Introducción a los espacios de Hilbert

Resolución de los ejercicios recomendados. Capítulo 3

Ejercicio 1

a) La afirmación de de este apartado no es siempre cierta: Sabemos que existe un único vector x^* en W cuya distancia a x es mínima pero no está dado por $x^* = \sum_n \langle x, v_n\rangle\, v_n$ salvo que la familia de vectores $\{v_n\}_n$ sea una base ortonormal de W. Por ejemplo si los v_i no son unitarios entonces la expresión que se obtiene es de la forma $x^* = \sum_n \frac{\langle x, v_n\rangle}{\langle v_n, v_n\rangle}, v_n$ o si los vectores v_n no son ortogonales donde los coeficientes de x^* se hallan resolviendo un sistema, véanse los ejercicios 3.4 y 3.5.

b) la afirmación del apartado b) es falsa. De hecho, W es un conjunto convexo y completo y del teorema 3.6 (o del corolario 3.7 o del teorema 3.9) se deduce la existencia de x^*.

c) Falso, el punto de W a distancia mínima de x es único. Puede ocurrir, si los vectores v_n no son linealmente independientes que la expresión de x^* respecto de v_n no sea única pero el vector x^* es único.

d) Sabemos, por el teorema 3.9, que un vector w de W minimiza la distancia de x a W si y sólo si $x - w$ es ortogonal a W. Como $x - \sum_n x_n v_n = u$ y por hipótesis u es ortogonal a W se obtiene que $x^* = \sum_n x_n v_n$ minimiza la distancia de x a W.

Ejercicio 5

Si A y B minimizan la expresión

$$\int_{-1}^{1} |\operatorname{sen} t - A - Bt|^2 dt\,.$$

entonces la función $\operatorname{sen} t - A - Bt$ es ortogonal al subespacio vectorial generado por $\{1, t\}$ en $L^2[-1, 1]$, es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^{1} \big(\operatorname{sen} t - A - Bt\big)\, dt = 0 \\ \int_{-1}^{1} \big(\operatorname{sen} t - A - Bt\big) t\, dt = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 0 \\ B = -3\cos 1 + 3 \operatorname{sen} 1 \end{array} \right.$$

Ejercicio 8

Si F un subespacio vectorial cerrado del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ sabemos por el teorema de la proyección, teorema 3.11, que $\mathcal{H} = F \oplus F^{\perp}$, es decir, todo elemento $x \in \mathcal{H}$ admite una única descomposición $x = y + z$ tal que $y \in F$ y $z \in F^{\perp}$ y la proyección sobre F es la aplicación $P_F \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tal que $P_F(x) = y$.
i) La aplicación P_F es lineal pues si $x = y + z$ y $x' = y' + z'$ con $y, y' \in F$ y $z, z' \in F^{\perp}$, entonces $\alpha x + \beta x' = \alpha(y + z) + \beta(y' + z') = (\alpha y + \beta y') + (\alpha z + \beta z')$ y además $\alpha y + \beta y' \in F$ y $\alpha z + \beta z' \in F^{\perp}$ pues F y $F^{\perp}$ son espacios vectoriales. Luego $P_F(\alpha x + \beta x') = \alpha y + \beta y' = \alpha P_F(x) + \beta P_F(x')$. ii) $P_F^2 = P_F$. En efecto si $x = y + z$ tal que $y \in F$ y $z \in F^{\perp}$ entonces $P_F\big(P_F(x)\big) = P_F(y) = y$. iii) Basta considerar en $\mathcal{H}$, el conjunto $C = B(0; 1)$ la bola unidad cerrada de $\mathcal{H}$ y en este caso $P_C(x) = \begin{cases} x & \text{si } \ x \in C \\ x/\|x\| & \text{si } \ x \notin C \end{cases}$ que claramente no es lineal.

Ejercicio 10

a) Para ver que el conjunto $C = \big\{x \in \mathcal{H} : \langle x, h\rangle = a\big\}$ es convexo hay que probar que para todo $x, y \in C$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ se cumple que $\alpha x + (1 - \alpha) y \in C$. En efecto,

$$\langle \alpha x + (1 - \alpha) y, h\rangle = \alpha \langle x, h\rangle + (1 - \alpha)\langle y, h\rangle = \alpha a + (1 - \alpha) a = a\,.$$

Para ver que el conjunto C es cerrado basta tener en cuenta que el producto interno es una aplicación continua. Así, si $\{x_n\}_n \subset C$ es una sucesión que converge a $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$\langle x, h\rangle = \langle \lim_n x_n, h\rangle = \lim_n \langle x_n, h\rangle = a\,.$$

b) Sea $y := P_C(x)$. Teniendo en cuenta que $x - y$ es ortogonal al subespacio

$$\big\{x \in \mathcal{H} : \langle x, h\rangle = 0\big\} = (\operatorname{span}\{h\})^{\perp}$$

tenemos que $x - y = \alpha h$, es decir $y = x - \alpha h$. Como $y \in C$ resulta que $\langle x - \alpha h, h\rangle = a$ de donde se despeja $\alpha = \frac{\langle x, h\rangle - a}{\langle h, h\rangle}$ y en consecuencia

$$y = x + \frac{a - \langle x, h\rangle}{\langle h, h\rangle} h\,.$$

Obsérvese que la fórmula es válida si $x \in C$, pues en este caso, $a - \langle x, h\rangle = 0$ y se obtiene $y = x$. Nótese también que el valor obtenido y cumple la caracterización del teorema 3.6, $\operatorname{Re}\langle x-y, z-y\rangle \leqslant 0$ para todo $z \in C$, pues en este caso,

$$\langle x-y, z-y\rangle = \langle \alpha h, z-y\rangle = \alpha(\langle h, z\rangle - \langle h, y\rangle) = 0\,.$$

c) Aplicando lo anterior se tiene que para calcular el mejor aproximante de $g(t) = \operatorname{sen} t$ en $\mathcal{A}$ es $P_{\mathcal{A}}$ tal que

$$P_{\mathcal{A}}(g(t)) = \cos t + \frac{2 - \int_0^\pi \cos t \operatorname{sen} t\, dt}{\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t\, dt} \operatorname{sen} t = \cos t + \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} t\,.$$

Ejercicio 14

a) Sea $h(t) = a + bt$ la proyección de $g(t) = \operatorname{sen} t$ sobre $\mathcal{H}_2$. Se cumple que $g(t) - h(t)$ es ortogonal a $\mathcal{H}_2$, es decir,

$$\begin{cases} \langle g(t) - h(t), 1\rangle = & \int_0^\pi \big(\operatorname{sen} t - a - bt\big)\, dt = 0 \\ \langle g(t) - h(t), \operatorname{sen} t\rangle = & \int_0^\pi \big(\operatorname{sen} t - a - bt\big) t\, dt = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 = & a\pi + \frac{b\pi^2}{2} \\ 2 = & a\pi + \frac{2b\pi^2}{3} \end{cases}$$

En consecuencia, $a = 2/\pi$ y $b = 0$ y por tanto $h(t) = \frac{2}{\pi}$.

b) Utilizando el apartado b) del ejercicio 10 tenemos que la proyección de $g(t) = \operatorname{sen} t$ sobre es:

$$P_{\mathcal{C}}(g(t)) = \operatorname{sen} t + \frac{1 - \int_0^\pi \operatorname{sen} t\, dt}{\int_0^\pi dt} = \operatorname{sen} t - \frac{1}{\pi}\,.$$

Ejercicio 15

a) F es subespacio vectorial de ℓ^2 pues si $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \in F$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces $\alpha x + \beta y \in F$ ya que $\sum_{n=1}^K (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum_{n=1}^K x_n + \beta \sum_{n=1}^K y_n = 0$. Para ver que F es cerrado basta observar que si $\{x^{(k)}\}_{k=1}^\infty$ es una sucesión en F que converge en ℓ^2 a x, siendo para cada k, $x^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}, \dots\}$ y $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^K x_n = \sum_{n=1}^K \lim_k x_n^{(k)} = \lim_k \left(\sum_{n=1}^K x_n^{(k)}\right) = 0\,.$$

$|x_k - x_k^{(n)}| \leqslant \|x - x^{(n)}\|_2$ y en consecuencia si k es par $x_k = \lim_n x_k^{(n)} = 0$.

b) Veamos que $F^\perp = \{\{x_n\}_{n=1}^\infty \colon x_1 = x_2 = \cdots = x_K$ y $x_n = 0$ si $n > K\}$. En efecto si $x = \{x_n\} \in \ell^2$ es tal que $x_1 = x_2 = \cdots = x_K$ y $x_n = 0$ si $n > K$ e $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n, \dots\} \in F$ entonces

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^K x_n \overline{y_n} = x_1 \overline{\left(\sum_{n=1}^K y_n\right)} = 0$$

y por tanto $x \in F^\perp$. Inversamente si $x \in F^\perp$, $\langle x, y\rangle = 0$ para todo $y \in F$. En particular, x es ortogonal a $v_1 = (1, -1, 0, \dots)$, $v_2 = (1, 0, -1, 0, \dots)$, $\dots$, y $v_{K-1} = (1, 0, \dots, \overbrace{-1}^{\text{término } K}, 0, \dots)$ y a todo $\mathbf{e}_n = \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^\infty \in F$ si $n > K$. En consecuencia se cumple que $0 = \langle x, v_n\rangle = x_1 - x_n = 0$ si $n \leqslant K - 1$ y $0 = \langle x, \mathbf{e}_n\rangle = \sum_{k=1}^\infty x_k \delta_{n,k} = x_n$ si $n > K$.

Ejercicio 20

i) Basta aplicar el corolario 3.7. Para cada subconjunto no vacío convexo y cerrado de $\mathcal{H}$, C_n, y para el punto $0 \in \mathcal{H}$ existe un único punto $x_n \in C_n$ tal que $\|0 - x_n\| = \min_{x \in C_n} \|0 - x\|$, es decir, $\|x_n\| = \min_{x \in C_n} \|x\|$.

ii) Como $\{C_n\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión decreciente para $m > n$ se tiene que $C_m \subset C_n$ y en consecuencia

$$\|x_n\| = \min_{x \in C_n} \|x\| \leqslant \min_{x \in C_m} \|x\| = \|x_m\|\,.$$

Por tanto $\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ es una sucesión monótona creciente. Como además $\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty \subset C_1$ y C_1 es un conjunto acotado, resulta que la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n=1}^\infty$ es acotada.

iii) Para demostrar que $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy se procede de manera análoga a la demostración del teorema 3.6: sea $m > n$. El uso de la ley del paralelogramo proporciona

$$\begin{aligned} 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 &= \|x_m - x_n\|^2 + \|x_m + x_n\|^2 \\ &= \|x_m - x_n\|^2 + 4\left\|\frac{x_m + x_n}{2}\right\|^2, \end{aligned}$$

esto es,

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2. \tag{1}$$

Por otro lado, que $\dfrac{x_n + x_m}{2} \in C_n$ pues C_n es un conjunto convexo y en consecuencia se obtiene

$$\|x_n\| \leqslant \left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|.$$

Combinando la desigualdad anterior con la expresión hallada en (1) resulta que

$$\|x_n - x_m\|^2 \leqslant 2\|x_n\|^2 + 2\|x_m\|^2 - 4\|x_n\|^2 = 2\|x_m\|^2 - 2\|x_n\|^2 .$$

De ser la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ convergente y por tanto de Cauchy, se deduce que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy en $\mathcal{H}$, que es completo. En consecuencia existe $x = \lim_n x_n$ en $\mathcal{H}$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C_m$ para todo m y C_m es cerrado, $x \in C_m$ para todo m. Así pues, $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$.