Introducción a la Teoría de Juegos

Juan Miguel Suay Belenguer

Juan Miguel Suay Belenguer (traducción, figuras y maquetación)
c/ El de Pagan, 44 – 03550 – San Juan de Alicante (Alicante) – España.
jm_suay@yahoo.com
Tel.: 630 977 841

Índice

Lista de figuras

PROLOGO

Estos apuntes son la traducción de un resumen del texto base [Morris (1994)] utilizado en la asignatura Teoría de Juegos que se cursa como optativa en el cuarto curso del grado de matemáticas en la Universidad Nacional de Educación a Distancia (UNED). Se pretende que sean un complemento al texto base, ya que se han omitido las demostraciones de los resultados que se enuncian, así como los enunciados de los ejercicios propuestos en cada tema. Por lo que estos apuntes no pueden ser un sustituto del libro de texto, ya que debe complementarse con la lectura del mismo para entender cómo se articulan las demostraciones, y por supuesto con la realización de ejercicios propuestos del libro.

A continuación, se indica cuáles son los conceptos básicos principales que se deben asimilar en cada uno de los capítulos.

1. JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA. En este capítulo se introducen algunos conceptos que caracterizan a un juego. La *forma extensiva* de un juego da, en un orden lógico, los posibles movimientos del juego. Cada movimiento se asigna o bien a un jugador, movimiento personal, o bien al azar, movimiento de azar. A cada posición terminal del juego se asocia un pago o resultado para cada jugador. Estas ideas se formalizan en la definición del juego que incluye los conceptos de *árbol del juego, conjuntos de azar, conjuntos de información* y la *función de pago del juego*.

Se necesita introducir el concepto de *estrategia pura* de un jugador y poder pasar de la forma extensiva de un juego a la *forma normal*. También se definen las *N-tuplas de estrategias en equilibrio*.

2. JUEGOS BIPERSONALES DE SUMA CERO. En este capítulo se estudian los juegos en los que intervienen dos jugadores con intereses contrapuestos, lo que gana uno lo pierde el otro. Se definen los *puntos de silla*, la solución óptima del juego se obtiene mediante las estrategias puras de los jugadores. Un juego bipersonal de suma nula es *finito* cuando ambos jugadores disponen de un número finito de estrategias, en este caso la forma normal del juego puede representarse mediante una matriz. Muchos juegos matriciales no poseen punto de silla, entonces se emplean estrategias mixtas. Matemáticamente una estrategia mixta para un jugador viene descrita mediante una distribución de probabilidad sobre su conjunto de estrategias puras. Se definen *estrategias minimax* y *estrategias maximin*, *dominancia de estrategias* y, se exponen algunos métodos de resolución para los juegos *2* × *n* y *m* × *2*. Finalmente se definen los juegos simétricos y se resuelven dichos juegos.

3. Solución mediante Programación lineal. En este capítulo se estudia uno de los procedimientos más poderosos para el cálculo de estrategias óptimas de juegos matriciales. Este método consiste en la utilización de la *Programación lineal*. Se comienza razonando cómo el problema de calcular una estrategia óptima de un jugador puede formularse como un problema de Programación lineal, mientras que si se contempla el problema desde la perspectiva del otro jugador resulta el problema dual del anterior. Finalmente, mediante el empleo del *algoritmo del simple*x, es posible calcular numéricamente dichas soluciones óptimas.

Todo este tema se acompaña de la solución práctica de varios ejemplos.

4. Métodos de resolución de juegos matriciales. Al comienzo de este capítulo se enuncia y demuestra el *teorema del minimax* que garantiza que los juegos finitos tienen valor y por tanto existen estrategias óptimas para dichos juegos.

Se continua con la resolución de varios ejemplos muy conocidos utilizando la Programación lineal como principal método para calcular el valor del juego y las estrategias óptimas de los jugadores.

5. Juegos de suma no nula no cooperativos. Los juegos bipersonales de suma no nula se caracterizan porque lo que es bueno para un jugador no es necesariamente malo para el otro, los dos jugadores no actúan enteramente el uno contra el otro y, en algún caso pueden obtener alguna ventaja si manifiestan su estrategia. En los juegos de suma no nula pueden distinguirse dos situaciones: aquellas en las que la comunicación previa al juego, los contratos y las estrategias correlacionadas están prohibidas y aquellas en que algunas de estas actuaciones están permitidas. Del primer caso se ocupan los *juegos no cooperativos* y del segundo *los juegos cooperativos*.

En estos juegos la función de pago puede representarse por un par de matrices por esta razón se denominan *juegos bimatriciales*.

En este capítulo se trata de resolver los juegos bipersonales de suma no nula no cooperativos mediante la existencia de pares de estrategias óptimas que estén en equilibrio. Se definen los valores *maximin, N-tuplas de estrategias en equilibrio* y se ilustra un método gráfico para obtener los pares de equilibrio.

Se consideran algunos ejemplos de juegos no cooperativos de suma no nula como son: *la batalla de los sexos* y *el dilema del prisionero*.

Finalmente, se estudian los denominados *superjuegos*.

6. JUEGOS DE SUMA NO NULA COOPERATIVOS. Ambos jugadores pueden lograr mejores resultados actuando juntos que haciéndolo por separado, de ahí el valor de la cooperación y, la necesidad de considerar la negociación. Entonces el juego se define por medio de un subconjunto S del plano Euclídeo que representa los pagos conjuntos que ambos jugadores pueden obtener con la cooperación y dos números u_o, v_o que representan la cantidad que cada jugador puede obtener sin la cooperación del otro.

Se definen los *axiomas de Nash* y se enuncia el *teorema de Nash* que conduce a una solución del juego admisible por los dos jugadores denominada *punto de equilibrio de Nash* o *pares de arbitraje*. Se ilustra un método de obtener los pares de arbitraje mediante algunos ejemplos.

7. JUEGOS N-PERSONALES COOPERATIVOS. El estudio de los juegos N-personales no cooperativos será muy similar al caso bipersonal, pues la no cooperación no permite introducir nuevas ideas para la solución del juego. Este capítulo se dedica al estudio de los juegos N-personales *cooperativos*.

El primer concepto que hay que introducir es el de *coalición*. Esto permite considerar el juego como un juego bipersonal entre una coalición y los demás jugadores, abriendo paso a la consideración de la *función característica* del juego o función definida sobre las coaliciones que nos da una idea de la mayor o menor fortaleza de una coalición.

Se introduce el concepto de S-equivalencia de dos juegos, permitiendo considerar equivalentes a dos juegos que conduzcan a la misma función característica. Nos lleva a la *función característica en forma reducida*. Esto permite dividir a los juegos en *inesenciales*, aquellos en que no tiene sentido formar coaliciones, y esenciales, donde si tiene sentido formar coaliciones.

Se aborda a continuación el problema de cómo determinar los pagos que han de recibir los miembros de una coalición, lo cual conduce al concepto de imputación. Luego se plantea la cuestión de cómo elegir las imputaciones más favorables para los jugadores, para lo cual es necesario introducir el concepto de *dominancia de imputaciones* y el *núcleo* de un juego, formado por aquellas imputaciones no dominadas.

Para finalizar el tema se estudian dos conceptos de solución para estos juegos: *conjuntos estables de imputaciones* y, el *valor de Shapley* que nos mide el interés que tiene para un jugador participar en un determinado juego y es la esperanza a priori de la cantidad que un jugador puede esperar ganar jugando el juego.

El texto termina con dos apéndices en el que se demuestra el teorema de Nash (apartado 6.4), así como la definición de óptimo de Pareto según Shikin (2003) pp. 115-8.

Estos apuntes han representado un esfuerzo de traducción y de maquetación que espero que sean de utilidad a cuantos cursan esta asignatura en la UNED.

Juan Miguel Suay Belenguer

1 JUEGOS EN FORMA EXTENSIVA

1.1 INTRODUCCIÓN

Todos los juegos que consideramos tienen las siguientes características en común:

- Existe un conjunto finito de jugadores (que pueden ser personas, grupos de personas, o entidades más abstractas como programas de computadora o "naturaleza" o "la casa").
- Cada jugador tiene un conocimiento completo de las reglas del juego.
- En diferentes puntos del juego, cada jugador tiene una gama de opciones o movimientos. Este conjunto de opciones es finito.
- El juego termina después de un número finito de movimientos.
- Después de que termina el juego, cada jugador recibe un *pago numérico*. Esta el número puede ser negativo, en cuyo caso se interpreta como una pérdida del valor absoluto del número. Por ejemplo, en un juego como ajedrez, la recompensa por ganar puede ser +1, por perder -1, y tablas 0.

Además, pueden o no puede tener las siguientes propiedades:

- Puede haber *movimientos fortuitos*. En un juego de cartas, el reparto de las distintas manos es un movimiento imprevisible. En el ajedrez no hay movimientos aleatorios.
- En algunos juegos, cada jugador sabe, en cada instante del juego, toda la historia previa del juego. Esto es cierto en el *tres en raya* y en el *backgammon*, pero no de bridge (porque las cartas repartidas a los otros jugadores están ocultas). Se dice que un juego con esta propiedad es de *información perfecta*. Tenga en cuenta que un juego de este tipo la información puede tener movimientos aleatorios, en el *backgammon* es un ejemplo de esto porque es el lanzamiento de un dado quien asigna los puntos en el juego.

Acabamos de decir que los jugadores reciben un pago numérico al final del juego. En situaciones de conflicto real, la recompensa es a menudo algo no cuantitativa como “felicidad”, “satisfacción”, “prestigio” o sus opuestos. Para estudiar juegos en los que existan estos pagos psicológicos, primero es necesario reemplazar estos pagos con valores numéricos. Por ejemplo, supongamos que un el jugador en cierto juego puede ganar uno de los tres premios siguientes:

• Una semana en París.

• Una semana en Hawái.

• Ocho horas en la silla de un dentista.

Diferentes personas asignarían diferentes "valoraciones de felicidad" a estos premios.

Para una persona interesada en la cultura francesa, calificándola como 100, 25, -100, respectivamente, podría ser razonable. Para un surfista, las calificaciones podrían ser 10, 100, -100. Los puntos es que estamos asumiendo que esta conversión de los pagos no cuantitativos a los numéricos siempre se puede hacer de manera sensata (al menos en los juegos que consideramos).

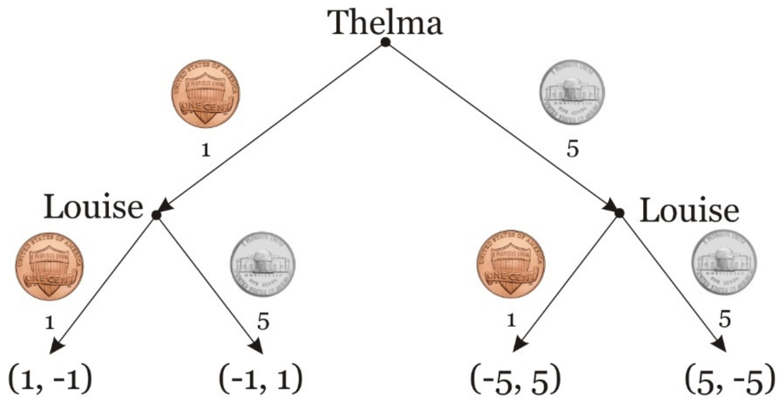

Fig. 1 Diagrama de árbol del juego *Coincidencias de monedas*

Es natural representar un juego por medio de un *diagrama de árbol*. Por ejemplo, considere el siguiente juego simple (llamado *coincidencias de monedas*). Sean dos jugadores (llamados Thelma y Louise); cada uno esconde una moneda (ya sea un *penique* o un *níquel*[1]) en su mano cerrada, sin que el otro lo vea. Luego abren las manos y si las monedas son iguales, Thelma se queda con las

[1] Un penique (*penny*) es una moneda de un centavo de dólar y un níquel (*nickel*) es una moneda de 5 centavos.

dos. Si son diferentes, Louise es quien se las queda. Un diagrama de árbol para este juego es el mostrado en la Fig. 1.

Los pequeños círculos en el diagrama se llaman *vértices*, y los segmentos dirigidos entre ellos se llaman *aristas*. El juego comienza en el vértice superior (etiquetado como "Thelma") y llega, a través de uno de los dos vértices etiquetado "Louise", en uno de los cuatro vértices en la parte inferior. Cada uno de estos está etiquetado con un par ordenado de números que representan los pagos (en centavos) a Thelma y Louise, respectivamente. Por ejemplo, si Thelma tiene un *penique*, y Louise un *níquel*, entonces el juego se mueve desde el vértice de Thelma por la arista izquierda, y continua por la arista derecha de Louise. El vértice inferior alcanzado está etiquetado (-1, 1). Esta significa que Thelma pierde +1 ("gana" -1) y que Louise gana +1.

En este capítulo, desarrollamos rigurosamente esta idea de diagramas de árbol. Nosotros también extenderlo a juegos con movimientos aleatorios, e introduciremos la definición de estrategia.

1.2 ÁRBOLES

Un *grafo dirigido* es un número finito de puntos, denominados *vértices*, unidos unos a otros por una serie de segmentos dirigidos, que llamaremos *aristas*. Podemos dibujar un *grafo dirigido* en la pizarra o en una hoja de papel dibujando círculos pequeños para los vértices y líneas con puntas de flecha para las aristas. Un ejemplo se muestra en la Fig. 2, en este caso el *grafo* tiene cinco vértices y cinco aristas.

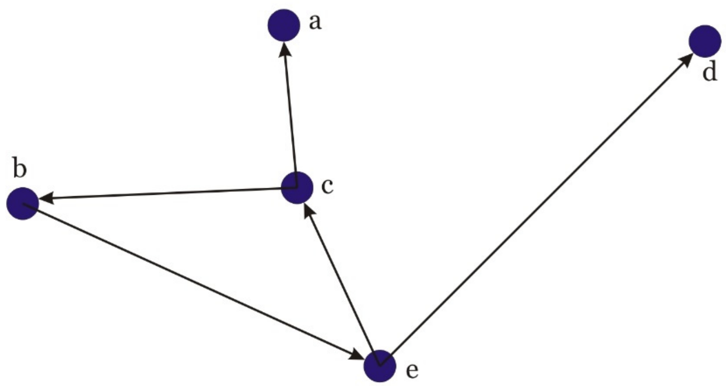

Fig. 2 Grafo dirigido con 5 vértices y cinco aristas

Utilizaremos letras mayúsculas como *G* o *H* o *T* para denotar gráficos dirigidos. Los vértices de dicho grafo se denotarán con letras minúsculas como *u* o *v*. Los subíndices se usarán a veces. Las aristas se designan, por ejemplo, (*u*, *v*), para representar que la arista va de *u* a *v*. Para un grafo dirigido *G*, el conjunto de todos los vértices se denota *V*(*G*).

Un *camino* desde un vértice *u* hasta otro vértice *v* en un grafo dirigido *G* es una secuencia finita (v_0, v_1, ..., v_n) de vértices de *G*, para n ≥1, $v_0 = u$, $v_v = v$, y (v_{i-1}, v_i) es una arista en *G* para i = 1, 2, ..., n. Por ejemplo, en el grafo dirigidos de la Fig. 2, (*e*, *c*, *a*) y (*e*, *c*, *b*, *e*) son caminos. Un *árbol* es un tipo especial de grafo dirigido.

DEFINICIÓN 1.1. Un grafo dirigido *T* es un *árbol* si tiene un vértice distinguido *r*, llamado *raíz*, tal que *r* no tiene aristas entrando a él, y tal que para cada vértice *v* de *T* hay un camino único de *r* a *v*.

El ejemplo en la Fig. 2 se ve claramente no es un árbol. Un grafo dirigido que contiene un solo vértice y ninguna arista es un árbol trivial.

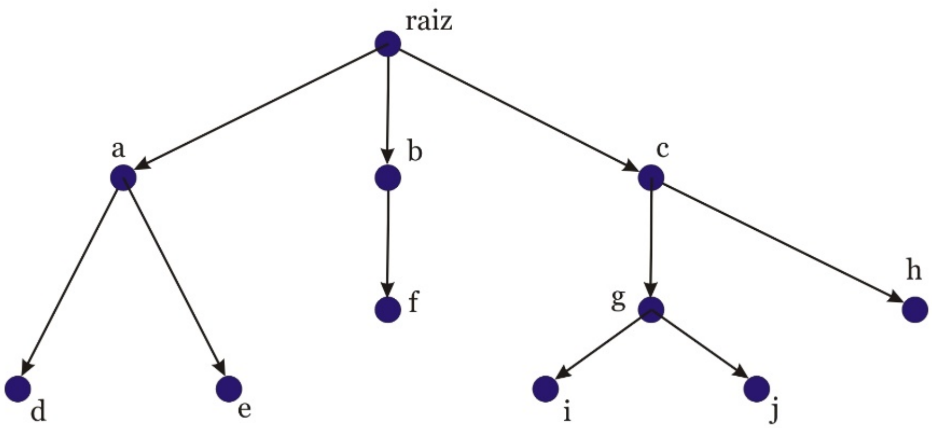

Fig. 3 Ejemplo de *árbol*

Comúnmente, pero no siempre, dibujamos árboles de tal manera que la raíz está en la cima. Un ejemplo se da en la Fig. 3; donde todos los vértices se han etiquetado. Este árbol tiene once vértices y diez aristas.

Sea T un árbol. Daremos algunas definiciones. Un vértice v es un *hijo* de un vértice u si (u, v) es una arista. Además, en este caso, u es el *padre* de v. En el árbol de la Fig. 3, el vértice f es un hijo de b, el vértice g es un hijo de c, a es el padre de d y e, y la *raíz* es el padre de a, b, y c. En cualquier árbol, el conjunto de *hijos* de u se denota $\mathrm{Ch}(u)$. Hay que tener en cuenta que un vértice puede tener muchos hijos. La raíz es el único vértice sin un padre. Un vértice sin hijos se llama *terminal*. En nuestro ejemplo, los vértices terminales son d, e, f, i, j y h. Un vértice que no es la raíz y no es terminal se llama *intermedio*. En nuestro ejemplo, son intermedios los vértices son a, b, c y g. Un vértice v es un *descendiente* de un vértice u si hay es un camino de u a v. En este caso, u es un *ancestro* de v. Así la raíz es un ancestro de todos los demás vértices. En el ejemplo, c es un ancestro de j, y i es un descendiente de c.

La longitud de un camino es el número de aristas del mismo. Los caminos en los árboles no se cruzan; es decir, constan de vértices distintos. Por lo tanto, un camino en un árbol tiene una longitud como máximo igual a la cantidad de vértices menos uno. La *profundidad* de un árbol es la longitud del camino más largo. En la Fig. 3, (c, g, i) es una camino de longitud 2, como es (*raíz*, b, f). El camino más largo en un árbol comienza en la raíz y termina en un vértice terminal. Si esto no fuera cierto, podríamos extender el camino dado a un período más largo. La profundidad de un árbol T se denota $\mathrm{De}(T)$. La profundidad del árbol en la Fig. 3 es tres porque (*raíz, c, g, j*) es una ruta de mayor longitud.

Algunas propiedades generales de los árboles se recopilan en el siguiente:

TEOREMA 1.1. Sea T un árbol. Entonces tenemos:

(1) Ningún vértice tiene más de un *padre*.
(2) Si u y v son vértices de T y hay un camino de u a v, entonces no hay *camino* de v a u.
(3) Cada vértice no terminal tiene un descendiente terminal.

Ahora sea T un árbol y tomemos u cualquier vértice de T. El *recorte* de T determinado por u, denominado T_u, se define de la siguiente manera: Los vértices de T_u son u más todos los descendientes de él. Las aristas de T_u son todas las aristas de T que comienzan en un vértice de T_u. Tenga en cuenta que, si u es la raíz de T, entonces $T_u = T$, y si u es terminal, entonces T_u es un árbol trivial. El recorte T_c del árbol de la Fig. 3 tiene los vértices c, g, h, i, j, y las aristas (c, g), (g, i), (g, j), (c, h).

TEOREMA 1.2. Para cualquier árbol T y cualquier vértice u, T_u es un árbol con u la raíz.

Sea un árbol T y u un vértice de T. El *cociente* del árbol T/u se define de la siguiente manera: Los vértices de T/u son los vértices de T con los descendientes de u eliminados; las aristas de T/u son las aristas de T que comienzan y terminan en vértices de T/u. Por lo tanto, u es un vértice terminal de T/u. Por ejemplo, en el árbol de la Fig. 3, el cociente del árbol T/a se obtiene borrando las aristas (a, d) y (a, e), y los vértices d y e. Tenga en cuenta que si u es la raíz de T, entonces T/u es trivial, y si u es terminal, entonces T/u es T.

TEOREMA 1.3. Si T es un árbol y u es un vértice de T, entonces T/u es un árbol cuya raíz es la raíz de T.

Finalmente, si T es un árbol, entonces un *subárbol* S de T es un árbol cuyos vértices forman un subconjunto de los vértices de T; cuyas aristas forman un subconjunto de las aristas de T; cuya raíz es la raíz de T; y cuyos vértices terminales forman un subconjunto de los vértices terminales de T. En el árbol de la Fig. 3, el árbol que formado por la raíz junto con los vértices c, h, g, j, y las aristas $(raíz, c)$, (c, h), (c, g), (g, j) es un subárbol.

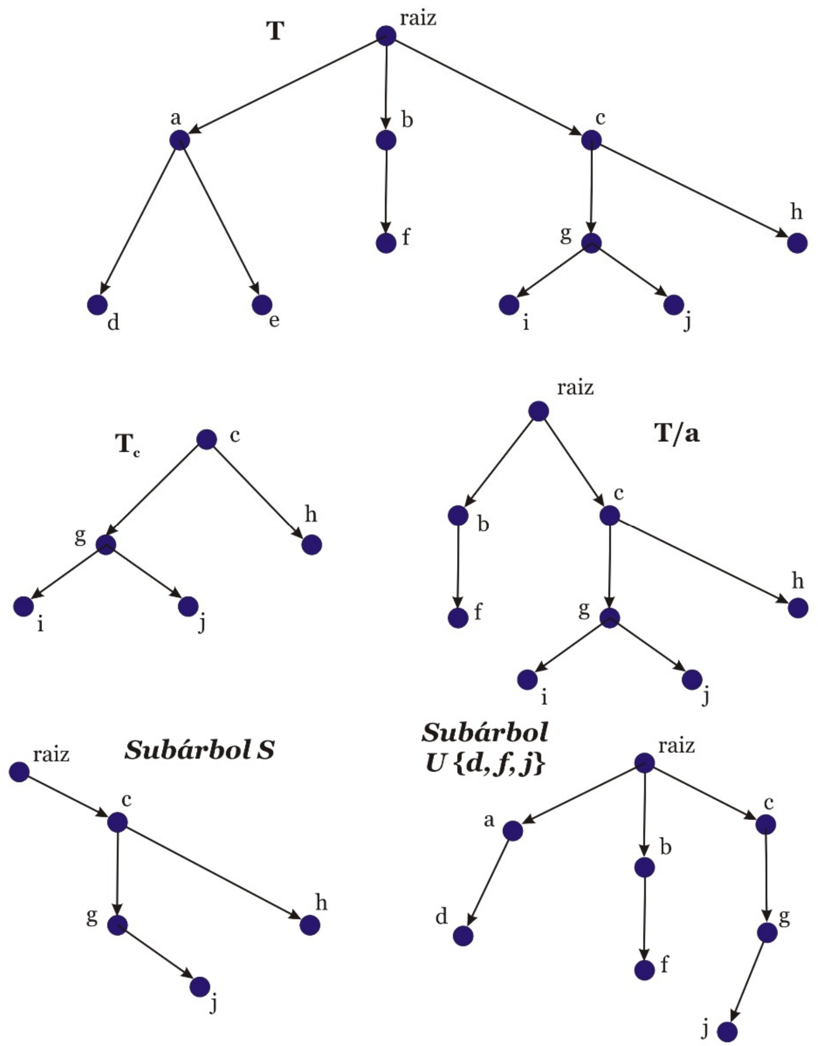

Fig. 4 Recorte T_c, *T/a*, *Subárbol S* y *Subárbol U*

TEOREMA 1.4. Sea S un subárbol de un árbol T. Entonces S es la unión de todos los caminos desde la raíz hasta un vértice terminal de S. A la inversa, si U es cualquier subconjunto no vacío del conjunto de todos los vértices terminales del árbol T, luego la unión de todos los caminos desde la raíz a un miembro de U es un subárbol. El conjunto de los vértices terminales de este subárbol es precisamente U.

Por ejemplo, en el árbol de la Fig. 3, considere el conjunto de vértices terminales

$$U = \{d, f, j\}$$

Entonces el subárbol determinado por U es la unión de los tres caminos (*raíz, a, d*), (*raíz, b, f*), (*raíz, c, g, j*).

En la Fig. 4 tenemos representado el recorte T_c, T/a, *Subárbol S* y *Subárbol U* del árbol T de la Fig. 3.

1.3 ÁRBOLES DEL JUEGO

Sea T un árbol no trivial. Queremos usar T para definir un juego N-jugadores sin movimientos al azar. Primero, utilicemos $P_1, P_2, \ldots, P_N$ para designar a los jugadores. Ahora se etiqueta cada vértice no terminal con una de esas designaciones. Se dice que un vértice etiquetado con P_i, *pertenece* a P_i o que P_i posee ese vértice.

Luego se marca cada vértice terminal v con una N-tupla de números $\vec{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$. El juego ahora está definido. Se juega de la siguiente manera. El jugador que posee la raíz elige uno de los hijos de la raíz. Si ese hijo es intermedio, el jugador al que le pertenece elige a uno de *sus* hijos. El juego continúa de esta forma hasta que se alcanza un vértice terminal v. Los jugadores luego reciben los pagos de acuerdo con el N-tupla que marca este vértice final. Es decir, el jugador P_i recibe el pago $p_i(v)$, componente número i de $\vec{\mathbf{p}}(\mathbf{v})$. La Fig. 5 muestra un ejemplo de un árbol de juego con tres jugadores. En este juego, nunca salen más de tres aristas de un vértice. Es natural designar estas aristas como L (para “izquierda”), R (para “derecha”) y M (para “centro”). Por ejemplo, si P_1 es el primero en mover hacia el vértice b, designamos a esa arista (y movimiento) por M. P_3 responderá por ejemplo moviendo a *g*, la *historia* de jugadas del juego podría ser designado (*M*, *R*). Como segundo ejemplo, otra posible historia es (*L*, *L*, *R*). En este caso, el *vector de pago* es (0, -2, 2).

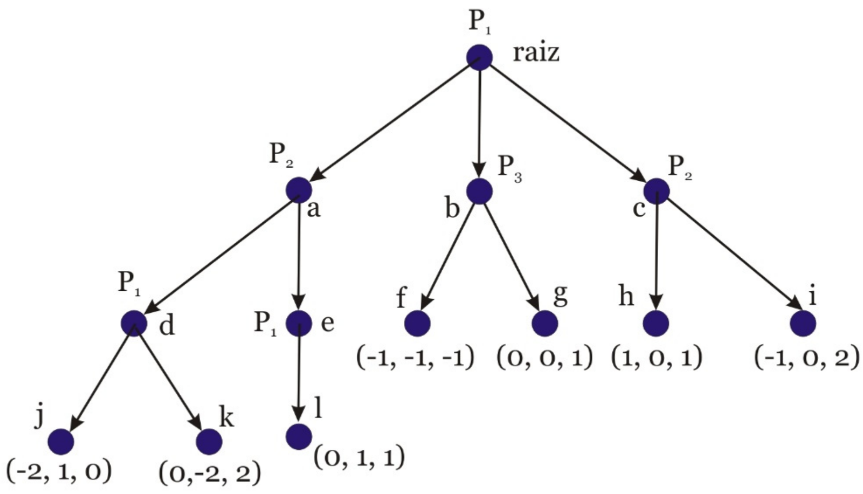

Fig. 5 Árbol de juego de tres jugadores

Un árbol etiquetado de la manera que acabamos de describir (usando designaciones de jugadores y vectores de pago) es un *árbol de juego*, y el juego correspondiente es un *juego de árbol*.

Es importante darse cuenta de que el tipo de juego que hemos creado no tiene movimientos fortuitos. En una apartado 1.5, veremos cómo incluir la idea de vértices "que pertenecen al azar" en nuestros árboles de juego. Cuando eso ocurre, podremos pensar en todos los juegos como juegos de árbol.

Observe que cada ruta desde la raíz hasta un vértice terminal representa una diferente forma en que la historia del juego podría evolucionar.

No es difícil ver cómo un árbol de juego podría, en teoría, configurarse incluso para un juego tan complicado como el ajedrez. El jugador que se mueve primero sería el de la raíz. Cada uno de sus movimientos permitidos de apertura correspondería a un hijo de la raíz. Cada uno de estos hijos pertenecería al jugador que se mueve en segundo lugar y tendría un hijo correspondiente a cada movimiento legal para ese jugador, etc. Un vértice terminal correspondería a una situación en la que el juego ha terminado, como un jaque mate o tablas. Claramente, tal árbol es enorme.

Consideremos un ejemplo más simple.

EJEMPLO 1.1 (MORRA DE DOS DEDOS). La morra es un juego de manos que consiste en acertar el número de dedos mostrados entre dos jugadores. los dos jugadores esconden un puño detrás de la espalda y muestran simultáneamente un dedo o dos y, al mismo tiempo, pronosticando el número retenido por el otro jugador diciendo “uno” o “dos”. Si un jugador acierta en su predicción mientras que el otro jugador está equivocado en el suyo, entonces el que acierta gana del otro una cantidad de dinero igual a la cantidad total de dedos mostrados por ambos jugadores. Si ninguno acierta o ambos tienen razón, ninguno gana nada.

La dificultad de representar este juego como un árbol es la simultaneidad de los movimientos de los jugadores. En un juego definido por un árbol, los jugadores obviamente se mueven consecutivamente. Para eliminar esta aparente dificultad, supongamos que existe un tercer jugador neutro. El jugador P_1 susurra su movimiento (es decir, el número de dedos que desea sostener y su predicción) al jugador neutral. El jugador P_2 hace lo mismo. El jugador neutral luego anuncia el resultado. Ahora los movimientos de los jugadores son consecutivos.

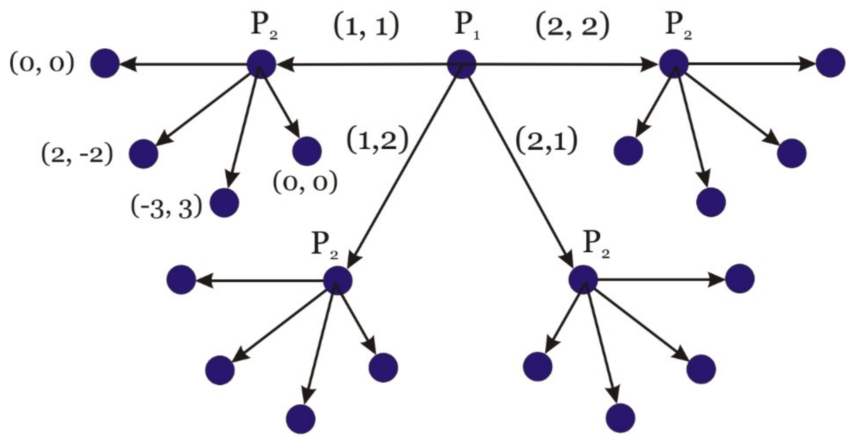

Fig. 6 Árbol de la morra de dos dedos

Vemos que P_1 tiene una opción de cuatro movimientos. Cada uno puede ser representado por un par ordenado (f, p) donde f es la cantidad de dedos que se sostienen y p es la predicción. Por lo tanto, cada uno de f y p es 1 o 2. La raíz de nuestro árbol, etiquetada por P_1, tiene cuatro hijos. Los cuales están todos etiquetados por P_2 y cada uno de ellos tiene cuatro hijos (uno para cada uno de los movimientos posibles de P_2). Estos hijos son todos terminales. El árbol se muestra en la Fig. 6. (La mayoría de los pares de pagos se han omitido). Este árbol para morra de dos dedos no incluye todas las reglas del juego. Surge del árbol que P_2 podría garantizar una recompensa positiva al hacer el movimiento correcto en cualquiera de sus cuatro vértices. Esto ciertamente no es cierto, los dos jugadores tienen roles simétricos en el juego, por lo que, si P_2 podría garantizar por sí mismo una recompensa positiva, entonces también podría P_l. Pero no pueden ganar ambos. El problema es que P_2 no conoce el movimiento de P_l y, por lo tanto, no sabe de cuál de sus vértices se está moviendo. En otras palabras, el juego no es de información perfecta. Este concepto fue discutido brevemente anteriormente, y se discutirá con más detalle más adelante.

Tenga en cuenta que, si T es un árbol de juego, entonces cualquier corte de T también es un árbol de juego. Un árbol de cociente T/u de T se convierte en un árbol de juego si una N-tupla de números se asigna al vértice u. Por ejemplo, en la Fig. 5, el corte de T_a es juego en el que P_a no tiene vértices, pero recibe pagos. Además, T/a es un juego si asignamos, arbitrariamente, el pago (0, 1, 1) a a.

Un subárbol de T también es un árbol de juego. Estas construcciones de nuevos árboles de juego a partir de los viejos a menudo son útiles para estudiar partes de juegos (como juegos finales en el ajedrez) y versiones restringidas de juegos.

1.3.1 CONJUNTOS DE INFORMACIÓN

Regresemos y miremos el juego de coincidencia de monedas (Fig. 1). Las reglas de este juego establecen que Louise no sabe qué moneda tiene Thelma. Esto implica, por supuesto, que el juego no es de información perfecta. En términos del árbol, también significa que Louise no sabe cuál de sus dos vértices en los que ella está. Por lo tanto, es imposible, según las reglas, para ella planear su movimiento (es decir, decidir qué moneda sostener) en función de cuál de estos dos vértices que ella ha alcanzado. El conjunto formado por sus dos vértices se conoce como *conjunto de información*. De manera más general, un conjunto de información S para el jugador P es un conjunto de vértices, todos ellos pertenecientes a P, de tal manera que, en un cierto punto en el juego, P sabe que está en uno de los vértices en S, pero no sabe en cual.

Mencionamos anteriormente que el árbol en la Fig. 6 no incluye todas las reglas de la morra con dos dedos. La razón es que el árbol no toma cuenta del conjunto de información para P_2. Este conjunto de información consiste en los cuatro vértices de P_2.

1.4 FUNCIONES Y ESTRATEGIAS DE ELECCIÓN

Ahora queremos hacer una definición precisa de que es una "estrategia" de un jugador en un juego. El *Webster's New Collegiate Dictionary* define esta palabra como "un plan o método cuidadoso". Esta es la idea general, pero necesitamos hacer que la idea sea rigurosa.

Hay tres requisitos que nuestra definición de este concepto debe satisfacer. La primera es que debe ser *completa*: una estrategia debe especificar qué movimiento se realizará en cada situación del juego posible. El segundo es que debe ser *definida*: el movimiento que se realizará en una situación determinada del juego debería estar determinado por esa situación del juego, y no por casualidad o por capricho del jugador. Puede ser útil pensar en una estrategia como una descripción de cómo jugar que puede implementarse como un programa de computadora. El tercer requisito es que los *conjuntos de información deben ser respetados*. Esto significa que una estrategia debe exigir el mismo movimiento en cada vértice en un conjunto de información. Por ejemplo, en Morra con dos dedos, una estrategia para P_2 debe exigir el mismo movimiento desde cada uno de sus cuatro vértices.

A continuación, se define un concepto que es nuestra primera aproximación a lo que debería ser una estrategia.

DEFINICIÓN 1.2. Sea T un árbol de juego y sea P uno de los jugadores. Se define *función de elección* para P a una función c, definida en el conjunto de todos vértices de T que pertenecen a P, que es tal que $c(u)$ es un hijo de u por cada vértice u que pertenece a P.

Por lo tanto, dado que el jugador P está jugando de acuerdo con una función de elección c, P sabe qué opción hacer si el juego ha llegado al vértice u (propiedad de P): Elegiría $c(u)$.

Ahora supongamos que hay N jugadores P_1, P_2, ..., P_N. Denotemos el conjunto de todas las funciones de elección para el jugador P_i por Γ_i. Dado que cada jugador P_i se mueve de acuerdo con su función de elección $c_i \in \Gamma_i$, para $1 \leq i \leq N$, se determina una ruta a través del árbol de juego desde la raíz hasta un vértice terminal. Defina $\pi_i(c_1, c_2, ..., c_N)$ como el número de componente i de la N-tupla $\vec{\mathbf{p}}(\mathbf{w})$ que etiqueta el vértice terminal w en el que termina esta ruta. Por lo tanto, esta cantidad es la recompensa a P_i cuando los jugadores juegan de acuerdo con las funciones de N-tupla de elección $(c_1, c_2, ..., c_N)$. Por ejemplo, en el juego de la Fig. 5, suponga que P_1, P_2 y P_3 usan las funciones de elección c_l, c_2 y c_3, respectivamente, donde $c_1(raíz) = a$, $c_1(d) = j$, $c_1(e) = l$; $c_2(a) = e$, $c_2(\text{c}) = i$; $\text{c}_3(b) = f$. La ruta trazada es (*raíz, a, e, l*), que termina en el vector de pago (0, 1, 1).

Probablemente podamos aceptar que para cualquier estrategia hay una función de elección que la encarna. Sin embargo, hay razones por las cuales la función de elección no es una definición apropiada de estrategia. La primera es que las funciones de elección generalmente se definen en muchos vértices donde no es necesario definirlas, es decir, en vértices que nunca se alcanzarán en el transcurso del juego, dadas las decisiones anteriores del jugador. Por ejemplo, en el juego que se muestra en la Fig. 5, una función de elección para el jugador P_1 que requiere que se mueva desde la raíz al hijo del medio o el de la derecha obviamente no necesita especificar movimientos desde ninguno de los otros vértices que pertenecen a P_1 ya que no puede ser alcanzado. Sin embargo, la definición de una función de elección requiere que su dominio de definición consista en todos los vértices que pertenecen a un jugador dado.

1.4.1 SUBÁRBOLES DE ELECCIÓN

Intentemos eliminar el problema mencionado anteriormente. Hay varias formas en que esto podría hacerse. Podríamos permitir que las funciones de elección sean definidas en subconjuntos del conjunto de vértices que pertenecen a un jugador dado. Esto es insatisfactorio porque el dominio de definición variaría con la función de elección. Una mejor solución es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.3. Sea T un árbol de juego y sea P uno de los jugadores. Sea c sea una función de elección para P. Definimos un (P, c)-*camino* a un camino desde la raíz de T a un vértice terminal, tal que si u es un vértice de ese camino que pertenece a P, entonces la arista $(u, c(u))$ es una arista del camino.

Por lo tanto, un (P, c)-camino representa una de las posibles historias del juego dado que el jugador P juega de acuerdo con la función de elección c. Por ejemplo, en el juego de la Fig. 5, supongamos que P_1 usa la función de elección c_1, donde $c_1(raíz) = a$, $c_1(d) = k$, $c_1(e) = l$. Entonces el camino (*raíz, a, e, l*) es un (P_1, c_1)-camino, que es (*raíz, a, d, k*). De hecho, estos son los únicos dos.

Luego tenemos la siguiente:

DEFINICIÓN 1.4. Sea T un árbol de juego, P un jugador y c una función de elección para P. Entonces el *subárbol de elección determinado por P* y c se define como la unión de todos los (P, c)-caminos.

Por lo tanto, el subárbol de elección determinado por P y c tiene como conjunto de vértices todos los vértices de T que se pueden alcanzar en el transcurso del juego, que P juega de acuerdo con la función de elección c. Está claro que un subárbol de elección es un subárbol (según el TEOREMA 1.4). El lector puede ahora mirar la Fig. 5 para ver cuáles son los posibles subárboles de elección. Por ejemplo, uno contiene los vértices: *raíz, a, e, d, k*, y *l*. Sus aristas son (*raíz*, *a*), (*a*, *d*), (*a, e*), (*d*, *k*) y (*e*, *l*). Es interesante que si u es un vértice de un el subárbol de elección que pertenece al jugador P, entonces u solo tiene un hijo en el subárbol. Por otro lado, un vértice v de un subárbol de elección que pertenece a un jugador diferente de P tiene todos sus hijos en el subárbol. (Ambos hechos se prueban en el siguiente teorema.) Vemos que todo lo esencial de la información sobre la función de elección c está contenida en el subárbol de elección. Es decir, si uno conoce un subárbol puede jugar de acuerdo con la función de elección. Supongamos, por ejemplo, que el jugador P está jugando de acuerdo a un subárbol de elección S. Si el juego ha alcanzado un vértice u que pertenece a P, entonces estás en S y solo uno de sus hijos está en S. El movimiento de P es la arista de u a ese hijo. Por otro lado, la información no esencial sobre la función de elección (es decir, cómo se define en los vértices que nunca puede ser alcanzado) no está contenido en el subárbol de elección. Por ejemplo, en el árbol de la Fig. 5, considere dos funciones de elección para P_1: $c_1(raíz)$ = b, c_1(d) = k, $c_1(e) = l$; y $c'_1(raíz) = b$, $c'_1(d) = j$, $c'_1(e) = l$. Estos claramente encarnan la misma estrategia ya que el vértice d nunca se alcanza. Pero el subárbol de elección determinado por P_1 y c_1 es el mismo que el subárbol de elección determinado por P_1 y c'_1.

No todos los subárboles son subárboles de elección. Por ejemplo, en el juego de la Fig. 5, el subárbol cuyos vértices terminales son *j*, *k*, *h* e *i* no es un subárbol de elección para cualquiera de los jugadores. (Si fuera un subárbol de elección para P_1, no contendría tanto *j* como *k*; si para P_2, no podría contener ambas *h* y *i*; y, para P_3, contendría *f* o *g*)

Las dos propiedades indicadas arriba para los subárboles de elección (concernientes a los vértices hijos) son suficientes para caracterizarlos entre todos los subárboles. Este hecho se contiene en el siguiente teorema. La ventaja de esta caracterización es que podemos reconocer un subárbol como un subárbol de elección sin tener que trabajar con funciones de elección en absoluto.

LEMA 1.5. Sea *T* un árbol de juego; *P* un jugador; y *c* sea una función de elección para *P*. Supongamos que *Q* es una ruta desde la raíz a un vértice *v* y que *Q* satisface la condición: si *w* es un vértice en *Q* propiedad de *P*, entonces $w = v$ o c(w) está en *Q*. Entonces *Q* puede extenderse a una (*P*, *c*)-camino.

TEOREMA 1.6. Sea *T* un árbol de juego y sea *P* uno de sus jugadores. Un subárbol *S* de *T* es un subárbol de elección determinado por *P* y alguna función de elección *c* si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(1) Si *u* es un vértice en *S* y *u* pertenece a *P*, entonces exactamente uno de los hijos de *u* está en *S*.

(2) Si *u* es un vértice en *S* y *u* no pertenece a *P*, entonces todos los hijos de *u* están en *S*.

Ahora reemplazamos las funciones de elección por subárboles de elección. Modificaremos nuestra notación anterior y escribiremos $\pi_i(S_1, ..., S_N)$ para el pago al jugador P_i resultante de los *N*-tupla subárboles de elección $(S_1, ..., S_N)$.

Ahora bien, no todos los subárboles de elección respetan los conjuntos de información. Por lo tanto, no podemos simplemente definir una estrategia como un subárbol de elección. En cambio, definimos una estrategia para que un jugador *P* sea un miembro de un subconjunto del conjunto de todos los subárboles de elección determinados por P y las funciones de elección de P. A su vez, los miembros de este subconjunto son los subárboles de elección que respetan los conjuntos de información de P.

Tenemos lo siguiente:

DEFINICIÓN 1.5. Sea T un árbol de juego con N jugadores

$$P_1, P_2, ..., P_N.$$

Un juego en *forma extensa* basado en T consiste en T junto con un conjunto no vacío Σ_i de subárboles de elección para cada jugador P_i. El conjunto Σ_i se llama la *estrategia establecida* para P_i y un elemento de Σ_i se llama una *estrategia* para P_i.

En resumen, es este concepto de conjuntos de estrategias lo que nos permite imponer las reglas del juego que prohíben a los jugadores tener información perfecta. Por ejemplo, si P_i no tiene permitido saber cuál de un conjunto de vértices ha alcanzado en cierto punto del juego, entonces el conjunto de estrategias de P_i no contendría subárboles de elección que requieren diferentes movimientos dependiendo de esta información no disponible.

Usaremos una letra griega mayúscula Γ, Δ o Λ para denotar un juego en forma extensa. Formalmente, escribiríamos, por ejemplo,

$$\Gamma = (T, \{P_1, P_2, ..., P_N\}, \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots ,\Sigma_N\})$$

para describir el juego Γ con el árbol de juego T, y con los jugadores $P_1, P_2, ..., P_N$ con conjuntos de estrategias $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots,\Sigma_N$, respectivamente.

Cada subárbol de elección (y, por lo tanto, cada estrategia) es un subárbol. Por lo tanto, un subárbol de elección es en sí mismo un árbol de juego. Representa un juego más pequeño en el que uno de los jugadores se ha eliminado efectivamente (ya que ese jugador no tiene opciones).

Finalmente, observe que, si se elige un subárbol de elección S_i para cada Σ_i, entonces la intersección del S_i es un camino desde la raíz hasta un vértice terminal. Este camino representa la historia del juego, dado que cada jugador se mueve de acuerdo con el S_i apropiado. La N-tupla de números que rotula el vértice terminal en el que termina esta ruta nos da los pagos a los N jugadores. Escribimos π_i (S_1, S_2, ..., S_N) para el número de componente i de esta N-tupla. Este número es, por lo tanto, el pago al jugador P_i que resulta de todos los jugadores jugando de acuerdo con los subárboles de elección dados.

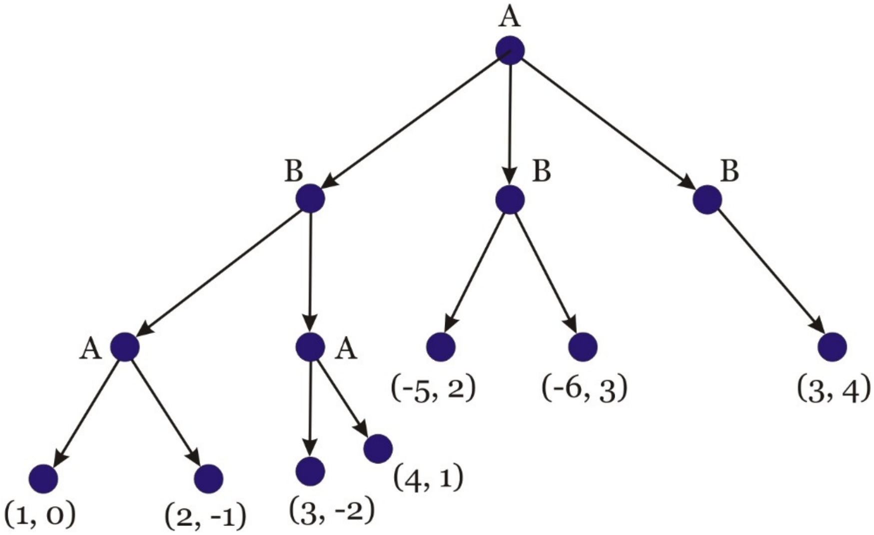

Fig. 7 Árbol de juego

Veamos un ejemplo. Sea árbol de juego que se muestra en la Fig. 7 que es un juego de información perfecta. Hay dos jugadores, designados *A* y *B*. El jugador *A* tiene doce funciones de elección y el jugador *B* tiene cuatro. Para contar las funciones de elección para *A*, tenga en cuenta que hay tres vértices que pertenecen a *A*. Uno de ellos (la raíz) tiene tres hijos, mientras que cada uno de los otros dos tiene dos hijos. Por lo tanto, el número de funciones de elección es $2 \times 2 \times 3 = 12$. Hay seis subárboles de elección para el jugador *A*. Tres de ellos se muestran en la Fig. 8. Para enumerarlos, sea *M* el subárbol de elección para *A* correspondiente a la elección de *A* de su hijo medio (en la raíz), y sea *R* el que corresponde al hijo situado a la derecha. Si *A* elige a su hijo de la izquierda en la raíz, hay cuatro posibles subárboles de elección. Cada uno de estos tiene un nombre de la forma *Lxy*, donde *x* e *y* son cada uno *L* o *R*. En esta notación, *x* denota el hijo elegido por *A* en caso de que *B* se mueva a la izquierda, e *y* es el hijo elegido por *A* en respuesta a *B* moviéndose a la derecha. Por lo tanto, estos cuatro subárboles de elección son *LLL, LLR, LRL* y *LRR*.

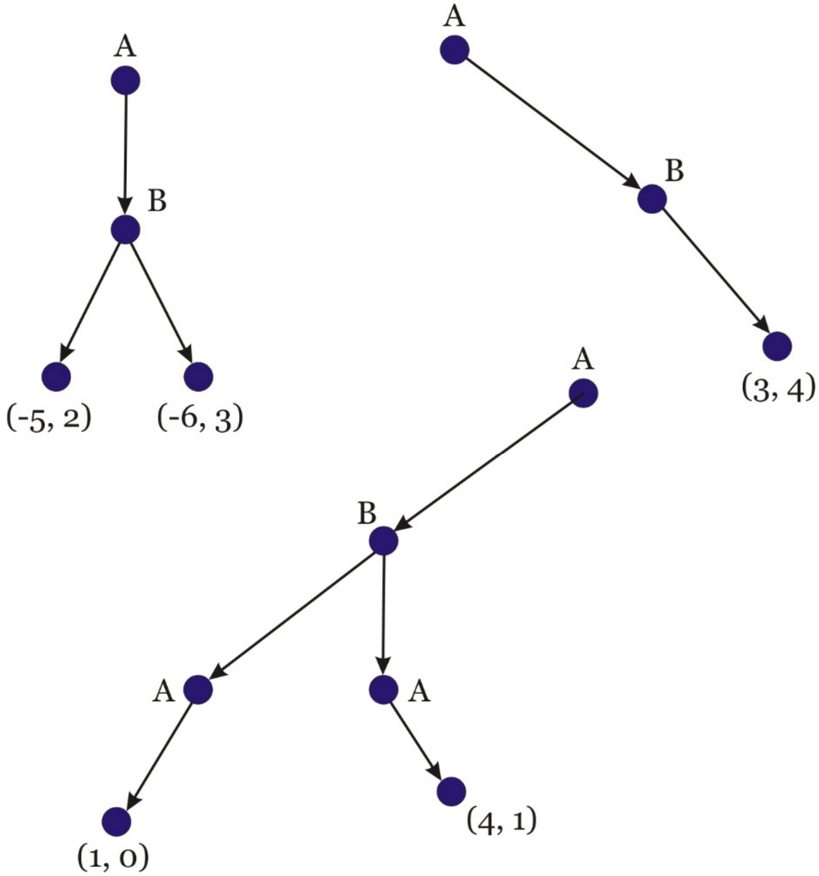

Fig. 8 Algunos subárboles de elección de A

Para B, hay cuatro subárboles de elección. Los denotamos xy, donde cada uno de x e y es L o R. Aquí, x es la respuesta de B a A eligiendo a su hijo de la izquierda, e y es la respuesta de B a A eligiendo a su hijo medio. Uno de estos subárboles de elección para B se muestra en la Fig. 9. Por ejemplo, supongamos que A juega de acuerdo con LRR, mientras que B juega de acuerdo con LL. Entonces el pago a A es 2, mientras que el pago a B es -1.

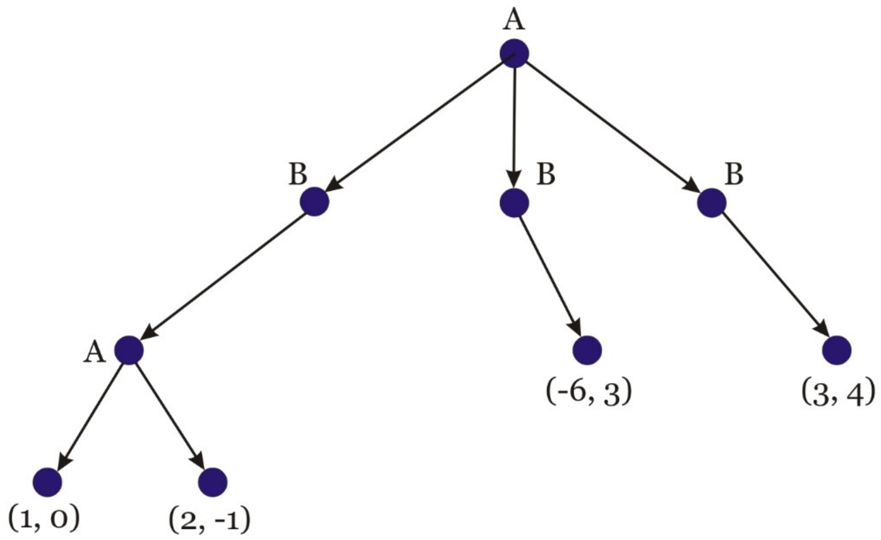

Fig. 9 Un subárbol de elección de B

Ahora supongamos que las reglas del juego se modifican para que, después del primer movimiento de A, B no pueda distinguir entre A moviéndose a la izquierda y A moviéndose a la mitad. Supongamos también que, si A se mueve hacia la izquierda en su primer movimiento, A no puede distinguir entre B moviéndose hacia la izquierda y B moviéndose hacia la derecha. Entonces la estrategia establecida para A consiste en LLL, LRR, M y R. Además, la estrategia establecida para B consiste en los dos subárboles de elección, LL y RR.

1.5 JUEGOS CON MOVIMIENTOS ALEATORIOS

Ahora modificaremos la definición dada en la sección anterior para permitir movimientos aleatorios en el juego. Esto se hace permitiendo que algunos de los vértices no terminales se etiqueten con C como "casualidad" en lugar de designar a un jugador. El significado de tal vértice es que, en ese punto del juego, hay una elección aleatoria de uno de los hijos de ese vértice. Las *probabilidades* con que se elegirán los diversos hijos son números no negativos que suman 1. Estas probabilidades se utilizan como etiquetas en las aristas saliendo del vértice etiquetado como "casualidad". Introducimos la siguiente notación: si u es un vértice que pertenece al azar y v es un hijo de u, entonces Pr (u, v) denota la probabilidad de que se elija la arista (u, v). Por lo tanto, sea $E(u)$ el conjunto de todas las aristas que comienzan en u,

$$\Pr(u, v) \geq 0$$

y

$$\sum_{(\mathbf{u},\mathbf{v})\in \mathbf{E}(\mathbf{u})} \mathbf{Pr(u,v) = 1}$$

Por ejemplo, supongamos que el juego comienza con una tirada de dos dados regulares, y que el desarrollo del juego depende de la suma de los números en la parte superior de los dados. Por lo tanto, hay once posibles resultados: 2,3, ..., 12, y entonces la raíz del árbol tiene once hijos. Las probabilidades en las aristas que salen de la raíz varían de 1/36 (para los resultados 2 y 12) a 1/6 (para el resultado 7).

La definición de función de elección y de subárbol de elección es exactamente la misma que antes. La definición de pago $\pi_i(S_1, S_2, ..., S_N)$ para el jugador P_i ya no funciona, porque el vértice terminal donde termina el juego ahora depende de los movimientos aleatorios, así como de las elecciones hechas por los jugadores. Supongamos que cada jugador P_i juega de acuerdo con el subárbol de elección S_i. En el caso de juegos sin movimientos aleatorios, la intersección de los S_i es una única ruta desde la raíz hasta un vértice terminal. En el caso donde hay posibilidad movimientos, esta intersección es un subárbol que puede contener muchos vértices terminales. La imagen correcta es que cada ruta en este subárbol se bifurca cuando se encuentra con un vértice que pertenece al azar. Por lo tanto, cada vértice terminal u en esta intersección se alcanza con una probabilidad que es el producto de las probabilidades en los vértices pertenecientes al azar encontrado en el camino desde la raíz a u. El *pago esperado* por el jugador P_i sería entonces el promedio ponderado de los componentes i de las N-tuplas que rotulan los vértices terminales de la intersección.

Nuestro punto de vista aquí es que el juego se juega repetidamente, tal vez miles de veces. Está claro que en un juego que solo se juega una vez (o solo unas pocas veces) la idea del pago esperado puede tener poco significado. Estamos haciendo una distinción bastante importante ya que algunos juegos, por su naturaleza, solo se pueden jugar una vez. Considere, por ejemplo, juegos de confrontación nuclear en los que los pagos pueden corresponder a la aniquilación.

DEFINICIÓN 1.6. Sea T un árbol para un juego con N jugadores. Para cada i, sea $S_i \in \Sigma_i$. Si w es un vértice terminal de $\bigcap_{i=1}^{N} S_i$ y si R es el camino desde la raíz a w, entonces la probabilidad de que el juego termine en w es:

$$\mathbf{Pr(S_1,...,S_N;w) = \prod \{Pr(u,v) : u \text{ pertenece al azar y } (u,v) \in R\}}$$

Aquí, se entiende que, si no hay vértices de probabilidad en el camino R, entonces Pr (S_l, …, S_N; w) = 1.

El pago puede definirse de la siguiente manera:

DEFINICIÓN 1.7. En el contexto de la definición anterior, el *pago esperado*, $\pi_i(S_1, S_2, ..., S_N)$ al jugador P_i que resulta de los subárboles de elección $S_i \in \Sigma_i$ se define por

$$\boldsymbol{\pi_i(S_1,...,S_N) = \sum Pr(S_1,...,S_N;w) \cdot p_i(w)}$$

donde se toma la suma sobre todos los vértices terminales w en $\bigcap_{i=1}^{N} S_i$

Hagamos algunos cálculos para el juego que se muestra en la Fig. 10. Hay dos jugadores, designados A y B, y el juego es de información perfecta. Hay dos vértices que pertenecen al azar. El vértice de la izquierda tiene dos hijos, y las probabilidades asociadas a las dos aristas son 0,6 y 0,4, respectivamente. Uno podría imaginar que una moneda sesgada se lanza en ese punto del juego.

El vértice de probabilidad de la derecha es similar, excepto que la moneda lanzada es justa. El jugador *A* solo tiene dos estrategias: puede moverse hacia la izquierda (denotado *L*) o hacia la derecha (denotado *R*). El lector puede verificar que el jugador *B* tiene dieciséis estrategias.

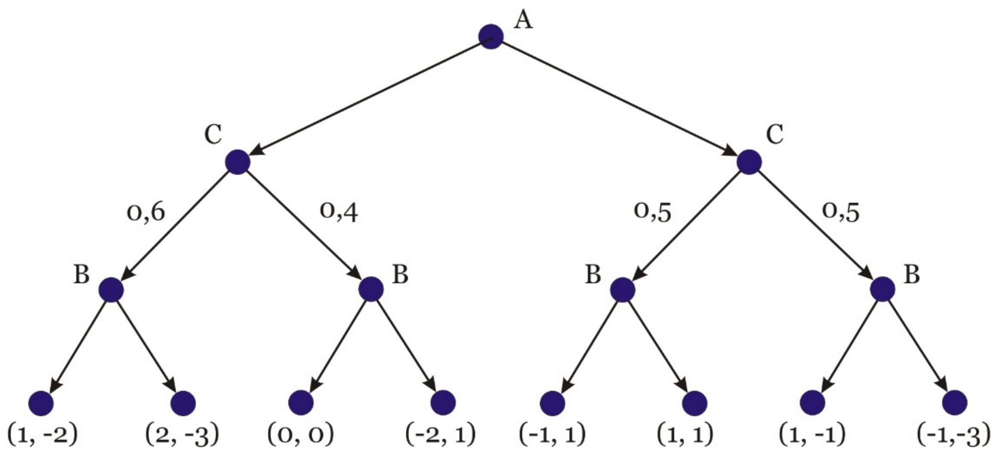

Fig. 10 Juego con movimientos aleatorios

Ahora supongamos que el jugador *A* juega su estrategia *L*, mientras que el jugador *B* juega su estrategia *LRLR*. El significado de esta notación es que si *A* se mueve hacia la izquierda y el movimiento casual es hacia el hijo izquierdo, *B* se mueve hacia la izquierda. Si *A* se mueve a la izquierda y el movimiento casual está a la derecha, *B* se mueve a la derecha. Finalmente, si *A* se mueve hacia la derecha, *B* se mueve hacia la izquierda o hacia la derecha, dependiendo de si el movimiento aleatorio es hacia la izquierda o hacia la derecha. Para calcular los pagos esperados para ambos jugadores, observe primero que los vértices terminales que se pueden alcanzar, dado que los jugadores juegan de acuerdo con estas estrategias, son aquellos cuyos pagos son (1, -2) y (-2,1). Por lo tanto, el pago esperado para el jugador *A* es

$$\pi_A(L, LRLR) = 0{,}6 \times 1 + 0{,}4 \times -2 = -0{,}2,$$

mientras que el pago esperado para el jugador *B* es

$$\pi_B(L, LRLR) = 0{,}6 \times (-2) + 0{,}4 \times 1 = -0{,}8.$$

1.5.1 TEOREMA DE LOS PAGOS

Ahora queremos probar un teorema que nos permite calcular los pagos debido a los subárboles de elección en términos de pagos en juegos más pequeños. Primero se necesita un lema

LEMA 1.7. Sea T sea un árbol de juego con N jugadores; sean S_1, ..., S_N subárboles de elección para P_1, …, P_N, respectivamente; y sea r la raíz de T. Entonces tenemos:

(1) Si r pertenece a un jugador P_i y (r, u) es una arista de S_i, entonces, para $1 \leq j \leq N$, $S_j \cap T_u$ es un subárbol de elección de T_u para el jugador P_j.

(2) Si r pertenece al azar y u es hijo de r, entonces, para $1 \leq j \leq N$, $S_j \cap T_u$ es un subárbol de elección de T_u para el jugador P_j.

TEOREMA 1.8. Sea T sea un árbol de juego con N jugadores P_1, ..., P_N. Sea S_1, ..., S_N subárboles de elección para P_1, ..., P_N, respectivamente. Entonces, si r es la raíz de T, tenemos:

(1) Si r pertenece al jugador P_i y (r, u) está en S_i entonces, para $1 \leq j \leq N$,

$$\pi_j(S_1, \ldots, S_N) = \pi_j(S_1 \cap T_u, S_2 \cap T_u, \ldots, S_N \cap T_u).$$

(2) Si r pertenece al azar, entonces, para $1 \leq j \leq N$,

$$\pi_j(S_1, S_2, \ldots, S_N) = \sum_{u \in Ch(r)} Pr(r, u) \cdot \pi_j(S_1 \cap T_u, \ldots, S_N \cap T_u)$$

1.6 *N*-TUPLAS DE ESTRATEGIAS EN EQUILIBRIO

En términos generales, un N-tupla de estrategias (una para cada jugador) está en equilibrio cuando un jugador se aleja de ella, mientras que los demás se mantienen fieles a la misma, tiene como resultado un castigo para el jugador que se ha extraviado. La idea es que una vez que los jugadores comiencen a jugar de acuerdo con dicha N-tupla, entonces todos tienen una buena razón para quedarse con ella. Esto nos da un "concepto de solución", uno que es razonablemente apto para el análisis matemático. Hay una gran clase de juegos (que se considerarán en el próximo capítulo) para los cuales todos coinciden en que una *N*-tupla de equilibrio realmente es una "solución". Para otros juegos, esto no esta tan claro. Discutiremos esta pregunta más tarde. La definición formal es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.8. Sea Γ un juego de N jugadores en forma extensa y llamemos a los conjuntos de estrategias de los jugadores por Σ_l, Σ_2, …, Σ_N. Una N-tupla (S^*_t), donde:

$$S^*_t \in \Sigma_i$$

Para $1 \leq i \leq n$, es un *equilibrio N-tupla* (o está en *equilibrio*) si, por cada i y por cada $S_i \in \Sigma_i$, tenemos:

$$\pi_i(S^*_l, \ldots, S_i, \ldots, S^*_N) \leq \pi_i(S^*_l, \ldots, S^*_i, \ldots, S^*_N)$$

Por lo tanto, un jugador individual que se aleja de la *N*-tupla estará perjudicado (o, al menos, sin ayuda). Es fácil comprobar que el par de estrategias (*L*, *LRLR*) en el juego que se muestra en la Fig. 10 está en equilibrio. El siguiente juego es un ejemplo importante en este contexto.

EJEMPLO 1.2 (EL DILEMA DEL PRISIONERO). Dos criminales, llamémoslos Bonnie y Clyde, son arrestados por robo. La policía los separa de inmediato para que no puedan comunicarse de ninguna manera. A cada uno se le ofrece el siguiente trato: si confiesas e implicas al otro prisionero, solo cumplirás un año en la cárcel (si el otro no confiesa) o cinco años (si el otro confiesa). Por otro lado, si no confiesas y el otro preso lo hace, cumplirás diez años. Finalmente, si ninguno de los dos confiesa, ambos cumplirán dos años ya que nuestro caso no sería muy sólido.

Al ver esto como un juego, vemos que cada jugador tiene solo dos estrategias. Vamos a llamarlos *C* ("cooperar con el otro delincuente") y *D* ("desertar"). Adoptar la estrategia *C* significa negarse a confesar, es decir, actuar como si los dos presos formaran un equipo de personas que pudieran confiar el uno en el otro, mientras que adoptar *D* significa confesar. Los "pagos" (es decir, años de prisión) son realmente castigos, por lo que deberíamos usar sus negativos como recompensas.

Vemos que la recompensa para cada jugador que surge del par de estrategias (*D*, *D*) es -5. Para el par de estrategias (*D*, *C*) (es decir, deserción de Bonnie mientras Clyde coopera), Bonnie "gana" -1 y Clyde "gana" -10. Ahora, es fácil ver que (*D*, *D*) es un par de equilibrio. Por otra parte, es el único, sin embargo, es un poco difícil pensar en (*D*, *D*) como la "solución" al dilema del prisionero. Ambos lo hacen mejor si juegan el par de estrategias (*C*, *C*). Por supuesto, tendrían que confiar el uno en el otro para poder hacerlo. Este juego será discutido nuevamente en un capítulo posterior.

Tabla 1 Juago con dos equilibrios N-tuplas

Estrategias tiples	Vectores de pago
(1, 1, 1)	(0, 0, 0)
(1, 1, 2)	(0, -1, 1)
(1, 2, 1)	(1, 0, -1)
(1, 2, 2)#	(0, 0, 0)
(2, 1, 1)#	(1, 1, -2)
(2, 1, 2)	(2, 0, -2)
(2, 2, 1)	(1, -1, 0)
(2, 2, 2)	(-1, 1, 0)

Otro ejemplo se describe en la Tabla 1. En este juego, hay tres jugadores. Cada uno tiene solo dos estrategias, denotadas como 1 y 2. Los jugadores eligen simultáneamente sus estrategias, de modo que ningún jugador sepa lo que cualquiera de los otros dos eligió. Por lo tanto, el juego no es de información perfecta. Hay ocho combinaciones de estrategias. Estas combinaciones se enumeran en la columna de la izquierda, y las 3-tuplas correspondientes de los pagos se encuentran en la columna de la derecha. Las 3-tuplas de equilibrio están marcadas con #.

Vemos que hay dos 3-tuplas de equilibrio, ninguna de las cuales se ve muy estable. Está claro que el tercer jugador preferiría fuertemente la 3-tupla (1,2,2), mientras que los otros dos jugadores preferirían la 3-tupla (2, 1, 1). Estos dos podrían forzar el problema al jugar de acuerdo con 2 y 1, respectivamente. Sin embargo, valdría la pena que el jugador 3 haga un pago al jugador 2 a cambio de la estrategia 2 de juego de los 2.

A pesar de nuestras reservas acerca de si conocer un equilibrio de *N*-tupla resuelve un juego, el concepto sigue siendo valioso. Por lo tanto, es interesante conocer las condiciones bajo las cuales existe. Ciertamente, es cierto que hay muchos juegos para los que no existe *N*-tupla de equilibrio.

El lector puede verificar que esto sea cierto para la morra de dos dedos. La clase más importante de juegos cuya existencia está garantizada es la de los juegos de información perfecta.

Este tipo de juego se definió anteriormente, y ahora se puede dar una definición en términos de nuestra notación para juegos en forma extensa.

DEFINICIÓN 1.9. Sea Γ un juego en forma extensa. Entonces Γ es de información perfecta si, para cada jugador, cada subárbol de elección es una estrategia.

Ahora podemos enunciar lo siguiente:

TEOREMA 1.9. Sea Γ un juego en forma extensa. Si Γ es de información perfecta, entonces existe un equilibrio *N*-tupla de estrategias.

1.7 FORMA NORMAL

Sea

$$\Gamma = (T, \{P_1, \ldots , P_N\}, \{\Sigma_1, \ldots , \Sigma_N\})$$

un juego en forma extensa. Para cada *N*-tupla de estrategias $(S_1, \ldots, S_N)$ con el producto cartesiano $\Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N$, se determina un *N*-tupla $\vec{\pi}(s_1,\ldots,s_N)$ de pagos a los jugadores. Esta función de $\Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N$ de $\mathbb{R}^N$ (es decir, el N-producto cartesiano de la recta real $\mathbb{R}$ consigo misma) se denomina *forma normal* del juego Γ. A menudo estudiaremos juegos en sus formas normales sin mencionar sus formas extensas.

Debe mencionarse que la forma normal de un juego no está definida de manera única. Si permutamos el orden de los jugadores, cambiamos el producto cartesiano: $\Sigma_1 \times \ldots \times \Sigma_N$ y, por lo tanto, la función $\vec{\pi}$. En la práctica, esta falta de exclusividad no presenta dificultades y la ignoraremos. Por lo tanto, cuando decimos "la forma normal" nos referiremos a cualquiera de las posibles.

Resumimos la idea de la forma normal de un juego en lo siguiente:

DEFINICIÓN 1.10. Sean $X_1, ..., X_N$ conjuntos finitos no vacíos y sea una función del producto cartesiano $X_1 \times ... \times X_N$ de $\mathbb{R}^N$. Entonces si se llama un *juego de N-jugadores en forma normal con un conjunto de estrategia* $X_1, ..., X_N$.

Vamos a designar a los jugadores en un juego N-jugador si en forma normal por $P_1, ..., P_N$. Juegan de la siguiente manera: cada jugador P_i elige $x_i \in X_i$. Estas elecciones se realizan de forma simultánea e independiente. Los pagos son dados por los componentes de la N-tupla $\vec{\pi}(\vec{x})$, donde

$$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_N)$$

La definición de equilibrio de N-tuplas se transmite casi sin cambios al contexto de los juegos en forma normal. Para ser precisos, damos la siguiente:

DEFINICIÓN 1.11. Sea $\vec{\pi}$ un juego en forma normal con un conjunto de estrategias $X_1, ... , X_N$. Una N-tupla:

$$\vec{x} \in X_1 \times ... \times X_N$$

es un *equilibrio N -tupla* si, para todos $1 \leq i \leq N$ y cualquier $x_i \in X_i$,

$$\pi_i(x_1^*, ..., x_i, ..., x_N^*) \leq \pi_i(\vec{x}).$$

Evidentemente, es cierto que si un juego en forma extensa tiene una N-tupla de estrategias de equilibrio, también lo hace su forma normal.

En el caso donde $N = 2$, un juego en forma normal se puede representar como un par de matrices. De hecho, sea m la cantidad de estrategias en Σ_1 y sea n la cantidad de estrategias en Σ_2. Construyamos una matriz $m \times n$ de pagos para el jugador P_1 etiquetando las filas con miembros de: Σ_1 y las columnas con miembros de Σ_2. La entrada en la fila etiquetada con $x \in \Sigma_1$ y en la columna etiquetada con $y \in \Sigma_2$ se define como $\pi_1(x, y)$. Llamamos a esta matriz M^1. La matriz de pago M^2 para el jugador P_2 se forma de una manera similar.

Estas matrices no son únicas ya que una permutación de uno o ambos conjuntos: Σ_1 o Σ_2 también permutarían las filas o columnas de las matrices.

Esta falta de exclusividad no presenta dificultad. Calculemos la forma normal para el juego de dos personas de información perfecta cuyo árbol se muestra en la Fig. 11. Los jugadores se designan A y B. Hay ocho estrategias para el jugador A:

LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR.

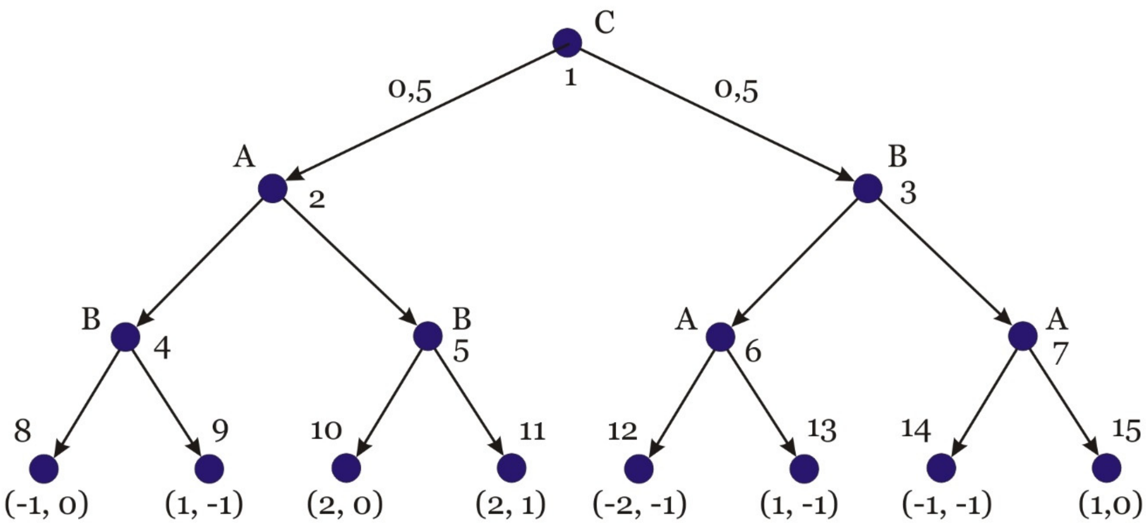

Fig. 11 Juego de dos personas

Aquí nuevamente, L significa "izquierda" y R significa "derecha". Por lo tanto, la estrategia *RLR* corresponde a la función de elección c_A, donde:

$$c_A(2) = 5 \qquad c_A(6) = 12 \qquad c_A(7) = 15.$$

El jugador *B* también tiene ocho estrategias y están designadas exactamente de la misma manera. Por ejemplo, la estrategia *LLR* de *B* corresponde a la función de elección c_B, donde:

$$c_B(3) = 6 \qquad c_B(4) = 8 \qquad c_B(5) = 11.$$

La forma normal de este juego está contenida en las siguientes matrices. El orden de las filas y columnas se corresponde con el orden de las estrategias indicadas anteriormente. La matriz M^1 de pagos para el jugador P_1 se da primero.

$$\begin{pmatrix}
-3/2 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
-3/2 & -3/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 \\
3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\
3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2 & 3/2
\end{pmatrix}$$

Entonces la matriz de pagos M^2 para el jugador P_2 es

$$\begin{pmatrix}
-1/2 & -1/2 & -1 & -1 & -1/2 & -1/2 & -1 & -1 \\
-1/2 & -1/2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\
-1/2 & -1/2 & -1 & -1 & -1/2 & -1/2 & -1 & -1 \\
-1/2 & -1/2 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/2 \\
-1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
-1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\
-1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\
-1/2 & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2
\end{pmatrix}$$

A partir de las dos matrices, es fácil elegir los pares de estrategias de equilibrio. De hecho, está claro que un par (S^*_1, S^*_2) es un par de equilibrio si y solo si la entrada en las coordenadas (S^*_1, S^*_2) en M^1 es un máximo en su columna, mientras que la entrada en M^2 en las mismas coordenadas es un máximo en su fila.

Se puede observar que hay seis pares de equilibrio en este ejemplo.

Tanto la forma extensa como la normal de los juegos tienen ventajas. La forma normal es quizás más simple matemáticamente. Para el tipo de juegos que se considerarán en el próximo capítulo, la forma normal es la que nos permite resolver los juegos. Por otro lado, es más simple pasar de una descripción verbal de un juego a su forma extensa que a su forma normal. Además, si estamos interesados en considerar pequeños subjuegos de un juego como una forma de entender mejor un juego que es demasiado grande para analizar, entonces la forma extensa es mejor. Esto se debe a que es bastante fácil determinar qué piezas pequeñas del gran árbol examinar. Es más difícil descomponer una forma normal en pedazos de esta manera.

2.1 INTRODUCCIÓN

Sea $\vec{\pi}$ un juego en forma normal con un conjunto de estrategias $X_1, ..., X_N$. Decimos que este juego es de *suma cero* si:

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i(x_1, ..., x_N) = 0$$

para cada elección de $x_i \in X_i$, $1 \leq i \leq N$. La definición correspondiente para un juego en forma extensa establece que la suma de las componentes de $\vec{p}(v)$ es cero para cada vértice terminal v. Esta condición es ciertamente cierta para los juegos recreativos ordinarios. Establece que un jugador no puede ganar una cantidad a menos que los otros jugadores pierdan conjuntamente la misma cantidad. Los juegos no recreativos, sin embargo, tienden a no ser de suma cero. Las situaciones competitivas en economía y política internacional a menudo son del tipo en que los jugadores pueden conseguir lo óptimo conjuntamente si juegan de forma adecuada, y en conjunto empeoran jugando de manera estúpida. La frase "juego de suma cero" ha ingresado en el lenguaje de la política y los negocios.

En este capítulo nos ocupamos de los juegos en forma normal que son de suma cero y que tienen dos jugadores. En el capítulo anterior, discutimos el hecho de que un juego de dos personas en forma normal se puede representar como un par de matrices de pago (una para cada jugador). Si el juego también es de suma cero, las dos matrices son claramente negativas entre sí. Por esta razón, no hay necesidad de escribir ambas. A partir de ahora, representaremos un juego de suma cero para dos personas como un *juego matricial*, es decir, como una única matriz M de $m \times n$. Los dos jugadores se conocen como el *jugador de fila* y el *jugador de columna*, respectivamente. El jugador de fila tiene m estrategias que se identifican con las filas de M. El jugador de columna tiene n estrategias que se identifican con las columnas de M. Si el jugador de fila juega estrategia i y el jugador de columna juega estrategia j, entonces el pago al jugador el jugador de fila es m_{ij} y el pago al jugador de columna es $-m_{ij}$.

Es importante aclarar desde el principio que los números más grandes en M son favorecidos por el jugador de fila y los más pequeños por el jugador de columna. Por lo tanto, una entrada negativa es una pérdida para el jugador de fila, pero una ganancia (del valor absoluto) para el jugador de columna.

2.2 PUNTOS DE SILLA

La idea de un par de estrategias de equilibrio puede traducirse fácilmente en el contexto de la matriz de juego. De hecho, si (p, q) es ese par, entonces

$$m_{iq} \leq m_{pq} \text{ para todos los } i,$$

y

$$m_{pj} \geq m_{pq} \text{ para todo } j.$$

Observe que la segunda desigualdad se invierte porque el pago al jugador de columna es el negativo de la entrada de la matriz. Estas desigualdades motivan la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.1. Sea M sea una matriz con entradas reales. Una entrada m_{pq} de M es un *punto de silla* de M si es simultáneamente un mínimo en su fila y un máximo en su columna.

Por lo tanto, si M es una matriz de juego, entonces m_{pq} es un punto de silla si y solo si (p, q) es un par de estrategias de equilibrio. En los siguientes tres ejemplos, la entrada m_{21} es el único punto de silla de la primera matriz, la entrada m_{12} y la entrada m_{33} son ambos puntos de silla de la segunda matriz (hay dos más), y la tercera matriz no tiene puntos de silla.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lo primero que probamos sobre los puntos de silla es el siguiente:

TEOREMA 2.1. Si m_{kl} y m_{pq} son puntos de silla de la matriz *M*, entonces m_{kq} y m_{pl} también son puntos de silla y

$$m_{kl} = m_{pq} = m_{kq} = m_{pl}$$

Queremos establecer que un punto de silla proporciona una solución aceptable para un juego de matriz. Para hacerlo, consideremos cómo debería jugar racionalmente el jugador de fila. En primer lugar, es razonable suponer que, sin importar cómo juegue, su oponente responderá jugando para maximizar su pago (el del jugador de columna). Después de todo, conoce el juego tan bien como él y sería una tontería asumir que, a la larga, continuará siendo caritativa o cometerá errores. Ahora, el hecho de que el juego sea de suma cero significa que la maximización del pago del jugador de columna es exactamente lo mismo que minimizar el pago del jugador de fila. Por lo tanto, el jugador de fila debe elegir su estrategia para que el pago mínimo posible debido a esta estrategia sea lo más grande posible. El jugador de columna debe actuar de manera similar. Estas ideas conducen a la siguiente:

DEFINICIÓN 2.2. Sea *M* sea una matriz de juego $m \times n$. El *valor para el jugador de fila* y el *valor para el jugador de columna* son, respectivamente,

$$\mathbf{u_r(M) = \max_i \min_j m_{ij}}$$

y

$$\mathbf{u_c(M) = \min_j \max_i m_{ij}}$$

Por lo tanto, $u_r(M)$ es una cantidad que el jugador de fila tiene garantizado ganar si juega una estrategia k para la cual se alcanza el máximo en la definición de $u_r(M)$, es decir, para que

$$\min_j \mathbf{m}_{kj} = \mathbf{u}_r(\mathbf{M})$$

La cantidad realmente ganada jugando la estrategia *k* podría ser incluso mayor si el jugador de columna elige una estrategia imprudentemente.

Una interpretación similar vale para el jugador de columna. Su mejor pago garantizado se obtiene jugando una columna *l* tal que

$$\max_i \mathbf{m}_{il} = \mathbf{v}_c(\mathbf{M})$$

En los tres ejemplos que acabamos de dar, los valores para el jugador de fila son, respectivamente, -1, 1 y 1, y los valores para el jugador de columna son, respectivamente, -1, 1 y 2. El hecho de que el valor del jugador de fila es igual al valor del jugador de columna en los dos ejemplos donde existe un punto de silla (y no en el otro ejemplo) no es una coincidencia.

LEMA 2.2. Para cualquier matriz M,

$$u_r(M) \leq u_c(M).$$

TEOREMA 2.3. Si el juego matricial *M* tiene un punto de silla m_{pq}, entonces

$$u_r(M) = u_c(M) = m_{pq}.$$

Lo contrario también se cumple:

TEOREMA 2.4. Si $u_r(M) = u_c(M)$, entonces *M* tiene un punto de silla.

Sea M ser una matriz con un punto de silla. Supongamos que el jugador de fila y el jugador de columna juegan la fila i y la columna j, respectivamente. Si la fila i contiene un punto de silla, tenemos m_{il}, luego

$$m_{ij} \geq m_{il} = u_r\,(M).$$

Por otro lado, si la fila i no contiene un punto de silla, mientras que la columna j contiene uno (por ejemplo, m_{kj}), entonces

$$\mathrm{m_{ij}} \leq \mathrm{m_{kj}} = u_r(M).$$

En otras palabras, el jugador de fila, al jugar una fila que contiene un punto de silla, puede garantizar un pago de al menos $u_r(M)$. La consecuencia de no jugar esa fila es que el jugador de columna podría (y lo haría) jugar para hacer que el jugador de fila rinda como máximo $u_r(M)$. A partir de estas consideraciones, está claro que la mejor jugada para el jugador de fila es una fila que contiene un punto de silla. Por un razonamiento similar, el jugador de columna debería usar una columna que contenga un punto de silla. Si ambos siguen esta recomendación, entonces, según el Teorema 2.1, la entrada de pago m_{ij} será un punto de silla.

En resumen, si un juego matricial M tiene un punto de silla, entonces su solución es:

- El jugador de fila juega cualquier fila que contenga un punto de silla.
- El jugador de columna reproduce cualquier columna que contenga un punto de silla.
- El pago al jugador de fila es $u_r(M) = u_c(M)$, mientras que el pago al jugador de columna es, por supuesto, $-u_r(M) = -u_c(M)$.

2.3 ESTRATEGIAS MIXTAS

Los resultados de la sección anterior muestran que las matrices de juegos matriciales con puntos de silla se pueden resolver fácilmente. Consideremos una matriz sin ningún punto de silla. Aquí hay un ejemplo de 2×2:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Es fácil ver que, si el jugador de fila juega consistentemente la estrategia 1, entonces el jugador de columna, cuando se da cuenta de esto, jugará 2 constantemente y ganará 1 cada vez. Por otro lado, si el jugador de fila juega 2 de manera consistente, entonces el jugador de columna jugará 1 y nuevamente ganará 1. El mismo resultado se produciría si el jugador de fila variara su estrategia, pero de una manera predecible. Por ejemplo, si el jugador de fila decidió jugar 1 en días impares y festivos importantes, y 2 en otros momentos, entonces el jugador de columna eventualmente se encargaría de esto y respondería de manera apropiada. En caso de que sea el jugador de columna quien adopte una estrategia fija o un patrón predecible de estrategias, el jugador de fila siempre podría responder para ganar 1 o 2. Una tercera posibilidad es que ambos jugadores jueguen con flexibilidad, cada uno respondiendo a los anteriores movimientos. En este caso, el jugador de fila puede comenzar jugando 1. Cuando el jugador de columna cae en la cuenta, comienza a jugar 2. Luego el jugador de fila cambia a 2, después de lo cual el jugador de columna pasa a 1. Luego el jugador de fila vuelve a 1. Este ciclo bastante insensato podría repetirse para siempre.

Se necesita una nueva idea para acercarse a un concepto satisfactorio de una solución para un juego matricial: cada jugador debe elegir, en cada jugada del juego, una estrategia al azar. De esta forma, el otro jugador no tiene manera de predecir qué estrategia se usará. Las probabilidades con las cuales se eligen las diversas estrategias probablemente serán conocidas por el oponente, pero la estrategia particular elegida en una jugada particular del juego no se conocerá. El problema para cada jugador será establecer estas probabilidades de una manera óptima. Así tenemos el siguiente:

DEFINICIÓN 2.3. Sea M un juego matricial $m \times n$. Una *estrategia mixta* para el jugador de fila es una m-tupla $\vec{\mathbf{p}}$ de probabilidades. Es decir,

$$p_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

De manera similar, una estrategia mixta para el jugador de columna es una n-tupla $\vec{\mathbf{q}}$ de probabilidades. Es decir,

$$q_j \geq 0 \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$$

La idea de una estrategia mixta para el jugador de fila es que, en cada jugada del juego, elija su estrategia al azar, y que esta elección se hará de modo que la probabilidad de elegir la estrategia i sea P_i. Por lo tanto, no hay forma de que el jugador de columna prediga qué estrategia particular jugará contra ella.

En la práctica, esta elección de estrategia puede llevarse a cabo mediante cualquier "dispositivo de azar" conveniente. Por ejemplo, supongamos que el jugador de fila en el juego 2 × 2 que acabamos de discutir decide jugar de acuerdo con $\vec{\mathbf{p}}$ =(1/2, 1/2). Luego, podría simplemente lanzar una moneda justa //cada vez que se juegue el juego (sin dejar que su oponente vea el resultado). Entonces podría j, ugar la fila 1 si el lanzamiento es cara y la fila 2 si es cruz. Para el mismo juego, si el jugador de columna quiere usar la estrategia mixta $\vec{\mathbf{q}}$ =(1/3, 2/3), podría lograrlo echando un vistazo a un reloj con segundero justo antes de jugar. Si marca entre 0 y 20 segundos, jugaría la columna 1, de lo contrario, la columna 2. Se necesitarían dispositivos de azar más sofisticados en situaciones más complejas. Siempre se puede usar un generador de números aleatorios (que se encuentra en la mayoría de las calculadoras).

Para enfatizar la distinción entre estrategias mixtas y estrategias ordinarias, nos referiremos a estas últimas como estrategias puras. Sin embargo, se debe tener en cuenta que las estrategias puras son realmente casos especiales de estrategias mixtas. La estrategia mixta $\vec{\mathbf{p}}$ para la cual $p_i = 0$ para $i \neq k$ (y $p_k = 1$) es obviamente igual a la estrategia pura k.

Si uno o ambos jugadores adoptan estrategias mixtas, los pagos en cada jugada del juego dependen de qué estrategias puras particulares hayan sido elegidas. Una cantidad importante a utilizar en el estudio de estrategias mixtas es la *recompensa esperada*. Es un promedio sobre muchas jugadas del juego y se expresa $\mathbf{E}(\vec{\mathbf{p}},\vec{\mathbf{q}})$, donde $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ son las estrategias mixtas en uso. Para ver cómo definir esta cantidad, considere primero el caso donde el jugador de fila juega de acuerdo con la estrategia mixta $\vec{\mathbf{p}}$ y el jugador de columna juega la estrategia pura j. Entonces, para una matriz M de $m \times n$, el pago al jugador de fila es m_{ij} con probabilidad p_i. El pago esperado es, por lo tanto:

$$\mathbf{E}(\vec{\mathbf{p}},\mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{p_i} \cdot \mathbf{m_{ij}}$$

Ahora, si el jugador de columna adopta la estrategia mixta, si, el pago al jugador de fila es $\mathbf{E(\vec{p}, j)}$ con probabilidad q_j, será:

$$\mathbf{E(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot m_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} p_i \cdot q_j \cdot m_{ij}}$$

Hay que tener en cuenta también que, intercambiando el orden de suma, obtenemos:

$$\mathbf{E(\vec{p},\vec{q}) = \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot m_{ij}}$$

Vamos a calcular algunos pagos esperados. Con M una matriz 2×2 presentada al comienzo de esta sección:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Supongamos que el jugador de fila juega la estrategia mixta $\vec{\mathbf{p}}$ = (1/2, 1/2) y el jugador de columna juega la estrategia mixta $\vec{\mathbf{q}}$ = (1/3, 2/3). Entonces

$$E((1/2,\ 1/2), (2\ /\ 3,1\ /\ 3)) = 2\ (2/3)\ (1/2) - (1/3)\ (1/2) - (2/3)\ (1/2) + (1/3)\ (1/2) = 1/3.$$

Ahora supongamos que el jugador de columna juega $\vec{\mathbf{q}}$ = (1/3, 2/3) como arriba. Dada esa información, ¿cómo debería jugar el jugador de fila para maximizar su recompensa esperada? Para calcular su mejor estrategia, observe primero que cada estrategia mixta para él es de la forma (p, 1-p), donde $0 \leq p \leq 1$. Ahora

$$E((p, 1 - p), (2/3,\ 1/3)) = 4p\ /\ 3 - 1/3.$$

Vemos que el pago máximo esperado es 1 y se alcanza para p = 1. Es decir, el jugador de fila debe jugar la estrategia pura 1.

2.3.1 VALORES DE FILA Y VALORES DE COLUMNA

Ahora hacemos un par de definiciones que son análogas a las definiciones de los valores del jugador de fila y del jugador de columna que hicimos anteriormente. El cambio es que las estrategias mixtas son sustituidas por estrategias puras.

DEFINICIÓN 2.4. Sea *M* sea una matriz de juego *m* x *n*. El *valor de fila* está definido:

$$\mathbf{v_r(M) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} E(\vec{p},\vec{q})}$$

donde $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ rango sobre todas las estrategias mixtas para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente. Del mismo modo, el *valor de columna* está definido

$$\mathbf{v_c(M) = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} E(\vec{p},\vec{q})}$$

Por lo tanto, $v_r(M)$ es una cantidad que el jugador de fila tiene *garantizado* para ganar en promedio, suponiendo que juegue inteligentemente. Puede ganar más si el jugador de la columna comete errores, pero no puede contar con ello. Se demostrará en un capítulo posterior que se alcanza el máximo en la definición de v_r, es decir, que existe al menos una estrategia mixta $\vec{\mathbf{r}}$ para el jugador de la fila de modo que

$$\mathbf{v_r(M) = \min_{\vec{q}} E(\vec{r},\vec{q})}$$

Tal estrategia se llama una *estrategia mixta óptima* para el jugador de fila. De manera similar, existe al menos una estrategia mixta $\vec{\mathbf{s}}$ óptima para el jugador de columna de manera que

$$\mathbf{v_c(M) = \max_{\vec{p}} E(\vec{p},\vec{s})}$$

Hay un punto importante que debe tenerse en cuenta sobre estas estrategias mixtas óptimas. Si el jugador de fila juega esa estrategia, se garantiza que ganará al menos $v_r(M)$ incluso si el jugador de columna juega tan bien como puede. Por otro lado, si el jugador de fila sabe que el jugador de columna está jugando una estrategia estúpida, entonces bien puede haber una estrategia contraria que gane más que el "óptimo".

Por ahora, simplemente asumiremos que ya sabemos que existen estas estrategias mixtas óptimas. Otro teorema (llamado el teorema del minimax), que se demostrará más adelante, es que los valores de fila y columna son siempre iguales. Esta es una información sorprendente y vital. En primer lugar, es sorprendente porque no está del todo claro a partir de las definiciones de por qué debería ser verdad. En segundo lugar, es vital porque toda la teoría que estamos desarrollando en este capítulo no funcionaría sin ella. Para obtener una idea de este asunto, probamos lo siguiente:

TEOREMA 2.5. Sea M una matriz $m \times n$ de juego y sean $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ estrategias mixtas óptimas para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente. Entonces

$$\mathbf{v_r(M) \leq E(\vec{r}, \vec{s}) \leq v_c(M)}$$

Este teorema nos da la desigualdad

$$v_r(M) \leq v_c(M),$$

que es una versión débil del teorema minimax. Más importante aún, si asumimos el teorema minimax, $v_r(M) = v_c(M)$, obtenemos

$$\mathbf{v_r(M) = E(\vec{r}, \vec{s}) = v_c(M)}$$

Ahora supongamos, además, que $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ son estrategias mixtas óptimas para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente. Entonces, si $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ son *alguna* de las estrategias mixtas para los jugadores,

$$\mathbf{E(\vec{p}, \vec{s}) \leq v_c(M) = E(\vec{r}, \vec{s}) = v_r(M)} \tag{1}$$

y

$$\mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{q}}) \geq \mathbf{v}_r(\mathbf{M}) = \mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{s}}) = \mathbf{v}_c(\mathbf{M}) \qquad (2)$$

Entonces las expresiones (1) y (2) juntas indican que el jugador de fila no puede hacer peor que v_r(M) jugando $\vec{\mathbf{r}}$, y no lo puede hacerlo peor que $v_r(M)$ jugando $\vec{\mathbf{p}}$. Por lo tanto, el jugador de fila debe jugar una estrategia mixta óptima. Del mismo modo, el jugador de columna debe jugar una estrategia mixta óptima. Tenemos lo siguiente:

DEFINICIÓN 2.5. Sea M un juego matricial para el cual $v_r(M) = v_c(M)$. Una *solución* a *M* consiste en tres componentes:

- Una estrategia mixta óptima para el jugador de fila.
- Una estrategia mixta óptima para el jugador de columna.
- El *valor* del juego, v(M), definido por

$$v(M) = v_r(M) = v_c(M).$$

Las desigualdades (1) y (2) son una reminiscencia de la definición de un punto de silla en una matriz. De hecho, si pensamos que las estrategias mixtas etiquetan las filas y columnas de una matriz infinita cuyas entradas son los pagos esperados $\mathbf{E}(\vec{\mathbf{p}},\vec{\mathbf{q}})$, entonces de (1) y (2) se desprende que el par $(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{s}})$ de estrategias mixtas óptimas es un punto de silla. El siguiente teorema es análogo al teorema 2.l.

TEOREMA 2.6. Sea M un juego matricial, en el cual $v_r(M) = v_c(M)$. Supongamos que $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{t}}$ son ambas estrategias mixtas óptimas para el jugador de fila, mientras que $\vec{\mathbf{s}}$ y $\vec{\mathbf{u}}$ son ambas estrategias mixtas óptimas para el jugador de columna. Entonces

$$\mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{s}}) = \mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}(\vec{\mathbf{t}},\vec{\mathbf{u}}) = \mathbf{E}(\vec{\mathbf{t}},\vec{\mathbf{s}})$$

Así pues, si hay una opción, no importa qué estrategias mixtas óptimas elijan los jugadores.

Como los puntos de silla de los juegos matriciales corresponden a pares de equilibrio de estrategias puras, vemos que un par de estrategias mixtas óptimas es análogo a un par de estrategias mixtas de equilibrio. Este concepto se definirá formalmente y se discutirá en detalle en el capítulo 5.

Hacemos hincapié en que una vez que se ha demostrado el teorema del minimax, sabremos que cada matriz M satisface la condición $v_r(M) = v_c(M)$ y, por lo tanto, tiene una solución.

El siguiente teorema nos proporciona una forma más simple de calcular los valores de fila y columna. Nos permite usar solo estrategias puras para calcular el mínimo interno (o máximo).

TEOREMA 2.7. Sea M una matriz $m \times n$. Entonces

$$\mathbf{v_r(M) = \max_{\vec{p}} \min_{j} E(\vec{p}, j)}$$

y

$$\mathbf{v_c(M) = \min_{\vec{q}} \max_{i} E(i, \vec{q})}$$

Donde, j abarca todas las columnas e i abarca todas las filas.

La demostración del teorema muestra que una estrategia $\vec{\mathbf{r}}$ para el jugador de fila es óptima si y solo si

$$\mathbf{v_r(M) = \min_{j} E(\vec{r}, j)}$$

donde j recorre sobre todas las columnas. Del mismo modo, una estrategia $\vec{\mathbf{s}}$ para el jugador de columna es óptima si y solo si

$$\mathbf{v_c(M) = \max_{i} E(i, \vec{s})}$$

donde i recorre todas las filas.

Este teorema jugará un papel importante en los apartados siguientes.

Si M tiene un punto de silla m_{kl}, entonces las estrategias puras k y l para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente, junto con el valor, m_{kl} constituyen una solución. Esto sigue del siguiente,

COROLARIO 2.8. Si M tiene un punto silla m_{kl}, entonces

$$v_r = v_c = m_{kl}$$

y entonces k e l son estrategias mixtas óptimas.

2.3.2 DOMINANCIA DE FILAS Y COLUMNAS

A veces es posible asignar probabilidad cero a algunas de las estrategias puras. En otras palabras, ciertas estrategias puras a veces se pueden identificar como aquellas que nunca aparecerían con probabilidad positiva en una estrategia óptima.

DEFINICIÓN 2.6. Sea M una matriz m x n. Entonces, la fila i *domina* la fila k si

$$m_{ij} \geq m_{kj} \text{ para todos } j.$$

Además, la columna j *domina* la columna l si

$$m_{ij} \leq m_{il} \text{ por todo } i.$$

Hay que tener en cuenta que la desigualdad en la definición de dominación de las columnas se invierte en comparación con la desigualdad en la dominación de las filas. Debería ser obvio que una fila dominada nunca debe ser utilizada por el jugador de la fila, y que una columna dominada no necesita ser utilizada por el jugador de la columna. Esto implica que, si buscamos estrategias mixtas óptimas, también podemos asignar probabilidades de cero a cualquier fila o columna. De hecho, también podemos reducir el tamaño de la matriz borrando filas y columnas dominadas. Veamos un ejemplo. Sea

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Vemos que la fila 1 está dominada por la fila 2. Borramos la fila dominada para obtener:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

En esta nueva matriz, la columna 3 está dominada por la columna 2 (no hubo dominación de columnas en la matriz original). Llegamos a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

en el que no hay dominación. Consideremos lo siguiente:

DEFINICIÓN 2.7. Sea M un juego matricial y sea $\vec{\mathbf{p}}$ una estrategia mixta para el jugador de fila. Entonces se dice que la fila i de M está *activa* en $\vec{\mathbf{p}}$ si $p_i > 0$. De manera similar, si $\vec{\mathbf{q}}$ es una estrategia mixta para el jugador de columna, entonces la columna j está *activa* en $\vec{\mathbf{q}}$ si $q_j > 0$. Una fila o columna que no está activa se dice que está *inactiva*.

Nuestra discusión sobre la dominación se puede resumir: una fila (o columna) dominada está inactiva en una estrategia óptima para el jugador de la fila (o jugador de la columna).

El siguiente teorema será útil.

TEOREMA 2.9. Sea M un juego de matriz m × n tal que $v_r(M) = v_c(M)$. Sean $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ estrategias mixtas para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente. Entonces $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ son óptimos si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

(1) La fila k está inactiva en $\vec{\mathbf{r}}$ siempre que

$$\mathbf{E(k,\vec{s}) < \max_i E(i,\vec{s})}$$

(2) La columna l está inactiva en $\vec{\mathbf{s}}$ siempre que

$$\mathbf{E(\vec{r},l) > \min_j E(\vec{r},j)}$$

Este teorema ocasionalmente es útil para calcular estrategias óptimas. De hecho, jugará un papel en la siguiente sección. Es muy útil para *verificar* las estrategias óptimas. Por ejemplo, sea

$$\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Usamos el Teorema 2.9 para verificar que $\vec{\mathbf{r}}$= (0, 0, 1) y $\vec{\mathbf{s}}$ = (2 /3, 0, 1/3) son estrategias óptimas para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente. Tenemos

$$\mathbf{E(1,\vec{s}) = 1 \qquad E(2,\vec{s}) = -1/3 \qquad E(3,\vec{s}) = 1}$$

y

$$\mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},1) = 1 \qquad \mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},2) = 2 \qquad \mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},3) = 1$$

Así

$$\max_{\mathbf{i}} \mathbf{E}(\mathbf{i},\vec{\mathbf{s}}) = 1 \quad \mathbf{y} \quad \min_{\mathbf{j}} \mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}},\mathbf{j}) = 1$$

El teorema 2.9 dice que, para que ambas $\vec{\mathbf{r}}$ y $\vec{\mathbf{s}}$ sean óptimos, r_2 y s_2 deben ser igual a cero, y ambos lo son, y así se verifica la optimalidad.

2.4 JUEGOS PEQUEÑOS

En esta sección, discutimos un método gráfico para resolver los juegos de matriz en el que al menos uno de los jugadores tiene solo dos estrategias puras. Comenzamos con el siguiente ejemplo de 2 × 2:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Sabemos, del Teorema 2.7, que

$$\mathbf{v}_{\mathbf{r}}(\mathbf{M}) = \max_{\vec{\mathbf{p}}} \min_{\mathbf{j}} \mathbf{E}(\vec{\mathbf{p}},\mathbf{j})$$

Ahora cada $\vec{\mathbf{p}}$ es de la forma $(p, 1\text{-}p)$, donde $0 \leq p \leq 1$. Para conveniencia de la notación, escribimos:

$$\pi_j(p) = E((p, 1- p), j) \text{ para } j = 1, 2 \text{ y } 0 \leq p \leq 1.$$

Estas funciones de p son fáciles de calcular. Obtenemos:

$$\pi_1(p) = 2 \cdot p - (1- p) = 3 \cdot p - 1$$

y

$$\pi_2(p) = -3 \cdot p + (1- p) = -4 \cdot p + 1$$

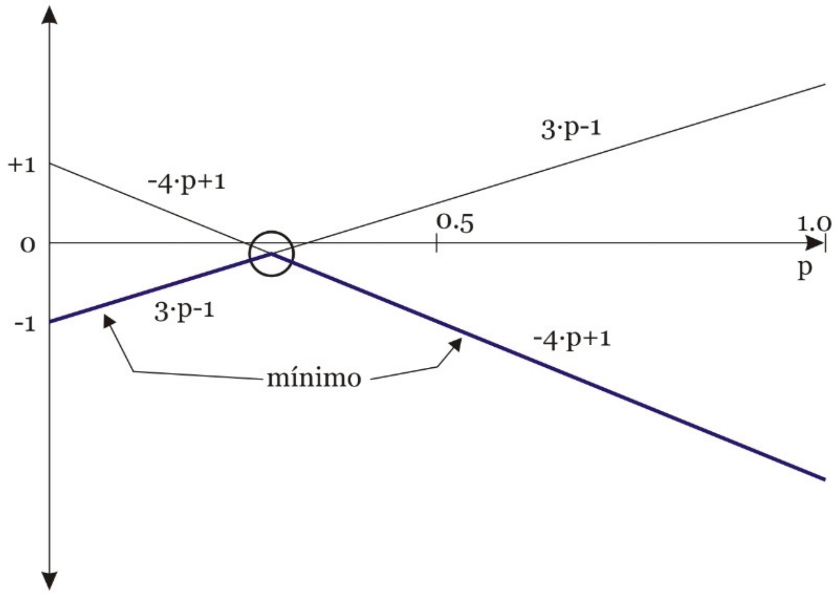

Fig. 12 Encontrado el valor de fila

Ahora estas dos funciones son ambas lineales. En la Fig. 12, representamos gráficamente ambas e indicamos, con una línea más gruesa, su mínimo. Por definición, $v_r(M)$ es el máximo de este mínimo. Está rodeado por un círculo en la figura. Ocurre en el punto donde $\pi_1(p)$ cruza $\pi_2(p)$. Haciendo $\pi_1(p) = \pi_2(p)$, obtenemos que $v_r(M) = -1/7$ que se obtiene para $p = 2/7$.

Por lo tanto, $p = (2/7, 5/7)$ es una estrategia mixta óptima para el jugador de fila. Para encontrar una estrategia óptima para el jugador de la columna, definamos

$$\pi^i(q) = E\,((q,1-q), i) \text{ para } i = 1, 2 \text{ y } 0 \leq q \leq 1.$$

Por lo tanto, $v_c\,(M)$ es el mínimo donde q es máximo de las dos funciones lineales $\pi^1(q)$ y $\pi^2(q)$. En la Fig. 13, representamos gráficamente ambas. Su máximo se indica con una línea más gruesa y el mínimo de este máximo está en un círculo. Tenemos:

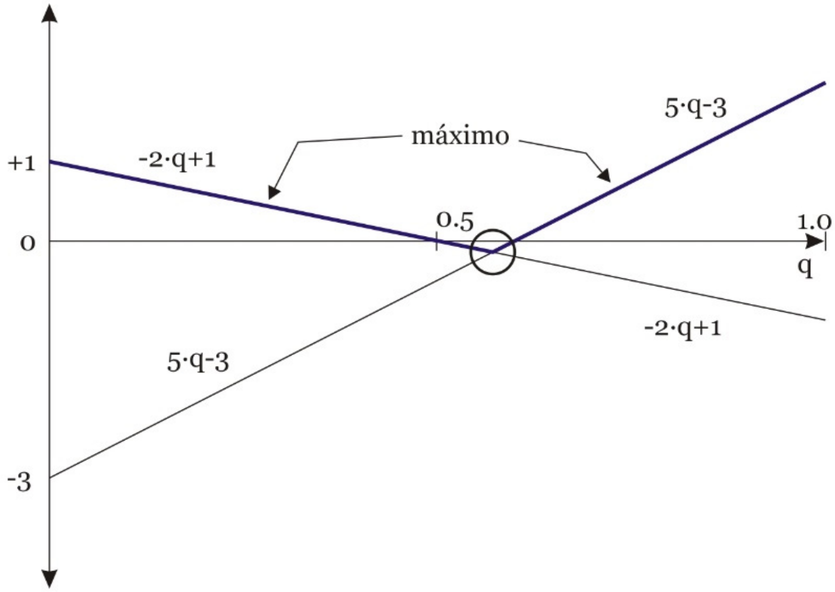

Fig. 13 Encontrado el valor de columna

$$\pi^1(q) = 2\cdot q - 3\cdot(1 - q) = 5\cdot q - 3$$

y

$$\pi^2(q) = -q + (1 - q) = -2q + 1.$$

El mínimo del máximo ocurre cuando estas se cruzan y así calculamos fácilmente $v_c(M) = -1/7$, obtenido en $q = (4/7, 3/7)$. Desde $v_r(M) = v_c(M)$, de hecho, hemos resuelto el juego.

Para resolver un juego de matriz de 2 x 2, no es realmente necesario dibujar la gráfica. Esto sigue de:

TEOREMA 2.10. Sea

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{pmatrix}$$

una matriz de 2×2 y supongamos que M no tiene puntos de silla. Entonces, (i) las líneas rectas $\pi_1(p)$ y $\pi_2(p)$ se cruzan con un valor p^* de p en el intervalo abierto (0, 1); además,

$$\pi_1(p^*) = \pi_2(p^*) = v_r(M)$$

Además, (ii) las líneas rectas $\pi^1(q)$ y $\pi^2(q)$ se cruzan con un valor q^* en el intervalo abierto (0, 1); además,

$$\pi^1(q^*) = \pi^2(q^*) = v_c(M)$$

Veamos otro ejemplo. Consideremos

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Vemos que no hay puntos de silla, pero que la fila 2 está dominada. Después de eliminarla, vemos que la columna 3 está dominada. Borrarla queda

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Esta matriz no tiene puntos de silla, por lo que se aplica el Teorema 2.10.:

$$\pi_1(p) = 2 \cdot p - 1 \text{ y } \pi_2(p) = -2 \cdot p + 2.$$

Igualándolas y resolviendo obtenemos que $p^* = 3/4$. El valor de la fila es $\pi_1(3/4) = \pi_2(3/4) = 1/2$. En cuanto al jugador de columna, vemos que

$$\pi^1(q) = q \text{ y } \pi^2(q) = -3 \cdot q + 2.$$

Estableciendo estos iguales, obtenemos $q^* = 1/2$. El valor de columna es 1/2. Para el juego original de 3 × 3, las probabilidades de la fila y la columnas eliminadas son 0. Las probabilidades de las filas y columnas restantes son los números que acabamos de calcular. Entendemos que la estrategia mixta óptima para el jugador de fila es (3/4, 0, 1/4) y la estrategia óptima para el jugador de columna es (1/2, 1/2, 0).

2.4.1 JUEGOS 2 × *N* Y *M* × 2

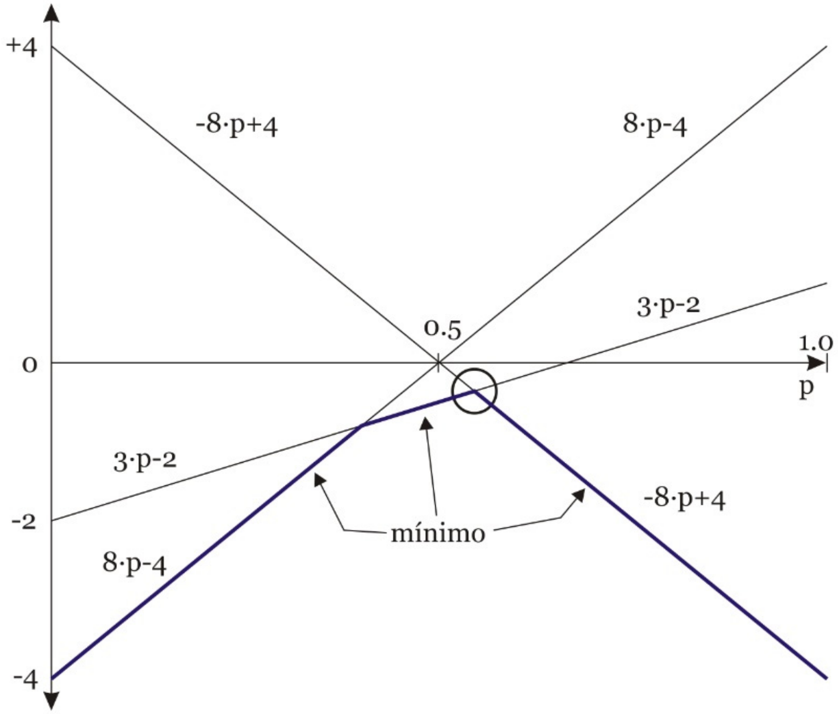

Fig. 14 Valor de fila para un juego de 2 × 3

Ahora consideramos un juego matricial $2 \times n$, por ejemplo

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

No hay puntos de silla y no hay filas o columnas dominadas. Calculamos $\pi_j(p) = E((p, 1-p), j)$ para $j = 1, 2, 3$ y $0 \le p \le 1$, y obtenemos

$$\pi_1(p) = 8 \cdot p - 4, \quad \pi_2(p) = -8 \cdot p + 4, \quad \pi_3(p) = 3 \cdot p - 2.$$

Luego representamos gráficamente estas tres funciones lineales (Fig. 14), indicamos su mínimo por una línea gruesa y hacemos un círculo alrededor de este mínimo.

Vemos en el gráfico que el máximo del mínimo ocurre donde $\pi_2(p)$ cruza $\pi_3(p)$, estableciendo estos iguales, obtenemos $p^* = 6/11$ y entonces $v_r(M) = \pi_2(6/11) = \pi_3(6/11) = -4/11$. Para calcular la estrategia óptima para el jugador de columna, observamos, de la Fig. 14, que:

$$\boldsymbol{\pi_1(p^*) > \min_j \pi_j(p^*)}$$

Del teorema 2.9 se deduce que la columna 1 está inactiva en cualquier estrategia óptima para el jugador de columna. En otras palabras, podemos asignar la probabilidad cero a la columna 1. Esto nos deja con un problema de 2×2. La resolución de la estrategia del jugador de columna da $\vec{\mathbf{q}} = (0, 3/11, 8/11)$ como óptimo y $v_c(M) = -4/11$.

Finalmente consideremos un juego matricial $m \times 2$, por ejemplo

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1/2} \\ \mathbf{1/2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

No hay puntos de silla y no hay filas o columnas dominadas. Calculamos $\pi^i(q) = E(i, (q, 1-q))$ para $i = 1, 2, 3, 4$ y $0 \le q \le 1$ y obtenemos

$$\pi^1(q) = 2 \cdot q - 1, \quad \pi^2(q) = -2 \cdot q + 1, \quad \pi^3(q) = -q / 2 + 1/2, \quad \pi^4(q) = q / 2.$$

Luego representamos gráficamente estas cuatro funciones lineales (Fig. 15), indicamos su máximo por una línea más gruesa y hacemos un círculo en el mínimo de este máximo. Vemos que el mínimo del máximo ocurre cuando $\pi^3(q)$ cruza $\pi^4(q)$. Estableciendo estos iguales, obtenemos $q^* = 1/2$ y entonces $v_c(M) = 1/4$. En el gráfico, vemos que las dos primeras filas estarán inactivas en una estrategia óptima para el jugador de la fila. Esto nos deja con un problema de 2×2. Resolviendo para la estrategia del jugador de la fila, obtenemos $\vec{\mathbf{p}} = (0, 0, 1/2, 1/2)$ y $v_r(M) = 1/4$.

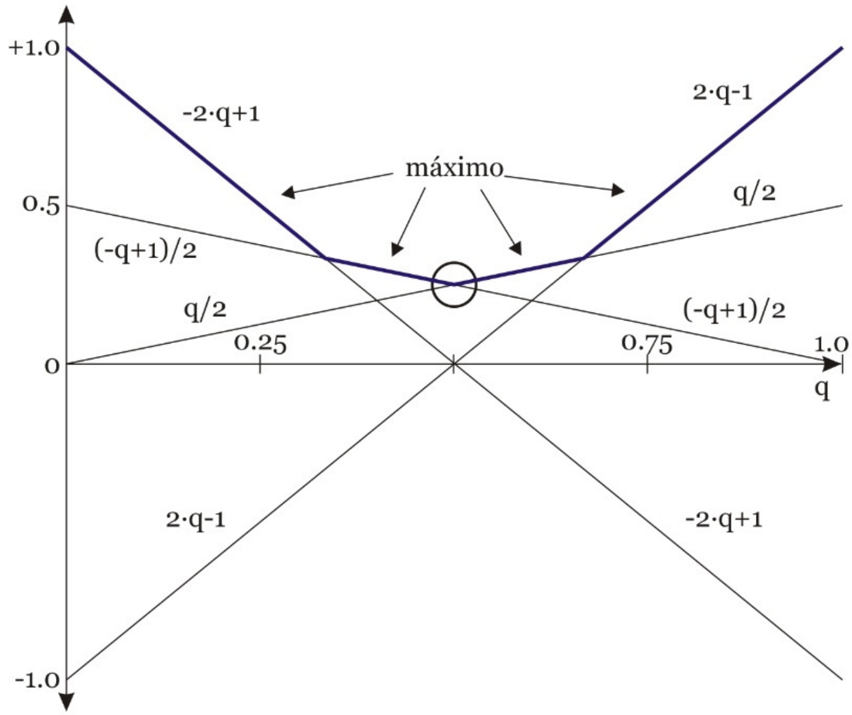

Fig. 15 Valor de columna para un juego de 4×2

2.5 JUEGOS SIMÉTRICOS

Un juego es *simétrico* si los jugadores son indistinguibles a excepción de sus nombres. Por lo tanto, si los dos jugadores intercambian sus roles en dicho juego, ninguno de los dos consideraría necesario modificar su estrategia óptima. La *morra de dos dedos* es un ejemplo de un juego simétrico. El ajedrez no es simétrico ya que uno de los dos jugadores se mueve primero y el otro segundo. Para que un juego matricial M sea simétrico, primero es necesario que sea cuadrada (ya que los dos jugadores tienen el mismo número de estrategias puras). Además, dicha matriz debe tener la propiedad de que, si el jugador de fila y el jugador de columna intercambian estrategias, entonces intercambian pagos. Por lo tanto, la entrada m_{ji} debe ser el negativo de m_{ij}. Esta propiedad se expresa en la siguiente definición estándar del álgebra lineal.

DEFINICIÓN 2.8. Una matriz cuadrada M de tamaño $n \times n$ es *antisimétrica* si

$$m_{ij} = - m_{ji},\ 1 \leq i, j \leq n$$

Por lo tanto, un juego es simétrico si y solo si su matriz es anti-simétrica. Esta colisión en la terminología entre el álgebra lineal y la teoría de juegos es desafortunada pero inevitable. Usaremos el adjetivo "simétrico" para referirse "juego" y " anti simétrica" para referirse a la "matriz". Una consecuencia fácil de la definición es que cada entrada diagonal en una matriz antisimétrica es cero (para que se cumpla que $m_{ii} = -m_{ii}$).

Es intuitivamente claro que ninguno de los jugadores en un juego simétrico tiene una ventaja sobre el otro. Se deduce que el valor de la fila debe ser no positivo (de lo contrario, habría una estrategia mixta para el jugador de fila de manera que siempre ganaría). Por simetría, el valor de la columna debe ser no negativo. Damos una prueba formal de estos hechos.

TEOREMA 2.11. Sea M un juego matricial simétrico. Entonces:

$$v_r\,(M) = - v_c\,(M) \text{ y } v_r\,(M) \leq 0 \leq v_c\,(M)$$

COROLARIO 2.12. Si un juego matricial simétrico M tiene una solución, entonces su valor es cero. Además, si $\vec{\mathbf{r}}$ es una estrategia óptima para el jugador de fila, entonces $\vec{\mathbf{r}}$ también es una estrategia óptima para el jugador de columna (y viceversa).

2.5.1 RESOLUCIÓN DE JUEGOS SIMÉTRICOS

Ahora presentamos un método para resolver juegos matriciales simétricos. Tiene la ventaja de ser bastante fácil de utilizar si el juego es pequeño, y la desventaja de que no siempre funciona. El juego de la morra de tres dedos es un ejemplo para el cual el método falla. Se discute en el capítulo 4.

Observe que si $\vec{\mathbf{r}}$ es una estrategia óptima (para cualquiera de los jugadores, y por lo tanto ambos) para un juego matricial simétrico M $n \times n$, se cumple

$$\mathbf{E}(\vec{\mathbf{r}}, \mathbf{j}) = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{r}_{\mathbf{i}} \cdot \mathbf{m}_{\mathbf{ij}} \geq \mathbf{0} \tag{3}$$

para todo j, y que algunas de estas desigualdades deben ser igualdades [de lo contrario, $v_r(M)$ sería positivo]. Ahora, tratando los r_i's como incógnitas, tenemos la ecuación

$$\boldsymbol{r_1 + \ldots. + r_n = 1} \tag{4}$$

Si luego elegimos n-1 de las desigualdades (3) y las configuramos como iguales, tenemos un total de n ecuaciones. La idea entonces es resolver, si es posible, este sistema de ecuaciones para las n incógnitas y así obtener un vector de solución $\vec{\mathbf{r}}$. Si cada componente r_i de este vector solución no es negativo, y si el resto de las desigualdades (3) es válida para la r_i's, entonces hemos encontrado una estrategia óptima. Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Claramente es una matriz anti-simétrica. Las desigualdades (3) son, para j = 1,2,3, respectivamente,

$$r_2 - 2 \cdot r_3 > 0,$$

$$-r_1 + 3 \cdot r_3 > 0,$$

$$2 \cdot r_1 - 3 \cdot r_2 > 0.$$

Arbitrariamente establece las dos primeras como ecuaciones. Estas, junto con (4) , nos dan el sistema de ecuaciones

$$r_1 + r_2 + r_3 = 1,$$

$$r_2 - 2 \cdot r_3 = 0,$$

$$-r_1 + 3 \cdot r_3 = 0.$$

Este sistema se resuelve fácilmente dando: $r_1 = 1/2$, $r_2 = 1/3$, $r_3 = 1/6$. Todos estos son no negativos, y la tercera desigualdad (la que no se usó para resolver los r_i) es válida. Por lo tanto, hemos resuelto el juego. El vector de probabilidad $\vec{\mathbf{r}}$= (1/2, 1/3 ,1/6) es una estrategia óptima para ambos jugadores y el valor del juego es cero. El lector debe verificar que, en este caso, establecer dos de las tres desigualdades a cero nos da la misma solución.

Veamos un segundo ejemplo:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Las desigualdades (3) son

$$r_2 + r_4 > 0,$$

$$-r_1 + r_3 - 2 \cdot r_4 > 0,$$

$$-r_2 + 2 \cdot r_4 > 0,$$

$$-r_1 + 2 \cdot r_2 - 2 \cdot r_3 > 0.$$

Antes de realizar operaciones, pensemos un poco. La primera desigualdad no tiene coeficientes negativos. Por lo tanto, dado que una solución válida requiere no negatividad de los r_i, establecerla como una igualdad implicaría que $r_2 = r_4 = 0$.

Eso, junto con la cuarta desigualdad, implicaría que r_1 y r_3 son cero también. Esto es imposible ya que los r_i's deben sumar uno. Por lo tanto, la única manera posible de proceder es transformar las últimas tres desigualdades en igualdades. Estas, junto con (4), nos dan un sistema de cuatro ecuaciones en cuatro incógnitas. Al resolverlo se obtiene $\vec{\mathbf{r}} = (0, 2/5, 2/5, 1/5)$. Todos son no negativos y satisfacen la desigualdad que no se usa para resolverlos.

Para un tercer ejemplo, consideremos:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

El uso de tres de las cuatro desigualdades conduce al conjunto de soluciones parametrizadas:

$$r_1 = 2/3 - 4 \cdot r_4 / 3,\ r_2 = r_4,\ r_3 = 1/3 - 2 \cdot r_4/3,\ r_4 = r_4.$$

La sustitución de valores de r_4 conduce a infinitas estrategias óptimas válidas. Por ejemplo, (2/3, 0, 1/3, 0) y (0,1/2, 0, 1/2) son ambas soluciones. Por otro lado, también obtenemos (2, -1, 1, -1), que no es válido.

EJEMPLO 2.1. El juego de *tijera-papel-piedra*[2] se juega de la siguiente manera. Cada uno de los dos jugadores hace simultáneamente un gesto que indica uno de los tres objetos en el nombre del juego (un puño cerrado para “piedra”, etc.). Si eligen el mismo objeto, el juego es un sorteo. De lo contrario, el ganador se decide por las reglas: “las tijeras cortan al papel, el papel envuelve a la piedra, la piedra rompe tijeras”. El resultado es +1 por una ganancia y -1 por una pérdida.

[2] El juego es conocido en español como *piedra-papel-tijeras*, se ha conservado el orden de la versión en inglés para ser coherente con la matriz de pagos.

Si las tres estrategias puras se enumeran en el orden dado en el nombre del juego (ver nota 2), entonces la matriz de pagos es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

El juego evidentemente es simétrico.

3.1 INTRODUCCIÓN

El tema de este capítulo es la parte del campo de la programación lineal que necesitaremos más adelante en el libro. Lo usaremos para resolver juegos matriciales. Además, los aspectos teóricos de la programación lineal, cuando se aplica a la teoría de juegos, se verán el teorema minimax y otros teoremas sobre los juegos matriciales.

3.2 PROBLEMAS PRIMARIOS Y DUALES

Un *problema de programación lineal* consiste en una función *objetivo* lineal de valores reales:

$$\mathbf{w}(\vec{\mathbf{x}}) = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_3 + \ldots + c_n \cdot x_n + d$$

de n variables, que se debe maximizar o minimizar *sujeta* a un conjunto finito de restricciones lineales. Cada restricción puede ser de la forma:

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n \leq d$$

o de esta otra

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n \geq d$$

En ocasiones abreviaremos la frase *problema de programación lineal* por *problema de PL*.

Por lo tanto, el problema es maximizar o minimizar $\mathbf{w}(\vec{\mathbf{x}})$ sobre el conjunto de todos los vectores $\vec{\mathbf{x}}$ que satisfacen todas las restricciones. Una solución consiste en este valor máximo o mínimo, junto con el vector $\vec{\mathbf{x}}$ obtenido. En ciertas aplicaciones, la función objetivo a menudo representan ganancias o costos, mientras que las variables representan precios de diversos productos. Aquí hay un ejemplo simple de un problema de programación lineal:

$$\text{maximizar} -3x_1 + 2x_2 + x_3 \tag{5}$$

$$\text{sujeto a } x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

Es un problema de maximización con tres incógnitas y un total de cuatro restricciones. Las restricciones

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

se llaman *restricciones de positividad*. En la gran mayoría de todos los problemas de programación lineal (incluidos los derivados de la teoría de juegos), todas las incógnitas son naturalmente no negativas. Por esta razón, nos restringimos a tales problemas; las restricciones de positividad serán en adelante entendidas y no escritas. Por lo tanto, el problema enunciado se convierte

$$\text{maximizar} - 3x_1 + 2x_2 + x_3 \tag{6}$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 \leq 1.$$

También mencionamos que no hay pérdida de generalidad al restringirnos a problemas en los que todas las incógnitas se ven obligadas a ser no negativas. Si un problema contiene una incógnita que se permite que sea negativa, entonces podemos reemplazarla por la diferencia de dos nuevas incógnitas que están restringidas a ser no negativas.

También se debe mencionar que las restricciones de *igualdad* surgen con frecuencia. Tal restricción tiene la forma

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n = b$$

Esta restricción puede ser reemplazada por el par equivalente de restricciones de desigualdad

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n \leq b$$

y

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n \geq b$$

Por lo tanto, la clase de problemas de programación lineal que estamos considerando es realmente muy general.

Un vector $\vec{\mathbf{x}}$ que satisface todas las restricciones de una programación lineal dada el problema se llama un *vector factible* para ese problema. Se dice que un problema de PL es factible si existe al menos un vector factible para él. El problema (6) es factible ya que $\vec{\mathbf{x}} = (0, 0, 0)$ es un vector factible. Por otro lado, el problema PL

$$\text{minimizar } 3x_1 + x_2 \tag{7}$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 \leq -1$$

es inviable porque $x_1, x_2 \geq 0$ y por lo tanto su suma no puede ser negativa. Tenga en cuenta que la función objetivo es irrelevante para la viabilidad.

Un vector $\vec{\mathbf{x}}$ factible es *óptimo* si la función objetivo alcanza su máximo (o mínimo) en $\vec{\mathbf{x}}$. Algunos problemas factibles no tienen solución porque la función objetivo no está acotada. Por ejemplo, el problema

$$\text{maximiza } w(\vec{\mathbf{x}}) = -x_1 + 2x_2 \tag{8}$$

$$\text{sujeto a } x_1 - x_2 \leq 2$$

no está acotada porque el vector $\vec{\mathbf{x}} = (0, x)$ es factible para cada $x \geq 0$ pero

$$\lim_{\mathbf{x}\to\infty} \mathbf{w}((\mathbf{0}, \mathbf{x})) = +\infty$$

Más adelante se demostrará que cada problema factible y acotado tiene una solución. Si $w(\vec{\mathbf{x}})$ es la función objetivo de un problema de maximización factible, utilizaremos la notación *max* $w(\vec{\mathbf{x}})$ para denotar su valor máximo sobre el conjunto de vectores viables. Si el problema no está acotado, escribimos *max* $w(\vec{\mathbf{x}}) = +\infty$. Para un problema de minimización, usamos la notación correspondiente *min* $w(\vec{\mathbf{x}})$. Si el problema no está acotado, escribimos *min* $w(\vec{\mathbf{x}}) = -\infty$.

3.2.1 PROBLEMAS PRIMARIOS Y SUS DUALES

La siguiente definición brinda un tipo especial de problema importante.

DEFINICIÓN 3.1. Se dice que un problema de programación lineal es *primario* si tiene la forma

$$\text{Maximizar } \mathbf{f}(\vec{\mathbf{x}}) = \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{c}_\mathbf{j} \cdot \mathbf{x}_\mathbf{j} + \mathbf{d}$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij} \cdot x_j \le b_i} \qquad \mathbf{1 \le i \le m}$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz de coeficientes $m \times n$, $\vec{\mathbf{c}}$ es una n-tupla de números, d es una constante y $\vec{\mathbf{b}}$ es una m-tupla de números.

Los problemas (6) y (8) son primarios, pero el problema (7) no lo es. Aquí hay otro ejemplo.

$$\text{maximizar } f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - x_4 \tag{9}$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 2$$

$$-x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 \le -1.$$

Es factible porque, por ejemplo, $\vec{\mathbf{x}} = (0, 0, 1, 0)$ es un vector factible.

Debe notarse que cualquier problema de programación lineal se puede convertir en un problema equivalente primario. El método para hacerlo se realiza de la siguiente manera: si la función objetivo se va a minimizar, reemplácela por su negativa; si hay una restricción en la que el lado izquierdo es mayor o igual que el lado derecho, cambiar el signo a ambos lados de la desigualdad.

Un problema primario es realmente la mitad de un par de problemas. La otra mitad se llama problema *dual*. Tenemos lo siguiente:

DEFINICIÓN 3.2. Considera el problema primario

$$\text{maximizar } \mathbf{f(\vec{x})} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{c_j \cdot x_j + d}$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij} \cdot x_j \le b_i} \qquad \mathbf{1 \le i \le m}$$

El *problema dual* que corresponde a este problema primario es

$$\text{minimizar } \mathbf{g}(\vec{\mathbf{y}}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{b_i} \cdot \mathbf{y_i} + \mathbf{d}$$

$$\text{sujeto a } \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{y_i} \geq \mathbf{c_j} \qquad \mathbf{1 \leq j \leq n}$$

Por lo tanto, los coeficientes en la función objetivo dual son los lados derechos de las restricciones primarias; la m-tupla de coeficientes en la j-ésima restricción dual es la j-ésima columna de la matriz A de los coeficientes; los lados de la derecha de las restricciones duales son los coeficientes en la función objetivo primaria.

Hay que tener en cuenta que podemos construir el primario a partir del dual tan fácilmente como el dual desde el primario. Como se dijo antes, los dos problemas forman un par dual/primario que matemáticamente son de importancia similar. Es su interpretación lo que puede hacer que una de ellas sea más importante para nosotros que la otra.

Para el problema (6), la matriz de coeficientes es

$$A = (1\ \ 1\ \ 1).$$

también

$$\vec{\mathbf{c}} = (-3\ 2\ 1), \qquad \vec{\mathbf{b}} = (1).$$

Por lo tanto, el problema dual correspondiente es

$$\text{minimizar } y_1 \tag{10}$$

$$\text{sujeto a } y_1 \geq -3$$

$$y_1 \geq 2$$

$$y_1 \geq 1.$$

El problema dual correspondiente al problema (9) es

$$\text{minimizar } 2y_1 - y_2 \tag{11}$$

$$\text{sujeto a } y_1 - y_2 \geq 1$$

$$y_1 - 3y_2 \geq 0$$

$$y_1 - y_2 \geq 0$$

$$-y_1 + 2y_2 \geq -1.$$

Este problema es factible ya que $\vec{\mathbf{y}} = (1,0)$ es un vector factible.

Las soluciones de los problemas dual y primario están estrechamente relacionadas. El siguiente teorema revela parte de la relación.

TEOREMA 3.1. Si tanto el problema primario como su correspondiente dual son factibles, entonces

$$\mathbf{f}(\vec{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{g}(\vec{\mathbf{y}})$$

para cualquier vector viable $\vec{\mathbf{x}}$ del primario y cualquier vector viable $\vec{\mathbf{y}}$ del dual. Tenemos

$$\mathbf{max}\, \mathbf{f}(\vec{\mathbf{x}}) \leq \mathbf{min}\, \mathbf{g}(\vec{\mathbf{y}})$$

De esto, obtenemos el siguiente:

COROLARIO 3.2. Las siguientes afirmaciones son válidas.

(1) Si tanto el primario como su correspondiente dual son factibles, ambos están acotados.
(2) Si el primario no está acotado, entonces el dual es inviable.
(3) Si el dual no está acotado, entonces el primario es inviable.

Como ejemplo, notamos que tanto el Problema (9) como su problema dual (11) son factibles. Por lo tanto, ambos están limitados. Para un segundo ejemplo, tenga en cuenta que el problema (10) es fácil de resolver. Tiene solo un desconocido y la segunda restricción implica los otros dos. Por lo tanto, el problema requiere que minimicemos y_1 sujeto solo a la restricción $y_1 \geq 2$. Obviamente, 2 es el valor mínimo de la función objetivo y se alcanza para $y_1 = 2$. Ahora, el problema (10) es el dual correspondiente a Problema (6). Del teorema 3.1 y su corolario, concluimos que el problema (6) está acotado y que la función objetivo está limitada arriba por 2 en el conjunto de vectores factibles. Podemos ir un paso más allá. El vector $\vec{\mathbf{x}} = (0, 1, 0)$ es un vector factible para el problema (6) y la función objetivo tiene el valor 2 en este vector factible. Como la función objetivo no puede ser mayor que 2, hemos resuelto el problema (6).

3.3 FORMAS BÁSICAS Y LOS PIVOTES

Consideremos el problema primario de PL:

$$\text{maximizar } \mathbf{f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + d}$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq b_i \qquad 1 \leq i \leq m}$$

Para cada una de las m restricciones, definimos *variable de holgura*:

$$\mathbf{x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j}$$

Por lo tanto, las m variables de holgura dependen de las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$, y cada x_{n+i} y nos calcula en que medida el lado izquierdo de la restricción i es menor que el lado derecho. Observe también que $\vec{\mathbf{x}} = (x_1, \ldots, x_n)$ es un vector factible si y solo si

$$x_k \geq 0, \qquad 1 \leq k \leq n + m.$$

Usando estas variables de holgura, reescribimos el problema de una manera que parece extraña al principio, pero que luego resulta conveniente. Así:

$$\text{maximizar } \mathbf{f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j + d} \tag{12}$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - b_i = -x_{n+i} \qquad 1 \leq i \leq m}$$

Esta forma del problema primario se llama *forma* (*primaria*) *básica*. Hacemos hincapié en que es matemáticamente equivalente a la forma primaria original en el sentido de que resolver uno es lo mismo que resolver el otro.

Escribamos una forma básica para el problema (9). Hay dos restricciones, por lo que tenemos dos variables de holgura, x_5 y x_6. La forma básica es

$$\text{maximizar } x_1 - x_4 \tag{13}$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - 2 = -x_5$$

$$-x_1 - 3x_2 - x_3 + 2x_4 + 1 = -x_6$$

En el contexto de las formas básicas, las variables en el lado derecho de las restricciones (es decir, $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$) se denominan variables *básicas* (o, a veces, *dependientes*) mientras que las otras variables son llamadas variables *no básicas* (o *independientes*). El conjunto de variables básicas se denomina la *base* correspondiente a la forma básica.

3.3.1 PIVOTES

Empleando un poco de álgebra simple, podemos calcular una nueva forma básica a partir de una antigua. Para hacerlo elijimos, de la forma básica (12), cualquier coeficiente distinto de cero a_{kl}, donde $1 \leq k \leq m$ y $1 \leq l \leq n$. Por lo tanto, a_{kl} es el coeficiente de x_l en la ecuación para $-x_{n+k}$. Desde $a_{kl} \neq 0$, podemos resolver la ecuación para obtener x_l en términos de x_{n+k} y las variables no básicas restantes (distintas de x_l). Luego sustituimos x_l en las otras restricciones y en la función objetivo. El resultado es otra forma básica, que difiere de la primera en que una variable básica y no básica han cambiado de lugar. La operación que acabamos de llevar a cabo se llama *pivote*, y decimos que *pivotamos* sobre el coeficiente a_{kl}. Es importante darse cuenta de que la nueva forma básica es nuevamente matemáticamente equivalente a la anterior, y por lo tanto al problema primario original.

Vamos a pivotar en el coeficiente de x_3 en la ecuación para $-x_6$ en la forma básica (13). La solución para x_3 en esa ecuación nos da

$$x_3 = -x_1 - 3x_2 + x_6 + 2x_4 + 1.$$

Sustituir esta expresión por x_3 en la ecuación para $-x_5$ y combinar términos nos da

$$-2x_2 + x_6 + x_4 - 1 = -x_5$$

La fórmula para la función objetivo en forma básica (13) no contiene x_3, pero no se modifica. La nueva forma básica es

$$\text{maximizar } x_1 - x_4 \tag{14}$$

$$\text{sujeto a } - 2x_2 + x_6 + x_4 - 1 = -x_5$$

$$x_1 + 3x_2 - x_6 - 2x_4 - 1 = -x_3.$$

Llevamos a cabo un pivote más, esta vez sobre el coeficiente de x_1 en la ecuación para $-x_3$. El resultado es

$$\text{maximizar } - x_3 - 3\,x_2 + x_6 + x_4 + 1 \tag{15}$$

$$\text{sujeto a } - 2\,x_2 + x_6 + x_4 - 1 = -x_5$$

$$x_3 + 3x_2 - x_6 - 2x_4 - 1 = -x_1$$

Así, la base correspondiente a la forma básica (13) es $\{x_5, x_6\}$, la base correspondiente a la forma básica (14) es $\{x_5, x_3\}$, y la base correspondiente a la forma básica (15) es $\{x_5, x_1\}$. Está claro que hay, en general, muchas formas básicas para cada problema primario. Cualquier secuencia finita de pivotes transforma una forma básica en otra. En el caso general donde hay n incógnitas en el problema primario y m restricciones, el número total de bases posibles correspondientes a las formas básicas es el coeficiente binomial

$$\binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{(m+n)!}}{\mathbf{n! \cdot m!}}$$

Por ejemplo, si $n = 4$ y $m = 2$, este número es 15. El número real de formas básicas podría ser menor que esta cantidad.

Dada una forma básica, las variables básicas y la función objetivo se expresan en términos de las variables no básicas. Si se asignan valores arbitrarios a las no básicas, entonces se determinan los valores de las variables básicas, y así obtenemos un $(n + m)$ -tupla $(x_1, \ldots, x_{n+m})$. En caso de que cada $x_k \geq 0$, decimos que este (n + m) -tupla es factible. Si $(x_1, \ldots, x_{n+m})$ es factible, entonces el vector $(x_1, \ldots, x_n)$ es, como ya se indicó, un vector factible.

El caso más importante de este cálculo ocurre cuando se asigna el valor cero a cada uno de los elementos no básicos. Tenemos

DEFINICIÓN 3.3. Dada una forma básica para un problema primario con n incógnitas y m restricciones, la *solución básica* correspondiente es la $(m + n)$-tupla obtenida al establecer las n variables no básicas a cero y luego resolver las m variables básicas de las restricciones.

Por ejemplo, en la forma básica (13), la solución básica es (0, 0, 0, 0, 2, -1). Tenga en cuenta que el valor de una variable básica en una solución básica es solo el negativo del término constante en su ecuación de restricción. En las formas básicas (14) y (15), las soluciones básicas son (0, 0, 1, 0, 1, 0) y (1, 0, 0, 0, 1, 0), respectivamente. También tenga en cuenta que el valor de la función objetivo en la solución básica es el término constante de su ecuación.

DEFINICIÓN 3.4. Una forma básica es *factible* si su solución básica es factible. Una solución básica factible es *óptima* si el valor de la función objetivo en la solución básica es un máximo. En este caso, la forma básica también se llama *óptima*.

Sabemos que un vector (x_1, ..., x_n) es un vector factible para el problema primario si y solo si (x_1, ..., x_{n+m}) es factible. Más adelante se demostrará que si un problema tiene un vector factible óptimo, entonces tiene una solución básica factible óptima.

Vemos, por ejemplo, que la forma básica (13) no es factible, mientras que las formas básicas (14) y (15) son factibles. En la siguiente sección, describiremos el *algoritmo simplex*, que es un método numérico para resolver problemas primarios. La idea es comenzar con una forma básica factible y luego pivotar de tal manera que la nueva forma básica sea aún factible y dé un mayor valor a la función objetivo. Este proceso se repite hasta que se alcanza el máximo. El algoritmo incluye un método simple para decidir qué coeficiente pivotar en el próximo.

Para reconocer formas básicas factibles y óptimas, necesitamos

TEOREMA 3.3. Lo siguiente se cumple:

(1) Una forma básica es factible si y solo si el término constante en cada restricción no es positivo.

(2) Supongamos que una forma básica es factible. Si cada coeficiente (de una variable no básica) en la ecuación para la función objetivo no es positivo, entonces la forma básica es óptima.

Podemos ilustrar la segunda parte del teorema haciendo un pivote en la forma básica (15). De hecho, si pivotamos en el coeficiente de x_4 en la ecuación para $-x_5$, obtenemos

$$\text{maximizar } - x_3 - x_2 - x_5 + 2 \tag{16}$$

$$\text{sujeto a } -2x_2 + x_6 + x_5 - 1 = -x_4$$

$$x_3 - x_2 + x_6 + 2x_5 - 3 = -x_1.$$

De acuerdo con el teorema, esta forma básica es tanto factible como óptima y, por lo tanto, hemos resuelto el problema (9). Resumiendo, la solución es

$$\max f(\vec{\mathbf{x}}) = 2, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = x_3 = 0, \quad x_4 = 1.$$

3.3.2 FORMAS DUALES BÁSICAS

Consideremos un problema dual

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^{m} \mathbf{b_i} \cdot \mathbf{y_i} + \mathbf{d}$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{y_i} \geq \mathbf{c_j} \qquad \mathbf{1 \leq j \leq n}$$

Para cada una de las n restricciones, se define una *variable excedente* de la siguiente manera

$$\mathbf{y_{m+j}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{y_i} - \mathbf{c_j}$$

Entonces y_{m+j} mide la diferencia entre los lados izquierdo y derecho de la j-ésima restricción. Vemos que $(y_1, \ldots, y_m)$ es un vector factible para el problema dual si y solo si $y_k \geq 0$ para $1 \leq k \leq m+n$. Reescribimos el problema dual como

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^{m} \mathbf{b_i} \cdot \mathbf{y_i} + \mathbf{d}$$

$$\text{sujeto a } \mathbf{y_{m+j}} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{a_{ij}} \cdot \mathbf{y_i} - \mathbf{c_j} \qquad \mathbf{1 \leq j \leq n}$$

Esta es una *forma básica doble*.

Las variables en el lado izquierdo de los signos de igualdad son básicas y las otras no son básicas. Al igual que en el caso original, podemos pivotar para intercambiar una variable básica y no básica y producir una nueva forma básica doble.

Escribamos la forma básica dual para el problema (11). Es

$$\text{minimizar } 2y_1 - y_2 \tag{17}$$

$$\text{sujeto a } y_3 = y_1 - y_2 - 1$$

$$y_4 = y_1 - 3y_2$$

$$y_5 = y_1 - y_2$$

$$y_6 = -y_1 + 2y_2 + 1.$$

Si pivotamos en el coeficiente de y_1 en la ecuación para y_3, obtenemos

$$\text{minimizar } 2y_3 + y_2 + 2 \tag{18}$$

$$\text{sujeto a } y_1 = y_3 + y_2 + 1$$

$$y_4 = y_3 - 2y_2 + 1$$

$$y_5 = y_3 + 1$$

$$y_6 = -y_3 + y_2$$

Dada una forma básica dual, la definición de *factible* $(n + m)$-tupla es la misma que en el caso de las formas básicas primarias. Además, la solución básica correspondiente a una forma básica doble se obtiene al establecer las variables no básicas igual a cero, y luego resolver las variables básicas. Claramente, el valor de una variable básica en una solución básica es simplemente el término constante de su ecuación. Definimos una solución básica $(y_1, ..., y_{m+n})$ (y su forma básica dual) para ser *factible* si $y_k \geq 0$ para $1 \leq k \leq m+n$. El valor de la función objetivo en la solución básica es claramente igual al término constante en su ecuación. Una solución básica factible (y su forma básica doble) es óptima si el valor de la función objetivo es mínimo.

En forma dual básica (17), la solución básica es (0, 0, -1, 0, 0, 1); que es inviable. En forma dual básica (18), la solución básica es (1, 0, 0, 1, 1 ,0); que es factible.

TEOREMA 3.4. Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(1) Una forma básica dual es factible si y solo el término constante en cada ecuación de restricción es no negativo.
(2) Supongamos que una forma básica doble es factible. Si cada coeficiente (de una variable no básica) en la ecuación para la función objetivo no es negativo, entonces la forma básica dual es óptima.

Este teorema muestra que la Forma Básica Dual (18) es factible y óptima. Por lo tanto, la solución al problema (11) es

$$\min g(\bar{\mathbf{y}}) = 2,\ y_1 = 1,\ y_2 = 0.$$

3.4 EL ALGORITMO SIMPLEX

Para discutir el algoritmo simplex, es conveniente introducir una forma más compacta de escribir una forma básica. Son los *tableau* y se discute a continuación.

3.4.1 TABLEAUS

Consideremos un ejemplo, a saber, la Forma Básica (15). El *tableau* correspondiente a ella es

x_3	x_2	x_6	x_4	-1	
0	-2	1	1	1	$= -x_5$
1	3	-1	-2	1	$= -x_1$
-1	-3	1	1	-1	$= f$

(19)

Este *tableau* es esencialmente una matriz de 3 × 5 con etiquetas en las filas y columnas. En el caso general, donde el problema primario tiene n incógnitas y m restricciones, el tamaño sería $(m + 1) \times (n + 1)$. En nuestro ejemplo, las primeras cuatro columnas están etiquetadas por las variables no básicas, x_3, x_2, x_6, x_4. La quinta columna está etiquetada -1. Esta etiqueta se explicará en breve. Las dos primeras filas están etiquetadas a la derecha por las variables básicas “$= -x_5$, $= -x_1$”. La última fila está etiquetada por la función objetivo “$= f$”. Cada fila se debe leer como una ecuación: los números en la fila se multiplican por las etiquetas en la parte superior de las columnas correspondientes, y estos productos se agregan. Por lo tanto, la primera fila representa la ecuación

$$(0)\cdot(x_3) + (-2)\cdot x_2 + (1)\cdot x_6 + (1)\cdot x_4 + (1)\cdot(-1) = -\, x_5$$

Esto simplifica a

$$-2\cdot x_2 + x_6 + x_4 - 1 = -\, x_5,$$

que es la primera restricción en la forma básica (15). La segunda fila da la segunda restricción y la fila inferior da la función objetivo.

La solución básica se lee fácilmente del *tableau*. De hecho, los valores de las variables básicas son simplemente los números en la columna de la derecha (excluyendo la fila inferior); el valor de la función objetivo en la solución básica es el negativo del número en la esquina inferior derecha. El teorema 3.3 proporciona condiciones sobre los coeficientes en una forma básica para asegurar la viabilidad y la optimalidad. Este resultado se puede traducir fácilmente al contexto de los *tableaus*.

TEOREMA 3.5. Considere un *tableau* de tamaño (m + 1) × (n + 1). Entonces nosotros tenemos:

(1) El *tableau* es factible si y solo si cada entrada en la columna de la derecha (sin contar la inferior) es no negativa.

(2) Supongamos que el *tableau* es factible. Si cada entrada en la fila inferior (sin contar la mano derecha) no es positiva, entonces el cuadro es óptimo.

El resultado de pivotar sobre el coeficiente de x_4 en la ecuación para $-x_5$ en la forma básica (15) se da en la forma básica (16). El cuadro correspondiente es

x_3	x_2	x_6	x_5	-1	
0	-2	1	1	1	$= -x_4$
1	-1	1	2	3	$= -x_1$
-1	-1	0	-1	-2	$= f$

(20)

El efecto de un pivote en las etiquetas es simplemente intercambiar una variable básica y no básica. En el ejemplo, la variable básica x_5 y la variable no básica x_4 intercambian lugares. El siguiente teorema muestra cómo calcular los números en el nuevo *tableau* de los del *tableau* anterior.

TEOREMA 3.6. Sea T un *tableau* de tamaño $(m + 1) \times (n + 1)$. Supongamos que se realiza un pivote en la entrada t_{kl}. En otras palabras, el pivote está en el coeficiente de la variable no básica x_p (columna de etiquetado l) en la ecuación de restricción para la variable básica x_q (fila de etiquetado k). Por supuesto, $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$, y $t_{kl} \neq 0$. Sea T' el *tableau* resultante del pivote. Entonces, si $1 \leq i \leq m + 1$ y $1 \leq j \leq n + 1$, tenemos:
(1) $t'_{kl} = 1 / t_{kl}$.
(2) Si $j \neq l$, entonces $t'_{kj} = t_{kj}/t_{kl}$.
(3) Si $i \neq k$, entonces $t'_{il} = -t_{il}/t_{kl}$.
(4) Si $i \neq k$, y $j \neq l$, entonces

$$\mathbf{t'_{ij} = \frac{t_{ij} \cdot t_{kl} - t_{il} \cdot t_{kj}}{t_{kl}}}$$

Veamos el teorema en el ejemplo ya discutido. El pivote realizado en *tableau* (19) para producir *tableau* (20) está en la entrada $t_{14} = 1$. De las partes (1) y (2) del teorema, vemos que la fila 1 de *tableau* (20) debe ser idéntica a la fila 1 de *tableau* (19). De hecho, es. Las entradas en la columna 4 de *tableau* (20), que no sean t_{14}, deben ser los negativos de las entradas en *tableau* (19). Esto proviene de la parte (3) del teorema. Nuevamente, esto es verdad. Para verificar la parte (4) del teorema, considere la entrada t'_{32} [de *tableau* (20)]. Debería ser

$$\mathbf{t'_{32} = \frac{t_{32} \cdot t_{14} - t_{12} \cdot t_{34}}{t_{14}} = \frac{(-3) \cdot (1) - (-2) \cdot (1)}{1} = -1}$$

Esto es correcto. Resumimos las reglas para pivotar en un *tableau* en el siguiente algoritmo.

ALGORITMO 3.1. (ALGORITMO PIVOTANTE). Sea T un *tableau* de tamaño $(m + 1) \times (n + 1)$, y una entrada $t_{kl} \neq 0$. Vamos a calcular un nuevo *tableau* T' del mismo tamaño que T.

(1) Intercambie las etiquetas en la columna l y la fila k. Las otras etiquetas en T' son las mismas que en T.
(2) $t'_{kl} = 1 / t_{kl}$.
(3) Si $j \neq l$, entonces $t'_{kj} = t_{kj}/t_{kl}$.
(4) Si $i \neq k$, entonces $t'_{il} = -t_{il}/t_{kl}$.
(5) Si $i \neq k$, y $j \neq l$, entonces

$$\mathbf{t'_{ij} = \frac{t_{ij} \cdot t_{kl} - t_{il} \cdot t_{kj}}{t_{kl}}}$$

3.4.2 EL ALGORITMO SIMPLEX

Antes de establecer el algoritmo simplex, necesitamos un teorema más sobre *tableaus*.

TEOREMA 3.7. Considere un *tableau* factible para un problema primario con n incógnitas y m restricciones. Supongamos que una de las primeras n entradas en la fila inferior del *tableau* es positiva, pero que todas las otras entradas en la columna que contiene esa entrada no son positivas. Entonces el problema no está acotado.

Por ejemplo, considera el problema

$$\text{maximizar } x_1 \tag{21}$$

$$\text{sujeto a } x_1 - x_2 \leq 1.$$

El *tableau* inicial es

x_1	x_2	-1	
1	-1	1	$= -x_3$
1	0	0	$= f$

Este es factible y no óptimo. El teorema no indica que sea acotado. Ahora pivoteamos sobre el coeficiente de x_1 en la ecuación de restricción para $-x_3$. El nuevo *tableau* es

x_1	x_2	-1	
1	-1	1	$= -x_1$
-1	1	-1	$= f$

Que es factible. El teorema nos dice que el problema no está acotado.

ALGORITMO 3.2. (ALGORITMO SIMPLEX) Se nos da un *tableau* T factible de tamaño $(m + 1) \times (n + 1)$.

(1) Si

$$t_{m+1,j} \leq 0 \text{ para } 1 \leq j \leq n,$$

luego STOP (el *tableau* es óptimo).

(2) Elija cualquier l con $1 \leq l \leq n$ tal que $t_{m+1,l} > 0$. (La columna de etiquetado de variable no básica l se denomina variable de *entrada*).

(3) Si

$$t_{il} \leq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq n,$$

STOP (el problema no está acotado).

(4) Elija cualquier k con $1 \leq k \leq m$ tal que $t_{kl} > 0$ y

$$\frac{\mathbf{t_{k,n+1}}}{\mathbf{t_{kl}}} = \mathbf{min}\left\{\frac{\mathbf{t_{i,n+1}}}{\mathbf{t_{kl}}} : \mathbf{1 \leq i \leq m \text{ y } t_{kl} > 0}\right\}$$

(La fila de etiquetado de variable básica k se llama variable de *salida*).
(5) Pivote en t_{kl} y reemplace T por el *tableau* resultante de este pivote. (La entrada t_{kl} se llama entrada de *pivote*).

(6) Volver al paso (1).

En el siguiente teorema, verifica que el algoritmo produce una secuencia de *tableau* factibles tal que los valores de la función objetivo no disminuyan.

TEOREMA 3.8. Lo siguiente es válido para el algoritmo simplex:

(1) Después de cada pivote [Paso (5)], el nuevo *tableau* es factible.
(2) Después de cada pivote, el valor de la función objetivo para el nuevo *tableau* es mayor o igual que el del cuadro anterior.

Hay dos cosas sobre el algoritmo que se aclararán en la próxima sección. El primero es el problema de producir un *tableau* inicial factible (sin el cual no se puede iniciar el algoritmo). El segundo es el problema de si el algoritmo finalmente se detiene con la respuesta correcta. Está claro que, si se detiene, o el problema no está acotado o la solución ha sido alcanzada.

Por ejemplo, considere el problema principal,

$$\text{maximizar } x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 \tag{22}$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4$$

$$-x_1 + x_3 \leq 0$$

$$x_2 - x_4 \leq 1.$$

El *tableau* inicial es entonces

x_1	x_2	x_3	x_4	-1	
1	1	1	1	4	$= -x_5$
-1	0	*1	2	0	$= -x_6$
0	1	0	-1	1	$= -x_7$
1	-1	1	-2	0	$= f$

Este *tableau* es factible pero no óptimo; la falta de límites no está indicada. El algoritmo permite dos opciones para ingresar variables: x_1 o x_3. Elegimos x_3. En la columna etiquetada por x_3, hay dos entradas positivas sobre la fila inferior. La proporción mínima es cero y se logra mediante la entrada en la segunda fila. Por lo tanto, x_3 ingresará la base y x_6 lo abandonará. La entrada de pivote está marcada con “*”. Pivotamos para obtener el *tableau*

x_1	x_2	x_6	x_4	-1	
*2	1	1	1	4	$= -x_5$
-1	0	1	0	0	$= -x_3$
0	1	0	-1	1	$= -x_7$
2	-1	-1	-2	0	$= f$

Este *tableau* es factible (como debe ser) pero no es óptimo; la falta de límites no está indicada. Solo hay una entrada de pivote posible: x_1 debe ingresar la base y x_5 debe abandonarla. La entrada pivote se marca nuevamente. Pivotamos para obtener

x_5	x_2	x_6	x_4	-1	
1/2	1/2	-1/2	1/2	2	$= -x_1$
1/2	1/2	1/2	1/2	2	$= -x_3$
0	1	0	-1	1	$= -x_7$
-1	-2	0	-3	-4	$= f$

Este *tableau* es óptimo. Obtenemos la solución

$$\max f(\vec{\mathbf{x}}) = 4, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 0.$$

De hecho, tiene más de una solución. Para ver esto, pivotee en el último *tableau* para intercambiar: x_6 y x_3.

3.5 EVITAR CICLOS Y LOGRAR VIABILIDAD

En el algoritmo simplex descrito en la sección anterior, es posible que entre en un bucle infinito y nunca entregue una solución al problema. Hay varios métodos para evitar esta dificultad. Presentaremos uno de ellos. Después de eso, discutiremos la cuestión de cómo encontrar un *tableau* inicial factible para que se pueda iniciar el algoritmo.

3.5.1 DEGENERACIÓN Y CICLOS

DEFINICIÓN 3.5. Sea T un *tableau* de $(m + 1) \times (n + 1)$. El pivote en la entrada t_{kl} se dice que es degenerado si $t_{k,\, n+1} = 0$.

El primer pivote que llevamos a cabo para resolver el Problema (22) fue degenerado. El hecho importante sobre los pivotes degenerados se da en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.9. Si el *tableau* T' se obtiene de T por un pivote degenerado, entonces

$$t'_{i,n+1} = t_{i,n+1}$$

para todo i con $1 \leq i \leq m + 1$.

En otras palabras, la última columna de T' es idéntica a la última columna de T.

COROLARIO 3.10. Si T' se obtiene de T por un pivote degenerado, entonces la solución básica correspondiente a T' es igual a la solución básica correspondiente a T. Por lo tanto, la función objetivo tiene el mismo valor para las dos soluciones básicas.

Por lo tanto, hacer un pivote degenerado mientras se lleva a cabo el algoritmo simplex no causa ninguna mejora en la función objetivo. Esto generalmente es inofensivo [como lo muestra el problema (22)]. Los pivotes degenerados son eventualmente seguidos por los no degenerados, y la progresión hacia una solución continúa. Sin embargo, hay un evento raro que debe admitirse en la teoría. Se llama *ciclado* y puede poner el algoritmo en un bucle infinito. Un ciclo consiste en una secuencia de *tableaus* factibles T^0, T^1, ..., T^k, tal que cada uno se obtiene del anterior mediante un pivote degenerado elegido de acuerdo con el algoritmo, y tal que T^k tiene la misma base que T^0. Por lo tanto, T^k puede diferir de T^0 solo en el orden de sus filas y columnas. Ahora bien, si el pivote en T^k se elige igual que el que estaba en T^0, el resultado puede ser que el cálculo repite la lista de *tableaus* al infinito.

Como dijimos, el ciclado es raro. Hay ejemplos que involucran problemas razonablemente pequeños, pero solo han surgido unos pocos que no fueron creados intencionalmente para ilustrar el fenómeno.

Para la teoría, sin embargo, el ciclado es un problema serio porque bloquea una prueba de que el algoritmo se detiene. Afortunadamente, hay una manera simple de evitar el problema y es una modificación del algoritmo simplex. Es la siguiente:

REGLA ANTI CICLADO DE BLAND

Modifique el algoritmo simplex para que, siempre que haya una opción para ingresar o dejar variable, siempre elijamos el que tenga el subíndice más pequeño.

Si hubiéramos aplicado la *regla de Bland* en el problema (22), el primer pivote habría intercambiado x_1 y x_5 en lugar de x_3 y x_6. Por lo tanto, el pivote degenerado se habría eliminado. En general, la regla de Bland no elimina todos los pivotes degenerados; sin embargo, previene ciclos.

TEOREMA 3.11. Si el algoritmo simplex es modificado por la regla de Bland, entonces no ocurre ningún ciclo.

Para expresar este teorema de manera diferente, si modificamos el algoritmo simplex usando la regla de Bland, entonces ninguna base aparece más de una vez. Como solo hay un número finito de bases, el algoritmo debe finalizar después de muchas iteraciones.

Todavía existe el problema de encontrar un *tableau* inicial factible.

3.5.2 EL *TABLEAU* INICIAL FACTIBLE

Consideremos el problema

$$\text{maximizar } 2x_1 - x_2 + 2x_3 \tag{23}$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq -1$$

$$-x_2 + x_3 \leq -1.$$

La introducción de las variables de holgura nos da la forma básica

$$\text{maximizar } 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 - 6 = -x_4$$

$$-x_1 + x_2 + 1 = -x_5$$

$$-x_2 + x_3 + 1 = -x_6.$$

Esta forma básica es inviable, aunque el problema en sí es factible [(2, 1, 0) es un vector factible]. Introducimos una variable auxiliar u, y la usamos para construir el problema auxiliar. Es

$$\text{maximizar } -u$$

$$\text{sujeto a } x_1 + x_2 + x_3 - u - 6 = -x_4$$

$$-x_1 + x_2 - u + 1 = -x_5$$

$$-x_2 + x_3 - u + 1 = -x_6.$$

Observe que la función objetivo auxiliar no tiene nada que ver con la función objetivo del problema (23). Para comprender por qué estamos interesados en el problema auxiliar, supongamos que podemos encontrar un cuadro factible para él en el que la variable auxiliar no sea básica. El cuadro obtenido al borrar la columna etiquetada por u es entonces un cuadro factible para el Problema (23) (excepto que la función objetivo original debe reemplazar al auxiliar). La razón para esto es que (x_1, ..., x_6) satisface las restricciones originales si y solo si (x_1, ..., x_6, 0) satisface las restricciones auxiliares. (Aquí, la última entrada en el segundo vector es u).

Para continuar con el ejemplo, escribimos el *tableau*

x_1	x_2	x_3	u	-1	
1	1	1	-1	6	$= -x_4$
-1	1	0	-1	-1	$= -x_5$
0	-1	1	-1	-1	$= -x_6$
0	0	0	-1	0	$= f$

Este *tableau* es inviable, pero es fácil de pivotar en uno factible. En este ejemplo, la entrada en la columna 4 y la fila 2 (o la fila 3) funciona. La realización del primero de estos pivotes da

x_1	x_2	x_3	x_5	-1	
2	0	1	-1	7	$= -x_4$
1	-1	0	-1	1	$= -u$
1	-2	1	-1	0	$= -x_6$
1	-1	0	-1	1	$= f$

Este *tableau* es factible. Después de dos pivotes elegidos según el algoritmo simplex, obtenemos

x_6	u	x_3	x_5	-1	
2	-4	3	1	3	$= -x_4$
-1	1	-1	0	1	$= -x_2$
-1	2	-1	-1	2	$= -x_6$
0	-1	0	0	0	$= f$

Esto es óptimo y la variable auxiliar no es básica. Para escribir un *tableau* inicial factible para el problema original (23), solo es necesario borrar la columna etiquetada por u y reemplazar la fila inferior por los coeficientes de la función objetivo original (escrita en términos de los no básicos x_6 , x_3 y x_5). Como la función objetivo se da en términos de x_1, x_2 y x_3, solo tenemos que reemplazar x_1 y x_2 por las fórmulas para ellos dadas por las restricciones. Así

$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = 2\,(x_6 + x_3 + x_5 + 2) - (x_6 + x_3 + 1) + 2x_3$$

$$x_6 + 3x_3 + 2x_5 + 3.$$

El cuadro factible inicial para el problema (23) es entonces

x_6	x_3	x_5	-1	
2	3	1	3	$= -x_4$
-1	-1	0	1	$= -x_2$
-1	-1	-1	2	$= -x_1$
1	3	2	-3	$= \ f$

El problema puede resolverse en tres pivotes si usamos la regla de Bland, o en uno si no lo hacemos.

Formalizamos este método de la siguiente manera.

ALGORITMO 3.3. (ALGORITMO DE VIABILIDAD). Sea una forma básica primaria no factible. (Esto se llama problema original).

(1) Introduzca una variable auxiliar u.

(2) Defina que la función objetivo auxiliar es $-u$.

(3) Para cada restricción en el problema original, forme una restricción auxiliar agregando $-u$ al lado izquierdo.

(4) Defina el problema auxiliar como el de maximizar la función objetivo auxiliar sujeta a las restricciones auxiliares.

(5) Configure el *tableau* para el problema auxiliar.

(6) Elija una fila (no la inferior) para que la entrada de la derecha sea la más pequeña (la más negativa); pivotear en la entrada en esta fila y en la columna etiquetada por u. (El resultado es un cuadro factible).

(7) Aplicar el algoritmo simplex para resolver el problema auxiliar.

(8) Si el valor máximo de la función objetivo auxiliar es negativo, STOP (el problema original es inviable).

(9) Realice un pivote para que la variable auxiliar no sea básica (si es necesario).

(10) Configure un *tableau* factible para el problema original borrando la columna etiquetada por la variable auxiliar, y luego reemplazando la función objetivo auxiliar por la original (escrita en términos de los no básicos).

Hay que tener en cuenta que el problema auxiliar siempre tiene una solución ya que su función objetivo está limitada arriba por cero.

El único otro punto que parece requerir comentario es el Paso (9). Es concebible que, después de resolver el problema auxiliar, obtengamos un máximo de cero en un *tableau* en el que la variable auxiliar sea básica. Obviamente, su valor sería cero. Sin embargo, es fácil ver que un pivote (degenerado) lo hace no básico.

El siguiente teorema resume los resultados de las secciones anteriores.

TEOREMA 3.12. Si un problema primario de programación lineal es tanto factible como acotado, entonces tiene una solución. Además, una solución se puede calcular utilizando el algoritmo de viabilidad (si es necesario) junto con el algoritmo simplex, modificado por la regla de Bland.

3.6 DUALIDAD

En esta sección, describimos las versiones duales de los resultados ya obtenidos para problemas primarios. Entonces será fácil terminar el trabajo comenzado más temprano (en el teorema 3.1 y su corolario) de revelar la conexión entre los problemas primarios y los duales.

3.6.1 EL ALGORITMO DUAL SIMPLE

Por ejemplo, consideremos la Forma Básica Dual (17). El *tableau dual* para esta forma básica doble es

y_1	1	1	1	-1	2
y_2	-1	-3	-1	2	-1
-1	1	0	0	-1	0
	$= y_3$	$= y_4$	$= y_5$	$= y_6$	$= g$

Aquí, las columnas se leen como ecuaciones. Por ejemplo, se lee la columna 2

$$(1)\cdot(y_1) + (-3)\cdot(y_2) + (0)\cdot(-1) = y_4,$$

que es la segunda ecuación de restricción en la forma básica dual. Un pivote en la primera entrada en la primera fila produce la forma básica dual (18), cuyo *tableau dual* es

y_3	1	1	1	-1	2
y_2	1	-2	0	1	1
-1	-1	-1	-1	0	-2
	$= y_1$	$= y_4$	$= y_5$	$= y_6$	$= g$

Una comprobación rápida muestra que este segundo cuadro doble podría haberse obtenido aplicando el algoritmo pivotante (Algoritmo 3.1). Esto no es una coincidencia De hecho, el algoritmo de pivote funciona para cuadros dobles exactamente como para los primarios. Omitimos la prueba de este hecho; es similar a la demostración del Teorema 3.6. También hay un teorema análogo al Teorema 3.5. Es el siguiente:

TEOREMA 3.13. Considere un *tableau dual* de tamaño (m + 1) × (n + 1). Entonces nosotros tenemos:

(1) El *tableau* es factible si y solo si cada entrada en la fila inferior (sin contar la última) no es positiva.

(2) Supongamos que el *tableau* es factible. Si cada entrada en la columna de la derecha (sin contar la de abajo) no es negativa, entonces el cuadro es óptimo.

Por lo tanto, el primer *tableau dual* anterior no es factible, pero el segundo si es factible y óptimo. Existe, por supuesto, una versión dual del algoritmo simplex:

ALGORITMO 3.4. (ALGORITMO SIMPLEX DUAL). Sea un *tableau dual* factible T de tamaño $(m + 1) \times (n + 1)$.

(1) Si

$$t_{i,n+1} \geq 0 \text{ para } 1 \leq i \leq m,$$

luego STOP (el cuadro es óptimo).

(2) Elija cualquier k con $1 \leq k \leq m$ tal que $t_{k,n+1} < 0$. (La fila de etiquetado de variable no básica k se denomina variable de *entrada*).

(3) Si

$$t_{kj} \geq 0 \text{ por } 1 \leq j \leq n,$$

STOP (el problema no está acotado)

(4) Elija cualquier l con $1 \leq l \leq$ n tal que $t_{kl} < 0$ y

$$\frac{\mathbf{t_{m+1,l}}}{\mathbf{t_{kl}}} = \mathbf{min}\left\{\frac{\mathbf{t_{m+1,j}}}{\mathbf{t_{kj}}} : \mathbf{1 \leq j \leq n \ y \ t_{kl} < 0}\right\}$$

(La columna de etiquetado de variable básica l se llama variable *saliente*).

5) Pivote en t_{kl} y reemplace T por el *tableau dual* resultante de este pivote. (La entrada t_{kl} se llama entrada de *pivote*).

6) Ir al paso (1).

Si este algoritmo es modificado por la regla de Bland, entonces los ciclos son imposibles, por lo que el cálculo siempre termina después de finitas muchas iteraciones. Finalmente, hay una versión doble del algoritmo de viabilidad que ilustramos al resolver el siguiente ejemplo:

$$\text{minimizar } y_1 + y_2 \tag{24}$$

$$\text{sujeto a } y_1 - 2y_2 + y_3 \geq 1$$

$$-y_1 - y3 \geq -5.$$

Una forma básica dual es

$$\text{minimizar } y_1 + y_2$$

$$\text{sujeto a } y_4 = y_1 - 2y_2 + y_3 - 1$$

$$y_5 = -y_1 - y_3 + 5.$$

Que no es factible. Construya un problema auxiliar introduciendo una variable auxiliar v, una función objetivo auxiliar $+v$, y restricciones auxiliares formadas a partir de las restricciones originales agregando v. El resultado es

$$\text{minimizar } v$$

$$\text{sujeto a } y_4 = y_1 - 2y_2 + y_3 + v - 1$$

$$y_5 = -y_1 - y_3 + v + 5.$$

El *tableau dual* para el problema auxiliar es

y_1	1	1	0
y_2	-2	-3	0
y_3	1	-1	0
v	1	1	1
-1	1	-5	0
	$= y_4$	$= y_5$	$= h$

Pivotamos sobre la entrada en la fila etiquetada por v y en la primera columna. La razón de esta elección es que la entrada en la parte inferior de la primera columna es positiva. Si hubiera habido más de una columna con entrada inferior positiva, habríamos elegido la más grande. El resultado del pivote es

y_1	-1	-2	-1
y_2	2	2	2
y_3	-1	-2	-1
y_4	1	1	1
-1	-1	-6	1
	$= v$	$= y_5$	$= h$

Esto es factible El algoritmo simplex dual permite dos opciones de pivote. Estas son las entradas en la fila 1, columna 1, y la entrada en la fila 3, columna 1. Elegimos la primera de ellas. El resultado es

v	-1	2	1
y_2	2	-2	0
y_3	-1	0	0
y_4	1	-1	0
-1	-1	-4	0
	$= y_1$	$= y_5$	$= h$

Esto es óptimo y la variable auxiliar v no es básica. Para obtener el *tableau dual* inicial factible para el problema original, borramos la fila etiquetada por v y reemplazamos la función objetivo auxiliar por la original (escrita en términos de los elementos no básicos y_2, y_3 e y_4. El resultado es

y_2	2	-2	3
y_3	-1	0	-1
y_4	1	-1	1
-1	-1	-4	-1
	$= y_1$	$= y_5$	$= g$

Esto es factible pero no óptimo. El algoritmo dual simplex requiere un pivote en la entrada en la fila 2 y la columna 1. El resultado es

y_2	2	-2	1
y_1	-1	0	1
y_4	1	-1	0
-1	-1	-4	0
	$= y_3$	$= y_5$	$= g$

Esto es óptimo y leemos la solución

$$\min g(\vec{\mathbf{y}}) = 0, \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 1.$$

El siguiente teorema resume los resultados sobre problemas duales.

TEOREMA 3.14. Un problema de programación lineal dual que es factible y acotado tiene una solución. Además, la solución se puede calcular utilizando el algoritmo de viabilidad dual (si es necesario), junto con el algoritmo dual simplex modificado por la regla de Bland.

3.6.2 EL TEOREMA DE LA DUALIDAD

Considere un par de problemas dual/principal, e introduzca variables flojas y excedentes para obtener una forma básica primaria y una forma básica doble. El *tableau* y *tableau dual* correspondientes a estas formas básicas constan de la misma matriz $(m + 1) \times (n + 1)$, y difieren solo en las etiquetas. Combinemos los dos *tableau* en un *tableau dual*/*principal*. Esto se hace colocando ambos conjuntos de etiquetas en la matriz. Por ejemplo, si el problema primario es

$$\text{maximizar } -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{sujeto a } x_3 - x_4 \leq 0$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 5$$

$$2x_2 + x_4 \leq 3$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 5,$$

entonces el *tableau* dual/ principal es

	x_1	x_2	x_3	x_4	-1	
y_1	0	0	1	-1	0	$= -x_5$
y_2	1	0	-2	0	1	$= -x_6$
y_3	0	2	0	1	3	$= -x_7$
y_4	-1	3	0	0	5	$= -x_8$
-1	-1	2	-3	4	0	$= f$
	$= y_3$	$= y_4$	$= y_5$	$= y_6$	$= g$	

Dada esta notación, podemos realizar pivotes simultáneamente en ambos problemas, es simplemente una cuestión de hacer un seguimiento de ambos conjuntos de etiquetas. Por ejemplo, si pivotamos en la segunda entrada en la tercera fila del ejemplo, obtenemos

	x_1	x_7	x_3	x_4	-1	
y_1	0	0	1	-1	0	$= -x_5$
y_2	1	0	-2	0	1	$= -x_6$
y_6	0	1/2	0	1/2	3/2	$= -x_2$
y_4	-1	-3/2	0	-3/2	1/2	$= -x_8$
-1	-1	2	-3	3	-3	$= f$
	$= y_5$	$= y_3$	$= y_7$	$= y_8$	$= g$	

Ahora estamos listos para el teorema más importante de este capítulo.

TEOREMA 3.15. (TEOREMA DE LA DUALIDAD). Si alguno del problema primario/dual tiene una solución, también lo hace el otro; además, si tienen soluciones, los valores óptimos de las dos funciones objetivos son iguales entre sí.

4 MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE JUEGOS MATRICIALES

4.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo, aplicamos la programación lineal a los juegos matriciales. Primero veremos el problema de calcular estrategias óptimas para el jugador de fila y el jugador de columna como un problema de un par dual/primario de programación lineal. Para a continuación probar el teorema minimax. El resto del capítulo consiste en ejemplos.

Nuestro interés es resolver juegos matriciales mediante el uso de métodos de programación lineal, es decir, al establecer el problema de resolver un juego matricial como un par dual / primario. Es interesante ver que, a la inversa, los problemas de programación lineal puedan considerarse como juegos matriciales.

4.2 EL TEOREMA DE MINIMAX

Sea M sea un juego matricial $m \times n$. El *problema del jugador de fila* es calcular el valor de la fila v_r y una estrategia mixta óptima

$$\vec{\mathbf{p}} = (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m)$$

Es decir, el problema es encontrar v_r y un vector de probabilidades $\vec{\mathbf{p}}$ tal que v_r sea lo más grande posible y

$$\mathbf{v}_r = \min_j \sum_{i=1}^{m} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{m}_{ij}$$

Reformulamos este problema de una manera equivalente (y, también, descartamos el subíndice r de v). La nueva formulación es: Encuentrar v y $\vec{\mathbf{p}}$ de forma que v sea lo más grande posible, sujeto a las siguientes condiciones:

(1) $p_i \geq 0$ para $1 \leq i \leq m$.

(2) $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{p}_i = 1$

(3) $\mathbf{v} \leq \sum_{i=1}^{m} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{m}_{ij}$ para $1 \leq j \leq n$.

Para ver que esto realmente es equivalente a la primera formulación, tenga en cuenta que, dado que v es lo más grande posible, la condición (3) implica que

$$\mathbf{v = \min_{j} \sum_{i=1}^{m} p_i \cdot m_{ij}}$$

Esta nueva formulación es un problema de programación lineal. Tiene la desventaja de que no se puede suponer que el v desconocido sea no negativo. (En muchos juegos, el jugador de columna tiene una ventaja, en tales juegos, $v < 0$.) Tampoco está en la forma más conveniente para resolverlo. Ahora, el problema sobre v no es positivo se soluciona fácilmente. Se demuestra que al agregar una constante a cada entrada de M se agrega la misma constante a v_r y v_c. Si agregamos una constante tan grande de forma que la matriz modificada tiene todas las entradas positivas, entonces v_r y v_c también sea positivo. Agregar una constante a cada entrada no cambia las estrategias óptimas. Por lo que antes de seguir adelante, suponemos que se ha llevado a cabo el siguiente:

PASO PRELIMINAR

Elija una constante c lo suficientemente grande para que $m_{ij} + c > 0$ para todas las entradas m_{ij} en M. Reemplace M por el resultado de agregar c a cada entrada.

Ahora resolveremos el juego matricial modificado por este paso preliminar. Las estrategias óptimas serán correctas para la matriz original; el valor de fila y los valores de columna de la matriz original serán los de la matriz modificada menos la constante c.

Volvemos a la segunda formulación del problema del jugador de fila. Hagamos un cambio de variable

$$y_i = p_i/v \text{ para } 1 \leq i \leq m \tag{25}$$

La división por v es legal debido al paso preliminar. Ahora, la condición de que la suma de la pi igual a 1 [condición (2)] implica que

$$\frac{1}{v} = \sum_{i=1}^{m} y_i$$

Además, la condición (3) implica que

$$\sum_{i=1}^{m} m_{ij} \cdot y_i \geq 1 \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Como maximizar v es equivalente a minimizar $1/v$, llegamos a otra formulación (y final):

$$\text{minimizar } y_1 + \ldots + y_m \tag{26}$$

$$\text{sujeto a } \sum_{i=1}^{m} m_{ij} \cdot y_i \geq 1 \text{ para } 1 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto, el problema del jugador de fila es un problema de programación lineal dual. No debería sorprender que el problema del jugador de columna sea el primario correspondiente. La derivación es muy similar. Primero, podemos formular su problema como: Encuentre v y $\vec{\mathbf{q}}$ tal que v es lo más pequeño posible, sujeto a las siguientes condiciones:

(1) $q_j \geq 0$, para $1 \leq j \leq n$.

(2) $\sum_{j=1}^{n} q_i = 1$

(3) $v \geq \sum_{j=1}^{n} q_j \cdot m_{ij}$, para $1 \leq i \leq m$.

El cambio apropiado de variables es

$$x_j = q_j/v \text{ para } 1 \leq j \leq n \tag{27}$$

El problema del jugador de columna se convierte

$$\text{maximizar } x_1 + \ldots + x_n \tag{28}$$

$$\text{sujeto a } \sum_{j=1}^{n} \mathbf{m_{ij}} \cdot \mathbf{x_j} \leq \mathbf{1} \text{ para } 1 \leq i \leq m.$$

Por lo tanto, como se predijo, los problemas (26) y (28) forman un par primario/dual.

El método de resolver un juego matricial es:

(1) Realice el paso preliminar (y recuerde la constante c; se necesitará más adelante).

(2) Configure y resuelva los problemas (26) y (28).

(3) Calcule el valor de la columna del juego modificado (por el paso preliminar) tomando el recíproco del valor máximo de la función objetivo primario.

(4) Calcule $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$, utilizando las soluciones de los problemas de programación lineal y las ecuaciones de cambio de variables [(25) y (27)].

(5) Calcule el valor de la fila y el valor de la columna del juego original restando c de las cantidades correspondientes para el juego modificado.

Luego se cumple el siguiente:

TEOREMA 4.1 (EL TEOREMA MINIMAX). Sea M sea un juego de matriz $m \times n$. Entonces, tanto el jugador de la fila como el jugador de la columna tienen estrategias mixtas óptimas. Además, el valor de la fila y los valores de columna son iguales.

Pongamos un ejemplo para ilustrar el método, sea:

$$
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}
$$

Este juego no tiene un punto de silla y no hay filas o columnas dominadas. Llevamos a cabo el paso preliminar con $c = 3$. La matriz modificada es

$$
\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}
$$

El *tableau* dual/principal inicial para los problemas del jugador de fila y del jugador de columna es:

	x_1	x_2	x_3	-1	
y_1	1	5	4	1	$= -x_4$
y_2	3	2	6	1	$= -x_5$
y_3	5	4	2	1	$= -x_6$
y_4	2	6	3	1	$= -x_7$
-1	1	1	1	0	$= f$
	$= y_3$	$= y_4$	$= y_6$	$= g$	

El *tableau* original ya es factible, por lo que llevamos a cabo el algoritmo simplex (principal). Hay tres pivotes permitidos por el algoritmo. Elegimos la entrada en la fila 3, columna 1. El resultado del pivote es

	x_6	x_2	x_3	-1	
y_1	-1/5	21/5	18/5	4/5	$= -x_4$
y_2	-3/5	-2/5	24/5	2/5	$= -x_5$
y_5	1/5	4/5	2/5	1/5	$= -x_1$
y_4	-2/5	22/5	11/5	3/5	$= -x_7$
-1	-1/5	1/5	3/5	-1/5	$= f$
	$= y_3$	$= y_6$	$= y_7$	$= g$	

Ahora hay dos pivotes posibles; el elegido es la entrada en la fila 4, columna 2. Después de este segundo pivote, un pivote más da un *tableau* óptimo

	x_6	x_7	x_3	-1	
y_1	-18/55	-54/55	-3/10	1/11	$= -x_4$
y_7	-7/55	-1/55	1/5	1/11	$= -x_3$
y_5	3/11	-2/11	0	1/11	$= -x_1$
y_6	-3/110	12/55	-1/10	1/11	$= -x_2$
-1	-13/110	-3/55	-1/10	-3/11	$= f$
	$= y_3$	$= y_4$	$= y_2$	$= g$	

A partir de esto, leemos las soluciones a los problemas de programación lineal:

$$\max f = \min g = 3/11,$$

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1/11,$$

$$y_1 = 0,\ y_2 = 1/10,\ y_3 = 13/110,\ y_4 = 3/55.$$

Del cambio de ecuaciones variables ((25) y (27)), vemos que

$$p_j = (11/3)\cdot y_i \quad \text{y} \quad q_i = (11/3)\cdot x_i.$$

Así,

$$\vec{\mathbf{p}} = (1/3,\ 1/3,\ 1/3) \text{ y } \vec{\mathbf{q}} = (0,\ 11/30,\ 13/30,\ 1/5).$$

Finalmente, el valor del juego original es el valor del juego modificado (que es 11/3) menos la constante c del paso preliminar,

$$v(M) = 11/3 - 3 = 2/3.$$

4.3 ALGUNOS EJEMPLOS

En esta sección, usaremos la programación lineal para resolver algunos juegos de interés.

4.3.1 TIJERAS-PAPEL-PIEDRA

Este juego fue discutido en el Capítulo 2 (Ejemplo 2.1). Las tres estrategias puras desempeñan papeles indistinguibles en el juego, por lo que no es sorprendente que la estrategia óptima para cada el jugador debe jugar cada una de ellas con la misma probabilidad: p = (1/3, 1/3, 1/3).

Ahora presentamos un juego más complicado basado en tijeras-papel-piedra. Este juego, que llamaremos *tijeras-papel-piedra-vidrio-agua*, o *TPPVA*, los dos jugadores eligen simultáneamente uno de los cinco objetos en el nombre del juego. El ganador se determina mirando la Fig. 16.

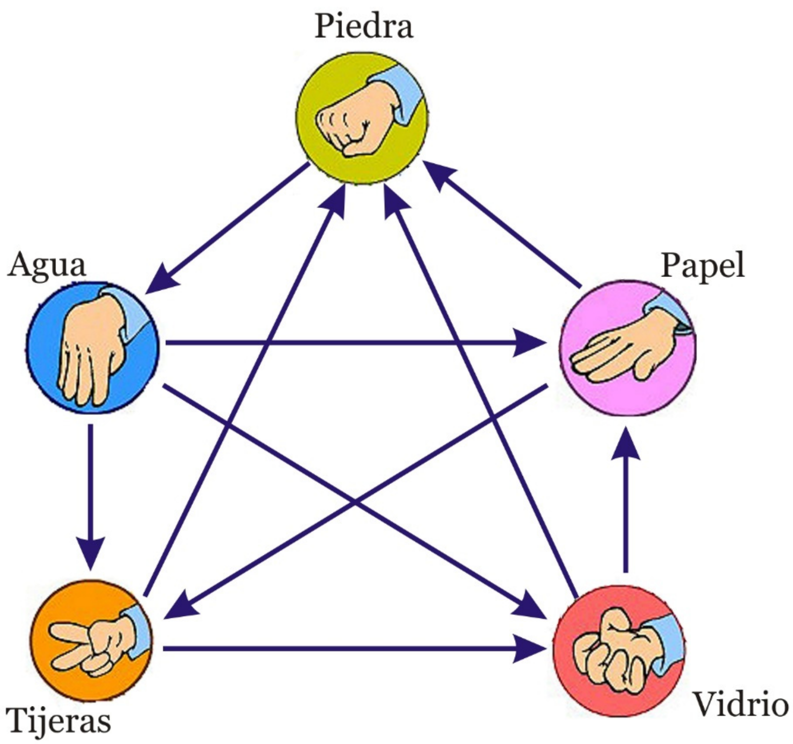

Fig. 16 Tijeras-papel-piedra-vidrio-agua

En este grafo dirigido, hay una arista entre cada par de vértices. Si la arista va del vértice *u* al vértice *v*, y si un jugador elige *u* mientras el otro elige *v*, entonces el ganador es el que elige *u*. Por lo tanto, el vidrio golpea la piedra; la piedra golpea el agua; las tijeras golpean el vidrio, etc. Para la comparación, el grafo dirigido para las *tijeras-papel-piedra* ordinarias se da en la Fig. 17.

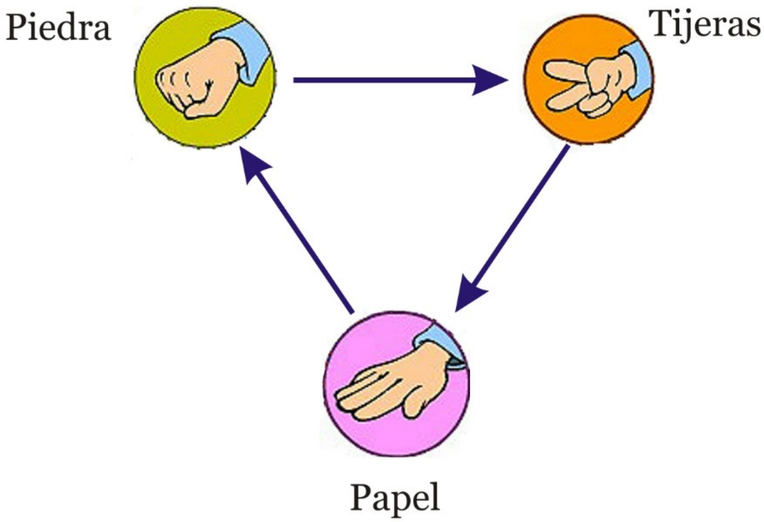

Fig. 17 Tijeras-papel-piedra

La matriz para *TPPVA* se calcula fácilmente:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Como se trata de un juego simétrico, podría resolverse utilizando el método del Capítulo 2. En su lugar, se utiliza el método de programación lineal. El valor del juego es cero, y la estrategia óptima para cada jugador es

$$\vec{\mathbf{p}} = (1/9,\ 1/9,\ 1/3,\ 1/9,\ 1/3).$$

Esta solución es sorprendente al menos de una manera. La tercera estrategia pura parece ser la menos favorable para cada jugador. Tres de los cinco resultados de jugarlo son pérdidas, y uno de los otros es un empate. Sin embargo, la estrategia óptima requiere jugarlo un tercio del tiempo. Esto ilustra el hecho de que, incluso para juegos bastante simples, la solución óptima puede ser difícil de llegar intuitivamente.

4.3.2 MORRA CON TRES DEDOS

Las reglas son las mismas que para la morra de dos dedos, excepto que cada jugador puede sostener uno, dos o tres dedos (y, al mismo tiempo, adivinar 1, 2 o 3). Por lo tanto, cada jugador tiene $3 \times 3 = 9$ estrategias puras. Cada una de estas estrategias puras se puede designar por un par ordenado (f, p), donde f es la cantidad de dedos que se sostienen, y p es la predicción. En la matriz de este juego, hemos etiquetado las filas y columnas por designaciones apropiadas:

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3 ,1)	(3,2)	(3,3)
(1,1)	0	2	2	-3	0	0	-4	0	0
(1,2)	-2	0	0	0	3	3	-4	0	0
(1,3)	-2	0	0	-3	0	0	0	4	4
(2,1)	3	0	3	0	-4	0	0	-5	0
(2,2)	0	-3	0	4	0	4	0	-5	0
(2,3)	0	-3	0	0	-4	0	5	0	5
(3,1)	4	4	0	0	0	-5	0	0	-6
(3,2)	0	0	-4	5	5	0	0	0	-6
(3,3)	0	0	-4	0	0	-5	6	6	0

Este juego es ciertamente simétrico. La matriz no tiene puntos de silla, y no hay filas o columnas dominadas. Es un ejemplo de un juego simétrico para el cual el método del Capítulo 2 falla. De hecho, ninguno de los nueve posibles sistemas de ecuaciones lineales tiene solución. Resolver el problema del par dual/principal de programación lineal a mano es tedioso, pero posible. Sin embargo, resuelto por ordenador, y se hallan cuatro soluciones básicas óptimas; estas se convirtieron en soluciones del juego. Es interesante que todas involucran solo las tres estrategias puras (1,3), (2,2) y (3,1). Las probabilidades de jugar estas tres estrategias puras en cada una de las cuatro soluciones se dan en la Tabla 2.

También es interesante observar qué tan juntas están estas cuatro soluciones.

Tabla 2 Soluciones a la morra de tres dedos

Soluciones	(1,3)	(2,2)	(3.1)
1	5/12	1/3	1/4
2	16/37	13/37	9/37
3	20/47	15/47	12/47
4	25/61	20/61	16/61

4.3.3 EL JUEGO DEL CORONEL BLOTTO

Es un juego militar y se juega de la siguiente manera. El Coronel Blotto lidera una fuerza de infantería que consiste en cuatro regimientos. La fuerza enemiga, comandada por el general Atila, se compone de tres regimientos. Hay dos posiciones que a ambos ejércitos les gustaría capturar (llamadas San Juan Hill y Lookout Mountain). El problema para ambos comandantes es decidir cuántos regimientos enviar a cada posición. Suponemos que una batalla entre dos fuerzas dará como resultado una victoria para el que tenga más regimientos y un empate si son iguales. Los pagos se calculan de la siguiente manera: Si una fuerza de *r* regimientos derrota a una fuerza de *s* regimientos, luego el ganador gana *s* + 1 (el +1 porque el ganador captura la posición y se considera que vale 1). Ahora, las cinco estrategias puras para el Coronel Blotto son: (4,0), (0,4), (3,1), (1,3) y (2,2). Aquí, por ejemplo, (3,1) significa que se envían tres regimientos a San Juan Hill y uno a Lookout Mountain. Del mismo modo, el general Atila tiene cuatro estrategias puras: (3,0), (0,3), (2,1) y (1,2). La matriz de pagos es

	(3,0)	(0,3)	(2,1)	(1, 2)
(4,0)	4	0	2	1
(0,4)	0	4	1	2
(3,1)	1	-1	3	0
(1,3)	-1	1	0	3
(2,2)	-2	-2	2	2

Estas entradas son fáciles de calcular. Por ejemplo, si Blotto juega (3,1) y Atila juega (2,1), Blotto gana la batalla de San Juan Hill y gana 2 + 1 = 3. La batalla de Lookout Mountain es un empate. Si Blotto juega (4,0) y Attila juega (2,1), la batalla de San Juan Hill es una victoria para Blotto, que gana 2 + 1 = 3. La batalla de Lookout Mountain es ganada por Atila, que gana 0 + 1 = 1. Por lo tanto, Blotto obtiene un pago neto de 3 - 1 = 2.

Por el método de programación lineal, obtenemos la siguiente solución:

$$\text{valor} = 14/9,$$

$$\vec{\mathbf{p}} = (4/9, 4/9, 0, 0, 1/9),$$

$$\vec{\mathbf{q}} = (1/30, 7/90, 8/15, 16/45).$$

Esto dice que Blotto casi siempre debería concentrar todos sus regimientos en una de las dos posiciones, pero que, una vez de nueve, debería dividirlos por igual. En cuanto a Atila, debería dividir sus fuerzas la mayor parte del tiempo (con una probabilidad de 8/15 + 16/45 = 8/9, para ser precisos), pero ocasionalmente debería concentrarlos todos en una posición. Por lo tanto, el ejército más fuerte y el más débil usan estrategias dramáticamente diferentes. Hay otra cosa curiosa acerca de esta solución. Aunque las dos posiciones son indistinguibles, las estrategias puras de Atila (3,0) y (0,3) se juegan con probabilidades desiguales. Lo mismo es cierto de las estrategias puras (2,1) y (1,2). Esta aparente paradoja es eliminada por la observación de que el vector de probabilidad obtenido de $\vec{\mathbf{q}}$ por intercambiando q_1 y q_2, e intercambiando q_3 y q_4 es también una estrategia óptima para el general Atila. Si hacemos un promedio de estas dos soluciones óptimas, obtenemos una solución óptima simétrica para Atila: $\vec{\mathbf{q}} = (1/18, 1/18, 4/9, 4/9)$. El hecho de que el valor del juego sea positivo es de esperar ya que Blotto tiene un regimiento más que Attila; por lo tanto, debería tener una ventaja.

Hay una objeción filosófica razonable a la solución anterior. Es ciertamente válido en caso de que el "juego" se juegue repetidamente, pero esta campaña militar en particular solo ocurrirá una vez. Las consecuencias de una desafortunada combinación de estrategias puras podrían ser devastadoras para uno de los ejércitos. Por ejemplo, si Atila juega (2,1) mientras juega Blotto (4,0), dos de los regimientos de Atila podrían volverse inadecuados para una acción posterior durante mucho tiempo. En el contexto de toda la guerra, esto podría ser inaceptable. Por otro lado, es difícil ver qué alternativa "segura" es para Atila (excepto para retirarse sin luchar).

4.3.4 PÓKER SIMPLE

El póker real generalmente lo juegan más de dos personas y es difícil de analizar, en parte porque la variedad de manos posibles de cartas es muy grande. Por este motivo, se han estudiado varias formas de póker simplificado para obtener una idea del juego real. Nuestra versión se juega de la siguiente manera. Primero, hay dos jugadores: San Antonio Rose y Sioux City Sue. Cada jugador apuesta inicialmente \$1. Esto significa que esa cantidad de dinero se coloca en el medio de la mesa. La pila de dinero resultante (o fichas que representan dinero) se llama *bote*.

A cada jugador se le reparte una mano que consiste en dos cartas, boca abajo. Cada jugador puede mirar sus propias cartas, pero no puede ver las del otro jugador. La baraja de cartas con la que se reparten estas manos está muy simplificada. Consta de solo dos tipos de cartas: alta (abreviado H) y baja (abreviado L). Además, el mazo es muy grande, por lo que la probabilidad de repartir una H es siempre la misma que repartir una L. Por lo tanto,

$$\Pr(H) = \Pr(L) = 1/2.$$

Hay tres manos posibles: HH, LL, HL. Las probabilidades de estos se ven fácilmente como

$$\Pr(HH) = 1/4, \quad \Pr(LL) = 1/4, \quad \Pr(HL) = 1/2.$$

De acuerdo con las tradiciones del póquer, el ranking de las manos es: $HH > LL > HL$. Por lo tanto, cualquiera de las parejas supera una mano sin una pareja.

Rose juega primero. Ella tiene dos opciones: puede *apostar* agregando \$2 al bote o *pasar* (es decir, apuesta cero). Ahora es el turno de Sue. Sus opciones dependen de lo que Rose hizo. Si Rose apuesta, Sue puede *ver* o *retirarse*. Ver la apuesta significa igualar la apuesta de Rose poniendo sus propios \$2 en el bote. Retirarse significa rendirse (sin tener que ingresar dinero) y, en este caso, Rose gana el bote. Por otro lado, si Rose pasa, Sue puede apostar \$2 o pasar. Finalmente, si Rose lo ve y Sue apuesta, entonces Rose tiene la opción de ver la apuesta o retirarse (en cuyo caso, Sue gana el bote). Si nadie se retira, las dos manos se muestran y se comparan. Si son iguales, el bote se divide por igual. De lo contrario, el jugador con la mano más alta toma todo el bote.

La forma extensa de nuestra versión del poker simple es grande pero no inmanejable. Para ver cuáles son las estrategias puras de Rose, se deben tener en cuenta dos cosas. Primero, Rose conoce su propia mano, pero no la de Sue. En segundo lugar, si una estrategia pura determinada exige que ella controle, entonces esa estrategia también debe decirle qué acción tomar en caso de que la respuesta de Sue sea apostar. La primera de estas consideraciones nos dice que la acción a tomar de acuerdo con una estrategia particular puede depender de su mano. Como hay tres manos posibles, es natural representar una estrategia pura como una 3-tupla, donde cada entrada representa una acción para una de las manos posibles. Para designar estas acciones, empleamos “b”, “s”, “f” las posturas, respectivamente, de “apostar”, “pasar y ver si Sue apuesta” y “pasar y retirar si Sue apuesta”. Por lo tanto, hay $3^3 = 27$ estrategias puras. Una estrategia típica es “bsf”, que significa:

si la mano de Rose es *HH*, ella apuesta; si es *LL*, pasará, pero verá si Sue apuesta; y, si es *HL*, pasará y se retirara si Sue apuesta.

En cuanto a las estrategias puras de Sue, tenga en cuenta que ella no solo conoce su propia mano, sino también la acción de Rose. Por lo tanto, hay seis situaciones en las que podría encontrarse a sí misma (cualquiera de las tres manos por cualquiera de las dos acciones tomadas por Rose). Por lo tanto, es natural representar las estrategias puras de Sue como 6-tuplas. La estructura de estas 6-tuplas se indica en la siguiente tabla:

HH, apuesta	*HH*, pasa	*LL*, apuesta	*LL*, pasa	*HL*, apuesta	*HL*, pasa

Usamos letras mayúsculas para designar las posibles opciones de Sue: "B" significa "apuesta", "S" significa "ver", "C" significa "pasar" y "F" significa "retirarse". Una estrategia pura típica para Sue es: SBFBSC. El significado de esto es que, si Sue recibe *HH* y Rose apuesta, entonces ella ve la apuesta; si Rose pasa, ella apuesta. Si Sue recibe *LL* y Rose apuesta, se retira; si Rose pasa, ella apuesta. Finalmente, si Sue recibe *HL* y Rose apuesta, lo ve; si Rose pasa, ella pasa.

Como cada entrada en la 6-tupla puede ser de dos posibilidades (S/F o B/C, dependiendo de qué acción tomó Rose), el número total de estrategias puras para Sue es $2^6 = 64$. Por lo tanto, parece que la matriz para póker simple será de 27×64 (teniendo a Rose como el jugador de fila). El sentido común (o, más bien, el sentido del póker) nos permite eliminar algunas de las estrategias puras para cada jugador. Para Rose, podemos eliminar de manera segura todas las estrategias que requieren que ella se retire con *HH*. Esta mano no puede perder. Esto deja 18 estrategias puras para ella. En el caso de Sue, cualquier estrategia que requiera que ella se retire con *HH* también puede ser eliminada. Con un poco de reflexión adicional, vemos que es seguro eliminar aquellos que requieren que ella pase con *HH*. Esto reduce el número de estrategias puras para Sue a 16. Todos ellas comienzan con SB. La otra forma de ver esto es que, si escribimos la matriz completa de 27×64, las filas y columnas correspondientes a las estrategias puras que hemos eliminado estarían dominadas.

Ahora debemos explicar cómo se calculan las entradas de la matriz. Esto es complicado porque cada entrada es un promedio sobre las 9 posibles combinaciones de manos para los dos jugadores. Para tomar un ejemplo, supongamos que Rose juega sbs, mientras Sue juega SBFBFB. Enumeramos las nueve combinaciones posibles de manos y analizamos cada una:

(1) Cada una reparte *HH* [probabilidad = (1/4) × (1/4) = 1/16]; Rose pasa, Sue apuesta, Rose ve; el pago es 0.

(2) Rose se reparte *HH*, Sue obtiene *LL* [probabilidad = (1/4) × (1/4) = 1/16]; Rose pasa, Sue apuesta, Rose ve; Rose gana $3 (la mitad del bote aportado por Sue, la otra mitad ya era suya).

(3) Rose se reparte *HH*, Sue obtiene *HL* [probabilidad = (1/4) × (1/2) = 1/8]; Rose pasa, Sue apuesta, Rose ve; Rose gana $3.

(4) Rose recibe el *LL*, Sue obtiene *HH* [probabilidad = (1/4) × (1/4) = 1/16]; Rose apuesta, Sue ve; Sue gana y así paga = - $3.

(5) Cada una recibe *LL* [probabilidad = (1/4) × (1/4) = 1/16]; Rose apuesta, Sue se retira; Rose gana $l.

(6) Rose recibe el *LL*, Sue obtiene *HL* [probabilidad = (1/4) × (1/2) = 1/8]; Rose apuesta, Sue se retira; Rose gana $l.

(7) Rose recibe *HL*, Sue obtiene *HH* [probabilidad = (1/2) × (1/4) = 1/8]; Rose pasa, Sue apuesta, Rose ve; el resultado es - $3.

(8) Rose recibe *HL*, Sue obtiene *LL* [probabilidad = (1/2) × (1/4) = 1/8]; Rose pasa, Sue apuesta, Rose ve; el resultado es - $3.

(9) Cada uno recibe *HL* [probabilidad = (1/2) × (1/2) = 1/4]; Rose pasa, Sue apuesta, Rose ve; la recompensa es 0.

La entrada de la matriz en la fila etiquetada como sbs, y en la columna etiquetada SBFBFB es la suma de los nueve pagos, cada uno multiplicado por la probabilidad de que esa combinación particular ocurra:

$$(1/16)\cdot(0) + (1/16)\cdot(3) + (1/8)\cdot(3) + (1/16)\cdot(-3) + (1/16)\cdot(1) +$$

$$(1/8))\cdot(1) + (1/8)\cdot(-3) + (1/8)\cdot(-3) + (1/4)\cdot(0) = -3/16.$$

Calcular las 288 entradas es un trabajo muy tedioso, si se hace a mano. Se hizo con ayuda de una computadora. Debido a consideraciones de espacio, la matriz no se mostrará aquí. Resulta que no tiene un punto de silla, pero hay algunas filas y columnas dominadas. Después de que se eliminen, nos queda una matriz de 12×12. La solución por el método de programación lineal nos da:

El valor del póker simple es – 0,048.

Por lo tanto, el juego es leve (alrededor de un centavo por mano) favorable para Sue. El problema principal/dual tiene muchas soluciones. Uno de estos proporciona las siguientes estrategias mixtas óptimas.

Rose debería jugar

- bsb con probabilidad 0,231.
- bsf con probabilidad 0,615.
- bff con probabilidad 0,077.
- sff con probabilidad 0,077.

Sue debería jugar

- SBSBFB con probabilidad 0,154.
- SBSCFC con probabilidad 0,462.
- SBFCFB con probabilidad de 0,077.
- SBFCFC con probabilidad 0,308.

Estas estrategias mixtas pueden reformularse de una manera que sea más fácil de entender. Supongamos, por ejemplo, que Rose recibe *HH*. ¿Cómo debería jugar? Al observar su solución, vemos que bsb, bsf y bff piden que apueste en esta mano.

La cuarta estrategia pura, sft, exige que ella compruebe (y vea). La suma de las probabilidades de esas estrategias puras que requieren una apuesta es

$$0{,}231 + 0{,}615 + 0{,}077 = 0{,}923.$$

Nuestra recomendación para ella es, por lo tanto, que apueste con probabilidad 0,923, cuando se reparte HH. Cálculos similares se realizan fácilmente en caso de que reciba *LL* o *HL*. En resumen, nuestras recomendaciones para Rose son las siguientes:

- Teniendo *HH*, apostar con probabilidad 0,923, verificar y ver con probabilidad 0,077.
- Teniendo *LL*, pasar y ver con probabilidad 0,846, revise y doble con probabilidad 0,154.

- Teniendo *HL*, apostar con probabilidad 0,231, pasar y retirarse con probabilidad 0,769.

Nuestras recomendaciones para Sue se calculan de manera similar. Ellos son los siguientes:

- Teniendo *HH* y Rose apostando, siempre ve.
- Teniendo *HH* y Rose pasando, siempre apuesta.
- Teniendo *LL* y Rose apostando, ver con probabilidad 0,616, retirarse con probabilidad 0,384.
- Teniendo *LL* y Rose pasando, apuesta con probabilidad 0,154, pasa con probabilidad 0,846.
- Teniendo *HL* y Rose apostando, siempre retirarse.
- Teniendo *HL* y Rose pasando, apuesta con probabilidad 0,231, pasa con probabilidad 0,769.

Algunas de estas recomendaciones son intuitivas, pero algunas ciertamente no lo son. Es de esperar que Rose ocasionalmente *farolee* con un *HL*, es decir, lo apueste como si fuera una mano más fuerte. Es recomendable hacer esto casi una vez cada cuatro. Por otro lado, habría sido difícil adivinar que Rose debería verificar *HH* una vez cada 13.

Hemos mencionado que el problema de programación lineal dual/primario para este juego tiene muchas soluciones. ¡Es un hecho fascinante que si convertimos cualquiera de las soluciones conocidas en recomendaciones como se hizo anteriormente, obtenemos exactamente las mismas probabilidades!

5 JUEGOS DE SUMA NO NULA NO COOPERATIVOS

5.1 INTRODUCCIÓN

Al estudiar juegos que no son de suma cero, la distinción entre juegos cooperativos y no cooperativos es crucial. Hay dos tipos de cooperación entre jugadores. El primero es la celebración de acuerdos vinculantes antes de que comience el juego sobre cómo jugarán (es decir, coordinación de estrategias); el segundo es la celebración de acuerdos sobre reparto de pagos (o sobre "pagos adicionales" de un jugador a otro). El objetivo del primer tipo es aumentar los pagos a los jugadores que cooperaron; el objetivo del segundo es que un jugador (o grupo de jugadores) induzca a otro jugador a coordinar estrategias.

Es importante entender que los acuerdos realizados sobre coordinación de estrategias deben ser vinculantes. Si las "cruzas dobles" son posibles, entonces bien podría no haber cooperación en absoluto. Un ejemplo interesante a tener en cuenta al pensar en estas ideas es en el Dilema del Prisionero. En este juego, cada uno de los dos jugadores (llamados Bonnie y Clyde) tiene una opción de dos estrategias: C (para "cooperar") o D (para "defecto"). Si ambos juegan D, ambos van a prisión por cinco años. Si ambos juegan C, cada uno recibe una sentencia de dos años. Si uno falla y el otro coopera, el desertor obtiene un año, mientras que el cooperador obtiene diez. Está claro que si pudieran jugar cooperativamente (y llegar a un acuerdo vinculante), ambos jugarían contra C. Por otro lado, si el juego no coopera, la mejor manera para que cada uno juegue es D. Veremos este juego de otra manera en la Sección 5.3.2. Otro punto interesante al respecto es que los pagos no son transferibles. Es decir, no hay posibilidad de agrupar los pagos y dividirlos de acuerdo con un acuerdo previo.

Los juegos de dos personas de suma cero son de naturaleza no cooperativa porque la cooperación nunca es una ventaja para ninguno de los jugadores. El pago total siempre es cero y no puede aumentarse con ninguna combinación de estrategias.

En este capítulo, estamos interesados en juegos con dos jugadores. Sin embargo, se establecerán algunos teoremas y definiciones para un número arbitrario, N, de jugadores. En este capítulo estudiaremos los juegos no cooperativos y en el siguiente los cooperativos.

5.2 JUEGOS NO COOPERATIVOS

La forma normal de un juego de dos personas puede representarse como un par de matrices $m \times n$. Una forma más sucinta de expresar lo mismo es una *bimatriz*, es decir, una matriz de pares. Por ejemplo, la bimatriz para el dilema del prisionero es

$$\begin{pmatrix} (-2,-2) & (-10,-1) \\ (-1,-10) & (-5,-5) \end{pmatrix}$$

En general, si C es una bimatriz m × n, entonces cada entrada c_{ij} es un par ordenado de números. Los miembros de este par ordenado son los pagos a los dos jugadores P_1, P_2 (llamado, en analogía con el caso de suma cero, el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente), dado que el jugador de fila juega la fila i, y la columna el jugador juega la columna j. Utilizaremos la notación bimatriz (especialmente para mostrar juegos) y la notación de dos matrices (especialmente para cálculos).

Otros ejemplos:

EJEMPLO 5.1 (BATALLA DE LOS SEXOS). Dos amigos, llamados Norm y Cliff, tienen diferentes gustos en el entretenimiento nocturno. Norm prefiere partidos de lucha profesional, pero a Cliff le gusta las carreras de patines. A ninguno le gusta ir solo a su elección de entretenimiento; de hecho, cada uno preferiría ir con el otro con su elección que ir solo a la suya. En una escala numérica, cada calificación va solo a un evento como un 0, yendo a la elección de su amigo con él como 1, y yendo con su amigo a su propio evento favorito como 5. Consideramos estos números como "calificaciones de felicidad".

En cuanto a esta situación como un juego, vemos que cada jugador tiene dos estrategias puras: W (para "lucha") y R (para "carreras de patines"). Supongamos que anuncian sus decisiones de manera independiente y simultánea cada noche. Esto hace que el juego no coopere; discutiremos la variante cooperativa más adelante. La bimatriz 2 × 2 es por lo tanto

$$\begin{pmatrix} (5,1) & (0,0) \\ (0,0) & (1,5) \end{pmatrix}$$

Hemos designado a Norm como el jugador de fila y a Cliff como el jugador de columna.

Para este juego, las ventajas de la cooperación no son tan sorprendentes como en el juego Dilema del Prisionero. Por supuesto, tanto Norm como Cliff están mejor si eligen la misma actividad: el problema es que no pueden ponerse de acuerdo sobre cuál elegir. Las personas racionales resolverían este problema arrojando una moneda o alternando entre las actividades, pero eso haría que el juego sea cooperativo.

EJEMPLO 5.2 (JUEGO DEL GALLINA). Dos adolescentes con automóviles se encuentran en un tramo solitario de carretera recta. Colocan los automóviles a una milla de distancia, uno frente al otro, y conducen el uno hacia el otro a una alta velocidad. Los automóviles se encuentran en el centro de la carretera. Si uno de los conductores se desvía antes que el otro, el que se desvía se le llama "gallina" y pierde el respeto de sus compañeros. El que no se desvía, por otro lado, gana prestigio. Si ambos se desvían, ninguno es considerado muy valiente, pero ninguno realmente pierde. Si ninguno de los dos se desvía, ambos mueren. Asignamos valores numéricos, de forma un tanto arbitraria, a los diversos resultados. La muerte se valora a -10, el gallina es 0, no se desvía cuando el otro conductor vale 5, se desvía al mismo tiempo que el otro se valora en 3.

Este peligroso juego aparece en las películas *Rebelde sin causa* y *American Graffiti*. La bimatriz para el juego del gallina es

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (0,5) \\ (5,0) & (-10,-10) \end{pmatrix}$$

Los jugadores cooperadores seguramente estarían de acuerdo en que ambos deberían desviarse. Esta conclusión es, sin embargo, altamente dependiente de nuestra elección de los números de pago. Por ejemplo, si (3, 3) en la bi-matriz se reemplaza por (2, 2), entonces los jugadores cooperativos harían mejor lanzando una moneda para decidir quién se desvía y quién no.

5.2.1 ESTRATEGIAS MIXTAS

El concepto de un par de estrategias de equilibrio se introdujo en el Capítulo 1. Las estrategias a las que se refiere esta definición son estrategias puras (dado que las estrategias mixtas aún no se han definido). Sin embargo, no hay ninguna razón por la cual los jugadores en un juego de suma no nula no puedan jugar estrategias mixtas, y no hay razón por la cual no podamos extender la definición de un par de equilibrio para incluirlos.

DEFINICIÓN 5.1. Sea un juego de N-jugadores en forma normal con el conjunto de estrategias X_1, ..., X_N. Una estrategia mixta para el jugador P_i es un vector de probabilidad $\vec{\mathbf{p}} = (p_i\,(x))\; x \in X_i$. La entrada $p_i\,(x)$ se interpreta como la probabilidad de que P_i juegue estrategia $x \in X_i$.

Para un juego de dos jugadores, la notación es más simple. Sean las matrices A y B de $m \times n$ las matrices de pago para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente. Entonces una estrategia mixta para el jugador de la fila es una n-tupla $\vec{\mathbf{p}}$ de probabilidades; una estrategia mixta para el jugador de columna es una n-tupla $\vec{\mathbf{q}}$ de probabilidades.

Usaremos el símbolo M_i para denotar el conjunto de todas las estrategias mixtas para el jugador P_i.

El pago esperado para el jugador P_i debido a las estrategias mixtas $\vec{\mathbf{p}}_1, ..., \vec{\mathbf{p}}_N$, jugadas por los jugadores P_1, ..., P_N, respectivamente es

$$\pi_i\left(\vec{\mathbf{p}}_1, ..., \vec{\mathbf{p}}_N\right) = \sum \left(\mathbf{p}_1(\mathbf{x}_1) \times ... \times \mathbf{p}_N(\mathbf{x}_N)\right) \cdot \pi_i(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_N)$$

donde se toma la suma de todas las elecciones de $x_i \in X_i$, $1 \le i \le N$.

Por lo tanto, el pago esperado es la suma de todas las ganancias debidas a N-tuplas de estrategias puras, cada una ponderada de acuerdo con la probabilidad de que ese N-tupla se juegue.

Si $N = 2$ y A y B son las matrices de pago $m \times n$ para el jugador de fila y el jugador de columna, respectivamente, entonces el pago esperado para el jugador de la fila debido a las estrategias mixtas $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ es

$$\pi_1(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{a}_{ij}$$

El pago esperado para el jugador de la columna es

$$\pi_1(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{q}_j \cdot \mathbf{b}_{ij}$$

En el juego de la Batalla de los Sexos, una estrategia mixta para Norm es una asignación de probabilidades a las dos estrategias puras *W* y *R*. Supongamos que decide lanzar una moneda justa cada tarde y elegir *W* si sale cara, y *R* si cruz. Si, mientras tanto, Cliff siempre elige *R*, entonces la felicidad esperada de Norm es

$$(1/2)\,(0) + (1/2)\,(1) = 1/2,$$

mientras que la felicidad esperada de Cliff es

$$(1/2)\,(0) + (1/2)\,(5) = 5/2.$$

Por otro lado, si Cliff elige *R* con probabilidad 2/3, y *W* con probabilidad 1/3, entonces la felicidad esperada de Norm es 7/6, mientras que la de Cliff es 11/6.

5.2.2 VALORES MAXIMIN

Antes de definir formalmente las *N*-tuplas de equilibrio, discutimos una cantidad llamada "valor maximin", que un jugador puede calcular fácilmente y que le da una estimación pesimista de cuánto pago se puede esperar. Para que la discusión sea definitiva, supongamos que se trata de un juego de dos personas con jugadores P_1 y P_2. El valor máximo, v_1, para P_1 se calcula suponiendo que el otro jugador actuará para minimizar el pago de P_1. Así,

$$\mathbf{v}_1 = \max_{\vec{\mathbf{p}}} \min_{\vec{\mathbf{q}}} \pi_1(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}})$$

donde $\vec{\mathbf{p}}$ y $\vec{\mathbf{q}}$ rango sobre todas las estrategias mixtas para P_1 y P_2, respectivamente.

Ahora, a menos que el juego sea de suma cero, la suposición de que P_2 jugará de esa manera es probablemente falso. De hecho, P_2 actuará para maximizar su recompensa, y esto a menudo no es lo mismo que minimizar el suyo. Sin embargo, v_1 le da a P_1 un límite inferior en su pago (ya que puede jugar para garantizar al menos eso), y es fácil de calcular: simplemente consideramos la matriz de pagos de P_1 como un juego de suma cero; su valor es entonces v_1. Esto es cierto porque, si P_2 juega para minimizar el pago de P_1, ella está jugando para maximizar los puntos negativos de esos pagos. Esta es otra forma de decir que está actuando como si fuera el jugador de columna en el juego matricial. Considere, por ejemplo, la siguiente bimatriz

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (0,1) & (2,0) \\ (1,2) & (-1,-1) & (1,2) \\ (2,-1) & (1,0) & (-1,-1) \end{pmatrix} \tag{29}$$

La matriz de pagos para P_1, el jugador de fila, es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Como juego de matriz, se resuelve fácilmente. Después de eliminar una fila dominada y una columna dominada, la matriz 2 x 2 restante se resuelve para dar

$$v_1 = 1/2.$$

La estrategia óptima (para el juego de matriz) es jugar las filas 1 y 3 ambas con probabilidad 1/2.

El valor maximin del jugador de columna se calcula luego resolviendo el juego de matriz obtenido al transponer su matriz de pagos. Esta transposición es necesaria porque sus pagos son las entradas de la matriz real y no sus negativos. El valor de este juego transpuesto será entonces v_2. Aquí está la matriz que necesitamos para el ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esto también se resuelve fácilmente para dar

$$v_2 = -1/4.$$

La estrategia mixta para P_2 que logra este valor es jugar la columna 1 de la bimatriz con probabilidad 1/4, y la columna 2 con la probabilidad 3/4.

La naturaleza pesimista de estos valores maximin se ilustra por el hecho de que si ambos jugadores juegan de acuerdo con las estrategias mixtas que acabamos de calcular (que se llaman soluciones maximin), entonces ambos reciben pagos esperados superiores a sus valores máximos. De hecho, P_1 en realidad tiene un pago esperado de 3/4, mientras que P_2 tiene un pago esperado de 3/8.

En el caso especial donde el juego es de suma cero, el teorema del minimax implica que los dos valores maximin son negativos el uno del otro.

5.2.3 EQUILIBRIO N-TUPLAS DE ESTRATEGIAS MIXTAS

La definición de equilibrio N-tupla de estrategias mixtas es

DEFINICIÓN 5.2. Sea $\vec{\boldsymbol{\pi}}$ un juego de N personas en forma normal. Una N-tupla de estrategias mixtas $\vec{\mathbf{q}}_1, ..., \vec{\mathbf{q}}_N$ es un *equilibrio N-tupla* si

$$\pi_i\left(\vec{\mathbf{q}}_1, ..., \vec{\mathbf{p}}_i, .., \vec{\mathbf{q}}_N\right) \leq \pi_i\left(\vec{\mathbf{q}}_1, ..., \vec{\mathbf{q}}_N\right)$$

para todo i y para todas las estrategias mixtas $\vec{\mathbf{p}}_i$ para el jugador Pi.

Por lo tanto, si todos los jugadores menos uno, usan las estrategias mixtas de la N-tupla, el que se aparta de ella sufre (o, al menos, no lo hace mejor).

El siguiente teorema se debe a Nash.

TEOREMA 5.1. Sea cualquier juego N-jugadores. Entonces existe al menos un equilibrio N-tupla de estrategias mixtas.

Este resultado es de importancia fundamental. Tenga en cuenta que sería falso si reemplazamos “mixtas” por “pura”.

Las reservas expresadas en el Capítulo 1 sobre la utilidad de las N-tuplas de equilibrio para resolver juegos siguen siendo válidas para las N-tuplas de equilibrio de estrategias mixtas. Sin embargo, todavía son útiles en algunos casos. En general, calcular las *N*-tuplas de equilibrio es difícil. Ahora exploramos un caso simple pero interesante donde se puede hacer.

5.2.4 UN MÉTODO GRÁFICO PARA CALCULAR PARES DE EQUILIBRIO

Ilustramos el método con la Batalla de los Sexos.

Como cada jugador tiene solo dos estrategias puras, las estrategias mixtas para Norm se pueden escribir en la forma $(x, 1 - x)$, donde $0 \leq x \leq 1$. Del mismo modo, las estrategias mixtas para Cliff tienen la forma $(y, 1 - y)$, donde $0 \leq y \leq 1$.

Los pagos esperados, como funciones de x e y, son fáciles de calcular. Tenemos

$$\pi_1(x, y) = 5x \cdot y + (1-x) \cdot (1-y) = 6 \cdot x \cdot y - x - y + 1,$$

donde hemos abreviado $\pi_1((x, 1 - x), (y, 1 - y))$ por $\pi_1(x, y)$. De manera similar,

$$\pi_2(x, y) = x \cdot y + 5 \cdot (1-x) \cdot (1-y) = 6 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x - 5 \cdot y + 5.$$

Para encontrar un par de equilibrio, necesitamos encontrar un par (x^*, y^*) para que $\pi_1(x^*, y^*)$ sea un máximo sobre $\pi_1(x, y^*)$ y $\pi_2(x^*, y^*)$ es un máximo de $\pi_2(x^*, y)$. La idea es representar gráficamente los siguientes dos conjuntos:

$$A = ((x, y): \pi_1(x, y) \text{ es un máximo sobre } x, \text{ con y fijo}\},$$

y

$$B = \{(x, y): \pi_2(x, y) \text{ es un máximo sobre } y, \text{ con } x \text{ fijo}\}.$$

Los puntos de intersección de estos conjuntos serán precisamente los pares de equilibrio.

Primero, reescribimos las funciones de pago como

$$\pi_1(x, y) = (6y - 1) \cdot x - y + 1,$$

y

$$\pi_2(x, y) = (6x - 5) \cdot y - 5 \cdot x + 5.$$

De la fórmula para $\pi_1(x, y)$, vemos que sí $y < 1/6$, entonces $x = 0$ es un máximo (dado que el coeficiente de x es negativo); si $y > 1/6$, $x = 1$ es el máximo, y, si $y = 1/6$, cualquier x da el máximo. Para $\pi_2(x, y)$, vemos que si $x < 5/6$, $y = 0$ es el máximo; si $x > 5/6$, y = 1 es el máximo; y, si $x = 5/6$, cualquier y es el máximo. Los conjuntos A y B se representan en la Fig. 18. El conjunto A se indica con una línea continua, el conjunto B con una línea discontinua y los tres pares de equilibrio con un círculo. Son ((0,1), (0,1)), ((5/6, 1/6), (1/6, 5/6)) y ((1,0), (1, 0)). Norm naturalmente prefiere el tercero de estos (ya que su pago es 5), y Cliff prefiere el primero. El segundo da a cada uno de ellos 5/6, que es menos de lo que cada uno recibe en los otros dos. De hecho, 5/6 es el valor máximo para ambos jugadores.

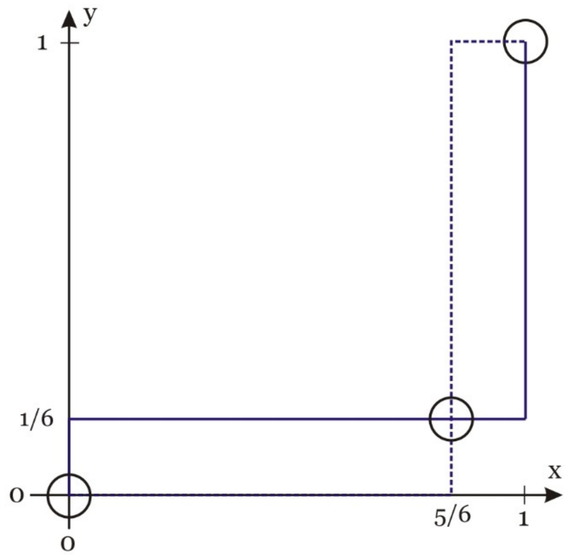

Fig. 18 Pares de equilibrio para Norm y Cliff

Otro ejemplo es

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (0,5) \\ (5,0) & (-10,-10) \end{pmatrix} \tag{30}$$

Para este juego,

$$\pi_1 (x, y) = 4 \cdot x \cdot y - x \cdot (1- y) + (1 - x) \cdot (1 - y) = (6y - 2) \cdot x - y + 1,$$

mientras

$$\pi_2 (x, y) = - 4 \cdot x \cdot y - x \cdot (1- y) + (1 \cdot - x) \cdot y = (-4 \cdot x + 1) \cdot y - x.$$

Los dos conjuntos se muestran en la Fig. 19. Vemos que el único par de equilibrio es «1 / 4,3 / 4), (1/3, 2/3)). Jugando de acuerdo con estas estrategias mixtas, el jugador de la fila tiene un pago esperado de 2/3, y el jugador de la columna tiene un pago esperado de -1 / 4.

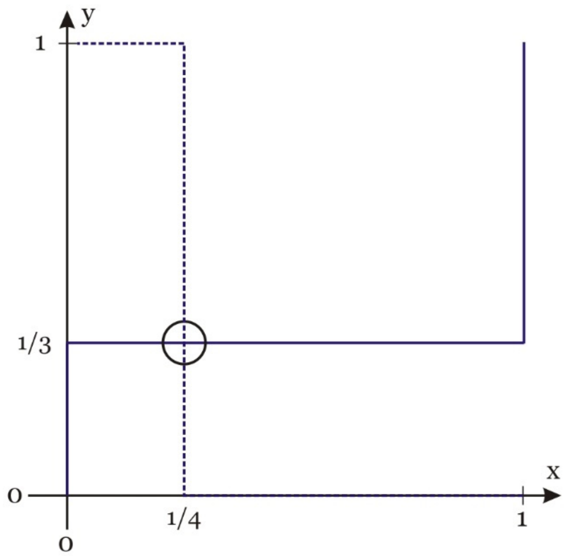

Fig. 19 Pares de equilibrio para la bimatriz (30)

5.3 CONCEPTOS DE SOLUCIÓN PARA JUEGOS NO COOPERATIVOS

El análisis de juegos no cooperativos es difícil porque a menudo depende de consideraciones no matemáticas sobre los jugadores. Como resultado, la mayoría de las conclusiones están sujetas a un desacuerdo honesto. En este sentido, estos juegos pueden estar más cerca de la vida real que otras partes de la teoría de juegos. Ilustramos esto discutiendo varios ejemplos. Antes de hacerlo, ampliaremos nuestro stock de herramientas analíticas haciendo algunas definiciones. El primero de estos es el siguiente:

DEFINICIÓN 5.3. Sea $\vec{\pi}$ un juego de dos personas en forma normal. El conjunto bidimensional

$$\Pi = \left\{ \left(\pi_1(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}), \pi_1(\vec{\mathbf{p}}, \vec{\mathbf{q}}) \right) : \vec{\mathbf{p}} \in \mathbf{M}_1, \vec{\mathbf{q}} \in \mathbf{M}_2 \right\}$$

se llama *región de pago no cooperativa*. Los puntos en Π se llaman *pares de pago*.

En la región de pago se puede trazar en un sistema de coordenadas cartesianas, donde el eje horizontal representa π_1 y el eje vertical representa π_2. La idea es considerar todos los pares posibles de estrategias mixtas y trazar el par de pagos correspondiente para cada uno. Una cosa que se puede leer en un dibujo de una región de pago es la relación de *dominio* entre los pares de pago. Esto se define por lo siguiente:

DEFINICIÓN 5.4. Sea (u, v) y (u', v') dos pares de pago. Entonces (u, v) *domina* (u', v') si

$$u \geq u' \text{ y } v \geq v'.$$

En la región de pago, el par de pago dominante está arriba y a la derecha ("noreste") del dominado. Para Batalla de los Sexos, la región de pago se muestra en la Fig. 20. Está delimitado por dos segmentos de línea y la curva de (1,5) a (5,1). (Esta curva es una parte de una parábola). Las tres entradas (distintas) en la bimatriz son las coordenadas de puntos en la región que resultan de jugar estrategias puras. Los tres pares de estrategias mixtas de equilibrio resultan en los puntos marcados con círculos pequeños.

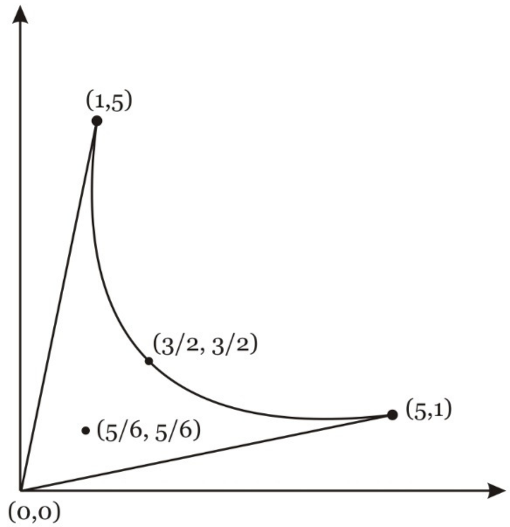

Fig. 20 Región de compensación para la Batalla de los Sexos

Nuestra segunda definición es la siguiente:

DEFINICIÓN 5.5. Sean tanto $(\vec{\mathbf{p}},\vec{\mathbf{q}})$ como $(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{s}})$ pares de equilibrio de estrategias mixtas para un juego de dos personas. Entonces

(1) Se dice que son *intercambiables* si $(\vec{\mathbf{p}},\vec{\mathbf{q}})$ y $(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{s}})$ también son pares de equilibrio;

(2) Se dice que son *equivalentes* si

$$\pi_i(\vec{\mathbf{p}},\vec{\mathbf{q}}) = \pi_i(\vec{\mathbf{r}},\vec{\mathbf{s}}),$$

Para $i = 1, 2$.

El teorema 2.6 muestra que en un juego de suma cero, todos los pares de equilibrio de las estrategias mixtas son intercambiables y equivalentes. Esto no siempre es cierto para los juegos que no son de suma cero. A veces se dice que un juego en el que dos pares de equilibrio son intercambiables y equivalentes se puede *resolver en el sentido de Nash*. Dimos un ejemplo [bimatriz (30)] de un juego en el que solo hay un par de equilibrio. Tal juego es ciertamente solucionable en el sentido de Nash porque el único par de equilibrio es intercambiable y equivalente consigo mismo.

5.3.1 BATALLA DE LOS SEXOS

Intentemos utilizar las ideas desarrolladas hasta ahora para decir algo sobre cómo Norm y Cliff podrían jugar realmente su juego no cooperativo. Tomaremos el punto de vista de Norm, pero esto no es una limitación porque el juego es realmente simétrico. Primero observamos que los pares de equilibrio no son intercambiables ni equivalentes. Por lo tanto, la Batalla de los Sexos no se puede resolver en el sentido de Nash.

En la Fig. 20, observamos que casi cada par de pagos está dominado por algún otro par. Las únicas excepciones son (1, 5), (5, 1) y los puntos en la curva límite en la vecindad de (3/2, 3/2). Los pares de pago que no están dominados por ningún otro par se dice que son *óptimos de Pareto*. Este concepto se discutirá más adelante en relación con los juegos cooperativos. Está claro que los jugadores cooperativos racionales nunca jugarían para que su par de pago no sea un óptimo de Pareto.

Enumeramos algunas posibles estrategias mixtas y comentemos sobre ellas. Los primeros tres enumerados son las estrategias de Norm en los pares de equilibrio de estrategias mixtas. Estos siempre son de gran interés porque es natural pensar que solo un par de equilibrio tiene la estabilidad para persistir indefinidamente.

(1) Norm podría jugar la estrategia pura W si cree que Cliff eventualmente decidirá que nunca jugará otra cosa; basado en esta decisión, el único movimiento racional de Cliff es jugar W. El éxito de este escenario requiere una diferencia en el grado de terquedad entre Norm y Cliff. De lo contrario, por simetría, Cliff podría persistir en jugar R. Esta combinación de W para Norm y R para Cliff resulta el pago más bajo posible para ambos.

(2) Probablemente Norm no debería jugar (5/6, 1/6) (su estrategia en el segundo par de equilibrio). Cliff podría ganar 5/6 jugando W o R; si decide elegir R, el pago de Norm se reduciría a 1/6.

(3) La estrategia *R* es una opción interesante para Norm. Si Cliff creía que este patrón de juego continuaría, podría responder con *R*. El resultado sería excelente para Cliff, y no malo para Norm. La simetría, sin embargo, entra en esto. Si *R* es una buena idea para Norm, ¿no es buena idea para Cliff? Ese sería un giro bastante cómico de los acontecimientos, pero la posibilidad de que lo haga pone en duda la idea.

(4) El valor máximo para cada jugador es 5/6. Norm puede asegurarse al menos eso jugando (1/6, 5/6). De hecho, si juega de esa manera, su recompensa es la misma sin importar cómo juegue Cliff. Tal vez esto es lo mejor que puede hacer.

La conclusión a la que llegamos no es muy satisfactoria; es imposible pensar que sea definitivo. Supongamos, por ejemplo, que Norm sigue nuestros consejos y juga (1/6, 5/6). Si Cliff ve lo que hace su amigo, puede, jugando *R*, obtener un pago esperado de 25/6, mucho mayor que el pago de Norm.

5.3.2 EL DILEMA DEL PRISIONERO

El valor maximin para cada jugador en el Dilema del Prisionero es -5, y solo hay un par de estrategias mixtas de equilibrio: ((0, 1), (0, 1)). La recompensa para ambos jugadores es -5 para este par de equilibrio. Como se observó anteriormente, este juego, como cualquier juego con un solo par de equilibrio, se puede resolver en el sentido de Nash. Ahora, si el jugador de fila juega *D* (la segunda fila), el jugador de columna no tiene opción razonable; él debe jugar *D* también. Por lo tanto, es muy probable que se juegue el par de pagos (*D*, *D*). Esto es cierto a pesar de que no es óptimo Pareto [ya que (*D*, *D*) está dominado por (*C*, *C*)]. Tenga en cuenta también que las soluciones maximin son las mismas que el par de equilibrio.

Nuestra conclusión sobre el Dilema del Prisionero es difícil de aceptar porque queremos que los dos prisioneros actúen más como seres humanos decentes e inteligentes. Si lo hacen, el par de pagos seguramente será (-2, -2). El problema es que el juego se nos presenta como no cooperativo. La variante cooperativa es diferente y tiene una solución diferente. Hay una tercera forma de ver esto que discutiremos en breve.

5.3.3 OTRO JUEGO

El juego dado en bimatriz (30) demostró tener solo un par de estrategias mixtas de equilibrio: ({1/4, 3/4), (1/3, 2/3)). Por lo tanto, es solucionable en el sentido de Nash. El valor máximo para el jugador de fila es 2/3, y para el jugador de columna, -1. Ahora, ¿es razonable que el jugador de fila juegue

(1/4, 3/4) (su estrategia mixta en el par de equilibrio)? Si lo hace, el jugador de columna gana -1/4 jugando en cualquier columna. Sin embargo, el pago esperado del jugador de fila es 1 si el jugador de columna juega en la columna 1, y solo 1/2 si ella juega en la columna 2. Este último pago es menor de lo que el jugador de fila puede garantizarse jugando de acuerdo con la solución maximin. Es fácil verificar que, si ambos juegan de acuerdo con las soluciones maximin, el pago real del jugador de la columna es -1/6, que es mayor que el pago de -1/4 del par de equilibrio. Por lo tanto, es probable que si el jugador de la fila juega (1/4, 3/4), el jugador de columna juegue con la segunda columna para forzarlo a cambiar a la solución máxima.

5.3.4 SUPERJUEGOS

Pensemos sobre el Dilema del Prisionero de una manera diferente. En primer lugar, hay muchas situaciones de conflicto en las que existe un dilema similar al que enfrentan los prisioneros. Estos van desde los que involucran relaciones personales entre dos personas y otros que involucran grandes cuestiones militares que pueden determinar la supervivencia de la civilización. Las características comunes a todos estos juegos son:

- Ambos jugadores funcionan bien si cooperan entre ellos.
- Si un jugador juega la estrategia cooperativa mientras que el otro la traiciona jugando la estrategia de desertificación, entonces el desertor lo hace muy bien y el cooperador lo hace mal.
- Ninguno de los jugadores realmente confía en el otro.

Discutimos dos ejemplos. Primero, está el Juego Bomba-H. En el período inmediatamente posterior a la Segunda Guerra Mundial, tanto los Estados Unidos como la Unión Soviética tenían los recursos científicos e industriales para desarrollar la bomba de fusión. Se sabía que tal arma sería inmensamente más destructiva que incluso las bombas atómicas que Estados Unidos acababa de arrojar sobre dos ciudades japonesas. Para cada uno de los países, la elección fue entre construir la bomba H (que *deserta* de la alianza de guerra entre ellos) o no construirla (seguir *cooperando*). Para cada país (pero más para la Unión Soviética), el costo de la deserción sería muy grande. Los recursos dedicados al proyecto no estarían disponibles para mejorar los niveles de vida de las personas; además, las sociedades seguirían distorsionándose por el papel dominante desempeñado por consideraciones militares. Además, si ambos países desertasen, existiría una posibilidad real de una guerra nuclear que podría hacer retroceder a la raza humana a la Edad de Piedra. Por otro lado, si un país construye la bomba y el otro no, el desertor tendrá una superioridad tan enorme en la fuerza militar que la propia soberanía del cooperador correría peligro. Por supuesto, ambos países eligieron la deserción como la solución al juego.

Para un ejemplo menos trascendental, considere dos personas, Robert y Francesca, que están involucradas sentimentalmente. Cada uno tiene la opción de permanecer fiel al otro (*cooperar*) o salir con alguien más a escondidas (*desertar*). Si uno falla y el otro coopera, el desertor estará contento (por un tiempo, al menos). Después de todo, la variedad es la sal de la vida. Por otro lado, el cooperador se siente traicionado y miserable. Si ambos desertan, cada uno se siente bastante bien por un tiempo, pero el nivel de tensión entre ellos les quita su alegría, y la probabilidad de que la relación se rompa es alta. Esto pondría a ambos muy tristes. Si este juego de citas se considera no cooperativo, es probable que ambos deserten. Por otro lado, si confían lo suficiente el uno en el otro, el juego se vuelve cooperativo y es probable que ambos se mantengan fieles. Por lo tanto, vemos que la teoría de juegos es relevante para el romance.

En general, decimos que un juego de bimatriz es del tipo Dilema del Prisionero si tiene la forma

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{a},\mathbf{a}) & (\mathbf{b},\mathbf{c}) \\ (\mathbf{c},\mathbf{b}) & (\mathbf{d},\mathbf{d}) \end{pmatrix} \tag{31}$$

dónde

$$e > a > d > b \text{ y } a > (b + e) / 2.$$

Estas desigualdades dicen que la cooperación mutua (fila 1, columna 1) es mejor que la deserción mutua (fila 2, columna 2) y que, si temes que tu oponente va a desertar, también es mejor desertar. La última desigualdad dice que, si los jugadores pueden confiar el uno en el otro, la mejor manera de jugar es cooperar. Cualquier juego de bimatriz que cumpla estas condiciones se denominará Dilema del Prisionero. Otro ejemplo es

$$\begin{pmatrix} (\mathbf{3},\mathbf{3}) & (\mathbf{0},\mathbf{5}) \\ (\mathbf{5},\mathbf{0}) & (\mathbf{1},\mathbf{1}) \end{pmatrix}$$

Algunas de las situaciones de conflicto modeladas por el Dilema del Prisionero son tales que solo pueden suceder una vez; otros pueden ocurrir repetidamente.

Nuestra discusión sobre Dilema del Prisionero y otros juegos no cooperativos es correcta si asumimos que el juego se juega solo una vez, o que, si se juega repetidamente, ambos jugadores deciden sobre una estrategia mixta a la que se pegan. Supongamos, sin embargo, que pensamos en un *superjuego* que consiste en un cierto número de repeticiones de un juego no cooperativo. Cada una de las jugadas separadas del juego se llama *iteración* y un jugador puede usar diferentes estrategias en diferentes iteraciones. En particular, la estrategia de un jugador puede depender de movimientos anteriores. Una forma de utilizar esta idea es que un jugador calcule la estrategia mixta de su oponente al hacer un seguimiento de la frecuencia con la que elige sus diversas estrategias puras. Luego podría jugar para hacer lo mejor posible contra esta estrategia mixta (estimada). Por ejemplo, si el oponente en las primeras 100 iteraciones jugó su primera estrategia pura 27 veces, su segunda estrategia pura 39 veces, su tercera nunca, y su cuarta 34 veces, entonces puede estimar su estrategia mixta como (.27, .39, 0, .34).

El superjuego es tan poco cooperativo como el original, por lo que la cooperación en el verdadero sentido todavía no está permitida, pero ahora es posible una forma de comunicación. Para aclarar esto, imagine 500 iteraciones del Dilema del Prisionero. La forma extensa de este superjuego es enorme, pero realmente bastante simple en estructura. Cada vértice no terminal tiene exactamente dos hijos. (Un árbol con esta propiedad se llama *binario*.) Podemos imaginarlo de la siguiente manera. Comience con el árbol para el Dilema del Prisionero. Usa cada uno de sus vértices terminales como la raíz de otra copia del árbol para el dilema del prisionero. Repita este proceso tantas veces como iteraciones en el superjuego. Hay algunos conjuntos de información en el árbol de superjuegos porque un jugador no conoce el movimiento de su oponente en la misma iteración. Sin embargo, él sabe los movimientos realizados en iteraciones previas. Tal información podría usarse de muchas maneras diferentes. Por ejemplo, un jugador podría usar una estrategia en la que "apunta" su disposición a cooperar jugando C varias veces seguidas. Si el otro jugador se da cuenta, ambos jugarían C y les iría bien. Si el otro jugador se niega a comenzar a cooperar, entonces el primer jugador puede comenzar a jugar D (tal vez enviando la señal de cooperación nuevamente más tarde). Por supuesto, si el oponente nunca juega nada más que D, nuestro jugador lo hace mal en las iteraciones en las que juega C. El punto es, sin embargo, que hay relativamente pocas de estas en comparación con el número total de iteraciones.

En general, supongamos que consideramos un superjuego que consiste en M iteraciones de cierto juego (llamado el *juego base*). Hay dos tipos de estrategias de superjuegos. Hay aquellos que tienen en cuenta los movimientos en las iteraciones anteriores, y los que no. Llamamos al primer tipo *adaptativo* y al segundo tipo *olvidadizo*. Por ejemplo, si el juego base es el Dilema del Prisionero, las siguientes son estrategias olvidadizas:

- Coopera siempre
- Desertar siempre.
- Cooperar con probabilidad .5, desertar con probabilidad .5.

Aquí hay una estrategia de adaptación para el mismo juego: cooperar en la primera iteración; después de que se hayan jugado j iteraciones, calcule p_j como la proporción de las veces en estas primeras j iteraciones en las que el oponente ha cooperado; en la iteración j+1, elija al azar cooperar con probabilidad p_j, y desertar con probabilidad 1-p_j. En esta estrategia, el oponente es recompensado por cooperar frecuentemente y ser castigado por desertar con frecuencia.

Otra forma de ver las estrategias de superjuego es la siguiente. Si $1 \leq j \leq M$, la estrategia que se utilizará en la iteración j puede, en general, ser una función de los movimientos realizados en las primeras j - 1 iteraciones. Una estrategia de superjuego es olvidadiza si la estrategia utilizada en la j-ésima iteración es realmente independiente de las jugadas anteriores.

Se han dado algunos nombres extravagantes a las estrategias de los superjuegos. La *Regla de Oro* es la estrategia de cooperar siempre. La Regla de Hierro es la estrategia de nunca cooperar. *Tal para Cual* es la estrategia de hacer lo que sea que tu oponente hizo en la iteración anterior (y cooperar en la primera). En los últimos años, se han celebrado torneos en los que varias estrategias de superjuegos han competido entre sí. Estas estrategias fueron enviadas por teóricos del juego y los torneos se organizaron en forma que cada competidor juega uno contra otro para que cada estrategia se enfrentara a cada otra estrategia en un superjuego con Dilema de Prisionero como el juego base. El pago total se sumó para cada estrategia. El ganador consecuente fue Tal para Cual. Esto es interesante en parte por la simplicidad de la estrategia y también porque la gente parece utilizarla instintivamente en muchas situaciones de conflicto. A pesar de que Tal para Cual ganó los torneos al acumular el mayor pago total frente a las otras estrategias, ¡nunca puede obtener más ganancias en ningún superjuego individual!

Ha habido un gran interés en estos súper juegos por parte de personas interesadas en una variedad de campos, incluidos la sociología y la biología. Se han buscado explicaciones para la evolución del comportamiento cooperativo en situaciones donde es difícil explicarlo de otra manera. Estos incluyen la evolución biológica y la evolución de los comportamientos en las sociedades humanas.

En particular, se discute el problema de cómo una población de individuos que actúan de manera completamente egoísta puede evolucionar a un estado en el que la cooperación es la regla.

6 JUEGOS DE SUMA NO NULA COOPERATIVOS

6.1 INTRODUCCIÓN

En la teoría discutida en este capítulo, los jugadores pueden hacer acuerdos vinculantes sobre qué estrategias jugar. No comparten pagos, y no hay pagos laterales de uno a otro. En muchos casos, la restricción de compartir pagos no se debe a las reglas del juego, sino que surge de la naturaleza de los pagos. En Batalla de los Sexos, no tiene sentido que uno de los jugadores dé al otro algunas de sus "valoraciones de felicidad". En el dilema del prisionero, la ley exige que cada prisionero cumpla su propio tiempo de condena. El otro prisionero no puede asumir la condena del otro. En el próximo capítulo, estudiaremos juegos en los que se pueden compartir pagos.

Consideremos batalla de los sexos como un juego cooperativo. Hay una manera obvia de que dos jugadores cooperantes decidieran jugar el juego. Cada noche, arrojaban una moneda decente y ambos iban a la lucha libre si salía cara, y los dos iban a las carreras de patines si salía cruz. De esta forma, la rentabilidad esperada de cada uno sería 3, mucho más alta de lo que cabría esperar en la variante no cooperativa. En Dilema del Prisionero, la forma obvia de jugar cooperativamente es que los jugadores hagan un acuerdo vinculante entre ellos para cooperar. En el juego del gallina, los jugadores pueden estar de acuerdo en que ambos se apartan, o pueden acordar lanzar una moneda para decidir quién se desvía y quién no. En cada uno de estos ejemplos se usa una estrategia conjunta. La definición es la siguiente:

DEFINICIÓN 5.6. Sea $\vec{\pi}$ un juego de dos personas con matrices de pago A y B $m \times n$. Una *estrategia conjunta* es una matriz $m \times n$ de probabilidad $P = (p_{ij})$. Así,

$$p_{ij} \geq 0, \text{ para } 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n,$$

y

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$$

Por lo tanto, la estrategia conjunta asigna una probabilidad a cada par de estrategias puras. La rentabilidad esperada para el jugador de la fila debido a la estrategia conjunta P es

$$\pi_i(P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot a_{ij}$$

El pago esperado $\pi_2(P)$ para el jugador de columna es el mismo excepto que a_{ij} se reemplaza por b_{ij}.

Por ejemplo, considere la bimatriz

$$\begin{pmatrix} (2,0) & (-1,1) & (0.3) \\ (-2,-1) & (3,-1) & (0,2) \end{pmatrix} \tag{32}$$

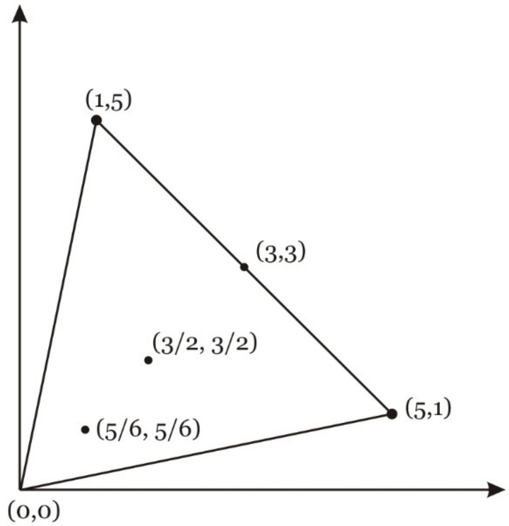

Fig. 21. Región cooperativa de pago para Batalla de los Sexos

Hay seis pares de estrategias puras. Supongamos que los jugadores acuerdan jugar de acuerdo con la estrategia conjunta descrita en la matriz

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1/8} & \mathbf{0} & \mathbf{1/3} \\ \mathbf{1/4} & \mathbf{5/24} & \mathbf{1/12} \end{pmatrix} \tag{33}$$

Por lo tanto, jugarán el par de estrategias puras (fila 2, columna 1) con probabilidad 1/4, y el par de estrategias puras (fila 1, columna 3) con probabilidad 1/3. Bajo esta estrategia conjunta, el pago esperado para el jugador de la fila es

$$(1/8)\ (2) + (0)\ (-1) + (1/3)\ (0) + (1/4)\ (-2) + (5/24)\ (3) + (1/12)\ (0) = 3/8,$$

y para el jugador de columna es 17/24.

La región de pago cooperativo es el conjunto

$$\{(\pi_1(P), \pi_2(P)): P \text{ es una estrategia conjunta}\}.$$

Es un conjunto más grande que su contraparte no cooperativa. Por lo tanto, hay más pares de pagos que pueden obtener los jugadores si cooperan. La Fig. 21 muestra la región de pago cooperativo para Batalla de los Sexos. Debe ser comparado con la Fig. 20.

Las regiones de pago cooperativo son siempre *conjuntos convexos* (se definirán más adelante); también son cerrados[3] y acotados. Sus vértices son puntos cuyos pares de coordenadas se encuentran entre las entradas en la bimatriz.

Los jugadores en un juego cooperativo tienen la tarea de llegar a un acuerdo sobre qué estrategia conjunta adoptar. Hay dos criterios que seguramente serían importantes para ellos. Estos son:

• El par de pago resultante de la estrategia conjunta que han acordado debe ser óptimo de Pareto.

• Para cada jugador, la ganancia de la estrategia conjunta debe ser al menos tan grande como el valor máximo.

Estas consideraciones conducen a una definición.

---

[3] En términos generales, esto significa que contienen sus segmentos de línea acotadas

DEFINICIÓN 5.7. El *conjunto de negociación* para un juego cooperativo de dos personas es el conjunto de todos los pares de pago óptimos de Pareto (u, v) tales que

$$u \geq v_1 \text{ y } v \geq v_2.$$

donde v_1 y v_2 son los valores maximin.

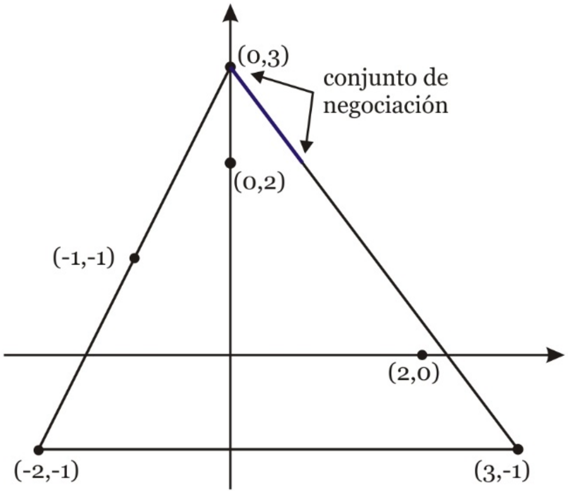

Fig. 22. Región de pago para bimatriz (5.4)

En la Fig. 21, el conjunto de negociación es el segmento de línea desde (1,5) a (5,1). El problema para los jugadores es acordar un par de pago en el conjunto de negociación. En la Batalla de los Sexos, la simetría del juego sugiere fuertemente el par de pago (3,3), el punto medio del segmento de línea. La Fig. 22 muestra la región de pago cooperativo para bimatriz (30). Los valores maximin son $v_1 = 0$, $v_2 = 2$. Por lo tanto, el conjunto de negociación es el segmento de línea desde (0,3) a (3/4, 2). El jugador de fila prefiere un par de pago lo más a la derecha posible, mientras que el jugador de columna prefiere uno tan arriba como sea posible. Negocian para acordar uno entre los extremos.

6.2 ACUERDOS DE NEGOCIACIÓN DE NASH

La teoría que presentamos ahora fue desarrollada por Nash. Es un intento de establecer un método justo para decidir qué par de pagos en el conjunto de negociación se debe acordar. La idea es probar la existencia de un procedimiento de arbitraje Ψ que, cuando se presenta con una región de pago P y un punto status quo $(u_o, v_o) \in P$, producirá un par de pago (el par de arbitraje) que es justo para ambos jugadores. El punto de *statu quo* suele ser el par de valores maximin. (Mencionaremos otras opciones más adelante). Es el par de pagos que los jugadores deben aceptar si rechazan el par de pagos sugerido por el procedimiento de arbitraje. Se puede pensar que el procedimiento de arbitraje Ψ ocupa el lugar de un árbitro humano neutral al que se llama para resolver un conflicto. Se requiere que satisfaga los seis *axiomas de Nash*, que pueden considerarse como los principios de equidad y coherencia que podrían guiar a un árbitro humano. No solo se probará que existe un procedimiento de arbitraje, sino que es único. Este hecho le da mucha credibilidad a la idea.

Denominamos par de arbitraje correspondiente a la región de pago P y el punto de *status quo* (u_o, v_o) por $\Psi(P, (u_o, v_o)) = (u^*, v^*)$. Con esta notación, los axiomas de Nash son:

(1) [*Racionalidad individual*] $u^* \geq u_o$ y $v^* \geq v_o$.

(2) [*Optimización de Pareto*] (u^*, v^*) es un óptimo Pareto.

(3) [*Viabilidad*] $(u^*, v^*) \in P$.

(4) [*Independencia de alternativas irrelevantes*] Si P' es una región de pago contenida en P y tanto (u_o, v_o) como (u^*, v^*) están en P', entonces

$$\Psi(\mathrm{P}', (u_o, v_o)) = (u^*, v^*).$$

(5) [*Invariancia bajo transformaciones lineales*] Supongamos que P' se obtiene de P mediante la transformación lineal

$$u' = a \cdot u + b,\ v' = c \cdot v + d \text{ donde } a, e > 0.$$

Entonces

$$\Psi(\mathrm{P}', (a \cdot u_o + b, c \cdot v_o + \mathrm{d})) = (a \cdot u^* + \mathrm{b}, c \cdot v^* + \mathrm{d}).$$

(6) [*Simetría*] Supongamos que P es simétrica (es decir, $(u, v) \in P$ si y solo si $(v, u) \in P$), y que $u_o = v_o$. Entonces $u^* = v^*$.

Los axiomas (1) y (2) dicen que el par de arbitraje está en el conjunto de negociación. Axioma (3) simplemente dice que se puede lograr el par de arbitraje. Axioma (4) dice que si un juego diferente tiene una región de pago menor y el mismo punto de status quo y si esta región de pago menor contiene el par de arbitraje (u^*, v^*), entonces el procedimiento de arbitraje debería sugerir el mismo par de pago para el otro juego Axioma (5) dice, en parte, que si hay un cambio en las unidades en que se calculan los pagos, entonces no hay un cambio esencial en el par de arbitraje. Axioma (6) dice que, si los jugadores tienen roles simétricos en lo que respecta tanto a la región de pago como al punto de status quo, entonces deberían obtener el mismo beneficio.

6.3 CONJUNTOS CONVEXOS

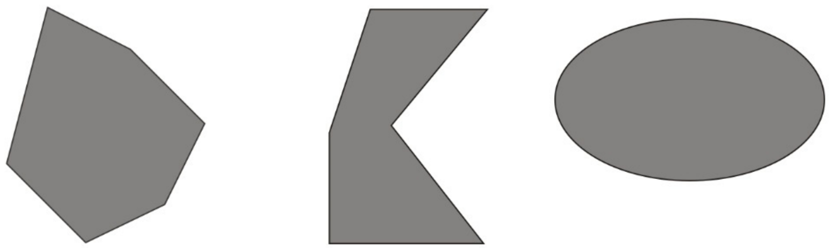

Fig. 23 Conjuntos uno no convexo y dos convexos

Antes de enunciar el teorema de que existe un procedimiento único de arbitraje que satisface los axiomas de Nash, debemos analizar una pequeña parte de la teoría de la convexidad.

DEFINICIÓN 5.8. Se dice que un subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ es *convexo* si, para cada $\vec{\mathbf{x}}$ y $\vec{\mathbf{y}}$ en S, y cada número t con $0 \le t \le 1$, tenemos

$$\mathbf{t} \cdot \vec{\mathbf{x}} + (\mathbf{1} - \mathbf{t}) \cdot \vec{\mathbf{y}} \in \mathbf{S}$$

En palabras, esta definición dice que *S* es convexo si cada segmento de línea cuyos puntos finales están en *S* se encuentra completamente en *S*. En la Fig. 23, dos de los conjuntos son convexos y el otro no.

Para estudiar cómo se construye un conjunto convexo a partir de un conjunto más pequeño, hacemos las siguientes definiciones:

DEFINICIÓN 5.9. Sea $F = \{\vec{\mathbf{x}}_1, ..., \vec{\mathbf{x}}_k\}$ un subconjunto finito en $\mathbb{R}^n$. Entonces

$$\sum_{i=1}^{k} \mathbf{t}_i \cdot \vec{\mathbf{x}}_i$$

es una *combinación convexa* de *F* cuando $t_1, \ldots, t_k$ son números no negativos cuya suma es 1.

Vemos, por inducción, que, si *S* es convexo, entonces cualquier combinación convexa de puntos de *S* está en *S*.

DEFINICIÓN 5.10. Sea *A* ser cualquier subconjunto de $\mathbb{R}^n$. El *casco convexo* de *A*, denotado co(*A*), se define como el conjunto de todas las combinaciones convexas de subconjuntos finitos de *A*.

Se demuestra que el co(*A*) es realmente convexo. Se sigue que cada conjunto convexo que contiene *A* también contiene co(*A*).

Por ejemplo, un triángulo es el casco convexo de sus vértices; el segundo conjunto convexo en la Fig. 23 es el casco convexo de sus seis vértices; el primer conjunto convexo en la Fig. 23 es el casco convexo de la elipse que lo delimita.

Los coeficientes t_i en la definición de combinación convexa tienen las propiedades de probabilidades. De hecho, tenemos lo siguiente:

TEOREMA 5.2. Sea $\vec{\pi}$ un juego de dos personas con $m \times n$ bimatriz de pago C. Luego, la región de pago cooperativo es el casco convexo del conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ cuyas coordenadas son las entradas en la bimatriz.

El axioma de Nash (6) se refiere a las regiones simétricas de pago. Tenemos

DEFINICIÓN 5.11. Se dice que un subconjunto S de $\mathbb{R}^2$ es simétrico si (v, u) está en S cuando (u, v) está en S.

Por lo tanto, un conjunto es simétrico si es idéntico a su reflejo en la diagonal $x = y$. La Fig. 24 muestra dos conjuntos simétricos, uno convexo y el otro no.

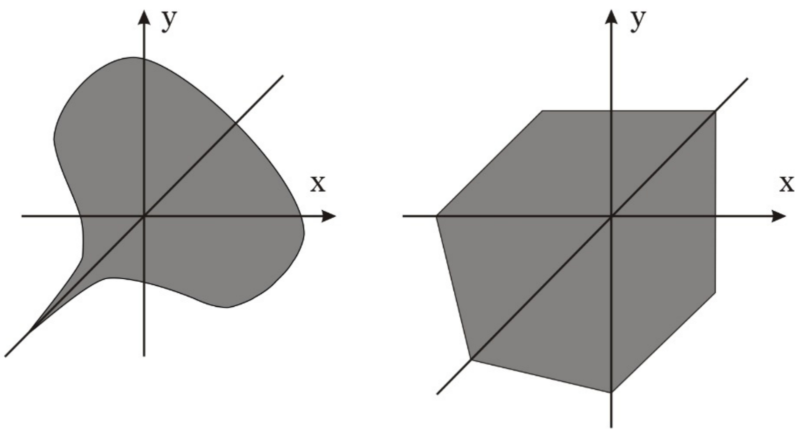

Fig. 24 Dos conjuntos simétricos

DEFINICIÓN 5.12. Sea A ser un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. El *casco convexo simétrico* se define como el casco convexo del conjunto

$$A \cup \{(v, u) : (u, v) \in A\}.$$

Se denota sco(A).

Por lo tanto, el casco simétrico convexo se forma reflejando A en la diagonal y luego formando el casco convexo de la unión de A y su reflejo. Se demuestra que el resultado de este proceso es realmente simétrico. Lo siguiente es necesario más tarde:

LEMA 5.3. Sea A ser un subconjunto de $\mathbb{R}^2$ sea un número tal que

$$u + v \leq k,$$

para cada punto (u, v) en A. Entonces la misma desigualdad se cumple para cada punto en el casco convexo simétrico de A.

6.4 TEOREMA DE NASH

TEOREMA 5.4. Existe un procedimiento único de arbitraje Ψ que satisface los axiomas de Nash.

LEMA 5.5. Sea P una región de pago y $(u_o, v_o) \in P$. Suponga que existe un punto $(u, v) \in P$ con

$$u > u_o, v > v_o,$$

y deje que K sea el conjunto de todos $(u, v) \in P$ que satisfagan estas desigualdades. Definir, en K,

$$g\,(u, v) = (u - u_{o})\,(v - v_{o}).$$

Entonces g alcanza su máximo en K en uno y solo un punto.

Para su demostración ver apéndice

6.5 El cálculo de pares de Arbitraje

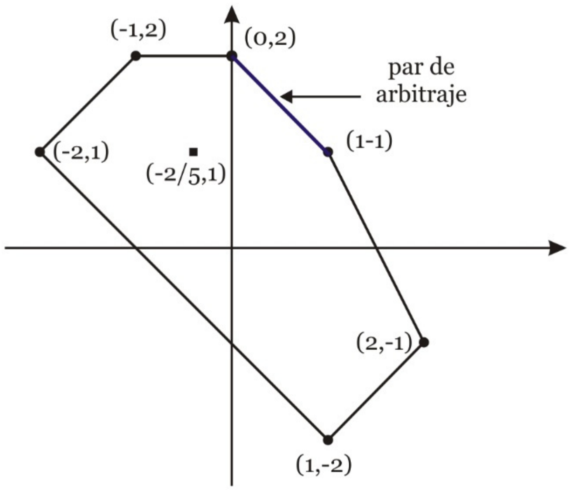

Fig. 25 Región de pago cooperativo para bimatriz (34)

La demostración del Teorema 5.4 (ver apéndices) en realidad contiene un algoritmo para calcular el par de arbitraje. Ilustramos el cálculo con algunos ejemplos. Primero, echemos un vistazo a la Batalla de los Sexos. La región de pago, que se muestra en la Fig. 21, es un conjunto simétrico. El par de valores maximin es (5/6, 5/6). Tomando este par como (u_{o}, v_{o}), vemos que se aplica Axioma (6).

Por lo tanto, el par de arbitraje tiene la forma (a, a). Como (a, a) debe ser óptimo de Pareto [por Axioma (2)], vemos que a = 3. Por lo tanto, obtenemos el punto que el sentido común nos llevó a adivinar.

Otro ejemplo, considere el juego cooperativo dado por el bimatriz

$$\begin{pmatrix} (2,0) & (-1,1) & (0,3) \\ (-2,-1) & (3,-1) & (0,2) \end{pmatrix} \tag{34}$$

Los valores maximin se calculan fácilmente $v_1 = -2/5$, $v_2 = 1$. la región de pago se muestra en la Fig. 25. El par (-2/5, 1) se indica con un cuadrado pequeño.

Tomando $(u_o, v_o) = (-2/5, 1)$, vemos que el par de arbitraje se encuentra entre los puntos en la región de pago que dominan (-2/5,1), y que son óptimos de Pareto. Un vistazo a la Fig. 25 muestra que estos puntos constituyen el segmento de línea de (1, 1) a (0, 2) (indicado con una línea gruesa). Vemos también que, en la terminología de la demostración (ver apéndice), se cumple el Caso (i). Por lo tanto, el par de arbitraje se puede calcular al encontrar el punto en este segmento de línea en el que el máximo de la función

$$g(u, v) = (u - u_o)\,(v - v_o)$$

ocurre. Ahora, en este segmento de línea,

$$v = -u + 2,$$

y entonces el problema se reduce a maximizar una función de una variable.

Tenemos

$$g(u, v) = (u + 2/5)\,(v - 1) = (u + 2/5)\,(-u + 1) = -u^2 + 3u/5 + 2/5.$$

Por los métodos del cálculo, encontramos que el máximo se alcanza para $u = 3/10$, $v = 17/10$. Este punto se indica como el par de arbitraje en la Fig. 25.

Para otro ejemplo, considere la bi-matriz

$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix} \tag{35}$$

La región de pago se muestra en la Fig. 26.

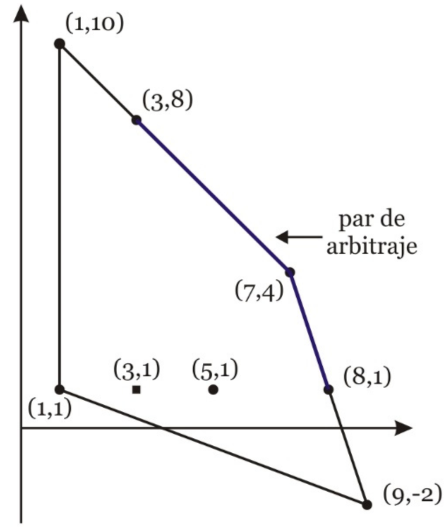

Fig. 26 Región de pago para bimatriz (35)

Los valores maximin se calculan fácilmente para que sean $v_1 = 3$ y $v_2 = 1$. De la figura, vemos que el conjunto de negociación es la unión de dos segmentos de línea. Estos son los de (3, 8) a (7, 4), y el de (7, 4) a (8, 1). El conjunto de negociación se indica con una línea gruesa. Con $(u_o, v_o) = (3,1)$, estamos claramente en el caso (i). Por lo tanto, debemos maximizar

$$g(u, v) = (u - 3)\,(v - 1)$$

sobre el conjunto de negociación. En los tres puntos (3, 8), (7, 4) y (8, 1), tenemos

$$g(3, 8) = 0, \quad g(7, 4) = 12, \quad g(8, 1) = 0.$$

En el segmento de la línea superior, $v = -u + 11$ y así

$$g(u, v) = (u - 3)\,(-u + 11 - 1) = (u - 3)\,(-u + 10) = -u^2 + 13u - 30.$$

Al establecer la derivada con respecto a u igual a cero, se obtiene $u = 13/2$ y $v = 9/2$. Este punto está en el conjunto de negociación y nos da

$$g(13/2, 9/2) = 49/4.$$

En el segmento de la línea inferior, $v = -3u + 25$ y así

$$g(u, v) = (u - 3)(-3u + 25 - 1) = (u - 3)(-3u + 24) = -3u^2 + 33u - 72.$$

Al establecer la derivada con respecto a u igual a cero, se obtiene $u = 11/2$ y $v = 17/2$. Este punto es, sin embargo, en la continuación del segmento de línea más allá (7, 4) y por lo tanto está fuera del conjunto de negociación. Desde $49/4 > 12$, el par de arbitraje es (13/2, 9/2).

6.6 OBSERVACIONES

El método discutido en este momento, con el punto de statu quo tomado como el par de valores maximin, se llama el *procedimiento de Shapley*.

Es interesante examinar el efecto del punto de statu quo en el par de arbitraje. El par de arbitraje para bimatriz (34) es (3/10, 17/10). Esto parece mucho más favorable para el jugador de columna que para el jugador de fila; para ambos, el pago máximo posible es 2. El par de arbitraje le da al jugador de fila solo el 15 por ciento de este máximo, pero le da al jugador de columna el 85 por ciento. Esta diferencia es, al menos en parte, un resultado del hecho de que el punto de statu quo es más favorable para el jugador de la columna. Una descripción verbal de la situación sería que el jugador de columna está en una posición de negociación más fuerte. Si las negociaciones colapsan, ella todavía obtiene una buena recompensa, pero el jugador de fila no lo hace. Bimatriz (35) también ilustra este fenómeno. En este juego, el jugador de fila está en una mejor posición en lo que respecta al punto de statu quo. El par de arbitraje es (13/2, 9/2), que también es más favorable para el jugador de la fila.

La definición y las propiedades del procedimiento de arbitraje son válidas para cualquier elección de punto de status quo. Este hecho se utiliza en el procedimiento de Nash. En este método, el punto de statu quo se determina por medio de “amenazas” preliminares por parte de los jugadores. Estas amenazas son estrategias (puras o mixtas) y el objetivo de cada jugador es obtener el punto de status quo más favorable antes de que comience el arbitraje. Esta fase preliminar se puede ver como un juego no cooperativo con infinitas estrategias puras.

7 JUEGOS N-PERSONALES COOPERATIVOS

7.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores, estudiamos juegos cooperativos en los que los jugadores podían coordinar sus estrategias, pero no podían compartir los pagos. En los juegos considerados en este capítulo, los jugadores pueden cooperar por completo. Los conjuntos de jugadores (llamados *coaliciones*) no solo pueden establecer acuerdos vinculantes sobre estrategias conjuntas, sino que también pueden acordar combinar sus pagos individuales y luego redistribuir el total de una manera específica. Para que este último tipo de cooperación sea posible, debemos suponer que los pagos están en alguna cantidad transferible, como el dinero. La cantidad de jugadores no está restringida explícitamente a más de dos, pero podría ser así: el caso de dos jugadores resulta ser trivial o haber sido cubierto en nuestro trabajo anterior.

La teoría desarrollada en este capítulo se aplica tanto a los juegos la suma cero como de suma no-cero.

7.2 COALICIONES

La idea de una coalición juega un papel esencial en la teoría que estamos a punto de desarrollar. Como se indicó anteriormente, una coalición es simplemente un subconjunto del conjunto de jugadores que se forma a fin de coordinar estrategias y acordar cómo se repartirá la recompensa total entre sus miembros. Como en nuestra discusión anterior sobre los juegos cooperativos, debe entenderse que los acuerdos que los miembros de la coalición establecen entre sí son absolutamente vinculantes.

Tabla 3 Juego de tres jugadores

Estrategias tiples	Vectores de pago
(1, 1, 1)	(-2, 1, 2)
(1, 1, 2)	(1, 1, -1)
(1, 2, 1)	(0, -1, 2)
(1, 2, 2)	(-1, 2, 0)
(2, 1, 1)	(1, -1, 1)
(2, 1, 2)	(0, 0, 1)
(2, 2, 1)	(1, 0, 0)
(2, 2, 2)	(1, 2, -2)

Introducimos alguna notación. El conjunto que consiste en todos los N jugadores se denota $\mathcal{P}$. Una coalición se denota mediante una letra mayúscula: $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, etc. Dada una coalición $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$, la *contra-coalición* con $\mathcal{S}$ es

$$\mathcal{S}^{C} = \mathcal{P} - \mathcal{S} = \{\mathcal{P} \in \mathcal{P}: \mathcal{P} \notin \mathcal{S}\}.$$

Consideremos un ejemplo de 3 jugadores. Su forma normal se da en la Tabla 3. Cada jugador tiene dos estrategias, denotadas como 1 y 2. Por lo tanto, hay ocho combinaciones de estrategias y ocho correspondientes 3-tuplas de pagos.

En este juego, $\mathcal{P} = \{P_1. P_2, P_3\}$. Hay ocho coaliciones. Tres de ellas contienen solo un jugador cada uno, que son,

$$\{P_1\}, \{P_2\}, \{P_3\}.$$

Hay tres de dos jugadores cada una,

$$\{P_1. P_2\}, \{P_1, P_3\}, \{P_2, P_3\}.$$

Finalmente, $\mathcal{P}$, que consiste en todos los jugadores, se llama la *gran coalición*, y la contra-coalición para $\mathcal{P}$ es $\varnothing$, la coalición vacía. En general, en un juego con N jugadores, hay coaliciones 2^N.

7.2.1 LA FUNCIÓN CARACTERÍSTICA

Si se ha formado una coalición $\mathcal{S}$, es natural pensar en el juego como una competencia entre dos "jugadores", siendo estos la coalición $\mathcal{S}$ y la contra-coalición $\mathcal{S}^c$. Este juego "bipersonal" no coopera. De hecho, si la coalición y la contra-coalición cooperaran, se formaría la gran coalición (en lugar de $\mathcal{S}$).

Supongamos, entonces, que estamos tratando con un juego de N jugadores para el cual

$$\mathcal{P} = \{P_1. ..., P_N\},$$

y para el cual la estrategia establecida para el jugador P_i se denota por X_i. Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}$ una coalición. Suponemos, por ahora, que $\mathcal{S}$ no está vacío y no contiene todos los jugadores. Las estrategias conjuntas puras disponibles para esta coalición son los miembros del producto cartesiano de aquellos X_i para los cuales $P_i \in \mathcal{S}$. Del mismo modo, las estrategias conjuntas puras disponibles para la contra-coalición son los miembros del producto cartesiano de aquellos X_i para los que $P_i \notin \mathcal{S}$. El juego entre la coalición $\mathcal{S}$ y la contra-coalición $\mathcal{S}^c$ es un juego de bimatriz. Las filas corresponden a las estrategias de unión pura disponibles para $\mathcal{S}$, y las columnas a las disponibles para $\mathcal{S}^c$. Una entrada en la bimatriz es un par cuyo primer miembro es la suma de los pagos a los jugadores en la coalición, y cuyo segundo miembro es la suma de los pagos a los jugadores en la contra-coalición (dado que ambos "jugadores" juega de acuerdo con las estrategias conjuntas puras que marcan la fila y la columna en la que aparece la entrada).

En el juego dado en la Tabla 3, consideremos la coalición $\mathcal{S} = \{P_1, P_3\}$. Entonces $\mathcal{S}^c = \{P_2\}$. La coalición tiene cuatro estrategias conjuntas puras disponibles para ella. Estas pueden ser designadas: (1, 1), (1, 2), (2, 1) y (2, 2), donde, por ejemplo, (2,1) significa que P_1 juega 2, y P_3 juega 1. La contra-coalición tiene solo dos estrategias puras: 1 y 2. La bimatriz 4 x 2 es

	1	2
(1,1)	4	1
(1,2)	0	2
(2,1)	1	0
(2,2)	-2	2

(36)

Aquí, por ejemplo, el par en la fila 1 y la columna 2 es (2, -1) porque el pago 3-tupla correspondiente a la combinación de estrategia (1, 2, 1) es (0, -1,2). Entonces la suma de los pagos a los jugadores en la coalición es 0 + 2 = 2, y la recompensa a la contra-coalición es -1.

El valor maximin para la coalición (calculado a partir de la bimatriz) se denomina *función característica* de $\mathcal{S}$ y se denota $v(\mathcal{S})$. Como se explicó anteriormente (apartado 5.2.2) de los valores maximin, los miembros de $\mathcal{S}$ tienen la garantía de poder elegir una estrategia conjunta con la que puedan obtener un beneficio total de al menos $v(\mathcal{S})$. La función característica tiene como dominio el conjunto de todas las coaliciones, y mide los valores de estas coaliciones. Hagamos algunos cáculos para el ejemplo en la Tabla 3. Sabemos que $v(\{P_1, P_3\})$ es el valor del juego de matriz cuyas entradas son los primeros términos en las entradas en bimatriz (36). Esta matriz es

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

Dos de las filas están dominadas. El juego de matriz 2×2 resultante se resuelve fácilmente para dar

$$v(\{P_1, P_3\}) = 4/3.$$

La función característica de la contra-coalición, {P2}, es el valor de

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Dos columnas están dominadas. El juego de matriz 2 x 2 resultante se resuelve para dar

$$v(\{P_2\}) = -1/3.$$

Calculando de manera similar, tenemos

$$v(\{P_1, P_2\}) = 1, \quad v(\{P_3\}) = 0, \quad v(\{P_2, P_3\}) = 3/4, \quad v(\{P_1\}) = 1/4.$$

El valor de la función característica para la gran coalición es simplemente la mayor recompensa total que puede alcanzar el conjunto de todos los jugadores. Se ve fácilmente que

$$v(\mathcal{P}) = 1.$$

Finalmente, por definición, la función característica de la coalición vacía es

$$v(\emptyset) = 0.$$

Al examinar los valores de la función característica, podemos especular acerca de qué coaliciones es probable que se formen. Como P_1 juega mejor por sí mismo que los otros dos, es posible que P_2 y P_3 compitan entre sí para tratar de atraer a P_1 a una coalición. A cambio de su cooperación, P_1 demandaría una gran parte del pago total a la coalición a la que se une. Ciertamente pediría más de 1/4, ya que puede obtener mucho por sí mismo. Por otro lado, si exige demasiado, P_2 y P_3 pueden unirse, excluir P_1 y obtener un total de 3/4.

Hay un teorema interesante sobre la función característica. Dice que “en la unión, hay fuerza”.

TEOREMA 6.1. (SUPERADITIVIDAD). Sea $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ sea una coalición disjunta. Entonces

$$v(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \geq v(\mathcal{S}) + v(\mathcal{T}).$$

El ejemplo que estudiamos anteriormente muestra que la desigualdad en el teorema puede ser estricta. Por ejemplo,

$$v(\{P1, P3\}) = 4/3 > 1/4 = 1/4 + 0 = v(\{P1\}) + v(\{P3\}).$$

El primero de los siguientes dos corolarios se puede probar usando el teorema y la inducción matemática. El segundo corolario es un caso especial del primero.

COROLARIO 6.2. Si $\mathcal{S}_1, \ldots, \mathcal{S}_k$ son coaliciones disjuntas por parejas (es decir, disjuntas dos a dos), entonces

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{k} \mathbf{S}_k\right) \geq \sum_{i=1}^{k} \nu(\mathbf{S}_i)$$

COROLARIO 6.3. Para cualquier juego de N personas,

$$v(\mathcal{P}) \geq \sum_{i=1}^{N} \nu(\{\mathbf{P}_i\})$$

En lo que respecta a la formación de coaliciones, un juego puede analizarse utilizando solo la función característica. Esto sugiere la siguiente definición.

-
DEFINICIÓN 6.1. Un juego en *forma de función característica* consiste en un conjunto

$$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_N\}$$

de jugadores, junto con una función v, definida para todos los subconjuntos de $\mathcal{P}$, tal que

$$v(\emptyset) = 0,$$

y tal que la superaditividad se mantiene. Es decir,

$$v(\mathcal{S} \cup \mathcal{T}) \geq v(\mathcal{S}) + v(\mathcal{T})$$

cada vez que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{T}$ son coaliciones disjuntas de los jugadores.

Como abreviatura, usaremos el símbolo simple v para designar un juego en forma de función característica.

7.2.2 JUEGOS ESENCIALES Y INESENCIALES

Podemos seleccionar una clase de juegos que son triviales en lo que respecta a las coaliciones. De hecho, tienen la propiedad de que no hay ninguna razón para preferir a ninguna coalición sobre ninguna otra.

DEFINICIÓN 6.2. Se dice que un juego N-personas v en forma de función característica *inesencial* si

$$v(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} v(\{P_i\})$$

Se dice que un juego que no es inesencial es *esencial*.

En otras palabras, un juego es inesencial si la desigualdad en el Corolario 6.3 es en realidad una igualdad. De hecho, para tal juego, una declaración más fuerte es verdad.

TEOREMA 6.4. Sea $\mathcal{S}$ sea una coalición de jugadores en un juego inesencial. Entonces

$$v(\mathcal{S}) = \sum_{\mathbf{P} \in \mathbf{S}} \mathbf{v}(\{\mathbf{P}\})$$

Por lo tanto, en un juego inesencial, no hay ninguna razón para que realmente se forme una coalición; la cooperación no da como resultado una recompensa total mayor.

El hecho de que un juego sea inesencial no lo hace carente de importancia. Simplemente significa que no hay razón para que se forme una coalición. El siguiente teorema muestra que hay muchos juegos no esenciales que, sin embargo, son importantes.

TEOREMA 6.5. Un juego bipersonal que es de suma cero en su forma normal es inesencial en su forma de función característica.

En el contexto del capítulo anterior, un juego de bipersonal inesencial es uno para el cual no hay ventaja que se obtenga cooperando. Los juegos de suma cero con más de dos jugadores pueden ser esenciales.

7.3 IMPUTACIONES

Supongamos que se forma una coalición en un juego de *N* personas. El problema que ahora deseamos estudiar es el de la distribución final de los pagos. Es esto lo que, presumiblemente, los jugadores en sí mismos estarían más interesados. De hecho, un jugador que esté considerando unirse a una coalición determinada querría saber cuánto gana con ello. Ahora, las cantidades que van a los diversos jugadores forman un N-tupla $\vec{\mathbf{x}}$ de números. Argumentaremos que hay dos condiciones que una N-tupla debe satisfacer para que tenga alguna posibilidad de que realmente ocurra en el juego. Estas son la *racionalidad individual* y la *racionalidad colectiva*. Un N-tupla de pagos a los jugadores que satisface estas dos condiciones se denomina *imputación*. Después de la definición formal, trataremos de justificar la idoneidad de las dos condiciones.

DEFINICIÓN 6.3. Sea v un juego de N-personas en forma de función característica con jugadores

$$\mathcal{P} = \{P_1. ..., P_N\}$$

Se dice que una N-tupla $\vec{\mathbf{x}}$ de números reales es una *imputación* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- (*Racionalidad Individual*) Para todos los jugadores P_i,

$$x_i \geq v(\{Pi\}).$$

- (*Racionalidad Colectiva*) Tenemos

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i} = v(\mathcal{P})$$

La condición de la racionalidad individual es fácil de motivar. Si para algunos i, entonces ninguna coalición le da a P_i solo la cantidad que x_i de alguna P_i-configuración le iría mejor ir por su cuenta.

En cuanto a la racionalidad colectiva, primero argumentamos que

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i} \geq v(\mathcal{P}) \tag{37}$$

Supongamos que esta desigualdad es falsa. Entonces tendríamos

$$\beta = v(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i} > \mathbf{0}$$

Por lo tanto, los jugadores podrían formar la gran coalición y distribuir el pago total, $v(\mathcal{P})$, de acuerdo con

$$x'_i = x_i + \beta/N,$$

dando así a cada jugador más. Por lo tanto, si tengo la oportunidad de que realmente ocurra, (37) debe ser verdadero.

Luego argumentamos que

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i} \leq v(\mathcal{P}) \tag{38}$$

Para ver esto, supongamos que realmente ocurre. Es decir, supongamos que $\mathcal{S}$ es una coalición y que los miembros de ella, y los miembros de su contra coalición, están de acuerdo con $\vec{\mathbf{x}}$ como su forma de dividir los pagos. Luego, usando superaditividad,

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x_i} = \sum_{P_i \in S} \mathbf{x_i} + \sum_{P_i \in S^c} \mathbf{x_i} = v(\mathcal{S}) + v(\mathcal{S}^c) \leq v(\mathcal{P})$$

La combinación de (37) y (38) da la condición de racionalidad colectiva.

En el juego que se muestra en la Tabla 3, cualquier 3-tupla $\vec{\mathbf{x}}$ que satisfaga las condiciones

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

y

$$x_1 \geq 1/4, \quad x_2 \geq -1/3, \quad x_3 \geq 0,$$

es una imputación Es fácil ver que hay infinitas 3-tuplas que satisfacen estas condiciones, por ejemplo,

$$(1/3, 1/3, 1/3), \quad (1/4, 3/8, 3/8), \quad (1, 0, 0).$$

El siguiente teorema muestra que los juegos esenciales siempre tienen muchas imputaciones, mientras que los esenciales no tienen muchas imputaciones.

TEOREMA 6.6. Sea v un juego de N personas en forma de función característica. Si v es inesencial, entonces tiene una sola imputación, es decir,

$$\vec{\mathbf{x}} = (v(\{P_1\}, \ldots, \{P_N\}))$$

Si v es esencial, entonces tiene infinitas imputaciones.

Para un juego esencial, hay demasiadas imputaciones. El problema es seleccionar aquellos que merecen llamarse "soluciones". Por ejemplo, en el juego que se muestra en la Tabla 3, es probable que no ocurra ninguna de las tres imputaciones enumeradas anteriormente. Por ejemplo, considere la imputación (1/4, 3/8, 3/8). Es inestable porque los jugadores P_1 y P_2 podrían formar una coalición, obtener un beneficio total de al menos 1, y dividirlo entre ellos para que cada uno gane más que su entrada en (1/4, 3/8, 3/8) le da.

7.3.1 DOMINACIÓN DE IMPUTACIONES

La siguiente definición intenta formalizar la idea de una imputación preferida por otra dada por una coalición determinada.

DEFINICIÓN 6.4. Sea v un juego en forma de función característica, que $\mathcal{S}$ sea una coalición, sean $\vec{\mathbf{x}}, \vec{\mathbf{y}}$, imputaciones. Entonces decimos que $\vec{\mathbf{x}}$ *domina* $\vec{\mathbf{y}}$ a *través de la coalición* $\mathcal{S}$ si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $x_i > y_i$ para todos Pi $\in \mathcal{S}$.
- $\sum_{P_i \in S} \mathbf{x_i} \leq v(\mathcal{S})$.

La notación para esta relación es

$$\vec{\mathbf{x}} \succ_{\mathbf{s}} \vec{\mathbf{y}}$$

La segunda condición en esta definición dice que $\vec{\mathbf{x}}$ es factible, es decir, que los jugadores en $\mathcal{S}$ pueden obtener el pago suficiente para que x_i pueda ser pagado a cada $P_i \in \mathcal{S}$. Dado que la desigualdad en la primera condición es estricta, cada jugador en $\mathcal{S}$ lo hace mejor en $\vec{\mathbf{x}}$ (en comparación con $\vec{\mathbf{y}}$).

En el juego cuya forma normal se muestra en la Tabla 3, vemos que (1/3, 1/3, 1/3) domina (1, 0, 0) a través de la coalición $\{P_2, P_3\}$, y eso (1/4, 3/8, 3/8) domina (1/3, 1/3, 1/3) a través de la misma coalición. Además, (1/2, 1/2, 0) domina (1/3, 1/3, 1/3) hasta $\{P_1, P_2\}$.

7.3.2 EL NÚCLEO

Parece intuitivamente que una imputación que está dominada a través de alguna coalición nunca se establecería permanentemente como la forma en que la recompensa total se distribuye de manera directa. En cambio, habría una tendencia a que la coalición existente se disolviera y fuera reemplazada por una que otorgue a sus miembros una mayor participación. Esta idea motiva lo siguiente:

DEFINICIÓN 6.5. Sea v un juego en forma de función característica. El *núcleo de v* consta de todas las imputaciones que no están dominadas por ninguna otra imputación a través de ninguna coalición.

Por lo tanto, si una imputación $\vec{\mathbf{x}}$está en el núcleo, no hay un grupo de jugadores que tenga una razón para formar una coalición y reemplazarla por una imputación diferente. El núcleo es el primer "concepto de solución" que definimos para los juegos cooperativos N-personales. Como pronto veremos, tiene un defecto grave: ¡el núcleo puede estar vacío!

Decidir si una imputación está en el núcleo parece difícil si usamos solo la definición. El siguiente teorema facilita el trabajo.

TEOREMA 6.7. Sea v un juego de N jugadores en forma de función característica, y sea $\vec{\mathbf{x}}$ una imputación. Entonces $\vec{\mathbf{x}}$ está en el núcleo de v si y solo si

$$\sum_{\mathbf{P_i} \in \mathbf{S}} \mathbf{x_i} = v(\mathcal{S}) \tag{39}$$

para cada coalición $\mathcal{S}$.

El siguiente corolario establece una forma más conveniente de este resultado. La diferencia es que no tenemos que verificar por separado si $\vec{\mathbf{x}}$ es una imputación.

COROLARIO 6.8. Sea v un juego en forma de función característica con N jugadores, y sea una N-tupla de números. Entonces, $\vec{\mathbf{x}}$ es una imputación del núcleo si y solo si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{x_i} = v(\mathcal{P})$.
- $\sum_{\mathbf{P_i} \in \mathbf{S}} \mathbf{x_i} \geq v(\mathcal{S})$ para cada coalición $\mathcal{S}$.

Usemos este teorema para encontrar el núcleo del juego que se muestra en la Tabla 3. Por el corolario, una 3-tupla (x_1, x_2, x_3) es una imputación en el núcleo si y solo si

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 && (40)\\
x_1 &\geq 1/4 \\
x_2 &\geq -1/3 \\
x_3 &\geq 0 && (41)\\
x_1 + x_2 &\geq 1 && (42)\\
x_1 + x_3 &\geq 4/3 && (43)\\
x_2 + x_3 &\geq 3/4 && (44)
\end{aligned}
$$

De (40), (41) y (42), vemos que $x_3 = 0$ y $x_1 + x_2 = 1$. Con la primera de estas y (43), (44), tenemos ese $x_1 \geq 4/3$ y $x_2 \geq 3/4$. Agregando estos, obtenemos que $x_1 + x_2 \geq 25/12 > 1$. Esto es una contradicción, por lo que concluimos que el núcleo de este juego está vacío.

Como segundo ejemplo, considere el juego de 3 jugadores cuya función característica está dada por

$$
\begin{aligned}
v(\{P_1\}) &= -1/2 && (45)\\
v(\{P_2\}) &= 0 \\
v(\{P_3\}) &= -1/2 \\
v(\{P_1, P_2\}) &= 1/4 \\
v(\{P_1, P_3\}) &= 0 \\
v(\{P_2, P_3\}) &= 1/2 \\
v(\{P_1, P_2, P_3\}) &= 1
\end{aligned}
$$

Se puede verificar que la superaditividad sea válida para este ejemplo. Vemos que una 3-tupla i es una imputación en el núcleo de este juego si y solo si se cumplen todos los siguientes requisitos:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 &\geq -1/2 \\
x_2 &\geq 0 \\
x_3 &\geq 0 \\
x_1 + x_2 &\geq -1/2 \\
x_1 + x_3 &\geq 0 \\
x_2 + x_3 &\geq 1/2
\end{aligned}
$$

Este sistema tiene muchas soluciones. Por ejemplo, (1/ 3,1/3, 1/3) está en el núcleo. Como tercer ejemplo, considere lo siguiente:

EJEMPLO 6.1 (EL JUEGO DEL COCHE USADO). Un hombre llamado Nixon tiene un coche usado que desea vender. Ya no lo conduce, y no tiene ningún valor para él al menos que pueda venderlo. Dos personas están interesadas en comprarlo: Agnew y Mitchell. Agnew valora el auto en \$500 y Mitchell cree que vale \$700. El juego consiste en cada uno de los posibles compradores que pujan por el auto, y Nixon acepta una de las ofertas (presumiblemente la más alta) o rechaza a ambas.

Podemos escribir la forma de función característica de este juego directamente. Abreviando los nombres de los jugadores como N, A, M, tenemos

$$v(\{N\}) = v(\{A\}) = v(\{M\}) = 0,$$

$$v(\{N, A\}) = 500, \qquad v(\{N, M\}) = 700, \qquad v(\{A, M\}) = 0,$$

$$v(\{N, A, M\}) = 700.$$

El razonamiento detrás de estos números es el siguiente. Considere primero la coalición de un jugador $\{N\}$. En el juego entre esta coalición y su contra-coalición, N tiene solo dos estrategias puras razonables: (i) Aceptar la oferta más alta o (ii) rechazar ambas si la oferta más alta es menor que algún límite inferior. Existe una estrategia conjunta para la contra-coalición $\{A, M\}$ (a saber, ambas son cero) de tal manera que, si juega de esa manera, el máximo de pagos de N sobre sus estrategias es cero. Por definición del valor máximo, $v(\{N\}) = 0$. Los valores de las funciones características de las otras dos coaliciones de un solo jugador son cero ya que la contra-coalición siempre puede rechazar la oferta de ese jugador. La coalición $\{N, A\}$ tiene muchas estrategias conjuntas que resultan en una recompensa de \$500, independientemente de lo que M haga. Por ejemplo, A podría pagar a N \$500 y quedarse con el automóvil. El pago a N es entonces de \$500, y el pago a A es cero (el valor del automóvil menos el dinero). Por otro lado, no pueden obtener más de \$500 sin la cooperación de M. Similarmente, $v(\{N, M\}) = 700$. Finalmente, la gran coalición tiene un valor de función característico de \$700, ya que esa es la suma más grande posible de pagos (logrado, por ejemplo, si M paga a N \$700 por el automóvil).

Una imputación (x_N, x_A, x_M) está en el núcleo si y solo si

$$x_N, x_A, x_M \geq 0$$

$$x_N + x_A + x_M = 700,$$

$$x_N + x_A \geq 500, \quad x_N + x_M \geq 700, \quad x_A + x_M \geq 0.$$

Estos se resuelven fácilmente para dar

$$500 \leq x_N \leq 700, \quad x_M = 700 - x_N, \quad x_A = 0.$$

La interpretación de esta solución es que *M* obtiene el automóvil con una oferta de entre \$500 y \$700 (x_N es la oferta). Agnew no consigue el automóvil, pero su presencia hace que el precio suba más de \$500. Esta respuesta es bastante razonable. Es consistente con lo que realmente ocurre en las situaciones de pujas, excepto por una cosa. Dado que el juego es cooperativo, es posible que *A* y *M* conspiren para hacer una oferta baja. Por ejemplo, podrían estar de acuerdo en que Mitchell ofrece \$300 y Agnew ofrece cero. A cambio, si Nixon acepta la oferta más alta, Mitchell le pagaría a Agnew \$200 por su cooperación. La imputación correspondiente a esta disposición es (300, 200, 200). No está en el núcleo, por lo que nuestro análisis lo ignora.

Otro punto vale la pena discutir. Supongamos que Agnew y Mitchell juegan como arriba, pero que Nixon rechaza la oferta. Por lo tanto, él mantiene el automóvil (que no tiene valor para él), y los otros dos ni ganan ni pierden. La 3-tupla de pagos es entonces (0, 0, 0). Esto no es una imputación, la racionalidad individual se mantiene, pero la racionalidad colectiva no. Refiriéndonos a nuestro argumento sobre la racionalidad colectiva en el apartado 7.3, vemos que la razón por la cual se descarta esta 3-tupla como una imputación es que los tres jugadores podrían actuar mejor de manera diferente. Dado que la decisión final es de Nixon, la conclusión es que está siendo irracional al no aceptar la oferta de \$300. ¡Por supuesto, el mismo razonamiento se aplicaría si Mitchell hiciera una oferta de \$1 en lugar de \$300! El problema aquí es que, en la vida real, Nixon podría rechazar una oferta que él cree que es demasiado baja. Después de todo, tendrá otras oportunidades de vender el automóvil, ya sea a Agnew, a Mitchell, o a otra persona.

7.3.3 JUEGOS DE SUMA CONSTANTE

La siguiente definición incluye, como mostraremos, juegos cuyas formas normales son de suma cero.

DEFINICIÓN 6.6. Sea v sea un juego en forma de función característica. Decimos que v es de *suma constante* si, para cada coalición $\mathcal{S}$, tenemos

$$v(\mathcal{S}) + v(\mathcal{S}^c) = v(\mathcal{P}).$$

Además, v es de suma cero si es de suma constante y si, además, $v(\mathcal{P}) = 0$.

El juego que se muestra en la Tabla 3 es de suma constante. El juego del coche usado no lo es, ya que, por ejemplo,

$$v(\{N, A\}) + v(\{M\}) = 500 + 0 \neq 700 = v(\{N, A, M\}).$$

Debemos tener cuidado aquí. Existe el concepto de “suma cero” tanto para juegos en forma normal como para juegos en forma de función característica. Son casi, pero no del todo, lo mismo. Además, hay una definición natural de suma constante para juegos en forma normal. Nuevamente, los dos conceptos de “suma constante” no son lo mismo. Vamos a probar una declaración similar para los juegos de suma constante. Sin embargo, lo contrario es falso: es posible que un juego que no sea de suma constante en su forma normal sea de suma constante en su forma de función característica.

Hacemos una definición formal de suma constante para juegos en forma normal.

DEFINICIÓN 6.7. Sea $\vec{\pi}$ un juego de N personas en forma normal. Entonces decimos que $\vec{\pi}$ es suma constante si hay una constante c tal que

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i(x_1, \ldots, x_N) = c$$

para todas las opciones de estrategias $x_1, \ldots, x_N$ para los jugadores $P_1, \ldots, P_N$, respectivamente.

Si c = 0, esto se reduce a suma cero.

TEOREMA 6.9. Si un juego $\vec{\pi}$ de N-personas es de suma constante en su forma normal, entonces su función característica también es de suma constante.

El siguiente teorema contiene malas noticias sobre núcleos.

TEOREMA 6.10. Si v es esencial y de suma constante, entonces su núcleo está vacío.

7.3.4 UN JUEGO DE VOTACIÓN

La teoría de los juegos cooperativos se ha aplicado a varios problemas relacionados con las votaciones. Por ejemplo, la distribución del poder en el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas se ha estudiado de esta manera, así como el efecto que el método del Colegio Electoral para elegir a los presidentes estadounidenses ha tenido sobre las fortalezas relativas de los votantes en diferentes estados.

El juego presentado aquí es bastante pequeño, pero muestra algunas de las características de las de tamaño natural.

EJEMPLO 6.2 (JUEGO DEL LAKE WOBEGON). El gobierno municipal de Lake Wobegon, Minnesota, está dirigido por un Concejo Municipal y un Alcalde. El Consejo se compone de seis concejales y un presidente. Un proyecto de ley puede convertirse en una ley en Lake Wobegon de dos maneras. Estos son:

- Una mayoría del Consejo (con el Presidente votando solo en caso de un empate entre los Concejales) lo aprueba y el Alcalde lo firma.
- El Consejo lo aprueba, el Alcalde lo veta, pero al menos seis de los siete miembros del Consejo votan para anular el veto. (En esta situación, el presidente siempre vota).

El juego consta de las ocho personas involucradas que significan la aprobación o desaprobación de la disposición dada.

En su forma normal, los pagos serían en unidades de "poder" ganadas por estar en el lado ganador. Es más fácil configurar directamente la forma de función característica que trabajar con la forma normal. Llamemos a una coalición entre los ocho jugadores una coalición ganadora si puede aprobar un proyecto de ley. Por ejemplo, una coalición formada por tres concejales, el presidente y el alcalde es ganadora. Llamamos a una coalición que no aprueba la ley una coalición perdedora. Por lo tanto, la coalición que consiste únicamente de cuatro concejales es perdedora (ya que no tienen los votos para anular un veto a la alcaldía). Sea $v(\mathcal{S}) = 1$ si la coalición $\mathcal{S}$ gana, y $v(\mathcal{S}) = 0$ si $\mathcal{S}$ pierde. Como la coalición de todos los jugadores es perdedora, y la gran coalición es ganadora, una 8-tupla

$$(x_M, x_C, x_1, \ldots, x_6)$$

es una imputación si y solo si

$$x_M, x_C, x_1, \ldots, x_6 \geq 0 \quad \text{y} \quad x_M + x_C + x_1 + \ldots + x_6 = 1.$$

Aquí, M significa Alcalde, C significa Presidente, y 1, ..., 6 denotan a los Concejales. Se demuestra que el lago Wobegon no es de suma constante. Sin embargo, su núcleo está vacío. Tenemos lo siguiente:

TEOREMA 6.11. El juego del lago Wobegon tiene un núcleo vacío.

El juego de Lake Wobegon es un ejemplo de una categoría importante de juegos.

DEFINICIÓN 6.8. Un juego v en la forma de función característica se llama *simple* si se cumple todo lo siguiente:

- $v(\mathcal{S})$ es 0 o 1, para cada coalición $\mathcal{S}$.

- v (la gran coalición) = 1.
- v (coalición de jugador-jugador) = 0.

En un juego simple, una coalición $\mathcal{S}$ con $v(\mathcal{S}) = 1$ se llama coalición ganadora, y una con $v(\mathcal{S}) = 0$ se llama perdida.

7.4 EQUIVALENCIA ESTRATÉGICA

Considere dos juegos v y μ en la forma de función característica. Supongamos que la cantidad de jugadores es la misma para ambos. La pregunta que nos preocupa ahora es esta: ¿cuándo podemos decir que v y μ son "esencialmente" lo mismo? Supongamos, por ejemplo, que simplemente cambiamos las unidades en que se calculan los pagos. Por ejemplo, esto sería el resultado de la conversión de dólares estadounidenses a francos suizos. Tal cambio no cambiaría el análisis del juego de ninguna manera. Este cambio de unidades es equivalente a multiplicar la función característica por una constante positiva.

Otra modificación de un juego que no debería tener ningún efecto sobre el análisis matemático de la misma es esta: supongamos que cada jugador P_i recibe una cantidad fija c_i, independientemente de cómo juegue. (Por supuesto, c_i podría ser negativo, en cuyo caso, su valor absoluto representa un pago fijo por el privilegio de jugar). Dado que los jugadores no pueden hacer nada para cambiar las c_i's, jugarían como si estas cantidades fijas no estuvieran presentes. La combinación de las dos modificaciones que acabamos de analizar conduce a lo siguiente:

DEFINICIÓN 6.9. Sean v y μ dos juegos en forma de función característica con el mismo número N de jugadores. Entonces μ, es estratégicamente equivalente a v si existen constantes $k > 0$, y c_1, ..., c_N tal que, para cada coalición $\mathcal{S}$,

$$\mu(\mathcal{S}) = k \cdot v(\mathcal{S}) + \sum_{P_i \in S} \mathbf{c_i} \tag{46}$$

Nótese primero que v y μ, realmente juegan roles simétricos en esta definición. Es decir, (46) se puede resolver para v para dar

$$v(\mathcal{S}) = (1/k)\cdot\mu(\mathcal{S}) + \sum_{P_i \in S}\left(-\frac{c_i}{k}\right)$$

que tiene la misma forma que (46).

Por ejemplo, el juego cuya forma normal aparece en la Tabla 3 tiene una función característica

$$\mathrm{v}(\mathcal{P}) = 1, \quad \mathrm{v}(\varnothing) = 0,$$

$$v(\{P_1, P_2\}) = 1, \quad v(\{P_1, P_3\}) = 4/3, \quad v(\{P_2, P_3\}) = 3/4,$$

$$v(\{P_1\}) = 1/4, \quad v(\{P_2\}) = -1/3, \quad v(\{P_3\}) = 0.$$

Para $k = 2$, y c_1, c_2, c_3 tomando los valores -1 ,0, -1, respectivamente, tenemos que μ, es estratégicamente equivalente a v, donde

$$\mu(\mathcal{P}) = (2)\cdot 1 + (-1 + 0 -1) = 0, \quad \mu(0) = (2)\ 0 = 0,$$

$$\mu(\{P_1, P_2\}) = (2)\cdot 1 + (-1 + 0) = 1,$$

$$\mu(\{P_1, P_3\}) = (2)\ (4/3) + (-1- 1) = 2/3, \quad \mu(\{P_2, P_3\}) = 1/2,$$

$$\mu(\{P_1\}) = -1/2, \quad \mu(\{P_2\}) = -2/3, \quad \mu(\{P_3\}) = -1.$$

En este ejemplo, μ, es suma cero.

Hacemos hincapié en que, si v y μ son estratégicamente equivalentes, entonces los jugadores jugarían lo mismo en ambos juegos. Es decir, las probabilidades relativas de las distintas coaliciones formadas serían las mismas, y los miembros de las coaliciones adoptarían las mismas estrategias conjuntas.

TEOREMA 6.12. Si v y μ, son estratégicamente equivalentes, y v es inesencial, entonces también lo es μ. Por lo tanto, si v es esencial, también lo es μ.

7.4.1 EQUIVALENCIA E IMPUTACIONES

Supongamos que v y m son estratégicamente equivalentes, es decir, que la relación dada por (46) se cumple. Luego, el siguiente teorema relaciona las imputaciones para v con aquellas para m.

TEOREMA 6.13. Sean v y μ, juegos de N personas estratégicamente equivalentes. Entonces tenemos:

- Una N-tupla $\vec{\mathbf{x}}$ es una imputación para v si y solo si $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{c}}$ es una imputación para μ
- Una imputación $\vec{\mathbf{x}}$ domina a una imputación $\vec{\mathbf{y}}$ si a través de una coalición $\mathcal{S}$ con respecto a v si y solo si $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{c}}$ domina $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{y}} + \vec{\mathbf{c}}$ con respecto a μ través de la misma coalición.
- Un N-tupla $\vec{\mathbf{x}}$ está en el núcleo de v si y solo si $\mathbf{k} \cdot \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{c}}$ está en el núcleo de μ.

Este teorema valida la creencia de que, si estamos estudiando un juego en forma de función característica, entonces estamos estudiando simultáneamente todos los juegos que son estratégicamente equivalentes a él. En el caso v y m son estratégicamente equivalentes, entonces usaremos frases como "v y μ son similares hasta en la equivalencia estratégica" para enfatizar este hecho.

7.4.2 (0, 1) -FORMA REDUCIDA

Parte de la utilidad de la observación que acabamos de hacer es que podemos reemplazar un juego por otro cuya función característica es particularmente fácil de usar.

DEFINICIÓN 6.10. Una función característica μ está en *(0, 1)-forma reducida* si se cumple lo siguiente:

- $\mu(\{P\}) = 0$ para cada jugador P.
- $\mu(\mathcal{P}) = 1$.

Un juego en (0,1)-forma reducida es obviamente esencial. Por el contrario, también es cierto que, hasta la equivalencia estratégica, cada juego esencial está en (0,1)-forma reducida.

TEOREMA 6.14. Si v es un juego esencial, v es estratégicamente equivalente a un juego μ en (0, 1)-forma reducida.

Un juego simple ya está en (0, 1) forma reducida.

Vamos a hacer algunos cálculos para el juego cuya forma normal se da en la Tabla 3. Definimos

$$k = 1/[\, v(\mathcal{P}) - \sum_{i=1}^{N} v(\{P_i\})\,] > 0 \quad \text{y para } 1 \leq i \leq N \;\; c_i = k \cdot v(\{P_i\})$$

Luego:

$$k = 1/[1-(-1/12)] = 12/13$$

y

$$c_1 = -\,(12/13)\,(1/4) = -3/13, \qquad c_2 = 4/13, \qquad c_3 = 0.$$

Entonces μ está dado por

$$\mu(\mathcal{P}) = 1, \qquad \mu(\emptyset) = 0$$
$$\mu(\text{cualquier coalición de un solo jugador}) = 0,$$

$$\mu(\{P_1, P_2\}) = (12/13)\,(1) - 3/13 + 4/13 = 1,$$

y

$$\mu(\{P_1, P_3\}) = \mu(\{P_2, P_3\}) = 1.$$

Para este juego μ, observamos que:

- Las tres coaliciones de dos personas son igualmente buenas.
- Si se forma una coalición de dos personas, los jugadores probablemente dividirán el pago por igual (ya que los jugadores tienen roles completamente simétricos).
- No hay ninguna ventaja para una coalición de dos jugadores en traer al tercer jugador para formar la gran coalición.

Concluimos que se formará una de las coaliciones de dos jugadores, los jugadores en ella dividirán la recompensa, y el tercer jugador quedará. Por lo tanto, la imputación prevaleciente será (1/2, 1/2, 0), (1/2, 0, 1/2) o (0,1/2, 1/2). Nuestro análisis no puede predecir cuál de las tres coaliciones de dos jugadores realmente se formarán.

Si transformamos estas conclusiones nuevamente en términos de v, vemos que se formará una de las coaliciones de dos jugadores. La imputación prevaleciente será una de las tres posibilidades que se pueden calcular utilizando la relación entre μ y v. Este cálculo se verá más adelante.

Se puede verificar que la (0, 1)-forma reducida μ del juego dada en (45) es tal que

$$\mu(\{P_1, P_2\}) = 3/8, \qquad \mu(\{P_1, P_3\}) = 1 \qquad \mu(\{P_2, P_3\}) = 1/2.$$

En este ejemplo, la buena simetría del juego anterior se pierde. Podemos decir con seguridad que las coaliciones de dos jugadores parecen débiles y que es probable que se forme la gran coalición. Dicho de otra manera, cualquiera de las coaliciones de dos jugadores se beneficiaría reclutando al tercer jugador. Adivinar cuál es la imputación final es peligroso. De la discusión anterior del juego, sabemos que el núcleo es grande.

La (0, 1)-forma reducida de un juego es única.

TEOREMA 6.15. Supongamos que v y μ, son juegos de N personas en (0, 1)-forma reducida. Si son estratégicamente equivalentes, entonces son iguales.

7.4.3 CLASIFICACIÓN DE JUEGOS PEQUEÑOS

Hasta la equivalencia estratégica, el número de juegos con dos o tres jugadores es limitado, como muestran los siguientes tres teoremas.

TEOREMA 6.16. Un juego de dos jugadores en forma de función característica es inesencial o estratégicamente equivalente a v, donde

$$v(\textit{la gran coalición}) = 1, \quad v(\emptyset) = 0,$$

$$v\ (\textit{coalición de un solo jugador}) = 0.$$

En el caso de juegos de suma constante con tres jugadores, tenemos lo siguiente:

TEOREMA 6.17. Cada juego de suma constante de tres jugadores en forma de función característica es inesencial o es estratégicamente equivalente a v, donde

$$v(\textit{la gran coalición}) = 1, \quad (\emptyset) = 0,$$

$$v(\textit{cualquier coalición de dos jugadores}) = 1,$$

$$v(\textit{coalición de un solo jugador}) = 0.$$

Como la frase "tres jugadores, suma constante, juego esencial en (0,1)-forma reducida" es bastante torpe, la abreviaremos hablando de juego *TRES*. El teorema anterior dice que cada juego esencial de suma constante con tres jugadores es estratégicamente equivalente a *TRES*. En particular, el juego cuya forma normal se da en la Tabla 3 es estratégicamente equivalente a *TRES*.

Hasta la equivalencia estratégica, los juegos de tres jugadores que no son necesariamente de suma constante forman una familia de tres parámetros. Tenemos lo siguiente:

TEOREMA 6.18. Cada juego de tres jugadores en forma de función característica es inesencial o existen constantes a, b, c que satisfacen

$$0 \leq a \leq 1, \qquad 0 \leq b \leq 1, \qquad 0 \leq c \leq 1,$$

tal que el juego es estratégicamente equivalente a v, donde

$$v(\textit{la gran coalición}) = 1, \qquad v(\emptyset) = 0.$$

y

$$v(\textit{coalición de un solo jugador}) = 0,$$

$$v(\{P_1, P_2\}) = a \quad v(\{P_1, P_3\}) = b \quad v(\{P_2, P_3\}) = c$$

7.5 DOS CONCEPTOS DE SOLUCIÓN

Como concepto de solución para los juegos que estamos estudiando, el núcleo tiene fallas. A menudo, no hay imputaciones en el núcleo; cuando los hay, a menudo hay tantos que no tenemos forma razonable de decidir cuáles realmente pueden ocurrir. Se han realizado varios intentos a lo largo de los años para definir conceptos de solución más aceptables. Discutimos dos de ellos aquí.

7.5.1 CONJUNTOS ESTABLES DE IMPUTACIONES

La definición de un conjunto estable de imputaciones es bastante natural:

DEFINICIÓN 6.11. Sea X un conjunto de imputaciones para un juego en forma de función característica. Entonces decimos que X es *estable* si se cumplen las dos condiciones siguientes:

- (*Estabilidad interna*) Ninguna imputación en X domina cualquier otra imputación en X a través de cualquier coalición.
- (*Estabilidad externa*) Si $\vec{\mathbf{y}}$ es cualquier imputación fuera de X, entonces está dominado a través de alguna coalición por alguna imputación dentro de X.

Esta idea fue presentada por von Neumann y Morgenstern. Fueron tan lejos como para llamar conjunto estable a la *solución* del juego. Antes de discutir sus razones para hacerlo, observemos que una imputación dentro de un conjunto estable puede estar dominada por alguna imputación externa. Por supuesto, esa imputación externa está, a su vez, dominada por alguna otra imputación interna (por estabilidad externa). Esto parece equivocado al principio porque tendemos a suponer que la relación de dominio a través de una coalición es "transitiva", pero esto no es cierto. Ahora, consideremos qué podría pasar en un juego con un conjunto estable X. Por estabilidad externa, una imputación fuera de X parece poco probable que se establezca. Existe una coalición (posiblemente muchas) que definitivamente prefiere una de las imputaciones dentro de X. Por lo tanto, habría una tendencia hacia un cambio a tal imputación interna. Por estabilidad interna, todas las imputaciones dentro de X son iguales en lo que respecta a la dominación a través de coaliciones. Presumiblemente, el que realmente prevalece sería elegido de alguna manera no susceptible de análisis matemático: oportunidad pura, costumbre, precedente, etc. Pero, ahora, hay un problema. Acabamos de mencionar que puede haber una imputación fuera de X que domine una imputación dada en el interior. ¿Por qué no se formaría una nueva coalición para aprovechar esta imputación externa? Si esto sucede, X quedará abandonado (hasta que se forme otra coalición y el juego regrese a X). Otra forma de ver este problema es que, de hecho, el conjunto estable X no es único. Puede haber otros (como se mostrarán más adelante). ¿Por qué debería permanecer el juego dentro de alguno de ellos? Por supuesto, podría ser que la historia del juego en realidad resulte ser una serie caótica de formaciones y disoluciones de coaliciones, de entrar y salir de varios conjuntos estables. Después de todo, la vida real a menudo se ve de esa manera. Pero, si esa es la forma en que se desarrolla el juego, ¿por qué llamar a un conjunto estable una solución?

La explicación dada por von Neumann y Morgenstern para llamar a una solución estable una solución es que los conjuntos estables corresponden a *estándares de comportamiento* “sólidos” o “aceptados”. Es decir, representan los principios de conducta que la comunidad (es decir, el conjunto de jugadores) acepta como éticamente correctos. Ciertas imputaciones (que están fuera de un cierto conjunto estable) son condenadas como erróneas, y por lo tanto nunca pueden establecerse, aunque existan coaliciones que se beneficiarían de ellas. Por ejemplo, en las sociedades civilizadas, las personas más pobres en realidad no tienen que morir en la calle, pues las personas más ricas tienen que pagar más impuestos para evitar que esto suceda.

El concepto de von Neumann-Morgenstern de un conjunto estable como solución se basa, por lo tanto, en fundamentos extra-matemáticos. Uno puede aceptarlo como razonable o irrazonable (dependiendo, tal vez, del juego), pero hay espacio para el desacuerdo honesto.

Consideremos, por ejemplo, el juego *TRES*. Tiene un conjunto estable que ya hemos mencionado. Sea

$$X = \{(0, 1/2, 1/2), (1/2, 0, 1/2), (1/2, 1/2, 0)\}.$$

Estas son las tres imputaciones que vimos que podrían ocurrir para *TRES*.

Se puede probar que

TEOREMA 6.19. El conjunto X definido anteriormente es un conjunto estable para TRES.

Tenga en cuenta que hay imputaciones fuera de X que dominan a los miembros de X. Por ejemplo, (2/3, 1/3, 0) domina (1/2, 0, 1/2) a través de $\{P_1, P_2\}$. Por otro lado, (0, 1/2, 1/2) (un miembro de X) domina (2/3,1/3, 0) hasta $\{P_2, P_3\}$.

Como cada juego esencial de suma constante con tres jugadores es estratégicamente equivalente a *TRES*, podemos usar X para obtener un conjunto estable para cualquier juego. Por ejemplo, sea v el juego cuya forma normal se muestra en la Tabla 3. Entonces

$$\mu(\mathcal{S}) = k \cdot v(\mathcal{S}) + \sum_{\mathbf{P_I} \in \mathbf{S}} \mathbf{c_i}$$

para cada coalición $\mathcal{S}$, donde k = 12/13, c_1 = -3/13, c_2 = 4/13, y c_3 = 0. (Ver el cálculo apartado 7.4.2) Por lo tanto

$$v(\mathcal{S}) = (1/k)\cdot\mu(\mathcal{S}) + \sum_{P_i \in S}\left(-\frac{\mathbf{c_i}}{\mathbf{k}}\right)$$

Sustituyendo cada imputación $\vec{\mathbf{x}}$ en X por (1 / k)· $\vec{\mathbf{x}}$- (1 / k)· $\vec{\mathbf{c}}$entonces nos da un conjunto estable para v, es decir,

$$\{(19/24, 5/24, 0), (19/24, -1/3, 13/24), (1/4, 5/24, 13/24)\}.$$

TRES tiene otros conjuntos estables.

TEOREMA 6.20. Sea c una constante tal que

$$0 \leq c < 1/2.$$

Entonces el conjunto de imputaciones

$$Z_c = \{(c, x_2, x_3): x_2, x_3 \geq 0, x_2 + x_3 = 1- c\}$$

es un conjunto estable para *TRES*.

Se dice que el conjunto estable Z_c es *discriminatorio* hacia P_1. La idea es que P_2 y P_3 acepten dar a P_1 la cantidad c, y negociar entre ellos sobre la división del resto. Por simetría, existen conjuntos estables similares que son discriminatorios hacia P_2 y P_3, respectivamente. Son

$$Z_c = \{(x_1, c, x_3): x_1, x_3 \geq 0, x_1 + x_3 = 1- c\}$$

y

$$Z_c = \{(x_1, x_2, c): x_1, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = 1- c\}$$

ambos definidos para $0 \leq c < 1/2$.

Para juegos simples, hay algunos conjuntos estables e interesantes de imputaciones. Sea v un juego así, y llame a una coalición ganadora $\mathcal{S}$ *mínima* si cada coalición contenida adecuadamente en $\mathcal{S}$ está perdiendo. Por ejemplo, en el juego del Lake Wobegon, la coalición que consiste únicamente en los seis concejales es una coalición ganadora mínima.

TEOREMA 6.21. Sea v un juego simple de N-jugadores, y sea $\mathcal{S}$ una coalición ganadora mínima. Luego, el conjunto X de todas las imputaciones $\vec{\mathbf{x}}$ tales que

$$x_i = 0 \text{ para } P_i \notin \mathcal{S},$$

es un conjunto estable.

En el juego Lake Wobegon, este tipo de conjunto estable representa una situación en el que una coalición ganadora se niega a compartir el poder con los que no son miembros.

Durante algunos años se esperaba, pero no se demostró, que cada juego tenía un conjunto estable. Sin embargo, en 1967, se encontró un ejemplo de un juego de 10 jugadores sin un conjunto estable.

Existe una aplicación de la teoría de conjuntos estables a la economía (es decir, el modelo comercial de Edgeworth).

7.5.2 VALORES DE SHAPLEY

El segundo concepto de solución discutido aquí es el del *valor de Shapley*, que es un intento interesante de definir, de manera equitativa, una imputación que encarna lo que “deberían” ser los pagos finales de los jugadores. Intenta tener en cuenta la contribución de un jugador al éxito de las coaliciones a las que pertenece. Si la función característica del juego es v, y si $\mathcal{S}$ es una coalición a la que pertenece el jugador P_i, entonces el número

$$\delta(P_i, \mathcal{S}) = v(\mathcal{S}) - v(\mathcal{S} - \{P_i\})$$

es una medida de la cantidad que P_i ha contribuido a $\mathcal{S}$ uniéndose a ella. Estos números se usarán para definir el valor de Shapley, pero, en sí mismos, no son muy reveladores. Por ejemplo, considere el juego *TRES*. Para la gran coalición, tenemos

$$\delta(P_i, \mathcal{P}) = 0,$$

para cada jugador. Es decir, nadie contribuye con nada. Si $\mathcal{S}$ es una coalición de dos jugadores, entonces

$$\delta(P_i, \mathcal{S}) = 1,$$

para cada jugador en $\mathcal{S}$. Es decir, la suma de las contribuciones es mayor que $v(\mathcal{S})$. Ambos resultados son divertidos, pero inútiles.

Para comenzar nuestra derivación del valor de Shapley (llamado ϕ_i, para el jugador P_i), observe que una vez que los jugadores han acordado colectivamente una imputación, también podría suponerse que se trata de la gran coalición la que se forma. Esto se debe a que la condición de la racionalidad colectiva asegura que el total de todos los pagos (a través de la imputación) es $v(\mathcal{P})$. En cualquier caso, hacemos esta suposición y nos concentramos en el proceso por el cual se forma la gran coalición. Nuestra suposición es que este proceso comienza con un jugador; a ella se une un segundo, y luego se les une un tercero, etc. Por lo tanto, el proceso se caracteriza por una lista ordenada de los jugadores, y el k-ésimo jugador en la lista es el k-ésimo en unirse. Consideremos un ejemplo de cuatro personas. Supongamos que su función característica está dada por

$$v(\mathcal{P}) = 100, \quad v(\emptyset) = 0, \tag{47}$$

$$v(\{P_1\}) = 0, \quad v(\{P_2\}) = -10, \quad v(\{P_3\}) = 10, \quad v(\{P_4\}) = 0,$$

$$v(\{P_1, P_2\}) = 25, \quad v(\{P_1, P_3\}) = 30, \quad v(\{P_1, P_4\}) = 10,$$

$$v(\{P_2, P_3\}) = 10, \quad v(\{P_2, P_4\}) = 10, \quad v(\{P_3, P_4\}) = 30,$$

$$v(\{P_1, P_2, P_3\}) = 50, \quad v(\{P_1, P_2, P_4\}) = 30,$$

$$v(\{P_1, P_3, P_4\}) = 50, \quad v(\{P_2, P_3, P_4\}) = 40.$$

Aquí hay un orden de los jugadores a través del cual la gran coalición podría formar:

$$P_3, P_2, P_1, P_4. \tag{48}$$

Hay varias otras posibles ordenaciones. De hecho, hay

$$4 \times 3 \times 2 = 4!$$

de ellos. En general, el número sería $N!$. Pensamos en la elección del orden real por el cual la gran coalición surge como un evento aleatorio. Ya que hay, en general, $N!$ posibilidades, es razonable asignar probabilidad $1/N!$ a cada uno de ellos. Ahora, dado que la gran coalición se forma de acuerdo con el orden mostrado arriba en (48), el número

$$\delta(P1, \{P_3, P_2, P_1\}) = v(\{P_3, P_2, P_1\}) - v(\{P_3, P_2\}) = 50 - 10 = 40$$

es una medida de la contribución que hace P_1 a medida que ingresa a la creciente coalición. En general, la definición de ϕ_i. es hacer el mismo tipo de cálculo para cada uno de los $N!$ posibles ordenamientos de los jugadores; cada uno con una probabilidad $1/N!$ en el orden que ocurre; y se suman los resultados.

Utilizaremos esta definición de dos maneras. Primero, desarrollaremos una fórmula que hace que el cálculo de ϕ_i sea algo más fácil y, en segundo lugar, demostraremos que $\vec{\phi} = (\phi_1, ..., \phi_N)$ es una imputación. Por lo tanto, cada jugador podrá recuperar exactamente la cantidad aportada. Para derivar una fórmula para ϕ_i, hay que tener en cuenta que, entre los $N!$ términos en la suma que define ϕ_i, hay muchas duplicaciones. De hecho, supongamos que tenemos un orden de los jugadores tal que P_i ocurre en la posición k. Nombramos por $\mathcal{S}$ el conjunto de hasta k jugadores incluyendo a P_i en este orden. Entonces, si permutamos la parte ordenada antes de P_i, y permutamos la parte que viene después, obtenemos un nuevo orden en el que P_i nuevamente está en la posición k. Además, tanto para el orden original como el permutado, el término en la suma que define ϕ_i es

$$\delta(P_i, \mathcal{S}) = 1/(\mathcal{S}) - 1/(\mathcal{S} - \{P_i\}).$$

Hay $(k\text{-}1)!$ permutaciones de los jugadores que vienen antes de P_i, y $(N - k)!$ permutaciones de los jugadores que vienen después de P_i. Por lo tanto, el término $\delta(P_i, \mathcal{S})$ ocurre

$$(N - k)!\ (k - 1)!$$

veces. Sea $|\mathcal{S}|$ el número de jugadores en $\mathcal{S}$, por lo que finalmente obtenemos

$$\phi_i = \sum_{P_i \in} \frac{(N-|S|)!\cdot(|S|-1)!}{N!}\cdot\delta(P_i, S) \tag{49}$$

El número ϕ_i se llama el *valor Shapley* para P_i, y $\vec{\phi}$ se llama el *vector Shapley* para el juego. Antes de entrar en ejemplos, mencionamos que hay una forma alternativa de obtener esta fórmula. Puede hacerse enumerando tres axiomas que desearíamos que satisfaga el valor de Shapley. Entonces, se puede demostrar un teorema en el sentido de que (49) da el valor único que satisface los axiomas. Después de considerar algunos ejemplos, demostramos que ϕ_i es una imputación.

Considere, primero, el juego cuya forma normal se muestra en la Tabla 3. Su función característica se ha calculado en el apartado 7.4. Para calcular ϕ_1, tenga en cuenta que hay cuatro coaliciones que contienen P_1, que son

$$\{P_1\},\ \{P_1, P_2\},\ \{P_1, P_3\},\ \{P_1, P_2, P_3\}$$

Por lo tanto, (49) tiene cuatro términos en este caso. Para cada una de las cuatro coaliciones que contienen P_1, calculamos

$$\delta(P_1, \{P_1\}) = 1/4 - 0 = 1/4, \qquad \delta(P_1, \{P_1, P_2\}) = 1 - (-1/3) = 4/3,$$

$$\delta(P_1, \{P_1, P_3\}) = 4/3 - 0 = 4/3, \qquad \delta(P_1, \{P_1, P_2, P_3\}) = 1 - 3/4 = 1/4.$$

Entonces

$$\phi_1 = \frac{2!\cdot 0!}{3!}\cdot(1/4) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}\cdot(4/3) + \frac{1!\cdot 1!}{3!}\cdot(4/3) + \frac{0!\cdot 2!}{3!}\cdot(1/4) = 11/18$$

Por cálculos similares, tenemos

$$\phi_2 = 1/36, \qquad \phi_3 = 13/36.$$

Tenga en cuenta que $\vec{\phi}$ es una imputación. Los valores de Shapley pueden interpretarse como un reflejo del poder de negociación de los jugadores. En este ejemplo, el valor de Shapley de P_1 es el más grande de los tres, lo que indica que es el más fuerte; por otro lado, el valor de P_2 es muy pequeño. El jugador P_3 está en el medio. Un vistazo a la función característica respalda esta interpretación.

El vector de Shapley para este juego se puede calcular de otra manera. Tenga en cuenta, primero, que, en el juego de *TRES*, el vector de Shapley es seguro (1/3, 1/3, 1/3). Esto se debe a que los jugadores tienen roles absolutamente simétricos en el juego. (También es fácil verificar mediante cálculo que esto es cierto.) En cualquier caso, cualquier juego v esencial de suma constante para tres jugadores es estratégicamente equivalente a *TRES*. Podemos usar la transformación introducida en Teorema 6.13 para obtener el vector Shapley para v.

Para el juego dado en (45), se puede verificar que el vector Shapley es

$$(1/8, 5/8, 1/4).$$

Estos números parecen reflejar razonablemente la ventaja que tiene el jugador P_2 en el juego.

Para el juego del automóvil usado, los valores de Shapley son

$$\phi_N = 433.33\ldots, \quad \phi_A = 83.33\ldots, \quad \phi_M = 183.33\ldots.$$

Por lo tanto, Mitchell obtiene el auto por $433.33, pero tiene que pagar a Agnew $83.33 como soborno por no hacer una oferta en su contra. El vector de Shapley indica que Nixon está en la posición más poderosa.

TEOREMA 6.22. Sea v un juego en forma de función característica. Entonces el vector de Shapley para v es una imputación.

Para otro ejemplo, calculamos los valores de Shapley para el juego de Lake Wobegon. Comenzamos con ϕ_M. Los términos no nulos en (49) son aquellos para los cuales $\mathcal{S}$ - $\{M\}$ es una coalición perdedora, pero $\mathcal{S}$ es ganadora. Es decir, son coaliciones que, si se elimina al Alcalde, pueden aprobar un proyecto de ley, pero no pueden anular el veto de un alcalde. Un poco de razonamiento muestra que hay cuatro tipos de coaliciones ganadoras, a saber,

(1) $\mathcal{S}$ contiene al Alcalde, tres de los Concejales y el Presidente.

(2) $\mathcal{S}$ contiene al Alcalde y cuatro Concejales.

(3) $\mathcal{S}$ contiene al Alcalde, cuatro Concejales y el Presidente.

(4) $\mathcal{S}$ contiene al Alcalde y cinco Concejales.

Existen

$$\binom{6}{3} = 20$$

conjuntos del primer tipo. Desde $|\mathcal{S}| = 5$,

$$\frac{(N-|S|)!\cdot(|S|-1)!}{N!} = \frac{(8-5)!\cdot(5-1)!}{8!} = 1/280$$

Por lo tanto, la contribución de ϕ_M en estos conjuntos es

$$20/280 = 1/14.$$

Hay 15 conjuntos del segundo tipo, y la contribución a la ϕ_M de ellos es

$$(15)\cdot\frac{(8-5)!\cdot(5-1)!}{8!} = 3/56$$

Hay 15 conjuntos del tercer tipo, y la contribución a la ϕ_M de ellos es

$$(15)\cdot\frac{(8-6)!\cdot(6-1)!}{8!} = 5/56$$

Finalmente, hay 6 conjuntos del cuarto tipo, y la contribución a la ϕ_M de ellos es

$$(6)\cdot\frac{(8-6)!\cdot(6-1)!}{8!} = 1/28$$

Agregando estos cuatro números, obtenemos

$$\phi_M = 1/14 + 3/56 + 5/56 + 1/28 = 1/4.$$

Para calcular ϕ_C, tenga en cuenta que solo hay dos tipos de conjuntos que hacen una contribución a ϕ_C, es decir,

(1) $\mathcal{S}$ contiene el presidente, tres concejales y el alcalde. (En este caso, el voto entre los concejales es un empate, el presidente vota para aprobar y el alcalde lo firma).

(2) $\mathcal{S}$ contiene el presidente y cinco concejales. (En este caso, el proyecto de ley es vetado, pero con el voto del Presidente, el veto queda anulado).

Hay 20 conjuntos del primer tipo y 6 del segundo. Entonces

$$\phi_C = (20) \cdot \frac{(8-5)! \cdot (5-1)!}{8!} + (6) \cdot \frac{(8-6)! \cdot (6-1)!}{8!} = 3/28$$

Ahora, la suma de los ϕ's es 1, y todos los ϕ's seguramente son iguales (por simetría). Por lo tanto, para cada i,

$$\phi_i = (1/6)\ (1- 1/4 - 3/28) = 3/28.$$

Estos resultados dicen que el Alcalde tiene mucho más poder que un Concejal o el Presidente. Resulta que el poder del Presidente es exactamente igual al de un Concejal.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE NASH

TEOREMA 5.4. Existe un procedimiento único de arbitraje Ψ que satisface los axiomas de Nash.

Primero, describimos cómo calcular $\Psi(P, (u_o, v_o))$; luego demostramos que los axiomas de Nash están satisfechos; luego, finalmente, mostramos que solo hay un procedimiento de arbitraje de este tipo. Al calcular Ψ, hay dos casos principales y tres casos secundarios del segundo.

Caso (i). Existe $(u, v) \in P$ tal que $u > u$o y $v > v$o. Sea K el conjunto de todos (u, v) que satisfaga estas condiciones. Luego definimos

$$g(u, v) = (u - u_o)(v - v_o), \text{ para } (u, v) \in K.$$

Sea $(u^*, v^*) \in K$ el punto en el que $g(u, v)$ alcanza su valor máximo. [El punto (u^*, v^*) existe y es único de acuerdo con el Lema 5.5 que se demostrará más adelante.] Definimos

$$\Psi(P, (u_o, v_o)) = (u^*, v^*).$$

Caso (ii). No existe $(u, v) \in P$ tal que $u > u_o$ y $v > v_o$. Considera los siguientes tres subcasos.

Caso (iia). Existe $(u_o, v) \in P$ con $v > v_o$.

Caso (iib). Existe $(u, v_o) \in P$ con $u > u_o$.

Caso (iic). Ni (iia) ni (iib) es verdadero.

Lo primero que debe tener en cuenta sobre estos subcasos es que (iia) y (iib) no pueden ser verdaderos. Para, supongamos que son y definen

$$(u', v') = (1/2)(u_o, v_o) + (1/2)(u, v_o).$$

Entonces (u', v') está en P (por convexidad) y satisface la condición de Caso (i). Como el Caso (i) no se cumple, esto es una contradicción y, por lo tanto, (iia) y (iib) no pueden sostenerse. Ahora definimos $\Psi(P, (u_o, v_o))$ en cada uno de estos casos secundarios.

En el Caso (iia), sea v^* el v más grande para el cual (u_o, v) está en P [v^* existe porque P es cerrado y acotado]; luego definimos $\Psi(P, (u_o, v_o)) = (u_o, v^*)$.

En el caso (iib), que u^* sea el más grande u para el cual (u, v_o) está en P; luego defina $\Psi(P, (u_o, v_o)) = (u^*, v_o)$.

En aso (iic), Sea $\Psi(P, (u_o, \mathrm{v}_o)) = (u_o, v_o)$.

Nuestro procedimiento de arbitraje ahora se define en todos los casos posibles. Ahora demostramos que los axiomas de Nash se cumplen. Los Axiomas (1) y (3) son obvios en todos los casos. Supongamos que el Axioma (2) no es verdadero. Entonces existe $(u, v) \in P$ que domina (u^*, v^*) y es diferente de él. Ahora, en el caso (i), tenemos

$$(u - u_o) \geq (u^* - u_o), \quad (v - v_o) \geq (v^* - v_o),$$

y al menos una de estas desigualdades es estricta [si $(\mathrm{u}, \mathrm{v}) \neq (\mathrm{u}\ ^*, \mathrm{v}\ ^*)$]. Así,

$$g(u, v) > g\ (u^*, v^*).$$

Esto es una contradicción. En el Caso (iia), debemos tener $u^* = u_o = u$, ya que Caso (iib) no se cumple. Por lo tanto, $v > v^*$. Pero esto contradice la definición de v^*. Case (iib) se trata de una manera similar. En caso (iic), $(u^*, v^*) = (u_o, v_o)$. Si $u > u_o$, entonces Case (iib) se mantiene; si $v > v_o$, entonces se cumple Caso (iia). Dado que ninguno de estos se cumple, hemos llegado de nuevo a una contradicción. Concluimos que Axioma (2) se cumple.

Ahora mostramos que Axioma (4) se mantiene. En el caso (i), el valor máximo de g sobre $K \cap P'$ es menor o igual que su máximo sobre K. Pero (u^*, v^*) pertenece a P' y por lo tanto los dos máximos son iguales. Así

$$\Psi(P', (u_o, v_o)) = \Psi(P, (u_o, v_o)).$$

Los casos (iia) y (iib) son similares; Caso (iic) es fácil.

Para verificar Axioma (5), suponga primero que se cumple el Caso (i). Entonces, el Caso (i) también es válido para la región de pago *P'* con el punto status quo ($a \cdot u_o + b$, $c \cdot \mathrm{v}_o + d$). también

$$(u' - (a \cdot u_o + b)) \cdot (v' - (\mathrm{c} \cdot \mathrm{v}_o + d)) = a \cdot c\ (u - u_o) \cdot (v - v_o).$$

Como a, $c > 0$, el máximo del lado izquierdo de la ecuación anterior se alcanza en ($a \cdot u^* + b$, $c \cdot \mathrm{v}^* + d$). Por lo tanto, el axioma se cumple para el Caso (i). El razonamiento en los otros casos es similar.

Finalmente, llegamos a Axioma (6). Supongamos que $u^* \neq v^*$. Por la condición de simetría, $(v^*, u^*) \in P$. En el caso (i), tenemos

$$g(v^*, u^*) = \mathrm{g}\ (u^*, v^*).$$

En el Lema 5.5, g alcanza su máximo solo en un punto, por lo que esto es una contradicción. Los casos (iia) y (iib) no pueden mantenerse, ya que, si uno se mantiene, también lo hará el otro (por simetría). Como se demostró anteriormente, esto es imposible. Caso (iic) es obvio.

Queda por demostrar que Ψ es único. Supongamos que hay otro procedimiento de arbitraje Ψ que satisface los axiomas de Nash. Como son diferentes, hay una región de pago P y un punto de status quo $(u_o, v_o) \in P$ tal que

$$(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \bar{\boldsymbol{\Psi}}\ (P, (u_o, v_o))\ \mathrm{o} \neq \Psi\ (P, (u_o, v_o)) = (u^*, v^*).$$

Supongamos que el caso (i) es válido. Entonces $u^* > u_o$ y $v^* > v_o$. Definimos

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}_o}{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_o} \qquad \mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v} - \mathbf{v}_o}{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_o}$$

Este cambio lineal de variables toma el valor (u_o, v_o) en (0,0) y (u^*, v^*) en (1,1). Por lo tanto, por Axioma (5),

$$\Psi(\mathrm{P'}, (0,0)) = (1, 1).$$

También por Axioma (5),

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}}\ (\mathrm{P'}, (0,0)) \neq (1,1).$$

Ahora verificamos que si $(u', v') \in P'$, entonces

$$u' + v' \leq 2.$$

Supongamos que esto no es cierto. Por la convexidad de P',

$$t(u', v') + (1- t) (l, 1) \in \mathrm{P}', 0 \leq t \leq 1.$$

Ahora defina, para $0 \leq t \leq 1$,

$$h (t) = g (t (u', v') + (1- t) (1, 1)) = (t \cdot u' + (1- t)) (t \cdot v' + (1- t)).$$

Entonces $h(0) = 1$ y la derivada de $h(\mathrm{t})$ es

$$h'(t) = 2t \cdot u' \cdot v' + (1- 2 \cdot t) (u' + v') - 2 \cdot (1- t),$$

así que:

$$h'(0) = u' + v' - 2 > 0.$$

Por lo tanto, existe un pequeño positivo t tal h $(t) > 1$. Pero esto contradice la definición de (u^*, v^*), ya que $g(1, 1) = 1$.

Ahora, sea P el casco convexo simétrico de P'. Luego, por el Lema 5.3, $s + t \leq 2$ para todos $(s, t) \in P$, y, por lo tanto, si $(a, a) \in P$, $a \leq 1$. Como P es simétrica, se deduce de Axioma (6) que

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}} (\hat{\mathbf{P}} , (0, 0)) = (1, 1),$$

ya que, de lo contrario, existiría un punto (a, a) en P con $a > 1$. Pero, luego, por Axioma (4), aplicado a $\bar{\boldsymbol{\Psi}}$,

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}} (\mathrm{P}', (0, 0)) = (1,1).$$

Esta es una contradicción que prueba la singularidad en el Caso (i).

Esto deja a Casos (iia), (iib) y (iic). Ahora, (iic) es fácil por Axioma (1). Los casos (iia) y (iib) son similares, por lo que solo consideramos el primero de ellos. Como no estamos en el caso (i), vemos, desde Axioma (1), que $u = u_o = u^*$. Como ambos (u^*, v^*) y (u, v) son óptimos de Pareto, $v = v^*$. Esto contradice la suposición de que (u, v) y (u^*, v^*) son diferentes.

LEMA 5.5. Sea P una región de pago y $(u_o, v_o) \in P$. Suponga que existe un punto $(u, v) \in P$ con

$$u > u_o, v > v_o,$$

y deje que K sea el conjunto de todos $(u, v) \in P$ que satisfagan estas desigualdades. Definir, en K,

$$g\ (u, v) = (u - u_o)\ (v - v_\theta).$$

Entonces g alcanza su máximo en K en uno y solo un punto.

El conjunto

$$K' = \{(u, v) \in P: u \leq u_o, v \leq v_o\}$$

es un conjunto cerrado que contiene K. Por un teorema del análisis matemático, la función g, siendo continua, alcanza su máximo en K'. Claramente, el máximo de g sobre K' es el mismo que su máximo sobre K.

Queda por demostrar que el máximo se alcanza solo una vez. Supongamos que se alcanza en dos puntos diferentes, (u_l, v_l) y (u_2, v_2). Sea

$$M = \max g(u, v) = \mathrm{g}(u_1, v_1) = g(u_2, v_2)$$

Ahora cualquiera

$$u_1 > u_2, \qquad v_1 < v_2$$

o

$$u_1 < u_2, \qquad v_1 > v_2$$

Demostraremos el lema asumiendo la primera posibilidad. La demostración de la segunda posibilidad asumida es similar.

Por la convexidad de P,

$$(u_3, v_3) = (1/2)\cdot(u_1, v_1) + (1/2)\cdot(u_2, v_2) \in P$$

Calculamos

$$\mathbf{g(u_3, v_3) = \left(\frac{u_1 + u_2}{2} - u_o\right)\cdot\left(\frac{v_1 + v_2}{2} - v_o\right) = \left(\frac{u_1 - u_o}{2} + \frac{u_2 - u_o}{2}\right)\cdot\left(\frac{v_1 - v_o}{2} + \frac{v_2 - v_o}{2}\right) =}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{4}\Big[(u_1 - u_o)\cdot(v_1 - v_o) + (u_2 - u_o)\cdot(v_2 - v_o) + (u_1 - u_o)\cdot(v_2 - v_o) + (u_2 - u_o)\cdot(v_1 - v_o)\Big] =}$$

$$\mathbf{= \frac{1}{4}\Big[2\cdot M + 2\cdot M + (u_1 - u_o)\cdot(v_2 - v_o) + (u_2 - u_o)\cdot(v_1 - v_o) - (u_1 - u_o)\cdot(v_1 - v_o) - (u_2 - u_o)\cdot(v_2 - v_o)\Big] =}$$

$$\mathbf{= M + \frac{1}{4}\Big[(v_2 - v_o)\cdot(u_1 - u_2) - (v_1 - v_o)(u_2 - u_1)\Big] = M + \frac{1}{4}\Big[(v_2 - v_1)\cdot(u_1 - u_2)\Big] \;\; > M}$$

Esto es una contradicción porque M es el máximo.

CONJUNTO DE PARETO

Consideremos un conjunto Ω en el plano (U, V) (Fig. 27). Cada punto de este conjunto tiene una de las siguientes propiedades: todos los puntos cercanos a él pertenecen al conjunto Ω (*punto interior* de Ω), o tan cerca como se quiera de él hay puntos que pertenecen a Ω y puntos que no pertenecen a Ω (*puntos de frontera* del conjunto Ω). Un punto de frontera puede o no pertenecer al conjunto Ω. Aquí trataremos conjuntos que contienen a todos sus puntos de frontera. EI conjunto de los puntos de frontera de un conjunto Ω se *denomina fron*tera de Ω. Notación: $\partial\Omega$.

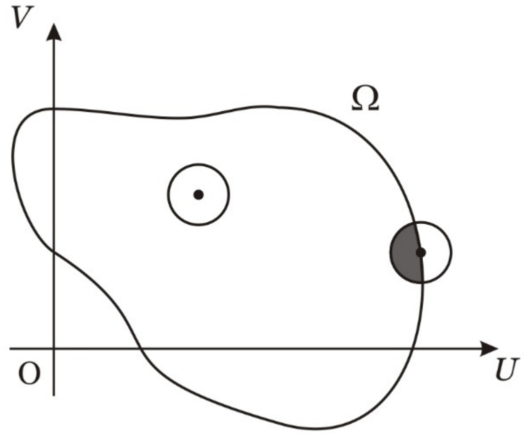

Fig. 27 Conjunto Ω en el plano (U, V) y su frontera $\partial\Omega$

Sea M un punto arbitrario del conjunto Ω (interior o de frontera) de coordenadas (U, V). Tratemos de resolver el problema siguiente: ¿Es posible moverse desde el punto M hasta un punto cercano sin salir de Ω, de modo que ambas coordenadas de M aumenten? Si M es un punto interior, indudablemente, se puede. Pero si M es un punto de frontera, esto no siempre es posible (Fig. 28.a). Para los puntos M_1, M_2, M_3 la respuesta a la pregunta es afirmativa, mas no lo es para los puntos del segmento vertical AB (podemos aumentar V, pero U se mantiene constante). igualmente, moviendo un punto del segmento horizontal PQ hacia la derecha, aumenta la abscisa U, pero la ordenada V permanece constante. En cuanto al arco BQ, moviéndose por él aumenta una de las coordenadas y disminuye la otra (Fig. 28.b).

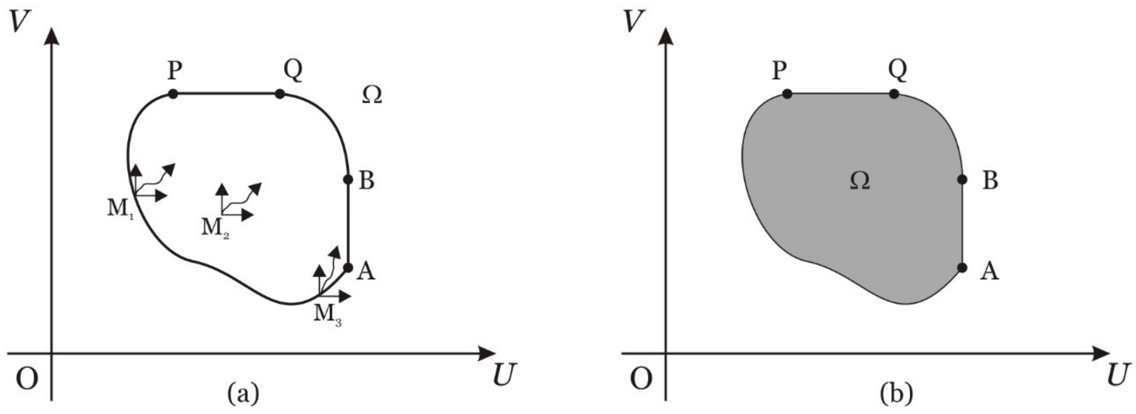

Fig. 28 Puntos que cumplen y no la condición de que si aumentan las coordenadas del punto este sigue perteneciendo a **Ω**

Partiendo de este análisis podemos agrupar los puntos del conjunto Ω en tres clases:

- A la primera clase pertenecen los puntos que se pueden desplazar sin abandonar Ω aumentando ambas coordenadas (en esta clase están todos los puntos interiores de Ω y algunos puntos de frontera),
- La segunda clase está formada por los puntos que al moverse por Ω solo pueden aumentar una de las coordenadas dejando constante la otra (por ejemplo, el segmento vertical AB y el segmento horizontal PQ de la frontera de Ω),
- En la tercera clase están los puntos que al moverse por el conjunto Ω solo pueden disminuir una de sus coordenadas o ambas (por ejemplo, el arco BQ de la frontera $\partial\Omega$).

El conjunto de puntos de la tercera clase se denomina *conjunto de Pareto* (*frontera de Pareto*) del conjunto Ω. (línea gruesa en la Fig. 28.b).

MÉTODO DEL PUNTO EFICIENTE

Sea ω un conjunto del plano (x, y) (Fig. 29.a) tal que en cada uno de sus puntos están definidas dos funciones continuas $U = \Phi(x, y)$, $V = \Psi(x, y)$. Veamos el siguiente problema: hallar en el conjunto ω un punto (x^*, y^*) en el cual

$$\Phi(x,y) = \max_{(x,y)\in\omega} \Phi(x,y) \quad \text{y} \quad \Psi(x,y) = \max_{(x,y)\in\omega} \Psi(x,y)$$

En el caso general, este problema no tiene solución. En efecto, dibujemos en el plano (U, V) todos los puntos de coordenadas $U = \Phi(x, y)$, $V = \Psi(x, y)$, (x, y) $\in \omega$.

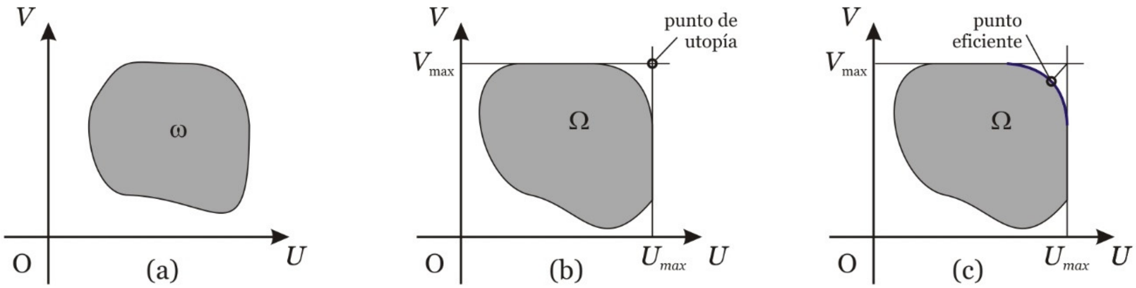

Fig. 29 (a) conjunto w en el plano (x, y) (b) Punto de utopía (c) punto eficiente

En la Fig. 29.b se ve que el valor máximo de U (U_{max}) y el valor máxima de V (V_{max}). se alcanzan en puntos diferentes, y que el punto de coordenadas (U_{max}, V_{max}) no pertenece al conjunto Ω.

Asi, en su planteamiento-inicial el problema no tiene solución, y satisfacer ambas exigencias al mismo tiempo no es posible. Por tanto, se debe buscar una solución pactada.

Describamos. uno de estos métodos de búsqueda de soluciones pactadas, el cual está basado en el uso de los conjuntos de Pareto.

Primero, en el plano (U, V) se define un punto objetivo cuyas coordenadas son una combinaci6n de los mejores valores de ambos criterios U y V. En este caso el punto objetivo es (U_{max}, V_{max}).

Como para las restricciones dadas tal punto casi nunca existe, se acostumbra llamarlo *punto de utopía*. Después se construye el conjunto de Pareto y en él se busca el *punto eficiente* (*punto ideal*), que es el punto más cercano al punto de utopía (Fig. 29.c) .

9 BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica

Morris, Peter (1994), *Introduction to Game Theory*, New York, Editorial Springer.

Bibliografía complementaria

Barron, Emmanuel N. (2008), *Game Theory an Introduction*, Wiley-Interscience A John Wiley & Sons, Inc., Publication.

Binmore, Ken (2017), *La Teoría de Juegos. Una Breve Introducción*, Madrid, Alianza Editiorial.

Casas Méndez, Balbina; Fiestas Janeiro, M. Gloria; García Jurado, Ignacio; Gonzalez Díaz, Julio (2012), *Introducción a la Teoría de Juegos*, Santiago de Compostela, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela.

Cerdá, Emilio; Pérez, Joaquín; Jimeno, José Luis (2004), *Teoría de Juegos*, Madrid, Pearson Educación, S.A.

Mehlmann, Alexander (2000), *The Game's Afoot! Game Theory in Myth and Paradox*, Providence, American Mathematical Society.

Shikin, Ievgueni Víktorovich (2003), *Introducción a la Teoría de Juegos*, Moscú, Editorial URSS.

Vega-Redondo, Fernando (2003), *Economics and the theory of games*, Cambridge, Cambridge University Press.