Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2018/2019, Septiembre

1. Dos masas m y 2m están sobre una pista con bordes redondeados como la de la figura, a unas alturas h y 4h, respectivamente. Ambas están inicialmente en reposo. Después se deja que deslicen sobre la pista por acción de la gravedad, sin rozamiento entre cada masa y la superficie de la pista. Cuando se encuentran en la superficie horizontal chocan elásticamente. Calcule las alturas máximas h_1 y h_2 que alcanzan las dos masas después del choque. **(2 puntos)**

Solución

Consideramos positivo el sentido del eje horizontal hacia la derecha, es decir, al principio m tiene velocidad positiva y 2m velocidad negativa; el origen de energía potencial en la superficie horizontal de la pista.

Si no hay rozamiento, la energía se conserva. Toda la energía potencial respecto a la horizontal se convierte en energía cinética

$$mgh = \frac{1}{2} m\, u_1^2$$

$$2mg\; 4h = \frac{1}{2} 2m\, u_2^2$$

Las velocidades u1 y u2 con las que llegan a la superficie horizontal son

$$u_1 = \sqrt{2\; g\; h} = u$$

$$u_2 = -\sqrt{2\; g\; 4\; h} = -2\; u$$

Si el choque es elástico, se conservan el momento y la energía. Teniendo en cuenta los sentidos del movimiento de los bloques después del choque y tomando v1 y v2 para los módulos de las velocidades después del choque:

$$m\, u + 2m\, (-2\, u) = -m\, v_1 + 2m\, v_2$$

$$\frac{1}{2}mu^2 + \frac{1}{2}2m\, 4u^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}2mv_2^2$$

De donde:

$$-3\, u = -v_1 + 2\, v_2$$

$$9\, u^2 = v_1^2 + 2v_2^2$$

Si despejamos v1 de la primera ecuación

$$v_1 = 3\, u + 2\ \ v_2$$

y substituimos en la segunda ecuación:

$$9\, u^2 = 9\, u^2 + 4v_2^2 + 12\, u\, v_2 + 2v_2^2$$

Tenemos que

$$6v_2^2 + 12\, u\, v_2 = 0$$

Cuyas soluciones son $v_2 = 0$ y $v_2 = -2u$. Descartamos la segunda ya que v_2 tiene que ser positiva (es el módulo de la velocidad). Por tanto, el bloque de masa 2m se queda parado en el lugar del choque

$$h_2 = 0$$

Substituyendo en la ecuación de v_1:

$$v_1 = 3\, u$$

Por conservación de la energía, el bloque de masa m asciende hasta una altura de:

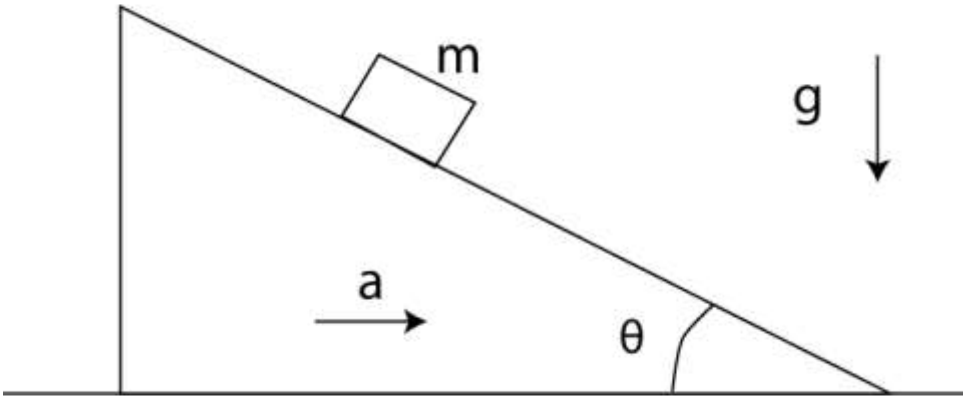
$$mgh_1 = \frac{1}{2}m\, v_1^2$$

$$h_1 = \frac{1}{2g}\ v_1^2 = \frac{9\ 2gh}{2g} = 9h$$

Podemos comprobar que la energía potencial es la misma en los instantes inicial y final:

$$U = 9mgh$$

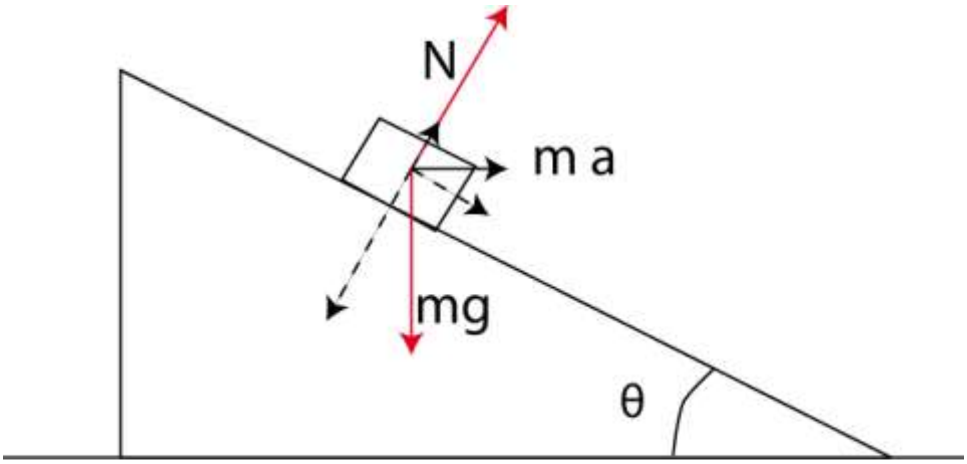
2. Una masa m se apoya sobre un plano inclinado, que forma un ángulo θ con la horizontal. El plano inclinado se mueve sobre la superficie horizontal con una aceleración constante a. Considere que el rozamiento entre la partícula y el plano, así como la resistencia del aire son despreciables. Encuentre la expresión de la magnitud de la fuerza normal que ejerce el plano inclinado sobre la partícula en el caso en el que la partícula permanezca en reposo respecto a dicho plano inclinado. Dibuje un diagrama de las fuerzas para resolver el problema. **(2 puntos)**



Solución

En el diagrama se representan las fuerzas que tenemos que considerar y su descomposición. La única fuerza exterior es la de la gravedad sobre m. Además, sobre la masa el plano inclinado ejerce una fuerza en la dirección perpendicular a la superficie sobre la que descansa. Esta fuerza normal es diferente a la que ejercería si el plano no tuviera aceleración, ya que esta fuerza colabora al movimiento de m con aceleración a. Las dos fuerzas están representadas en rojo.

Sabemos que la fuerza resultante de estas dos fuerzas es la que mueve a la partícula solidariamente con el plano con una aceleración a (flecha en negro).



Esta fuerza la podemos descomponer en sus componentes sobre las direcciones paralela y perpendicular al plano inclinado.

La fuerza perpendicular es la diferencia entre la normal y la correspondiente componente del peso

$$N - m\ g\ cos\theta = m\ a \sin\theta$$

La componente paralela al plano es debida únicamente al peso

$$m\ g \sin\theta = m\ a \cos\theta$$

Despejando obtenemos que

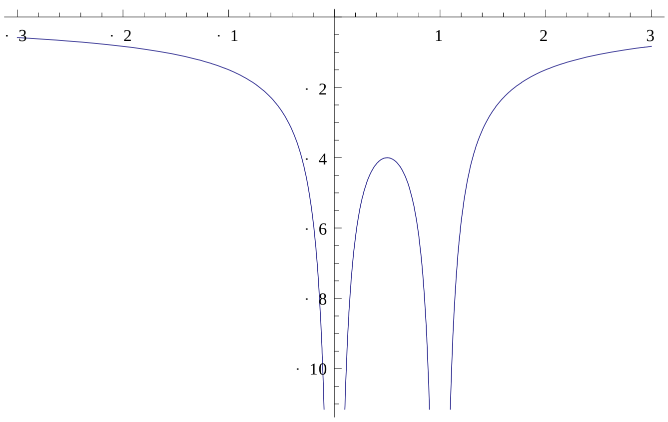
$$a = g\ tg\ \theta$$

y

$$N = m\left(g\cos\theta + g\frac{\sin\theta}{cos\theta}\sin\theta\right) = \frac{mg}{\cos\theta}$$

El mismo resultado lo podemos obtener directamente igualando las componentes verticales de las dos fuerzas (paralelas a la gravedad).

3. Supongamos una masa puntual M_1 que se encuentra fija en el origen de nuestro sistema de referencia. Otra masa puntual M_2 se encuentra fija a una distancia $d > 0$ del origen, sobre el eje X. Supongamos que colocamos una tercera masa m en un punto x del eje. Si representamos gráficamente la energía potencia gravitatoria de esta tercera masa debida a los campos gravitatorios de las dos masas fijas, en función de x, obtenemos una gráfica cualitativamente similar a la que se muestra en la figura (para obtener esta gráfica hemos asumido por simplicidad que $G = M_1 = M_2 = m = d = 1$, y hemos considerado que el origen de la energía potencial corresponde a una separación infinita).



Obtener el valor de x en el que la energía potencial de la masa m tiene el máximo relativo, en función de M_1, M_2 y d. Calcular el valor de la fuerza gravitatoria ejercida por las dos masas fijas sobre la masa m situada en ese punto. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

La expresión de la energía potencial en función de la posición x de la masa m ya fue deducida en el examen de la convocatoria de junio de este mismo año (primera semana) y tiene la forma

$$E_P(x) = -G\frac{M_1 m}{|x|} - G\frac{M_2 m}{|x-d|}$$

El máximo relativo estará entre 0 y d, ya que ese máximo se corresponde con una fuerza total nula $\left(F(x) = -\dfrac{dE_P(x)}{dx} \right)$ y eso sólo se consigue en un punto intermedio. Para obtenerlo podemos derivar la función

$$E_P(x) = -G\frac{M_1 m}{x} - G\frac{M_2 m}{d-x}$$

con respecto a x e igualarla a 0:

$$\frac{dE_P(x)}{dx} = G\frac{M_1 m}{x^2} - G\frac{M_2 m}{\left(d-x\right)^2} = 0$$

y obtendremos la ecuación

$$M_1\left(d-x\right)^2 = M_2 x^2$$

Tomando raíces llegaremos a la solución buscada:

$$x_{\max} = \frac{d}{1+\sqrt{M_2/M_1}}$$

Si hubiéramos desarrollado el binomio de la ecuación anterior habríamos llegado a:

$$x_{\max} = d\,\frac{M_1 \pm \sqrt{M_1 M_2}}{M_1 - M_2}$$

Vemos que la única solución compatible con $x_{\max} \in (0,d)$ es:

$$x_{\max} = d\,\frac{M_1 - \sqrt{M_1 M_2}}{M_1 - M_2} = \frac{d}{1+\sqrt{M_2/M_1}}$$

Es evidente que en este máximo de energía potencial la fuerza total se anula (recordamos que $F(x) = -\dfrac{dE_P(x)}{dx}$). También podríamos habernos dado cuenta de esto al ver que la ecuación de más arriba:

$$\frac{dE_P(x)}{dx} = G\frac{M_1 m}{x^2} - G\frac{M_2 m}{\left(d-x\right)^2} = 0$$

no es más que la condición de que la fuerza gravitatoria total que actúa sobre la partícula es cero.

4. Supongamos que tenemos dos cargas puntuales que se mueven libremente bajo la interacción magnética que existe entre ellas (**no considerar la interacción eléctrica)**. La carga 1 tiene carga q_1, masa m_1, y su vector de posición es $\mathbf{r}_1(t)$. La segunda carga tiene carga q_2, masa m_2, y su vector de posición es $\mathbf{r}_2(t)$. Plantear la segunda ley de Newton para el movimiento de cada carga. Expresar esta ley en función únicamente de los vectores de posición y sus derivadas temporales: $\dot{\mathbf{r}}_1(t) = d\mathbf{r}_1(t)/dt$, $\dot{\mathbf{r}}_2(t) = d\mathbf{r}_2(t)/dt$, $\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = d^2\mathbf{r}_1(t)/dt^2$ y $\ddot{\mathbf{r}}_2(t) = d^2\mathbf{r}_2(t)/dt^2$, es decir, en la ecuación **sólo** deben

aparecer estas magnitudes vectoriales y los datos del problema (además de las constantes que sean necesarias). **(2 puntos)**

Solución

El campo magnético $\mathbf{B}_{ij}(t)$ creado por la carga i en el punto ocupado por la carga j tiene la forma:

$$\mathbf{B}_{12}(t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\dot{\mathbf{r}}_1(t)\times\left(\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)\right)}{\left\|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)\right\|^3}$$

$$\mathbf{B}_{21}(t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_2\dot{\mathbf{r}}_2(t)\times\left(\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)\right)}{\left\|\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)\right\|^3}$$

Ahora podemos expresar la fuerza $\mathbf{B}_{ij}(t)$ que experimenta la carga j debida al campo magnético creado por la carga i:

$$\mathbf{F}_{12}(t)=q_2\dot{\mathbf{r}}_2(t)\times\mathbf{B}_{12}(t)=\frac{\mu_0 q_2}{4\pi\left\|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)\right\|^3}\dot{\mathbf{r}}_2(t)\times\left(q_1\dot{\mathbf{r}}_1(t)\times\left(\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)\right)\right)$$

$$\mathbf{F}_{21}(t)=q_1\dot{\mathbf{r}}_1(t)\times\mathbf{B}_{21}(t)=\frac{\mu_0 q_1}{4\pi\left\|\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)\right\|^3}\dot{\mathbf{r}}_1(t)\times\left(q_2\dot{\mathbf{r}}_2(t)\times\left(\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)\right)\right)$$

Finalmente, la segunda ley de Newton para cada carga tiene la forma:

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1(t)=\mathbf{F}_{21}(t)=\frac{\mu_0 q_1}{4\pi\left\|\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)\right\|^3}\dot{\mathbf{r}}_1(t)\times\left(q_2\dot{\mathbf{r}}_2(t)\times\left(\mathbf{r}_1(t)-\mathbf{r}_2(t)\right)\right)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2(t)=\mathbf{F}_{12}(t)=\frac{\mu_0 q_2}{4\pi\left\|\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)\right\|^3}\dot{\mathbf{r}}_2(t)\times\left(q_1\dot{\mathbf{r}}_1(t)\times\left(\mathbf{r}_2(t)-\mathbf{r}_1(t)\right)\right)$$

5. Para un observador S dos eventos son simultáneos y ocurren a 600 km de separación en su eje X. ¿Cuál será la diferencia de tiempo entre tales eventos para un observador S' que se mueve a velocidad constante con respecto a S a lo largo del eje X, sabiendo que para S' la separación espacial de los eventos es 1200 km? **(2 puntos)**

Recordamos que las transformaciones de Lorentz son:

$$x=\gamma\left(x'+vt'\right)\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x'=\gamma\left(x-vt\right)\qquad t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma=1\big/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Solución

Sabemos que $\Delta x=600$ km, $\Delta x'=1200$ km y $\Delta t=0$. Aplicando las transformaciones de Lorentz tenemos

$$\Delta x'=\gamma\left(\Delta x-v\Delta t\right)=\gamma\Delta x$$

No debe confundirse esta expresión con la expresión para la contracción de longitudes:

$$L = \gamma^{-1} L_P$$

ya que longitudes y separación espacial de eventos son dos conceptos que en principio son diferentes, sobre todo cuando estamos trabajando con eventos que no ocurren simultáneamente.

Despejando obtenemos

$$v = 0{,}866c$$

Ahora podemos utilizar la expresión

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\Delta x'}{c^2}\right)$$

Haciendo $\Delta t = 0$ obtenemos finalmente

$$\Delta t' = -\frac{v\Delta x'}{c^2} = -\frac{0{,}866\times 1200}{c} = -3{,}46\times 10^{-3}\ \text{s}$$

Si llamamos A y B a estos eventos, el signo menos indica que para el observador S', el evento B ocurrió antes que el evento A.