084059

Código 405 ANALISIS MATEMATICO IV

Código 08 MATEMATICAS

Junio - 2007 | Duración: 120 min | Modelo: - Parcial: 2ª P.P.

Material:Ninguno | Hoja: 1 de 1

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P.JUNIO 1.SEMANA

1.Pregunta. Enunciar el Principio del Argumento.

2.Pregunta. Describir y demostrarlo cuales son las transformacciones fraccionarias lineales que transformen el círculo unidad sobre el círculo unidad.

3.Pregunta. Desarrollar la función

$$f(z) = \frac{z}{1+z^3},$$

a) En una serie de potencias positivas de z,
b) En una serie de potencias negativas de z.

Especificar en cada caso la región de convergencia.

4.Pregunta. Sea f analítica en un círculo $D(z_0, R_1)$ y supongamos que tiene por lo menos n ceros en un círculo $D(z_0, r)$, contando multiplicidades, donde $r < R_1$. Supongamos que $f(z_0) \neq 0$ y R es tal que $r < R < R_1$, demostrar que

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{\max\limits_{|z|\leq R} |f(z)|}{|f(z_0)|}.$$

Indicación: utilizar la fórmula de Jensen.

Duración del Examen: 2 horas

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2. P.P. JUNIO 2007. 1. SEMANA

1. PROBLEMA. Desarrollar la función

$$f(z) = \frac{z}{1+z^3}$$

a) en una serie de potencias positivas de z,

b) en una serie de potencias negativas de z.

Especificar en cada caso la región de convergencia.

SOLUCION

a) Para $|z|<1$, tenemos

$$f(z) = z\frac{1}{1-(-z^3)} = z\left(1+(-z)^3+(-z^3)^2+\ldots\right)$$

de tal forma que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{3n+1}.$$

b) Para $|z|>1$, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\frac{1}{1+1/z^3} = \frac{1}{z^2}\left(1+\left(\frac{-1}{z^3}\right)+\left(\frac{-1}{z^3}\right)^2+\ldots\right)$$

de donde $\displaystyle f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1/z\right)^{3n+2}$

2. PROBLEMA. Sea f analítica en un disco $D(z_0, R_1)$, y supongamos que tiene por lo menos n ceros en un disco $D(z_0, r)$, contando multiplicidades, donde $r < R_1$. Supongamos que $f(z_0) \neq 0$ y R es tal que $r < R < R_1$, demostrar que

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{\max\limits_{|z| \leq R} |f(z)|}{|f(z_0)|}.$$

SOLUCION

~~Co~~ Considerando la función $g(z) = f(z_0 + z)$, podemos suponer $z_0 = 0$.

Utilizando la fórmula de Jensen en $D(0, R)$

$$\log|f(0)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|\,d\theta + \sum_{\nu=1}^{n} \log\left|\frac{z_\nu}{R}\right|$$

donde z_ν, $\nu = 1, \dots, n$ son los ceros de f, obtenemos exponenciando

$$|f(0)| \leq \left(\max_{|z|\leq R} |f(z)|\right) \prod_{\nu=1}^{n} \left|\frac{z_\nu}{R}\right| \leq \max_{|z|\leq R} |f(z)| \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

de donde

$$\left(\frac{R}{r}\right)^n \leq \frac{\max\limits_{|z|\leq R} |f(z)|}{|f(0)|}$$

47362834 MARTÍNEZ MEANA, SOFÍA	Junio - 2007 2ª Semana	ANALISIS MATEMATICO IV (Código 405) CIENCIAS MATEMATICAS (Código 08) Hora de entrada: 09:00:00 Hora de entrega: 11:00:00 Examen Tipo: - Parcial: 2ª PP	Aula: AULA MAGNA Fila: 8 Columna: 7
A CORUÑA - (047000)			Hoja: 1 de 1
Material: Ninguno			

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. JUNIO 2007. 2.SEMANA

1.Pregunta. Se pide:
a) Definir la homotopía de caminos.
b) Enunciar la versión homotópica del Teorema de Cauchy.

2.Pregunta. Se pide
a) Enunciar el Problema de Dirichlet.
b) Enunciar el Teorema que proporciona la solución al Problema de Dirichlet en el círculo unidad.

3.Pregunta. Encontrar transformaciones fraccionarias lineales o de Möbius que transformen:
i) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = 2$ en $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = 0$
ii) $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = 1$ en $w_1 = 1$, $w_2 = 0$, $w_3 = \infty$.

4.Pregunta. Se pide:
i) Justificar que la integral

$$f(z) = \int_0^\infty \left(e^{-t} + t - 1\right) e^{-zt} dt,$$

converge para $\operatorname{Re} z > 0$.
ii) Encontrar una prolongación analítica de $f(z)$ sobre todo el plano complejo, salvo quizás posible singularidades aisladas.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2. P.P. JUNIO 2007, 2. SEMANA

1. PROBLEMA.

Encontrar transformaciones fraccionarias lineales o de Möbius que transformen

i) $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = 2$ en $w_1 = 1,\ w_2 = 0,\ w_3 = \infty$

ii) $z_1 = i,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1$ en $w_1 = 1,\ w_2 = 0,\ w_3 = \infty$

SOLUCION

i) $$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

$T(0) = \frac{b}{d} = 1$, podemos suponer $\boxed{b = 1}$ pues los coeficientes son únicos salvo un factor multiplicativo, por tanto concluimos $\boxed{d = 1}$

$$T(2) = \infty \Rightarrow c2 + d = c2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{c = -\frac{1}{2}}$$

finalmente

$$T(1) = 0 \Rightarrow a1 + b = a + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = -1}$$

es decir $$\boxed{T(z) = \frac{-z+1}{-\frac{z}{2}+1} = \frac{z-1}{\frac{z}{2}-1}}$$

ii) $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$

$T(1) = \infty \iff c+d=0 \iff c=-d$,

tomando $d=-1$, obtenemos

$\boxed{c=1,\ d=-1}$

Por otra parte

$T(-1) = 0 \iff -az+b=0 \iff a=b$

finalmente

$T(i) = \dfrac{ai+a}{i-1} = 1$;

se concluye $\boxed{a=i}$

luego $T(z) = i\left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)$

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV.

2. P. P. JUNIO 2007, 2. SEMANA. (CONTINUACION)

2. PROBLEMA. Se pide:

a) Justificar que la integral

$$f(z)=\int_0^\infty (e^{-t}+t-1)e^{-zt}dt$$

converge para $\operatorname{Re} z>0$.

b) Encontrar una prolongación analítica de $f(z)$ sobre todo el plano complejo, salvo posibles singularidades aisladas.

SOLUCION

a) Esto se sigue inmediatamente de la estimación

$$|(e^{-t}+t-1)e^{-zt}| \leq e^{-(\operatorname{Re} z-\varepsilon)t}$$

con $0<\varepsilon<\operatorname{Re} z$, y del hecho que $e^{-\alpha t}$, $\alpha>0$, son integrables.

b) Efectuando la integración obtenemos

$$\int_0^\infty (e^{-t}+t-1)e^{-zt}dt=\int_0^\infty e^{-(z+1)t}dt+\int_0^\infty te^{-zt}dt-\int_0^\infty e^{-zt}dt$$

$$=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z}=\frac{1}{z^2(z+1)},$$

que nos proporciona la prolongación buscada.

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. SEPTIEMBRE 2007

1.Pregunta. Probar la siguiente proposición. Sea f una función meromorfa en el abierto $A \subset \mathbb{C}$, con un número finito de polos $\alpha_1, .., \alpha_r$ de órdenes $m_1, .., m_r$, tal que la función $f - w$, con $w \in \mathbb{C}$, tiene un número finito de ceros $\beta_1, ..\beta_s$ de órdenes $l_1, .., l_s$. Entonces si γ es un camino cerrado y rectificable homótopo a cero en A, tal que $\gamma^* \subset A$ no contiene a ninguno de los polos ni ceros α_i, β_j se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - w} &= \sum_{j=1}^{s} l_j Ind_\gamma(\beta_j) \\ &- \sum_{i=1}^{r} m_i Ind_\gamma(\alpha_i). \end{aligned}$$

2.Pregunta. Enunciar sin demostración el Teorema de Monodromía.

3.Pregunta. Probar la relación $\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(z+n)^2}$.

Indicación: Utilizar la representación de $\Gamma(z)$ como producto infinito y tomar logaritmos.

4.Pregunta. Determinar la transformación fraccionaria lineal o de Möbius que transforma los puntos $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ en los puntos $w_1 = -1$, $w_2 = i$, $w_3 = 1$ respectivamente. Se pide:

i) Dar la expresión de esta transformación,

ii) Determinar la imagen de la circunferencia $C_2 = \{z \,||z| = 2\}$,

iii) Determinar la imagen del círculo $D_1 = \{z \,||z| < 1\}$.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2. P. P. SEPTIEMBRE 2007

1. PROBLEMA. Probar la relación

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

Indicación. Utilizar la representación Γ como producto infinito y tomar logaritmos.

SOLUCION

De la representación de Γ como producto infinito se obtiene

$$\frac{d(\log \Gamma(z))}{dz}=\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}=-\frac{1}{z}-\gamma+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{z+n}\right)$$

derivando otra vez se obtiene

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$$

2. PROBLEMA. Determinar la Transformación fraccionaria lineal o de Möbius que transforma los puntos $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -1$ en los puntos $w_1 = -1$, $w_2 = i$, $w_3 = 1$ respectivamente

i) Dar la expresión de esta transformación

ii) Determinar la imagen la circunferencia

$$C_2 = \{ z \mid |z| = 2 \}$$

iii) Determinar la imagen del circulo

$$D_1 = \{ z \mid |z| < 1 \}$$

SOLUCION.

i) Determinamos la ecuación de la forma

$$w = \frac{Az + B}{z + D}$$

dando valores

$z_1 = 1$, $w_1 = -1$, obtenemos $-1 = \dfrac{A + B}{1 + D}$

$z_2 = i$, $w_2 = i$, obtenemos $i = \dfrac{Ai + B}{i + D}$

$z_3 = -1$, $w_3 = 1$, obtenemos $1 = \dfrac{-A + B}{-1 + D}$

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV. 2. P.P. SEPTIEMBRE 2007 (CONTINUACION).

La primera y la última ecuación dan

$$\left.\begin{array}{l} A+B+D=-1 \\ -A+B-D=-1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{sumando}} 2B=-2 \Rightarrow \boxed{B=-1}$$

sustituyendo en la segunda obtenemos

$$(A-D)i=0 \Rightarrow A=D.$$

de donde finalmente $\boxed{A=0}$ $\boxed{B=-1}$, $\boxed{D=0}$

es decir la transformación buscada es

$$w=f(z)=-\frac{1}{z}$$

Luego

(ii) La imagen es $C_{\frac{1}{2}}=\{w \mid |w|=\frac{1}{2}\}$

(iii) $D_1^c=\{w \mid |w|>1\}$