❋ Junio 2018 ❋

❋ Semana 1 ❋

Ejercicio 1) **(2 puntos)** Probar que si f es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tal que

$$(y+1)\frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

entonces f es constante.

Solución. *Las curvas características son $y = kx - 1$, con lo que las soluciones de esta ecuación son de la forma*

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y+1}{x}\right). \tag{1}$$

*(***1pt***) por llegar esa expresión de las soluciones;* **(1pt)** *por argumentar a partir de esa expresión que las soluciones son constantes:) Dado un punto $p = (x_0, y_0)$ con $x_0 \neq 0$, sea*

$$\Gamma_p := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = \frac{y_0+1}{x_0}x - 1 \text{ y } x \neq 0\} = \{\frac{y_0+1}{x_0}x - 1\} \setminus \{(0,-1)\}.$$

O sea, Γ_p es la recta que pasa por $(0,-1)$ y por (x_0,y_0), quitándole el punto $(0,-1)$. De (1) se tiene que $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ para todo $(x,y) \in \Gamma_p$. Como en Γ_p hay sucesiones con límite $(0,-1)$, se sigue de la continuidad de f que $f(x_0,y_0) = f(0,-1)$. O sea $f(x_0,y_0) = f(0,-1)$ siempre que $x_0 \neq 0$; otra vez por continuidad de f se tiene que $f(x_0,y_0) = f(0,-1)$ para todo $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, es decir, f es constante.

Ejercicio 2) **(4 puntos)** utilizando el método de variables separadas, hallar la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} + 2tu = 0, \quad x \in (0, \frac{1}{2}), \quad t > 0 \\ u(x,0) = 1 - 2x \\ u_x(0,t) = u(\frac{1}{2}, t) = 0 \end{cases}$$

Solución. *Pongamos una posible solución $u(x,t)$ como*

$$u(x,t) = F(x)G(t).$$

Sustituyendo en la edp se tiene que

$$F(x)(G'(t) + 2tG(t)) = F''(x)G(t)$$

y por tanto,

$$\frac{G'(t)}{G(t)} + 2t = \frac{F''(x)}{F(x)} = -\lambda$$

*(ya que la primera función sólo depende de t y la segunda de x). (**0,5pt** por llegar hasta aquí). Las condiciones son*

$$\begin{cases} 0 = u_x(0,t) = F'(0)G(t) & \text{y como } G \text{ no es constante igual a 0 se tiene que } F'(0) = 0 \\ 0 = u(\frac{1}{2},t) = F(\frac{1}{2})G(t) & \text{y como } G \text{ no es constante igual a 0 se tiene que } F(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

El problema edo en F es entonces

$$\begin{cases} F'' + \lambda F = 0 \\ F'(0) = F(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

*Los autovalores y autofunciones son $\lambda_n = ((2n+1)\pi)^2$ y $F_n(x) = \cos((2n+1)\pi x)$, con $n \in \mathbb{N}$ (**1pt** por hallar estas funciones) . Para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos la edo en G*

$$G_n' + (2t + \lambda_n)G_n = 0$$

Por tanto

$$\frac{G_n'}{G_n} = -(2t + \lambda_n)$$

o sea

$$(\log(G_n))' = -(2t + \lambda_n)$$

eso quiere decir que

$$G_n = C_n e^{-(t^2 + \lambda_n t)}.$$

*(**1pt** por hallar estas funciones). Las soluciones al problema inicial (sin la condición $u(x,0) = 1 - 2x$) son*

$$u(x,t) = F(x)G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-(t^2 + \lambda_n t)} \cos((2n+1)\pi x).$$

*(**0,5pt** por hallar estas funciones). Utilizando la condición $u(x,0) = 1 - 2x$ hallamos las constantes C_n:*

$$1 - 2x = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos((2n+1)\pi x),$$

por tanto (integrando por partes)

$$\begin{aligned} C_n :=& \frac{\langle 1-2x, \cos((2n+1)\pi x)\rangle}{\langle \cos((2n+1)\pi x), \cos((2n+1)\pi x)\rangle} = \frac{2}{1/2} \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)\cos((2n+1)\pi x)dx = \\ =& \frac{4(1-2x)}{(2n+1)\pi} \sin((2n+1)\pi x)\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{(2n+1)\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin((2n+1)\pi x)dx = \\ =& \frac{8}{((2n+1)\pi)^2} \end{aligned}$$

*Resumiendo, la solución es (**1pt** por hallar esta expresión)*

$$\boxed{u(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(t^2 + (2n+1)^2\pi^2 t)} \cos((2n+1)\pi x)} \tag{2}$$

EJERCICIO 3) **(4 puntos)** Sea $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

a) **(1 pt)** Hallar el desarrollo en cosenos de la función f en el intervalo $[0, \pi]$.

b) **(1 pt)** ¿En qué puntos del intervalo $[0, \pi]$ la serie en cosenos converge a $f(x)$?

c) **(2 pt)** Según los valores de $\lambda \in [0, 1]$ hallar las soluciones del siguiente problema

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = f(x), \quad x \in (0, \pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Solución. *a): Sea*

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

el desarrollo en serie en cosenos de f en $[0, \pi]$. Para cada $n \geq 0$ pongamos $y_n(x) := \cos(nx)$ y recordemos que en este contexto $\langle g, h \rangle := \int_0^\pi gh$. Entonces sabemos que

$$a_n = \frac{\langle f, y_n \rangle}{\langle y_n, y_n \rangle} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx = 0 & \textit{para } n = 0 \\ \frac{1}{\pi/2} \int_0^\pi f(x) \cos(nx) dx = \frac{4}{\pi n} \sin(n\frac{\pi}{2}) & \textit{para } n > 0. \end{cases}$$

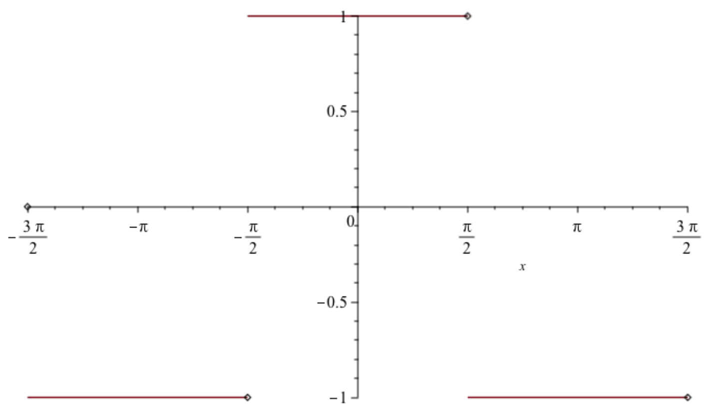
Por tanto,

$$a_n = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)} & \textit{si } n = 2k+1 \end{cases}$$

y

$$\boxed{S(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)x).}$$

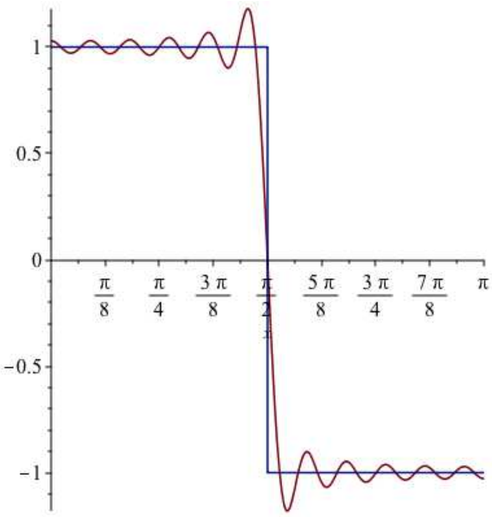
b) : La teoría general nos dice que $S(x) = f(x)$ para todo $x \in]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$, ya que en $\frac{\pi}{2}$ hay una discontinuidad, y para $\pi/2$ sabemos que $S(\pi/2) = (f_-(\pi/2) + f_+(\pi/2))/2 = 0$, donde $f_-(\pi/2)$ es el límite por la izquierda de $\pi/2$ de la función f, y $f_+(\pi/2)$ es el límite por la derecha. Como $f(\pi/2) = 1$, tenemos que $S(x) = f(x)$ para todo $x \in (0, \pi) \setminus \{\pi/2\}$. Estudiemos qué ocurre en $x = 0, \pi$ y vemos de dos maneras diferentes que $S(0) = f(0) = 1$ y $S(\pi) = f(\pi) = -1$: Si extendemos f de manera par a todo $\mathbb{R}$, tendremos una función continua en 0 y en π



Como $\cos(nx)$ *son siempre funciones pares, se tiene que* $S(0) = f(0) = 1$ *y* $S(\pi) = f(\pi) = -1$. *Otra manera es utilizar que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

y por tanto, $f(0) = 1 = S(0)$ *y* $f(\pi) = -1 = S(\pi)$. *Resumiendo,* $S(x) = f(x)$ *para todo* $x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$.



c): Se trata de discutir las soluciones de

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + \lambda y = f(x), \quad x \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\} \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{array} \right. \tag{3}$$

Se presupone que las soluciones del sistema tienen buenas propiedades de derivabilidad, por ejemplo que son de clase $C^1[0,\pi]$ *y con existencia de segunda derivada en todo el intervalo* $[0,\pi]$. *De esta manera se puede utilizar la teoría general. Veremos al final que sin asumir esto se pueden encontrar otras soluciones.*

Así que, para empezar supongamos que queremos encontrar soluciones y de clase $C^1[0,\pi]$ *y con existencia de derivada segunda en todo el intervalo* $[0,\pi]$. *El problema homogéneo*

$$\left\{ \begin{array}{l} y'' + \lambda y = 0, \quad x \in (0,\pi) \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{array} \right. \tag{4}$$

tiene como autofunciones y autovalores $y_n = \cos nx$, $\lambda_n = n^2$ *para todo* $n \geq 0$. *Entonces*

$\underline{\lambda \neq n^2 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}}$*: Pongamos una (posible) solución*

$$y(x) = \sum_n b_n \cos(nx).$$

Entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n(-n^2 + \lambda)\cos(nx) = \sum_n -b_n n^2 \cos(nx) + \sum_n b_n \lambda \cos(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \cos((2k+1)x).$$

Utilizando unicidad,

$$b_n = \begin{cases} 0 & \textit{para } n \in 2\mathbb{N} \\ \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)(\lambda-(2k+1)^2)} & \textit{para } n = 2k+1 \end{cases}$$

Así que la solución única en $[0,\pi] \setminus \{\pi/2\}$ *es*

$$\boxed{\widehat{y}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(\lambda-(2k+1)^2)} \cos((2k+1)x)} \tag{5}$$

$\underline{\lambda = n^2 \textit{ para un cierto } n \in \mathbb{N}}$*: Tenemos que estudiar*

$$\langle f, y_n \rangle = \int_0^\pi f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{n}\sin(n\frac{\pi}{2}) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \in 2\mathbb{N} \\ \neq 0 & \textit{si } n \in 2\mathbb{N}+1. \end{cases}$$

Por tanto, si $\lambda = n^2$ *para un cierto* $n \in 2\mathbb{N}$*, entonces*

$$\boxed{y(x) = \widehat{y}(x) + c\cos(nx)} \tag{6}$$

es solución para todo $c \in \mathbb{R}$*, y si* $\lambda = n^2$ *para un cierto* $n \in 2\mathbb{N}+1$*, entonces no hay solución de la clase que queremos.*

■ *Supongamos ahora que* y *no es necesariamente "suave": Primero supongamos que* $\lambda = n^2$ *para cierto* $n \in \mathbb{N}$*,* $n \neq 0$*; las funciones*

$$\boxed{y(x) := a\cos(nx) + \frac{1}{n^2}f(x)}$$

son solución al sistema (pero claramente no son suaves). Para $\lambda = 0$*, las funciones*

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} + c & \textit{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{x^2}{2} + \pi x + c & \textit{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

son solución de (3)*. Supongamos ahora que* $\lambda \neq n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*. Necesitamos introducir notación: para cada* $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$*, sea* y_c *la solución suave (de clase* $C^1[0,\pi]$*, y con segunda derivada en todo punto de* $[0,\pi]$*) de*

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = c \cdot f(x), & x \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\} \\ y'(0) = y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Es decir,

$$y_c(x) = \frac{4 \cdot c}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(\lambda-(2k+1)^2)} \cos((2k+1)x). \tag{7}$$

Entonces cada función

$$\boxed{z_c(x) := y_c(x) + \frac{1-c}{\lambda}f(x)}$$

es solución de (4)*:* $z_c' = y_c'$ *(salvo en* $\pi/2$*), así que* $z_c'(0) = z_c'(\pi) = 0$*, mientras que*

$$z_c'' + \lambda z_c = y_c'' + \lambda y_c + (1-c)f = cf + (1-c)f = f \qquad \text{en } [0,\pi] \setminus \{\pi/2\}.$$

Veamos que $z_c \neq z_d$ *si* $c \neq d$*: En caso contrario,* $y_c - y_d = (d-c)/\lambda f$ *y por tanto,* $0 = y_c(\pi/2) - y_d(\pi/2) = d - c/\lambda$ *y por tanto* $c = d$ *(lo que implica, por continuidad, que* $z_c \neq z_d$ *en* $[0,\pi] \setminus \{\pi/2\}$ *si* $c \neq d$*). Así que quitando la condición de suavidad tenemos siempre infinitas soluciones.*