No se permite el uso de ningún tipo de material.

Todas las respuestas deben estar justificadas.

Ejercicio 1. (2 puntos) Se consideran las sucesiones $(a_n) \subset \mathbb{R}$ y $(b_n) \subset \mathbb{R}$ dadas por

$$a_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{2n^2-3}, \qquad b_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2+3}.$$

Calcular, si existe, $\lim\limits_{n} \left(a_n + \dfrac{1}{b_n}\right)$.

Ejercicio 2. (2 puntos) Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty} (x \operatorname{sen} x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to+\infty} (2x + x \operatorname{sen} x)$$

Ejercicio 3. (2 puntos) ¿Existe algún valor de a para el que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{e^{1/x}+x} & \text{si } x \neq 0, \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 4. (2 puntos) ¿Existen valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para los que los extremos relativos de la función

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$$

se alcancen solamente en $x = -1$ y $x = 2$? Justificar la respuesta.

Ejercicio 5. (2 puntos) Estudiar la convergencia absoluta y condicional de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}.$$

Tiempo: 2 horas