084059	Junio - 2008 Original	ANALISIS MATEMATICO IV			405
		MATEMATICAS			08
		Duración: 120 min.	EXAMEN: Tipo - Desarrollo	CC. Penitenciarios	
MATERIAL: ÷ôÞH» Ninguno				Hoja: 1 de 1	

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. JUNIO 2008. 1. SEMANA

1. Pregunta. Enunciar y demostrar el teorema general de Cauchy.

2. Pregunta. Enunciar el Problema de Dirichlet en el disco y escribir la solución sin demostración.

3. Pregunta. Hallar los desarrollos en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)},$$

en las coronas

$$\begin{aligned} A_1 &= \{z \,|0 < |z| < 1\}, \\ A_2 &= \{z \,||z| > 1\}. \end{aligned}$$

4. Pregunta. Determinar una transformación fraccionaria lineal o de Möbius que transforme el círculo $D_2 = \{z \,||z| < 2\}$ en el semiplano $H_d = \{w \,|\mathrm{Re}\, w > 0\}$ de manera que $w(0) = 1$, y $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

Duración del Examen: 2 horas.

084059	Junio - 2008 Original	ANALISIS MATEMATICO IV MATEMATICAS		405 08
		Duración: 120 min.	EXAMEN: Tipo - Desarrollo	Extranjero (America-Guine
MATERIAL: ,l4q(Ninguno				Hoja: 1 de 1

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. JUNIO 2008. 2.SEMANA

1.Pregunta. Enunciar el Principio del Argumento, explicar su contenido en términos geométricos.

2.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema de Riemann de la transformación conforme.

3.Pregunta. Calcular la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1},$$

donde C es la circunferencia $C = \{z \,||z-(1+i)| = 1\}$.

Indicación para el cálculo de residuos: si $z = a$ es un polo simple de la función $f = 1/P$, P un polinomio, entonces $Res\,(f,a) = \frac{1}{P'(a)}$. Tratar de justificar este hecho.

4.Pregunta. Determinar y clasificar los puntos singulares aislados de

$$i)\ f(z) = ze^{\frac{1}{z}}\ ,\ ii)\ f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}.$$

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE

ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. JUNIO 2008. 1.SEMANA.

1. PROBLEMA Hallar los desarrollos en serie de Laurent de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$$

en las coronas

$$A_1 = \{ z \mid 0 < |z| < 1 \}$$

$$A_2 = \{ z \mid |z| > 1 \}$$

SOLUCION

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z}.$$

En A_1 se tiene

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 0}^{\infty} z^n$$

En A_2,

$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{1/z}{1/z - 1} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-1/z}\right)$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}.$$

2. PROBLEMA Determinar una transformación fraccionaria lineal o de Möbius que transforme el círculo $D_2 = \{ z \mid |z| < 2 \}$ en el semiplano $H_d = \{ w \mid \operatorname{Re} w > 0 \}$ de manera que $w(0) = 1$ y $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

SOLUCION.

La transformación

$$w = T(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

transforma D_1 sobre H_d con

$$w(0) = 1, \quad w'(0) = 1,$$

luego

$$w = T_1(z) = T\left(\frac{iz}{2}\right) = \frac{1 + \frac{iz}{2}}{1 - \frac{iz}{2}}$$

tiene las propiedades requeridas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

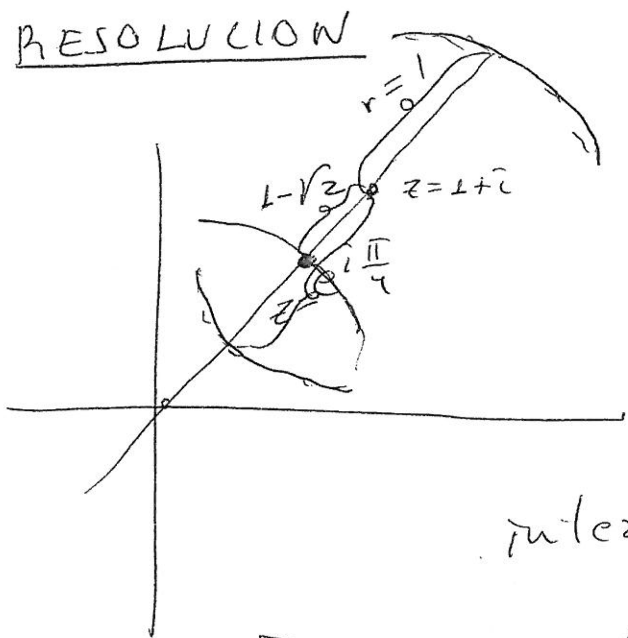
2. P.P. JUNIO 2008. 2. SEMANA

1. PROBLEMA. Calcular la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1}$$

donde $C = \{ z \mid |z-(1+i)| = 1 \}$

RESOLUCION



Los posibles polos son $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$, $z_4 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$

El único polo en el interior de C es $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Teorema de los residuos

$$\int_C \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{z^4+1}$$

$$= 2\pi i \lim_{z \to e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{z-e^{i\frac{\pi}{4}}}{z^4+1} = 2\pi i \cdot \left[\frac{1}{\frac{d}{dz}(z^4+1)} \right]_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$= 2\pi i \left[\frac{1}{4z^3} \right]_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2} i e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2}$$

2. PROBLEMA: Determinar y clasificar los puntos singulares aislados de

i) $f(z) = z e^{1/z}$, ii) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$

SOLUCION

i) La única singularidad es $z=0$ y es singularidad esencial.

$\{z_n = \frac{1}{n}\} \to 0$, $f(z_n) = \frac{1}{n} e^{n} \to \infty$

$\{z_n = -\frac{1}{n}\} \to 0$, $f(z_n) = -\frac{1}{n} e^{-n} \to 0$.

ii) La única singularidad es $z=1$ y es singularidad esencial

$\{z_n = 1+\frac{1}{n}\} \to 1$, $f(z_n) = e^{-n(1+\frac{1}{n})} \to 0$

$\{z_n = 1-\frac{1}{n}\} \to 1$, $f(z_n) = e^{n(1-\frac{1}{n})} \to \infty$.

084059	Septiembre - 2008 Original	ANALISIS MATEMATICO IV	405
		MATEMATICAS	08
		Duración: 120 min.	EXAMEN: Tipo - Desarrollo
			Extranjero (America-Guine 2 Prueba Presencial
MATERIAL: I~{zy Ninguno			Hoja: 1 de 1

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. SEPTIEMBRE 2008

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema del desarrollo en serie de Laurent.

2.Pregunta. Describir las transformaciones fraccionarias lineales o de Möbius que transforman el disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ en sí mismo. Demostrarlo.

3.Pregunta. Dada $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$, donde f, g son analíticas en un abierto $A \subset \mathbb{C}$, y sea $a \in A$ tal que $f(a) \neq 0$ y $g(a) = 0$, siendo a un cero simple de g, de tal manera que F tiene un polo simple en a, probar la siguiente fórmula para el residuo

$$Res_{z=a}F = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

4.Pregunta. Aplicar la fórmula del residuo de la Pregunta 3 para calcular

$$\int_\gamma \frac{ze^z}{\cos z} dz ,$$

donde γ es la circunferencia de centro el origen y radio 2.

Duración del examen : 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. SEPTIEMBRE 2008

1 PROBLEMA

Dada $F(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$, donde f, g son analíticas en un abierto $A\subset\mathbb{C}$, y sea $a\in A$, entonces si $f(a)\neq 0$, y $g(a)=0$, a cero simple de g, de tal manera que F tiene un polo simple en a, probar que

$$\operatorname{Res}_{z=a} F=\frac{f(a)}{g'(a)}.$$

SOLUCION

$$\operatorname{Res}_{z=a} F=\lim_{z\to a}\frac{(z-a)f(z)}{g(z)}$$

$$=\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{\left(\dfrac{g(z)-g(a)}{z-a}\right)}=\frac{f(a)}{g'(a)}, \text{ puesto que } g(a)=0$$

2. PROBLEMA.

Aplicar el 1er Problema para calcular

$$\int_{\gamma}\frac{ze^{z}}{\cos z}\,dz$$

donde γ es la circunferencia de centro el origen y radio 2.

SOLUCION. Por el teorema de los residuos

$$\int_\gamma \frac{ze^z}{\cos z}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{ze^z}{\cos z} + \operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \frac{ze^z}{\cos z}\right).$$

Aplicamos el 1er Problema con $f(z)=ze^z$, $g(z)=\cos z$

$$\operatorname{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} \frac{ze^z}{\cos z} = \left[\frac{ze^z}{-\operatorname{sen} z}\right]_{z=\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}}{(-1)} = -\frac{\pi}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\operatorname{Res}_{z=-\frac{\pi}{2}} \frac{ze^z}{\cos z} = \left[\frac{ze^z}{-\operatorname{sen} z}\right]_{z=-\frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}}{1} = -\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}$$

Luego

$$\int_\gamma \frac{ze^z}{\cos z} = -\pi^2 i\left(e^{\frac{\pi}{2}} + e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$