Soluciones 1º examen

Problema-1:

$$yu_{xx} - 2u_{xy} + xu_{yy} = 0$$

$$A(x,y) = x,\ B(x,y) = -2 \text{ y } C(x,y) = y.$$

Calculamos

$$B(x,y)^2 - 4A(x,y)C(x,y) = (-2)^2 - 4xy = 4(1-xy).$$

-Es elíptica cuando $(1-xy) < 0$. O sea, cuando $xy < 1$.
-Es parabólica cuando $1 - xy = 0$. O sea, $xy = 1$.
-Es hiperbólica cuando $1 - xy > 0$. O sea, cuando $xy < 1$.

Problema-2:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1.\sin\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1-\cos(n\pi)}{n}\right)$$

y

$$\begin{cases} a_n = 0, n \in 2\mathbb{N} \\ a_n = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}, n \text{ impar.} \end{cases}$$

$$S(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[\sin(2n+1)x]}{(2n+1)}.$$

Resulta

$$S(0) = 0 \text{ y } f(0) = 1$$

y

$$S(\pi) = 0 \text{ y } f(\pi) = 1.$$

Por el teorema 1 de la página 21 del texto base, la serie converge para $x \in (0,\pi)$.
La serie converge exclusivamente para $\mathbb{R}\backslash\{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$ y $S(x)$ converge uniformemente en todo intervalo cerrado que no contenga ningún punto del conjunto $\{n\pi | n \in \mathbb{Z}\}$.

Problema-3:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-a|x|}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|}.e^{ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{(ik+a)x}dx + \int_0^\infty e^{(ik-a)x}dx\right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{e^{(ik+a)x}}{(ik+a)}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{(ik-a)x}}{(ik-a)}\right]_0^{\infty}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{1}{(ik+a)} - \frac{1}{(ik-a)}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{ik-a-ik-a}{i^2k^2-a^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{2a}{k^2+a^2}, \text{ para } a > 0. \end{aligned}$$

Para que $\theta(a-|x|) = 1$, ha de ser $a - |x| \geq 1 \Rightarrow |x| \leq a-1$. La transformada de Fourier será

$$\mathcal{F}[\theta(a-|x|)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-(a-1)}^{a-1} e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]_{-(a-1)}^{a-1}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{e^{-i(a-1)k}}{ik} + \frac{e^{i(a-1)k}}{ik}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{k}\frac{e^{i(a-1)k} - e^{-i(a-1)k}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}}\sin[(a-1)k], \text{ para } a > 1.$$

Si la función θ se hubiese definido por $\theta(y) = 1$ para $y \geq 0$, el resultado sería:

$$\mathcal{F}[\theta(a-|x|)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]_{-a}^{a}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{e^{-iak}}{ik} + \frac{e^{iak}}{ik}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2}{k}\frac{e^{iak} - e^{-iak}}{2i} = \frac{\sqrt{2}}{k\sqrt{\pi}}\sin(ak), \text{ para } a > 0.$$

La transformada de $f(ax)$ es

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{ikx}dx$$

y hacemos el cambio de variable

$$ax = t \Rightarrow x = \frac{t}{a}, dx = \frac{dt}{a}.$$

Debemos considerar las dos posibilidades para

$$a > 0 \Rightarrow \mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(\frac{t}{a})}\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(\frac{t}{a})}dt\right) = \frac{1}{a}\mathcal{F}(\frac{k}{a})$$
$$a < 0 \Rightarrow \mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{+\infty}^{-\infty} f(t)e^{ik(\frac{t}{a})}\frac{dt}{a} = -\frac{1}{a}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ik(\frac{t}{a})}dt\right) = -\frac{1}{a}\mathcal{F}(\frac{k}{a})$$

y finalmente resulta

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(\frac{k}{a}).$$

Soluciones 2º examen

Problema-1:

$$u_{xy} + 3u_y = 0$$
$$A(x,y) = 0,\ B(x,y) = 1 \text{ y } C(x,y) = 0.$$

Calculamos

$$B(x,y)^2 - 4A(x,y)C(x,y) = (1)^2 - 0 = 1.$$

Es de tipo hiperbólico.
Resolvemos la ecuación $u_{xy} + 3u_y = 0$:

$$u_{xy} = -3u_y \to \frac{u_{xy}}{u_y} = -3 \to u_y(x,y) = e^{-3x}f'(y)$$
$$u(x,y) = \int e^{-3x}f'(y)dy = e^{-3x}\int f'(y)dy = e^{-3x}f(y) + g(x).$$

Para las condiciones $u(x,0) = e^{-3x}$ y $u_y(x,0) = 0$ resulta:

$$u(x,0) = e^{-3x}f(0) + g(x) = e^{-3x} \to g(x) = e^{-3x}(1 - f(0))$$
$$u_y(x,0) = e^{-3x}f'(0) = 0 \to f'(0) = 0.$$

El problema de valor inicial tiene infinitas soluciones. Por ejemplo, la familia de funciones $\{u(x,y) = e^{-3x}(ay^n + 1) | n \in \mathbb{N}, a \neq 0\}$ es un conjunto de soluciones.

Problema-2:

$$a_0 = 2\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 x^2\cos(n\pi x)dx = 2\left[\frac{2\pi nx\cos(\pi nx) - 2\sin(\pi nx) + \pi^2 n^2 x^2 \sin(\pi nx)}{\pi^3 n^3}\right]_0^1$$
$$= \frac{2}{\pi^3}\left[\frac{2\pi n\cos(\pi n) - 2\sin(\pi n) + \pi^2 n^2\sin(\pi n)}{n^3} - 0\right] = \frac{4}{\pi^2}.\frac{\cos(\pi n)}{n^2} = \frac{4}{\pi^2}.\frac{(-1)^n}{n^2}$$

y

$$S(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(n\pi x).$$

Sea

$$S_1 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \ldots$$

$$0 = S(0) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}S_1 \Rightarrow S_1 = \frac{\pi^2}{12}.$$

Sea

$$S_2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \ldots$$

$$1 = S(1) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}S_2 \Rightarrow S_2 = \frac{\pi^2}{6}$$

$S(x)$ será uniformemente convergente exclusivamente en todo intervalo cerrado que no contenga ningún entero (*teorema 2 de la página 23 del texto base*).

Problema-3:

La función escalón unitario de Heaviside está definida por

$$u(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x \leq 0. \end{cases}$$

La función $sgn(x)$ para calcular su transformada la podemos expresar por (para su integrabilidad, o sea para que las integrales resultantes sean convergentes)

$$sgn(x) = \lim_{a \to 0}(e^{-ax}u(x) - e^{ax}u(-x))$$

$$
\begin{aligned}
F(sgn(x)) &= \lim_{a\to 0}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-ax}u(x) - e^{ax}u(-x))e^{-ikx}dx\right]\\
&= \lim_{a\to 0}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-ax}u(x)e^{-ikx}dx - \int_{-\infty}^{0} e^{ax}u(-x)e^{-ikx}dx\right]\\
&= \lim_{a\to 0}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-ax}e^{-ikx}dx - \int_{-\infty}^{0} e^{ax}e^{-ikx}dx\right]\\
&= \lim_{a\to 0}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-(a+ik)x}dx - \int_{-\infty}^{0} e^{(a-ik)x}dx\right]\\
&= \lim_{a\to 0}\left(\left[-\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik}\right]_{0}^{\infty} - \left[\frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik}\right]_{-\infty}^{0}\right)\\
&= \lim_{a\to 0}\left[\frac{1}{a+ik} - \frac{1}{a-ik}\right] = \lim_{a\to 0}\frac{a-ik-a-ik}{a^2-(ik)^2}\\
&= \lim_{a\to 0}\frac{-2ik}{a^2+k^2} = \frac{-2ik}{k^2} = \frac{-2i}{k} = \frac{-2i^2}{ik} = \frac{2}{ik}.
\end{aligned}
$$

Calculamos la transformada de $xf(x)$

$$
\begin{aligned}
F(xf(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ikx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-i)}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx}(-ix)dx\\
&= i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial k}[f(x)e^{-ikx}]dx = i\frac{\partial}{\partial k}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)e^{-ikx}]dx\right] = i\frac{\partial F}{\partial k}.
\end{aligned}
$$

En el problema de valor inicial tomando transformadas respecto a la variable x resulta:

$$
\begin{cases}
\hat{u}_{tt} + (k^2+1)\hat{u} = 0\\
\hat{u}(k,0) = e^{-\frac{k^2}{2}}\\
\hat{u}_t(k,0) = 0
\end{cases}
$$

Resolviendo la EDO $\hat{u}_{tt} + (k^2+1)\hat{u} = 0$

$$\hat{u}(k,t) = p(k)\cos(\sqrt{1+k^2}\,t) + q(k)\sin(\sqrt{1+k^2}\,t)$$

y derivando respecto a t

$$\hat{u}_t(k,t) = -p(k)\sqrt{1+k^2}\,\sin(\sqrt{1+k^2}\,t) + q(k)\sqrt{1+k^2}\,\cos(\sqrt{1+k^2}\,t).$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_t(k,0) &= q(k)\sqrt{1+k^2} = 0 \Rightarrow q(k) = 0\\
\hat{u}(k,0) &= p(k) = e^{-\frac{k^2}{2}}.
\end{aligned}
$$

Así,

$$\hat{u}(k,t) = e^{-\frac{k^2}{2}}\cos(\sqrt{1+k^2}\,t).$$

Soluciones examen septiembre

Problema-1:

$$
\begin{cases}
u_t - 3u_x = 0\\
u(x,0) = \cos x
\end{cases}
$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{-3} \to -3dt = dx \to dx + 3dt = 0 \to x + 3t = K.$$

Cambio de variables:

$$\xi = x + 3t$$
$$\eta = t$$

Resulta la ecuación $u_\eta = 0$ y

$$u(\xi,\eta) = g(\xi) \to u(x,t) = g(x+3t).$$

Aplicando la condición $u(x,0) = \cos x$,

$$u(x,0) = g(x) = \cos x$$

y la solución es

$$u(x,t) = g(x+3t).$$

$$\begin{cases} u_t + xu_x = 1 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \to xdt = dx \to \frac{dx}{x} - dt = 0 \to xe^{-t} = K.$$

Cambio de variables:

$$\xi = xe^{-t}$$
$$\eta = t$$

Resulta la ecuación $u_\eta = 1$ y

$$u(\xi,\eta) = \eta + g(\xi) \to u(x,t) = t + g(xe^{-t}).$$

Aplicando la condición $u(x,0) = f(x)$,

$$u(x,0) = g(x) = f(x)$$

y la solución es

$$u(x,t) = t + f(xe^{-t}).$$

$$\begin{cases} u_t + 3tu_x = u \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{3t} \to 3tdt = dx \to dx - 3tdt = 0 \to x - \frac{3t^2}{2} = K.$$

Cambio de variables:

$$\xi = x - \frac{3t^2}{2}$$
$$\eta = t$$

Resulta la ecuación $u_\eta = u$ y

$$u(\xi,\eta) = e^\eta p(\xi) \to u(x,t) = e^t p(x - \frac{3t^2}{2}).$$

Aplicando la condición $u(x,0) = g(x)$,

$$u(x,0) = p(x) = g(x)$$

y la solución es

$$u(x,t) = e^t g(x - \frac{3t^2}{2}).$$

Problema-2:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx = \frac{4}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\frac{n\pi x}{\pi})|\sin x|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(nx)dx \quad (1)$$

Consideramos las identidades trigonométricas

$$\sin(x+nx) = \sin x\cos(nx) + \cos x\sin(nx)$$
$$\sin(x-nx) = \sin x\cos(nx) - \cos x\sin(nx)$$

y sumando deducimos

$$\sin x\cos(nx) = \frac{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)}{2}.$$

Sustituyendo en (1):

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(x+nx)+\sin(x-nx)}{2}dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(1+n)x + \sin(1-n)x]dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{n-1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}\right]$$

para n impar es $a_n = 0$ y para n par es $a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1}\right] = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1}$.

Así,

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{m\text{ (par)}}\frac{1}{m^2-1}\cos(mx)$$

Para $m = 2n$,

$$S(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2nx)$$

$$0 = f(0) = S(0) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(0) \to \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$1 = f(\frac{\pi}{2}) = S(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}\cos(2n\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1-\frac{2}{\pi}}{-\frac{4}{\pi}} = \frac{2-\pi}{4}.$$

La serie $S(x)$ converge uniformemente en todo intervalo cerrado.

Problema-3:

Sea el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t - u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|} \end{cases}$$

La transformada de Fourier de u_{xxx} es

$$F(u_{xxx}) = -(ik)^3\hat{u} = ik^3\hat{u}$$

y aplicando transformadas a la EDP

$$\hat{u}_t - ik^3\hat{u} = 0.$$

Resolviendo la EDP resultante

$$\frac{\hat{u}_t}{\hat{u}} = ik^3 \to \hat{u} = p(k)e^{ik^3t}.$$

La transformada de Fourier de la condición inicial es

$$\begin{aligned} F(e^{-|x|}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}e^{-ikx}dx = \left[\int_{-\infty}^{0} e^{(1-ik)x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{-(1+ik)x}dx\right] \\ &= \left[\left[\frac{e^{(1-ik)x}}{1-ik}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\frac{e^{-(1+ik)x}}{1+ik}\right]_{0}^{\infty}\right] \\ &= \left[\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right] = \frac{2}{1+k^2}. \end{aligned}$$

Aplicando la condición inicial a la solución general

$$\hat{u}(k,0) = p(k) = \frac{2}{1+k^2}$$

y la transformada de Fourier de la solución del problema de valor inicial es

$$\hat{u}(k,t) = \frac{2}{1+k^2}e^{ik^3t}.$$

$$\begin{cases} u_t + u_{xxxx} = 0 \\ u(x,0) = \theta(1-|x|) \end{cases}$$

Tal como está definida la función θ es

$$\theta(1-|x|) = \begin{cases} 1, x = 0 \\ 0, x \neq 0 \end{cases}$$

y la transformada de Fourier de esta función es

$$\begin{aligned} F(\theta(1-|x|) &= \lim_{h\to 0} \int_{-h}^{h} 1.e^{-ikx}dx = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]_{-h}^{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-e^{-ikh} + e^{ikh}}{ik} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{k}\sin(hk) = 0. \end{aligned}$$

La transformada de Fourier de u_{xxxx} es

$$F(u_{xxxx}) = k^4\hat{u}$$

y aplicando transformadas a la EDP

$$\hat{u}_t + k^4\hat{u} = 0.$$

Resolviendo la EDP resultante

$$\frac{\hat{u}_t}{\hat{u}} = -k^4 \to \hat{u} = p(k)e^{-k^4t}.$$

Aplicando la condición inicial

$$\hat{u}(k,0) = p(k) = 0$$

y la transformada de Fourier de la solución del problema seria

$$\hat{u}(k,t) = 0.$$

Si la definición de la función θ fuese $\theta(y) = 1$ si $y \geq 0$ y $\theta(y) = 0$ en otro caso, sería

$$u(x,0) = \theta(1-|x|) = \begin{cases} 1, |x| \leq 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$$

y la transformada de Fourier de esta función

$$\mathcal{F}(1-|x|) = \int_{-1}^{1} 1.e^{-ikx}dx = \left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]_{-1}^{1}$$
$$= \frac{-e^{-ik}+e^{ik}}{ik} = \frac{2}{k}\frac{e^{ik}-e^{-ik}}{2i} = \frac{2}{k}\sin k.$$

Resolviendo la EDP resultante

$$\frac{\hat{u}_t}{\hat{u}} = -k^4 \rightarrow \hat{u} = p(k)e^{-k^4t}.$$

Aplicando la condición inicial

$$\hat{u}(k,0) = p(k) = \frac{2}{k}\sin(k)$$

y la transformada de Fourier de la solución del problema de valor inicial

$$\hat{u}(k,t) = \frac{2}{k}\sin(k)e^{-k^4t}.$$

Procedemos con el problema de valor inicial

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \\ u(0,t) = 1 \\ \text{para } x \geq 0, t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Aplicamos la siguiente propiedad de la transformada seno

$$\mathcal{F}_S(f'') = -\hat{u}\mathcal{F}_S(f) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}f(0)k$$

a la EDF

$$\hat{u}_{tt} - (-k^2\hat{u} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}.1.k) + \hat{u} = 0$$

$$\hat{u}_{tt} + (1+k^2)\hat{u} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}k = 0.$$

Resolvemos la ecuación homogénea $\hat{u}_{tt} + (1+k^2)\hat{u} = 0$,

$$\hat{u}(k,t) = p(k)\cos\left(\sqrt{1+k^2}\,t\right) + q(k)\sin\left(\sqrt{1+k^2}\,t\right)$$

y por el método de selección hallamos una solución particular de la EDF no homogénea, $\hat{u}_P(k,t) = g(k)$. Préviamente $(\hat{u}_P)_{tt}(k,t) = 0$ y sustituímos en la EDP:

$$(1+k^2)g(k) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}k = 0 \Rightarrow g(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{k}{k^2+1}.$$

La solución de la ecuación general no homogénea es

$$\hat{u}(k,t) = p(k)\cos\left(\sqrt{1+k^2}\,t\right) + q(k)\sin\left(\sqrt{1+k^2}\,t\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+1}.$$

Derivando respecto a t,

$$\hat{u}_t(k,t) = -p(k)\sqrt{1+k^2}\,\sin\left(\sqrt{1+k^2}\,t\right) + q(k)\sqrt{1+k^2}\,\cos\left(\sqrt{1+k^2}\,t\right).$$

Aplicamos las condiciones iniciales

$$\hat{u}(k,0) = p(k) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+1} = 0 \to p(k) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+1}$$

$$\hat{u}_t(k,0) = q(k)\sqrt{1+k^2} = 0 \to q(k) = 0.$$

Finalmente, la transformada seno de la solución del problema será

$$\hat{u}(k,t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{k}{k^2+1}\left[1-\cos\left(\sqrt{1+k^2}\,t\right)\right].$$