PEC1: 2018/19
CAMPOS Y FORMAS

1.) La función $\overline{\varphi}: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\varphi(t) = (t^2, t^3)$

a.) Es un recorrido regular ✓

b.) No es un recorrido regular pero sí un recorrido

c.) No satisface las condiciones para ser recorrido.

- Es un recorrido ya que $\overline{\varphi}$ es continua y de clase C^1 ($\varphi'(t) = (2t, 3t^2)$ también continua) en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo $[-1, 1]$, por lo que cumple con la definición 1.2 (pág. 12).
- Es un recorrido ~~regular~~ ya que $\overline{\varphi}$ es de clase C^1 con ~~que~~ ~~es~~ derivada nula únicamente en el punto $t = 0$, un conjunto de medida cero, por lo que podemos construir una partición de $[-1, 1] = [-1, 0] \cup [0, 1]$ tal que en el interior de $[-1, 0]$ y de $[0, 1]$ ~~la~~ derivada no se anula.

Además φ es claramente inyectiva en $[-1, 1]$ por serlo la segunda componente de la función t^3.

Así, por la definición 1.18 (pág 39), $\overline{\varphi}$ es un recorrido regular.

* Todas las menciones a páginas de los apuntes se refieren a los apuntes de 12pt del curso 18/19.

2.) La función $\overline{\varphi}: D=[0,1]\times[0,1] \to \overline{\varphi}(D)=S\subset \mathbb{R}^3$ definida por $\overline{\varphi}(u,v)=(u^2, u\,\text{sen}(e^v), \frac{1}{3}u\cos(e^v))$:

a.) Es un recorrido regular de una superficie simple.

✓ b.) Es un recorrido de una superficie pero no es regular.

c.) No es un recorrido.

- Es un recorrido ya que $\overline{\varphi}$ es claramente continua al serlo cada una de sus componentes en D. Además, $\overline{\varphi}$ es de clase C^1 y posee matriz jacobiana de rango 2 en todos los puntos de D excepto en un conjunto de medida nula. Veámoslo:

$rg(D\overline{\varphi}(\overline{u}))=2 \iff \overline{N}(\overline{u})\neq 0$, luego calculamos el espacio normal

$$\overline{N}(\overline{u})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2u & \text{sen}(e^v) & \frac{1}{3}\cos(e^v) \\ 0 & u\cdot e^v\cos(e^v) & -\frac{1}{3}\cancel{u}e^v\text{sen}(e^v) \end{vmatrix} =$$

$$=\left(-\frac{1}{3}ue^v(\text{sen}^2(e^v)+\cos^2(e^v)), +\frac{2}{3}u^2e^v\text{sen}(e^v), 2u^2e^v\cos(e^v)\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{3}ue^v, \frac{2}{3}u^2e^v\text{sen}(e^v), 2u^2e^v\cos(e^v)\right)=0$$

$\iff u=0$

+ Si $u=0$ tenemos como subconjunto de D un segmento $C\{(0,y) \mid 0\leq y\leq 1\}$ que es un conjunto de medida nula.

Así $rg(D\overline{\varphi}(\overline{u}))=2$ en $D\setminus C$ con C conjunto de medida nula, luego por la definición 2.2 (pág 96) $\overline{\varphi}$ es un recorrido de una superficie.

2.) - Veamos ahora que no es regular. Por la definición 2.15 (pág 121), $\overline{\varphi}$ ha de ser biyectivo y continuo y además de clase C^1 y matriz jacobiana con rango 2 en $\mathring{R}$.
Ya hemos visto que se cumple esto último, sin embargo $\overline{\varphi}$ no es biyectivo en D, ya que para todo punto $(0, v) \in D$ se cumple que $\varphi(0, v) = (0, 0, 0)$, luego no es inyectivo y por tanto tampoco biyectivo. Así $\overline{\varphi}$ no es regular

3.) El vector normal del ejercicio anterior en el punto (0, 1) es:

a.) $(0, e, e)$ b.) $(e, 0, 0)$ ✓ c.) $(0, 0, 0)$.

Aprovechando el desarrollo del espacio normal realizado en el problema anterior tenemos que:

$$\overline{N}((0,1)) = \left(-\frac{1}{3}\cdot 0\cdot e, \frac{2}{3}\cdot 0^2 e\cdot \text{sen}(e), 2\cdot 0\cdot e\cdot\cos(e)\right)$$
$$= (0, 0, 0)$$

4.) Indique cuál de los siguientes campos es conservativo.

✓ a.) $\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2^2 - x_1 x_3^2, x_1^2 x_2, -x_1^2 x_3)$

b.) $\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_3^2, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3)$

c.) $\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2^2, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3)$

Para que sea conservativo un campo vectorial se ha de cumplir (pág 51):

$$D_1 F_2 = D_2 F_1$$
$$D_1 F_3 = D_3 F_1$$
$$D_3 F_2 = D_2 F_3$$

4.) y en el caso a) se ve claramente que

$D_1 F_2 = 2x_1 x_2 = D_2 F_1$ $\qquad D_2 F_3 = 0 = D_3 F_2$

$D_1 F_3 = -2x_1 x_3 = D_3 F_1$

Mientras que en b.) $D_1 F_2 = 2x_1 x_2 \neq 0 = D_2 F_1$

y en c.) $D_1 F_3 = 2x_1 x_3 \neq 0 = D_3 F_1$

Luego el campo conservativo es el primero.

5.) El trabajo realizado por la fuerza

$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^3, x_2, x_3)$

al mover una partícula por la circunferencia situada en el plano XY de radio 1 y centro (0,0,0) es:

a.) 0 $\qquad$ b.) 1/4 $\qquad$ c.) 1/2

- Observamos, en primer lugar, que el campo es conservativo, ya que la componente i-ésima de la función depende únicamente de la variable i-ésima. Así $D_1 F_2 = 0 = D_2 F_1 = D_1 F_3 = D_3 F_1 = D_2 F_3 = D_3 F_2$.
- Por otro lado, se nos pide calcular el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de un recorrido, φ. Esto es, calcular la integral de línea $\int_{\varphi} F \cdot T$.

Y dado que el trabajo es conservativo y continuo, podemos usar el 2° teorema fundamental del cálculo de integrales de línea (teorema 1.22 - pág 49). Así $\int_{\varphi} F \cdot T = f(\bar{y}) - f(\bar{x})$ donde $\bar{x}, \bar{y} \in C = \{(x, y, 0), x^2 + y^2 = 1\}$. Pero como el recorrido es cerrado, tenemos que $\int_{\varphi} F \cdot T = 0$

6.) Gracias al teorema de Green podemos calcular el área de una región simple R del plano usando la siguiente integral: $\oint_{\partial R} \overline{F} \cdot T$ siendo el campo vectorial $\overline{F}(x,y)$ igual a:

a.) $(0,-x)$ b.) $(y,0)$ ✓ c.) $(0,x)$

Sabemos que área $(R) = \int_R 1 \cdot d\overline{x}$ y, como por el teorema de Green

$$\oint \overline{F} \cdot \overline{T} = \int_R \left(D_1 F_2(\overline{x}) - D_2 F_1(\overline{x})\right) d\overline{x}$$

tenemos que para calcular el área se ha de cumplir que $D_1 F_2(\overline{x}) - D_2 F_1(x) = 1$. Y vemos claramente que el único que lo cumple de los casos propuestos es c.), ya que tanto para a.) como para b.) $D_1 F_2(\overline{x}) - D_2 F_1(\overline{x}) = -1$.

7.) La integral del campo escalar $f(x_1,x_2,x_3) = x_2^2 + 2x_2x_3$ a lo largo de la superficie

$$S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0\}$$

es:

a.) $\frac{25}{3}$ b.) $\frac{-113}{3}$ ✓ c.) $\frac{243}{2}$

Definamos, en primer lugar, un recorrido de la superficie

$$\overline{\varphi}: R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u_1,u_2) \longmapsto \left(3 - u_1 - \frac{u_2}{2},\ u_2,\ u_1\right)$$

donde $R = \{(u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u_1 \leq 3,\ 0 \leq u_2 \leq 6 - 2u_1\}$

7.) y cuyo vector normal es

$$\bar{N}(u_1,u_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left(-1, \frac{1}{2}, -1\right)$$

y que tiene norma $\|\bar{N}(\bar{u})\| = \sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

Así

$$\int_{\bar{\varphi}} f = \int_R f(\bar{\varphi}(\bar{u})) \cdot \|\bar{N}(\bar{u})\| \, d\bar{u} =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^3 \int_0^{6-2u_1} (u_2^2 + 2u_1 u_2) \, du_2 \, du_1 =$$

$$= \frac{3}{2} \int_0^3 \left[\frac{u_2^3}{3} + u_1 u_2^2\right]_0^{6-2u_1} du_1 = \frac{1}{2} \int_0^3 \left[u_2^3 + 3u_1 u_2^2\right]_0^{6-2u_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 \left((6-2u_1)^3 + 3u_1(6-2u_1)^2\right) du_1 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 (216 - 216u_1 + 72u_1^2 - 8u_1^3 + 12u_1^3 - 72u_1^2 + 108u_1) \, du_1$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^3 (4u_1^3 - 108u_1 + 216) \, du_1 = \frac{1}{2} \left(u_1^4 - 52u_1^2 + 216u_1\right]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(3^4 - 54 \cdot 3^2 + 216 \cdot 3) = \frac{1}{2}(81 - 486 + 648) = \boxed{\frac{243}{2}}$$

8) Dado el campo vectorial $\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = (-x_2^2, x_1, x_3^2)$ y dada la curva intersección del plano $x_2 + x_3 = 2$ y el cilindro $x_1^2 + x_2^2 = 1$ la integral de línea $\int_{\overline{\varphi}} \overline{F} \cdot \overline{T}$ es:

a) 0 ✓ b) $\pm \pi$ c) $\pm \frac{1}{2}\pi$

La curva $C = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1^2 + x_2^2 = 1,\ x_2 + x_3 = 2\}$ es un camino cerrado simple, luego la región que encierra, $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ x_2 + x_3 = 2\}$, es una superficie simple. Tomando como recorrido de esta superficie la función:

$$\overline{\varphi}: R \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u_1, u_2) \longmapsto (u_1, u_2, 2-u_2)$$

donde $R = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 \leq 1\}$, podemos aplicar el teorema de Stokes en $\mathbb{R}^3$ ya que dicho recorrido regular es de clase C^2.

Así $$\oint_{C=\partial S} \overline{F} \cdot \overline{T} = \int_S \operatorname{rot} \overline{F} \cdot \overline{N}$$

Calculemos el vector normal del recorrido y el rotacional

$$\overline{N}(\overline{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 1, 1)$$

$$\operatorname{rot} \overline{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (0, 0, 1-2u_2)$$

$$\left.\begin{aligned} D_2F_3 - D_3F_2 &= 0 - 0 = 0 \\ D_3F_1 - D_1F_3 &= 0 - 0 = 0 \\ D_1F_2 - D_2F_1 &= 1 - 2x_2 \end{aligned}\right\}$$

8) Así $\int_S \operatorname{rot} \overline{F} \cdot \overline{N} = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-u_1^2}}^{\sqrt{1-u_1^2}} (1-2u_2)\, du_2\, du_1 =$

$$\underset{\substack{\text{Haciendo}\\ \text{cambio a}\\ \text{polares}}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r - 2r^2 \operatorname{sen}\theta)\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{2r^3}{3} \operatorname{sen}\theta \right]_0^1 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \operatorname{sen}\theta \right) d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{2}{3} \cos\theta \right]_0^{2\pi} =$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi - 0) + \cancel{\frac{2}{3}(\cos 2\pi - \cos 0)} = \boxed{\pi}$$

9) El flujo del campo de velocidades $\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_3, x_2, x_1)$ a través de la esfera unidad: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ con orientación exterior es:

a) 0 b) -4π ✓ c) $\frac{4\pi}{3}$

Hallamos un recorrido de la esfera, por ejemplo:

$$\overline{\varphi} : [0, 2\pi] \times [0, \pi] \longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3$$
$$(u_1, u_2) \longmapsto (\cos u_1 \operatorname{sen} u_2, \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2, \cos u_2)$$

cuyo vector normal es:

$$\overline{N}(\overline{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2 & \cos u_1 \operatorname{sen} u_2 & 0 \\ \cos u_1 \cos u_2 & \operatorname{sen} u_1 \cos u_2 & -\operatorname{sen} u_2 \end{vmatrix} =$$

$$= (-\cos u_1 \operatorname{sen}^2 u_2, -\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen}^2 u_2, -\operatorname{sen} u_2 \cos u_2)$$

9.) Veamos la orientación que posee este recorrido. Para ello analicemos el sentido del vector normal en $(1,0,0) \in S$ que se alcanza para valores $u_1 = 0$, $u_2 = \pi/2$. Como $N(0, \pi/2) = (-1,0,0)$ y este apunta al interior de la esfera, la orientación es negativa, y por tanto de sentido contrario al que buscamos luego:

$$-\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \overbrace{(\cos u_2, \operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen} u_2, \cos u_1 \operatorname{sen} u_2)}^{\bar F(\bar\varphi(\bar u))} \cdot \overbrace{(-\cos u_1 \cdot \operatorname{sen}^2 u_2, -\operatorname{sen} u_1 \operatorname{sen}^2 u_2, -\operatorname{sen} u_2 \cos u_2)}^{\bar N(\bar u)} \, du_1 \, du_2$$

$$= -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(-\cos u_1 \cos u_2 \operatorname{sen}^2 u_2 - \operatorname{sen}^2 u_1 \operatorname{sen}^3 u_2 - \cos u_1 \cos u_2 \operatorname{sen}^2 u_2\right) du_1 \, du_2 =$$

$$= -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(-2\cos u_1 \cos u_2 \operatorname{sen}^2 u_2 - \operatorname{sen}^2 u_1 \operatorname{sen}^3 u_2\right) du_1 \, du_2$$

$$= -\int_0^{\pi} \cancelto{0}{-2 \operatorname{sen} u_1 \cos u_2 \operatorname{sen}^2 u_2 \Big]_0^{2\pi}} du_2 + \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 u_2 - \frac{\cos 2u_1}{2} \operatorname{sen} u_2\right) du_1 \, du_2$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \operatorname{sen}^3 u_2 \, du_1 \, du_2 + \int_0^{\pi} \cancelto{0}{\frac{\operatorname{sen} 2u_1}{2} \operatorname{sen} u_2 \Big]_0^{2\pi}} du_2$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1}{2} u_1 \operatorname{sen}^3 u_2 \Big]_0^{2\pi} du_2 = \int_0^{\pi} \pi \operatorname{sen}^3 u_2 \, du_2 =$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \operatorname{sen} u_2 \cdot \operatorname{sen}^2 u_2 \, du_2 = \pi \int_0^{\pi} (\operatorname{sen} u_2 - \operatorname{sen} u_2 \cos^2 u_2) \, du_2 =$$

$$= \pi \left. \frac{\cos^3 u_2}{3} - \cos u_2 \right]_0^{\pi} = \pi \cdot \left[\frac{\cos^3 \pi - \cos^3 0}{3} - (\cos \pi - \cos 0)\right]$$

$$= \pi \left(\frac{-2}{3} + 2\right) = \boxed{\frac{4\pi}{3}}$$

10.) La integral del campo vectorial
$\overline{F}(x_1, x_2, x_3) = (x_2^2 + \operatorname{sen} x_3, \cos(\sqrt{x_1^2+x_3^2}), e^{x_1})$
sobre la superficie del paralelepípedo delimitado por los planos: $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=1$, $z=2$, $z=4$ con orientación positiva es:

a) 8   b) 27   c) 0

Como $\overline{F}$ es un campo vectorial de clase C^1 y el paralelepípedo es un sólido cuya frontera son los planos $x=1$, $x=3$, $y=0$, $y=1$, $z=2$, $z=4$ que es una superficie de clase C^2, podemos aplicar el teorema de la divergencia, así:

$$\oint_{\partial K} \overline{F}\cdot\overline{N} = \int_K \operatorname{div}\overline{F}$$

Luego como $\operatorname{div}\overline{F} = 0+0+0 = 0$, tenemos que la integral buscada vale $\int_1^3\int_0^1\int_0^4 0 = \boxed{0}$