# Tema 1

## Problemas complementarios

**Ejercicio 1.** Clasificar todos los grupos de orden 4.

**Solución.** Si $G$ es un grupo de orden 4, todo elemento suyo ha de tener orden 2 o 4, por el teorema de Lagrange.

a) Si exite en $G$ algún elemento $a$ de orden 4, entonces el gubgrupo $\langle a\rangle$ generadopo$a$, tiene 4 elementos $\{1, a, a^2, a^3\}$ con lo que ha de coincidir con $G$, y éste es por tanto el grupo cíclico de orden 4.

b) Si no existe en $G$ ningún elemento de orden 4, todos los elementos, salvo el neutro, tienen orden 2, con lo que podemos escribir

$$G = \{1, a, b, c\} \text{ con } a^2 = b^2 = c^2 = 1.$$

Además como el producto $ab$ ha de ser un elemento de $G$ y no puede ser ni $a$ ni $b$, (ya que entonces se simplificaría una de las letras y quedaría la otra igualada a 1), se tiene

$$ab = c, \text{ y análogamente } ba = c. \qquad ((*))$$

De esta forma, el grupo $G$ está generado por $a$, $b$ : $G = \langle a, b\rangle$ ; como estos generadores conmutan entre sí, se concluye que $G$ es abeliano.

Multiplicando ahora la primera relación de $(*)$ por $a$ se tiene $a \cdot ab = ac$, lo que dice $ac = b$. Análogamente mutiplicando la segunda relaciónpor $b$ se obtiene $b \cdot ba = bc$, esto es $bc = a$.

Se obtiene así el 4-grupo de Klein, como aquel en que excluyendo al elemento neutro, todo elemento es de orden 2, y y el producto de dos de elementos cualesquiera es el tercero.

**Ejercicio 2.** Determinar todos los subgrupos finitos del grupo

$$G = Z \times Z/(2) \times Z/(2).$$

**Solución.** Sea $H$ un subgrupo de $G$. Supongamos que $(a, b, c) \in H$ con $a \in H \backslash \{0\}$. Entonces $\forall m \in Z^+$, se tiene que $(ma, mb, mc) \in H$, con lo que $H$ es infinito. De esta forma, los subgrupos finitos de $H$ son los subgrupos del grupo

$$\{0\} \times Z/(2) \times Z/(2).$$

Esto es, son los de la forma $\{0\} \times A$ donde $A$ es subgrupo del grupo finito $Z/(2) \times Z/(2)$. Los casos posibles son

$$\begin{aligned} A &= \{(0,0\}. \\ A &= \{(1,0),(0,0)\}. \\ A &= \{(0,1),(0,0)\}. \\ A &= \{(1,1).(0,0)\}. \\ A &= Z/(2) \times Z/(2). \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.** Sea $N$ un subgrupo de un grupo $G$ y $t \in G$ un elemento de orden finito

$$o(t) = r.$$

Sea $h$ el mínimo entero positivo $h$ tal que $t^h \in N$. Demostrar que $h$ existe y que divide a $r$.

**Solución.** Como $t^r = 1 \in N$, el conjunto

$$\{h \in Z^+ : \ t^h \in N\}$$

es distinto del vacío, y en consecuencia tiene un elemento mínimo $h$. Veamos que $h$ divide a $r$. Dividiendo $r$ entre $h$ tenemos $r = qh + s$ con $0 \leq s < h$. De esta forma

$$1 = t^r = t^{qh} t^s$$

de donde $t^s = t^{-qh} \in N$, con $s < h$; como $h$ es mínimo $s = 0$, con lo que $r = qh$.

**Ejercicio 4.** *Sea* $G = D_3$ el grupo de simetrías del triángulo equilátero. Determinar el centralizador

$$C_G(g).$$

**Solución.** Es $D_3 = \{1, f, f^2, g, gf, gf^2\}$, y por definición

$$C_G(g) = \{x \in D_3 : \ xg = gx\}.$$

Ciertamente $1 \in C_G(g)$, y $g \in C_G(g)$. Por otra parte, sabemos que se cumple

$$f^k \circ g \circ f^k = g, \text{ para } k = 1, 2.$$

En particular para, $k = 1$, tenemos $f \circ g \circ f = g$,esto es, $f \circ g = g \circ f^{-1} = g \circ f^2$,con lo que $f, f^2 \notin C_G(g)$. De esta forma, como $C_G(g)$ es un grupo y ya contiene a $g$, ha de ser $gf, gf^2 \notin C_G(g)$. Así concluimos, $C_G(g) = \{1, g\}$.

**Ejercicio 5.** *Sea* $G = D_4$ el grupo de simetrías del triángulo equilátero. Determinar el centralizador

$$C_G(g).$$

**Solución.** Es $D_4 = \{1, f, f^2, f^3, g, gf, gf^2, gf^3\}$. Obviamente $1 \in C_G(g)$, y $g \in C_G(g)$. Puesto que

$$f^k \circ g \circ f^k = g, \text{ para } k = 1, 2, 3$$

se tiene $f \circ g \circ f = g$, lo que implica $f \circ g = g \circ f^{-1} = g \circ f^3$, con lo que $f, f^2 \notin C_G(g)$, lo que implica que $gf, gf^2 \notin C_G(g)$ (pues $g$ sí pertenece a este grupo). Por otra parte $f^2 \circ g \circ f^2 = g$, lo que implica $f^2 \circ g = g \circ f^{-2} = g \circ f^2$. De esta forma $f^2 \in C_G(g)$ con lo que también $gf^2 \in C_G(g)$, y por tanto

$$C_G(g) = \{1, g, f^2, gf^2\}.$$

(Nótese que este grupo $C_G(g)$ no es otro que el 4-grupo de Klein: está generado por dos elementos de orden 2, que conmutan entre sí.)

**Ejercicio 6.** *Sean $A$, $B$ y $K$ subgrupos de un grupo $G$ tales que $A \subset B$, $A \cap K = B \cap K$ y $AK = BK$ entonces $A = B$.*

**Solución.** Puesto que $A \subset B$ para ver que de hecho $A = B$, bastará ver que tienen el mismo número de elementos. Ahora bien sabemos que:

$$\begin{aligned} card(AK) &= \frac{o(A)o(K)}{o(A \cap K)}, \\ card(BK) &= \frac{o(B)o(K)}{o(B \cap K)}, \end{aligned}$$

que junto con las condiciones del enunciado implica $o(A) = o(B)$ y se concluye.

**Ejercicio 7.** *Sea $G$ un grupo y supongamos que existe un entero positivo $n$ tal que la aplicación*

$$f : G \longrightarrow G : \ x \longmapsto x^n,$$

*es un automorfismo del grupo $G$. Probar que para todo $x \in G$, se tiene que $x^{n-1} \in Z(G)$.*

**Solución.** Sean $x, z \in G$, puesto que $f(xz) = f(x)f(z)$, se tiene que $(xz)^n = x^n z^n$, lo que simplificando la primera de las $x$ y la última de las $z$ proporciona $(zx)^{n-1} = x^{n-1}z^{n-1}$.

Así pues para probar el enunciado, hemos de ver que

$$x^{n-1}y = yx^{n-1},$$

para todo $y \in G$. Puesto que $f$ es un automorfismo, podemos escribir $y = z^n$, para cierto $z \in G$. Ahora

$$x^{n-1}y = x^{n-1}z^n = x^{-1}(xz)^n = z(xz)^{n-1},$$

y también

$$yx^{n-1} = z^n x^{n-1} = zz^{n-1}x^{n-1} = z(xz)^{n-1},$$

con ello se concluye.