Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$.

a) Demuestre que $\Big(\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\Big)^2 \leq (b-a)\displaystyle\int_a^b f^2(t)\,dt\,.$

¿Para qué funciones se tiene la igualdad?

b) Demuestre que $\big(a-b\big)^2 \leq \Big(\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\Big)\Big(\displaystyle\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\Big)\,.$

Solución: a) Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $L^2[a, b]$ sabemos que $|\langle h, g\rangle|^2 \leq \|h\|^2\|g\|^2$, es decir,

$$\Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big)^2 \leq \int_a^b f^2(t)\,dt \int_a^b 1^2\,dt = (b-a)\int_a^b f^2(t)\,dt\,.$$

Por otro lado, en la desigualdad de Cauchy Schwarz se tiene la igualdad si y sólo si f y g son linealmente dependientes. En consecuencia se tiene la igualdad si y sólo si f es una función constante.

b) Tengamos en cuenta que si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$, entonces las funciones $h(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ y $g(x) = \sqrt{f(x)}$ son continuas en $[a, b]$ y en consecuencia, funciones de $L^2[a, b]$. Aplicando la desigualdad de Cauchy Schwarz se obtiene:

$$\Big(\int_a^b \frac{1}{\sqrt{t}}.\sqrt{t}\,dt\Big)^2 = (b-a)^2 \leq \Big(\int_a^b f(t)\,dt\Big)\Big(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\Big)\,.$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea la aplicación $T \colon \ell^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida mediante

$$T(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}$$

a) Demuestre que T está bien definida y es lineal y continua.

b) Determina el elemento de ℓ^2 que representa a T (el elemento del teorema de representación de Riesz).

Solución: a) Observemos que $y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\} \in \ell^2$ y además $\|y\| = \Big(\dfrac{1}{1-1/4}\Big)^{1/2} = 2/\sqrt{3}$.
T está bien definida pues para todo $\{x_n\}_n \in \ell^2$ se tiene que

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}\Big| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2(n-1)}}^{1/2}\Big) < \infty$$

y en consecuencia la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}$ es convergente.
T es lineal pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha x_n + \beta y_n}{2^{n-1}} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^{n-1}}$ para todo $\{x_n\}_n,\ \{y_n\}_n \in \ell^2$.
T es continua pues $|T(x)| \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2(n-1)}}^{1/2}\Big) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\Big)^{1/2}$.

b) Basta tener en cuenta que para todo $x \in \ell^2$ se cumple que $T(x) = \langle x, y\rangle$ siendo $y = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots\}$.

Nota: Del apartado b) se deduce directamente el apartado a).

Pregunta 3 (2,5 puntos)
En el espacio $L^2[0,1]$, determina los valores de a y b que minimizan la distancia de $g(x) = ax + b$ a $f(x) = e^x$.

Solución: Para los valores de a y b que minimizan la distancia de g a f, g no es más que la proyección ortogonal de f en subespacio vectorial generado por $\{1, x\}$ en $L^2[0,1]$. En consecuencia, $f - g$ es ortogonal a $\{1, x\}$, es decir,

$$\begin{cases} \int_0^1 \big(e^x - ax - b\big)\, dx = 0 \\ \int_0^1 \big(e^x - ax - b\big) x\, dx = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \big[e^x - \frac{a}{2}x^2 - bx\big]_0^1 = 0 \\ \big[(x-1)e^x - \frac{a}{3}x^3 - \frac{b}{2}x^2\big]_0^1 = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} \frac{a}{2} + b = e - 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1 \end{cases} \implies a = 18 - 6e \text{ y } b = 4e - 10\,.$$

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Se recuerda que la transformada de Fourier de la función $g_c(t) = e^{-c|t|}$ es $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \dfrac{c}{c^2 + \omega^2}$ si $c > 0$. Sea la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(t-x)^2 + a^2} dx = \frac{1}{t^2 + b^2}, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

siendo las constantes $0 < a < b$ y $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se pide:

a) La transformada de Fourier de $h_c(t) = \dfrac{1}{c^2 + t^2}$.

b) Exprese la ecuación integral como una convolución.

c) Determine la transformada de Fourier de f.

d) Determine f.

Solución: a) Aplicando el corolario 7.26 y teniendo en cuenta que $\widehat{g_c}(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\, c\, h_c(t)$ se obtiene que $g_c(-w) = \widehat{\widehat{g_c}}(w) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\ c\ \widehat{h_c}(w)$, esto es,

$$\widehat{h_c}(w) = \sqrt{\frac{\pi}{2c^2}}\ e^{-c|w|}\,.$$

b) Con la notación utilizada, la ecuación integral se expresa mediante

$$f * h_a = h_b\,.$$

c) Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación anterior se obtiene $\widehat{h_b} = \sqrt{2\pi}\widehat{f}\ \widehat{h_a}$. En consecuencia,

$$\widehat{f}(w) = \frac{a}{\sqrt{2\pi} b} e^{-(b-a)|w|}\,.$$

d) Aplicando la transformada de Fourier inversa se obtiene:

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi} b} \sqrt{\frac{2(b-a)^2}{\pi}} \frac{1}{(b-a)^2 + t^2} = \frac{a(b-a)}{\pi b\big((b-a)^2 + t^2\big)}$$