PROCESOS ESTOCÁSTICOS
Exámenes

Reserva 2019

A una oficina que consta de tres ventanillas llegan clientes según un proceso de Poisson de tasa $\lambda = 2$ por minuto y cada uno tarda un tiempo exponencial de media $\mu = 1$ minuto en realizar su trámite. Los clientes que llegan a la oficina y encuentran las tres ventanillas ocupadas esperan hasta que una quede libre.

A) Determinar la distribución del número de clientes que hay, en régimen estacionario, en la oficina (se cuentan los clientes que están siendo atendidos y los que están en cola).

B) Calcular, en régimen estacionario, el tiempo medio que tiene que esperar un cliente hasta ser atendido, supuesto que llega en un momento en que todas las ventanillas están ocupadas.

C) Cacular la distribución del tiempo que transcurre desde que se abre la oficina hasta el primer instante en que hay dos ventanillas ocupadas.

D) Si en cierto momento hay 5 clientes en la oficina, calcular la probabilidad de que se vacíe antes de que llegue el siguiente cliente.

E) Si en cierto momento la oficina está vacía, calcular la probabilidad de que llegue a haber 5 clientes en la oficina antres de que se vacíe de nuevo.

Solución:

A) Consideramos la cadena de Markov $\{N_t\}_{t\geq 0}$ que especifica el número de clientes que hay en la oficina en el instante t. Dicha cadena tiene matriz infinitesimal (de tamaño infinito) de la forma siguiente

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & & & & \\ 1 & -3 & 2 & & & \\ & 2 & -4 & 2 & & \\ & & 3 & -5 & 2 & \\ & & & 3 & -5 & 2 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

La distribución estacionaria debe verificar $\pi Q = 0$. Se tiene entonces que debe verificarse

$$\begin{cases} \pi_1 = 2\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{3}{2}\pi_1 - \pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{4}{3}\pi_2 - \dfrac{2}{3}\pi_1 \\ \pi_N = \dfrac{5}{3}\pi_{N-1} - \dfrac{2}{3}\pi_{N-2} \qquad N \geq 4 \\ \sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1 \end{cases}$$

De las tres primeras ecuaciones, se obtiene que

$$\begin{cases} \pi_1 = 2\pi_0 \\ \pi_2 = 2\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{4}{3}\pi_0 \end{cases}$$

La ecuación en recurrencia tiene solución general $\pi_N = A + B\left(\frac{2}{3}\right)^N$. Sustituyendo los valores iniciales, se tiene que

$$\begin{cases} 2\pi_0 = A + B\left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \frac{4}{3}\pi_0 = A + B\left(\frac{2}{3}\right)^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{9}{2}\pi_0 \end{cases}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{cases} \pi_1 = 2\pi_0 \\ \pi_N = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^N \pi_0 \quad N \geq 2 \end{cases}$$

Falta ahora determinar π_0, que viene dado por la restricción de que π es una medida de probabilidad

$$1 = \sum_{j=0}^{1} \pi_j = \pi_0\left[1 + 2 + 2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k\right] = 9\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{9}$$

Por tanto, se tiene que

$$\begin{cases} \pi_0 = 1/9 \\ \pi_1 = 2/9 \\ \pi_N = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^N \quad N \geq 2 \end{cases}$$

B) Tenemos que considerar ahora la distribución estacionaria condicionada por $N \geq 4$, ya que si un cliente llega y están todas las ventanillas ocupadas, entonces necesariamente $N_t \geq 4$, siendo t el instante en que llega dicho cliente. Esta distribución condicionada la llamaremos π' y viene dada por

$$\pi'_N = \frac{27}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^N \qquad \text{para } N \geq 4$$

Supongamos ahora que un cliente llega en un instante tal que $N = j \geq 4$. Como hay 3 ventanillas, para que el cliente comience a ser atendido tiene que haber $j-3$ atenciones finalizadas de los clientes que están antes que él. Como en todos esos momentos las 3 ventanillas están ocupadas, la tasa de atención de clientes será de 3 clientes por minuto. Por tanto, cada avance de la cola que se produce mientras está esperando nuestro cliente tarda un tiempo con distribución exponencial de parámetro 3. Por tanto, el tiempo medio de espera del cliente será la media de una distribución que resulta de la suma de $j-3$ distribuciones exponenciales de parámetro 3. Sabemos que esto es una distribución gamma $\Gamma(3, j-3)$. Por tanto, el tiempo medio de espera viene dado para cada $N = j$ por

$$m_j = \frac{j-3}{3}$$

Por tanto, el tiempo medio requerido es

$$\sum_{j=4}^{\infty} \frac{j-3}{3}\frac{27}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^j = \frac{1}{9}\sum_{j=1}^{\infty} j\left(\frac{2}{3}\right)^{j-1} = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{1-x}\right]'_{x=2/3} = \frac{1}{9}\frac{1}{(1-2/3)^2} = 1$$

Por tanto, supuesto que un cliente llega cuando todas las ventanillas están ocupadas, en régimen estacionario tarda un tiempo medio de 1 minuto en ser atendido.

C) Considerando la cadena hasta el estado $N=2$ y considerando este absorbente, se tiene la matriz infinitesimal

$$Q^* = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se puede escribir

$$Q^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

Por tanto, la probabilidad $P_{0,2}(t)$ de esta cadena modificada da la distribución del primer instante en que hay dos ventanillas ocupadas. Llamando T a este instante y teniendo en cuenta que la oficina está vacía al principio, se tiene que

$$P\{T \le t\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}$$

D) La matriz de saltos de la cadena hasta el estado 5 viene dada por

$$\Sigma = \begin{pmatrix} & 1 & & & & \\ 1/3 & & 2/3 & & & \\ & 1/2 & & 1/2 & & \\ & & 3/5 & & 2/5 & \\ & & & 3/5 & & 2/5 \\ & & & & 3/5 & \end{pmatrix}$$

Por tanto, estando en el estado 5, la probabilidad de que la oficina se vacíe antes de que llegue el siguiente cliente es igual a la probabilidad de que se produzca la sucesión de estados $5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 0$. Este suceso tiene probabilidad

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{9}{250} = 0,036$$

ya que sabemos que la cadena de saltos es de Markov en tiempo discreto.

E) Considerando la cadena de saltos del apartado anterior y haciendo los estados 0 y 5 absorbentes resulta la matriz

$$\Sigma^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1/3 & & 2/3 & & & \\ & 1/2 & & 1/2 & & \\ & & 3/5 & & 2/5 & \\ & & & 3/5 & & 2/5 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que calcular la probabilidad de llegar desde el estado 1 al estado 5. Tomando p_i como la probabilidad de llegar desde el estado i al estado 5, se tiene que

$$\begin{cases} p_1 = \frac{2}{3}p_2 \\ p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_3 \\ p_3 = \frac{3}{5}p_2 + \frac{2}{5}p_4 \\ p_4 = \frac{3}{5}p_3 + \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1 = 8/31 \\ p_2 = 12/31 \\ p_3 = 16/31 \\ p_4 = 22/31 \end{cases}$$

Por tanto, si en cierto momento la oficina está vacía, la probabilidad de que llegue a haber 5 clientes en la oficina antes de que se vacíe de nuevo es $8/31$.