Pregunta 1 (2,5 puntos)

Dados tres conjuntos arbitrarios no vacíos A, B y C y dos aplicaciones $f\colon A \longrightarrow B$ y $g\colon B \longrightarrow C$, demuestre que:

a) si $g \circ f$ es inyectiva entonces f es inyectiva.

b) si $g \circ f$ es sobreyectiva entonces g es sobreyectiva.

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Se define en $\mathbb{R}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$a \,\mathcal{R}\, b \quad \text{si y sólo si} \quad a^2 - b^2 = a - b$$

Demuestre que $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia y describa las clases de equivalencia.

Pregunta 3 (3 puntos)

Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario.

a) Demuestre que dados $x, y \in A$ si xy es inversible entonces x e y son inversibles.

b) Demuestre que si $x \in A$ es inversible entonces x no es un divisor de cero.

c) Sea $a \in A$ y sea aA el ideal generado por a. Demuestre que $aA = A$ si y sólo si a es inversible.

Pregunta 4 (2 puntos)

Sea el número complejo $w = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

a) Exprese w y w^2 en forma binómica y calcule $1 + w + w^2$.

b) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^3 - 8i = 0$.