FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I
(Grado en Matemáticas)
Septiembre de 2019

NO SE PERMITE NINGÚN TIPO DE MATERIAL

Todas las **respuestas deben** estar **justificadas** razonadamente.

Se aconseja utilizar borrador en los ejercicios de más cálculos y pasar luego a limpio.

1.(2 puntos)
a) Determine *todos* los vectores $v = (x, y, z)$ tales que $v \times (i - 2j - 3k) = i + 5j - 3k$

b) ¿Qué condición deben cumplir dos vectores distintos de cero a y b para garantizar que la ecuación $a \times v = b$ tiene solución en v?

R:
Calculamos el producto vectorial $(x, y, z) \times (1, -2, -3) = (-3y + 2z, z + 3x, -2x - y)$ *(al alumno se pide que presente los cálculos con la respectiva matriz)*
Los vectores pedidos serán aquello cuyas coordenadas son dadas por la solución del sistema que obtenemos al igualar este resultado a $(1, 5, -3)$;
es un sistema de 3 ecuaciones con grado de indeterminación 1, pues el rango de la matriz de los coeficientes es 2.
La solución (y por lo tanto, los vectores v pedidos) es el conjunto $\{(x, y, z) : y = -3 - 2x, \quad z = 5 - 3x\} = \{(0, -3, -5) + \lambda(1, -2, -3), \lambda \in \mathbb{R}\}$

b) los vectores a y b tienen que ser ortogonales pués, al ser $b \neq 0$ y igual al producto vectorial $a \times v$, b es perpendicular tanto a a como a v.
(Obviamente, no pueden ser paralelos porque entonces el producto seria 0 (y b es distinto de 0), pero esta condición no basta y, además, es implicada por la anterior).

2. (2,5 Puntos*)* Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = y \cos x$, determine los puntos de máximo o mínimo locales, si es que existen.
R:
Los extremos locales se encuentran en los puntos críticos, que son los puntos en el que el gradiente se anula.

Calculémoslos, igualando a cero el gradiente (que es el vector dado por las primeras derivadas parciales)

$\nabla f(x,y) = (-y\sin x, \cos x)$. Las dos coordenadas tienen que anularse **simultáneamente**:

Para la segunda coordenada tenemos: $\cos x = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

en cuanto a la primera: $\quad y \sin x = 0 \quad x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ o bien, $y = 0$. Como x no puede tomar, simultáneamente, los valores $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ y $k\pi$, se deduce que, para anular el gradiente, tiene que ser $y = 0$.

Luego, los puntos críticos son los del conjunto $\left\{(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)\right\}, k \in \mathbb{Z}$

Calculemos ahora las segundas derivadas en los puntos críticos:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -y\cos x \qquad$ sustituyendo (x,y) por $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$, resulta: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0) = 0$;

en este momento ya podemos afirmar que no hay puntos de extremo local por el teorema del criterio de la segunda derivada; de hecho para que un punto crítico sea un punto de máximo o mínimo local, su segunda derivada en orden a x tiene que ser estrictamente mayor o menor que cero. Esto resulta de una lectura atenta del teorema, pues si esa derivada es nula, entonces el discriminante D de la hessiana$H(f)$es negativo y, por lo tanto el punto crítico no satisface la condición $iii)$ del teorema.

Pero veamos la hessiana de f en los puntos $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$:

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -y\cos x & -\sin x \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}_{(\frac{\pi}{2}+k\pi,0)} = (\text{si } k \text{ ímpar})\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

o bien (si k par) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Em ambos casos, como hemos dicho arriba, D es negativo. Luego los puntos críticos no son extremos locales. Por lo tanto, no existen extremos locales.

(Vemos que son puntos de silla, pero eso no era pedido)

3. *(*3 Puntos)

Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}(x,y) \neq (0,0)$

$f(0,0) = 0$

a) Hallar, si posible, las derivadas parciales en el origen.

R:

Para que existan estas derivadas parciales **no** hace falta que la función sea contínua (ver contraexemplo en el libro de texto). Así, para contestar a la pregunta, no hace falta estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.

(*Pero, utilizando coordenadas polares se ve que sí, es continua en el origen*: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} \rho\cos^3\theta = 0$

por ser el producto de una función acotada por otra que tiende a 0.)

Como el origen es un punto de ramificación, calculamos las derivadas parciales (es decir, las derivadas direccionales en dirección de los ejes coordenados) en el origen via su definición: (igual que se haría para cualquier derivada direccional)

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f[(0,0)+(h,0)]-f(0,0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2+0}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f[(0,0)+(0,k)]-f(0,0)}{k} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(0,k)-0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \frac{\frac{0}{0+k^2}}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \frac{0}{k} = \lim\limits_{k\to 0} 0 = 0$

Conclusión: Las parciales existen y valen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Estudiar si las derivadas parciales son continuas en el origen.

Calculemos las derivadas parciales en $(x,y) \neq (0,0)$ (muy importante tener en cuenta de $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$ solo para $(x,y) \neq (0,0)$)

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$ para $(x,y) \neq (0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}$ será continua en el origen si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ **existe** y es igual a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}$ será continua en el origen si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ **existe** y es igual a $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

Veamos: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$ (pasando a coordenadas polares) $\lim\limits_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\theta(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)}{\rho^4} = \cos^2\theta(\cos^2\theta + 3\sin^2\theta)$.

Este valor depiende del θ elegido; no hay un valor único. Concluímos que el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ no existe.

Para $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$:
en vez de usar las coordenadas polares, veamos por otro método, para variar

Tomemos el límite según puntos de la radial $y=x$. El límite queda:
$\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)}\frac{-2x^4}{(2x^2)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$

Ahora, el mismo límite según puntos del eje $y=0$: El límite queda:
$\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)}\frac{0}{(x^2)^2}=\lim\limits_{x\to 0}0=0$
Entonces, el límite no existe porque obtenemos valores diferentes, según las direcciones que tomamos.
(*Se podría utilizar igual las coordenadas polares, llegando al mismo resultado:*
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}=\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{-2\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}{\rho^4}=-2\cos^3\theta\sin\theta$
Las derivadas parciales dependen del valor de θ. Luego no existe ese limite, cuando (x,y) tiende para $(0,0)$.)

Conclusión:
Las derivadas parciales no son continuas en el origen porque, en cada una de ellas, el límite de la derivada en el origen no existe.
(*Pero son continuas en $\mathbb{R}\diagdown\{(0,0)\}$: Son el cociente de funciones continuas y el denominador nunca se anula).*

4. (2,5 Puntos)
a) Escriba la fórmula de Taylor de segundo orden de la función $f:\ ]0,\to[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x,y)=\log(x+y^2)$ en un entorno del punto $(e,0)$.
b) Compare el valor del respectivo polinomio $P^2_{(e,0)}$ con el de la función f , ambos en en el punto $(2e,0)$
R: *(hay que corrigir un lapsus en el dominio de la función).*

La notación log es la usada en libro de texto (y en la mayor parte de los textos recientes) para referirse al logaritmo natural (es decir, en la base e).

a) La fórmula de Taylor de segundo orden en el punto (x_0,y_0) ($(e,0)$ en nuestro caso) de una función f es dada por (utilizando la notación del libro):
$f((e,0)+(h_1,h_2)=P^2_{(e,0)}\left[(e,0)+(h_1,h_2)\right]+R_2\left[(e,0),(h_1,h_2)\right]=$

$= f(e,0)+h_1\frac{\partial f}{\partial x}(e,0)+h_2\frac{\partial f}{\partial y}(e,0)+\frac{1}{2!}\left[h_1^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e,0)+2h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e,0)+h_2^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e,0)\right]+$
$R_2\left[(e,0),(h_1,h_2)\right]$

donde $\frac{R_2[(1,0),(h_1,h_2)]}{\|(h_1,h_2)\|}\to 0$ cuando (h_1,h_2) tiende a $(0,0)$.

(también se puede usar la notación matricial, con gradiente y hessiana, o la notacióm "concentrada" con sumatorios).

o, utilizando la fórmula más usual: (notando $(x,y)=(e+h_1,0+h_2)$)

$$f(x,y)=f(e,0)+(x-e)\frac{\partial f}{\partial x}(e,0)+(y-0)\frac{\partial f}{\partial y}(e,0)+$$
$$+\frac{1}{2!}\left[(x-e)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e,0)+2(x-e)y\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e,0)+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e,0)\right]$$
$$+R_2\left[(e,0),(x-e,y)\right]$$

donde $\frac{R_2[(e,0),(x-e,y)]}{\|(x-e,y)\|}\to 0$ cuando (x,y) tiende a $(e,0)$.

Cálculos:

$f(e,0)=1$ $\quad\frac{\partial f}{\partial x}(e,0)=\frac{1}{x+y^2}(e,0)=\frac{1}{e}$ $\quad\frac{\partial f}{\partial y}(e,0)=\frac{2y}{x+y^2}(e,0)=0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e,0)=\frac{-1}{(x+y^2)^2}(e,0)=\frac{-1}{e^2}$ $\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(e,0)=\frac{-2y^2+2x}{(x+y^2)^2}(e,0)=\frac{2}{e}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(e,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(e,0)=\frac{-2y}{(x+y^2)^2}(e,0)=0$

Y entonces, $f(x,y)=P^2_{(e,0)}\ (x,y)+R_2\left[(e,0),(x-e,y)\right]$

$= 1+\frac{1}{e}(x-e)-\frac{1}{2e^2}(x-e)^2+\frac{1}{e}y^2\ \ +R_2\left[(e,0),(x-e,y)\right]$ *

(se puede simplificar más: $f(x,y)=\frac{2}{e}x-\frac{1}{2e^2}x^2+\frac{1}{e}y^2-\frac{1}{2}\ \ +R_2\left[(e,0),(x-e,y)\right]$

b) El valor del polinomio $P^2_{(e,0)}$ de la fórmula de Taylor **en** $(e,0)$ **y calculado en** $(2e,0)$ nos dará una aproximación del valor de $f(2e,0)$ con un error inferior a $R_2\left[(e,0),(2e-e,0)\right]$

$P^2_{(e,0)}\ (2e,0)$.=(fórmula *) $=1+\frac{1}{e}e-\frac{1}{2e^2}e^2+0=1+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1,5$
compare-se este valor obtenido con el de $f\ (2e,0)$:
$\log(2e)=1+\log 2\sim 1,7$