Prueba de evaluación

Muy importante: Escribir como máximo un folio por las dos caras

Topología. Curso 2015-16

Problema

Sean las familias de subconjuntos de $\mathbb{R}$

$B_1 = \{[a,b) \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ y $B_2 = \{(p,q] \mid p,q \in \mathbb{R},\ p < q\}$.

a) Demostrar que B_1 y B_2 son bases de topologías de $\mathbb{R}$, a las que llamaremos T_1 y T_2 respectivamente.
b) Probar que $T_1 \neq T_2$.
c) Estudiar si $(\mathbb{R}, T_1)$ verifica el I axioma de numerabilidad.

Demostración

a) Es inmediato porque ambas verifican las propiedades de ser bases, comprobemos con una de ellas.
I) $\bigcup_{a<b,a,b\in\mathbb{R}} [a,b) = \mathbb{R}$
II) Si $[a,b)$ y $[a',b')$ dos elementos de B_1 con itersección distinta del vacío, si t pertenece a esa intersección entonces $t \in [a'', b'') = [a,b) \cap [a',b')$.

b) $T_1 \neq T_2$, ya que $[\sqrt{2}, 2) \neq \bigcup_{p_i,q_i\in\mathbb{R}} (p_i, q_i]$, luego $[\sqrt{2}, 2) \notin T_2$.

c) Para cada $a \in \mathbb{R}$, $B = \{[a,p) : p \in \mathbb{Q}\}$ es una base numerable de entornos de a.