Prueba de Evaluación Continua
Topología. Curso 2017-18

Sea R el conjunto de los números reales y sea Z el conjunto de los números enteros. Se considera el espacio topológico (R, T), siendo

$$T = \{ \emptyset , R\} \cup \{ A \subset R \mid R - A \text{ es un conjunto numerable} \}.$$

a) Calcular el interior de Z.
b) Calcular la adherencia de Z.
c) Calcular la frontera de Z.
d) Estudiar si (R,T) es de Hausdorff.
e) Estudiar si en (R,T) existe un conjunto D denso en (R,T) y numerable.

Solución:
a) El interior sería el $\emptyset$, ya que cualquier subconjunto de Z, es numerable y por lo tanto su complementario no puede ser numerable.

b) Como Z es un conjunto numerable, R – Z es abierto, luego Z es cerrado y su adherencia sería él mismo.

c) Como la frontera es la adherencia menos el interior, sería Z.

d) No es de Haudorff. Dados dos puntos distintos $x \neq y$, si G es un abierto que contiene a x entonces $G = R - A_1$, y si H es un abierto que contiene a y entonces $H = R - A_2$. Luego $G \cap H = R - (A_1 \cup A_2) \neq \emptyset$.

e) Si D es un conjunto numerable, entonces R – D es un abierto de la topología y por lo tanto $(R - D) \cap D = \emptyset$. Luego D no es denso en (R,T).