Ejercicio 7.13. Al lanzar n veces una moneda equilibrada se obtienen rachas de resultados consecutivos iguales. Probabilidad de que se den r rachas. Idem. si probabilidad de cara es $p \neq 1/2$.

1. $p = 1/2$

Para analizar las rachas convenimos en representar las cadenas

CXCCCXXXCCXCC....

XCXXXCCCXXCXX.... por la siguiente:

RRRNNRNNRNRRN.... donde **R** significa comienza racha y **N**, su contrario, no comienza racha. El primer lugar siempre es **R.**

$$R_i = \{\boldsymbol{R}, \boldsymbol{N}\}, 2 \leq i \leq n \quad P(R_i = R) = P(R_i = N) = 1/2$$

$$P(R_i | R_2, R_3, \cdots, R_{i-1}) = \frac{P(R_2, R_3, \cdots, R_i)}{P(R_2, R_3, \cdots, R_{i-1})} = \frac{2 \cdot (1/2)^{i-1}}{2 \cdot (1/2)^{i-2}} = \frac{1}{2} = P(R_i)$$

$$P(R_2, R_3, \cdots, R_i) = P(R_2) P(R_3) \cdots P(R_i) = (1/2)^{i-1}, 2 \leq i \leq n$$

$P(\text{r rachas}) = \binom{n-1}{r-1} (1/2)^{n-1}$ Colocar $r-1, R's$ en $n-1$ lugares.

2. $p \neq \frac{1}{2}$ No hay independencia porque

$$\{R_i = R\} = \left\{ \begin{matrix} \ldots, X, \underbrace{C}_{i}, \ldots \\ \ldots, C, \underbrace{X}_{i}, \ldots \end{matrix} \right\} \Rightarrow P(R_i = R) = 2\text{pq}$$

$$P(R_3 = R | R_2 = R) = \frac{P(RRR)}{P(RR)} = \frac{p^2 q + p q^2}{2\text{pq}} = \frac{1}{2} \neq 2\text{pq} = P(R_3 = R)$$

1°. Número par de rachas 2r:

Fijamos **a** caras y cada cadena es equiprobable.

Hay **r** rachas de **C** y de **X**. Si empezamos por **C**.

$$\left.\begin{array}{l} \overbrace{\underbrace{CC|CC|\ldots|CC|}_{r\,huecos}}^{a\,caras} : \begin{array}{l}\text{r huecos}\\ \text{último fijo}\\ r\le a\end{array} \Rightarrow \binom{a-1}{r-1} \\ \overbrace{\underbrace{|X|XX|\ldots XX|X}_{r\,huecos}}^{n-a\;\;cruces} : \begin{array}{l}\text{r huecos}\\ \text{primero fijo}\\ r\le n-a\end{array} \Rightarrow \binom{n-a-1}{r-1} \end{array}\right\} \Rightarrow P=\binom{a-1}{r-1}\binom{n-a-1}{r-1}p^a q^{n-a}$$

Si empezamos por X, obtenemos lo mismo.

Para cualquier a: $$P=2\cdot\sum_{a=r}^{n-r}\binom{a-1}{r-1}\binom{n-a-1}{r-1}p^a q^{n-a}$$

2°. Número impar de rachas 2r+1:

Fijamos **a** caras y cada cadena es equiprobable.

Si empezamos por **C.** Hay **r+1** rachas de **C** y **r** de **X.**

$$\left.\begin{array}{l}
\overbrace{\underbrace{CC|CC|\ldots|CC|C}_{r\ \text{huecos}}}^{a\ \text{caras}} : \begin{array}{l}\text{r huecos}\\ r\le a-1\end{array} \Rightarrow \binom{a-1}{r} \\
\overbrace{\underbrace{|X|XX|\ldots XX|X|}_{r+1\,\text{huecos}}}^{n-a\ \ \text{cruces}} : \begin{array}{l}\text{r+1 huecos}\\ \text{1º y ult. fijo}\\ r\le n-a\end{array} \Rightarrow \binom{n-a-1}{r-1}
\end{array}\right| \Rightarrow P=\binom{a-1}{r}\binom{n-a-1}{r-1}p^a q^{n-a}$$

Si empezamos por X, obtenemos algo parecido.

Para cualquier a:

$$P=\sum_{a=r+1}^{n-r}\binom{a-1}{r}\binom{n-a-1}{r-1}p^a q^{n-a}+\sum_{a=r}^{n-r-1}\binom{a-1}{r-1}\binom{n-a-1}{r}p^a q^{n-a}$$

3°. Una sóla racha de C o X:

$$P=p^n+q^n$$

Sumando los tres apartados tenemos el resultado.