Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas
junio 2011, 1^a semana.

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos:
(1) Producto escalar.
(2) Transformación ortogonal o isometría.
(3) Signatura de una forma cuadrática.
(4) Criterio de Sylvester.

Ejercicio 1: (2 puntos)
Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Demuestre que una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ es antisimétrica si y sólo si $f(v, v) = 0$ para todo $v \in V$.

Ejercicio 2: (3 puntos)
Obténganse las posibles matrices de Jordan de un endomorfismo f de un espacio vectorial V real de dimensión 4 que satisface las siguientes condiciones:

(1) f no es diagonalizable

(2) $\dim Ker(f - 2id) = 2$, $\dim Ker(f + id) = 1$.

Ejercicio 3: (3 puntos)
Clasifique la siguiente familia de formas cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ según los valores del parámetro real λ. Para $\lambda = 1$ obtenga una base de vectores conjugados.

$$f_\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + (\lambda + 1)z^2 + 2\lambda yz + 2zx$$

Soluciones

Ejercicio 1: (Lema de la pág. 273)
Sea f un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Demuestre que una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ es antisimétrica si y sólo si $f(v, v) = 0$ para todo v.

Solución: La condición necesaria es trivial. Si f es antisimétrica, entonces para todo $v \in V$ se cumple $f(v, v) = -f(v, v)$. El único número, real o complejo, que es igual a su opuesto es el 0, luego $f(v, v) = 0$.

Para probar la condición suficiente, supongamos que f es una forma bilineal tal que $f(v, v) = 0$ para todo $v \in V$. En particular, para todo $u, v \in V$ se tiene que $f(u + v, u + v) = 0$. Por otro lado, por ser bilineal se cumple

$$\begin{aligned} 0 &= f(u+v, u+v) = \underbrace{f(u,u)}_{=0} + f(u,v) + f(v,u) + \underbrace{f(v,v)}_{=0} \\ &= f(u,v) + f(v,u) \end{aligned}$$

de donde se tiene la condición de antisimetría de f

$$f(u, v) = -f(v, u).$$

Ejercicio 2:
Obténganse las posibles matrices de Jordan de un endomorfismo f de un espacio vectorial V real de dimensión 4 que satisface las siguientes condiciones:

(1) f no es diagonalizable

(2) $\dim Ker(f - 2id) = 2$, $\dim Ker(f + id) = 1$.

Solución:
Del apartado (2) se deduce que el endomorfismo tiene dos autovalores $\lambda_1 = -1$ con multiplicidad geométrica $d_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con multiplicidad geométrica $d_2 = 2$, entonces las multiplicidades algebraicas satisfacen $\alpha_1 \geq 1$ y $\alpha_2 \geq 2$.

Por otro lado, como no es diagonalizable, no puede tener un tercer autovalor distinto λ_3, porque en tal caso se cumpliría para las multiplicidades geométricas y algebraicas de cada autovalor $\alpha_i = d_i,\ i = 1, 2, 3$. Así, los únicos autovalores de f son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = 2$.

Las multiplicidades algebraicas de dichos autovalores tienen que cumplir

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 4 \quad \text{y} \quad \alpha_i \geq d_i,\ i = 1, 2.$$

Luego se pueden distinguir dos casos:

a) Si $\alpha_1 = 2$ y $\alpha_2 = 2$, el polinomio característico de f es será $p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^2$. Como $\dim E^1(2) = d_2 = 2$ entonces hay dos bloques de Jordan asociados al autovalor 2 y la matriz de Jordan será

$$J_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \varepsilon = 0 \text{ o } 1.$$

Como f es no diagonalizable, entonces $\varepsilon = 1$. Este hecho también se deduce de que $\dim E^1(1) = d_1 = 1$, por lo que sólo habrá un bloque de Jordan asociado al autovalor -1.

b) Si $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 3$, el polinomio característico de f es será $p(\lambda) = (\lambda-2)^3(\lambda+1)$. Como $\dim E^1(2) = d_2 = 2$ entonces hay dos bloques de Jordan asociados al autovalor 2, y la única posibilidad es que haya un bloque de orden 1 y otro de orden 2. Entonces la matriz de Jordan será

$$J_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que, en este caso, el polinomio característico de f determina cuál de las dos matrices J_1 o J_2 es la matriz canónica de Jordan de f.

Ejercicio 3: Clasifique la siguiente familia de formas cuadráticas de $\mathbb{R}^3$ según los valores del parámetro real λ. Para $\lambda = 1$ obtenga una base de vectores conjugados.

$$f_\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + (\lambda+1)z^2 + 2\lambda yz + 2zx$$

Solución: Es el ejercicio 162 de la página 293. La resolución detallada está en una de las grabaciones del foro Formas Cuadráticas.

La matriz de la forma cuadrática f_λ en la base canónica $B = \{e_1,\ e_2,\ e_3\}$ es

$$M_B(f_\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Para clasificarla hay que obtener su signatura, y el método más eficiente en este caso es el de diagonalización por congruencia, aplicando operaciones elementales en filas y columnas. Además, con el metodo de diagonalización por congruencia obtenemos a la vez la base de vectores conjugados.

$$[M_B(f_\lambda)|I_3] \xrightarrow{E_{31}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{columnas}]{E_{31}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-\lambda)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 & -1 & -\lambda & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{columnas}]{E_{32}(-\lambda)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 & -1 & -\lambda & 1 \end{array}\right]$$

Así, obtenemos la matriz diagonal D congruente con $M_B(f_\lambda)$ y la base de vectores conjugados B' cuyas columnas forman la matriz P

$$[M_B(f_\lambda)|I_3] \xrightarrow{\text{diagonalización por congruencia}} [D|P^t] \quad \text{tal que} \quad D = M_{B'}(f_\lambda) = P^t M_B(f_\lambda) P.$$

En efecto, podemos comprobar que

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-\lambda^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Una base de vectores conjugados respecto a f_λ es

$$B'_\lambda = \{e_1,\ e_2,\ -e_1 - \lambda e_2 + e_3\}.$$

Particularizando en el caso $\lambda = 1$ obtenemos la base pedida.

Con este método no estamos si no calculando la base de vectores conjugados (respecto a la cual la matriz de la forma es diagonal) de un modo organizado y cómodo. Lo equivalente a esto sería construir paso a paso una base de vectores conjugados. Vamos a hacerlo.

Método equivalente: Buscamos $B'' = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ una base de vectores conjugados en el caso $\lambda = 1$. Tomamos v_1 tal que $f_1(v_1) \neq 0$, nos sirve $v_1 = e_1 = (1, 0, 0)$ ya que $f_1(v_1) = 1$. A continuación, buscamos v_2 conjugado de v_1 y tal que $f_1(v_2) \neq 0$. Podemos ahorrarnos hacer cuentas si observamos la matriz de f_1 :

$$M_B(f_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vemos en ella que $v_2 = e_2$ nos vale ya que es conjugado de v_1, es decir $f_{1,p}(v_1, v_2) = 0$, siendo $f_{1,p}$ la forma polar asociada a f_1, y $f_1(v_2) = 1$.

El tercer vector de la base tendrá que ser conjugado de los dos anteriores, es decir $v_3 \in v_1^c \cap v_2^c$. Los espacios conjugados mencionados tienen las siguientes ecuaciones en la base B

$$v_1^c \equiv x + z = 0; \quad v_2^c \equiv y + z = 0$$

Entonces, podemos tomar $v_3 = (1,\ 1,\ -1)$ y calculamos $f_1(v_3) = 0$. La matriz de f_1 en la base B'' es

$$M_{B''}(f_1) = \begin{bmatrix} f_1(v_1) & 0 & 0 \\ 0 & f_1(v_2) & 0 \\ 0 & 0 & f_1(v_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y la expresión analítica o algebraica de f_1 en B'' es

$$f_1(x'', y'', z'') = f_1(v_1)(x'')^2 + f_1(v_2)(y'')^2 + f_1(v_3)(z'')^2 = (x'')^2 + (y'')^2.$$

Regresamos al problema de clasificación: una vez que hemos diagonalizado f_λ estudiamos los elementos positivos y negativos que hay en la diagonal de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix}$$

para encontrar su signatura. Se distinguen los siguientes casos:

1. $\lambda(1 - \lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda \in (0, 1) \ \Rightarrow \mathrm{sg}(f_\lambda) = (3, 0) \ \Rightarrow \ f_\lambda$ es definida positiva.

2. $\lambda(1 - \lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ o $\lambda = 1 \ \Rightarrow \mathrm{sg}(f_\lambda) = (2, 0) \ \Rightarrow \ f_\lambda$ es semidefinida positiva.

3. $\lambda(1 - \lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \ \Rightarrow \mathrm{sg}(f_\lambda) = (2, 1) \ \Rightarrow \ f_\lambda$ es indefinida.

Errores más frecuentes:

- En general, en las definiciones es donde se han producido más errores, por desconocimiento total, o por imprecisión y vaguedad al ser enunciadas.

- Definir el producto escalar sobre un $\mathbb{K}$-espacio vectorial cualquiera. El cuerpo $\mathbb{K}$ sólo puede ser el de los números reales.

-Ejercicio 2: Demostrar sólo una implicación: si f es antisimétrica, entonces $f(v,v) = 0$ para todo $v \in V$

- Ejercicio 3: Cuando se aplica el método de diagonalización por congruencia a la matriz M_{f_λ} de una forma cuadrática, en la matriz D diagonal congruente con $M(f_\lambda)$ no se obtienen, en general, los autovalores. Es lo que ocurre con la matriz obtenida en el ejercicio

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la diagonal no son autovalores de f (salvo, por casualidad, el 1).

- Ejercicio 3: Confundir el concepto de base del espacio vectorial formada por vectores conjugados respecto a f_1, con el de base del subespacio radical o núcleo de la forma cuadrática: $N(f_1)$.