**AMPLIACIÓN DE VARIABLE COMPLEJA**
**Exámenes**

*2020 - 1ª Semana*

**Ejercicio 4.** Se pide:

I) Demostrar la igualdad para $|z| < 1$

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\ldots} = (1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots$$

II) Definir la sucesión $n(k)$ para que se verifique la igualdad

$$\prod_{k\geq 1}(1+z^{n(k)}) = \frac{1}{1-z}$$

*Solución:*

I) Vamos a demostrar que

$$[(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\ldots][(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots] = 1$$

De donde se tendrá de forma inmediata la igualdad buscada. Se tiene que

$$[(1-z)][(1+z)(1+z^2)] = 1-z^4$$

$$[(1-z)(1-z^3)][(1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)] = (1-z^6)(1-z^8)$$

$$[(1-z)(1-z^3)(1-z^5)][(1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)(1+z^5)(1+z^6)] = (1-z^8)(1-z^{10})(1-z^{12})$$

Si establecemos como hipótesis de inducción que para $k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$[(1-z)(1-z^3)\ldots(1-z^{2k-1})][(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2k})] = (1-z^{2(k+1)})(1-z^{2(k+2)})\ldots(1-z^{2(k+k)})$$

Entonces, para $k+1$ se tendrá que

$$[(1-z)(1-z^3)\ldots(1-z^{2k-1})(1-z^{2k+1})][(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2k+2})] =$$

$$= (1-z^{2(k+1)})(1-z^{2(k+2)})\ldots(1-z^{2(k+k)})(1-z^{2k+1})(1+z^{2k+1})(1+z^{2k+2}) =$$

$$= (1-z^{2((k+1)+1)})\ldots(1-z^{2((k+1)+k-1)})(1-z^{2(k+1)+k})(1+z^{2((k+1)+k+1)})$$

Por tanto, queda demostrada la igualdad

$$[(1-z)(1-z^3)\ldots(1-z^{2k-1})][(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2k})] = (1-z^{2(k+1)})(1-z^{2(k+2)})\ldots(1-z^{2(k+k)})$$

que se puede expresar

$$\left[\prod_{n=1}^{k}(1-z^{2n-1})\right]\left[\prod_{n=1}^{k}(1+z^{2n-1})(1+z^{2n})\right] = \prod_{n=1}^{k}(1-z^{2(k+n)})$$

Se tiene que para todo $|z| < 1$ es

$$\lim_{k \to \infty} \prod_{n=1}^{k} (1 - z^{2(k+n)}) = 1$$

En efecto, para cada $\varepsilon > 0$ podemos tomar $k_0$ tal que $|z^{k_0}| < \sqrt{(1-|z|^2)\varepsilon}$ , y por tanto también $|z^k| < \varepsilon$ para $k \geq k_0$. Se tiene entonces que

$$\left| 1 - \prod_{n=1}^{k} (1 - z^{2(k+n)}) \right| \leq \sum_{n=k_0}^{\infty} |z^{2n}| = \frac{|z^{k_0}|^2}{1-|z|^2} < \varepsilon$$

Por tanto, se concluye que

$$\left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^{2n-1}) \right] \left[ \prod_{n=1}^{\infty} (1 + z^{2n-1})(1 + z^{2n}) \right] = 1$$

para $|z| < 1$. Como ambos productos infinitos son absoluta y uniformemente convergentes, pueden tratarse como funciones, por tanto, se tiene que

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^3)(1-z^5)\ldots} = (1+z)(1+z^2)(1+z^3)\ldots$$

II) Tomando $n(k) = 2^{k-1}$ se tiene que

$$(1-z)(1+z^{n(1)}) = 1 - z^2 = 1 - z^{n(2)}$$

Suponiendo cierta la hipótesis $(1-z)\prod_{i=1}^{k}(1+z^{n(k)}) = 1 - z^{n(k+1)}$, tenemos para $k+1$ que

$$(1-z)\prod_{i=1}^{k+1}(1+z^{n(k)}) = (1-z^{n(k+1)})(1+z^{n(k+1)}) = (1-z^{2^k})(1+z^{2^k}) = 1 - z^{2^{k+1}} = 1 - z^{n(k+2)}$$

Por tanto, el método de inducción asegura que tomando $n(k) = 2^{k-1}$ se tiene que

$$(1-z)\prod_{i=1}^{k}(1+z^{n(k)}) = 1 - z^{2^k}$$

Como $|z| < 1$, cuando $k \to \infty$, se tiene que

$$(1-z)\prod_{i=1}^{\infty}(1+z^{n(k)}) = 1 \quad \Rightarrow \quad \prod_{i=1}^{\infty}(1+z^{n(k)}) = \frac{1}{1-z}$$

Por tanto, se tiene que una sucesión $n(k)$ que satisface lo pedido es

$$n(k) = 2^{k-1}$$