Cálculo de Probabilidades I — Febrero 2015 — Primera semana

Se extraen una a una, sin reposición, las bolas de una urna que contiene m rojas y n negras. Sea X el número de bolas rojas anteriores a la primera negra e Y el número de bolas rojas comprendidas entre la primera y la segunda negras.

a) Determinar la distribución de X.

b) Si se consideran las bolas rojas numeradas de 1 a m, calcular la probabilidad de que la bola roja i sea anterior a la primera negra. Deducir el valor esperado de X.

c) Calcular la probabilidad de que las bolas rojas i y j sean anteriores a la primera negra. Deducir el valor de la varianza de X.

d) Obtener la distribución conjunta de X e Y.

e) Probar que X e Y tienen la misma distribución. ¿Son independientes X e Y?

Solución

a) Será $X = x$ si aparecen x bolas rojas y, a continuación, una bola negra. Por tanto

$$\begin{aligned}
P\{X = x\} &= \frac{m}{n+m}\,\frac{m-1}{n+m-1}\cdots\frac{m-x+1}{n+m-x+1}\,\frac{n}{n+m-x} \\
&= \frac{m!}{(m-x)!}\,\frac{(n+m-x-1)!}{(n+m)!}\,n \\
&= \binom{n+m-x-1}{m-x}\Big/\binom{n+m}{m}
\end{aligned}$$

donde puede ser $x = 0, 1, 2, \ldots, m$.

b) Sea

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la bola roja } i \text{ es anterior a la primera negra,} \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

La probabilidad de que sea $X_i = 1$ sólo depende del orden en que aparecen las n bolas negras y la bola roja i, sin que importe el lugar en que aparecen las restantes bolas rojas. Así que

$$P\{X_i = 1\} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \quad \text{y} \quad E[X_i] = \frac{1}{n+1}.$$

Puesto que $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$, resulta

$$E[X] = \frac{m}{n+1}.$$

En el ejemplo 9.10 puede verse un método alternativo de cálculo, así como la comprobación de que el cálculo directo de $E[X]$ conduce al mismo resultado.

c) La probabilidad de que sea $X_i = 1$ y $X_j = 1$ no depende de la posición de las restantes bolas rojas, sino sólo de la ordenación de las n bolas negras y las rojas i y j. Por consiguiente

$$P\{X_i = 1, X_j = 1\} = \frac{2!n!}{(n+2)!} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} = E[X_i X_j].$$

Entonces

$$E[X^2] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i^2] + \sum_{i\neq j=1}^{m} E[X_i X_j] = \frac{m}{n+1} + \frac{2m(m-1)}{(n+1)(n+2)}$$

con lo cual

$$V(X) = \frac{m}{n+1} + \frac{2m(m-1)}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{m}{n+1}\right)^2 = \frac{mn(m+n+1)}{(n+1)^2(n+2)}$$

d) Para que sea $X = x$ e $Y = y$ tienen que aparecer primero x bolas rojas, seguidas de una negra y, después, otras y bolas rojas seguidas de otra negra. Así pues

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X = x, Y = y\} =& \frac{m}{n+m}\,\frac{m-1}{n+m-1}\cdots\frac{m-x+1}{n+m-x+1}\,\frac{n}{n+m-x}\times\\
& \frac{m-x}{n+m-x-1}\,\frac{m-x-1}{n+m-x-2}\cdots\frac{m-x-y+1}{n+m-x-y}\,\frac{n-1}{n+m-x-y-1}\\
&= \frac{m!}{(m-x-y)!}\,\frac{(n+m-x-y-2)!}{(n+m)!}\,n(n-1)\\
&= \binom{n+m-x-y-2}{m-x-y}\Big/\binom{n+m}{m}
\end{aligned}$$

donde $x, y \geq 0$ y $x + y \leq m$.

e) Según la identidad (I.12), la distribución marginal de Y es

$$\mathrm{P}\{Y = y\} = \sum_{x=0}^{m-y} \binom{n+m-y-1-x-1}{m-x-y}\Big/\binom{n+m}{m} = \binom{n+m-y-1}{m-y}\Big/\binom{n+m}{m}$$

para $0 \leq y \leq m$. Se trata de la misma distribución de X. La conclusión es inmediata sin ningún cálculo. En efecto, por cada ordenación de las $n + m$ bolas, en la que haya x bolas rojas anteriores a la primera bola negra e y bolas rojas entre la primera y la segunda bolas negras:

$$\underbrace{------}_{x}N_1\underbrace{----}_{y}N_2$$

intercambiando ambos grupos, se obtiene una ordenación con y bolas rojas anteriores a la primera negra y x bolas rojas entre la primera y la segunda negras:

$$\underbrace{----}_{y}N_2\underbrace{------}_{x}N_1$$

Luego X e Y tienen la misma distribución.
Por supuesto, X e Y no son independientes puesto que $X + Y \leq m$. De hecho

$$\mathrm{P}\{X = x, Y = y\} \neq \mathrm{P}\{X = x\}\,\mathrm{P}\{Y = y\}.$$

En resumen, las variables aleatorias X_i = *número de bolas rojas entre las bolas negras i e $i + 1$*, no son independientes pero tienen todas la misma distribución.