Cuestiones y problemas
Tema 2. Principios de conservación de la mecánica clásica: Conservación del momento lineal

Dos astronautas, con masas 50 kg y 100 kg, están flotando en el espacio interestelar aislados de la acción de cualquier fuerza exterior unidos por una cuerda sin masa de longitud l_0. El astronauta de 50 kg da un tirón de la cuerda y comienza a moverse hacia el otro. Suponiendo que el tirón es prácticamente instantáneo, ¿qué distancia recorrerá hasta llegar al otro astronauta?

Solución:

Como no existen fuerzas exteriores al sistema, el momento lineal se tiene que conservar. Inicialmente ambos astronautas están en reposo por lo que su momento total es cero. Después del tirón (fuerza interna), ambos comienzan a moverse uno hacia el otro. Como el momento total se conserva se cumple que $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$, siendo $\vec{p}_1$ el momento del astronauta de 50 kg de masa y $\vec{p}_2$ el del astronauta de 100 kg. Sustituyendo las expresiones de los momentos obtenemos que

$$\vec{v}_1 = -2\vec{v}_2,$$

y, por tanto, el espacio *x* recorrido por el astronauta 1 es el doble que el recorrido por el astronauta 2. Así pues

$$x + \frac{x}{2} = l_0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3} l_0 .$$

Una barca de 100Kg de masa reposa en un estanque. Una persona de 50Kg comienza a andar sobre ella con velocidad constante 1m/s respecto a la barca. ¿Qué ocurrirá si no se considera rozamiento alguno?

Solución:

Como no actúan fuerzas externas sobre el sistema, el momento lineal se conserva.
Sea *v* la velocidad de la barca con respecto a la orilla. El momento inicial con respecto a la orilla es 0, mientras que el final es la suma de los momentos de la barca: vM_{barca} y de la persona: $(v+1)m_{persona}$, ya que la persona se mueve con velocidad constante 1m/s con respecto a la barca.
Aplicando el principio de conservación del momento tenemos:

$$0 = vM_{barca} + (v+1)m_{persona}.$$

La solución es *v*= - 0.33m/s

Una barca de masa *m* se mueve sin rozamiento con velocidad $\vec{v}_0$ con respecto a un observador que se encuentra en la orilla. ¿Qué debe hacer un niño de masa *m* que está sentado dentro de la barca para que la barca no se mueva durante un instante en relación al observador?

Solución:

El momento inicial del sistema barca + niño con respecto a la orilla es $2m\vec{v}_0$. Como no actúan fuerzas externas sobre el sistema, el momento lineal se conserva. Así pues, si el momento final total del sistema es $m\vec{v}$, donde $\vec{v}$ es la velocidad del niño mientras que la velocidad de la barca es 0, tenemos que $\vec{v} = 2\vec{v}_0$.

Un vehículo de masa *M* circula por una carretera horizontal y recta con velocidad constante v_i. En un momento dado una masa *m* cae verticalmente con velocidad v_m sobre el vehículo y queda en reposo sobre éste. Calcular, en función de su velocidad antes de la caída del objeto, v_i, el tiempo que tardará el vehículo en recorrer una distancia *d,* contando el tiempo a partir del instante en que la masa *m* impacta sobre el vehículo. Desprecie todo tipo de rozamiento.

Solución:
El momento lineal en la dirección horizontal se conserva, por lo que tenemos que
$Mv_i = (M+m)v_f$, de donde obtenemos la nueva velocidad del vehículo con la masa

$$v_f = \frac{Mv_i}{(M+m)}.$$

Como éste se moverá siguiendo un m.r.u., tenemos que

$$t = \frac{d(M+m)}{Mv_i}.$$

Una bala de 2 g de masa tarda 10^{-3} s en recorrer el cañón de un fusil. La fuerza que actúa sobre el proyectil mientras se encuentra en el cañón es $F = 500 - 2\cdot 10^5 t$ en unidades del SI.
- Calcular la velocidad con la que sale la bala del cañón.
- Calcular la longitud del cañón

Solución:

$$F = \frac{dp}{dt} \Rightarrow p = \int_{t=0}^{t=10^{-3}} Fdt = \int_{t=0}^{t=10^{-3}} 500 - 2\times 10^5 t dt = 500t - 10^5 t^2 \Big|_{t=0}^{t=10^{-3}} = 0.4 \text{ kg m/s}$$

$v = p/m = 200$ m/s

$$a(t) = F(t)/m = \left(250 - 10^5 t\right)10^3 \text{ m/s}^2$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \rightarrow v(t) = \int a(t)dt = \left(250t - 5\cdot 10^4 t^2\right)10^3 \text{ m/s}$$

$v(0{,}001) = 200$ m/s

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} \rightarrow \text{s}(t) = \int v(t)dt = \left(125t^2 - 5/3\cdot 10^4 t^3\right)10^3 \text{ m}$$

$s(0{,}001) = 0.108$ m

Se dispara verticalmente una bala de mortero con una velocidad inicial de 126 m/s. En el punto más alto de su trayectoria explota en tres fragmentos iguales, uno de los cuales sigue subiendo con una velocidad de 70 m/s; otro sube formando inicialmente un ángulo de 45º con la vertical, con una velocidad de 140 m/s. Determinar la velocidad inicial del tercer fragmento:

Solución:
En el punto más alto de su trayectoria la velocidad de la bala es 0. Como la explosión es debida a fuerzas internas, el momento lineal se conservará en las dos direcciones del espacio justo en el instante después de la explosión (luego no, porque actúa una fuerza externa como es la gravedad). Sean $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ las velocidades de los tres fragmentos. Tenemos que:

$\vec{v}_1 = 70\vec{j}$ m/s, $\vec{v}_2 = 140\sin(45)\vec{i} + 140\cos(45)\vec{j}$ m/s y $\vec{v}_3 = x\vec{i} + y\vec{j}$ m/s.

Como el momento lineal se conserva en el instante después de la explosión podemos escribir:

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$, de donde obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$140\sin(45) + x = 0$$
$$70 + 140\cos(45) + y = 0$$

Finalmente llegamos a $\vec{v}_3 = \left(-70\sqrt{2}\right)\vec{i} - \left(70 + 70\sqrt{2}\right)\vec{j}$ m/s.

Un carrito de masa *m* se mueve a una velocidad *v* hacia otro en reposos de masa 3*m*. Éste último está provisto de un parachoques de masa despreciable acoplado a un resorte. Durante el choque frontal de ambos carritos el resorte se comprime y durante todo el proceso la energía mecánica se conserva.
- ¿Cuál es la velocidad v' del carrito de masa 3*m* en el instante de máxima compresión del resorte?
- Si la energía mecánica se conserva, ¿cuál es la velocidad v_2 del carrito de masa 3*m* mucho después del choque?
- En el caso de un choque totalmente inelástico, ¿cuál es la v_2 velocidad del carrito de masa 3*m* mucho después del choque?

Solución:
La conservación del momento da

$$mv = (m + 3m)v'$$
$$v' = \frac{v}{4}$$

Siendo ésta la velocidad en el instante de máxima compresión tanto en el caso de choque elástico como inelástico.
Si el choque es elástico, una vez pierden contacto,

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(v_1\right)^2 + \frac{1}{2}3m\left(v_2\right)^2$$
$$mv = mv_1 + 3mv_2$$

de las que se deduce $v_2 = \frac{v}{2}$ y $v_1 = -\frac{v}{2}$.
Si el choque fuera totalmente inelástico, ambos carritos permanecerían todo el tiempo juntos y la velocidad sería la de la pregunta 1: $v_2 = \frac{v}{4}$.

Un vagón de ferrocarril abierto por arriba se mueve sin rozamiento con velocidad 1 m/s. En un momento dado comienza a llover verticalmente y el vagón se va llenando de agua a razón de 10 Kg/s. La masa inicial del vagón es de 1000 Kg.
- ¿Cuánto vale la velocidad del vagón al cabo de 10 segundos desde que empieza a llover?
- ¿Cuánto vale la aceleración en función del tiempo?
- ¿Cuánto vale la fuerza que habría que ejercer sobre el vagón para mantenerlo a velocidad constante 1m/s?

Solución:
En este problema tenemos conservación del momento lineal en la dirección del movimiento del vagón ya que las únicas fuerzas externas que actúan sobre el vagón son perpendiculares al desplazamiento.

Por lo tanto podemos escribir $p(t) = \mathrm{cte} = p(0) = 1000\,\mathrm{Kg\,m/s}$. La masa del vagón aumenta con el tiempo a razón de 10 Kg/s, así que tenemos que $m(t) = 1000 + 10t$. Como $p(t) = m(t)v(t) = \mathrm{cte}$, despejamos $v(t) = 1000/(1000 + 10t)\,\mathrm{m/s}$ y tenemos que al cabo de 10s la velocidad es 0.909 m/s.

La aceleración viene dada por $dv(t)/dt$ y es $a(t) = \dfrac{-10000}{(1000+10\,t)^2}$ m/s^2.

Si ahora queremos mantenerlo a velocidad constante 1 m/s, el momento lineal va a cambiar con el tiempo y la fuerza que tenemos que ejercer para que eso ocurra se define como la variación de momento lineal por unidad de tiempo:

$$F(t) = \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d\big(m(t)v(t)\big)}{dt} = v(t)\frac{dm(t)}{dt} + m(t)\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dm(t)}{dt} = 10\ N\,.$$

Una persona de masa M_1 esta situada en reposo sobre un tablón muy largo de masa M_2 que descansa sobre el suelo. Entre el suelo y el tablón no existe rozamiento. Sin embargo, entre la persona y el tablón sí que existe rozamiento. Gracias a este rozamiento, la persona comienza a correr sobre el tablón con una velocidad constante *v* relativa al tablón.
- Calcular la velocidad que adquiere el tablón con respecto a un observador inercial en reposo.
- Si ahora el tablón descansa sobre un plano inclinado de ángulo α, de nuevo sin rozamiento entre tablón y plano, ¿cuál es la aceleración *a* con la que debe bajar corriendo la persona sobre el tablón para que éste permanezca inmóvil con respecto al plano inclinado?.

Solución:

Como no existen fuerzas externas en la dirección horizontal, el momento lineal del sistema en esta dirección debe conservarse. Como inicialmente era cero, tenemos que

$$0 = M_2\vec{V} + M_1(\vec{V} + \vec{v})$$

Despejando tenemos que:

$$\vec{V} = \frac{-M_1\vec{v}}{M_2 + M_1}$$

Cuando el tablón está situado sobre el plano inclinado tenemos las siguientes ecuaciones para el movimiento de la persona y del tablón, respectivamente:

$$M_1 a = F_{\text{tablón}\to\text{persona}} + M_1 g sen\alpha$$
$$0 = M_2 g sen\alpha - F_{\text{persona}\to\text{tablón}}$$

Como la fuerza que la persona ejerce sobre el tablón es igual a la que el tablón ejerce sobre la persona, $F_{\text{tablón}\to\text{persona}} = F_{\text{persona}\to\text{tablón}}$. Despejando llegamos a

$$a = \frac{M_2 + M_1}{M_1} g sen\alpha$$

Dos bolas de plastilina de igual masa e igual velocidad chocan frontalmente, se adhieren y quedan en reposo:
a) se conservan la energía y el momento lineal;
b) no se conserva el momento lineal, pero sí la energía;
c) no se conserva la energía, pero sí el momento lineal.

Solución:

Evidentemente, la energía no se conserva pero el momento lineal si. La respuesta correcta es la c).

El péndulo balístico se usa para medir la velocidad de las balas. Consta de un péndulo de masa *M* que cuelga verticalmente de forma que se puede medir fácilmente la altura máxima *h* a la que se eleva. Una bala de masa *m* es disparada horizontalmente sobre el péndulo, que está inicialmente en reposo, y queda incrustada en él. Calcular la expresión para la velocidad de la bala.

Solución:

La solución se obtiene al resolver las ecuaciones de la conservación del momento lineal en el choque bala-péndulo y de la conservación de la energía mecánica en el movimiento del péndulo:

$$mv = (M + m)V$$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gh$$

De donde $v = ((m+M)/m)\sqrt{2gh}$.

En el extremo de una tabla que flota en el agua, de masa 4 kg y longitud 2 m, descansa una rana de masa 100 g . Si ésta salta con velocidad v_0 formando un ángulo de 15º con la horizontal, hallar el valor de v_0 para que alcance el otro extremo de la tabla en el salto. (No considerar ningún tipo de rozamiento). ($g = 9.8\,\mathrm{m/s}^2$)

Solución:

Como no actúan fuerzas externas sobre el sistema rana-tabla, el momento lineal se conserva. Si *v* es la velocidad con la que se mueve la barca justo después del salto de la rana, tenemos que:

$$0.1v_0\cos 15º + 4v = 0 \rightarrow v = -0.024v_0 \text{ m/s}, ,$$

es decir la tabla se mueve en sentido contrario al de la rana.

Durante el salto de la rana, de duración *t*, la barca se ha movido tv , así que para que la rana alcance el otro extremo de la tabla después del salto, tenemos que considerar un tiro parabólico de alcance $2 - vt$ m.

Las ecuaciones son:

Dirección x: $2 - vt = tv_0\cos 15º$

Dirección y: $0 = tv_0\sin 15º - \frac{1}{2}gt^2$

Tenemos dos ecuaciones y dos incógnitas: v_0 y *t*. Despejando obtenemos que la solución correcta es 6.3 m/s.

Un cuerpo de 3 kg que se mueve con velocidad 5 m/s en la dirección positiva del eje *x* choca con otro de 6 kg que se desplazaba perpendicularmente al primero, en la dirección positiva del eje *y*, con velocidad 3 m/s. Después del choque ambos cuerpos quedan unidos. Calcular el módulo de la velocidad con la que se desplazan después del choque y el ángulo que forma esta velocidad con el eje *x*.

Solución:

Aplicamos la conservación del momento lineal con $\vec{v}_{1,i} = (5,0)\,\mathrm{m/s}$, $\vec{v}_{2,i} = (0,3)\,\mathrm{m/s}$ y $\vec{v}_f = (v_x, v_y)\,\mathrm{m/s}$. Si α es el ángulo que forma la velocidad de los dos cuerpos unidos después del choque con respecto al eje *OX* y *v* el módulo de la velocidad, tenemos que $v_x = v\cos\alpha$ y $v_y = v\sin\alpha$. Podemos escribir

$$m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = (m_1 + m_2)\vec{v}_f \, .$$

Sustituyendo e igualando obtenemos que $v_x = \frac{15}{9}$ y $v_y = 2$. A partir de los valores anteriores obtenemos que $\alpha = 50.2^{\circ}$ y $v = 2.6$ m/s.

Una partícula de masa *m* que se mueve en la dirección positiva del eje *x* colisiona a la vez con otras dos partículas que se encontraban en reposo en su camino, ambas de masa *m* y 2*m*, las cuales salen despedidas con velocidades 1m/s y 0.5m/s, respectivamente, formando ángulos α_1 (por encima del eje *x*) y α_2 (por debajo del eje *x*) con la dirección del movimiento de la primera, que queda en reposo después del choque.
Sabiendo que la energía cinética final es la mitad de la inicial:
- Calcular la velocidad de la partícula antes de chocar
Solución:

$$Ec_f = \frac{1}{2} Ec_i \rightarrow \frac{1}{2} m1 + \frac{1}{2} 2m0.25 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} mv^2\right) \rightarrow v = \sqrt{3}\, m/s .$$

- Calcular los ángulos α_1 y α_2
Solución:
Conservación del momento lineal en la dirección *x*:

$$m\sqrt{3} = m1\cos\alpha_1 + 2m0.5\cos\alpha_2$$

Conservación del momento lineal en la dirección *y*:

$$0 = m1\sin\alpha_1 - 2m0.5\sin\alpha_2$$

De donde obtenemos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ y que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sean dos bolas iguales de masa M. Una de ellas (bola 1) se desplaza de izquierda a derecha a lo largo del eje *OX*, a una velocidad de 2 m/s, y después de chocar con la segunda (bola 2), inicialmente en reposo, se desplaza a 1 m/s en una dirección que forma un ángulo de 45º con la inicial.
- Calcular el ángulo con respecto al eje *OX* con el que sale despedida la bola 2.
- Calcular la velocidad de la bola 2 después del choque.
- ¿Es elástico o inelástico el choque?
Solución:
Aplicamos la conservación del momento lineal con $\vec{v}_{1,i} = (2{,}0)$ m/s, $\vec{v}_{2,i} = (0{,}0)$ m/s, $\vec{v}_{1,f} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ m/s y $\vec{v}_{2,f} = (v_x, v_y)$ m/s. Tenemos entonces que:

$$M\vec{v}_{1,i} + M\vec{v}_{2,i} = M\vec{v}_{1,f} + M\vec{v}_{2,f} .$$

Sustituyendo e igualando obtenemos que $v_x = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $v_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Si α es el ángulo que forma la velocidad de la segunda bola después del choque con respecto al eje *OX* y *v* el módulo de la velocidad, tenemos que $v_x = v\cos\alpha$ y $v_y = v\sin\alpha$. A partir de los valores anteriores obtenemos que $\alpha = -28.68^{\circ}$ (es negativo porque la dirección del movimiento va por debajo del eje *OX*) y $v = 1.47$ m/s.
Como se puede comprobar:

$$\frac{1}{2} M\left|\vec{v}_{1,i}\right|^2 \neq \frac{1}{2} M\left|\vec{v}_{1,f}\right|^2 + \frac{1}{2} M\left|\vec{v}_{2,f}\right|^2 ,$$

y por tanto el choque es inelástico.

Una sonda espacial de 50 kg viaja a una velocidad de 2 m/s. Una explosión controlada que proporciona una energía de 100 J separa la sonda en dos partes de 25 kg de peso cada uno. Después de la separación los dos partes conservan la trayectoria inicial de la sonda.
- **La velocidad que adquieren las partes en la que se divide la sonda son tales que**
a) es idéntica para ambas
b) una de las partes tiene velocidad nula
c) cada una adquiere su velocidad, no siendo ninguna nula, ni tampoco iguales

- ¿Cuál de las siguientes afirmaciones referentes al problema es verdadera?
a) Después de la separación la velocidad del centro de masas del sistema es de 4 m/s
b) La suma de las dos velocidades finales de las partes es de 4 m/s
c) En el sistema de referencia ligado al centro de masas la velocidad de cada parte es de 4 m/s

Solución:
Como en la explosión sólo actúan fuerzas internas, el momento lineal se conserva:

$$MV = mv_1 + mv_2\,,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades de las dos partes y $M = 50\,\mathrm{kg}$ y $m = 25\,\mathrm{kg}$. Sustituyendo tenemos que $4 = v_1 + v_2$.
La diferencia entre la energía final y la inicial es igual a los 100 J proporcionados por la explosión. Así pues, tenemos que

$$\frac{1}{2}mv_1^{\,2} + \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}MV^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad v_1^{\,2} + v_2^{\,2} = 16\,.$$

Combinando ambas relaciones entre v_1 y v_2 llegamos a $v_2(v_2 - 4) = 0,$ obteniendo por consiguiente dos soluciones: v_1=4, v_2=0 y v_1=0, v_2=4. Por lo tanto la solución de la primera y de la segunda cuestión es la b).

Una fuerza continua de valor $F = (10 - x)/3$ N, donde *x* es la posición medida en metros, actúa sobre una masa de 1kg, inicialmente en reposo, a lo largo de 2m. La dirección y sentido de la fuerza coincide con la dirección y sentido de la trayectoria que sigue la partícula.
- Calcular el trabajo efectuado por la fuerza
- Una vez que la masa ha recorrido los 2m, la fuerza deja de actuar y la partícula se mueve libremente sin rozamiento. Calcular la velocidad de la partícula.
- Si la partícula choca después frontalmente con otra masa de 2kg que se encontraba en reposo en su camino. Calcular las velocidades finales de las dos partículas

Solución:

$$W = \int_{x=0}^{x=2} F(x)dx = 6\,\mathrm{J}.$$

$$W = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2W}{m}} = 3.46\,\mathrm{m/s}.$$

En el choque tenemos conservación del momento:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

y conservación de la energía cinética:

$$m_1 v_{1i}^{\;2} = m_1 v_{1f}^{\;2} + m_2 v_{2f}^{\;2}\,.$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones con $v_{1i} = 3.46$ obtenemos las velocidades v_{1f} y v_{2f} requeridas en el enunciado del problema.

Un globo estacionario de masa m_2 lleva colgando una escalera de cuerda con un joven en ella de masa m_1. El joven empieza a subir por la escalera con velocidad v_1 respecto a la escalera, ¿qué ocurre con el globo?

Solución:

Como no actúan fuerzas externas sobre el sistema globo-joven, el momento lineal se debe conservar. Para un observador que está en reposo en la tierra, el globo se moverá con una velocidad $\vec{V}$ en la dirección vertical mientras que el joven ascenderá con una velocidad $\vec{v}_1 + \vec{V}$. Como el momento lineal inicial del sistema era cero, tenemos que

$$m_1\left(\vec{v}_1 + \vec{V}\right) + m_2\vec{V} = 0 \quad \Rightarrow \vec{V} = -\frac{m_1\vec{v}_1}{m_1 + m_2}.$$

Así que el globo descenderá con esta velocidad.

En una clase de física el profesor explica el siguiente problema: se lanza una bola de billar de masa m_1, con velocidad $\mathbf{v}_1$, hacia otra de masa m_2 que está en reposo sobre la mesa $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, y se hace de forma a que los centros de ambas bolas están alineados con la dirección de $\mathbf{v}_1$ (se supone que todas las colisiones son elásticas). Una vez dicho esto, el profesor afirma: existe matemáticamente la solución $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, siendo $\mathbf{u}_1$ la velocidad final de la bola 1, y simplemente significa que la bola 1 continua su camino después del choque. ¿Está usted de acuerdo con esta afirmación del profesor?

Solución:

Ciertamente, existe la solución matemática $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1$, con $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, pero carece claramente de sentido físico ya que esta solución establece que la bola 1 “atraviesa” la 2 sin alterar su trayectoria. No todas las soluciones matemáticas de un problema tienen necesariamente sentido físico.

Una persona de 100 kg de masa está colgada en el extremo de una cuerda de 30 m que se encuentra sujeta a un globo de 500 kg de masa suspendido en el aire. La persona trepa por la cuerda hasta acercarse a 6 m del globo.
- Determinar la altura sobre el suelo que ha subido la persona
- La velocidad con la que se moverá el globo con respecto al suelo durante el ascenso de la persona si esta sube con velocidad constante respecto al suelo de 0,4 m/s

Solución:

Como no actúan fuerzas exteriores sobre el sistema, la posición del centro de masas del sistema globo-persona con respecto al suelo permanecerá constante.

$$\text{Inicialmente}: \; h_{CM} = \frac{h_p m_p + h_g m_g}{m_p + m_g} = \frac{h_p 100 + (h_p + 30)500}{600}$$

$$\text{Finalmente}: \; h_{CM} = \frac{h'_p m_p + h'_g m_g}{m_p + m_g} = \frac{h'_p 100 + (h'_p + 6)500}{600}$$

Igualando tenemos que

$$h_p 100 + (h_p + 30)500 = h'_p 100 + (h'_p + 6)500$$

$$600\Delta h_p = 15000 - 3000$$

$$\Delta h_p = 20 \text{ m}$$

Como se conserva el momento lineal del sistema persona-globo, tenemos que

$$v_p m_p + v_g m_g = 0$$

$$v_g = \frac{-v_p m_p}{m_g} = -0.08 \text{ m/s}$$

El globo se moverá hacia abajo con una velocidad de 0.08 m/s.

Un persona de masa 50 kg que se encuentra en reposo da un empujón a otra persona de masa 100 kg también en reposo. El empujón se produce durante un intervalo de tiempo de 0.1 s y tiene una fuerza constante de 260 N. Describir lo más precisamente posible:
- ¿Qué ocurrirá si no consideramos rozamiento alguno entre las personas y el suelo?
- ¿Qué ocurrirá si el coeficiente de rozamiento entre la primera persona y el suelo es 0.5 y entre la segunda persona y el suelo es 0.3?

Solución:
Por el principio de acción y reacción (3ª ley de Newton) sabemos que la fuerza que actúa sobre cada una de las dos personas vale 260 N. Por consiguiente, el impulso que recibe cada persona es el mismo para las dos:

$$\mathrm{I} = \mathbf{F}\Delta t = \Delta \mathbf{p}.$$

Como las fuerzas tienen sentidos opuestos y el momento inicial de ambos es nulo tenemos que

$$\mathbf{p}_{50} = -\mathbf{p}_{100}$$

Si consideramos el sistema formado por las dos personas, el empujón y su reacción actúan como fuerzas internas que no modifican el momento lineal total, el cual se conserva, $\mathbf{p}_{100} + \mathbf{p}_{50} = 0$, lo que es consistente con el razonamiento anterior. Despejando obtenemos $\mathbf{v}_{100} = 0.26 \; \mathbf{i} \text{ m/s}$ y $\mathbf{v}_{50} = -0.52 \; \mathbf{i} \text{ m/s}$.

Si hay rozamiento, la fuerza que se opone al movimiento de cada persona vale

$$\mathbf{R}_{50} = m_{50} g \mu_{50} \mathbf{i} = 245 \mathbf{i} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{R}_{100} = -m_{100} g \mu_{100} \mathbf{i} = -294 \mathbf{i} \text{ m/s}$$

Vemos que la fuerza de rozamiento de la persona de 100 kg es mayor que la fuerza del empujón que recibe, por lo que no se moverá. Sin embargo, la persona de 50 kg experimentará un movimiento con aceleración constante $a_{50} = -0.3 \; \mathbf{i} \text{ m/s}^2$ durante el intervalo en el que se produce el empujón, producido por una fuerza resultante $\mathbf{F} - \mathbf{R}_{50} = 15 \text{ N}$. Al final de ese intervalo tendrá una velocidad de $\mathbf{v}_{50} = -0.03 \; \mathbf{i} \text{ m/s}$ y habrá recorrido una distancia de 0.0015 m. Una vez que ha cesado el empujón, la persona de 50 kg se frenará con aceleración constante $a_{50} = 4.9\ \mathbf{i}\ \mathrm{m/s^2}$ debido a que la única fuerza que actúa sobre él es la fuerza de rozamiento.

Una roca en reposo explota en tres trozos. Dos de ellos, de masas 1 y 2 kg, salen despedidos perpendicularmente con velocidades 12 m/s y 8 m/s respectivamente, mientras que el tercero sale con una velocidad de 40 m/s. Calcular la masa de la roca.

<u>Solución:</u>

Por conservación del momento lineal tenemos que

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 = 0,$$
$$\vec{v}_1 = (12,0,0)\mathrm{m/s},$$
$$\vec{v}_2 = (0,8,0)\mathrm{m/s},$$
$$m_3\vec{v}_3 = -m_1\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2 = (-12,-16,0) \Rightarrow \vec{v}_3 = \frac{1}{m_3}(-12,-16,0),$$
$$|\vec{v}_3| = \frac{1}{m_3}\sqrt{144+166} = \frac{20}{m_3}.$$

Como $|\vec{v}_3|$ = 40, tenemos que m_3=0.5 y la masa total de la roca es de 3.5 Kg.

Una bala de rifle, de masa 10 g, choca contra un bloque de masa 990g que se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal lisa, y queda incrustada en él. El bloque está unido a un resorte, como se indica en la figura 4, y el choque comprime el resorte 10 cm. El calibrado del resorte indica que para comprimirlo 1 cm es necesaria una fuerza de 100000 dinas. 1dina=1g cm/s^2. Calcular:

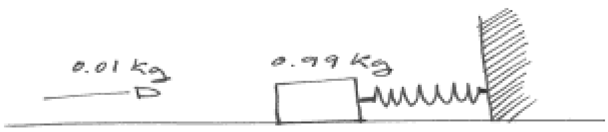


Figura 4.

- La energía potencial máxima del resorte.
- La velocidad del bloque después del choque.
- La velocidad inicial de la bala

<u>Solución:</u>

Como 1 N=10^5 dinas, la constante del muelle *K* vale 100 N/m. La energía máxima del resorte será:

$$\frac{1}{2}Kx_{\max}^2 = 0.5\,J\ .$$

Sabiendo esta energía potencial final del resorte, podemos averiguar cual es la velocidad *v* del conjunto bala + bloque justo después del choque, ya que la energía total del sistema se conserva:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}Kx_{\max}^2$$

De donde obtenemos que $v = 1$ m/s.

Cuando la bala choca contra el bloque, el momento lineal se conserva. Así pues podemos escribir

$$(m+M)v = mv_0\,,$$

donde v_0 es la velocidad inicial de la bala. Despejando obtenemos que $v_0 = 100\,m/s$.

Una bala de 10 gramos es disparada con una velocidad *v* contra un bloque de madera de 1 kg que descansa sobre una superficie horizontal, la cual tiene un coeficiente de rozamiento $\mu = 0.5$. La bala se incrusta en el bloque a una profundidad de 12cm. Después del impacto, el bloque recorre 5 cm sobre la superficie rugosa hasta que se para.
- Determinar la velocidad *v* con la que la bala fue lanzada.
- Determinar la fuerza resistente de la madera a la penetración de la bala

Solución:
Se trata de un choque perfectamente inelástico, por lo que

$$mv = (m+M)V \Rightarrow v = (m+M)V/m$$

El trabajo de la fuerza de rozamiento es igual a la pérdida de energía mecánica del sistema bloque+bala (cinética en este caso)

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = F_{roz}d = (m+M)g\mu d \Rightarrow V = \sqrt{2g\mu d}$$

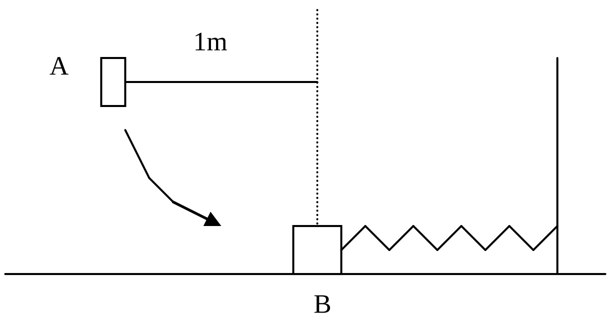
Por lo que obtenemos

$$v = (1+M/m)\sqrt{2g\mu d} = 70.7\text{m/s}$$

La fuerza resistente dentro del bloque la obtenemos del trabajo realizado por dicha fuerza, calculado una vez más a partir de la pérdida de energía mecánica:

$$\mathrm{W}_{\mathrm{F_r}} = \Delta E_c = \frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}mv^2 = 0.247 - 25 = -24.745$$
$$F_r = 24.745/0.12 = 206.2N$$

El péndulo de la figura consta de una masa puntual de 1 Kg sujeta por una varilla sin masa de longitud 1 m. Se suelta desde la posición A hasta que en la posición B choca elásticamente con una masa de 1 Kg que está en reposo unida a un resorte sin masa y constante elástica k=50N/m. ¿Cuánto vale la máxima compresión del muelle después del choque?. (Tomar g=9.8 m/s^2)



Solución:
La velocidad con la que choca la masa del péndulo con la del resorte se obtiene a partir de la conservación de la energía mecánica del péndulo

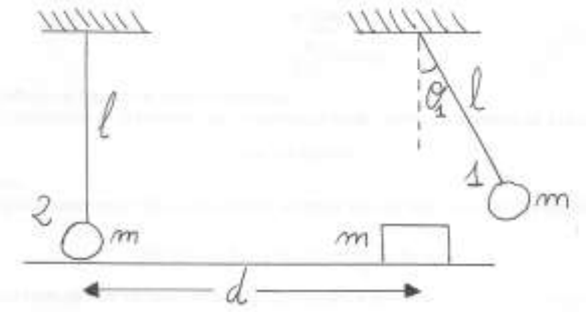
$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Como el choque es elástico, la energía cinética se conserva y posteriormente se transforma en energía potencial del muelle

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

A partir de estas dos ecuaciones obtenemos que $x = 0.63$ m.

En el dispositivo de la figura, las tres masas son iguales, de valor *m*. Supongamos que separamos el péndulo 1 desde un ángulo inicial θ_1. (Supóngase que todos los choques son elásticos)



- ¿Cuánto tiempo pasará hasta que el péndulo 1 vuelva a su posición original, es decir, cuál es el periodo del movimiento del sistema?
- Supongamos ahora que en la parte horizontal hubiese un rozamiento pequeño. Conociendo el ángulo θ_1 desde el que se suelta el péndulo 1, así como el ángulo máximo θ_2 que alcanza el péndulo 2 después de ser golpeado por la masa situada en el plano horizontal, hállese el valor del coeficiente de rozamiento dinámico μ_d.
- Si suponemos ahora que en la parte horizontal hubiese un rozamiento pequeño de coeficiente $\mu = \frac{1}{4}\frac{l\,(1-\cos\theta_1)}{d}$, y las condiciones iniciales del movimiento fueran las del apartado anterior, determinar cuántas oscilaciones completas realizará la masa que se encuentra en el plano horizontal (cuántas veces irá y volverá?).

<u>Solución:</u>

Como ambos péndulos tienen la misma longitud, su periodo es el mismo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. El movimiento que realizan los dos péndulos hasta que el péndulo 1 vuelve a su posición original es de una semioscilación cada uno, por lo que la duración total de su movimiento es de una oscilación completa. Para calcular el tiempo que tarda la masa situada en el plano horizontal en ir y volver haremos uso del principio de conservación de la energía. Calcularemos su velocidad igualando la energía potencial inicial del péndulo 1: $mgl(1-\cos\theta_1)$ con la energía cinética final del mismo en el punto más bajo, justo antes del choque del péndulo con la masa del plano,

$$mgl(1-\cos\theta_1) = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Puesto que el choque es perfectamente elástico y ambas masas son iguales, el péndulo transfiere todo su momento a la masa en el plano, la cual recorre la distancia *d* con una velocidad $v = \sqrt{2gl(1-\cos\theta_1)}$. Al chocar con el péndulo 2, le cede todo su momento y lo vuelve a recuperar cuando el péndulo vuelve a su posición inicial. Así pues, el tiempo que tarda la masa en ir y volver será

$$t = \frac{2d}{\sqrt{2gl(1-\cos\theta_1)}}$$

y el periodo del movimiento de todo el sistema será

$$2\left(\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{d}{\sqrt{2gl(1-\cos\theta_1)}}\right).$$

Si consideramos ahora un pequeño rozamiento en la zona horizontal, tendremos que la energía mecánica final que tiene el péndulo 2 (energía potencial) será igual a la inicial (energía potencial del péndulo 1) menos el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$$E_f = E_i - W_R$$

$$mgl(1-\cos\theta_2) = mgl(1-\cos\theta_1) - mgd\mu_d .$$

Despejando μ_d tenemos $\mu_d = \frac{l}{d}\left(\cos\theta_2 - \cos\theta_1\right)$.

Para calcular el número de oscilaciones completas que realizará la masa que se encuentra en el plano horizontal igualamos la energía inicial del sistema y el trabajo de la fuerza de rozamiento, ya que la disipación de energía es completa (energía final cero)

$$mgl(1-\cos\theta_1) = mgx\mu$$

donde *x* es el espacio total recorrido hasta que se para. El número de oscilaciones se calculará dividiendo *x* por la distancia que representa una oscilación, 2*d*,

$$\frac{x}{2d} = \frac{l\,(1-\cos\theta_1)}{2d\mu} = 2$$

Consideremos dos péndulos de la misma longitud colgados del techo y en cuyos extremos se encuentran dos masas *m* y 3*m*, respectivamente. En la posición de equilibrio, las masas se encuentran en contacto y sus centros perfectamente alineados con la horizontal. Separamos las masas de su posición de equilibrio de manera que sus centros ascienden una altura vertical *h* y los soltamos. Suponer que todos los choques son perfectamente elásticos.
Calcular la altura a la que subirán las dos masas después del choque
Demostrar que el movimiento del sistema es periódico, es decir, que llega un momento en el que se recupera la situación inicial por lo que el proceso se repite cíclicamente.

Solución:

En el primer choque, las velocidades de ambas masas, obtenidas por conservación de la energía mecánica, valen igual $v = \sqrt{2gh}$ aunque tienen sentidos contrarios: $v_1 = v$ y $v_2 = -v$.

Si aplicamos la conservación del momento lineal y de la energía cinética tenemos que

$$mv - 3mv = mv_1 + 3mv_2,$$

$$mv^2 + 3mv^2 = mv_1{}^2 + 3mv_2{}^2,$$

y despejando obtenemos que $v_1 = -2v$ y $v_2 = 0$, por lo que la masa pequeña subirá una altura $4h$.

(De las ecuaciones anteriores se obtiene también la solución $v_1 = v$ y $v_2 = -v$, pero no tiene ningún sentido físico pues representa el caso en el que las dos masas se “atraviesan”)

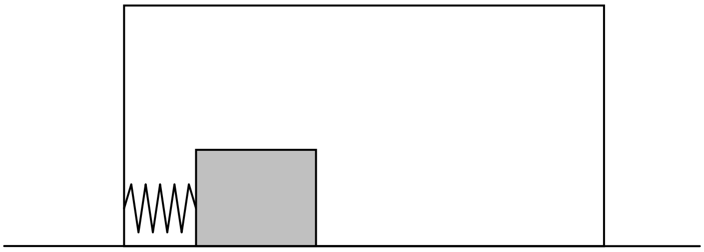
Después volverá a bajar y chocará con la masa grande con la misma velocidad con la que salió del primer choque y las ecuaciones de conservación tendrán la siguiente forma

$$2v = v_1 + 3v_2,$$

$$4v^2 = v_1{}^2 + 3v_2{}^2,$$

cuya solución es $v_1 = -v$ y $v_2 = v$, de forma que volvemos a la situación inicial en la que las dos masas suben una altura *h* y luego chocan con velocidades $v_1 = v$ y $v_2 = -v$, por lo que el movimiento se repetirá cíclicamente, es decir, será un movimiento periódico.

Consideremos el sistema de la figura compuesto de una caja de masa *M* que contiene un muelle sujeto rígidamente a la caja y de masa despreciable, y en cuyo extremo libre puede oscilar un cuerpo de masa *m* sin rozamiento. La caja está sobre una mesa horizontal sin rozamiento.



–Dibujar esquemáticamente las fuerzas que actúan sobre la masa y la caja cuando la masa oscila libremente.

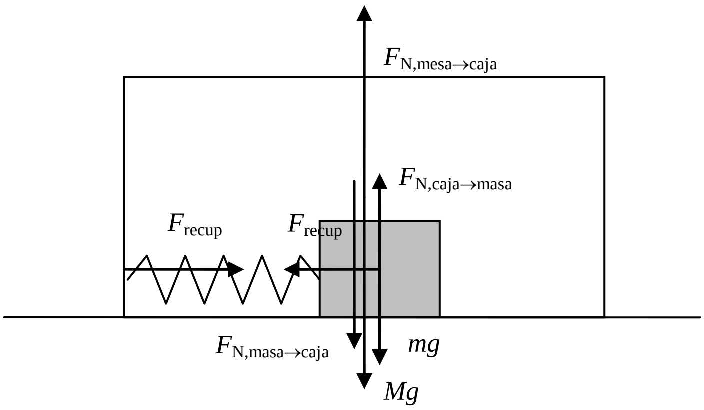
–Supongamos que sujetamos la caja con una mano y con la otra estiramos de la masa hasta que su posición coincide con el centro de la caja. En ese momento soltamos todo y el sistema comienza a oscilar. Si $x(t)$ es la posición de la masa en función del tiempo con respecto a un sistema inercial fijo respecto a la mesa y con origen de coordenadas en el punto inicial de la masa, ¿cuál será la posición del centro de masas de la caja en función de $x(t)$?

–Sabiendo $x(t)$, ¿cuál será la posición de la masa con respecto a un observador situado dentro de la caja en el centro de la misma?

<u>Solución:</u>

Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el sistema caja-masa son la gravedad y las correspondientes reacciones de las superficies sobre las que descansan: la fuerza de reacción de la mesa $F_{\text{N,mesa}\to\text{caja}}$, en el caso de la caja, y la reacción de la caja $F_{\text{N,caja}\to\text{masa}}$ en el caso de la masa. Además hay una segunda fuerza de contacto ejercida por la masa sobre la caja que llamaremos $F_{\text{N,masa}\to\text{caja}}$ y que es la reacción a $F_{\text{N,caja}\to\text{masa}}$

En el caso en el que la masa oscila, la fuerza elástica que actúa sobre la masa y responsable de la oscilación F_{recup} tiene como reacción otra fuerza igual y opuesta que actúa sobre la caja y está aplicada en el punto fijo de unión del muelle con la caja



Como estas fuerzas son internas y las fuerzas externas se compensan entre sí ($F_{\text{N,caja}\to\text{masa}} = mg$; $F_{\text{N,mesa}\to\text{caja}} = F_{\text{N,masa}\to\text{caja}} + Mg = (m+M)g$), la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es nula por lo que el centro de masas no variará con el tiempo y el momento lineal debe conservarse en cualquier instante.

El centro de masas del sistema caja-masa vale:

$$x_{CM}(t) = \frac{Mx_{\text{caja}}(t) + mx_{\text{masa}}(t)}{M+m}$$

En el instante inicial, si consideramos el sistema de referencia propuesto en el enunciado, tendremos $x_{\text{caja}} = x_{\text{masa}} = 0$, por lo que $x_{CM}(t=0) = 0$. Como el centro de masas no variará tenemos que

$$x_{CM}(t) = 0 \quad \to \quad x_{\text{caja}}(t) = -\frac{m}{M} x_{\text{masa}}(t) = \frac{m}{M} x_{\text{masa}}(t)$$

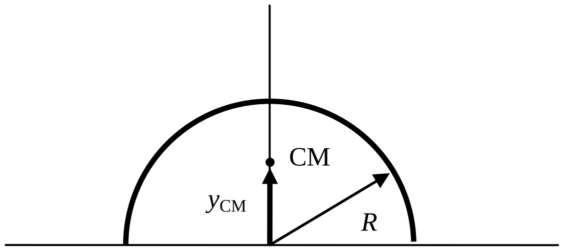
La posición de la masa con respecto a un observador situado dentro de la caja en el centro de la misma, $x'(t)$, la obtenemos a partir de la ecuación que relaciona las coordenadas de un punto en dos sistemas de referencia separados por una distancia $x_{\text{caja}}(t)$

$$x(t) = x'(t) + x_{\text{caja}}(t) \quad \Rightarrow \quad x'(t) = x(t) - x_{\text{caja}}(t) = x(t)\left(1 + \frac{m}{M}\right).$$

Cuando un saltador de altura bien entrenado salta sobre el listón, su centro de masas normalmente pasa por debajo del listón. Justificar físicamente cómo es esto posible.

Solución:

Los saltadores de altura saltan de espaldas curvando su cuerpo en el aire. Cuando van a superar el listón su cuerpo forma un arco, casi una circunferencia. Se puede demostrar que el centro de masas de un aro semicircular se encuentra a una distancia $y_{\text{CM}} = 2R/\pi = 0.637R$ del centro de la circunferencia tal y como se muestra en la figura:



Ahora podemos visualizar el problema claramente, imaginando que el arco es el cuerpo del saltador y el listón, visto lateralmente (círculo blanco), se encuentra entre el cuerpo del saltador y el centro de masas: