La puntuación máxima de cada preguntase indica en cada una de ellas. Se valorará la exposición de las respuestas dadas. No se permite el uso de ningún tipo de material.

1. (2 puntos) Explicar el concepto de derivada parcial en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en el caso de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Explicar también la relación de las derivadas parciales con derivada direccional $\mathbf{D_v} f(x_0, y_0)$, donde $\mathbf{v}$ es un vector de $\mathbb{R}^2$.

Nota: No utilizar más extensión que la de una cara para responder a esta pregunta.

2. (2 puntos) Sean las funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (\operatorname{sen} x, \operatorname{sen} y, \ln(1 + x^2 + y^2)) \\ g(x,y,z) &= (x + y + z, xyz) \end{aligned}$$

Calcular $\mathbf{D}(g \circ f)(0,0)$.

3. (3 puntos) Hallar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x-1)(x^2 - y^2)$$

definida en $\mathbb{R}^2$.

4. (3 puntos) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como sigue

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar continuidad existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad.

Examen 2017 Junio 2a semana

Nelson

1.

Teoría

2.

Sabemos que $\mathbf{D}(g \circ f)(0,0) = \mathbf{D}g(f(0,0))\mathbf{D}f(0,0)$, por lo tanto, como tenemos que

$$f(0,0) = (0,0,0), \quad \mathbf{D}f = \begin{bmatrix} \cos x & 0 \\ 0 & \cos y \\ \frac{2x}{1+x^2+y^2} & \frac{2y}{1+x^2+y^2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ yz & xz & xy \end{bmatrix}$$

por lo tanto

$$\mathbf{D}(f)(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}(g)(0,0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}(g \circ f)(0,0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3.

Encontramos los puntos críticos igualando las derivadas parciales a 0.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2xy$$

igualando a 0 en las dos ecuaciones anteriores y resolviendo el sistema obtenemos los puntos críticos $(1,1), (1,-1), (0,0), (2/3,0)$.

Construimos la matriz hessiana para clasificar dicho punto crítico. Por un lado tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 6x - 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 2 - 2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y$$

por lo tanto la matriz hessiana en los puntos críticos anteriores son

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

como $\det(H(1,1)) < 0$, por el criterio de Sylvester el punto $(1,1)$ es un punto de silla.

$$H(1,-1) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

como $\det(H(1,-1)) < 0$, por el criterio de Sylvester el punto $(1,-1)$ es un punto de silla.

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

como $\det(H(0,0)) < 0$, por el criterio de Sylvester el punto $(0,0)$ es un punto de silla.

$$H(2/3,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

como $\det(H(2/3,0)) > 0$, por el criterio de Sylvester el punto $(2/3,0)$ es un mínimo.

4.

La función es continua en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ por ser composición de funciones continuas. Para analizar en el punto $(0,0)$ tomamos el límite en ese valor pasando a coordenadas cilindricas, $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\lim_{r\to 0} = \frac{r^4(\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta)}{r^2(\cos^2 + \operatorname{sen}^2\theta)} = 0 = f(0,0)$$

por lo tanto la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{4x^3(x^2+y^2) - 2x(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4y^3(x^2+y^2) - 2y(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)^2}$$

que no estan definidas en $(0,0)$. Para ver si existe la derivada en dicho punto calculamos la derivada por la definición

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^2} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^4}{h^2} = 0$$

por lo tanto la derivada en ese punto existe, además

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = \lim_{x,y\to 0,0} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

la función tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ y por definición de diferenciabilidad en $(0,0)$, podemos afirmar que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.