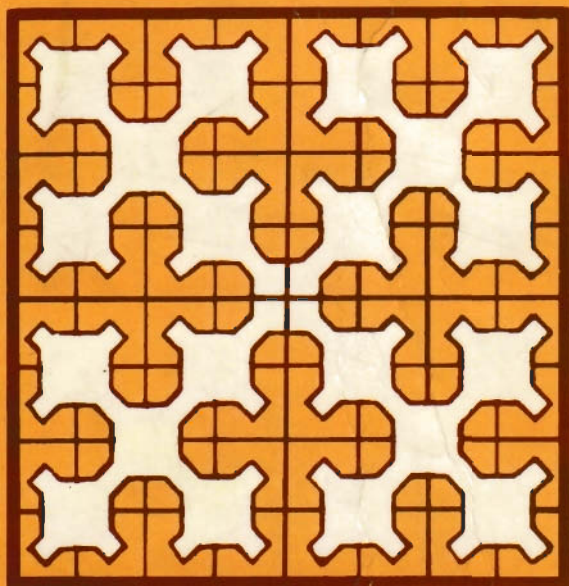


# TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

C. Kosniowski



*editorial reverté, s.a.*

001666

# TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

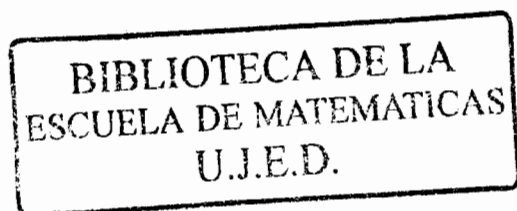
001666

# TOPOLOGÍA ALGEBRAICA

**CZES KOSNIOWSKI**

Lecturer in Mathematics

The University of Newcastle upon Tyne



**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**

Barcelona-Bogotá-Buenos Aires-Caracas-México

*Título de la obra original:*

**A first course in algebraic topology**

*Edición original en lengua inglesa publicada por:*

**Cambridge University Press, Cambridge (England)**

**Copyright © Cambridge University Press**

*Versión española por:*

**Manuel Castellet Solanas**

Catedrático de Matemáticas de la Facultad de Ciencias

Universidad Autónoma de Barcelona

**Propiedad de:**

**EDITORIAL REVERTÉ, S. A.**

**Loreto, 13-15, Local B**

**08029 Barcelona - ESPAÑA**

E-mail: [reverte@reverte.com](mailto:reverte@reverte.com)

Internet: <http://www.reverte.com>

Reservados todos los derechos. La reproducción total o parcial de esta obra, por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, queda rigurosamente prohibida sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas por las leyes.

Edición en español

**© EDITORIAL REVERTÉ, S. A., 1986**

Impreso en España - Printed in Spain

ISBN - 84 - 291 - 5098 - 2

Imprime: Publidisa - [www.publidisa.com](http://www.publidisa.com)

# Presentación

*Este libro proporciona un amplio surtido de cursos introductorios auto-contenidos de topología algebraica para el estudiante medio. Ha sido escrito con espíritu geométrico y está profusamente ilustrado (después de todo, la topología es una rama de la geometría). Se ha evitado en lo posible la abstracción y, en general, se ha seguido un enfoque bastante pedestre en el momento de introducir conceptos nuevos. En general, los prerrequisitos necesarios se reducen al mínimo y no se supone ningún conocimiento especial de topología general, con lo que el libro es especialmente adecuado para un primer curso de topología con especial énfasis en la topología algebraica. Utilizando este libro, el profesor dispondrá de mucha libertad para configurar un curso de primer ciclo («undergraduate») o de inicio al segundo ciclo.*

*A lo largo del libro hay numerosos ejercicios de diferente grado de dificultad para ayudar al lector y al mismo tiempo comprobar su nivel de asimilación. Desde luego, es aconsejable resolver el mayor número posible de ejercicios; sin embargo, no es necesario hacerlos todos, ya que raramente en ningún momento se supone que el lector haya resuelto los ejercicios; normalmente, cuando se necesita la solución de un ejercicio, ésta está incluida en el texto.*

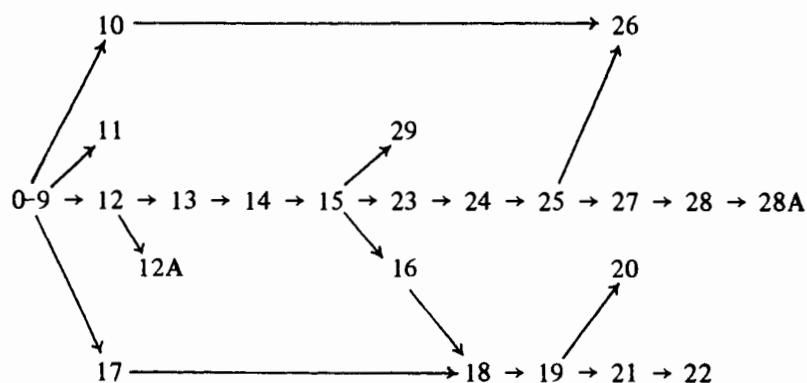
*El contenido de este libro abarca algunos temas de topología y de topología algebraica seleccionados por su «capacidad para ser asimilados»; son, posiblemente, las partes más elegantes de la materia. En el último capítulo se dan algunas recomendaciones para el que desee seguir estudiando topología algebraica.*

*Aproximadamente una cuarta parte del libro está destinada a la topología general y tres cuartas partes a la topología algebraica. La topología general que presentamos está exenta de las patologías usuales. Se cubre suficiente material para que el lector pueda pasar rápidamente a la parte «importante» de la topología. En los capítulos dedicados a la topología algebraica se hace especial hincapié en el grupo fundamental de un espacio. Los estudiantes suelen asimilar con facilidad el concepto de grupo fundamental, que proporciona una buena introducción a la esencia de la topología algebraica. Se estudian con detalle la teoría de espacios recubridores y el teorema de Seifert-Van Kampen, que son usados para calcular grupos fundamentales. El libro incluye también otros temas como variedades y superficies, el teorema de la curva de Jordan (como un apéndice del Capítulo 12), teoría de nudos y un capítulo introductorio a la homología singular.*

*Puesto que este libro trata de topología y no de historia de la topología, no hemos incluido sistemáticamente nombres y fechas.*

*El libro no debe ser estudiado necesariamente de forma lineal. El diagrama siguiente muestra aproximadamente la interdependencia de los diversos capítulos. Por ejem-*

plo, para poder comprender el Capítulo 18, el lector deberá haber estudiado previamente los Capítulos 0-9, 12-16 y 17.



Czes Kosniowski  
Newcastle-upon-Tyne

# Nota del traductor

Dos consideraciones sobre la edición en lengua castellana de este libro: una sobre el contenido, otra sobre el lenguaje.

Ampliando los comentarios que hace el autor sobre la adaptabilidad del libro a los curricula anglosajones, únicamente añadir que este texto encaja perfectamente con los conocimientos de topología general y de topología algebraica que debe poseer un estudiante español al finalizar el primer ciclo de la licenciatura de Matemáticas. El profesor deberá excluir, posiblemente, algunos capítulos según sus preferencias; como alternativas cabe sugerir los siguientes grupos: 12A, 17-22, 27-28A, 29.

El lenguaje merece un breve comentario. El traductor ha procurado en lo posible ser fiel a la expresividad del vocabulario utilizado por el autor. La topología es una de las disciplinas más ricas en expresiones folklóricas, motivadas por la imaginación y por la interpretación geométrica, expresiones que, a veces, pueden parecer extrañas en un texto, pero que forman parte del léxico de los topólogos. Y, en consecuencia, no hay que prescindir de ellas.

# Índice analítico

Presentación .....	V
Nota del traductor .....	VII
0 Conjuntos y grupos .....	1
1 Material básico: espacios métricos .....	7
2 Espacios topológicos .....	13
3 Aplicaciones continuas .....	19
4 Topología inducida .....	23
5 Topología cociente (y acciones de grupos sobre espacios) .....	29
6 Espacio producto .....	41
7 Espacio compacto .....	47
8 Espacios de Hausdorff .....	55
9 Espacios conexos .....	63
10 Los problemas del pastel .....	69
11 Variedades y superficies .....	75
12 Caminos y espacios arco conexos .....	99
12A El teorema de la curva de Jordan .....	107
13 Homotopías de aplicaciones continuas .....	117
14 «Multiplicación» de caminos .....	125
15 El grupo fundamental .....	133
16 El grupo fundamental de la circunferencia .....	145
17 Espacios recubridores .....	153
18 El grupo fundamental de un espacio recubridor .....	161
19 El grupo fundamental de un espacio de órbitas .....	165
20 Los teoremas de Borsuk-Ulam y del bocadillo de jamón .....	169
21 Más sobre espacios recubridores: Teoremas de elevación .....	175
22 Más sobre espacios recubridores: Teoremas de existencia .....	183
23 El teorema de Seifert-Van Kampen: I. Generadores .....	189
24 El teorema de Seifert-Van Kampen: II. Relaciones .....	201



25	El teorema de Seifert-Van Kampen: III. Cálculos .....	209
26	El grupo fundamental de una superficie .....	217
27	Nudos: I. Conceptos básicos y nudos tóricos .....	225
28	Nudos: II. Nudos dóciles .....	237
	28A Tabla de nudos .....	251
29	Homología singular: Introducción .....	257
30	Libros recomendados para avanzar en topología algebraica .....	281
	Índice alfabético .....	283

# Capítulo 0

## Conjuntos y grupos

En este capítulo damos algunas definiciones y resultados básicos de teoría de conjuntos y de teoría de grupos que usaremos más adelante. Este capítulo servirá de referencia cuando sea necesario.

Para conjuntos  $X$ ,  $Y$  la notación  $Y \subseteq X$  significa que  $Y$  es un subconjunto de  $X$  e  $Y \subset X$  significa que  $Y$  es un subconjunto de  $X$  distinto de  $X$ . Si  $Y \subseteq X$  denotamos por  $X - Y$  el conjunto de elementos de  $X$  que no pertenecen a  $Y$ . Al conjunto vacío lo denotaremos por  $\emptyset$ .

El producto *cartesiano* o *directo* de dos conjuntos  $X$  e  $Y$  es el conjunto de pares ordenados de la forma  $(x, y)$ , donde  $x \in X$  e  $y \in Y$ , es decir

$$X \times Y = \{ (x, y); x \in X, y \in Y \} .$$

El producto cartesiano de una colección finita  $\{X_i; i=1, 2, \dots, n\}$  de conjuntos puede definirse de manera análoga:

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n \} .$$

Una *función* o *aplicación*  $f: X \rightarrow Y$  entre dos conjuntos es una correspondencia que asocia a cada elemento  $x$  de  $X$  un único elemento  $f(x)$  de  $Y$ . La *función identidad* de un conjunto  $X$  es la función  $1: X \rightarrow X$  tal que  $1(x) = x$  para todo  $x \in X$ . La *imagen* de la función  $f: X \rightarrow Y$  está definida por

$$\text{Im}(f) = f(X) = \{ y \in Y; y=f(x) \text{ para algún } x \in X \} .$$

Obsérvese que si  $W, W'$  son dos subconjuntos de  $X$ ,

$$\begin{aligned} f(W \cup W') &= f(W) \cup f(W'), \\ f(W \cap W') &\subseteq f(W) \cap f(W'). \end{aligned}$$

Más generalmente, si  $\{W_j; j \in J\}$  es una colección de subconjuntos de  $X$ , donde  $J$  es un conjunto de índices, entonces

$$\begin{aligned} f(\cup_{j \in J} W_j) &= \cup_{j \in J} f(W_j), \\ f(\cap_{j \in J} W_j) &\subseteq \cap_{j \in J} f(W_j). \end{aligned}$$

A menudo, si no hay peligro de confusión, escribiremos simplemente  $f$  en lugar de  $f: X \rightarrow Y$ . Toda función  $f: X \rightarrow Y$  define una función de  $X$  en  $f(X)$  que denotaremos también por  $f$ . Si  $A$  es un subconjunto de  $X$ , la restricción de  $f$  a  $A$  será denotada por  $f|_A$ ; es la función  $f|_A: A \rightarrow Y$  definida por  $(f|_A)(a) = f(a)$  para  $a \in A$ .

Si  $Z$  es un subconjunto de  $Y$  y  $f: X \rightarrow Y$  es una función, la imagen inversa de  $Z$  por  $f$  es

$$f^{-1}(Z) = \{x \in X; f(x) \in Z\}.$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} f^{-1}(\cup_{j \in J} Z_j) &= \cup_{j \in J} f^{-1}(Z_j) \\ f^{-1}(\cap_{j \in J} Z_j) &= \cap_{j \in J} f^{-1}(Z_j), \\ f^{-1}(Y - Z_j) &= X - f^{-1}(Z_j), \end{aligned}$$

para cualquier colección  $\{Z_j; j \in J\}$  de subconjuntos  $Z_j$  de  $Y$ .

Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es *inyectiva* si  $x_1 \neq x_2, x_1, x_2 \in X$ , implica  $f(x_1) \neq f(x_2)$ . Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es *exhaustiva* si  $f(X) = Y$ . Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  se llama *biyectiva* si es a la vez inyectiva y exhaustiva; en este caso existe una aplicación inversa  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  definida por

$$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x).$$

Si  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son aplicaciones, la aplicación compuesta  $gf: X \rightarrow Z$  está definida por

$$gf(x) = g(f(x)), x \in X.$$

Si  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación biyectiva,  $ff^{-1}: Y \rightarrow Y$  y  $f^{-1}f: X \rightarrow X$  son ambas las aplicaciones identidad. Recíprocamente, si  $gf: X \rightarrow X$  y  $fg: Y \rightarrow Y$  son ambas las aplicaciones identidad, entonces  $f$  y  $g$  son aplicaciones biyectivas, cada una de ellas la inversa de la otra. La condición de que  $gf: X \rightarrow X$  sea la aplicación identidad, implica que  $f$  es inyectiva y  $g$  es exhaustiva.

Una relación en un conjunto  $X$  es un subconjunto  $\sim$  de  $X \times X$ . Escribiremos usualmente  $x \sim y$  si  $(x, y) \in \sim$ . Una relación  $\sim$  en  $X$  es una *relación de equivalencia* si cumple

las tres condiciones siguientes:

- (i) reflexiva:  $x \sim x$  para todo  $x \in X$ .
- (ii) simétrica: Si  $x \sim y$  entonces  $y \sim x$ .
- (iii) transitiva: Si  $x \sim y$  e  $y \sim z$  entonces  $x \sim z$ .

La *clase de equivalencia* de  $x$  es el conjunto.

$$[x] = \{ y \in X; x \sim y \}.$$

Si  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $X$ , entonces cada elemento de  $X$  pertenece exactamente a una clase de equivalencia.

Una *operación binaria* en un conjunto  $X$  es una aplicación  $f: X \times X \rightarrow X$ . Pondremos  $xy$  en lugar de  $f(x,y)$  (notación multiplicativa), o en algunas ocasiones  $x + y$  (notación aditiva).

Un *grupo* es un conjunto  $G$  junto con una operación binaria que satisface las tres condiciones siguientes:

- (1) Existe un elemento  $1 \in G$ , el *elemento identidad* de  $G$ , tal que  $g1 = 1g = g$  para todo  $g \in G$ .
- (2) Para cada  $g \in G$  existe un elemento  $g^{-1} \in G$ , el *inverso* de  $g$ , tal que  $gg^{-1} = g^{-1}g = 1$ .
- (3) Para todo  $g_1, g_2, g_3 \in G$  se cumple  $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$  (*asociatividad*)

Cuando se usa notación aditiva el elemento identidad se denota por  $0$  y el inverso de  $g$  por  $-g$ . El *grupo trivial* es un grupo que sólo contiene el elemento identidad  $\{1\}$  o  $\{0\}$ .

Un subconjunto  $H$  de un grupo  $G$  es un *subgrupo* de  $G$  si  $H$  es un grupo con la operación binaria de  $G$ . Si  $H$  es un subgrupo de  $G$  y  $g \in G$ , la *clase lateral por la izquierda* de  $H$  por  $g$  es el subconjunto

$$gH = \{ gh; h \in H \}.$$

De manera análoga se define la *clase lateral por la derecha*. Dos clases laterales por la izquierda  $gH$ ,  $g'H$  de un subgrupo  $H$  son disjuntas o coinciden.

El *producto directo*  $G \times H$  de dos grupos  $G$  y  $H$  es el conjunto  $G \times H$  dotado de la operación binaria definida por  $(g,h)(g',h') = (gg',hh')$ . En el caso aditivo hablaremos de *suma directa* y escribiremos  $G \oplus H$ .

Un *homomorfismo*  $f: G \rightarrow H$  de un grupo  $G$  en un grupo  $H$  es una aplicación tal que

$$f(gg') = f(g)f(g')$$

para todo  $g, g' \in G$ . Si el homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  es biyectivo, diremos que  $G$  y  $H$  son *grupos isomorfos* y que  $f$  es un *isomorfismo*; escribiremos  $G \cong H$  o  $f: G \cong H$ . El *núcleo* de un homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  es el conjunto

$$\ker f = \{ g \in G; f(g) = 1_H \}$$

donde  $1_H$  es la identidad de  $H$ . El núcleo de un isomorfismo consta únicamente del elemento identidad de  $G$ .

Un subgrupo  $K$  de un grupo  $G$  es *normal* si  $gkg^{-1} \in K$  para todo  $g \in G, k \in K$ . El núcleo de un homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  es un subgrupo normal de  $G$ . Un homomorfismo  $f: G \rightarrow H$  es inyectivo si y sólo si  $\ker f = \{1\}$ .

Si  $K$  es un subgrupo normal de  $G$ , la clase lateral por la izquierda  $gK$  coincide con la clase lateral por la derecha  $Kg$  y el conjunto  $G/K$  de todas las clases laterales por la izquierda de  $K$  es un grupo con la operación

$$(gK)(g'K) = (gg')K.$$

El grupo  $G/K$  se llama el *grupo cociente* de  $G$  por  $K$ .

El *primer teorema de isomorfismo* establece que si  $f: G \rightarrow H$  es un homomorfismo exhaustivo de un grupo  $G$  en un grupo  $H$  con el núcleo  $K$ , entonces  $H$  es isomorfo al grupo cociente  $G/K$ .

Si  $g \in G$ , el *subgrupo generado por  $g$*  es el subconjunto de  $G$  formado por todas las potencias enteras de  $g$

$$\langle g \rangle = \{ g^n; n \in \mathbb{Z} \}$$

donde  $g^n = \overbrace{gg \dots g}^n$  si  $n \geq 0$  y  $g^n = \overbrace{g^{-1}g^{-1} \dots g^{-1}}^{-n}$  si  $n \leq 0$ . Con notación aditiva

$$\langle g \rangle = \{ ng; n \in \mathbb{Z} \}$$

donde  $ng = \overbrace{g+g+\dots+g}^n$  si  $n \geq 0$  y  $ng = \overbrace{-g+(-g)+\dots+(-g)}^{-n}$  si  $n \leq 0$ . Si  $G = \langle g \rangle$  para algún  $g$ , decimos que  $G$  es un *grupo cíclico* con generador  $g$ . En general, un *conjunto de generadores* de un grupo  $G$  es un subconjunto  $S$  de  $G$  tal que cada elemento de  $G$  es un producto de potencias de elementos de  $S$ . Si  $S$  es un conjunto finito decimos que  $G$  es *finitamente generado*.

Un grupo  $G$  se dice que es *abeliano* o *conmutativo* si  $gg' = g'g$  para todo  $g, g' \in G$ . Por ejemplo, el conjunto  $\mathbb{Z}$  de los números enteros es un grupo abeliano con la operación suma (notación aditiva); más aún, es un grupo cíclico generado por  $+1$  ó  $-1$ .

Un *grupo abeliano libre de rango  $n$*  es un grupo isomorfo a  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$  (la suma directa de  $n$  veces  $\mathbb{Z}$ ).

El *teorema de descomposición para grupos abelianos finitamente generados* establece: Si  $G$  es un grupo abeliano finitamente generado,  $G$  es isomorfo a

$$H_0 \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_m$$

donde  $H_0$  es un grupo abeliano libre y los  $H_i, i=1,2,\dots,m$ , son grupos cíclicos de orden una potencia de un número primo. El rango de  $H_0$  y los órdenes de los subgrupos cíclicos  $H_1, H_2, \dots, H_m$  están unívocamente determinados.

Un *conmutador* en un grupo  $G$  es un elemento de la forma  $ghg^{-1}h^{-1}$ . El *subgrupo conmutador* de  $G$  es el subconjunto de  $G$  formado por todos los productos finitos de con-

mutadores de  $G$  (es un subgrupo). El subgrupo conmutador  $K$  es un subgrupo normal de  $G$  y es de hecho el menor subgrupo de  $G$  para el cual  $G/K$  es abeliano.

Usaremos  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$  para denotar los conjuntos de los números reales, complejos, enteros, naturales (o enteros positivos) y racionales, respectivamente. A menudo nos referiremos a  $\mathbb{R}$  como la recta real y a  $\mathbb{C}$  como el plano complejo. El conjunto  $\mathbb{R}^n$  es el producto cartesiano de  $n$  copias de  $\mathbb{R}$ . Usaremos la notación siguiente para ciertos subconjuntos de  $\mathbb{R}$  (llamados *intervalos*):

$$(a, b) = \{ x \in \mathbb{R}; a < x < b \},$$

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b \},$$

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R}; a \leq x < b \},$$

$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R}; a < x \leq b \}.$$

El significado de los subconjuntos  $(-\infty, b)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $[a, \infty)$  y  $(a, \infty)$  es claro. Nótese que  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ .

Obsérvese que usamos la misma notación  $(a, b)$  para un par de elementos, en  $\mathbb{R}^2$  por ejemplo, y para un intervalo de  $\mathbb{R}$ . En cada caso concreto su significado quedará claro según el contexto.

# Capítulo 1

## Material básico: espacios métricos

En topología se estudian conjuntos con alguna «estructura» adicional que nos permita dar sentido a la pregunta ¿Es  $f: X \rightarrow Y$  continua o no?, donde  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación entre dos de estos conjuntos. En este capítulo pondremos al descubierto esta «estructura» fijándonos en los espacios euclídeos y métricos.

Recordemos que una aplicación  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es *continua en  $x$*  si para todo  $\epsilon_x > 0$  existe un  $\delta_x > 0$  tal que  $|f(y) - f(x)| < \epsilon_x$  siempre que  $|y - x| < \delta_x$ . Se dice, entonces, que la aplicación es *continua* si lo es en todos los puntos  $x \in \mathbb{R}$ . Podemos extender esta definición de continuidad a aplicaciones  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  simplemente reemplazando el signo «valor absoluto» por la «distancia euclídea». Más generalmente, si tenemos conjuntos con «funciones distancia», podemos definir la continuidad usando estas funciones distancia. Una «función distancia» —llamada con propiedad una *métrica*— debe satisfacer algunas (obvias) condiciones, lo que nos lleva a una definición.

### 1.1 Definición

Sea  $A$  un conjunto. Una función  $d: A \times A \rightarrow \mathbb{R}$  se llama una *métrica* en  $A$  si satisface

- (i)  $d(a,b) = 0$  si y sólo si  $a = b$ ,
- (ii)  $d(a,b) + d(a,c) \geq d(b,c)$  para todo  $a,b,c \in A$ .

Un conjunto  $A$  con una métrica determinada se llama un *espacio métrico* y se denota por  $(A,d)$  o simplemente  $M$ .

La segunda propiedad se conoce con el nombre de *desigualdad triangular*.

### 1.2 Ejercicio

Demostrar que si  $d$  es una métrica en  $A$ , entonces  $d(a,b) \geq 0$  y  $d(a,b) = d(b,a)$  para todo  $a,b \in A$ .

Si tomamos  $A = \mathbb{R}$  y  $d(x, y) = |x - y|$  no es difícil ver que  $d$  es una métrica. Más generalmente, tomemos  $A = \mathbb{R}^n$  y definamos  $d$  por

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . De nuevo, no es difícil demostrar que  $d$  es una métrica en  $\mathbb{R}^n$ . Esta métrica se denomina la métrica *euclídea* o *usual*.

Otros dos ejemplos de métricas en  $A = \mathbb{R}^n$  vienen dados por

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|, \quad d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

Dejamos como ejercicio para el lector la comprobación de que estas dos funciones definen efectivamente una métrica.

Finalmente, podemos definir siempre una métrica en un conjunto arbitrario mediante  $d(x, y) = 0$  si  $x = y$  y  $d(x, y) = 1$  si  $x \neq y$ ; la métrica resultante se llama la *métrica discreta* en  $A$ .

### 1.3 Ejercicios

(a) Demostrar que cada una de las funciones siguientes define una métrica en  $\mathbb{R}^n$ :

$$d(x, y) = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|; \quad d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y; \end{cases}$$

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|; \quad d(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|.$$

(b) Demostrar que  $d(x, y) = (x - y)^2$  no define una métrica en  $\mathbb{R}$ .

(c) Demostrar que  $d(x, y) = \min_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$  no define una métrica en  $\mathbb{R}^n$ .

(d) Sean  $d$  una métrica y  $r$  un número real positivo. Demostrar que  $d$ , definida mediante  $d_r(x, y) = rd(x, y)$  es también una métrica.

(e) Sea  $d$  una métrica. Demostrar que  $d'$  definida por

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

es también una métrica.

(f) En  $\mathbb{R}^2$  definimos  $d(x, y)$  = menor entero mayor o igual que la distancia usual entre  $x$  e  $y$ . ¿Es  $d$  una métrica en  $\mathbb{R}^2$ ?



La continuidad entre espacios métricos es ahora, tal como ya hemos indicado, fácil de definir.

## 1.4 Definición

Sean  $(A, d_A)$ ,  $(B, d_B)$  espacios métricos. Una aplicación  $f: A \rightarrow B$  se dice *continua* en  $x \in A$  si y sólo si para todo  $\epsilon_x > 0$  existe un  $\delta_x > 0$  tal que  $d_B(f(x), f(y)) < \epsilon_x$  siempre que  $d_A(x, y) < \delta_x$ . La aplicación se dice *continua* si lo es en todos los puntos  $x \in A$ .

## 1.5 Ejercicios

- Sea  $A$  un espacio métrico con métrica  $d$ . Sea  $y \in A$ . Demostrar que la aplicación  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = d(x, y)$  es continua ( $\mathbb{R}$  está dotado de la métrica usual).
- Sea  $M$  el espacio métrico  $(\mathbb{R}, d)$ , donde  $d$  es la métrica usual. Sea  $M_0$  el espacio métrico  $(\mathbb{R}, d_0)$ , donde  $d_0$  es la métrica discreta, es decir

$$d_0(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y, \\ 1 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Demostrar que cualquier aplicación  $f: M_0 \rightarrow M$  es continua. Demostrar que no existe ninguna aplicación continua inyectiva de  $M$  a  $M_0$ .

Ocurre a menudo que cambiando la métrica en  $A$  o en  $B$  no cambia el conjunto de las aplicaciones continuas de  $A$  en  $B$ . Como ejemplos véanse los ejercicios siguientes.

## 1.6 Ejercicios

- Sean  $A, B$  espacios métricos con métricas  $d$  y  $d_B$  respectivamente. Sea  $d_r$  la métrica en  $A$  definida en el Ejercicio 1.3(d) (es decir  $d_r(x, y) = rd(x, y)$ ). Sea  $f$  una aplicación de  $A$  en  $B$ . Probar que  $f$  es continua respecto a la métrica  $d_r$  de  $A$  si y sólo si lo es respecto a la métrica  $d$  de  $A$ .
- Como en (a) pero reemplazando  $d_r$  por la métrica  $d'$  del Ejercicio 1.3(e).

Así pues, la distancia no es el criterio ideal para determinar si una aplicación es continua o no. Lo que interesa verdaderamente es el concepto de «conjunto abierto».

## 1.7 Definición

Un subconjunto  $U$  de un espacio métrico  $(A, d)$  se dice que es *abierto* si para todo  $x \in U$  existe un  $\epsilon_x > 0$  tal que si  $y \in A$  y  $d(y, x) < \epsilon_x$  entonces  $y \in U$ .

En otras palabras,  $U$  es abierto si para todo  $x \in U$  existe un  $\epsilon_x > 0$  tal que  $B_{\epsilon_x}(x) = \{y \in A; d(y, x) < \epsilon_x\} \subseteq U$ .

Un ejemplo de un conjunto abierto en  $\mathbb{R}$  es  $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$ . En  $\mathbb{R}^2$  los siguientes conjuntos son abiertos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}, \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}, \\ \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < 1, 0 < y < 1\}.$$

## 1.8 Ejercicios

- (a) Demostrar que  $B_\epsilon(x)$  es siempre un conjunto abierto, para todo  $x$  y todo  $\epsilon > 0$ .  
 (b) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  (con la métrica usual) son abiertos?

$$\{(x, y); x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1, 0)\}, \quad \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ \{(x, y); |x| < 1\}, \quad \{(x, y); x + y < 0\}, \\ \{(x, y); x + y \geq 0\}, \quad \{(x, y); x + y = 0\}.$$

- (c) Demostrar que si  $\mathcal{F}$  es la familia de todos los conjuntos abiertos de un espacio métrico, entonces
- (i) El conjunto vacío  $\emptyset$  y el conjunto total pertenecen a  $\mathcal{F}$ ,
  - (ii) La intersección de dos miembros de  $\mathcal{F}$  pertenece a  $\mathcal{F}$ ,
  - (iii) La unión de una colección *arbitraria* de miembros de  $\mathcal{F}$  pertenece a  $\mathcal{F}$ .
- (d) Dar un ejemplo de una colección infinita de conjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$  (con la métrica usual) cuya intersección no sea un conjunto abierto.

Usando el concepto de conjunto abierto, obtenemos el siguiente resultado crucial.

## 1.9 Teorema

Una aplicación  $f: M_1 \rightarrow M_2$  entre dos espacios métricos es continua si y sólo si para todo conjunto abierto  $U$  de  $M_2$  el conjunto  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $M_1$ .

Este resultado nos dice que  $f$  es continua si y sólo si las imágenes *inversas* de conjuntos abiertos son abiertos. *No* afirma que las imágenes de conjuntos abiertos sean abiertos.

**Demostración.** Designemos por  $d_1$  y  $d_2$  las métricas de  $M_1$  y  $M_2$  respectivamente. Supongamos que  $f$  es continua y que  $U$  es un subconjunto abierto de  $M_2$ . Sea  $x \in f^{-1}(U)$ ; entonces  $f(x) \in U$ . Puesto que  $U$  es abierto existe un  $\epsilon > 0$  tal que  $B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$ . La continuidad de  $f$  asegura entonces la existencia de un  $\delta > 0$  tal que

$$d_1(x, y) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(y)) < \epsilon,$$

o, en otras palabras,  $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$ , lo que significa que  $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$ . Puesto que es cierto para todo  $x \in f^{-1}(U)$ , se deduce que  $f^{-1}(U)$  es un subconjunto abierto de  $M_1$ .

Recíprocamente, sea  $x \in M_1$ ; entonces, para todo  $\epsilon > 0$  el conjunto  $B_\epsilon(f(x))$  es un subconjunto abierto de  $M_2$ , por lo que  $f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$  es un subconjunto abierto de  $M_1$ . Pero, puesto que  $x \in f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ , esto significa que existe algún  $\delta > 0$  con  $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\epsilon(f(x)))$ ; es decir,  $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$ . En otras palabras, existe un  $\delta > 0$  tal que  $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$  siempre que  $d_1(x, y) < \delta$ ;  $f$  es, pues, continua.

Este teorema nos dice, en particular, que si dos métricas en un conjunto dan lugar a la misma familia de conjuntos abiertos, entonces cualquier aplicación que sea continua usando una métrica será automáticamente continua usando la otra. Los Ejercicios 1.6 pueden ser enunciados así: «Demostrar que las métricas  $d$ ,  $d_1$  y  $d'$  dan lugar a la misma familia de conjuntos abiertos».

## 1.10 Ejercicio

De las métricas  $d(x, y) = \sum |x_i - y_i|$ ,  $d(x, y) = \max |x_i - y_i|$  de  $\mathbb{R}^n$ , ¿cuáles dan lugar a la misma familia de conjuntos abiertos que la métrica usual de  $\mathbb{R}^n$ ?

De lo anterior se desprende que en el estudio de la continuidad entre espacios métricos es la familia de conjuntos abiertos de cada métrica lo que importa, y no la métrica en sí misma. Ello nos lleva a la siguiente idea: Dado un conjunto  $X$  escojamos una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  y llamémosles «conjuntos abiertos» de  $X$ . Obtenemos así un nuevo objeto  $(X, \mathcal{F})$  formado por un conjunto  $X$  junto con una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$ . La continuidad entre dos de estos objetos  $(X, \mathcal{F})$ ,  $(Y, \mathcal{F}')$  puede, entonces, ser definida del siguiente modo:  $f: X \rightarrow Y$  es continua si  $f^{-1}(U) \in \mathcal{F}$  siempre que  $U \in \mathcal{F}'$ . Naturalmente, si admitiéramos familias arbitrarias no obtendríamos conceptos y resultados matemáticos interesantes. Por tanto, debemos imponer a la familia  $\mathcal{F}$  de «conjuntos abiertos» ciertas condiciones simples, condiciones que cumpla la familia  $\mathcal{F}$  de los conjuntos abiertos de un espacio métrico (Ejercicio 1.8(c)). Éstas son:

- (i) (por conveniencia) el conjunto vacío  $\emptyset$  y el conjunto total pertenecen a  $\mathcal{F}$ ,
- (ii) la intersección de dos miembros de  $\mathcal{F}$  pertenece a  $\mathcal{F}$ ,
- (iii) la unión de una colección arbitraria de miembros de  $\mathcal{F}$  pertenece a  $\mathcal{F}$ .

La «estructura» asociada a un conjunto  $X$ , a la que nos referíamos al principio de este capítulo, es simplemente una familia  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  que satisfaga las tres propiedades anteriores. Este es el punto de partida de la topología.

## Capítulo 2

# Espacios topológicos

Un espacio topológico no es más que un conjunto junto con ciertos subconjuntos (que serán llamados conjuntos abiertos) que satisfacen tres propiedades.

### 2.1 Definición

Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{U}$  una colección de subconjuntos de  $X$  que cumpla

- (i)  $\emptyset \in \mathcal{U}$ ,  $X \in \mathcal{U}$ ,
- (ii) la intersección de dos miembros de  $\mathcal{U}$  es de  $\mathcal{U}$ ,
- (iii) la unión de cualquier número de miembros de  $\mathcal{U}$  es de  $\mathcal{U}$ .

Una tal colección de  $\mathcal{U}$  de subconjuntos de  $X$  se llama una *topología* en  $X$ . El conjunto  $X$  junto con  $\mathcal{U}$  se llama un *espacio topológico* y se denota por  $(X, \mathcal{U})$ , aunque a menudo escribiremos simplemente  $T$  o  $X$ . Los miembros  $U \in \mathcal{U}$  se llaman los *conjuntos abiertos* de  $T$ . Los elementos de  $X$  se llaman los *puntos* de  $T$ .

Obsérvese que la condición (ii) implica que la intersección de un número finito de miembros de  $\mathcal{U}$  es de  $\mathcal{U}$ . Si denotamos por  $\mathcal{P}(X)$  el conjunto de todos los subconjuntos de  $X$ , una topología en  $X$  no es más que una elección de  $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$  que satisfaga las condiciones (i), (ii) y (iii) anteriores. Diferentes elecciones dan lugar a diferentes topologías en  $X$ .

Es importante disponer de muchos ejemplos de espacios topológicos. Como primer ejemplo se deduce inmediatamente del capítulo anterior que todo espacio métrico da lugar a un espacio topológico. Se dice que el espacio resultante posee la *topología métrica* o la *topología usual*. El recíproco no es cierto —esto es, existen espacios topológicos que no se obtienen a partir de ningún espacio métrico— véase el Ejercicio 2.2(c). Los espacios topológicos que se obtienen a partir de un espacio métrico se llaman *metrizables*. Obsérvese que dos espacios métricos pueden dar lugar al mismo espacio topológico.

Considerando los casos extremos de las posibles familias de subconjuntos de un conjunto  $X$  que cumplen las condiciones para que  $X$  sea un espacio topológico, obtenemos nuestros dos siguientes ejemplos. El primero es cuando  $\mathcal{U} = \{\emptyset, X\}$ , que obviamente da una topología en cualquier conjunto  $X$ , llamada la topología *burda* de  $X$ . El otro caso extremo es cuando  $\mathcal{U}$  es el conjunto  $\mathcal{S}(X)$  de todos los subconjuntos de  $X$ ; la topología que claramente resulta se llama topología *discreta* de  $X$ .

## 2.2 Ejercicios

- Demostrar que todo espacio topológico con la topología discreta es metrizable. (Indicación: considerar la métrica discreta.)
- Sea  $X$  un espacio topológico metrizable. Probar que para todo par  $a, b$  de puntos distintos de  $X$  existen conjuntos abiertos  $U_a$  y  $U_b$  disjuntos que contienen a  $a$  y  $b$  respectivamente.
- Usar (b) para demostrar que si  $X$  posee como mínimo dos puntos y está dotado de la topología burda, entonces  $X$  no es metrizable.

Un ejemplo interesante de topología en un conjunto  $X$  es la llamada *topología de los complementos finitos*. Aquí  $\mathcal{U}$  se compone de  $\emptyset, X$  y de aquellos subconjuntos de  $X$  cuyo complementario es finito. Desde luego si  $X$  es finito esta topología coincide con la topología discreta de  $X$ . Si  $X$  es infinito, debemos comprobar que la familia  $\mathcal{U}$  cumple las tres condiciones para una topología. La primera condición es trivialmente cierta. Para la segunda supongamos que  $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ , con lo que  $X - U_1$  y  $X - U_2$  son finitos. Así pues,  $(X - U_1) \cup (X - U_2)$  es también finito; pero este conjunto coincide con  $X - (U_1 \cap U_2)$ , de donde  $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ . Para la tercera condición usamos el hecho de que  $X - (\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcap_{j \in J} (X - U_j)$ .

Si  $X$  está formado por dos puntos  $\{a, b\}$ , podemos dotar a  $X$  de cuatro diferentes topologías, a saber:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1 &= \{\emptyset, X\}; \quad \mathcal{U}_2 = \{\emptyset, \{a\}, X\}; \quad \mathcal{U}_3 = \{\emptyset, \{b\}, X\}; \\ \mathcal{U}_4 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}.\end{aligned}$$

Sabemos ya que  $\mathcal{U}_1$  y  $\mathcal{U}_4$  son topologías y dejamos para el lector la comprobación de que  $\mathcal{U}_2$  y  $\mathcal{U}_3$  lo son. Obsérvese que  $(X, \mathcal{U}_2)$  y  $(X, \mathcal{U}_3)$  no son metrizable.

En los ejercicios que siguen se dan otros ejemplos de espacios topológicos.

## 2.3 Ejercicios

En cada uno de los casos (a), (b) y (c) siguientes demostrar que  $\mathcal{U}$  es una topología en  $X$ .

- $X = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{R\} \cup \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}\}$ .
- $X = \mathbb{N}$  = enteros positivos = números naturales,  $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{N}\} \cup \{O_n; n > 1\}$  donde  $O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$ .

- (c)  $X = \mathbb{R}$ ,  $U \in \mathcal{U}$  si y sólo si  $U$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  y para cada  $s \in U$  existe un  $t > s$  tal que  $[s, t) \subseteq U$ , donde  $[s, t) = \{x \in \mathbb{R}; s \leq x < t\}$ .
- (d) Determinar el número de topologías distintas en un conjunto de tres elementos.
- (e) Demostrar que ninguna de las siguientes familias de subconjuntos de  $\mathbb{R}$  son topologías.

$$\mathcal{U}_1 = \{ \emptyset \} \cup \{ \mathbb{R} \} \cup \{ (-\infty, x]; x \in \mathbb{R} \}.$$

$$\mathcal{U}_2 = \{ \emptyset \} \cup \{ \mathbb{R} \} \cup \{ (a, b); a, b \in \mathbb{R}, a < b \}.$$

Para cualquier subconjunto  $Y$  de un espacio topológico  $X$  podemos considerar el mayor conjunto abierto contenido en  $Y$ ; lo designaremos por  $\overset{\circ}{Y}$  y se llama el *interior* de  $Y$ . En otras palabras

$$\overset{\circ}{Y} = \bigcup_{j \in J} U_j$$

donde  $\{U_j; j \in J\}$  es la familia de todos los conjuntos abiertos contenidos en  $Y$ . Obviamente,  $x \in \overset{\circ}{Y}$  si y sólo si existe un conjunto abierto  $U \subseteq Y$  tal que  $x \in U$ .

Por ejemplo, sea  $I^n$  el subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  siguiente:

$$I^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Si  $\mathbb{R}^n$  tiene la topología usual (es decir, la topología métrica con la métrica «usual»  $d(x, y) = (\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2)^{1/2}$ ) entonces el interior de  $I^n$  es

$$\overset{\circ}{I}^n = \{ x; 0 < x_i < 1, i = 1, 2, \dots, n \}.$$

Para verlo, sea  $x \in \overset{\circ}{I}^n$  y pongamos  $\epsilon = \min \{1 - x_i, x_i; i = 1, 2, \dots, n\}$ . La bola abierta  $B_\epsilon(x)$ , de centro  $x$  y radio  $\epsilon$  (esto es,  $\{y \in \mathbb{R}^n; d(y, x) < \epsilon\}$ ) está contenida en  $I^n$  y, por tanto,  $I^n$  es abierto. Por otra parte, si, para algún  $i$ ,  $x_i = 1$  o  $x_i = 0$ , cualquier bola  $B_r(x)$  de centro  $x$  y radio  $r$  contiene puntos que no son de  $I^n$ , independientemente del valor de  $r$ .

Los complementarios de los conjuntos abiertos tienen un nombre especial.

## 2.4 Definición

Un subconjunto  $C$  de un espacio topológico  $X$  se dice que es *cerrado* si y sólo si  $X - C$  es abierto.

El siguiente resultado se deduce fácilmente de resultados de teoría de conjuntos sobre el complementario de una intersección y el complementario de una unión.

## 2.5 Teorema

- (i)  $\emptyset, X$  son cerrados,
- (ii) la unión de dos conjuntos cerrados es cerrado,
- (iii) la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrado.

El concepto de conjunto cerrado puede usarse para definir un espacio topológico.

## 2.6 Ejercicios

- (a) Sea  $X$  un conjunto y  $\mathcal{V}$  una familia de subconjuntos de  $X$  que cumpla
  - (i)  $\emptyset, X \in \mathcal{V}$ ,
  - (ii) la unión de dos elementos cualesquiera de  $\mathcal{V}$  pertenece a  $\mathcal{V}$ ,
  - (iii) la intersección de una colección arbitraria de elementos de  $\mathcal{V}$  pertenece a  $\mathcal{V}$ .
 Demostrar que  $\mathcal{U} = \{X - V; V \in \mathcal{V}\}$  es una topología en  $X$ .
- (b) Probar que en un espacio topológico discreto todo subconjunto es abierto y cerrado a la vez.
- (c) Demostrar que si un espacio topológico  $X$  consta de un número finito de puntos, cada uno de los cuales es un subconjunto cerrado, entonces la topología de  $X$  es la discreta.
- (d) Demostrar que en el espacio topológico  $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ , donde  $\mathcal{U}$  está definido como en el Ejercicio 2.3(c), los conjuntos  $[s, t)$  son a la vez abiertos y cerrados.

Para cualquier subconjunto  $Y$  de un espacio topológico  $X$  podemos considerar el menor conjunto cerrado que contiene a  $Y$ ; este conjunto se denota por  $\bar{Y}$  y se llama *adherencia* de  $Y$ . En otras palabras

$$\bar{Y} = \bigcap_{j \in J} F_j$$

donde  $\{F_j; j \in J\}$  es la familia de todos los subconjuntos cerrados que contienen a  $Y$ . Los puntos que pertenecen a  $\bar{Y}$  pero no a  $Y$  se llaman a menudo *puntos límite* de  $Y$ . El resultado siguiente da una descripción alternativa de  $\bar{Y}$ .

## 2.7 Lema

$x \in \bar{Y}$  si y sólo si para todo conjunto abierto  $U$  que contenga a  $x$ ,  $U \cap Y \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Sea  $x \in \bar{Y}$  y supongamos que existe un conjunto abierto  $U$  que contenga a  $x$  y tal que  $U \cap Y = \emptyset$ . Así pues,  $X - U$  es cerrado y  $Y \subseteq X - U$ ; por tanto  $\bar{Y} \subseteq X - U$ . Pero  $x \in \bar{Y}$  y  $x \in U$ , que es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos que  $x \notin \bar{Y}$ , es decir  $x \in X - \bar{Y}$ . Pero  $X - \bar{Y}$  es abierto, y  $(X - \bar{Y}) \cap \bar{Y} = \emptyset$ , por tanto,  $(X - \bar{Y}) \cap Y = \emptyset$ , que es una contradicción.

Si consideramos  $\mathbb{R}$  con su topología usual, la adherencia de los conjuntos  $(a,b)$ ,  $[a,b)$ ,  $(a,b]$  y  $[a,b]$  es  $[a,b]$ .

## 2.8 Ejercicios

- (a) Sea  $X$  la recta real  $\mathbb{R}$  con su topología usual. Hallar la adherencia de cada uno de los subconjuntos de  $X$  siguientes

$$A = \{1, 2, 3, \dots\}, B = \{x; x \text{ es racional}\}, C = \{x; x \text{ es irracional}\}.$$

- (b) Sea  $X$  el conjunto  $\mathbb{R}$  con la topología del Ejercicio 2.3(c). Hallar la adherencia de cada uno de los subconjuntos de  $X$  siguientes

$$(a,b), [a,b), (a,b], [a,b].$$

En los ejercicios siguientes se dan más propiedades de la adherencia de un conjunto.

## 2.9 Ejercicios

Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones.

- Si  $Y$  es un subconjunto de un espacio topológico  $X$  con  $Y \subseteq F \subseteq X$  y  $F$  es cerrado, entonces  $\overline{Y} \subseteq F$ .
- $Y$  es cerrado si y sólo si  $Y = \overline{Y}$ .
- $\overline{\overline{Y}} = \overline{Y}$ .
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ .
- $\overline{X - Y} = X - \overset{\circ}{Y}$ .
- $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$ , donde  $\partial Y = \overline{Y} \cap (\overline{X - Y})$  ( $\partial Y$  se llama la *frontera* de  $Y$ ).
- $Y$  es cerrado si y sólo si  $\partial Y \subseteq Y$ .
- $\partial Y = \emptyset$  si y sólo si  $Y$  es a la vez abierto y cerrado.
- $\partial(\{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}) = \partial(\{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}) = \{a, b\}$ .
- Probar que  $Y$  es la adherencia de algún conjunto abierto si y sólo si  $Y$  es la adherencia de su interior.

Un concepto que será útil más adelante es el de «entorno» de un punto.

## 2.10 Definición

Sea  $X$  un espacio topológico. Un subconjunto  $N \subseteq X$  con  $x \in N$  se dice que es un *entorno* de  $x$  si existe un conjunto abierto  $U$  tal que  $x \in U \subseteq N$ .

En particular, todo conjunto abierto es un entorno de cada uno de sus puntos. Más generalmente, todo conjunto  $A$  con interior no vacío es un entorno de cada uno de los puntos del



interior de  $A$ . En el ejercicio siguiente se dan algunas propiedades simples de los entornos. (Los resultados de este ejercicio pueden ser usados para definir una topología.)

## 2.11 Ejercicio

Sea  $X$  un espacio topológico. Probar cada una de las afirmaciones siguientes.

- (i) Para cada punto  $x \in X$  existe por lo menos un entorno de  $x$ .
- (ii) Si  $N$  es un entorno de  $x$  y  $N \subseteq M$ ,  $M$  es también un entorno de  $x$ .
- (iii) Si  $M$  y  $N$  son entornos de  $x$ , también lo es  $N \cap M$ .
- (iv) Para cada  $x \in X$  y cada entorno  $N$  de  $x$  existe un entorno  $U$  de  $x$  tal que  $U \subseteq N$  y  $U$  es un entorno de cada uno de sus puntos.

## Capítulo 3

# Aplicaciones continuas

### 3.1 Definición

Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos se dice que es *continua* si la imagen inversa  $f^{-1}(U)$  de todo conjunto abierto  $U$  de  $Y$  es abierto en  $X$ .

Los ejemplos más triviales de aplicaciones continuas son la aplicación identidad  $1_X: X \rightarrow X$  y la aplicación constante  $X \rightarrow Y$  que aplica todo punto de  $X$  en un mismo punto prefijado de  $Y$ .

Si consideramos un espacio  $X$  con la topología discreta, toda aplicación  $f: X \rightarrow Y$  de  $X$  en cualquier espacio topológico  $Y$  es continua, puesto que la imagen inversa de cualquier subconjunto de  $Y$  es abierto en  $X$ . Por otra parte, si consideramos  $Y$  con la topología burda, toda aplicación  $f: X \rightarrow Y$  de cualquier espacio topológico  $X$  en  $Y$  es también continua, como es fácil observar. De hecho, hay un recíproco de estos dos ejemplos, dado en el siguiente grupo de ejercicios.

La aplicación del ejemplo siguiente no es continua. Sea  $X = (\mathbb{R}, \mathcal{U})$ , donde  $\mathcal{U} = \{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}\}$  y sea  $f: X \rightarrow X$  dada por  $f(x) = x^2$ . La aplicación  $f$  no es continua ya que  $f^{-1}((-\infty, y^2)) = (-y, y)$  que no pertenece a  $\mathcal{U}$ . Se deja como ejercicio la determinación de las aplicaciones continuas de  $X$  en  $X$  (Ejercicio 3.2(d)).

### 3.2 Ejercicios

- Sea  $X$  un conjunto arbitrario y sean  $\mathcal{U}$  y  $\mathcal{U}'$  dos topologías de  $X$ . Probar que la aplicación identidad  $(X, \mathcal{U}) \rightarrow (X, \mathcal{U}')$  es continua si y sólo si  $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ .
- Sea  $X$  un espacio topológico con la propiedad de que, para cualquier espacio topológico  $Y$ , toda aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es continua. Demostrar que  $X$  tiene la topología discreta. (Indicación: tomar como  $Y$  el espacio  $X$  pero con la topología discreta.)

- (c) Sea  $Y$  un espacio topológico con la propiedad de que, para cualquier espacio topológico  $X$ , toda aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es continua. Demostrar que  $Y$  tiene la topología burda. (Indicación: tomar  $X$  como el espacio  $Y$  pero con la topología burda.)
- (d) Sea  $X$  el conjunto de los números reales con la topología  $\{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}\}$ . Probar que una aplicación  $f: X \rightarrow X$  es continua si y sólo si es no decreciente (esto es, si  $x > x'$  entonces  $f(x) \geq f(x')$ ) y continua por la derecha en el sentido clásico (es decir, si para todo  $x \in X$  y todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que si  $x \leq x' < x + \delta$ ,  $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ ).

Las aplicaciones continuas pueden caracterizarse en términos de los conjuntos cerrados.

### 3.3 Teorema

Una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos es continua si y sólo si, para todo subconjunto cerrado  $C$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(C)$  es cerrado.

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es continua. Si  $C$  es cerrado,  $Y - C$  es abierto y, por tanto,  $f^{-1}(Y - C)$  es abierto. Pero  $f^{-1}(Y - C) = X - f^{-1}(C)$  y, por tanto,  $f^{-1}(C)$  es cerrado. Recíprocamente, si  $U$  es abierto en  $Y$ ,  $Y - U$  es cerrado y  $f^{-1}(Y - U) = X - f^{-1}(U)$  es cerrado, lo que significa que  $f^{-1}(U)$  es abierto y, por tanto,  $f$  es continua.

Una aplicación que transforma conjuntos abiertos en conjuntos abiertos se dice que es una *aplicación abierta*. Las aplicaciones abiertas no son necesariamente continuas. Por ejemplo, sea  $Y$  el conjunto formado por dos puntos  $\{a, b\}$  con la topología discreta y sea  $X$  la recta real con la métrica usual. La aplicación  $f: X \rightarrow Y$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \geq 0, \\ b & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

es abierta pero no es continua ya que  $f^{-1}(\{a\})$  no es abierto en  $X$ . Toda aplicación de un espacio topológico en un espacio topológico discreto es necesariamente abierta.

Diremos que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es *cerrada* si la imagen por  $f$  de cualquier conjunto cerrado es un cerrado. Las aplicaciones cerradas no son necesariamente continuas; de hecho, la aplicación abierta considerada en el último ejemplo es también cerrada. En general, una aplicación puede (i) no ser ni abierta ni cerrada, (ii) ser abierta pero no cerrada, (iii) ser cerrada pero no abierta, (iv) ser abierta y cerrada. Como ejemplos podemos considerar los siguientes: Para (i) sea  $X$  un conjunto  $A$  con la topología discreta,  $Y$  el mismo conjunto  $A$  con la topología burda y  $f$  la aplicación identidad. Para (ii) consideremos  $X = \{a, b\}$  con la topología discreta e  $Y = \{a, b\}$  con la topología  $\{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ ; la aplicación constante  $a \in Y$  es abierta y continua pero no cerrada. Para (iii) tomemos  $X = \{a, b\}$  con la topología discreta e  $Y = \mathbb{R}$  con la topología usual; la aplicación  $f: X \rightarrow Y$  dada por  $f(a) = 0$ ,  $f(b) = 1$  es continua y cerrada pero no abierta. Por último, para (iv) podemos tomar un espacio topológico arbitrario  $X = Y$  y como  $f$  la identidad. Desde luego, si añadimos algunas restricciones a  $f$  podemos conseguir que cualquiera de los casos anteriores no pueda darse.

### 3.4 Ejercicio

Sea  $f$  una aplicación continua entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ . Si  $f$  es (a) inyectiva, (b) exhaustiva, (c) biyectiva ¿cuáles de los cuatro casos siguientes pueden darse: (i)  $f$  no es ni abierta ni cerrada, (ii)  $f$  es abierta pero no cerrada, (iii)  $f$  es cerrada pero no abierta, (iv)  $f$  es abierta y cerrada?

El resultado siguiente nos dice que la composición de dos aplicaciones continuas es continua. Su demostración es fácil.

### 3.5 Teorema

Sean  $X, Y$  y  $Z$  espacios topológicos. Si  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas, la composición  $h = gf: X \rightarrow Z$  es también continua.

**Demostración.** Si  $U$  es abierto en  $Z$ ,  $g^{-1}(U)$  es abierto en  $Y$  y, por tanto,  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  es abierto en  $X$ . Pero  $(gf)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ .

La definición siguiente nos dice cuándo dos espacios topológicos se consideran equivalentes. Usaremos la palabra homeomorfismo.

### 3.6 Definición

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Decimos que  $X$  e  $Y$  son *homeomorfos* si existen aplicaciones continuas  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  inversas una de la otra (es decir si  $f$  y  $g$  son continuas y  $fg = 1_Y$ ,  $gf = 1_X$ ). Escribiremos  $X \cong Y$  y diremos que  $f$  y  $g$  son *homeomorfismos* entre  $X$  e  $Y$ .

Puede darse una definición equivalente para que una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  sea un homeomorfismo requiriendo (i) que sea biyectiva, (ii) que sea continua y (iii) que su inversa  $f^{-1}$  sea también continua. Así, un homeomorfismo entre  $X$  e  $Y$  es una biyección entre los puntos y entre los conjuntos abiertos de  $X$  e  $Y$ .

Del Capítulo 1 pueden obtenerse algunos ejemplos de homeomorfismos. Por ejemplo, si  $X$  es el espacio topológico resultante de un espacio métrico  $M$  con métrica  $d$ , y si  $Y$  es el espacio resultante del espacio métrico  $M$  con métrica  $d'$  dada por  $d'(x, y) = d(x, y)/(1 + d(x, y))$ ,  $X$  e  $Y$  son homeomorfos. Otro ejemplo lo constituyen  $X = \mathbb{R}^n$  con la topología métrica usual e  $Y = \mathbb{R}^n$  con la topología obtenida a partir de la métrica  $d(x, y) = \max |x_i - y_i|$ . De nuevo  $X$  e  $Y$  son homeomorfos. Por otra parte, si  $X = \mathbb{R}^n$  con la topología usual e  $Y = \mathbb{R}^n$  con la topología discreta,  $X$  e  $Y$  no son homeomorfos.

### 3.7 Ejercicios

- (a) Dar un ejemplo de espacios  $X, Y$  y de una biyección continua  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f^{-1}$  no sea continua.

- (b) Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. Demostrar que  $X$  e  $Y$  son homeomorfos si y sólo si existe una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  tal que: (i)  $f$  es biyectiva, (ii) un subconjunto  $U$  de  $X$  es abierto si y sólo si  $f(U)$  es abierto.
- (c) Sean  $d_1$  y  $d_2$  dos métricas en un conjunto  $Y$  tales que existen  $m$  y  $M$  positivos con
- $$md_1(y, y') \leq d_2(y, y') \leq Md_1(y, y')$$

para todo  $y, y' \in Y$ . Demostrar que los dos espacios topológicos resultantes son homeomorfos. (Indicación: Considerar la aplicación identidad en  $Y$ .)

- (d) Sea  $X$  un espacio topológico y denotemos por  $G(X)$  el conjunto de los homeomorfismos  $f: X \rightarrow X$ . Probar que  $G(X)$  es un grupo. Para cada  $x \in X$ , sea  $G_x(X) = \{f \in G(X); f(x) = x\}$ . Probar que  $G_x(X)$  es un subgrupo de  $G(X)$ .

La homeomorfía es una relación de equivalencia y la topología es el estudio de las clases de equivalencia. Los tres capítulos siguientes describen métodos para construir, a partir de unos espacios dados, nuevos espacios topológicos.

## Capítulo 4

# Topología inducida

Sea  $S$  un subconjunto de un espacio topológico  $X$ . Podemos dotar a  $S$  de una topología a partir de la de  $X$ .

### 4.1 Definición

La topología *inducida* en  $S$  por la topología de  $X$  es la familia de los conjuntos de la forma  $U \cap S$ , para todo conjunto abierto  $U$  de  $X$ .

En otras palabras, si  $\mathcal{U}$  es la familia de los conjuntos abiertos de  $X$ , entonces  $\mathcal{U}_S = \{U \cap S; U \in \mathcal{U}\}$  es la familia de los conjuntos abiertos de  $S$ . Para demostrar que  $\mathcal{U}_S$  es una topología en  $S$  debemos comprobar las tres condiciones para una topología. Puesto que  $\emptyset = \emptyset \cap S$  y  $S = X \cap S$  la primera condición resulta inmediatamente. Para la segunda, sean  $U_1 \cap S$  y  $U_2 \cap S$  dos elementos de  $\mathcal{U}_S$ ; entonces  $(U_1 \cap S) \cap (U_2 \cap S) = (U_1 \cap U_2) \cap S$  pertenece a  $\mathcal{U}_S$ . Finalmente, si  $\{U_j \cap S; j \in J\}$  es un conjunto arbitrario de elementos de  $\mathcal{U}_S$ ,  $\bigcup_{j \in J} (U_j \cap S) = (\bigcup_{j \in J} U_j) \cap S$  es de  $\mathcal{U}_S$ .

$j \in J$

$j \in J$

A veces se habla de la topología inducida como de la topología *relativa*. Si el subconjunto  $S$  está dotado de la topología inducida se dice que  $S$  es un *subespacio* de  $X$ .

Por ejemplo, si consideramos el subconjunto  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  (con la topología usual) y le dotamos de la topología inducida, los conjuntos

$$\begin{aligned} [a, c), & \quad a < c < b, \\ (d, b], & \quad a < d < b, \\ (d, c), & \quad a \leq d < c \leq b \end{aligned}$$

son subconjuntos abiertos de  $[a, b]$ . Obsérvese que el que  $U$  sea abierto en  $[a, b]$  no implica que  $U$  sea abierto en  $\mathbb{R}$ .

Obtenemos otro ejemplo si dotamos a la circunferencia unidad  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$  de la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^2$ . Los conjuntos abiertos de  $S^1$  son entonces uniones de «arcos abiertos» (es decir, arcos con los extremos excluidos). Más generalmente, podemos dotar a la  $n$ -esfera estándar

$$S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\},$$

de la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

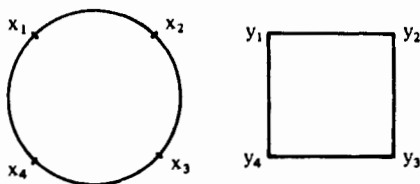
En  $\mathbb{R}^{n+1}$  podemos considerar el subconjunto  $S$  definido por  $x_{n+1} = 0$ . Si dotamos a  $S$  de la topología inducida (usando la topología usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ),  $S$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . La demostración se deja como ejercicio; alternativamente, véase el capítulo 6.

Es interesante considerar subespacios de  $\mathbb{R}^3$  e intentar descifrar cuáles son homeomorfos entre sí. Por ejemplo, los intervalos  $[a, b]$  y  $[c, d]$  de  $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$  son homeomorfos. Puede darse un homeomorfismo mediante

$$f(x) = c + (d - c)(x - a)/(b - a).$$

No es difícil construir una inversa  $f^{-1}$  y demostrar que  $f$  y  $f^{-1}$  son continuas (véase también el Ejercicio 4.5(g)). Intuitivamente, lo único que hacemos es estirar o encoger cada intervalo en el otro.

Figura 4.1



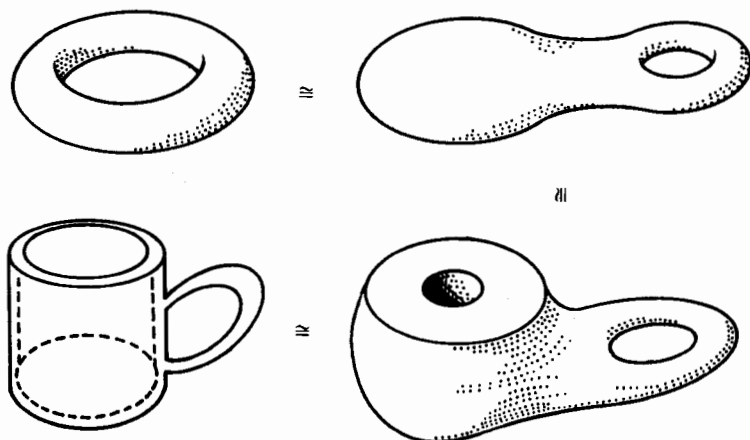
Para otro ejemplo, consideremos una circunferencia y un cuadrado (por un cuadrado entendemos las «aristas» de una región cuadrada); véase la Figura 4.1. La aplicación que aplica los intervalos con origen en  $x_i$  y final  $x_{i+1}$  de  $S^1$  en los intervalos de origen  $y_i$  y final  $y_{i+1}$  del cuadrado define un homeomorfismo de la circunferencia en el cuadrado. Si  $\{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$  es la circunferencia y  $\{(x, y); x = \pm 1, -1 \leq y \leq 1 \text{ ó } -1 \leq x \leq 1, y = \pm 1\}$  es el cuadrado, podemos dar homeomorfismos explícitamente mediante

$$\begin{array}{lll} \text{circunferencia} & \rightarrow & \text{cuadrado} \\ (x, y) & \rightarrow & (x/m, y/m) \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{cuadrado} & \rightarrow & \text{circunferencia} \\ (x, y) & \rightarrow & (x/r, y/r) \end{array}$$

donde  $m = \max(|x|, |y|)$  y  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Intuitivamente no hacemos más que torcer o combar la circunferencia para formar un cuadrado. En general, intuitivamente, dos subespacios de  $\mathbb{R}^3$  (o de  $\mathbb{R}^2$ ) son homeomorfos si podemos torcer, combar, estirar o encoger uno

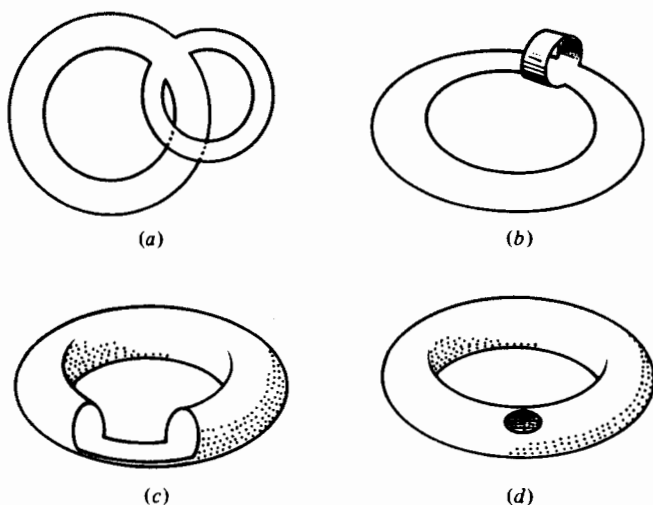
de ellos hasta obtener el otro sin pegar puntos ni hacer ningún corte. Así, por ejemplo, una rosquilla es homeomorfa a una taza de té (con un asa); véase la figura 4.2.

Figura 4.2



En la Figura 4.3(a) y (d) se da otro ejemplo de espacios homeomorfos, mientras que en la Figura 4.3(b) y (c) se ilustran espacios homeomorfos intermedios.

Figura 4.3



Si  $h: X \cong Y$  es un homeomorfismo, para todo punto  $x \in X$  los espacios  $X - \{x\}$  e  $Y - \{h(x)\}$  son homeomorfos. Esto nos proporciona algunas veces un camino para demos-



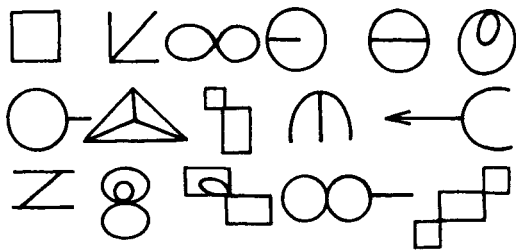
trar que ciertos espacios no son homeomorfos. Por ejemplo, por lo menos intuitivamente a este nivel, los subespacios  $[0,1]$  y  $(0,1)$  de  $\mathbb{R}$  no son homeomorfos, ya que si suprimimos el punto 0 de  $[0,1]$  obtenemos  $(0,1]$ , que (intuitivamente) es de una pieza, mientras que si suprimimos cualquier punto de  $(0,1)$  obtenemos (intuitivamente) dos piezas; con más precisión, el espacio que resulta es la unión disjunta de dos subconjuntos abiertos no vacíos. Ahora bien (intuitivamente), una pieza no puede ser homeomorfa a dos piezas (ello implicaría cortar, que no es un proceso continuo) y, por tanto,  $[0,1]$  no puede ser homeomorfo a  $(0,1)$ . (En el Capítulo 9 daremos una descripción rigurosa de los conceptos «una pieza» y «dos piezas».) La idea anterior puede extenderse al proceso de suprimir dos o más puntos. El lector puede explorar un poco más estas ideas mediante el ejercicio siguiente.

## 4.2 Ejercicio intuitivo sobre homeomorfismos

Clasificar los subespacios de  $\mathbb{R}^3$  (y de  $\mathbb{R}^2$ ) de la Figura 4.4 en conjuntos de espacios homeomorfos entre sí.

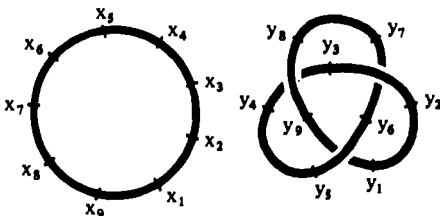
Figura 4.4

ABCDEF GHIJ KLMN OPQR  
STUVW XYZ 1234567890



Si consideramos una circunferencia y una circunferencia anudada en  $\mathbb{R}^3$  (véase la Figura 4.5) puede construirse fácilmente un homeomorfismo entre ambas. La idea consiste

Figura 4.5

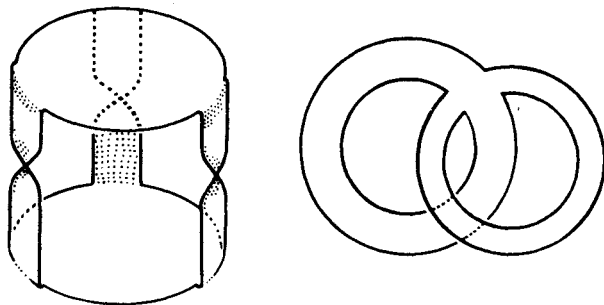


en dividir cada una en partes, nueve por ejemplo, y aplicar el intervalo de la circunferencia que va de  $x_i$  a  $x_{i+1}$  sobre el intervalo de la circunferencia anudada que va de  $y_i$  a  $y_{i+1}$ . Si la circunferencia anudada está hecha de cordel fino, el lector puede ver fácilmente que no es posible obtener una circunferencia a partir de ella torciéndola y curvándola pero sin cortar ni pegar. Sin embargo, si hacemos provisionalmente un corte en la circunferencia anudada, desanudamos y pegamos de nuevo, obtenemos una circunferencia. Esto nos sugiere que podemos modificar nuestra noción intuitiva de homeomorfismo entre subespacios de  $\mathbb{R}^3$  permitiéndonos cortar temporalmente. La idea es que podemos cortar temporalmente, llevar a cabo algún homeomorfismo (torciendo, curvando, etc.) y después volver a pegar los puntos por los que habíamos cortado; los espacios inicial y final son, entonces, homeomorfos. Esta idea puede describirse de forma rigurosa usando el concepto de espacio cociente que introducimos en el Capítulo 5; véase, en particular, el Teorema 5.5.

### 4.3 Ejercicio

Demostrar que los dos subespacios de  $\mathbb{R}^3$  de la Figura 4.6 son homeomorfos. El primer subespacio se obtiene pegando tres tiras retorcidas de papel a dos discos circulares de papel. El segundo se obtiene pegando dos tiras largas de papel. (Indicación: Cortar el primero por dos sitios distintos, es decir, en dos de las tiras retorcidas, desplegar y finalmente plegar de nuevo.)

Figura 4.6



Hemos mencionado ya que si  $S$  es un subespacio de  $X$ , los conjuntos abiertos de  $S$  no son necesariamente abiertos en  $X$ . Sin embargo, si  $S$  es abierto en  $X$  los subconjuntos abiertos de  $S$  son abiertos en  $X$ .

### 4.4 Lema

- (i) Si  $S$  es abierto en  $X$ , todo subconjunto abierto de  $S$  por la topología inducida es abierto en  $X$ .

- (ii) Si  $S$  es cerrado en  $X$ , todo subconjunto cerrado de  $S$  por la topología inducida es cerrado en  $X$ .

**Demostración.** Puesto que las demostraciones de (i) y de (ii) son más o menos idénticas, sólo daremos la de (i). Supongamos que  $S$  es abierto en  $X$  y sea  $U$  un subconjunto abierto de  $S$ . Por definición  $U = V \cap S$ , donde  $V$  es un subconjunto abierto de  $X$ . Pero, puesto que  $S$  es abierto en  $X$ , resulta que  $U = V \cap S$  es también abierto en  $X$ .

## 4.5 Ejercicios

- Demostrar que si  $Y$  es un subespacio de  $X$  y  $Z$  es un subespacio de  $Y$ , entonces  $Z$  es un subespacio de  $X$ .
- Probar que todo subespacio de un espacio metrizable es metrizable.
- Supongamos que  $S$  es un subespacio de  $X$ . Demostrar que la inclusión  $S \rightarrow X$  es continua. Demostrar, además, que  $S$  tiene la topología menos fina (es decir, la que tiene menos conjuntos abiertos) para la cual la inclusión  $S \rightarrow X$  es continua.
- Sea  $X$  un espacio topológico,  $S$  un subconjunto e  $i: S \rightarrow X$  la inclusión. Dotamos al conjunto  $S$  de una topología tal que para todo espacio  $Y$  y toda aplicación  $f: Y \rightarrow X$

$f: Y \rightarrow S$  es continua  $\Leftrightarrow$  si  $f: Y \rightarrow X$  es continua.

Probar que la topología de  $S$  es la topología inducida por la de  $X$ .

- Sea  $Y$  un subespacio de  $X$  y  $A$  un subespacio de  $Y$ . Designemos por  $Cl_X(A)$  la adherencia de  $A$  en  $X$  y por  $Cl_Y(A)$  la adherencia de  $A$  en  $Y$ . Demostrar que  $Cl_Y(A) \subseteq Cl_X(A)$ . Demostrar que, en general,  $Cl_Y(A) \neq Cl_X(A)$ .
- Demostrar que el subconjunto  $(a,b)$  de  $\mathbb{R}$  con la topología inducida es homeomorfo a  $\mathbb{R}$ . (Indicación: Usar aplicaciones del tipo  $x \rightarrow \tan(\pi(cx + d))$  para  $c$  y  $d$  convenientes.)
- Sean  $X, Y$  espacios topológicos y  $S$  un subespacio de  $X$ . Probar que si  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, también lo es  $f|_S: S \rightarrow f(S)$ .
- Demostrar que los subespacios  $(1, \infty)$ ,  $(0,1)$  de  $\mathbb{R}$  con la topología usual son homeomorfos. (Indicación:  $x \rightarrow 1/x$ .)
- Demostrar que  $S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual. (Indicación: Definir  $\varphi: S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  mediante

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \frac{x_2}{1-x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}} \right)$$

$$\text{y } \psi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\} \text{ por}$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1+\|x\|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1).$$

- Consideremos  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  y  $S^n$  con la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Probar que la aplicación  $f: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$  definida por  $f(x) = \frac{x}{\|x\|}$  es continua.

## Capítulo 5

# Topología cociente (y acciones de grupos sobre espacios)

En el último capítulo hemos considerado, esencialmente, un conjunto  $S$ , un espacio topológico  $X$  y una aplicación inyectiva de  $S$  en  $X$ . Obtuvimos así una topología en  $S$ : la topología inducida. En este capítulo consideraremos un espacio topológico  $X$ , un conjunto  $Y$  y una aplicación exhaustiva de  $X$  en  $Y$ . Esto nos dará lugar a una topología en  $Y$ : la llamada topología «cociente».

### 5.1 Definición

Supongamos que  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación exhaustiva de un espacio topológico  $X$  en un conjunto  $Y$ . La *topología cociente* en  $Y$  respecto a  $f$  es la familia

$$\mathcal{U}_f = \{ U; f^{-1}(U) \text{ es abierto en } X \}.$$

Es fácil comprobar que  $\mathcal{U}_f$  satisface las condiciones para una topología: obviamente  $\emptyset \in \mathcal{U}_f$  e  $Y \in \mathcal{U}_f$ , y las otras condiciones se deducen de  $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$  y  $f^{-1}(\bigcup_{j \in J} U_j) = \bigcup_{j \in J} f^{-1}(U_j)$ . Obsérvese que una vez que hemos dotado a  $Y$

de la topología cociente, la aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es continua.

Un bonito ejemplo lo constituye el conjunto  $\mathbb{RP}^n = \{ \{x, -x\}; x \in S^n \}$  de ciertos pares no ordenados de puntos de  $S^n$ . Existe obviamente una aplicación exhaustiva  $\pi: S^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  dada por  $x \rightarrow \{x, -x\}$ . El conjunto  $\mathbb{RP}^n$  con la topología cociente respecto a la aplicación  $\pi$  se llama el *n-espacio proyectivo real*.

Como segundo ejemplo consideremos en primer lugar el espacio

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1 \}$$

con la topología inducida. ( $C$  es un cilindro.) Sea  $M$  el conjunto de pares no ordenados de puntos de  $C$  de la forma  $\{p, -p\}$ ; esto es,

$$M = \{ \{ p, -p \} ; p \in C \}.$$

Puesto que tenemos una aplicación exhaustiva natural de  $C$  en  $M$  podemos dotar a  $M$  de la topología cociente; el espacio resultante se llama la *banda o cinta de Möbius* (algunas veces *Möbius* se escribe *Moebius*).

Consideremos la aplicación  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\{ p, -p \} \rightarrow ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz)$$

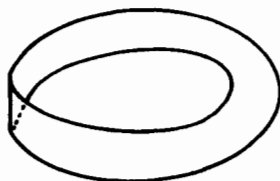
donde  $p = (x, y, z) \in C \subseteq \mathbb{R}^3$ . No es difícil comprobar que  $f$  es inyectiva. En la Figura 5.1 hemos dibujado la imagen  $f(M)$  de  $M$  por  $f$ . De hecho  $M$  es homeomorfo a  $f(M) \subseteq \mathbb{R}^3$  con la topología inducida: la continuidad de  $f$  se deduce del hecho de que  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por

$$F(x, y, z) = ((x^2 - y^2)(2 + xz), 2xy(2 + xz), yz)$$

es continua y de la propiedad universal del cociente (Teorema 5.2). Se deja como ejercicio para el lector la demostración de que  $f^{-1}$  es continua; de hecho se deduce con bastante facilidad de los resultados que demostraremos en el Capítulo 8.

Establecemos y demostramos a continuación la *propiedad universal del cociente*.

Figura 5.1



## 5.2 Teorema

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación y supongamos que  $Y$  tiene la topología cociente respecto a  $f$ . Entonces, una aplicación  $g: Y \rightarrow Z$  de  $Y$  en un espacio topológico  $Z$  es continua si y sólo si  $gf$  es continua.

**Demostración.** Puesto que la aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es continua, si  $g$  es continua también lo es la composición  $gf$ . Recíprocamente, supongamos que  $gf$  es continua. Si  $V$  es abierto en  $Z$ , entonces  $(gf)^{-1}(V)$  es abierto en  $X$ , o, en otras palabras,  $f^{-1}(g^{-1}(V))$  es abierto en  $X$ . Por definición de topología cociente en  $Y$  resulta que  $g^{-1}(V)$  es abierto en  $Y$  y, por tanto,  $g$  es continua.

## 5.3 Ejercicios

- (a) Supongamos que  $Y$  está dotado de la topología cociente respecto a la aplicación  $f: X \rightarrow Y$ . Demostrar que la topología de  $Y$  es la más fina tal que  $f$  es continua.
- (b) Supongamos que  $Y$  tiene la topología cociente respecto a  $f: X \rightarrow Y$ . Demostrar que un subconjunto  $A$  de  $Y$  es cerrado si y sólo si  $f^{-1}(A)$  es cerrado en  $X$ .
- (c) Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  ( $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ ) definida mediante

$$f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in \mathbb{R}^2.$$

Probar que la topología cociente  $\mathcal{U}_1$  determinada por  $f$  en  $S^1$  coincide con la topología  $\mathcal{U}$  inducida por la inclusión en  $\mathbb{R}^2$  (es decir, demostrar que  $(S^1, \mathcal{U}_1) \cong (S^1, \mathcal{U})$ ).

- (d) Sean  $X, Y, Z$  espacios topológicos y  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  aplicaciones exhaustivas. Demostrar que si las topologías de  $Y$  y de  $Z$  son las topologías cociente determinadas por  $f$  y  $g$  respectivamente, entonces la topología de  $Z$  es la topología cociente determinada por  $gf: X \rightarrow Z$ .
- (e) Probar que  $\mathbb{R}P^1$  y  $S^1$  son homeomorfos.
- (f) Demostrar que la aplicación  $f: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  definida por

$$\{x, -x\} \rightarrow (x_1^2 - x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$$

es continua e inyectiva.

- (g) Sea  $X$  un espacio topológico y  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación exhaustiva. Designemos por  $\mathcal{U}_1$  la topología cociente en  $Y$ . Supongamos que  $\mathcal{U}$  es una topología en  $Y$  tal que  $f: X \rightarrow Y$  es continua respecto a esta topología. Demostrar que si  $f$  es una aplicación abierta o cerrada, entonces  $(Y, \mathcal{U})$  es homeomorfo a  $(Y, \mathcal{U}_1)$ . Además, dar ejemplos que prueben que si  $f$  no es ni abierta ni cerrada  $(Y, \mathcal{U}) \neq (Y, \mathcal{U}_1)$ .
- (h) Supongamos que  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación exhaustiva de un espacio topológico  $X$  en un conjunto  $Y$ . Dotemos a  $Y$  de la topología cociente determinada por  $f$  y sea  $A$  un subespacio de  $X$ . Designemos por  $\mathcal{U}_1$  la topología inducida por  $Y$  en  $B = f(A) \subseteq Y$  y por  $\mathcal{U}_2$  la topología cociente determinada por la aplicación  $f|_A: A \rightarrow B$ . Demostrar que  $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ . Dar un ejemplo que pruebe que, en general  $\mathcal{U}_1 \neq \mathcal{U}_2$ . (Indicación: Considerar  $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  definida por  $f(t) = \exp(2\pi i t)$ .) Demostrar, también, que, si  $A$  es cerrado en  $X$  y  $f$  es una aplicación cerrada o si  $A$  es abierto en  $X$  y  $f$  es una aplicación abierta, entonces  $\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_2$ .

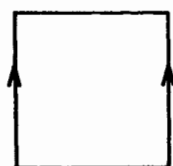
Un procedimiento para obtener aplicaciones exhaustivas consiste en considerar las clases de equivalencia de una relación de equivalencia. Así, si  $X$  es un espacio topológico y  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $X$ , definimos  $f: X \rightarrow X/\sim$  por  $f(x) = [x]$ , la clase de equivalencia que contiene a  $x$  ( $X/\sim$  designa el conjunto de clases de equivalencia). Se dice a menudo que  $X/\sim$  con la topología cociente ha sido obtenido por *identificación topológica*. Por ejemplo, si  $\sim$  es la relación de equivalencia en  $S^n$  dada por  $x \sim y$  si y sólo si  $x = \pm y$ ,  $S^n/\sim$  es, desde luego,  $\mathbb{R}P^n$ . Análogamente la misma relación en el cilindro  $C$  nos da  $C/\sim$ , que es la banda de Möbius.

Si consideramos en  $\mathbb{R}^2$  el cuadrado unidad  $X = \{(x,y); 0 \leq x, y \leq 1\}$  con la topología inducida y definimos en  $X$  una relación de equivalencia  $\sim$  por

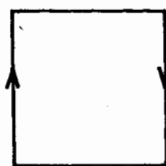
$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \text{ o } \{x,x'\} = \{0,1\} \text{ e } y = y'$$

entonces  $X/\sim$  con la topología cociente es homeomorfo al cilindro. Podríamos dar aquí una demostración bastante pesada pero preferimos obtener el resultado de forma mucho más ágil en el Capítulo 8; intuitivamente es claro. Representaremos  $X$  con su relación de equivalencia como en la Figura 5.2(a), donde las flechas indican qué puntos (y en qué forma) están identificados.

Figura 5.2



(a) Cilindro



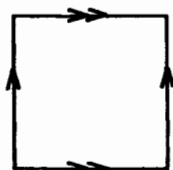
(b) Banda de Möbius

Podríamos construir una banda de Möbius por un proceso similar; está representada en la Figura 5.2(b) y la relación en el cuadrado  $X$  es

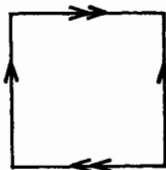
$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \text{ o } \{x,x'\} = \{0,1\} \text{ e } y = 1-y'.$$

La Figura 5.3 muestra otros dos ejemplos obtenidos a partir de un cuadrado unidad por identificaciones topológicas.

Figura 5.3



(a) Toro



(b) Botella de Klein

Las relaciones no triviales en  $X$  dadas en la Figura 5.3(a) son

$$(0,y) \sim (1,y), \quad (x,0) \sim (x,1),$$

mientras que las relaciones no triviales en  $X$  dadas en la Figura 5.3(b) son

$$(0,y) \sim (1,y), \quad (x,0) \sim (1-x,1).$$

Más adelante (aunque el lector puede intentar demostrarlo ahora) veremos claramente que el toro (el espacio de la Figura 5.3(a)) es homeomorfo al subespacio de  $\mathbb{R}^3$  definido por

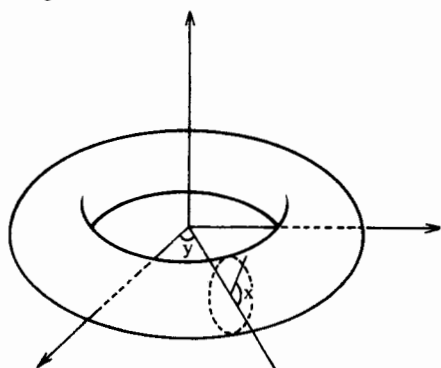
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1\}$$

Puede darse un homeomorfismo de forma explícita por

$$(x, y) \rightarrow ((2 + \cos(2\pi x)) \cos(2\pi y), (2 + \cos(2\pi x)) \sin(2\pi y), \sin(2\pi x))$$

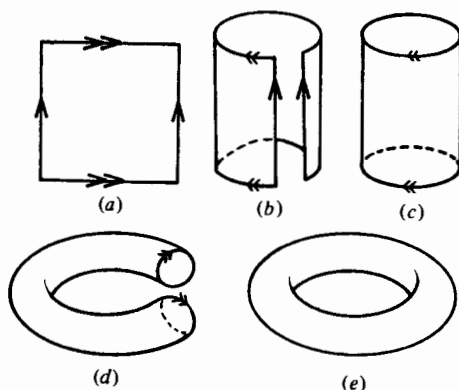
Esto nos lleva a la tradicional representación de un toro como la superficie de una rosquilla. Véase la Figura 5.4.

Figura 5.4



Intuitivamente, si con un material flexible de la forma de la Figura 5.3(a) realizamos las identificaciones apropiadas, obtenemos de nuevo este cuerpo. Véase la Figura 5.5.

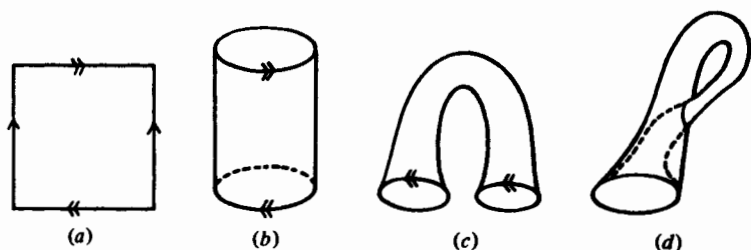
Figura 5.5





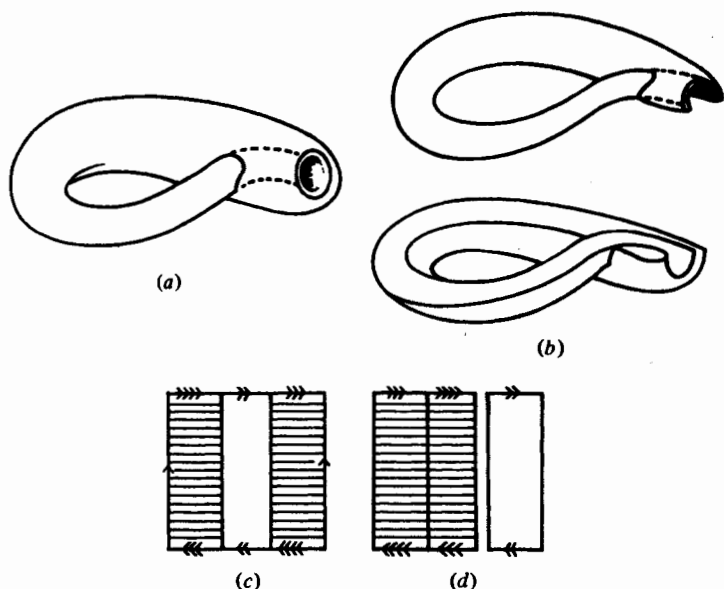
El proceso análogo para la botella de Klein es más difícil de realizar, ya que la identificación debe realizarse en  $\mathbb{R}^4$ . La primera identificación (Figura 5.6(b)) es fácil. Para la segunda (Figura 5.6(c)) necesitamos cuatro dimensiones. Lo representamos gráficamente como en la Figura 5.6(d). La circunferencia de intersección que aparece no existe realmente; aparece porque vivimos en un mundo de tres dimensiones.

Figura 5.6



Cortando la Figura 5.6(d) por un plano vemos (Figura 5.7(a),(b)) que una botella de Klein es exactamente la unión de dos bandas de Möbius a lo largo de su borde común, tal como está visualizado en la Figura 5.7(c),(d).

Figura 5.7



Recordemos, para su utilización posterior, que el plano proyectivo real  $\mathbf{RP}^2$  está definido como  $S^2/\sim$ , donde

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = \pm x'.$$

En este caso el hemisferio norte está identificado con el hemisferio sur y, por tanto, podemos restringir nuestra atención al hemisferio norte que es homeomorfo al disco  $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$  vía la aplicación

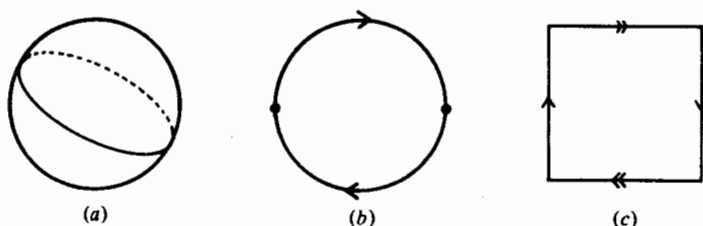
$$(x, y, z) \rightarrow (x, y)$$

para todo  $(x,y,z) \in S^2$  con  $z \geq 0$ . Así pues, podemos redescubrir  $\mathbf{RP}^2$  como  $D^2/\sim$ , donde

$$x \sim x' \Leftrightarrow x = x' \quad \text{o} \quad x, x' \in S^1 \subseteq D^2 \quad \text{y} \quad x = -x'.$$

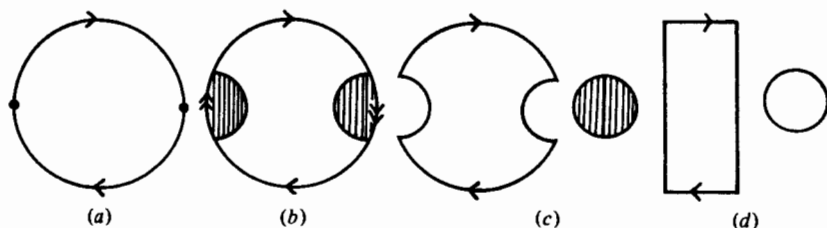
La Figura 5.8(b), o equivalentemente la Figura 5.8(c) da esta representación. Desde luego, no hemos dado una demostración rigurosa.

Figura 5.8



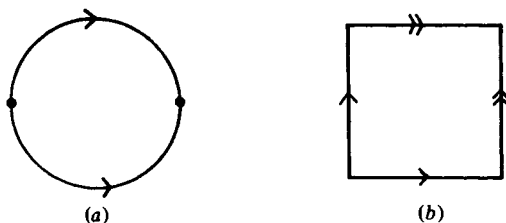
Si suprimimos en  $\mathbf{RP}^2$  una pequeña región (homeomorfa a  $\hat{D}^2$ ) obtenemos una banda de Möbius; véase la Figura 5.9. Así, pues, el plano proyectivo real puede pensarse como una banda de Möbius a la que le hemos cosido un disco.

Figura 5.9



La esfera puede ser representada como un espacio cociente tal como indica la Figura 5.4(a) o (b). Intuitivamente imaginamos los espacios como bolsas con cremallera. Cerrando la cremallera obtenemos una esfera.

Figura 5.10



En los ejemplos anteriores nuestros razonamientos han sido intuitivos. Pueden darse demostraciones rigurosas pero preferimos posponerlas hasta que dispongamos de un poco más de teoría. Una vez leído el Capítulo 8 el lector deberá volver a este capítulo para llevar a cabo el detalle de las demostraciones de los resultados intuitivos que acabamos de mencionar.

Los análogos en dimensión uno del disco y de la esfera son el intervalo y la circunferencia: si identificamos los extremos de un intervalo unidad obtenemos una circunferencia; intuitivamente es claro. El lector debería intentar escribir una demostración rigurosa.

## 5.4 Ejercicios

- Demostrar que si  $I = [0, 1] \subseteq \mathbf{R}$  y  $\sim$  es la relación de equivalencia  $x \sim x'$  si y sólo si  $\{x, x'\} = \{0, 1\}$  o  $x = x'$ , entonces  $I/\sim$  es homeomorfo a  $S^1$ .
- La banda de Möbius posee algunas propiedades interesantes en comparación con el cilindro. Construir modelos de un cilindro y de una banda de Möbius usando tiras de papel, de unos 40 cm por 4 cm. Dibujar con un lápiz el ecuador del cilindro y de la banda de Möbius. Cortar a lo largo de estas líneas. ¿Qué resulta en cada caso? ¿Qué ocurre si cortamos por una línea que esté a un tercio de la distancia entre los bordes?

El resultado siguiente da condiciones suficientes que nos aseguran que los cocientes de espacios homeomorfos son homeomorfos.

## 5.5 Teorema

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación entre los espacios topológicos  $X$  e  $Y$ . Supongamos que tenemos relaciones de equivalencia  $\sim_x$  y  $\sim_y$  en  $X$  e  $Y$  respectivamente tales que  $x \sim_x x'$  si y sólo si  $f(x) \sim_y f(x')$ . Si  $f$  es un homeomorfismo, los espacios  $X/\sim_x$  y  $Y/\sim_y$  son homeomorfos.

**Demostración.** Definimos una aplicación  $F: X/\sim_x \rightarrow Y/\sim_y$  por  $F[x] = [f(x)]$ , donde los corchetes indican clases de equivalencia.  $F$  está bien definida ya que si  $[x] = [x']$ , entonces  $x \sim_x x'$ , de donde  $f(x) \sim_y f(x')$  y  $[f(x)] = [f(x')]$ . Probemos que  $F$  es un homeomorfismo. Para ver que  $F$  es inyectiva supongamos que  $F[x] = F[x']$ , de donde  $[f(x)] = [f(x')]$ , es decir  $f(x) \sim_y f(x')$ ; pero, entonces,  $x \sim_x x'$  y, por tanto,  $[x] = [x']$ . La exhaustividad de  $F$  se demuestra fácilmente. Para demostrar que  $F$  es continua consideremos las proyecciones naturales  $\pi_x: X \rightarrow X/\sim_x$  y  $\pi_y: Y \rightarrow Y/\sim_y$ , que son continuas. Claramente  $F\pi_x = \pi_y f$  y, puesto que  $f$  es continua, deducimos que  $F\pi_x$  es continua, de donde se sigue la continuidad de  $F$  por la propiedad universal del cociente. La demostración de la continuidad de  $F^{-1}$  es análoga ya que  $F^{-1}\pi_y = \pi_x f^{-1}$ .

Como ejemplo consideremos  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$  con la relación de equivalencia  $x \sim x'$  si y sólo si existe un entero  $n$  tal que  $x' = 3^n x$ . Consideremos también  $\mathbb{R}$  con la relación de equivalencia  $x \sim x'$  si y sólo si existe un entero  $n$  tal que  $x' = n + x$ . La aplicación  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = \log_3(x)$  es un homeomorfismo y  $x \sim x' \Leftrightarrow f(x) \sim f(x')$ ; así pues, los espacios  $\mathbb{R}^+/\sim$  y  $\mathbb{R}/\sim$  son homeomorfos; de hecho, ambos son homeomorfos a la circunferencia.

El teorema 5.5 rigoriza la idea intuitiva de «homeomorfismo» tal como presentado en el Capítulo 4: Partimos de un espacio  $W$ . Cortándolo obtenemos  $X$  y una relación  $\sim_x$  que nos dice cómo debemos pegar de nuevo  $X$  para obtener  $W$ . Realizamos ahora un homeomorfismo  $f$  en  $X$  obteniendo  $Y$  con la relación de equivalencia  $\sim_y$ . Naturalmente queremos que

$$x \sim_x x' \Leftrightarrow f(x) \sim_y f(x').$$

Volviendo a pegar  $Y$  según la relación  $\sim_y$  obtenemos  $Z = Y/\sim_y$ . En virtud del Teorema 5.5 el espacio  $Z$  es homeomorfo a  $X$ .

Un concepto que nos será de utilidad más adelante es el de un grupo  $G$  que «actúe» sobre un conjunto  $X$ . Este concepto es muy fructífero y nos proporciona ejemplos de espacios con la topología cociente.

## 5.6 Definición

Sea  $X$  un conjunto y  $G$  un grupo. Decimos que  $G$  *actúa* (u *opera*) sobre  $X$  y que  $X$  es un  $G$ -conjunto si existe una aplicación de  $G \times X$  en  $X$ , que denotaremos por  $(g, x) \rightarrow g \cdot x$ , tal que

- (i)  $1 \cdot x = x$  para todo  $x \in X$ , donde  $1$  es el elemento identidad de  $G$ ,
- (ii)  $g(h \cdot x) = (gh) \cdot x$  para todo  $x \in X$  y todo  $g, h \in G$ .

Como ejemplo, sea  $G$  el grupo de los homeomorfismos de un espacio topológico  $X$  (véase el Ejercicio 3.7(d)) y definamos  $g \cdot x = g(x)$  para todo  $g \in G$ . Obtenemos así una acción de  $G$  sobre  $X$  puesto que, claramente,  $1 \cdot x = 1(x) = x$  y  $g(h \cdot x) = g(h(x)) = (gh)(x) = (gh) \cdot x$ . Otro ejemplo resulta al considerar  $G = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ , el grupo de orden 2, y  $X = S^n$ . Se comprueba fácilmente que mediante  $\pm 1 \cdot x = \pm x$  obtenemos una acción de  $\mathbb{Z}_2$

sobre  $S^n$ . Si tomamos  $G = \mathbb{Z}$  el grupo de los enteros y  $X = \mathbb{R}$ ,  $n \cdot x = n + x$ , donde  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  nos da una acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$ . Este ejemplo puede generalizarse a una acción de  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}^2$  mediante  $(m,n) \cdot (x,y) = (m+x, n+y)$ . En ambos casos dejamos para el lector la comprobación de que efectivamente se obtiene una acción en el sentido de la Definición 5.6. Nuestro último ejemplo, de momento, es una acción de  $\mathbb{Z}$  sobre la banda infinita.

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}\}$$

dada por

$$m \cdot (x,y) = (m+x, (-1)^m y).$$

Hablando con precisión, nuestra definición de  $G$ -acción es la de una  $G$ -acción *por la izquierda*. Existe también el concepto de  $G$ -acción *por la derecha* cuando tenemos una aplicación  $X \times G \rightarrow X$ , que denotaremos por  $(x,g) \rightarrow x \cdot g$ , tal que  $x \cdot 1 = x$  y  $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (gh)$ . Una  $G$ -acción significará siempre una  $G$ -acción por la izquierda.

## 5.7 Ejercicios

- (a) Supongamos que  $X$  es un  $G$ -conjunto por la derecha. Para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$  definimos

$$g \cdot x = x \cdot (g^{-1})$$

Demostrar que obtenemos así una acción (por la izquierda) de  $G$  sobre  $X$ . ¿Dónde falla la definición  $g \cdot x = x \cdot g$ ?

- (b) Sea  $H$  un subgrupo de un grupo  $G$ . Para todo  $h \in H$  y todo  $g \in G$  definimos  $h \cdot g$  como  $hg$ . Demostrar que obtenemos así una acción de  $H$  sobre  $G$ .  
 (c) Sea  $G$  un grupo y designemos por  $\mathcal{S}(G)$  el conjunto de todos los subconjuntos de  $G$ . Demostrar que

$$g \cdot U = gU = \{ gh; h \in U \}, \quad g \in G, U \in \mathcal{S}(G)$$

define una acción de  $G$  sobre  $\mathcal{S}(G)$ .

- (d) Si  $G$  es un grupo que actúa sobre  $X$  definimos el *estabilizador* de  $x \in X$  como el conjunto

$$G_x = \{ g \in G; g \cdot x = x \}.$$

Demostrar que  $G_x$  es un subgrupo de  $G$ .

- (e) Si  $G$  es un grupo que actúa sobre  $X$  definimos la *órbita* de  $x \in X$  como el subconjunto de  $X$

$$G \cdot x = \{ g \cdot x; g \in G \}$$

Demostrar que dos órbitas  $G \cdot x$ ,  $G \cdot y$  son disjuntas o coinciden. Deducir que todo  $G$ -conjunto  $X$  se descompone en unión de subconjuntos disjuntos.

Una consecuencia importante de la definición de  $G$ -conjunto  $X$  es que, de hecho,  $G$  actúa sobre  $X$  por biyecciones.

## 5.8 Teorema

Sea  $X$  un  $G$ -conjunto. Para todo  $g \in G$  la aplicación  $\theta_g: X \rightarrow X$  definida por  $x \mapsto g \cdot x$  es biyectiva.

*Demostración.* De la definición de  $G$ -conjunto resulta  $\theta_g \theta_h = \theta_{gh}$  y  $\theta_1 = 1_X$ ; así pues  $\theta_g \theta_{g^{-1}} = 1_X = \theta_{g^{-1}} \theta_g$  y, por tanto,  $\theta_g$  es biyectiva.

Si  $G$  actúa sobre  $X$ , podemos definir una relación de equivalencia  $\sim$  en  $X$  mediante

$$x \sim y \Leftrightarrow \text{existe un } g \in G \text{ tal que } g \cdot x = y.$$

o, en otras palabras,  $x \sim y$  si y sólo si  $y \in G \cdot x$ ; véase el Ejercicio 5.7(e). El conjunto de clases de equivalencia, que designaremos por  $X/G$ , se llama el *conjunto cociente* de  $X$  por  $G$ . Tenemos entonces, obviamente, una aplicación exhaustiva  $X \rightarrow X/G$ . Si  $X$  es un espacio topológico sobre el cual actúa  $G$  podemos dotar a  $X/G$  de la topología cociente. Al espacio  $X/G$  con la topología cociente le llamaremos el *espacio cociente* de  $X$  por  $G$ .

Por ejemplo, si  $\mathbb{Z}_2$  actúa sobre  $S^n$  por  $\pm 1 \cdot x = \pm x$ ,  $S^n/\mathbb{Z}_2$  no es otra cosa que  $\mathbb{RP}^n$ . Si  $\mathbb{Z}$  actúa sobre  $\mathbb{R}$  por  $n \cdot x = n + x$ ,  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es precisamente  $S^1$ .

## 5.9 Ejercicios

- Sea  $X$  la banda infinita  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1/2 \leq y \leq 1/2\}$  de  $\mathbb{R}^2$  sobre la que actúa  $\mathbb{Z}$  mediante  $m \cdot (x, y) = (m + x, (-1)^m y)$ . Demostrar que el espacio cociente  $X/\mathbb{Z}$  es homeomorfo a la banda de Möbius.
- Sean  $X$  e  $Y$   $G$ -conjuntos. Decimos que la aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es  *$G$ -equivariante* si  $f(g \cdot x) = g \cdot f(x)$  para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$ . Demostrar que si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos y  $f$  es un homeomorfismo  $G$ -equivariante (es decir,  $f$  es un homeomorfismo y es  $G$ -equivariante) entonces  $X/G$  e  $Y/G$  son homeomorfos.
- Construir ejemplos que prueben que si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos sobre los que opera  $G$  tales que  $X/G \cong Y/G$ , entonces  $X$  e  $Y$  no son necesariamente homeomorfos.
- Sea  $X$  un  $G$ -conjunto. Para cada  $x \in X$  el estabilizador  $G_x$  actúa sobre  $G$  y, por tanto, está definido el cociente  $G/G_x$ . Demostrar que  $G/G_x$  es precisamente el conjunto de clases laterales por la izquierda de  $G_x$  en  $G$ . Demostrar que existe una biyección  $G$ -equivariante entre la órbita  $G \cdot x$  de  $x$  y  $G/G_x$ .

En los ejemplos que hemos dado de acciones de un grupo sobre un espacio topológico, los grupos en cuestión actuaban con continuidad; estos espacios tienen un nombre especial.

### 5.10 Definición

Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo; decimos que  $X$  es un  $G$ -espacio si  $G$  actúa sobre  $X$  y si las aplicaciones  $\theta_g$  definidas por  $x \rightarrow g \cdot x$  son continuas para todo  $g \in G$ .

### 5.11 Ejercicio

Supongamos que  $X$  es un  $G$ -espacio. Demostrar que para todo  $g \in G$  la aplicación  $\theta_g$  definida por  $x \rightarrow g \cdot x$  es un homeomorfismo de  $X$  en sí mismo. Deducir que existe un homomorfismo de  $G$  en el grupo de homeomorfismos de  $X$ .

En virtud del ejercicio anterior se dice a veces que  $G$  es un grupo de homeomorfismos de  $X$  si  $X$  es un  $G$ -espacio. Usando esto, probaremos el próximo resultado.

### 5.12 Teorema

Supongamos que  $X$  es un  $G$ -espacio. Entonces, la proyección canónica  $\pi: X \rightarrow X/G$  es una aplicación abierta.

*Demostración.* Sea  $U$  un conjunto abierto en  $X$  y consideremos  $\pi^{-1}(\pi(U))$ .

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(\pi(U)) &= \{ x \in X; \pi(x) \in \pi(U) \} \\ &= \{ x \in X; G \cdot x = G \cdot y \text{ para algún } y \in U \} \\ &= \{ x \in X; x = g \cdot y \text{ para algún } y \in U, \text{ y algún } g \in G \} \\ &= \{ x \in X; x \in g \cdot U \text{ para algún } g \in G \} \\ &= \bigcup_{g \in G} g \cdot U\end{aligned}$$

La acción de cada  $g$  de  $G$  es un homeomorfismo, por lo que si  $U$  es abierto también lo es  $\pi^{-1}(\pi(U))$ , y, por tanto,  $\pi(U)$  es abierto en  $X/G$ .

El primero de los ejercicios siguientes es una extensión de la propiedad universal del cociente. El segundo extiende el Teorema 5.12 en un caso especial.

### 5.13 Ejercicios

- Sea  $X$  un  $G$ -espacio y  $\pi: X \rightarrow X/G$  la proyección canónica. Supongamos que  $g$  es una aplicación de  $X/G$  en un espacio topológico  $Z$ . Demostrar que  $g$  es una aplicación abierta si y sólo si  $g \circ \pi$  es abierta.
- Sea  $X$  un  $G$ -espacio, con  $G$  finito. Demostrar que la proyección natural  $\pi: X \rightarrow X/G$  es una aplicación cerrada.
- Supongamos que  $X$  es un  $G$ -espacio y que  $H$  es un subgrupo normal de  $G$ . Demostrar que  $X/H$  es un  $(G/H)$ -espacio y que  $(X/H)/(G/H) \cong X/G$ .

## Capítulo 6

# Espacio producto

Nuestro último método para construir espacios nuevos a partir de espacios topológicos dados es mediante el producto directo. Recordemos que el producto directo  $X \times Y$  de dos conjuntos  $X, Y$  es el conjunto de pares ordenados  $(x, y)$  con  $x \in X$  e  $y \in Y$ . Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos, podemos usar las topologías en  $X$  e  $Y$  para dar una topología en  $X \times Y$ . En una primera aproximación podríamos pensar que los conjuntos abiertos de  $X \times Y$  deberían ser producto de conjuntos abiertos en  $X$  y en  $Y$ ; sin embargo, esto no es suficiente (¡pensar! — ¿cuál es la condición que falla para que esto sea una topología?).

### 6.1 Definición

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos. El *producto (topológico)*  $X \times Y$  es el conjunto  $X \times Y$  con la topología  $\mathcal{U}_{X \times Y}$  formada por la familia de conjuntos que son uniones de productos de conjuntos abiertos de  $X$  e  $Y$ .

Un elemento típico de  $\mathcal{U}_{X \times Y}$  es de la forma  $\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$ , donde  $J$  es un conjunto de índices

y para cada  $j \in J$ ,  $U_j$  y  $V_j$  son subconjuntos abiertos de  $X$  e  $Y$  respectivamente. No es difícil comprobar que  $\mathcal{U}_{X \times Y}$  es una topología:  $\emptyset = \emptyset \times \emptyset$  y  $X \times Y = X \times Y$ , con lo que la primera condición se satisface. Si  $W, W' \in \mathcal{U}_{X \times Y}$ , entonces, para ciertos conjuntos de índices  $J, K$  se tiene  $W = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$  y  $W' = \bigcup_{k \in K} U'_k \times V'_k$  donde  $U_j, U'_k$  son abiertos en  $X$  y

$V_j, V'_k$  abiertos en  $Y$ . Puesto que

$$W \cap W' = \bigcup_{(j,k) \in J \times K} (U_j \cap U'_k) \times (V_j \cap V'_k)$$

resulta que se satisface la condición (ii) para una topología. La tercera condición es trivialmente cierta.



El concepto de producto topológico de  $X$  e  $Y$  puede extenderse al producto topológico de una familia finita de espacios topológicos de manera obvia.

## 6.2 Ejercicios

- (a) Demostrar que si  $X_1 \cong X_2$  y  $Y_1 \cong Y_2$ , entonces  $X_1 \times Y_1 \cong X_2 \times Y_2$ .  
 (b) Sean  $X, Y$  espacios metrizable. Supongamos que provienen de métricas  $d_X, d_Y$  respectivamente. Demostrar que  $d$  definida como

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max \{ d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2) \}$$

es una métrica en  $X \times Y$  que nos da la topología de espacio producto en  $X \times Y$ . Deducir que la topología producto en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  ( $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ , con la topología usual), es la misma que la topología usual en  $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ .

- (c) El gráfico de una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es el conjunto de puntos de  $X \times Y$  de la forma  $(x, f(x))$  para todo  $x \in X$ . Demostrar que si  $f$  es una aplicación continua entre espacios topológicos, entonces el gráfico de  $f$  es homeomorfo a  $X$ .  
 (d) Probar que  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  es homeomorfo a  $\mathbb{R} \times S^1$ . (Indicación: Considerar  $\mathbb{R}^2 - \{0\}$  como  $\mathbb{C} - \{0\}$ .)

Existe otra caracterización de la topología de  $X \times Y$ .

## 6.3 Teorema

Sea  $X \times Y$  el producto de dos espacios topológicos. Un conjunto  $W \subseteq X \times Y$  es abierto si y sólo si, para todo  $w \in W$ , existen abiertos  $U_w, V_w$  tales que  $U_w$  es abierto en  $X$ ,  $V_w$  es abierto en  $Y$ ,  $U_w \times V_w \subseteq W$  y  $w \in U_w \times V_w$ .

*Demostración.* Supongamos que  $W$  es abierto: entonces  $W = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$ , donde  $J$  es cierto

conjunto de índices y  $U_j, V_j$  son abiertos en  $X, Y$ , respectivamente. Así, si  $w \in W$ , para algún  $i \in J$  se tiene  $w \in U_i \times V_i$ . Recíprocamente, el conjunto  $\bigcup_{w \in W} U_w \times V_w$  es abierto en

$X \times Y$  y claramente coincide con  $W$ .

Existen proyecciones obvias  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$  y  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  dadas por  $(x, y) \mapsto x$  y  $(x, y) \mapsto y$ . Se llaman las proyecciones producto. Puesto que  $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$  y  $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$ , es claro que  $\pi_X$  y  $\pi_Y$  son ambas aplicaciones continuas.

## 6.4 Teorema

Para todo  $y \in Y$  el subespacio  $X \times \{y\} \subseteq X \times Y$  es homeomorfo a  $X$ .

**Demostración.** Consideremos la aplicación  $f: X \times \{y\} \rightarrow X$  dada por  $(x, y) \mapsto x$ , que es claramente biyectiva. Podemos considerar  $f$  como la composición de la inclusión  $X \times \{y\} \rightarrow X \times Y$  y la proyección  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$ , ambas continuas. Supongamos ahora que  $W$  es un subconjunto abierto de  $X \times \{y\}$ ; así,  $W = (\bigcup_{j \in J} U_j \times V_j) \cap X \times \{y\}$ , donde  $U_j, V_j$  son abier-

tos en  $X, Y$  respectivamente.  $W$  puede reescribirse como  $\bigcup_{j \in J'} U_j \times \{y\}$  donde  $J' = \{j \in J; y \in V_j\}$ ; así pues  $f(W) = \bigcup_{j \in J'} U_j$ , que es abierto en  $X$ . Esto prueba que  $f$  es también abierta y,

por tanto, es un homeomorfismo.

Si  $f: A \rightarrow X$  y  $g: A \rightarrow Y$  son aplicaciones entre espacios topológicos, podemos definir una aplicación  $h: A \rightarrow X \times Y$  mediante  $h(a) = (f(a), g(a))$ . Está claro que  $h$  es la única aplicación tal que  $\pi_X h = f$  y  $\pi_Y h = g$ . La relación existente entre la continuidad de  $h$  y la de  $f, g$  se llama la *propiedad universal del producto*.

## 6.5 Teorema

Sean  $A, X$  e  $Y$  espacios topológicos. Para cualquier par de aplicaciones  $f: A \rightarrow X, g: A \rightarrow Y$ , la aplicación  $h: A \rightarrow X \times Y$  definida por  $h(a) = (f(a), g(a))$  es continua si y sólo si  $f$  y  $g$  son continuas.

**Demostración.** Si  $h$  es continua, también lo son  $\pi_X h = f$  y  $\pi_Y h = g$ . Recíprocamente, supongamos que  $f$  y  $g$  son continuas. Sean  $U, V$  subconjuntos abiertos de  $X, Y$  respectivamente. Entonces  $h^{-1}(U \times V) = \{a; f(a) \in U, g(a) \in V\} = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ , pero puesto que  $f^{-1}(U)$  y  $g^{-1}(V)$  son abiertos, también lo es  $h^{-1}(U \times V)$ . Consideremos ahora un subconjunto abierto  $W$  en  $X \times Y$ . Si  $x \in W$ , entonces  $x \in U \times V \subseteq W$ , donde  $U, V$  son abiertos en  $X, Y$ . Así pues,  $h^{-1}(x) \in f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subseteq h^{-1}(W)$  y, por tanto,  $h^{-1}(W)$  es abierto.

## 6.6 Ejercicios

- Demostrar que la topología producto en  $X \times Y$  es la topología menos fina tal que  $\pi_X$  y  $\pi_Y$  son continuas.
- Sean  $X$  un  $G$ -espacio e  $Y$  un  $H$ -espacio. Probar que el espacio  $(X \times Y)/(G \times H)$  es homeomorfo a  $(X/G) \times (Y/H)$ .
- Para todo  $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  y  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  definamos

$$(n, m) \cdot (x, y) = (n+x, m+y)$$

Demostrar que así hemos dotado a  $\mathbb{R}^2$  de una estructura de  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$ -espacio. Probar que  $\mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^1$ .

- (d) Probar que el toro (véase Figuras 5.3(a) y 5.4) es homeomorfo a  $S^1 \times S^1$ .  
 (e) Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $z \in \mathbb{C} - \{0\}$  definamos  $n \cdot z$  por

$$n \cdot z = 2^n z.$$

Demostrar que, entonces,  $\mathbb{C} - \{0\}$  es un  $\mathbb{Z}$ -espacio. Probar que  $(\mathbb{C} - \{0\})/\mathbb{Z}$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^1$ . (Indicación: Usar los Ejercicios 6.2(d) y 6.6(b) y el hecho de que  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z} \times \{1\}$ .)

- (f) Como en el Ejercicio (e) anterior, pero definamos  $n \cdot z$  por

$$n \cdot z = (2\omega)^n z$$

donde  $\omega = \exp(2\pi i/3)$ . ¿Qué es  $(\mathbb{C} - \{0\})/\mathbb{Z}$ ?

- (g) Probar que  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  y  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$  son espacios homeomorfos. (Indicación: Considerar la aplicación  $f: S^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  definida por  $f(x, t) = 2^t x$ .)  
 (h) Probar que el subconjunto  $S_{p,q} \subseteq \mathbb{R}^n$  definido por

$$S_{p,q} = \{ x \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2 = 1 \}$$

donde  $p + q \leq n$ , es homeomorfo a  $S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p}$ . (Indicación: Considerar la aplicación  $f: S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-p} \rightarrow S_{p,q}$  dada por

$$f(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_{n-p}) = (x_1 z, x_2 z, \dots, x_p z, y_1, y_2, \dots, y_{n-p})$$

donde  $z = \sqrt{(1 + y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-p}^2)}$ .)

- (i) Sea  $G$  el grupo de homeomorfismos  $\{T^i; i \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $T: \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  está definido por  $Tx = 2x$ . Demostrar que  $(\mathbb{R}^n - \{0\})/G$  es homeomorfo a  $S^{n-1} \times S^1$ .  
 (j) Probar que los dos subconjuntos siguientes de  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual son homeomorfos:

$$I^n = \{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; 0 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \},$$

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1 \}.$$

(Indicación: Primero demostrar que  $I^n \cong ([-1, 1])^n = X$ ; entonces definir  $\varphi: X \rightarrow D^n$  y  $\psi: D^n \rightarrow X$  por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}}{\|x\|} (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

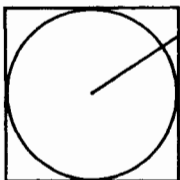
$$\varphi(0) = 0,$$

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\|x\|}{\max \{ |x_1|, |x_2|, \dots, |x_n| \}} (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\psi(0) = 0.$$

Intuitivamente: Contraer linealmente cada segmento con origen 0 y final  $\partial X$  para que tenga longitud 1. Véase Figura 6.1.)

Figura 6.1



- (k) Probar que  $D^n \cong \mathbb{R}^n$ . (Indicación:  $\mathring{D}^n \cong \mathring{I}^n = (\mathring{I})^n$ .)
- (l) Hallar un espacio no vacío  $X$  tal que  $X \cong X \times X$ . (Indicación: Intentar con un conjunto no finito con la topología discreta. Una vez hecho esto, intentar hallar también un ejemplo pero sin la topología discreta.)

## Capítulo 7

# Espacios compactos

En este capítulo y en los dos siguientes estudiaremos propiedades de los espacios topológicos que se conservan por homeomorfismos. Una consecuencia importante es que si un espacio posee la propiedad en cuestión y otro espacio no, estos dos espacios no pueden ser homeomorfos. La primera propiedad que consideraremos es la compacidad. Este concepto se basa esencialmente en el hecho de que si  $\{U_j; j \in J\}$  es una colección de subconjuntos abiertos del intervalo unidad  $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$  (con la topología inducida) tal que  $\bigcup_{j \in J} U_j = [0,1]$ , entonces existe una subcolección finita de estos subconjuntos abiertos cuya

unión ya es  $[0,1]$ ; véase el Teorema 7.7.

### 7.1 Definición

Un *recubrimiento* de un subconjunto  $S$  de un conjunto  $X$  es una colección de subconjuntos  $\{U_j; j \in J\}$  de  $X$  tal que  $S \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$ . Si el conjunto de índices  $J$  es finito, se dice que

$\{U_j; j \in J\}$  es un *recubrimiento finito*.

Por ejemplo, la colección  $\{[1/n, 1-1/n]; n \in \mathbb{N}\}$  es un recubrimiento del subconjunto  $(0,1)$  de  $\mathbb{R}$ . Desde luego, si  $S = X$ ,  $\{U_j; j \in J\}$  es un recubrimiento de  $X$  si  $X = \bigcup_{j \in J} U_j$ . Por

ejemplo, si  $U_n = (n, n+3) \subseteq \mathbb{R}$ , entonces  $\{U_n; n \in \mathbb{Z}\}$  es un recubrimiento de  $\mathbb{R}$ .

### 7.2 Definición

Supongamos que  $\{U_j; j \in J\}$  y  $\{V_k; k \in K\}$  son recubrimientos del subconjunto  $S$  de  $X$ . Si para todo  $j \in J$  existe un  $k \in K$  tal que  $U_j \subseteq V_k$ , decimos que  $\{U_j; j \in J\}$  es un *subrecubrimiento* del recubrimiento  $\{V_k; k \in K\}$ .

Por ejemplo,  $\{V_r; r \in \mathbb{R}\}$ , donde  $V_r = (r, r+3) \subseteq \mathbb{R}$ , es un recubrimiento de  $\mathbb{R}$  y  $\{U_n; n \in \mathbb{Z}\}$ , donde  $U_n = (n, n+3)$ , es un subrecubrimiento de  $\{V_r; r \in \mathbb{R}\}$ .

### 7.3 Definición

Supongamos que  $X$  es un espacio topológico y  $S$  es un subconjunto de  $X$ . Decimos que el recubrimiento  $\{U_j; j \in J\}$  es un *recubrimiento abierto* de  $S$  si cada  $U_j, j \in J$  es un subconjunto abierto de  $X$ .

### 7.4 Definición

Un subconjunto  $S$  de un espacio topológico  $X$  es *compacto* si todo recubrimiento abierto de  $S$  posee un subrecubrimiento finito.

En particular, el espacio topológico  $X$  es compacto si todo recubrimiento abierto de  $X$  posee un subrecubrimiento finito. El espacio  $\mathbb{R}$  con su topología usual no es un espacio compacto ya que  $\{(n, n+2); n \in \mathbb{Z}\}$  es un recubrimiento abierto de  $\mathbb{R}$  que no admite ningún subrecubrimiento finito. Un espacio  $X$  con la topología discreta es compacto si y sólo si es finito. Esto es debido a que cada punto de  $X$  es abierto y, por tanto, si  $X$  es infinito, el recubrimiento abierto formado por los conjuntos que sólo tienen un punto no posee ningún subrecubrimiento finito. Por otra parte, si  $X$  es finito sólo hay un número finito de subconjuntos abiertos. Demostraremos en breve que el intervalo unidad  $[0,1]$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ .

### 7.5 Ejercicios

- Supongamos que  $X$  tiene la topología de los complementos finitos. Demostrar que  $X$  es compacto. Demostrar que todo subconjunto de  $X$  es compacto.
- Probar que un espacio topológico es compacto si y sólo si para toda colección  $\{C_j; j \in J\}$  de subconjuntos cerrados con  $\bigcap_{j \in J} C_j = \emptyset$  existe una subcolección finita

$$\{C_k; k \in K\} \text{ tal que } \bigcap_{k \in K} C_k = \emptyset.$$

- Sea  $\mathcal{T}$  la topología de  $\mathbb{R}$  definida por:  $U \in \mathcal{T}$  si y sólo si para cada  $s \in U$  existe un  $t > s$  tal que  $[s, t) \subseteq U$ . Probar que el subconjunto  $[0,1]$  de  $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$  no es compacto.

Un subconjunto  $S$  de un espacio topológico puede estar dotado de la topología inducida, obteniendo así dos conceptos de compacidad para  $S$ : como subconjunto de  $S$  y como espacio topológico él mismo. Los dos conceptos coinciden.

### 7.6 Teorema

Un subconjunto  $S$  de  $X$  es compacto si y sólo si es compacto como espacio dotado de la topología inducida.

**Demostración.** El teorema es claro ya que los subconjuntos abiertos de  $S$  por la topología inducida son de la forma  $U \cap S$ , donde  $U$  es abierto en  $X$ . El lector debería escribir los detalles cuidadosamente.

Así pues, podríamos haber dicho que  $S$  es compacto si es un espacio compacto con la topología inducida.

El resultado siguiente nos proporciona un importante ejemplo de espacio compacto.

## 7.7 Teorema

El intervalo unidad  $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$  es compacto.

**Demostración.** Sea  $\{U_j; j \in J\}$  un recubrimiento abierto de  $[0,1]$  y supongamos que no posee ningún subrecubrimiento finito. Esto significa que por lo menos uno de los intervalos  $[0, 1/2]$  o  $[1/2, 1]$  no puede ser recubierto por una subcolección finita de  $\{U_j; j \in J\}$ . Sea  $[a_1, b_1]$  este intervalo; es decir,  $[a_1, b_1]$  no puede ser recubierto por una subcolección finita de  $\{U_j; j \in J\}$ . De nuevo, por lo menos uno de los intervalos  $[a_1, 1/2(a_1 + b_1)]$  o  $[1/2(a_1 + b_1), b_1]$  no puede ser recubierto por una subcolección finita de  $\{U_j; j \in J\}$ ; sea  $[a_2, b_2]$  este intervalo. Prosiguiendo de esta forma obtenemos una sucesión de intervalos  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ , ...,  $[a_n, b_n]$ , ..., tal que ninguna subcolección finita de  $\{U_j; j \in J\}$  recubre ninguno de estos intervalos. Además  $b_n - a_n = 2^{-n}$  y  $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$  para todo  $n$ . Esta última condición implica que  $a_m \leq b_n$  para todo par de enteros  $m$  y  $n$ , por lo que  $b_n$  es una cota superior del conjunto  $\{a_1, a_2, \dots\}$ . Sea  $a$  la mínima cota superior del conjunto  $\{a_1, a_2, \dots\}$ . Puesto que  $a \leq b_n$  para todo  $n$ ,  $a$  es una cota inferior de  $\{b_1, b_2, \dots\}$ . Sea  $b$  la máxima cota inferior del conjunto  $\{b_1, b_2, \dots\}$ . Por definición, para cada  $n$ , se tiene  $a_n \leq a \leq b \leq b_n$ . Pero, puesto que  $b_n - a_n = 2^{-n}$ , resulta  $b - a \leq 2^{-n}$  para todo  $n$  y, por tanto,  $a = b$ .

Puesto que  $\{U_j; j \in J\}$  recubre  $[0,1]$  y  $a = b \in [0,1]$ , resulta que  $a \in U_j$  para algún  $j \in J$ . Puesto que  $U_j$  es abierto, existe un intervalo abierto  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U_j$  para algún  $\epsilon > 0$ . Escojamos un entero positivo  $N$  tal que  $2^{-N} < \epsilon$  y, por tanto,  $b_N - a_N < \epsilon$ . Sin embargo,  $a \in [a_N, b_N]$  y  $a - a_N < 2^{-N} < \epsilon$ ,  $b - b_N < 2^{-N} < \epsilon$ , por lo que  $[a_N, b_N] \subseteq (a - \epsilon, a + \epsilon) \subseteq U_j$ , que contradice el hecho de que  $[a_N, b_N]$  no está recubierto por ninguna subcolección finita de  $\{U_j; j \in J\}$ .

El razonamiento anterior puede aplicarse para demostrar que el  $n$ -cubo unidad  $I^n = I \times I \times \dots \times I \subseteq \mathbb{R}^n$  es un espacio compacto (donde  $I = [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ ). Sin embargo, más adelante, daremos otra demostración.

## 7.8 Teorema

Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Si  $S \subseteq X$  es un subespacio compacto,  $f(S)$  es compacto.

**Demostración.** Supongamos que  $\{U_j; j \in J\}$  es un recubrimiento abierto de  $f(S)$ ; entonces  $\{f^{-1}(U_j); j \in J\}$  es un recubrimiento abierto de  $S$ . Puesto que  $S$  es compacto, existe un

subrecubrimiento finito  $\{f^{-1}(U_k); k \in K\}$ ,  $K$  finito. Pero  $f(f^{-1}(U_k)) \subseteq U_k$  y, por tanto,  $\{U_k; k \in K\}$  es un recubrimiento de  $f(S)$  que es un subrecubrimiento finito de  $\{U_j; j \in J\}$ .

## 7.9 Corolario

- (a) Todo intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  es compacto.
- (b) Supongamos que  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos homeomorfos; entonces  $X$  es compacto si y sólo si  $Y$  es compacto.
- (c) Si  $X$  es compacto e  $Y$  tiene la topología cociente inducida por una aplicación  $f: X \rightarrow Y$ ,  $Y$  es compacto.
- (d)  $S^1$  es compacto.

La demostración es obvia. Obsérvese que (b) nos dice que un espacio no compacto no puede ser homeomorfo a un espacio compacto.

No todo subconjunto de un espacio compacto es compacto; por ejemplo  $(0, 1)$  es un subconjunto de un espacio compacto  $[0, 1]$  que no es compacto, como se puede ver fácilmente considerando el recubrimiento  $\{(1/n, 1 - 1/n); n \in \mathbb{N}\}$ . Sin embargo, los subconjuntos cerrados de un espacio compacto son compactos.

## 7.10 Teorema

Todo subconjunto cerrado de un espacio compacto es compacto.

*Demostración.* Sea  $\{U_j; j \in J\}$  un recubrimiento abierto del subconjunto  $S \subseteq X$ , donde cada  $U_j$  es un subconjunto abierto de  $X$ . Puesto que  $\bigcup_{j \in J} U_j \supseteq S$ ,  $\{U_j; j \in J\} \cup \{X - S\}$  es un

recubrimiento abierto de  $X$  y como  $X$  es compacto admite un subrecubrimiento finito que será de la forma  $\{U_k; k \in K\}$  o  $\{U_k; k \in K\} \cup \{X - S\}$ , donde  $K$  es finito. Por tanto,  $\{U_k; k \in K\}$  es un subrecubrimiento finito de  $\{U_j; j \in J\}$ , que recubre  $S$ .

Hemos estudiado la conservación de la compacidad bajo la topología inducida y la topología cociente. Consideremos ahora la topología producto.

## 7.11 Teorema

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos.  $X \times Y$  es compacto si y sólo si  $X$  e  $Y$  lo son.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  e  $Y$  son compactos. Sea  $\{W_j; j \in J\}$  un recubrimiento abierto de  $X \times Y$ . Por definición cada  $W_j$  es de la forma  $\bigcup_{k \in K} (U_{j,k} \times V_{j,k})$ , donde  $U_{j,k}$  es



abierto en  $X$  y  $V_{jk}$  es abierto en  $Y$ . Así pues,  $\{U_{jk} \times V_{jk}; j \in J, k \in K\}$  es un recubrimiento abierto de  $X \times Y$ . Para cada  $x \in X$  el subespacio  $\{x\} \times Y$  es compacto (ya que es homeomorfo a  $Y$ ) y, puesto que  $\{U_{jk} \times V_{jk}; j \in J, k \in K\}$  también recubre  $\{x\} \times Y$  existe un subrecubrimiento finito

$$\{U_i(x) \times V_i(x); i = 1, 2, \dots, n(x)\}$$

con  $x \in U_i(x)$  para todo  $i$ , que recubre  $\{x\} \times Y$ . Definimos  $U'(x)$  por

$$U'(x) = \bigcap_{i=1}^{n(x)} U_i(x)$$

La colección  $\{U'(x); x \in X\}$  es un recubrimiento abierto de  $X$  y, por tanto admite un subrecubrimiento finito  $\{U'(x_i); i = 1, 2, \dots, m\}$ . Claramente

$$\{U'(x_i) \times V_{k_i}(x_i); i = 1, 2, \dots, m, k_i = 1, 2, \dots, n(x_i)\}$$

es un recubrimiento abierto de  $X \times Y$ . Para cada  $i$  y cada  $k_i$  existen  $j \in J$  y  $k \in K$  tales que

$$U'(x_i) \times V_{k_i}(x_i) \subseteq U_{j,k} \times V_{j,k} \subseteq W_j.$$

Resulta que existe un subrecubrimiento finito de  $\{W_j; j \in J\}$  que recubre  $X \times Y$ .

Recíprocamente, si  $X \times Y$  es compacto,  $X$  y  $Y$  también lo son, ya que  $\pi_X$  y  $\pi_Y$  son continuas.

Más generalmente, desde luego, si  $X_1, X_2, \dots, X_n$  son espacios topológicos compactos, el producto  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  es también compacto. En particular, el  $n$ -cubo unidad  $I^n$  es compacto. Se dice que un subconjunto  $S$  de  $\mathbb{R}^n$  es *acotado* si existe un número real  $K > 0$  tal que, para cada punto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ ,  $|x_i| \leq K$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . En otras palabras,  $S$  está contenido en el  $n$ -cubo  $I^n$  de arista  $2K$ . Puesto que éste es homeomorfo al  $n$ -cubo unidad, deducimos:

## 7.12 Teorema

(Heine-Borel). Todo subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^n$  es compacto.

El recíproco del Teorema 7.12 también es cierto; véase el Ejercicio 8.14(n). Podemos deducir de los resultados precedentes que cada uno de los siguientes espacios es compacto:

$S^n$  (subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^{n+1}$ );

$S^n \times S^n \times \dots \times S^n$ ;

$\mathbb{R}P^n$  (imagen continua de  $S^n$ );

la banda de Möbius (subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{R}^3$ ).

## 7.13 Ejercicios

- (a) ¿Cuáles de los espacios siguientes son compactos?

$$\begin{aligned} D^n &= \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}, \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}, \\ \{(s,t) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 4\}, \\ \{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3; s^2 + t^2 \leq 1\} \cap \{(s,t,u) \in \mathbb{R}^3; t^2 + u^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

- (b) Probar que todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  es acotado.  
 (c) Probar que la gráfica de una función  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es compacta si y sólo si  $f$  es continua. Dar un ejemplo de una función discontinua  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  con una gráfica que sea cerrada pero no compacta.  
 (d) Sean  $X, Y$  espacios topológicos. Sea  $\mathcal{F}(X, Y)$  el conjunto de todas las aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$ . Si  $A \subseteq X$  y  $B \subseteq Y$  designemos por  $F(A, B)$  el subconjunto de  $\mathcal{F}(X, Y)$  que aplica  $A$  en  $B$ :

$$F(A, B) = \{f \in \mathcal{F}(X, Y); f(A) \subseteq B\}.$$

Sea  $\mathcal{S} = \{F(A, B); A \text{ es un subconjunto compacto de } X \text{ y } B \text{ es un conjunto abierto de } Y\}$ .

Definamos  $\mathcal{U}$  por

$\mathcal{U} = \{U \subseteq \mathcal{F}(X, Y); \text{ si } f \in U, \text{ existen elementos } F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{S} \text{ tales que } f \in F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n \subseteq U\}$ .

Demostrar que  $\mathcal{U}$  define una topología en  $\mathcal{F}(X, Y)$ . (Se llama la topología *compacto-abierta*.)

- (e) Sea  $X$  un espacio topológico metrizable compacto. Supongamos que  $Y$  es un espacio métrico con una métrica  $d$ ; definimos  $d^*$  en  $\mathcal{F}(X, Y)$  mediante

$$d^*(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)).$$

Demostrar que  $d^*$  es una métrica en  $\mathcal{F}(X, Y)$  y que la topología resultante en  $\mathcal{F}(X, Y)$  es la topología compacto-abierta.

- (f) Se dice que un espacio  $X$  es *localmente compacto* si para cada  $x \in X$  todo entorno de  $x$  contiene un entorno compacto de  $x$ . Demostrar que si  $X$  es localmente compacto, la aplicación *evaluación*  $e: \mathcal{F}(X, Y) \times X \rightarrow Y$  definida por  $e(f, x) = f(x)$  es continua.  
 (g) Sea  $X$  un espacio métrico compacto con métrica  $d$ . Probar que si  $\{U_j; j \in J\}$  es un recubrimiento abierto de  $X$ , existe un número real  $\rho > 0$  (llamado el *número de Lebesgue* de  $\{U_j; j \in J\}$ ) tal que todo subconjunto de  $X$  de diámetro menor que  $\rho$  está contenido en algún  $U_j, j \in J$ .  
 (h) Sea  $X$  un espacio topológico y definamos  $X^*$  como  $X \cup \{\infty\}$ , donde  $\infty$  es un elemento no contenido en  $X$ . Si  $\mathcal{U}$  es la topología de  $X$ , definimos  $\mathcal{U}^*$  como  $\mathcal{U}$  junto con todos los subconjuntos de la forma  $V \cup \{\infty\}$ , donde  $V \subseteq X$  y  $X - V$  es cerrado y compacto en  $X$ . Demostrar que  $\mathcal{U}^*$  es una topología en  $X^*$ . Probar

también que  $X$  es un subespacio de  $X^*$  y que  $X^*$  es compacto. ( $X^*$  se llama la *compactificación por un punto* de  $X$ .)

## Capítulo 8

# Espacios de Hausdorff

El punto de partida de este capítulo es el Ejercicio 2.2(b) en el que se pedía demostrar que si un espacio topológico  $X$  es metrizable entonces para cada par de puntos distintos  $x, y$  de  $X$  existen conjuntos abiertos  $U_x$  y  $U_y$ , que contienen a  $x$  y  $y$  respectivamente, tales que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . La demostración es directa: puesto que  $x \neq y$ ,  $d(x, y) = 2\varepsilon$  para algún  $\varepsilon$ , donde  $d$  es una métrica en  $X$  que nos dé la estructura de espacio topológico de  $X$ . Los conjuntos  $B_\varepsilon(x) = \{z \in X; d(x, z) < \varepsilon\}$  y  $B_\varepsilon(y)$  satisfacen entonces las condiciones requeridas.

### 8.1 Definición

Un espacio topológico es de *Hausdorff* si para todo par de puntos distintos  $x, y$  existen conjuntos abiertos  $U_x, U_y$ , que contienen a  $x$  y  $y$  respectivamente, tales que  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

Así pues, todos los espacios metrizables son de Hausdorff; en particular  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual y cualquier espacio con la topología discreta son de Hausdorff. Un espacio con la topología burda no es de Hausdorff si tiene más de un punto.

### 8.2 Ejercicios

- Sea  $X$  un espacio con la topología de los complementos finitos. Demostrar que  $X$  es de Hausdorff si y sólo si es finito.
- Sea  $\mathcal{F}$  la topología de  $\mathbb{R}$  definida por:  $U \in \mathcal{F}$  si y sólo si para cada  $s \in U$  existe un  $t > s$  tal que  $[s, t) \subseteq U$ . Demostrar que  $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$  es de Hausdorff.
- Supongamos que  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos homeomorfos. Demostrar que  $X$  es de Hausdorff si y sólo si  $Y$  lo es.

La condición de que un espacio sea de Hausdorff es un ejemplo de condición de *separación*. Definiremos algunas otras condiciones de separación, pero, salvo en las próximas páginas, sólo nos ocuparemos con detalle de la condición de Hausdorff.

### 8.3 Definición

Sea  $k$  uno de los enteros  $0, 1, 2, 3$  ó  $4$ . Se dice que un espacio  $X$  es un  $T_k$ -espacio si satisface la condición  $T_k$  siguiente:

$T_0$ : Para todo par de puntos distintos existe un conjunto abierto que contiene a uno de ellos pero no al otro.



$T_1$ : Para todo par de puntos distintos  $x, y$  existen dos conjuntos abiertos, uno de los cuales contiene a  $x$  pero no a  $y$ , y el otro contiene a  $y$  pero no a  $x$ .



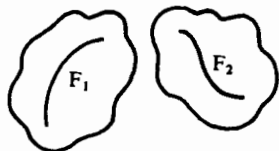
$T_2$ : Para todo par de puntos distintos  $x, y$  existen dos conjuntos abiertos disjuntos, uno de los cuales contiene a  $x$  y el otro a  $y$ .



$T_3$ :  $X$  satisface  $T_1$  y para todo subconjunto cerrado  $F$  y todo punto  $x \notin F$  existen dos conjuntos abiertos disjuntos, uno de los cuales contiene a  $F$  y el otro a  $x$ .



$T_4$ :  $X$  satisface  $T_1$  y para todo par de subconjuntos cerrados disjuntos  $F_1, F_2$  existen dos conjuntos abiertos disjuntos, uno de los cuales contiene a  $F_1$  y el otro a  $F_2$ .



Un  $T_2$ -espacio es un espacio de Hausdorff. Un  $T_3$ -espacio se llama a veces un espacio regular.

Está claro que  $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ . La razón por la cual la condición  $T_1$  está incluida en las condiciones  $T_3$  y  $T_4$  aparecerá clara en el Teorema 8.5, del cual se deduce que  $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$ .

## 8.4 Ejercicios

- Supongamos que  $X$  e  $Y$  son espacios homeomorfos. Demostrar que  $X$  es un  $T_k$ -espacio si y sólo si  $Y$  lo es ( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ).
- Construir espacios topológicos  $X_0, X_1, X_2$  y  $X_3$  tales que  $X_k$  sea un  $T_k$ -espacio pero no un  $T_j$ -espacio para  $j > k$ .
- Demostrar que todo espacio compacto de Hausdorff es un  $T_4$ -espacio. (Indicación: Fijarse en la demostración de 8.7 y en caso de desesperación en la demostración de 8.11.)

## 8.5 Teorema

Un espacio  $X$  es  $T_1$  si y sólo si todo punto de  $X$  es cerrado.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un  $T_1$ -espacio. Sean  $x \in X$  e  $y \in X - \{x\}$ . Existe un conjunto abierto  $U_y$  que contiene a  $y$  pero no a  $x$ . Por tanto

$$\bigcup_{y \in X - \{x\}} U_y = X - \{x\}$$

que demuestra que  $X - \{x\}$  es unión de conjuntos abiertos y, por tanto, es abierto. Así pues,  $\{x\}$  es cerrado.

Recíprocamente, si  $\{x\}$  e  $\{y\}$  son cerrados, entonces  $X - \{x\}$  y  $X - \{y\}$  son conjuntos abiertos, el primero de los cuales contiene a  $y$  pero no a  $x$  y el segundo contiene a  $x$  pero no a  $y$ : es decir,  $X$  es un  $T_1$ -espacio.

Como corolario obtenemos el siguiente resultado.

## 8.6 Corolario

En un espacio de Hausdorff todo punto es un conjunto cerrado.

De hecho se tiene un resultado mucho más general.

## 8.7 Teorema

Todo subconjunto compacto  $A$  de un espacio de Hausdorff  $X$  es cerrado.

*Demostración.* Podemos suponer que  $A \neq \emptyset$  y  $A \neq X$  pues de lo contrario  $A$  es ya cerrado y no hay nada que demostrar. Elijamos un punto  $x \in X - A$ . Para cada  $a \in A$  existe un par de conjuntos abiertos disjuntos  $U_a, V_a$  con  $x \in U_a$  y  $a \in V_a$ . El conjunto  $\{V_a; a \in A\}$  recubre  $A$  y, puesto que  $A$  es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$\{V_{a(1)}, V_{a(2)}, \dots, V_{a(n)}\}$$

que recubre  $A$ . El conjunto  $U = U_{\alpha(1)} \cap U_{\alpha(2)} \cap \dots \cap U_{\alpha(n)}$  es un conjunto abierto que contiene a  $x$  y que no intersecta a ningún  $V_{\alpha(i)}$ ; así pues  $U \subseteq X - A$ . Resulta que para cada punto  $x \in X - A$  existe un conjunto abierto que lo contiene y que está contenido en  $X - A$ . Esto significa que  $X - A$  es abierto y, por tanto  $A$  es cerrado.

El Teorema 8.7 nos permite demostrar el siguiente importante resultado.

## 8.8 Teorema

Supongamos que  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua de un espacio compacto  $X$  en un espacio de Hausdorff  $Y$ . Luego  $f$  es un homeomorfismo si y sólo si  $f$  es biyectiva.

*Demostración.* Obviamente si  $f$  es un homeomorfismo es biyectiva. El recíproco es el caso más interesante. Supongamos, pues, que  $f$  es biyectiva, por lo que existe  $f^{-1}$ .  $f^{-1}$  es continua si y sólo si, para todo conjunto cerrado  $V$  de  $X$ ,  $(f^{-1})^{-1}(V) = f(V)$  es cerrado. Ahora bien, si  $V$  es cerrado en  $X$ ,  $V$  es compacto por 7.10, de donde  $f(V)$  es compacto por 7.8 y por tanto  $f(V)$  es cerrado en virtud de 8.7, lo que demuestra la continuidad de  $f^{-1}$ .

En el resultado anterior necesitamos las dos condiciones, de compacidad y de Hausdorff. Por ejemplo, si  $X$  es el conjunto de los números reales con la topología discreta (por tanto no es compacto) y si  $Y$  es  $\mathbb{R}$  con la topología usual (que es de Hausdorff), la identidad  $X \rightarrow Y$  es continua y biyectiva pero no es homeomorfismo. Por otra parte, si  $X = \{x, y\}$  con la topología discreta (que es compacto) e  $Y = \{x, y\}$  con la topología  $\{\emptyset, Y, \{x\}\}$  (por tanto no es de Hausdorff), la identidad es continua y biyectiva pero no es un homeomorfismo.

Usando el teorema anterior pueden demostrarse fácilmente muchos de los homeomorfismos del Capítulo 5. Por ejemplo, la imagen  $f(X)$  de un espacio compacto  $X$  en un espacio de Hausdorff por una aplicación continua e inyectiva es homeomorfa a  $X$ .

Vamos ahora a estudiar la conservación de la propiedad de separación de Hausdorff en subespacios, productos topológicos y espacios cocientes.

## 8.9 Teorema

Todo subespacio  $S$  de un espacio de Hausdorff  $X$  es de Hausdorff.

*Demostración.* Sean  $x, y$  dos puntos distintos de  $S$ . Existen entonces dos conjuntos abiertos disjuntos  $U_x$  y  $U_y$  de  $X$  tales que  $x \in U_x$  e  $y \in U_y$ . Los conjuntos  $(U_x \cap S)$  y  $(U_y \cap S)$  son entonces subconjuntos abiertos disjuntos de  $S$ ,  $x \in (U_x \cap S)$  e  $y \in (U_y \cap S)$ . Así pues,  $S$  es de Hausdorff.

En particular, todo subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual es de Hausdorff.

## 8.10 Teorema

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos.  $X \times Y$  es de Hausdorff si y sólo si  $X$  e  $Y$  lo son.

**Demostración.** Supongamos que  $X$  e  $Y$  son espacios de Hausdorff y sean  $w_1 = (x_1, y_1)$  y  $w_2 = (x_2, y_2)$  dos puntos distintos de  $X \times Y$ . Si  $x_1 \neq x_2$ , podemos hallar dos conjuntos abiertos disjuntos  $U_1, U_2$  tales que  $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ . Los conjuntos  $U_1 \times Y$  y  $U_2 \times Y$  son entonces abiertos y disjuntos en  $X \times Y$ ,  $w_1 \in U_1 \times Y$  y  $w_2 \in U_2 \times Y$ . Si  $x_1 = x_2$ , entonces necesariamente  $y_1 \neq y_2$ , y por un razonamiento similar se demuestra la existencia de dos conjuntos abiertos disjuntos  $X \times V_1$  y  $X \times V_2$  de  $X \times Y$  tales que  $w_1 \in X \times V_1$  y  $w_2 \in X \times V_2$ .

Recíprocamente, si  $X \times Y$  es de Hausdorff, también lo son los subespacios  $X \times \{y\}$ ,  $\{x\} \times Y$  y, por tanto,  $X$  e  $Y$  son de Hausdorff.

Así pues, espacios tales como  $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$  son de Hausdorff.

A pesar de que los subespacios de espacios de Hausdorff son de Hausdorff y los productos de espacios de Hausdorff también lo son, no es cierto en general que un espacio cociente de uno de Hausdorff sea de Hausdorff. En efecto, sea  $X$  un espacio de Hausdorff y  $A$  un subespacio de  $X$  que no sea cerrado (por ejemplo,  $X = \mathbb{R}$ ,  $A = (0, 1)$ ). Sea  $Y = X/\sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia de  $X$  dada por  $x \sim x'$  si y sólo si  $x = x'$  o  $\{x, x'\} \subseteq A$  (intuitivamente,  $Y$  es  $X$  con  $A$  colapsado a un punto; al espacio  $Y = X/\sim$  lo designaremos por  $X/A$ ). Si dotamos a  $Y$  de la topología cociente respecto a la proyección natural  $g: X \rightarrow Y$ , la antiimagen del punto  $[x_0] \in Y$  (donde  $x_0 \in A$ ) es  $A$ , que no es cerrado en  $X$ . Así pues, el punto  $[x_0]$  no es cerrado en  $Y$  y, por tanto,  $Y$  no es de Hausdorff.

Para asegurar que todo cociente  $Y$  de un espacio de Hausdorff  $X$  es de Hausdorff necesitamos imponer algunas restricciones a  $X$ . Como ejemplo, incluimos el siguiente resultado.

## 8.11 Teorema

Sea  $Y$  el espacio cociente del espacio topológico  $X$  determinado por la aplicación exhaustiva  $f: X \rightarrow Y$ . Si  $X$  es compacto de Hausdorff y  $f$  es cerrada, entonces  $Y$  es (compacto) de Hausdorff.

**Demostración.** Puesto que los puntos de  $X$  son cerrados, los puntos de  $Y$ , que son imágenes de puntos de  $X$ , son también cerrados. Sean  $y_1$  y  $y_2$  dos puntos distintos de  $Y$ . Los conjuntos  $f^{-1}(y_1)$  y  $f^{-1}(y_2)$  son subconjuntos cerrados disjuntos de  $X$ . Para cada punto  $x \in f^{-1}(y_1)$  y cada punto  $a \in f^{-1}(y_2)$  existe un par de conjuntos abiertos disjuntos  $U_{x,a}$  y  $V_{x,a}$  tales que  $x \in U_{x,a}$  y  $a \in V_{x,a}$ . Puesto que  $f^{-1}(y_2)$  es cerrado, es también compacto, y, por tanto, existe un subrecubrimiento finito  $\{V_{x,a}; a \in f^{-1}(y_2)\}$  que cubre  $f^{-1}(y_2)$ ; sea  $\{V_{x,a}; a \in A\}$ , donde  $A$  es un subconjunto finito de  $f^{-1}(y_2)$ . En particular, existen conjuntos abiertos disjuntos  $U_x$  y  $V_x$  con  $x \in U_x$  y  $f^{-1}(y_2) \subseteq V_x$ ; de hecho se tiene

$$U_x = \bigcap_{a \in A} U_{x,a}, \quad V_x = \bigcup_{a \in A} V_{x,a}.$$



Ahora bien,  $\{U_x; x \in f^{-1}(y_1)\}$  es un recubrimiento de  $f^{-1}(y_1)$ , que es compacto; por tanto, existe un subrecubrimiento finito  $\{U_x; x \in B\}$ , donde  $B$  es un subconjunto finito de  $f^{-1}(y_1)$ . Así pues, los conjuntos

$$U = \bigcup_{x \in B} U_x, \quad V = \bigcap_{x \in B} V_x$$

son conjuntos abiertos disjuntos tales que  $f^{-1}(y_1) \subseteq U$  y  $f^{-1}(y_2) \subseteq V$ .

Puesto que  $f$  es cerrada, por hipótesis,  $f(X - U)$  y  $f(X - V)$  son subconjuntos cerrados de  $Y$ , por lo que  $W_1 = Y - f(X - U)$  y  $W_2 = Y - f(X - V)$  son subconjuntos abiertos de  $Y$  tales que  $y_1 \in W_1$  y  $y_2 \in W_2$ . Finalmente, hemos de comprobar que  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ . Supongamos pues que  $y \in W_1 \cap W_2$ ; entonces  $y \notin f(X - U)$  y  $y \notin f(X - V)$ . Por tanto,  $f^{-1}(y) \cap (X - U) = \emptyset$  y  $f^{-1}(y) \cap (X - V) = \emptyset$ , de donde resulta que  $f^{-1}(y) \subseteq U \cap V = \emptyset$  y, por tanto,  $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ .

Como corolario obtenemos el resultado siguiente.

## 8.12 Corolario

Si  $X$  es un  $G$ -espacio compacto de Hausdorff con  $G$  finito,  $X/G$  es también un espacio compacto de Hausdorff.

*Demostración.* Sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $X$ . Entonces

$$\pi^{-1}(\pi(C)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot C$$

donde  $\pi: X \rightarrow X/G$  es la proyección natural. Puesto que la acción de  $g \in G$  sobre  $X$  es un homeomorfismo,  $g \cdot C$  es cerrado para todo  $g \in G$ . Así pues,  $\pi^{-1}(\pi(C))$  es cerrado y, por tanto,  $\pi(C)$  también lo es, lo que demuestra que  $\pi$  es una aplicación cerrada.

Así, por ejemplo,  $\mathbb{R}P^n$  es un espacio compacto de Hausdorff.

Se puede obtener otro corolario del Teorema 8.11 considerando un espacio  $X$  con un subconjunto  $A \subseteq X$ . Recordemos que  $X/A$  denota  $X/\sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia en  $X$  dada por

$$x \sim x' \quad \text{si y sólo si} \quad x = x' \text{ o } x, x' \in A$$

## 8.13 Corolario

Si  $X$  es un espacio compacto de Hausdorff y  $A$  es un subconjunto cerrado de  $X$  entonces  $X/A$  es un espacio compacto de Hausdorff.

*Demostración.* Sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $X$  y denotemos por  $p: X \rightarrow X/A$  la proyección natural. Si  $C \cap A = \emptyset$ , entonces  $p(C) = C$  es cerrado. Si  $C \cap A \neq \emptyset$ , entonces

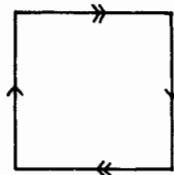
$p(C) = p(C - A) \cup p(C \cap A)$ , que es cerrado ya que  $p^{-1}(p(C - A) \cup p(C \cap A)) = (C - A) \cup A = C \cup A$ . Así pues,  $p$  es una aplicación cerrada.

En el siguiente conjunto de ejercicios, donde damos un recíproco del Teorema 8.11, aparecen otras restricciones sobre un espacio de Hausdorff que aseguran que los cocientes son también de Hausdorff.

## 8.14 Ejercicios

- Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua exhaustiva de un espacio compacto  $X$  en un espacio de Hausdorff  $Y$ . Demostrar que un subconjunto  $U$  de  $Y$  es abierto si y sólo si  $f^{-1}(U)$  es abierto en  $X$ . (Indicación: Demostrar que un subconjunto  $C$  de  $Y$  es cerrado si y sólo si  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $X$ .) Deducir que  $Y$  tiene la topología cociente determinada por  $f$ .
- Probar que un espacio  $Y$  es de Hausdorff si y sólo si la diagonal  $D = \{(y_1, y_2) \in Y \times Y; y_1 = y_2\}$  de  $Y \times Y$  es un subconjunto cerrado de  $Y \times Y$ .
- Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua. Probar que si  $Y$  es de Hausdorff, entonces el conjunto  $\{(x_1, x_2) \in X \times X; f(x_1) = f(x_2)\}$  es un subconjunto cerrado de  $X \times X$ .
- Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua, abierta y exhaustiva. Probar que  $Y$  es un espacio de Hausdorff si y sólo si el conjunto  $\{(x_1, x_2) \in X \times X; f(x_1) = f(x_2)\}$  es un subconjunto cerrado de  $X \times X$ .
- Sea  $X$  un espacio compacto de Hausdorff e  $Y$  un espacio cociente determinado por una aplicación  $f: X \rightarrow Y$ . Demostrar que  $Y$  es de Hausdorff si y sólo si  $f$  es una aplicación cerrada. Además, demostrar que  $Y$  es de Hausdorff si y sólo si el conjunto  $\{(x_1, x_2) \in X \times X; f(x_1) = f(x_2)\}$  es un subconjunto cerrado de  $X \times X$ .
- Sea  $\sim$  la relación de equivalencia en  $S^1 \times I$  dada por  $(x, t) \sim (y, s)$  si y sólo si  $xt = ys$  (donde consideramos  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  y  $I = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ). Probar que  $(S^1 \times I)/\sim$  es homeomorfo al disco unidad  $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\} = \{x \in \mathbb{C}; |x| \leq 1\}$  con la topología inducida.
- Sea  $\sim$  la relación de equivalencia definida en el cuadrado unidad  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, y \leq 1\}$  por  $(x, y) \sim (x', y')$  si y sólo si  $(x, y) = (x', y')$  o  $\{x, x'\} = \{1, 0\}$  e  $y = 1 - y'$  o  $\{y, y'\} = \{1, 0\}$  y  $x = 1 - x'$ . Véase la Figura 8.1. Probar que el espacio identificación  $X/\sim$  es homeomorfo a  $\mathbb{RP}^2$ .

Figura 8.1



- Sea  $S_+^n$  el subconjunto de  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  definido por

$$S_+^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1, x_{n+1} \geq 0\}.$$

Probar que la aplicación  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

induce un homeomorfismo de  $S^n$  en el  $n$ -disco cerrado  $D^n$ ,

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1 \}.$$

- (i) Definamos  $\sim$  en  $\mathbb{R}$  por

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x-y \text{ es racional.}$$

Demostrar que  $\sim$  es una relación de equivalencia y que  $\mathbb{R}/\sim$  con la topología cociente no es de Hausdorff.

- (j) Sea  $X$  un espacio compacto de Hausdorff y  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ , distinto de  $X$ . Probar que

$$U^\infty \cong X/(X-U).$$

(Indicación: Considerar  $h: U^\infty \rightarrow X/(X-U)$  dada por  $h(u) = p(u)$  para  $u \in U$  y  $h(\infty) = p(X-U)$ , donde  $p: X \rightarrow X/(X-U)$  es la proyección natural.) Deducir que si  $x \in X$  (y  $X$  es un espacio compacto de Hausdorff) entonces

$$(X - \{x\})^\infty \cong X.$$

- (k) Probar que

$$S^n \cong (\mathbb{R}^n)^\infty \cong D^n/S^{n-1} \cong I^n/\partial I^n.$$

(Indicación:  $S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\} \cong \mathbb{R}^n \cong D^n - S^{n-1} \cong I^n - \partial I^n$ .)

- (l) (Generalización de 8.11) Sea  $Y$  el espacio cociente de  $X$  determinado por la aplicación exhaustiva  $f: X \rightarrow Y$ . Supongamos que  $X$  es un espacio de Hausdorff,  $f$  una aplicación cerrada y  $f^{-1}(y)$  es compacto para todo  $y \in Y$ . Probar que  $Y$  es un espacio de Hausdorff.
- (m) Supongamos que  $X$  es un espacio compacto de Hausdorff y que  $A$  es un subespacio cerrado de  $X$ . Supongamos además que  $A$  es un  $G$ -espacio, con  $G$  finito. Definimos una relación  $\sim$  en  $X$  mediante  $x \sim x'$  si y sólo si o bien  $x = x'$  o bien  $x, x' \in A$  y  $x = g \cdot x'$  para algún  $g \in G$ . Demostrar que  $\sim$  es una relación de equivalencia en  $X$  y que el espacio  $X/\sim$  es de Hausdorff.
- (n) Demostrar que

*Un subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.*

(Indicación: Utilizar el Teorema 7.12, el Ejercicio 7.13(b) y el Teorema 8.7.)

## Capítulo 9

# Espacios conexos

Intuitivamente un espacio  $X$  es conexo si es de una sola «pieza»; pero, ¿cómo hay que interpretar topológicamente el término «pieza»? Parece razonable exigir que los conjuntos abiertos y los cerrados en una «pieza» sean abiertos o cerrados, respectivamente, en el espacio total  $X$ . Así, en virtud del Lema 4.4, una «pieza» deberá ser un subconjunto de  $X$  abierto y cerrado. Esto nos lleva a la definición siguiente.

### 9.1 Definición

Un espacio topológico  $X$  es *conexo* si los únicos subconjuntos de  $X$  abiertos y cerrados a la vez son  $\emptyset$  y  $X$ . Un subconjunto de  $X$  es conexo si es conexo como espacio con la topología inducida.

Equivalentemente, podemos definir que  $X$  es conexo si no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de  $X$ . Esto constituye el resultado siguiente.

### 9.2 Teorema

Un espacio  $X$  es conexo si y sólo si  $X$  no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de  $X$ .

*Demostración.* Sea  $X$  conexo y supongamos  $X = X_1 \cup X_2$ , donde  $X_1$  y  $X_2$  son subconjuntos abiertos disjuntos de  $X$ . Entonces  $X - X_1 = X_2$  y, por tanto,  $X_1$  es a la vez abierto y cerrado, lo que significa que  $X_1 = \emptyset$  o  $X$  y  $X_2 = X$  o  $\emptyset$  respectivamente. En ningún caso  $X$  es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de  $X$ .

Recíprocamente, supongamos que  $X$  no es la unión de dos subconjuntos abiertos disjuntos no vacíos de  $X$  y sea  $U \subseteq X$ . Si  $U$  es a la vez abierto y cerrado, entonces  $X - U$  es también abierto y cerrado. Así pues,  $X$  sería la unión disjunta de dos conjuntos abiertos  $U$  y  $X - U$ , por lo que uno de ellos debe ser vacío; esto es,  $U = \emptyset$  o  $U = X$ .

Por ejemplo, el subconjunto  $S^0 = \{\pm 1\}$  de  $\mathbb{R}$  no es conexo, ya que  $\{+1\}$  es a la vez un subconjunto abierto y cerrado de  $S^0$ ; o, equivalentemente, porque  $S^0$  es la unión disjunta de los subconjuntos abiertos  $\{+1\}$  y  $\{-1\}$  de  $S^0$ . Un ejemplo de un subconjunto conexo de  $\mathbb{R}$  lo constituye  $[a, b]$ , pero esto es un teorema. Antes de demostrarlo veamos algunos ejemplos más. Los ejemplos nos muestran que debemos tener cuidado con nuestra intuición.

Sea  $X$  el conjunto de los números reales con la topología  $\{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x); x \in \mathbb{R}\}$ ; entonces, todo subconjunto de  $X$  es conexo. Para demostrarlo, sea  $S$  un subconjunto arbitrario de  $X$ . Supongamos que  $F$  es un subconjunto no vacío de  $S$  a la vez abierto y cerrado en  $S$ . Podemos, pues, escribir  $F$  como  $U \cap S = C \cap S$ , donde  $U$  es abierto en  $X$  y  $C$  es cerrado en  $X$ ; esto es,  $U = (-\infty, b)$  para algún  $b$  y  $C = [a, \infty)$  para algún  $a$ . Puesto que  $F = U \cap S = C \cap S$ , resulta que si  $x \in S$  entonces  $x < b$  y  $x \geq a$  (si existe un  $x \geq b$  entonces  $C \cap S \neq U \cap S$ ; análogamente, si existe un  $x < a$  entonces  $U \cap S \neq C \cap S$ ). Así pues,  $S \subseteq [a, b]$  y  $F = S$ , lo cual significa que  $S$  es conexo.

Sea ahora  $X$  el conjunto de los números reales con la topología  $\mathcal{F}$  definida por:  $S \in \mathcal{F}$  si y sólo si para cada  $s \in S$  existe un  $t > s$  tal que  $[s, t) \subseteq S$ . En este caso los únicos subconjuntos conexos no vacíos de  $X$  son los formados por un solo punto. Para demostrarlo, supongamos que  $T$  es un subconjunto conexo no vacío de  $X$  y sea  $x$  un punto de  $T$ . El subconjunto  $[x, x + \varepsilon)$  de  $X$  es a la vez abierto y cerrado (Ejercicio 2.6(d)) para todo  $\varepsilon > 0$ . Así pues,  $[x, x + \varepsilon) \cap T$  es un subconjunto abierto y cerrado de  $T$ . Puesto que  $T$  es conexo y  $[x, x - \varepsilon) \cap T \neq \emptyset$ , resulta que  $[x, x + \varepsilon) \cap T = T$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Pero esto es sólo posible si  $T = \{x\}$ . Claramente los puntos son conjuntos conexos y así los únicos subconjuntos conexos no vacíos de  $X$  son los formados por un punto.

Llegamos ahora a la demostración de que el subconjunto  $[a, b]$  de  $\mathbb{R}$  (con la topología usual) es conexo.

### 9.3 Teorema

El intervalo  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $[a, b]$  es la unión disjunta de dos conjuntos abiertos  $U, V$  de  $[a, b]$ . Supongamos también que  $a \in U$ . Obsérvese que  $U$  y  $V$  son también cerrados en  $[a, b]$  y, por tanto, puesto que  $[a, b]$  es cerrado en  $\mathbb{R}$ , también son cerrados en  $\mathbb{R}$ . Sea  $h$  la mínima cota superior del conjunto

$$\{u \in U; u < v \text{ para todo } v \in V\}$$

(este conjunto no es vacío puesto que contiene el punto  $a$ ). Puesto que  $U$  es cerrado,  $h \in U$ . Ahora bien,  $(h - \varepsilon, h + \varepsilon) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $\varepsilon > 0$  (de lo contrario  $h$  no sería una cota superior) y, en virtud del Lema 2.7,  $h \in \bar{V}$ . Pero  $V$  es cerrado, por lo que  $h \in V$ , y, desde luego,  $h \in U \cap V$ , obteniendo una contradicción, que nos prueba que  $[a, b]$  es conexo.

## 9.4 Teorema

La imagen de un espacio conexo por una aplicación continua es conexa.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es conexo y que  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua exhaustiva. Si  $U$  es abierto y cerrado en  $Y$ , entonces  $f^{-1}(U)$  es abierto y cerrado en  $X$ , lo que significa que  $f^{-1}(U) = \emptyset$  o  $X$  y por tanto  $U = \emptyset$  o  $Y$ . Así pues,  $Y$  es conexo.

## 9.5 Corolario

Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos homeomorfos,  $X$  es conexo si y sólo si  $Y$  lo es.

Del Teorema 9.4 deducimos que la circunferencia  $S^1$  es conexa puesto que existe una aplicación continua exhaustiva  $f: [0, 1] \rightarrow S^1$  definida por  $f(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \in S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Para probar que los intervalos de  $\mathbb{R}$  de la forma  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  y  $(a, b)$  son conexos hacemos uso del siguiente resultado.

## 9.6 Teorema

Supongamos que  $\{Y_j; j \in J\}$  es una colección de subconjuntos conexos de un espacio  $X$ . Si  $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ , entonces  $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$  es conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $U$  es un subconjunto abierto y cerrado no vacío de  $Y$ . Entonces, para algún  $i \in J$ ,  $U \cap Y_i \neq \emptyset$ , y  $U \cap Y_i$  es a la vez abierto y cerrado en  $Y_i$ ; pero, puesto que  $Y_i$  es conexo,  $U \cap Y_i = Y_i$  y, por tanto,  $Y_i \subseteq U$ . El conjunto  $Y_i$  intersecta a todos los otros  $Y_j$ ,  $j \in J$  y, por tanto,  $U$  intersecta también a todos los  $Y_j$ ,  $j \in J$ . Repitiendo este razonamiento deducimos que  $Y_j \subseteq U$  para todo  $j \in J$  y, por tanto,  $U = Y$ .

El hecho de que los subconjuntos  $[a, b)$ ,  $(a, b]$  y  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}$  sean conexos resulta del Teorema 9.3, del Corolario 9.5 y de

$$[a, b) = \bigcup_{n \geq 1} [a, b - (b-a)/2^n]$$

etc. De manera análoga se deduce que el propio  $\mathbb{R}$  y los intervalos de la forma  $[a, \infty)$ ,  $(-\infty, b]$ ,  $(-\infty, b)$ ,  $(a, \infty)$  son conexos.

El último resultado que demostraremos se refiere al producto de espacios conexos.

## 9.7 Teorema

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos.  $X \times Y$  es conexo si y sólo si  $X$  e  $Y$  son ambos conexos.

**Demostración.** Supongamos que  $X$  e  $Y$  son conexos. Puesto que  $X \cong X \times \{y\}$  e  $Y \cong \{x\} \times Y$ , para todo  $x \in X$ ,  $y \in Y$ , resulta que  $X \times \{y\}$  y  $\{x\} \times Y$  son conexos. Ahora bien,  $(X \times \{y\}) \cap (\{x\} \times Y) = \{(x, y)\} \neq \emptyset$  y, por tanto,  $(X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)$  es conexo por el Teorema 9.6. Podemos escribir  $X \times Y$  de la forma

$$X \times Y = \bigcup_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y))$$

para algún  $y \in Y$  fijo. Puesto que  $\bigcap_{x \in X} ((X \times \{y\}) \cup (\{x\} \times Y)) \neq \emptyset$ , deducimos que  $X \times Y$  es

conexo.

Recíprocamente, supongamos que  $X \times Y$  es conexo. Del Teorema 9.4 y del hecho de que  $\pi_X: X \times Y \rightarrow X$  y  $\pi_Y: X \times Y \rightarrow Y$  son aplicaciones continuas exhaustivas, resulta que  $X$  e  $Y$  son conexos.

De los resultados anteriores se deduce que  $\mathbb{R}^n$  es conexo. En los próximos ejercicios veremos que  $S^n$  es conexo para  $n \geq 1$  y también que  $\mathbb{R}P^n$  es conexo.

## 9.8 Ejercicios

- Probar que el conjunto de los números racionales  $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$  no es un conjunto conexo. ¿Cuáles son los subconjuntos conexos de  $\mathbb{Q}$ ?
- Probar que un subconjunto de  $\mathbb{R}$  es conexo si y sólo si es un intervalo o bien un solo punto. (Un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  se dice que es un *intervalo* si  $A$  contiene por lo menos dos puntos distintos y si de  $a, b \in A$  con  $a < b$  y  $a < x < b$  se deduce  $x \in A$ .)
- Sea  $X$  un conjunto que contenga por lo menos dos elementos. Demostrar
  - Si  $X$  está dotado de la topología discreta, los únicos subconjuntos conexos de  $X$  son los formados por un solo punto.
  - Si  $X$  está dotado de la topología burda, todo subconjunto de  $X$  es conexo.
- ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son conexos?

$$\{x; \|x\| < 1\}, \{x; \|x\| > 1\}, \{x; \|x\| \neq 1\}.$$

¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$  son conexos?

$$\{x; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\}, \{x; x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1\}, \\ \{x; x_1 \neq 1\}.$$

- Demostrar que un espacio topológico  $X$  es conexo si y sólo si toda aplicación continua de  $X$  en un espacio discreto (que contenga por lo menos dos puntos) es una aplicación constante.
- Sea  $A$  un subespacio conexo de  $X$  y  $A \subseteq Y \subseteq \bar{A}$ . Probar que  $Y$  es conexo.
- Supongamos que  $Y_0$  e  $\{Y_j; j \in J\}$  son subconjuntos conexos de un espacio  $X$ . Probar que si para todo  $j \in J$ ,  $Y_0 \cap Y_j \neq \emptyset$ , entonces  $Y = Y_0 \cup (\bigcup_{j \in J} Y_j)$  es conexo.
- Probar que si  $n \geq 1$ ,  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  es conexo. Deducir que  $S^n$  y  $\mathbb{R}P^n$  son conexos para  $n \geq 1$ . (Indicación: Considerar  $f: \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \rightarrow S^n$  definida por  $f(x) = x/\|x\|$ .)

- (i) Sean  $A$  y  $B$  los subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  definidos por

$$A = \{ (x,y); x = 0, -1 \leq y \leq 1 \},$$

$$B = \{ (x,y); 0 < x \leq 1, y = \cos(\pi/x) \}.$$

Demostrar que  $X = A \cup B$  es conexo. (Indicación: Probar que  $A$  y  $B$  son conexos. Considerar entonces  $X = U \cup V$ , donde  $U, V$  son abiertos y cerrados en  $X$ . Finalmente, suponer que algún punto de  $A$  pertenece a  $U$ .)

- (j) Sean  $A$  y  $B$  los subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  definidos por

$$A = \{ (x,y); \frac{1}{2} \leq x \leq 1, y = 0 \},$$

$$B = \{ (x,y); 0 \leq x \leq 1, y = x/n \text{ donde } n \in \mathbb{N} \}.$$

Probar que  $X = A \cup B$  es conexo.

- (k) *Primeros pasos de Topología Algebraica.* Sea  $X$  un espacio topológico y definamos  $H(X)$  como el conjunto de las aplicaciones continuas de  $X$  en  $\mathbb{Z}_2$  (espacio topológico formado por dos puntos con la topología discreta). Si  $f, g \in H(X)$ , definimos  $f + g$  por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \bmod 2 \quad (x \in X).$$

Demostrar que  $f + g$  es continua y que  $H(X)$  es un grupo abeliano respecto a esta operación. Demostrar que  $X$  es conexo si y sólo si  $H(X)$  es isomorfo al grupo cíclico de orden 2. Construir ejemplos de espacios topológicos  $X_k$  tales que  $H(X_k)$  sea isomorfo a  $(\mathbb{Z}_2)^k$ .



## Capítulo 10

# Los problemas del pastel

En este capítulo damos algunas aplicaciones informales de resultados de capítulos anteriores considerando los llamados «problemas del pastel». Formulado sin precisión, el primer problema es: Supongamos que se tienen dos pasteles (de forma arbitraria) en una bandeja; demostrar que es posible cortarlos ambos exactamente por la mitad con un solo golpe de cuchillo. El segundo problema consiste en demostrar que se puede dividir un pastel en cuatro partes iguales con dos cortes de cuchillo perpendiculares. Las demostraciones se basan en una forma del *teorema del valor medio*.

### 10.1 Lema

Si  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación continua tal que el producto  $f(0)f(1)$  es finito y no positivo, existe un punto  $t \in I$  tal que  $f(t) = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ ; en particular  $f(0)f(1) < 0$ . Definamos una aplicación  $g: I \rightarrow \{\pm 1\} = S^0$  mediante  $g(t) = f(t)/|f(t)|$ . Esta aplicación es claramente continua y exhaustiva (ya que  $f(0)f(1) < 0$ ). Pero  $I$  es conexo mientras que  $S^0$  no lo es, lo que contradice el hecho de que la imagen de un espacio conexo es conexa.

Como corolario obtenemos el siguiente *teorema del punto fijo*.

### 10.2 Corolario

Supongamos que  $f: I \rightarrow I$  es una aplicación continua; entonces existe siempre algún punto  $t \in I$  tal que  $f(t) = t$ .

*Demostración.* Si  $f(0) = 0$  o  $f(1) = 1$ , hemos terminado. Supongamos, por tanto, que  $f(0) > 0$  y  $f(1) < 1$  y consideremos la aplicación  $g(t) = f(t) - t$ . Así pues, por el Lema 10.1, para algún  $t \in I$  se tiene  $g(t) = 0$  y, por tanto,  $f(t) = t$  para algún  $t \in I$ .

### 10.3 Corolario

Toda aplicación continua de una circunferencia en la recta real aplica por lo menos un par de puntos diametralmente opuestos en el mismo punto.

*Demostración.* Supongamos que  $f(t) \neq f(-t)$  para todo  $t \in S^1$ ; sea entonces  $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  la aplicación  $h(t) = f(t) - f(-t)$ . Sea también  $e: I \rightarrow S^1$  la aplicación definida por  $e(t) = \exp(\pi it)$ , que es claramente continua. Se tiene

$$\begin{aligned} h(e(0)) &= h(1) = f(1) - f(-1) \\ h(e(1)) &= h(-1) = f(-1) - f(1) = -h(e(0)). \end{aligned}$$

Así pues, en virtud del Lema 10.1, existe un punto  $t \in I$  tal que  $h(e(t)) = 0$  y, por tanto, un  $x \in S^1$  tal que  $h(x) = 0$ , es decir  $f(x) = f(-x)$ .

El Corolario 10.3 admite una interpretación física.

### 10.4 Corolario

En cada instante y en cada circunferencia máxima de la Tierra existe un par de puntos antipodales con la misma temperatura.

Los puntos antipodales son precisamente los puntos diametralmente opuestos. Este resultado puede generalizarse; véase el Capítulo 20.

Enunciamos ahora con precisión el primer teorema del pastel.

### 10.5 Teorema

Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos acotados del plano euclídeo. Existe entonces una recta en el plano que divide cada región exactamente en dos partes de igual área.

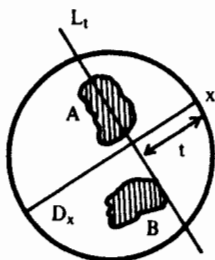
Obsérvese que las dos regiones pueden superponerse; es decir, los pasteles pueden superponerse. Además no es necesario que las regiones sean conexas; es decir, los pasteles pueden estar partidos en varias piezas.

*Demostración.* Sea  $S$  una circunferencia con centro  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  que contenga a  $A$  y a  $B$  (es posible puesto que  $A$  y  $B$  son acotados). Mediante un cambio de escala podemos suponer que  $S$  tiene diámetro 1. Para cada  $x \in S$  consideremos el diámetro  $D_x$  de  $S$  que pasa por  $x$  y sea  $L_x$  la recta perpendicular a  $D_x$  que pasa por el punto de  $D_x$  que se encuentra a distancia  $t$  de  $x$  ( $t \in I$ ); véase la Figura 10.1

Denotemos por  $g_1(t)$  el área de la parte de  $A$  que está situada en el semiplano que contiene a  $x$ . Designemos por  $g_2(t)$  el área de la otra parte. (Obsérvese que  $g_1(0) = g_2(1) = 0$ .) Está claro que  $g_1$  y  $g_2$  son aplicaciones de  $I$  a  $\mathbb{R}$ . Definamos  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$f(t) = g_2(t) - g_1(t).$$

Figura 10.1



Es una aplicación continua que satisface  $f(0) = -f(1)$ , es decir  $f(0)f(1) \leq 0$ . En virtud del Lema 10.1 sabemos que existe algún punto  $t \in I$  tal que  $f(t) = 0$ . Este punto no tiene por qué ser único. Puesto que  $g_2$  y  $-g_1$  son aplicaciones monótonas decrecientes (es obvio), también lo es  $f = g_2 - g_1$ . Así pues, se tiene  $f(t) = 0$  en un intervalo cerrado  $[a, b]$  o en un único punto  $c$ . En el primer caso pongamos  $h_A(x) = 1/2(a + b)$ , y en el segundo  $h_A(x) = c$ . En otras palabras, la recta perpendicular a  $D_x$  que pase por el punto de  $D_x$  que se encuentra a la distancia  $h_A(x)$  de  $x$  bisecta el área de  $A$ . Obsérvese que

$$h_A(-x) = 1 - h_A(x).$$

Nótese también que  $h_A: S^1 \rightarrow I$  es una aplicación continua (utilícese el truco usual: mover ligeramente  $x$  y observar qué le ocurre a  $h_A(x)$ ).

De forma idéntica definimos una aplicación  $h_B: S^1 \rightarrow I$  usando  $B$  en lugar de  $A$ . Definamos ahora  $h: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$h(x) = h_A(x) - h_B(x)$$

que es continua ya que  $h_A$  y  $h_B$  lo son. Entonces, para todo  $x \in S^1$  tenemos  $h(x) = -h(-x)$ . Pero, en virtud del Corolario 10.3, existe algún punto  $y \in S^1$  tal que  $h(y) = h(-y)$ . Así pues,  $h(y) = 0$ ,  $h_A(y) = h_B(y)$  y la recta perpendicular a  $D_y$  que pasa por el punto de  $D_y$  que está a una distancia  $h_A(y)$  de  $y$  bisecta el área de  $A$  y el área de  $B$ .

El teorema anterior puede generalizarse a dimensiones superiores; es decir, a  $n$  regiones acotadas de  $\mathbb{R}^n$ , para  $n = 3$  véase el Capítulo 20.

Establecemos ahora con precisión el segundo teorema del pastel.

## 10.6 Teorema

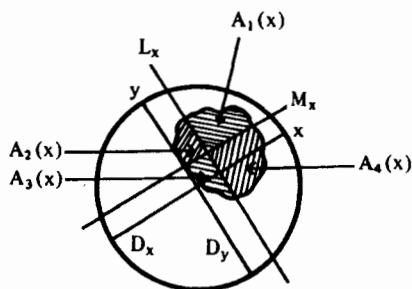
Si  $A$  es una región acotada del plano, existe un par de rectas perpendiculares que dividen a  $A$  en cuatro partes de igual área.

**Demostración.** Al igual que en la demostración del Teorema 10.5 podemos considerar  $A$  contenida en una circunferencia  $S$  de centro  $(0,0) \in \mathbb{R}^2$  y diámetro 1. Para cada  $x \in S$  sea  $L_x$  la recta perpendicular a  $D_x$  que corta a  $D_x$  a una distancia  $h_A(x)$  de  $x$  (en particular  $L_x$  bisecta el área de  $A$ ). Sea  $y$  el punto de  $S$  obtenido girando  $x$  un ángulo  $\pi/2$  en el sentido contrario a las agujas del reloj (esto es,  $y = ix = x\sqrt{-1}$ ). Sea ahora  $M_y$  la recta perpendicular a  $D_y$  que corta a  $D_y$  a una distancia  $h_A(y)$  de  $y$  (de nuevo  $M_y$  bisecta el área de  $A$ ). Denotemos finalmente las cuatro partes de  $A$ , contando en sentido contrario a las agujas del reloj por  $A_1(x)$ ,  $A_2(x)$ ,  $A_3(x)$ ,  $A_4(x)$ ; véase la Figura 10.2. Obsérvese que si denotamos el área de  $A_i(x)$  por  $g_i(x)$  se tiene

$$g_1(x) + g_2(x) = g_3(x) + g_4(x),$$

$$g_4(x) + g_1(x) = g_2(x) + g_3(x),$$

Figura 10.2



lo que nos da  $g_1(x) = g_3(x)$  y  $g_2(x) = g_4(x)$ . Desde luego, cada una de las aplicaciones  $g_1, g_2, g_3$  y  $g_4$  es una aplicación continua de  $S^1$  en  $\mathbb{R}$ . Sea  $f$  la aplicación continua definida por

$$f(x) = g_1(x) - g_2(x) = g_3(x) - g_4(x)$$

Obsérvese que

$$\begin{aligned} f(ix) &= g_1(ix) - g_2(ix) \\ &= g_2(x) - g_3(x) \\ &= g_2(x) - g_1(x) \\ &= -f(x). \end{aligned}$$

Aplicando ahora el Lema 10.1 a la función  $f\sqrt{e}: I \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\sqrt{e}: I \rightarrow S^1$  está dada por  $\sqrt{e}(t) = \exp(\pi it/2)$ , obtenemos el resultado deseado.

La solución de los problemas del pastel es un teorema de existencia; afirma que existe un corte del tipo deseado, pero no nos dice cómo debemos hacerlo. En general la posición exacta del corte puede ser difícil de determinar; damos, mediante un ejercicio, un ejemplo en el que es fácil de hallar.

## 10.7 Ejercicios

- (a) Supongamos que tenemos dos pasteles en una bandeja. Si uno de ellos tiene la forma de un  $2n$ -ágono regular y el otro la forma de un  $2m$ -ágono regular, ¿dónde debemos hacer un corte con un golpe de cuchillo de forma que los dividamos ambos exactamente por la mitad?
- (b) (Demostración alternativa del Teorema 10.5.) Usando la notación de 10.5, demostrar primero que para  $x \in S^1$  existe una recta  $L_x$  perpendicular a  $D_x$  que divide a  $A$  por la mitad. Esta recta  $L_x$  divide a  $B$  en dos partes; sean  $k_1(x)$ ,  $k_2(x)$  las áreas de las partes de  $B$  que están más cerca de  $x$ , respectivamente más lejos de  $x$ . Sea  $k(x) = k_1(x) - k_2(x)$ . Demostrar que  $k: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y deducir el Teorema 10.5.

## Capítulo 11

# Variedades y superficies

En este capítulo consideramos una clase especial de espacios topológicos: aquéllos que localmente son como los espacios euclídeos.

### 11.1 Definición

Sea  $n$  un entero no negativo. Una *variedad  $n$ -dimensional* es un espacio de Hausdorff en el que cada punto posee un entorno abierto homeomorfo al disco  $n$ -dimensional abierto  $\dot{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ . Obsérvese que  $\dot{D}^n \cong \mathbb{R}^n$ , por lo que podríamos equivalentemente exigir que cada punto tenga un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ . Para abreviar hablaremos de una  *$n$ -variedad*.

Puesto que  $\mathbb{R}^0$  es un punto, resulta que todo espacio  $X$  con la topología discreta es una 0-variedad. (Todo espacio con la topología discreta es de Hausdorff y para cada  $x \in X$  podemos escoger  $\{x\}$  como el conjunto abierto que contiene a  $x$  y es homeomorfo a  $\mathbb{R}^0$ ). Aparte de las 0-variedades, los ejemplos más sencillos de  $n$ -variedad son, probablemente  $\mathbb{R}^n$  y  $\dot{D}^n$ . Todo subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  es también una  $n$ -variedad: Si  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  y  $u \in U$ , existe entonces un  $\varepsilon > 0$  tal que  $u \in B_\varepsilon(u) \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ , y, desde luego,  $B_\varepsilon(u) \cong \dot{D}^n$ .

La circunferencia  $S^1$  es una 1-variedad. Para verlo, consideremos  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  dada por

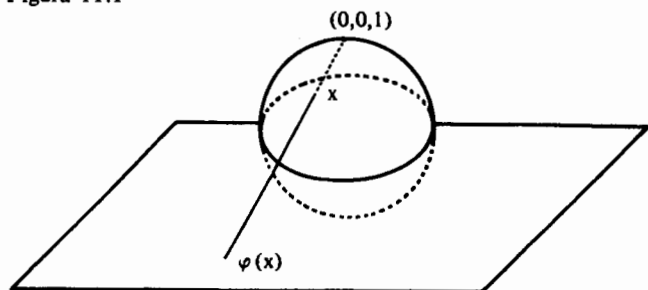
$$\{ \exp(2\pi i t) ; t \in I \}.$$

Si  $x = \exp(2\pi i \theta) \in S^1$ , entonces

$$\begin{aligned} x \in S^1 - \{ -x \} &= S^1 - \{ \exp(2\pi i(\theta - \tfrac{1}{2})) \} \\ &= \{ \exp(2\pi i t) ; \theta - \tfrac{1}{2} < t < \theta + \tfrac{1}{2} \} \\ &\cong (\theta - \tfrac{1}{2}, \theta + \tfrac{1}{2}) \\ &\cong (0, 1) \cong \dot{D}^1 \end{aligned}$$

por lo que cada punto posee un entorno homeomorfo a  $\mathbb{D}^1$ . Claramente  $S^1$  es de Hausdorff y, por tanto, es una 1-variedad. Más generalmente,  $S^n$  es una  $n$ -variedad. Para verlo introducimos la idea de proyección estereográfica, que, de hecho, es un homeomorfismo de  $S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Está definido como sigue: Para  $x \in S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\}$ , tracemos una recta de  $(0,0,\dots,0,1)$  a  $x$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$  que corta a  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_{n+1} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . El punto de intersección define unívocamente  $\varphi(x)$ . Véase la Figura 11.1.

Figura 11.1



No es difícil ver, por lo menos intuitivamente, que  $\varphi$  es continua y biyectiva. También se puede definir fácilmente  $\psi = \varphi^{-1}$ , que es continua. No es difícil obtener una forma precisa para  $\varphi$ : basta escribir la ecuación de la recta de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasa por  $(0,0,\dots,0,1)$  y por  $x$  y hallar el punto de esta recta para el cual  $x_{n+1} = 0$ . El lector hallará rápidamente que

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 - x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}} \right)$$

La aplicación inversa  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\}$  viene dada por

$$\psi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{1 + \|x\|^2} (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n, \|x\|^2 - 1).$$

Dejamos para el lector la comprobación de que  $\varphi$  y  $\psi$  son continuas y que  $\varphi\psi = 1$ ,  $\psi\varphi = 1$ .

Resulta que todo punto  $x \in S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\}$  posee un entorno, a saber, el propio  $S^n - \{(0,0,\dots,0,1)\}$ , que es homeomorfo a  $\mathbb{D}^n$ . Finalmente, el punto  $(0,0,\dots,0,1)$  tiene el entorno  $S^n - \{(0,0,\dots,0,-1)\}$  que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  vía la aplicación  $\varphi'$ , donde

$$\varphi'(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{x_1}{1 + x_{n+1}}, \frac{x_2}{1 + x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_{n+1}} \right)$$

Resulta pues que  $S^n$  es efectivamente una  $n$ -variedad.

Otro camino para ver que  $S^n$  es una  $n$ -variedad consiste en considerar primero el punto  $(0,0,\dots,0,1) \in S^n$  y el entorno  $U$  de  $(0,0,\dots,0,1)$  dado por

$$U = \{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} > 0 \}.$$

Este entorno es homeomorfo a  $\mathring{D}^n$  por proyección ortogonal, es decir, por la aplicación  $U \rightarrow \mathring{D}^n \subseteq \mathbb{R}^n$  dada por  $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . En general, para  $x \in S^n$ , tomemos

$$U_x = \{y \in S^n; \|x - y\| < \sqrt{2}\}$$

que es claramente un entorno abierto de  $x \in S^n$ . La proyección ortogonal sobre el hiperplano de  $\mathbb{R}^{n+1}$  que pasa por  $O$  y es ortogonal a la recta que pasa por  $O$  y  $x$ , nos da un homeomorfismo entre  $U_x$  y  $\mathring{D}^n$ , que nos demuestra que  $S^n$  es una  $n$ -variedad.

El hecho de que una  $n$ -variedad es, por definición, de Hausdorff es importante. Podríamos preguntarnos: ¿Todo espacio tal que cada punto tenga un entorno homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  es de Hausdorff? La respuesta es no, como prueba el siguiente ejemplo. Sea  $X$  el conjunto

$$X = \{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 2\}$$

con la topología  $\mathcal{U}$  definida por  $U \in \mathcal{U}$  si  $U = \emptyset$ ,  $U = X$  o  $U$  es una unión arbitraria de conjuntos de la forma

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta) & \quad -1 \leq \alpha < \beta \leq 2, \\ (\alpha, 0) \cup (\beta, 2] & \quad -1 \leq \alpha < 0, -1 \leq \beta < 2. \end{aligned}$$

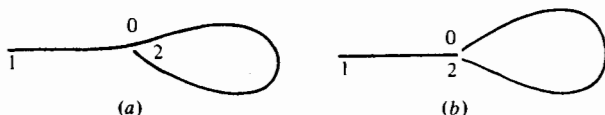
Obsérvese que  $X$  no tiene la topología inducida por  $\mathbb{R}$  ya que los conjuntos de la forma  $(\beta, 2]$  no son abiertos en  $X$ . En la Figura 11.2(a) o (b) se da intuitivamente la descripción correcta de  $X$ . Esto es debido a que  $\{2\}$  es arbitrariamente próximo a  $\{0\}$  (es decir, todo conjunto abierto que contenga a  $\{2\}$  contiene a  $(\alpha, 0)$  para algún  $\alpha$ ). Claramente  $X$  no es de Hausdorff ya que todo entorno abierto de  $\{2\}$  intersecta a cualquier entorno abierto de  $\{0\}$ . Por otra parte, todo punto de  $X$  tiene un entorno homeomorfo a  $\mathring{D}^1$ . Si  $x \in X$  y  $x \neq 2$ , está claro. Si  $x = 2$ ,

$$N = (-\frac{1}{2}, 0) \cup (3/2, 2]$$

es un entorno de  $\{2\}$  homeomorfo a  $\mathring{D}^1$  mediante la aplicación  $f: N \rightarrow (-1, 1) = \mathring{D}^1$ , donde

$$f(y) = \begin{cases} 2y & \text{si } -\frac{1}{2} < y < 0, \\ 4-2y & \text{si } 3/2 < y \leq 2. \end{cases}$$

Figura 11.2





El lector deberá comprobar que  $f$  es continua y biyectiva con inversa  $g: (-1,1) \rightarrow N$  dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } -1 < x < 0, \\ 2 - \frac{1}{2}x & \text{si } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

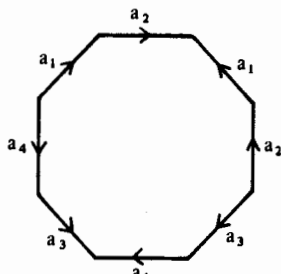
Así pues, la condición de Hausdorff en la Definición 11.1 no es en absoluto superflua. Permite excluir espacios como los de la Figura 11.2, espacios que intuitivamente no son localmente como los espacios euclídeos. Otra razón para incluir la condición de Hausdorff es, quizás, que solemos pensar las  $n$ -variedades como subespacios de algún espacio euclídeo  $\mathbb{R}^N$ , para  $N$  suficientemente grande (que localmente son como  $\mathbb{R}^n$ ). En este caso la condición de Hausdorff se hereda del espacio ambiente  $\mathbb{R}^N$ . De hecho existe un teorema que establece que si  $M$  es una «buena» variedad (por ejemplo, compacta), entonces  $M$  es homeomorfa a un subespacio de un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^N$ . Véanse los Ejercicios 11.2 (f) y (g) para el caso de una variedad compacta.

Para nuevos ejemplos de variedades obsérvese que si  $M$  es una  $m$ -variedad y  $N$  es una  $n$ -variedad, el producto  $M \times N$  es una  $(m+n)$ -variedad ya que  $\dot{\mathbb{R}}^m \times \dot{\mathbb{R}}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n} \cong \dot{\mathbb{R}}^{m+n}$  y el producto de espacios de Hausdorff es de Hausdorff. Así pues,  $S^1 \times S^1$  es una 2-variedad y, más generalmente,  $\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n$  es una  $n$ -variedad.

El espacio  $\mathbb{R}P^n$  es una  $n$ -variedad. Para verlo consideremos la aplicación  $p: S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  que aplica  $x \in S^n$  en el par  $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$ . Sea  $U_x$  un entorno abierto de  $x \in S^n$  homeomorfo a  $\dot{\mathbb{D}}^n$  y de diámetro menor que  $\sqrt{2}$ . En este caso  $p(U_x)$  es un entorno abierto de  $\{x, -x\} \in \mathbb{R}P^n$  homeomorfo a  $\dot{\mathbb{D}}^n$ . Esto es debido a que  $p$  es una aplicación continua y abierta (Teorema 5.12) y a que si  $U$  es una región suficientemente pequeña de  $S^n$  entonces  $p|_U: U \rightarrow p(U)$  es biyectiva. Más generalmente, sea  $X$  un  $G$ -espacio, donde  $G$  es un grupo finito. Decimos que  $G$  actúa libremente sobre  $X$  si para todo  $x \in X$  y todo  $g \in G$ ,  $g \neq 1$  se tiene  $g \cdot x \neq x$ . Si  $G$  actúa libremente sobre  $X$  y  $X$  es una  $n$ -variedad compacta, también lo es  $X/G$ ; recíprocamente, si  $X/G$  es una  $n$ -variedad, también lo es  $X$ . Dejamos los detalles para el lector.

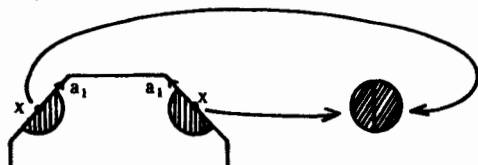
Podemos obtener un nuevo ejemplo considerando el espacio identificación  $M$  descrito en la Figura 11.3, que consiste en una región octogonal con las aristas identificadas tal como indica la figura. Denotemos por  $p: X \rightarrow M$  la proyección natural.

Figura 11.3



Si  $x \in M$  es tal que  $p^{-1}(x)$  está en el interior de  $X$ , entonces claramente  $x$  tiene un entorno homeomorfo a  $\mathbb{D}^2$ ; de hecho puede tomarse el propio  $p(\hat{X})$ . Si  $x \in M$  es tal que  $p^{-1}(x)$  pertenece a una arista de  $X$  pero no es un vértice de  $X$ , de nuevo no es difícil ver que  $x$  tiene un entorno homeomorfo a  $\mathbb{D}^2$ ; véase la Figura 11.4.

Figura 11.4.



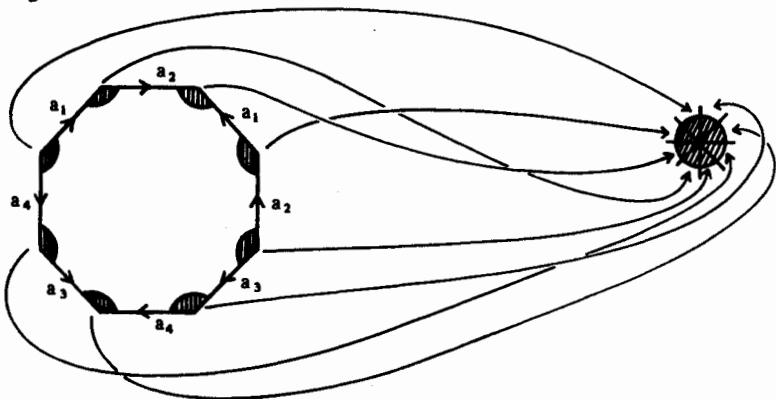
Finalmente, si  $p^{-1}(x)$  es un vértice de  $X$ , la Figura 11.5 describe un entorno  $N_x$  de  $x$  que es homeomorfo a  $\mathbb{D}^2$  ( $p^{-1}(N_x)$  está formado por los puntos de  $X$  cuya distancia a  $p^{-1}(x)$  es menor que  $\varepsilon$  para un  $\varepsilon > 0$  conveniente).

Intuitivamente no es difícil convencerse de que  $M$  es de Hausdorff y el lector no debería tener dificultad para verlo. Para los que prefieren razonar algebraicamente damos la siguiente demostración. Denotemos por  $A$  las «aristas» de  $X$ . Podemos escribir  $A$  como  $\bigcup_{i=1}^8 A_i \cup Y$ , donde las  $A_i$  son las aristas (cerradas) de  $X$  y donde  $Y$  denota los ocho

vértices de  $X$ . Sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $X$ ; entonces

$$\begin{aligned} p^{-1}p(C) &= p^{-1}p((C - A) \cup (C \cap Y) \cup \bigcup_{i=1}^8 (C \cap A_i)) \\ &= (C - A) \cup p^{-1}p(C \cap Y) \cup \bigcup_{i=1}^8 p^{-1}p(C \cap A_i) \\ &= (C - A) \cup \varepsilon Y \cup \bigcup_{i=1}^8 ((C \cap A_i) \cup B_i) \end{aligned}$$

Figura 11.5

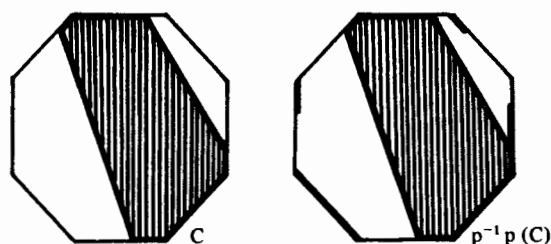


donde  $\varepsilon Y = Y$  si  $C \cap Y$  no es vacío y  $\varepsilon Y = \emptyset$  si  $C \cap Y$  es vacío. El conjunto  $B_i$  es un subespacio de  $A$  homeomorfo a  $C \cap A_i$ . De hecho, si la arista  $A_i$  está identificada en  $M$  con la arista  $A_j$ ,  $B_i$  es el subespacio de  $A_i$  homeomorfo a  $C \cap A_i$  para el cual  $p(B_i) = p(C \cap A_i)$ . (Obsérvese que  $p^{-1}p(C \cap A_i) \cap A_j = B_i \cup (\varepsilon Y \cap A_j)$ .) Así pues, resulta

$$p^{-1}p(C) = C \cup \varepsilon Y \cup \bigcup_{i=1}^8 B_i$$

Véase la Figura 11.6.

Figura 11.6



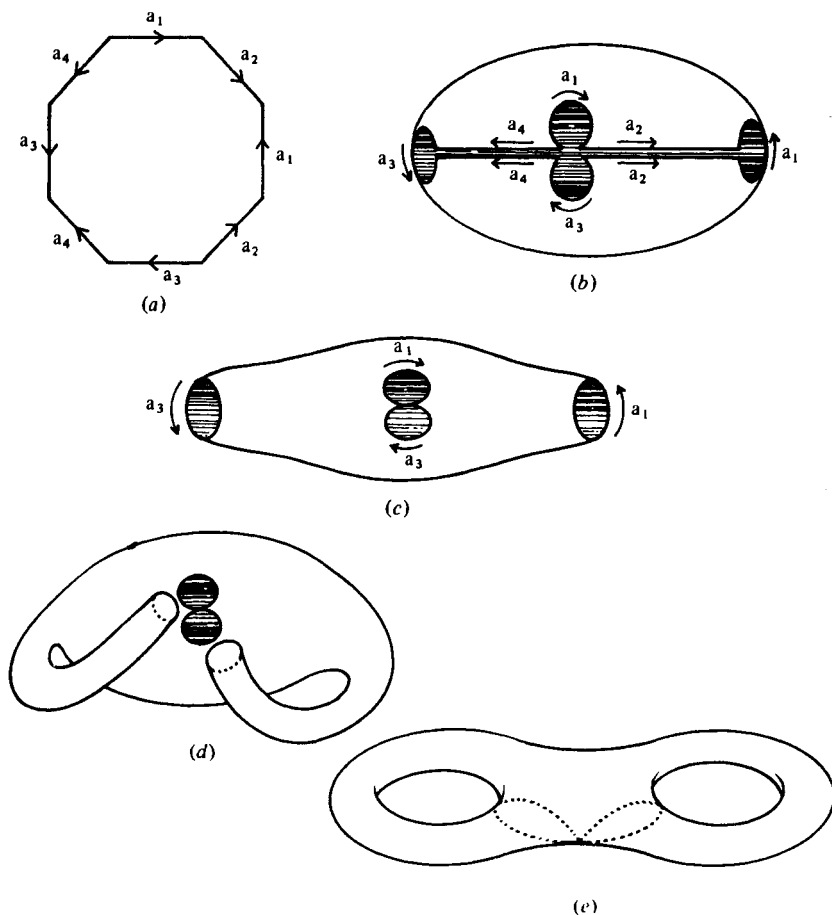
Puesto que  $B_i$  es homeomorfo a  $C \cap A_i$ , que es un conjunto cerrado, cada  $B_i$  es un subconjunto cerrado de  $A_i$  (para algún  $j$ ), con lo que los subespacios  $B_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 8$ , son subconjuntos cerrados de  $X$ . Resulta entonces que  $p^{-1}p(C)$  es un conjunto cerrado y, por tanto, por la definición de topología cociente, también lo es  $p(C)$ . Así pues,  $p: X \rightarrow M$  es una aplicación cerrada. Puesto que  $X$  es obviamente un espacio compacto de Hausdorff, se sigue del Teorema 8.11 que  $M$  es también un espacio compacto de Hausdorff y, por tanto,  $M$  es ciertamente una 2-variedad.

Las identificaciones de la Figura 11.3 puede realizarse efectivamente en nuestro mundo tres-dimensional. La Figura 11.7 describe este proceso. El resultado final se llama un *doble toro*.

Otra forma de realizar la 2-variedad de la Figura 11.3 consiste en extraer primero un disco abierto tal como indica la Figura 11.8 (a) identificando después las dos aristas  $a_1$  para obtener (c). Consideremos la región sombreada  $Y$  de (d). Es homeomorfa al subespacio de  $\mathbb{R}^2$  descrito en (e). La función  $f$  dada por

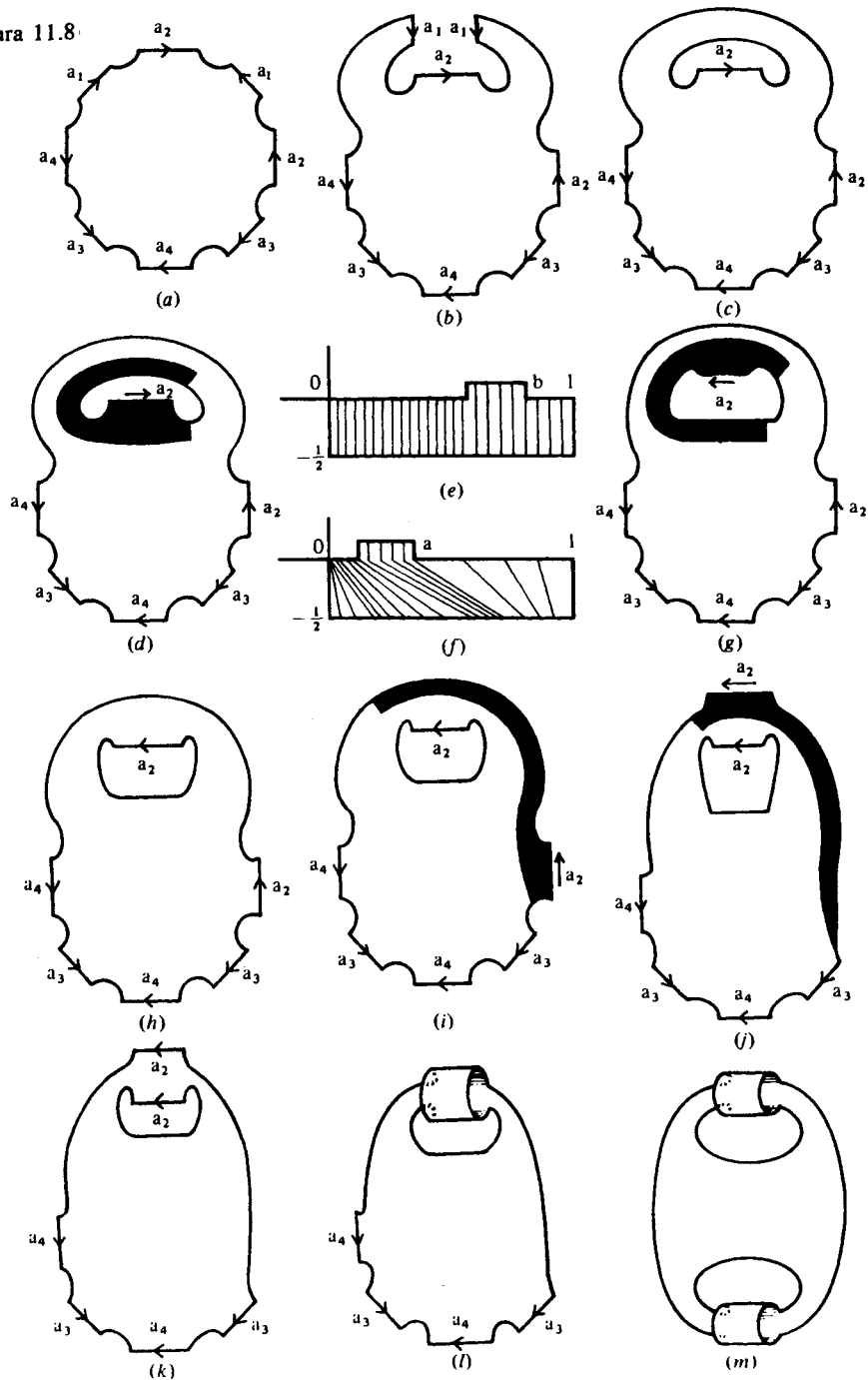
$$f(x,y) = \begin{cases} (x(a+2y(b-a))/b, y) & \text{si } 0 \leq x \leq b \text{ e } y \leq 0, \\ \left( \frac{(x-b)(1-a-2y(b-a))}{1-b} + a+2y(b-a), y \right) & \text{si } b \leq x \leq 1 \text{ e } y \leq 0, \\ (xa/b, y) & \text{si } y \geq 0 \end{cases}$$

Figura 11.7



(donde  $0 < a \leq b < 1$ ) es un homeomorfismo entre los espacios representados en la Figura 11.8 (e) y (f). Obsérvese que  $f$  induce la identidad sobre las tres aristas que no contienen la protuberancia. Obtenemos así un homeomorfismo de  $Y$  en sí mismo que es la identidad sobre las tres aristas de  $Y$  que no contienen  $a_2$ . Con este homeomorfismo sobre  $Y$  y la identidad sobre la parte no sombreada de (d) obtenemos un homeomorfismo entre (d) y (g). Así pues, (c) y (h) son espacios homeomorfos. De manera análoga, usando las regiones sombreadas de (i) y (j) podemos definir un homeomorfismo entre (h) y (k). Haciendo la identificación en  $a_2$  obtenemos (l). De manera análoga obtenemos (m) que es homeomorfo al espacio original (a).

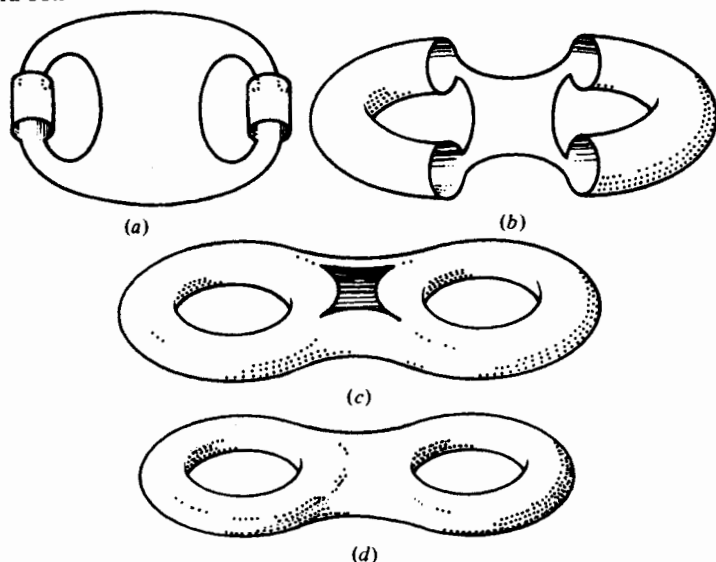
Figura 11.8



Proseguimos en la Figura 11.9 y después de algunos sencillos homeomorfismos llegamos a la Figura 11.9 (c). Finalmente, si volvemos a pegar el disco que habíamos extraído al principio obtenemos el doble toro en la Figura 11.9 (d).

Resulta que toda 2-variedad compacta puede obtenerse como espacio indentificación de una cierta región poligonal; volveremos sobre esta cuestión más adelante en este mismo capítulo.

Figura 11.9



## 11.2 Ejercicios

- Demostrar que todo subconjunto abierto de una  $n$ -variedad es también una  $n$ -variedad.
- Sea  $\mathbb{C}P^n = S^{2n+1} / \sim$  donde  $\sim$  es la relación de equivalencia definida en  $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  por

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \exp(2\pi i t) y \text{ para algún } t \in I.$$

Probar que  $\mathbb{C}P^n$  es una  $2n$ -variedad. (Observar que  $\sim$  identifica circunferencias de  $S^{2n+1}$  en un único punto; es decir,  $\{(\exp(2\pi i t), 0, 0, \dots, 0); t \in I\}$  representa un punto en  $\mathbb{C}P^n$ .)

- Sea  $p$  un entero positivo y  $L_p = S^{2n+1} / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia definida en  $S^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$  por

$$x \sim y \Leftrightarrow x = \exp(2\pi i n/p) y, n = 0, 1, \dots, p-1.$$

Demostrar que  $L_p$  es una  $(2n + 1)$ -variedad. ( $L_p = S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$  donde  $\mathbb{Z}_p$  actúa libremente sobre  $S^{2n+1}$  de manera obvia.)

- (d) Sea  $X$  un  $G$ -espacio, donde  $G$  es un grupo finito que opera libremente sobre  $X$ . Probar que si  $X$  es una  $n$ -variedad compacta, también lo es  $X/G$ . Probar también que si  $X/G$  es una variedad, también lo es  $X$ .
- (e) Probar que si  $M$  es una  $n$ -variedad, cada punto de  $M$  tiene un entorno homeomorfo al  $n$ -disco cerrado  $D^n$ .
- (f) Supongamos que  $M$  es una  $n$ -variedad compacta. Demostrar que  $M$  es homeomorfa a un subespacio de un espacio euclídeo  $\mathbb{R}^N$ . (Indicación: Puesto que  $M$  es compacta existe un recubrimiento finito  $\{D_1, D_2, \dots, D_m\}$  de  $M$  y homeomorfismos  $h_i: D_i \rightarrow D^n$ . Aplicar el Ejercicio 8.14 (j) y (k) para obtener homeomorfismos  $M/(M-D_i) \cong (D_i)^\infty \cong (D^n)^\infty \cong S^n$ . Puesto que  $M$  es un espacio compacto de Hausdorff y  $M-D_i$  es cerrado, la proyección  $p_i: M \rightarrow M/(M-D_i)$  es continua, por lo que obtenemos aplicaciones continuas  $f_i: M \rightarrow S^n$ . Definamos  $f: M \rightarrow (S^n)^m$  por  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ . Finalmente,  $(S^n)^m \subseteq (\mathbb{R}^n)^m = \mathbb{R}^{nm}$ .)
- (g) Sea  $M$  una  $n$ -variedad y  $D$  un subespacio de  $M$  homeomorfo a  $\tilde{D}^n$ . Puesto que  $\tilde{D}^n \cong \mathbb{R}^n \cong S^n - \{(0,0, \dots, 0,1)\}$  tenemos un homeomorfismo

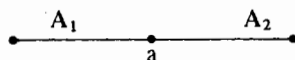
$$g: D \rightarrow S^n - \{(0,0, \dots, 0,1)\}.$$

Definamos  $f: M \rightarrow S^n$  por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in D, \\ (0,0,\dots,0,1) & \text{si } x \in M-D. \end{cases}$$

Demostrar que  $f$  es continua. Utilizar este resultado para dar una nueva demostración del resultado de (f).

Estamos interesados especialmente en variedades conexas compactas. Todas las 0-variedades conexas compactas son homeomorfas entre sí. La circunferencia  $S^1$  es una 1-variedad conexa compacta. De hecho, salvo homeomorfismos,  $S^1$  es la única 1-variedad conexa compacta. La demostración no es muy difícil y vamos a indicar cómo funciona. El primer paso (quizás el más duro pero intuitivamente plausible) consiste en usar la compacidad para demostrar que si  $M$  es una 1-variedad conexa compacta, entonces  $M$  puede subdividirse de manera «buena» en un número finito de regiones cada una de ellas homeomorfas al intervalo unidad  $I$ . Si llamamos *arcos* a las imágenes homeomorfas de  $I$  y *vértices* a la imagen de  $S^0$ , entonces la expresión «manera buena» significa que ningún arco se corta a sí mismo y que siempre que dos arcos se intersectan lo hacen en uno o dos vértices. (La idea es la siguiente: (i) recubrir  $M$  por entornos homeomorfos a  $\tilde{D}^1 \cong I$ , (ii) escoger un número finito de éstos en virtud de la compacidad, (iii) escoger entornos más pequeños homeomorfos a  $I$  que aún recubran  $M$ , y finalmente, (iv) usar la definición de 1-variedad para demostrar que  $M$  admite una «buena» subdivisión.) Claramente en una tal subdivisión de  $M$  en arcos y vértices cada vértice lo es exactamente de dos arcos distintos y cada arco tiene dos vértices distintos. (Si un vértice lo fuera de sólo uno o de más de dos arcos, entonces este vértice no tendría un entorno homeomorfo a  $\tilde{D}^1$ .) Supongamos que  $M$  contiene más de dos arcos. Sean  $A_1, A_2$  un par de arcos de  $M$  que se corten en un vértice  $a$ .



Sean  $h_1: A_1 \rightarrow I$ ,  $h_2: A_2 \rightarrow I$  los homeomorfismos que definen  $A_1$  y  $A_2$  como arcos. Podemos suponer que  $h_1(a) = 1$ , y  $h_2(a) = 0$ ; de lo contrario basta componer  $h_1$  y/o  $h_2$  con el homeomorfismo  $f: I \rightarrow I$  dado por  $f(t) = 1 - t$ . Definamos  $g: A_1 \cup A_2 \rightarrow I$  por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} h_1(x) & \text{si } x \in A_1, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} h_2(x) & \text{si } x \in A_2. \end{cases}$$

Esta aplicación está bien definida y se ve fácilmente que es biyectiva. Para ver que  $g$  es continua obsérvese primero que  $A_1$  y  $A_2$  son subconjuntos cerrados de  $A_1 \cup A_2$  y de  $M$ . Sea  $C$  un subconjunto cerrado de  $I$ ; entonces

$$g^{-1}(C) = h_1^{-1}([0, \frac{1}{2}] \cap C) \cup h_2^{-1}([\frac{1}{2}, 1] \cap C)$$

que es claramente cerrado en  $A_1 \cup A_2$ , y, por tanto,  $g$  es ciertamente continua. Resulta fácilmente, entonces, que  $g$  es un homeomorfismo. Podemos, por tanto, reemplazar los arcos  $A_1$ ,  $A_2$  por un arco  $A$ . Obtenemos así una subdivisión de  $M$  con un arco menos y un vértice menos. Continuando de esta manera llegamos a una subdivisión de  $M$  formada por dos arcos y, por tanto, con dos vértices. Así pues,  $M$  es homeomorfo a dos copias de  $I$  con los extremos identificados entre sí. En consecuencia,  $M$  es homeomorfa a la circunferencia  $S^1$ .

Las 2-variedades conexas compactas se llaman *superficies*. La esfera  $S^2$ , el toro  $T = S^1 \times S^1$ , el plano proyectivo real  $\mathbb{RP}^2$  y el doble toro descrito anteriormente son ejemplos de superficies. Los tres primeros ejemplos son fundamentales, en el sentido de que cualquier superficie puede obtenerse a partir de esas tres por un proceso llamado «suma conexa». Sean  $S_1$  y  $S_2$  dos superficies disjuntas; su *suma conexa*  $S_1 \# S_2$  se obtiene extrayendo un pequeño disco abierto de cada superficie y pegándolas luego a lo largo de los bordes de los agujeros resultantes. Véase la Figura 11.10.

Para una definición más rigurosa, escojamos primero  $D_1 \subseteq S_1$  y  $D_2 \subseteq S_2$  y tales que  $D_1$  y  $D_2$  sean homeomorfos a  $D^2$ . Es fácil ver que esto es posible: Sea  $x$  un punto de la superficie; existe entonces un entorno  $N$  de  $x$  y un homeomorfismo  $h: N \rightarrow D^2$ . El subespacio  $h^{-1}(D^2_{1/2}) \subseteq N$  donde  $D^2_{1/2} \subseteq D^2$  es un disco cerrado de radio  $1/2$  es homeomorfo a  $D^2$  por el homeomorfismo

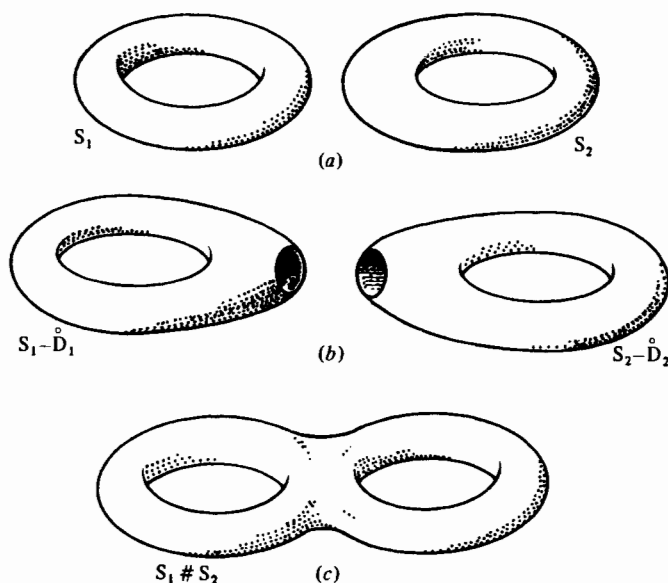
$$\begin{aligned} h^{-1}(D^2_{1/2}) &\rightarrow D^2, \\ y &\rightarrow 2h(y). \end{aligned}$$

Volviendo a la definición de  $S_1 \# S_2$ , sean  $D_1 \subseteq S_1$  y  $D_2 \subseteq S_2$  subespacios homeomorfos a  $D^2$  y sean  $h_1: D_1 \rightarrow D^2$ ,  $h_2: D_2 \rightarrow D^2$  dos homeomorfismos. Definimos  $S_1 \# S_2$  por

$$\frac{(S_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cup (S_2 - \overset{\circ}{D}_2)}{\sim}$$



Figura 11.10

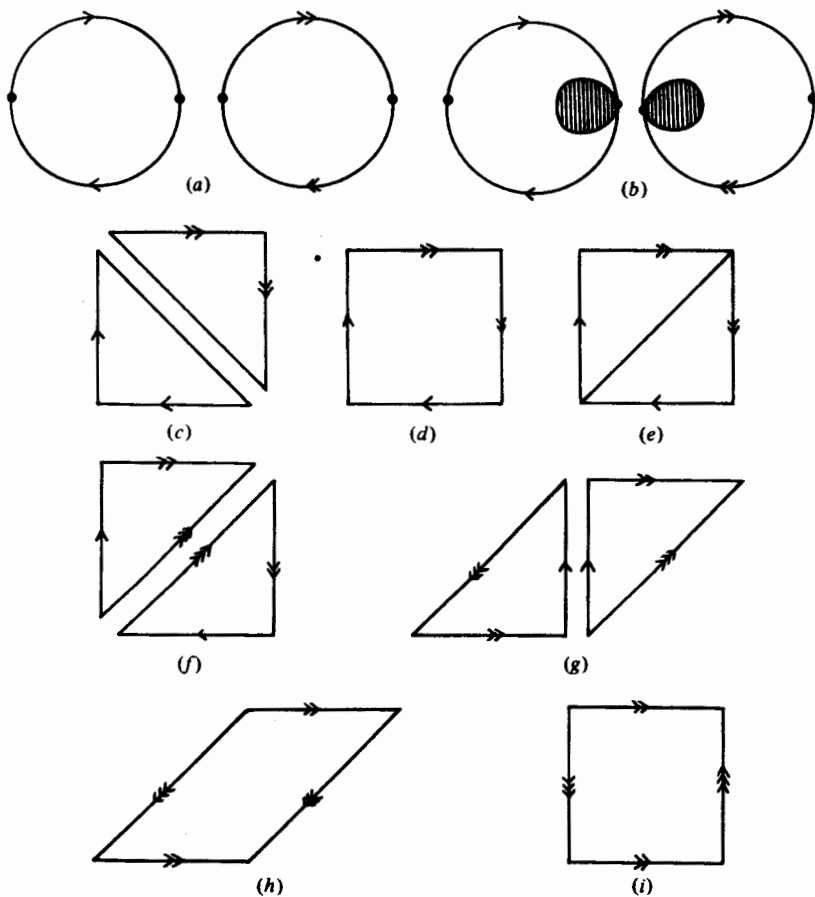


donde  $\sim$  es una relación de equivalencia que es no trivial sólo en  $\partial(S_1 - \mathring{D}_1) \cup \partial(S_2 - \mathring{D}_2) = \partial D_1 \cup \partial D_2$ , donde está dada por  $x \sim h_2^{-1} h_1(x)$  para  $x \in \partial D_1$ . Es posible demostrar que la definición de suma conexa es independiente de la elección de los discos  $D_1$ ,  $D_2$  y de los homeomorfismos  $h_1$ ,  $h_2$ . No es difícil ver que  $S_1 \# S_2$  es una superficie: únicamente debemos fijarnos en los entornos de los puntos de  $\partial D_1$  y  $\partial D_2$ . Dejamos los detalles para el lector.

El doble toro es la suma conexa de dos toros; véase la Figura 11.10. La botella de Klein es la suma conexa de dos planos proyectivos. Puede verse bastante fácilmente a partir de los resultados del Capítulo 5, pero en la Figura 11.11 presentamos una demostración geométrica. Partimos de dos planos proyectivos como en la Figura 11.11 (a); extraemos dos discos abiertos como indica (b). El resultado es homeomorfo al espacio de (c). Pegando de nuevo (es decir, haciendo la suma conexa) obtenemos (d). Finalmente, hacemos un corte como indica (e) para obtener el espacio identificación (f). Reorganizando la configuración obtenemos (g), identificando de nuevo obtenemos (h) y un sencillo homeomorfismo nos da (i), que es una botella de Klein.

El hecho de que toda superficie pueda obtenerse a partir de la esfera  $S^2$ , del toro  $T = S^1 \times S^1$  y del plano proyectivo real  $\mathbb{RP}^2$  mediante sumas conexas, constituye el llamado *teorema de clasificación de las superficies*.

Figura 11.11



### 11.3 Teorema

Toda superficie  $S$  es homeomorfa a una y una sola de las siguientes superficies:

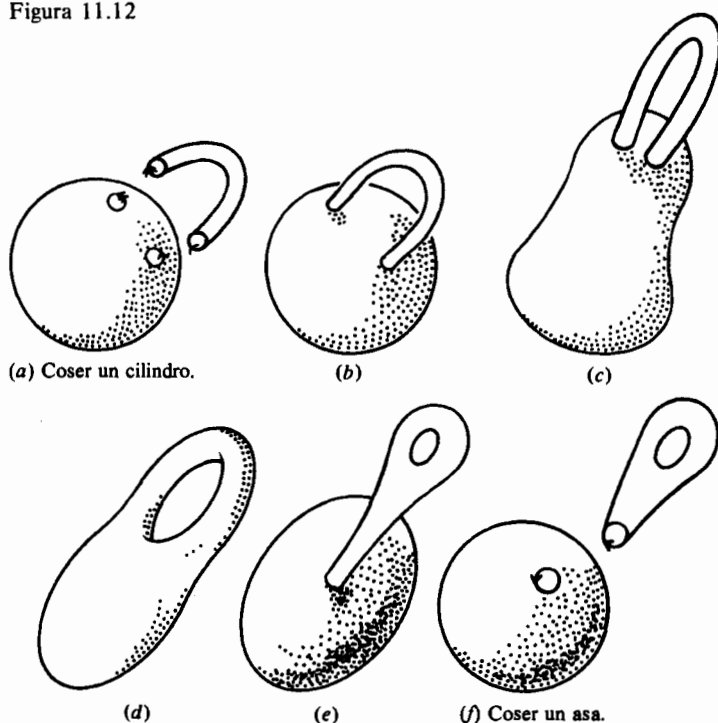
$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \quad (m \geq 0),$$

$$S^2 \# \underbrace{RP^2 \# RP^2 \# \dots \# RP^2}_n \quad (n \geq 1).$$

La demostración se divide en dos partes. La primera parte consiste en demostrar que toda superficie es homeomorfa por lo menos a una de las superficies de la lista del Teorema 11.3. No daremos todos los detalles de esta parte de la demostración sino simplemente una breve indicación más adelante. La segunda parte de la demostración consiste en ver que dos de las superficies de la lista no pueden ser homeomorfas; lo demostraremos con rigor en el Capítulo 26.

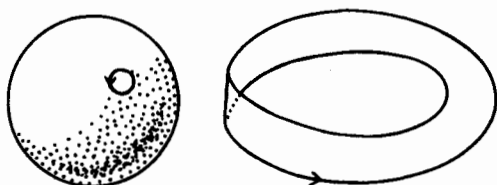
A menudo se usa la expresión *coser un asa* (donde un *asa* es un toro al que se le ha quitado un disco abierto) para indicar que hacemos la suma conexa con un toro; la razón es clara. (Véase la Figura 11.12 (e), (f) como ejemplo). También hablaremos a veces de *coser un cilindro*: Para hacerlo, quitamos dos discos abiertos de la superficie y pegamos el cilindro tal como indica la Figura 11.12 (a); es importante coser correctamente. Coser un cilindro incorrectamente (es decir, cambiando la orientación de una de las dos circunferencias de los bordes) es equivalente a hacer la suma conexa con una botella de Klein.

Figura 11.12



Se usa a menudo la expresión *coser una banda de Möbius* para indicar que hacemos la suma conexa con el plano proyectivo real (véase la Figura 11.13). Esto es debido simplemente a que si quitamos un disco abierto al plano proyectivo real obtenemos una banda de Möbius (véase el Capítulo 5).

Figura 11.13. Coser una banda de Möbius.



Las superficies obtenidas después de hacer una suma conexa con  $\mathbf{RP}^2$  son especiales en el sentido de que tienen (como comúnmente se dice) un sólo lado. Esto es debido a que contienen una banda de Möbius, que, tal como vimos en el Capítulo 5, tiene algunas propiedades un tanto extrañas. Decimos que una superficie es *orientable* si no contiene ninguna banda de Möbius. Por otro lado, decimos que una superficie es *no orientable* si contiene una banda de Möbius.

Así la botella de Klein y el plano proyectivo real son ambas superficies no orientables, mientras que la esfera, el toro y el doble toro son superficies orientables. La superficie

$$S^2 \# \underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \quad (m \geq 0),$$

que escribiremos abreviadamente  $S^2 \# mT$ , se llama la *superficie orientable estándar de género  $m$* . La superficie

$$S^2 \# \underbrace{\mathbf{RP}^2 \# \mathbf{RP}^2 \# \dots \# \mathbf{RP}^2}_n \quad (n \geq 1),$$

que escribiremos abreviadamente  $S^2 \# n\mathbf{RP}^2$ , se llama la *superficie no orientable estándar de género  $n$* .

Es natural preguntarse: ¿Qué superficie obtenemos si hacemos sumas conexas de toros y planos proyectivos? En otras palabras, ¿a qué superficie estándar es homeomorfa

$$\underbrace{T \# T \# \dots \# T}_m \# \underbrace{\mathbf{RP}^2 \# \mathbf{RP}^2 \# \dots \# \mathbf{RP}^2}_n = mT \# n\mathbf{RP}^2$$

donde  $m, n \geq 1$ ? Una tal superficie es claramente no orientable y, por tanto, si suponemos cierto el Teorema 11.3,  $mT \# n\mathbf{RP}^2$  debe ser homeomorfa a  $k\mathbf{RP}^2$  para algún  $k$ . Vamos a determinar el valor de  $k$  en el caso  $m = n = 1$  y dejamos el caso general como un ejercicio (fácil).

## 11.4 Lema

$$T \# \mathbf{RP}^2 \cong \mathbf{RP}^2 \# \mathbf{RP}^2 \# \mathbf{RP}^2.$$

**Demostración.** Pongamos  $S_1 = T \# \mathbb{R}P^2$  y  $S_2 = \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ . Vamos a representar en primer lugar  $S_1$  y  $S_2$  como espacios identificación.  $S_1$  es el espacio cociente de una región hexagonal  $X$ ; véase la Figura 11.14.

Obsérvese que todos los vértices de  $X$  están identificados a un único punto de  $S_1$  y que existe un entorno  $\tilde{D}_1$  de este punto de  $S_1$  que es homeomorfo a  $\tilde{D}^2$ ; véase la Figura 11.14(e). Suprimiendo este entorno (Figura 11.15(a)) y haciendo las identificaciones obtenemos el espacio de la Figura 11.15(c) que, tras un homeomorfismo, nos da la Figura 11.15(d). Vamos a describir una sucesión de homeomorfismos que transformen 11.15(d) en 11.15(o). Para pasar de (d) a (g) consideremos la región sombreada indicada en (e) y (f). Usando las ideas descritas anteriormente en conexión con la Figura 11.8 no es difícil explicitar un homeomorfismo entre (d) y (g). Es fácil ver que (g) y (h) son homeomorfos. Para demostrar que (h) y (k) lo son utilizamos las regiones sombreadas de

Figura 11.14

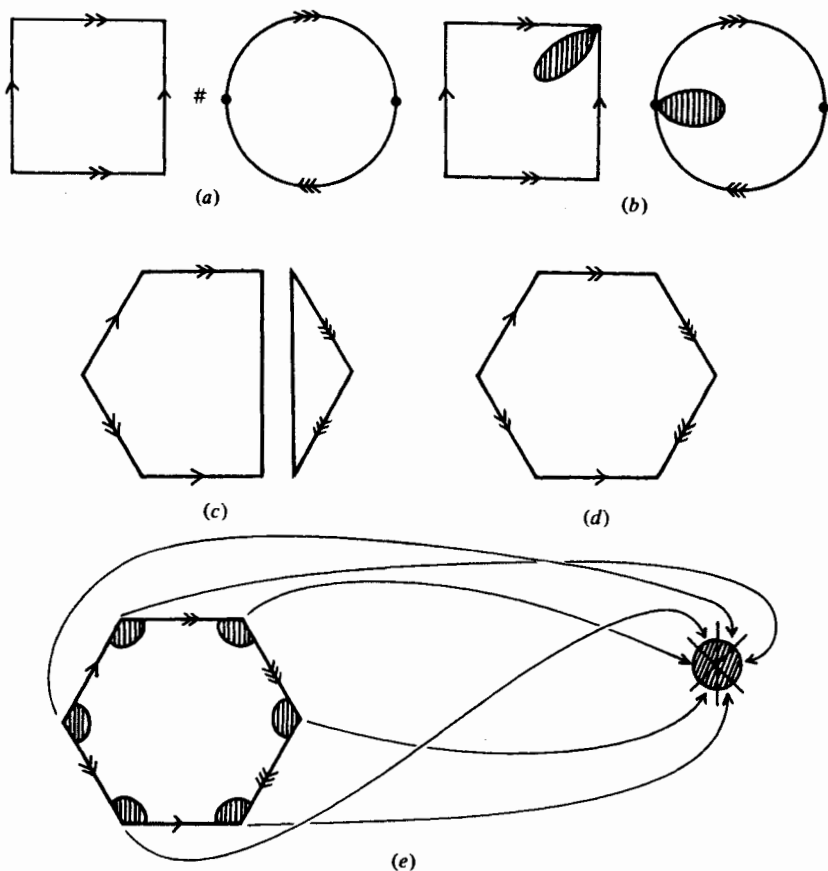


Figura 11.15

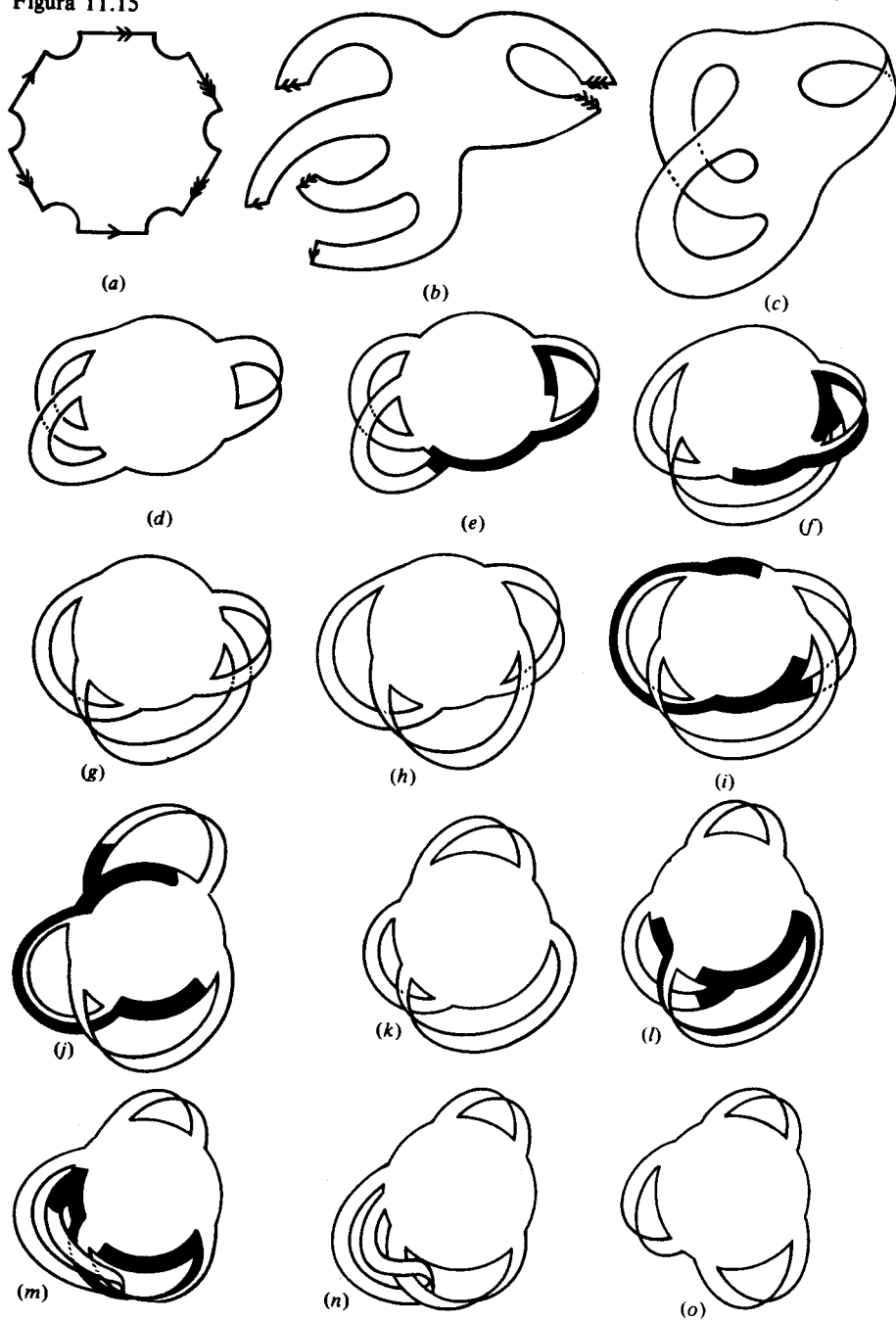
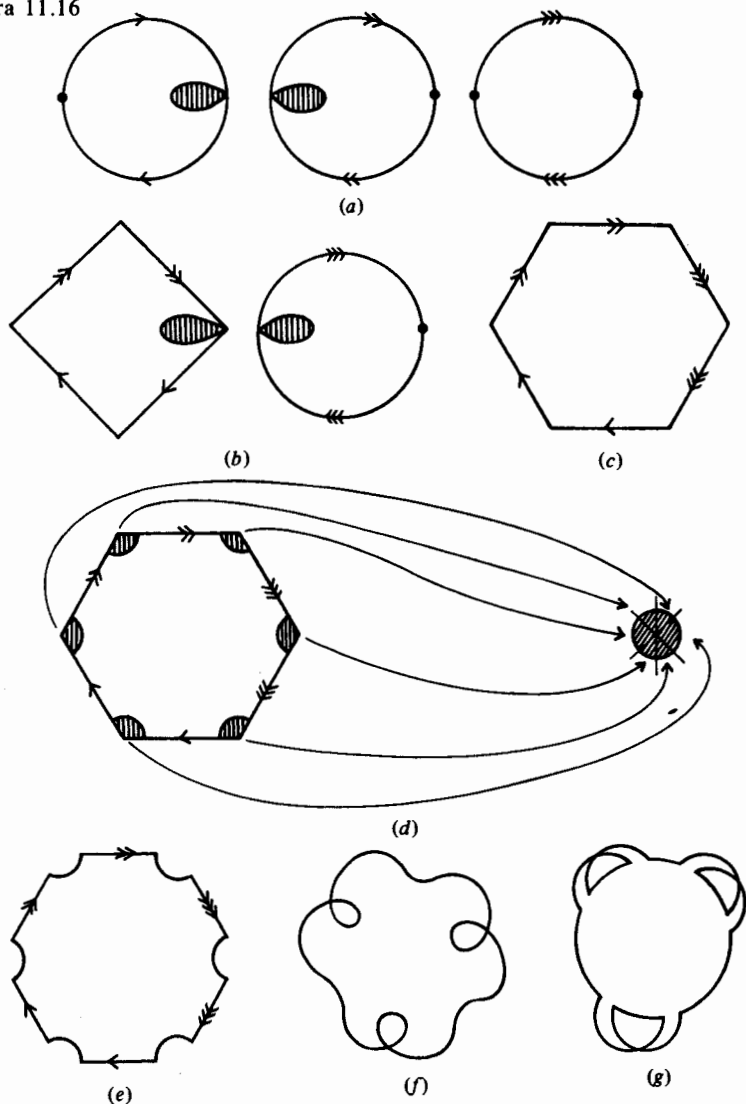


Figura 11.16



(i) y (j). Análogamente, para ver que (k) y (n) son homeomorfos, utilizamos las regiones sombreadas de (l) y (m). Finalmente, es fácil ver que (n) y (o) son homeomorfos. Así pues,  $S_1 - \dot{D}_1$  es homeomorfo al espacio representado en la Figura 11.15(o).

Por otra parte,  $S_2$  admite una representación como espacio identificación como la dada en la Figura 11.16(c). Suprimiendo el entorno  $\dot{D}_2$  (indicado en (d)), que es homeomorfo a un disco abierto, y haciendo las identificaciones necesarias obtenemos el espacio de la

Figura 11.16(g). Es inmediato que existe un homeomorfismo

$$h: S_1 - \overset{\circ}{D}_1 \cong S_2 - \overset{\circ}{D}_2.$$

Además, está claro que  $h$  induce un homeomorfismo

$$\partial(S_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cong \partial(S_2 - \overset{\circ}{D}_2).$$

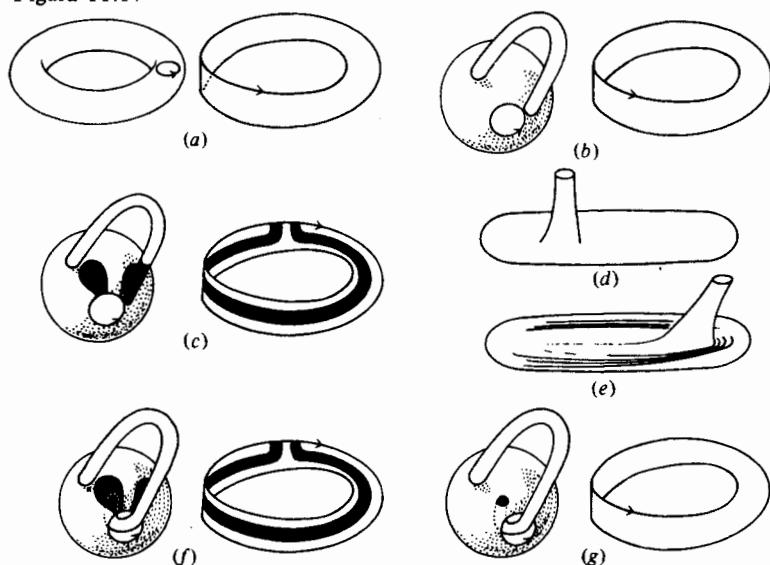
Este homeomorfismo sobre los bordes puede extenderse a un homeomorfismo entre  $D_1$  y  $D_2$ : Si  $h: \partial(D_1) \rightarrow \partial(D_2)$  es el homeomorfismo y  $h_1: D_1 \cong D^2$ ,  $h_2: D_2 \cong D^2$ , entonces escribiendo  $x \in D^2$  en coordenadas polares como  $x = (r, t)$ , donde  $0 \leq r \leq 1$  y  $t \in \partial(D^2) = S^1$ , definimos  $H: D_1 \rightarrow D_2$  por  $H(y) = h_2^{-1}(r, h_2 h_1^{-1}(t))$  donde  $h_1(y) = (r, t) \in D^2$ . Está claro que  $H$  es un homeomorfismo y que  $H|_{\partial D_1} = h$ . Así pues,

$$S_1 = (S_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cup D_1 \cong (S_2 - \overset{\circ}{D}_2) \cup D_2 = S_2$$

que completa la demostración del Lema 11.4.

Existe otra manera de visualizar el homeomorfismo entre  $S_1$  y  $S_2$ . Empezamos representando la suma conexa  $T \# \mathbb{R}P^2$  como un asa (un toro con un agujero) junto con una banda de Möbius que queremos pegar al asa. La Figura 11.17(a) ilustra la situación y es claramente homeomorfa a la Figura 11.17(b). Realizando el homeomorfismo expresado en (c)-(f) llegamos a la Figura 11.17(g).

Figura 11.17

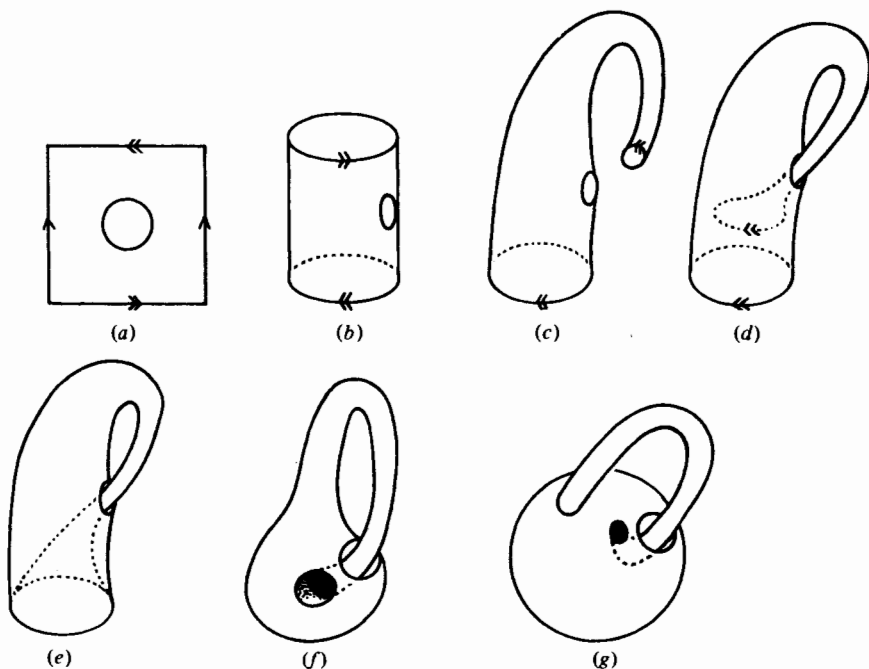




Consideremos una botella de Klein a la que le hemos suprimido un disco; la Figura 11.18 nos muestra cómo es este espacio.

Resulta ahora fácilmente que  $S_1 \cong K \# \mathbb{R}P^2$ , donde  $K$  denota la botella de Klein. Pero  $K \cong \mathbb{R}P^2 \# \mathbb{R}P^2$ , con lo que  $S_1 \cong S_2$ , como queríamos demostrar.

Figura 11.18



## 11.5 Ejercicios

(a) Supongamos que  $S_1, S_2$  y  $S_3$  son superficies. Demostrar que

$$\begin{aligned} S_1 \# S_2 &\cong S_2 \# S_1, \\ (S_1 \# S_2) \# S_3 &\cong S_1 \# (S_2 \# S_3), \\ S^2 \# S_1 &\cong S_1. \end{aligned}$$

¿El conjunto de clases de homeomorfía de superficies forma un grupo usando la suma conexa con la ley de composición? ¿Por qué no?

- (b) Sean  $M_1, M_2$   $n$ -variedades conexas disjuntas. Sean  $D_1$  y  $D_2$  subconjuntos de  $M_1, M_2$  homeomorfos a  $D^n$  vía  $h_1, h_2$ , respectivamente. Definimos la suma conexa  $M_1 \# M_2$  de  $M_1$  y  $M_2$  como el espacio cociente

$$\frac{(M_1 - \overset{\circ}{D}_1) \cup (M_2 - \overset{\circ}{D}_2)}{\sim}$$

donde  $\sim$  identifica  $x \in \partial(M_1 - \overset{\circ}{D}_1)$  con  $h_2^{-1}h_1(x)$ . Demostrar que  $M_1 \# M_2$  es una  $n$ -variedad.

- (c) Sea  $S = nT \# m\mathbb{R}P^2$  con  $m, n \geq 1$ . ¿A qué superficie estándar es homeomorfa  $S$ ?  
 (d) Sea  $S$  una superficie. Probar que  $S$  es homeomorfa a una de las siguientes superficies:

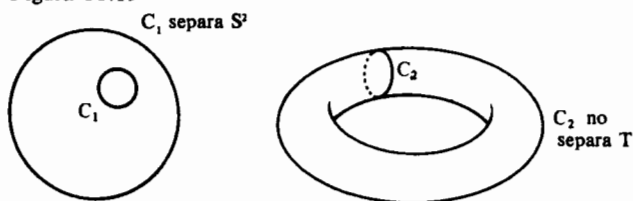
$$S^2 \# nT, \quad \mathbb{R}P^2 \# nT, \quad K \# nT$$

donde  $K$  es la botella de Klein y  $n \geq 0$ .

- (e) Supongamos que la superficie  $S$  es un  $G$ -espacio, donde  $G = \mathbb{Z}_{2n+1}$  es un grupo cíclico de orden impar. Probar que  $S/G$  es una superficie. Obsérvese que no necesitamos suponer que  $G$  actúe libremente sobre  $S$ .

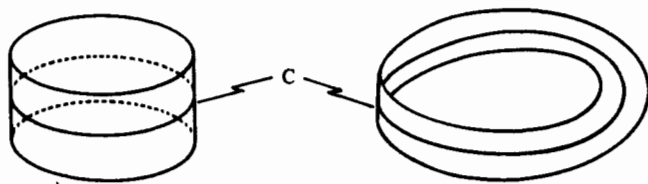
Damos ahora la línea de la demostración de la primera parte del teorema de clasificación de las superficies. Un subespacio de un espacio se dice que es una *curva cerrada simple* si es homeomorfo a la circunferencia  $S^1$ . Si  $C$  es una curva cerrada simple de una superficie  $S$  decimos que  $C$  *separa*  $S$  si  $S - C$  no es conexo; es decir, si cortando a lo largo de  $C$  desconectamos  $S$  (véase la Figura 11.19).

Figura 11.19



Sea  $S$  una superficie que contenga una curva cerrada simple  $C$  que no separe  $S$ . Es posible probar que existe un entorno de  $C$  que es o bien (i) un cilindro o (ii) una banda de Möbius (Figura 11.20). Intuitivamente está claro.

Figura 11.20



Quitemos ahora (el interior de) este cilindro o de esta banda de Möbius. En el primer caso peguemos dos discos a los dos agujeros creados y en el segundo caso peguemos un disco al único agujero. Obtenemos así una superficie  $M_1$ . Claramente  $M$  es igual a  $M_1$  con un cilindro pegado (correcta o incorrectamente) o con una banda de Möbius pegada. En otras palabras

$$M = M_1 \# T, M = M_1 \# K \text{ o } M = M_1 \# \mathbb{R}P^2.$$

Consideremos ahora en  $M_1$  una curva cerrada simple que no separe  $M_1$  (si existe) y prosigamos de la manera que acabamos de describir para obtener  $M_2$  con  $M_1 = M_2 \# T$ ,  $M_1 = M_2 \# K$  o  $M_1 = M_2 \# \mathbb{R}P^2$ . Prosiguiendo de esta forma, después de  $i$  pasos, obtenemos  $M_i$  con

$$M = M_i \# i_1 T \# i_2 K \# i_3 \mathbb{R}P^2$$

donde  $i_1 + i_2 + i_3 = i$ . Resulta que este proceso finaliza después de un número finito (pongamos  $k \geq 0$ ) de pasos; esto es, toda curva cerrada simple de  $M_k$  separa  $M_k$ . Finalmente, utilizamos un teorema que nos afirma que si  $M_k$  es una superficie en la que toda curva cerrada simple de  $M_k$  separa  $M_k$ , entonces  $M_k$  es homeomorfa a la esfera  $S^2$ .

Módulo las afirmaciones no demostradas, vemos pues que  $M$  es homeomorfa a  $S^2 \# \ell T \# mK \# n\mathbb{R}P^2$  para ciertos  $\ell, m, n \geq 0$  ( $\ell + m + n = k$ ). Una sencilla aplicación del Lema 11.4 nos permite ver que  $S^2 \# \ell T \# mK \# n\mathbb{R}P^2$  es homeomorfa a

$$\begin{array}{ll} S^2 \# \ell T & \text{si } m + n = 0 \\ S^2 \# (2\ell + 2m + n) \mathbb{R}P^2 & \text{si } m + n > 0. \end{array}$$

Para completar la demostración del teorema de clasificación de las superficies necesitamos probar que dos de las superficies de la lista del Teorema 11.3 no son nunca homeomorfas. Lo haremos en el Capítulo 26.

## 11.6 Ejercicios

- Demostrar que un toro  $T$  posee dos curvas cerradas simples distintas (pero no disjuntas)  $C_1, C_2$  tales que  $T - (C_1 \cup C_2)$  es conexo.
- Demostrar que un toro  $T$  no admite tres curvas cerradas simples distintas  $C_1, C_2, C_3$  tales que  $T - (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$  sea conexo.
- Generalizar (a) y (b) a otras superficies.

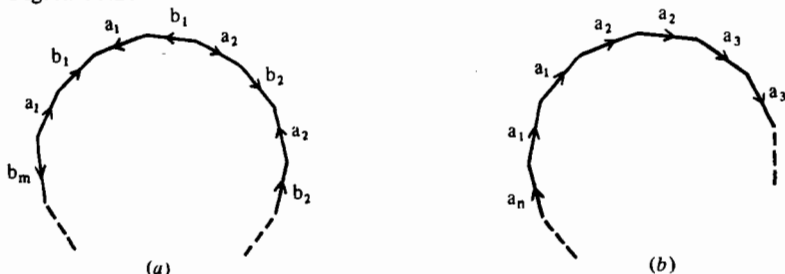
Acabamos este capítulo con un resultado que ya habíamos mencionado anteriormente: que toda superficie puede expresarse como un espacio cociente de alguna región poligonal de  $\mathbb{R}^2$ .

# 11.7 Teorema

Toda superficie orientable  $M$  de género  $m \geq 1$  es el espacio cociente de una región poligonal de  $4m$  lados con las identificaciones indicadas en la Figura 11.21(a).

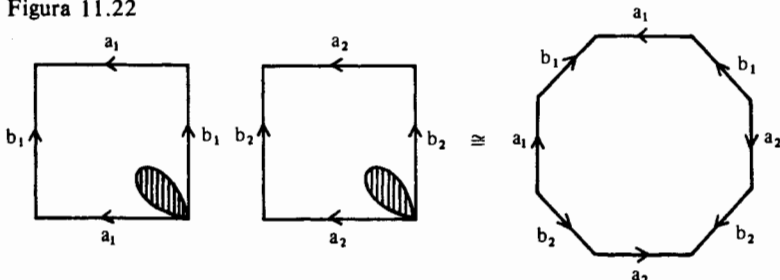
Toda superficie no orientable  $M$  de género  $n \geq 1$  es el espacio cociente de una región poligonal de  $2n$  lados con las identificaciones indicadas en la Figura 11.21(b).

Figura 11.21



Para demostrar este resultado necesitamos únicamente ver que  $mT$  y  $nRP^2$  toman la forma indicada. Ilustramos meramente los casos  $m \leq 2$ ,  $n \leq 3$ .  $T \# T$  toma la forma que indica la Figura 11.22. Resulta entonces claro cómo proceder para obtener el resultado en

Figura 11.22



el caso orientable. Para el caso no orientable tenemos la Figura 11.23 para  $RP^2 \# RP^2$  y la Figura 11.24 para  $RP^2 \# RP^2 \# RP^2$ . De nuevo resulta claro cómo proceder.

Figura 11.23

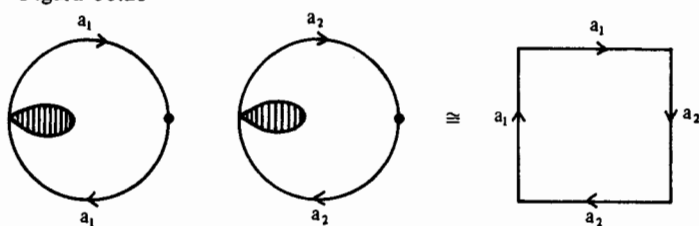
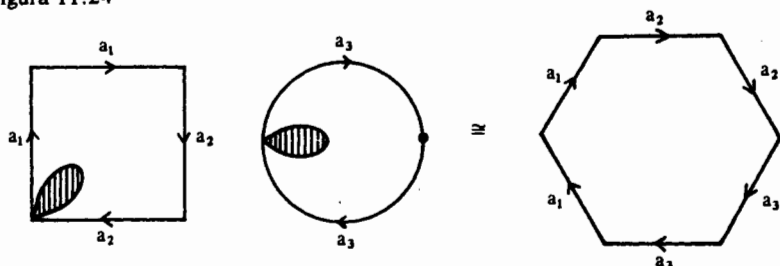


Figura 11.24



## 11.8 Ejercicios

- Una  $n$ -variedad con borde  $M$  es un espacio de Hausdorff en el que cada punto posee un entorno abierto homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  o al semiespacio superior de  $\mathbb{R}^n$ , esto es  $\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$ . El conjunto de puntos de  $M$  que poseen entornos homeomorfos al semiespacio superior pero que no poseen entornos homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  se llama el *borde* de  $M$ . Demostrar que el borde de una  $n$ -variedad con borde es una  $(n-1)$ -variedad.
- Una *superficie con borde* es una 2-variedad con borde conexa compacta. Demostrar que el borde de una superficie con borde es unión disjunta de un número finito de circunferencias. Deducir que a partir de una superficie con borde podemos obtener una superficie pegando un número finito de discos.
- Se dice que una superficie con borde es *orientable* si y sólo si no contiene ninguna banda de Möbius. Demostrar que una superficie con borde es orientable si y sólo si la superficie asociada (véase (b) anterior) es orientable.

## Capítulo 12

# Caminos y espacios arco-conexos

En el Capítulo 9 estudiamos las propiedades de conexión; en este capítulo consideraremos un concepto de conexión en cierta manera análogo pero diferente: la conexión por arcos. Antes de definirlo necesitamos el concepto de «camino». Un *camino* en  $X$  es una aplicación continua  $f: [0,1] \rightarrow X$ . El punto  $f(0)$  se llama el *origen* del camino y el punto  $f(1)$  el *final*. Decimos que  $f$  une  $f(0)$  y  $f(1)$  y que  $f$  es un camino de  $f(0)$  a  $f(1)$ . (Algunos autores usan el término *arco* en lugar de camino.)

Obsérvese que el camino es la aplicación  $f$  y no la imagen  $f([0,1])$ ; la imagen se llama una *curva* de  $X$ .

Normalmente pensaremos el parámetro  $t \in [0,1]$  como el tiempo, con lo que  $f(t)$  es nuestra posición en el instante  $t$ .

El ejemplo más sencillo de camino es el camino constante  $\varepsilon_x: [0,1] \rightarrow X$ , definido por  $\varepsilon_x(t) = x$  para todo  $t \in [0,1]$ , donde  $x$  es un punto de  $X$ . En este camino pasamos todo nuestro tiempo en el mismo punto  $x \in X$ .

Existen dos métodos sencillos, pero importantes, para obtener nuevos caminos a partir de unos obtenidos anteriormente. Los daremos en el próximo lema. El primer método asocia a cada camino  $f$  un camino  $\bar{f}$  que esencialmente recorre  $f$  en sentido contrario. El segundo, une dos caminos  $f, g$  (cuando sea posible) para dar otro camino  $f * g$ .

### 12.1 Lema

- (a) Si  $f$  es un camino de  $X$  y  $\bar{f}$  está definido por  $\bar{f}(t) = f(1-t)$ , entonces  $\bar{f}$  es también un camino de  $X$ .
- (b) Si  $f$  y  $g$  son dos caminos de  $X$  tales que el punto final de  $f$  coincide con el origen de  $g$ , la función  $f * g: [0,1] \rightarrow X$  definida por

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

es un camino de  $X$ .

**Demostración.** La parte (a) es obvia, mientras que la parte (b) se deduce del siguiente resultado.

## 12.2 Lema

Sean  $W, X$  espacios topológicos y supongamos que  $W = A \cup B$ , donde  $A, B$  son ambos subconjuntos cerrados de  $W$ . Si  $f: A \rightarrow X$  y  $g: B \rightarrow X$  son aplicaciones continuas tales que  $f(w) = g(w)$  para todo  $w \in A \cap B$ , entonces la aplicación  $h: W \rightarrow X$  definida por

$$h(w) = \begin{cases} f(w) & \text{si } w \in A, \\ g(w) & \text{si } w \in B \end{cases}$$

es continua.

**Demostración.** Obsérvese que  $h$  está bien definida. Supongamos que  $C$  es un subconjunto cerrado de  $X$ , entonces

$$\begin{aligned} h^{-1}(C) &= h^{-1}(C) \cap (A \cup B) \\ &= (h^{-1}(C) \cap A) \cup (h^{-1}(C) \cap B) \\ &= f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C). \end{aligned}$$

Puesto que  $f$  es continua,  $f^{-1}(C)$  es cerrado en  $A$  y, por tanto, en  $W$ , ya que  $A$  es cerrado en  $W$ . De manera análoga  $g^{-1}(C)$  es cerrado en  $W$ . Así pues,  $h^{-1}(C)$  es cerrado en  $W$  y  $h$  es continua.

## 12.3 Definición

Se dice que un espacio  $X$  es *arco-conexo* si dados dos puntos cualesquiera  $x_0, x_1$  de  $X$  existe siempre un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ .

Obsérvese que en virtud del Lema 12.1 es suficiente considerar un  $x_0 \in X$  fijo y exigir que para todo  $x \in X$  exista un camino de  $x_0$  a  $x$ .

Por ejemplo,  $\mathbb{R}^n$  con la topología usual es arco-conexo. La razón es que dados dos puntos  $a, b \in \mathbb{R}^n$ , la aplicación  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $f(t) = tb + (1-t)a$  es un camino de  $a$  a  $b$ . Más generalmente, todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es arco-conexo. Un subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  se dice que es *convexo* si para todo  $a, b \in E$  el conjunto  $\{tb + (1-t)a; 0 \leq t \leq 1\}$  está contenido en  $E$ ; es decir,  $E$  es convexo si con cada dos puntos contiene el segmento de línea recta que los une. Véase la Figura 12.1 para ejemplos de subconjuntos convexos y no convexos de  $\mathbb{R}^2$ .

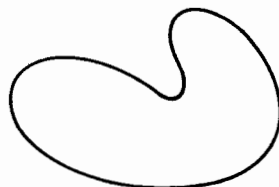
En particular, todo intervalo de  $\mathbb{R}^1$  es arco-conexo.

Los resultados 12.4-12.7, que damos a continuación, son análogos a los resultados 9.4-9.7

Figura 12.1



Un subconjunto convexo



Un subconjunto no convexo

## 12.4 Teorema

La imagen de un espacio arco-conexo por una aplicación continua es arco-conexa.

*Demostración.* Supongamos que  $X$  es arco-conexo y que  $g: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua y exhaustiva. Si  $a, b$  son dos puntos de  $Y$ , entonces existen dos puntos  $a', b'$  de  $X$  tales que  $g(a') = a$  y  $g(b') = b$ . Puesto que  $X$  es arco-conexo existe un camino  $f$  de  $a'$  a  $b'$ . Pero entonces  $gf$  es un camino de  $a$  a  $b$ , lo que demuestra que  $Y$  es arco-conexo.

## 12.5 Corolario

Si  $X$  e  $Y$  son espacios topológicos homeomorfos,  $X$  es arco-conexo si y sólo si  $Y$  lo es.

Del teorema se deduce que  $S^1$  es arco-conexo. Podemos entonces demostrar que  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ,  $S^n$  y  $\mathbb{R}^n$  son arco-conexos para  $n \geq 1$  (para  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ , ya que todo par de puntos de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  está en alguna circunferencia que no pasa por  $\{0\}$ ; para  $S^n$  y  $\mathbb{R}^n$ , ya que son imágenes continuas de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ ).

## 12.6 Teorema

Supongamos que  $\{Y_j, j \in J\}$  es una colección de subconjuntos arco-conexos de un espacio  $X$ . Si  $\bigcap_{j \in J} Y_j \neq \emptyset$ , entonces  $Y = \bigcup_{j \in J} Y_j$  es arco-conexo.

*Demostración.* Supongamos que  $a, b \in Y$ ; entonces,  $a \in Y_k$  y  $b \in Y_\ell$  para ciertos  $k, \ell \in J$ . Sea  $c$  un punto arbitrario de  $\bigcap_{j \in J} Y_j$ . Puesto que  $Y_k$  es arco-conexo y  $a, c \in Y_k$  existe

un camino  $f$  de  $a$  a  $c$ . Análogamente existe un camino  $g$  de  $c$  a  $b$ . Entonces, el camino  $h = f * g$  dado por

$$h(t) = \begin{cases} f(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$



es un camino de  $a$  a  $b$ .

El resultado anterior nos proporciona una forma alternativa de demostrar que  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (y, por tanto,  $S^n$  y  $\mathbb{R}P^n$ ) es arco-conexo para  $n \geq 1$ .

## 12.7 Teorema

Sean  $X$  e  $Y$  espacios topológicos.  $X \times Y$  es arco-conexo si y sólo si  $X$  e  $Y$  lo son.

Dejamos para el lector la demostración del teorema anterior, que es idéntica a la del Teorema 9.7 (pero reemplazando la palabra conexo por arco-conexo).

Los resultados anteriores no debieran hacer pensar al lector que no existe ninguna diferencia entre conexión y conexión por arcos. El teorema siguiente nos muestra que sí la hay.

## 12.8 Teorema

Todo espacio arco-conexo es conexo. No todo espacio conexo es arco-conexo.

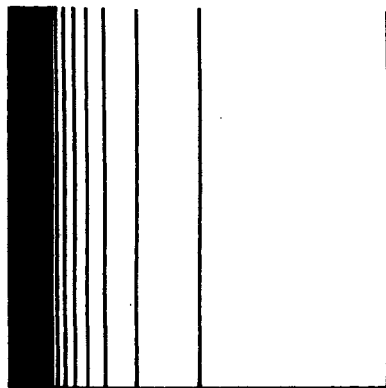
*Demostración.* Supongamos que  $X$  es un espacio arco-conexo. Vamos a probar que  $X$  es conexo. Para ello sea  $X = U \cup V$  con  $U, V$  abiertos no vacíos. Puesto que  $X$  es arco-conexo y  $U, V$  son no vacíos, existe un camino  $f: [0, 1] \rightarrow X$  con  $f(0) \in U$ ,  $f(1) \in V$ . Puesto que  $[0, 1]$  es conexo, también lo es  $f([0, 1])$  y, por tanto,  $U \cap f([0, 1])$ ,  $V \cap f([0, 1])$  no pueden ser disjuntos. Así pues,  $U$  y  $V$  no pueden ser disjuntos, de donde  $X$  es conexo.

Para demostrar que no todos los espacios conexos son arco-conexos daremos un ejemplo conocido con el nombre de *el peine y la pulga* (véase la Figura 12.2). Consideremos el subconjunto  $X \subseteq \mathbb{C}$  dado por  $X = A \cup B$  con

$$A = \{i\} \text{ (la pulga),}$$

$$B = [0, 1] \cup \{(1/n) + yi; n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\} \text{ (el peine).}$$

Figura 12.2. El peine y la pulga.



Afirmamos que  $X$  es conexo pero no arco-conexo. Para probar que  $X$  es conexo observemos primero que  $B$  es arco-conexo (aplicando el Teorema 12.6 a  $B_n = [0, 1] \cup \{(1/n) + yi; 0 \leq y \leq 1\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y después a  $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ ). De ahí,  $B$  es conexo. Supongamos que  $U$  es un

subconjunto abierto y cerrado de  $X$ . Podemos suponer que  $A \subseteq U$  (de lo contrario el complementario de  $U$  sería un subconjunto abierto y cerrado de  $X$  que contendría a  $A$ ). Puesto que  $U$  es abierto e  $i \in U$ , existe un  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\{x; |i-x| < \varepsilon\} \cap X \subseteq U.$$

Sea  $n$  un entero tal que  $(1/n) + i \in U$ ; en particular,  $U \cap B \neq \emptyset$ . Pero  $B$  es conexo y  $U \cap B$  es un subconjunto abierto, cerrado y no vacío de  $B$ ; así pues,  $U \cap B = B$ , es decir  $B \subseteq U$ . Pero, puesto que  $X = A \cup B$  y  $A \subseteq U$ , resulta  $U = X$ , con lo que  $X$  es conexo. (Esencialmente hemos probado que  $B \subseteq X \subseteq \bar{B}$ , con lo que el hecho de que  $X$  sea conexo resulta del Ejercicio 9.8 (f).)

Para demostrar que  $X$  no es arco-conexo, vamos a ver que el único camino de  $X$  con origen en  $i \in X$  es el camino constante. Sea  $f$  un camino de  $X$  que empiece en  $i \in X$ . Puesto que  $i$  es cerrado en  $X$ ,  $f^{-1}(i)$  es cerrado en  $[0, 1]$ ; además  $f^{-1}(i) \neq \emptyset$  ya que  $0 \in f^{-1}(i)$ . Sea  $U$  el subconjunto abierto de  $X$  dado por

$$U = X \cap \{z \in \mathbb{C}; |z-i| < \frac{1}{2}\}.$$

Si  $t_0 \in f^{-1}(i)$ , la continuidad de  $f$  implica la existencia de un  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(t) \in U$  siempre que  $|t-t_0| < \varepsilon$ . Vamos a ver que  $f(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] = i$ . En efecto, supongamos que  $|t_1 - t_0| < \varepsilon$  y  $f(t_1) \in B$ . Puesto que  $U \cap B$  es unión de intervalos disjuntos, el intervalo que contiene  $f(t_1)$  es a la vez abierto y cerrado en  $U$  (abierto ya que  $U$  es abierto, y cerrado ya que el intervalo es de la forma  $\{(1/n) + yi; 0 \leq y \leq 1\} \cap U$  para algún  $n \in \mathbb{N}$ ). Pero esto contradice el hecho de que  $f(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]$  sea conexo. Así pues,

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subseteq f^{-1}(i).$$

Hemos pues demostrado que si  $t_0 \in f^{-1}(i)$  entonces

$$(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subseteq f^{-1}(i),$$

lo que significa que  $f^{-1}(i)$  es abierto. Puesto que  $f^{-1}(i)$  es también cerrado y  $[0, 1]$  es conexo, resulta que  $f^{-1}(i) = [0, 1]$ , o, en otras palabras,  $f([0, 1]) = i$ . No existe por tanto ningún camino entre  $i \in X$  y cualquier otro punto de  $B \subseteq X$ , por lo que  $X$  no es un espacio arco-conexo, como queríamos demostrar.

Existen muchos otros ejemplos (parecidos) de espacios conexos que no son arco-conexos; véanse los Ejercicios 12.10.

El último resultado que demostramos en este capítulo hace referencia a los subconjuntos abiertos conexos de  $\mathbb{R}^n$ .

## 12.9 Teorema

Todo subconjunto conexo abierto no vacío  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  es arco-conexo.

*Demostración.* Sean  $p \in E$  y  $F$  el subconjunto de  $E$  formado por los puntos de  $E$  que pueden unirse a  $p$  por un camino de  $E$ . Afirmamos que  $F$  es abierto. Para probarlo sea  $q \in F \subseteq E$ . Puesto que  $E$  es abierto, existe un  $n$ -disco abierto  $D \subseteq E$  con centro  $q$ , esto es

$$q \in D = \{x; \|q - x\| < \epsilon\} \subseteq E$$

para un  $\epsilon > 0$  conveniente. El  $n$ -disco abierto  $D$  es arco-conexo (ya que es homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ) y, por tanto, cualquier punto de  $D$  puede unirse a  $q$  por un camino de  $D$ . Así pues, todo punto de  $D$  puede unirse a  $p$  por un camino de  $E$ , de donde  $q \in D \subseteq F$ .  $F$  es pues abierto.

Afirmamos también que  $F$  es cerrado. Para verlo consideremos  $G = E - F$ ;  $G$  consta pues de aquellos puntos de  $E$  que no pueden unirse a  $p$  por un camino de  $E$ . Por un razonamiento similar al anterior podemos demostrar que  $G$  es abierto y, por tanto, que  $F$  es cerrado. El subconjunto  $F$  es no vacío, abierto y cerrado; puesto que  $E$  es conexo  $F = E$  y, por tanto,  $E$  es arco-conexo.

## 12.10 Ejercicios

- (a) Probar que todo espacio con la topología burda es arco-conexo.  
 (b) ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{C}$  son arco-conexos?

$$\{z; |z| \neq 1\}, \{z; |z| \geq 1\}, \{z; z^2 \text{ es real}\}.$$

- (c) Probar el resultado del Lema 12.2 pero con la hipótesis de que  $A$  y  $B$  sean ambos subconjuntos abiertos de  $W$ .  
 (d) Sea  $X = A \cup B$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y); x = 0, -1 \leq y \leq 1\}, \\ B &= \{(x, y); 0 < x \leq 1, y = \cos(\pi/x)\}. \end{aligned}$$

Demostrar que  $X$  es conexo pero no arco-conexo.

- (e) Sea  $X = A \cup B$  el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y); x = 0, -1 \leq y \leq 1\} \\ B &= \{(x, y); 0 < x \leq 1, y = \sin(1/x)\} \end{aligned}$$

Demostrar que  $X$  es conexo pero no arco-conexo.

- (f) Considerar los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, y = x/n \text{ para } n \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{(x, y); \frac{1}{2} \leq x \leq 1, y = 0\} \end{aligned}$$

Probar que  $A \cup B$  es conexo pero no arco-conexo.

- (g) Supongamos que  $A$  es un subconjunto arco-conexo del espacio  $X$  y que  $\{A_j; j \in J\}$  es una colección de subconjuntos arco-conexos de  $X$ , cada uno de los cuales intersecta a  $A$ . Demostrar que  $A \cup \bigcup_{j \in J} A_j$  es arco-conexo.

- (h) Sea  $S^n = S_+^n \cap S_-^n$  donde

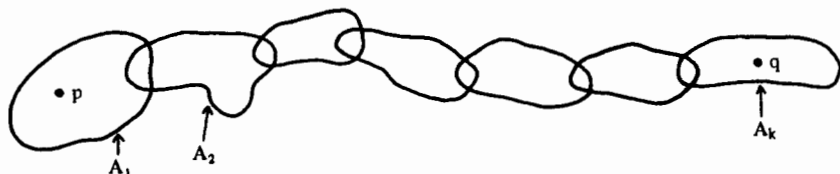
$$S_+^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1, x_{n+1} \geq 0\},$$

$$S_-^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1, x_{n+1} \leq 0\}.$$

Usando el Ejercicio 8.14 (h) demostrar que  $S^n$  es arco-conexo para todo  $n > 0$ .

- (i) Sea  $\sim$  la relación definida entre los puntos de un espacio  $X$  mediante  $x \sim y$  si y sólo si existe un camino que une  $x$  e  $y$ . Probar que  $\sim$  es una relación de equivalencia. Probar también que  $X$  es arco-conexo si y sólo si el espacio cociente  $X/\sim$  se reduce a un único punto.
- (j) Un entorno abierto de un punto  $x \in X$  es un conjunto abierto  $U$  tal que  $x \in U$ . Se dice que un espacio es *localmente arco-conexo* si para todo  $x \in X$  todo entorno abierto de  $x$  contiene un entorno abierto arco-conexo de  $x$ . Probar que si  $X$  es localmente arco-conexo y  $U \subseteq X$  es abierto en  $X$  entonces  $U$  es localmente arco-conexo. Probar que  $\mathbb{R}^n$  es localmente arco-conexo (y por tanto todo subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  es localmente arco-conexo). Probar que si  $X$  es conexo y localmente arco-conexo, entonces es arco-conexo (esto da, por tanto, una nueva demostración del Teorema 12.9).
- (k) Sean  $p, q \in X$ . Se dice que los subconjuntos  $A_1, A_2, \dots, A_k$  de  $X$  forman una *cadena simple* que une a  $p$  y  $q$  si  $p \in A_1$ ,  $q \in A_k$ ,  $A_i \cap A_j = \emptyset$  para  $|i-j| > 1$  y  $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$  para  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ; véase la Figura 12.3.

Figura 12.3



Probar que si  $X$  es conexo y  $\{U_j; j \in J\}$  es un recubrimiento abierto de  $X$  entonces todo par de puntos de  $X$  puede ser unido por una cadena simple formada por miembros de  $\{U_j; j \in J\}$ . (Indicación: fijado  $p \in X$ ) considerar el conjunto de puntos de  $X$  que pueden unirse a  $p$  por una cadena simple formada por miembros de  $\{U_j; j \in J\}$ ).

- (l) Utilizar el Ejercicio (k) anterior para dar otra demostración del Teorema 12.9.
- (m) Demostrar que toda  $n$ -variedad conexa es arco-conexa.
- (n) Demostrar que toda  $n$ -variedad es localmente arco-conexa.

(o) Probar que el espacio  $Y \subseteq \mathbb{R}^2$  dado por  $Y = A \cup B \cup C$  donde

$$A = \{ (x, y); x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \},$$

$$B = \{ (x, y); -1 \leq x \leq 0, y = 0 \},$$

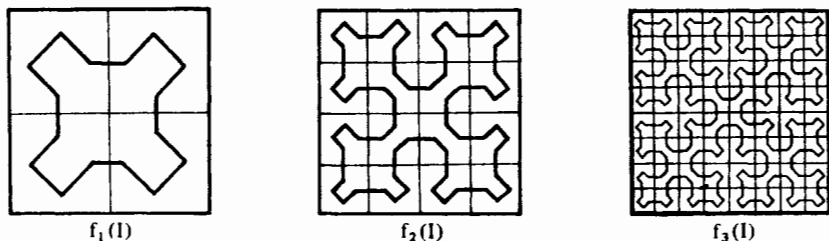
$$C = \{ (x, y); 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin(\pi/x) \}.$$

es arco-conexo pero no localmente arco-conexo.

(p) Sea  $Z = Y \cup D \in \mathbb{R}^2$ , donde  $Y$  es como en el Ejercicio (o) y  $D$  es la circunferencia  $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$ . Probar que  $Z$  es localmente arco-conexo.

Acabamos este capítulo con un camino bastante especial. Es un camino  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que es exhaustivo. Ejemplos como éste se suelen llamar «curvas que llenan el espacio». Fueron inventados por G. Peano alrededor de 1890. El camino  $f$  se define como límite de caminos  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . La Figura 12.4 representa los tres primeros. El lector no debería tener dificultad en visualizar el caso  $n$ -ésimo. Después de  $n$  pasos cualquier punto del cuadrado  $\mathbb{R}^2$  está a una distancia  $(1/2)^n$  de un punto  $f_n(I)$ . En el límite obtenemos una aplicación continua exhaustiva  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Obsérvese que en cualquier nivel finito la aplicación continua  $f_n: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  deja de ser inyectiva únicamente en  $\{0\}$  y en  $\{1\}$ . De hecho, los espacios  $I$  y  $f_n(I)$  son homeomorfos. Ciertamente esto no se cumple en el límite.

Figura 12.4



## Capítulo 12A

# Apéndice. El teorema de la curva de Jordan

### 12A.1 Definición

Una *curva cerrada simple*  $C$  es una imagen homeomórfica de la circunferencia. Una *componente* (conexa) es un subespacio conexo maximal.

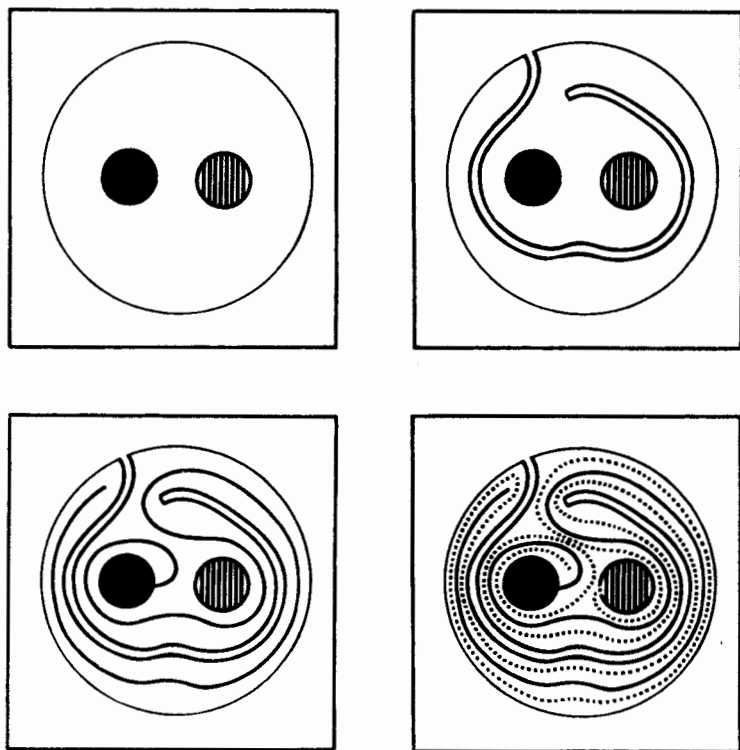
De los dos resultados siguientes uno de ellos es cierto y el otro es falso.

(A) Sea  $C$  una curva cerrada simple en el plano euclídeo. Entonces  $\mathbb{R}^2 - C$  no es conexo y consta exactamente de dos componentes que tienen a  $C$  como frontera común. Una y sólo una de estas componentes es acotada.

(B) Sea  $D$  un subconjunto del plano euclídeo. Si  $D$  es la frontera de cada una de las componentes de su complementario  $\mathbb{R}^2 - D$  y si  $\mathbb{R}^2 - D$  tiene una componente acotada, entonces  $D$  es una curva cerrada simple.

Construimos ahora un ejemplo que demuestra que las dos afirmaciones anteriores no pueden ser simultáneamente ciertas. El ejemplo se conoce con el nombre de los *Lagos de Wada*. Fue descrito por primera vez por K. Yoneyama en 1917. Consideremos una región de la forma de un anillo doble; véase la Figura 12A.1. Imaginemos que se trata de una isla rodeada de mar en la que hay dos lagos. Por conveniencia consideraremos que el agua de los dos lagos tiene color diferente. Construyendo canales desde el mar y desde los lagos al interior de la isla definimos tres conjuntos abiertos conexos. En el instante  $t=0$  construimos un canal desde el mar que lleve agua salada a una distancia menor o igual que una unidad de cualquier punto de tierra. En el instante  $t=1/2$  excavamos un canal desde el lago 1 que lleve agua de este lago a una distancia menor o igual que  $1/2$  de cualquier punto de tierra. En el instante  $t=3/4$  construimos un canal desde el lago 2 que lleve agua de este lago a una distancia menor o igual que  $1/4$  de cualquier punto de tierra. El proceso continúa construyendo canales en el instante  $1 - (1/2)^n$  que lleven el agua alternativamente de uno y otro lago a una distancia menor o igual que  $(1/2)^n$  de cualquier punto de tierra. Desde luego,

Figura 12A.1. Los Lagos de Wada.



los canales no deben intersectarse. Los dos lagos con sus sistemas de canales y el mar con su canal forman tres conjuntos abiertos, cada uno de ellos conexo, que tienen por frontera común lo que resta de «tierra seca» D.

Ahora bien, si (B) es cierta, la región D de los Lagos de Wada es una curva cerrada simple y, por tanto, (A) es falsa. Por otra parte, si (A) es cierta, (B) debe ser falsa. Esto demuestra nuestra afirmación inicial de que como máximo una de las dos proposiciones (A), (B) es cierta.

De hecho, la proposición (A) es cierta, mientras que (B) es falsa. El resultado (A) se llama el *teorema de la curva de Jordan*. Recibe este nombre de C. Jordan, que observó a inicios de la década de 1890 que, a pesar de que (A) parece intuitivamente evidente, se necesita una demostración rigurosa. La primera demostración fue dada a principios de este siglo por O. Veblen. La demostración que daremos nosotros se basa en una demostración «elemental» recientemente descubierta por Helge Tverberg, a quien estamos agradecidos.

Por simplicidad, a una curva cerrada simple del plano la llamaremos una *curva de Jordan*. Así, una curva de Jordan  $C$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^2$  homeomorfo a  $S^1 = \{ z$

$\in \mathbb{C}; |z|=1$ . Diremos que una curva de Jordan  $C$  está dada por  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  si  $C = f(S^1)$ ; desde luego,  $f$  no es única. Diremos que una curva de Jordan es un *polígono de Jordan* si consta de un número finito de segmentos rectilíneos.

Es conveniente considerar en adelante el plano  $\mathbb{R}^2$  como el plano complejo y la circunferencia  $S^1$  como un subconjunto del plano complejo. De esta forma, denotaremos la distancia entre dos puntos  $x, y$  de  $\mathbb{R}^2$  o de  $S^1$  por  $|x-y|$ . Si  $A$  y  $B$  son dos subconjuntos compactos disjuntos, definimos  $d(A, B)$  por

$$d(A, B) = \inf \{ |a - b| ; a \in A, b \in B \}.$$

En particular si  $A$  consta de un solo punto, pongamos  $\{x\}$ , tenemos

$$d(x, B) = \inf \{ |x - b| ; b \in B \}.$$

Nuestro primer resultado consiste en demostrar que para un polígono de Jordan vale el teorema de la curva de Jordan.

## 12A.2 Teorema

El teorema de la curva de Jordan vale para todo polígono de Jordan; es decir, si  $C$  es un polígono de Jordan,  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene dos componentes cuya frontera común es  $C$  y una y sólo una de estas componentes es acotada.

**Demostración.** Demostremos primero que si  $C$  es un polígono de Jordan entonces  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene por lo menos dos componentes. Sea  $p \in \mathbb{R}^2 - C$  y consideremos una semirrecta arbitraria  $r$  que empiece en  $p$ ; la llamaremos un *rayo* en  $p$ . Denotemos  $P(r, p)$  el número de veces que  $r$  intersecta a  $C$  con el convenio de que si  $r$  pasa por un vértice  $V$  o coincide con todo un segmento  $L$  de  $C$ , entonces contamos esta intersección como doble si las dos aristas adyacentes de  $V$  o de  $L$  están en el mismo lado de  $V$  o de  $L$  respectivamente; en caso contrario contamos la intersección como simple. Por ejemplo, en la Figura 12A.2 tenemos  $P(r_1, p) = 1$ ,  $P(r_2, p) = 1$ ,  $P(r_3, p) = 1$ ,  $P(r_4, p) = 5$  y  $P(r_5, p) = 3$ ,  $P(r_6, p) = 3$ .

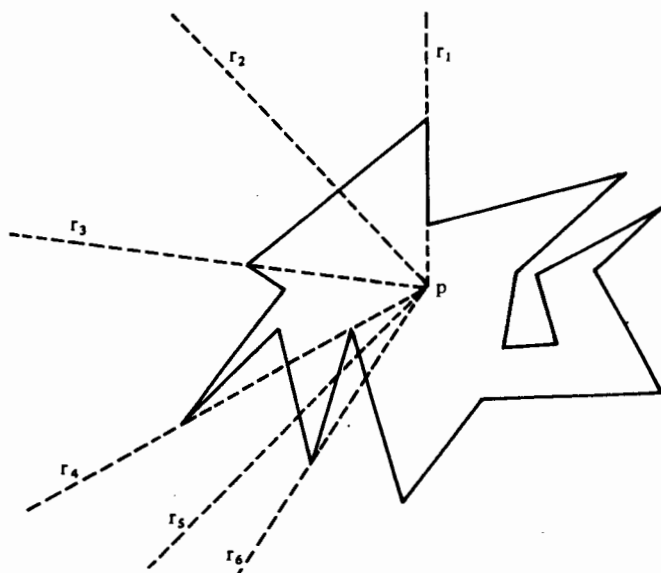
Al girar el rayo  $r$  alrededor de  $p$ , el valor de  $P(r, p)$  varía en general, pero no su paridad. Decimos entonces que  $p$  es un punto *par* o *impar* según que  $P(r, p)$  sea par o impar para un rayo arbitrario  $r$  en  $p$ . Hablaremos también de la *paridad* de  $p$  siendo indiferente que sea par o impar.

Así pues,  $\mathbb{R}^2 - C$  se descompone en puntos pares e impares,  $X_e$  y  $X_o$  respectivamente. Claramente  $\mathbb{R}^2 - C = X_e \cup X_o$  y  $X_e \cap X_o = \emptyset$ . Demostraremos que  $X_e$  y  $X_o$  son ambos subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Sea  $p \in \mathbb{R}^2 - C$  tal que  $d(p, C) = \varepsilon$ , lo que significa que  $B_\varepsilon(p) \subseteq \mathbb{R}^2 - C$ . Para cualquier punto de  $B_\varepsilon(p)$ , su paridad es la misma que la de  $p$ ; si  $x \in B_\varepsilon(p)$ , basta considerar el rayo en  $p$  que pasa por  $x$ . Así pues,  $X_e$  y  $X_o$  son abiertos por lo que  $\mathbb{R}^2 - C$  no es conexo y tiene por lo menos dos componentes.

$X_e$  y  $X_o$  son ambos arco-conexos. Para verlo, elijamos un segmento rectilíneo en  $C$  y sean  $a, b$  dos puntos de  $\mathbb{R}^2 - C$  próximos a  $C$  pero uno a cada lado de este segmento, por lo que  $a \in X_e$  y  $b \in X_o$ . Ahora bien, si  $p$  es un punto arbitrario de  $\mathbb{R}^2 - C$ , existe eviden-



Figura 12A.2



temente un camino de  $\mathbb{R}^2 - C$ , que va de  $p$  a un punto próximo a  $C$ . Continuando este camino, permaneciendo siempre en  $\mathbb{R}^2 - C$  y próximos a  $C$ , alcanzamos a  $a$  o  $b$ . Esto nos demuestra que  $X_a$  y  $X_b$  son arco-conexos y, por tanto, conexos, lo que completa la demostración del teorema.

Para proseguir, necesitamos el concepto de «continuidad uniforme» y el hecho de que si  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una aplicación continua entonces es uniformemente continua.

### 12A.3 Definición

Sean  $M_1, M_2$  espacios métricos con métricas  $d_1, d_2$  respectivamente. Una aplicación  $f: M_1 \rightarrow M_2$  es *uniformemente continua* si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d_2(f(x), f(y)) < \epsilon$  para todo par  $x, y$  de  $M_1$  tales que  $d_1(x, y) < \delta$ .

Obsérvese que esta condición es más fuerte que la continuidad ordinaria.

### 12A.4 Teorema

Sean  $M_1, M_2$  espacios métricos con métricas  $d_1, d_2$  respectivamente. Si  $f: M_1 \rightarrow M_2$  es una aplicación continua y  $M_1$  es compacto, entonces  $f$  es uniformemente continua.

**Demostración.** Sea  $\varepsilon > 0$ . Para todo  $x \in M_1$  existe un  $\delta(x) > 0$  tal que  $d_2(f(x), f(y)) < \frac{1}{2} \varepsilon$  para todo  $y \in M_1$  con  $d_1(x, y) < 2\delta(x)$ . El conjunto

$$\{ B_{\delta(x)}(x) ; x \in M_1 \}$$

forma un recubrimiento abierto de  $M_1$ . Puesto que  $M_1$  es compacto, existe un subrecubrimiento finito

$$\{ B_{\delta(x_1)}(x_1), B_{\delta(x_2)}(x_2), \dots, B_{\delta(x_n)}(x_n) \}.$$

Sea  $\delta = \min \{ \delta(x_1), \delta(x_2), \dots, \delta(x_n) \}$ . Si  $x, y \in M_1$  y  $d_1(x, y) < \delta$ , entonces para algún  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ),  $x \in B_{\delta(x_i)}(x_i)$ ,  $y$ , por tanto,

$$d_2(f(x), f(x_i)) < \frac{1}{2} \varepsilon$$

ya que  $\delta \leq \delta(x_i)$ . Además

$$d_1(y, x_i) \leq d_1(y, x) + d_1(x, x_i) < \delta + \delta(x_i) \leq 2\delta(x_i)$$

con lo que

$$d_2(f(y), f(x_i)) \leq \frac{1}{2} \varepsilon.$$

Así pues

$$d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(x_i)) + d_2(f(x_i), f(y)) < \varepsilon$$

lo que demuestra el resultado.

## 12A.5 Corolario

Toda aplicación continua  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es uniformemente continua.

La demostración es inmediata.

## 12A.6 Corolario

Sean  $M_1, M_2$  espacios métricos con métricas  $d_1, d_2$  respectivamente. Si  $M_1$  es compacto y  $f: M_1 \rightarrow M_2$  es una aplicación continua tal que  $f: M_1 \rightarrow f(M_1)$  es homeomorfismo, entonces para todo  $\varepsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d_1(x, y) < \delta$  siempre que  $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Demostración.**  $f(M_1)$  es compacto y  $f^{-1}: f(M_1) \rightarrow M_1$  es una aplicación continua entre espacios métricos.

## 12A.7 Teorema

Sea  $C$  una curva de Jordan definida por  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Para todo  $\varepsilon > 0$  existe un polígono de Jordan  $C'$  dado por  $f': S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que para todo  $x \in S^1$ ,  $|f(x) - f'(x)| < \varepsilon$ .

*Demostración.* Puesto que  $f$  es uniformemente continua en  $S^1$  existe un  $\varepsilon_1 > 0$  tal que

$$|x-y| < \varepsilon_1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Puesto que  $f: S^1 \rightarrow C$  es un homeomorfismo resulta, en virtud del Corolario 12A.6, que existe un  $\varepsilon_2 > 0$  tal que

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon_2 \Rightarrow |x-y| < \min(\varepsilon_1, \sqrt{3})$$

(El porqué de  $\sqrt{3}$  es que si  $A$  es un subconjunto de  $S^1$  de diámetro menor que  $\sqrt{3}$  entonces  $A$  está contenido en un arco cerrado minimal.)

Sea  $\delta = \min(1/2 \varepsilon, \varepsilon_2)$ . Recubramos  $C$  por regiones cuadradas  $S_1, S_2, \dots, S_n$  que no se superpongan (excepto en las aristas), de forma que cada cuadrado tenga diámetro  $\delta$ . Puesto que  $\delta \leq \varepsilon_2$ , sabemos que  $f^{-1}(S_i)$  está contenido en un arco cerrado minimal  $A_i \neq S^1$ . Rectifiquemos  $f(A_i)$  formando una curva de Jordan  $C_i$  de la siguiente manera: Si  $e(t) = \exp(2\pi it)$  y  $A_i = \{e(t); a \leq t \leq b\}$ , definimos  $f_i: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$f_i(e(t)) = \begin{cases} f(e(t)), & \text{si } e(t) \notin A_i, \\ \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) f(e(a)) + \frac{t-a}{b-a} f(e(b)) & \text{si } e(t) \in A_i \end{cases}$$

ponemos entonces  $C_1 = f_i(S^1)$ , que es obviamente una curva de Jordan. Obsérvese que  $f(A_1)$  no está necesariamente contenida en  $S_1$ . Nótese también que para todo  $i=2, 3, \dots, n$  se tiene  $f_i^{-1}(S_i) \subseteq f^{-1}(S_i)$ .

Si  $A_2$  es el menor arco que contiene a  $f_i^{-1}(S_2)$  rectifiquemos ahora  $f_i(A_2)$ . Obtenemos una curva de Jordan  $C_2$  dada por  $f_2: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  (si  $f_i^{-1}(S_2) = \emptyset$ , ponemos  $f_2 = f_1$  y  $C_2 = C_1$ ). Obsérvese de nuevo que  $f_2^{-1}(S_i) \subseteq f^{-1}(S_i)$  para  $i=3, 4, \dots, n$ . Continuando de esta forma obtenemos un polígono de Jordan  $C_n$  dado por  $f_n: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Vamos a comprobar que  $C_n$  es  $\varepsilon$ -próximo a  $C$ .

Supongamos  $x \in S^1$  y  $f_n(x) \neq f(x)$ . Entonces existe un  $j \geq 1$  tal que  $f_n(x) = f_j(x) \neq f_{j-1}(x)$ , donde  $f_0 = f$ . Por construcción  $x$  pertenece a un arco  $A_j$  de extremos  $y, z$ . También por construcción,  $f_j(y) = f(y)$  y  $f_j(z) = f(z)$ . Se tiene

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= |f(x) - f(y) + f_j(y) - f_j(x)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + |f_j(y) - f_j(x)| \\ &\leq |f(x) - f(y)| + \delta \\ &\leq |f(x) - f(y)| + \frac{1}{2}\varepsilon. \end{aligned}$$

Puesto que  $|f(z) - f(y)| \leq \delta \leq \varepsilon_2$ , deducimos que  $|z-y| \leq \varepsilon_1$ . Pero  $|x-y| < |z-y|$ , por lo que  $|x-y| < \varepsilon_1$  y, por tanto,  $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2} \varepsilon$ . Resulta pues

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} \varepsilon = \varepsilon.$$

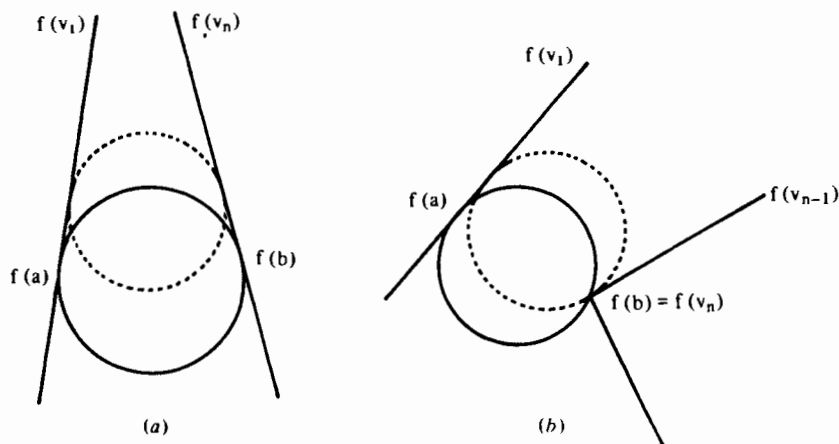
## 12A.8 Teorema

Sea  $C$  un polígono de Jordan dado por  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . La componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - C$  contiene un disco abierto cuya frontera intersecta a  $C$  en dos puntos  $f(a)$ ,  $f(b)$  tales que  $|a-b| \geq \sqrt{3}$ .

**Demostración.** Sea  $D$  un disco abierto tal que  $D \subseteq \mathbb{R}^2 - C$  y tal que existan dos puntos  $f(a)$ ,  $f(b) \in \partial D$  con  $|a-b|$  maximal. Es fácil ver que  $D$  existe. Supongamos que  $|a-b| < \sqrt{3}$ . Entonces,  $a$  y  $b$  deben ser los extremos de un arco  $A$  de longitud mayor que  $4\pi/3$ . La frontera de  $D$  no puede cortar a  $f(A) - \{f(a), f(b)\}$  ya que para todo  $c \in A - \{a, b\}$ ,  $\max\{|a-c|, |b-c|\} > |a-b|$ .

Sean  $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$  los vértices de  $C$  en  $f(A)$  ordenados de  $f(a)$  a  $f(b)$ . Pueden darse cuatro casos: (i)  $v_1 \neq a$ ,  $v_n \neq b$ , (ii)  $v_1 \neq a$ ,  $v_n = b$ , (iii)  $v_1 = a$ ,  $v_n \neq b$  y (iv)  $v_1 = a$ ,  $v_n = b$ . En el primer caso, la circunferencia  $\partial D$  es tangente a los segmentos  $f(a)f(v_1)$  y  $f(b)f(v_n)$ . Existe un disco  $D' \subseteq \mathbb{R}^2 - C$  próximo a  $C$  tal que la circunferencia  $\partial D'$  toca a  $C$  en puntos  $f(a')$  y  $f(b')$  de los segmentos  $f(a)f(v_1)$  y  $f(b)f(v_n)$ , próximos a  $f(a)$  y  $f(b)$  respectivamente; véase la Figura 12A.3(a). Puesto que  $|a'-b'| > |a-b|$ , obtenemos una contradicción. En el caso (ii), la circunferencia  $\partial D$  es tangente a  $f(a)f(v_1)$  y existe un disco  $D' \subseteq \mathbb{R}^2 - C$  tal que  $\partial D'$  toca a  $C$  en un punto de  $f(a)f(v_1)$  próximo a  $f(a)$  y pasa por  $f(b)f(v_{n-1})$ ; véase la Figura 12A.3(b). Obtenemos de nuevo una contradicción. El caso (iii) es parecido al (ii). Para el caso (iv) consideremos la región  $R$  limitada por  $f(A)$  y los radios de

Figura 12A.3



$\bar{D}$  que pasan por  $f(a)$  y  $f(b)$ . Para cada  $x \in \mathbb{R}$  existe una única circunferencia  $S_x$  con centro  $x$  que pasa por  $f(a)$  y  $f(b)$ . Moviendo  $x$  con continuidad desde el centro de  $D$  obtenemos, para algunos  $x$ , circunferencias  $S_x$  que limitan discos  $D_x$  tales que  $D_x \subseteq \mathbb{R}^2 - C$ . Eventualmente, para algún  $x$  en particular, las circunferencias  $S_x$  o bien cortan a  $f(A)$  en algún punto distinto de  $f(a)$  y  $f(b)$  o bien son tangentes a uno de los dos segmentos  $f(a)f(v_2)$ ,  $f(b)f(v_{n-1})$ . Hemos visto ya que el primer caso no es posible, y el segundo lleva a una contradicción siguiendo el mismo método que en el caso (ii) anterior. Todas estas contradicciones dejan únicamente una posibilidad, a saber,  $|a-b| \geq \sqrt{3}$ .

Demostramos ahora parte del teorema de la curva de Jordan.

## 12A.9 Teorema

Si  $C$  es una curva de Jordan,  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene por lo menos dos componentes.

*Demostración.* Obviamente existe una componente no acotada. Vamos a demostrar que existe también una componente acotada. Sea  $C_1, C_2, \dots$  una sucesión de polígonos de Jordan que converja a  $C$  (existe en virtud del Teorema 12A.7 tomando una sucesión  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  que tienda a 0). Supongamos que  $C, C_1, C_2, \dots$  están dados por  $f, f_1, f_2, \dots$  respectivamente, de manera que  $f_n$  converge a  $f$  cuando  $n$  tiende a infinito. En virtud del Teorema 12A.8, para cada  $C_n$  existe una circunferencia  $S_n$  que contiene puntos  $f_n(a_n)$  y  $f_n(b_n)$  con  $|a_n - b_n| \geq \sqrt{3}$ . Sea  $z_n$  el centro de  $S_n$ . Existe una circunferencia  $S_0$  que rodea todas las curvas de Jordan  $C_n$  y  $C$ , por lo que  $S_0$  rodea todas las  $S_n$ . Así pues, la sucesión  $z_1, z_2, \dots$  es una sucesión acotada de  $\mathbb{R}^2$  y, por tanto, admite una sucesión parcial convergente. Podemos, por tanto, suponer que la sucesión  $z_n, n \geq 1$ , converge a  $z$  cuando  $n$  tiende a infinito.

Para un  $n$  suficientemente grande los puntos  $z$  y  $z_n$  están en la misma componente de  $\mathbb{R}^2 - C_n$ . Vémoslo de la siguiente manera: Existe un  $\delta > 0$  tal que si  $|x - y| \geq \sqrt{3}$  entonces  $|f(x) - f(y)| \geq \delta$ . Así pues  $|f(a_n) - f(b_n)| \geq \delta$  para todo  $n \geq 1$  y, por tanto,  $|f_n(a_n) - f_n(b_n)| > 1/2 \delta$  para todo  $n \geq N$ , donde  $N$  es suficientemente grande para que  $\epsilon_N < 1/2 \delta$ . Esto significa que para  $n \geq N$  el diámetro de  $S_n$  es mayor que  $1/2 \delta$  y, por tanto,  $d(z_n, C_n) > 1/4 \delta$ . Pero, para  $n$  suficientemente grande tenemos  $|z - z_n| < 1/4 \delta$ , con lo que  $z$  y  $z_n$  deben estar en la misma componente de  $\mathbb{R}^2 - C_n$ , a saber, en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - C_n$ , ya que, por definición,  $z_n$  está en la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - C_n$ . Demostraremos que  $z$  no puede pertenecer a la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - C$ .

Supongamos que  $z$  estuviera en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Existiría, entonces, un camino continuo  $g$  de  $\mathbb{R}^2 - C$  con origen en  $z$  y final fuera de  $C_0$  (por el Teorema 12.9 todo subconjunto conexo abierto de  $\mathbb{R}^2$  es arco-conexo). Sea  $d(g(I), C) = \delta$ . Para  $n$  suficientemente grande tenemos  $|f_n(x) - f(x)| < 1/2 \delta$  y, por tanto,  $d(g(I), C_n) > 1/2 \delta$ , lo que significa que, para  $n$  suficientemente grande, el punto  $z$  está en la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - C_n$ . Pero esto contradice lo que hemos demostrado anteriormente de que  $z$  pertenecía a la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - C_n$ . Se deduce de aquí, por tanto, que  $z$  no puede pertenecer a la componente no acotada de  $\mathbb{R}^2 - C$ , por lo que  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene también una componente acotada.

Para demostrar la segunda parte del teorema de la curva de Jordan necesitamos una definición y un lema.

## 12A.10 Definición

Una *cuerda*  $\Gamma$  de una curva de Jordan es un segmento rectilíneo que intersecta a  $C$  únicamente en sus extremos. Así, salvo los extremos de  $\Gamma$ , la cuerda  $\Gamma$  está toda ella contenida en  $\mathbb{R}^2 - C$ .

Obsérvese que si  $C$  es un polígono de Jordan y  $\Gamma$  es una cuerda de  $C$  entonces  $\Gamma \subseteq X \cup C$ , donde  $X$  es una de las componentes de  $\mathbb{R}^2 - C$ , y además  $X - \Gamma$  consta de dos componentes.

## 12A.11 Lema

Sea  $C$  un polígono de Jordan y sean  $a, b$  dos puntos de la misma componente  $X$  de  $\mathbb{R}^2 - C$  tales que  $d(\{a, b\}, C) \geq \delta$  para un cierto  $\delta > 0$ . Supongamos que para toda cuerda  $\Gamma$  de  $C$  en  $X \cap C$  de longitud menor que  $2\delta$  los puntos  $a$  y  $b$  están ambos en la misma componente de  $X - \Gamma$ . Entonces, existe un camino  $g$  de  $X$  tal que  $d(g(I), C) \geq \delta$ .

*Demostración.* La idea es colocar un disco abierto de radio  $\delta$  con centro en  $a$  y empujarlo hacia  $b$  manteniéndolo siempre en  $X$ . Lo único que podría impedir este proceso de empujar el disco (de diámetro  $2\delta$ ) sería la existencia de una cuerda de longitud menor que  $2\delta$  en  $X \cup C$ . Pero la hipótesis que hemos hecho sobre las cuerdas nos asegura que esto no puede ocurrir.

## 12A.12 Teorema

Sea  $C$  una curva de Jordan;  $\mathbb{R}^2 - C$  tiene como máximo dos componentes.

*Demostración.* Supongamos que  $\mathbb{R}^2 - C$  tuviera tres o más componentes y sean  $p, q, r$  puntos de tres componentes distintas. Sea  $d(\{p, q, r\}, C) = \varepsilon$  y sea  $C_1, C_2, \dots$  una sucesión de polígonos de Jordan que converja a  $C$ . Supongamos que  $C, C_1, C_2, \dots$  están dados por  $f, f_1, f_2, \dots$  respectivamente. Para  $n$  suficientemente grande  $d(C_n, C) < 1/2 \varepsilon$  y, por tanto,  $d(\{p, q, r\}, C_n) > 1/2 \varepsilon$ . Aplicando el Teorema 12.A.2 vemos que, para cada  $n$  suficientemente grande, dos de los tres puntos  $p, q, r$  están en la misma componente  $X_n$  de  $\mathbb{R}^2 - C_n$ . Tomando una sucesión parcial, si es necesario, podemos suponer que  $p$  y  $q$  están en  $X_n$  para todo  $n$ .

Supongamos que existiera un  $\delta$  con  $0 < \delta < \varepsilon$  y una infinidad de enteros  $n$  tales que los puntos  $p$  y  $q$  estuvieran unidos por un camino  $g_n$  de  $X_n$  con  $d(g_n(I), C_n) \geq \delta$ . Para  $n$  suficientemente grande tenemos  $d(C_n, C) < 1/2 \delta$  y, por tanto,  $d(g_n(I), C) > 1/2 \delta$ , lo que demuestra que  $p$  y  $q$  están en la misma componente de  $\mathbb{R}^2 - C$ . Esta contradicción indica que no existe un tal  $\delta$ . Aplicando el Lema 12A.11, deducimos que, para una infinidad de enteros  $n$ , existe una cuerda  $\Gamma_n$  de longitud  $\delta_n$  con la propiedad de que  $p$  y  $q$  están en componentes distintas de  $X_n - \Gamma_n$  y que  $\delta_n$  tiende a 0 cuando  $n$  tiende a infinito. Denotemos en orden

creciente esta infinidad de enteros  $n$  por  $n(1), n(2), \dots$ . Denotemos también por  $f_{n(i)}(a_i), f_{n(i)}(b_i)$  los extremos de  $\Gamma_{n(i)}$ . Puesto que  $\delta_{n(i)} \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , tenemos

$$f_{n(i)}(a_i) - f_{n(i)}(b_i) \rightarrow 0 \text{ cuando } i \rightarrow \infty,$$

y, por tanto,

$$f(a_i) - f(b_i) \rightarrow 0 \text{ cuando } i \rightarrow \infty,$$

lo que implica que

$$a_i - b_i \rightarrow 0 \text{ cuando } i \rightarrow \infty.$$

Puesto que  $p$  y  $q$  están en componentes distintas de  $X_{n(i)} - \Gamma_{n(i)}$ , para una infinidad de valores de  $i$  uno de estos puntos, pongamos  $p$ , pertenece a la componente de  $X_{n(i)} - \Gamma_{n(i)}$  limitada por  $\Gamma_{n(i)}$  y  $f_{n(i)}(A_i)$ , donde  $A_i$  es el menor de los arcos de  $S^1$  con extremos  $a_i, b_i$ . Puesto que  $a_i - b_i \rightarrow 0$  cuando  $i \rightarrow \infty$ , resulta que el diámetro de esta componente que acabamos de considerar es menor que  $\varepsilon$ , para  $i$  suficientemente grande. En articular  $|p - f(a_i)| < \varepsilon$ , de donde obtenemos una contradicción que prueba el teorema.

El teorema de la curva de Jordan se deduce entonces de los Teoremas 12A.9 a 12A.12.

### 12A.13 Ejercicios

- (a) Demostrar que si  $A$  es la imagen en  $\mathbb{R}^2$  de una aplicación continua inyectiva  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , entonces  $\mathbb{R}^2 - A$  es conexo.  
 (b) Sea  $C$  una curva de Jordan dada por  $f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Definamos  $\delta$  por

$$\delta = \min \{ |f(x) - f(y)|; x, y \in S^1 \text{ con } |x - y| \geq \sqrt{3} \}.$$

Demostrar que la componente acotada de  $\mathbb{R}^2 - C$  contiene un disco abierto de diámetro  $\delta$ .

- (c) Es posible encajar una infinidad no numerable de curvas cerradas simples disjuntas en  $\mathbb{R}^2$ ; por ejemplo,  $\{ C_r; r \in \mathbb{R} \}$  donde  $C_r = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = r \}$ . Una *figura ocho* es un espacio homeomorfo a

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; (x \pm 1)^2 + y^2 = 1 \}.$$

Demostrar que si  $\{ E_j; j \in J \}$  es una colección disjunta de figuras ocho de  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $J$  es numerable.

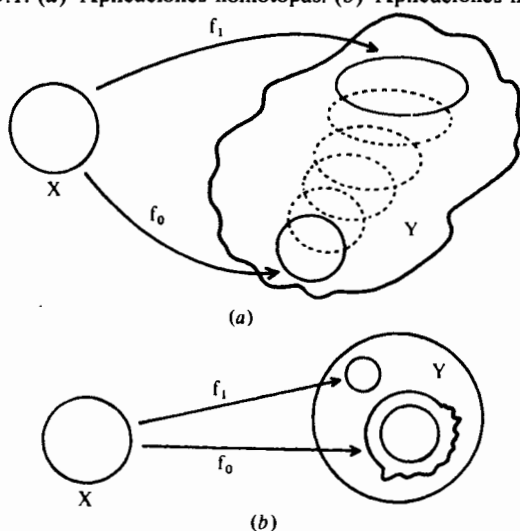
## Capítulo 13

# Homotopía de aplicaciones continuas

En este capítulo introducimos ciertas relaciones de equivalencia en el conjunto de las aplicaciones continuas entre dos espacios topológicos que serán de importancia fundamental en los capítulos siguientes, especialmente cuando las apliquemos a los caminos de un espacio.

Hablando sin precisión, dos aplicaciones continuas  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  se dice que son homótopas si existe una familia intermedia de aplicaciones continuas  $f_t: X \rightarrow Y, 0 \leq t \leq 1$ , que varía con continuidad respecto a  $t$ . Véase la Figura 13.1(a). La Figura 13.1(b) describe dos aplicaciones que no son homótopas;  $X = S^1$  e  $Y$  es un anillo de  $\mathbb{R}^2$ .

Figura 13.1. (a) Aplicaciones homótopas. (b) Aplicaciones no homótopas.





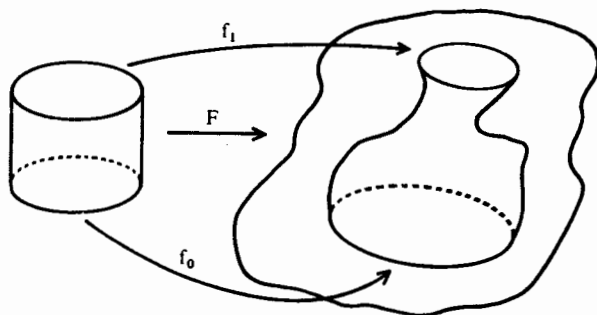
Enunciado con más precisión, tenemos

### 13.1 Definición

Se dice que dos aplicaciones continuas  $f_0, f_1: X \rightarrow Y$  son *homótopas* si existe una aplicación continua  $F: X \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, 0) = f_0(x)$  y  $F(x, 1) = f_1(x)$ .

Para un ejemplo véase la Figura 13.2.

Figura 13.2.



La aplicación  $F$  se llama una *homotopía* entre  $f_0$  y  $f_1$ . Escribiremos  $f_0 \simeq f_1$  o  $F: f_0 \simeq f_1$ . Para cada  $t \in [0, 1]$ , denotemos a  $F(x, t)$  por  $f_t(x)$ ;  $f_t: X \rightarrow Y$  es pues una aplicación continua.

Obsérvese que si  $f: I \rightarrow Y$  es un camino,  $f$  es homótopo al camino constante  $e_{f(0)}$  mediante la homotopía  $F: I \times I \rightarrow Y$  tal que  $F(x, t) = f((1-t)x)$ . Para excluir este tipo de situaciones (si queremos hacerlo) usamos un concepto más general de homotopía —el de homotopía relativa a un subconjunto  $A$ — en la que se requiere que la homotopía no mueva ningún punto de  $A$ .

### 13.2 Definición

Supongamos que  $A$  es un subconjunto de  $X$  y que  $f_0, f_1$  son dos aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$ . Decimos que  $f_0$  y  $f_1$  son *homótopas relativamente a  $A$*  si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow Y$  entre  $f_0$  y  $f_1$  tal que para todo  $a \in A$ ,  $F(a, t)$  no dependa de  $t$ ; en otras palabras,  $F(a, t) = f_0(a)$  para todo  $a \in A$  y todo  $t \in I$ .

Obsérvese, entonces, que  $f_0(a) = f_1(a)$  para todo  $a \in A$ . La homotopía  $F$  se llama entonces una *homotopía relativa a  $A$*  y escribiremos  $f_0 \simeq f_1 \text{ (rel } A)$  o  $f_0 \simeq_{\text{rel } A} f_1$ .

Véase, por ejemplo, la Figura 13.3, donde  $X = I$  y  $A = \{0\} \in X$ .

Para otro ejemplo, consideremos la Figura 13.4, donde  $X = I$ ,  $A = \{0, 1\}$  e  $Y$  es un anillo en  $\mathbb{R}^2$ . Las aplicaciones  $f_0, f_1$  no son homótopas relativamente a  $A$  a pesar de que son homótopas.

Figura 13.3

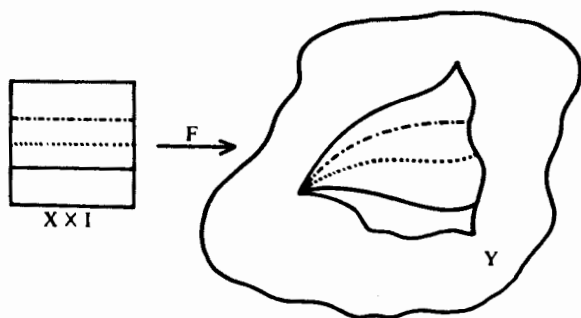
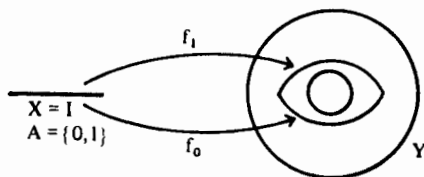


Figura 13.4



Desde luego, si  $A = \emptyset$ , una «homotopía relativa a  $A$ » no es otra cosa que una «homotopía». En el lema siguiente probamos que la homotopía relativa a  $A$  es una relación de equivalencia.

### 13.3 Lema

La relación  $\simeq_{\text{rel } A}$  definida en el conjunto de aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$  es una relación de equivalencia.

**Demostración.** La relación es reflexiva, ya que  $F(x, t) = f(x)$  es una homotopía relativa a  $A$  entre  $f$  y ella misma. Es simétrica, ya que si  $F: f \simeq_{\text{rel } A} g$ , entonces  $G: g \simeq_{\text{rel } A} f$ , donde  $G$  viene dada por  $G(x, t) = F(x, 1-t)$ . Finalmente, la relación es transitiva, puesto que si  $F: f \simeq_{\text{rel } A} g$  y  $G: g \simeq_{\text{rel } A} h$ , entonces  $H: f \simeq_{\text{rel } A} h$ , donde  $H$  está dada por

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(x, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

El Lema 12.2 demuestra que  $H$  es continua.

## 13.4 Ejercicios

- (a) Sea  $X$  un espacio y  $f: S^1 \rightarrow X$  una aplicación continua. Demostrar que  $f$  es nulhomótota (esto es, homótota a una aplicación constante) si y sólo si existe una aplicación continua  $g: D^2 \rightarrow X$  tal que  $g|_{S^1} = f$ . (Indicación: Si  $c$  es una aplicación constante y  $F: c \simeq f$ , definir  $g(rx) = F(x, r)$  para  $x \in S^1, r \in I$  y usar el Ejercicio 8.14(f).)
- (b) Sean  $x, y \in X$ . Denotemos por  $P(x, y)$  el conjunto de clases de equivalencia de caminos de  $X$  con origen  $x$  y final  $y$  y por la relación de equivalencia «homótopos relativamente a  $\{0, 1\}$ ». (En otras palabras, dos caminos  $p, q: I \rightarrow X$  de  $x$  a  $y$  son equivalentes en  $P(x, y)$  si y sólo si  $p \simeq q(\text{rel } \{0, 1\})$ .) Demostrar que existe una correspondencia biyectiva entre  $P(x, y)$  y  $P(x, x)$  si y sólo si  $P(x, y) \neq \emptyset$ .
- (c) Sea  $0 < s < 1$ . Dados dos caminos  $p$  y  $q$  con  $p(1) = q(0)$ , definimos  $h$  por la fórmula

$$h(t) = \begin{cases} p(t/s) & 0 \leq t \leq s, \\ q((t-s)/(1-s)) & s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Probar que  $h$  y  $p * q$  son homótopos relativamente a  $\{0, 1\}$ .

- (d) Si  $f$  es un camino, denotemos por  $\bar{f}$  el camino dado por  $\bar{f}(t) = f(1-t)$ . Probar que  $f \simeq g(\text{rel } \{0, 1\})$  si y sólo si  $\bar{f} \simeq \bar{g}(\text{rel } \{0, 1\})$ .
- (e) Demostrar que si  $f_0 \simeq_{\text{rel } A} f_1: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  es una aplicación continua, entonces  $g f_0 \simeq_{\text{rel } A} g f_1: X \rightarrow Z$ .
- (f) Supongamos que  $f_0 \simeq f_1: X \rightarrow Y$  y  $g_0 \simeq g_1: Y \rightarrow Z$ . Demostrar que  $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1: X \rightarrow Z$ . (Indicación: Utilizar en primer lugar (e) para demostrar que  $g_0 f_0 \simeq g_0 f_1$ , y probar luego que  $g_0 f_1 \simeq g_1 f_1$ .)
- (g) Sean  $X, Y$  espacios topológicos y sea  $\mathcal{F}(X, Y)$  el conjunto de las aplicaciones continuas de  $X$  en  $Y$  con la topología compacto-abierto. (Véase el Ejercicio 7.13 (d).) Probar que si  $f \simeq g: X \rightarrow Y$ , existe entonces un camino  $f$  a  $g$  en el espacio  $\mathcal{F}(X, Y)$ . Supongamos que  $X$  es compacto de Hausdorff; probar que existe un camino de  $f$  a  $g$  en  $\mathcal{F}(X, Y)$  si y sólo si  $f \simeq g: X \rightarrow Y$ . (Para esta última parte basta que  $X$  sea localmente compacto de Hausdorff.)

Podemos utilizar el concepto de aplicaciones homótopas para establecer una relación de equivalencia entre espacios topológicos.

## 13.5 Definición

Se dice que dos espacios  $X$  e  $Y$  son del mismo tipo de homotopía si existen aplicaciones continuas  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: Y \rightarrow X$  tales que

$$gf \simeq 1: X \rightarrow X,$$

$$fg \simeq 1: Y \rightarrow Y.$$

Las aplicaciones  $f$  y  $g$  se llaman, entonces, *equivalencias homotópicas*. Diremos también que  $X$  e  $Y$  son *homotópicamente equivalentes*.

Obviamente, dos espacios homeomorfos son del mismo tipo de homotopía, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, si  $n > 0$ , el  $n$ -disco  $D^n \subseteq \mathbb{R}^n$  no es homeomorfo a un punto  $\{y\} \subseteq D^n$ , pero es del mismo tipo de homotopía que un punto. Para ver que son homotópicamente equivalentes, consideremos la inclusión  $f: \{y\} \rightarrow D^n$  (dada por  $f(y) = y$ ) y la aplicación constante  $g: D^n \rightarrow \{y\}$ . Obviamente  $gf = 1$ , y  $F: D^n \times I \rightarrow D^n$  definida por  $F(x, t) = tx + (1-t)y$  es una homotopía entre  $fg$  y  $1: D^n \rightarrow D^n$ . Los espacios que son homotópicamente equivalentes a un punto reciben un nombre especial.

### 13.6 Definición

Se dice que un espacio  $X$  es *contráctil* si es homotópicamente equivalente a un punto.

Así,  $D^n$  es contráctil. Más generalmente, todo subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  es contráctil. Intuitivamente, un espacio es contráctil si puede deformarse en sí mismo a un punto. (Una circunferencia no puede deformarse en sí misma a un punto.)

Otro ejemplo de un par de espacios homotópicamente equivalentes nos lo proporcionan el cilindro  $C$  y la circunferencia  $S^1$ . Para verlo, escribamos  $C$  y  $S^1$  como

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, -1 \leq z \leq 1 \},$$

$$S^1 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0 \}.$$

Definamos  $i: S^1 \rightarrow C$  como la inclusión y  $r: C \rightarrow S^1$  por  $r(x, y, z) = (x, y, 0)$ . Obviamente  $ri = 1: S^1 \rightarrow S^1$ , mientras que la aplicación  $F: C \times I \rightarrow C$  definida por  $F((x, y, z), t) = (x, y, tz)$  es una homotopía entre  $ir$  y  $1: C \rightarrow C$ .

El ejemplo anterior nos lleva a las siguientes definiciones.

### 13.7 Definición

Un subconjunto  $A$  de un espacio topológico  $X$  se llama un *retracto* de  $X$  si existe una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ri = 1: A \rightarrow A$  (o equivalentemente si  $r|_A = 1$ ), donde  $i: A \rightarrow X$  es la inclusión. La aplicación  $r$  se llama una *retracción*.

### 13.8 Definición

Un subconjunto  $A$  de  $X$  se llama un *retracto de deformación* de  $X$  si existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ir \simeq 1: X \rightarrow X$ , donde  $i: A \rightarrow X$  es la inclusión.

En otras palabras,  $A$  es un retracto de deformación de  $X$  si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que  $F(x, 0) = x$  para todo  $x \in X$  y  $F(x, 1) \in A$  para todo  $x \in X$ .

Así pues, la circunferencia es un retracto de deformación del cilindro. Obsérvese que si  $A$  es un retracto de deformación de  $X$ , entonces  $A$  y  $X$  son homotópicamente equivalentes. En el ejemplo de la circunferencia y el cilindro, la aplicación  $ir$  es de hecho homótopa a la identidad relativamente a la circunferencia. Esto nos lleva aún a otra definición.

### 13.9 Definición

Un subconjunto  $A$  de  $X$  es un *retracto de deformación fuerte* si existe una retracción  $r: X \rightarrow A$  tal que  $ir \simeq_{\text{rel } A} 1: X \rightarrow X$ .

En otras palabras,  $A$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$  si existe una homotopía  $F: X \times I \rightarrow X$  tal que  $F(x, 0) = x$  para todo  $x \in X$ ,  $F(a, t) = a$  para todo  $a \in A$ ,  $t \in I$  y  $F(x, 1) \in A$  para todo  $x \in X$ .

Un retracto de deformación fuerte es también, obviamente, un retracto de deformación. El concepto de retracto de deformación fuerte nos será de utilidad más adelante. Advertencia: Algunos libros llaman retracto de deformación fuerte a lo que nosotros hemos llamado retracto de deformación. Intuitivamente,  $A$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$  si  $X$  puede deformarse, en sí mismo, a  $A$  manteniendo  $A$  fijo.

Damos aún un nuevo ejemplo en el que interviene el concepto de retracto de deformación fuerte. Consideremos el subconjunto  $Y = C_1 \cup C_2$  de  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$C_1 = \{ x = (x_1, x_2); (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1 \}, \\ C_2 = \{ x = (x_1, x_2); (x_1 + 1)^2 + x_2^2 = 1 \}.$$

Así pues,  $Y$  es una «figura 8»; esto es, un par de circunferencias unidas por un punto. Sea  $X = Y - \{(2, 0), (-2, 0)\}$ ; entonces el punto  $x_0 = (0, 0)$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$ . Para verlo, denotemos por  $i: \{x_0\} \rightarrow X$  y  $r: X \rightarrow \{x_0\}$  las aplicaciones obvias. Claramente  $ri = 1$ ; para ver que  $ir \simeq 1$  (rel  $\{x_0\}$ ) construimos la homotopía siguiente

$$F: X \times I \rightarrow X, \\ F(x, s) = (1-s)x / \|((1-s)x_1 + (-1)^i, (1-s)y_2)\| \text{ para } x \in C_i, i = 1, 2.$$

Obsérvese que  $((1-s)x_1 + (-1)^i, (1-s)y_2) \neq (0, 0)$  para  $x \in X$ . Es fácil comprobar que  $F$  es continua. Puesto que  $F(x_0, s) = x_0$ ,  $F(x, 0) = x$  y  $F(x, 1) = x_0$  resulta que  $ir \simeq 1$  (rel  $\{x_0\}$ ) y, por tanto,  $\{x_0\}$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$ .

### 13.10 Ejercicios

- Demostrar que existe una circunferencia en la banda de Möbius que es un retracto de deformación fuerte de la banda de Möbius. Deducir de esto que la banda de Möbius y el cilindro son homotópicamente equivalentes.
- Probar que un espacio  $X$  es contráctil si y sólo si la identidad  $1: X \rightarrow X$  es homótopa a una aplicación constante.

- (c) Probar que existe una retracción  $r: D^n \rightarrow S^{n-1}$  si y sólo si  $S^{n-1}$  es contráctil. (Indicación: Sea  $F: S^{n-1} \times I \rightarrow S^{n-1}$  una homotopía entre la identidad y una aplicación constante; usar entonces la aplicación natural  $S^{n-1} \times I \rightarrow D^n$  dada por  $(x, t) \rightarrow tx$  y el hecho de que  $F(S^{n-1} \times \{0\})$  es un único punto.)
- (d) Probar que si  $X$  es conexo y tiene el mismo tipo de homotopía que  $Y$ , entonces  $Y$  es también conexo.
- (e) Un subconjunto  $A \subseteq X$  se dice que es un *retracto débil* de  $X$  si existe una aplicación continua  $r: X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i \simeq 1: A \rightarrow A$ , donde  $i: A \rightarrow X$  es la inclusión. Todo retracto es, obviamente, un retracto débil. Dar un ejemplo de un subconjunto que sea un retracto débil pero no un retracto.
- (f) Dar un ejemplo de un subconjunto que sea un retracto de deformación pero no un retracto de deformación fuerte.
- (g) Un subconjunto  $A \subseteq X$  se dice que es un *retracto de deformación débil* de  $X$  si la inclusión  $i: A \rightarrow X$  es una equivalencia homotópica. Así pues, todo retracto de deformación es también un retracto de deformación débil. Dar un ejemplo de un subconjunto que sea un retracto de deformación débil pero no un retracto de deformación.
- (h) Sea  $A$  un subespacio de  $X$  y sea  $Y$  un espacio topológico no vacío. Probar que  $A \times Y$  es un retracto de  $X \times Y$  si y sólo si  $A$  es un retracto de  $X$ .
- (i) Probar que la relación «es un retracto de» es transitiva (es decir, si  $A$  es un retracto de  $B$  y  $B$  es un retracto de  $C$ , entonces  $A$  es un retracto de  $C$ ).
- (j) Probar que el subconjunto  $S^1 \times \{x_0\}$  es un retracto de  $S^1 \times S^1$ , pero no es un retracto de deformación fuerte de  $S^1 \times S^1$  para ningún punto  $x_0 \in S^1$ . ¿Es un retracto de deformación? ¿Es un retracto de deformación débil?
- (k) Sea  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ . Hallar una circunferencia de  $\mathbb{R}^2$  que sea un retracto de deformación fuerte de  $\mathbb{R}^2 - \{x_0\}$ .
- (l) Sea  $T$  un toro y  $X$  el complementario de un punto en  $T$ . Hallar un subconjunto de  $X$  que sea homeomorfo a una «figura 8» y que sea un retracto de deformación fuerte de  $X$ .
- (m) Probar que  $S^n$  es un retracto de deformación fuerte de  $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ .
- (n) Demostrar que todo retracto de un espacio de Hausdorff es siempre un subconjunto cerrado.
- (o) Sea  $Y$  un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  y sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Probar que si para cada  $x \in X$ ,  $f(x)$  y  $g(x)$  pueden ser unidos por un segmento rectilíneo en  $Y$ , entonces  $f \simeq g$ . Deducir de esto que cualesquiera dos aplicaciones  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  deben ser homotópicas.
- (p) Sea  $X$  un espacio arbitrario y sean  $f, g: X \rightarrow S^n$  dos aplicaciones continuas tales que  $f(x) \neq -g(x)$  para todo  $x \in X$ . Probar que  $f \simeq g$ . (Indicación: Considerar la aplicación  $\mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  dada por  $x \rightarrow x/\|x\|$  y aplicar el Ejercicio (o) anterior.) Deducir de esto que si  $f: X \rightarrow S^n$  es una aplicación continua que no sea exhaustiva, entonces  $f$  es homotopa a una aplicación constante.

## Capítulo 14

# «Multiplicación» de caminos

Si  $f$  y  $g$  son dos caminos de  $X$  tales que  $f(1) = g(0)$ , entonces el *producto* de  $f$  y  $g$  es el camino  $f * g$  que hemos definido en el Capítulo 12 por

$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

En este capítulo estudiaremos con detalle esta «multiplicación» de caminos. Más precisamente, consideraremos la multiplicación de caminos salvo homotopías relativas a  $\{0,1\}$  y veremos en qué condiciones esta multiplicación satisface los axiomas de grupo.

### 14.1 Definición

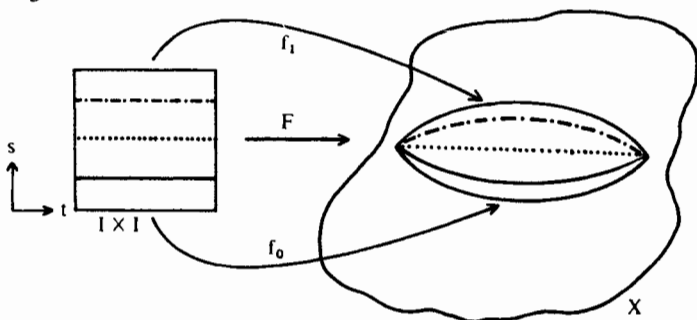
Se dice que dos caminos  $f$  y  $g$  de  $X$  son *equivalentes* si  $f$  y  $g$  son homótopos relativamente a  $\{0,1\}$ . Escribiremos  $f \sim g$ .

Obsérvese que los caminos  $f_0, f_1$  de  $X$  son equivalentes si existe una aplicación continua  $F: I \times I \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned} F(t,0) = f_0(t) & \quad \text{y} \quad F(t,1) = f_1(t) & \text{para } t \in I, \\ F(0,s) = f_0(0) & \quad \text{y} \quad F(1,s) = f_0(1) & \text{para } s \in I. \end{aligned}$$

Véase la Figura 14.1. En este caso escribiremos  $\bar{F}: f_0 \sim f_1$ .

Figura 14.1



El Lema 13.3 demuestra que  $\sim$  es una relación de equivalencia en el conjunto de los caminos de  $X$ . Denotaremos por  $[f]$  la clase de equivalencia de un camino  $f$ . Nuestro primer resultado demuestra que el producto de clases de equivalencia de caminos está bien definido por

$$[f] [g] = [f * g].$$

## 14.2 Lema

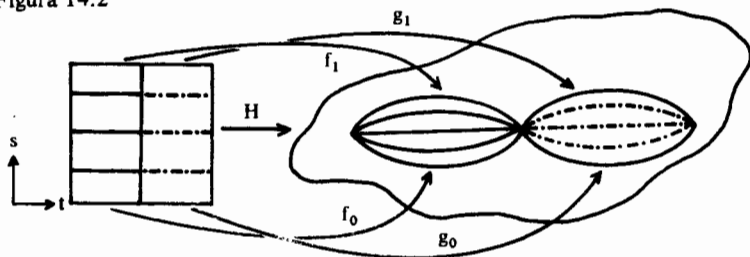
Supongamos que  $f_0, f_1, g_0, g_1$  son caminos de  $X$  tales que  $f_0(1) = g_0(0)$  y  $f_1(1) = g_1(0)$ . Si  $f_0 \sim f_1$  y  $g_0 \sim g_1$ , entonces  $f_0 * g_0 \sim f_1 * g_1$ .

*Demostración.* Sean  $F: f_0 \sim f_1$  y  $G: g_0 \sim g_1$  homotopías relativas a  $\{0, 1\}$  que realicen las equivalencias. Definamos  $H: I \times I \rightarrow X$  por

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(2t-1, s) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

que es continua en virtud del Lema 12.2 ya que  $F(1, s) = f_0(1) = g_0(0) = G(0, s)$ . Es fácil ver que  $H$  es una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  entre  $f_0 * g_0$  y  $f_1 * g_1$ . Véase la Figura 14.2.

Figura 14.2





Nuestro próximo resultado es que la multiplicación de clases de equivalencia de caminos es asociativa; en otras palabras

$$([f] [g]) [h] = [f] ([g] [h]),$$

siempre que este producto tenga sentido (es decir, si  $f(1) = g(0)$  y  $g(1) = h(0)$ ). Obsérvese que en general  $(f * g) * h \neq f * (g * h)$ ; véase el Ejercicio 14.6 (a).

### 14.3 Lema

Supongamos que  $f, g, h$  son tres caminos de  $X$  tales que  $f(1) = g(0)$  y  $g(1) = h(0)$ . Entonces  $(f * g) * h \sim f * (g * h)$ .

*Demostración* Obsérvese en primer lugar que

$$((f * g) * h)(t) = \begin{cases} f(4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1; \end{cases}$$

y

$$(f * (g * h))(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t-2) & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t-3) & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Representamos estos caminos por los diagramas

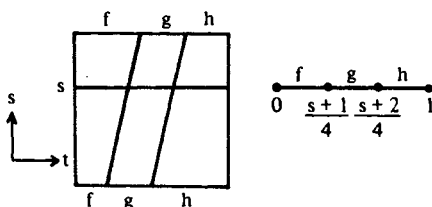


Estos diagramas pueden usarse para obtener bastante fácilmente la descripción algebraica de los caminos en cuestión. Por ejemplo, consideremos  $(f * g) * h$ ; cuando  $\frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}$  usamos  $g$  y la componemos con una función lineal que transforme el intervalo  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  en  $[0, 1]$ , a saber  $t \rightarrow 4t-1$ . De hecho, podemos utilizar cualquier aplicación continua de  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  a  $[0, 1]$  que aplique  $\frac{1}{4}$  en 0 y  $\frac{1}{2}$  en 1 (véase el Ejercicio 14.6(c)), pero normalmente es más sencillo escogerla lineal.

Para construir una homotopía entre  $(f * g) * h$  y  $f * (g * h)$  consideremos la Figura 14.3. Para un valor fijo de  $s$  tomamos  $f$  en el intervalo  $[0, (s+1)/4]$ ,  $g$  en el intervalo  $[(s+1)/4, (s+2)/4]$  y  $h$  en el intervalo  $[(s+2)/4, 1]$ . Utilizando el método descrito más arriba, podemos definir  $F: I \times I \rightarrow X$  por

$$F(t, s) = \begin{cases} f((4t)/(1+s)) & 0 \leq t \leq (s+1)/4, \\ g(4t-s-1) & (s+1)/4 \leq t \leq (s+2)/4, \\ h((4t-s-2)/(2-s)) & (s+2)/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Figura 14.3



La función  $F$  es continua y

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= ((f * g) * h)(t), & F(t, 1) &= (f * (g * h))(t), \\ F(0, s) &= f(0) = ((f * g) * h)(0), & F(1, s) &= h(1) = ((f * g) * h)(1), \end{aligned}$$

por lo que  $F$  es la homotopía deseada.

Si  $x \in X$  habíamos definido  $\epsilon_x: I \rightarrow X$  como el camino constante, esto es  $\epsilon_x(t) = x$ . Los caminos equivalentes al camino constante se comportan como un elemento unidad (por la izquierda o por la derecha), esto es

$$[\epsilon_x] [f] = [f] = [f] [\epsilon_y]$$

si  $f$  es un camino con origen en  $x$  y final en  $y$ . Vamos a demostrarlo en el lema siguiente.

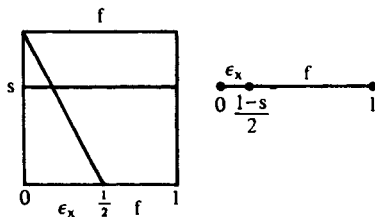
#### 14.4 Lema

Si  $f$  es un camino de  $X$  con origen en  $x$  y final en  $y$ , entonces  $\epsilon_x * f \sim f$  y  $f * \epsilon_y \sim f$ .

*Demostración.* Probaremos únicamente que  $\epsilon_x * f \sim f$ . La demostración de  $f * \epsilon_y \sim f$  es análoga. Consideremos la Figura 14.4. Definimos  $F: I \times I \rightarrow X$  por

$$F(t, s) = \begin{cases} x & 0 \leq t \leq (1-s)/2, \\ f((2t-1+s)/(1+s)) & (1-s)/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Figura 14.4



Entonces  $F(t,0) = \epsilon_x * f$ ,  $F(t,1) = f(t)$  y  $F$  es una homotopía relativa a  $\{0,1\}$ .

Finalmente, deseamos invertir caminos (salvo homotopías). Para ello recordemos que si  $f$  es un camino, entonces  $\bar{f}$  es el camino definido por  $\bar{f}(t) = f(1-t)$ . Obsérvese que  $f \sim g$  si y sólo si  $\bar{f} \sim \bar{g}$  (como es fácil demostrar). El próximo resultado demostrará que la clase de equivalencia de  $\bar{f}$  actúa como un inverso de la clase de equivalencia de  $f$ , esto es

$$[f] [\bar{f}] = [\epsilon_x], \quad [\bar{f}] [f] = [\epsilon_y]$$

para todo camino de  $X$  con origen en  $x$  y final en  $y$ .

## 14.5 Lema

Sea  $f$  un camino de  $X$  con origen en  $x$  y final en  $y$ . Entonces  $f * \bar{f} \sim \epsilon_x$  y  $\bar{f} * f \sim \epsilon_y$ .

*Demostración.* Demostraremos únicamente  $f * \bar{f} \sim \epsilon_x$ . El camino  $f * \bar{f}$  está dado por

$$(f * \bar{f})(t) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(2-2t) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Representa un camino en el cual viajamos a lo largo de  $f$  durante la primera mitad de nuestro tiempo y luego de nuevo a lo largo de  $f$  pero en la dirección contraria durante la segunda mitad. Para estar seguros de que vamos de  $x$  a  $y$  y luego volvemos a  $x$ , viajamos a la velocidad 2 (es decir, al doble de la velocidad normal). Si ahora variamos la velocidad proporcionalmente a  $(1-s)$ , para  $s \in I$ , entonces para cada  $s$  obtenemos un camino que empieza en  $x$ , va hasta  $f(2(1-s))$  y vuelve a  $x$ . Para  $s=0$  obtenemos  $f * \bar{f}$  y para  $s=1$  obtenemos  $\epsilon_x$ . Definimos entonces  $F: I \times I \rightarrow X$  por

$$F(t,s) = \begin{cases} f(2t(1-s)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f((2-2t)(1-s)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$F$  es obviamente continua y

$$\begin{aligned} F(t,0) &= (f * \bar{f})(t), & F(t,1) &= f(0) = \epsilon_x(t) \\ F(0,s) &= f(0) = (f * \bar{f})(0), & F(1,s) &= f(0) = (f * \bar{f})(1) \end{aligned}$$

por lo que  $f * \bar{f} \sim \epsilon_x$ .

Otra posible homotopía entre  $f * \bar{f}$  y  $\epsilon_x$  viene dada por  $G: I \times I \rightarrow X$  donde

$$G(t,s) = \begin{cases} f(2t) & 0 \leq t \leq (1-s)/2, \\ f(1-s) & (1-s)/2 \leq t \leq (1+s)/2, \\ f(2-2t) & (1+s)/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Aquí la idea es que estamos viajando a lo largo de  $f$  un tiempo proporcional a  $(1-s)$ . Así pues, vamos a lo largo de  $f$  durante la primera  $(1-s)/2$ -parte de nuestro tiempo, después nos esperamos en el punto  $f(1-s)$  y, finalmente, volvemos a lo largo de  $f$  durante la última  $(1-s)/2$ -parte de nuestro tiempo. Así, cuando  $s=0$  obtenemos  $f * \bar{f}$ , pero cuando  $s=1$  pasamos todo nuestro tiempo esperando en  $x$ , esto es obtenemos  $\varepsilon_x$ .

En el próximo capítulo volveremos a hablar de clases de equivalencia de caminos y de sus productos.

## 14.6 Ejercicios

- Dar ejemplos de caminos  $f, g, h$  en algún espacio  $X$  tales que  $f(1) = g(0)$ ,  $g(1) = h(0)$  y (i)  $(f * g) * h \neq f * (g * h)$ , (ii)  $(f * g) * h = f * (g * h)$ .
- Dar una demostración directa del resultado  $\varepsilon_{g(0)} * f \sim f * \varepsilon_{g(1)}$ .
- Sea  $f$  un camino de  $X$  y sea  $h: I \rightarrow I$  una aplicación continua tal que  $h(0) = 0$ ,  $h(1) = 1$ . Demostrar que  $f \sim fh$ .
- Utilizar el ejercicio anterior para dar una demostración directa de que  $f \sim \varepsilon_x * f$ , donde  $f$  es un camino con origen en  $x$ .
- Sean  $f, g: I \rightarrow X$  dos caminos en  $X$  de  $x$  a  $y$ . Probar que  $f \sim g$  si y sólo si  $f * \bar{g} \sim \varepsilon_x$ .
- Supongamos que  $h: I \rightarrow I$  es una aplicación continua tal que  $h(0) = 1$  y  $h(1) = 0$ . Probar que para todo camino  $f$  se tiene  $\bar{f} \sim fh$ .
- Supongamos que  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 = 1$  y que  $f: I \rightarrow X$  es un camino. Definimos caminos  $f_1, f_2$  por

$$f_1(t) = f((1-t)t_0 + tt_1),$$

$$f_2(t) = f((1-t)t_1 + tt_2).$$

Probar que  $f_1 * f_2 \sim f$ . (Indicación: Usar el Ejercicio (c) anterior.)

- Supongamos que  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_q = 1$  y que  $f: I \rightarrow X$  es un camino. Definimos los caminos  $f_1, f_2, \dots, f_q$  por

$$f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i).$$

Probar que  $[f] = [f_1] [f_2] \dots [f_q]$ .

- Supongamos que  $X$  es un espacio y que  $X = U \cup V$  con  $U, V$  subconjuntos abiertos. Demostrar que si  $f$  es un camino de  $X$  entonces  $[f]$  puede expresarse en la forma

$$[f] = [f_1] [f_2] \dots [f_q]$$

donde cada  $f_i$  es o bien un camino de  $U$  o bien un camino de  $V$ . (Indicación: Considerar el recubrimiento abierto  $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$  de  $I$ , reescribir  $f^{-1}(U)$  y  $f^{-1}(V)$  como uniones disjuntas de intervalos abiertos y usar la compacidad de  $I$ ; usar alternativamente el Ejercicio 7.13(g). Finalmente aplicar el resultado del ejercicio anterior.)

- (i) Probar que si  $h: (0,1) \rightarrow (0,1)$  es un homeomorfismo, entonces existe un homeomorfismo  $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$  tal que  $f(0,1) = h$ . Más aún, probar que un tal ho-

meomorfismo  $f$  es único. (Indicación: Considerar el intervalo cerrado  $(0, a]$  (cerrado en  $I$ ) y demostrar que  $h((0, a])$  es de la forma  $(0, b]$  o  $[c, 1)$  para algún  $b$  o  $c$ .)

(ii) Probar que si  $h: I \rightarrow I$  es un homeomorfismo, entonces  $h(\partial I) = \partial I$ . (Indicación: Usar que  $I$  es conexo.)

(iii) Supongamos que  $f, g: I \rightarrow X$  son caminos de  $X$  tales que  $f: I \rightarrow f(I)$  y  $g: I \rightarrow g(I)$  son homeomorfismos. Probar que si  $f(I) = g(I)$  entonces o bien  $f \sim g$  o bien  $f \sim \bar{g}$ . (Indicación: Usar la parte (ii) anterior.)

(iv) Supongamos que  $f, g: I \rightarrow X$  son caminos cerrados de  $X$  tales que  $f: \dot{I} \rightarrow f(I)$  y  $g: \dot{I} \rightarrow g(I)$  sean homeomorfismos. Probar que si  $f(I) = g(I)$  y  $f(\partial I) = g(\partial I)$ , entonces  $f \sim g$  o  $f \sim \bar{g}$ .

## Capítulo 15

# El grupo fundamental

En el último capítulo vimos que el conjunto de clases de equivalencia de caminos (dos caminos son equivalentes si son homótopos relativamente a  $\{0,1\}$ ) de un espacio  $X$  satisface prácticamente los axiomas de grupo. El problema es que la multiplicación no está siempre definida y que la identidad «flota». La manera de solventar estos problemas es usando el concepto de camino cerrado.

### 15.1 Definición

Se dice que un camino  $f$  es *cerrado* si  $f(0) = f(1)$ . Si  $f(0) = f(1) = x$ , decimos que  $f$  es un camino con *punto base*  $x$ .

Algunos libros usan la palabra «lazo» en lugar de camino cerrado.

Obsérvese que el producto  $f * g$  está definido para todo par de caminos cerrados con punto base en algún  $x \in X$ . Denotemos por  $\pi(X, x)$  el conjunto de clases de equivalencia de caminos cerrados con punto base  $x \in X$ . Este conjunto posee un producto definido por  $[f][g] = [f * g]$  para  $[f], [g] \in \pi(X, x)$ , que está bien definido en virtud del Lema 14.2. El resultado siguiente establece que  $\pi(X, x)$  es un grupo; lo llamaremos el *grupo fundamental* de  $X$  con punto base  $x$ .

### 15.2 Teorema

$\pi(X, x)$  es un grupo.

El resultado se deduce del Capítulo 14. El producto ya ha sido definido. El elemento identidad es  $[\epsilon_x]$  (véase el Lema 14.4), los inversos vienen dados por  $[f]^{-1} = [\bar{f}]$  (véase el Lema 14.5), y la asociatividad se deduce del Lema 14.3.

En virtud de la asociatividad del producto de clases de equivalencia de caminos, escribiremos a menudo  $[f * g * h]$  en lugar de  $[(f * g) * h]$ . Obsérvese, sin embargo, que no podemos escribir  $f * g * h$  en lugar de  $(f * g) * h$ .

Antes de seguir más adelante, el lector debería resolver los siguientes ejercicios.

### 15.3 Ejercicios

- ¿Por qué no es posible describir  $\pi(X, x)$  sin referirnos al punto base?
- Mostrar que  $\pi(X, x) = 0$  si  $X$  es un espacio topológico finito con la topología discreta.
- Calcular  $\pi(Q, 0)$ , donde  $Q$  denota el conjunto de los números racionales con la topología inducida por la topología usual de  $\mathbb{R}$ .
- Sea  $X$  un espacio para el cual  $\pi(X, x) = 0$ . Demostrar que si  $f, g$  son dos caminos de  $X$  con  $f(0) = g(0) = x$  y  $f(1) = g(1)$ , entonces  $f \sim g$ . (Indicación: Usar el Ejercicio 14.6(e).)

Si elegimos dos puntos base distintos  $x, y \in X$ , *a priori* no existe ninguna razón por la que  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$  deban estar relacionados. Sin embargo, si existe un camino de  $x$  a  $y$ , estos dos grupos están relacionados.

### 15.4 Teorema

Sean  $x, y \in X$ . Si existe un camino en  $X$  de  $x$  a  $y$ , entonces los grupos  $\pi(X, x)$ ,  $\pi(X, y)$  son isomorfos.

*Demostración.* Sea  $f$  un camino en  $X$  de  $x$  a  $y$ . Si  $g$  es un camino cerrado con punto base  $x$ , entonces  $(\bar{f} * g) * f$  es un camino cerrado con punto base  $y$ . Definimos, por tanto,

$$u_f: \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$$

por

$$u_f[g] = [\bar{f} * g * f].$$

Esta aplicación es un homomorfismo de grupos ya que

$$\begin{aligned} u_f([g][h]) &= u_f[g * h] \\ &= [\bar{f} * g * h * f] \\ &= [\bar{f} * g * f * \bar{f} * h * f] \\ &= [\bar{f} * g * f] [\bar{f} * h * f] \\ &= u_f[g] u_f[h] \end{aligned}$$

Usando el camino  $\bar{f}$  de  $y$  a  $x$  podemos definir

$$u_{\bar{f}}: \pi(X, y) \rightarrow \pi(X, x)$$

mediante

$$u_{\bar{f}}[h] = [f * h * \bar{f}].$$

Una simple comprobación nos demuestra que  $u_{\bar{f}}u_f[g] = [g]$  y  $u_{\bar{f}}u_f[h] = [h]$ , por lo que  $u_f$  es biyectiva y, por tanto, es un isomorfismo.

## 15.5 Corolario

Si  $X$  es un espacio arco-conexo,  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$  son grupos isomorfos para todo par de puntos  $x, y \in X$ .

El resultado anterior no es cierto si suprimimos la condición de que  $X$  sea arco-conexo; incluso si  $X$  es conexo, el resultado no vale en general. Una vez hayamos hecho algunos cálculos de grupos fundamentales (en los capítulos siguientes), el lector será capaz de construir ejemplos de espacios en los cuales  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$  no son isomorfos para todo par de puntos  $x, y \in X$ .

En virtud del Corolario 15.5 es tentador eliminar la  $x$  de  $\pi(X, x)$  cuando  $X$  es arco-conexo. Esto es peligroso, ya que no existe un isomorfismo canónico entre  $\pi(X, x)$  y  $\pi(X, y)$ , puesto que diferentes caminos de  $x$  a  $y$  pueden dar lugar a diferentes isomorfismos.

## 15.6 Ejercicios

- (a) Probar que dos caminos  $f, g$  de  $x$  a  $y$  dan lugar al mismo isomorfismo de  $\pi(X, x)$  en  $\pi(X, y)$  (esto es,  $u_f = u_g$ ) si y sólo si  $[g * \bar{f}]$  pertenece al centro de  $\pi(X, x)$ . El centro  $Z(G)$  de un grupo  $G$  está definido por

$$Z(G) = \{ a \in G; ab = ba \text{ para todo } b \in G \}.$$

- (b) Sea  $u_f: \pi(X, x) \rightarrow \pi(X, y)$  el isomorfismo determinado por un camino  $f$  de  $x$  a  $y$ . Probar que  $u_f$  es independiente de  $f$  si y sólo si  $\pi(X, x)$  es abeliano.

En el resto de este capítulo nos ocuparemos del efecto que una aplicación continua entre espacios topológicos ejerce sobre los grupos fundamentales. Sea  $\varphi: X \rightarrow Y$  una aplicación continua; los siguientes tres resultados son obvios.

- Si  $f, g$  son caminos en  $X$ ,  $\varphi f, \varphi g$  son caminos en  $Y$ .
- Si  $f \sim g$ , entonces  $\varphi f \sim \varphi g$ .
- Si  $f$  es un camino cerrado en  $X$  con punto base  $x \in X$ ,  $\varphi f$  es un camino cerrado en  $Y$  con punto base  $\varphi(x)$ .

Así pues, si  $[f] \in \pi(X, x)$ ,  $[\varphi f]$  es un elemento bien definido de  $\pi(Y, \varphi(x))$ . Definimos, por tanto,

$$\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$$



mediante

$$\varphi_* [f] = [\varphi f].$$

### 15.7 Lema

$\varphi_*$  es un homomorfismo de grupos.

La demostración es fácil:

$$\varphi_* ([f] [g]) = \varphi_* [f * g] = [\varphi(f * g)] = [\varphi f * \varphi g] = [\varphi f] [\varphi g] = \varphi_* [f] \varphi_* [g].$$

### 15.8 Definición

El homomorfismo  $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$  definido por  $\varphi_*[f] = [\varphi f]$ , donde  $\varphi: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, se llama el homomorfismo *inducido*.

Los dos resultados siguientes son muy fáciles de demostrar y se dejan para el lector.

### 15.9 Teorema

- (i) Supongamos que  $\varphi: X \rightarrow Y$  y  $\psi: Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas; entonces,  $(\psi\varphi)_* = \psi_* \varphi_*$ .
- (ii) Si  $1: X \rightarrow X$  es la identidad,  $1_*$  es el homomorfismo identidad de  $\pi(X, x)$ .

### 15.10 Corolario

Si  $\varphi: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo,  $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$  es un isomorfismo.

Así pues, el grupo fundamental nos proporciona una manera de pasar de la topología al álgebra. Este proceso se caracteriza por lo siguiente:

- (i) Para cada espacio topológico (con algún punto base) obtenemos un grupo (el grupo fundamental).
- (ii) Para cada aplicación continua entre espacios topológicos obtenemos un homomorfismo entre los grupos (el homomorfismo inducido).
- (iii) La composición de dos aplicaciones continuas induce la composición de los homomorfismos inducidos.
- (iv) La identidad induce el homomorfismo identidad.
- (v) Todo homeomorfismo induce un isomorfismo.

Esto nos proporciona un buen ejemplo de lo que es la *topología algebraica*. Reemplazamos topología por álgebra y entonces utilizamos nuestros conocimientos de álgebra

para aprender algo sobre topología. Desde luego, si los grupos fundamentales de dos espacios son isomorfos, esto no significa que los dos espacios sean homeomorfos. Sin embargo, si los grupos fundamentales no son isomorfos, los espacios no pueden ser homeomorfos.

**Observación.** Las características (i) - (v) mencionadas anteriormente son un ejemplo de un *functor*. Así, el grupo fundamental es un functor de la topología (y precisamente de la colección de espacios topológicos con punto base y aplicaciones continuas que conservan el punto base) al álgebra (a la colección de grupos y homomorfismos de grupos).

### 15.11 Ejercicios

- Dar un ejemplo de una aplicación continua inyectiva  $\varphi: X \rightarrow Y$  tal que  $\varphi_*$  no sea inyectiva. (Suponer que  $\pi(S^1, x) \cong \mathbb{Z}$ ,  $\pi(D^2, x) = 0$ .)
- Dar un ejemplo de una aplicación continua exhaustiva  $\varphi: X \rightarrow Y$  tal que  $\varphi_*$  no sea exhaustiva.
- Probar que si  $\varphi: X \rightarrow Y$  es continua y  $f$  es un camino de  $x$  a  $y$ , entonces  $\varphi_* u_f = u_{\varphi(f)} \varphi_* \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(y))$ , donde  $u_f$  y  $u_{\varphi(f)}$  son los isomorfismos entre los grupos fundamentales determinados por  $f$  y  $\varphi(f)$ .
- Probar que dos aplicaciones continuas  $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$  con  $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$  para algún punto  $x_0 \in X$ , inducen el mismo homomorfismo de  $\pi(X, x_0)$  en  $\pi(Y, \varphi(x_0))$  si  $\varphi$  y  $\psi$  son homótopas relativamente a  $x_0$ .
- Supongamos que  $A$  es un retracto de  $X$  con retracción  $i: X \rightarrow A$ . Probar que

$$i_*: \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$$

es un monomorfismo (donde  $i: A \rightarrow X$  denota la inclusión) y que

$$i_*: \pi(X, a) \rightarrow \pi(A, a)$$

es un epimorfismo para todo punto  $a \in A$ .

- Con la notación de (e), supongamos que  $i_* \pi(A, a)$  es un subgrupo normal de  $\pi(X, a)$ . Probar que  $\pi(X, a)$  es el producto directo de los grupos imagen ( $i_*$ ) y núcleo ( $i_*$ ).
- Probar que si  $A$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$ , la inclusión  $i: A \rightarrow X$  induce un isomorfismo

$$i_*: \pi(A, a) \rightarrow \pi(X, a)$$

para todo punto  $a \in A$ .

- Demostrar que si  $\varphi: X \rightarrow X$  es una aplicación continua homótopa a la identidad, entonces

$$\varphi_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, \varphi(x_0))$$

es un isomorfismo para cada punto  $x_0 \in X$ . (En caso de desesperación recurrir a la demostración del Teorema 15.12.)

El resultado siguiente generaliza el Ejercicio 15.11(d).

### 15.12 Teorema

Sean  $\varphi, \psi: X \rightarrow Y$  aplicaciones continuas entre espacios topológicos y sea  $F: \varphi \simeq \psi$  una homotopía. Si  $f: I \rightarrow Y$  es un camino de  $\varphi(x_0)$  a  $\psi(x_0)$  dado por  $f(t) = F(x_0, t)$ , los homomorfismos

$$\varphi_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x_0))$$

y

$$\psi_*: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y, \psi(x_0))$$

están relacionados por  $\psi_* = u_f \varphi_*$ , donde  $u_f$  es el isomorfismo de  $\pi(Y, \varphi(x_0))$  a  $\pi(Y, \psi(x_0))$  determinado por el camino  $f$ .

*Demostración.* Tenemos que demostrar que si  $[g] \in \pi(X, x_0)$ , entonces  $[\psi g] = [\bar{f} * \varphi g * f]$ . En otras palabras, hemos de ver que los caminos  $(\bar{f} * \varphi g) * f$  y  $\psi g$  son equivalentes. Obsérvese que

$$((\bar{f} * \varphi g) * f)(t) = \begin{cases} f(1-4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ \varphi g(4t-1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

que puede reescribirse como

$$((\bar{f} * \varphi g) * f)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ F(g(4t-1), 0) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F(x_0, 2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Se cumple

$$\psi g(t) = F(g(t), 1)$$

Para construir una homotopía entre  $(\bar{f} * \varphi g) * f$  y  $\psi g$  observemos que el camino  $\psi g$  es equivalente a  $(\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x$ , donde  $x = \psi(x_0)$ . El camino  $(\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x$  tiene la forma

$$((\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x)(t) = \begin{cases} F(x_0, 1) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ F(g(4t-1), 1) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F(x_0, 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definimos, pues, una aplicación  $H: I \times I \rightarrow Y$  por

$$H(t, s) = \begin{cases} F(x_0, 1-4t(1-s)) & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ F(g(4t-1), s) & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F(x_0, 1+2(t-1)(1-s)) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

La aplicación  $H$  es claramente continua y

$$\begin{aligned} H(t, 0) &= ((\bar{f} * \varphi g) * f)(t), \\ H(t, 1) &= ((\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x)(t), \\ H(0, s) &= F(x_0, 1) = \psi(x_0), \\ H(1, s) &= F(x_0, 1) = \psi(x_0). \end{aligned}$$

Así pues,  $(\bar{f} * \varphi g) * f \sim (\epsilon_x * \psi g) * \epsilon_x \sim \psi g$ , lo que demuestra que  $u_* \varphi_* = \psi_*$ .

Otra manera de enunciar el resultado anterior es afirmando la existencia de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi(X, x_0) & \xrightarrow{\varphi_*} & \pi(Y, \varphi(x_0)) \\ & \searrow \psi_* & \downarrow u_\Gamma \\ & & \pi(Y, \psi(x_0)) \end{array}$$

Los dos resultados siguientes se refieren a espacios homotópicamente equivalentes.

### 15.13 Teorema

Si  $\varphi: X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica,  $\varphi_*: \pi(X, x) \rightarrow \pi(Y, \varphi(x))$  es un isomorfismo para todo  $x \in X$ .

*Demostración.* Puesto que  $\varphi$  es una equivalencia homotópica, existe una aplicación continua  $\psi: Y \rightarrow X$  tal que  $\varphi\psi \simeq 1: Y \rightarrow Y$  y  $\psi\varphi \simeq 1: X \rightarrow X$ . Por el Teorema 15.12 tenemos  $(\varphi\psi)_* = 1_*$ , y, puesto que  $u_\Gamma$  y  $1_*$  son isomorfismos, también lo es  $(\psi\varphi)_* = \psi_* \varphi_*$ . Esto significa que  $\psi_*$  es un epimorfismo y que  $\varphi_*$  es un monomorfismo. Análogamente,  $\varphi_* \psi_*$  es un isomorfismo, lo que significa que  $\varphi_*$  es un epimorfismo y  $\psi_*$  es un monomorfismo. El resultado está pues demostrado.

### 15.14 Corolario

Todo espacio contráctil tiene grupo fundamental trivial.

Los espacios arco-conexos cuyo grupo fundamental es trivial tienen un nombre especial.

### 15.15 Definición

Un espacio topológico es *simplemente conexo* si es arco-conexo y  $\pi(X, x) = \{1\}$  para algún (y por tanto para todos)  $x \in X$ .

Así pues, los espacios contráctiles son simplemente conexos. El recíproco no es cierto, como el lector tendrá ocasión de ver más adelante.

### 15.16 Ejercicios

- (a) Supongamos que  $A$  es un retracto débil de  $X$  (véase el Ejercicio 13.10(e)). ¿Qué se puede decir de los homomorfismos siguientes

$$\begin{aligned} i_*: \pi(A, a) &\rightarrow \pi(X, a), \\ r_*: \pi(X, a) &\rightarrow \pi(A, a), \end{aligned}$$

para  $a \in A$ ?

- (b) Se dice que un espacio  $X$  tiene la propiedad  $C$  si para todo camino cerrado  $f: I \rightarrow X$  existe una homotopía  $F: I \times I \rightarrow X$  tal que

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= f(t), & F(t, 1) &\text{ es constante,} \\ F(0, s) &= F(1, s) & \text{ para todo } s \in I. \end{aligned}$$

Obsérvese que  $F$  no es necesariamente una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$ . Probar que si  $X$  tiene la propiedad  $C$ , entonces es simplemente conexo.

- (c) Supongamos que  $X = U \cup V$  con  $U, V$  abiertos y simplemente conexos y  $U \cap V$  arco-conexo. Probar que  $X$  es simplemente conexo. Deducir de esto que, para  $n \geq 2$ ,  $S^n$  es simplemente conexo. (Indicación: Utilizar los Ejercicios 14.6(i) y (e).)

El último resultado que vamos a demostrar en este capítulo se refiere al grupo fundamental de un producto de dos espacios topológicos. Podíamos haberlo demostrado mucho antes.

### 15.17 Teorema

Sean  $X, Y$  dos espacios topológicos arco-conexos. El grupo fundamental del producto  $X \times Y$  es isomorfo al producto de los grupos fundamentales de  $X$  e  $Y$ .

*Demostración.* Denotemos por  $p: X \times Y \rightarrow X$ ,  $q: X \times Y \rightarrow Y$  las proyecciones. Definimos

$$\varphi: \pi(X \times Y, (x_0, y_0)) \rightarrow \pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$$

por

$$\varphi[f] = (p_*[f], q_*[f]) = ([pf], [qf]).$$

En primer lugar comprobemos que  $\varphi$  está bien definida. Si  $f \sim g$ , existe una aplicación continua  $F: I \times I \rightarrow X \times Y$  tal que  $F(t, 0) = f(t)$ ,  $F(t, 1) = g(t)$  y  $F(0, s) = F(1, s) = (x_0, y_0)$ . Las aplicaciones continuas  $pF: I \times I \rightarrow X$  y  $qF: I \times I \rightarrow Y$  nos dan las equivalencias  $pf \sim pg$  y  $qf \sim qg$ , con lo que  $\varphi[f] = \varphi[g]$  y, por tanto,  $\varphi$  está bien definida.

Para ver que  $\varphi$  es exhaustiva, supongamos que  $([f_1], [f_2])$  pertenece a  $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$ . Consideremos  $f: I \rightarrow X \times Y$  dada por  $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ . Claramente  $\varphi[f] = ([f_1], [f_2])$ .

Para demostrar que  $\varphi$  es inyectiva, supongamos que  $\varphi[f] = \varphi[g]$ . Esto significa que  $pf \sim pg$  y  $qf \sim qg$ . Si  $F_1: I \times I \rightarrow X$  y  $F_2: I \times I \rightarrow Y$  nos dan estas equivalencias, entonces  $F: I \times I \rightarrow X \times Y$ , definida por  $F(t, s) = (F_1(t, s), F_2(t, s))$  nos proporciona la equivalencia deseada  $f \sim g$ .

Finalmente, el que  $\varphi$  sea un homomorfismo resulta inmediatamente del hecho de que si  $f, g: I \rightarrow X \times Y$  son caminos con  $f(1) = g(0)$ , entonces  $p(f * g) = pf * pg$  y  $q(f * g) = qf * qg$ .

En los ejercicios damos otras formas alternativas de demostrar el Teorema 15.17.

## 15.18 Ejercicios

- Probar que el producto de dos espacios simplemente conexos es simplemente conexo.
- Sean  $f: I \rightarrow X$ ,  $g: I \rightarrow Y$  caminos cerrados con punto base  $x_0 \in X$  y  $y_0 \in Y$  respectivamente. Sean  $i: X \rightarrow X \times Y$  y  $j: Y \rightarrow X \times Y$  las inclusiones definidas por  $i(x) = (x, y_0)$  y  $j(y) = (x_0, y)$ . Demostrar que los dos caminos  $(if) * (jg)$  y  $(jg) * (if)$  de  $X \times Y$  son equivalentes.
- Con la notación de (b) demostrar que la aplicación de  $\pi(X, x_0) \times \pi(Y, y_0)$  en  $\pi(X \times Y, (x_0, y_0))$  dada por  $([f], [g]) \rightarrow [(if) * (jg)]$  es un isomorfismo de grupos.
- Un *grupo topológico*  $G$  es un grupo que es a su vez un espacio topológico, de manera que las aplicaciones

$$\mu: G \times G \rightarrow G \quad \nu: G \rightarrow G$$

definidas por  $\mu(g_1, g_2) = g_1 g_2$  y  $\nu(g) = g^{-1}$  sean continuas. Sean  $f, h$  caminos cerrados de  $G$  con punto base el elemento unidad de  $G$ . Definimos  $f \cdot h$  por

$$(f \cdot h)(t) = \mu(f(t), h(t)) \quad t \in I.$$

Probar que

$$f * h \sim f \cdot h \sim h * f$$

y deducir que el grupo fundamental  $\pi(G, e)$  es abeliano. Demostrar, además, que el homomorfismo

$$\nu_*: \pi(G, e) \rightarrow \pi(G, e)$$

cumple  $\nu_*[f] = [f]^{-1}$ .

- (e) Para  $S^1 \subseteq \mathbb{C}$  definimos  $\mu: S^1 \times S^1 \rightarrow S^1$  por  $\mu(z_1, z_2) = z_1 z_2$  y  $\nu: S^1 \rightarrow S^1$  por  $\nu(z) = z^{-1}$ . Probar que  $S^1$  es un grupo topológico. Deducir de esto que  $\pi(S^1, 1)$  es un grupo abeliano.
- (f) Generalización del Ejercicio (d) anterior. Sea  $x_0$  un punto del espacio  $X$ . Supongamos que existe una aplicación continua  $\mu: X \times X \rightarrow X$  tal que

$$\mu(x, x_0) = \mu(x_0, x) = x$$

para todo  $x \in X$ . Probar que si  $f, g: I \rightarrow X$  son caminos cerrados con punto base  $x_0 \in X$  y  $i, j: X \rightarrow X \times X$  denotan las inclusiones  $i(x) = (x, x_0)$ ,  $j(x) = (x_0, x)$  entonces:

$$\mu((if) * (jg)) = f * g.$$

Deducir, aplicando el Ejercicio (b) anterior, que  $\pi(X, x_0)$  es un grupo abeliano.

- (g) Generalización del Ejercicio (f) anterior. Un espacio  $X$  se llama un *H-espacio* (H de Heinz Hopf) si existe una aplicación continua  $\mu: X \times X \rightarrow X$  y un punto  $x_0 \in X$  tales que  $\mu i \simeq 1$  (rel  $x_0$ ) y  $\mu j \simeq 1$  (rel  $x_0$ ), donde  $i$  y  $j$  son las inclusiones definidas en (f). Obsérvese que  $\mu(x_0, x_0) = x_0$ . Probar que el grupo fundamental  $\pi(X, x_0)$  de un H-espacio es abeliano. (Indicación: Demostrar que  $\mu((if) * (jg)) \sim f * g$ .)

El grupo fundamental  $\pi(X, x_0)$  se denota a menudo por  $\pi_1(X, x_0)$ , el «1» motivado por el hecho de que podemos usar caminos (aplicaciones de  $I \subseteq \mathbb{R}^1$ ) para definir el grupo fundamental. Más generalmente, podemos definir  $\pi_n(X, x_0)$  usando aplicaciones de  $I^n \subseteq \mathbb{R}^n$  en  $X$ . Se obtiene así el llamado *n-ésimo grupo de homotopía* de  $X$  en  $x_0$ . Vamos a indicar brevemente las definiciones adecuadas; el lector que no esté interesado en esta cuestión puede pasar directamente al capítulo siguiente.

Denotemos por  $\partial I^n$  el borde de  $I^n$ , es decir

$$\partial I^n = \{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \in I^n; t_i = 0 \text{ ó } 1 \text{ para algún } i \}.$$

El conjunto  $\pi_n(X, x_0)$  está formado por las clases de homotopía relativa a  $\partial I^n$  de aplicaciones continuas  $f: I^n \rightarrow X$  tales que  $f(\partial I^n) = x_0$ . Se define un producto

$$[f] [g] = [f * g]$$

donde

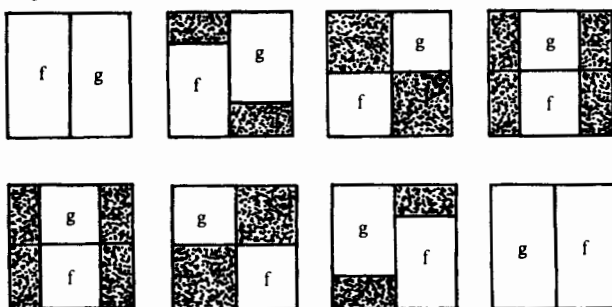
$$(f * g)(t) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \dots, t_n) & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \dots, t_n) & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Puede comprobarse fácilmente que este producto está bien definido y que dota a  $\pi_n(X, x_0)$  de una estructura de grupo. Desde luego, si  $n = 1$ , obtenemos el grupo fundamental. El grupo fundamental no es necesariamente un grupo abeliano como veremos más adelante; sin embargo,  $\pi_n(X, x_0)$  es siempre un grupo abeliano, para  $n \geq 2$ .

## 15.19 Ejercicios

- Probar que  $\pi_n(X, x_0)$  es un grupo.
- Probar que si existe un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $x_1$ , entonces  $\pi_n(X, x_0)$  y  $\pi_n(X, x_1)$  son isomorfos.
- Si  $\varphi: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, definir  $\varphi_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$  y demostrar que  $\varphi_*$  es un homomorfismo. Probar también el Teorema 15.9 para los  $n$ -ésimos grupos de homotopía. Deducir de esto qué espacios homeomorfos tienen grupos de homotopía isomorfos.
- Probar que espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de homotopía isomorfos.
- Probar que si  $n \geq 2$ ,  $\pi_n(X, x_0)$  es un grupo abeliano. (Indicación: La Figura 15.1 sugiere una homotopía entre  $f * g$  y  $g * f$ .)

Figura 15.1



**Observación:** Existe una especie de recíproco del Ejercicio (d) anterior. Es un teorema (debido a J. H. C. Whitehead) que establece que si  $X$  e  $Y$  son un cierto tipo de espacios topológicos (los llamados CW-complejos arco-conexos) y si  $\varphi: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua que induce isomorfismos  $\varphi_*: \pi_n(X, x_0) \rightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$  para todo  $n \geq 1$ , entonces  $\varphi$  es una equivalencia homotópica.



## Capítulo 16

# El grupo fundamental de la circunferencia

Hasta ahora hemos calculado únicamente el grupo fundamental de un espacio en algunos casos triviales. En este capítulo calcularemos el grupo fundamental de la circunferencia  $S^1$ : es el grupo  $\mathbb{Z}$  de los enteros. Intuitivamente podemos ver este resultado de la siguiente manera: un camino cerrado  $f$  de  $S^1$  con base  $1 \in S^1$  da un cierto número de vueltas alrededor de la circunferencia; este número se llama el número de vueltas o grado de  $f$ . (Empezar en  $f(0) = 1$  y considerar  $f(t)$  cuando  $t$  crece; cada vez que damos una vuelta a la circunferencia en la dirección contraria a las agujas del reloj nos anotamos un tanto positivo, cada vez que damos una vuelta en la dirección de las agujas del reloj nos anotamos un tanto negativo. El resultado total es el número de vueltas o grado de  $f$ .) Así pues, a cada camino cerrado  $f$  con punto base  $1$  podemos asociarle un entero. Resulta entonces que dos caminos cerrados son equivalentes (es decir, homótopos relativamente a  $\{0,1\}$ ) si y sólo si sus grados coinciden. Finalmente, para cada entero  $n$  existe un camino cerrado de grado  $n$ .

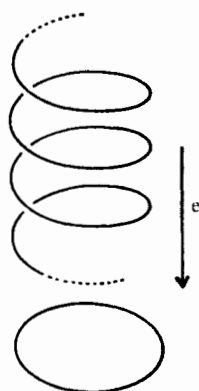
Para obtener una definición más precisa del grado de un camino cerrado consideremos la siguiente aplicación de los números reales  $\mathbb{R}$  en  $S^1$ :

$$\begin{aligned} e: \mathbb{R} &\rightarrow S^1, \\ t &\rightarrow \exp(2\pi it). \end{aligned}$$

Geométricamente, podemos pensar los reales como una espiral, siendo  $e$  la proyección (véase la Figura 16.1). Obsérvese que  $e^{-1}(1) = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ . La idea es ahora la siguiente: Dado  $f: I \rightarrow S^1$  con  $f(0) = f(1) = 1$  demostramos que existe una única aplicación  $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\tilde{f}(0) = 0$  y  $e\tilde{f} = f$  (la aplicación  $\tilde{f}$  se llama una *elevación* de  $f$ ). Puesto que  $f(1) = 1$ , debemos tener  $\tilde{f}(1) \in e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$ ; este entero es por definición el grado de  $f$ . Demostraremos que si  $f_0$  y  $f_1$  son caminos equivalentes de  $S^1$ , entonces  $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ , lo que nos define una aplicación  $\pi(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ , que finalmente demostraremos que es un isomorfismo de grupos.

El «método de cálculo» de  $\pi(S^1, 1)$  que estamos presentando se generaliza a otros espacios; véanse los tres capítulos siguientes. De hecho, el lema siguiente es el punto de partida para una definición crucial en el Capítulo 17.

Figura 16.1



## 16.1 Lema

Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $S^1 - \{1\}$  y sea  $V = I \cap e^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}$ . Entonces  $e^{-1}(U)$  es la unión disjunta de los conjuntos abiertos  $V + n = \{v+n; v \in V\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , cada uno de los cuales se aplica por  $e$  homeomórficamente sobre  $U$ .

*Demostración.* Supongamos que  $U$  es un intervalo abierto, esto es

$$U = \{ \exp(2\pi it); 0 \leq a < t < b \leq 1 \}$$

para ciertos  $a, b$ . Entonces  $V = (a, b)$  y  $V + n = (a+n, b+n)$ . Está claro que  $e^{-1}(U)$  es la unión disjunta de los conjuntos abiertos  $V + n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Denotemos por  $e_n$  la restricción de  $e$  a  $(a+n, b+n)$ . Claramente  $e_n$  es continua y biyectiva. Para comprobar que  $e_n^{-1}$  es continua, consideremos  $(a+n, b+n)$  y sea  $W \subseteq (a+n, b+n)$  un subconjunto cerrado (y, por tanto, compacto). Puesto que  $W$  es compacto y  $S^1$  es de Hausdorff,  $e_n$  induce un homeomorfismo  $W \rightarrow e_n(W)$  en virtud del Teorema 8.8. En particular  $e_n(W)$  es compacto y, por tanto, cerrado. Esto demuestra que si  $W$  es un conjunto cerrado, entonces  $e_n(W)$  es también cerrado; así pues,  $e_n^{-1}$  es continua y, por tanto,  $e_n$  es un homeomorfismo.

## 16.2 Ejercicio

Demostrar que el lema anterior es válido para  $S^1 - \{x\}$ , donde  $x$  es un punto arbitrario de  $S^1$ .

### 16.3 Corolario

Toda aplicación  $f: X \rightarrow S^1$  no exhaustiva es nulhomótopa.

*Demostración.* Si  $x \notin \text{imagen}(f)$ , entonces  $S^1 - \{x\}$  es homeomorfo a  $(0,1)$ , que es contráctil. ( $x = \exp(2\pi is)$  para algún  $s$  y  $S^1 = \{\exp(2\pi it); s \leq t \leq 1+s\}$ .)

Llegamos ahora a uno de los más importantes resultados de este capítulo: el llamado *teorema de elevación de caminos* (para  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ ).

### 16.4 Teorema

Toda aplicación continua  $f: I \rightarrow S^1$  tiene una elevación  $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$ . Además, dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  con  $e(x_0) = f(0)$  existe una única elevación  $\tilde{f}$  tal que  $\tilde{f}(0) = x_0$ .

*Demostración.* Para cada  $x \in S^1$  sea  $U_x$  un entorno abierto de  $x$  tal que  $e^{-1}(U_x)$  sea la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$  cada uno de los cuales se aplica por  $e$  homeomórficamente sobre  $U_x$ . El conjunto  $\{f^{-1}(U_x); x \in S^1\}$  puede expresarse en la forma  $\{(x_j, y_j) \cap I; j \in J\}$ , que es un recubrimiento abierto de  $I$ . Puesto que  $I$  es compacto, existe un subrecubrimiento finito de la forma

$$[0, t_1 + \epsilon_1), (t_2 - \epsilon_2, t_2 + \epsilon_2), \dots, (t_n - \epsilon_n, 1]$$

con  $t_i + \epsilon_i > t_{i+1} - \epsilon_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Elijamos ahora  $a_i \in (t_{i+1} - \epsilon_{i+1}, t_i + \epsilon_i)$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , de manera que

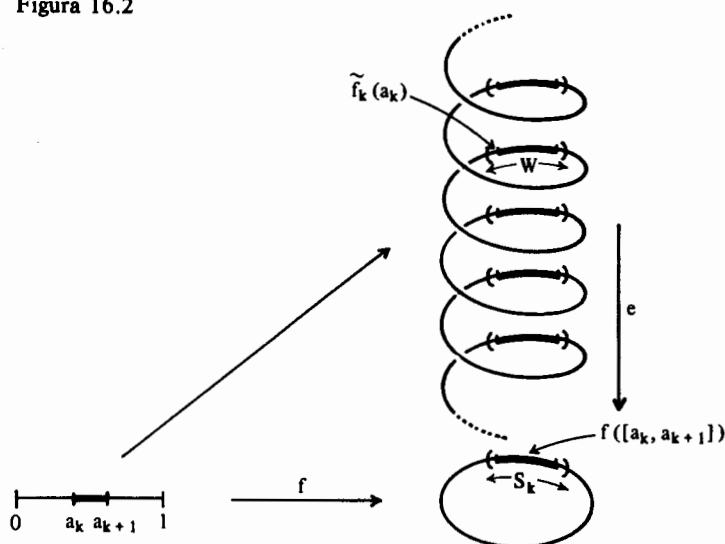
$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 1.$$

Obviamente  $f([a_i, a_{i+1}]) \subset S^1$ , pero aún más:  $f([a_i, a_{i+1}])$  está contenido en un subconjunto abierto  $S_i$  de  $S^1$  tal que  $e^{-1}(S_i)$  es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\mathbb{R}$ , cada uno de los cuales se aplica por  $e$  homeomórficamente sobre  $S_i$ .

Definiremos elevaciones  $\tilde{f}_k$  inductivamente sobre  $[0, a_k]$  para  $k = 0, 1, \dots, n$  de manera que  $\tilde{f}_k(0) = x_0$ . Para  $k = 0$ , es trivial:  $\tilde{f}_0(0) = x_0$ ; no hay otra elección. Supongamos que hemos definido  $\tilde{f}_k: [0, a_k] \rightarrow \mathbb{R}$  de manera única. Recordemos que  $f([a_i, a_{i+1}]) \subseteq S_i$  y que  $e^{-1}(S_i)$  es la unión disjunta de  $\{W_j; j \in J\}$  donde  $e|_{W_j}: W_j \rightarrow S_i$  es un homeomorfismo para cada  $j \in J$ . Ahora bien, existe un único miembro  $W$  de  $\{W_j; j \in J\}$  tal que  $\tilde{f}_k(a_k) \in W$ ; véase la Figura 16.2. Cualquier extensión  $\tilde{f}_{k+1}$  debe aplicar  $[a_k, a_{k+1}]$  en  $W$  ya que  $[a_k, a_{k+1}]$  es arco-conexo. Puesto que la restricción  $e|_W: W \rightarrow S_i$  es un homeomorfismo, existe una única aplicación  $\rho: [a_k, a_{k+1}] \rightarrow W$  tal que  $e\rho = f|_{[a_k, a_{k+1}]}$  (de hecho  $\rho = (e|_W)^{-1}f$ ). Definimos, entonces,  $\tilde{f}_{k+1}$  por

$$\tilde{f}_{k+1}(s) = \begin{cases} \tilde{f}_k(s) & 0 \leq s \leq a_k, \\ \rho(s) & a_k \leq s \leq a_{k+1}, \end{cases}$$

Figura 16.2



que es continua en virtud del Lema 12.2 ya que  $\tilde{f}_k(a_k) = \rho(a_k)$  y, además, es única por construcción. Por inducción obtenemos  $\tilde{f}$ .

Este teorema nos permite definir el grado de un camino cerrado de  $S^1$ . Sea  $f$  un camino cerrado de  $S^1$  con punto base 1 y sea  $\tilde{f}: I \rightarrow \mathbb{R}$  la única elevación tal que  $\tilde{f}(0) = 0$ . Puesto que  $e^{-1}(\tilde{f}(1)) = e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$  resulta que  $\tilde{f}(1)$  es un entero, que definimos como el *grado* de  $f$ . Para demostrar que caminos equivalentes tienen el mismo grado debemos probar en primer lugar que caminos equivalentes tienen elevaciones equivalentes. Para ello en el teorema anterior reemplazamos  $I$  por  $I^2$  para obtener

## 16.5 Lema

Toda aplicación continua  $F: I^2 \rightarrow S^1$  tiene una elevación  $\tilde{F}: I^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Además, dado  $x_0 \in \mathbb{R}$  con  $e(x_0) = F(0,0)$ , existe una única elevación  $\tilde{F}$  tal que  $\tilde{F}(0,0) = x_0$ .

**Demostración.** La demostración es bastante análoga a la del Teorema 16.4. Puesto que  $I^2$  es compacto, podemos encontrar

$$\begin{aligned} 0 &= a_0 < a_1 < \dots < a_n = 1, \\ 0 &= b_0 < b_1 < \dots < b_m = 1, \end{aligned}$$

tales que  $F(R_{i,j}) \subset S^1$ , donde  $R_{i,j}$  es el rectángulo

$$R_{i,j} = \{ (t,s) \in I^2; a_i \leq t \leq a_{i+1}, b_j \leq s \leq b_{j+1} \}.$$

La elevación  $\tilde{F}$  se define inductivamente sobre los rectángulos

$$R_{0,0}, R_{0,1}, \dots, R_{0,m}, R_{1,0}, R_{1,1}, \dots$$

por un proceso similar al del Teorema 16.4. Dejamos los detalles para el lector.

Como corolario obtenemos el llamado *teorema de monodromía* para  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , que nos dice que caminos equivalentes tienen el mismo grado.

## 16.6 Corolario

Supongamos que  $f_0$  y  $f_1$  son caminos equivalentes de  $S^1$  con punto base 1. Si  $\tilde{f}_0$  y  $\tilde{f}_1$  son elevaciones tales que  $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ , entonces  $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ .

*Demostración.* Sea  $F$  la homotopía rel  $\{0,1\}$  entre  $f_0$  y  $f_1$ . Podemos elevarla de manera única a  $\tilde{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\tilde{F}(0,0) = \tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ . Puesto que  $F(t,0) = f_0(t)$  y  $F(t,1) = f_1(t)$ , resulta  $\tilde{F}(t,0) = \tilde{f}_0(t)$  y  $\tilde{F}(t,1) = \tilde{f}_1(t)$ . Además,  $\tilde{F}(1,t)$  es un camino de  $\tilde{f}_0(1)$  a  $\tilde{f}_1(1)$  ya que  $F(1,t) = f_0(t) = f_1(t)$ . Pero  $\tilde{F}(1,t) \in e^{-1}(f_0(1)) \cong \mathbb{Z}$ , lo que significa que  $\tilde{F}(1,t)$  es constante, y, por tanto,  $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ , que completa la demostración. Obsérvese que de hecho  $\tilde{F}$  es una homotopía relativa a  $\{0,1\}$  entre  $\tilde{f}_0$  y  $\tilde{f}_1$ .

Estamos ahora en condiciones de calcular el grupo fundamental de la circunferencia.

## 16.7 Teorema

$$\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}.$$

*Demostración.* Definamos  $\varphi: \pi(S^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $\varphi([f]) = \text{grado}(f)$ , el grado de  $f$ . Recordemos que  $\text{grado}(f) = \tilde{f}(1)$ , donde  $\tilde{f}$  es la única elevación de  $f$  tal que  $\tilde{f}(0) = 0$ . La aplicación  $\varphi$  está bien definida en virtud del Corolario 16.6. Demostraremos que  $\varphi$  es un isomorfismo de grupos.

En primer lugar demostramos que  $\varphi$  es un homomorfismo. Denotemos por  $\ell_a(f)$  la elevación de  $f$  con origen  $a \in e^{-1}(\tilde{f}(0))$ . Así pues,  $\ell_a(f) = \tilde{f}$  y  $\ell_a(f)(t) = \tilde{f}(t) + a$  para todo camino  $S^1$  con origen en 1. Está claro que

$$\ell_a(f * g) = \ell_a(f) * \ell_b(g)$$

donde  $b = \tilde{f}(1) + a$ . Así pues, si  $[f], [g] \in \pi(S^1, 1)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \varphi([f] [g]) &= \varphi([f * g]) = \widetilde{f * g}(1) \\ &= \ell_0(f * g)(1) \\ &= (\ell_0(f) * \ell_b(g))(1) \text{ donde } b = \tilde{f}(1) \\ &= \ell_b(g)(1) \\ &= b + \tilde{g}(1) \\ &= \tilde{f}(1) + \tilde{g}(1) \\ &= \varphi([f]) + \varphi([g]) \end{aligned}$$

lo que demuestra que  $\varphi$  es un homomorfismo.

La demostración de que  $\varphi$  es exhaustiva es bastante fácil: Dado  $n \in \mathbb{Z}$ , consideremos  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(t) = nt$ ; entonces  $eg: I \rightarrow S^1$  es un camino cerrado con punto base 1. Puesto que  $g$  es la elevación de  $eg$  tal que  $g(0) = 0$ , resulta  $\varphi([eg]) = \text{grado}(eg) = g(1) = n$ , que demuestra la exhaustividad de  $\varphi$ .

Para demostrar que  $\varphi$  es inyectiva, supongamos que  $\varphi([f]) = 0$ , es decir  $\text{grado}(f) = 0$ . Esto significa que la elevación  $\tilde{f}$  de  $f$  satisface la igualdad  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(1) = 0$ . Puesto que  $\mathbb{R}$  es contráctil, resulta  $\tilde{f} \simeq \varepsilon_0$  (rel  $\{0, 1\}$ ); en otras palabras, existe una aplicación  $F: I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(0, t) = \tilde{f}(t)$ ,  $F(1, t) = 0$  y  $F(t, 0) = F(t, 1) = 0$ . Se tiene, de hecho,  $F(s, t) = (1-s)\tilde{f}(t)$ . Pero entonces  $eF: I^2 \rightarrow S^1$  es tal que  $eF(0, t) = \tilde{f}(t)$ ,  $eF(1, t) = 1$ ,  $eF(t, 0) = eF(t, 1) = 1$  y, por tanto,  $\tilde{f} \simeq \varepsilon_1$  (rel  $\{0, 1\}$ ); es decir  $[f] = 1 \in \pi(S^1, 1)$ , lo que demuestra la inyectividad de  $\varphi$  y, por tanto,  $\varphi$  es un isomorfismo.

Esto completa la demostración del teorema principal de este capítulo. Como corolario se obtiene inmediatamente

## 16.8 Corolario

El grupo fundamental del toro es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

Cerramos este capítulo dando dos aplicaciones. La primera se conoce como el *teorema fundamental del álgebra*.

## 16.9 Corolario

Todo polinomio complejo no constante tiene una raíz.

*Demostración.* Podemos suponer sin pérdida de generalidad que nuestro polinomio es de la forma

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{k-1} z^{k-1} + z^k$$

con  $k \geq 1$ . Supongamos que  $p$  no tiene ningún cero (es decir, ninguna raíz). Definimos una aplicación  $G: I \times [0, \infty) \rightarrow S^1 \subset \mathbb{C}$  por

$$G(t, r) = \frac{p(r \exp(2\pi i t))}{|p(r \exp(2\pi i t))|} \quad \frac{|p(r)|}{p(r)}$$

para  $0 \leq t \leq 1$  y  $r \geq 0$ . Claramente  $G$  es continua. Definimos  $F: I^2 \rightarrow S^1$  por

$$F(t, s) = \begin{cases} G(t, s/(1-s)) & 0 \leq t \leq 1, 0 \leq s < 1, \\ \exp(2\pi i k t) & 0 \leq t \leq 1, s = 1. \end{cases}$$

Observando que

$$\lim_{s \rightarrow 1} F(t, s) = \lim_{s \rightarrow 1} G(t, s/(1-s)) = \lim_{r \rightarrow \infty} G(t, r) = (\exp(2\pi i t))^k$$

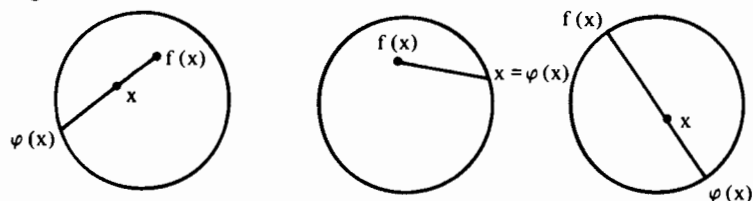
se ve fácilmente que  $F$  es continua y que constituye una homotopía rel $\{0, 1\}$  entre  $f_0(t) = F(t, 0)$  y  $f_1(t) = F(t, 1)$ . Pero  $f_0(t) = 1$  y  $f_1(t) = \exp(2\pi i k t)$ , por lo que  $\text{grado}(f_0) = 0$  mientras que  $\text{grado}(f_1) = k$ , que es una contradicción (salvo en el caso  $k = 0$ ).

Nuestra segunda aplicación la constituye el *teorema del punto fijo de Brouwer para el plano*. Recordemos que en el Capítulo 10 probamos un teorema del punto fijo para  $I$ ; el siguiente resultado es el teorema análogo para  $D^2$ . Este teorema es también cierto en dimensiones superiores, pero la demostración requiere herramientas más complejas que el grupo fundamental.

### 16.10 Corolario

Toda aplicación continua  $f: D^2 \rightarrow D^2$  tiene un punto fijo; es decir, un punto  $x$  tal que  $f(x) = x$ .

Figura 16.3



*Demostración.* Supongamos, por el contrario, que  $x \neq f(x)$  para todo  $x \in D^2$ . Entonces podemos definir una aplicación  $\varphi: D^2 \rightarrow S^1$  tomando  $\varphi(x)$  como el punto de  $S^1$  obtenido como intersección de  $S^1$  y la semirrecta con origen  $f(x)$  que pasa por  $x$ ; véase la Figura 16.3. Es obvio que  $\varphi$  es una aplicación continua. Denotemos por  $i: S^1 \rightarrow D^2$  la inclusión; entonces,  $\varphi \circ i = 1$ , y, por tanto, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{1} & S^1 \\ & \searrow i & \nearrow \varphi \\ & D^2 & \end{array}$$

que nos da otro diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \pi(S^1, 1) & \xrightarrow{1} & \pi(S^1, 1) \\ & \searrow i_* & \nearrow \varphi_* \\ & \pi(D^2, 1) & \end{array}$$

Pero  $\pi(D^2, 1) = 0$ , ya que  $D^2$  es contráctil, por lo que tendríamos un diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{1} & \mathbb{Z} \\ & \searrow i_* & \nearrow \varphi_* \\ & 0 & \end{array}$$

que es imposible. Esta contradicción demuestra el resultado.

## 16.11 Ejercicios

- (a) Dada  $[f] \in \pi(S^1, 1)$ , sea  $\gamma$  la curva  $\{f(t); t \in I\} \subset \mathbb{C}$  y definamos

$$w(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

Probar que (i)  $w(f)$  es un entero,

(ii)  $w(f)$  es independiente de la elección de  $f \in [f]$ ,

(iii)  $w(f) = \text{grado}(f)$ .

- (b) Sea  $f: S^1 \rightarrow S^1$  la aplicación definida por  $f(z) = z^k$  para algún entero  $k$ . Describir  $f_*: \pi(S^1, 1) \rightarrow \pi(S^1, 1)$  en términos del isomorfismo  $\pi(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ .
- (c) Sean  $\alpha, \beta$  los siguientes caminos cerrados de  $S^1 \times S^1$ .

$$\alpha(t) = (\exp(2\pi it), 1), \quad \beta(t) = (1, \exp(2\pi it)).$$

Demostrar, por medio de diagramas, que  $\alpha * \beta \sim \beta * \alpha$ .

- (d) Calcular  $\pi(\underbrace{S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1}_n, (1, 1, \dots, 1))$ .

- (e) Utilizando el Ejercicio 15.16(c), deducir que el toro no es homeomorfo a la esfera  $S^2$ .
- (f) Probar que el conjunto de puntos  $z \in D^2$  para los cuales  $D^2 - \{z\}$  es simplemente conexo es precisamente  $S^1$ . Probar, entonces, que si  $f: D^2 \rightarrow D^2$  es un homeomorfismo,  $f(S^1) = S^1$ .
- (g) Hallar el grupo fundamental de los siguientes espacios:
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$ .
  - $\mathbb{C}^*/G$ , donde  $G$  es el grupo de homeomorfismos  $\{\varphi^n; n \in \mathbb{Z}\}$  con  $\varphi(z) = 2z$ .
  - $\mathbb{C}^*/H$ , donde  $H = \{\psi^n; n \in \mathbb{Z}\}$  con  $\psi(z) = 2\bar{z}$ .
  - $\mathbb{C}^*/\langle e, a \rangle$ , donde  $e$  es el homeomorfismo identidad y  $az = -\bar{z}$ .



## Capítulo 17

# Espacios recubridores

En este y en los próximos capítulos estudiaremos algunas generalizaciones de los conceptos y resultados del Capítulo 16.

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación continua. Decimos que el subconjunto abierto  $U \subseteq X$  está *propriadamente recubierto* por  $p$  si  $p^{-1}(U)$  es la unión disjunta de subconjuntos abiertos de  $\tilde{X}$ , cada uno de los cuales se aplica por  $p$  homeomórficamente sobre  $U$ . Se dice que la aplicación continua  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es una *aplicación recubridora* si todo punto  $x \in X$  tiene un entorno abierto propriadamente recubierto por  $p$ . Entonces diremos que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un *recubrimiento*,  $\tilde{X}$  es el *espacio recubridor* de  $X$  y  $X$  es el *espacio base* de la aplicación recubridora  $p: \tilde{X} \rightarrow X$ .

En otras palabras,  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento si

- (i)  $p$  es exhaustiva, y
- (ii) para todo  $x \in X$  existe un entorno abierto  $U$  de  $x$  tal que

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$$

para una cierta colección  $\{U_j; j \in J\}$  de subconjuntos de  $\tilde{X}$  tales que  $U_j \cap U_k = \emptyset$  para  $j \neq k$  y  $p|_{U_j}: U_j \rightarrow U$  es un homeomorfismo para cada  $j \in J$ .

De los resultados del Capítulo 16 se deduce que  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  es un recubrimiento. Obviamente, todo homeomorfismo  $h: X \rightarrow X$  es una aplicación recubridora. Otro ejemplo trivial de recubrimiento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  consiste en tomar  $\tilde{X}$  como  $X \times Y$ , donde  $Y$  es un espacio discreto y  $p$  es la proyección canónica. Un ejemplo interesante de aplicación recubridora lo constituye  $p_n: S^1 \rightarrow S^1$ , donde  $p_n(z) = z^n$  ( $n \neq 0$ , considerar  $S^1 \subset \mathbb{C}$ ). Para ver que efectivamente es una aplicación recubridora basta observar que  $S^1 - \{x\}$  está propriadamente recubierto por  $p_n$  para todo  $x \in S^1$ .

Algunos  $G$ -espacios dan lugar a espacios recubridores. Supongamos que  $X$  es un  $G$ -espacio. Decimos que la acción de  $G$  sobre  $X$  es *propriadamente discontinua* si para cada  $x \in X$  existe un entorno abierto  $V$  de  $x$  tal que  $g \cdot V \cap g' \cdot V = \emptyset$  para todo  $g, g' \in G$  con  $g \neq g'$ .

Obsérvese que si la acción es propiamente discontinua,  $g \cdot x \neq x$  para todo  $g \in G$ ,  $g \neq 1$  y todo  $x \in X$ , ya que si  $x \in V$ , entonces  $g \cdot x \in g \cdot V$ . Antes de dar algunos ejemplos demostraremos un teorema que justifica la introducción de acciones propiamente discontinuas.

### 17.1 Teorema

Sea  $X$  un  $G$ -espacio. Si la acción de  $G$  sobre  $X$  es propiamente discontinua  $p: X \rightarrow X/G$  es un recubrimiento.

*Demostración.* Observemos en primer lugar que  $p: X \rightarrow X/G$  es una aplicación continua exhaustiva. En virtud del Teorema 5.12,  $p$  es también una aplicación abierta. Sea  $U$  un entorno abierto de  $x \in X$  que satisfaga la condición de discontinuidad propia. Puesto que  $p$  es una aplicación abierta,  $p(U)$  es un entorno abierto de  $G \cdot x = p(x)$  y  $p^{-1}(p(U)) = \bigcup_{g \in G} g \cdot U$

(véase la demostración del Teorema 5.12), donde  $\{g \cdot U; g \in G\}$  es una colección de subconjuntos abiertos disjuntos de  $X$ . Además,  $p|_U: g \cdot U \rightarrow p(U)$  es una aplicación continua abierta biyectiva y, por tanto, es un homeomorfismo.

La acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$  dada por  $x \rightarrow x + n$  es propiamente discontinua, ya que si  $x \in \mathbb{R}$  y  $\varepsilon < 1/2$ , entonces  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  es un entorno abierto de  $x$  que cumple la condición requerida. Puesto que esta acción de  $\mathbb{Z}$  sobre  $\mathbb{R}$  convierte a  $\mathbb{R}$  en un  $\mathbb{Z}$ -espacio, resulta que  $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  es una aplicación recubridora. (El lector debería comprobar que este ejemplo es idéntico a  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ .)

El ejemplo siguiente nos muestra que la aplicación natural  $S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$  es una aplicación recubridora. Consideremos el  $\mathbb{Z}_2$ -espacio  $S^n$ , donde  $\mathbb{Z}_2$  actúa como  $\pm 1 \cdot x = \pm x$ . Para  $x \in S^n$ , el conjunto

$$\{y \in S^n; \|y - x\| < 1/2\}$$

es un entorno abierto de  $x$  que cumple la condición de discontinuidad propia. Alternativamente, puesto que  $x \neq -x$  y  $S^n$  es de Hausdorff, existen entornos abiertos disjuntos  $V, W$  de  $x$  y  $-x$  respectivamente. El entorno  $V \cap (-W)$  de  $x$  cumple la condición de discontinuidad propia. Este ejemplo puede generalizarse: Recordemos que un grupo  $G$  opera libremente sobre  $X$  (o que la acción de  $G$  es libre) si  $g \cdot x \neq x$  para todo  $x \in X$  y  $g \in G$ ,  $g \neq 1$ .

### 17.2 Teorema

Si  $G$  es un grupo finito que opera libremente sobre un espacio de Hausdorff  $X$ , la acción de  $G$  sobre  $X$  es propiamente discontinua.

*Demostración.* Sea  $G = \{1 = g_0, g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Puesto que  $X$  es de Hausdorff, existen entornos abiertos  $U_0, U_1, \dots, U_n$  de  $g_0 \cdot x, g_1 \cdot x, \dots, g_n \cdot x$ , respectivamente, tales que  $U_0 \cap$

$\cap U_j = \emptyset$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Sea  $U$  la intersección  $\bigcap_{j=0}^n g_j^{-1} \cdot U_j$ , que es claramente un entorno

abierto de  $x$ . Ahora bien,  $g_i \cdot U = \bigcap_{j=0}^n g_i \cdot (g_j^{-1} \cdot U_j) \subseteq U_i$  y

$$\begin{aligned} g_i \cdot U \cap g_j \cdot U &= g_j \cdot ((g_j^{-1} g_i \cdot U) \cap U) \\ &= g_j \cdot (g_k \cdot U \cap U) \quad (\text{para algún } k) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

ya que  $g_k \cdot U \subseteq U_k$  y  $U \subseteq U_0$ . Así pues, la acción de  $G$  sobre  $X$  es propiamente discontinua.

Un bonito ejemplo de acción libre es el dado por el grupo cíclico  $\mathbb{Z}_p$  operando sobre la 3-esfera  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ ,

$$S^3 = \{ (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2; |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1 \}.$$

Sea  $q$  un número primo con  $p$  y definamos  $h: S^3 \rightarrow S^3$  por

$$h(z_0, z_1) = (\exp(2\pi i/p) z_0, \exp(2\pi i q/p) z_1).$$

$h$  es un homeomorfismo de  $S^3$  tal que  $h^p = 1$ . Hacemos operar  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $S^3$  mediante

$$n \cdot (z_0, z_1) = h^n(z_0, z_1), \quad n \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}.$$

La acción es libre,  $S^3$  es de Hausdorff y, por tanto,  $S^3 \rightarrow S^3/\mathbb{Z}_p$  es una aplicación recubridora. El espacio cociente  $S^3/\mathbb{Z}_p$  se llama un *espacio lenticular* y se denota por  $L(p, q)$ . Obsérvese que  $L(2, 1)$  no es otro que  $\mathbb{RP}^3$ . El ejemplo anterior se puede generalizar de manera obvia a una acción de  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ ; dejamos los detalles para el lector.

Ha llegado el momento de dar algunos resultados generales sobre espacios recubridores. Obsérvese que en los ejemplos de recubrimientos obtenidos a partir de acciones de grupos, la aplicación recubridora es abierta y el espacio base tiene la topología cociente con respecto a la aplicación recubridora. De hecho esto es cierto para todos los recubrimientos.

### 17.3 Teorema

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación recubridora. Entonces

- (i)  $p$  es una aplicación abierta.
- (ii)  $X$  tiene la topología cociente con respecto a  $p$ .

**Demostración.** Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $\tilde{X}$  y sea  $x \in p(U)$ . Puesto que  $p$  es una aplicación recubridora, existe un entorno abierto  $V$  de  $x$  propiamente recubierto. Sea  $\tilde{x} \in p^{-1}(x) \cap U$ ; puesto que  $\tilde{x} \in p^{-1}(V) = \bigcup_{j \in J} V_j$ , existe algún conjunto abierto  $V_j$  de  $\tilde{X}$  tal que

$\tilde{x} \in V_j$ . Puesto que  $V_j \cap U$  es abierto en  $V_j$  y  $p|_{V_j}$  es un homeomorfismo de  $V_j$  sobre  $V$ , resulta que  $p(V_j \cap U)$  es un subconjunto abierto de  $V$ . Pero al ser  $V$  abierto en  $X$ , entonces

$p(V_j \cap U)$  es también abierto en  $X$ . Puesto que  $x \in p(V_j \cap U) \subseteq p(U)$ , resulta que  $p(U)$  es abierto y, por tanto,  $p$  es una aplicación abierta.

La segunda parte del teorema se deduce del hecho de que  $p$  es una aplicación continua y abierta y, por tanto, un subconjunto  $V$  de  $X$  es abierto si y sólo si  $p^{-1}(V)$  es abierto.

La mayoría de los resultados que hemos demostrado en el último capítulo para el recubrimiento  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  pueden generalizarse a otros recubrimientos. Si  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento y  $f: Y \rightarrow X$  es una aplicación continua, una *elevación* de  $f: Y \rightarrow X$  es una aplicación continua  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p\tilde{f} = f$ . El resultado siguiente demuestra que si existe una elevación, ésta es esencialmente única.

## 17.4 Lema

Sean  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento y  $\tilde{f}, \tilde{f}': Y \rightarrow \tilde{X}$  dos elevaciones de  $f: Y \rightarrow X$ . Si  $Y$  es conexo y  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{f}'(y_0)$  para algún  $y_0 \in Y$ , entonces  $\tilde{f} = \tilde{f}'$ .

*Demostración.* Sea  $Y'$  el conjunto

$$\{y \in Y; \tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y)\}$$

que no es vacío ya que  $y_0 \in Y'$  por hipótesis. Demostraremos que  $Y'$  es abierto y cerrado a la vez. Sea  $y \in Y'$ ; existe entonces un entorno abierto  $V$  de  $f(y)$  que está propiamente recubierto por  $p$ ; es decir,  $p^{-1}(V)$  es la unión disjunta de  $\{V_j; j \in J\}$  y  $p|_{V_j}: V_j \rightarrow V$  es un homeomorfismo para cada  $j \in J$ . Si  $y \in Y'$ , entonces  $\tilde{f}(y) = \tilde{f}'(y) \in V_k$  para algún  $k \in J$  y  $\tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{f}'^{-1}(V_k)$  es un entorno abierto de  $y$  contenido en  $Y'$ . Para verlo, sea  $x \in \tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{f}'^{-1}(V_k)$ ; entonces  $\tilde{f}(x) \in V_k$  y  $\tilde{f}'(x) \in V_k$ , pero también  $p\tilde{f}(x) = p\tilde{f}'(x)$ . Puesto que  $p|_{V_k}$  es un homeomorfismo, resulta  $\tilde{f}(x) = \tilde{f}'(x)$ . Así pues, todo punto de  $Y'$  tiene un entorno abierto contenido en  $Y'$  y, por tanto,  $Y'$  es abierto. Por otra parte, si  $y \notin Y'$ , entonces  $\tilde{f}(y) \in V_k$  y  $\tilde{f}'(y) \in V_\ell$  para ciertos  $k, \ell$  con  $k \neq \ell$ . Resulta pues que  $\tilde{f}^{-1}(V_k) \cap \tilde{f}'^{-1}(V_\ell)$  es un entorno abierto de  $y$  contenido en el complementario de  $Y'$  (razonar como anteriormente). Así pues,  $Y'$  es cerrado. Puesto que  $Y$  es conexo, resulta que  $Y = Y'$  y  $\tilde{f} = \tilde{f}'$ .

Un curioso corolario es:

## 17.5 Corolario

Supongamos que  $\tilde{X}$  es un espacio arco conexo y  $\varphi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  es una aplicación continua tal que  $p\varphi = p$ . Si  $\varphi(x_1) = x_1$  para algún  $x_1 \in \tilde{X}$ , entonces  $\varphi(x) = x$  para todo  $x \in \tilde{X}$  (es decir,  $\varphi$  es la aplicación identidad).

*Demostración.* Sea  $x$  un punto arbitrario de  $\tilde{X}$  y  $\alpha: I \rightarrow \tilde{X}$  un camino de  $x_1$  a  $x$ . Puesto que  $\varphi(x_1) = x_1$ , los caminos  $\alpha$  y  $\varphi\alpha$  tienen ambos origen en  $x_1$ . Además,  $p\alpha = p\varphi\alpha$ , por lo que  $\alpha$  y  $\varphi\alpha$  son elevaciones del camino  $p\alpha: I \rightarrow X$ . En virtud del lema anterior  $\alpha = \varphi\alpha$  y, en particular, los puntos finales de  $\alpha$  y  $\varphi\alpha$  coinciden; es decir,  $\varphi(x) = x$ .

El resultado siguiente, conocido como el *teorema de elevación de homotopías de caminos*, se demuestra de la misma manera que el Teorema 16.4 y el Lema 16.5.

## 17.6 Teorema

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento.

- (i) Dado un camino  $f: I \rightarrow X$  y un punto  $a \in \tilde{X}$  tal que  $p(a) = f(0)$ , existe un único camino  $\tilde{f}: I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p\tilde{f} = f$  y  $\tilde{f}(0) = a$ .
- (ii) Dada una aplicación continua  $F: I \times I \rightarrow X$  y un punto  $a \in \tilde{X}$  tal que  $p(a) = F(0,0)$ , existe una única aplicación continua  $\tilde{F}: I \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $p\tilde{F} = F$  y  $\tilde{F}(0,0) = a$ .

Como corolario obtenemos el *teorema de monodromía*, la demostración del cual es idéntica a la del Corolario 16.6.

## 17.7 Corolario

Supongamos que  $f_0$  y  $f_1$  son caminos equivalentes de  $X$ . Si  $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$ , entonces  $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ .

Continuando con generalizaciones de resultados del Capítulo 16, obtenemos el siguiente teorema.

## 17.8 Teorema

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento con  $\tilde{X}$  simplemente conexo. Existe entonces una correspondencia biyectiva entre los conjuntos  $\pi(X, p(a))$  y  $p^{-1}(p(a))$ , para todo  $a \in \tilde{X}$ .

*Demostración.* La demostración está esencialmente contenida en la del Teorema 16.7. Daremos únicamente los puntos más relevantes. Definimos en primer lugar

$$\varphi: \pi(X, p(a)) \rightarrow p^{-1}(p(a))$$

por

$$\varphi([f]) = \tilde{f}(1)$$

donde  $\tilde{f}$  es una elevación de  $f$  con  $\tilde{f}(0) = a$ . Esta aplicación está bien definida en virtud del Corolario 17.7.

A continuación definimos

$$\psi: p^{-1}(p(a)) \rightarrow \pi(X, p(a)).$$

Para ello, sea  $x \in p^{-1}(p(a))$  y escojamos un camino  $f$  de  $a$  a  $x$ . Puesto que  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, dos cualesquiera de estos caminos son equivalentes, por lo que  $[pf]$  es un elemento bien definido de  $\pi(X, p(a))$ . Ponemos entonces  $\psi(x) = [pf]$ . Es fácil comprobar que  $\phi\psi = 1$  y  $\psi\phi = 1$ , por lo que  $\phi$  y  $\psi$  son aplicaciones biyectivas.

Una de las consecuencias del resultado anterior es que para calcular  $\pi(X, x_0)$ , podemos hallar un recubrimiento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  tal que el espacio recubridor  $\tilde{X}$  sea simplemente conexo. Luego, hallar una estructura de grupo en  $p^{-1}(x_0)$  tal que la biyección  $\varphi: \pi(X, x_0) \rightarrow p^{-1}(x_0)$  sea un isomorfismo de grupos. Esto es, esencialmente, lo que hicimos en el Capítulo 16. En general este proceso no es fácil de hacer, sin embargo, en los capítulos siguientes (véase también el Capítulo 21) lo haremos en algunos casos especiales.

## 17.9 Ejercicios

- Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  una aplicación recubridora,  $X_0$  un subconjunto de  $X$  y pongamos  $\tilde{X}_0 = p^{-1}(X_0)$ . Demostrar que  $p_0: \tilde{X}_0 \rightarrow X_0$ , dada por  $p_0(x) = p(x)$ , es una aplicación recubridora.
- Sean  $\tilde{X} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \text{ o } y \text{ es un entero}\}$  y  $X = \{(z_1, z_2) \in S^1 \times S^1; z_1 = 1 \text{ ó } z_2 = 1\}$  y definamos  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  por  $p(x, y) = (\exp(2\pi ix), \exp(2\pi iy))$ . Demostrar que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es una aplicación recubridora.
- ¿Cuáles de las siguientes aplicaciones son recubridoras?
  - $p: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  dada por  $p(z) = z^n$  donde  $n$  es un entero fijo;
  - $\text{sen}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ;
  - $p: U \rightarrow \mathbb{C}^*$  dada por  $p(z) = (1-z)^m z^n$ , donde  $n, m$  son enteros fijos y  $U = \mathbb{C}^* - \{1\}$ .
- Sean  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  y  $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$  aplicaciones recubridoras.
  - Demostrar que  $p \times q: \tilde{X} \times \tilde{Y} \rightarrow X \times Y$  es una aplicación recubridora.
  - Demostrar que si  $X = Y$  y

$$\tilde{W} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \tilde{X} \times \tilde{X}; p(\tilde{x}) = q(\tilde{y})\}$$

entonces  $f: \tilde{W} \rightarrow X$ , definida por  $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = p(\tilde{x})$ , es una aplicación recubridora.

- Identificar  $\tilde{W}$  y  $f$  cuando  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  y  $q: \tilde{Y} \rightarrow Y$  son ambas  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ , donde  $e(t) = \exp(2\pi it)$ .
- Sean  $a: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  y  $b: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  los homeomorfismos del plano complejo  $\mathbb{C}$  definidos por

$$\begin{aligned} az &= z + i, \\ bz &= \bar{z} + \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Demostrar que  $ba = a^{-1}b$  y concluir que

$$G = \{a^m b^{2n} b^\epsilon; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, \epsilon = 0 \text{ o } 1\}$$

es un grupo de homeomorfismos de  $\mathbb{C}$ . Probar, además, que la acción de  $G$  es propiamente discontinua y que el espacio de órbitas  $\mathbb{C}/G$  es de Hausdorff.

- (f) (Continuación de (e).) Hallar un «rectángulo semiabierto» que contenga exactamente un punto de cada órbita de  $G$  y deducir de esto que  $\mathbb{C}/G$  es una botella de Klein.
- (g) (Continuación de (f).) Una *inmersión de la botella de Klein en  $\mathbb{R}^4$* . Definamos  $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^4$  por

$$\varphi(x+iy) = (\cos(2\pi y), \cos(4\pi x), \sin(4\pi x), \sin(2\pi y) \cos(2\pi x), \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)).$$

Demostrar que  $\varphi$  identifica cada una de las órbitas del grupo  $G$  a un punto y deducir que  $\mathbb{C}/G$  es homeomorfo a la imagen de  $\varphi$ .

Demostrar que la restricción de  $\psi: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  a la imagen de  $\varphi$ , donde

$$\psi(p, q, r, s, t) = ((p+2)q, (p+2)r, s, t),$$

es un homeomorfismo.

- (h) Supongamos que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es una aplicación recubridora con  $X$  arco conexo. Demostrar que la cardinalidad de  $p^{-1}(x)$  es independiente de  $x \in X$ . Si este número es  $n$ , se dice entonces que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un *recubrimiento de  $n$  hojas*.
- (i) Hallar un recubrimiento de 2 hojas  $p: S^1 \times S^1 \rightarrow K$ , donde  $K$  es la botella de Klein.
- (j) Un subconjunto  $\Sigma$  de un espacio topológico es una *curva cerrada simple* si es homeomorfo a  $S^1$ . Sea  $p: S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$  la proyección canónica de la esfera sobre el plano proyectivo. Demostrar que si  $\Sigma$  es una curva cerrada simple de  $\mathbb{R}P^2$ , entonces  $p^{-1}(\Sigma)$  o bien es una curva cerrada simple de  $S^2$  o bien la unión de dos curvas cerradas simples disjuntas. (Indicación: Considerar  $\Sigma$  como la imagen de un camino cerrado de  $\mathbb{R}P^2$ .)
- (k) Calcular  $\pi(S^1 \times S^1, (1, 1))$  directamente a partir de los resultados de este capítulo. (Indicación: Utilizar los Ejercicios (d) e (i) anteriores para obtener una aplicación recubridora  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times S^1$ ; aplicar entonces el Teorema 17.8.)
- (l) Admitiendo que  $S^n$  es simplemente conexo para  $n \geq 2$  (Ejercicio 15.16(c)), demostrar que el grupo fundamental de  $\mathbb{R}P^n$  ( $n \geq 2$ ) es cíclico de orden 2. Demostrar además, que si  $p$  es un número primo, el grupo fundamental del espacio lenticular  $L(p, q)$  es cíclico de orden  $p$ .
- (m) ¿Existe un espacio topológico  $Y$  tal que  $S^1 \times Y$  sea homeomorfo a  $\mathbb{R}P^2$  o a  $S^2$ ?
- (n) Supongamos que  $p: \tilde{X} \rightarrow Y$  es una aplicación recubridora y que  $X, Y$  son ambos espacios de Hausdorff. Probar que  $X$  es una  $n$ -variedad si y sólo si  $Y$  es una  $n$ -variedad.
- (o) Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento e  $Y$  un espacio topológico. Supongamos que  $f: Y \rightarrow X$  admite una elevación  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ . Probar que toda homotopía  $F: Y \times I \rightarrow X$  tal que  $F(y, 0) = f(y)$ ,  $y \in Y$  puede elevarse a una homotopía  $\tilde{F}: Y \times I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{F}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ ,  $y \in Y$ .
- (p) Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento y  $f, g: Y \rightarrow \tilde{X}$  dos aplicaciones continuas tales que  $pf = pg$ . Probar que el conjunto de puntos de  $Y$  en los cuales  $f$  y  $g$  coinciden es un subconjunto abierto y cerrado de  $Y$ .
- (q) Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento con  $X$  localmente arco conexo (véase el Ejercicio 12.10(j)). Probar que  $\tilde{X}$  es también localmente arco conexo.

- (r) Una *transformación recubridora*  $h$  del recubrimiento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un homeomorfismo  $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $ph = h$ . Demostrar que el conjunto de transformaciones recubridoras forma un grupo.
- (s) Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento con  $\tilde{X}$  conexo y localmente arco conexo. Demostrar que la acción del grupo de transformaciones recubridoras de  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  sobre  $\tilde{X}$  es propiamente discontinua.



## Capítulo 18

# El grupo fundamental de un espacio recubridor

Este capítulo está dedicado al estudio de la relación existente entre  $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  y  $\pi(X, x_0)$ , donde  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento y  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . La mayor parte de los resultados se presentan como ejercicios.

Nuestro primer resultado se sigue inmediatamente del Teorema 17.6.

### 18.1 Teorema

Si  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento y  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ,  $x_0 \in X$  son tales que  $p(\tilde{x}_0) = x_0$  entonces el homomorfismo inducido

$$p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$$

es un monomorfismo.

Es natural preguntarse qué ocurre si cambiamos los puntos base. El siguiente teorema nos da la respuesta.

### 18.2 Teorema

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento con  $\tilde{X}$  arco conexo. Si  $\tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \in \tilde{X}$ , existe un camino  $f$  en  $\tilde{X}$  de  $p(\tilde{x}_0)$  a  $p(\tilde{x}_1)$  tal que

$$u_f p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

*Demostración.* Sea  $g$  un camino en  $\tilde{X}$  de  $\tilde{x}_0$  a  $\tilde{x}_1$ . El camino  $g$  determina un isomorfismo  $u_g$  de  $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  en  $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ , por lo que  $u_g \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$ . Aplicando el homomorfismo  $p_*$ , se obtiene

$$p_* u_g \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1).$$

Pero  $p_* u_i = u_{p_i} p_*$  (fácil: véase el Ejercicio 15.11(c)), con lo que el camino  $f = pg$  cumple las condiciones requeridas.

Si, en el teorema anterior,  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1) = x_0$ , el camino  $f$  determina un elemento  $[f]$  de  $\pi(X, x_0)$  y, por tanto,

$$p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = [f]^{-1} (p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) [f].$$

En otras palabras, los subgrupos  $p_* \pi(\tilde{X}, x_0)$  y  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1)$  son subgrupos conjugados de  $\pi(X, x_0)$ . Podemos, de hecho, decir aún más:

### 18.3 Teorema

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento con  $\tilde{X}$  arco conexo. Si  $x_0 \in X$ , la colección

$$\{ p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0); \tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \}$$

es una clase de conjugación en  $\pi(X, x_0)$ .

*Demostración.* Hemos ya demostrado que dos subgrupos cualesquiera de la colección son conjugados. Supongamos ahora que  $H$  es un subgrupo de  $\pi(X, x_0)$  conjugado de uno de los subgrupos  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ . Así pues,

$$H = \alpha^{-1} (p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) \alpha$$

para algún  $\alpha \in \pi(X, x_0)$ . Sea  $\alpha = [f]$  y sea  $\tilde{f}$  una elevación de  $f$  con origen en  $\tilde{x}_0$ . Tenemos entonces

$$p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{f}(1)) = u_f p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = H$$

por lo que  $H$  pertenece a la colección.

Los siguientes ejercicios nos dan otras relaciones entre  $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  y  $\pi(X, x_0)$ .

### 18.4 Ejercicios

A lo largo de estos ejercicios  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  será siempre un recubrimiento con  $\tilde{X}$  arco conexo y  $x_0 \in X$ .

(a) Si  $\tilde{x} \in p^{-1}(x_0)$  y  $[f] \in \pi(X, x_0)$  definamos  $\tilde{x} \cdot [f]$  por

$$\tilde{x} \cdot [f] = \tilde{f}(1)$$

donde  $\tilde{f}$  es la única elevación de  $f$  con origen en  $\tilde{x}$ . Demostrar que esto define una acción por la derecha del grupo  $\pi(X, x_0)$  sobre el conjunto  $p^{-1}(x_0)$ . (Indicación: Tener en cuenta la demostración del Teorema 16.7 y usar la notación  $\ell_{\tilde{x}}(f)$  para la elevación de  $f$  con origen en  $\tilde{x}$ .)

- (b) Decimos que un grupo  $G$  opera *transitivamente* sobre un conjunto  $S$  si para todo par  $a, b \in S$  existe un elemento  $g \in G$  tal que  $g \cdot a = b$ ; en otras palabras,  $S = G \cdot a$ , la órbita de  $a$ , para  $a \in S$ . Demostrar que  $\pi(X, x_0)$  actúa transitivamente sobre  $p^{-1}(x_0)$ .
- (c) Probar que existe una biyección  $\pi(X, x_0) \rightarrow \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  —equivariante entre  $p^{-1}(x_0)$  y el conjunto de clases laterales por la derecha de  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  en  $\pi(X, x_0)$ . (Indicación: Usar el Ejercicio 5.9(d) sustituyendo la palabra «derecha» por «izquierda» y demostrar que  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  es el estabilizador de la acción de  $\pi(X, x_0)$  sobre  $p^{-1}(x_0)$ .)
- (d) Deducir de (c) que si  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, existe entonces una biyección  $\pi(X, x_0) \rightarrow \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  —equivariante entre  $p^{-1}(x_0)$  y  $\pi(X, x_0)$ .
- (e) Demostrar que si  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento de  $n$  hojas (es decir, si  $p^{-1}(x_0)$  consta de  $n$  puntos), entonces

$$p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$$

es la inclusión de un subgrupo de índice  $n$ .

- (f) Supongamos que el grupo fundamental de  $X$  es  $\mathbb{Z}$  y que  $p^{-1}(x_0)$  es finito. Hallar el grupo fundamental de  $\tilde{X}$ .
- (g) Probar que si  $X$  es simplemente conexo,  $p$  es un homeomorfismo.
- (h) Supongamos que  $\tilde{X} = X$ . Demostrar que  $p$  es un homeomorfismo si el grupo fundamental de  $X$  es finito. Si el grupo fundamental de  $X$  no es finito, ¿es siempre  $p$  un homeomorfismo?
- (i) Se dice que un recubrimiento es *regular* si existe un punto  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$  tal que el grupo  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  es un subgrupo normal de  $\pi(X, x_0)$ . Probar que si  $f$  es un camino cerrado de  $X$ , entonces o bien todas las elevaciones de  $f$  son cerradas o ninguna es cerrada.
- (j) Supongamos que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento obtenido a partir de una acción propiamente discontinua de  $G$  sobre  $\tilde{X}$  (es decir,  $X = \tilde{X}/G$ ). Demostrar que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es regular.
- (k) Demostrar que  $p$  es un homeomorfismo si y sólo si

$$p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) = \pi(X, x_0).$$

## Capítulo 19

# El grupo fundamental de un espacio de órbitas

A lo largo de este capítulo supondremos siempre que  $X$  es un espacio arco conexo con una acción propiamente discontinua del grupo  $G$  sobre él. Así pues,  $p: X \rightarrow X/G$  es un recubrimiento. El objetivo de este capítulo es obtener la relación existente entre  $G$  y el grupo fundamental del espacio de órbitas  $X/G$ .

Sean  $x_0 \in X$  y  $y_0 = p(x_0) \in X/G$ . Obsérvese que

$$p^{-1}(y_0) = \{ g \cdot x_0; g \in G \}.$$

Si  $[f] \in \pi(X/G, y_0)$ , existe entonces una única elevación  $\tilde{f}$  de  $f$  con origen en  $x_0 \in X$ . El elemento  $\tilde{f}(1) \in p^{-1}(y_0)$  y, por tanto, existe un único elemento  $g_f \in G$  tal que  $\tilde{f}(1) = g_f \cdot x_0$ . La correspondencia  $f \rightarrow g_f$  define, por tanto, una aplicación

$$\varphi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G.$$

### 19.1 Teorema

La aplicación  $\varphi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G$  es un homomorfismo de grupos.

*Demostración.* Consideremos dos caminos cerrados  $f, f'$  de  $X/G$  con punto base  $y_0$ . Si  $f * f'$  es la única elevación de  $f * f'$  con origen en  $x_0 \in X$ , se tiene

$$\widetilde{f * f'} = \tilde{f} * \ell_a(f')$$

donde  $\tilde{f}$  es la única elevación de  $f$  con origen en  $x_0$ , y  $\ell_a(f')$  es la única elevación de  $f'$  con origen en  $a = \tilde{f}(1)$ . Esto es debido a que  $\tilde{f} * \ell_a(f')$  es también una elevación de  $f * f'$  con origen en  $x_0 \in X$ . Sea  $\tilde{f'}$  la única elevación de  $f'$  con origen en  $x_0$ . Puesto que  $g_{f'} \cdot \tilde{f'}$  es una

elevación de  $f'$  con origen en  $g_t \cdot x_0$  y  $a = \tilde{f}(1) = g_t \cdot x_0$ , resulta que  $\ell_*(f') = g_t \cdot \tilde{f}'$ . Así pues,

$$\begin{aligned}\widetilde{f * f'}(1) &= g_t \cdot \tilde{f}'(1) \\ &= g_t \cdot (g_{f'} \cdot x_0) \\ &= (g_t g_{f'}) \cdot x_0.\end{aligned}$$

Se deduce pues que  $\phi([f] [f']) = (\phi[f])(\phi[f'])$  y, por tanto,  $\phi$  es un homomorfismo.

A continuación describimos el núcleo del homomorfismo  $\phi$ .

## 19.2 Lema

El núcleo de  $\phi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G$  es el subgrupo  $p_* \pi(X, x_0)$ .

**Demostración.** El núcleo de  $\phi$  es el conjunto de los elementos  $[f] \in \pi(X/G, y_0)$  tales que  $\phi[f] = 1$ . Es pues, precisamente, el conjunto de elementos  $[f] \in \pi(X/G, y_0)$  para los cuales  $\tilde{f}(1) = x_0$ ; es decir, para los que  $\tilde{f}$  es un camino cerrado de  $X$  con punto base  $x_0 \in X$ . Así pues, es el conjunto de elementos  $[f] \in \pi(X/G, y_0)$  de la forma  $[p\tilde{f}]$  con  $[\tilde{f}] \in \pi(X, x_0)$ ; esto es,  $p_* \pi(X, x_0)$ .

En particular,  $p_* \pi(X, x_0)$  es un subgrupo normal de  $\pi(X/G, y_0)$  y, por tanto, está definido el grupo cociente

$$\pi(X/G, y_0) / p_* \pi(X, x_0)$$

## 19.3 Teorema

Los grupos  $\pi(X/G, y_0) / p_* \pi(X, x_0)$  y  $G$  son isomorfos.

**Demostración.** Necesitamos únicamente demostrar que el homomorfismo

$$\phi: \pi(X/G, y_0) \rightarrow G$$

es exhaustivo. Si  $g \in G$ , sea  $f_t$  un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $g \cdot x_0$ . Este camino determina un elemento  $[p f_t] \in \pi(X/G, y_0)$ . Por definición  $\phi[p f_t] \cdot x_0 = \tilde{p f_t}(1)$ , donde  $\tilde{p f_t}$  es la única elevación de  $p f_t$  con origen en  $x_0$ . Pero  $f_t$  es una tal elevación y  $f_t(1) = g \cdot x_0$ ; así pues,  $\phi[p f_t] = g$ , que demuestra la exhaustividad de  $\phi$ .

## 19.4 Corolario

Si  $X$  es simplemente conexo,  $\pi(X/G, y_0) \cong G$ .

Como consecuencia de este corolario podemos obtener de nuevo el resultado del Capítulo 16 de que el grupo fundamental de la circunferencia es  $\mathbb{Z}$ , ya que  $S^1$  es

homeomorfo a  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . De la misma manera podemos deducir que el grupo fundamental de  $(S^1)^n \cong \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}^n$ . En el siguiente conjunto de ejercicios damos otros ejemplos, que se basan a menudo en ejercicios previos.

## 19.5 Ejercicios

- Demostrar que el grupo fundamental del espacio lenticular  $L(p,q)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_p$ . (Suponer, en virtud del Ejercicio 15.16(c), que  $S^3$  es simplemente conexo.)
- Demostrar que para todo grupo abeliano finitamente generado  $G$  existe un espacio topológico  $X_G$  cuyo grupo fundamental es  $G$ . (Utilizar el teorema de estructura de los grupos abelianos finitamente generados.)
- Sea  $Y = \mathbb{C}^*/K$ , donde  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$  y  $K$  es el grupo de homeomorfismos  $\{\varphi^n; n \in \mathbb{Z}\}$  con  $\varphi(z) = 4z$ . Demostrar, por medio del Corolario 19.4, que el grupo fundamental de  $Y$  es  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . (Indicación: Hallar un espacio  $X$ , un grupo  $G$  y un subgrupo normal  $H$  tales que  $X$  sea un  $G$ -espacio simplemente conexo,  $X/H \cong \mathbb{C}^*$  y  $G/H = K$ . Utilizar entonces el Ejercicio 5.13(c).)
- Probar que  $Tz = \bar{z} + 1 + i$  define un homeomorfismo  $T: X \rightarrow X$ , donde  $X = \mathbb{R} \times X[0,1] \subset \mathbb{C}$ . Demostrar que si  $G$  es el grupo de homeomorfismos generado por  $T$ , entonces  $X/G$  es la banda de Möbius. Deducir de esto que el grupo fundamental de la banda de Möbius es  $\mathbb{Z}$ .
- Demostrar que el grupo fundamental de la botella de Klein es

$$G = \{ a^m b^{2n+\epsilon}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}, \epsilon = 0 \text{ ó } 1, ba = a^{-1}b \},$$

esto es,  $G$  es un grupo con dos generadores y una única relación  $ba = a^{-1}b$ .

- Supongamos que  $X$  admite una  $G$ -acción propiamente discontinua. Recordemos que, en virtud del Ejercicio 18.4(a),  $\pi(X/G, y_0)$  opera sobre  $p^{-1}(y_0)$  (por la derecha). Demostrar que

$$(g \cdot x) \cdot [f] = g \cdot (x \cdot [f])$$

para todo  $g \in G$ ,  $x \in p^{-1}(y_0)$  y  $[f] \in \pi(X/G, y_0)$ .

- Supongamos que  $G, H$  son grupos que operan sobre un conjunto  $S$ ,  $G$  por la izquierda y  $H$  por la derecha. Supongamos, también, que

$$(g \cdot x) \cdot h = g \cdot (x \cdot h)$$

para todo  $g \in G$ ,  $x \in S$ ,  $h \in H$ . Demostrar que si  $G$  opera libre y transitivamente sobre  $S$ , existe entonces un homomorfismo

$$\varphi: H \rightarrow G.$$

Demostrar, además, que el núcleo de  $\varphi$  es el estabilizador por  $H$  del punto  $x_0 \in S$ , donde  $S = \{g \cdot x_0; g \in G\}$ . (Indicación: Definir  $\varphi(h)$ ,  $h \in H$ , como el único elemento  $g$  de  $G$  tal que  $g \cdot x_0 = x_0 \cdot h$ .)

- (h) Usar los Ejercicios (f) y (g) anteriores para dar una nueva demostración del Teorema 19.1 y del Lema 19.2.
- (i) Usar el Ejercicio (h) anterior y el Ejercicio 18.4(c) para dar una nueva demostración del Teorema 19.3.

## Capítulo 20

# Los teoremas de Borsuk-Ulam y del bocadillo de jamón

Vamos a dar algunas aplicaciones de los resultados de los capítulos precedentes. Son generalizaciones de los resultados del Capítulo 10 y se basan en el *teorema de Borsuk-Ulam* (demostrado por K. Borsuk a principios de la década de 1930, tras una conjetura de S. Ulam).

### 20.1 Teorema

No existe ninguna aplicación continua  $\varphi: S^2 \rightarrow S^1$  tal que  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ .

Este teorema generaliza el resultado de que no existe ninguna aplicación continua  $\varphi: S^1 \rightarrow S^0$  tal que  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$  (una tal aplicación debería ser exhaustiva, pero  $S^1$  es conexo y  $S^0$  no lo es). De hecho, el resultado es más general: No existe ninguna aplicación continua  $\varphi: S^n \rightarrow S^{n-1}$ , para  $n \geq 1$ , tal que  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ . Para  $n > 2$  la demostración se escapa del marco de este libro; está relacionada, por ejemplo, con los grupos de homotopía de orden superior.

Para probar el Teorema 20.1 supongamos que exista una aplicación continua  $\varphi: S^2 \rightarrow S^1$  tal que  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ . El grupo  $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$  actúa antipodalmente sobre  $S^2$  y sobre  $S^1$  (es decir,  $\pm 1 \cdot x = \pm x$ ); en cada caso la acción es propiamente discontinua. Si  $p_2: S^2 \rightarrow S^2/\mathbb{Z}_2$  y  $p_1: S^1 \rightarrow S^1/\mathbb{Z}_2$  denotan las proyecciones canónicas,  $\varphi$  induce entonces una aplicación continua  $\psi: S^2/\mathbb{Z}_2 \rightarrow S^1/\mathbb{Z}_2$  tal que  $p_1 \varphi = \psi p_2$ ; a saber  $\psi(\{\pm x\}) = \{\pm \varphi(x)\}$ ; véase la demostración del Teorema 5.5. Sea  $a = (1, 0, 0) \in S^2$ , donde, como de costumbre,

$$S^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1 \}.$$

Pongamos  $b = p_2(a) \in S^2/\mathbb{Z}_2$ . Si  $f$  es el camino de  $S^2$  desde  $a$  hasta  $-a$  dado por

$$f(t) = (\cos(\pi t), \sin(\pi t), 0) \quad 0 \leq t \leq 1,$$



entonces  $p_2 f$  es un camino cerrado de  $S^2/\mathbb{Z}_2$  con punto base  $b$ . Afirmamos que el elemento  $[p_2 f] \in \pi(S^2/\mathbb{Z}_2, b)$  satisface

$$[p_2 f]^2 = [\epsilon_b].$$

En efecto, se tiene

$$\begin{aligned} (p_2 f * p_2 f)(t) &= \begin{cases} p_2(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ p_2(\cos(\pi(2t-1)), \sin(\pi(2t-1)), 0) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases} \\ &= p_2(\cos(2\pi t), \sin(2\pi t), 0) \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Definimos entonces  $F: I \times I \rightarrow S^2$  por

$$F(t, s) = (s + (1-s)\cos(2\pi t), (1-s)\sin(2\pi t), \sqrt{(2s(1-s))} (1 - \cos(2\pi t))).$$

Vemos entonces que  $p_2 F: I \times I \rightarrow S^2/\mathbb{Z}_2$  es una aplicación continua que satisface

$$\begin{aligned} p_2 F(t, 0) &= (p_2 f * p_2 f)(t), \\ p_2 F(t, 1) &= p_2(1, 0, 0) = \epsilon_b(t), \\ p_2 F(0, s) &= p_2(1, 0, 0) = p_2 F(1, s), \end{aligned}$$

lo que demuestra que

$$[p_2 f]^2 = [\epsilon_b] \in \pi(S^2/\mathbb{Z}_2, b).$$

La aplicación  $\psi: S^2/\mathbb{Z}_2 \rightarrow S^1/\mathbb{Z}_2$  induce un homomorfismo

$$\psi_*: \pi(S^2/\mathbb{Z}_2, b) \rightarrow \pi(S^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$$

por lo que

$$[\psi p_2 f]^2 = [\epsilon_{\psi(b)}] \in \pi(S^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b)).$$

Desde luego  $S^1/\mathbb{Z}_2 \cong S^1$  y

$$\pi(S^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b)) = \{ \alpha^n; n \in \mathbb{Z} \}$$

para algún  $\alpha \in \pi(S^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$ . (De hecho  $\alpha = [p_1 g]$ , donde  $g: I \rightarrow S^1$  está dado por  $g(t) = \exp(\pi i t) \in S^1 \subset \mathbb{C}$ .) La igualdad  $[\psi p_2 f]^2 = [\epsilon_{\psi(b)}]$  significa, por tanto, que  $[\psi p_2 f] = [\epsilon_{\psi(b)}]$ , ( $[\psi p_2 f] = \alpha^k$  para algún  $k$ , y  $\alpha^{2k} = \alpha^0$  implica  $\alpha^k = \alpha^0$ ).

**Observación:** El Ejercicio 15.16(c) nos dice que  $S^2$  es simplemente conexa (véase también el Corolario 23.9), por lo que del capítulo anterior se deduce que el grupo fundamental de  $S^2/\mathbb{Z}_2$  es  $\mathbb{Z}_2$ . Así pues,  $\psi_*$  es un homomorfismo de  $\mathbb{Z}_2$  en  $\mathbb{Z}$ , que ha de ser

necesariamente trivial, con lo que  $[\psi p_2 f] = [\varepsilon_{\psi(b)}] \in \pi(S^1/\mathbb{Z}_2, \psi(b))$ . El razonamiento usado en la demostración del teorema fue escogido para evitar resultados de los ejercicios o de capítulos posteriores.

Continuando con la demostración del Teorema 20.1 tengamos en cuenta los resultados del Capítulo 17 y consideremos las únicas elevaciones de  $\psi p_2 f$  y  $\varepsilon_{\psi(b)}$  a  $S^1$  con origen en  $\varphi(a)$ . Estas elevaciones son  $\varphi f$  y  $\varepsilon_{\varphi(a)}$  respectivamente (recordemos que  $\psi p_2 = p_1 \varphi$ ). Pero  $\varphi f(1) = \varphi(-a) = -\varphi(a)$ , mientras que  $\varepsilon_{\varphi(a)}(1) = \varphi(a)$ , lo que contradice el hecho de que  $[\psi p_2 f] = [\varepsilon_{\psi(b)}]$  y, por tanto, demuestra que  $\varphi$  no existe. (Obsérvese también que  $[p_2 f] \neq [\varepsilon_b] \in \pi(S^2/\mathbb{Z}_2, b)$ .)

## 20.2 Corolario

Sea  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación continua tal que  $f(-x) = -f(x)$  para todo  $x \in S^2$ . Existe entonces un punto  $x \in S^2$  tal que  $f(x) = 0$ .

*Demostración.* Supongamos que  $f(x) \neq 0$  para todo  $x \in S^2$  y definamos  $g: S^2 \rightarrow S^1$  por  $g(x) = f(x)/\|f(x)\|$ . La aplicación  $g$  es continua y  $g(-x) = -g(x)$ , que contradice el Teorema 20.1.

## 20.3 Corolario

Sea  $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una aplicación continua. Existe entonces un punto  $x \in S^2$  tal que  $f(x) = f(-x)$ .

*Demostración.* Si  $f(x) \neq f(-x)$  para todo  $x \in S^2$ , podemos definir  $g: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $g(x) = f(x) - f(-x)$ , que es continua y satisface  $g(-x) = -g(x)$  y  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in S^2$ . Esto contradice el Corolario 20.2.

El Corolario 20.3 generaliza el Corolario 10.3. Los dos resultados anteriores siguen siendo ciertos si se substituye  $S^2, \mathbb{R}^2$  por  $S^n, \mathbb{R}^n$ .

El Corolario 20.3 nos dice, en particular, que no existe ninguna aplicación continua inyectiva de  $S^2$  a  $\mathbb{R}^2$ . Esto nos da inmediatamente el siguiente resultado.

## 20.4 Corolario

Ningún subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  es homeomorfo a  $S^2$ .

Al igual que en el Capítulo 10, los resultados anteriores admiten una interpretación física.

## 20.5 Corolario

En cada instante existen un par de puntos antipodales de la superficie de la Tierra que tienen simultáneamente la misma presión y la misma temperatura.

El análogo del primer problema del pastel es el llamado *teorema del bocadillo de jamón*, que establece que es posible cortar de un solo golpe de cuchillo un bocadillo formado por pan, mantequilla y jamón (los ingredientes no son en realidad relevantes) exactamente por la mitad. Con más precisión:

## 20.6 Teorema

Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  subconjuntos acotados de  $\mathbb{R}^3$ . Existe entonces un plano de  $\mathbb{R}^3$  que divide cada región exactamente en dos partes de igual volumen.

*Demostración.* La demostración es bastante similar a la del Teorema 10.5. Podemos suponer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  están contenidos en  $S$ , la esfera de  $\mathbb{R}^3$  de diámetro 1 y centro el origen de coordenadas. Para todo  $x \in S$ , denotemos por  $D_x$  el diámetro de  $S$  que pasa por  $x$ . Si  $t \in I$ , denotemos por  $P_t$  el plano que es perpendicular a  $D_x$  y pasa por el punto de  $D_x$  a una distancia  $t$  de  $x$ . Así  $P_t$  divide a  $A$  en dos partes  $A_1$  y  $A_2$  con  $A_1$  más próxima a  $x$  que  $A_2$ . Definimos aplicaciones  $f_1, f_2$  por

$$f_1(t) = \text{volumen}(A_1), \quad f_2(t) = \text{volumen}(A_2).$$

Obviamente,  $f_1$  y  $f_2$  son aplicaciones continuas de  $I$  en  $\mathbb{R}$ ,  $f_1$  es monótona creciente y  $f_2$  es monótona decreciente. Así pues, la aplicación  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$  es continua y monótona creciente. Además  $f(0) = -f(1)$ , con lo que, en virtud del teorema del valor medio, existe un  $t \in I$  tal que  $f(t) = 0$ . Puesto que  $f$  es monótona creciente, se anula o bien en un único punto  $a$  o en un intervalo cerrado  $[a, b]$ . En el primer caso denotamos a este único punto  $a$  por  $\alpha(x)$ , mientras que en el segundo caso denotamos a  $(a+b)/2$  por  $\alpha(x)$ . Así pues,  $P_{\alpha(x)}$  divide a  $A$  en dos partes iguales. Obsérvese que  $\alpha: S \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación continua que cumple  $\alpha(x) = 1 - \alpha(-x)$ .

De manera análoga podemos definir aplicaciones continuas  $\beta, \gamma: S \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\beta(x) = 1 - \beta(-x)$ ,  $\gamma(x) = 1 - \gamma(-x)$  y con la propiedad de que  $P_{\beta(x)}, P_{\gamma(x)}$  divide a  $B, C$ , respectivamente, exactamente por la mitad. Utilizando las aplicaciones  $\alpha, \beta, \gamma$  podemos ahora definir  $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$\varphi(x) = (\alpha(x) - \beta(x), \alpha(x) - \gamma(x))$$

Puesto que  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son continuas, también lo es  $\varphi$ . Además  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ , con lo que, en virtud del Corolario 20.2, existe un punto  $y \in S$  tal que  $\varphi(y) = 0$ . Pero esto significa que  $\alpha(y) = \beta(y) = \gamma(y)$ , con lo que el plano  $P_{\alpha(y)}$  divide cada una de las regiones  $A, B, C$  exactamente en dos partes de igual volumen.

## 20.7 Ejercicios

- (a) Demostrar que si  $n \geq 2$ , no existe ninguna aplicación continua  $\varphi: S^n \rightarrow S^1$  tal que  $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ .

- (b) Hacemos operar el grupo  $\mathbb{Z}_p$  sobre  $S^3 \subset \mathbb{C}^2$  y sobre  $S^1 \subset \mathbb{C}$  como sigue:

$$\begin{aligned}k \cdot (z_1, z_2) &= (\exp(2\pi i k/p) z_1, \exp(2\pi i k q/p) z_2), \\k \cdot z &= \exp(2\pi i k/p) z,\end{aligned}$$

donde  $k \in \mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$  y  $q$  es un entero primo con  $p$ . Demostrar que no existe ninguna aplicación continua  $\mathbb{Z}_p$ -equivariante de  $S^3$  a  $S^1$ .

- (c) ¿Existe en  $\mathbb{R}^3$  un resultado análogo al segundo teorema del pastel?
- (d) Supongamos que  $X$  e  $Y$  son  $G$ -espacios para los cuales la acción de  $G$  es propiamente discontinua. Supongamos también que  $\varphi: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua  $G$ -equivariante. Denotemos por  $\psi: X/G \rightarrow Y/G$  la aplicación inducida por  $\varphi$ . Demostrar que el homomorfismo  $\psi_*: \pi(X/G, p(x_0)) \rightarrow \pi(Y/G, q\varphi(x_0))$  induce un homomorfismo

$$\pi(X/G, p(x_0))/p_* \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(Y/G, q\varphi(x_0))/q_* \pi(Y, \varphi(x_0))$$

que es un *isomorfismo*, donde  $p: X \rightarrow X/G$  y  $q: Y \rightarrow Y/G$  son las proyecciones canónicas.

- (e) Utilizar el Ejercicio (d) anterior para dar una nueva demostración del teorema de Borsuk-Ulam y del resultado del Ejercicio (b) anterior (demostración de una línea para cada uno).

## Capítulo 21

# Más sobre espacios recubridores: Teoremas de elevación

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento y  $f: Y \rightarrow X$  una aplicación continua con  $Y$  conexo. Recordemos que en el Capítulo 17 hemos demostrado que si existe una elevación  $\tilde{f}$  de  $f: Y \rightarrow X$ , esta elevación es (esencialmente) única. Si existe la elevación  $\tilde{f}$ , tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} & & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \\ & \nearrow \tilde{f}_* & \downarrow p_* \\ \pi(Y, y_0) & & \pi(X, x_0) \\ & \searrow f_* & \end{array}$$

El homomorfismo  $p_*$  es un monomorfismo (Teorema 18.1) y  $p_* \tilde{f}_* = f_*$ , por lo que

$$f_* \pi(Y, y_0) = p_* \tilde{f}_* \pi(Y, y_0) \subseteq p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Así pues, una condición algebraica necesaria para la existencia de la elevación  $\tilde{f}$  es que  $f_* \pi(Y, y_0) \subseteq p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ . Resulta que esta condición es también suficiente con algunas hipótesis adicionales sobre el espacio  $Y$ . Así pues, una cuestión que es puramente topológica es equivalente a una cuestión puramente algebraica. Las hipótesis que debemos añadir a  $Y$  es que sea conexo y localmente arco conexo. Un espacio se dice que es *localmente arco conexo* si para todo  $y \in Y$ , todo entorno abierto de  $y$  contiene un entorno abierto arco conexo de  $y$ ; véase el Ejercicio 12.10(j). Todo espacio conexo y localmente arco conexo es también arco conexo; vamos a demostrarlo.

### 21.1 Lema

Todo espacio topológico  $Y$  conexo y localmente arco conexo es arco conexo.

**Demostración.** Sea  $y$  un punto arbitrario de  $Y$  y  $U$  el conjunto de puntos de  $Y$  que pueden unirse a  $y$  por un camino de  $Y$ . Si  $u \in U$ ,  $u$  posee un entorno abierto arco conexo  $V$  (ya que  $Y$  es un entorno abierto de  $u$  y  $Y$  es localmente arco conexo). Si  $v \in V$ , existe entonces un camino en  $V$  de  $u$  a  $v$  y un camino en  $Y$  de  $y$  a  $u$ , por lo que existe un camino de  $y$  a  $v$  en  $Y$ . Así pues,  $V \subseteq U$ . Esto demuestra que  $U$  es abierto. De manera análoga podemos demostrar que  $Y-U$  es abierto, con lo que  $U$  es cerrado. Puesto que  $y \in U$ , el subconjunto  $U$  no es vacío. Pero  $Y$  es conexo y, por tanto,  $U$  debe ser igual a  $Y$ , lo que demuestra que  $Y$  es arco conexo.

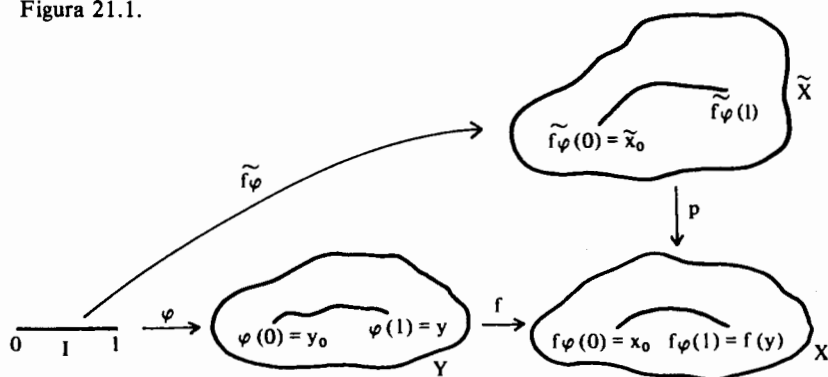
## 21.2 Teorema

Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento,  $Y$  un espacio conexo y localmente arco conexo,  $y_0 \in Y$ ,  $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ ,  $p(\tilde{x}_0) = x_0$ . Dada una aplicación continua  $f: Y \rightarrow X$  con  $f(y_0) = x_0$ , existe una elevación  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$  con  $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$  si y sólo si

$$f_* \pi(Y, y_0) \subseteq p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

**Demostración.** Hemos visto ya que la condición es necesaria, por lo que debemos demostrar únicamente que es suficiente. Supongamos, pues, que  $f_* \pi(Y, y_0) \subseteq p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ ; demostraremos que existe una elevación  $\tilde{f}$ . La definición de  $\tilde{f}$  es como sigue. Sea  $y \in Y$  y sea  $\varphi: I \rightarrow Y$  un camino en  $Y$  de  $y_0$  a  $y$ . Así pues,  $f\varphi$  es un camino en  $X$  de  $x_0$  a  $f(y)$ . Por el teorema de elevación de homotopías de caminos (Teorema 17.6(a)), existe un único camino  $\tilde{f}\varphi: I \rightarrow \tilde{X}$  tal que  $\tilde{f}\varphi(0) = \tilde{x}_0$  y  $p \circ \tilde{f}\varphi = f\varphi$ . Definimos  $\tilde{f}(y)$  como  $\tilde{f}\varphi(1)$ ; véase la Figura 21.1.

Figura 21.1.



Es sorprendente pensar que, con esta definición,  $\tilde{f}$  está bien definida y es continua. En primer lugar demostramos que  $\tilde{f}$  está bien definida. La única elección que hemos hecho es la del camino  $\varphi$  de  $y_0$  a  $y$ , por lo que sea  $\psi$  otro camino en  $Y$  de  $y_0$  a  $y$ . El camino producto  $\varphi * \bar{\psi}$  es un camino cerrado de  $Y$  con punto base  $y_0$ . Tenemos

$$f_* [\varphi * \bar{\psi}] = [f\varphi * f\bar{\psi}] \in f_* \pi(Y, y_0).$$

Pero  $f_* \pi(Y, y_0) \subseteq p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  y, por tanto, existe un camino cerrado  $\alpha$  de  $\tilde{X}$  con punto base  $\tilde{x}_0$  tal que

$$[f\varphi * f\bar{\psi}] = [p\alpha].$$

Usando los resultados del Capítulo 14 tenemos

$$\begin{aligned} f\varphi &\sim f\varphi * \epsilon_{x_0} \\ &\sim f\varphi * (f\bar{\psi} * f\psi) \\ &\sim (f\varphi * f\bar{\psi}) * f\psi \\ &\sim p\alpha * f\psi. \end{aligned}$$

El camino  $\alpha$  es cerrado; así pues,

$$\widetilde{p\alpha * f\psi} = \alpha * \tilde{f\psi}$$

y, por el teorema de monodromía (Teorema 17.7),

$$\tilde{f\varphi}(1) = \widetilde{p\alpha * f\psi}(1) = (\alpha * \tilde{f\psi})(1) = \tilde{f\psi}(1)$$

lo que demuestra que  $\tilde{f}(y)$  está bien definido. Obsérvese que para definir  $\tilde{f}$  necesitamos únicamente que  $Y$  sea arco conexo.

**Para demostrar que  $\tilde{f}$  es continua necesitamos la hipótesis adicional sobre  $Y$ :** que sea localmente arco conexo. Supongamos que  $U$  es un subconjunto abierto de  $X$ . Sea  $y \in \tilde{f}^{-1}(U)$ , con lo que  $U$  es un entorno abierto de  $\tilde{f}(y)$ . Sea  $U'$  un entorno de  $p\tilde{f}(y) = f(y)$  propiamente recubierto tal que  $U' \subseteq p(U)$ . Por definición  $p^{-1}(U') = \bigcup_{j \in J} V_j$ , con cada  $V_j$

homeomorfo a  $U'$ ; además,  $\tilde{f}(y) \in V_k$  para algún  $k$ . Puesto que  $V_k$  y  $U$  son entornos abiertos de  $\tilde{f}(y)$ , también lo es  $W = V_k \cap U$ . Obsérvese que  $p(W)$  es un entorno propiamente recubierto ya que  $U'$  lo es y  $p(W) \subseteq U'$ . La aplicación  $f$  es continua y, por tanto,  $f^{-1}(p(W))$  es un subconjunto abierto de  $Y$  que es un entorno abierto de  $y$ . Puesto que  $Y$  es localmente arco conexo, existe un entorno abierto arco conexo  $V$  de  $y$  con  $V \subseteq f^{-1}(p(W))$ . Afirmamos que  $\tilde{f}(V) \subseteq U$ . Ciertamente,  $\tilde{f}(y) \in U$ . Si  $y'$  es otro punto de  $V$ , existe entonces un camino  $\varphi$  en  $V$  de  $y$  a  $y'$  y, de la definición de  $\tilde{f}$ , resulta que  $\tilde{f}(y')$  es igual a  $\tilde{f\varphi}(1)$ , donde  $\tilde{f\varphi}$  es la única elevación de  $f\varphi$  con origen en  $\tilde{f}(y)$ . (Si  $\psi$  es un camino de  $y_0$  a  $y$ , entonces  $\psi * \varphi$  es un camino de  $y_0$  a  $y'$  y  $\tilde{f}(\psi * \varphi)(1) = \tilde{f\varphi}(1)$  por el teorema de elevación de homotopías de caminos.) La imagen del camino  $f\varphi$  está en  $\tilde{f}(V) \subseteq p(W)$  y, por tanto, la imagen del camino  $\tilde{f\varphi}$  está en  $p^{-1}(p(W)) = \bigcup_{j \in J} W_j$ , con los  $W_j$  dos a dos disjuntos y cada

uno de ellos homeomorfo a  $p(W)$ ; además, uno de los  $W_j$ , pongamos  $W_k$ , es precisamente  $W$ . Puesto que  $\tilde{f\varphi}(0) = \tilde{f}(y) \in W$ , resulta  $\tilde{f\varphi}(1) = \tilde{f}(y') \in W$ . Esto demuestra que  $\tilde{f}(V) \subseteq W \subseteq U$  y, por tanto,  $V \subseteq \tilde{f}^{-1}(U)$ . Así, todo punto de  $\tilde{f}^{-1}(U)$  tiene un entorno abierto en  $\tilde{f}^{-1}(U)$ , con lo que  $\tilde{f}^{-1}(U)$  es abierto y  $\tilde{f}$  es continua.

Obsérvese de nuevo que para poder definir  $\tilde{f}$  necesitamos únicamente que  $Y$  sea arco conexo. Para la continuidad de  $\tilde{f}$  necesitamos que  $Y$  sea localmente arco conexo. Damos

ahora un ejemplo que demuestra que si  $Y$  es arco conexo pero no localmente arco conexo, entonces  $\tilde{f}$  no es continua. Sea  $Y$  el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ :

$$Y = A \cup B \cup C$$

donde

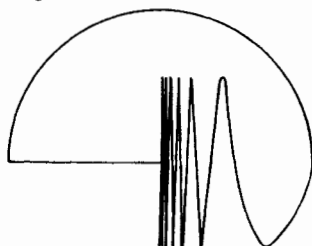
$$A = \{ (x,y); x^2 + y^2 = 1, y \geq 0 \},$$

$$B = \{ (x,y); -1 \leq x \leq 0, y = 0 \},$$

$$C = \{ (x,y); 0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2} \sin(\pi/x) \}.$$

Véase la Figura 21.2; este espacio se llama la *circunferencia polaca*.

Figura 21.2



Esta claro que  $Y$  es arco conexo. Además, puesto que  $B \cup C$  no es arco conexo,  $Y$  es simplemente conexo pero no localmente arco conexo. Consideremos el recubrimiento  $e: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  y sea  $f: Y \rightarrow S^1$  la aplicación definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si } (x,y) \in A \subseteq Y, \\ (x, -\sqrt{1-x^2}) & \text{si } (x,y) \in B \cup C \subseteq Y. \end{cases}$$

Claramente  $f$  es continua. Poniendo  $y_0 = (1,0)$ ,  $\tilde{x}_0 = 0$ , se satisface la condición

$$f_* \pi(Y, y_0) \subseteq p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

(donde  $p = e$ ,  $\tilde{X} = \mathbb{R}$ ). Podemos definir  $\tilde{f}$  como en la demostración del Teorema 21.2 para obtener

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} (\arccos(x))/2\pi & \text{si } (x,y) \in A \cup B, \\ (\arccos(x))/2\pi - 1 & \text{si } (x,y) \in C. \end{cases}$$

Claramente  $p\tilde{f} = f$ ,  $\tilde{f}(1,0) = 0$ , pero  $\tilde{f}$  no es continua en  $(0,0) \in Y$ .

Existen muchos corolarios del Teorema 21.2. El primero de ellos no requiere demostración.



### 21.3 Corolario

Si  $Y$  es simplemente conexo y localmente arco conexo, toda aplicación continua  $f: Y \rightarrow X$  se eleva a  $\tilde{f}: Y \rightarrow \tilde{X}$ .

### 21.4 Corolario

Sean  $p_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $p_2: X_2 \rightarrow X$  dos recubrimientos con  $X_1, X_2$  conexos y localmente arco conexos. Sean  $x_1, x_2, x_0$  los puntos base de  $X_1, X_2, X$  respectivamente, con  $p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_0$ . Si

$$p_{1*} \pi(X_1, x_1) = p_{2*} \pi(X_2, x_2)$$

existe entonces un homeomorfismo  $h: X_1 \rightarrow X_2$  que conserva los puntos base tal que  $p_2 h = p_1$ .

*Demostración.*  $p_1$  y  $p_2$  se elevan ambas a aplicaciones  $\tilde{p}_1$  y  $\tilde{p}_2$  tales que  $p_2 \tilde{p}_1 = p_1$  y  $p_1 \tilde{p}_2 = p_2$ . Sea  $\varphi = \tilde{p}_2 \tilde{p}_1: X_1 \rightarrow X_1$ ; entonces

$$p_{1*} \varphi = p_{1*} (\tilde{p}_2 \tilde{p}_1) = (p_{1*} \tilde{p}_2) \tilde{p}_1 = p_{2*} \tilde{p}_1 = p_{1*}$$

Además,  $\varphi(x_1) = x_1$  y, por tanto, por el Corolario 17.5, la aplicación  $\varphi$  es la identidad; esto es,  $\tilde{p}_2 \tilde{p}_1 = 1$ . Intercambiando los papeles de  $X_1$  y  $X_2$  vemos que  $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 = 1$ . Así pues,  $\tilde{p}_1$  y  $\tilde{p}_2$  son homeomorfismos y el teorema resulta al tomar  $h = \tilde{p}_1$ .

Un caso especial del Corolario 21.4 es cuando  $X_1$  y  $X_2$  son simplemente conexos.

### 21.5 Corolario

Sean  $p_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $p_2: X_2 \rightarrow X$  dos recubrimientos con  $X_1$  y  $X_2$  simplemente conexos y localmente arco conexos; existe entonces un homeomorfismo  $h: X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $p_2 h = p_1$ .

Del Teorema 15.9 se sigue fácilmente un recíproco del Corolario 21.4.

### 21.6 Corolario

Sean  $p_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $p_2: X_2 \rightarrow X$  dos recubrimientos con  $X_1, X_2$  conexos y localmente arco conexos. Sean  $x_1, x_2, x_0$  los puntos base con  $p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_0$ . Si existe un homeomorfismo  $h: X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $p_2 h = p_1$  y  $h(x_1) = x_2$ , entonces

$$p_{1*} \pi(X_1, x_1) = p_{2*} \pi(X_2, x_2).$$

Decimos que dos recubrimientos  $p_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $p_2: X_2 \rightarrow X$  son *equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h: X_1 \rightarrow X_2$  tal que  $p_2 h = p_1$ . Obsérvese que el homeomorfismo  $h$  no preserva necesariamente los puntos base de  $X_1$  y  $X_2$ . Podemos generalizar los Corolarios 21.4 y 21.6 para obtener:

## 21.7 Teorema

Sean  $p_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $p_2: X_2 \rightarrow X$  dos recubrimientos con  $X_1, X_2$  conexos y localmente arco conexos. Sean  $x_1, x_2, x_0$  los puntos base con  $p_1(x_1) = p_2(x_2) = x_0$ . Los dos recubrimientos son equivalentes si y sólo si los subgrupos  $p_{1*} \pi(X_1, x_1)$  y  $p_{2*} \pi(X_2, x_2)$  de  $\pi(X, x_0)$  son conjugados.

*Demostración.* Resulta directamente de los Corolarios 21.4, 21.6 y del Teorema 18.3.

El grupo de transformaciones recubridoras de un recubrimiento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es el grupo de todos los homeomorfismos  $h: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$  tales que  $ph = p$  (véase el Ejercicio 17.9(r)). Este grupo se denota por  $G(\tilde{X}, p, X)$ . Claramente  $\tilde{X}$  es un  $G(\tilde{X}, p, X)$ -espacio.

## 21.8 Teorema

Si  $\tilde{X}$  es conexo y localmente arco conexo, la acción de  $G(\tilde{X}, p, X)$  sobre  $\tilde{X}$  es propiamente discontinua.

*Demostración.* Sea  $x$  un punto arbitrario de  $\tilde{X}$  y  $U$  un entorno de  $p(x)$  propiamente recubierto. Así pues,  $p^{-1}(U)$  es la unión disjunta de  $V_j$ ,  $j \in J$ , con  $x \in V_k$  para algún  $k$ . Sea  $h \in G(\tilde{X}, p, X)$ . Si  $h(x) = x$ , por el Corolario 17.5, la aplicación  $h$  es la identidad. En otras palabras, si  $h \neq 1$ ,  $h(x) \neq x$ . Puesto que  $ph(x) = p(x)$ , resulta que  $h(x) \in V_\ell$  para algún  $\ell$ ; además, si  $V_\ell = V_k$ , entonces  $h(x) = x$ . Concluimos, por tanto, que si  $h \neq 1$ , entonces  $x \in V_k$  y  $h(x) \in V_\ell$ , con  $V_k \cap V_\ell = \emptyset$ .

Podemos considerar que  $U$  es arco conexo, puesto que  $\tilde{X}$  (y, por tanto, claramente  $X$ ) es localmente arco conexo. Así pues, cada uno de los conjuntos  $V_j$ ,  $j \in J$ , es arco conexo. Ahora bien  $ph(V_k) = U$ , por lo que  $h(V_k) \subseteq \bigcup_{j \in J} V_j$ . Pero los  $V_j$ ,  $j \in J$ , son arco conexos y

$h(x) \in V_\ell$  para algún  $x \in V_k$ , lo que significa que  $h(V_k) \subseteq V_\ell$  y, por tanto,  $V_k \cap h(V_k) = \emptyset$ . Esto demuestra que la acción de  $G(\tilde{X}, p, X)$  es propiamente discontinua.

Usando este teorema y otros anteriores obtenemos los siguientes interesantes resultados.

## 21.9 Teorema

Sea  $\tilde{X}$  conexo y localmente arco conexo. Si  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  es un subgrupo normal de  $\pi(X, x_0)$ , entonces  $X$  es homeomorfo a  $\tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$ .

*Demostración.* Puesto que  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  es un subgrupo normal, resulta del Teorema 18.3 que

$$p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_1) = p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$$

para todo  $\tilde{x}_1 \in p^{-1}(x_0)$ . Así pues, por el Corolario 21.4, existe un elemento de  $G(\tilde{X}, p, X)$  tal que  $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ . Por tanto, si  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ , existe un elemento  $h \in G(\tilde{X}, p, X)$  tal que  $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$ . Recíprocamente, está claro que si  $h(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_1$  para algún  $h \in G(\tilde{X}, p, X)$ , entonces  $p(\tilde{x}_0) = p(\tilde{x}_1)$ . Así, el grupo  $g(\tilde{X}, p, X)$  identifica los mismos puntos de  $\tilde{X}$  que  $p$ . Esto demuestra que como conjuntos  $X$  y  $\tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$  son el mismo. Son, además, homeomorfos, ya que cada uno de ellos está dotado de la topología cociente natural determinada por las proyecciones  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  y  $\pi: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}/G(\tilde{X}, p, X)$ .

## 21.10 Corolario

Sea  $\tilde{X}$  conexo y localmente arco conexo. Si  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  es un subgrupo normal de  $\pi(X, x_0)$ , entonces

$$\pi(X, x_0) / p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \cong G(\tilde{X}, p, X).$$

*Demostración.* Se deduce inmediatamente de los Teoremas 21.9 y 19.3.

## 21.11 Corolario

Si  $\tilde{X}$  es simplemente conexo y localmente arco conexo, entonces

$$\pi(X, x_0) \cong G(\tilde{X}, p, X).$$

## 21.12 Ejercicios

- (a) Demostrar que el subespacio  $P$  de  $\mathbb{R}$  definido por

$$P = \{0, 1/n; n \text{ es un entero positivo}\}$$

no es localmente arco conexo.

- (b) Sean  $p_1: X_1 \rightarrow S^1$ ,  $p_2: X_2 \rightarrow S^1$  dos recubrimientos de  $n$  hojas ( $n$  un entero positivo finito). Demostrar que son equivalentes.
- (c) Determinar todos los espacios recubridores de: (i)  $S^1$ , (ii) el toro  $S^1 \times S^1$  y (iii) un espacio  $X$  que sea simplemente conexo y localmente arco conexo.
- (d) Sean  $p_1: X_1 \rightarrow X$ ,  $p_2: X_2 \rightarrow X$  dos aplicaciones recubridoras con  $X$  conexo y localmente arco conexo. (i) Demostrar que si existe una aplicación continua exhaustiva  $f: X_1 \rightarrow X_2$ , entonces  $f: X_1 \rightarrow X_2$  es una aplicación recubridora. (ii) Probar que si  $X_2$  es arco conexo y existe una aplicación continua  $f: X_1 \rightarrow X_2$ , entonces  $f: X_1 \rightarrow X_2$  es una aplicación recubridora.
- (e) Supongamos que  $p_1: X_1 \rightarrow X$  y  $p_2: X_2 \rightarrow X$  son recubrimientos en los cuales  $X_1$  es simplemente conexo y localmente arco conexo, mientras que  $X_2$  es conexo y localmente arco conexo. Demostrar que existe una aplicación continua  $p: X_1 \rightarrow X_2$  que es una aplicación recubridora.

- (f) Supongamos que  $X$  es un  $G$ -espacio conexo para el cual la acción de  $G$  sobre  $X$  es propiamente discontinua. Demostrar que el grupo de transformaciones recubridoras de  $p: X \rightarrow X/G$  es  $G$ .
- (g) Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  un recubrimiento con  $\tilde{X}$  conexo y localmente arco conexo. Demostrar que  $G(\tilde{X}, p, X)$  opera sobre  $p^{-1}(x_0)$ . Probar, además, que  $G(\tilde{X}, p, X)$  opera transitivamente sobre  $p^{-1}(x_0)$  si y sólo si  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  es un subgrupo normal de  $\pi(X, x_0)$ . (Véase el Ejercicio 18.4(b) para la definición de acción transitiva.)

## Capítulo 22

# Más sobre espacios recubridores: Teoremas de existencia

En el último capítulo demostramos que todo recubrimiento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  está determinado, salvo equivalencias, por la clase de conjugación del subgrupo  $p_* \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$  de  $\pi(X, x_0)$ . Es razonable preguntarse si dada una clase de conjugación de subgrupos de  $\pi(X, x_0)$  existe un recubrimiento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  que pertenezca a la clase de conjugación dada. La respuesta, como demostraremos más adelante, es sí, supuesto que hayamos añadido algunas nuevas condiciones a  $X$  (además de que  $X$  sea conexo y localmente arco conexo). Existe siempre un recubrimiento que corresponde a la clase de conjugación de todo el grupo fundamental de  $X$ , a saber  $1: X \rightarrow X$ . Sin embargo, este recubrimiento tiene poco interés. En el otro extremo, el recubrimiento que corresponde a la clase de conjugación del subgrupo trivial es muy interesante. Este recubrimiento, si existe, se llama el *recubrimiento universal* del espacio en cuestión. Así pues, el recubrimiento universal de  $X$  es un recubrimiento  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  tal que  $\tilde{X}$  es simplemente conexo. En breve daremos una condición necesaria y suficiente que asegure la existencia de un recubrimiento universal de un espacio  $X$ .

Supongamos que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento universal de  $X$ . Si  $x$  es un punto arbitrario de  $X$  y  $\tilde{x} \in p^{-1}(x)$ , existe entonces un entorno propiamente recubierto  $U$  de  $x$  tal que  $p^{-1}(U)$  es la unión disjunta de  $\{V_j; j \in J\}$  y  $\tilde{x} \in V_k$  para algún  $k$ . Denotemos a este  $V_k$  por  $V$ . El diagrama

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & \tilde{X} \\ p|V \downarrow & i & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

nos da un diagrama conmutativo de grupos fundamentales

$$\begin{array}{ccc} \pi(V, \tilde{x}) & \longrightarrow & \pi(\tilde{X}, \tilde{x}) \\ (p|V)_* \downarrow & i_* & \downarrow p_* \\ \pi(U, x) & \longrightarrow & \pi(X, x) \end{array}$$

La aplicación  $p|_V: V \rightarrow U$  es un homeomorfismo y, por tanto,  $(p|_V)_*$  es un isomorfismo. Puesto que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento universal, el grupo  $\pi(\tilde{X}, \tilde{x})$  es trivial y la aplicación  $i_*$  debe ser el homomorfismo trivial; esto es,  $i_*(\alpha) = [\varepsilon_1]$  para todo  $\alpha \in \pi(U, x)$ . Esto demuestra que si  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento universal de  $X$ , todo punto  $x \in X$  tiene un entorno  $U$  tal que el homomorfismo  $\pi(U, x) \rightarrow \pi(X, x)$  es trivial. Un espacio  $X$  con esta propiedad se dice que es «semilocalmente simplemente conexo». Así pues, un espacio es *semilocalmente simplemente conexo* si y sólo si para todo  $x$  de  $X$  existe un entorno  $U$  de  $x$  tal que todo camino cerrado de  $U$  con punto base  $x$  es equivalente en  $X$  al camino constante  $\varepsilon_x$ . Obsérvese que en el proceso de hacer que un camino cerrado de  $U$  sea equivalente a  $\varepsilon_x$ , podemos salirnos de  $U$ . Obsérvese también que si  $U$  es un entorno de  $x$  tal que todo camino cerrado de  $U$ , con punto base  $x$ , es equivalente en  $X$  al camino constante, entonces todo entorno  $U'$  de  $x$  tal que  $U' \subseteq U$  posee también la propiedad de que todo camino cerrado de  $U'$ , con punto base  $x$ , es equivalente en  $X$  al camino constante. La mayor parte de los espacios interesantes son semilocalmente simplemente conexos (véase los Ejercicios) y no es fácil encontrar un ejemplo de un espacio que sea conexo y localmente arco conexo pero que no sea semilocalmente simplemente conexo. Un tal ejemplo lo constituye el subespacio  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  dado por

$$X = \bigcup_{n>0} C_n$$

donde  $C_n$  es la circunferencia de centro  $(1/n, 0) \in \mathbb{R}^2$  y radio  $1/n$ . En el punto  $(0,0) \in X$  falla la condición para que  $X$  sea semilocalmente simplemente conexo. Así pues, este espacio no posee un recubrimiento universal.

La condición anterior, que es necesaria para que  $X$  posea un recubrimiento universal, es también suficiente.

## 22.1 Teorema

Sea  $X$  un espacio conexo y localmente arco conexo. Entonces  $X$  posee un recubrimiento universal  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  si y sólo si es semilocalmente simplemente conexo.

*Demostración.* Construimos en primer lugar un espacio  $\tilde{X}$  y una aplicación  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  y demostramos luego que poseen las propiedades requeridas. Sea  $x_0 \in X$  un punto base y  $\tilde{X}$  el conjunto de clases de equivalencia de caminos con origen en  $x_0$  (véase la Definición 14.1). Así,

$$\tilde{X} = \{ [\alpha]; \alpha: I \rightarrow X, \alpha(0) = x_0, [\alpha] = [\beta] \Leftrightarrow \alpha \sim \beta \}.$$

Definimos entonces  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  por  $p([\alpha]) = \alpha(1)$ .

Debemos dotar a  $\tilde{X}$  de una topología. Sea  $U$  un conjunto abierto de  $X$  y  $\alpha: I \rightarrow X$  un camino con origen en  $x_0$  y final en algún punto  $x_1$  de  $U$ . Definimos  $[U, \alpha]$  por

$$[U, \alpha] = \{ [\alpha * \beta]; \beta: I \rightarrow X, \beta(0) = \alpha(1), \beta(1) \in U \}.$$

En otras palabras,  $[U, \alpha]$  está formado por las clases de equivalencia de caminos  $\alpha * \beta$  tales que  $\beta$  tiene origen en  $\alpha(1)$  y está enteramente contenido en  $U$ . Usamos estos conjuntos para definir una topología  $\mathcal{U}$  en  $\tilde{X}$  de la siguiente manera:  $\mathcal{U}$  consta de  $\emptyset$ ,  $\tilde{X}$  y de las uniones arbitrarias de subconjuntos de  $\tilde{X}$  de la forma  $[U, \alpha]$ . Para demostrar que  $\mathcal{U}$  es una topología en  $\tilde{X}$  necesitamos únicamente comprobar que la intersección de dos miembros de  $\mathcal{U}$  es de nuevo un miembro de  $\mathcal{U}$  (las otras condiciones se satisfacen trivialmente). En primer lugar demostramos que si  $[\gamma] \in [U, \alpha]$ , entonces  $[U, \gamma] = [U, \alpha]$ . Lo hacemos de la siguiente manera: Puesto que  $[\gamma] \in [U, \alpha]$ , existe algún camino  $\beta$  en  $U$  tal que  $[\gamma] = [\alpha * \beta]$ . Si  $\delta$  es un camino arbitrario de  $U$  con origen  $\beta(1)$ , entonces

$$[\gamma * \delta] = [(\alpha * \beta) * \delta] = [\alpha * (\beta * \delta)]$$

lo que demuestra que  $[U, \gamma] \subseteq [U, \alpha]$ . El mismo razonamiento demuestra que  $[U, \alpha] \subseteq [U, \gamma]$  y, por tanto, que  $[U, \gamma] = [U, \alpha]$ . Consideremos ahora  $[U, \alpha] \cap [U', \alpha']$ , donde  $[U, \alpha]$  y  $[U', \alpha']$  pertenecen a  $\mathcal{U}$ . Si  $\beta \in [U, \alpha] \cap [U', \alpha']$ , entonces  $[U, \beta] = [U, \alpha]$  y  $[U', \beta] = [U', \alpha']$ . Obtenemos inmediatamente

$$[U \cap U', \beta] \subseteq [U, \alpha] \cap [U', \alpha']$$

de donde resulta que  $[U, \alpha] \cap [U', \alpha']$  es la unión de

$$\{[U \cap U', \beta]; \beta \in [U, \alpha] \cap [U', \alpha']\}$$

lo que demuestra que  $[U, \alpha] \cap [U', \alpha'] \in \mathcal{U}$ . Dejamos para el lector la comprobación de que la intersección de dos elementos arbitrarios de  $\mathcal{U}$  pertenece a  $\mathcal{U}$  (es un ejercicio sencillo). Así pues,  $\mathcal{U}$  es una topología en  $\tilde{X}$ .

Comprobamos ahora que la aplicación  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es continua. Sea  $U$  un subconjunto abierto de  $X$ . Si  $p^{-1}(U)$  es vacío, no hay nada que demostrar. Supongamos que  $[\alpha] \in p^{-1}(U)$ ; entonces, por definición,  $[U, \alpha]$  es un subconjunto abierto de  $\tilde{X}$  y

$$\begin{aligned} p([U, \alpha]) &= \{(\alpha * \beta)(1); [\alpha * \beta] \in [U, \alpha]\} \\ &= \{\beta(1); [\alpha * \beta] \in [U, \alpha]\} \\ &\subseteq U, \end{aligned}$$

puesto que, por definición de  $[U, \alpha]$ , los caminos  $\beta$  están en  $U$ . Tenemos por tanto

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{[\alpha] \in p^{-1}(U)} [U, \alpha]$$

que es un conjunto abierto de  $\tilde{X}$  y, por tanto,  $p$  es continua.

Veamos ahora que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es exhaustiva. En efecto, si  $x \in X$ , existe un camino en  $X$  con origen en  $x_0$  y final en  $x$  (el espacio  $X$  es arco conexo). Claramente  $[\alpha] \in \tilde{X}$  y  $p([\alpha]) = x$ .

Para demostrar que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento nos falta probar que cada punto de  $X$  posee un entorno propiamente recubierto. Sea  $x \in X$  y  $V$  un entorno abierto arco conexo de  $x$  tal que todo camino cerrado con punto base  $x$  sea equivalente en  $X$  al camino constante  $\varepsilon_x$ . Se tiene

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{[\alpha] \in p^{-1}(V)} [V, \alpha].$$

Si  $[V, \alpha] \cap [V, \beta] \neq \emptyset$  existe un elemento  $[\gamma] \in [V, \alpha] \cap [V, \beta]$  y, por tanto,  $[V, \gamma] = [V, \alpha]$  y  $[V, \gamma] = [V, \beta]$ , con lo que  $[V, \alpha] = [V, \beta]$ . Esto demuestra que  $p^{-1}(V)$  es una unión disjunta de conjuntos abiertos. Debemos demostrar que  $p$  aplica cada conjunto homeomórficamente sobre  $V$ . La aplicación

$$p_\alpha = p|_{[V, \alpha]} : [V, \alpha] \rightarrow V$$

es obviamente continua ya que  $p_\alpha^{-1}(V) = [V, \alpha]$ . Si  $x \in V$ , sea  $\beta$  un camino en  $V$  de  $\alpha(1)$  a  $x$ , entonces,  $[\alpha * \beta] \in [V, \alpha]$  y  $p([\alpha * \beta]) = x$ . Esto demuestra que  $p_\alpha$  es exhaustiva.

Para demostrar que  $p_\alpha$  es inyectiva supongamos que  $p_\alpha([\alpha * \beta]) = p_\alpha([\alpha * \gamma])$  para un par de elementos  $[\alpha * \beta], [\alpha * \gamma] \in [V, \alpha]$ . En este caso  $\beta$  y  $\gamma$  tienen el mismo punto final. El camino  $\beta * \bar{\gamma}$  es un camino cerrado de  $V$  y, por tanto, por nuestra elección de  $V$ , es equivalente en  $X$  al camino constante  $\epsilon$ . En particular,  $\beta \sim \gamma$  y, por tanto,  $[\alpha * \beta] = [\alpha * \gamma]$ , lo que demuestra que  $p_\alpha$  es inyectiva.

Para completar la demostración de que  $p_\alpha$  es un homeomorfismo debemos comprobar que  $p_\alpha^{-1}$  es continua, o equivalentemente, que  $p_\alpha$  es una aplicación abierta. Sea  $[W, \beta]$  un subconjunto abierto de  $[V, \alpha]$ . Entonces  $N = p([W, \beta])$  es el conjunto de puntos de  $V$  que pueden unirse a  $\beta(1)$  por un camino de  $W$ . Para cada  $y \in N$  existe un subconjunto abierto arco conexo  $W_y$  de  $W$  que contiene  $y$ . Puesto que  $y \in N$  y  $W_y$  es arco conexo, resulta que  $W_y \subseteq N$  y, por tanto,  $N = \bigcup_{y \in N} W_y$ . Así pues,  $p([W, \beta]) = N$  es abierto y, por tanto,  $p_\alpha$  es un

homeomorfismo, lo que completa la demostración de que  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  es un recubrimiento.

Para acabar la demostración del Teorema 22.1 debemos probar que  $\tilde{X}$  es simplemente conexo. En primer lugar demostramos que  $\tilde{X}$  es arco conexo. Sea  $\tilde{x}_0 = [\epsilon]$  la clase del camino constante  $\epsilon$  en  $x_0$  y sea  $[\alpha]$  un elemento arbitrario de  $\tilde{X}$ . Definimos  $\tilde{\alpha}: I \rightarrow \tilde{X}$  por

$$\tilde{\alpha}(s) = [\alpha_s] \quad s \in I$$

donde  $\alpha_s(t) = \alpha(st)$ ,  $t \in I$ . Luego  $\tilde{\alpha}$  es un camino en  $\tilde{X}$  de  $\tilde{x}_0$  a  $[\alpha]$ . Esto demuestra que  $\tilde{X}$  es arco conexo. (Obsérvese que  $\tilde{\alpha}$  es una elevación de  $\alpha$ .)

Sea  $\beta$  un camino cerrado de  $\tilde{X}$  con punto base  $\tilde{x}_0$ . Por la unicidad de las elevaciones,  $\beta = \widetilde{p\beta}$  y, por tanto,

$$[p\beta] = [p(\widetilde{p\beta})] = [\widetilde{p\beta}(1)] = \tilde{x}_0 = [\epsilon].$$

Así pues,  $\beta = \widetilde{p\beta}$  es equivalente al camino constante de  $\tilde{X}$  y, por tanto,  $\tilde{X}$  es simplemente conexo, lo que completa la demostración del Teorema 22.1.

## 22.2 Corolario

Supongamos que  $X$  es un espacio conexo, localmente arco conexo y semilocalmente simplemente conexo. Si  $H$  es un subgrupo de  $\pi(X, x_0)$  existe un recubrimiento  $p_H: X_H \rightarrow X$ , único salvo equivalencias, tal que  $H = p_{H*} \pi(X_H, x_H)$ . Así pues, en particular, para toda clase de conjugación de subgrupos de  $\pi(X, x_0)$  existe un espacio recubridor  $p': X' \rightarrow X$  tal que  $p'_* \pi(X', x')$  pertenece a la clase de conjugación dada.



**Demostración.** Sea  $p: \tilde{X} \rightarrow X$  el recubrimiento universal de  $X$  y sea  $G(\tilde{X}, p, X)$  el grupo de transformaciones recubridoras. Puesto que  $G(\tilde{X}, p, X) \cong \pi(X, x_0)$ , sea  $H'$  el subgrupo que corresponde a  $H$  por este isomorfismo. Definimos entonces  $X_H = \tilde{X}/H'$  y  $p_H$  como la aplicación inducida por  $p$ . Dejamos los detalles para el lector.

Las condiciones impuestas a  $X$  en el Corolario 22.2 para asegurar la existencia de  $X_H$  pueden debilitarse; véase el Ejercicio 22.3(e).

## 22.3 Ejercicios

- Probar que todo espacio simplemente conexo es semilocalmente simplemente conexo.
- Probar que toda  $n$ -variedad conexa es semilocalmente simplemente conexa. Probar que toda  $n$ -variedad conexa tiene un recubrimiento universal  $p: \tilde{M} \rightarrow M$  tal que  $\tilde{M}$  es también un  $n$ -variedad.
- Probar que  $\pi(S^n, x_0)$ ,  $n > 1$ , es el grupo trivial de la siguiente manera: Sea  $p: \tilde{S}^n \rightarrow S^n$  el recubrimiento universal. Definimos  $f: D^n \rightarrow S^n$  de manera que aplique  $\partial D^n$  en  $x_0$ . Demostrar que  $f$  se eleva a  $f': D^n \rightarrow \tilde{S}^n$  y probar que obtenemos así una aplicación continua  $f'': S^n \rightarrow \tilde{S}^n$  tal que  $pf'' = 1$ . Finalmente, aplicar el grupo fundamental a la sucesión  $S^n \xrightarrow{f''} \tilde{S}^n \xrightarrow{p} S^n$  para deducir que  $\pi(S^n, x_0)$  es trivial.
- Sea  $X$  un espacio conexo, localmente arco conexo y semilocalmente simplemente conexo. Sea  $H$  un subgrupo de  $\pi(X, x_0)$ . Designemos por  $\mathcal{P}$  el conjunto de caminos de  $X$  con origen en  $x_0$ . Definimos una relación  $\sim_H$  en  $\mathcal{P}$  mediante

$$\alpha \sim_H \beta \Leftrightarrow \alpha(1) = \beta(1) \text{ y } [\alpha * \beta] \in H.$$

Probar que  $\sim_H$  es una relación de equivalencia en  $\mathcal{P}$ . Denotemos por  $[\alpha]_H$  la clase de equivalencia de  $\alpha$ . Definimos  $X_H$  como  $\mathcal{P}/\sim_H$  y  $p_H: X_H \rightarrow X$  por  $p_H([\alpha]_H) = \alpha(1)$ . Sea  $U$  un conjunto abierto de  $X$  y  $\alpha: I \rightarrow X$  un camino de  $X$  con origen en  $x_0$  y final en  $U$ . Definimos  $[U, \alpha]_H$  como

$$[U, \alpha]_H = \{ [\alpha * \beta]_H; \beta: I \rightarrow X, \beta(0) = \alpha(1), \beta(1) \in U \}$$

Demostrar que la colección  $\mathcal{U}_H$  formada por  $\emptyset$ ,  $X_H$  y las uniones arbitrarias de conjuntos de la forma  $[U, \alpha]_H$  constituye una topología en  $X_H$ . Probar finalmente, que  $p_H: X_H \rightarrow X$  es un recubrimiento y que

$$p_{H*} \pi(X_H, x_H) = H \subseteq \pi(X, x_0).$$

- Sea  $X$  un espacio conexo y localmente arco conexo. Sea  $H$  un subgrupo de  $\pi(X, x_0)$ . Probar que existe un recubrimiento  $p_H: X_H \rightarrow X$  tal que  $p_{H*} \pi(X_H, x_H) = H$  si y sólo si para todo punto  $x$  de  $X$  existe un entorno  $U$  de  $x$  tal que todo camino cerrado de  $U$  con punto base  $x$  es equivalente en  $X$  a algún elemento de  $H \subseteq \pi(X, x_0)$ . (Indicación: Modificar la demostración del Ejercicio (d) anterior.)

## Capítulo 23

# El teorema de Seifert-Van Kampen: I Generadores

El teorema que vamos a discutir da un método bastante general para calcular grupos fundamentales. Fue demostrado por primera vez en la década de 1930 independientemente por H. Seifert y E. Van Kampen. En la literatura se le cita con frecuencia como el teorema de Van Kampen y algunas veces como el teorema de Seifert (depende esencialmente de que el autor sea de lengua inglesa o alemana).

Supongamos que tenemos un espacio  $X$  que es la unión de dos subespacios  $U_1, U_2$  que sean ambos abiertos y arco conexos. Supongamos, además, que  $U_1 \cap U_2$  es no vacío y arco conexo. El teorema de Seifert-Van Kampen da un método para calcular el grupo fundamental de  $X$  supuestos conocidos los grupos fundamentales de  $U_1, U_2$  y  $U_1 \cap U_2$ . (En el Ejercicio 15.16(c) presentamos un caso especial de este teorema.)

Sea  $x_0 \in U_1 \cap U_2$  y denotemos por  $\psi_j: U_j \rightarrow X$ , para  $j = 1, 2$ , las inclusiones. Hablando sin precisión, el teorema de Seifert-Van Kampen nos dice:

(i) (Los «generadores» de  $\pi(X, x_0)$ .) Si  $\alpha \in \pi(X, x_0)$ , entonces

$$\alpha = \prod_{k=1}^n \psi_{\lambda(k)*} \alpha_k$$

donde  $\alpha_k \in \pi(U_{\lambda(k)}, x_0)$ ,  $\lambda(k) = 1$  ó  $2$ .

(ii) (Las «relaciones» de  $\pi(X, x_0)$ .) Sea

$$\alpha = \prod_{k=1}^n \psi_{\lambda(k)*} \alpha_k$$

un elemento de  $\pi(X, x_0)$ . Entonces  $\alpha = 1$  si y sólo si  $\alpha$  puede reducirse a 1 por una sucesión finita de operaciones, cada una de las cuales añade o suprime una expresión de una cierta lista. Esta lista depende de  $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ ,  $\pi(U_1, x_0)$  y de  $\pi(U_2, x_0)$ .

La información que nos proporcionan (i) y (ii) se llama una presentación del grupo  $\pi(X, x_0)$ . Así pues, para poder establecer con precisión el teorema de Seifert-Van Kampen

necesitamos explicar con detalle qué es una presentación de un grupo. Es, de hecho, una forma elegante de expresar el grupo de términos de generadores y relaciones. Antes de seguir adelante, sin embargo, debemos introducir un poco más de notación.

Consideremos un conjunto  $S$  y pensemos los elementos de  $S$  como símbolos no conmutativos. Mediante estos símbolos formamos *palabras*; las palabras son exactamente expresiones de la forma

$$W = x_1 \epsilon(1) x_2 \epsilon(2) \dots x_k \epsilon(k)$$

donde  $x_i \in S$ ,  $\epsilon(i) = \pm 1$  y se permiten repeticiones. (En otras palabras, a partir del conjunto  $S = \{y_j; j \in J\}$  obtenemos un «alfabeto»  $\{y_j^{\pm 1}; j \in J\}$ , que usamos para formar «palabras».) Es conveniente considerar la *palabra vacía*, en la cual no aparece ningún símbolo. Decimos que una palabra es *reducida* si no contiene ningún símbolo  $x^1$  seguido de  $x^{-1}$  o viceversa  $x^{-1}$  seguido de  $x^1$ . Así pues,  $x_1^1 x_1^1 x_1^1$  es una palabra reducida pero  $x_1^1 x_1^{-1} x_1^1$  no lo es. Toda palabra puede reducirse a una palabra reducida suprimiendo simplemente los pares de la forma  $x^1 x^{-1}$  o  $x^{-1} x^1$  (donde  $x \in S$ ). Por ejemplo,  $x_1^{-1} x_2^1 x_2^{-1} x_1^1 x_3^1$  se reduce a  $x_1^{-1} x_1^1 x_3^1$ , que, a su vez, se reduce a  $x_3^1$ .

Usando la yuxtaposición de palabras reducidas como ley de composición y reduciendo la palabra resultante, si es necesario, resulta que el conjunto  $G$  de palabras reducidas en los símbolos de  $S$  forma un grupo. La palabra vacía actúa como elemento neutro y la inversa de la palabra  $W = x_1^{\epsilon(1)} x_2^{\epsilon(2)} \dots x_k^{\epsilon(k)}$  viene dada por

$$W^{-1} = x_k^{-\epsilon(k)} x_{k-1}^{-\epsilon(k-1)} \dots x_2^{-\epsilon(2)} x_1^{-\epsilon(1)}$$

Dejamos para el lector la comprobación de que efectivamente se trata de un grupo. Este grupo se llama el *grupo libre generado por  $S$* . Desde luego, la naturaleza de los símbolos de  $S$  no es importante, con lo que si  $S'$  es otro conjunto en correspondencia biyectiva con  $S$ , los grupos libres generados por  $S$  y por  $S'$  son isomorfos. Si  $S$  es un conjunto finito con  $n$  elementos, al grupo libre generado por  $S$  le llamamos el *grupo libre de  $n$  generadores*.

Obsérvese que el grupo libre con un generador  $\{x\}$  consta de los siguientes elementos

$$1, x^1, x^{-1}, x^1 x^1, x^{-1} x^{-1}, x^1 x^1 x^1, x^{-1} x^{-1} x^{-1}, \dots$$

y no es difícil ver que es isomorfo al grupo de los enteros  $\mathbb{Z}$ . Escribiremos, a menudo,  $x$  en lugar de  $x^1$ ,  $x^2$  en lugar de  $x^1 x^1$ ,  $x^{-2}$  en lugar de  $x^{-1} x^{-1}$ , etc. Obsérvese, también, que el grupo libre de  $n$  generadores, para  $n > 1$  es un grupo infinito no abeliano.

Es conveniente interpretar los grupos libres de una forma algo distinta considerando clases de equivalencia de palabras por una relación de equivalencia conveniente. Consideremos las siguientes operaciones entre palabras:

- (i) intercalar  $xx^{-1}$  o  $x^{-1}x$  en una palabra, donde  $x \in S$ ,
- (ii) suprimir  $xx^{-1}$  o  $x^{-1}x$  en una palabra, donde  $x \in S$

(intercalar  $xx^{-1}$  en una palabra  $W$  significa escribir  $W$  como  $W_1 W_2$  y, entonces, intercalar  $xx^{-1}$  de esta manera:  $W_1 x x^{-1} W_2$ ; desde luego,  $W_1$  o  $W_2$  pueden ser vacías). Decimos que dos palabras  $W, W'$  son equivalentes si y sólo si  $W'$  puede obtenerse a partir de  $W$  por un número finito de operaciones del tipo (i) e (ii). Claramente es una relación de equivalencia; además, es obvio que toda palabra es equivalente a su forma reducida. El conjunto de clases de equivalencia de palabras de  $S$  con la yuxtaposición como ley de

composición, constituye el grupo libre generado por  $S$ . Por brevedad denotaremos usualmente a la clase de equivalencia que contiene a la palabra  $W$  simplemente por  $W$ ; esto no nos llevará a ninguna confusión.

Supongamos ahora que  $R$  es un conjunto de palabras en  $S$ . Podemos considerar las siguientes nuevas operaciones entre palabras:

- (iii) intercalar  $r$  o  $r^{-1}$  en una palabra, donde  $r \in R$ ,
- (iv) suprimir  $r$  o  $r^{-1}$  de una palabra, donde  $r \in R$ .

Decimos ahora que dos palabras  $W, W'$  son equivalentes si y sólo si  $W'$  puede obtenerse a partir de  $W$  por un número finito de operaciones del tipo (i), (ii), (iii) y (iv). El lector puede comprobar rápidamente que se trata de una relación de equivalencia y que el conjunto de clases de equivalencia forma un grupo, con la yuxtaposición como ley de composición. Se dice que este grupo es el *grupo con la presentación*  $(S; R)$  y se denota por  $\langle S; R \rangle$ . Igual que antes, seguiremos denotando a la clase de equivalencia que contiene a la palabra  $W$  por  $W$ , sin que nos cause de nuevo ninguna confusión. El conjunto  $S$  se llama los *generadores* y el conjunto  $R$  las *relaciones*. Vamos a dar tres ejemplos sencillos. En primer lugar, el grupo con la presentación  $(S; \emptyset)$  no es más que el grupo libre generado por  $S$ . El segundo ejemplo es  $\langle \{x\}; \{x^n\} \rangle$ , donde  $n$  es un entero positivo fijo. Este grupo consta de las palabras

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$$

y es fácil ver que es isomorfo al grupo cíclico  $Z_n$ . Para el tercer ejemplo consideremos  $\langle \{x, y\}; \{xyx^{-1}y^{-1}\} \rangle$ . Resulta que  $xy = yx$ , ( $xy = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1}xy = yx$ ), ( $xy = yx$ ) mediante operaciones (iii) y (ii)). No es difícil entonces ver que  $x^a y^b = y^b x^a$  para todo par de enteros  $a, b$  y, por tanto, cualquier palabra  $g = x^{a(1)} y^{b(1)} x^{a(2)} \dots x^{a(k)} y^{b(k)}$  puede reescribirse en la forma  $g = x^a y^b$ , donde  $a = \sum_{i=1}^k a(i)$  y  $b = \sum_{i=1}^k b(i)$ . Así pues, el grupo  $\langle \{x, y\}; \{xyx^{-1}y^{-1}\} \rangle$  es isomorfo a  $Z \times Z$ .

Si  $\alpha$  es una palabra en  $S$  y  $\alpha = 1$  en  $\langle S; R \rangle$ , entonces  $\alpha$  no tiene por qué pertenecer necesariamente a  $R$ . Sin embargo,  $\alpha$  puede reducirse a la palabra vacía por una sucesión finita de operaciones del tipo (i), (ii), (iii) y (iv). Decimos en tal caso que  $\alpha$  es una *consecuencia* de las relaciones  $R$ . Por ejemplo  $x^a y^b x^{-a} y^{-b}$  es una consecuencia de la relación  $xyx^{-1}y^{-1}$ .

Diferentes presentaciones pueden dar lugar a grupos isomorfos. Por ejemplo, el grupo  $\langle \{x, y\}; \{y\} \rangle$  es isomorfo al grupo  $\langle \{x\}, \emptyset \rangle$ . Análogamente, el grupo  $\langle \{a, b\}; \{baba^{-1}\} \rangle$  es isomorfo al grupo  $\langle \{a, c\}; \{a^2 c^2\} \rangle$ . Para verlo definimos

$$f: \langle \{a, b\}; \{baba^{-1}\} \rangle \rightarrow \langle \{a, c\}; \{a^2 c^2\} \rangle$$

sobre los generadores mediante  $f(a) = a$ ,  $f(b) = ca$  y en general, mediante

$$f(x_1 \epsilon(1) x_2 \epsilon(2) \dots x_n \epsilon(n)) = f(x_1) \epsilon(1) f(x_2) \epsilon(2) \dots f(x_n) \epsilon(n).$$

Puesto que

$$f(baba^{-1}) = ca caa^{-1} = ca^2 c = c(a^2 c^2) c^{-1} = cc^{-1} = 1,$$

obtenemos una aplicación bien definida que es un homomorfismo. Si definimos

$$g: \langle \{a, c\}; \{a^2 c^2\} \rangle \rightarrow \langle \{a, b\}; \{baba^{-1}\} \rangle$$

sobre los generadores por  $g(a) = a$ ,  $g(c) = ba^{-1}$ , es fácil comprobar que  $g$  es una aplicación bien definida, es un homomorfismo y  $fg = 1$ ,  $gf = 1$ , con lo que  $f$  y  $g$  son isomorfismos de grupo.

El problema de determinar cuándo dos presentaciones determinan grupos isomorfos es, en general, extremadamente difícil. Incluso si estamos convencidos de que dos grupos son isomorfos, puede ser difícil demostrarlo. Por ejemplo, el grupo  $\langle \{x, y\}; \{xy^2x^{-1}y^{-3}, yx^2y^{-1}x^{-3}\} \rangle$  es isomorfo al grupo trivial 1, pero es extremadamente duro demostrarlo. (El lector debería intentar probar, no obstante, que el grupo es, efectivamente, trivial.) A pesar de este tono pesimista, existen varios criterios que nos permiten decidir si dos grupos son distintos. Estos criterios los introduciremos cuando los necesitemos.

Dado un grupo arbitrario  $G$ , decimos que  $G$  admite una presentación  $\langle S; R \rangle$  si  $G$  es isomorfo a  $\langle S; R \rangle$ . Todo grupo admite una presentación  $\langle S_G; R_G \rangle$  donde

$$S_G = \{ g \in G \}, \quad R_G = \{ (xy)^1 y^{-1} x^{-1}; x, y \in G \};$$

$(xy)^1$  significa el símbolo que representa  $xy \in G$ . La demostración de que  $G$  es isomorfo a  $\langle S_G; R_G \rangle$  se deja como ejercicio para el lector.

Algunas veces es más conveniente describir las relaciones  $R$  del grupo  $\langle S; R \rangle$  como un conjunto de *relaciones*. Queremos decir con esto que el conjunto  $\{r; r \in R\}$  puede reescribirse como  $\{r = 1; r \in R\}$ . Además, si  $r$  es el producto de dos palabras  $uv$ , entonces podemos reemplazar  $r = 1$  por  $u = v^{-1}$ . Así, por ejemplo, podemos escribir  $\langle \{A, B\}; \{ABA^{-1}B^{-1}\} \rangle$  como  $\langle \{A, B\}; \{ABA^{-1}B^{-1} = 1\} \rangle$  o como  $\langle \{A, B\}; \{AB = BA\} \rangle$ . También las relaciones  $R_G$  anteriores pueden escribirse como  $\{(xy)^1 = x^1 y^1; x, y \in G\}$ . Esta informalidad de notación no produce confusión alguna.

### 23.1 Ejercicios

- (a) Demostrar que si  $G$  es un grupo,  $G$  es isomorfo a  $\langle S_G; R_G \rangle$ , donde

$$S_G = \{ g \in G \}, \quad R_G = \{ (xy)^1 y^{-1} x^{-1}; x, y \in G \}.$$

- (b) ¿Cuál es el orden del grupo  $\langle \{A, B\}; R \rangle$ , donde

$$R = \{ A^4, A^2 B^{-2}, A^3 B A^{-1} B^{-1} \}?$$

- (c) Demostrar que el grupo  $\langle \{A, B\}; \{A^4, B^2, ABA^{-1}B^{-1}\} \rangle$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ .  
 (d) Supongamos que  $G$  es un grupo con una presentación  $\langle S; R \rangle$ . Sea  $AG$  el grupo dado por la presentación  $\langle S; AR \rangle$ , donde

$$AR = R \cup \{ xyx^{-1}y^{-1}; x, y \in S \}.$$

Demostrar que  $AG$  es un grupo abeliano y que existe un epimorfismo  $G \rightarrow AG$ . ¿Cuál es el núcleo de este epimorfismo?

- (e) Utilizando el Ejercicio 19.5(e) demostrar que el grupo fundamental de la botella de Klein admite la presentación  $\langle \{a, b\}; \{abab^{-1}\} \rangle$ .  
 (f) Sea  $G = \langle S; R \rangle$ . Sean  $T_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) las siguientes transformaciones del par  $\langle S; R \rangle$  (llamadas *transformaciones de Tietze*):

$T_1$ : Si  $r$  es una palabra en  $S$  y  $r = 1$  es una relación en  $G$ , ponemos

$$S' = S, R' = R \cup \{r\}.$$

$T_2$ : Si  $r \in R$  es tal que la relación  $r = 1$  vale en el grupo  $\langle S; R - \{r\} \rangle$ , ponemos

$$S' = S, R' = R - \{r\}.$$

$T_3$ : Si  $w$  es una palabra en  $S$  y  $x$  es un símbolo que no está en  $S$ , ponemos

$$S' = S \cup \{x\}, R' = R \cup \{wx^{-1}\}.$$

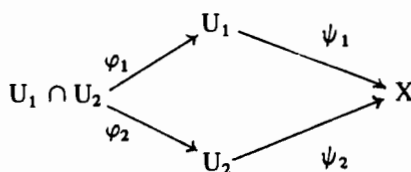
$T_4$ : Si  $x \in S$  y si  $w$  es una palabra en  $S$  en la que no intervienen  $x$  ni  $x^{-1}$  y tal que  $wx^{-1} \in R$ , entonces sustituimos  $w$  por  $x$  en todos los elementos de  $R - \{wx^{-1}\}$  para obtener  $R'$  y ponemos

$$S' = S - \{x\}.$$

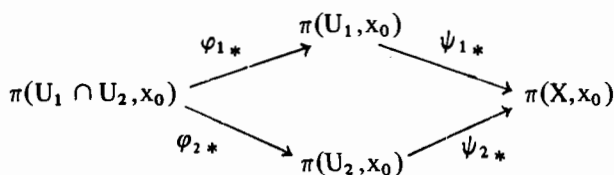
Probar que si  $\langle S''; R'' \rangle$  se obtiene a partir de  $\langle S; R \rangle$  por una sucesión finita de transformaciones de Tietze, entonces  $\langle S''; R'' \rangle$  es isomorfo a  $\langle S; R \rangle$ .

(Las transformaciones  $T_1$  y  $T_2$  corresponden a añadir y suprimir relaciones superfluas respectivamente, mientras que  $T_3$  y  $T_4$  corresponden a añadir y suprimir respectivamente generadores superfluos.)

Volvamos ahora a nuestro espacio topológico  $X$  que es unión de dos abiertos arco conexos  $U_1$  y  $U_2$  con  $U_1 \cap U_2$  no vacío y arco conexo. Denotemos por  $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$  las siguientes inclusiones



Elijamos como punto base un punto  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ . Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo de homomorfismos:



Supongamos que conocemos los grupos fundamentales de  $U_1 \cap U_2$ ,  $U_1$  y  $U_2$  y que vienen dados por sendas presentaciones

$$\begin{aligned}\pi(U_1 \cap U_2, x_0) &= \langle S; R \rangle, \\ \pi(U_1, x_0) &= \langle S_1; R_1 \rangle, \\ \pi(U_2, x_0) &= \langle S_2; R_2 \rangle.\end{aligned}$$

Si  $s \in S$ , entonces  $\varphi_{1*} s \in \pi(U_1, x_0)$  y  $\varphi_{2*} s \in \pi(U_2, x_0)$ , por lo que podemos expresar estos elementos como palabras en  $S_1, S_2$  respectivamente. Sean ' $\varphi_{1*} s$ ', ' $\varphi_{2*} s$ ' representaciones de  $\varphi_{1*} s$ ,  $\varphi_{2*} s$  como palabras en los generadores  $S_1, S_2$  respectivamente.

### 23.2 Definición

Denotamos por  $R_s$  el siguiente conjunto de palabras en  $S_1 \cup S_2$ :

$$(\varphi_{1*} s') (\varphi_{2*} s')^{-1} \quad s \in S.$$

$R_s$  pensado como un conjunto de relaciones es

$$\{ \varphi_{1*} s' = \varphi_{2*} s'; s \in S \}.$$

Podemos, ahora, establecer el teorema de H. Seifert y E. Van Kampen.

### 23.3 Teorema de Seifert-Van Kampen

$\pi(X, x_0)$  es isomorfo al grupo definido por los generadores  $S_1 \cup S_2$  y las relaciones  $R_1 \cup R_2 \cup R_s$ .

Obsérvese que las relaciones  $R$  de  $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$  no aparecen en el enunciado del teorema.

Podemos decir que  $\pi(X, x_0)$  es el menor grupo generado por  $\pi(U_1, x_0)$  y  $\pi(U_2, x_0)$  para el cual  $\varphi_{1*} s = \varphi_{2*} s$ ,  $s \in \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ .

La demostración del teorema la dividiremos esencialmente en dos partes. La primera parte hace referencia a los generadores y la demostraremos en este capítulo. La segunda parte se refiere a las relaciones y será demostrada en el capítulo siguiente. Probamos ahora un resultado que será de gran utilidad (de hecho es exactamente el Ejercicio 7.13(g)); al igual que en el Capítulo 16 podríamos evitar usarlo.

### 23.4 Teorema

Sea  $X$  un espacio topológico compacto obtenido a partir de un espacio métrico con métrica  $d$ . Dado un recubrimiento abierto  $\{U_j; j \in J\}$  existe un número real  $\delta > 0$  (llamado el número de Lebesgue de  $\{U_j; j \in J\}$ ) tal que todo subconjunto de diámetro menor que  $\delta$  está contenido en uno de los conjuntos  $U_j$ ,  $j \in J$ .

**Demostración.** Puesto que  $X$  es compacto podemos suponer que  $J$  es finito. Para  $x \in X$  y  $j \in J$  definamos  $f_j(x)$  por

$$f_j(x) = d(x, X - U_j) = \inf_{y \in X - U_j} d(x, y).$$

Claramente  $f_j$  es continua, y, por tanto, también lo es la función  $f$  definida por

$$f(x) = \max_{j \in J} f_j(x).$$

Puesto que  $X - U_j$  es cerrado, resulta que  $f_j(x) = 0$  si y sólo si  $x \in X - U_j$ . Así pues,  $f(x) = 0$  si y sólo si  $x \in X - U_j$  para todo  $j \in J$ . Pero  $\{U_j; j \in J\}$  es un recubrimiento de  $X$  y, por tanto,  $f(x) > 0$  para todo  $x \in X$ . Puesto que  $X$  es compacto y  $f$  es continua,  $f(X)$  es un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}$ ; de hecho es un subconjunto de  $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$ . Por tanto, existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > \delta$  para todo  $x \in X$ . Afirmamos que todo subconjunto  $S$  de diámetro menor que  $\delta$  debe pertenecer a algún  $U_k$ ,  $k \in J$ . Para verlo, tomemos simplemente  $x \in S$ ; entonces  $f(x) > \delta$ , lo que significa que  $f_k(x) > \delta$  para algún  $k$ , que a su vez implica que  $x \in U_k$ . Pero el diámetro de  $S$  es menor que  $\delta$  y  $d(x, X - U_k) > \delta$  para algún  $x \in S$ , por lo que  $S$  está contenido en  $U_k$ , lo que demuestra el teorema.

El primer paso en la demostración del teorema de Seifert-Van Kampen se refiere a los generadores. Esencialmente vamos a resolver los Ejercicios 14.6(g), (h) e (i).

### 23.5 Lema

El grupo  $\pi(X, x_0)$  está generado por

$$\psi_{1*}(\pi(U_1, x_0)) \cup \psi_{2*}(\pi(U_2, x_0)).$$

En otras palabras, si  $\alpha \in \pi(X, x_0)$ , entonces  $\alpha = \prod \psi_{\lambda(k)*} \alpha_k$ , donde  $\alpha_k \in \pi(U_{\lambda(k)}, x_0)$  y  $\lambda(k) = 1$  ó  $2$ .

**Demostración.** Sea  $f$  un camino cerrado con punto base  $x_0 \in X$ . Sea  $\delta$  el número de Lebesgue del recubrimiento abierto  $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2)\}$  de  $I$ . Esto significa que si  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  es una sucesión de números reales con

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = 1$$

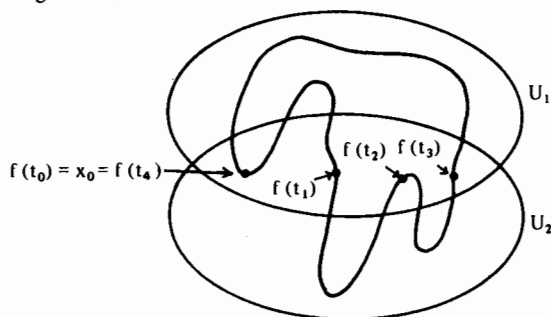
y  $t_i - t_{i-1} < \delta$ , entonces  $f([t_{i-1}, t_i])$  está contenido en  $U_1$  o en  $U_2$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Podemos suponer que  $f(t_i) \in U_1 \cap U_2$ . (Si  $f(t_i) \notin U_1 \cap U_2$ , entonces  $[t_{i-1}, t_i]$  y  $[t_i, t_{i+1}]$  están ambos contenidos en  $U_1$  o en  $U_2$  con lo que podemos sustituir estos dos intervalos por  $[t_{i-1}, t_{i+1}]$  y entonces  $f([t_{i-1}, t_{i+1}])$  está contenido en  $U_1$  o en  $U_2$ . En tal caso reorganizaremos los índices y continuaremos el proceso; véase la Figura 23.1.)

Consideremos los caminos  $f_i: I \rightarrow X$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , definidos por

$$f_i(t) = f((1-t)t_{i-1} + tt_i).$$



Figura 23.1



Obsérvese que  $f_i$  es un camino contenido en  $U_1$  o en  $U_2$ , con origen en  $f(t_{i-1})$  y final en  $f(t_i)$ . Afirmamos que

$$[f] = [f_1] [f_2] \dots [f_n].$$

Esto no es más que el Ejercicio 14.6(i), pero damos la demostración para que sea más completo.

### 23.6 Lema

Sea  $f: I \rightarrow X$  un camino y

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = 1.$$

Si  $f_j: I \rightarrow X$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$  está definido por

$$f_j(t) = f((1-t)t_{j-1} + tt_j)$$

entonces

$$[f] = [f_1] [f_2] \dots [f_n].$$

*Demostración.* La demostración es por inducción sobre  $n$ . Supongamos en primer lugar que  $n = 2$ ; en tal caso  $0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 = 1$  y

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(t) &= \begin{cases} f_1(2t) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f_2(2t-1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2tt_1) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f((1-(2t-1))t_1 + 2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos ver que  $f_1 * f_2 \sim f$  simplemente por medio de la homotopía  $F: I \times I \rightarrow X$  dada por

$$F(t, s) = \begin{cases} f((1-s)2tt_1 + st) & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f((1-s)(t_1 + (2t-1)(1-t_1)) + st) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Supongamos ahora que  $n > 2$  y que el resultado es cierto para todo entero menor que  $n$ . Tenemos

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = 1.$$

Puesto que  $0 = t_0 \leq t_{n-1} \leq t_n = 1$  podemos aplicar el resultado anterior para obtener

$$f \sim g * f_n$$

donde  $g(t) = f(tt_{n-1})$ . Ahora bien,

$$0 = \frac{t_0}{t_{n-1}} \leq \frac{t_1}{t_{n-1}} \leq \dots \leq \frac{t_{n-2}}{t_{n-1}} \leq \frac{t_{n-1}}{t_{n-1}} = 1,$$

por lo que, por hipótesis de inducción,

$$[g] = [g_1] [g_2] \dots [g_{n-1}]$$

donde

$$\begin{aligned} g_i(t) &= g((1-t)t_{i-1}/t_{n-1} + tt_1/t_{n-1}) \\ &= f((1-t)t_{i-1} + tt_1) \\ &= f_i(t). \end{aligned}$$

Así pues,  $[f] = [f_1] [f_2] \dots [f_n]$ , lo que completa la demostración.

Este lema puede demostrarse también de forma directa como sigue:

$$(((\dots((f_1 * f_2) * f_3) * \dots) * f_n)(t) = \begin{cases} f_1(2^{n-1}t) & 0 \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-1}, \\ f_2(2^{n-1}t - 1) & (\frac{1}{2})^{n-1} \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-2}, \\ \vdots & \vdots \\ f_k(2^{n-k+1}t - 1) & (\frac{1}{2})^{n-k+1} \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-k}, \\ \vdots & \vdots \\ f_n(2t - 1) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} f(2^{n-1} t t_1) & 0 \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-1}, \\ f(t_1 + (2^{n-1} t - 1)t_2 - t_1)) & (\frac{1}{2})^{n-1} \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-2}, \\ \vdots & \vdots \\ f(t_{k-1} + (2^{n-k+1} t - 1)(t_k - t_{k-1})) & (\frac{1}{2})^{n-k+1} \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-k}, \\ \vdots & \vdots \\ f(t_{n-1} + (2t - 1)(1 - t_{n-1})) & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$= f(h(t))$$

donde  $h: I \rightarrow I$  es la aplicación continua dada por

$$h(t) = \begin{cases} 2^{n-1} t t_1 & 0 \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-1}, \\ t_{k-1} + (2^{n-k+1} t - 1)(t_k - t_{k-1}) & (\frac{1}{2})^{n-k+1} \leq t \leq (\frac{1}{2})^{n-k}, k=2,3,\dots,n. \end{cases}$$

Definamos  $F: I \times I \rightarrow X$  por

$$F(t,s) = f(sh(t) + (1-s)t).$$

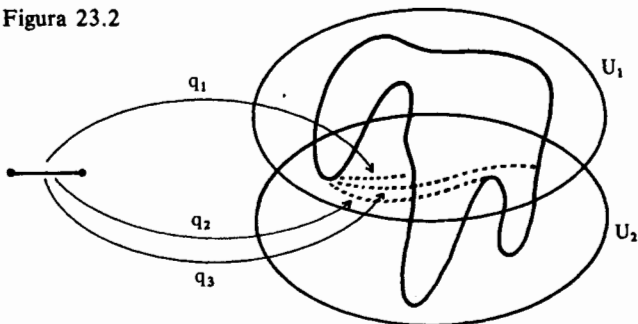
Claramente  $F$  es continua y, por tanto,

$$f \sim ((f_1 * f_2) * f_3) * \dots * f_n$$

lo que prueba el resultado deseado.

Volviendo a la demostración del Lema 23.5, elijamos, para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , caminos  $q_i: I \rightarrow X$  tales que  $q_i(0) = x_0$ ,  $q_i(1) = f(t_i)$  y, por tanto, tales que  $q_i(t) \in U_1 \cap U_2$  para todo  $t \in I$ . Análogamente, consideremos  $q_0$  y  $q_n$  definidos por  $q_0(t) = q_n(t) = x_0$ . Véase la Figura 23.2.

Figura 23.2



Puesto que  $[f] = [f_1] [f_2] \dots [f_n]$  tenemos

$$\begin{aligned} [f] &= [q_0] [f_1] [\bar{q}_1] [q_1] [f_2] [\bar{q}_2] \dots [q_{n-1}] [f_n] [\bar{q}_n] \\ &= [q_0 * f_1 * \bar{q}_1] [q_1 * f_2 * \bar{q}_2] \dots [q_{n-1} * f_n * \bar{q}_n] \end{aligned}$$

y cada uno de los  $q_i * (f_{i+1} * \bar{q}_{i+1})$  es un camino cerrado con punto base  $x_0$  que está enteramente contenido en  $U_1$  o en  $U_2$ . Así pues,  $[q_i * f_{i+1} * \bar{q}_{i+1}]$  es o bien un elemento de  $\psi_{1*} \pi(U_1, x_0)$  o un elemento de  $\psi_{2*} \pi(U_2, x_0)$ . Por tanto, todo elemento de  $\pi(X, x_0)$  puede escribirse como producto de imágenes de elementos de  $\pi(U_1, x_0)$  y de  $\pi(U_2, x_0)$ , lo que demuestra el Lema 23.5.

### 23.7 Corolario

El grupo  $\pi(X, x_0)$  está generado por el conjunto  $\psi_{1*} S_1 \cup \psi_{2*} S_2$ , donde  $S_1, S_2$  son los generadores de  $\pi(U_1, x_0)$ ,  $\pi(U_2, x_0)$  respectivamente.

Es pesado escribir siempre las  $\psi_{1*}$  y  $\psi_{2*}$ , por lo que adoptamos el convenio de escribir  $s$  en lugar de  $\psi_{j*} s$  para todo  $s \in S_j, j = 1, 2$ . En otras palabras, si  $f: I \rightarrow U_j$ , a la aplicación compuesta  $I \xrightarrow{f} U_j \xrightarrow{\psi_j} X$  la seguimos denotando por  $f$ . En este sentido  $\pi(X, x_0)$  está generado por  $S_1 \cup S_2$  donde  $S_1, S_2$  generan  $\pi(U_1, x_0)$ ,  $\pi(U_2, x_0)$  respectivamente.

El corolario siguiente resulta inmediatamente del Corolario 23.7.

### 23.8 Corolario

Si,  $S_1 = S_2 = \emptyset$  entonces  $\pi(X, x_0)$  es trivial.

Un caso especial de este corolario es:

### 23.9 Corolario

Para  $n \geq 2$ ,  $S^n$  es simplemente conexo.

Este resultado se sigue del Corolario 23.8, ya que  $S^n$  puede expresarse como  $U_1 \cup U_2$  donde  $U_1 = S^n - \{(1, 0, 0, \dots, 0)\}$ ,  $U_2 = S^n - \{(-1, 0, 0, \dots, 0)\}$ .  $U_1$  y  $U_2$  son ambos simplemente conexos, ya que son homeomorfos a  $\mathbb{R}^n$  mediante homeomorfismos dados por

$$\begin{aligned} \varphi_1: U_1 &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \varphi_1(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \left( \frac{x_2}{1-x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1-x_1} \right) \\ \varphi_2: U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^n, & \varphi_2(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \left( \frac{x_2}{1+x_1}, \dots, \frac{x_{n+1}}{1+x_1} \right) \end{aligned}$$

Utilizando resultados del Capítulo 19 podemos ahora deducir:

### 23.10 Corolario

Los grupos fundamentales de  $\mathbb{R}P^n$  y de  $L(p,q)$  son respectivamente  $\mathbb{Z}_2$  y  $\mathbb{Z}_p$ .

### 23.11 Ejercicios

Supongamos que  $X = \bigcup_{i=1}^n U_i$ , donde cada  $U_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , es un abierto arco conexo. Supongamos, también, que  $\bigcap_{i=1}^n U_i$  es no vacío y arco conexo. Sea  $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n U_i$ . Probar que  $\pi(X, x_0)$  está generado por  $\bigcup_{i=1}^n \psi_i \cdot \pi(U_i, x_0)$  donde  $\psi_i: U_i \rightarrow X$  denota la inclusión.

## Capítulo 24

# El teorema de Seifert-Van Kampen: II Relaciones

En este capítulo completaremos la demostración del teorema de Seifert-Van Kampen (Teorema 23.3). Recordemos que estamos suponiendo que  $X = U_1 \cup U_2$  con  $U_1, U_2$  y  $U_1 \cap U_2$  subconjuntos abiertos arco conexos no vacíos de  $X$ . Nuestro punto base  $x_0$  está en  $U_1 \cap U_2 \subseteq X$  y  $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$  está generado por  $S$ , mientras que  $\pi(U_j, x_0)$  admite la presentación  $(S_j; R_j)$ ,  $j = 1, 2$ . Finalmente,  $R_s$  es el conjunto de relaciones ' $\varphi_1 * s$ ' = ' $\varphi_2 * s$ ' para  $s \in S$ . En el capítulo anterior habíamos demostrado que  $\pi(X, x_0)$  está generado por  $S_1 \cup S_2$ .

### 24.1 Lema

Los generadores  $S_1 \cup S_2$  de  $\pi(X, x_0)$  satisfacen las relaciones  $R_1, R_2$  y  $R_s$ .

*Demostración.* Puesto que

$$\psi_{j*}: \pi(U_j, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$$

es un homomorfismo, para  $j = 1, 2$ , cualquier relación que satisfagan los elementos de  $S_j$  en  $\pi(U_j, x_0)$  es también satisfecha por los elementos  $\psi_{j*} S_j \subseteq \pi(X, x_0)$ . Así pues, si usamos nuestra convención de suprimir las  $\psi_{i*}$ , los elementos  $S_1 \cup S_2$  satisfacen en  $\pi(X, x_0)$  las relaciones  $R_1$  y  $R_2$ .

Si  $s \in S \subseteq \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ , entonces

$$\psi_{1*} \varphi_1 * s = \psi_{2*} \varphi_2 * s$$

ya que  $\psi_{1*} \varphi_1 = \psi_{2*} \varphi_2$ . Si una palabra en  $S_j$  representa a  $\varphi_j * s$ , entonces la misma palabra en  $S_j$  representa a  $\psi_{j*} \varphi_j * s$  en  $\pi(X, x_0)$ , por lo que

$$' \varphi_1 * s ' = ' \varphi_2 * s ' \quad s \in S,$$

y, por lo tanto, el Lema 24.1 está demostrado.

Para completar la demostración del teorema de Seifert-Van Kampen nos falta únicamente demostrar que las relaciones mencionadas en el Lema 24.1 son las únicas relaciones existentes.

## 24.2 Teorema

Toda relación satisfecha por los elementos de  $S_1 \cup S_2$  en  $\pi(X, x_0)$  es una consecuencia de las relaciones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$ .

*Demostración.* La demostración de este teorema no es difícil, pero es bastante larga y requiere mucha nueva notación.

Supongamos que  $\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_k^{(k)} = 1$  es una relación entre los elementos de  $S_1 \cup S_2 \subseteq \pi(X, x_0)$ . Aquí  $\epsilon(i) = \pm 1$  y  $\alpha_i \in S_{\lambda(i)}$  para  $i = 1, 2, \dots, k$  donde  $\lambda(i) = 1$  ó  $2$ . Para cada  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , elijamos un camino cerrado  $f_i$  en  $U_{\lambda(i)}$  con punto base  $x_0$  tal que  $[f_i] = \alpha_i^{\epsilon(i)}$ . En otras palabras,  $\alpha_i = [f_i]$  si  $\epsilon(i) = 1$  y  $\alpha_i = [f_i]$  si  $\epsilon(i) = -1$ . Definimos un camino  $f: I \rightarrow X$  mediante

$$f(t) = f_i(kt - i + 1) \text{ para } \frac{(i-1)}{k} \leq t \leq \frac{i}{k}, i = 1, 2, \dots, k.$$

Obsérvese que

$$f_j(t) = f((1-t)(j-1)/k + tj/k)$$

y puesto que

$$0 = 0/k \leq 1/k \leq \dots \leq k/k = 1$$

podemos aplicar el Lema 23.6 para deducir que

$$[f] = [f_1] [f_2] \dots [f_k].$$

Puesto que  $\alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_k^{(k)} = 1$  resulta que  $[f] = 1$ ; esto es  $f \sim \epsilon_x$ . Sea  $F: I \times I \rightarrow X$  una homotopía entre  $f$  y  $\epsilon_x$ ; es decir,

$$\begin{aligned} F(t, 0) &= f(t), \\ F(t, 1) &= F(0, s) = F(1, s) = x_0. \end{aligned}$$

Sea, ahora,  $\delta$  el número de Lebesgue del recubrimiento abierto  $\{F^{-1}(U_1), F^{-1}(U_2)\}$  de  $I \times I$  y elijamos números

$$\begin{aligned} 0 &= t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = 1, \\ 0 &= s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n = 1, \end{aligned}$$

tales que

$$(i) \quad \{1/k, 2/k, \dots, (k-1)/k\} \subseteq \{t_1, t_2, \dots, t_{m-1}\},$$

y

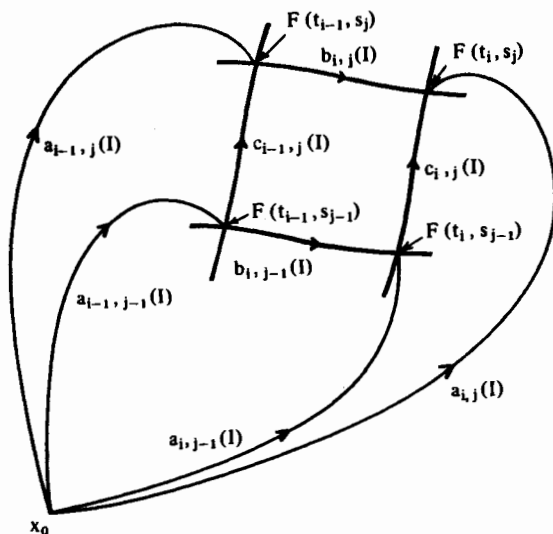
$$(ii) (t_i - t_{i-1})^2 + (s_j - s_{j-1})^2 < \delta^2 \quad \text{Para todo } i, j.$$

Una tal elección es claramente posible. Si  $R_{ij}$  denota la región rectangular  $[t_{i-1}, t_i] \times [s_{j-1}, s_j]$  de  $I \times I$ , entonces  $F(R_{ij})$  está contenido o bien en  $U_1$  o bien en  $U_2$  para todo  $i, j$ .

Para cada  $i, j$  sea  $a_{ij}: I \rightarrow X$  un camino de  $x_0$  a  $F(t_i, s_j)$  contenido en  $U_1$  (o en  $U_2$ , o en  $U_1 \cap U_2$ ) si  $F(t_i, s_j)$  está contenido en  $U_1$  (o en  $U_2$ , o en  $U_1 \cap U_2$  respectivamente).

Una tal elección es posible ya que cada uno de los abiertos  $U_1$ ,  $U_2$  y  $U_1 \cap U_2$  es arco conexo. Si  $F(t_i, s_j) = x_0$ , entonces imponemos que  $a_{ij} = \epsilon_{x_0}$ . (Véase la Figura 24.1.)

Figura 24.1



Definimos también caminos  $b_{ij}$ ,  $c_{ij}$  mediante

$$\begin{aligned} b_{ij}(t) &= F((1-t)t_{i-1} + tt_i, s_j), \\ c_{ij}(t) &= F(t_i, (1-t)s_{j-1} + ts_j), \end{aligned}$$

por lo que  $b_{ij}$  es un camino de  $F(t_{i-1}, s_j)$  a  $F(t_i, s_j)$ , mientras que  $c_{ij}$  es un camino de  $F(t_i, s_{j-1})$  a  $F(t_i, s_j)$ ; véase la Figura 24.1. Obsérvese que

$$\begin{aligned} [f] &= [b_{1,0}] [b_{2,0}] \dots [b_{m,1}], \\ [\epsilon_{x_0}] &= [b_{1,n}] [b_{2,n}] \dots [b_{m,n}] \end{aligned}$$



Los caminos  $b_{i,j-1} * c_{i,j}$  y  $c_{i-1,j} * b_{i,j}$  son caminos equivalentes: intuitivamente basta mover los caminos dentro de la región  $F(R_{ij})$ . Podemos dar explícitamente una equivalencia de estos caminos mediante la homotopía  $H: I \times I \rightarrow X$  definida por

$$H(t,s) = \begin{cases} F((1-s)((1-2t)t_{i-1} + 2tt_i) + st_{i-1}, \\ \quad (1-s)s_{j-1} + s((1-2t)s_{j-1} + 2ts_j)), 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \\ F((1-s)t_i + s((2-2t)(t_{i-1} + (2t-1)t_i)), \\ \quad (1-s)((2-2t)s_{j-1} + (2t-1)s_j) + ss_j), \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Obsérvese que  $H(I \times I) \subseteq U_1, U_2$  o  $U_1 \cap U_2$  según que  $F(R_{ij}) \subseteq U_1, U_2$  o  $U_1 \cap U_2$ , respectivamente.

Definimos, ahora, caminos cerrados  $f_{i,j}$  y  $g_{i,j}$  con punto base  $x_0$  por

$$f_{i,j} = (a_{i-1,j} * b_{i,j}) * \bar{a}_{i,j},$$

$$g_{i,j} = (a_{i,j-1} * c_{i,j}) * \bar{a}_{i,j}.$$

Puesto que  $b_{i,j-1} * c_{i,j} \sim c_{i-1,j} * b_{i,j}$ , resulta que los caminos  $f_{i,j-1} * g_{i,j}$  y  $g_{i-1,j} * f_{i,j}$  son equivalentes. Además, son equivalentes como caminos de  $U_1, U_2$  o  $U_1 \cap U_2$  según que  $F(R_{ij}) \subseteq U_1, U_2$  o  $U_1 \cap U_2$  respectivamente. Tenemos, por tanto,

$$f_{i,j-1} \sim (g_{i-1,j} * f_{i,j}) * \bar{g}_{i,j},$$

es decir,

$$[f_{i,j-1}] = [g_{i-1,j}] [f_{i,j}] [\bar{g}_{i,j}].$$

Expresamos ahora cada uno de estos elementos como palabras en  $S_1$  o en  $S_2$ ; obtenemos así una relación

$$[f_{i,j-1}] = [g_{i-1,j}] [f_{i,j}] [\bar{g}_{i,j}],$$

en el grupo  $\pi(U_1, x_0)$  o en  $\pi(U_2, x_0)$  respectivamente. Esta relación debe ser, por tanto, una consecuencia de las relaciones  $R_1$  o  $R_2$ .

Supongamos ahora que  $1/k = t_{i(1)}$ ; entonces

$$[f_1] = [f_{1,0}] [f_{2,0}] \dots [f_{i(1),0}]$$

y, puesto que  $f_i$  es un camino cerrado de  $U_{\lambda(1)}$  con punto base  $x_0$ , podemos utilizar las relaciones  $R_{\lambda(1)}$  para expresar  $[f_{1,0}] [f_{2,0}] \dots [f_{i(1),0}]$  como palabras en  $S_{\lambda(1)}$ . Obtenemos así una relación

$$\alpha_1^{E(1)} = [f_1] = [f_{1,0}] [f_{2,0}] \dots [f_{i(1),0}]$$

que es una consecuencia de las relaciones  $R_{\lambda(1)}$ . Podemos obtener relaciones similares para  $\alpha_2^{e(2)}$ ,  $\alpha_3^{e(3)}$ , ...,  $\alpha_k^{e(k)}$ . Así pues,

$$\alpha = \alpha_1^{e(1)} \alpha_2^{e(2)} \dots \alpha_k^{e(k)} = '[f_{1,0}]' '[f_{2,0}]' \dots '[f_{m,0}]'$$

es una relación que es consecuencia de  $R_1$  y  $R_2$ . Reescribiremos esto como

$$\alpha = ('[g_{0,1}]' '[f_{1,1}]' '[\bar{g}_{1,1}]') ('[g_{1,1}]' '[f_{2,1}]' '[\bar{g}_{2,1}]') \\ \dots ('[g_{m-1,1}]' '[f_{m,1}]' '[\bar{g}_{m,1}]')$$

Reorganizando los paréntesis, tenemos

$$\alpha = ('[g_{0,1}]' '[f_{1,1}]' '[\bar{g}_{1,1}]' '[g_{1,1}]' '[f_{2,1}]' '[\bar{g}_{2,1}]' \\ '[g_{2,1}]') \dots ('[\bar{g}_{m-1,1}]' '[g_{m-1,1}]' '[f_{m,1}]' '[\bar{g}_{m,1}]').$$

Ahora bien,  $g_{0,1} = g_{m,1} = e_x$ , por lo que  $'[g_{0,1}]' = 1$  y  $'[g_{m,1}]' = 1$  son relaciones triviales. La relación

$$'[\bar{g}_{j,1}]' '[g_{j,1}]' = 1$$

es también trivial si  $'[\bar{g}_{j,1}]'$  y  $'[g_{j,1}]'$  se expresan ambos con palabras en  $S_1$  o en  $S_2$ . Sin embargo, si  $g_{j,1}$  es un camino de  $U_1 \cap U_2$ , es posible que una de las  $'[\bar{g}_{j,1}]'$ ,  $'[g_{j,1}]'$  se exprese como una palabra en  $S_1$  y la otra como una palabra en  $S_2$ . En este caso la relación  $'[\bar{g}_{j,1}]' '[g_{j,1}]' = 1$  es una consecuencia de las relaciones  $R_s$ . Obtenemos, pues, la relación

$$\alpha = '[f_{1,1}]' '[f_{2,1}]' \dots '[f_{m,1}]'$$

que es una consecuencia de las relaciones  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_s$ .

Repetiendo este proceso llegamos a la relación

$$\alpha = '[f_{1,n}]' '[f_{2,n}]' \dots '[f_{m,n}]' \\ = '[e_{x_0}]' '[e_{x_0}]' \dots '[e_{x_0}]'$$

que es una consecuencia de las relaciones especificadas. La relación original es, pues, una consecuencia de las relaciones mencionadas en el enunciado del teorema. Esto completa la demostración del Teorema 24.2 y, por tanto, del teorema de Seifert-Van Kampen.

Salvo para un ejemplo que se basa en el corolario siguiente, dejaremos los cálculos de grupos fundamentales vía el teorema de Seifert-Van Kampen para el próximo capítulo.

### 24.3 Corolario

Si  $U_1 \cap U_2$  es simplemente conexo,  $\pi(X, x_0)$  es el grupo generado por  $S_1 \cup S_2$  con las relaciones  $R_1 \cup R_2$ .

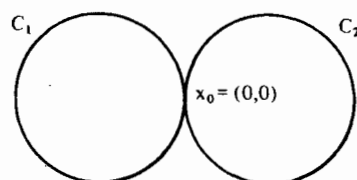
La demostración es obvia.

Para aplicar este corolario a un ejemplo, consideremos una figura 8:  $X$  es, pues, el subespacio de  $\mathbb{R}^2$  formado por  $C_1 \cup C_2$ , donde

$$C_1 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-1)^2 + y^2 = 1 \} \quad \text{y} \\ C_2 = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; (x+1)^2 + y^2 = 1 \};$$

véase la Figura 24.2.

Figura 24.2



Para poder aplicar el corolario necesitamos demostrar que  $X$  es la unión de subconjuntos abiertos arco conexos  $U_1, U_2$  con  $U_1 \cap U_2$  simplemente conexo. Pongamos  $U_1 = X - \{x_1\}$  y  $U_2 = X - \{x_2\}$ , donde  $x_1 = (-2,0)$ ,  $x_2 = (2,0)$ . Obviamente  $U_1$  y  $U_2$  son ambos abiertos y arco conexos;  $U_1 \cap U_2 = X - \{x_1, x_2\}$  es también arco conexo. Además,  $U_1 \cap U_2$  es simplemente conexo, ya que es homotópicamente equivalente a  $\{x_0\}$ ; de hecho  $\{x_0\}$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$  (véase el final del Capítulo 13). Podemos, por tanto, aplicar el Corolario 24.3. Ahora bien,  $U_j$  y  $C_j$  son homotópicamente equivalentes relativamente a  $x_0$ , para  $j = 1, 2$  (de hecho, de nuevo,  $C_j$  es un retracto de deformación fuerte de  $U_j$ ). Así pues,  $\pi(U_j, x_0)$  es un grupo libre con un generador y, por tanto, en virtud del Corolario 24.3, el grupo fundamental de una figura 8 es un grupo libre con dos generadores.

No es difícil generalizar este resultado a una colección de  $n$  circunferencias unidas por un único punto; resulta que el grupo fundamental es un grupo libre con  $n$  generadores. Dejamos la demostración de este resultado como un (fácil) ejercicio.

## 24.4 Ejercicios

- Sea  $X_n$  la unión de  $n$  circunferencias que se intersectan (dos a dos y de cualquier modo) en un único punto  $x_0$ . Probar que  $\pi(X_n, x_0)$  es el grupo libre con  $n$  generadores. (¿Inducción?)
- Sea  $X$  el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ :

$$X = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x, y \leq 1 \text{ y } x \text{ o } y \in \mathbb{Z} \}.$$

Determinar el grupo fundamental de  $X$ .

- (c) Sea  $Y$  el complementario del siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{Z}\}.$$

Probar que  $\pi(Y, (1, 1))$  es un grupo libre con una infinidad numerable de generadores.

- (d) Sea  $X$  un espacio de Hausdorff tal que  $X = A \cup B$ , donde  $A, B$  son cada uno de ellos homeomorfo a un toro y  $A \cap B = \{x_0\}$ . Calcular  $\pi(X, x_0)$ . (Indicación: Si  $x_0 \in A$ , hallar un entorno contráctil  $C_A$  de  $x_0$  en  $A$  y poner  $U_1 = B \cup C_A$ . Análogamente, definir  $U_2 = A \cup C_B$ , donde  $C_B$  es un entorno contráctil de  $x_0$  en  $B$ .)
- (e) Sea  $X$  el espacio obtenido a partir de  $S^{n-1} \times \mathbb{R}$  suprimiendo  $k$  subconjuntos disjuntos, cada uno de ellos homeomorfo a un  $n$ -disco abierto  $D^n$ . ¿Cuál es el grupo fundamental de  $X$ ?
- (f) Sea  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; x = x_0 \text{ o } y = x_0\}$  donde  $x_0$  es un punto fijo de  $\mathbb{R}^n$ . ( $X$  consta de dos copias de  $\mathbb{R}^n$  con un punto  $x_0$  en común.) Calcular  $\pi(X, x_0)$ . ¿Es un grupo finito?
- (g) Supongamos que  $X = U_1 \cup U_2$  con  $U_1, U_2$  abiertos y arco conexos y con  $U_1 \cap U_2$  no vacío y arco conexo. Denotemos por  $\varphi_i: U_i \cap U_2 \rightarrow U_1$  y  $\psi_i: U_i \rightarrow X$  las inclusiones. Probar que si  $U_2$  es simplemente conexo, entonces  $\psi_{1*}: \pi(U_1, x_0) \rightarrow \pi(X, x_0)$  es un epimorfismo. Probar, además, que el núcleo de  $\psi_{1*}$  es el menor subgrupo normal de  $\pi(U_1, x_0)$  que contiene a la imagen  $\varphi_{1*} \pi(U_1 \cap U_2, x_0)$ .
- (h) Supongamos que  $X = U_1 \cup U_2$  con  $U_1, U_2$  y  $U_1 \cap U_2$  subespacios abiertos no vacíos y arco conexos. Demostrar que si  $U_2$  y  $U_1 \cap U_2$  son simplemente conexos, entonces los grupos fundamentales de  $U_1$  y de  $X$  son isomorfos.
- (i) Sea  $K$  un subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbb{R}^n - K$  sea arco conexo. Sea  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow S^n - \{(1, 0, 0, \dots, 0)\}$  el homeomorfismo dado por

$$h(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\|x\|^2 - 1, 2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) \left( \frac{1}{1 + \|x\|^2} \right)$$

Probar que si  $x_0 \in \mathbb{R}^n - K$ , entonces  $\pi(\mathbb{R}^n - K, x_0)$  es isomorfo a  $\pi(S^n - h(K), h(x_0))$ . (Indicación:  $K \subseteq B_k(0)$  para algún  $k$ . Considerar  $U_1 = h(\mathbb{R}^n - K)$ ,  $U_2 = h(\mathbb{R}^n - B_k(0)) \cup \{(1, 0, \dots, 0)\}$  y aplicar el Ejercicio (h) anterior.)

- (j) Sea  $X$  un toro al que se le ha suprimido un punto. Demostrar que el grupo fundamental de  $X$  es un grupo libre con dos generadores.
- (k) Demostrar que el grupo fundamental de  $\mathbb{R}^2 - \{y\}$ , donde  $y \in \mathbb{R}^2$ , es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .
- (l) Sea  $Y_n$  el siguiente subespacio de  $\mathbb{C}$ :

$$Y_n = \{z \in \mathbb{C}; |z - j + \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}, j = 1, 2, \dots, n\}$$

donde  $n$  es un entero positivo. Calcular  $\pi(Y_n, 0)$ .

## Capítulo 25

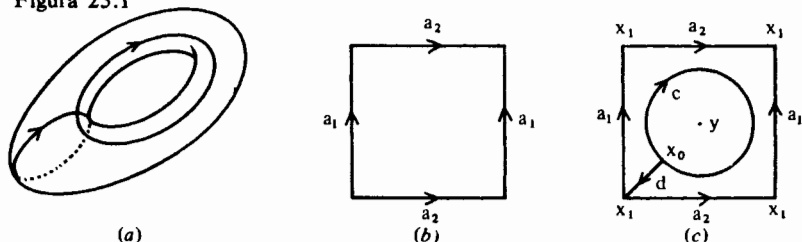
# El teorema de Seifert-Van Kampen: III Cálculos

En este capítulo usamos el teorema de Seifert-Van Kampen para calcular los grupos fundamentales de varios espacios. En el caso de los tres primeros ejemplos el grupo fundamental ha sido calculado ya con anterioridad (como ejercicio o corolario) utilizando otros métodos.

Empezaremos demostrando que el grupo fundamental del toro  $T$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Representemos  $T$  como una región cuadrada con las aristas identificadas como en la Figura 25.1 (b). Denotemos a las aristas que han sido identificadas por  $a_1$  y  $a_2$ .

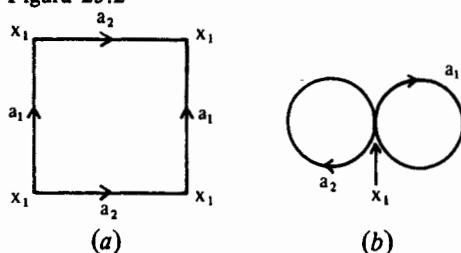
Sea  $y$  un punto del interior de la región cuadrada tal como indica la Figura 25.1 (c). Pongamos  $U_1 = T - \{y\}$  y  $U_2 = T - (a_1 \cup a_2)$ ; esto es,  $U_2$  es el interior de la región cuadrada. Obviamente,  $U_1$  y  $U_2$  son ambos abiertos y arco conexos, así como  $U_1 \cap U_2$ . Podemos, pues, aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen. Sean  $x_0, x_1$  los puntos indicados en la Figura 25.1 (c). (Obsérvese que  $x_1$  aparece cuatro veces en el diagrama, ya que estos cuatro puntos están identificados en uno solo de  $T$ .) Finalmente sea  $c$  una circunferencia de centro  $y$  que pase por  $x_0$  y sea  $d$  el segmento de recta de  $x_0$  a  $x_1$  indicado en la Figura 25.1 (c).

Figura 25.1



El «borde» de la región cuadrada (Figura 25.2(a)) después de la identificación da lugar a una figura 8 en  $T$  (Figura 25.2 (b); véase también (a)). Es claramente un retracto de deformación fuerte de  $U_1$ .

Figura 25.2



Si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  denotan caminos cerrados de  $U_1$ , con punto base en  $x_1$ , que recorren una vez  $a_1$  y  $a_2$ , respectivamente, en las direcciones indicadas, entonces  $\pi(U_1, x_1)$  es el grupo libre generado por  $[\alpha_1]$ ,  $[\alpha_2]$ . Obsérvese que  $[\alpha_1]$  y  $[\alpha_2]$  están unívocamente definidos. Denotemos por  $\delta$  un camino en  $U_1$  de  $x_0$  a  $x_1$ , que corresponda a  $d$ , (es decir,  $\delta: I \rightarrow d$  es un homeomorfismo), entonces  $\pi(U_1, x_0)$  es un grupo libre generado por  $[\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}]$ ,  $[\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}]$ , los cuales serán designados abreviadamente por  $A_1$ ,  $A_2$ , respectivamente.

El espacio formado por un único punto  $\{x_0\}$  es un retracto de deformación fuerte de  $U_2$  y, por tanto,  $\pi(U_2, x_0) = 1$ . Para el espacio  $U_1 \cap U_2$  vemos que la circunferencia  $c$  es un retracto de deformación fuerte de  $U_1 \cap U_2$ . Así pues, si  $\gamma$  denota un camino cerrado de  $U_1 \cap U_2$  con punto base  $x_0$  que recorre una vez  $c$  en la dirección indicada en la Figura 25.1(b), entonces  $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$  es un grupo libre generado por  $[\gamma]$ .

El teorema de Seifert-Van Kampen nos dice entonces que  $\pi(T, x_0)$  está generado por  $\{A_1, A_2\}$  y está sujeto a la relación siguiente

$$\varphi_1 * [\gamma]' = \varphi_2 * [\gamma]'.$$

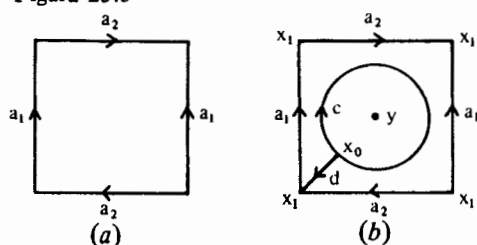
Ahora bien, en  $U_1$  tenemos

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \gamma] &= [\delta * \alpha_1 * \alpha_2 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\alpha}_2 * \bar{\delta}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}] [\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}] [\delta * \bar{\alpha}_1 * \bar{\delta}] [\delta * \bar{\alpha}_2 * \bar{\delta}] \end{aligned}$$

por lo que  $\varphi_1 * [\gamma]' = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}$ . Por otra parte,  $\varphi_2 * [\gamma]' = 1$ , y, por tanto,  $\pi(T, x_0)$  es el grupo con la presentación  $(\{A_1, A_2\}; \{A_1 A_2 A_1^{-1} A_2^{-1}\})$ , de donde resulta que  $\pi(T, x_0)$  es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

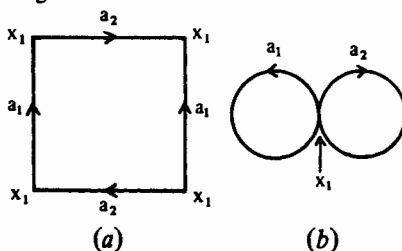
Para el ejemplo siguiente consideremos la botella de Klein  $K$ . El cálculo del grupo fundamental de la botella de Klein es en muchos aspectos similar al del grupo fundamental del toro. Representemos la botella de Klein  $K$  como en la Figura 25.3 (a) y usemos la notación de la Figura 25.3 (b).

Figura 25.3



Pongamos  $U_1 = K - \{y\}$  y  $U_2 = K - (a_1 \cup a_2)$ ; entonces  $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$  satisfacen las condiciones requeridas en el teorema de Seifert-Van Kampen. El «borde» de la región cuadrada, después de la identificación, es una figura 8 (véase la Figura 25.4) y esta figura es un retracto de deformación fuerte de  $U_1$ .

Figura 25.4



Resulta que  $\pi(U_1, x_0)$  es un grupo libre generado por  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  donde  $\alpha_1, \alpha_2$  denotan caminos que corresponden a  $a_1, a_2$  respectivamente. Si  $\delta$  denota el camino correspondiente a  $d$ ,  $\pi(U_1, x_0)$  es el grupo libre generado por  $[\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}]$  y  $[\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}]$ , generadores que escribiremos abreviadamente  $A_1$  y  $A_2$  respectivamente.

El espacio  $U_2$  es contráctil y, por tanto,  $\pi(U_2, x_0) = 1$ . Finalmente, la circunferencia  $c$  es un retracto de deformación fuerte de  $U_1 \cap U_2$ , por lo que  $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$  es un grupo libre generado por  $[\gamma]$ , donde  $\gamma$  es un camino de  $U_1 \cap U_2$  que corresponde a  $c$ ; esto es, recorre una vez  $c$  en la dirección indicada.

En  $U_1$  tenemos

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \gamma] &= [\delta * \alpha_1 * \alpha_2 * \bar{\alpha}_1 * \alpha_2 * \bar{\delta}] \\ &= [\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}] [\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}] [\delta * \bar{\alpha}_1 * \bar{\delta}] [\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}] \end{aligned}$$

por lo que  $\varphi_{1*}[\gamma] = A_1 A_2 A_1^{-1} A_2$ . Por otra parte,  $\varphi_{2*}[\gamma] = 1$ . Así pues, en virtud del teorema de Seifert-Van Kampen obtenemos inmediatamente que  $\pi(K, x_0)$  es isomorfo al grupo

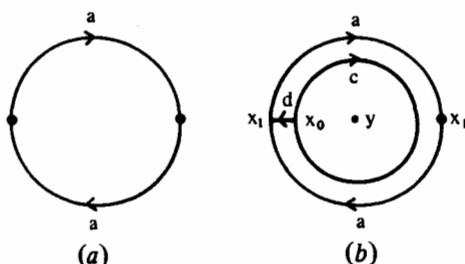
$$\langle \{A_1, A_2\} ; \{A_1 A_2 A_1^{-1} A_2\} \rangle.$$

(Véase también el Ejercicio 19.5 (e).)

Como tercer ejemplo demostramos (de nuevo) que el grupo fundamental del plano proyectivo real  $\mathbb{R}P^2$  es isomorfo a  $\mathbb{Z}_2$ . Representemos  $\mathbb{R}P^2$  como el espacio identificación de la Figura 25.5 (a). Denotemos por  $x_0, x_1, y, c$  y  $d$  los puntos, circunferencia y línea indicados en la Figura 25.5 (b).

Pongamos  $U_1 = \mathbb{R}P^2 - \{y\}$  y  $U_2 = \mathbb{R}P^2 - a$ ; entonces  $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$  cumplen las condiciones necesarias para aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen. La curva  $a$  representa una circunferencia en  $\mathbb{R}P^2$  y es un retracto de deformación fuerte de  $U_1$ . Así

Figura 25.5



pues,  $\pi(U_1, x_1)$  es un grupo libre generado por  $[\alpha]$ , donde  $\alpha$  es un camino de  $U_1$  que corresponde a  $a$ . Si  $\delta$  denota el camino de  $x_0$  a  $x_1$  que corresponde a  $d$ , entonces  $\pi(U_1, x_0)$  es el grupo libre generado por  $[\delta * \alpha * \bar{\delta}] = A$ .

El subespacio  $U_2$  es contráctil al punto  $x_0$  y, por tanto,  $\pi(U_2, x_0) = 1$ . La circunferencia  $c$  es un retracto de deformación fuerte de  $U_1 \cap U_2$ , por lo que  $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$  es el grupo libre generado por  $[\gamma]$ , donde  $\gamma$  denota un camino de  $U_1 \cap U_2$ , con punto base  $x_0$ , que corresponde a  $c$ ; esto es, recorre una vez  $c$  en la dirección indicada. En virtud del teorema de Seifert-Van Kampen resulta que  $\pi(\mathbb{R}P^2, x_0)$  es el grupo generado por  $A$  con la relación

$$\varphi_{1*}[\gamma] = \varphi_{2*}[\gamma].$$

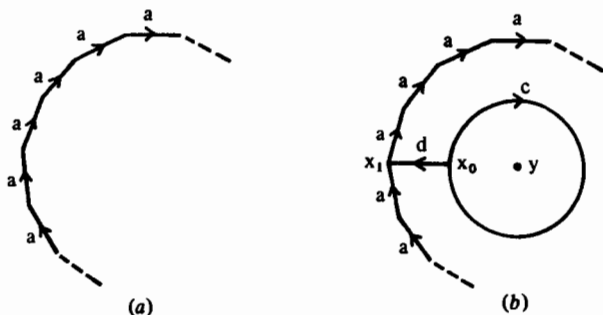
En  $U_1$  tenemos

$$[\varphi_1 \gamma] = [\delta * \alpha * \alpha * \bar{\delta}] = [\delta * \alpha * \bar{\delta}] [\delta * \alpha * \bar{\delta}],$$

por lo que  $\varphi_{1*}[\gamma] = A^2$ . Pero  $\varphi_{2*}[\gamma] = 1$  de donde resulta que  $\pi(\mathbb{R}P^2, x_0)$  es isomorfo al grupo  $\{A\}; \{A^2\}$ , esto es  $\mathbb{Z}_2$ .

Para nuestro ejemplo siguiente sea  $X$  el espacio formado por una región poligonal de  $n$  lados con todas sus aristas identificadas en una sola tal como indica la Figura 25.6 (a). Obsérvese que si  $n = 2$  entonces  $X$  es  $\mathbb{R}P^2$ .

Figura 25.6





Utilizando la notación de la Figura 25.6 (b), pongamos  $U_1 = X - \{y\}$  y  $U_2 = X - a$ . Los espacios  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_1 \cap U_2$  son no vacíos y arco conexos. Las aristas de la región poligonal forman una circunferencia  $a$  en  $X$ . Es un retracto de deformación fuerte de  $U_1$  y, por tanto,  $\pi(U_1, x_1)$  es un grupo libre generado por  $\{\alpha\}$ , donde  $\alpha$  es un camino cerrado con punto base  $x_1$  que corresponde a  $a$ . Si  $\delta$  es el camino de  $x_0$  a  $x_1$  correspondiente a  $\delta$ , entonces  $\pi(U_1, x_0)$  es un grupo libre generado por  $\{\delta * \alpha * \bar{\delta}\} = A$ . El subespacio  $U_2$  es contráctil por lo que  $\pi(U_2, x_0) = 1$ . Finalmente la circunferencia  $c$  es un retracto de deformación fuerte de  $U_1 \cap U_2$ , de donde resulta que  $\pi(U_1 \cap U_2, x_0)$  es un grupo libre generado por  $\{\gamma\}$  donde  $\gamma$  es un camino cerrado de  $U_1 \cap U_2$ , con punto base  $x_0$  que corresponde a  $c$ .

Aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen resulta que  $\pi(X, x_0)$  admite un generador  $A$  y una relación

$$\varphi_{1*}[\gamma] = \varphi_{2*}[\gamma].$$

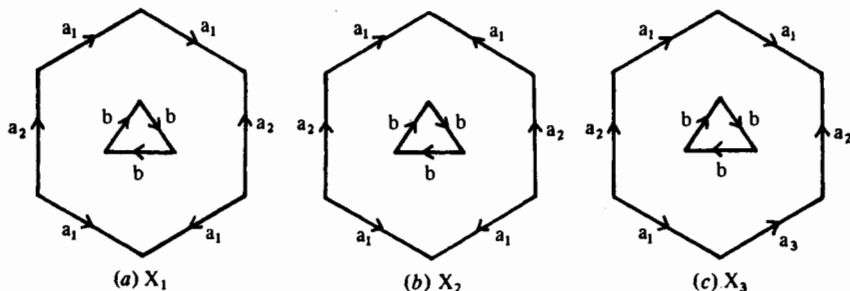
Es fácil ver que se tiene

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \gamma] &= [\delta * \underbrace{\alpha * \dots * \alpha}_{n} * \bar{\delta}] \\ &= [\delta * \alpha * \bar{\delta}]^n, \end{aligned}$$

por lo que  $\varphi_{1*}[\gamma] = A^n$ . Pero  $\varphi_{2*}[\gamma] = 1$ , y, por tanto,  $\pi(X, x_0)$  admite la presentación  $(\{A\}; \{A^n\})$ ; esto es,  $\pi(X, x_0)$  es isomorfo al grupo cíclico  $\mathbb{Z}_n$ .

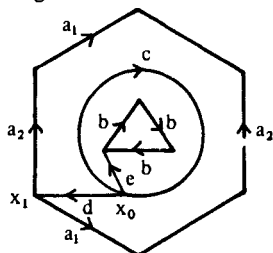
En todos los ejemplos que hemos dado en este capítulo el subespacio  $U_2$  es contráctil. En los ejemplos que damos a continuación no se cumplirá esta propiedad. Consideraremos tres espacios al mismo tiempo. Sean  $X_1, X_2, X_3$  los espacios cocientes representados en la Figura 25.7. Obsérvese que en  $X_3$  la arista  $a_3$  no está identificada con ninguna otra arista. La Figura 25.8 ilustra la notación que usaremos en estos ejemplos.

Figura 25.7



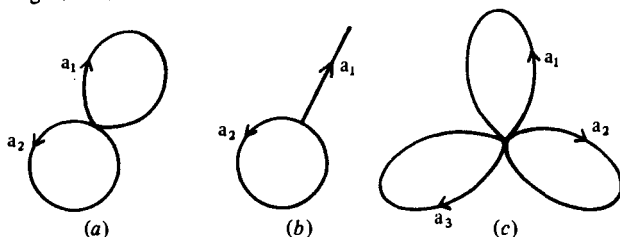
Pongamos  $U_{i,1} = X_i - b$ , para  $i = 1, 2, 3$ ,  $U_{i,2} = X_i - (a_1 \cup a_2)$ , para  $i = 1, 2$  y  $U_{3,2} = X_3 - (a_1 \cup a_2 \cup a_3)$ . Entonces  $U_{1,1}$ ,  $U_{1,2}$ ,  $U_{1,1} \cap U_{1,2}$  son

Figura 25.8



subconjuntos abiertos y arco conexos de  $X_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . La Figura 25.9 representa las «aristas exteriores» de  $X_i$  después de la identificación.

Figura 25.9



En cada uno de los tres casos podemos hallar retratos de deformación fuertes de  $U_{i,1}$ . No es por tanto difícil ver que  $\pi(U_{i,1}, x_0)$  es un grupo libre en los generadores

$$\begin{aligned} \{ A_1 = [\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}], A_2 = [\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}] \} & \quad \text{si } i = 1, \\ \{ A_2 = [\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}] \} & \quad \text{si } i = 2, \\ \{ A_1 = [\delta * \alpha_1 * \bar{\delta}], A_2 = [\delta * \alpha_2 * \bar{\delta}], A_3 = [\delta * \alpha_3 * \bar{\delta}] \} & \quad \text{si } i = 3; \end{aligned}$$

donde está claro cuáles son los caminos  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  y  $\delta$ .

El subespacio  $U_{i,2}$  contiene una circunferencia  $b$  que es un retrato de deformación fuerte de  $U_{i,2}$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Así pues,  $\pi(U_{i,2}, x_0)$  es un grupo libre con un generador  $B = [\varepsilon * \beta * \bar{\varepsilon}]$  donde  $\beta$  y  $\varepsilon$  son caminos que corresponden a  $b$  y  $e$  respectivamente.

La circunferencia  $c$  es un retrato de deformación fuerte de  $U_{i,1} \cap U_{i,2}$ , por lo que  $\pi(U_{i,1} \cap U_{i,2}, x_0)$  es un grupo libre con un generador  $[\gamma]$ .

En  $U_{i,1}$  tenemos:

Para  $i = 1$ ,

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \gamma] &= [\delta * \alpha_2 * \alpha_1 * \alpha_1 * \bar{\alpha}_2 * \alpha_1 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\delta}] \\ &= A_2 A_1^2 A_2^{-1}. \end{aligned}$$

Para  $i = 2$ ,

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \gamma] &= [\delta * \alpha_2 * \alpha_1 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\alpha}_2 * \alpha_1 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\delta}] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para  $i = 3$ ,

$$\begin{aligned} [\varphi_1 \gamma] &= [\delta * \alpha_2 * \alpha_1 * \alpha_1 * \bar{\alpha}_2 * \bar{\alpha}_3 * \bar{\alpha}_1 * \bar{\delta}] \\ &= A_2 A_1^2 A_2^{-1} A_3^{-1} A_1^{-1}. \end{aligned}$$

Además en  $U_{12}$  se tiene

$$\begin{aligned} [\varphi_2 \gamma] &= [\epsilon * \beta * \beta * \beta * \bar{\epsilon}] \\ &= B^3. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen tenemos para los grupos fundamentales de  $X_i$  los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \pi(X_1, x_0) &= \langle \{ A_1, A_2, B \}; \{ A_2 A_1^2 A_2^{-1} = B^3 \} \rangle, \\ \pi(X_2, x_0) &= \langle \{ A_2, B \}; \{ B^3 = 1 \} \rangle, \\ \pi(X_3, x_0) &= \langle \{ A_1, A_2, B \}; \emptyset \rangle. \end{aligned}$$

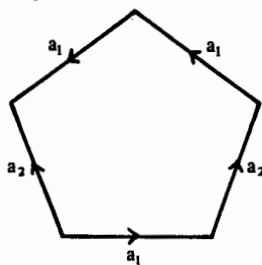
El último resultado es debido a que  $A_2 A_1^2 A_2^{-1} A_3^{-1} A_1^{-1} = B^3$  si y sólo si  $A_3 = A_1^{-1} B^{-3} A_2 A_1^2 A_2^{-1}$ , con lo que el grupo  $\langle \{ A_1, A_2, A_3, B \}; \{ A_2 A_1^2 A_2^{-1} A_3^{-1} A_1^{-1} = B^3 \} \rangle$  es isomorfo al grupo  $\langle \{ A_1, A_2, B \}; \emptyset \rangle$ .

En los capítulos siguientes haremos nuevos cálculos de grupos fundamentales aplicando el teorema de Seifert-Van Kampen.

## 25.1 Ejercicios

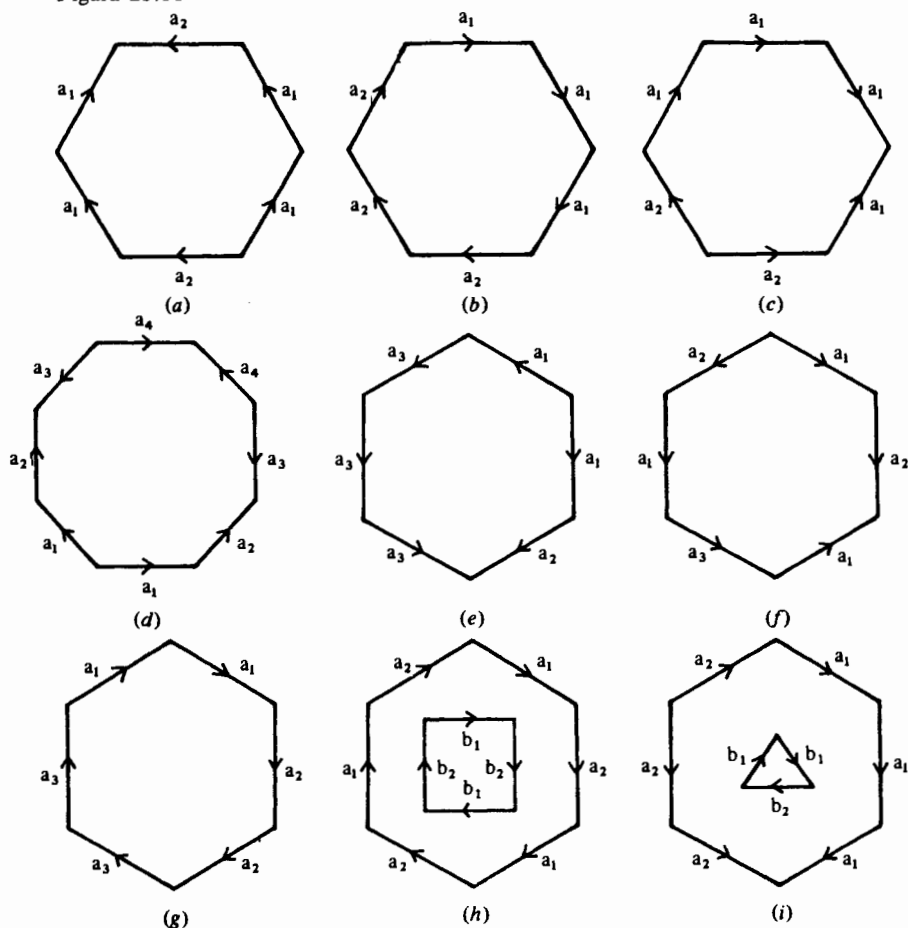
- Supongamos que  $G$  es un grupo abeliano finito. Demostrar que existe un espacio  $X_G$  cuyo grupo fundamental es isomorfo a  $G$ . (Véase también el Ejercicio 19.5 (b).)
- Sea  $X$  el espacio obtenido a partir de una región pentagonal identificando sus aristas como indica la Figura 25.10. Calcular el grupo fundamental de  $X$ .

Figura 25.10



- (c) Probar que si el subconjunto  $W$  de  $\mathbb{R}^3$  es homeomorfo al disco  $\mathring{D}^2$ ,  $W$  no es un entorno abierto de ningún punto de  $\mathbb{R}^3$ . (Indicación: Si  $W$  fuera un entorno abierto de  $w \in \mathbb{R}^3$ , existiría por definición un subconjunto  $U_1 \subseteq W$  con  $w \in U_1$  y  $U_1 \cong \mathring{D}^3$ .)
- (d) Sea  $X$  el doble toro, esto es el subespacio de  $\mathbb{R}^3$  representado en la Figura 11.7 (e). Calcular el grupo fundamental de  $X$ .
- (e) Sean  $D_1, D_2$  dos 2-discos con bordes  $S_1, S_2$  respectivamente. Sea  $X$  la unión de  $D_1$  y  $D_2$  identificando los puntos de  $S_1$  con los de  $S_2$  de la siguiente forma:  $\exp(2\pi it) \in S_1$  se identifica con  $\exp(2\pi i n t)$  de  $S_2$ , donde  $n$  es un entero positivo fijo. Probar que  $X$  es simplemente conexo.
- (f) Calcular el grupo fundamental de cada uno de los espacios cocientes ilustrados en la Figura 25.11.

Figura 25.11



## Capítulo 26

# El grupo fundamental de una superficie

El cálculo del grupo fundamental de una superficie es ahora ya bastante directo. Recordemos que en el Capítulo 11 habíamos visto que toda superficie puede obtenerse como suma conexa de esferas, toros y planos proyectivos. Recordemos también que el grupo fundamental del toro es el grupo con dos generadores  $c_1, d_1$  y una relación  $c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} = 1$ , mientras que el grupo fundamental del plano proyectivo es el grupo con un único generador  $f_1$  y una relación  $f_1^2 = 1$ . El resultado general que demostraremos es:

### 26.1 Teorema

El grupo fundamental de la superficie

$$S = S^2 \# mT \# nRP^2$$

es el grupo generado por

$$c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_n$$

con una relación

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2 = 1.$$

*Demostración.* Podemos reescribir  $S$  como

$$S = X \cup H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_m \cup M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$$

donde  $X$  es una esfera a la que le hemos suprimido  $m + n = q$  discos abiertos disjuntos,  $H_1, H_2, \dots, H_m$  son asas (esto es, toros a los que se les ha extraído un disco abierto) y  $M_1, M_2, \dots,$

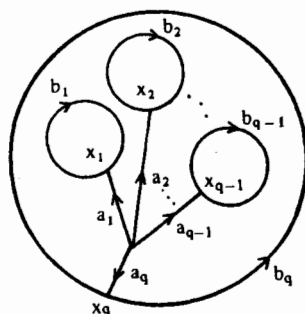
$M_q$  son bandas de Möbius (esto es, planos proyectivos reales a los que se les ha extraído un disco abierto). Si  $b_1, b_2, \dots, b_q$  denotan las  $q$  circunferencias del borde de  $X$ , se tiene

$$X \cap H_i = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$X \cap M_j = b_{m+j}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Obsérvese que  $X$  es homeomorfo al disco  $D^2$  al que se le han extraído  $q - 1$  discos abiertos. Sea  $x_0$  un punto del interior de  $X$  tal como indica la Figura 26.1. Sean, también,  $x_1, x_2, \dots, x_q$  puntos de  $b_1, b_2, \dots, b_q$ . Finalmente, sean  $a_1, a_2, \dots, a_q$  las curvas de  $x_0$  a  $x_1, x_2, \dots, x_q$  respectivamente, indicadas en la Figura 26.1.

Figura 26.1



El subespacio de  $X$  formado por  $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}$  y  $b_1, b_2, \dots, b_{q-1}$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$ . No es difícil ver entonces que su grupo fundamental es un grupo libre con  $q - 1$  generadores. (De hecho, contrayendo  $a_1, a_2, \dots, a_{q-1}$  al punto  $x_0$  vemos que  $X$  es homotópicamente equivalente relativamente a  $\{x_0\}$  a una unión de  $q - 1$  circunferencias con un único punto en común.) Si tomamos en  $X$  caminos  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  de  $x_0$  a  $x_i$  que correspondan a  $a_1, a_2, \dots, a_q$  y caminos cerrados  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$  con puntos base  $x_1, x_2, \dots, x_q$ , que correspondan a  $b_1, b_2, \dots, b_q$ , entonces  $\pi(X, x_0)$  es el grupo libre generado por

$$B_1 = [\alpha_1 * \beta_1 * \bar{\alpha}_1], B_2 = [\alpha_2 * \beta_2 * \bar{\alpha}_2], \dots,$$

$$B_{q-1} = [\alpha_{q-1} * \beta_{q-1} * \bar{\alpha}_{q-1}].$$

Si  $B_q$  denota el elemento  $[\alpha_q * \beta_q * \bar{\alpha}_q]$ , entonces

$$B_q^{-1} = B_1 B_2 \dots B_{q-1},$$

esto es,

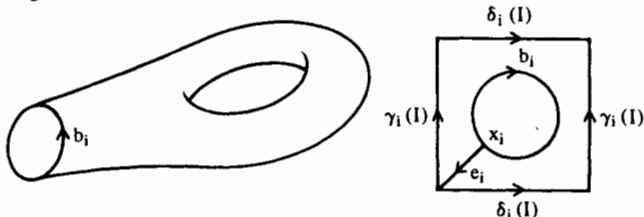
$$B_1 B_2 \dots B_{q-1} B_q = 1.$$

Así pues,  $\pi(X, x_0)$  es un grupo generado por  $B_1, B_2, \dots, B_q$  con una relación  $B_1 B_2 \dots B_q = 1$ . Esta formulación será de utilidad en lo que sigue.

Si escogemos un punto base distinto, por ejemplo  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, q$ ), entonces  $\pi(X, x_i)$  es el grupo generado por  $h_i(B_1), h_i(B_2), \dots, h_i(B_q)$  con una relación  $h_i(B_1 B_2 \dots B_q) = 1$ , donde  $h_i: \pi(X, x_0) \rightarrow \pi(X, x_i)$  es el isomorfismo dado por  $h_i([\theta]) = [\tilde{\alpha}_i * \theta * \alpha_i]$ . Obsérvese que  $h_i(B_i) = [\beta_i]$ .

Consideremos ahora el asa  $H_i$ . De los cálculos que hemos hecho con anterioridad, sabemos ya que el grupo fundamental de  $H_i$  es un grupo libre con dos generadores. Con la notación de la Figura 26.2,  $\pi(H_i, x_i)$  es un grupo libre generado por  $C_i = [\epsilon_i * \gamma_i * \bar{\epsilon}_i]$  y  $D_i = [\epsilon_i * \delta_i * \bar{\epsilon}_i]$ , donde  $\epsilon_i$  es el camino correspondiente a la curva  $e_i$  de  $H_i$  y  $\gamma_i, \delta_i$  son caminos cerrados de  $H_i$ .

Figura 26.2



Obsérvese que el camino cerrado  $\beta_i$  correspondiente a  $b_i$  puede expresarse en términos de  $C_i$  y de  $D_i$  de la siguiente manera

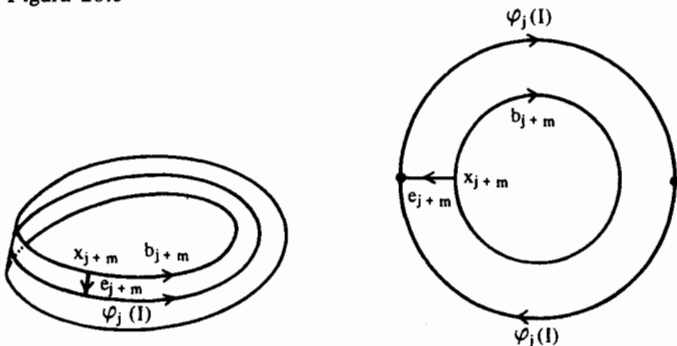
$$[\beta_i] = C_i D_i C_i^{-1} D_i^{-1}.$$

Consideremos ahora, la banda de Möbius  $M_j$ . El grupo fundamental de  $M_j$  es un grupo libre con un generador

$$F_j = [\epsilon_{j+m} * \varphi_j * \bar{\epsilon}_{j+m}]$$

donde  $\epsilon_{j+m}$  es el camino correspondiente a  $e_{j+m}$  y  $\varphi_j$  es el camino representado en la Figura 26.3. Obsérvese también que  $[\beta_{j+m}] = F_j^2$ .

Figura 26.3



Vamos a combinar los resultados anteriores inductivamente para calcular el grupo fundamental de  $S$ . Para ello definimos los subespacios  $X_0, X_1, \dots, X_q$  de  $S$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} X_0 &= X, \\ X_i &= X_{i-1} \cup H_i \text{ para } i = 1, 2, \dots, m, \\ X_{m+j} &= X_{m+j-1} \cup M_j \text{ para } j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Demostraremos que los grupos fundamentales de los espacios  $X_0, X_{m+j}$  son los siguientes:

$$\pi(X_i, x_0), i = 0, 1, \dots, m, \text{ es el grupo generado por } c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_i, d_i, B_{i+1}, B_{i+2}, \dots, B_q$$

y una relación

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_i d_i c_i^{-1} d_i^{-1} B_{i+1} B_{i+2} \dots B_q = 1.$$

$$\pi(X_{m+j}, x_0), j = 0, 1, \dots, n, \text{ es el grupo generado por } c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_j, B_{m+j+1}, B_{m+j+2}, \dots, B_q$$

y una relación

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_j^2 B_{m+j+1} B_{m+j+2} \dots B_q = 1.$$

Para demostrar estos últimos resultados aplicaremos el teorema de Seifert-Van Kampen, pero, para ello, necesitamos expresar  $X_k$  como unión de dos subconjuntos abiertos. A pesar de que  $X_k = X_{k-1} \cup Y_k$ , donde  $Y_k = H_i$  o  $M_j$  para algún  $i$  o  $j$ , desgraciadamente ninguno de estos dos subespacios es abierto. Sin embargo, recordemos que en el Capítulo 11 vimos que existe un entorno abierto  $N_k$  de  $b_k$  en  $S$  (puesto que hemos tomado sumas conexas) que es homeomorfo a  $S^1 \times (-1, 1)$  y tal que si  $g_k: N_k \rightarrow S^1 \times (-1, 1)$  es el homeomorfismo, entonces  $g_k(b_k) = S^1 \times \{0\}$  y

$$\begin{aligned} g_k^{-1}(S^1 \times (-1, 0]) &\subseteq X \subseteq X_{k-1}, \\ g_k^{-1}(S^1 \times [0, 1)) &\subseteq Y_k. \end{aligned}$$

Definimos, por tanto,

$$U_k = X_{k-1} \cup N_k \subseteq X_{k-1} \cup Y_k = X_k,$$

y

$$V_k = N_k \cup Y_k \subseteq X_{k-1} \cup Y_k \subseteq X_k.$$

Ahora bien,  $U_k$  y  $V_k$  son subconjuntos abiertos arco conexos de  $X_k$ . Además,  $U_k \cap V_k = N_k$  es arco conexo. Podemos ahora aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen a  $X_k = U_k \cup V_k$ , tomando  $x_k \in b_k$  como punto base. Desde luego  $X_{k-1}$ ,  $Y_k$ ,  $b_k$  son retrac-



tos de deformación fuertes de  $U_k$ ,  $V_k$ ,  $U_k \cap V_k$  respectivamente, por lo que

$$\begin{aligned}\pi(U_k, x_k) &= \pi(X_{k-1}, x_k), \\ \pi(V_k, x_k) &= \pi(Y_k, x_k), \\ \pi(U_k \cap V_k, x_k) &= \pi(b_k, x_k) = \langle \{ [\beta_k] \} ; \emptyset \rangle.\end{aligned}$$

Es ahora bastante fácil calcular por inducción los grupos fundamentales  $\pi(X_i, x_0)$ ; haremos únicamente el cálculo de  $\pi(X_1, x_0)$ . Tenemos

$$\begin{aligned}\pi(U_1, x_1) &= \pi(X, x_1) = \langle \{ h_1(B_1), h_1(B_2), \dots, h_1(B_q) \} ; \\ &\quad \{ h_1(B_1 B_2 \dots B_q) = 1 \} \rangle, \\ \pi(V_1, x_1) &= \pi(H_1, x_1) = \langle \{ C_1, D_1 \} ; \emptyset \rangle, \\ \pi(U_1 \cap V_1, x_1) &= \pi(b_1, x_1) = \langle \{ [\beta_1] \} ; \emptyset \rangle.\end{aligned}$$

Por el teorema de Seifert-Van Kampen  $\pi(X_1, x_1) = \pi(U_1 \cup V_1, x_1)$  es el grupo generado por

$$C_1, D_1, h_1(B_1), h_1(B_2), \dots, h_1(B_q)$$

con las relaciones

$$\begin{aligned}h_1(B_1 B_2 \dots B_q) &= 1, \\ h_1(B_1) &= C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1},\end{aligned}$$

ya que se cumple  $h_1(B_1) = [\beta_1]$  en  $X$  y  $[\beta_1] = C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1}$  en  $H_1$ . Eliminando el generador  $h_1(B_1)$ , se demuestra que  $\pi(X_1, x_1)$  es el grupo generado por

$$C_1, D_1, h_1(B_2), h_1(B_3), \dots, h_1(B_q)$$

con una relación

$$C_1 D_1 C_1^{-1} D_1^{-1} h_1(B_2 B_3 \dots B_q) = 1.$$

Resulta, entonces, inmediatamente, que  $\pi(X_1, x_0)$  es el grupo generado por

$$c_1, d_1, B_2, B_3, \dots, B_q$$

con la relación

$$c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} B_2 B_3 \dots B_q = 1$$

donde

$$c_1 = h_1^{-1}(C_1) = [\alpha_1 * \epsilon_1 * \gamma_1 * \bar{\epsilon}_1 * \bar{\alpha}_1]$$

y

$$d_1 = h_1^{-1}(D_1) = [\alpha_1 * \epsilon_1 * \delta_1 * \bar{\epsilon}_1 * \bar{\alpha}_1].$$

Es obvio cómo hay que proceder y se deja para el lector.

No es en absoluto obvio como se pueden distinguir los diferentes grupos que aparecen en el Teorema 26.1. Vamos, pues, a abelianizarlos; si  $G = \langle S_1; R \rangle$ , el *abelianizado* de  $G$  es

$$AG = \langle S_1; R \cup \{ xyx^{-1}y^{-1}; x, y \in S_1 \} \rangle,$$

esto es, añadimos las relaciones  $xy = yx$  para todo  $x, y \in G$ .

Supongamos que  $n = 0$ , esto es  $S = S^2 \# mT$ ; entonces  $A\pi(S, x_0)$  es el grupo generado por

$$S_m = \{ c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m \}$$

con las relaciones  $\{ r_m = 1 \} \cup \{ xy = yx; x, y \in S_m \}$  donde

$$r_m = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1}.$$

En particular, tenemos la relación  $c_i d_i = d_i c_i$ , por lo que la relación  $r_m = 1$  es una consecuencia de las relaciones  $\{ xy = yx; x, y \in S_m \}$ . Así pues,  $A\pi(S, x_0)$  es el grupo

$$\langle S_m; \{ xy = yx; x, y \in S_m \} \rangle$$

y no es difícil ver que  $A\pi(S, x_0) \cong \mathbb{Z}^{2m}$ .

Si  $n \geq 1$ , es decir  $S = S^2 \# mT \# nR P^2$ , entonces  $A\pi(S, x_0)$  es el grupo generado por

$$S_{m+n} = \{ c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_m, d_m, f_1, f_2, \dots, f_n \}$$

con las relaciones  $\{ r_{m+n} = 1 \} \cup \{ xy = yx; x, y \in S_{m+n} \}$  donde

$$r_{m+n} = c_1 d_1 c_1^{-1} d_1^{-1} c_2 d_2 c_2^{-1} d_2^{-1} \dots c_m d_m c_m^{-1} d_m^{-1} f_1^2 f_2^2 \dots f_n^2.$$

La relación  $r_{m+n} = 1$  es una consecuencia de las relaciones  $\{ xy = yx; x, y \in S_{m+n} \}$  y  $\{ (f_1 f_2 \dots f_n)^2 = 1 \}$ . Además, la relación  $\{ (f_1 f_2 \dots f_n)^2 = 1 \}$  es una consecuencia de las relaciones  $\{ r_{m+n} = 1 \} \cup \{ xy = yx; x, y \in S_{m+n} \}$ . Así pues,

$$A\pi(S, x_0) = \langle S_{m+n}; \{ xy = yx; x, y \in S_{m+n} \} \cup \{ (f_1 f_2 \dots f_n)^2 = 1 \} \rangle.$$

Ahora bien, todo elemento de  $A\pi(S, x_0)$  puede escribirse en la forma

$$c_1^{a(1)} d_1^{b(1)} c_2^{a(2)} d_2^{b(2)} \dots c_m^{a(m)} d_m^{b(m)} f_1^{e(1)} f_2^{e(2)} \dots f_n^{e(n)}$$

donde  $a(i), b(i), e(i) \in \mathbb{Z}$ . Puede, pues, reescribirse como

$$c_1^{a(1)} d_1^{b(1)} c_2^{a(2)} d_2^{b(2)} \dots c_m^{a(m)} d_m^{b(m)} f_1^{e(1)-e(n)} f_2^{e(2)-e(n)} \dots f_{n-1}^{e(n-1)-e(n)} (f_1 f_2 \dots f_n)^{e(n)}$$

de donde resulta que  $A\pi(S, x_0) \cong \mathbb{Z}^{2m+n-1} \times \mathbb{Z}_2$ .

## 26.2 Corolario

- (i) El abelianizado del grupo fundamental de una superficie orientable de género  $m$  ( $m \geq 0$ ) es  $\mathbb{Z}^{2m}$ ;
- (ii) el abelianizado del grupo fundamental de una superficie no orientable de género  $n$  ( $n \geq 1$ ) es  $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ .

Este corolario demuestra que no existen dos superficies de la lista del Teorema 11.3 que sean homeomorfas.

El siguiente resultado puede considerarse como el *resultado básico que relaciona superficies y grupos fundamentales*.

## 26.3 Corolario

Dos superficies son homeomorfas si y sólo si sus grupos fundamentales (abelianizados) son isomorfos.

El corolario resulta inmediatamente del teorema de clasificación de superficies (Capítulo 11) y del Corolario 26.2.

## 26.4 Corolario

Una superficie es simplemente conexa si y sólo si es homeomorfa a la esfera  $S^2$ .

El Corolario 26.2 podría usarse como un método para decidir si un espacio es una superficie o no.

## 26.5 Corolario

Sea  $X$  un espacio y  $x_0 \in X$ . Si  $A\pi(X, x_0)$  no es de la forma  $\mathbb{Z}^{2m}$  o  $\mathbb{Z}^{n-1} \times \mathbb{Z}_2$ , entonces  $X$  no es una superficie.

En el Capítulo 11 dimos una descripción alternativa de las superficies en términos de espacios cocientes de regiones poligonales. Dejamos como ejercicio para el lector el calcular de nuevo el grupo fundamental de una superficie utilizando esta descripción alternativa.

## 26.6 Ejercicios

- (a) Sea  $M$  el espacio cociente de una región poligonal de  $4m$  lados ( $m \geq 1$ ) con las identificaciones indicadas en la Figura 26.4(a); es decir,  $M$  es una superficie orientable de género  $m$ . Probar directamente (utilizando el teorema de Seifert-Van Kampen) que el grupo fundamental de  $M$  es el grupo generado por

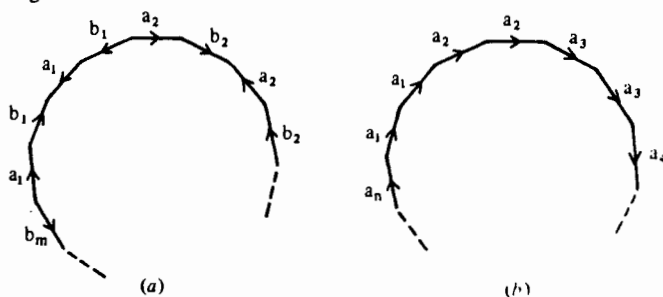
$$A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_m, B_m$$

con la relación

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} \dots A_m B_m A_m^{-1} B_m^{-1} = 1.$$

- (b) Sea  $M$  el espacio cociente de una región poligonal de  $2n$  lados ( $n \geq 1$ ) con las identificaciones indicadas en la Figura 26.4(b), es decir,  $M$  es una superficie no

Figura 26.4



orientable de género  $n$ . Probar (utilizando el teorema de Seifert-Van Kampen) que el grupo fundamental de  $M$  es el grupo generado por

$$A_1, A_2, \dots, A_n$$

con la relación

$$A_1^2 A_2^2 \dots A_n^2 = 1.$$

- (c) Probar que si  $M_1$  y  $M_2$  son  $n$ -variedades conexas con  $n > 2$ , el grupo fundamental de  $M_1 \# M_2$  es isomorfo al grupo  $\langle S_1 \cup S_2; R_1 \cup R_2 \rangle$ , donde el grupo fundamental de  $M_i$  es  $\langle S_i, R_i \rangle$ ,  $i = 1, 2$ .
- (d) Probar que si  $G_n$  es un grupo libre con  $n$  generadores, existe, entonces, una 4-variedad  $M_n$  con grupo fundamental  $G_n$ . (Indicación: Hallar  $M_1$ .)

## Capítulo 27

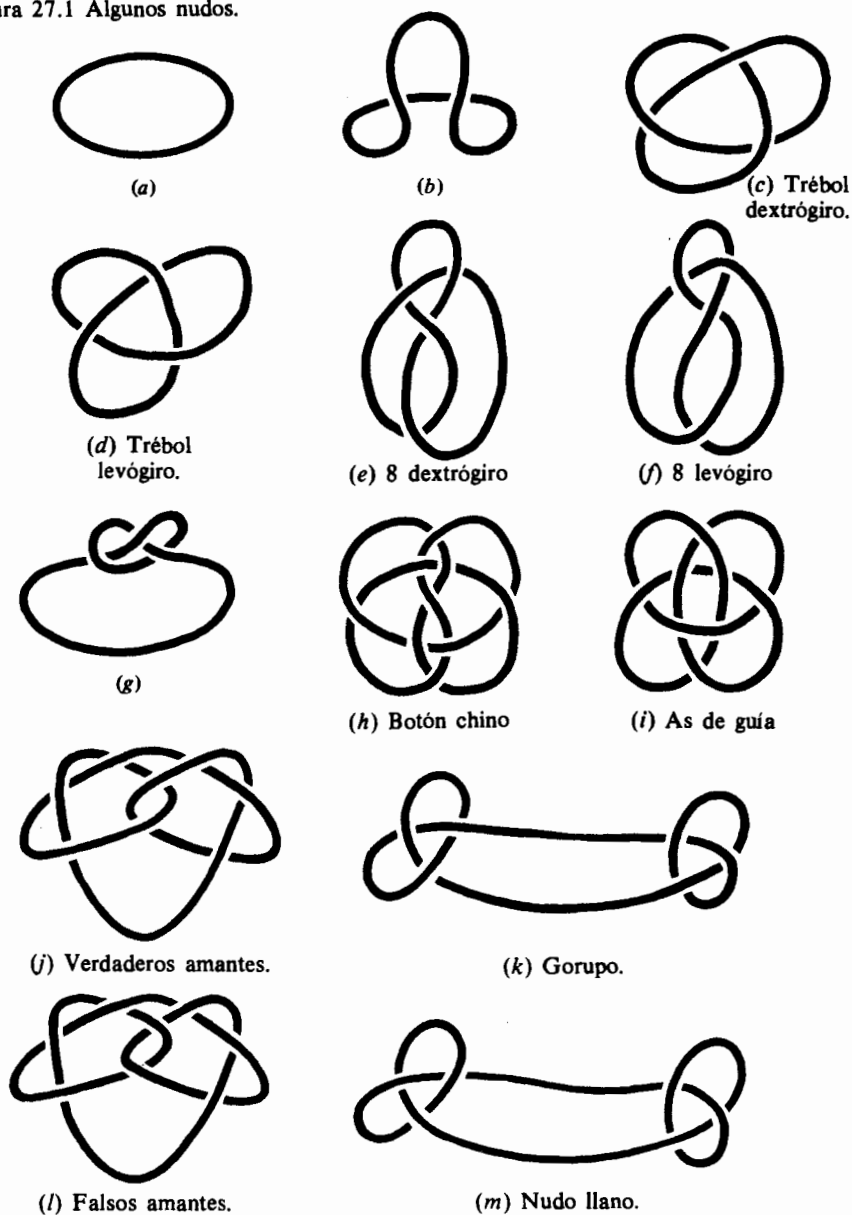
# Nudos: I Conceptos básicos y nudos tóricos

Un *nudo* es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  homeomorfo a la circunferencia  $S^1$ . En la Figura 27.1 damos algunos ejemplos. A pesar de que todos los espacios de la Figura 27.1 son homeomorfos entre sí (puesto que cada uno de ellos es homeomorfo a una circunferencia por definición), nuestra intuición nos dice que en  $\mathbb{R}^3$  no son lo mismo. Así, si construimos modelos de nudos usando una cuerda, en nuestro mundo 3-dimensional no podríamos, por ejemplo, construir el nudo (c) de la Figura 27.1 a partir del nudo (a), salvo que cortáramos la cuerda en algún punto. Esto es debido a que el nudo (c) está «anudado» mientras que el nudo (a) no lo está. Es razonable decir que un nudo no está anudado (o que es trivial) si podemos transformarlo con continuidad dentro de nuestro 3-espacio en el nudo (a) de la Figura 27.1. Esto nos sugiere que, además de poder mover el nudo con continuidad, el espacio subyacente también debe moverse con continuidad. Estamos pues llevados a la siguiente definición: Un nudo  $K$  es *trivial* si existe un homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $h(K)$  es la circunferencia estándar  $\{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1\}$  en  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Así, los nudos (a) y (b) de la Figura 27.1 son triviales, mientras que los otros no lo son; por lo menos esto es lo que nos dice la intuición o la experiencia. Más adelante en este capítulo demostraremos que los nudos (c), (d) y (g) de la Figura 27.1 no son triviales. En el capítulo próximo estaremos en condiciones de demostrar que los restantes nudos de la Figura 27.1 tampoco son triviales.

Antes de proseguir, el lector podría haberse extrañado de que hayamos definido un nudo como un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ . (¿Es únicamente porque vivimos en un mundo 3-dimensional?) ¿Por qué no definir un nudo  $K$  como un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  que sea homeomorfo a  $S^1$ ? Obviamente  $n$  debe ser mayor o igual que 2 (¿por qué? —¡Corolario 10.3!). Sin embargo, si  $n \neq 3$ , existe entonces un homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h(K)$  es la circunferencia estándar en  $\mathbb{R}^n$ . No demostraremos este resultado; para  $n = 2$  constituye el famoso teorema de Schönflies; para  $n \geq 4$  el resultado nos dice que si viviéramos en un mundo 4 (o más)-dimensional, podríamos desanudar todos los nudos. Intuitivamente, está claro: la dimensión extra nos da espacio suficiente para poder desanudar el nudo. Esto justifica el que hayamos definido los nudos como imágenes homeomórficas de  $S^1$  en  $\mathbb{R}^3$ . Podríamos, tam-

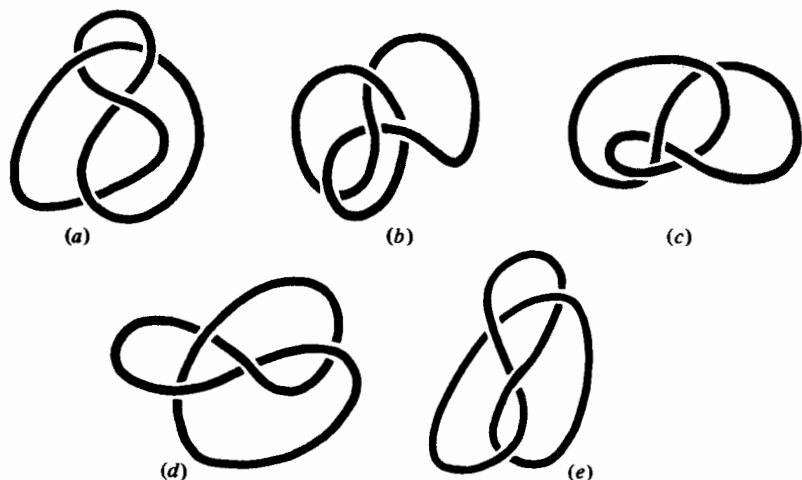
bién, considerar subespacios de  $\mathbf{R}^{n+1}$  homeomorfos a  $S^{n-1}$ . La cuestión tiene sentido y conduce a resultados matemáticos interesantes, pero se escapa del objetivo de este libro.

Figura 27.1 Algunos nudos.



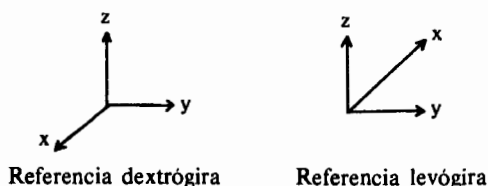
Volviendo a los nudos (en  $\mathbb{R}^3$ ), hemos definido lo que significa que un nudo sea trivial. Más generalmente, decimos que dos nudos  $K_1, K_2$  son *semejantes* si existe un homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $h(K_1) = K_2$ . Por ejemplo, en la Figura 27.1, los nudos (a) y (b) son semejantes, los nudos (c), (d) y (g) son semejantes, los nudos (e) y (f) son semejantes, etc. Que (a) y (b) son semejantes es obvio y también es fácil ver que (g) y (c) lo son. Para ver que (c) y (d) son semejantes, colocar directamente uno sobre el otro; un espejo situado entre los dos nos da el homeomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  requerido. Un homeomorfismo análogo nos da la semejanza del par (e), (f). Hay otra manera de ver que los nudos (e) y (f) son semejantes; este método está descrito en la Figura 27.2 mediante una sucesión de diagramas. El lector podría construir el nudo (e) de la Figura 27.1 con un trozo de cuerda y realizar la sucesión de nudos descrita en la Figura 27.2.

Figura 27.2



Obsérvese, sin embargo, que la experimentación física (intentarlo) nos dice que los *tréboles* levógiro y dextrógiro (Figura 27.1 (c), (d)) no son iguales, en el sentido de que no podemos mover el trébol levógiro en el 3-espacio para obtener el trébol dextrógiro. De hecho, necesitamos un espejo para pasar de uno al otro. Un espejo transforma una «referencia dextrógira» de  $\mathbb{R}^3$  en una «referencia levógira» (Figura 27.3) y no hay manera de transformar en  $\mathbb{R}^3$ , moviéndola, una referencia dextrógira en una referencia levógira.

Figura 27.3



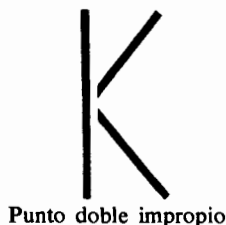
Decimos que un homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  conserva la orientación si  $h$  aplica toda referencia dextrógira en una referencia dextrógira. Dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son *equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que conserve la orientación tal que  $h(K_1) = K_2$ . Así pues (por lo menos intuitivamente), los tréboles levógiro y dextrógiro no son equivalentes. Por otra parte, los nudos 8 dextrógiro y levógiro son equivalentes, tal como demuestra la Figura 27.2. El concepto de nudos equivalentes coincide con el concepto físico de igualdad de nudos. De hecho se podría demostrar que dos nudos  $K_1, K_2$  son equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y un número real  $k > 0$  tal que  $h(K_1) = K_2$  y  $h(x) = x$  siempre que  $\|x\| \geq k$ . Este resultado tiene fuertes connotaciones físicas que dejaremos para el lector. Ni demostraremos ni usaremos el resultado que acabamos de mencionar (no es trivial).

## 27.1 Ejercicios

- Demostrar que las relaciones «semejantes» y «equivalentes» son relaciones de equivalencia.
- Sea  $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una aplicación lineal (es decir,  $h(\lambda a + \mu b) = \lambda h(a) + \mu h(b)$  para  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^3$ ). Probar que  $h$  conserva la orientación si y sólo si  $\det h = +1$ .
- Demostrar que un nudo  $K$  es equivalente a la circunferencia estándar de  $\mathbb{R}^3$  si y sólo si  $K$  es semejante a la circunferencia estándar de  $\mathbb{R}^3$ . (Indicación: La circunferencia estándar es «simétrica».)
- Hallar (si ello es posible) ejemplos de nudos  $K$  tales que
  - $K \subset S^2 \subset \mathbb{R}^3$ .
  - $K \subset \text{toro} \subset \mathbb{R}^3$ ,
  - $K \subset \text{doble toro} \subset \mathbb{R}^3$ .
- Sea  $K$  un nudo de  $\mathbb{R}^3$  formado por un número finito, pongamos  $k$ , de segmentos rectilíneos. ¿Para qué valores de  $k$  ( $1 \leq k \leq 10$ ) se puede hallar un nudo  $K$  que no sea trivial?
- Denotemos por  $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la proyección natural de  $\mathbb{R}^3$  sobre  $\mathbb{R}^2$  (es decir,  $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ ). Un *punto de cruce* de un nudo  $K$  es un punto  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $p^{-1}(x) \cap K$  consta de dos o más puntos. Se dice un *punto doble* si  $p^{-1}(x) \cap K$  consta de dos puntos. En este caso, decimos que no es un punto doble propio si moviendo ligeramente el nudo, el punto doble desaparece; véase la Figura 27.4.

Considerar nudos tales que todos sus puntos de cruce sean puntos dobles propios. Hallar todos los posibles con 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 puntos de cruce.

Figura 27.4





Si  $K_1$  y  $K_2$  son nudos semejantes, existe entonces un homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^3 - K_1$  y  $\mathbb{R}^3 - K_2$ . Por tanto, los grupos fundamentales de los complementarios de dos nudos semejantes son isomorfos. Elijamos un punto arbitrario  $x_0 \in \mathbb{R}^3 - K$ ; el grupo  $\pi(\mathbb{R}^3 - K, x_0)$  se llama el *grupo del nudo*  $K$ . Nudos semejantes, aunque no sean equivalentes, poseen grupos isomorfos. Esto justifica por qué consideramos nudos semejantes y no nudos equivalentes.

## 27.2 Teorema

El grupo de todo nudo trivial es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Sea  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$  la circunferencia estándar de  $\mathbb{R}^3$ . Sea  $\epsilon > 0$  un número real arbitrariamente pequeño y definamos subespacios  $X, Y$  de  $\mathbb{R}^3 - K$  mediante

$$\begin{aligned} X &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x < \epsilon \} \cap \mathbb{R}^3 - K, \\ Y &= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x > -\epsilon \} \cap \mathbb{R}^3 - K. \end{aligned}$$

Es fácil ver que el subespacio

$$\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = 0, y \geq 0 \} - \{ (0, 1, 0) \}$$

es un retracto de deformación fuerte de  $X$  y de  $Y$ . Así, si  $O$  es el origen de  $\mathbb{R}^3$ , los grupos fundamentales  $\pi(X, O)$ ,  $\pi(Y, O)$  son ambos isomorfos a  $\mathbb{Z}$  y están generados por  $[\alpha_X]$ ,  $[\alpha_Y]$ , donde  $\alpha_X: I \rightarrow X$  y  $\alpha_Y: I \rightarrow Y$  son caminos definidos cada uno de ellos por

$$t \rightarrow (0, 1 - \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

El subespacio

$$\{ (x, y, z); x = 0 \} - \{ (0, 1, 0), (0, -1, 0) \}$$

es un retracto de deformación fuerte de  $X \cap Y$  por lo que  $\pi(X \cap Y, O)$  es el grupo libre con dos generadores  $[\beta_1]$  y  $[\beta_{-1}]$  definidos por

$$\begin{aligned} \beta_1(t) &= (0, 1 - \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)), \\ \beta_{-1}(t) &= (0, -1 + \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)). \end{aligned}$$

Si  $\varphi_X: X \cap Y \rightarrow X$ ,  $\varphi_Y: X \cap Y \rightarrow Y$  denotan las inclusiones naturales, está claro que

$$\begin{aligned} \varphi_X \beta_1 &= \alpha_X, & \varphi_Y \beta_1 &= \alpha_Y, \\ \varphi_X \beta_{-1} &\sim \alpha_X, & \varphi_Y \beta_{-1} &\sim \alpha_Y. \end{aligned}$$

La terna  $X, Y, X \cap Y$  cumple, entonces, todas las condiciones necesarias para poder aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen y, por tanto, en virtud de este teorema, resulta que el grupo fundamental de  $\pi(\mathbb{R}^3 - K, O)$  es un grupo libre con un generador  $[\alpha]$ , donde  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3 - K$  está dado por

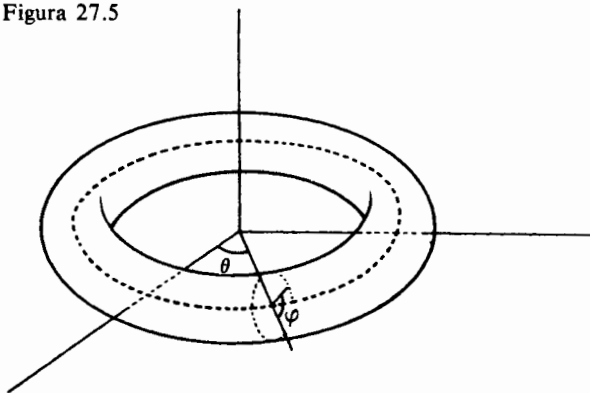
$$\alpha(t) = (0, 1 - \cos(2\pi t), \sin(2\pi t)).$$

Nuestro próximo objetivo es demostrar que no todos los nudos son triviales. Lo haremos calculando el grupo fundamental de los tréboles. Los tréboles pertenecen a la familia de los llamados nudos tóricos. Es una amplia clase de nudos que aparecen como curvas cerradas simples sobre un toro de  $\mathbb{R}^3$ . Consideremos el toro como  $S^1 \times S^1$ , donde cada punto viene expresado por un par  $(\exp(i\varphi), \exp(i\theta))$  con  $0 \leq \varphi, \theta < 2\pi$ . Es conveniente pensar  $\mathbb{R}^3$  como  $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$  y usar coordenadas polares  $(r, \theta) \equiv re^{i\theta}$  en  $\mathbb{C}$ . Así pues, un punto de  $\mathbb{R}^3$  está representado por una terna  $(r, \theta, z)$ . En éstos términos, tenemos una aplicación continua  $f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(\exp(i\varphi), \exp(i\theta)) = (1 + \frac{1}{2} \cos \varphi, \frac{1}{2} \sin \varphi, \theta),$$

y  $S^1 \times S^1$  es homeomorfo a la imagen de  $f(S^1 \times S^1)$ . Véanse las Figuras 27.5 y 5.4.

Figura 27.5



Sean  $m, n$  un par de enteros positivos primos entre sí. Definimos  $K_{m,n}$  como el siguiente subconjunto del toro de  $\mathbb{R}^3$

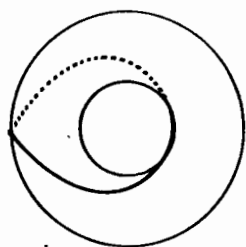
$$K_{m,n} = \{ f(\exp(2\pi imt), \exp(2\pi int)); t \in I \}.$$

No es difícil comprobar que la aplicación  $g: S^1 \rightarrow K_{m,n}$  definida por

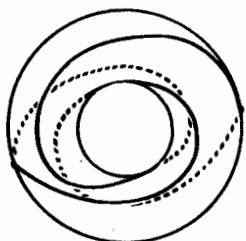
$$g(\exp(2\pi it)) = f(\exp(2\pi imt), \exp(2\pi int))$$

es un homeomorfismo, por lo que  $K_{m,n}$  es un nudo.  $K_{m,n}$  se llama el *nudo tórico de tipo (m,n)*. Véase la Figura 27.6 para algunos ejemplos. En el toro existen dos circunferencias

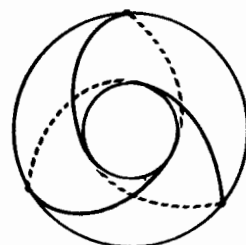
Figura 27.6



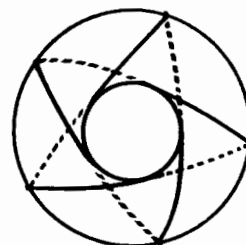
(a) Tipo (1,1)



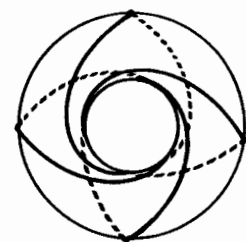
(b) Tipo (2,3)



(c) Tipo (3,2)



(d) Tipo (5,2)



(e) Tipo (4,3)

estándar; están dadas por  $f(\exp(2\pi it), 1)$  y  $f(1, \exp(2\pi it))$ . Un nudo tórico de tipo  $(m, n)$  da  $n$  vueltas alrededor del toro en la dirección de la circunferencia  $f(\exp(2\pi it), 1)$  y  $m$  vueltas en la dirección de la otra circunferencia estándar. Si consideramos el toro  $T$  como el espacio cociente  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , entonces  $K_{m,n}$  es la imagen en  $T$  del segmento rectilíneo  $\mathbb{R}^2$  que pasa por el origen y tiene una pendiente  $n/m$ .

Para calcular el grupo de un nudo tórico  $K = K_{m,n}$  será conveniente dar un ligero grosor a  $K$ . Sea  $a$  un número real positivo menor que  $1/2 \sin(\pi/n)$ ; para  $0 \leq b \leq a$  definimos  $K_b$  como el siguiente subconjunto de  $\mathbb{R}^3 (= \mathbb{C} \times \mathbb{R})$ :

$$\{ (x + 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi mt), 2\pi nt, y + \frac{1}{2} \sin(2\pi mt)); 0 \leq t \leq 1, x^2 + y^2 \leq b^2 \}.$$

Está claro que  $K_0 = K$ . En general, si  $D_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq b^2\}$ , existe, entonces, un homeomorfismo

$$h: S^1 \times D_b \rightarrow K_b$$

dado por

$$h(\exp(2\pi it), (x, y)) = (x + 1 + \frac{1}{2} \cos(2\pi mt), 2\pi nt, y + \frac{1}{2} \sin(2\pi mt)).$$

(La aplicación  $h$  es claramente continua y exhaustiva. No es difícil comprobar que  $h$  es inyectiva; en este punto se necesita la condición  $b \leq a < 1/2 \sin(\pi/n)$ . El que  $h$  sea un homeomorfismo resulta, entonces, del Teorema 8.8.)

Resulta entonces que  $\mathbb{R}^3 - K$  y  $\mathbb{R}^3 - K_b$  son homeomorfos para todo  $b$  tal que  $0 \leq b < a$ .

### 27.3 Teorema

Supongamos que  $a$  es un número real positivo y que para todo  $0 \leq b \leq a$  existe un homeomorfismo  $h: S^1 \times D_b \rightarrow K_b \subset \mathbb{R}^3$ . Si  $0 \leq b < a$ ,  $\mathbb{R}^3 - K_b$  es homeomorfo a  $\mathbb{R}^3 - K_0$ .

*Demostración.* Definamos  $\varphi: \mathbb{R}^3 - K_b \rightarrow \mathbb{R}^3 - K_0$  de la siguiente manera: Si  $x \notin K_a - K_b$ , pongamos  $\varphi(x) = x$ , mientras que si  $x \in K_a - K_b$ , podemos escribir  $x = h(z, r \exp(i\theta))$  con  $b < r \leq a$ ; en este caso definimos  $\varphi(x)$  como  $h(z, (r - b)(a/(a - b)) \exp(i\theta))$ . Análogamente definimos  $\psi: \mathbb{R}^3 - K_0 \rightarrow \mathbb{R}^3 - K_b$  de la siguiente manera: Si  $x \notin K_a - K_0$ ,  $\psi(x) = x$  mientras que si  $x \in K_a - K_0$  entonces  $x = h(z, r \exp(i\theta))$  con  $0 < r \leq a$ , y definimos  $\psi(x)$  como  $h(z, (r(a - b)/a + b) \exp(i\theta))$ . Dejamos para el lector la comprobación de que  $\psi\varphi = 1$ ,  $\varphi\psi = 1$  y de que  $\varphi, \psi$  son continuas.

### 27.4 Teorema

El grupo de un nudo tórico  $K$  de tipo  $(m, n)$  es un grupo con dos generadores  $a, b$  y una relación  $a^n = b^m$ .

**Demostración.** Definimos  $f: \mathbb{C} \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3 (= \mathbb{C} \times \mathbb{R})$  por

$$(r \exp(i\varphi), \exp(i\theta)) \rightarrow (1 + \frac{1}{2}r \cos \varphi, \theta, \frac{1}{2}r \sin \varphi)$$

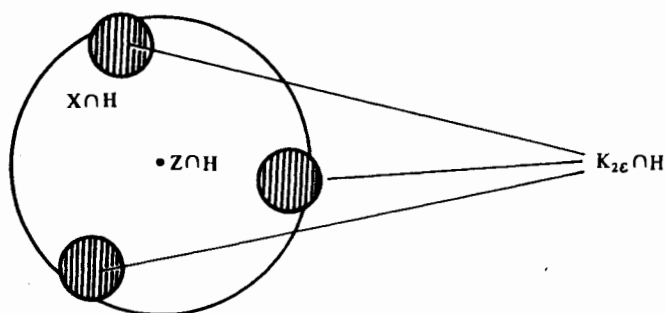
Claramente  $f$  es continua.  $f(S^1 \times S^1)$  nos da el toro de  $\mathbb{R}^3$  que hemos descrito anteriormente. Elijamos  $\epsilon > 0$  tal que  $2\epsilon < a$ , donde  $a$ , como antes, es menor que  $|1/2 \sin(\pi/n)|$ . Definimos subespacios  $X$  e  $Y$  por

$$X = \{ f(r \exp(i\varphi), \exp(i\theta)); 0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi, 0 \leq r < 1 + \epsilon \} - K_{2\epsilon},$$

$$Y = \mathbb{R}^3 - \{ f(r \exp(i\varphi), \exp(i\theta)); 0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi, 0 \leq r < 1 - \epsilon \} - K_{2\epsilon}$$

Así pues,  $X \cup Y = \mathbb{R}^3 - K_{2\epsilon} \cong \mathbb{R}^3 - K$ . Sea  $x_0 \in X \cap Y$ .

Figura 27.7



Es fácil ver que  $Z = \{ f(0, \exp(i\theta)); 0 \leq \theta \leq 2\pi \}$  es un retracto de deformación fuerte de  $X$  y que  $\mathbb{R}^3 - Z$  es un retracto de deformación fuerte de  $Y$ . Véase la Figura 27.2, que muestra las diferentes regiones involucradas (para  $n = 3$ ) intersectadas por el semiplano  $H$  de  $\mathbb{R}^3$  dado por los puntos  $(r, \theta, z)$  con  $\theta$  fijo (por ejemplo  $\theta = 0$ ). Desde luego  $Z$  es la circunferencia estándar de  $\mathbb{R}^3$  y, por tanto,  $\pi(X, x_0)$  y  $\pi(Y, x_0)$  son grupos libres con un generador  $[\alpha]$ ,  $[\beta]$  respectivamente.  $\alpha$  representa un camino cerrado de  $X$  que va de  $x_0$  a la circunferencia  $Z$  a lo largo de un arco  $a_x$ , da una vuelta a  $Z$  y vuelve de nuevo por el arco  $a_x$  a  $x_0$ . El generador  $[\beta]$  está representado por un camino cerrado  $\beta$  de  $Y$  que va de  $x_0$  a la circunferencia

$$\{ (1 + \frac{3}{4} \cos(2\pi t), 0, \frac{3}{4} \sin(2\pi t)); t \in I \},$$

a lo largo del arco  $a_y$ , da una vuelta a esta circunferencia y vuelve a  $x_0$  por el arco  $a_y$ .

El espacio  $X \cap Y$  es precisamente

$$\{ f(r \exp(i\varphi), \exp(i\theta)); 0 \leq \varphi, \theta \leq 2\pi, 1 - \epsilon < r < 1 + \epsilon \} - K_{2\epsilon},$$

y contiene al subespacio

$$W = \{ f(\exp(2\pi i(mt + \delta)), \exp(2\pi i nt)); 0 \leq t \leq 1 \}$$

para un  $\delta$  conveniente (por ejemplo  $\delta = 1/2n$ );  $W$  es un retracto de deformación fuerte de  $X \cap Y$ . (Intentar dibujar algunos ejemplos.) Este subespacio  $W$  es una circunferencia y, por tanto,  $\pi(X \cap Y, x_0)$  es un grupo libre con un generador  $[\gamma]$ , donde  $\gamma$  es un camino cerrado de  $X \cap Y$  que recorre una vez  $W$  (supuesto elegido  $x_0 \in W$ ).

Denotemos por  $\varphi_X: X \cap Y \rightarrow X$ ,  $\varphi_Y: X \cap Y \rightarrow Y$  las inclusiones naturales; no es difícil ver entonces que

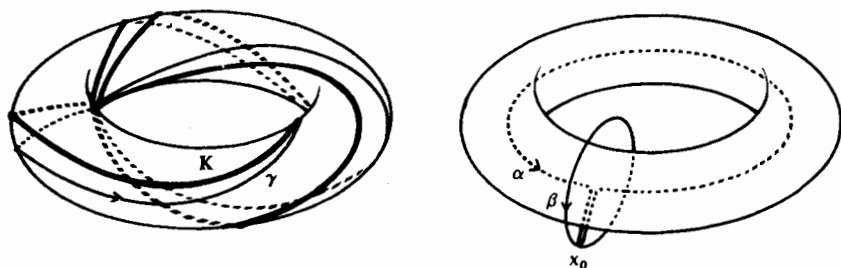
$$\begin{aligned}\varphi_{X*}[\gamma] &= [\alpha]^n \text{ o } [\alpha]^{-n}, \\ \varphi_{Y*}[\gamma] &= [\beta]^m \text{ o } [\beta]^{-m},\end{aligned}$$

por lo que reemplazando  $\alpha$  y/o  $\beta$  por  $\bar{\alpha}$  y/o  $\bar{\beta}$  respectivamente, tenemos

$$\varphi_{X*}[\gamma] = [\alpha]^n, \varphi_{Y*}[\gamma] = [\beta]^m.$$

Véase la Figura 27.8 que ilustra el caso  $m = 3, n = 2$ .

Figura 27.8



Los espacios  $X, Y, X \cap Y$  cumplen las condiciones necesarias para poder aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen, en virtud del cual resulta inmediatamente el teorema. Obsérvese que si hubiéramos tenido  $\varepsilon = 0$ , no hubiéramos podido aplicar el teorema de Seifert-Van Kampen.

Una vez calculado el grupo de un nudo tórico, no es siempre claro si el grupo es trivial o no. En las superficies teníamos un problema semejante, que resolvimos abelianizando el grupo. Sin embargo, resulta que el abelianizado del grupo de un nudo es siempre isomorfo a  $\mathbb{Z}$  (véase el Ejercicio 27.7(d) en el que se indica cómo demostrar este resultado para nudos tóricos; en general véase el Corolario 28.4). Debemos, pues, considerar algún otro método para poder decidir si un nudo tórico es trivial o no.

## 27.5 Lema

El nudo tórico de tipo  $(3,2)$  no es trivial.

**Demostración.** El grupo de este nudo es  $G = \langle \{a, b\}; \{a^2 = b^3\} \rangle$ . Definamos  $G'$  añadiendo dos nuevas relaciones a  $G$

$$G' = \langle \{a, b\}; \{a^2 = b^3, a^2 = 1, ab = b^{-1}a\} \rangle.$$

Tenemos, entonces, un epimorfismo obvio  $G \rightarrow G'$  que sobre los generadores aplica  $a$  en  $a$  y  $b$  en  $b$ .

Es fácil ver que  $G'$  es isomorfo al grupo simétrico de tres elementos, es decir

$$G' = \{1, a, b, ab, b^2, ab^2; ab = b^{-1}a\}.$$

Este es un grupo no abeliano, lo que significa que  $G$  no es abeliano, ya que la imagen de un grupo abeliano por un homomorfismo es siempre abeliano. Así pues,  $G$  no es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , lo que demuestra que el nudo tórico de tipo  $(3, 2)$  no es trivial.

Podríamos razonar de manera análoga para los otros nudos tóricos, pero esto únicamente nos llevaría a demostrar que no son triviales. Queremos saber si dos nudos tóricos son semejantes o no y para ello debemos introducir un nuevo criterio, que nos demostrará que son todos ellos distintos.

## 27.6 Teorema

Si dos nudos tóricos de tipo  $(m, n)$  y  $(m', n')$ , con  $m, n, m', n' > 1$ , son semejantes, entonces  $\{m, n\} = \{m', n'\}$ , es decir,  $m = m'$  y  $n = n'$  o bien  $m = n'$  y  $n = m'$ . En particular, si  $m, n > 1$ , ningún nudo tórico del tipo  $(m, n)$  puede ser trivial. Existe, pues, una infinidad de nudos distintos.

**Demostración.** El tipo de razonamiento que vamos a dar fue hecho por primera vez por O. Schreier en 1923. Consideremos el elemento  $a^n = b^m$  de  $G$ , donde

$$G = \langle \{a, b\}, \{a^n = b^m\} \rangle.$$

Este elemento conmuta con  $a$  y  $b$ ,

$$a a^n = a^{n+1} = a^n a, \quad b a^n = b b^m = b^{m+1} = b^m b = a^n b,$$

y, por tanto, conmuta con cualquier elemento de  $G$ . El subgrupo  $N$  generado por  $a^n$  es, pues, un subgrupo normal de  $G$ , por lo que el grupo cociente  $G/N$  está bien definido. Si  $g \in G$ , podemos escribir  $g$  como

$$g = a^{\alpha(1)} b^{\beta(1)} \dots a^{\alpha(k)} b^{\beta(k)}$$

para ciertos  $\alpha(1), \beta(1), \dots, \alpha(k), \beta(k)$ . Entonces,  $gN \in G/N$  puede escribirse como

$$gN = (a^{\alpha(1)} N) (b^{\beta(1)} N) \dots (a^{\alpha(k)} N) (b^{\beta(k)} N) = (aN)^{\alpha(1)} (bN)^{\beta(1)} \dots (aN)^{\alpha(k)} (bN)^{\beta(k)},$$

lo que demuestra que  $G/N$  está generado por  $aN$  y  $bN$ . Si  $gN = N$ , entonces  $g \in N$  y, por tanto,  $g = (a^n)^\ell = (b^m)^\ell$  para algún  $\ell$ . Así pues, en  $G/N$  las relaciones vienen dadas por  $(aN)^n = N$  y  $(bN)^m = N$ , por lo que

$$\begin{aligned} G/N &= \langle \{aN, bN\}; \{(aN)^n = 1, (bN)^m = 1\} \rangle \\ &\cong \langle \{c, d\}; \{c^n = 1, d^m = 1\} \rangle. \end{aligned}$$

Obsérvese que  $G/N$  tiene centro trivial ya que si  $x$  pertenece al centro de  $G/N$ , entonces  $cx = xc$  y  $dx = xd$ . La primera condición implica que  $x = c^\alpha$  para algún  $\alpha$ , puesto que  $n > 1$ , y la segunda que  $x = d^\beta$  para algún  $\beta$ , puesto que  $m > 1$ ; así pues,  $x = 1$ . Esto significa que el centro  $Z(G)$  de  $G$  es  $N$  (si  $p: G \rightarrow G/N$  denota la proyección natural, es fácil de ver que  $p(Z(G)) \subset Z(G/N)$ ). En otras palabras, tenemos

$$G/Z(G) \cong \langle \{c, d\}; \{c^n = 1, d^m = 1\} \rangle.$$

Ahora bien, si los nudos tóricos de tipos  $(m, n)$  y  $(m', n')$  fueran semejantes, sus grupos  $G, G'$  serían isomorfos. Pero entonces los grupos  $G/Z(G)$  y  $G'/Z(G')$  serían también isomorfos. Sea  $f$  un isomorfismo. El elemento  $f(c)$  tiene orden exactamente  $n$ , ya que  $f(c)^n = 1 \Leftrightarrow f(c^n) = 1 \Leftrightarrow c^n = 1$ . Es fácil ver que los únicos elementos de orden finito en  $G'/Z(G')$  son las potencias de  $c'$ , las de  $d'$ , y sus conjugados. Podemos pues suponer que  $f(c) = x(c')^\alpha x^{-1}$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in G'/Z(G')$ . Entonces  $1 = f(c)^n = X(c')^\alpha x^{-1}$  implica  $n\alpha = kn'$ . Aquí  $n$  y  $k$  deben ser primos entre sí (si  $p > 1$  fuera un factor común, poniendo  $n = pN$  resulta  $f(c)^N = 1$ , que es imposible). Luego,  $n$  divide a  $n'$ . Consideremos ahora  $f^{-1}(c')$ , que tiene también orden finito. Si  $f^{-1}(c') = y d^{\beta} y^{-1}$ , entonces  $f(d^{\beta}) = f(y)^{-1}(c')^{\beta} f(y) = f(y)^{-1} x^{-1} f(c) \times f(y) = f(z^{-1} c z)$ , donde  $z = f^{-1}(x)y$ . Pero esto no es posible, puesto que  $f$  es inyectiva. Así pues,  $f^{-1}(c') = y c^{\beta} y^{-1}$ , y el mismo razonamiento de antes nos dice que  $n'$  divide a  $n$ . Luego  $n = n'$ .

Finalmente, considerando  $f(d)$  y  $f^{-1}(d')$  obtenemos  $m = m'$ .

## 27.7 Ejercicios

- Demostrar que los nudos tóricos de tipos  $(m, 1)$  o  $(1, n)$  pueden ser triviales.
- Demostrar que un nudo tórico de tipo  $(m, n)$  es semejante a uno del tipo  $(n, m)$ . ¿Son equivalentes?
- Hemos definido los nudos tóricos para pares de enteros positivos  $(m, n)$  primos entre sí, pero tiene sentido definirlos para cualquier par de enteros primos entre sí distintos de cero. Demostrar que si cambiamos el signo de  $m$  y/o de  $n$ , el nudo tórico que resulta es semejante al original. ¿Son equivalentes?
- Probar que el abelianizado del grupo de un nudo tórico es siempre  $\mathbb{Z}$ . (Indicación: Si  $G = \langle \{a, b\}; \{a^n = b^m\} \rangle$ , definir  $\varphi: AG \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $\varphi(a^i b^j) = mk + n\ell$ .)
- Probar que el grupo  $\langle \{a, b\}; \{a^2 = b^2\} \rangle$  es isomorfo al grupo  $\langle \{x, y\}; \{xyx = yxy\} \rangle$ . (Utilizar las transformaciones de Tietze, Ejercicio 23.1(f).)

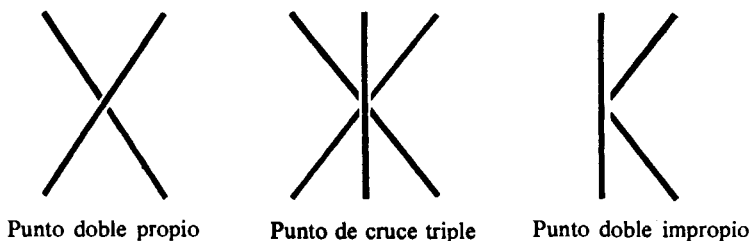


## Capítulo 28

# Nudos: II Nudos dóciles

Sea  $K$  un nudo de  $\mathbb{R}^3$ . Designemos por  $p$  la proyección de  $\mathbb{R}^3$  sobre el plano  $\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3\}$  dada por  $p(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$ . Decimos que  $x \in p(K)$  es un *punto de cruce* si  $p^{-1}(x) \cap K$  consta de más de un punto. Decimos que se trata de un *punto doble* si  $p^{-1}(x) \cap K$  consta de dos puntos; véase la Figura 28.1. Un punto doble es *impropio* si moviendo ligeramente el nudo, el punto doble desaparece (en el ejemplo de punto doble impropio de la Figura 28.1, moviendo la «parte principal» hacia la izquierda el punto doble desaparece).

Figura 28.1

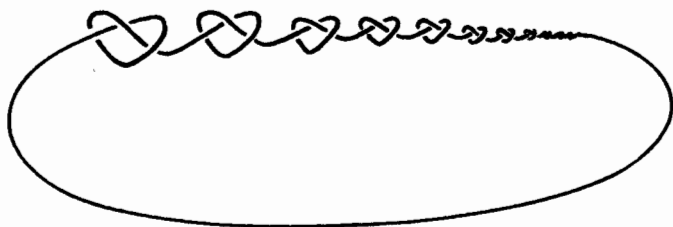


### 28.1 Definición

Decimos que un nudo  $K$  es *dócil* si es semejante a un nudo con sólo un número finito de puntos de cruce, cada uno de los cuales es un punto doble propio.

Todos los ejemplos de nudos que dimos en el capítulo anterior eran dóciles. La Figura 28.2 da un ejemplo de un nudo que no es dócil. Los nudos que no son dóciles se llaman *salvajes*. Este capítulo está dedicado a los nudos dóciles.

Figura 28.2. Un nudo salvaje.



## 28.2 Ejercicios

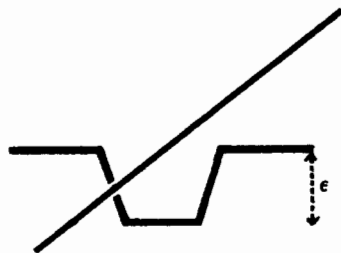
- (a) Demostrar que todo nudo tórico de tipo  $(m,n)$  es dócil.
- (b) Demostrar que todo nudo con un número finito de puntos de cruce es dócil.
- (c) Demostrar que un nudo es dócil si y sólo si es semejante a un nudo formado por un número finito de segmentos rectilíneos.
- (d) Demostrar que un nudo  $K$  es dócil si y sólo si existe un subespacio  $K_\epsilon \subset \mathbb{R}^3$  con  $K \subset K_\epsilon$  tal que  $K_\epsilon$  sea homeomorfo a  $S^1 \times D^2$ , correspondiéndose  $K$  con  $S^1 \times \{0\}$  por este homeomorfismo.

A lo largo de este capítulo  $K$  será siempre un nudo dócil. Nuestro objetivo será calcular el grupo de  $K$ . Podemos suponer que  $K$  está contenido en el semiespacio inferior de  $\mathbb{R}^3$ , esto es

$$K \subset \{ (x_1, x_2, x_3); x_3 \leq 0 \},$$

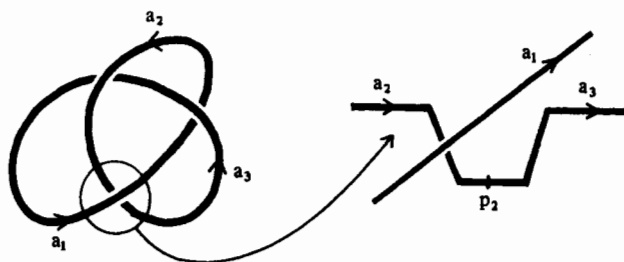
y, además, que  $K$  está contenido en el plano  $\{(x_1, x_2, x_3); x_3 = 0\}$  excepto en los puntos de cruce (dobles y propios) en que se sumerge a una profundidad  $\epsilon$ . Véase la Figura 28.3.

Figura 28.3



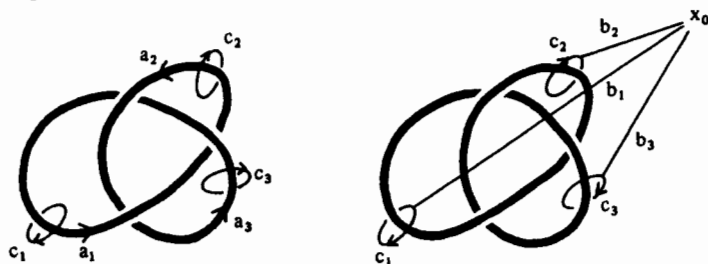
Denotemos por  $P$  el conjunto de puntos de  $K$  de la forma  $(x_1, x_2, -\varepsilon)$  para los cuales  $p(x_1, x_2, -\varepsilon)$  es un punto de cruce. Podemos suponer que  $P \neq \emptyset$ , ya que de lo contrario el nudo  $K$  sería trivial. Sea  $p_1$  uno de los puntos de  $P$ . La asignación de una flecha (dirección) a  $K$  determina  $p_2, p_3, \dots, p_n$ , donde  $n$  es el número de puntos de cruce. El conjunto  $P$  divide a  $K$  en un número finito de arcos  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . La flecha en  $K$  induce una dirección en cada  $a_1, a_2, \dots, a_n$  y podemos conseguir que el punto final de  $a_i$  sea  $p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Véase la Figura 28.4.

Figura 28.4



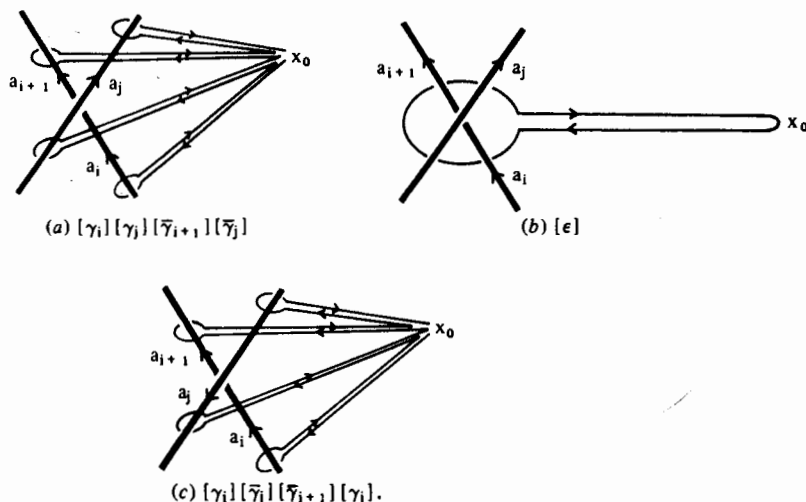
Nuestro próximo objetivo es describir los caminos cerrados de  $\mathbb{R}^3 - K$ . Para  $i = 1, 2, \dots, n$ , denotemos por  $c_i$  una pequeña circunferencia de  $\mathbb{R}^3 - K$  que dé una vuelta alrededor del arco  $a_i$ , tal como indica la Figura 28.5. Asignamos una flecha a  $c_i$  de manera que, junto con la flecha de  $a_i$ , obtengamos una hélice dextrógira. Naturalmente, debemos elegir los  $c_1, c_2, \dots, c_n$  disjuntos.

Figura 28.5



Sea  $x_0$  nuestro punto base de  $\mathbb{R}^3 - K$ , que está muy por encima de  $K$ . Para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , sea  $b_i$  un segmento rectilíneo en  $\mathbb{R}^3 - K$  de  $x_0$  a la circunferencia  $c_i$ ; debemos elegir los  $b_i$  disjuntos y cada  $b_i$  debe estar en el semiespacio superior  $\{(x_1, x_2, x_3); x_3 \geq 0\}$ . Véase la Figura 28.5. Definimos  $\gamma_i$  como el camino cerrado con punto base  $x_0$  que empieza en  $x_0$ , recorre  $b_i$ , luego una vez  $c_i$  en la dirección indicada por la flecha de  $c_i$  y vuelve a  $x_0$  a lo largo de  $b_i$ .

Figura 28.6



Demostraremos que  $\pi(\mathbb{R}^3 - K, x_0)$  está generado por los elementos  $[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_n]$ . Para las relaciones véase la Figura 28.6(a), que demuestra que si el cruce es como el representado en la Figura 28.6(a), tenemos entonces la relación

$$[\gamma_i][\gamma_j][\tilde{\gamma}_{i+1}][\tilde{\gamma}_j] = 1.$$

La otra posibilidad es que la flecha de  $a_j$  sea en sentido inverso a la indicada en la Figura 28.6(a), es decir, como en la Figura 28.6(c). En este caso tenemos la relación

$$[\gamma_i][\tilde{\gamma}_j][\tilde{\gamma}_{i+1}][\gamma_j] = 1.$$

Resulta que éstas son las únicas relaciones posibles, tal como demostraremos. En el razonamiento anterior y en lo que sigue tomamos  $a_{n+1} = a_1$  y  $\gamma_{n+1} = \gamma_1$ , etc.

### 28.3 Teorema

El grupo del nudo dócil  $K$  está generado por

$$[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_n]$$

con las relaciones

$$[\gamma_1] = r_1, [\gamma_2] = r_2, \dots, [\gamma_n] = r_n.$$

Cada relación  $[\gamma_i] = r_i$  es de la forma

$$[\gamma_i] = [\gamma_j] [\gamma_{i+1}] [\gamma_j]^{-1}$$

o

$$[\gamma_i] = [\gamma_j]^{-1} [\gamma_{i+1}] [\gamma_j]$$

para algún  $j$ . Más aún, puede suprimirse una cualquiera de las relaciones  $[\gamma_i] = r_i$ .

La  $j$  que aparece en la relación está determinada por el arco  $a_j$  que cruza por encima de  $p_i$ . Las flechas situadas sobre  $a_j$  y  $a_i$  determinan cuál de las dos relaciones es válida. En particular, si las flechas determinan localmente una hélice en el sentido de las agujas del reloj, se tiene la primera relación; en caso contrario, la segunda. Véanse las Figuras 28.6(a) y (c), respectivamente.

Fijándonos en la forma de las relaciones dadas en el Teorema 28.3 obtenemos inmediatamente:

## 28.4 Corolario

El abelianizado del grupo de un nudo es  $\mathbb{Z}$ .

Para demostrar el Teorema 28.3, sean  $C$  y  $A$  los subespacios de  $\mathbb{R}^3$  definidos por

$$C = \{ (x_1, x_2, x_3); x_3 > -2\epsilon/3 \},$$

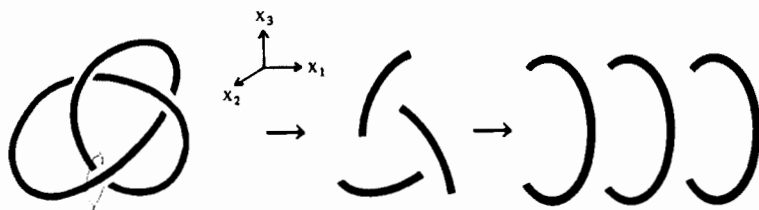
$$A = \{ (x_1, x_2, x_3); x_3 < -\epsilon/3 \}.$$

El conjunto  $C \cap K$  (y  $A \cap K$ ) consta de  $n$  arcos disjuntos sin puntos de cruce. Es, por tanto, claro que existe un homeomorfismo  $h: C \rightarrow C$  tal que  $h(C \cap K)$  es la unión

$$\bigcup_{i=1}^n (S_i \cap C)$$

donde  $S_i, i = 1, 2, \dots, n$  son las circunferencias  $\{(x_1, x_2, x_3); x_1 = i, x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ . Véase la Figura 28.7.

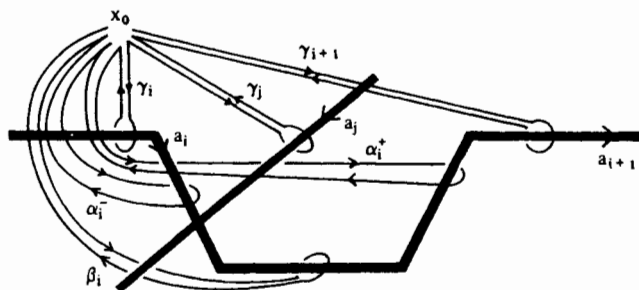
Figura 28.7



Así pues,  $C-K$  es homotópicamente equivalente a un disco al que se le han suprimido  $n$  puntos, de lo cual se deduce que  $\pi(C-K, x_0)$  es un grupo libre con  $n$  generadores  $[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_n]$ .

De manera análoga vemos que el grupo fundamental de  $A-K$  es un grupo libre con  $n$  generadores. Sin embargo,  $A-K$  no contiene a  $x_0$ , por lo que sea  $b$  un segmento rectilíneo de  $x_0$  a  $A$ , que no corte a  $K$  ni a ninguna de las otras curvas escogidas. Sea  $B$  la unión de  $A$

Figura 28.8



con todos los puntos que distan de  $b$  menos un cierto  $\delta$ . El subespacio  $B-K$  es abierto y arco conexo y está claro que  $\pi(B-K, x_0)$  es un grupo libre con  $n$  generadores  $[\beta_1], [\beta_2], \dots, [\beta_n]$ . El camino cerrado  $\beta_i$  va de  $x_0$  a  $A$  a lo largo de  $b$ , luego a un punto próximo a  $p_i$  a lo largo de una circunferencia de centro  $p_i$  contenida en  $B-K$  y, finalmente, vuelve a  $x_0$ . Véase la Figura 28.8.

Fijémonos ahora en el espacio  $(B-K) \cap (C-K)$ . Claramente es del tipo de homotopía de un disco al que se le han suprimido  $2n$  puntos y, por tanto,  $\pi((B-K) \cap (C-K), x_0)$  es un grupo libre con  $2n$  generadores  $[\alpha_1^-], [\alpha_2^-], \dots, [\alpha_n^-], [\alpha_1^+], [\alpha_2^+], \dots, [\alpha_n^+]$ . Para explicitar estos generadores, obsérvese que  $B \cap C$  descompone  $K$  en  $2n$  arcos, que podemos denotar por  $a_1^-, a_2^-, \dots, a_n^-$  y  $a_1^+, a_2^+, \dots, a_n^+$ , donde  $a_i^-, a_i^+$  son los trozos de  $a_i, a_{i+1}$  en  $A \cap B$ , respectivamente, que están más próximos al punto  $p_i$ . El camino  $\alpha_i^-$  recorre  $a_i^-$ , mientras que  $\alpha_i^+$  recorre  $a_i^+$  (por conveniencia). Véase la Figura 28.8.

Denotemos ahora por  $\varphi_B: (B \cap C) - K \rightarrow B-K$  y  $\varphi_C: (B \cap C) - K \rightarrow C-K$  las inclusiones naturales. Se comprueban con facilidad las siguientes equivalencias:

$$\varphi_B \alpha_i^- \sim \beta_i, \quad \varphi_B \alpha_i^+ \sim \epsilon, \quad \varphi_C \alpha_i^- \sim \gamma_i,$$

mientras que

$$\varphi_C \alpha_i^+ \sim ((\gamma_i * \gamma_j) * \bar{\gamma}_{i+1}) * \bar{\gamma}_j$$

o bien

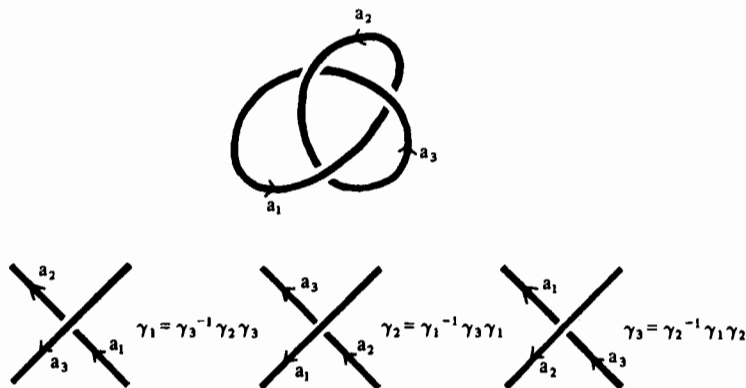
$$\varphi_C \alpha_i^+ \sim ((\gamma_i * \bar{\gamma}_j) * \bar{\gamma}_{i+1}) * \gamma_j,$$

según como se relacione la flecha de  $a_j$  con las de  $a_i$  y  $a_{i+1}$ . (Para la Figura 28.8, la relación existente es la primera.)

Podemos aplicar ahora el teorema de Seifert-Van Kampen, ya que los espacios  $B-K$ ,  $C-K$ ,  $(B-K) \cap (C-K)$  son todos abiertos y arco conexos. Se obtiene, entonces, inmediatamente el resultado concerniente a los generadores y relaciones de  $\pi(\mathbb{R}^3-K, x_0)$ .

Para demostrar que una cualquiera de las relaciones es redundante, alteramos simplemente  $A$  construyendo un espacio  $A'$  que es la unión de  $A$  con todos los puntos que distan del origen de  $\mathbb{R}^3$  más que un cierto número suficientemente grande  $N$ . Pongamos  $B' = B \cup A'$ . El grupo fundamental de  $B'-K$  es el mismo que el de  $B-K$ ; sin embargo, el grupo fundamental de  $(B' \cap C) - K$  tiene un generador menos que el de  $(B \cap C) - K$ , ya que  $(B' \cap C) - K$  tiene ahora el tipo de homotopía de una esfera  $S^2$  a la que se le han suprimido  $2n$  puntos. Así pues, suprimiendo el generador  $[\alpha_1^+]$  de  $\pi((B' \cap C) - K, x_0)$  vemos que la relación  $[\gamma_1] = r_1$  no era necesaria en  $\pi(\mathbb{R}^3-K, x_0)$ . Dejamos los detalles para el lector.

Figura 28.9



Vamos a ilustrar el teorema anterior con tres ejemplos. Por brevedad escribiremos  $\gamma_i$  en lugar de  $[\gamma_i]$ . En primer lugar calculamos de nuevo el grupo de un trébol. Usando la notación de la Figura 28.9, vemos que el grupo de un trébol tiene tres generadores  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  con las relaciones  $\gamma_1 = \gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3$ ,  $\gamma_2 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1$ ,  $\gamma_3 = \gamma_2^{-1} \gamma_1 \gamma_2$ , una cualquiera de las cuales es redundante. Podemos ver, por ejemplo, que  $\gamma_3$  es redundante, sustituyendo simplemente la primera relación en la segunda para obtener la tercera

$$\gamma_2 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 (\gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3) = \gamma_1^{-1} \gamma_2 \gamma_3,$$

con lo que  $\gamma_3 = \gamma_2^{-1} \gamma_1 \gamma_2$ . Así, el grupo de un trébol es

$$\begin{aligned} & \langle \{ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \}; \{ \gamma_1 = \gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3, \gamma_2 = \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1 \} \rangle \\ &= \langle \{ \gamma_2, \gamma_3 \}; \{ \gamma_2 = \gamma_3^{-1} \gamma_2^{-1} \gamma_3 \gamma_3 \gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3 \} \rangle \\ &= \langle \{ \gamma_2, \gamma_3 \}; \{ \gamma_2 \gamma_3 \gamma_2 = \gamma_3 \gamma_2 \gamma_3 \} \rangle \end{aligned}$$

y se demuestra (bastante fácilmente) que es isomorfo al grupo

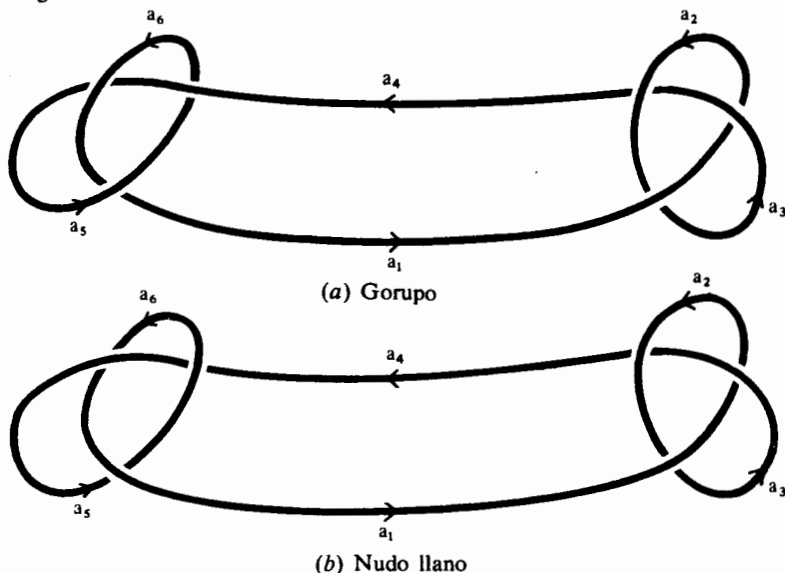
$$\langle \{a, b\}; \{a^3 = b^2\} \rangle.$$

Para el ejemplo siguiente, consideremos el gorupo de la Figura 28.10(a). El grupo fundamental de este nudo tiene seis generadores  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6$  con las relaciones

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3, & \gamma_2 &= \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1, \\ \gamma_3 &= \gamma_2^{-1} \gamma_4 \gamma_2, & \gamma_4 &= \gamma_6^{-1} \gamma_5 \gamma_6, \\ \gamma_5 &= \gamma_4^{-1} \gamma_6 \gamma_4, & \gamma_6 &= \gamma_5^{-1} \gamma_1 \gamma_5, \end{aligned}$$

una cualquiera de las cuales es redundante. Podemos reescribir todas las relaciones en términos de  $\gamma_1, \gamma_3$  y  $\gamma_5$  y no es difícil demostrar que el grupo anterior es isomorfo a un grupo con tres generadores  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$  y dos relaciones  $\gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 = \gamma_3 \gamma_1 \gamma_3$  y  $\gamma_5 \gamma_1 \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_5 \gamma_1$ . Así pues, el grupo del gorupo es el grupo con tres generadores  $x, y, z$  y dos relaciones  $xyx = yxy$  y  $xzx = zxz$ .

Figura 28.10



Para nuestro último ejemplo consideremos el nudo llano de la Figura 28.10(b). El grupo de este nudo posee seis generadores  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_6$  con las relaciones

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_3^{-1} \gamma_2 \gamma_3, & \gamma_2 &= \gamma_1^{-1} \gamma_3 \gamma_1, \\ \gamma_3 &= \gamma_2^{-1} \gamma_4 \gamma_2, & \gamma_4 &= \gamma_6 \gamma_5 \gamma_6^{-1}, \\ \gamma_5 &= \gamma_1 \gamma_6 \gamma_1^{-1}, & \gamma_6 &= \gamma_5 \gamma_1 \gamma_5^{-1}, \end{aligned}$$



una cualquiera de las cuales es redundante. Al igual que en el caso del gorupo es fácil eliminar tres de los generadores para obtener un grupo con tres generadores  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_5$  y dos relaciones  $\gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 = \gamma_3 \gamma_1 \gamma_3$  y  $\gamma_5 \gamma_1 \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_5 \gamma_1$ . Así pues, el grupo del nudo llano es el grupo con tres generadores  $x, y, z$  y dos relaciones  $xyx = yxy$  y  $xzx = zxz$ . En particular vemos que los grupos del nudo llano y del gorupo son isomorfos; sin embargo, es un hecho que estos dos nudos no son semejantes, a pesar de que no lo demostraremos.

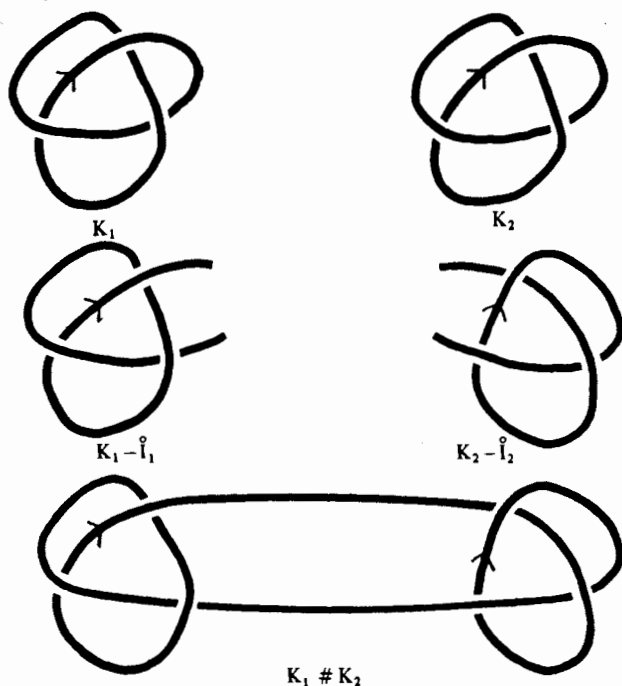
### 28.5 Ejercicio

Aplicando el Teorema 28.3, calcular los grupos de los nudos de la Figura 27.1. Para el nudo de la Figura 27.1(b) demostrar que la respuesta es  $\mathbb{Z}$ , tal como debe ser.

Terminamos nuestros capítulos sobre nudos describiendo brevemente dos construcciones asociadas a nudos. Dejamos para el lector en forma de ejercicios la mayor parte de los detalles y de las propiedades de estas construcciones.

Dados dos nudos  $K_1, K_2$  coloquemos una flecha sobre cada uno de ellos y definamos su *suma conexa*  $K_1 \# K_2$  como el nudo obtenido suprimiendo un intervalo de cada uno de ellos y pegándolos a lo largo de este intervalo de manera que las flechas vayan en la misma dirección; véase la Figura 28.11. Un nudo se dice *primo* si no puede expresarse como  $K_1 \# K_2$  con  $K_1$  y  $K_2$  ambos no triviales. La mayoría de las tablas de nudos existentes (véase el apéndice del Capítulo 28) lo son de nudos primos.

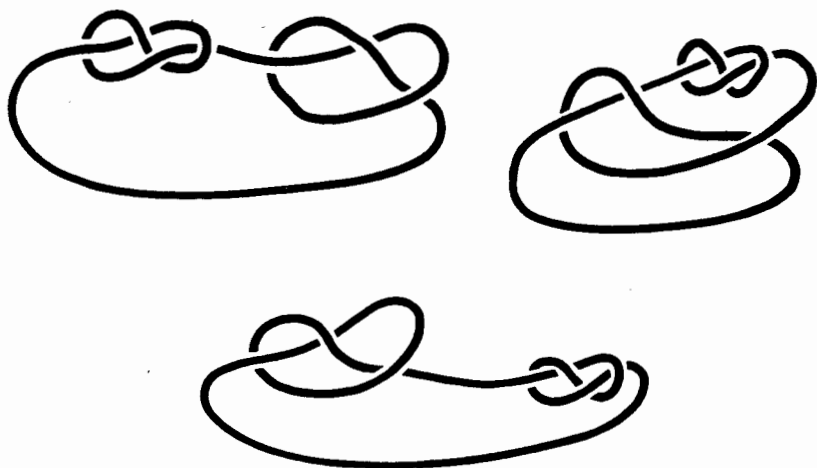
Figura 28.11



## 28.6 Ejercicios

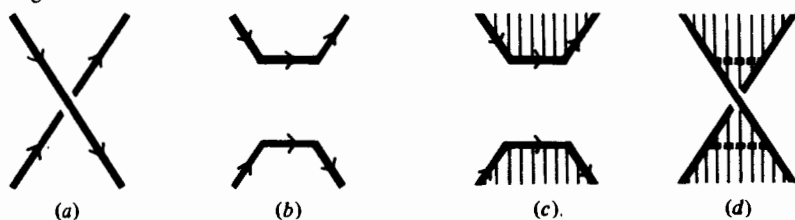
- (a) Demostrar que  $K_1 \# (K_2 \# K_3)$  es equivalente a  $(K_1 \# K_2) \# K_3$ .  
 (b) Demostrar que  $K_1 \# K_2$  es equivalente a  $K_2 \# K_1$ . (Indicación: Véase la Figura 28.12.)  
 (c) Demostrar que si  $K_1$  es equivalente a  $K'_1$  y  $K_2$  es equivalente a  $K'_2$ , entonces  $K_1 \# K_2$  es equivalente a  $K'_1 \# K'_2$ . ¿Es cierto el resultado si cambiamos la palabra equivalente por semejante?

Figura 28.12



La construcción siguiente asocia a cada nudo (dócil) una superficie con borde (véase el Ejercicio 11.8(b)). Para ello, coloquemos en primer lugar una flecha sobre el nudo. Reemplazamos la región próxima a cada punto de cruce (Figura 28.13(a)) por la configuración indicada en la Figura 28.13(b).

Figura 28.13



Lo que queda es un cierto número de circunferencias disjuntas. Podemos rellenar cada una de estas circunferencias con un disco de manera que todos estos discos sean dis-

juntos; si una circunferencia está contenida en otra deberemos considerar los discos fuera del plano; empezamos con uno del interior y proseguimos hacia afuera. Finalmente, colocamos una banda retorcida en el antiguo punto de cruce (Figura 28.13(d)). Se obtiene así una superficie con borde orientable. Su borde es, desde luego, el nudo K. Decimos que esta superficie con borde *recubre* el nudo. En las Figuras 28.14 y 28.15 damos algunos ejemplos.

Figura 28.14

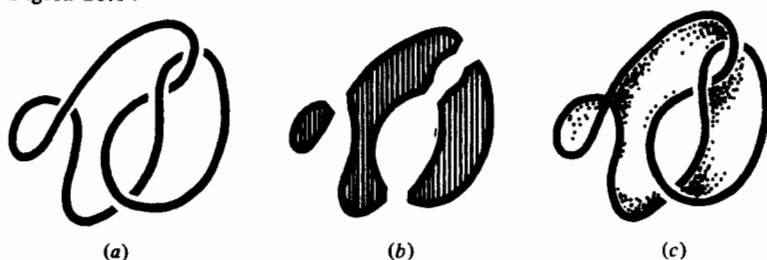
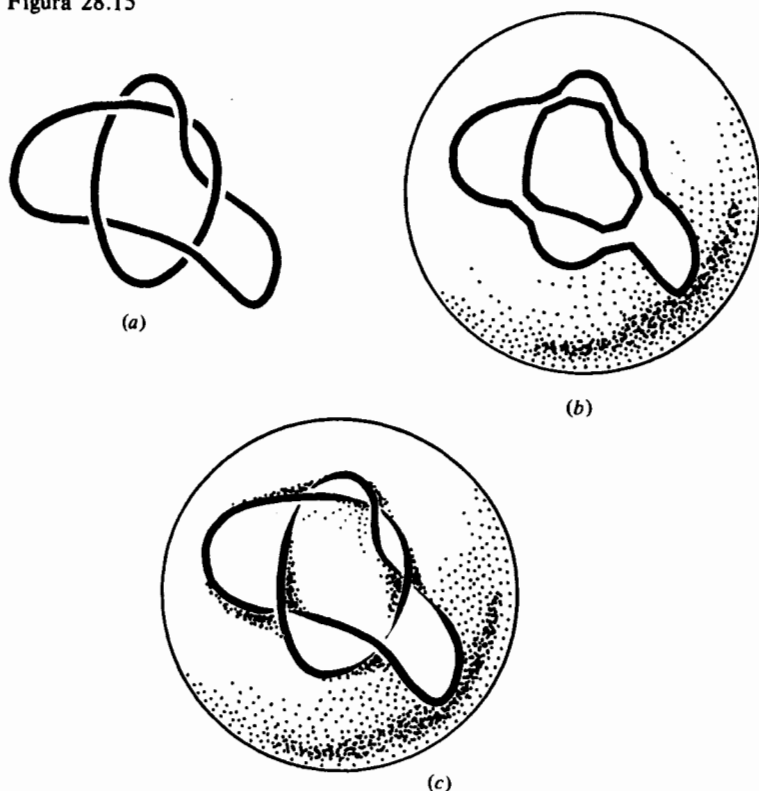


Figura 28.15



En la Figura 28.15 aparecen un par de circunferencias contenidas una en la otra. Hemos rellenado la del interior con un disco contenido en el plano. La circunferencia exterior ha sido rellenada con un disco que va por debajo del plano. Podríamos imaginarnos la Figura 28.15(b) como una esfera con un «agujero», en el interior del cual hay un disco. En la Figura 28.15(c) estas dos regiones han sido unidas con cinco bandas retorcidas.

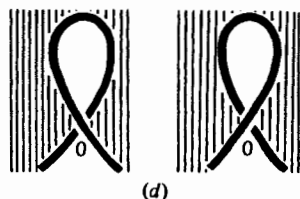
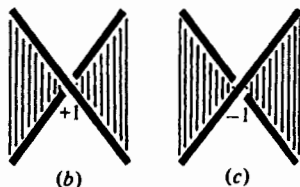
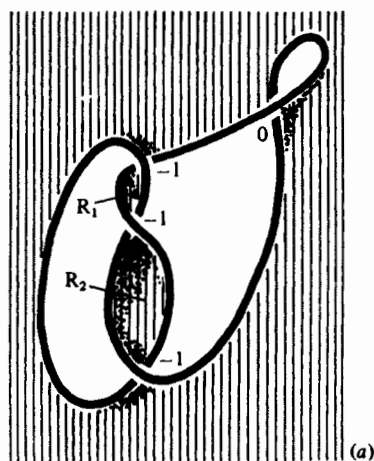
Definimos el género de una superficie con borde como el género de la superficie asociada (en el sentido del Ejercicio 11.8(b)). El género de la superficie con borde que hemos construido es igual a  $1/2(c-d+1)$ , donde  $c$  es el número de puntos de cruce y  $d$  el de circunferencias disjuntas que aparecen en nuestra construcción.

Es posible que diferentes superficies con borde recubran al mismo nudo. El género de un nudo  $K$  se define entonces como el menor entero  $g(K)$  tal que  $K$  está recubierto por una superficie con borde orientable de género  $g(K)$ .

## 28.7 Ejercicios

- Demostrar que  $g(K \# L) = g(K) + g(L)$ . (No es trivial.)
- Deducir de (a) que todo nudo puede expresarse como una suma conexas finita de nudos primos.
- Demostrar que el género de un nudo trivial es 0.
- Probar que si  $K$  no es trivial, entonces tampoco lo es  $K \# L$  para ningún nudo  $L$ .
- Probar que el género de un nudo tórico de tipo  $(m,n)$  es menor o igual que  $1/2(m-1)(n-1)$ .
- Dado un nudo «dibujado» en el plano, realizar las siguientes operaciones: En primer lugar, sombrear la región de mayor área que circunda al nudo; véase la Figura 28.16. Luego sombrear algunas de las regiones, de manera que dos regio-

Figura 28.16



nes contiguas no estén ambas sombreadas ni ambas en blanco. Designar por  $R_1, R_2, \dots, R_n$  todas las regiones sombreadas excepto la primera. En cada punto de cruce colocar un  $+1$ ,  $-1$ , ó  $0$  según que el cruce sea como en la Figura 28.16(b), (c) o (d) respectivamente; se pone  $0$  cuando las dos regiones sombreadas cerca del punto de cruce pertenecen a la misma región.

Formar una matriz simétrica  $n \times n$   $A(K) = (a_{ij})$  de la siguiente manera:  
 $a_{ii}$  = suma de los números de los puntos de cruce en la región  $R_i$ ;  
 $-a_{ij} = -a_{ji}$  = suma de los números de los puntos de cruce comunes a las regiones  $R_i$  y  $R_j$ .

Por ejemplo, el nudo de la Figura 28.16(a) determina la matriz

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

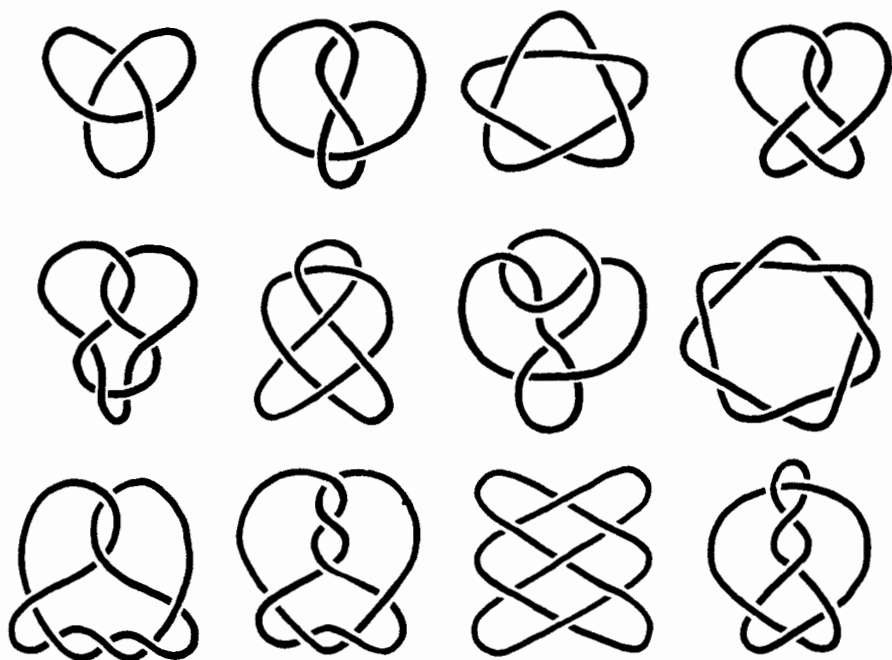
Pongamos  $d(K) = \det A(K)$ , con lo que  $d(K)$  no depende de la ordenación de las regiones sombreadas. Si  $n = 0$  definimos  $d(K) = 1$ .

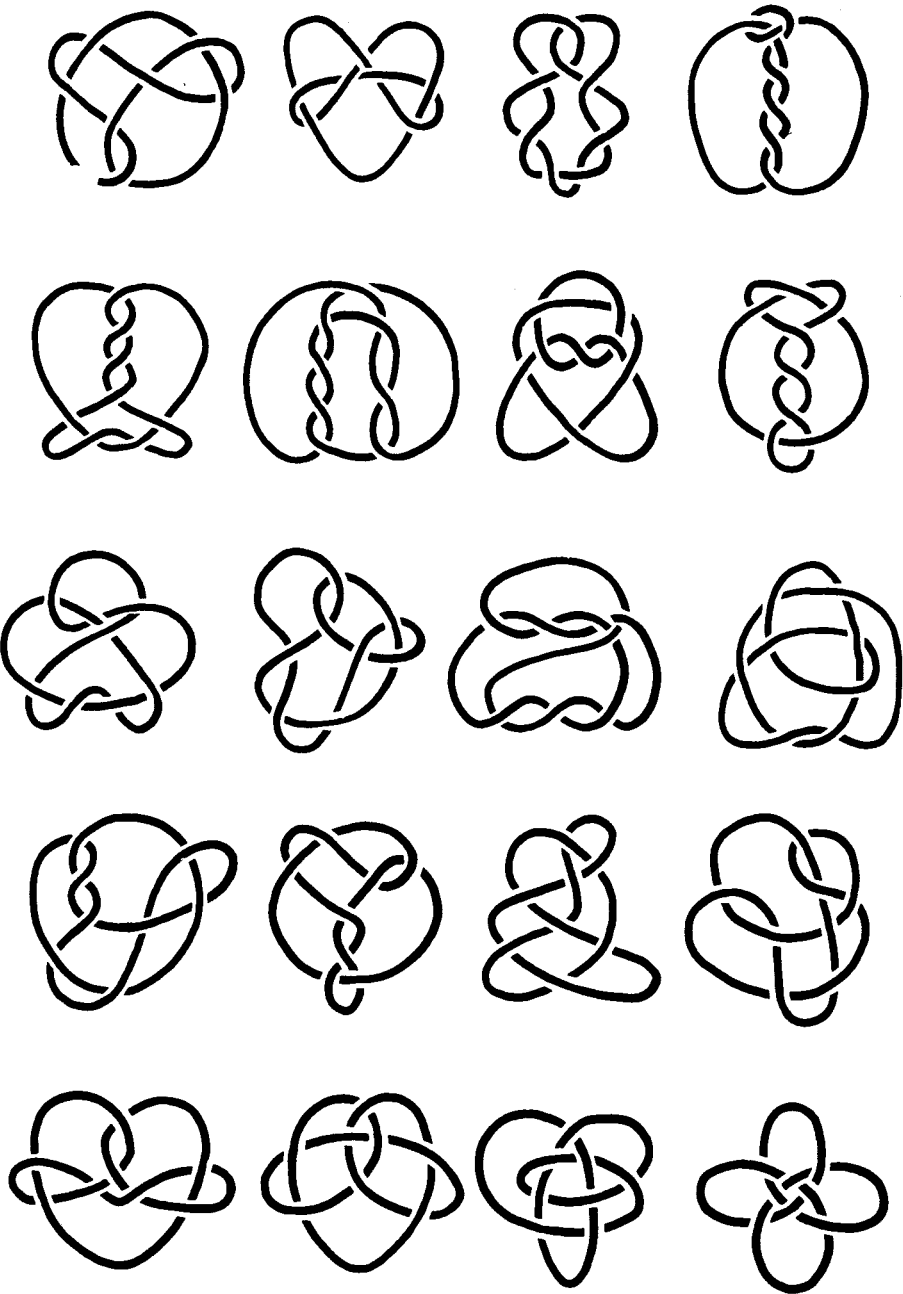
- (i) Hallar dos nudos equivalentes  $K, L$  tales que  $d(K) \neq d(L)$ . ¿Es cierto que  $|d(K)| = |d(L)|$ ?
- (ii) Si  $K$  y  $L$  son nudos semejantes, ¿se cumple  $|d(K)| = |d(L)|$ ?
- (iii) Hallar nudos no equivalentes  $K, L$  tales que  $|d(K)| = |d(L)|$ .
- (iv) Demostrar que  $d(K \# L) = d(K)d(L)$ .

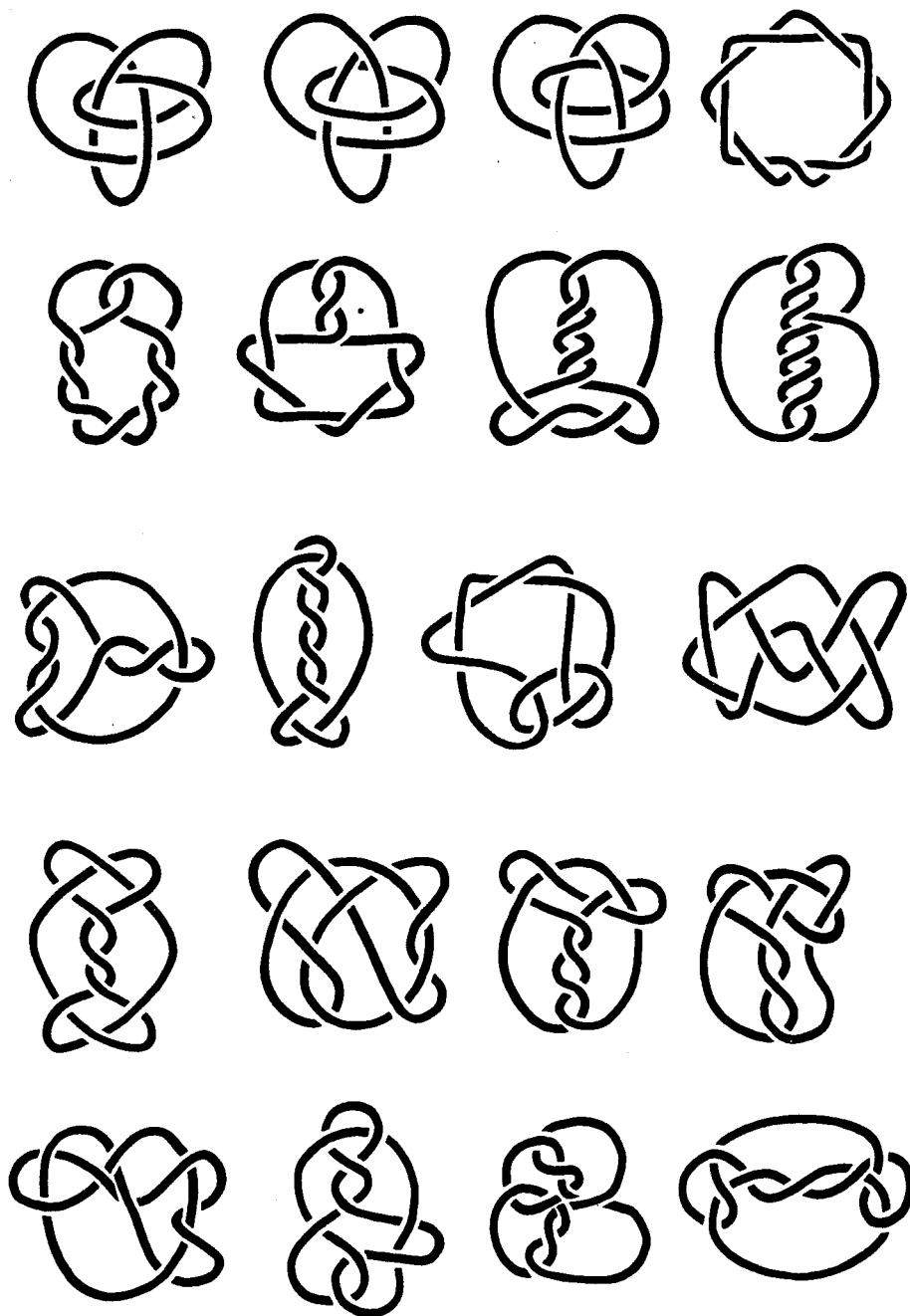
## Capítulo 28A

# Apéndice. Tabla de nudos

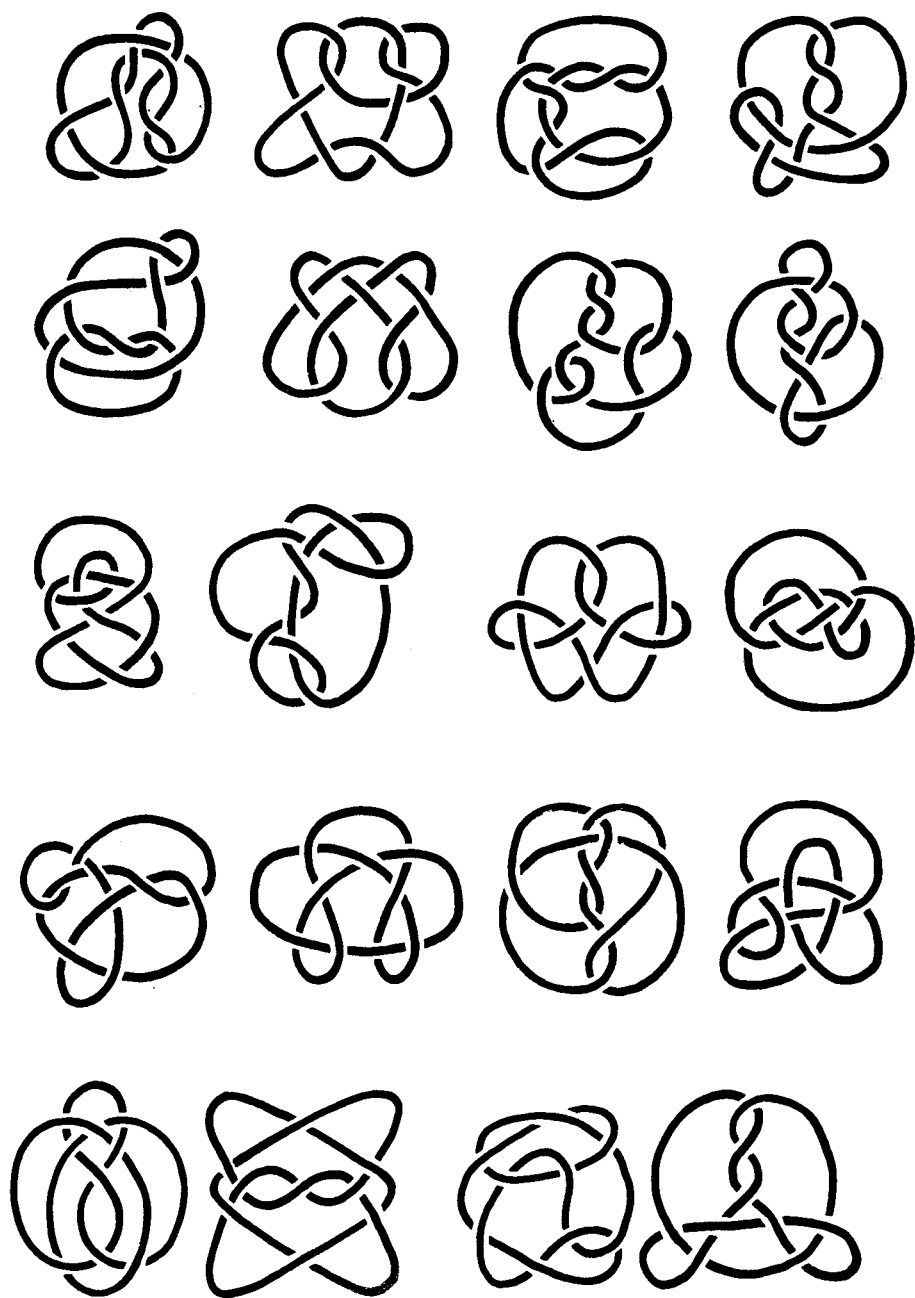
Los diagramas siguientes muestran todos los nudos primos, salvo semejanzas, con menos de diez puntos de cruce dobles.

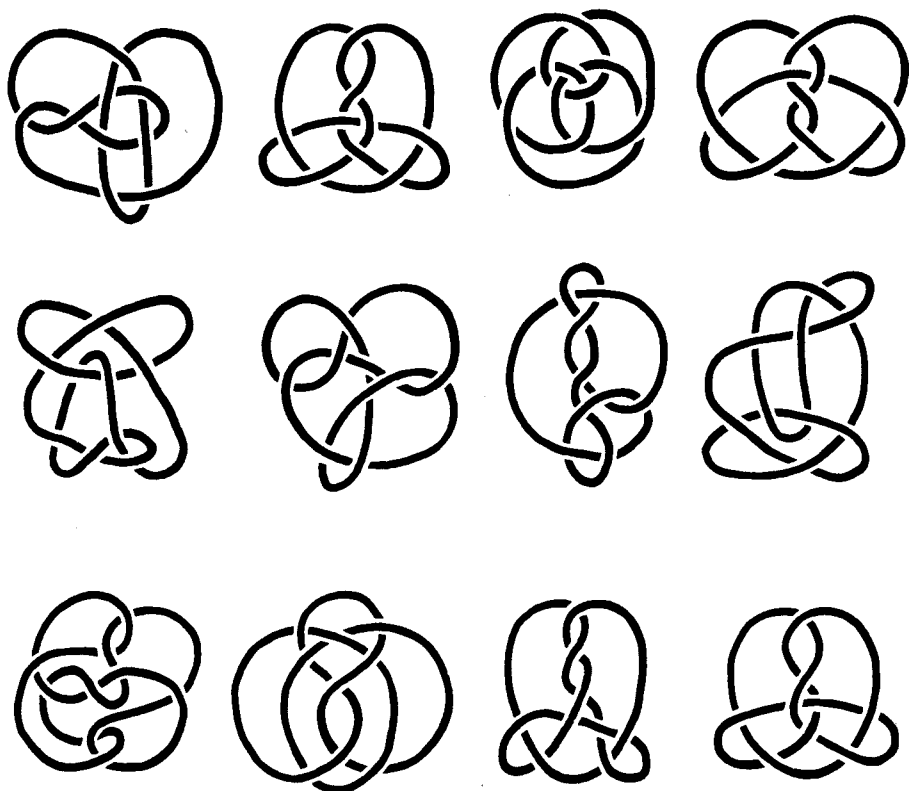












## Capítulo 29

# Homología singular: Introducción

Sin lugar a dudas, la teoría de homología es muy importante en topología. En este capítulo no podemos desarrollar completamente la teoría; ilustraremos únicamente las ideas básicas y en algún caso especial relacionaremos la homología con el grupo fundamental.

### 29.1 Definición

El *n-simplex estándar*  $\Delta_n$  es el subespacio de  $\mathbb{R}^{n+1}$  definido por

$$\Delta_n = \{ x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{i=0}^n x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n \}$$

Los puntos  $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $v_1 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $v_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$  se llaman los *vértices* de  $\Delta_n$ .

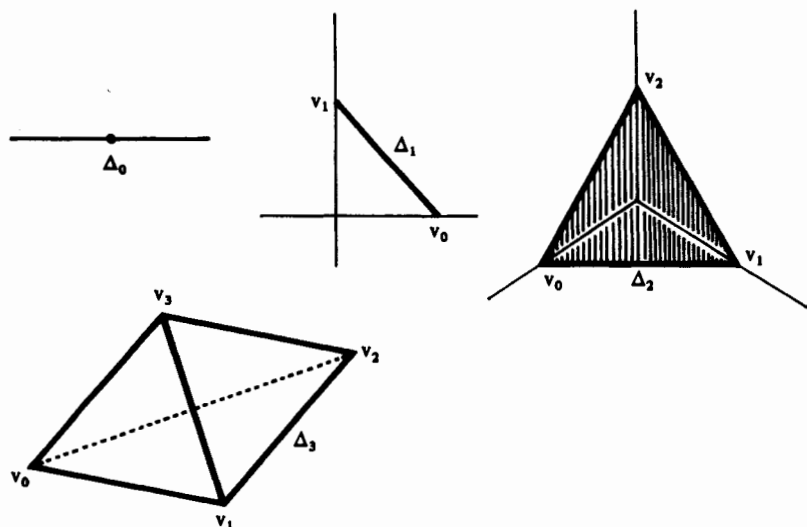
Así,  $\Delta_0$  es un único punto,  $\Delta_1$  es un intervalo,  $\Delta_2$  una región triangular y  $\Delta_3$  un tetraedro sólido; véase la Figura 29.1.

### 29.2 Definición

Sea  $X$  un espacio topológico. Un *n-simplex singular* de  $X$  es una aplicación continua  $\varphi: \Delta_n \rightarrow X$ .

Así pues, un 0-simplex singular es simplemente un punto de  $X$ , mientras que un 1-simplex singular es esencialmente un camino de  $X$ . En efecto, si  $\varphi$  es un 1-simplex singular,  $\tilde{f}(t) = \varphi(1-t, t)$  define un camino  $f: I \rightarrow X$  de  $\varphi(v_0)$  a  $\varphi(v_1)$ . Recíprocamente, dado un camino  $f: I \rightarrow X$ , obtenemos un 1-simplex singular  $\varphi: \Delta_1 \rightarrow X$  poniendo  $\varphi(x_0, x_1) = \tilde{f}(x_1)$ .

Figura 29.1



### 29.3 Definición

Una *n*-cadena singular de  $X$  es una expresión de la forma

$$\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$$

donde  $\{\varphi_j; j \in J\}$  es la familia de todos los  $n$ -símplices de  $X$  (y  $J$  un cierto conjunto de índices) y los  $n_j \in \mathbb{Z}$  son todos cero salvo un número finito

El conjunto  $S_n(X)$  de las  $n$ -cadenas singulares de  $X$  forma un grupo abeliano con la suma definida por

$$\sum n_j \varphi_j + \sum m_j \varphi_j = \sum (n_j + m_j) \varphi_j.$$

El elemento neutro es  $\sum 0 \varphi_j$  y el inverso de  $\sum n_j \varphi_j$  es  $\sum (-n_j) \varphi_j$ . La asociatividad y la conmutatividad son claras.

El grupo  $S_n(X)$  posee propiedades interesantes pero, desgraciadamente, es extremadamente grande. Para hacerlo más manejable estableceremos en él una relación de equivalencia (de manera análoga a lo que hicimos para definir el grupo fundamental). En primer lugar definimos el concepto de operador borde.

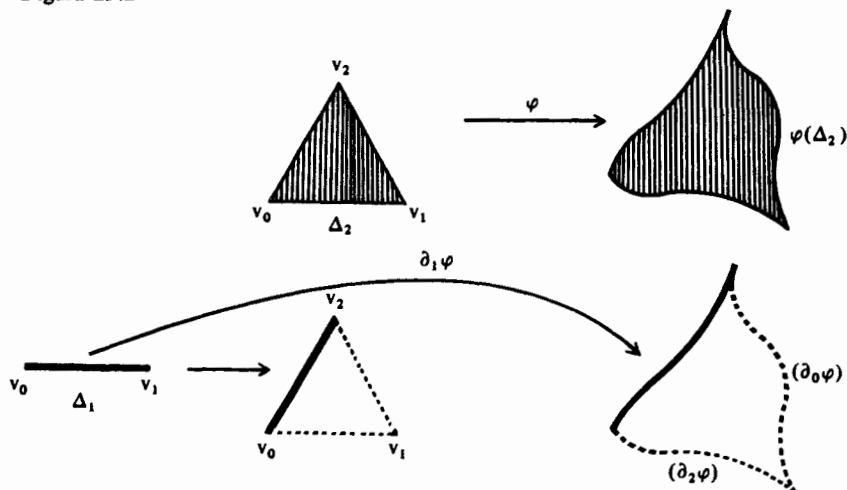
Dado un  $n$ -símplex singular  $\varphi$  definimos un  $(n-1)$ -símplex singular  $\partial_i \varphi$  por

$$\partial_i \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$$

para  $i = 0, 1, \dots, n$ . Véase la Figura 29.2. Obtenemos así claramente un homomorfismo de grupos

$$\begin{aligned}\partial_i: S_n(X) &\rightarrow S_{n-1}(X), \\ \sum n_j \varphi_j &\rightarrow \sum n_j \partial_i \varphi_j.\end{aligned}$$

Figura 29.2



## 29.4 Definición

El operador borde  $\partial: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$  está definido por

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \dots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i.$$

Mediante el operador borde podemos definir dos importantes subgrupos de  $S_n(X)$ .

## 29.5 Definición

- Un  $n$ -ciclo es una  $n$ -cadena singular  $c \in S_n(X)$  tal que  $\partial c = 0$ . El conjunto de los  $n$ -ciclos de  $X$  se denota por  $Z_n(X)$ .
- Un  $n$ -borde es una  $n$ -cadena singular  $d \in S_n(X)$  para la cual existe un  $e \in S_{n+1}(X)$  tal que  $d = \partial e$ . El conjunto de los  $n$ -bordes de  $X$  se denota por  $B_n(X)$ .

En otras palabras,

$$\begin{aligned} Z_n(X) &= \text{núcleo } \partial: S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X), \\ B_n(X) &= \text{imagen } \partial: S_{n+1}(X) \rightarrow S_n(X), \end{aligned}$$

y por tanto, claramente, tanto  $Z_n(X)$  como  $B_n(X)$  son subgrupos de  $S_n(X)$ .

Obsérvese que toda 0-cadena singular es un 0-ciclo; es decir,  $Z_0(X) = S_0(X)$ .

Resulta que todo  $n$ -borde es un  $n$ -ciclo. Se deduce inmediatamente del siguiente teorema.

## 29.6 Teorema

$$\partial\partial = 0.$$

*Demostración.* Calculamos  $\partial\partial$  sobre un  $n$ -simplex singular  $\varphi$ :

$$\partial\partial\varphi = \partial \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \varphi = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi.$$

Ahora bien, si  $i \leq j$ , entonces  $\partial_j \partial_i = \partial_i \partial_{j+1}$ ; en efecto:

$$\begin{aligned} (\partial_j \partial_i \varphi)(x_0, \dots, x_{n-2}) &= (\partial_j (\partial_i \varphi))(x_0, \dots, x_{n-2}) \\ &= (\partial_i \varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (\partial_{j+1} \varphi)(x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-2}) \\ &= (\partial_i \partial_{j+1} \varphi)(x_0, \dots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \partial\partial\varphi &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^j (-1)^{i+j} \partial_i \partial_{j+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i}^{n-1} (-1)^{i+j} \partial_i \partial_{j+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j}^{n-1} (-1)^{i+j} \partial_j \partial_{i+1} \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j-1} \partial_j \partial_i \varphi + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j+1}^n (-1)^{i+j} \partial_j \partial_i \varphi \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Resulta pues que  $B_n(X)$  es un subgrupo de  $Z_n(X)$ . Puesto que  $Z_n(X)$  es un grupo abeliano, el grupo cociente  $Z_n(X)/B_n(X)$  está bien definido.

## 29.7 Definición

El  $n$ -ésimo grupo de homología de  $X$  es el cociente  $Z_n(X)/B_n(X)$ ; lo denotaremos por  $H_n(X)$ .

En otras palabras, los elementos de  $H_n(X)$  son clases de equivalencia de ciclos por la relación de equivalencia

$$c \sim c' \Leftrightarrow c - c' \in B_n(X)$$

para  $c, c' \in Z_n(X)$ . (Se ve fácilmente que  $\sim$  es una relación de equivalencia.) En este caso decimos que los ciclos  $c$  y  $c'$  son ciclos *homólogos*.

En los próximos dos resultados determinaremos los grupos de homología de un punto y el 0-ésimo grupo de homología de un espacio arco conexo.

## 29.8 Lema

Si  $X$  es un espacio formado por un único punto,  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_n(X) = 0$  para  $n > 0$ .

*Demostración.* Para todo  $n \geq 0$  existe un único  $n$ -simplex singular  $\varphi_{(n)}: \Delta_n \rightarrow X$  y, por tanto,

$$S_n(X) = Z = \{ k \varphi_{(n)}; k \in \mathbb{Z} \}.$$

Ahora bien, para  $n > 0$ ,  $\partial_i \varphi_{(n)} = \varphi_{(n-1)}$  y

$$\begin{aligned}
\partial \varphi_{(n)} &= \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i \varphi_{(n)} = \sum_{i=0}^n (-1)^i \varphi_{(n-1)} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \varphi_{(n-1)} & \text{si } n \text{ es par y } n > 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Para  $n = 0$  tenemos  $\partial \varphi_{(0)} = 0$ .

De lo anterior resulta que

$$Z_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & n \text{ impar o } n = 0 \\ 0 & n \text{ par y } n > 0 \end{cases}$$

$$B_n(X) = \begin{cases} S_n(X) & n \text{ impar,} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

y, por tanto,

$$H_n(X) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0, \\ 0 & n > 0. \end{cases}$$

### 29.9 Lema

Si  $X$  es un espacio arco conexo no vacío,  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* Todo 0-ciclo (= 0-cadena singular) es de la forma

$$\sum_{x \in X} n_x x$$

donde  $n_x \in \mathbb{Z}$  son todos cero salvo un número finito  $\{n_x; x \in X\}$ .

Definamos  $\psi: H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  por  $\psi(\sum n_x x) = \sum n_x$ .

Comprobamos en primer lugar que esta aplicación está bien definida. Supongamos que  $\sum m_x x$  es otro 0-ciclo homólogo a  $\sum n_x x$ ; es decir,

$$\sum n_x x = \sum m_x x + \partial c$$

donde  $c$  es una 1-cadena singular, que es, por tanto, de la forma

$$c = \sum_{j \in J} k_j \varphi_j$$

con  $k_j \in \mathbb{Z}$  y  $\varphi_j$  es un 1-simplex singular de  $X$ .

Ahora bien

$$\partial c = \sum_{j \in J} k_j \partial \varphi_j = \sum_{j \in J} k_j (\varphi_j(v_1) - \varphi_j(v_0)),$$



por lo que

$$\begin{aligned}
 \psi(\Sigma n_x x) &= \psi(\Sigma m_x x + \partial c) \\
 &= \psi(\Sigma m_x x + \Sigma k_j \varphi_j(v_1) - \Sigma k_j \varphi_j(v_0)) \\
 &= \Sigma m_x + \Sigma k_j - \Sigma k_j \\
 &= \Sigma m_x \\
 &= \psi(\Sigma m_x x),
 \end{aligned}$$

que demuestra que  $\psi$  está bien definida.

Claramente  $\psi$  es un homomorfismo. Es exhaustiva ya que  $\psi(nx) = n$ , donde  $x$  es un punto arbitrario de  $X$ . Demostremos, finalmente, que  $\psi$  es inyectiva: Sea  $\Sigma n_x x$  un 0-ciclo; entonces

$$\begin{aligned}
 \Sigma n_x x &= (\Sigma n_x) x_0 + \sum_{x \in X} (n_x x - n_x x_0) \\
 &= (\Sigma n_x) x_0 + \partial(\sum_{x \in X} n_x \varphi_x)
 \end{aligned}$$

donde  $\varphi_x$  es un camino (=1-simplex singular) de  $x$  a  $x_0$ . Así pues,  $\Sigma n_x x$  y  $(\Sigma n_x) x_0$  son ciclos homólogos. Por tanto, si  $\psi(\Sigma n_x x) = 0$ ,  $\Sigma n_x = 0$ , lo que demuestra que  $\psi$  es inyectiva.

El último paso es el crucial, ya que demuestra que todo 0-ciclo  $c = \Sigma n_x x$  es homólogo al 0-ciclo  $(\Sigma n_x) x_0$ , que está completamente determinado por el entero  $\Sigma n_x$ .

Dada una aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  podemos definir

$$f_{\#}: S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$$

por

$$f_{\#}(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j) = \sum_{j \in J} n_j f_{\#} \varphi_j$$

(Quizás sería mejor denotar a  $f_{\#}: S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$  por  $f_{n\#}: S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ , pero esto complicaría innecesariamente la notación.) Está claro que  $f_{\#}$  es un homomorfismo de grupos. De hecho,  $f_{\#}$  aplica ciclos en ciclos y bordes en bordes tal como se deduce del resultado siguiente.

## 29.10 Lema

$$\partial f_{\#} = f_{\#} \partial$$

**Demostración.** Consideremos un  $(n-1)$ -simplex singular  $\varphi$ . Se tiene entonces

$$\begin{aligned}
 ((\partial_1 f_{\#})(\varphi))(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) &= \partial_1(f\varphi)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \\
 &= (f\varphi)(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1}) \\
 &= f(\varphi(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})) \\
 &= f((\partial_1 \varphi)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})) \\
 &= (f\partial_1 \varphi)(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \\
 &= ((f_{\#} \partial_1)(\varphi))(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}),
 \end{aligned}$$

que demuestra el resultado.

### 29.11 Corolario

$$f_{\#}(Z_n(X)) \subseteq Z_n(Y), f_{\#}(B_n(X)) \subseteq B_n(Y).$$

*Demostración.* Si  $c$  es un ciclo de  $X$ ,  $\partial f_{\#}(c) = f_{\#} \partial(c) = 0$ , que prueba que  $f_{\#}(c)$  es un ciclo de  $Y$ . Si  $d$  es un borde de  $X$ ,  $d = \partial(e)$  y  $f_{\#}(d) = f_{\#} \partial(e) = \partial f_{\#}(e)$  es un borde de  $Y$ .

El corolario anterior implica la existencia de un homomorfismo de grupos

$$f_{\#}: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$$

definido por

$$f_{\#} \left( \sum_{j \in J} n_j \varphi_j \right) = \sum_{j \in J} n_j f \varphi_j$$

donde  $\sum_{j \in J} n_j \varphi_j$  es un  $n$ -ciclo de  $X$ . El homomorfismo  $f_{\#}: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  se llama el *homomorfismo inducido*.

Los dos siguientes resultados son fáciles de demostrar y se dejan para el lector. Compárense con el Teorema 15.9 y el Corolario 15.10.

### 29.12 Teorema

- (i) Supongamos que  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas; entonces, para todo  $n \geq 0$ ,  $(gf)_{\#} = g_{\#} f_{\#}: H_n(X) \rightarrow H_n(Z)$ .
- (ii) Si  $1: X \rightarrow X$  es la identidad,  $1_{\#}$  es el homomorfismo identidad de  $H_n(X)$  para todo  $n \geq 0$ .

### 29.13 Corolario

Si  $f: X \rightarrow Y$  es un homeomorfismo,  $f_{\#}: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  es un isomorfismo para todo  $n \geq 0$ .

*Observación:* La homología es un funtor de la topología al álgebra (a los grupos abelianos). (Véase la Observación que precede al Ejercicio 15.11.)

De hecho, si dos espacios son homotópicamente equivalentes, sus grupos de homología son isomorfos, como se deduce del resultado siguiente, el llamado *teorema de invariancia homotópica*.

**29.14 Teorema**

Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos aplicaciones continuas. Si  $f$  y  $g$  son homótopas,  $f_* = g_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  para todo  $n \geq 0$ .

*Demostración.* Para cada  $t \in I$  sea  $\lambda_t: X \rightarrow X \times I$  la aplicación dada por  $\lambda_t(x) = (x, t)$ . Sea  $F: X \times I \rightarrow Y$  una homotopía de  $f$  a  $g$ , es decir,

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x),$$

o, en términos de  $\lambda_*$ ,

$$F \lambda_0 = f, \quad F \lambda_1 = g.$$

Supongamos que  $\lambda_{0*} = \lambda_{1*}$ ; entonces

$$f_* = (F \lambda_0)_* = F_* \lambda_{0*} = F_* \lambda_{1*} = (F \lambda_1)_* = g_*.$$

Así pues, necesitamos únicamente demostrar que  $\lambda_{0*} = \lambda_{1*}: H_n(X) \rightarrow H_n(X \times I)$ . Lo que debemos demostrar es que para los homomorfismos

$$\lambda_{0*}, \lambda_{1*}: S_n(X) \rightarrow S_n(X \times I)$$

existe un homomorfismo (llamado operador prisma),

$$P: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$$

tal que

$$\partial P + P \partial = \lambda_{1*} - \lambda_{0*}.$$

Cuando esto ocurre, se dice que los homomorfismos  $\lambda_{0*}$  y  $\lambda_{1*}$  son *cadena homótopos*.

Si  $\lambda_{0*}$  y  $\lambda_{1*}$  son cadena homótopos y  $c$  es un  $n$ -ciclo de  $X$ , entonces

$$(\lambda_{1*} - \lambda_{0*})(c) = (\partial P + P \partial)(c) = \partial(Pc)$$

lo que demuestra que  $\lambda_{1*}c$  y  $\lambda_{0*}c$  son homólogos y, por tanto,  $\lambda_{1*} = \lambda_{0*}$ . Para demostrar nuestro teorema debemos, pues, demostrar que  $\lambda_{1*}$  y  $\lambda_{0*}$  son cadena homótopos. Para ello necesitamos definir  $P$ .

Sea  $\varphi: \Delta_n \rightarrow X$  un  $n$ -simplex singular de  $X$ . Para cada  $i = 0, 1, \dots, n$ , sea  $P_i(\varphi)$  el elemento de  $S_{n+1}(X \times I)$  definido por

$$P_i(\varphi)(x_0, x_1, \dots, x_{n+1}) = \varphi(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{n+1}) \\ \times (1 - \sum_{k=0}^i x_k),$$

y sea  $P(\varphi) \in S_{n+1}(X \times I)$  la cadena singular dada por

$$P(\varphi) = \sum_{i=0}^n (-1)^i P_i(\varphi).$$

No es difícil ver que  $P: S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X \times I)$  es un homomorfismo.

Ahora bien,  $\partial P(\varphi)$  puede reescribirse como

$$\partial P(\varphi) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \partial_j P(\varphi) = \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j P_i(\varphi).$$

Escribiremos aún  $\partial_j P_i(\varphi)$  de otra forma.

Si  $i < j - 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} \partial_j P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_{j-1}, 0, \dots, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^i x_k\right) \\ &= \partial_{j-1} \varphi(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i + x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^i x_k\right) \\ &= P_i(\partial_{j-1} \varphi)(x_0, \dots, x_n) \\ &= P_i \partial_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Si  $i > j$ ,

$$\begin{aligned} \partial_j P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_i(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k\right) \\ &= \partial_j \varphi(x_0, \dots, x_{i-2}, x_{i-1} + x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad \times \left(1 - \sum_{k=0}^{i-1} x_k\right) \\ &= P_{i-1}(\partial_j \varphi)(x_0, \dots, x_n) \\ &= P_{i-1} \partial_j(\varphi)(x_0, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Finalmente, si  $i = j$ ,

$$\begin{aligned}\partial_j P_j(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_j(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_0, \dots, x_n) \times \left(1 - \sum_{k=0}^{j-1} x_k\right) \\ &= P_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, \dots, x_n) \\ &= \partial_j P_{j-1}(\varphi)(x_0, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos

$$\begin{aligned}\partial_j P_j &= \partial_j P_{j-1} \\ \partial_j P_i &= P_{i-1} \partial_j & \text{si } i > j \\ \partial_j P_i &= P_i \partial_{j-1} & \text{si } i < j-1.\end{aligned}$$

Utilizando estas relaciones y escribiendo  $\partial P$  en la forma

$$\begin{aligned}\partial P &= \sum_{j=0}^{n+1} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} \partial_j P_i \\ &= \partial_0 P_0 + \sum_{i=j=1}^n \partial_j P_j + \sum_{i=j-1=0}^n (-1) \partial_j P_{j-1} - \partial_{n+1} P_n + \\ &\quad \sum_{i>j} (-1)^{i+j} \partial_j P_i + \sum_{i<j-1} (-1)^{i+j} \partial_j P_i\end{aligned}$$

no es difícil ver que

$$\partial P = \partial_0 P_0 - \partial_{n+1} P_n - P \partial.$$

Pero

$$\begin{aligned}\partial_0 P_0(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_0(\varphi)(0, x_0, \dots, x_n) \\ &= \varphi(x_0, \dots, x_n) \times 1 \\ &= \lambda_1 \varphi(x_0, \dots, x_n) \\ &= \lambda_{1\#}(\varphi)(x_0, \dots, x_n),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\partial_{n+1} P_n(\varphi)(x_0, \dots, x_n) &= P_n(\varphi)(x_0, \dots, x_n, 0) \\ &= \varphi(x_0, \dots, x_n) \times 0 \\ &= \lambda_0 \varphi(x_0, \dots, x_n) \\ &= \lambda_{0\#}(\varphi)(x_0, \dots, x_n).\end{aligned}$$

Así pues,

$$\partial P + P\partial = \lambda_1 \# - \lambda_0 \#,$$

lo que demuestra que  $\lambda_{1\#}$  y  $\lambda_{0\#}$  son cadena homótopos. Esto completa la demostración del teorema.

### 29.15 Ejercicios

- (a) Probar que si  $f: X \rightarrow Y$  es una equivalencia homotópica,  $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$  es un isomorfismo para cada  $n \geq 0$ .
- (b) Probar que si  $i: A \rightarrow X$  es la inclusión de un retracto  $A$  de  $X$ ,  $i_*: H_n(A) \rightarrow H_n(X)$  es un monomorfismo. Probar que si  $g: X \rightarrow A$  es la retracción, entonces

$$H_n(X) = \text{imagen}(i_*) \oplus \text{núcleo}(g_*).$$

Demostrar, además, que si  $A$  es un retracto de deformación de  $X$ ,  $i_*$  es un isomorfismo.

- (c) Sea  $X$  un espacio arco conexo y  $x_0 \in X$  un punto de  $X$ . Denotemos por  $p: X \rightarrow \{x_0\}$  la aplicación constante y definamos  $\tilde{H}_n(X)$  como el núcleo de  $p_*: H_n(X) \rightarrow H_n(\{x_0\})$ . Demostrar que

$$H_n(X) \cong \tilde{H}_n(X) \oplus H_n(\{x_0\}).$$

- (d) Sea  $f: X \rightarrow Y$  una aplicación continua que conserve el punto base. Demostrar que existe un homomorfismo inducido

$$f_*: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y).$$

Supongamos, además, que  $g: X \rightarrow Y$  es otra aplicación que conserve el punto base y que  $f$  y  $g$  son homótopas relativamente al punto base de  $X$ . Demostrar que

$$f_* = g_*: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y).$$

Nuestro próximo resultado en este breve estudio de la homología es una descripción de la relación existente entre el grupo fundamental de un espacio y su primer grupo de homología.

### 29.16 Teorema

Existe un homomorfismo

$$\psi: \pi(Y, y_0) \rightarrow H_1(Y).$$

Si  $Y$  es arco conexo,  $\psi$  es exhaustiva y su núcleo es el subgrupo conmutador de  $\pi(Y, y_0)$ ; en otras palabras,  $H_1(Y)$  es el abelianizado de  $\pi(Y, y_0)$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f: I \rightarrow Y$  es un camino de  $Y$  con origen en  $y_0$ . Definamos  $\psi(f): \Delta_1 \rightarrow Y$  por

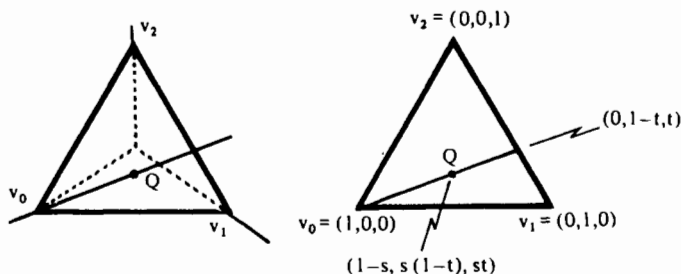
$$\psi(f)(x_0, x_1) = f(x_1) = f(1 - x_0); (x_0, x_1) \in \Delta_1.$$

$\psi(f)$  es un 1-simplex singular. Si  $f$  es un camino cerrado,  $\partial(\psi(f)) = y_0 - y_0 = 0$  y, por tanto,  $\psi(f)$  es un 1-ciclo de  $Y$ :

Comprobamos ahora que si  $f$  y  $f'$  son caminos cerrados equivalentes, entonces  $\psi(f)$  y  $\psi(f')$  son ciclos homólogos. Supongamos que  $f \sim f'$  y  $F: I \times I \rightarrow Y$  es una homotopía relativa a  $\{0, 1\}$  que realice la equivalencia  $f \sim f'$ .  $F$  nos permite definir un 2-simplex singular  $\varphi: \Delta_2 \rightarrow Y$  de la siguiente manera: Expresemos las coordenadas de un punto  $Q$  de  $\Delta_2$  mediante  $(1-s, s(1-t), st)$  con  $0 \leq s, t \leq 1$  (véase la Figura 29.3). Definimos  $\varphi(Q) = F(s, t)$ . Si  $(x_0, x_1, x_2)$  son las coordenadas de  $Q \in \Delta_2$ , se tiene

$$\varphi(x_0, x_1, x_2) = \begin{cases} F(1-x_0, x_2/(1-x_0)) & \text{si } x_0 \neq 1, \\ F(0, 0) & \text{si } x_0 = 1. \end{cases}$$

Figura 29.3



Obsérvese que  $x_2/(1-x_0) = x_2/(x_1+x_2)$  y  $x_0, x_1, x_2 \geq 0$ , por lo que

$$0 \leq x_2/(1-x_0) \leq 1.$$

Puesto que  $F(0, t) = F(0, 0)$  para todo  $t \in I$ , resulta que  $\varphi$  es continua. Podemos calcular fácilmente el borde de  $\varphi$ :

$$\partial_0 \varphi(x_0, x_1) = \varphi(0, x_0, x_1) = F(1, x_1) = y_0 = \psi(\epsilon)(x_0, x_1)$$

donde  $\varepsilon: I \rightarrow Y$  es el camino constante  $\varepsilon(t) = y_0$ ;

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi(x_0, x_1) = \varphi(x_0, 0, x_1) &= \begin{cases} F(1-x_0, x_1/(1-x_0)) & \text{si } x_0 \neq 1, \\ F(0, 0) & \text{si } x_0 = 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(1-x_0, 1) & \text{si } x_0 \neq 1, \\ F(0, 0) & \text{si } x_0 = 1 \end{cases} \\ &= \psi(f')(x_0, x_1); \\ \partial_2 \varphi(x_0, x_1) = \varphi(x_0, x_1, 0) &= F(1-x_0, 0) = \psi(f)(x_0, x_1). \end{aligned}$$

En otras palabras,

$$\partial \varphi = \psi(f) + \psi(f') - \psi(\varepsilon).$$

Sin embargo, si definimos  $c_2: \Delta_2 \rightarrow Y$  por  $c_2(x_0, x_1, x_2) = y_0$ , vemos que

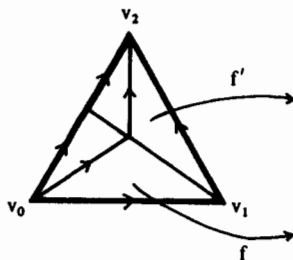
$$\partial_0 c_2 = \partial_1 c_2 = \partial_2 c_2 = c_1$$

donde  $c_1: \Delta_1 \rightarrow Y$  está dado por  $c_1(x_0, x_1) = y_0$ . Así pues,  $\psi(\varepsilon) = \partial c_2$  y, por tanto, los ciclos  $\psi(f)$  y  $\psi(f')$  son homólogos. Esto demuestra que  $\psi$  es una aplicación bien definida de  $\pi(Y, y_0)$  en  $H_1(Y)$ .

Para comprobar que  $\psi$  es un homomorfismo, sean  $f, f'$  dos caminos cerrados de  $Y$ , con punto base  $y_0$ . Debemos demostrar que  $\psi(f \ast f')$  es homólogo a  $\psi(f) + \psi(f')$ ; esto es, que  $\psi(f) + \psi(f') - \psi(f \ast f')$  es el borde de algún 2-simplex singular  $\varphi: \Delta_2 \rightarrow Y$ . La definición de  $\varphi$ , sugerida por la Figura 29.4, viene dada explícitamente por

$$\varphi(x_0, x_1, x_2) = \begin{cases} f(1 + x_2 - x_0) & \text{si } x_0 \geq x_2, \\ f'(x_2 - x_0) & \text{si } x_0 \leq x_2. \end{cases}$$

Figura 29.4





Obsérvese que  $\varphi$  es continua en virtud del Lema 12.1. Podemos ahora calcular fácilmente el borde de  $\varphi$ :

$$\begin{aligned}\partial_0 \varphi(x_0, x_1) &= \varphi(0, x_0, x_1) = f'(x_1) = \psi(f')(x_0, x_1), \\ \partial_1 \varphi(x_0, x_1) &= \varphi(x_0, 0, x_1) = \begin{cases} f(1 + x_1 - x_0) & \text{si } x_0 \geq x_1, \\ f'(x_1 - x_0) & \text{si } x_0 \leq x_1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(2x_1) & \text{si } x_1 \leq \frac{1}{2}, \\ f'(2x_1 - 1) & \text{si } x_1 \geq \frac{1}{2} \end{cases} \\ &\quad (x_1 + x_0 = 1) \\ &= \psi(f * f')(x_0, x_1), \\ \partial_2 \varphi(x_0, x_1) &= \varphi(x_0, x_1, 0) = f(1 - x_0) = \psi(f)(x_0, x_1).\end{aligned}$$

Así pues,

$$\partial \varphi = \psi(f') - \psi(f * f') + \psi(f),$$

que demuestra que  $\psi(f * f')$  es homólogo a  $\psi(f) + \psi(f')$  y, por tanto, que  $\psi$  es un homomorfismo.

Supongamos ahora que  $Y$  es arco conexo. Vamos a demostrar que  $\psi$  es exhaustiva. Sea  $c = \sum n_j \varphi_j$  un 1-ciclo de  $Y$ ; así pues  $\partial c = 0$ , con lo que

$$\sum n_j (\varphi_j(v_0) - \varphi_j(v_1)) = 0.$$

Reescribiendo  $\partial c$  como  $\sum_{y \in Y} m_y y$ , debemos tener  $m_y = 0$  para todo  $y \in Y$ . Para cada  $j \in J$

elijamos un camino  $g_0$  de  $y_0$  a  $\varphi_j(v_0) = \partial_0 \varphi_j(1)$  y un camino  $g_1$  de  $y_0$  a  $\varphi_j(v_1) = \partial_1 \varphi_j(1)$ , que dependan únicamente del punto final; así pues, si  $\varphi_j(v_0) = \varphi_k(v_0)$ , entonces  $g_0 = g_{k0}$ . Claramente debe cumplirse

$$\sum n_j (\psi(g_{j1}) - \psi(g_{j0})) = 0.$$

(Sea  $g_y$  un camino de  $y_0$  a  $y$ ; entonces podemos reescribir  $\sum_{y \in Y} n_j (\psi(g_{j1}) - \psi(g_{j0}))$  como  $\sum_{y \in Y} m_y \psi(g_y)$ .)

Si designamos por  $\sigma_j$  a la 1-cadena singular definida por

$$\sigma_j = \psi(g_{j0}) + \varphi_j - \psi(g_{j1}),$$

se tiene

$$c = \sum n_j \sigma_j.$$

Si  $f_j: I \rightarrow Y$  denota el camino dado por  $f_j(t) = \varphi_j(1-t, t)$ ,  $(g_{j0} * f_j) * g_{j1}$  es un camino cerrado de  $Y$  con punto base  $y_0$ , y

$$\psi((g_{j0} * f_j) * g_{j1}) = \sigma_j$$

y

$$\psi\left(\prod_j [(g_{j0} * f_j) * g_{j1}]^{n_j}\right) = c,$$

lo que demuestra la exhaustividad de  $\psi$ .

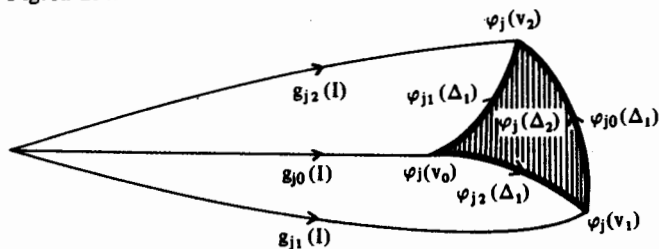
Demostramos ahora que el núcleo de  $\psi$  es el subgrupo conmutador. Supongamos que  $\psi(f)$  es homólogo a 0, con lo que

$$\psi(f) = \partial\left(\sum_{j \in J} n_j \varphi_j\right) = \sum_{j \in J} n_j (\varphi_{j0} - \varphi_{j1} + \varphi_{j2})$$

donde  $\varphi_j (j \in J)$  son 2-simplices singulares y  $\varphi_{ji} = \partial_i \varphi_j (i = 0, 1, 2)$ . Puesto que  $\psi(f)$  es un 1-simplex singular, debe cumplirse  $\psi(f) = \varphi_{k\ell}$  para ciertos  $k, \ell$  y, después de reagrupar términos en la parte derecha de la expresión anterior,  $\psi(f) = \varphi_{k\ell}$  debe aparecer con coeficiente 1 y todos los demás términos con coeficiente cero.

Denotemos por  $g_{ji} (j \in J, i = 0, 1, 2)$  un camino en  $Y$  de  $y_0$  a  $\varphi_j(v_i)$ . Igual que antes  $g_{ji}$  depende únicamente del punto final  $\varphi_j(v_i)$ . Si  $\varphi_{k\ell} = y_0$ , elegimos el camino constante. Véase la Figura 29.5.

Figura 29.5



Sean  $f_{ji} (j \in J, i = 0, 1, 2)$  caminos de  $Y$  definidos por

$$f_{ji}(t) = \varphi_{ji}(1-t, t) = \partial_i \varphi_j(1-t, t)$$

y consideremos los caminos  $h_{ji} (j \in J, i = 0, 1, 2)$  dados por

$$\begin{aligned} h_{j0} &= (g_{j1} * f_{j0}) * \bar{g}_{j2}, \\ h_{j1} &= (g_{j0} * f_{j1}) * \bar{g}_{j2}, \\ h_{j2} &= (g_{j0} * f_{j2}) * \bar{g}_{j1}. \end{aligned}$$

Finalmente, definamos caminos  $h_j$  ( $j \in J$ ) por

$$h_j = (h_{j0} * \bar{h}_{j1}) * h_{j2}.$$

No es difícil ver que  $h_j$  es equivalente a

$$(g_{j1} * ((f_{j0} * \bar{f}_{j1}) * f_{j2})) * \bar{g}_{j1}$$

que a su vez es claramente equivalente al camino constante  $\varepsilon$ . Así pues,

$$\prod_j [h_j]^{n_j} = 1.$$

Denotemos por  $A\pi(Y, y_0)$  el cociente de  $\pi(Y, y_0)$  por el subgrupo conmutador (es decir,  $A\pi(Y, y_0)$  es el abelianizado de  $\pi(Y, y_0)$ ). Si  $[\alpha]$  es un elemento de  $\pi(Y, y_0)$ , denotemos por  $[[\alpha]]$  al correspondiente elemento de  $A\pi(Y, y_0)$ . Puesto que  $\prod [h_j]^{n_j} = 1$ , tenemos

$$\prod [[h_j]]^{n_j} = 1.$$

Sabemos que  $\psi(f) = \varphi_{k\ell}$  para ciertos  $k, \ell$ . Resulta pues que  $f = f_{k\ell}$  y también (por nuestra elección de  $g_{ij}$ ) que  $f = h_{k\ell}$ . Puesto que  $A\pi(Y, y_0)$  es abeliano podemos reagrupar los términos en la expresión  $\prod [[h_j]]^{n_j}$  para deducir que

$$\prod [[h_j]]^{n_j} = [[f]].$$

Así pues,  $[[f]] = 1$ ; es decir,  $[f]$  pertenece al subgrupo conmutador. Vemos, pues, que el núcleo de  $\psi$  está contenido en el conmutador. Por otra parte, el hecho de que  $H_1(Y)$  sea abeliano implica que el núcleo de  $\psi$  contiene al conmutador. Esto completa la demostración del teorema.

## 29.17 Ejercicios

- Demostrar que  $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  y  $H_1((S^1)^n) \cong \mathbb{Z}^n$ .
- Dar un ejemplo que demuestre que si  $Y$  no es arco conexo,  $A\pi(Y, y_0)$  no es isomorfo a  $H_1(Y)$ .
- Calcular el primer grupo de homología de:
  - una superficie orientable de género  $g$ ,
  - una superficie no orientable de género  $g$ .
 Deducir de ello que dos superficies  $S_1, S_2$  son homeomorfas si y sólo si  $H_1(S_1) \cong H_1(S_2)$ .
- Supongamos que  $Y$  es arco conexo. Demostrar que  $\pi(Y, y_0)$  y  $H_1(Y)$  son isomorfos si y sólo si  $\pi(Y, y_0)$  es abeliano.
- Demostrar que el primer grupo de homología de una figura 8 es isomorfo a  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .
- Sea  $S$  una superficie orientable y  $S'$  el espacio obtenido extrayendo un disco abierto a  $S$ . Probar que  $H_1(S) \cong H_1(S')$ .

Vimos en los capítulos anteriores que el teorema de Seifert-Van Kampen era muy útil para calcular grupos fundamentales. En teoría de homología existe un teorema análogo que vamos a describir.

Sea  $X = U_1 \cup U_2$  con  $U_1$  y  $U_2$  subconjuntos abiertos de  $X$ , y denotemos por  $\varphi_i: U_i \cap U_2 \rightarrow U_1$ ,  $\psi_i: U_i \rightarrow X$  las respectivas inclusiones,  $i = 1, 2$ . Definamos los homomorfismos

$$\begin{aligned} i &: H_k(U_1 \cap U_2) \rightarrow H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \\ j &: H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \rightarrow H_k(X) \end{aligned}$$

por

$$\begin{aligned} i(c) &= (\varphi_{1*}(c), \varphi_{2*}(c)), \\ j(c_1, c_2) &= \psi_{1*}(c_1) - \psi_{2*}(c_2). \end{aligned}$$

### 29.18 Teorema

Sea  $X = U_1 \cup U_2$  con  $U_1$  y  $U_2$  subconjuntos abiertos de  $X$ . Existe, para cada  $k$ , un homomorfismo

$$\Delta: H_k(X) \rightarrow H_{k-1}(U_1 \cap U_2)$$

tal que en la siguiente sucesión de grupos y homomorfismos

$$\dots \rightarrow H_{k+1}(X) \xrightarrow{\Delta} H_k(U_1 \cap U_2) \xrightarrow{j} H_k(U_1) \oplus H_k(U_2) \xrightarrow{j} H_k(X) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \dots$$

el núcleo de cada homomorfismo es igual a la imagen del anterior.

Además, si  $Y$  es otro espacio con  $Y = V_1 \cup V_2$  ( $V_1, V_2$  abiertos de  $Y$ ) y si  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua tal que  $f(U_i) \subseteq V_i$ , entonces

$$(f|_{U_1 \cap U_2})_* \Delta = \Delta f_*,$$

es decir, los homomorfismos  $\Delta$  conmutan con los homomorfismos inducidos.

Los homomorfismos  $\Delta$  se llaman *homomorfismos de conexión* y la sucesión del Teorema 29.18, la *sucesión de Mayer-Vietoris*. En general, una sucesión de grupos y homomorfismos en la cual el núcleo de cada homomorfismo es igual a la imagen del anterior, se dice que es una *sucesión exacta*. Así pues, la sucesión de Mayer-Vietoris es una sucesión exacta.

No demostraremos el Teorema 29.18 pero sin embargo mostraremos su utilidad (y, en consecuencia, la de la teoría de homología) aplicándolo a la obtención de un resultado concreto a partir del cual deduciremos importantes corolarios.

**29.19 Teorema**

Sea  $n$  un entero positivo. Se tiene

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

Más aún, si  $T_n: S^n \rightarrow S^n$  es la simetría dada por  $T_n(x_0, x_1, \dots, x_n) = (-x_0, x_1, \dots, x_n)$ ,

$$T_{n*}: H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$$

es la multiplicación por  $-1$ .

**Demostración.** Vamos a demostrar el resultado por inducción utilizando la sucesión de Mayer-Vietoris. Sean  $U_1 = \{x \in S^n; x_n > -1/2\}$  y  $U_2 = \{x \in S^n; x_n < 1/2\}$ . Obsérvese que  $U_1$  y  $U_2$  son ambos contráctiles y que  $U_1 \cap U_2$  es homotópicamente equivalente a  $S^{n-1}$ , por lo que

$$H_k(U_i) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, \\ 0 & \text{en los otros casos} \end{cases}$$

$$H_k(U_1 \cap U_2) = H_k(S^{n-1}).$$

Obsérvese también que si consideramos  $S^{n-1}$  como el conjunto  $\{x \in S^n; x_n = 0\}$ , entonces  $T_n|_{S^{n-1}} = T_{n-1}$ .

Supongamos que  $n = 1$ ; en tal caso, para  $k = 1$  la sucesión de Mayer-Vietoris se escribe

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^0) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \dots$$

es decir,

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j} H_1(S^1) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \dots$$

donde  $i(x, y) = (x+y, x+y)$ . Puesto que  $\ker(\Delta) = \text{im}(j) = 0$ ,  $\Delta$  es inyectiva; además,  $\text{im}(\Delta) = \ker(i) = \{(x, -x) \in \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\}$  que es isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , por lo que  $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$ . Está claro que  $T_{0*}(x, y) = (y, x)$  y, puesto que  $T_{0*}\Delta = \Delta T_{1*}$ , resulta que  $T_{1*}$  es la multiplicación por  $-1$ . Para  $k > 1$  la sucesión es

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{i} H_k(S^1) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^0) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

y es fácil ver que  $\Delta$  es un isomorfismo (es inyectiva ya que  $\ker(\Delta) = \text{im}(i)$  y exhaustiva puesto que  $\text{im}(\Delta) = \ker(j)$ ). Hemos pues demostrado el teorema para  $n=1$ .

Supongamos ahora que  $m > 1$  y que el resultado en cuestión es cierto para  $n=m-1$ ; vamos a demostrar que también es cierto para  $n=m$ .

Si  $k=1$ , tenemos

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j} H_1(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_0(S^{m-1}) \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

que se convierte en

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j} H_1(S^m) \xrightarrow{\Delta} \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

donde  $i(a) = (a, a)$ , por lo que  $\ker(i) = 0$  y, por tanto,  $\text{im}(\Delta) = 0$  y  $H_1(S^m) = 0$ .

Si  $k > 1$ , tenemos

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j} H_k(S^m) \xrightarrow{\Delta} H_{k-1}(S^{m-1}) \xrightarrow{i} 0$$

de donde se deduce que  $H_k(S^m) \cong H_{k-1}(S^{m-1})$ . Además, si  $k=m$ , usando el hecho de que  $T_{m-1}\Delta = \Delta T_{m*}$ , deducimos que  $T_{m*}$  es la multiplicación por  $-1$ . El teorema resulta entonces por inducción.

## 29.20 Corolario

- (a) Si  $n \neq m$ , entonces  $S^n$  y  $S^m$  no son del mismo tipo de homotopía
- (b) Toda aplicación continua  $f: D^n \rightarrow D^n$  tiene un punto fijo.
- (c) La simetría  $T_n: S^n \rightarrow S^n$  no es homótopa a la identidad.
- (d) La aplicación antipodal  $A: S^n \rightarrow S^n$ , dada por  $A(x) = -x$ , no es homótopa a la identidad.
- (e) Si  $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  es homótopa a la identidad,  $f$  tiene un punto fijo.
- (f) No existe ninguna aplicación continua  $f: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  tal que los vectores  $x$  y  $f(x)$  sean ortogonales en  $\mathbb{R}^{2n+1}$  para todo  $x$ .

La parte (a) se deduce del teorema de invariancia homotópica (Teorema 29.14); véase el Ejercicio 29.15(a). La parte (b) es el *teorema del punto fijo de Brouwer* y se demuestra de la misma manera que el Corolario 16.10. La parte (c) resulta también del teorema de invariancia homotópica. La parte (d) resulta del hecho de que  $A = R_0 R_1 \dots R_{2n}$  donde  $R_i$  es la simetría respecto al  $i$ -ésimo eje de coordenadas, por lo que  $A_*: H_{2n}(S^{2n}) \rightarrow H_{2n}(S^{2n})$  es la multiplicación por  $(-1)^{2n+1} = -1$ . Para demostrar (e), supongamos que  $f$  no tuviera ningún punto fijo; entonces  $(1-t)f(x) - tx \neq 0$  para todo  $x$  y  $t$ , por tanto, podríamos definir una homotopía  $F: S^{2n} \times I \rightarrow S^{2n}$  entre  $f$  y  $A$  mediante

$$F(x, t) = ((1-t)f(x) - tx) / \|(1-t)f(x) - tx\|.$$

Finalmente, el apartado (f) resulta del (e) ya que si  $x$  y  $f(x)$  son ortogonales,  $f(x) \neq x$ .

Los apartados (e) y (f) admiten para  $n=1$  una interpretación física conocida comúnmente con el nombre de *teorema de la bola peluda*; establece que si se tiene una bola peluda (es decir,  $D^3$  con un cabello en cada punto de la superficie  $S^2$ ), no se puede peinar con continuidad. Para demostrarlo, basta observar que si tuviéramos una bola peluda peinada con continuidad, el vector dirección  $f(x)$  del pelo del punto  $x$  sería ortogonal al vector  $x$ . Obsérvese, sin embargo, que sí que es posible peinar con continuidad un toro peludo; este hecho tiene implicaciones importantes en fusión nuclear.

### 29.21 Ejercicios

- Utilizando la sucesión de Mayer-Vietoris calcular la homología de  $\mathbb{R}P^2$ .
- Utilizando la sucesión de Mayer-Vietoris calcular los grupos de homología del complementario de un nudo. Deducir de este ejercicio el Corolario 28.4.
- Probar que no existe ninguna retracción de  $D^n$  en  $S^{n-1}$ .
- Sea  $M$  una  $m$ -variedad y  $N$  una  $n$ -variedad. Demostrar que si  $m \neq n$ ,  $M$  y  $N$  no son homeomorfas. Este resultado se conoce con el nombre de *invariancia topológica de la dimensión*. (Indicación: Utilizar el homeomorfismo  $M/(M-D) \cong S^m$  descrito en el Ejercicio 11.2(f).)

Existen muchas otras maneras de definir grupos de homología. Para una amplia clase de espacios (por ejemplo, los CW complejos), todas estas teorías coinciden. Este hecho lleva a una presentación axiomática de la teoría de la homología que fue iniciada en los años 1950 por S. Eilenberg y N. Steenrod. Vamos a presentar un conjunto de axiomas para las llamadas «teorías de homología reducidas». Estas teorías están definidas en la categoría de los espacios topológicos punteados (al igual que el grupo fundamental). Los «grupos de homología singular reducidos» de un espacio  $X$  con punto base  $x_0 \in X$  se definen por

$$\tilde{H}_n(X) = \text{núcleo}(p_*: H_n(X) \rightarrow H_n(\{x_0\}))$$

donde  $p: X \rightarrow \{x_0\}$  es la aplicación constante (véase el Ejercicio 29.15(c)). Dada una aplicación  $f: X \rightarrow Y$  que conserve el punto base, existe un homomorfismo inducido  $f_*: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$  definido de forma obvia.

Antes de dar los axiomas de una teoría de homología reducida, introducimos brevemente un poco de notación.

### 29.22 Definición

Sea  $X$  un espacio topológico con punto base  $x_0$ . Definimos  $\Sigma X$  como el espacio cociente

$$(X \times I) / (X \times \partial I \cup \{x_0\} \times I)$$

punteado de forma natural. El espacio  $\Sigma X$  se llama la *suspensión (reducida)* de  $X$ .

Obsérvese que toda aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  que conserve el punto base induce de manera obvia una aplicación continua  $\Sigma f: \Sigma X \rightarrow \Sigma Y$  que conserva el punto base.

### 29.23 Definiciones

El cono reducido  $CX$  de  $X$  es el espacio cociente

$$(X \times I)/(X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Si  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua que conserva el punto base, el cono de la aplicación  $C_f$  es el espacio cociente

$$(CX \cup Y)/\sim$$

donde  $\sim$  es la relación de equivalencia dada por

$$(x, 0) \sim f(x)$$

para  $(x, 0) \in CX$  y  $f(x) \in Y$ . El punto base de  $C_f$  es el punto de  $C_f$  que corresponde al punto base  $y_0$  de  $Y$ .

Obsérvese que se tiene una inclusión natural

$$i: Y \rightarrow C_f.$$

### 29.24 Ejercicios

- Probar que si  $p: X \rightarrow \{x_0\}$  es la aplicación constante,  $C_p$  es igual a  $\Sigma X$ .
- Probar que si  $X$  es un espacio de Hausdorff, también lo es  $\Sigma X$ .
- Probar que  $\Sigma S^1 \cong S^2$ .

Estamos ahora en condiciones de enunciar los axiomas de Eilenberg-Steenrod para una teoría de homología reducida. De ahora en adelante todos los espacios serán punteados y todas las aplicaciones serán aplicaciones continuas que conserven el punto base.

Una *teoría de homología reducida* definida en una familia de espacios topológicos con punto base (posiblemente todos) consiste en lo siguiente:

- Una familia  $\{\tilde{H}_n; n \in \mathbb{Z}\}$  tal que cada  $\tilde{H}_n$  asigna a cada espacio  $X$  de la colección un grupo abeliano  $\tilde{H}_n(X)$ . Este grupo se llama el *n-ésimo grupo de homología reducida* de  $X$ .
- Para cada aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  que conserve el punto base, existe un *homomorfismo inducido*  $f_*: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(Y)$  para todo  $n$ .
- Para todo espacio  $X$  y todo entero  $n$  existe un homomorfismo  $\sigma_n(X): \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$ , llamado el *homomorfismo de suspensión*.

Los objetos anteriores están sujetos a los siguientes siete axiomas:

- (Axioma de identidad) Si  $1: X \rightarrow X$  es la identidad, el homomorfismo inducido

$$1_*: \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_n(X)$$

es un isomorfismo para cada entero  $n$ .

- (Axioma de composición) Si  $f: X \rightarrow Y$  y  $g: Y \rightarrow Z$  son aplicaciones continuas (que conserven los puntos base), entonces  $(gf)_* = g_* f_*$ .



(3) (Axioma de naturalidad de la suspensión) Si  $f: X \rightarrow Y$  es una aplicación continua, el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{H}_n(X) & \xrightarrow{\sigma_n(X)} & \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X) \\
 \downarrow f_* & & \downarrow (\Sigma f)_* \\
 \tilde{H}_n(Y) & \xrightarrow{\sigma_n(Y)} & \tilde{H}_{n+1}(\Sigma Y)
 \end{array}$$

(4) (Axioma de homotopía) Si  $f, g: X \rightarrow Y$  son dos aplicaciones homótopas relativamente al punto base de  $X$ , los homomorfismos inducidos  $f_*$  y  $g_*$  coinciden.

(5) (Axioma de suspensión) El homomorfismo de suspensión  $\sigma_n(X): \tilde{H}_n(X) \rightarrow \tilde{H}_{n+1}(\Sigma X)$  es un isomorfismo para todo espacio  $X$  y todo entero  $n$ .

(6) (Axioma de exactitud) Para toda aplicación  $f: X \rightarrow Y$ , la sucesión

$$\tilde{H}_n(X) \xrightarrow{f_*} \tilde{H}_n(Y) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(C_f)$$

cumple  $\text{im}(f_*) = \ker(i_*)$  para todo  $n$ , donde  $i: Y \rightarrow C_f$  es la inclusión natural.

(7) (Axioma de la dimensión)

$$\tilde{H}_n(S^0) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

## 29.25 Ejercicios

Demostrar que la teoría de homología singular reducida es una teoría de homología reducida en el sentido descrito. (Indicación: Para (5) y (6) utilizar la sucesión de Mayer-Vietoris.)

Si en lugar del axioma de la dimensión anterior hubiéramos exigido que

$$\tilde{H}_n(S^0) = G_n$$

para una cierta colección de grupos abelianos  $G_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , hubiéramos obtenido lo que se llama una *teoría de homología reducida generalizada con coeficientes*  $\{G_n; n \in \mathbb{Z}\}$ . Estas teorías juegan un importante papel en la topología algebraica moderna.

## Capítulo 30

# Libros recomendados para avanzar en Topología algebraica

Este capítulo contiene una selección de libros recomendables para el que desee seguir estudiando Topología algebraica. No se han incluido los textos que requieren muchos más conocimientos de topología que los contenidos en este libro. La elección de los libros sugeridos se basa en las preferencias del autor. El libro [Spanier] es mencionado en varias ocasiones; es un excelente libro sobre topología algebraica en general, a pesar de que para algunos resulta duro de leer.

*Variedades.* Para la teoría general de variedades, véase [Dold]. Para variedades de dimensión 2 y 3, [Moise]. Las «variedades diferenciables» constituyen una importante clase de variedades; para estudiarlas, recomendamos [Hirsch].

*Teoría de homotopía.* Recomendamos tres libros: [Gray], [Spanier] y [Whitehead].

*Espacios recubridores.* El concepto de espacio recubridor se generaliza al de «espacio fibrado», que puede estudiarse en [Husemoller] y en [Spanier].

*Acciones de grupos.* Sobre espacios topológicos, [Bredon]. Sobre variedades, [Conner & Floyd] y [Conner].

*Teoría de nudos.* [Rolfsen].

*Teoría de homología.* Para la teoría de homología singular en general, véanse [Dold], [Greenberg], [Spanier] y [Vick]. Otras dos teorías de homología son la homología simplicial y la homología de Čech. [Spanier] las trata ambas. En [Maunder] está muy bien la homología simplicial, mientras que [Dold] y [Massey] pueden recomendarse para la homología de Čech. Para teorías de homología generalizadas, véanse [Gray] y [Switzer]. El libro [Gray] considera las teorías de homología generalizadas desde un punto de vista puramente homotópico. Finalmente, el libro original sobre teorías de homología desde un punto de vista axiomático es [Eilenberg & Steenrod].

### Libros recomendados

Bredon, G.E. *Introduction to compact transformation groups*. Academic Press, New York - London, 1972.

- Conner, P.E. *Differentiable periodic maps* (second edition). Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1979.
- Conner, P.E. & Floyd, E.E. *Differentiable periodic maps*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1964.
- Dold, A. *Lectures on algebraic topology*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1972.
- Eilenberg, S. & Steenrod, N. *Foundations of algebraic topology*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1952.
- Gray, B. *Homotopy theory*. Academic Press, New York - San Francisco - London, 1975.
- Greenberg, M.J. *Lectures on algebraic topology*. Benjamin, New York, 1967.
- Hirsch, M.W. *Differential topology*. Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1976.
- Husemoller, D. *Fibre bundles* (second edition). Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1975.
- Massey, W.S. *Homology and cohomology theory*. Marcel Dekker, New York - Basel, 1978.
- Maunder, C.R.F. *Introduction to algebraic topology*. Cambridge University Press, 1980.
- Moise, E.E. *Geometric topology in dimensions 2 and 3*. Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1977.
- Rolfsen, D. *Knots and links*. Publish or perish, Berkeley, Ca., 1976.
- Spanier, E.H. *Algebraic topology*. McGraw Hill, New York, 1966.
- Switzer, R.M. *Algebraic topology - homotopy and homology*. Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1975.
- Vick, J.W. *Homology theory*. Academic Press, New York - London, 1973.
- Whitehead, G.W. *Homotopy theory*. M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1966.

# Índice alfabético

- Abelianización grupo, 222.
- Abelianizado de  $G$ , 222.
- Abeliano finitamente generado, teorema descomposición, 4.
- , grupo, 4.
- Acción de un grupo, 37.
- discontinua (propia), 153.
- $G$  libre, 154.
- —, propiamente discontinua, 153.
- grupo fundamental, 162.
- libre, grupo, 78.
- Adherencia, 16.
- Alfabeto, 190.
- Álgebra, teorema fundamental, 150.
- Antipodal, aplicación, 276.
- Aplicación, 1.
- abierta, 20.
- antipodal, 276.
- biyectiva, 2.
- cerrada, 20.
- compuesta, 2.
- constante, 19.
- continua, 7, 9.
- — entre espacio topológico, 19, 20.
- — homótopa, 118.
- —, homotopía, 117.
- — por la derecha, 20.
- equivariante, 39.
- evaluación, 52.
- exhaustiva, 2.
- $G$ -equivariante, 39.
- , grado, 148.
- , gráfico, 42.
- homótopa, 117, 118.
- — nula, 147.
- inyectiva, 2.
- monótona, decreciente, 71.
- Aplicación no decreciente, 20.
- — homótopa, 117.
- nulhomótopa, 147.
- recubridora, 153.
- —, espacio base, 153.
- , restricción, 2.
- uniformemente continua, 110.
- Arco, 84, 99.
- abierto, 24.
- conexo, camino, 99.
- —, espacio, 99, 100.
- Arista exterior, 214.
- As de guía, 226.
- Asa, 88.
- , coser, 88.
- Asociatividad, 3.
- Axioma composición, 278.
- dimensión, 279.
- homotopía, 279.
- identidad, 278.
- naturalidad suspensión, 279.
- suspensión, 279.
- Banda infinita, 38.
- Möbius, 30, 32.
- —, coser, 88.
- Biyectiva, aplicación, 2.
- Bocadillo de jamón, teorema, 169.
- Bola, 15.
- abierta, 15.
- peluda, teorema, 277.
- Borde, 98, 259.
- Borsuk, K. 169.
- Ulam, teorema, 169.
- Botella Klein, 34, 88, 94.
- —, inmersión, 159.
- Botón chino, 226.

Brouwer, teorema punto fijo para  $D^2$ , 151.  
 —, — — — —  $D^n$  y  $S^{2n}$ , 276.

Cadena homótopos, 265.

— simple subconjuntos, 05.

— singular, 258.

Camino, 99.

— arco conexo, 99.

— constante, 99.

—, elevación, teorema, 147.

— equivalente, 125.

—, final, 99.

—, grado, 148.

—, homotopía, teorema elevación, 157.

—, multiplicación, 125.

—, origen, 99.

—, producto, 125.

Centro de un grupo, 135.

Ciclo, 259.

—, homólogo, 261.

Cilindro, 30, 32, 88.

—, coser, 88.

Cinta Möbius, 30, 32.

Circunferencia, 24.

—, grupo fundamental, 145.

—, polaca, 178.

Clase equivalencia, 3.

— lateral derecha, 3.

— — izquierda, 3.

Clasificación superficie, teorema, 86, 87.

Cociente, propiedad universal, 30.

Compactificación por un punto, 53.

Complementos finitos, topología, 14.

Componente conexa, 107.

Conjunto, 1.

— abierto, 9, 10, 13.

— —, espacio métrico, 9.

— cociente, 39.

—, estructura, 7, 11.

—, generadores, 191.

— índices, 2.

— relaciones, 191.

— vacío, 1.

Conmutador, 4.

Cono, aplicación  $C_r$ , 278.

— reducido, 278.

Consecuencia relaciones, 191.

Contráctil, espacio, 121.

Coser una asa, 88.

Coser un cilindro, 88.

— una banda Möbius, 88.

Cuadrado, 24.

Cubo, 51.

—  $I^n$ , 51.

Cuerda curva Jordan, 115.

Curva cerrada simple, 95, 107, 108, 159.

— de  $X$ , 99.

— Jordan, 108.

— —, cuerda,

— —, teorema, 107, 108.

— que llena espacio, 106.

Desigualdad triangular, 7.

Diagonal, 67.

Dimensión, invarianza topológica, 277.

Disco, 75.

—  $D^2$ , 35.

—  $D^n$ , 44.

Distancia euclídea, 7.

Doble toro, 80.

Dos piezas, 26.

Eilenberg-Steenrod, axiomas, 278.

Elemento identidad, 3.

— inverso, 3.

Elevación, 145.

— camino, teorema, 147.

—, teorema, 175.

Entorno, 17.

Epimorfismo, 137.

Equivalencia, clase, 3.

— homótopa, 125.

— homotópica, 121.

— —, grupo fundamental, 139.

—, relación, 2.

Equivariante, aplicación, 40.

Esfera estándar, 24.

Espacio arco-conexo, 99, 100.

— — — simplemente conexo, 140.

— base aplicación recubridora, 153.

— cociente, 39.

— compacto, 47.

— —, compactificación por un punto, 53.

— conexo, 63.

— contráctil, 121.

— —, grupo fundamental, 139.

— equivalente homótopo, 125.

- Espacio euclídeo, 75.  
 —, frontera, 17.  
 —  $H$ , 142.  
 — Hausdorff, 55.  
 — —, condición separación, 55.  
 — homeomórfico, 21.  
 — —, grupo fundamental, 136.  
 —, identificación, 31.  
 — lenticular, 83, 155.  
 — —, grupo fundamental, 159.  
 — localmente arco-conexo, 105, 175.  
 — — compacto, 52.  
 — métrico, 7.  
 — órbita, grupo fundamental, 165.  
 — —,  $X/G$ , 39.  
 — producto, 41.  
 — —, grupo fundamental, 140.  
 — proyectivo, 29.  
 — — real, 29.  
 — recubridor, 153.  
 — —, grupo fundamental, 161.  
 — regular, 56.  
 — semilocalmente simplemente conexo, 184.  
 —  $T_1$ , 56.  
 — topológico, aplicación continua, 19, 20.  
 — — compacto, 48.  
 — —, conjunto abierto, 13.  
 — —, definición, 13.  
 — — Hausdorff, 55.  
 — — metrizable, 13.  
 — —, producto, 41.  
 — — simplemente conexo, 140.  
 — —, subconjunto cerrado, 15.  
 Estabilizador, 38.  
 Estereográfica, proyección, 76.  
 Estructura conjunto, 7, 11.  
 Evaluación, aplicación, 52.  
 Exhaustiva, aplicación, 2.  
 Existencia, teorema, 183.  
  
 Falsos amantes, 226.  
 Figura ocho, 116, 122.  
 Frontera de un espacio, 17.  
 Función, 1.  
 — continua entre espacios euclídeos, 7.  
 — — — métricos, 7.  
 — distancia, 7.  
 — identidad, 1.  
 Funtor, 137.  
 —, grupo fundamental, 137.  
  
 G-acción libre, 154.  
 — — por la derecha, 38.  
 — — — izquierda, 38.  
 — — — propiamente discontinua, 153.  
 — conjunto, 37.  
 — equivariante, aplicación, 39.  
 — espacio, 40.  
 Generador, 189.  
 —, conjunto, 4.  
 — grupo libre, 190.  
 —, Seifert-Van Kampen, teorema, 189.  
 —, teorema Van Kampen, 189.  
 Género superficie, 89.  
 Grupo, 226, 244.  
 Grado de un camino, 148.  
 Gráfico de una aplicación, 42.  
 Grado de una aplicación, 148.  
 Grupo, abelianización, 222.  
 — abelianizado nudo, 241.  
 — abeliano, 4.  
 — — finitamente generado, teorema descomposición, 4.  
 — — libre rango, 4.  
 —, acción, 37.  
 —, — libre, 78, 154.  
 — — transitiva, 163.  
 —, asociatividad, 3.  
 —, centro, 135.  
 — cíclico, 4.  
 — cociente, 4.  
 — conmutativo, 4.  
 —, definición, 3.  
 — del nudo, 229.  
 — finitamente generado, 4.  
 — fundamental, 133.  
 — —, acción, 162.  
 — — circunferencia, 145.  
 — — como funtor, 137.  
 — —, equivalencia homotópica, 139.  
 — — espacio contráctil, 139.  
 — — — homeomórfico, 136.  
 — — — lenticular, 159.  
 — —, — órbitas, 165.  
 — — — producto, 140.  
 — — — recubridor, 161.  
 — —, grupo topológico, 141.  
 — —  $H$ -espacio, 142.  
 — —  $\mathbb{R}P^2$ , 159.  
 — —  $\mathbb{R}P^n$ , 159, 200, 211.  
 — —  $S^n$ , 140, 187, 199.  
 — — superficie, 217.

- Grupo fundamental toro, 150.  
 — — unión circunferencia, 206.  
 — homología singular reducido, 277.  
 —, homomorfismo, 3.  
 —, homotopía, 142.  
 — isomorfo, 3.  
 — libre generado por  $S$ , 190.  
 — —  $n$ -generadores, 190.  
 — topológico, 141.  
 —, grupo fundamental, 141.  
 — transformación recubridora, 180.  
 — trivial, 3.
- H-espacio, 142.  
 —, grupo fundamental, 142.
- Hausdorff, espacio, 55.  
 —, —, condición separación, 55.  
 —, — topológico, 55.
- Heine-Borel, teorema, 51.
- Homeomorfía, relación equivalencia, 22.
- Homeomorfismo, 21.  
 — intuitivo, 26.
- Homología,  $n$ -ésimo grupo, 261.  
 — reducida generalizada con coeficientes, teoría, 279.  
 — —,  $n$ -ésimo grupo, 278.  
 — —, teorías, 277, 278.  
 — singular, 257.
- Homomorfismo, 3.  
 — conexión, 274.  
 — inducido, 136, 264, 278.  
 — — grupo fundamental, 136.  
 —, núcleo, 3.  
 — suspensión, 278.
- Homotopía, aplicación, 118.  
 — relativamente, aplicación, 118.
- Homotopía, 118.  
 — aplicación continua, 117, 118.  
 — camino, teorema elevación, 157.  
 — equivalencia, 125.  
 —, espacio equivalente, 125.  
 — grupo, 142.  
 —, —  $n$ -ésimo, 142.  
 — mismo tipo, 120.  
 — relativa, 118.  
 — — subconjunto, 118.  
 —, tipo, 120.
- Homotópicamente equivalentes, 121.
- Identificación espacio, 31.
- Identificación topológica, 31.
- Imagen función, 1.  
 — inversa, 2.
- Inmersión botella Klein, 159.
- Interior, conjunto, 15.
- Intervalo, 5, 66.  
 — unidad, 47.
- Invariancia homotópica, teorema, 264.  
 — topológica dimensión, 277.
- Inyectiva, aplicación, 2.
- Isomorfismo, 3.  
 —, primer teorema, 4.
- Jordan, curva, 108.  
 —, —, cuerda, 115.  
 —, —, teorema, 107, 108.  
 —, polígono, 109.
- Klein, botella, 34, 88, 94.  
 —, —, inmersión, 159.
- Lago Wada, 107, 108.
- Lazo, 133.
- Lebesgue, número, 52, 194.
- Lenticular, espacio, 83, 155.
- Localmente arco conexo, 175.  
 — compacto, espacio, 52.
- Mayer, Vietoris, sucesión, 274.
- Métrica, 7.  
 — discreta, 8.  
 — euclídea, 8.  
 — usual, 8.
- Metrizable, 13.
- Möbius, banda, 30, 32.  
 —, —, coser, 88.
- Moebius, 30.
- Monodromía, teorema, 149, 157.
- Monomorfismo, 137.
- Monótona decreciente, aplicación, 71.
- Multiplicación caminos, 125.
- $n$ -Borde, 259.
- $n$ -Cadena singular, 258.
- $n$ -Ciclo, 259.
- $n$ -Cubo  $I^n$ , 51.
- $n$ -Disco, 75.  
 — —  $D^n$ , 44.
- $n$ -esfera estándar, 24.
- $n$ -ésimo grupo homología, 261.  
 — — — homotopía, 142.
- $n$ -Espacio proyectivo real, 29.
- $n$ -Generador grupo libre, 190.

- n-Simplex estándar, 257.
- singular, 257.
- n-Variedad con borde, 98.
- n-Variedad, suma conexa, 94, 95.
- Noción intuitiva, 24, 25, 26.
- Núcleo homomorfismo, 3.
- Nudo, concepto básico, 225.
- dócil, 237.
- , grupo, 229.
- , —, abelianizado, 241.
- llano, 244, 226.
- primo, 245.
- salvaje, 237.
- semejante, 227.
- , suma conexa, 245.
- , tabla, 251.
- , tipos, 226.
- tórico, 225.
- — tipo  $(m, n)$ , 230.
- trivial, 225.
- Nulhomotopa, aplicación, 147.
- Número Lebesgue, 52, 194.
  
- Ocho dextrógiro, 226.
- levógiro, 226.
- Operación binaria, 3.
- Operador borde, 259.
- prisma, 265.
- Órbita, 38.
- , espacio,  $X/G$ , 39.
  
- Palabra, 190.
- reducida, 190.
- vacía, 190.
- Paridad, 109.
- Pastel, problemas, 69.
- Peine (pulga y peine), 102.
- Pieza, 63.
- Plano proyectivo, grupo fundamental, 159.
- — real, 35.
- Polígono Jordan, 109.
- Primer teorema isomorfismo, 4.
- Problema pastel, 69.
- Producto cartesiano, 1.
- de camino, 125.
- directo, 1, 3.
- espacio topológico, 41.
- métrico, 42.
- , propiedad universal, 43.
- topológico, 41.
  
- Propiedad,  $C$ , 140.
- Universal cociente, 30.
- — producto, 43.
- Proyección estereográfica, 76.
- producto, 42.
- Pulga y peine, 102.
- Punto, 13.
- antipodal, 70.
- base, 133.
- de cruce, 228, 237.
- — triple, 237.
- doble, 228.
- — impropio, 228, 237.
- — propio, 228, 237.
- , entorno, 17.
- fijo para  $D^2$ , teorema Brouwer, 151.
- — —  $D^n$  y  $S^{2n}$ , teorema Brouwer, 276.
- — —  $I$ , teorema Brouwer, 69.
- impar, 109.
- límite, 16.
- par, 109.
  
- Rectángulo semiabierto, 159.
- Recubridor, espacio, 153.
- Recubrimiento, 47, 153.
- abierto, 48.
- equivalente, 179.
- finito, 47.
- n-hojas, 159.
- regular, 163.
- universal, 183.
- Referencia dextrógiro, 227.
- Relación, 2.
- , conjunto, 191, 192.
- equivalencia, 2.
- no trivial, 32.
- , teorema Seifert-Van Kampen, 201.
- Restricción aplicación, 2.
- Retracción, 121.
- Retracto, 121.
- débil, 123.
- deformación, 121.
- — débil, 123.
- — fuerte, 122.
- Rosquilla, 25, 33.
  
- Seifert-Van Kampen, teorema, cálculos, 209.
- — —, generadores, 129.
- — —, relaciones, 201.
- Semilocalmente simplemente conexo, 184.
- Separación, condición, 55.



- Simplex estándar, 257.  
— singular, 257.
- Subconjunto, 1.  
— abierto, 9.  
— acotado  $\mathbb{R}^n$ , 51.  
—, cadena simple, 105.  
— cerrado, 15.  
— convexo, 100.  
— — de  $\mathbb{R}^n$ , 100.  
—, homotopía relativa, 118.  
—, interior, 15.  
— propiamente recubierto, 153.
- Subespacio, 23.  
— topológico, 23.
- Subgrupo, 3.  
— conmutador, 4.  
— generado, 4.  
— normal, 4.
- Subrecubrimiento, 47.
- Sucesión Mayer-Vietoris, 274.
- Suma conexa, 85.  
— — de  $n$ -variedades, 94, 95.  
— — nudo, 245.  
— — superficies, 85.  
— directa, 3.
- Superficie, 75, 85.  
— con borde, 98.  
— — — orientable, 98.  
—, género, 89.  
—, grupo fundamental, 217.  
—, — —, cálculo, 217.  
— no orientable, 89.  
— — — estándar género  $n$ , 89.  
— orientable, 89.  
— — estándar género  $m$ , 89.  
—, suma conexa, 85.  
—, teorema clasificación, 86, 87.
- Suspensión reducida, 277.
- $T_k$ -espacio, 56.
- Taza de té, 25.
- Teorema bocadillo de jamón, 169.  
— bola peluda, 277.  
— Borsuk-Ulam, 169.  
— clasificación superficie, 86, 87.  
— curva Jordan, 107, 108.  
— descomposición grupo abeliano finitamente generado, 4.  
— elevación, 175.  
— — camino, 147.  
— — homotopía camino, 157.  
— existencia, 183.
- Teorema fundamental álgebra, 150.  
— Heine-Borel, 51.  
— invariancia homotópica, 264.  
— monodromía, 149, 157.  
— punto fijo para  $D^2$ , 151.  
— — — —  $D^n$  y  $S^{2n}$ , 276.  
— — — —  $I$ , 69.  
— Seifert-Van Kapen, cálculos, 209.  
— — — —, generadores, 189.  
— — — —, relaciones, 201.  
— valor medio, 69.
- Tietze, transformaciones, 192.
- Topología, 13.  
— algebraica, 67, 136.  
— burda, 14.  
— cociente, 29.  
— compacto-abierto, 52.  
— complementos finitos, 14.  
— discreta, 14.  
—, estudio clase equivalencia, 22.  
—, identificación, 31.  
— inducida, 23.  
— menos fina, 28.  
— métrica, 13.  
— relativa, 23.  
—, subespacio, 23.  
— usual, 13.
- Toro, 33.  
— doble, 80.  
—, grupo fundamental, 150.
- Transformación recubridora, 160.  
— —, grupo, 180.  
— Tietze, 192.
- Trébol dextrógiro, 226.  
— levógiro, 226.
- Ulam, S., 169.
- Una pieza, 26.
- Uniformemente continua, aplicación, 110.
- Valor absoluto, 7.  
— medio, teorema, 69.
- Van Kampen, teorema, generadores, 189.  
— —, —, relaciones, 201.
- Variedad, 75.  
—  $n$ -dimensional, 75.  
— con borde, 98.  
—, suma conexa, 94, 95.
- Verdaderos amantes, 226.
- Vértice, 257.  
— de un arco, 84.
- Yuxtaposición, 190.



ISBN - 84 - 291 - 5098 - 6