Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (3 puntos)
Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo tal que $N \geq 2$. Sea $F_N = \big\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\colon \sum_{n=1}^{N} x_n = 0\big\}$.

a) Demuestre que F_N es un subespacio vectorial cerrado de $\ell^2(\mathbb{N})$.

b) Demuestre que $F_N^{\perp} = \big\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\colon\ x_1 = x_2 = \cdots = x_N \text{ y } x_n = 0 \text{ si } n > N\big\}$.

c) Sea $\mathbf{e}_1 = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $a_1 = 1$ y $a_n = 0$ para todo $n \geq 2$. Calcule la distancia de $\mathbf{e}_1$ a F_N.

Solución: a) F_N es subespacio vectorial de $\ell^2(\mathbb{N})$ pues si $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \in F_N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces $\alpha x + \beta y \in F_N$ ya que $\sum_{n=1}^{N}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^{K} x_n + \beta \sum_{n=1}^{N} y_n = 0$. Para ver que F_N es cerrado basta observar que si $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en F_N que converge en $\ell^2(\mathbb{N})$ a x, siendo para cada k, $x^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots\}$ y $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, se tiene $\lim_k x_n^{(k)} = x_n$ y

$$\sum_{n=1}^{N} x_n = \sum_{n=1}^{N} \lim_k x_n^{(k)} = \lim_k \left(\sum_{n=1}^{N} x_n^{(k)}\right) = 0\,.$$

Notas: 1) También se puede demostrar que F_N es un subespacio vectorial cerrado viendo que la aplicación $T\colon \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{K}$ definida mediante $T\big(\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{n=1}^{N} x_n$ es un operador lineal (por tanto, el núcleo es subespacio vectorial) continuo (por tanto, el núcleo es cerrado). La continuidad se puede deducir de si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ entonces

$$|T(x)| = \Big|\sum_{n=1}^{N} x_n\Big| = \big|\langle x, \delta\rangle\big| \leq \|x\|_2 \|\delta\|_2 = \sqrt{N}\|x\|_2$$

donde se ha aplicado la desigualdad de Cauchy Schwarz a x y a δ, siendo δ la sucesión cuyos N primeros términos son unos y el resto ceros.
Obsérvese que el operador T es de la forma $T(x) = \langle x, y\rangle$ para $y = \delta$. En el ejemplo 6.15 se demostró que es un operador lineal y continuo. Lo anterior no es más que una demostración directa de la continuidad.

2) Otra forma de demostrar que F_N es un subespacio vectorial cerrado consiste en demostrar que $F_N = \{\delta\}^{\perp}$ y aplicar la proposición 2.33. Basta observar que

$$x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \{\delta\}^{\perp} \iff \langle x, \delta\rangle = 0 \iff \sum_{n=1}^{N} x_n = 0 \iff x \in F_N\,.$$

b) Veamos que $F_N^{\perp} = A := \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\colon x_1 = x_2 = \cdots = x_N \text{ y } x_n = 0 \text{ si } n > N\}$.
En efecto si $x = \{x_n\} \in A$ entonces $x_1 = x_2 = \cdots = x_N$ y $x_n = 0$ si $n > N$ e $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\} \in F_N$ entonces

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{N} x_n \overline{y_n} = x_1 \overline{\left(\sum_{n=1}^{N} y_n\right)} = 0$$

y por tanto $x \in F_N^{\perp}$.
Inversamente si $x \in F_N^{\perp}$, $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in F_N$. En particular, x es ortogonal a $v_1 = (1, -1, 0, \ldots)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0, \ldots)$, $\ldots$, y $v_{N-1} = (1, 0, \ldots, \overbrace{-1}^{\text{término } N}, 0, \ldots)$ y a todo $\mathbf{e}_n = \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^{\infty} \in F_N$ si $n > N$.
En consecuencia $x \in A$ pues se cumple que

$0 = \langle x, v_n\rangle = x_1 - x_{n+1} = 0$ si $n \leq N - 1$ y
$0 = \langle x, \mathbf{e}_n\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta_{n,k} = x_n$ si $n > N$.

c) Sea la descomposición ortogonal $\mathbf{e}_1 = x + y$ siendo $x \in F_N$ e $y \in F_N^{\perp}$.

Por el apartado b) $y = \alpha\delta = \{\overbrace{\alpha, \alpha, \cdots, \alpha}^{N}, 0 \cdots\}$ y en consecuencia $x = \mathbf{e}_1 - y = \{1-\alpha, -\alpha, \cdots, -\alpha, \overbrace{0}^{\text{término } N+1}, 0, \cdots\}$.

Como $x \in F_N$ resulta $1 - \alpha \overbrace{-\alpha, \cdots - \alpha}^{N-1 \text{ veces}} = 1 - N\alpha = 0$ Por tanto, $\alpha = 1/N$. Por último,

$$d(\mathbf{e}_1, F_N) = \|y\| = \frac{1}{N}\|\delta\|_2 = \frac{\sqrt{N}}{N}\,.$$

Pregunta 2 (2 puntos) Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ un sistema de $\mathcal{H}$ tal que

$$\forall n \in \{1, 2, \dots, N\},\ \|x_i\| \geq 1 \quad \text{y} \quad \forall x \in \mathcal{H},\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|\langle x, x_i\rangle\right|^2.$$

Demuestre que $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Solución: Para cada j aplicamos la igualdad a $x = x_j$ y se obtiene $\|x_j\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|\langle x_j, x_i\rangle\right|^2 = \left|\langle x_j, x_j\rangle\right|^2 + \sum_{i=1, i\neq j}^{N} \left|\langle x_j, x_i\rangle\right|^2$.

Por tanto,

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{N} \left|\langle x_j, x_i\rangle\right|^2 = \|x_j\|^2 - \|x_j\|^4 = \|x_j\|^2\big(1 - \|x_j\|^2\big)$$

Como $\sum_{i=1, i\neq j}^{N} \left|\langle x_j, x_i\rangle\right|^2 \geq 0$ y $\|x_j\|^2\big(1 - \|x_j\|^2\big) \leq 0$, pues por hipótesis $\|x_j\| \geq 1$, se tiene la igualdad si y sólo si $\sum_{i=1, i\neq j}^{N} \left|\langle x_j, x_i\rangle\right|^2 = 0$ y $1 - \|x_j\|^2 = 0$. Por tanto se cumple que $\langle x_j, x_i\rangle$ para todo $i \neq j$ y $\|x_j\| = 1$. Por tanto, $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ es un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$.

Por otro lado $\forall x \in \mathcal{H}$, si descomponemos ortogonalmente $x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, x_i\rangle x_i + y$ se cumple que $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|\langle x, x_i\rangle\right|^2 + \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|\langle x, x_i\rangle\right|^2 + \|y\|^2$. Pero por hipótesis, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left|\langle x, x_i\rangle\right|^2$. En consecuencia $y = 0$ y por tanto, $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sea $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos. Sea la aplicación:

$$\begin{aligned} T\colon \quad & \ell^2(\mathbb{N}) && \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ & x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} && \longmapsto T(x) = \{\alpha_n x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

a) Demuestre que el operador lineal T es acotado si y sólo si la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Determine en ese caso la norma de T.

b) Supongamos que $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. ¿Qué debe cumplir $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para que T sea un operador autoadjunto?

Solución: a) Supongamos que la sucesión $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Veamos que T es acotado. En efecto:

$$\|T(x)\|_2 = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 |x_n|^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} M^2 |x_n|^2\Big)^{1/2} = M\|x\|_2$$

siendo $M = \sup_n |\alpha_n|$. Además de la desigualdad anterior se deduce que $\|T\| \leq M$. Por otro lado, para $\mathbf{e}_j := \{\delta_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ se tiene que

$$\|T(\mathbf{e}_j)\| = \|\{0, \cdots, \alpha_j, 0, \cdots\}\| = |\alpha_j|$$

para todo j, por tanto

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| \geq \sup_j |\alpha_j| = M\,.$$

En consecuencia, $\|T\| = M$.

Recíprocamente, supongamos que T es acotado. Entonces, para todo $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ se tiene que

$$\|T(x)\|_2 \leq \|T\| \|x\|_2\|.$$

En particular $\|T(\mathbf{e}_n)\|_2 = |\alpha_j| \leq \|T\| \|\mathbf{e}_n\|_2\| = \|T\|$ para todo n y en consecuencia $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada.

b) El operador T es autoadjunto si y sólo si se cumple que

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T(y)\rangle \text{ para todo } x, y \in \ell^2(\mathbb{N}),$$

es decir,

$$\sum_n \alpha_n x_n \overline{y_n} = \sum_n x_n \overline{\alpha_n y_n} \text{ para todo } x, y \in \ell^2(\mathbb{N}).$$

En consecuencia, se debe cumplir que $\alpha_n = \overline{\alpha_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sabiendo que la transformada de Fourier de la función $g(t) = e^{-|t|}$ es $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$ se pide:

a) La transformada de Fourier de $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

b) La transformada de Fourier de $h(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2}$.
Indicación: calcule previamente una primitiva de h.

c) La transformada de Fourier de $k(t) = \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$.

d) La transformada de Fourier de $f^2(t) = \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$.
Indicación: exprese f^2 en función f y k.

Solución: a) Como $\widehat{g}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+\omega^2}$ por tanto $f(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\widehat{g}(t)$. En consecuencia, usando el corolario 7.26 a la función g continua y tal que $g, \widehat{g} \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene

$$\widehat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{\widehat{g}}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,g(-\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\omega|}.$$

b) Teniendo en cuenta que $h(t) = \dfrac{t}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{2}(1+t^2)'(1+t^2)^{-2}$ se tiene que $h(t) = -\dfrac{1}{2}f'(t)$. Por tanto, por el apartado 2 del teorema 7.18 aplicado a f, f' continuas y tales que $f, f' \in L^1(\mathbb{R})$ se obtiene

$$\widehat{h}(\omega) = -\frac{1}{2}\widehat{f'}(\omega) = -\frac{1}{2}(i\omega)\widehat{f}(\omega) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,i\omega e^{-|\omega|}.$$

c) Como $k(t) = t\dfrac{t}{(1+t^2)^2} = th(t)$ y $th(t) \in L^1(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\widehat{k}(\omega) = \widehat{th(t)}(\omega) = -i\widehat{h}'(\omega)$$

donde la segunda igualdad se debe al primer apartado del teorema 7.18. Por tanto,

$$\widehat{k}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\left(\omega e^{-|\omega|}\right)' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-|\omega|)e^{-|\omega|}.$$

La derivada de $\omega e^{-|\omega|}$ se ha obtenido derivando por separado en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$.

d) Basta observar que $\dfrac{1}{(1+t^2)^2} = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{t^2}{(1+t^2)^2}$, es decir $f^2(t) = f(t) - k(t)$. En consecuencia,

$$\widehat{f^2}(\omega) = \widehat{f}(\omega) - \widehat{k}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,e^{-|\omega|} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}(1-|\omega|)e^{-|\omega|} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\,e^{-|\omega|}\Big(1+|\omega|\Big)$$