Problema 1

Consideremos la matriz A sobre los números reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A) La matriz A tienen rango dos para todo valor de a y b.

B) Si $a \neq 0,$ entonces $rango(A) = 3$.

C) Si $a = b$, entonces $rango(A) = 2$.

Solución

La opción i) es falsa ya que si $a \neq b,$ entonces el $|A| = b - a \neq 0$ y el $rango\ A$ es 3.

La opción ii) es falsa, tomando $a = b = 1$, entonces el $|A| = 0$.

La opción III) es verdadera ya que $|A| = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$=1.

Problema 2

Sea $Ax^t = b^t$ un sistema de m ecuaciones con n incognitas.

i) Si $y^t \neq 0$ es solución del sistema, entonces $b^t \neq 0$.

ii) Si y^t y z^t son soluciones del sistema, entonces $1/2(y^t + z^t)$ es solución del sistema.

iii) Si y^t y z^t son soluciones del sistema, entonces $(y^t - z^t)$ es solución del sistema.

¿Cuántas de las anteriores afirmaciones son falsas?

A) Una

B) Dos

C) Las tres

Solución

La opción i) es falsa, ya que es un sistema homogeneo hay soluciones distintas de la cero.

La opción ii) es verdadera. En efecto,

$A(1/2(y^t + z^t)) = 1/2(Ay^t + Az^t) = 1/2(b^t + b^t) = b^t$

La opción iii) es falsa

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, tenemos que $y^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $z^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, pero $(y^t - z^t)$ no es solución del sistema.

Problema 3

Sean $A, B \in M_{nxn}(\mathbb{R})$. Entonces

i) Si $A^2 = A$, entonces $A^4 = A$.

ii) Si A es simétrica, entonces $A^2 = A$.

iii) Si $A^2 = A$ y $B^2 = B$, entonces $(A+B)^2 = A+B$.

¿Cuántas de las anteriores afirmaciones son verdaderas?

A) Una

B) Dos

C) Las tres

Solución

La opción i) es correcta puesto que $A^4 = A^2.A^2 = A.A = A^2 = A$.

La opción ii) es falsa, la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ es un contraejemplo.

La opción iii) es falsa ya que si $A.B \neq 0$, entonces $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2A.B = A + B + A.B + B.A \neq A + B$.

Problema 4

Consideremos el sistema de ecuaciones

$x + y + z = a$

$y + z = b$

$dz = c$

donde a, b, c y d son números reales. Entonces

i) Si $d \neq 0$, el sistema es compatible determinado.

ii) Si $d \neq 0$ y $c = 0$, entonces el sistema es incompatible.

ii) Si $d = c = 0$, entonces el sistema es compartible determinado.

¿Cuántas de las anteriores afirmaciones son verdaderas?

A) Una

B) Dos

C) Las tres.

Solución

La opción i) es correcta es muy facil encontrar la solución.

La opción ii) no es correcta porque el sistema es compatible determinado $z = 0$, $y = b$, $x = a - b$

La opción iii) no es correcta ya que compatible indeterminado.

Problema 5

Sea $A \in M_{3x3}(\mathbb{R})$ de forma que sólo tiene cuatro elementos no nulos. Entonces

i) Se verifica que el $rango(A) \geqslant 2$.

ii) Si el $rango(A) = 3$, entonces tres de los elementos no nulos están en la diagonal principal (la diagonal principal son los elementos a_{11}, a_{22}, a_{33}).

iii) Si ninguno de los cuatro elementos no nulos están en la diagonal principal, entonces el rango de A es < 3.

¿Cuántas de las anteriores afirmaciones son falsas?

A) Una
B) Dos
C) Las tres

Solución

La opción i) no es correcta puesto que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un contraejemplo.

La opción ii) no es correcta puesto que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un contraejemplo.

La opción iii) no es correcta puesto que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es un contraejemplo.