Introducción a las Ecuaciones Diferenciales / Septiembre de 2018
Alumno..

Nota.- Simplificar al máximo la respuesta y remarcarla claramente (en un recuadro). Escribir también la solución (excepto las demostraciones) en los recuadros de esta hoja, que se debe entregar junto con el ejercicio.

1º) a) Integrar la ecuación diferencial
$(2xy^2 + y\cos x)dx + (3x^2y + 2senx)dy = 0$
mediante la determinación de un factor integrante. Se debe dar la respuesta en la forma $F(x,y) = k$, y decir cuál es el factor integrante que se considera. (Si no fuera posible, indicar por qué).

b) Determinar el valor de la constante $a > 0$ para que la parábola $y = 5x^2$ sea una trayectoria ortogonal a la familia de elipses $x^2 + ay^2 = r^2$ (siendo $r > 0$). (Si no fuera posible, indicar por qué).

2º) a) Resolver (expresando y como función de x) la ecuación diferencial $x(y')^2 - y = 1$. Se deben hallar todas las soluciones posibles, e indicar también cuál es el máximo intervalo abierto en que está definida cada solución.

b) Resolver (expresando y como función de x) la ecuación diferencial exacta $yy''' + 3y'y'' = e^x$.

3º) Hallar un intervalo abierto I y una función derivable $f : I \to R$ verificando que $0 \in I$, $f(0) = -1$; y en cada punto $P(x,y)$ de la gráfica de f, la normal a la gráfica corta al eje horizontal en un punto Q, que dista del eje vertical tres veces más que el punto P .

Hallar todas las soluciones posibles, expresando $y = f(x)$ como función de x, y exigiendo en cada caso que el intervalo abierto I sea el mayor posible.

Decir, en particular, si existe o no alguna solución del problema anterior que sea creciente en todo el intervalo I.

4º) Supongamos que $f : [0,4] \to R$ es una función continua. Demostrar que, si $0 \leq f(x) \leq 5 + 7\left|\int_2^x f(t)dt\right|$, para todo $x \in [0,4]$, entonces $f(x) \leq 5e^{7|x-2|}$, para todo $x \in [0,4]$. (Caso particular del Lema de Gronwall).

Soluciones (no se incluyen las comprobaciones, que son inmediatas):

1º) a) $x^2y^3 + y^2senx = k$, con el factor integrante $\mu = y$.
b) $a = 2$

2º) a) Las soluciones son:
$y = -1$, definida en $I = R$,
$y = x - 1$, definida en $I = R$,
$y = (A + \sqrt{x})^2 - 1$,. siendo $A \neq 0$, definida en $I =]0,\to[= \{x \in R/x > 0\}$,

$y = -(A + \sqrt{-x})^2 - 1,$. siendo $A \neq 0$, definida en $I =]\leftarrow, 0[= \{x \in R/x < 0\}$.

b) Las soluciones son de la forma

$y = \sqrt{2e^x + Ax^2 + Bx + C}$, o bien $y = -\sqrt{2e^x + Ax^2 + Bx + C}$,

siendo A, B y C constantes reales, definidas en
$I = \{x \in R/2e^x + Ax^2 + Bx + C > 0\}$.

Dos casos particulares de lo anterior son las soluciones $y = \sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$, $y = -\sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$, obtenidas haciendo $A = B = C = 0$, y definidas en $I = R$.

3º) Existen cuatro soluciones, que son

$y = -\sqrt{2x^2 + 1}$, definida en $I = R$,

$y = -\sqrt{1 - 4x^2}$, definida en $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$y = \begin{cases} -\sqrt{2x^2+1} & , \text{ si } x \leq 0 \\ -\sqrt{1-4x^2} & , \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} ,$$

definida en $I = (\leftarrow, \frac{1}{2}) = \{x \in R/x < \frac{1}{2}\}$,

$$y = \begin{cases} -\sqrt{1-4x^2} & , \text{ si } -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ -\sqrt{2x^2+1} & , \text{ si } 0 \leq x \end{cases} ,$$

definida en $I = (-\frac{1}{2}, \rightarrow) = \{x \in R/x > -\frac{1}{2}\}$.

Es fácil comprobar (hay que hacerlo) que sólo la tercera solución es creciente en todo el intervalo I.

4º) Es un caso particular de la demostración que viene en el libro (páginas 384-386).

Distintos alumnos han desarrollado demostraciones alternativas, que en varios casos han sido correctas.

Como siempre, cualquier procedimiento correcto utiliza en el fondo las mismas claves.

1º) a) Debe ser $\frac{d}{dy}(\mu(2xy^2 + y\cos x)) = \mu(4xy + \cos x) + \mu_y(2xy^2 + y\cos x) =$

$= \frac{d}{dx}(\mu(3x^2y + 2senx)) = \mu(6xy + 2\cos x) + \mu_x(3x^2y + 2senx)$.

Por tanto, $\mu(2xy + \cos x) = \mu_y(2xy^2 + y\cos x) - \mu_x(3x^2y + 2senx) =$
$= y\mu_y(2xy + \cos x) - \mu_x(3x^2y + 2senx)$.

Si μ dependiera sólo de y, entonces sería $\mu_x = 0$, y la igualdad anterior se verificaría si fuera $\mu = y\mu_y$.

Para $y \neq 0$ y $\mu_y \neq 0$, se tiene que $\mu = y\mu_y \Leftrightarrow \frac{1}{y} = \frac{\mu_y}{\mu}$.

Luego $\log|\mu| = \log|y| + A$,

$|\mu| = B|y|$, con $B = e^A > 0$,

$\mu = Cy$, con $C \neq 0$.

Pongamos por ejemplo $\mu = y$.

Se tiene que $\int y(2xy^2 + y\cos x)dx = x^2y^3 + y^2 senx + \varphi(y)$,

$y(3x^2y + 2senx) = 3x^2y^2 + 2ysenx = \frac{d}{dy}(x^2y^3 + y^2senx + \varphi(y)) =$
$= 3x^2y^2 + 2ysenx + \varphi'(y)$, luego $\varphi'(y) = 0$.

La solución es pues $x^2y^3 + y^2senx = K$, con el factor integrante $\mu = y$.

---

b) La parábola $y = 5x^2$ tiene, en cualquier punto, $y' = 10x$ como pendiente de su recta tangente.

Por tanto, si $x \neq 0$, entonces $y' \neq 0$, y $-\frac{1}{y'} = -\frac{1}{10x}$ es la pendiente de la recta normal.

Si el punto $(x, 5x^2)$ de la parábola (de su gráfica) pertenece a una elipse de la forma $x^2 + ay^2 = r^2$ (siendo $r > 0$),

entonces, puesto que la parábola debe ser ortogonal a la elipse,

la pendiente Y' de la tangente a la elipse en ese punto debe verificar que $Y' = -\frac{1}{10x}$, y además

$2x + 2aYY' = 0 \Leftrightarrow x + aYY' = 0$, donde $Y = 5x^2$.

Sustituyendo, $0 = x - a5x^2\frac{1}{10x} = x - \frac{ax}{2} = x(1 - \frac{a}{2})$, para todo $x \neq 0$.

Debe ser pues $a = 2$.

2º) a) $x(y')^2 - y = 1 \Leftrightarrow x(y')^2 = y + 1$

Para $x \neq 0$, $(y')^2 = \frac{y+1}{x}$.

Si $y = 0$, entonces $y = -1$. Es inmediato comprobar que la función constante $y = -1$, definida en toda la recta real $I = \mathbb{R}$, es solución de la ecuación diferendal dada.

Si $y \neq 0$, entonces, ya que $(y')^2 > 0$, o bien es $x > 0$, $y + 1 > 0$, o bien es $x < 0$, $y + 1 < 0$.

En el primer caso $(x > 0,\ y + 1 > 0)$, tenemos que $\frac{y'}{\sqrt{y+1}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

luego $2\sqrt{y+1} = 2\sqrt{x} + B \Leftrightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{x} + A$, siendo $A = \frac{B}{2}$ una constante.

Si $A = 0$, entonces $y + 1 = x$. La función $y = x - 1$, definida en toda la recta real $\mathbb{R}$, es solución de la ecuación dada, como fácilmente se comprueba.

Si $A \neq 0$, entonces $y = (\sqrt{x} + A)^2 - 1$, función definida para $x > 0$, que es fácil comprobar es solución de la ecuación dada.

En el segundo caso $(x < 0,\ y + 1 < 0)$, tenemos que $\frac{y'}{\sqrt{-(y+1)}} = \frac{1}{\sqrt{-x}}$;

luego $-2\sqrt{-(y+1)} = -2\sqrt{-x} + B \Leftrightarrow \sqrt{-(y+1)} = \sqrt{-x} + A$, siendo $A = -\frac{B}{2}$ una constante.

Si $A = 0$, entonces $-(y+1) = -x \Leftrightarrow y + 1 = x$. La función $y = x - 1$, definida en toda la recta real $\mathbb{R}$, es solución de la ecuación dada, como antres vimos.

Si $A \neq 0$, entonces $-y = (\sqrt{-x} + A)^2 + 1$, luego $y = -(\sqrt{-x} + A)^2 - 1$, función definida para $x < 0$, que es fácil comprobar es solución de la ecuación dada.

Resumiendo, las soluciones son:

$y = -1,$ definida en $I = R$,

$y = x - 1,$ definida en $I = R$,

$y = (A + \sqrt{x})^2 - 1,$. siendo $A \neq 0$, definida en $I =]0, \rightarrow[= \{x \in R/x > 0\}$,

$y = -(A + \sqrt{-x})^2 - 1,$. siendo $A \neq 0$, definida en $I =]\leftarrow, 0[= \{x \in R/x < 0\}$.

2º) b) $yy''' + 3y'y'' = e^x$.

Se tiene que

$e^x = yy''' + 3y'y'' = (yy'')' - y'y'' + 3y'y'' = (yy'')' + 2y'y'' = (yy'')' + ((y')^2)' =$
$= (yy'' + (y')^2)'$.

Por tanto, $e^x + A = \int e^x dx = yy'' + (y')^2 = (yy')' - (y')^2 + (y')^2 = (yy')'$.

Luego $e^x + Ax + b = \int (e^x + A)dx = yy' = \frac{1}{2}(y^2)' \Leftrightarrow 2e^x + 2Ax + 2b = (y^2)'$.

Poniendo $2b = B$, se tiene que $2e^x + Ax^2 + Bx + C = y^2$.

Se sigue, y es fácil comprobarlo, que las soluciones son

$y = \sqrt{2e^x + Ax^2 + Bx + C}$, o bien $y = -\sqrt{2e^x + Ax^2 + Bx + C}$,

siendo A, B y C constantes reales, definidas en el conjunto abierto $I = \{x \in R/2e^x + Ax^2 + Bx + C > 0\}$.

Dos casos particulares de lo anterior son las soluciones $y = \sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$, $y = -\sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$, obtenidas haciendo $A = B = C = 0$, y definidas en $I = R$.

3º) Nos dicen que, en cada punto $P(x,y)$ de la gráfica de f, la normal a la gráfica

corta al eje horizontal en un punto Q, que dista del eje vertical tres veces más que el punto P . Se deduce de ello que la normal a la gráfica, en cada punto $P(x,y)$, no puede ser vertical si $x \neq 0$. Por tanto, si $x \neq 0$, entonces la tangente a la curva en el punto $P(x,y)$ no es horizontal, y por tanto $y' \neq 0$. Así pues, para $x \neq 0$, se tiene que $y' \neq 0$, y en consecuencia la normal a la gráfica de la función f, en el punto $P(x,y)$, viene dada por

$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$.

Por otra parte, el eje horizontal es la recta $Y = 0$. Un cálculo elemental muestra que las dos rectas (la normal antes considerada, y el eje horizontal) se cortan en el punto $Q(x + yy', 0)$, cuya distancia al eje horizontal es $|x + yy'|$. Por otra parte, la distancia del punto $P(x,y)$ al eje horizontal es $|x|$. Escribiendo la condición del enunciado, se tiene que, si $x \neq 0$,

$|x + yy'| = 3|x|$.

Puede observarse, revisando el enunciado, que esta condición también debe verificarse si $x = 0$, pues en ese caso la normal debe ser vertical (es decir, debe ser $y' = 0$), o bien el punto Q debe coincidir con el punto P (y debe ser por tanto $y = 0$). Así pues, para todo $x \in I$, debe ser

$|x + yy'| = 3|x|$;

lo cual equivale a que $x + yy' = 3x$, o bien $x + yy' = -3x$.

En el primer caso, $x + yy' = 3x$, se tiene que $2x = yy' = (\frac{1}{2}y^2)'$, y por tanto $\frac{1}{2}y^2 = \int 2xdx = x^2 + C$.

Puesto que $f(0) = -1$, debe ser $C = \frac{1}{2}$. Y se obtiene así que

$\frac{1}{2}y^2 = x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 + 1.$

Recordando nuevamente que $f(0) = -1$, se obtiene la función $y = -\sqrt{2x^2 + 1}$, que está definida en $I = R$.

Obsérvese que $y' = -\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+1}} = -\frac{2x}{\sqrt{2x^2+1}}$. Observando el signo de y', se sique que la función y es creciente para $x \leq 0$, pero no es creciente en todo $I = R$.

En el segundo caso, $x + yy' = -3x$, se tiene que $-4x = yy' = (\frac{1}{2}y^2)'$, y por tanto $\frac{1}{2}y^2 = -\int 4x dx = -2x^2 + K.$

Obsérvese que debe ser $K > 0$. Puesto que $f(0) = -1$, debe ser $K = \frac{1}{2}$.

Se obtiene así que $\frac{1}{2}y^2 = -2x^2 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y^2 = 1 - 4x^2$.

Recordando nuevamente que $f(0) = -1$, se obtiene la función $y = -\sqrt{1 - 4x^2}$, que está definida y es derivable para $1 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Por tanto, en este caso $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Obsérvese que $y' = \frac{8x}{2\sqrt{1-4x^2}} = \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}$. Se sigue que la función y es creciente para $0 \leq x < \frac{1}{2}$, pero no es creciente en todo $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Hemos obtenido así dos soluciones, que son

$$y = -\sqrt{2x^2 + 1} \quad , \text{ definida en } I = R,$$

$$y = -\sqrt{1 - 4x^2} \quad , \text{ definida en } I = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

Y ninguna de las dos soluciones es creciente en todo el intervalo I.

Repasando atentamente lo anterior (es bueno y aconsejable dibujar las gráficas si se tiene tiempo para ello), puede observarse que hay dos soluciones más, que son:

$$y = \begin{cases} -\sqrt{2x^2 + 1} & , \text{ si } x \leq 0 \\ -\sqrt{1 - 4x^2} & , \text{ si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \end{cases} \quad , \text{ definida en}$$

$I = (\leftarrow, \frac{1}{2}) = \{x \in R / x < \frac{1}{2}\}$,

$$y = \begin{cases} -\sqrt{1 - 4x^2} & , \text{ si } -\frac{1}{2} < x \leq 0 \\ -\sqrt{2x^2 + 1} & , \text{ si } 0 \leq x \end{cases} \quad , \text{ definida en}$$

$I = (-\frac{1}{2}, \rightarrow) = \{x \in R / x > -\frac{1}{2}\}$.

(Nótese que, en el punto $x = 0$, estas dos funciones están bien definidas y ambas son derivables, y se cumplen las condiciones del enunciado).

La tercera solución es creciente en todo el intervalo I, y la cuarta solución no lo es (de hecho, la cuarta solución es decreciente en todo el intervalo I).

En consecuencia, de las cuatro soluciones, la tercera es la única que es creciente en todo el intervalo I.

4º) Tal como dice el enunciado, es un caso particular del Lema de Gronwall, que está demostrado en el libro (págs. 384-386).

Haremos la demostración para este caso y de forma ligeramente distinta (aunque las claves son las mismas, claro).

Suponemos que $f : [0,4] \to R$ es una función continua, verificando que $0 \le f(x) \le 5 + 7\left|\int_2^x f(t)dt\right|$, para todo $x \in [0,4]$.

Puesto que $0 \le f(x)$, para todo $x \in [0,4]$, se verifica que, si $x \in [2,4]$, entonces $\left|\int_2^x f(t)dt\right| = \int_2^x f(t)dt;$

y si si $x \in [0,2]$, entonces $\left|\int_2^x f(t)dt\right| = \left|-\int_x^2 f(t)dt\right| = \int_x^2 f(t)dt.$

Por tanto, si $x \in [2,4]$, se tiene que $0 \le f(x) \le 5 + 7\int_2^x f(t)dt.$

Pongamos $G(x) = 5 + 7\int_2^x f(t)dt$, para todo $x \in [2,4]$. Nótese que, por hipótesis, $f(x) \le G(x)$, para todo $x \in [2,4]$.

Puesto que la función f es continua, la función G es continua en $[2,4]$ y es derivable en $]2,4[$; y su derivada es $G'(x) = 7f(x) \ge 0$, para todo $x \in]2,4[$.

Se sigue que la función G es creciente. Así pues, para todo $x \in [2,4]$, $G(x) \ge G(2) = 5 > 0$.

Por tanto, la función $\log G(x)$ está bien definida y es continua en $[2,4]$ y es derivable en $]2,4[$.

Además, su derivada es $(\log G)'(x) = \frac{G'(x)}{G(x)} = \frac{7f(x)}{G(x)} \le \frac{7G(x)}{G(x)} = 7$, para todo $x \in]2,4[$.

Del Teorema del valor medio resulta que, para todo $x \in [2,4]$, existe $c \in]2,x[$ tal que

$$\log G(x) - \log G(2) = \log G(x) - \log 5 = (x-2)\,(\log G)'(c) \le 7(x-2).$$

Por tanto, para todo $x \in [2,4]$,

$$e^{\log G(x) - \log 5} = \frac{G(x)}{5} \le e^{7(x-2)}.$$

Se sigue que $f(x) \le G(x) \le 5e^{7(x-2)} = 5e^{7|x.2|}$. para todo $x \in [2,4]$. (I)

Análogamente, si $x \in [0,2]$, se tiene que $0 \le f(x) \le 5 + 7\int_x^2 f(t)dt.$

Ponemos $H(x) = 5 + 7\int_x^2 f(t)dt$, para todo $x \in [0,2]$. Nótese que, por hipótesis, $f(x) \le H(x)$, para todo $x \in [0,2]$.

Puesto que la función f es continua, la función H es continua en $[0,2]$ y es derivable en $]0,2[$; y su derivada es $H'(x) = -7f(x) \le 0$, para todo $x \in]0,2[$.

Se sigue que la función H es decreciente. Así pues, para todo $x \in [0,2], H(x) \ge H(2) = 5 > 0$.

Por tanto, la función $\log H(x)$ está bien definida y es continua en $[0,2]$ y es derivable en $]0,2[$.

Además, su derivada es $(\log H)'(x) = \frac{H'(x)}{H(x)} = -\frac{7f(x)}{H(x)} \ge -\frac{7H(x)}{H(x)} = -7$, para todo $x \in]0,2[$.

Del Teorema del valor medio resulta que, para todo $x \in [0,2]$, existe $c \in]x,2[$ tal que

$$\log H(2) - \log H(x) = \log 5 - \log H(x) = (2-x)\,(\log H)'(c) \ge -7(2-x).$$

Por tanto, para todo $x \in [0,2]$,

$$e^{\log 5 - \log H(x)} = \frac{5}{H(x)} \ge e^{-7(2-x)}.$$

Se sigue que $f(x) \le H(x) \le \frac{5}{e^{-7(2-x)}} = 5e^{7(2-x)} = 5e^{7|x-2|}$. para todo $x \in [0,2]$. (II)

De (I) y (II) resulta que $f(x) \leq 5e^{7|x-2|}$. para todo $x \in [0,4]$, como queríamos demostrar.