⁕ DURACIÓN DEL EXAMEN: DOS HORAS ⁕

⁕ NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE MATERIAL ⁕

EJERCICIO 1) **(2 puntos)** Consideremos la siguiente edp

$$(\boldsymbol{E}) \qquad \boldsymbol{u_{tt} - 4u_{xx} = 2.}$$

a) Clasificar la ecuación $(\boldsymbol{E})$.

b) Hallar la solución de $(\boldsymbol{E})$ con la condición

$$\begin{cases} u(x,x) = x^2, \ x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,x) = x, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

⁕

EJERCICIO 2) **(4 puntos)** Consideremos el siguiente problema $(\boldsymbol{P})$

$$(\boldsymbol{P}) \qquad \begin{cases} xu'' + (2-2x)u' - 2u + \lambda xu = 0 & \text{en } (0,1) \\ u(1) = 0 \\ u \text{ definida en } 0. \end{cases}$$

a) Hallar los autovalores y autofunciones de $(\boldsymbol{P})$ (Indicación: Hacer el cambio $\boldsymbol{v = xu}$).

b) Hallar la forma autoadjunta de $(\boldsymbol{P})$ y el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ correspondiente.

c) Calcular $\langle xe^{-x}, u \rangle$ para cada autofunción $\boldsymbol{u}$ de $(\boldsymbol{P})$.

⁕

EJERCICIO 3) **(4 puntos)**

a) Calcular la serie de Fourier en cosenos

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

de la función $|x|$ en el intervalo $[-1,1]$.

b) Recordemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

¿En qué puntos $\boldsymbol{x}$ del intervalo cerrado $[-1,1]$ la serie $S(x)$ converge a $|x|$? (Justificar la respuesta)

c) Hallar el conjunto $\boldsymbol{C}$ de los $x \in \mathbb{R}$ para los que la serie $S(x)$ converge.

d) ¿En qué subconjuntos de $\mathbb{R}$ la serie $S(x)$ converge uniformemente? (Justificar la respuesta)

e) Calcular $S(x)$ para $x \in C$, y, si existe $S(e)$.