1º) Hallar, expresando y como función de x, todas las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales; indicando, en cada caso, cuál es el máximo conjunto abierto I en que está definida cada solución.

a) $9x(y')^2 + y^2 = 25$.

b) $yy'' + 9 = (y')^2$.

2º) Hallar un intervalo abierto I y una función derivable $y : I \to R$ verificando que, en cada punto P de su gráfica, la normal pase por un punto Q del eje vertical que equidiste del punto P y del origen de coordenadas.

Hallar todas las soluciones posibles, expresando y como función de x, y exigiendo en cada caso que el intervalo abierto I sea el mayor posible.

3º) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales. Se deben hallar todas las soluciones posibles, expresando y como función de x, e indicando cuál es el máximo intervalo abierto I en que está definida cada solución.

a) $2xy' = y(y')^2 + y$.

b) $yy'' - (y')^2 + yy' = 0$.

4º) Sea $h : R \to R$ una función continua. Supongamos que (f_n) es una sucesión equicontinua de funciones reales definidas en $[1,2]$, tales que $|f_n(x)| \leq h(x)$, para todo $x \in [1.2]$. Sea A el conjunto de los números racionales pertenecientes al intervalo $[1.2]$. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decir si es cierta (demostrándola) o falsa (poniendo un contraejemplo).

a) Si (f_n) converge puntualmente en A, entonces (f_n) converge puntualmente en $[1.2]$.

b) Si (f_n) converge puntualmente en A, entonces (f_n) converge uniformemente en $[1.2]$.

c) Es posible extraer de (f_n) una subsucesión (g_n) que converge uniformemente en $[1.2]$.

[Sugerencia: Recuérdese la demostración del Teorema de Ascoli (probarlo -para este caso-, no sólo citarlo).]

Solución.-

1º) a) $9x(y')^2 + y^2 = 25$. Se puede hacer de distintas formas. Dos de ellas se indican a continuación.

Derivando la ecuación dada (suponemos que y' es derivable), obtenemos que

I. $9(y')^2 + 18xy'y'' + 2yy' = 0$; es decir, $y'(9y' + 18xy'' + 2y) = 0$.

Si $y' = 0$ (en todo su intervalo de definición), entonces, sustituyendo en la ecuación inicial, se tiene que

$y^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5$ o $y = -5$.

Es inmediato comprobar que las dos funciones constantes $y = 5$, $y = -5$, definidas en toda la recta real R, son, en efecto, soluciones de la ecuación dada.

Supongamos que $y' \neq 0$ (si y' es continua y es distinta de cero en un punto, entonces es distinta de cero en un entorno de ese punto).

Debe ser pues, en este caso, $9y' + 18xy'' + 2y = 0.$ (I)

Consideremos en primer lugar el caso en que $x > 0$.

Del mismo modo que se hizo en otros ejercicios propuestos en el foro, podemos poner $u = y'\sqrt{x}$ (siendo $x > 0$);

con lo que tenemos, sustituyendo en la ecuación incial, que

$9u^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 - 9u^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25 - 9u^2}$.

(Nótese que, ya que $25 - 9u^2 = y^2$, debe ser $25 - 9u^2 \geq 0$).

Además, como hemos puesto $u = y'\sqrt{x}$ (siendo $x > 0$), debe ser

$u' = y''\sqrt{x} + \frac{y'}{2\sqrt{x}} = \frac{2y''x+y'}{2\sqrt{x}} \Leftrightarrow 2u'\sqrt{x} = 2y''x + y'$.

Sustituyendo en la ecuación (I),

$0 = 9y' + 18xy'' + 2y = 9(y' + 2xy'') + 2y = 18u'\sqrt{x} + 2y = 2(9u'\sqrt{x} + y)$.

Por tanto, $9u'\sqrt{x} + y = 0$; y hemos visto antes que $y = \pm\sqrt{25 - 9u^2}$.

Se obtiene pues que $\pm\sqrt{25 - 9u^2} = 9u'\sqrt{x}$, siendo $x > 0$ y $25 - 9u^2 \geq 0$.

Si fuera $25 - 9u^2 = 0$, en un intervalo, entonces sería $y = 0$ en ese intervalo, y la constante cero no es solución como inmediatamente se comprueba. Podemos suponer pues que $25 - 9u^2 > 0$.

Se tiene pues que $\pm\sqrt{25 - 9u^2} = 9u'\sqrt{x}$, siendo $x > 0$ y $25 - 9u^2 > 0$.

Por tanto, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{9u'}{\pm\sqrt{25-9u^2}} = \frac{9u'}{\pm5\sqrt{1-\frac{9}{25}u^2}}$.

Integrando, resulta que $2\sqrt{x} = \pm3arcsen(\frac{3}{5}u) + A$, siendo A una constante.

Y, por tanto, poniendo $B = -\frac{A}{3}$, se obtiene que $\pm(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B) = arcsen(\frac{3}{5}u)$.

Luego $\frac{3}{5}u = sen(\pm(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B)) = \pm sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B)$. En consecuencia, $u = \pm\frac{5}{3}sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B)$.

Ya que $u = y'\sqrt{x}$, se tiene que $y'\sqrt{x} = \pm\frac{5}{3}sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B)$;

luego $y' = \pm\frac{5}{3\sqrt{x}}sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B)$..

Por tanto, $y = \pm5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B) = 5sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + K)$,

ya que $5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B) = 5sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B + \frac{\pi}{2})$ (ponemos $K = B + \frac{\pi}{2}$),

y $-5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B) = 5sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + B - \frac{\pi}{2})$ (ponemos $K = B - \frac{\pi}{2}$)-

Un sencillo cálculo permite comprobar que, en efecto, para cualquier constante K, la función $y = 5sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + K)$, definida para $x > 0$,

es solución de la ecuación dada.

Nótese que, debido a las igualdades antes señaladas, esto equivale a decir que, para cualquier constante K, la función $y = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x} + K)$, definida para $x > 0$,

es solución de la ecuación dada.

Consideremos en segundo lugar el caso en que $x < 0$.

Del mismo modo que se hizo en otros ejercicios propuestos en el foro, podemos poner $u = y'\sqrt{-x}$ (siendo $x < 0$);

con lo que tenemos, sustituyendo en la ecuación incial, que

$-9u^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 = 25 + 9u^2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{25 + 9u^2}$.

(Nótese que $25 + 9u^2 > 0$).

Además, como hemos puesto $u = y'\sqrt{-x}$ (siendo $x < 0$), debe ser

$u' = y''\sqrt{-x} - \frac{y'}{2\sqrt{-x}} = \frac{-2y''x - y'}{2\sqrt{-x}} \quad \Leftrightarrow \quad -2u'\sqrt{-x} = 2y''x + y'.$

Sustituyendo en la ecuación (I),

$9y' + 18xy'' + 2y = 9(y' + 2xy'') + 2y = -18u'\sqrt{-x} + 2y = 2(-9u'\sqrt{-x} + y).$

Por tanto, $-9u'\sqrt{-x} + y = 0$; y hemos visto antes que $y = \pm\sqrt{25 + 9u^2}$

Se tiene pues que $\pm\sqrt{25 + 9u^2} = 9u'\sqrt{-x}$, siendo $x < 0$ y $25 + 9u^2 > 0$.

Por tanto, $\frac{1}{\sqrt{-x}} = \frac{9u'}{\pm\sqrt{25+9u^2}} = \frac{9u'}{\pm 5\sqrt{1+\frac{9}{25}u^2}}$.

Integrando, resulta que $2\sqrt{-x} = \pm 3 \arg Sh(\frac{3}{5}u) + A$, siendo A una constante.

Y, por tanto, poniendo $B = -\frac{A}{3}$, se obtiene que $\pm(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + B) = \arg Sh(\frac{3}{5}u)$.

Luego $\frac{3}{5}u = Sh(\pm(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + B)) = \pm Sh(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + B)$. En consecuencia,

$u = \pm\frac{5}{3}Sh(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + B)$.

Ya que $u = y'\sqrt{-x}$, se tiene que $y'\sqrt{-x} = \pm\frac{5}{3}Sh(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + B)$, siendo $x < 0$.

Luego $y' = \pm\frac{5}{3\sqrt{-x}}Sh(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + B)$.

Por tanto, $y = \pm 5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + K)$, siendo $K = B$ una constante. (Nótese que, dado un número real z, $Ch(-z) = Chz$).

Un sencillo cálculo permite comprobar que, en efecto, para cualquier constante K, las funciones $y = 5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + K)$, $y = -5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + K)$, ambas definidas para $x < 0$, son soluciones de la ecuación dada.

Resumiendo, las soluciones son:

Las funciones constantes $y = 5$, $y = -5$, ambas definidas en toda la recta real $I = R$.

Las funciones de la forma $y = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x} + K)$, siendo K cualquier constante real, definidas en $I = \{x \in R/x > 0\}$.

Las funciones de la forma $y = 5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + K)$, $y = -5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x} + K)$, siendo K cualquier constante real, definidas en $I = \{x \in R/x < 0\}$.

——— ———— ———- ———-

II. Veamos otra forma de hacerlo, más corta y sencilla (por tanto, mejor), debida a una alumna. Todos los procedimientos correctos utilizan en el fondo las mismas claves, y conducen al mismo resultado.

Se tiene que, si $y' = 0$, entonces $y^2 = 25 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5$ o $y = -5$.

Es inmediato comprobar que las dos funciones constantes $y = 5$, $y = -5$, definidas en toda la recta real R, son, en efecto, soluciones de la ecuación dada.

Supongamos que $y' \neq 0$ (si y' es continua y es distinta de cero en un punto, entonces es distinta de cero en un entorno de ese punto).

Puesto que $9x(y')^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow 9x(y')^2 = 25 - y^2$.

Ya que el intervalo I (de definición de la función derivable y) es un conjunto abierto, no se reduce a un solo punto, y por tanto debe contener puntos distintos de 0.

Para $x \neq 0$, se tiene que $(y')^2 = \frac{25-y^2}{9x}$.

Consideremos en primer lugar el caso en que $x > 0$.

Debe ser entonces $25 - y^2 = 9x(y')^2 > 0$.

Luego $\frac{y'}{\pm\sqrt{25-y^2}} = \frac{1}{3\sqrt{x}}$, siendo $x > 0$, $25 - y^2 > 0$. Por tanto, $\frac{\frac{1}{5}y'}{\pm\sqrt{1-(\frac{1}{5}y)^2}} = \frac{1}{3\sqrt{x}}$.

Integrando, tenemos que $arcsen(\pm\frac{1}{5}y) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + C$, siendo C una constante.

Así pues, $y = \pm 5sen(\frac{2}{3}\sqrt{x} + C) = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x} + K)$, siendo K una constante.

(Nótese que, dada una constante C,
$5sen(\frac{2}{3}\sqrt{x}+C) = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x}+C-\frac{\pi}{2}) = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x}+K)$, con $K = C-\frac{\pi}{2}$; y
$-5sen(\frac{2}{3}\sqrt{x}+C) = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x}+C+\frac{\pi}{2}) = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x}+K)$, con $K = C+\frac{\pi}{2}$).

Consideremos en segundo lugar el caso en que $x < 0$.
Debe ser entonces $25-y^2 = 9x(y')^2 < 0$. Y, por tanto,
$y^2-25 = -9x(y')^2 = 9(-x)(y')^2 > 0$.
Luego $\frac{y'}{\pm\sqrt{y^2-25}} = \frac{1}{3\sqrt{-x}}$, siendo $x < 0, y^2-25 > 0$. Por tanto, $\frac{\frac{1}{5}y'}{\pm\sqrt{(\frac{1}{5}y)^2-1}} = \frac{1}{3\sqrt{-x}}$.
Integrando, tenemos que $argCh(\pm\frac{1}{5}y) = -\frac{2}{3}\sqrt{-x}+C$, siendo C una constante.
Así pues, $y = \pm 5Ch(-\frac{2}{3}\sqrt{-x}+C) = \pm 5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x}+K)$, con $K = -C$, ya que
$Ch(-\frac{2}{3}\sqrt{-x}+C) = Ch(-(\frac{2}{3}\sqrt{-x}-C)) = Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x}-C)$.

Resumiendo, y del mismo modo que antes, las soluciones son:
Las funciones constantes $y = 5$, $y = -5$, ambas definidas en toda la recta real $I = R$.
Las funciones de la forma $y = 5\cos(\frac{2}{3}\sqrt{x}+K)$, siendo K cualquier constante real, definidas en $I = \{x \in R/x > 0\}$.
Las funciones de la forma $y = 5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x}+K)$, $y = -5Ch(\frac{2}{3}\sqrt{-x}+K)$, siendo K cualquier constante real, definidas en $I = \{x \in R/x < 0\}$.

1º) b) $yy'' + 9 = (y')^2$.
También puede hacerse de varias formas. Veamos una de ellas.
Podemos poner $y'' = \frac{dy'}{sx} = \frac{dy'}{dy}\frac{dy}{dx} = y'\frac{dy'}{dy}$, con lo que tenemos que
$yy'\frac{dy'}{dy}+9 = (y')^2 \quad\Leftrightarrow\quad yy'\frac{dy'}{dy} = (y')^2-9$.

Si $(y')^2-9 = 0$, entonces $(y')^2 = 9$, $y' = \pm 3$, $y = \pm 3x+K$, siendo K una constante. En este caso, al ser y' constante, su derivada es la constante 0.
Un sencillo cálculo permite comprobar que, en efecto, para cualquier valor de la constante K, las funciones $y = 3x+K$, $y = -3x+K$, ambas definidas en toda la recta real, son soluciones de la ecuación dada.
Supongamos pues que $(y')^2-9 \neq 0$. Por tanto, la función y no puede ser la constante 0. Para $y \neq 0$, tenemos que
$\frac{y'\frac{dy'}{dy}}{(y')^2-9} = \frac{1}{y}$.
Integrando con respecto a y, obtenemos que

$\frac{1}{2}\log|(y')^2-9| = \log|y|+A$, siendo A una constante. Luego
$\log|(y')^2-9| = 2\log|y|+B$, poniendo $B = 2A$.
Por tanto, $|(y')^2-9| = Cy^2$, siendo $C > 0$; es decir,
$(y')^2-9 = Dy^2$, siendo $D \neq 0$.
Así pues, $(y')^2 = 9+Dy^2$, con $D \neq 0$.

Debe ser pues $9+Dy^2 \geq 0$. Si fuera $9+Dy^2 = 0$, entonces sería $y' = 0$, y la función y' no puede ser la constante 0 porque no se cumpliría la ecuación inicial.
Podemos poner pues $9+Dy^2 > 0$.

Se tiene, por tanto, que $y' = \pm\sqrt{9+Dy^2}$, y $1 = \frac{y'}{\pm\sqrt{9+Dy^2}} = \frac{\frac{1}{3}y'}{\pm\sqrt{1+\frac{D}{9}y^2}}$, siendo $D \neq 0$. (I)

Supongamos en primer lugar $D > 0$. Ponemos $D = a^2$, con $a \neq 0$.

Integrando la ecuación (I), obtenemos que $\pm x + C = \frac{1}{a}\arg Sh(\frac{a}{3}y)$, siendo C una constante, con $a \neq 0$.

Por tanto, se tiene , poniendo $aC = b$ o $-aC = b$ según el caso, que

$\pm(ax+b) = \arg Sh(\frac{a}{3}y)$. Luego $\frac{a}{3}y = Sh(\pm(ax+b)) = \pm Sh(ax+b)$,
$y = \pm\frac{3}{a}Sh(ax+b)$, con $a \neq 0$, siendo b una constante.

Un sencillo cálculo permite comprobar que, en efecto, para cualquier constante $a \neq 0$, y para cualquier constante b,

las funciones $y = \frac{3}{a}Sh(ax+b), y = -\frac{3}{a}Sh(ax+b)$, ambas definidas en toda la recta real, son soluciones de la ecuación considerada.

Supongamos en segundo lugar $D < 0$. Ponemos $D = -a^2$, con $a \neq 0$.

Integrando la ecuación (I), obtenemos que $\pm x + C = \frac{1}{a}arcsen(\frac{a}{3}y)$, siendo C una constante, con $a \neq 0$.

Por tanto, se tiene , poniendo $aC = d$ o $-aC = d$ según el caso, que

$\pm(ax+d) = arcsen(\frac{a}{3}y)$. Luego $\frac{a}{3}y = sen(\pm(ax+d)) = \pm sen(ax+d) = sen(ax+b)$,

siendo b una constante, ya que $-sen(ax+d) = sen(ax+d+\pi)$.

Así pues, $y = \frac{3}{a}sen(ax+b)$, con $a \neq 0$, siendo b una constante.

Un sencillo cálculo permite comprobar que, en efecto, para cualquier constante $a \neq 0$, y para cualquier constante b, la función $y = \frac{3}{a}sen(ax+b)$, definida en toda la recta real, es solución de la ecuación dada.

Resumiendo, las soluciones son:

Las funciones $y = 3x+b$, $y = -3x+b$, siendo b cualquier constante real, definidas en toda la recta real $I = R$.

Las funciones de la forma $y = \frac{3}{a}sen(ax+b)$, siendo a cualquier constante distinta de cero, y siendo b cualquier constante, definidas en toda la recta real $I = R$.

Las funciones de la forma $y = \frac{3}{a}Sh(ax+b), y = -\frac{3}{a}Sh(ax+b)$, siendo a cualquier constante distinta de cero, y siendo b cualquier constante, definidas en toda la recta real $I = R$.

2º) Puesto que la normal a la gráfica pasa por un punto del eje vertical, esta normal no debe ser vertical a menos que coindida con dicho eje. Por tanto, la tangente a la gráfica en cualquier punto $P(x,y)$ no puede ser horizontal (es decir, no puede ser $y' = 0$), a menos que sea $x = 0$.

Si $y' \neq 0$, la ecuación de la recta normal a la gráfica en un punto $P(x,y)$ es
$Y - y = -\frac{1}{y'}(X-x)$.

Se comprueba inmediatamente que el punto donde esta recta corta al eje vertical es $Q(0, y+\frac{x}{y'})$.

Escribiendo la condición que dice el enunciado, que la distancia de Q al origen de coordenadas sea igual a la distancia de Q al punto P, obtenemos que

$\left|y+\frac{x}{y'}\right| = \sqrt{x^2+(\frac{x}{y'})^2} \Leftrightarrow \left|\frac{yy'+x}{y'}\right| = \frac{|x|\sqrt{(y')^2+1}}{|y'|} \Leftrightarrow |yy'+x| = |x|\sqrt{(y')^2+1}$.

Si $x \neq 0$, se tiene que $|\frac{y}{x}y'+1| = \sqrt{(y')^2+1}$.

Y, por tanto, $(\frac{y}{x})^2(y')^2 + 2\frac{y}{x}y' + 1 = (y')^2+1 \Leftrightarrow (\frac{y}{x})^2(y')^2 + 2\frac{y}{x}y' = (y')^2$.

Ya que $y' \neq 0$, se obtiene que $(\frac{y}{x})^2 y' + 2\frac{y}{x} = y' \Leftrightarrow ((\frac{y}{x})^2 - 1)y' + 2\frac{y}{x} = 0$.

Poniendo $u = \frac{y}{x}$, tenemos que $y = ux$, $y' = u'x + u$, y
$(u^2-1)(u'x+u) + 2u = 0 \Leftrightarrow (u^2-1)(u'x) + u^3 + u = 0$.

Luego $u^3 + u = (1-u^2)(u'x)$.

Ya que $u^3 + u = u(u^2+1)$ es distinto de cero si $u \neq 0$, lo cual se verifica si $y \neq 0$, se sigue de lo anterior, para $x \neq 0$, $y \neq 0$, que
$\frac{1}{x} = \frac{1-u^2}{u^3+u}u' = (-\frac{2u}{u^2+1} + \frac{1}{u})u'$.

Integrando, $\log|x| = \log|u| - \log(u^2+1) + C = \log\left|\frac{u}{u^2+1}\right| + C$, siendo C una constante.

Luego $|x| = e^C\left|\frac{u}{u^2+1}\right| \Leftrightarrow x = A\frac{u}{u^2+1}$, siendo $A = e^C$ o $A = -e^C$ una constante distinta de cero.

Así pues,
$u^2 + 1 = A\frac{u}{x} \Leftrightarrow (\frac{y}{x})^2 + 1 = A\frac{y}{x^2} \Leftrightarrow y^2 + x^2 = Ay \Leftrightarrow y^2 - Ay + x^2 = (y - \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2 + x^2$
$\Leftrightarrow (y - \frac{A}{2})^2 + x^2 = (\frac{A}{2})^2 \Leftrightarrow (y-r)^2 + x^2 = r^2$, siendo $r \neq 0$. (Ecuación de una circunferencia de centro en $(0,r)$ y radio $|r| > 0$).

En consecuencia, $(y-r)^2 = r^2 - x^2$, luego debe ser $r^2 - x^2 \geq 0$.

Por tanto, $y - r = \pm\sqrt{r^2-x^2} \Leftrightarrow y = r \pm \sqrt{r^2-x^2}$,
siendo $r^2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \leq |r| \Leftrightarrow -|r| \leq x \leq |r|$.

Puesto que la función y debe ser derivable, debe ser $-|r| < x < |r|$.

Las soluciones, por tanto, son de la forma $y = r + \sqrt{r^2-x^2}$, $y = r - \sqrt{r^2-x^2}$,
funciones ambas que están definidas en el intervalo abierto $I = (-|r|, |r|)$, y cuya gráfica es una semicircunferencia, siendo $r \neq 0$.

Un sencillo cálculo permite comprobar que, en efecto, para cualquier $r \neq 0$, las funciones anteriores cumplen la condición del enunciado.

Y cualquier solución es una de las anteriores, de acuerdo con lo antes visto.

Observación.- Dado un número real $r \neq 0$, las circunferencias de centro en $(0,r)$ y radio $|r| > 0$, cuya ecuación es $(y-r)^2 + x^2 = r^2$, pasan por el origen de coordenadas, y cumplen la condición de que la normal en cada punto P corta al eje vertical en un punto (el centro de la circunferencia) que equidista del origen de coordenadas y del punto P considerado. Si queremos expresar y como función derivable de x, se obtienen las dos semicircunferencias antes indicadas, definidas ambas en el intervalo abierto $I = (-|r|, |r|)$. Lo que hemos hecho prueba no solamente que estas semicircunferencias son soluciones del problema propuesto en el enunciado, como es fácil comprobar, sino que además son las únicas; es decir, que cualquier solución es una de éstas, para algún $r \neq 0$.

3º) a) $2xy' = y(y')^2 + y$.

Puede ponerse también así: $y(y')^2 - 2xy' + y = 0$.

Es inmediato comprobar que la función constante $y = 0$, definida en toda la recta real, es solución de la ecuación considerada.

Si y es distinta de cero en un punto, entonces, al ser continua (pues es derivable), también es distinta de cero en un entorno de ese punto.

Supongamos pues $y \neq 0$.

Podemos entonces despejar y' en la ecuación anterior, obteniendo que
$y' = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 - 4y^2}}{2y} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - y^2}}{y}$.

Para que esta expresión tenga sentido, debe ser $x^2 - y^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow y^2 \leq x^2 \Leftrightarrow |y| \leq |x|$.

Se verifica pues que $yy' = x \pm \sqrt{x^2 - y^2}$.

Para $x \neq 0$, se tiene que $\frac{y}{x} y' = 1 \pm \sqrt{1 - (\frac{y}{x})^2}$.

Poniendo $u = \frac{y}{x}$, se verifica que $y = ux$, $y' = u'x + u$, y

$u(u'x + u) = 1 \pm \sqrt{1 - u^2} \Leftrightarrow uu'x = 1 - u^2 \pm \sqrt{1 - u^2}$.

Ya que $y \neq 0$, debe ser $u = \frac{y}{x} \neq 0$.

Si fuera $0 = u' = \frac{y'x - y}{x^2}$, entonces sería $y'x - y = 0 \Leftrightarrow y'x = y$. Y ya que $y \neq 0$ y $x \neq 0$, se obtiene que $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x}$.

Integrando, $\log|y| = \log|x| + A$, siendo A una constante; luego $|y| = e^A|x|$, $y = Kx$ siendo $K \neq 0$.

Sustituyendo en la ecuación inicial, obtenemos que la función $y = Kx$, con $K \neq 0$, es solución si, y solamente si, para todo $x \in I$ se verifica que

$2xK = K^3x + Kx \Leftrightarrow Kx = K^3x$.

Por tanto, la función $y = Kx$, con $K \neq 0$, es solución si, y solamente si, $1 = K^2 \Leftrightarrow K = 1$ o $K = -1$.

Es inmediato comprobar que las funciones $y = x$, $y = -x$, ambas definidas en toda la recta real, son soluciones de la ecuación considerada.

Si $y \neq x$, $y \neq -x$, entonces $y^2 \neq x^2$. Y ya que $y^2 \leq x^2$ según hemos visto, si además $y^2 \neq x^2$, entonces debe ser $y^2 < x^2$. Por tanto, $u^2 = \frac{y^2}{x^2} < 1$.

Supongamos ahora $0 \neq u'$; y ya que $u \neq 0$, para $x \neq 0$ se tiene que

$0 \neq uu'x = 1 - u^2 \pm \sqrt{1 - u^2}$.

Debe ser pues $\frac{uu'}{1 - u^2 \pm \sqrt{1 - u^2}} = \frac{1}{x}$, con $x \neq 0$.

Poniendo $v = 1 - u^2$ se tiene que $0 < v < 1$, $v' = -2uu'$, y

$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \frac{v'}{v \pm \sqrt{v}} = -(\frac{1}{\pm 2\sqrt{v}} \frac{1}{1 \pm \sqrt{v}})v'$, con $x \neq 0$.

Integrando,

$-\log|x| = \log|1 \pm \sqrt{v}| + A$, siendo A una constante; luego $\frac{1}{|x|} = B|1 \pm \sqrt{v}|$, con $B = e^A > 0$;

es decir, $\frac{1}{Kx} = 1 \pm \sqrt{v}$, siendo $K \neq 0$.

Así pues, $\pm\sqrt{v} = \frac{1}{Kx} - 1 = \frac{1 - Kx}{Kx}$, con $K \neq 0$. Luego $v = 1 - u^2 = \frac{(1 - Kx)^2}{K^2x^2}$.

Por tanto, $\frac{y^2}{x^2} = u^2 = 1 - \frac{(1 - Kx)^2}{K^2x^2} = \frac{2Kx - 1}{K^2x^2}$. En consecuencia,

$y^2 = \frac{2Kx - 1}{K^2} = 2\frac{1}{K}x - \frac{1}{K^2} = 2Cx - C^2 = x^2 - (x - C)^2$, siendo $C = \frac{1}{K} \neq 0$.

Luego $y = \pm\sqrt{2Cx - C^2} = \pm\sqrt{x^2 - (x - C)^2}$.

Un sencillo cálculo permite comprobar que la función y así obtenida, allí donde está bien definida y sea derivable, es solución de la ecuación dada, para cualquier constante $C \neq 0$.

Debe ser $2Cx - C^2 \geq 0$; y teniendo en cuenta también que y debe ser derivable, debe ser $2Cx - C^2 = C(2x - C) > 0$.

Si $C > 0$, entonces debe ser $2x - C > 0$, luego $x > \frac{C}{2}$.

Si $C < 0$, entonces debe ser $2x - C < 0$, luego $x < \frac{C}{2}$.

Nótese que la función constante $y = 0$, que es solución como antes vimos, puede ponerse en la forma $y^2 = 2Cx - C^2$, siendo $C = 0$.

Resumiendo, las soluciones son:

Las funciones $y = 0$, $y = x$, $y = -x$, definidas en toda la recta real $I = R$.

Las funciones de la forma $y = \sqrt{2Cx - C^2}$, $y = -\sqrt{2Cx - C^2}$, siendo $C > 0$, definidas en el intervalo $I = \{x \in R/x > \frac{C}{2}\} =]\frac{C}{2}, \rightarrow[$.

Las funciones de la forma $y = \sqrt{2Cx - C^2}$, $y = -\sqrt{2Cx - C^2}$, siendo $C < 0$, definidas en el intervalo $I = \{x \in R/x < \frac{C}{2}\} =]\leftarrow, \frac{C}{2}[$.

(Nótese que $2Cx - C^2 = x^2 - (x-C)^2$).

(Al igual que en los problemas anteriores, hay también otras formas de resolverlo).

3º) b) $yy'' - (y')^2 + yy' = 0$.

Es inmediato comprobar que la función constante $y = 0$, definida en toda la recta real, es solución de la ecuación considerada.

Si la función y es distinta de cero en un punto, entonces, ya que es continua (pues es derivable), debe ser distinta de cero en un entorno de ese punto.

Si $y \neq 0$, se tiene, dividiendo por y^2, que

$\frac{yy''-(y')^2}{y^2} + \frac{y'}{y} = 0.$

Y ya que $\frac{yy''-(y')^2}{y^2} = (\frac{y'}{y})'$, obtenemos que $(\frac{y'}{y})' + \frac{y'}{y} = 0$.

Luego $(\frac{y'}{y})' = -\frac{y'}{y}$.

Si $y' = 0$ en un intervalo, entonces, en ese intervalo, $y'' = 0$, y la función y es constante. Es inmediato comprobar que cualquier constante $y = K$, definida en toda la recta real, es solución de la ecuación considerada.

Si $y' \neq 0$, entonces, de la igualdad $(\frac{y'}{y})' = -\frac{y'}{y}$, se obtiene que $\frac{(\frac{y'}{y})'}{\frac{y'}{y}} = -1$.

Integrando, se obtiene que $\log\left|\frac{y'}{y}\right| = -x + C$, siendo C una constante; luego $\left|\frac{y'}{y}\right| = \frac{B}{e^x}$, siendo $B = e^C > 0$.

Se sigue que $\frac{y'}{y} = \frac{K}{e^x} = Ke^{-x}$, siendo $K \neq 0$.

Integrando, $\log|y| = -Ke^{-x} + D$, siendo D una constante. Poniendo $A = -K$, se obtiene que $\log|y| = Ae^{-x} + D$, con $A \neq 0$.

Por tanto, $|y| = e^D e^{Ae^{-x}}$, siendo $L \neq 0$. Poniendo $K = e^D$ o $K = -e^D$ según el caso, obtenemos que $y = Ke^{Ae^{-x}}$, siendo $K \neq 0$ y $A \neq 0$.

Nótese que, si fuera $A = 0$, se obtendría $y = K$, función constante que es solución como antes vimos.

Y si fuera $K = 0$, se obtendría $y = 0$, función constante que también es solución.

Un sencillo cálculo permite comprobar que, para cualquier valor de las constantes K y A, la función $y = Ke^{Ae^{-x}}$, definida en toda la recta real $I = R$, es solución de la ecuación considerada. Y cualquier solución es de esta forma, de acuerdo con lo que hemos visto.

Nótese que, en particular, para $A = 0$, se obtienen las funciones constantes $y = K$, que son soluciones como antes vimos, para cualquier valor de K.

4º) a) Está hecho en el libro (Teorema 2.1.1, página 327). La demostración es la que viene ahí, aunque hay que particularizarla para este caso.

b) También está hecho en el libro (Teorema 4.1.1, página 328, teniendo en cuenta también lo que hemos probado en el apartado anterior). La demostración es la que viene ahí, aunque hay que particularizarla para este caso.

c) Para cada $x \in [1.2]$, ponemos $fx) = \lim_{n\to+\infty} (f_n(x))$. Puesto que la función f así definida es continua (Teorema 3.1.1 del libro, página 328), y el intervalo $[1,2]$ es compacto, la función f está acotada. El resultado se sigue entonces del Teorema de Ascoli (Teorema 1.1.2 del libro, página 329), y la demostración es la que viene en la página 330 del libro, aunque hay que particularizarla para este caso.