1. Sea A un anillo unitario y conmutativo y $A[T]$ el correspondiente anillo de polinomios. Dado un elemento b de $A,$ denotaremos con (b) y con $bA[T]$ al ideal generado por b en A y en $A[T]$ respectivamente. Probar que se tiene un isomorfismo

$$A[T]/bA[T] \simeq A/(b)\,[T].$$

(2.5 puntos.)

Solución. Es [GR,(2.9.2), págs. 128,129].

2. Sea β una raíz del polinomio $f(T) = T^4 - 2$ y sea $\alpha = \beta^2 - \beta.$ Calcular el grado de la extensión

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[\beta]$$

y escríbase una base de $\mathbb{Q}[\beta]$ como $\mathbb{Q}$-espacio vectorial. Pruébese que el grado de la extensión

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[\alpha]$$

no puede ser 1 ni 2. Conclúyase que toda expresión polinómica en β es también una expresión polinómica en α.

(2.5 puntos)

Solución. Es el problema [FL,121].

3. Sea n un número entero no nulo. Probar que la ecuación diofántica lineal

$$nX + (5n+3)Y = 3$$

tiene solución si y sólo si $mcd(n,3) = 1$ o $3.$ Resolverla en el primer caso.

(2 puntos.)

Solución. Es el problema [FL, 38].

4. Consideremos el ideal $I = (2-i)$ en el anillo de los enteros de Gauss $Z[i].$ Probar que $A = Z[i]/(2-i)$ es un cuerpo y que además es isomorfo a $Z/(5)$.

(1.5 puntos.)

Solución. La primera parte es el problema [FL,17]. Así, como la característica de A es $5,$ se tiene una inyección de cuerpos

$$Z/(5) \overset{i}{\hookrightarrow} Z[i]/(2-i).$$

Veamos que i es además epiyectiva. Para no recargar la notación, denotemos con $a+bi$ a un elemento de $A.$ Entonces como

$$a+bi \equiv a+2b \bmod (2-i),$$

se tiene que $i(a+2b) = a+2b \equiv a+bi \bmod (2-i),$ y se concluye.

5. Consideremos la extensión de Galois

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow E$$

y sea f un polinomio irreducible en $\mathbb{Q}[T]$ de grado mayor o igual que dos. Probar que f o bien no tiene ninguna raíz en E o bien tiene al menos dos raíces.

(1.5 puntos.)

Solución. Sea $p(T) \in \mathbb{Q}[T]$ irreducible. Supongamos que $T_0 \in E$ es una raíz suya. Como T_0 no puede estar en $\mathbb{Q},$ por definición de extensión de Galois, existe $g \in G(E : \mathbb{Q})$ tal que $g(T_0) \neq T_0.$ Así, como $p(T_0) = 0,$ aplicando g se tiene

$$g\{p(T_0)\} = p(g(T_0)) \ = 0,$$

donde hemos usado que g deja fijos los coeficientes de $p(T)$ (ya que están en $\mathbb{Q}$).