\right] = \frac{4}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \frac{5}{8} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{v}^{(1)} = \frac{4}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$J_0^{-1}\mathbf{u}^{(1)} = \frac{5}{2\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{5}{2\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$J_0^{-1}\mathbf{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix};$$

$$J_0^{-1}\mathbf{v}^{(1)}\left(J_0^{-1}\mathbf{v}^{(1)}\right)^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix};$$

$$1+\left(\mathbf{v}^{(1)}\right)^t J_0^{-1}\mathbf{u}^{(1)} = 2;$$

$$J_1^{-1} = J_0^{-1} - \frac{J_0^{-1}\mathbf{u}^{(1)}\left(J_0^{-1}\mathbf{v}^{(1)}\right)^t}{1+\left(\mathbf{v}^{(1)}\right)^t J_0^{-1}\mathbf{u}^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{15}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{9}{8} \end{pmatrix}.$$

Solución del ejercicio 16.3. Es idéntico al ejercicio 11.2, de la página 41.

Solución del ejercicio 16.4. En primer lugar hallamos la solución exacta del problema en el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$\frac{dy}{dx} = xy \Longrightarrow \frac{dy}{y} = x\,dx \Longrightarrow \log|y| = \frac{1}{2}x^2 + K',\ K' \in \mathbb{R} \Longrightarrow y = Ke^{\frac{x^2}{2}},\ K \in \mathbb{R};$$

$$y(0) = 1 \Longrightarrow Ke^0 = 1 \Longrightarrow K = 1;$$

$$y(x) = e^{\frac{x^2}{2}},\ \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right];$$

$$y(0,5) = e^{\frac{0,5^2}{2}} \simeq 1,133148453.$$

El esquema para el método de Euler implícito es

$$y_{n+1} = y_n + hf_{n+1} = y_n + hx_{n+1}y_{n+1};$$

y teniendo en cuenta que $x_{n+1} = (n+1)h$,

$$y_{n+1} = y_n + hx_{n+1}y_{n+1} = y_n + h^2(n+1)y_{n+1} \Longrightarrow y_{n+1}\big(1 - (n+1)h^2\big) = y_n \Longrightarrow y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - (n+1)h^2}.$$

La aproximación buscada es el término y_5 de la ecuación en diferencias

$$y_{n+1} = \frac{y_n}{0,99 - 0,01n}, \quad y_0 = 1;$$

o análogamente

$$y_{n+1} = \frac{100y_n}{99 - n}, \quad y_0 = 1.$$

Por tanto,

$$y(0,5) \simeq y_5 = \frac{100}{95} \cdot \frac{100}{96} \cdot \frac{100}{97} \cdot \frac{100}{98} \cdot \frac{100}{99} \cdot 1 \simeq 1,165124024.$$

Mayo de 2017

Ejercicio 17.1. Para aproximar una raíz positiva de la ecuación

$$4x - e^x - 1 = 0$$

se desea utilizar el método de regula falsi. Se pide:

(a) Separar las raíces positivas de la ecuación mediante intervalos acotados.

(b) Aplicar el método de regula falsi a la aproximación de la menor raíz positiva (basta con calcular la primera iteración).

(c) ¿Es monótona la sucesión generada por el método de regula falsi partir del tercer término?

Ejercicio 17.2. Se desea aplicar el método del gradiente con máximo descenso para encontrar el mínimo de la función

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Describir la primera iteración del método si se toma como punto inicial $x^{(0)} = (1,1)$.

Ejercicio 17.3. Determinar todos los valores del parámetro α para los cuales el esquema

$$x_{n+1} + \alpha x_n - \alpha x_{n-1} - x_{n-2} = \frac{\alpha+3}{2}h(f_n + f_{n-1}),$$

donde $h > 0$ es el tamaño del paso, es cero-estable. Explicar el concepto de cero-estabilidad y los principales resultados teóricos relacionados con este concepto.

Ejercicio 17.4. Encontrar el menor autovalor λ del problema de contorno

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = \lambda u, \quad u(0) = u(1) = 1,$$

usando el siguiente esquema en diferencias finitas:

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i,$$

para $i = 1, \ldots, N-1$, donde $h = \frac{1}{N}$.

Solución del ejercicio 17.1. Es idéntico al ejercicio 2.1, de la página 6.

Solución del ejercicio 17.2. Es idéntico al ejercicio 5.2, de la página 19.

Solución del ejercicio 17.3. Factorizamos el primer polinomio característico de la ecuación, $\rho(r)$, en función de los valores del parámetro α.

$$\rho(r) = r^3 + \alpha r^2 - \alpha r - 1.$$

Independientemente del valor del parámetro, una de sus raíces es $r = 1$, cosa que se comprueba fácilmente aplicando la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & \alpha & -\alpha & -1 \\ 1 & & 1 & 1+\alpha & 1 \\ \hline & 1 & 1+\alpha & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

Podemos encontrar el resto de las raíces resolviendo la ecuación de segundo grado

$$r^2 + (1+\alpha)r + 1 = 0 \Longrightarrow r = \frac{-(1+\alpha) \pm \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2}.$$

- Si $\alpha \leqslant -3$, todas las raíces del primer polinomio característico son reales, y la de mayor módulo será
$$r = \frac{-(1+\alpha) + \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2},$$
siendo dicho módulo
$$\left|\frac{-(1+\alpha) + \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2}\right| = \frac{|1+\alpha| + \sqrt{|1+\alpha|^2 - 4}}{2} > \frac{|1+\alpha|}{2} \geqslant 1.$$
En este caso no se satisface el criterio de la raíz, porque o bien hay una raíz con módulo superior a 1 o bien hay una raíz doble con módulo 1, por lo que teniendo en cuenta el teorema 45 (Moreno, 2014: 277) el esquema no es cero-estable en este caso.

- Si $-3 < \alpha < 1$ el polinomio tiene dos raíces complejas conjugadas, que son
$$-\frac{1+\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{4-(1+\alpha)^2}}{2} i,$$
y que tienen por módulo
$$\sqrt{\left(-\frac{1+\alpha}{2}\right)^2 + \left(\pm\frac{\sqrt{4-(1+\alpha)^2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1+\alpha)^2 + 4 - (1+\alpha)^2}{4}} = 1.$$
En este caso hay tres raíces distintas, con módulo 1 y simples, por lo que esquema satisface el criterio de la raíz, y por tanto es cero-estable.

- Y si $\alpha \geqslant 1$, todas las raíces del polinomio son reales, y la de mayor módulo será
$$r = \frac{-(1+\alpha) - \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2},$$
siendo dicho módulo
$$\left|\frac{-(1+\alpha) - \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2}\right| = \frac{1+\alpha + \sqrt{(1+\alpha)^2 - 4}}{2} > \frac{1+\alpha}{2} \geqslant 1.$$
En este caso no se satisface el criterio de la raíz, porque o bien hay una raíz con módulo superior a 1 o bien hay una raíz doble con módulo 1, por lo que es esquema no es cero-estable en este caso.

En resumen, el esquema propuesto será cero-estable si $\alpha \in (-3, 1)$.

Un esquema multipaso de la forma
$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_{\hat{\imath}+n} + h \sum_{i=0}^{k} b_i f_{\hat{\imath}+n}, \quad \hat{\imath} = i - k + 1;$$
es cero-estable en el problema de valor inicial
$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad x(t_0) = x_0,$$
si para todo $\varepsilon > 0$ existen constantes positivas C y h_0 tales que para todo $0 < h < h_0$ se cumple que
$$|z_n - x_n| \leqslant C\varepsilon$$
para todo $n \leqslant N_h$ siendo $N_h = \max\{n :\ t_n \in I\}$ y donde z_n representa la solución del sistema perturbado
$$z_{n+1} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i z_{\hat{\imath}+n} + h \sum_{i=0}^{k} b_i f_{\hat{\imath}+n} + h\delta_{n+1},$$
con las condiciones iniciales perturbadas
$$z_j = x_j + \delta_j,$$
para $j = 0, \ldots, k-1$, siempre que las perturbaciones verifiquen que $|\delta_n| \leqslant \varepsilon$ para todo $n \geqslant 0$.

El concepto de cero-estabilidad permite determinar si los errores que se producen en las aproximaciones (δ_k, $j = 0, \ldots, k-1$) y los que se producen en el curso de los cálculos (δ_j, $j \geqslant k$) vuelven inestables los cálculos posteriores.

Los principales resultados teóricos relacionados con la cero-estabilidad de un esquema multipaso son:

- Teorema 45 (Moreno, 2014: 277). Para un esquema lineal multipaso consistente con el problema de valor inicial
$$\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t)\big), \quad x_0(t_0) = x_0,$$
la condición de la raíz es equivalente a la cero-estabilidad.

- Teorema 46 (Moreno, 2014: 280). Un método multipaso es convergente si y solo si es consistente y satisface la condición de la raíz. Además, si el esquema es consistente de orden q, es convergente de orden q.

Solución del ejercicio 17.4. El problema dado es un problema de Sturm-Liouville, cuyos autovalores son los valores del parámetro λ para los que exista una solución no trivial.

El esquema dado conduce al siguiente sistema de ecuaciones:
$$u_0 = u_N = 1;$$
y para $i = 1, 2, \ldots, N-1$;
$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \lambda u_i \Longrightarrow -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} - \lambda h^2 u_i = 0 \Longrightarrow -u_{i+1} + (2 - \lambda h^2)u_i - u_{i-1} = 0.$$
Entonces,
$$\begin{cases} (2-\lambda h^2)u_1 - u_2 = 1, \\ -u_1 + (2-\lambda h^2)u_2 - u_3 = 0, \\ -u_2 + (2-\lambda h^2)u_3 - u_4 = 0, \\ \ldots \\ -u_{N-3} + (2-\lambda h^2)u_{N-2} - u_{N-1} = 0, \\ -u_{N-2} + (2-\lambda h^2)u_{N-1} = 1. \end{cases}$$
Con la notación habitual, la matriz de coeficientes del sistema es
$$A^h + D^h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2-\lambda h^2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda h^2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2-\lambda h^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2-\lambda h^2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2-\lambda h^2 \end{pmatrix},$$
y teniendo en cuenta el lema 5 (Moreno, 2014: 295), sus autovalores serán
$$\delta_j^h = \frac{1}{h^2}\left(2 - \lambda h^2 + 2\cos\frac{j\pi}{N}\right), \quad j = 1, 2, \ldots, N-1.$$
Para que el sistema de ecuaciones obtenido tenga más de una solución, su matriz de coeficientes ha de tener determinante nulo, y en ese caso, al menos uno de los valores propios ha de ser nulo. Supongamos que esto ocurre para un valor $j = k$,
$$\delta_k^h = 0 \Longrightarrow \frac{1}{h^2}\left(2 - \lambda h^2 + 2\cos\frac{k\pi}{N}\right) \Longrightarrow \lambda = \frac{2 + \cos\frac{k\pi}{N}}{h^2}.$$
Y para que λ sea el menor posible ha de ser $k = N-1$, por lo que
$$\lambda = \frac{2 + \cos\frac{(N-1)\pi}{N}}{h^2} = \frac{2 + \cos(1-h)\pi}{h^2} = \frac{2 - \cos\pi h}{h^2}.$$

Fórmulas que se dan en los exámenes

- Método de Muller

$$x = x^{(k)} - \lambda_k f\left(x^{(k)}\right)$$

$$\lambda_k = \frac{2}{\delta_k \mp \sqrt{\delta_k^2 - 4f\left(x^{(k)}\right) f\left[x^{(k)}, x^{(k-1)}, x^{(k-2)}\right]}}$$

- Método de Broyden

$$J_k\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = -F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$$

$$J_k^{-1} = J_{k-1}^{-1} - \frac{J_{k-1}^{-1}\mathbf{u}^{(k)}\left(J_{k-1}^{-1}\mathbf{v}^{(k)}\right)^t}{1 + \mathbf{v}^{(k)} \cdot J_{k-1}^{-1}\mathbf{u}^{(k)}}$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \frac{F\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) - F\left(\mathbf{x}^{(k-1)}\right) - J_{k-1}\left(\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\right)}{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|}$$

$$\mathbf{v}^{(k)} = \frac{\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}}{\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\|}$$

- Problemas de valor inicial

Nombre		Esquema
Euler	(1 etapa, explícito)	$x_{n+1} = x_n + hf_n$
Euler	(1 etapa, implícito)	$x_{n+1} = x_n + hf_{n+1}$
Punto medio	(2 etapas, explícito)	$x_{n+1} = x_{n-1} + 2hf_n$
Trapecios	(1 etapa, implícito)	$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$
Simpson	(2 etapas, implícito)	$x_{n+1} = x_{n-1} + \frac{h}{3}(f_{n+1} + 4f_n + f_{n-1})$
Adams-Bashforth	(2 etapas, explícito)	$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}(3f_n - f_{n-1})$
Adams-Moulton	(2 etapas, implícito)	$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{12}(5f_{n+1} + 8f_n - f_{n-1})$

- Autovalores

$$A_n = \begin{pmatrix} b & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & c \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \end{pmatrix} \qquad \lambda_j = b + 2\sqrt{ac}\cos\frac{j\pi}{n+1}$$

Referencias bibliográficas

Moreno González, Carlos, *Introducción al Cálculo Numérico*, Madrid (ES), Universidad Nacional de Educación a Distancia, 2014, isbn 978-84-362-6634-4, 309 p.

Quarteroni, Alfio; Sacco, Riccardo; Saleri, Fausto, *Numerical Mathematics*, New York (US), Springer-Verlag, 2000, isbn 0-387-98959-5, 654 p.

Quarteroni, Alfio; Saleri, Fausto, *Cálculo científico con MATLAB y Octave*, Milano (IT), Springer-Verlag, 2006, isbn 978-88-470-0503-7, 329 p.

Stoer, Josef; Burlisch, Roland, *Introduction to Numerical Analysis*, 2nd ed., New York (US), Springer-Verlag, 1993, isbn 0-387-97878-X, 660 p.