PROBLEMA 4. Temas 16, 17 (1 punto)

Consideremos el siguiente problema

$$u_{yy} + (4y)u_y u + 2u^2 = 0, \quad y \in (-\infty, \infty)$$

con condiciones de contorno $u(0) = 1$ y $u(|y| \to \infty)$ acotada.

La solución exacta del problema es

$$u(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

El ejercicio consiste en aproximar la solución de la ecuación diferencial mediante los métodos pseudoespectrales para dominios infinitos estudiados en la asignatura. En concreto utilizaremos el desarrollo espectral mediante funciones de Hermite y el desarrollo espectral mediante las funciones racionales de Chebyshev $TB_n(y)$. En ambos casos utilizaremos el método pseudoespectral de colocación. Como se trata de un problema no-lineal, la representación matricial deja de ser válida y deberemos resolver ecuaciones algebraicas no-lineales para obtener los coeficientes de la expansión. Las ecuaciones no-lineales de colocación proporcionarán diferentes soluciones, algunas de ellas complejas, y deberemos analizar la correcta en cada caso.

Debido a la complejidad de esas ecuaciones trabajaremos con órdenes *N* bajos, donde N es el número de términos de la serie, y por tanto el número de puntos colocación. En todos los casos utilizaremos los *N* puntos de la cuadratura de Gauss y aplicaremos sobre el punto central $y = 0$ la condición de contorno. Por otro lado, las funciones de las dos bases arriba indicadas satisfacen la segunda condición de contorno, de modo que al utilizarlas nos aseguramos de que la aproximación espectral también la satisface. Esto nos dejará $N-1$ puntos para "colocar" la función residuo. A continuación se detallan algunos aspectos técnicos de cada método.

Ejercicio 1 (TEMA 17). Polinomios de Hermite (0,5 puntos)

La aproximación pseudoespectral de orden *N* tendrá la forma:

$$u_N(y) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \bar{\psi}_n(y),$$

donde $\bar{\psi}_n$ son las funciones normalizadas de Hermite:

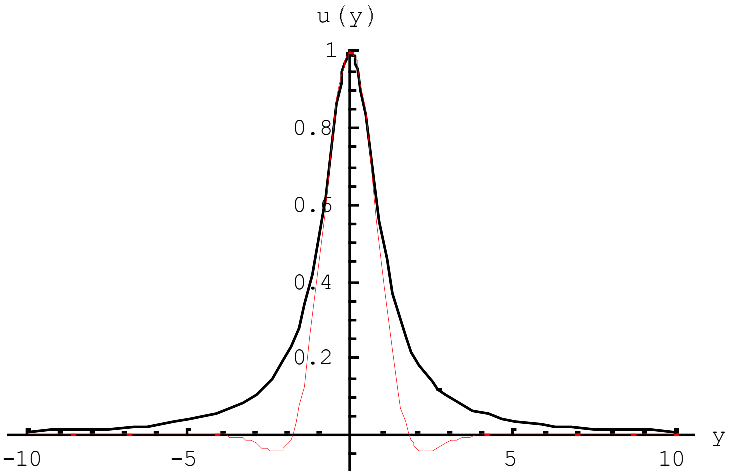
$$\bar{\psi}_n(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{H_n(y)}{(H_n, H_n)^{1/2}}.$$

Los *N* puntos de colocación vendrán dados por la cuadratura de Gauss-Hermite, esto es, por las raíces de $H_n(x)$. Consideraremos en este caso valores impares de *N*, para que los puntos de colocación incluyan el origen, en el que impondremos la condición de contorno. Como ejemplo se muestra las dos soluciones reales obtenidas para $N = 3$

(negro: solución exacta; rojo: solución pseudoespectral), aunque sólo la primera parece capturar el comportamiento de la solución exacta.

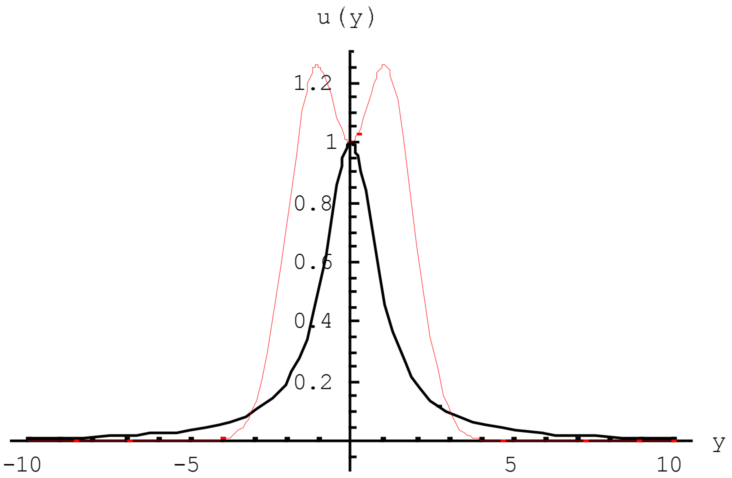
Solución 1. Coeficientes de la expansión pseudoespectral:

$a_n = \{1.12799, 0, -0.287567\}$



Solución 2. Coeficientes de la expansión pseudoespectral:

$a_n = \{2.04356, 0, 1.00724\}$



Representar, junto a la solución exacta, las soluciones espectrales que más se aproximen a la solución 1 para $N = 3, 5, 7$ y 9. Indicar también los coeficientes espectrales obtenidos.

Ejercicio 2 (TEMAS 16 y 17). Mapeo algebraico con funciones racionales de Chebyshev $TB_n(y)$ (0,5 puntos)

La aproximación pseudoespectral de orden *N* tendrá la forma:

$$u_N(y) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \; TB_n(y) \, ,$$

donde $TB_n(y)$ son las funciones racionales de Chebyshev obtenidas después del *mapping* algebraico:

$$y = \frac{Lx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad x \in [-1,1] \, .$$

Por lo tanto

$$TB_n(y) = T_n\left(\frac{y}{\sqrt{L^2+y^2}}\right).$$

Los *N* puntos de colocación vendrán dados por la cuadratura de Gauss-Chebyshev, esto es, por el mapping aplicado a las raíces de $H_n(x)$;

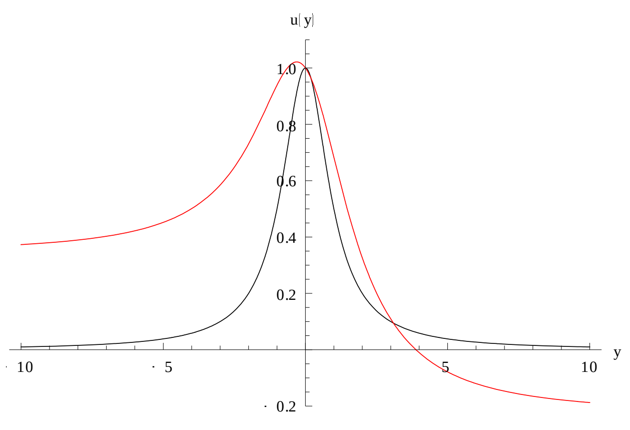
$$y_j = L\cot\left[\frac{(2j-1)\pi}{2N}\right] \qquad j = 1,\dots,N$$

De nuevo consideraremos valores impares de *N*, para que los puntos de colocación incluyan el origen, en el que impondremos la condición de contorno.

Como ejemplo se muestran las cuatro soluciones obtenidas para $N = 3$ y $L = 2$ (negro: solución exacta; rojo: solución pseudoespectral).

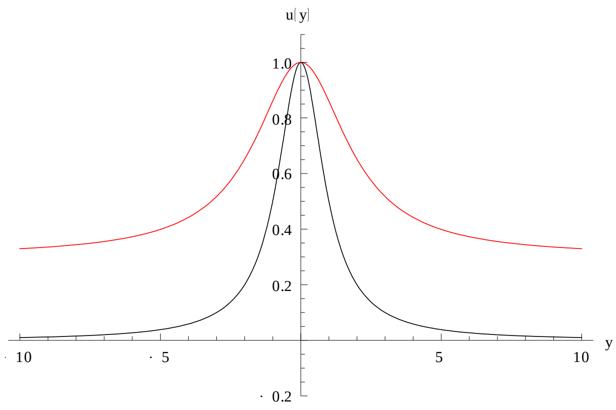
Solución 1. Coeficientes de la expansión pseudoespectral:

$a_j = \{0.528274, \; -0.285843, \; -0.471726\}$



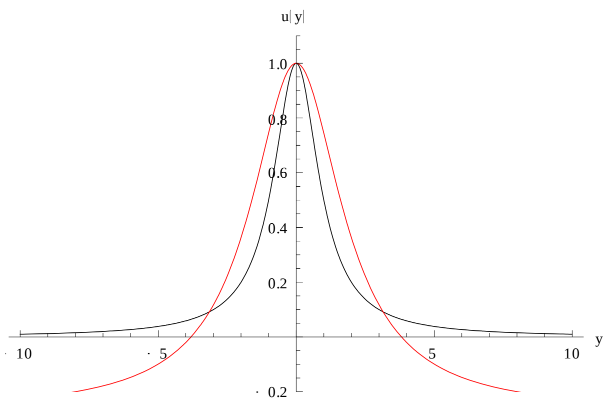
Solución 2. Coeficientes de la expansión pseudoespectral:

$a_j = \{0.651449, \; 0., \; -0.348551\}$



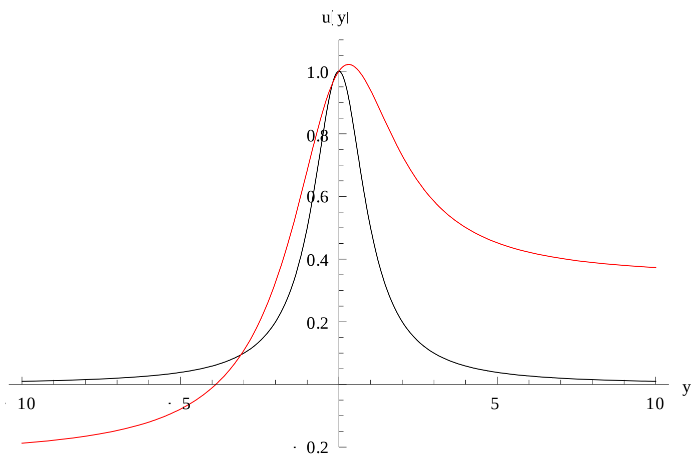
Solución 3. Coeficientes de la expansión pseudoespectral:

$a_j = \{0.36244, 0., -0.63756\}$



Solución 4. Coeficientes de la expansión pseudoespectral:

$a_j = \{0.528274, 0.285843, -0.471726\}$



El objetivo de este ejercicio es estudiar la convergencia del método a medida que aumentamos el orden espectral y también estudiar la influencia el parámetro de escala L.

(a) Fijado el orden de la aproximación, por ejemplo $N = 3$, estudiar qué ocurre cuando variamos L. ¿Qué valor de L minimiza el error de la aproximación?

(b) En el ejemplo que mostramos para $N = 3$ aparecen dos soluciones que mejor parecen aproximarse a la exacta, la solución 2 (Tipo I) y la solución 3 (Tipo II). Representar en una misma gráfica, junto a la solución exacta, las soluciones de estos tipos que se obtienen para $N = 3$, $N = 5$ y $N = 7$ (con $L = 2$). Deben presentarse dos gráficas, una para cada tipo de solución en la que se muestren las soluciones de distinto orden junto a la solución exacta . Indicar también los coeficientes espectrales obtenidos. ¿Parece converger el método a medida que aumentamos N?