Geometría diferencial de curvas y superficies

Prueba de evaluación continua 2020

La hora final es improrrogable por lo que se recomienda no esperar al último momento.

Es importante la redacción y claridad de la exposición, explicando cada paso en la solución. Pueden utilizar los teoremas, corolarios, definiciones, ejercicios y observaciones del libro de texto.

Ejercicio.

Sea $\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ una parametrización natural de una curva sin puntos de inflexión y con $\tau_\alpha(t) > 0$, para todo $t \in I$. Sea $B_\alpha(t)$ el vector binormal en $\alpha(t)$. Se define $\beta : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^3$ por la siguiente expresión:

$$\beta(t) = \int_0^t B_\alpha(s)ds$$

a) Probar que β es una parametrización natural de una curva $\beta(0, +\infty)$.y que se verifican las siguientes igualdades:

$$\kappa_\alpha(t) = \tau_\beta(t), \tau_\alpha(t) = \kappa_\beta(t)$$
$$T_\alpha(t) = B_\beta(t), N_\alpha(t) = -N_\beta(t), B_\alpha(t) = T_\beta(t)$$

b) Dar un ejemplo de parametrización α de modo que exista una isometría directa (que conserve la orientación) del espacio que lleve $\alpha(0, +\infty)$ en $\beta(0, +\infty)$ ¿cuál es la matriz de dicha isometría?

c) Dar un ejemplo donde no exista isometría de $\alpha(0, +\infty)$ en $\beta(0, +\infty)$.

d) Si cambiamos la condición $\tau_\alpha(t) > 0$ por $\tau_\alpha(t) < 0$ para todo $t \in I$, ¿cómo cambian las igualdades del apartado a)?