

CAPITULO I

LOS NUMEROS COMPLEJOS

CAPITULO 1. LOS NUMEROS COMPLEJOS

- 1.1 Introducción
- 1.2 Estructura algebraica de los números complejos
- 1.3 Conjugación de los números complejos
- 1.4 Módulo de un número complejo
- 1.5 Argumento de un número complejo
- 1.6 Representación gráfica de los números complejos
- 1.7 El plano complejo ampliado, compactificación del plano complejo
- 1.8 La esfera de Riemann, distancia cordal
- 1.9 Ejercicios

1.1 INTRODUCCIÓN.

Un número complejo es una expresión de la forma

$$a + bi$$

donde a, b son números reales e i es la llamada unidad imaginaria. Este número i surge al comprobar que en el cuerpo real \mathbb{R} , la ecuación

$$x^2 = -1,$$

no tiene solución. Entonces introducimos un nuevo elemento al campo numérico que llamaremos i y que es una solución de la ecuación anterior o equivalentemente podemos escribir

$$i = \sqrt{-1},$$

obviamente este nuevo número cae fuera de los números reales.

Una notación usual para denotar un número complejo variable es

$$z = x + yi,$$

x se llamará la parte real e y la parte imaginaria de z , se escribe

$$x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z.$$

El conjunto de los números complejos, que denotaremos por \mathbb{C} , está en correspondencia biyectiva con los puntos del plano \mathbb{R}^2 mediante la correspondencia

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \rightarrow & x + iy \end{array} .$$

1.2 ESTRUCTURA ALGEBRAICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

En el conjunto de los números complejos están definidas las operaciones de suma y multiplicación mediante

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i, \\ (x_1 + y_1 i) (x_2 + y_2 i) &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i. \end{aligned}$$

Con estas dos operaciones el conjunto \mathbb{C} , se convierte en un cuerpo algebraico, el cuerpo de los números complejos $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, es decir si

$$z_j = x_j + y_j i, \quad j = 1, 2, 3,$$

se satisfacen las propiedades:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, propiedad conmutativa de la suma.
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$, propiedad asociativa de la suma.
3. Existe elemento neutro, el número complejo $0 = 0 + 0i$, que verifica

$$0 + z = z,$$

para todo número complejo z .

4. Dado $z \in \mathbb{C}$, existe el elemento opuesto $-z \in \mathbb{C}$, tal que

$$z + (-z) = 0,$$

si $z = x + yi$, entonces $-z = -x - yi$.

5. $z_1 z_2 = z_2 z_1$, propiedad conmutativa del producto.
6. $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$, propiedad asociativa del producto.
7. Existe elemento unidad, el número complejo $1 = 1 + 0i$, que verifica

$$1 \cdot z = z,$$

para todo número complejo z .

8. Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, existe el elemento inverso $z^{-1} \in \mathbb{C}$, tal que

$$z \cdot z^{-1} = 1.$$

9. $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, propiedad distributiva del producto respecto de la suma.

1.3 CONJUGACION DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Dado un número complejo $z = x + yi$, llamaremos conjugado de z y le representaremos por \bar{z} al número

$$\bar{z} = x - yi.$$

Es decir el conjugado \bar{z} de un número complejo z es aquel que satisface

$$\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z.$$

La conjugación se comporta respecto a las operaciones algebraicas de la forma descrita en la siguiente proposición.

Proposición 1.3.1. *Se verifican las siguientes relaciones*

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \overline{z_1 z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2,\end{aligned}$$

es decir el conjugado de la suma es la suma de los conjugados y el conjugado del producto es el producto de los conjugados.

Demostración.

Sean $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) i} \\ &= x_1 + x_2 - (y_1 + y_2) i \\ &= (x_1 - y_1 i) + (x_2 - y_2 i) \\ &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}\overline{z_1 z_2} &= \overline{(x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i} \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) i \\ &= (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) \\ &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.\end{aligned}$$

q.e.d.

1.4 MODULO DE UN NUMERO COMPLEJO

El conjunto de los números complejos \mathbb{C} , a diferencia de los números reales \mathbb{R} , no es un cuerpo ordenado, es decir no tiene una relación de orden definida, por tanto no podemos comparar números complejos z_1, z_2 en el sentido que uno sea mayor que otro.

Sin embargo, asociado a un número complejo z , hay asociado un número real positivo $|z|$, que llamaremos módulo de z y que juega un papel análogo al valor absoluto $|x|$ de un número real x .

Definición 1.4.1. *Se denomina módulo del número complejo $z = x + yi$, el número real no negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se representará por $|z|$.*

Observamos la relación

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2,$$

es decir

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

El módulo tiene las siguientes propiedades:

- 1) $|0| = 0$,
- 2) $|z| > 0$, para todo $z \neq 0$,
- 3) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$,
- 4) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

Las propiedades 1) y 2) son inmediatas de la definición. Para demostrar 3) utilizaremos la relación anterior $z\bar{z} = |z|^2$ y la Proposición 1.3.1. En efecto, tenemos

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} \\ &= z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 |z_2|^2. \end{aligned}$$

También 4) se deduce de manera análoga

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\ &= z_1 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_1} \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \overline{z_2}) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |z_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2, \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las relaciones sencillas

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} z &= z + \bar{z}, \\ |\operatorname{Re} z| &\leq |z|. \end{aligned}$$

1.5 ARGUMENTO DE UN NUMERO COMPLEJO

Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, podemos asociarle un número complejo de módulo uno, a saber

$$u = \frac{z}{|z|}.$$

Es claro que el módulo de este número complejo es uno pues

$$|u| = \left| \frac{z}{|z|} \right| = \frac{1}{|z|} |z| = 1,$$

de tal forma que si $u = p + iq$, entonces

$$p^2 + q^2 = 1,$$

pero en estas condiciones se sabe que existe un ángulo α tal que

$$p = \cos \alpha, \quad q = \operatorname{sen} \alpha, \quad (5.1)$$

luego

$$u = \frac{z}{|z|} = \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

y

$$z = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha), \quad (5.2)$$

esta relación es conocida como la forma polar del número complejo z .

Es claro que α está solamente determinado módulo 2π , es decir, si α satisface (5.1), entonces también $\alpha + 2k\pi$ lo satisface para cada $k \in \mathbb{Z}$.

Llamaremos a α , argumento de z . Puesto que no está unívocamente determinado, deberemos fijar en cada caso uno de sus valores. Por ejemplo podemos considerar α satisfaciendo la condición $\alpha \in [0, 2\pi)$. En este caso diremos que α es el argumento principal de z y escribiremos

$$\alpha = \operatorname{Arg} z.$$

Para cualquier otro argumento de z utilizaremos letras minúsculas

$$\alpha = \arg z.$$

El argumento tiene las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} 1) \quad \arg \bar{z} &= -\arg z \\ 2) \quad \arg z_1 z_2 &= \arg z_1 + \arg z_2. \end{aligned}$$

Las igualdades anteriores las hemos de entender módulo 2π . Es decir fijando los valores del argumento en ambos miembros de la igualdad, esta ocurrirá si añadimos en uno de los miembros un múltiplo adecuado de 2π . En general las igualdades entre argumentos habrán de entenderse así en lo sucesivo.

Para probar 1) utilizaremos la relación (5.2), es decir la forma polar de z

$$z = |z| (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha),$$

donde $\alpha = \arg z$, entonces también obtenemos

$$\bar{z} = |z| (\cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha),$$

pero utilizando $|\bar{z}| = |z|$ y las relaciones trigonométricas

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha, \quad \operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen} \alpha,$$

obtenemos

$$\bar{z} = |\bar{z}| (\cos(-\alpha) + i \operatorname{sen}(-\alpha)),$$

es decir la forma polar de \bar{z} y

$$-\alpha = \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Para probar 2) utilizamos también

$$z_1 = |z_1| (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1)$$

$$z_2 = |z_2| (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2),$$

luego

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1| |z_2| [(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) \\ &\quad + i (\operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2)] \end{aligned}$$

y recordando las relaciones trigonométricas

$$\cos(\alpha_1 + \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2,$$

$$\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

concluimos

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)),$$

luego

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

1.6 REPRESENTACION GRAFICA DE LOS NUMEROS COMPLEJOS

Como hemos indicado ya, existe una biyección entre el conjunto \mathbb{C} de los números complejos y el plano cartesiano \mathbb{R}^2 cuyos puntos p son los pares (x, y)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ z = x + yi & \longrightarrow & p_z = (x, y) \end{array}$$

Mediante esta identificación nosotros hablamos del plano de los números complejos. Al subconjunto de \mathbb{C} correspondiente al eje de abscisas, es decir al conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = x + 0i\},$$

le llamaremos también el eje real y al subconjunto de \mathbb{C} correspondiente al eje de ordenadas, es decir al conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} \mid z = 0 + yi\},$$

le llamaremos eje imaginario .

El conjugado \bar{z} de z es el simétrico de z respecto del eje real en el plano complejo.

La distancia euclídea entre dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

viene expresada también en términos de los módulos mediante

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

El módulo de un número complejo z representa la distancia de z al origen de coordenadas y el argumento el ángulo formado por la parte positiva del eje de abscisas y la semirrecta que une el origen con el punto z .

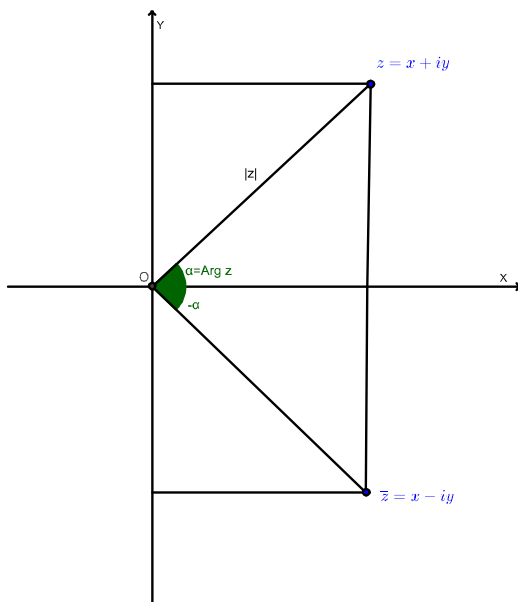


Fig.1.1

1.7 EL PLANO COMPLEJO AMPLIADO, COMPACTIFICACION DEL PLANO COMPLEJO

El plano \mathbb{R}^2 y por tanto el plano complejo \mathbb{C} , dotado con la topología definida mediante la distancia euclídea, no es un espacio topológico compacto. Sin embargo resulta muy conveniente para el estudio de los números complejos y de las funciones complejas "compactificar" el plano complejo.

Esto se consigue mediante la introducción del punto del infinito que denotaremos por ∞ . El conjunto

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

se denominará plano complejo ampliado.

En el plano complejo ampliado, no tenemos una estructura algebraica propiamente dicha, es decir la suma y la multiplicación no se extienden de forma natural cuando aparece ∞ como sumando o como factor de tal forma que $\hat{\mathbb{C}}$ se convierta en un cuerpo.

Sin embargo en el sentido del cálculo de límites, se conviene que para $z \in \hat{\mathbb{C}}$

- 1) si $z \neq 0$, entonces $z \cdot \infty = \infty$,
- 2) $z + \infty = \infty + z = \infty$,
- 3) si $z \neq \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$, $z - \infty = \infty - z = \infty$.

1.8 LA ESFERA DE RIEMANN, DISTANCIA CORDAL.

Mientras que el cuerpo de los números complejos \mathbb{C} admite como representación geométrica el plano \mathbb{R}^2 , el conjunto ampliado de los números complejos $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ admite una representación geométrica mediante una superficie esférica de \mathbb{R}^3 , la esfera de Riemann \mathbb{S} .

A continuación describimos esta representación y definimos la distancia cordal, que restringida a \mathbb{C} es equivalente a la distancia euclídea.

Consideremos el espacio euclídeo de tres dimensiones \mathbb{R}^3 con coordenadas (ξ, η, ζ) , y en él, la esfera de centro en el punto $(0, 0, 1/2)$. Esta esfera será tangente al plano $\xi\eta$ en el origen de coordenadas. Entonces a cada punto z del plano $\xi\eta$ con coordenadas (x, y) se le hace corresponder el punto P de la esfera que es la intersección de ésta con la recta que pasa por el punto $z = (x, y)$ y el punto $N = (0, 0, 1)$.

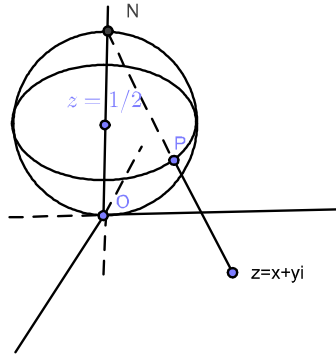


Fig.1.2

El punto z se dice que es la proyección estereográfica del punto P . De esta manera se establece una biyección entre los puntos de \mathbb{C} y la superficie esférica anterior, que denotaremos por \mathbb{S} , excepto el polo N .

Haciendo corresponder al punto del infinito ∞ , el polo N , obtenemos una biyección entre el plano ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$ y la esfera \mathbb{S} .

La esfera \mathbb{S} considerada como representación de $\widehat{\mathbb{C}}$ se llama esfera de Riemann. Su ecuación es

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \zeta = 0.$$

Se comprueba fácilmente que si las coordenadas del punto z son (x, y) y las coordenadas del punto P son (ξ, η, ζ) , siendo z la proyección estereográfica de P , con P en la esfera de Riemann, entonces se tienen las relaciones

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Definición 1.8.1. Se denomina distancia cordal entre dos puntos z_1, z_2 del plano complejo ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$, a la distancia euclídea en \mathbb{R}^3 entre los puntos P_1, P_2 correspondientes de la esfera de Riemann.

Si $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$, la distancia cordal entre dos puntos vendrá dada por

$$\delta(z_1, z_2) = \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2},$$

donde ξ_i, η_i, ζ_i , $i = 1, 2$ se obtienen de x_i, y_i , $i = 1, 2$ mediante la fórmula anterior, y en términos de x_i, y_i se obtiene

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}},$$

lo que se deduce de un cálculo que omitimos aquí, ver Problema 6, y en el caso particular en que uno de los puntos sea ∞ ha de modificarse en

$$\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

1.9 EJERCICIOS

1. Probar la relación

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2),$$

para z_1, z_2 en \mathbb{C} . Dar una interpretación geométrica de esta relación.

2. Describir los siguientes conjuntos como lugares geométricos

- i) $\{z | z\bar{z} = 16\}$,
- ii) $\{z | z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} - 8 = 0\}$,
- iii) $\{z | \bar{z} = z + 6i\}$.

3. Dados dos vértices z_1, z_2 de un triángulo equilátero, determinar el tercer vértice z_3 en función de los dados.

4. Resolver la ecuación

$$\bar{z} = z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Determinar la imagen en el plano complejo \mathbb{C} mediante la proyección estereográfica del paralelo de la esfera de Riemann \mathbb{S} con latitud β , $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Discutir los casos $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, correspondiente a los polos.

6. Probar la expresión de la distancia cordal $\delta(z_1, z_2)$ en términos de la coordenadas cartesianas de $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}.$$

7. Probar las siguientes relaciones entre la distancia cordal y la esférica

- i) $\delta(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$ para todo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
- ii) Para todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{C}$, existe k tal que $|z_1 - z_2| \leq k\delta(z_1, z_2)$, para $z_1, z_2 \in A$.

Concluir la equivalencia topológica entre la distancia euclídea y la distancia topológica.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 1

CAPITULO 1.

Problema 1. Probar la relación

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right) ,$$

para z_1, z_2 en \mathbb{C} . Dar una interpretación geométrica de esta relación.

Solución.

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= 2z_1\overline{z_1} + 2z_2\overline{z_2} = 2 \left(|z_1|^2 + |z_2|^2 \right) . \end{aligned}$$

Si consideramos el paralelogramo de vértices $0, z_1, z_2, z_1 + z_2$ entonces $|z_1 + z_2|, |z_1 - z_2|$ representan las longitudes de las diagonales y $|z_1|, |z_2|$ las longitudes de los lados, de tal forma que la relación anterior se puede interpretar como que la suma los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual al doble los cuadrados de las longitudes de los lados.

Problema 2. Describir los siguientes conjuntos como lugares geométricos

- i) $\{z \mid z\overline{z} = 16\}$,
- ii) $\{z \mid z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} - 8 = 0\}$,
- iii) $\{z \mid \overline{z} = 6\}$.

Solución.

- i) $z\overline{z} = |z|^2 = 16$; Circunferencia de centro el origen y radio 4 .
- ii) $z\overline{z} - 2z - 2\overline{z} - 8 = 0$. Haciendo $z = x + iy$ obtenemos $x^2 + y^2 - 4x - 8 = 0$, es decir, $(x - 2)^2 + y^2 - 12 = 0$. Circunferencia de centro $(2, 0)$ y radio $2\sqrt{3}$.
- iii) $\overline{z} = z + 6i$. Haciendo $z = x + iy$, obtenemos $-2iy = 6i$ es decir $y = -3$; Recta paralela al eje X .

Problema 3. Dados dos vértices z_1, z_2 de un triángulo equilátero, determinar el tercer vértice z_3 en función de los dados.

Solución.

$$z_3 = z_1 + (z_3 - z_1) \quad (1) .$$

Escribimos $z_3 - z_1$ en forma polar, es decir,

$$z_3 - z_1 = |z_3 - z_1| \exp i \operatorname{Arg} (z_3 - z_1) \quad (2) .$$

Pero por ser equilátero el triángulo, tenemos $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_1|$. (3)

Los ángulos del triángulo miden cada uno $\frac{\pi}{3}$, de donde se observa

$$\operatorname{Arg} (z_3 - z_1) = \operatorname{Arg} (z_2 - z_1) + \frac{\pi}{3} . \quad (4)$$

De (1) , (2) , (3) y (4) concluimos $z_3 = z_1 + |z_2 - z_1| \exp i \left(\operatorname{Arg} (z_2 - z_1) + \frac{\pi}{3} \right)$, que nos expresa z_3 en términos de z_1 y z_2 .

Problema 4. Resolver la ecuación $\bar{z} = z^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Solución. Escribimos z en forma polar es decir $z = re^{i\theta}$, la ecuación entonces se escribe $re^{-i\theta} = r^n e^{i(n-1)\theta}$.

i) Para $n = 1$ obtenemos $re^{-i\theta} = 1$ es decir $r = 1$, $\theta = 0$, es decir la ecuación tiene como única raíz $z = 1$.

ii) Para $n > 1$ obtenemos la ecuación $re^{-i\theta} = r^n e^{i(n-1)\theta}$, de donde obtenemos $r = 1$, $e^{in\theta} = 1$, es decir $r = 1$, $\theta = \frac{2k\pi i}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$, luego obtenemos la raíces n -ésimas de la unidad $z_k = \exp i \frac{2k\pi i}{n}$, $k = 0, \dots, n-1$.

Problema 5. Determinar la imagen en el plano complejo \mathbb{C} , mediante la proyección estereográfica, del paralelo de la esfera de Riemann \mathbb{S} con latitud β , $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Discutir los casos $\beta = \pm \frac{\pi}{2}$, correspondientes a los polos de la esfera.

Indicación. Observar que la distancia al origen de la proyección de un punto $p \in \mathbb{S}$, es la tangente trigonométrica del ángulo formado por la recta que une el polo norte N y p , con el eje perpendicular al plano, y posteriormente relacionar este ángulo con el ángulo β .

Solución.

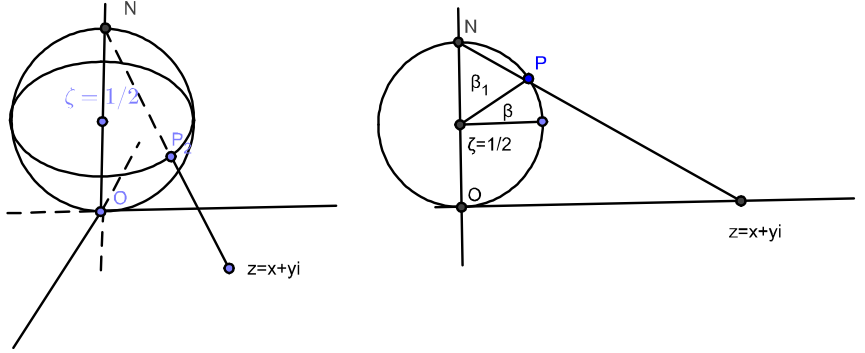


Fig.1

Observando que el ángulo β_1 de la figura es un ángulo inscrito en la circunferencia del dibujo de la derecha que abarca un arco igual al ángulo central β más $\frac{\pi}{2}$, por geometría elemental sabemos que $\beta_1 = \frac{\beta + \frac{\pi}{2}}{2}$ y por tanto teniendo en cuenta que el segmento ON tiene longitud 1, concluimos que la longitud r del segmento Oz es igual a $r = tg\beta_1 = tg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

La imagen es la circunferencia de centro el origen y radio $tg\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$.

Los casos $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$ corresponden a los puntos $z = 0$ y ∞ respectivamente.

Problema 6. Probar la expresión de la distancia cordal $\delta(z_1, z_2)$ en términos de las coordenadas de $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \cdot 2}{\sqrt{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}}.$$

Solución. Las ecuaciones de la proyección estereográfica vienen dadas por

$$\xi = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}, \eta = \frac{y}{1 + x^2 + y^2}, \zeta = \frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

y la distancia cordal $\delta(z_1, z_2)$ viene definida por

$$\delta^2(z_1, z_2) = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2,$$

tenemos que probar

$$\delta^2(z_1, z_2) = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}.$$

We have

$$\begin{aligned} (\xi_1 - \xi_2)^2 &= \left(\frac{x_1}{1 + x_1^2 + y_1^2} - \frac{x_2}{1 + x_2^2 + y_2^2} \right)^2 \\ &= \frac{x_1^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{x_2^2}{(1 + x_2^2 + y_2^2)^2} \\ &\quad - \frac{2x_1x_2}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}, \\ (\eta_1 - \eta_2)^2 &= \left(\frac{y_1}{1 + x_1^2 + y_1^2} - \frac{y_2}{1 + x_2^2 + y_2^2} \right)^2 \\ &= \frac{y_1^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{y_2^2}{(1 + x_2^2 + y_2^2)^2} \\ &\quad - \frac{2y_1y_2}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}, \\ (\zeta_1 - \zeta_2)^2 &= \frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{(1 + x_2^2 + y_2^2)^2} \\ &\quad - \frac{2(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}. \end{aligned}$$

Agrupando los términos correspondientes de cada una de las tres ecuaciones anteriores obtenemos

$$\begin{aligned} &(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\ &= \frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_1^2 + y_1^2)^2}{(1 + x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2) + (x_2^2 + y_2^2)^2}{(1 + x_2^2 + y_2^2)^2} \\ &\quad - \frac{2((x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2))}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}, \end{aligned}$$

ahora podemos transformar facilmente la relación anterior

$$\begin{aligned}
& (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 \\
= & \frac{(x_1^2 + y_1^2)(1 + x_1^2 + y_1^2)}{(1 + x_1^2 + y_1^2)^2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}{(1 + x_2^2 + y_2^2)^2} \\
& - \frac{2((x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2))}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
= & \frac{(x_1^2 + y_1^2)}{(1 + x_1^2 + y_1^2)} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)}{(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
& - \frac{2((x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2))}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
= & \frac{(x_2^2 + y_2^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)(1 + x_1^2 + y_1^2)}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
& - \frac{2((x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2))}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
= & \frac{(x_1^2 + y_1^2) + (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) + (x_2^2 + y_2^2) + (x_2^2 + y_2^2)(x_2^2 + y_2^2)}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
& - \frac{2((x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2))}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
= & \frac{(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2) + (y_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2)}{(1 + x_1^2 + y_1^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \\
= & \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{(1 + x_1^2 + x_2^2)(1 + x_2^2 + y_2^2)} \cdot \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Problema 7. Probar las siguientes relaciones entre la distancia cordal y la esférica

- i) $\delta(z_1, z_2) \leq |z_1 - z_2|$ para todos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,
- ii) Para todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{C}$, existe una constante k tal que $|z_1 - z_2| \leq k\delta(z_1, z_2)$, para todos $z_1, z_2 \in A$. Concluir la eqivqlencia topológica entre la distancia euclídea y la distancia topológica.

Solución. Teniendo en cuenta el Problema 6 tenemos

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)}},$$

de donde resulta i) inmediatamente.

También obtenemos

$$|z_1 - z_2| < \delta(z_1, z_2) \sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} ,$$

de tal forma que si $|z_1|$ y $|z_2|$ son menores que una cota $K > 1$ por ser A acotado, entonces

$$\sqrt{(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)} \leq k = 2K^2 ,$$

de donde se deduce la relación en ii).

De estas dos relaciones se concluye la equivalencia topológica en \mathbb{C} de la distancias euclídea y cordal.

También se comprueba fácilmente de la expresión de la distancia cordal de un punto z al ∞

$$\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} ,$$

que en el plano ampliado y en la esfera de Riemann, los entornos del ∞ , son los mismos, pues los conjuntos

$$U(r, \infty) = \{z \mid |z| > r\} ,$$

que es una base de entornos de ∞ en el plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$ se corresponden con los casquetes esféricos

$$B_\delta(\infty, \epsilon_r) = \{z \mid \delta(z, \infty) < \epsilon_r\} ,$$

donde $\epsilon_r = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$, que a su vez constituyen una base de entornos de ∞ en la esfera de Riemann \mathbb{S} .

CAPITULO 2

FUNCIONES COMPLEJAS

CAPITULO 2. FUNCIONES COMPLEJAS

- 2.1 Funciones continuas de variable compleja
- 2.2 Derivación de funciones de variable compleja. Funciones holomorfas
- 2.3 Propiedades de la derivación de las funciones de variable compleja
- 2.4 Funciones holomorfas y transformaciones conformes
- 2.5 Funciones holomorfas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann
- 2.6 El teorema de la función inversa para las funciones analíticas
- 2.7 Ejercicios

2.1 FUNCIONES CONTINUAS DE VARIABLE COMPLEJA

En general podemos considerar funciones

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & w = f(t) \end{array} ,$$

o bien funciones

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longrightarrow & w = f(z) \end{array} ,$$

en ambos casos hablamos de funciones complejas, en el primer caso diremos que f es una función compleja de variable real y en el segundo caso diremos que f es una función compleja de variable compleja.

Nosotros estamos fundamentalmente interesados en las funciones complejas de variable compleja $w = f(z)$. Si escribimos la variable $z = x + yi$ y $w = u + vi$, la función f puede ser también descrita mediante

$$w = f(z) = u + vi = \varphi(x, y) + \psi(x, y)i,$$

donde

$$u = \varphi(x, y) \text{ , } v = \psi(x, y) ,$$

la parte real e imaginaria de w son esencialmente funciones reales de dos variables reales.

En el caso de las funciones complejas podemos considerar también la noción de continuidad y continuidad uniforme en un conjunto A

Definición 2.1.1. *La función $w = f(z)$ de variable compleja se dice continua en el punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si para todo número positivo $\varepsilon > 0$, existe un número positivo $\delta > 0$, tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Diremos que la función $w = f(z)$ es uniformemente continua en $B \subset \mathbb{C}$ si dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir $\delta > 0$ tal que para cualquier $z_0 \in B$ y cualquier z para el cual $|z - z_0| < \delta$ se verifica $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.*

La definición en el caso de funciones complejas de variable real es completamente análoga.

En general se considerarán funciones definidas, no en todo \mathbb{C} , sino en un conjunto abierto $A \subset \mathbb{C}$. El caso más frecuente es cuando A es conexo, es decir A es un dominio de \mathbb{C} . El concepto de continuidad en un punto y continuidad uniforme es aplicable también en este caso.

De una manera completamente análoga al caso de funciones reales se prueba el siguiente teorema,

Teorema 2.1.1. *Si $f_1(z), f_2(z)$ son funciones definidas en $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, y son continuas en $z_0 \in A$, entonces también $f_1(z) + f_2(z)$, $f_1(z) f_2(z)$ son continuas en z_0 , y si $f_2(z_0) \neq 0$, también $f_1(z) / f_2(z)$ es continua en z_0 .*

Como consecuencia del Teorema 2.1.1 obtenemos que los polinomios de variable compleja

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

son funciones continuas.

También como consecuencia de este teorema podemos deducir la continuidad de la clase más general de funciones racionales

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0},$$

donde $P(z), Q(z)$ son polinomios, en los puntos z donde $Q(z)$ no se anula.

Debido a la equivalencia de las distancias euclídea y cordal en el plano complejo finito, ver Problema 7 del Capítulo 1, podemos extender de forma coherente la definición de continuidad de las funciones de variable compleja al caso de funciones f definidas en un abierto $A \subset S$, de la esfera de Riemann.

Definición 2.1.2. *Una función $f(z)$ definida en un abierto de A de la esfera de Riemann es continua en $z_0 \in A$, si para todo número positivo $\varepsilon > 0$, existe otro número positivo $\delta > 0$ tal que para todo $z \in A$ para el cual*

$$\delta(z, z_0) < \delta,$$

entonces

$$\delta(f(z), f(z_0)) < \epsilon.$$

Con esta definición las funciones racionales son continuas en todo punto de \mathbb{S} . Ver Problema 1.

2.2 DERIVACION DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA. FUNCIONES HOLOMORFAS.

Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, z_0 un punto interior de A . A continuación introducimos el concepto de derivada en z_0 y la noción de holomorfia.

Definición 2.2.1. Decimos que la función $f(z)$ es derivable en el punto z_0 , si existe el límite

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

y es finito. En este caso al límite se le llama derivada de f en z_0 y se le representa por $f'(z_0)$ o bien $\frac{df}{dz}(z_0)$. En el caso $z_0 = \infty$, se considera la función auxiliar $g(z) = f(1/z)$ y se dice que f es derivable en ∞ si g es derivable en $z = 0$.

En el caso en que una función de variable compleja f es derivable en todos los puntos de un dominio A , la función se dice que es holomorfa en A . Un profundo resultado de la teoría mostrará que las funciones holomorfas serán representables localmente como series de potencias, hecho que se describe habitualmente diciendo que la función es analítica. Este resultado nos permitirá desde ahora llamar indistintamente a las funciones holomorfas también funciones analíticas.

Definición 2.2.2. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto que es derivable en todo $z_0 \in A$, se llamará función holomorfa o función analítica.

2.3 PROPIEDADES DE LA DERIVACION DE LAS FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

La derivación en el campo complejo mantiene las propiedades básicas siguientes de la derivación en el campo real.

Proposición 2.3.1. La función $f(z)$ es derivable en z_0 si y solo si existe un $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = f(z_0) + \lambda(z - z_0) + \epsilon(z - z_0),$$

donde $\epsilon(z - z_0) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow z_0$. En tal caso $\lambda = f'(z_0)$.

Proposición 2.3.2. *Si la función $f(z)$ es derivable en el punto z_0 , entonces también es continua en z_0 .*

Proposición 2.3.3. *Las reglas usuales de derivación en el caso real permanecen válidas en el campo complejo*

$$\begin{aligned}(f+g)'(z) &= f'(z) + g'(z), \\(f-g)'(z) &= f'(z) - g'(z), \\(f \cdot g)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}, \text{ si } g(z) \neq 0.\end{aligned}$$

Es inmediato de la definición que la función $f(z) = z$ es derivable en todo el plano complejo, entonces se deduce de las reglas precedentes que también los polinomios complejos

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0,$$

son derivables en todo el plano y la derivada correspondiente es

$$P'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \dots + a_1.$$

De las reglas precedentes también se deduce la derivabilidad de las funciones racionales complejas

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad P, Q \text{ polinomios},$$

en los puntos donde no se anula Q .

Una regla fundamental en el cálculo de derivadas es la llamada "regla de la cadena".

Proposición 2.3.4. *Sean $g : A \rightarrow \mathbb{C}$, $f : B \rightarrow \mathbb{C}$, $A, B \subset \mathbb{C}$ abiertos, de tal manera que $g(A) \subset B$. Si la función g es derivable en z_0 y la función f es derivable en $w_0 = g(z_0)$, entonces la función compuesta $F = f \circ g$ es derivable en z_0 , y se tiene*

$$F'(z_0) = f'(g(z_0))g'(z_0).$$

La demostración también es igual que en el caso real.

2.4 FUNCIONES HOLOMORFAS Y TRANSFORMACIONES CONFORMES

La existencia de la derivada $f'(z_0)$ no nula en un punto $z_0 \in A$, de una función de variable compleja $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ tiene la importante consecuencia geométrica que

dos curvas γ_1, γ_2 que se cortan en z_0 con un cierto ángulo α , son transformadas por f en dos curvas $f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2$ que se cortan en $f(z_0)$ con el mismo ángulo α

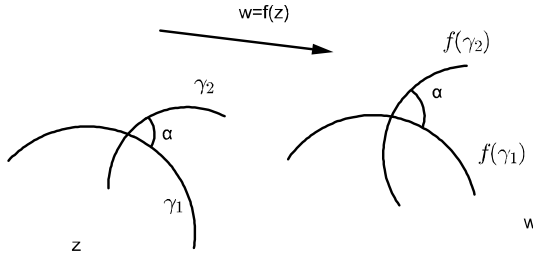


Fig.2.1

La situación en el caso $f'(z_0) = 0$ es más complicada pero puede ser descrita también aunque no lo haremos aquí.

Es claro que la propiedad enunciada sobre la conservación de ángulos equivale a la propiedad enunciada de forma precisa en la siguiente definición.

Definición 2.4.1. Una función $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, A abierto, se dice que es conforme en $z_0 \in A$, si existe $\theta \in [0, 2\pi]$, tal que cualquier curva $\gamma(t)$ diferenciable en $t = 0$, $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma'(0) \neq 0$ se transforma por f en una curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ diferenciable en $t = 0$, tal que

$$\arg \sigma'(0) = \arg \gamma'(0) + \theta, \pmod{2\pi}.$$

f se dirá que es conforme en A si es conforme en todo punto de A .

Teorema 2.4.1. Si $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, A abierto, es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0 , y $\theta = \arg f'(z_0)$. Si f es holomorfa en A entonces f es conforme en A .

Demostración. Este teorema es una consecuencia inmediata de la regla de la cadena. En efecto tendremos

$$\sigma'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma'(0),$$

de donde se sigue la relación

$$\arg \sigma'(0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(0) \pmod{2\pi}.$$

q.e.d.

Bajo ciertas condiciones de regularidad se puede también probar que una transformación conforme del plano viene dada por una función analítica, sin embargo este hecho no es tan sencillo como en la otra dirección, ver Blaschke [1].

Una segunda consecuencia se deduce al considerar el módulo $|f'(z_0)|$. Se tiene

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|.$$

Esto significa que cualquier segmento "infinitesimal" con extremo en z_0 , es dilatado por un factor $|f'(z_0)|$.

2.5 FUNCIONES HOLOMORFAS. ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

2.5.1 DIFERENCIACION REAL Y DERIVACION COMPLEJA

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto, una función de variable compleja, recordemos que f puede también ser considerada como una función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, es decir una función de dos variables reales donde

$$f(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y) + v(x, y)i,$$

en cada punto $(x, y) \in A$.

Por tanto podemos plantear el problema de la diferenciabilidad de f en un punto fijo (x_0, y_0) en el sentido de la diferenciabilidad real, entonces surge la cuestión natural de la relación de la diferenciabilidad en este sentido con la derivabilidad compleja en $z_0 = x_0 + y_0i$.

El teorema fundamental relacionando ambos conceptos nos proporciona unas condiciones necesarias y suficientes para que una función diferenciable en sentido real sea derivable en sentido complejo. Estas condiciones son las llamadas ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Teorema 2.5.1. *Sea $f : A \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto. Sea $z_0 \in A$, entonces*

$f'(z_0)$ existe si y solamente si f es diferenciable como función de dos variables reales en (x_0, y_0) donde $z_0 = x_0 + y_0i$, y las funciones $u(x, y), v(x, y)$ satisfacen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

estas ecuaciones diferenciales son conocidas como ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es derivable en el sentido complejo en z_0 , con derivada $\lambda = f'(z_0)$, es decir

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \left| \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} - \lambda \right| = 0,$$

esto es equivalente a

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \eta) - f(z_0) - l_c(\eta)|}{|\eta|} = 0, \quad (5.1)$$

donde l_c es la aplicación lineal compleja

$$\begin{aligned} l_c : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \eta &\longrightarrow \lambda \eta. \end{aligned}$$

Es decir f será entonces diferenciable en sentido real y su diferencial en z_0 es l_c .

Escribamos ahora la función f y l_c en términos de sus componentes real e imaginaria

$$\begin{aligned} f(z_0) &= f(x_0 + y_0 i) = u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0) i, \\ l_c(\eta) &= l_c(h + k i) = \lambda_1 h - \lambda_2 k + (\lambda_2 h + \lambda_1 k) i, \end{aligned}$$

donde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i$, $\eta = h + k i$.

Es claro que considerada l_c como función lineal

$$l_c : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

la matriz asociada ha de ser

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado sabemos que esta matriz habrá de ser la matriz Jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix},$$

y por tanto concluimos las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

La existencia de estas derivadas se sigue de la diferenciabilidad de f .

Inversamente si la función f es diferenciable en sentido real en z_0 y se verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces la diferencial $Df(z_0)$ vendrá dada por la aplicación lineal

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned}c &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\d &= \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Llamemos

$$\lambda = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i = c + di$$

y consideremos la aplicación lineal l_c compleja definida por $l_c(\eta) = \lambda\eta$. expresando como antes l_c en términos reales observamos que l_c no es otra cosa que la aplicación lineal $Df(z_0)$.

Por definición la diferencial $Df(z_0)$ satisface

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + \eta) - f(z_0) - Df(z_0)(\eta)|}{|\eta|} = 0,$$

es decir

$$\frac{|f(z_0 + \eta) - f(z_0) - \lambda\eta|}{|\eta|} = 0,$$

o equivalentemente

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \eta) - f(z_0)}{\eta} = \lambda,$$

es decir existe $f'(z_0)$ y se tiene

$$\lambda = f'(z_0).$$

q.e.d.

La función compleja de variable compleja f puede ser considerada también como una función compleja de dos variables reales x, y es decir,

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C},$$

entonces las derivadas parciales de f vienen dadas por

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}i,\end{aligned}$$

entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann admiten la expresión más compacta

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

2.6 EL TEOREMA DE LA FUNCION INVERSA PARA FUNCIONES ANALITICAS

Un teorema central en la teoría de las funciones de variable real es el llamado Teorema de la Función Inversa que afirma que una función

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

cuyo Jacobiano en un punto $\overline{x_0} \in A$ no se anula, es localmente invertible.

Las condiciones de Cauchy-Riemann nos garantizan la aplicabilidad de este teorema a las funciones analíticas en aquellos puntos donde la derivada es no nula.

Teorema 2.6.1. (Teorema de la función inversa). *Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, f analítica con derivada continua en A . Sea $z_0 \in A$ tal que $f'(z_0) \neq 0$, entonces existen abiertos U que contiene a z_0 y V que contiene a $f(z_0)$ tales que la restricción de f a U es una biyección $f : U \longrightarrow V$ y la función inversa f^{-1} es analítica en V . Además para todo $z \in U$ se tiene*

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Demostración. En términos reales la función f se escribe

$$\begin{aligned} f : \quad A &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longrightarrow (u(x, y), v(x, y)) \end{aligned} ,$$

donde $f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$.

Teniendo en cuenta las condiciones de Cauchy-Riemann, el Jacobiano de f puede expresarse en términos de la derivada compleja

$$J(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2,$$

pues

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Así pues particularizando en el punto $z_0 = x_0 + y_0i$, deducimos por la hipótesis $f'(z_0) \neq 0$ que

$$Jf(z_0) \neq 0,$$

y por el Teorema real de la Función Inversa podemos asegurar la existencia de una función inversa local f^{-1} diferenciable en sentido real.

Es decir, existen entornos U de z_0 y V de $f(z_0)$ tales que f restringida a U es una biyección y la inversa

$$\begin{aligned} f^{-1} : \quad V &\longrightarrow \mathbb{U} \\ (u, v) &\longrightarrow (s(u, v), t(u, v)) \end{aligned}$$

es diferenciable en sentido real.

Para comprobar la derivabilidad en sentido complejo de f^{-1} en $f(z_0)$, tenemos que verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

La diferenciabilidad de f^{-1} implica la existencia de las derivadas parciales y se tienen las relaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial s}{\partial u} &= \frac{1}{J(f)} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{1}{J(f)} \cdot \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial t}{\partial u} &= \frac{1}{J(f)} \cdot \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial t}{\partial v} = \frac{1}{J(f)} \cdot \frac{\partial u}{\partial x},\end{aligned}$$

las cuales se siguen del hecho que la matriz Jacobiana de f^{-1} es la matriz inversa de la matriz Jacobiana de la f .

De estas relaciones y de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f , se deducen

$$\frac{\partial s}{\partial u} = \frac{\partial t}{\partial v}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = -\frac{\partial t}{\partial u},$$

lo cual prueba la derivabilidad compleja de f^{-1} .

Finalmente calculamos $(f^{-1})'$,

$$(f^{-1})'(w) = \frac{\partial s}{\partial u} + \frac{\partial t}{\partial u}i = \frac{1}{J(f)} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}i \right) = \frac{1}{J(f)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}i \right),$$

y teniendo en cuenta que

$$J(f) = |f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}i \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}i \right),$$

concluimos

$$(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

q.e.d.

2.7 EJERCICIOS

1. Probar que la funciones racionales R consideradas como funciones de las esfera de Riemann en sí misma, es decir, $R: \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ son continuas en todo punto de \mathbb{S} , incluido el ∞ .

2. Sea $f: D \rightarrow D$, una función uniformemente continua en $D = \{z \mid |z| < 1\}$ el círculo unidad. Probar que para toda sucesión $\{z_n\} \subset D$ convergiendo a un punto de la frontera $\zeta \in C$, C la circunferencia unidad, entonces el $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ existe y depende solamente de ζ no de la sucesión dada, es decir dada otra sucesión $\{z'_n\} \subset D$, $z'_n \rightarrow \zeta$, entonces también existe $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n)$ y es el mismo que para la sucesión precedente.

3. Demostrar que si una función analítica $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, toma solamente valores reales entonces es constante en A .

4. Demostrar que si $f(z)$ es analítica y

$$g(z) = |f(z)|^2 + f(z)$$

es también analítica entonces $f(z)$ es constante.

5. Se pide:

i) Estudiar si la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = z \operatorname{Re} z,$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$.

ii) Estudiar la analiticidad de f en $z = 0$.

6. Determinar los dominios donde la función

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2i|xy|,$$

es analítica.

7. Dada una función holomorfa f en el círculo unidad $D = \{z \mid |z| < 1\}$, estudiar la holomorfía en D de la función g en los siguientes casos

$$i) g(z) = \overline{f(z)}, \quad ii) g(z) = f(\bar{z}), \quad iii) g(z) = \overline{f(\bar{z})}.$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 2

Problema 1. Probar que las funciones racionales R consideradas como funciones de la esfera de Riemann en sí misma, es decir $R : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, son continuas en todo punto de \mathbb{S} , incluido ∞ .

Solución. Sea $R : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$ una función racional, los únicos casos que tendremos que considerar son $z = \infty$ y aquellos puntos $\alpha \in \mathbb{C}$ tales que $R(\alpha) = \infty$, pues en los demás casos la continuidad se sigue del hecho que R es cociente de funciones continuas.

En primer lugar observamos que la función particular $w = R_0(z) = \frac{1}{z}$ es continua en $z = 0$, con la distancia cordal. En efecto si $\delta(z, 0) < \tau$ con $\tau < \frac{\sqrt{3}}{2}$ es decir

$$\delta(z, 0) = \frac{|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} < \tau < \frac{1}{2},$$

entonces

$$|z| = \frac{\delta(z, 0)}{\sqrt{1 - \delta(z, 0)^2}} < 2\tau,$$

luego para $w = \frac{1}{z}$ tenemos

$$\delta(w, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |w|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{|z|^2}}} = \frac{|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} < |z| < 2\tau,$$

es decir hemos probado la continuidad de R_0 en $z = 0$.

También se comprueba fácilmente la continuidad de R_0 en $z = \infty$, en efecto si $\delta(z, \infty) < \tau < \frac{\sqrt{3}}{2}$, es decir

$$\delta(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} < \tau,$$

entonces

$$|z| = \frac{\sqrt{1 - \delta(z, \infty)^2}}{\delta(z, \infty)} > \frac{1}{2\tau}$$

luego para $w = R_0(z)$ tenemos

$$\delta(w, 0) = \frac{|w|}{\sqrt{1 + |w|^2}} < |w| = \frac{1}{|z|} < 2\tau.$$

A continuación observamos que del caso anterior se deduce que las funciones $R_\alpha(z) = \frac{1}{z-\alpha}$ también son continuas en $z = \alpha$ en la esfera de Riemann pues R_α puede escribirse como composición de la traslación $L_\alpha(z) = z - \alpha$ y de R_0 , y como composición de funciones continuas concluimos que $R_\alpha = R_0 \circ L_\alpha$ es también continua en α .

Finalmente dada una función racional cualquiera R y sea $R(\alpha) = \beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{S}$, si $\alpha \neq \infty$, $\beta = \infty$, consideramos la función $R_1 = R_0 \circ R$ de tal forma que $R_1(\alpha) = 0$, por tanto es continua en α y puesto que también $R = R_0 \circ R_1$ siendo R_1 continua en α y R_0 continua en $0 = R_1(\alpha)$ concluimos que también R es continua en α . Los casos restantes caso $\alpha = \infty$, $\beta \neq \infty$, y $\alpha = \infty$, $\beta = \infty$, pueden ser tratados análogamente.

Problema 2. Sea $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$, una función uniformemente continua en $B(0, 1) = \{z \mid |z| < 1\}$ el círculo unidad. Probar que para toda sucesión $\{z_n\} \subset B(0, 1)$ convergiendo a un punto de la frontera $\zeta \in C(0, 1)$, $C(0, 1)$ la circunferencia unidad, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$ existe y depende solamente de ζ , no de la sucesión dada, es decir dada otra sucesión $\{z'_n\} \subset B(0, 1)$, $z'_n \rightarrow \zeta$, entonces también existe el $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z'_n)$ y es el mismo que para la sucesión precedente.

Solución. Por la continuidad uniforme de $f(z)$ en $B(0, 1)$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $z, z' \in B(0, 1)$, $|z - z'| < \delta$, entonces $|f(z) - f(z')| < \epsilon$.

Sea $\{z_n\} \rightarrow \zeta = e^{i\theta}$, entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|z_n - \zeta| < \frac{\delta}{2}$, para $n > n_0$. Por tanto para $m, n > n_0$, se tiene

$$|z_n - z_m| < |z_n - \zeta| + |z_m - \zeta| < \delta,$$

es decir, $\{f(z_n)\}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto tendrá un límite l .

Si tenemos otra sucesión $\{z'_n\}$ tendiendo también a ζ entonces $\{f(z'_n)\}$ también tenderá a un límite l' . Para comprobar que ambos límites han de ser el mismo, es decir, no dependen de la sucesión, observamos que dado $\epsilon > 0$ arbitrario podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z')| < \frac{\epsilon}{3}$ cuando $|z - z'| < \delta$ y podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$, podemos obtener simultáneamente

$$|z_n - z'_n| < \delta, \quad |f(z_n) - l| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |f(z'_n) - l'| < \frac{\epsilon}{3},$$

de tal forma que eligiendo un $n > n_0$, tendremos

$$|l - l'| \leq |f(z_n) - l| + |f(z_n) - f(z'_n)| + |f(z'_n) - l'| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

y como ϵ es arbitrario concluimos $l = l'$.

Problema 3. Demostrar que si una función analítica $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, toma solamente valores reales, entonces es constante en A .

Solución. Sea $f(z) = u(x, y)$, $v(x, y) = \text{Im } f(z) \equiv 0$, donde $z = x + iy$, entonces por las Ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} = 0,\end{aligned}$$

de donde se concluye $f = u = \text{constante}$.

Problema 4. Demostrar que si $f(z)$ es analítica y

$$g(z) = |f(z)|^2 + f(z),$$

es también analítica, entonces $f(z)$ es constante.

Solución. De la hipótesis se deduce $g - f = |f|^2$ es una función analítica y además toma solamente valores reales luego por el Problema 3 ha de ser una constante y por tanto $f(z)$ ha de ser también una constante.

Problema 5. Se pide:

i) Estudiar si la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$f(z) = z \text{Re } z,$$

satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$.

ii) Estudiar la analiticidad de f en $z = 0$.

Solución.

i) Sea $z = x + iy$, $\text{Re } z = x$, entonces

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = (x + iy)x = x^2 + ixy,$$

$$f(x + i0) = u(x, 0) + iv(x, 0) = x^2, \text{ de donde}$$

$$u(x, 0) = x^2, v(x, 0) \equiv 0, \text{ de donde obtenemos,}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) = [2x]_{(0,0)}, \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0,$$

También se observa $f(iy) = u(0, y) + iv(0, y) \equiv 0$, es decir $u(0, y) \equiv v(0, y) \equiv 0$ y por tanto también

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Luego concluimos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(0, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(0, 0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0.\end{aligned}$$

Luego se satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann en $(0, 0)$.

ii) Puesto que

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \rightarrow (x^2, yx) \end{array} ,$$

es de clase C^∞ , la función f tiene derivada en sentido complejo en $z = 0$. Sin embargo no podemos decir que $f(z)$ es analítica en $z = 0$ pues para la analiticidad se requiere la existencia de derivada en un entorno del punto, lo cual no ocurre pues para $z \neq 0$ no se satisfacen las Ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Problema 6. Determinar los dominios donde la función

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2i|xy| ,$$

es analítica.

Solución. Mediante la función $f(z)$ dada, pueden representarse las siguientes funciones

$$\begin{array}{lcl} a) f(z) & = & x^2 - y^2 + 2ixy = z^2 , \\ b) f(z) & = & x^2 - y^2 - 2ixy = \overline{z^2} , \end{array}$$

el caso a) ocurrirá cuando $xy \geq 0$, el caso b) ocurrirá cuando $xy \leq 0$. Como solo el caso a) es analítico, $f(z)$ será analítica cuando $xy > 0$, es decir en el 1º y 3º cuadrante.

Problema 7. Si $f(z)$ es holomorfa en $B(0, 1) = \{z \mid |z| < 1\}$, estudiar la holomorfía en $B(0, 1)$ en los siguientes casos

$$i) g(z) = \overline{f(\bar{z})} , \quad ii) g(z) = f(\bar{z}) , \quad iii) g(z) = \overline{f(\bar{z})} .$$

Solución.

i) Si $f = u + iv$ entonces $\bar{f} = U + iV = u - iv$.

Si \bar{f} fuera holomorfa entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann para \bar{f} serían

$$U_x = V_y , \quad U_y = -V_x$$

es decir

$$u_x = -v_y , \quad u_y = v_x . \tag{1}$$

Por otra parte, las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f dan

$$u_x = v_y , \quad u_y = -v_x . \tag{2}$$

De (1) y (2) se concluye

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0 ,$$

es decir u, v y f son constantes. Es decir \overline{f} es holomorfa si y solo si f es constante.

ii) Si $f = u + iv$ entonces $g(z) = f(\bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y) = u(x, -y) + iv(x, -y)$.

If $g(z) = f(\bar{z})$ fuera holomorfa, las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $g(z)$ serían

$$U_x = V_y , U_y = -V_x$$

es decir

$$u_x = -v_y , \quad -u_y = -v_x ,$$

o equivalentemente

$$u_x = -v_y , \quad u_y = v_x ,$$

y otra vez junto con las ecuaciones de Riemann para $f(z)$ obtendríamos

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0 ,$$

y concluiríamos que $f(\bar{z})$ es holomorfa si y solo si $f(z)$ es constante.

iii) En el caso $\overline{f(\bar{z})} = U(x, y) + V(x, y) = u(x, -y) - v(x, -y)$, tenemos

$$\begin{aligned} U_x(x, y) &= u_x(x, -y) , \\ U_y(x, y) &= -u_y(x, -y) , \\ V_x(x, y) &= -v_x(x, -y) , \\ V_y(x, y) &= v_y(x, -y) , \end{aligned}$$

luego las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $\overline{f(\bar{z})}$ en el punto (x, y)

$$U_x = V_y , U_y = -V_x ,$$

son las mismas que las de $f(z)$ en el punto $(x, -y)$, y concluimos que $\overline{f(\bar{z})}$ es también holomorfa.

CAPITULO 3

SERIES DE POTENCIAS. LAS FUNCIONES ELEMENTALES

CAPITULO 3. SERIES DE POTENCIAS. FUNCIONES ELEMENTALES

- 3.1 Sucesiones y series de números complejos
- 3.2 Sucesiones y series de funciones complejas
- 3.3 Series de potencias
- 3.4 La función exponencial, funciones trigonométricas, la función potencial compleja
- 3.5 Funciones multiformes. Superficies de Riemann
- 3.6 Ejercicios

3.1 SUCESIONES Y SERIES DE NUMEROS COMPLEJOS

Se definen los conceptos de sucesión y serie de números complejos de forma análoga al campo real. Así pues entenderemos por una sucesión de números complejos una aplicación de los números naturales \mathbb{N} en \mathbb{C} , de tal forma que a cada $n \in \mathbb{N}$ le corresponde un número complejo a_n , a esta sucesión la representaremos por $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Una serie será una sucesión de números complejos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de tal forma que el término n -ésimo A_n se obtiene como la suma parcial n -ésima de otra sucesión asociada $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir

$$A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

Diremos que una sucesión es fundamental o de Cauchy si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $n_1, n_2 \geq n_0$, se tiene

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Diremos que $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente a a si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tqal que para todo $n \geq n_0$, se tiene

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

también diremos que a es el límite de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y escribiremos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Basándonos en la noción de convergencia de sucesiones complejas, definimos también la noción de convergencia de las series de términos complejos. Dada una serie

$$A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

de términos complejos, diremos que converge a A si la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de sumas parciales converge a A . Diremos también que A es el límite de $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y lo representaremos por

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 + a_1 + \dots + a_n) \\ &= a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots \end{aligned}$$

Una serie de términos complejos $\sum a_n$ se dice absolutamente convergente si la serie de términos reales no negativos $\sum |a_n|$ converge.

Se tiene

Proposición 3.1.1. *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Demostración. Ejercicio ().

Finalmente establecemos el criterio de la raíz para la convergencia de series de términos complejos que extiende el criterio de la raíz para series reales.

Teorema 3.1.1. *Dada una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, sea*

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

entonces si $\lambda < 1$ la serie converge absolutamente y si $\lambda > 1$ la serie diverge.

Demostración. Ejercicio ().

En el caso $\lambda = 1$, el criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie. Recordemos también que si existe el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|},$$

entonces este límite coincide con el de la raíz y de esta manera se obtiene el llamado criterio del cociente.

Teorema 3.1.2. *Dada una serie de términos complejos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, si existe el límite*

$$\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|},$$

entonces si $\beta < 1$ la serie converge absolutamente y si $\beta > 1$ la serie diverge.

3.2 SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES COMPLEJAS

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, llamaremos sucesión de funciones de variable compleja en A a una aplicación de los números naturales en el conjunto de las funciones $\{f : A \rightarrow \mathbb{C}\}$, de tal manera que a cada $n \in \mathbb{N}$, le corresponde una función $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$. Representaremos una sucesión de funciones por $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Llamaremos serie de funciones de variable compleja en A a una sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde el término n -ésimo $F_n : A \rightarrow \mathbb{C}$ viene expresado como la suma parcial n -ésima de otra sucesión asociada $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, es decir

$$F_n(z) = f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z).$$

Representaremos la serie $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ por la notación $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Definición 3.2.1. *Diremos que una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto converge en $z_0 \in A$, cuando converge la sucesión numérica $\{f_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diremos que la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente, cuando converge para todo $z \in A$.*

Ejemplo 1. La sucesión de funciones

$$f_n(z) = \frac{z^n}{n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

converge puntualmente a la función $f(z) \equiv 0$ en el disco unidad $D = \{z \mid |z| = 1\}$.

Definición 3.2.2. *Diremos que la serie*

$$f_0 + f_1 + \dots + f_n + \dots$$

converge en un punto $z_0 \in A$, A abierto de \mathbb{C} , si la sucesión $\{F_n(z_0)\}_{n \in \mathbb{N}}$, converge donde

$$F_n = f_0 + f_1 + \dots + f_n.$$

Diremos que la serie converge puntualmente en A si la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente en A .

Ejemplo 2. La serie

$$1 + z + \dots + z^n + \dots$$

converge puntualmente en el disco unidad $D = \{z \mid |z| < 1\}$ pues en este caso

$$F_n(z) = 1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$

converge puntualmente a

$$F(z) = \frac{1}{1 - z}.$$

Definición 3.2.3. *Diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en A , donde $A \subset \mathbb{C}$ es un abierto, converge uniformemente hacia la función f si para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon,$$

para todo $z \in A$, y todo $n \geq n_0$.

La sucesión de funciones del Ejemplo 1 converge también uniformemente a la función $f(z) \equiv 0$ en el disco unidad pues dado $\epsilon > 0$, encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ para $n \geq n_0$ y claramente se tiene

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \frac{z^n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} < \epsilon,$$

para $n \geq n_0$, $z \in D$.

Sin embargo la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$f(z) = z^n,$$

no converge uniformemente en el disco unidad D , aunque si converge puntualmente a la función idénticamente nula $f(z) \equiv 0$.

En efecto, es inmediata la convergencia puntual, sin embargo la convergencia no puede ser uniforme pues considerando los puntos

$$z_n = 1 - \frac{1}{n},$$

se tiene

$$f_n(z_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e},$$

de tal forma que si tomamos ϵ tal que $0 < \epsilon < \frac{1}{e}$, no podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(z)| < \epsilon, \quad n \geq n_0, \quad z \in D,$$

pues esto contradiría la convergencia $f_n(z_n) \rightarrow \frac{1}{e}$.

Definición 3.2.4. Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ converge uniformemente en un abierto A , si la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde

$$F_n = f_0 + \dots + f_n,$$

converge uniformemente en A .

Existe un criterio de gran aplicabilidad para asegurar la convergencia uniforme de una serie de funciones, este es el llamado criterio de la mayorante de Weierstrass.

Teorema 3.2.1. (Criterio de la mayorante de Weierstrass). Una condición suficiente para que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converja uniformemente en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, es que exista una serie numérica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tal que

$$|f_n(z)| \leq a_n, \forall z \in A, n = 1, 2, \dots$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se dice que es una mayorante de la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.

Demostración. En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$a_{n+1} + \dots + a_{n+p} < \epsilon,$$

para $n \geq n_0$, $p \in \mathbb{N}$ arbitrario.

Por la condición de mayorante también tendremos

$$|f_{n+1}(z) + \dots + f_{n+p}(z)| \leq |f_{n+1}(z)| + \dots + |f_{n+p}(z)| \leq a_{n+1} + \dots + a_{n+p} < \epsilon,$$

luego la sucesión de las sumas parciales $\{F_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a una función $F(z)$.

La convergencia uniforme de $\{F_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ a $F(z)$ en A se sigue del hecho que dado $\epsilon > 0$, encontramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{\nu \geq n_0} a_\nu < \epsilon,$$

y por tanto

$$\begin{aligned} |F_n(z) - F(z)| &= \left| \sum_{\nu \geq n} f_\nu(z) \right| \leq \sum_{\nu \geq n} |f_\nu(z)| \\ &\leq \sum_{\nu \geq n_0} a_\nu < \epsilon, \end{aligned}$$

si $n \geq n_0$. q.e.d.

Ejemplo. La serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ converge uniformemente en todo disco $D_r = \{z \mid |z| < r\}$ para $0 \leq r < 1$, pues se tiene

$$|f_n(z)| = |z^n| < r^n,$$

y $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ es una serie convergente.

3.3 SERIES DE POTENCIAS

Se llaman series de potencias a las series funcionales de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$, $a_n \in \mathbb{C}$, para todo n . Los números a_n se llaman coeficientes de la serie.

Cuando $z_0 = 0$, se tiene la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n,$$

y entonces decimos que es una serie centrada en el origen.

Basándonos en el criterio de la raíz para la convergencia de las series numéricas se obtiene una descripción muy sencilla del dominio de convergencia de una serie de potencias, es decir del conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ para los cuales la serie converge. El dominio de convergencia de una serie de potencias siempre está relacionado con un círculo que llamaremos círculo de convergencia, de tal forma que la serie converge en el interior y diverge en el exterior, quedando por determinar el comportamiento de la serie en los puntos de la circunferencia frontera de dicho círculo.

De forma precisa a continuación presentamos el Teorema de Cauchy-Hadamard,

Teorema 3.3.1. (Teorema de Cauchy-Hadamard). *Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, consideramos el número*

$$\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Entonces si llamamos $R = \frac{1}{\lambda}$, tenemos:

i) *La serie converge absolutamente en el interior del círculo*

$$D_R = \{z \mid |z - z_0| < R\}$$

y diverge en el exterior del círculo cerrado

$$\overline{D_R} = \{z \mid |z - z_0| \leq R\},$$

es decir diverge para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - z_0| > R$.

ii) La convergencia es uniforme en todo el círculo de radio r estrictamente menor que R , $0 \leq r < R$.

El número R se llama radio de convergencia de la serie de potencias, puede ser finito o infinito y el círculo abierto asociado se llama círculo de convergencia.

Demostración. Aplicamos el criterio de la raíz a la serie de valores absolutos, es decir,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n,$$

y obtenemos

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |z - z_0|^n} &= |z - z_0| \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= |z - z_0| \lambda, \end{aligned}$$

de tal forma que la serie convergerá si $|z - z_0| \lambda < 1$ es decir $|z - z_0| < \frac{1}{\lambda}$ y será divergente cuando $|z - z_0| \lambda > 1$ es decir cuando $|z - z_0| > \frac{1}{\lambda}$.

Si $\lambda = 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| |z - z_0|^n} = 0,$$

y la serie de valores absolutos converge para todo $z \in \mathbb{C}$.

ii) Por el apartado i) la serie es absolutamente convergente en $z = z_0 + r$, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n,$$

converge. Pero esta serie es una mayorante de

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |z - z_0|^n,$$

para todo $z \in D_r(z_0)$, luego ii) se sigue del criterio de la mayorante de Weierstrass. q.e.d.

Ejemplo. El radio de convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n z^n,$$

es $R = 1$, Pues

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

La convergencia uniforme sobre los círculos de radio menor que el círculo de convergencia tiene la importante consecuencia que las series de potencias son continuas en el interior el círculo de convergencia. Resulta también que la suma de una serie de potencias es derivable en el interior del círculo de convergencia.

Teorema 3.3.2. *La función definida por la suma de una serie de potencias en su círculo de convergencia es derivable en todo punto de dicho círculo, además la derivación puede hacerse término a término. Es decir*

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}.$$

Demostración. Podemos suponer $z_0 = 0$ sin pérdida de generalidad. En primer lugar comprobamos que el radio de la serie derivada

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1},$$

coincide con el radio de la serie dada. Esto se sigue de la fórmula de Cauchy-Hadamard pues

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n |a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

teniendo en cuenta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Sea ahora z_1 un punto del círculo de convergencia $D(0, R)$ de la serie dada, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} &= \frac{1}{z - z_1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n - z_1^n}{z - z_1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z_1^{n-1}). \end{aligned}$$

Tenemos que probar que el límite de la suma de esta serie, cuando z tiende a z_1 es

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z_1^{n-1}.$$

Puesto que z_1 pertenece al círculo $D(0, R)$ se puede tomar R_1 tal que

$$|z_1| < R_1 < R,$$

de tal forma que la serie derivada está mayorada por la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n |a_n| R_1^{n-1},$$

que a su vez es convergente, por serlo absolutamente en $z = R_1$, la serie derivada.

Dado $\epsilon > 0$, podemos, por tanto, encontrar $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$a) \sum_{n=m}^{\infty} n |a_n| R_1^{n-1} < \frac{\epsilon}{4},$$

de donde resulta para valores de z tales que $|z| \leq R_1$

$$b) \left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z_1^{n-1}) \right| < \frac{\epsilon}{4},$$

pues para estos valores

$$\left| (z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z_1^{n-1}) \right| < n R_1^{n-1}.$$

También de a) se deduce

$$\left| \sum_{n=m}^{\infty} n a_n z_1^{n-1} \right| < \frac{\epsilon}{4},$$

pues

$$|z_1| < R_1.$$

De estas desigualdades concluimos para z tal que $|z| \leq R_1$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z_1^{n-1} \right| \\ & \leq \sum_{n=0}^{m-1} |a_n| \left| (z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z_1^{n-1}) - n z_1^{n-1} \right| \\ & \quad + \left| \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z_1^{n-1}) \right| \\ & \quad + \left| \sum_{n=m}^{\infty} n a_n z_1^{n-1} \right| \\ & < \sum_{n=0}^{m-1} |a_n| \left| (z^{n-1} + z^{n-2} z_1 + \dots + z_1^{n-1}) - n z_1^{n-1} \right| + \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Ahora el sumatorio del último término de esta cadena de desigualdades es una suma de valores absolutos de polinomios y por tanto una función continua, por lo que podemos encontrar un entorno $U(z_1)$ de tal forma que para todo $z_1 \in U(z_1)$, dicho sumatorio es menor que $\frac{\epsilon}{2}$, de donde concluimos

$$\left| \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_1^{n-1} \right| < \epsilon,$$

i.e.

$$\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_1^{n-1}.$$

q.e.d.

3.4 LA FUNCION EXPONENCIAL COMPLEJA. LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS, LA FUNCION POTENCIAL COMPLEJA

Definiremos la función exponencial e^z mediante la relación

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

es inmediato comprobar que la serie converge en todo el plano, es decir, tiene radio de convergencia $R = \infty$.

Claramente cuando consideramos números reales $z = x$, entonces nuestra definición es coincidente con la exponencial real.

La fórmula del campo real

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1} e^{x_2}$$

permanece válida en el campo complejo

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

y puede demostrarse mediante la multiplicación de series.

Para valores imaginarios $z = iy$ tenemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Por tanto

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

esta importante relación es conocida como fórmula de Euler.

También deducimos

$$\begin{aligned} |e^{iy}| &= |\cos y + i \operatorname{sen} y| = 1, \\ |e^z| &= |e^x| |e^{iy}| = e^x, \end{aligned}$$

y claramente

$$\arg e^z = \operatorname{Im} z = y.$$

La función e^z es periódica, de periodo $2\pi i$, en efecto

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z,$$

pues

$$e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \operatorname{sen} 2\pi = 1.$$

Recordando la forma polar de un número complejo

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta),$$

donde $r = |z|$, $\theta = \arg z$, observamos que todo número complejo admite la forma

$$z = r e^{i\theta}.$$

Mediante derivación término a término concluimos también, como en el caso real

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z.$$

En el campo real si x es positivo, la ecuación $e^y = x$, tiene una única solución $y = \log x$.

Por el contrario en el campo complejo si $z \neq 0$, la ecuación $e^w = z$ tiene infinitas soluciones, cada una de las cuales se dice que es una determinación del logaritmo de z .

Escribiendo $w = u + iv$ se tiene

$$e^u (\cos v + i \operatorname{sen} v) = z,$$

de donde v ha de ser uno de los valores de $\arg z$ y $e^u = |z|$ o bien $u = \log |z|$.

Por tanto toda solución de la ecuación $e^w = z$ es de la forma

$$w = \log |z| + i \arg z,$$

luego existen tantas determinaciones del logaritmo como determinaciones de $\arg z$, y dos determinaciones cualesquiera de $\log z$ difieren en un múltiplo de $2\pi i$.

Llamaremos valor principal de $\log z$ al valor que se obtiene dando a $\arg z$ su valor principal $\operatorname{Arg} z$. El valor principal del logaritmo, en el caso $z = x$ real, coincide con el logaritmo ordinario para $x > 0$.

Más adelante volveremos con la función $\log z$ cuando tratemos con mas detalle las funciones multiformes.

A continuación introducimos las funciones trigonométricas en el campo complejo.

Definimos las funciones senz y $\cos z$ cuando z es complejo, también como suma de series de potencias que extienden las correspondientes al caso real. Esto es

$$\text{senz} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

y otra vez se comprueba que ambas series convergen en todo el plano, es decir su radio de convergencia es $R = \infty$.

Por derivación término a término se obtiene

$$\frac{d}{dz} (\text{senz}) = \cos z, \quad \frac{d}{dz} (\cos z) = -\text{senz}.$$

También se definen el resto de las funciones trigonométricas por

$$\text{tg}z = \frac{\text{senz}}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{1}{\text{tg}z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \text{cosec}z = \frac{1}{\text{senz}}.$$

Con nuestras definiciones se deducen inmediatamente las relaciones

$$e^{iz} = \cos z + i \text{senz}, \quad e^{-iz} = \cos z - i \text{senz},$$

o equivalentemente las relaciones de Euler

$$\cos z = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}), \quad \text{senz} = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}).$$

Finalmente introducimos las funciones hiperbólicas de una variable compleja de forma análoga al caso real, es decir definimos

$$\text{senh}z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}), \quad \cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}),$$

y a partir de ellas el resto de las funciones hiperbólicas.

Finalmente definimos la función potencial con exponente complejo z^ζ , $\zeta \in \mathbb{C}$, mediante

$$z^\zeta = e^{\zeta \log z}.$$

Otra vez, por cada determinación del logaritmo, obtenemos una determinación de la función potencial. Hablaremos de la determinación principal de la función potencial a aquella correspondiente a la determinación principal del logaritmo.

3.5 FUNCIONES MULTIFORMES. SUPERFICIES DE RIEMANN

Nos hemos encontrado en los apartados anteriores ejemplos de funciones como

$$w = \arg z, w = \log z, w = z^\zeta, (\zeta \text{ complejo}),$$

que para cada valor de z , el valor de la función w puede asumir varios o infinitos valores. Este hecho claramente contradice el concepto de función en el sentido de aplicación.

Es por esto que distinguiremos en lo que sigue entre "función uniforme" y "función multiforme". Una función uniforme será aquella que se corresponde en sentido estricto con el concepto de función, es decir, que para cada valor de la variable z tenemos un único valor $w = f(z)$ de la función. Por el contrario, una función multiforme será aquella que para cada valor de la variable z , la función $w = f(z)$ puede tomar diversos valores, pero de tal manera que si localmente fijamos una elección de los posibles valores de $w = f(z)$, entonces podemos trabajar con dicha elección como si fuera una función uniforme.

Aquí no daremos una definición precisa de función multiforme, nos limitaremos a observar con cierto detalle alguno de los ejemplos antes mencionados.

En primer lugar consideramos la función $w = \sqrt{z}$, este es un caso particular de la función potencial z^α , para $\alpha = \frac{1}{2}$.

De la definición de potencial compleja obtenemos

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2} \ln z} = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i \arg z)} \\ |z|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\arg z}{2}} &= |z|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\text{Arg} z + 2k\pi}{2}}, k = 0, 1, \\ &= \left(\cos \frac{\text{Arg} z + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\text{Arg} z + 2k\pi}{2} \right), k = 0, 1, \end{aligned}$$

que es la conocida fórmula de Moivre para la raíz cuadrada de los números complejos.

Nuestra definición de $z^{\frac{1}{2}}$ es coherente con el concepto de \sqrt{z} en el sentido que

$$\left(z^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \left(|z|^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\arg z}{2}}\right)^2 = |z| e^{i \arg z} = z.$$

Partimos pues de la relación $w^2 = z$ y pongamos z y w en polares

$$z = r e^{i\theta}, w = R e^{i\varphi},$$

obtenemos

$$R^2 e^{2i\varphi} = r e^{i\theta},$$

tomando $0 \leq \theta \leq 2\pi$, tenemos dos soluciones

$$w_1 = w_1(z) = \sqrt{r} e^{i \frac{\theta}{2}}, w_2 = w_2(z) = \sqrt{r} e^{i \frac{\theta + 2\pi}{2}} = -\sqrt{r} e^{-i \frac{\theta}{2}}.$$

En particular para z real y positivo tenemos

$$w_1 = \sqrt{r} , w_2 = -\sqrt{r},$$

donde por \sqrt{r} entendemos la raíz real positiva.

Hacemos variar θ de 0 a 2π , entonces z describe una circunferencia de radio r alrededor del origen, w_1 describe una semicircunferencia de centro el origen en el semiplano superior, empezando en \sqrt{r} y terminando en $-\sqrt{r}$ y w_2 describe una semicircunferencia en el semiplano inferior empezando en $-\sqrt{r}$ y terminando en \sqrt{r} .

Concluimos que w_1 varía de una forma discontinua a lo largo del semieje real positivo pues cuando z se aproxima a dicho semieje a través del semiplano superior, w_1 se aproxima también a dicho semieje, mientras que cuando z se aproxima a dicho semieje positivo a través del semiplano inferior, es decir, con argumento menor que 2π , entonces w_1 se aproxima al semieje real negativo. Análogamente w_2 también se comporta de forma discontinua al aproximarse z al semieje real positivo.

Por tanto la ecuación $w^2 = z$, no tiene una solución uniforme $w = \sqrt{z}$ en todo el plano complejo.

Sin embargo si excluimos el semieje real positivo, es decir, consideramos el subdominio Ω de \mathbb{C} , donde

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+ , \quad \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} ,$$

dicha ecuación tiene dos soluciones $w_1(z), w_2(z)$ que llamaremos ramas de la función $w = \sqrt{z}$ en Ω .

Un procedimiento ingenioso para representar las dos ramas de la raíz conjuntamente y que ha resultado muy fructífero para el estudio de las funciones de variable compleja lo proporciona la introducción de las superficies de Riemann.

En el caso que nos ocupa de la función $w = \sqrt{z}$, la superficie de Riemann asociada se construye de la siguiente manera. Consideremos dos copias $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ del plano complejo \mathbb{C} , podemos imaginar \mathbb{C}_1 superpuesto a \mathbb{C}_2 y efectuamos en ambas copias un corte a lo largo del semieje real positivo. Entonces pegamos o identificamos el borde inferior del corte en \mathbb{C}_1 con el borde superior del corte en \mathbb{C}_2 y análogamente identificamos el borde inferior del corte en \mathbb{C}_2 con el borde superior del corte en \mathbb{C}_1 .

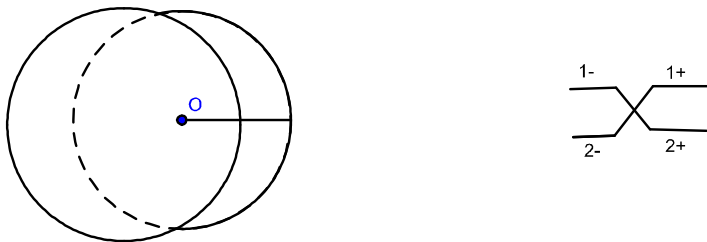


Fig. 3.1

Obtenemos de esta manera un recubridor X del plano \mathbb{C} formado por dos hojas.

Consideremos ahora un valor inicial z_0 en una de las hojas que forman X , por ejemplo \mathbb{C}_1 y fijemos para este punto de X el valor $w_1(z_0)$ como valor de la función \sqrt{z} en el plano complejo imagen. Hagamos entonces a z describir en X un camino que rodea al origen partiendo de z_0 , en algún momento z alcanzará el borde inferior de \mathbb{C}_1 , entonces pasará al plano \mathbb{C}_2 , de tal manera que haciendo variar de forma continua el valor $w(z)$, al llegar de nuevo a z_0 en \mathbb{C}_2 obtendremos el valor $w_2(z_0)$, recorriendo entonces el mismo camino pero esta vez en \mathbb{C}_2 , finalmente llegaríamos al punto inicial z_0 en \mathbb{C}_1 con valor correspondiente en el plano imagen $w_1(z_0)$.

Es decir en este caso se comprueba que \sqrt{z} establece una correspondencia biyectiva entre X y el plano complejo. Diremos que X es la superficie de Riemann asociada a la función $w = \sqrt{z}$.

Consideremos ahora un valor inicial z_0 de tal forma que la rama w_1 toma en este punto el valor $w_1^0 = w_1(z_0)$. Fijamos en el plano \mathbb{C}_1 el valor w_1^0 y describamos un camino cerrado en el plano complejo \mathbb{C} , que encierre el origen y en sentido positivo, es decir, en sentido contrario al de las agujas del reloj.

Cuando la variable z recorre este camino y vuelve al punto z_0 , entonces la rama w_1 partirá de w_1^0 en \mathbb{C}_1 y en algún momento alcanzará el borde inferior de \mathbb{C}_1 , entonces pasará al plano \mathbb{C}_2 donde describirá un camino cerrado con valores w_2 hasta alcanzar el borde inferior de \mathbb{C}_2 , atravesando el borde superior de \mathbb{C}_1 y volviendo de una forma continua hasta el valor w_1^0 inicial.

Esto se deduce de la manera en que fueron definidas las ramas w_1, w_2 de \sqrt{z} y de esta forma se comprueba que \sqrt{z} establece una correspondencia biunívoca entre el plano complejo \mathbb{C} y la superficie de Riemann construida arriba.

El punto $z = 0$ juega un papel distinguido en el modelo descrito anteriormente pues cuando z describe un camino cerrado simple alrededor del origen, entonces $w = \sqrt[n]{z}$ pasa del plano \mathbb{C}_1 , al plano \mathbb{C}_2 , esto no ocurre cuando el camino cerrado no rodea al origen pues en este caso el argumento de z no queda incrementado en 2π sino que vuelve al valor inicial. Por esta razón se dice que el punto $z = 0$ es un punto de ramificación de la función $w = \sqrt[n]{z}$.

De forma más general podemos considerar la función $\sqrt[n]{z}$, es decir $w = z^{\frac{1}{n}}$. En este caso tenemos la relación $w^n = z$, y para cada valor de z , tenemos n valores diferentes w_1, w_2, \dots, w_n de w , dados por

$$w_j = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2j\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2j\pi}{n} \right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

El punto $z = 0$ es un punto de ramificación y la superficie de Riemann correspondiente a esta función se compone de n hojas $\mathbb{C}_1, \dots, \mathbb{C}_n$. El punto de ramificación en este caso es de orden $n-1$.

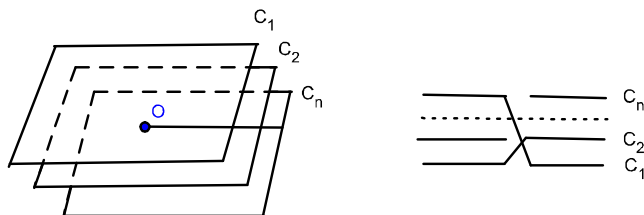


Fig.3.2

Superficie de Riemann de $w = \sqrt[n]{z}$, Superficie de Riemann de $w = \sqrt[n]{z}$.

Describimos a continuación la superficie de Riemann de la función $w = \log z$. En este caso cada entero k da lugar a una rama

$$w_k = \log r + i(\theta + 2k\pi)$$

de $\log z$ donde $z = re^{i\theta}$, es decir en este caso tenemos infinitas ramas diferentes. La superficie de Riemann de $\log z$ ha de tener pues infinitas hojas y argumentando como en el caso de la raíz puede obtenerse a partir de una sucesión

$$\dots \mathbb{C}_{-2}, \mathbb{C}_{-1}, \mathbb{C}_0, \mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \dots$$

de copias del plano complejo \mathbb{C} cortado a lo largo del semieje real positivo, de tal forma que cada copia \mathbb{C}_k tiene soldado su borde inferior con el borde

superior de \mathbb{C}_{k+1} , y su borde superior con el borde inferior de \mathbb{C}_{k-1} . De esta manera cuando nosotros giramos en torno a $z = 0$, vamos pasando de una rama a la siguiente sin volver nunca al punto de partida. Diremos que $z = 0$ es un punto de ramificación de orden infinito

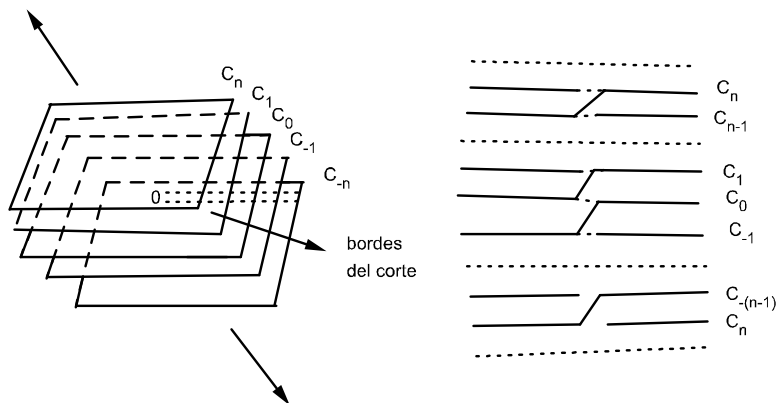


Fig.3.3

Superficie de Riemann de $w = \log z$.

3.6 EJERCICIOS

1. Estudiar el radio de convergencia de las series

$$i) \sum_{n \geq 0} n z^n,$$

$$ii) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} z^n.$$

2 .Determinar los dominios de convergencia de las siguientes series

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (z + 1 + i)^n,$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(z - i)^n}{n!} + n(z + 1 - i)^n \right).$$

3. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series en función del parámetro

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^p} z^n,$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n, \quad q > 0.$$

4. i) Calcular el radio de convergencia de la serie

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2},$$

y estudiar el comportamiento de la serie en la frontera del círculo de convergencia.

ii) Determinar el desarrollo en serie de $F'(z)$ en el interior del círculo de convergencia. ¿Presentan el mismo comportamiento en la frontera F y F' ?

5. Dadas las series de potencias

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n},$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n z^n, \quad \lambda > 0,$$

se pide:

- 1) determinar el radio de convergencia en cada caso,
- 2) sumar la serie en el círculo de convergencia,
- 3) estudiar la continuidad de las expresiones obtenidas en la circunferencia de radio igual al radio de convergencia.

6. Dada la serie

$$S(z) = z^2 + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^3} + \dots,$$

se pide:

- i) demostrar que la suma de los n primeros términos $S_n(z)$ es

$$S_n(z) = 1 + z^2 - \frac{1}{(1+z^2)^{n-1}},$$

- ii) estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de la serie.

7. Describir las curvas del plano complejo, a lo largo de las cuales son reales las funciones

$$i) w = e^z, \quad ii) w = \cos z, \quad iii) w = \operatorname{sen} z.$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 3

Problema 1. Estudiar el radio de convergencia de las series

$$\text{i) } \sum_{n=0}^{\infty} n z^n \quad , \quad \text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n \quad .$$

Solución.

$$\text{i) } \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad , \quad \text{luego } R = 1 \quad ,$$

$$\text{ii) } \frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \quad , \quad \text{luego } R = 1 \quad .$$

Problema 2. Determinar los dominios de convergencia de las siguiente series

$$\begin{aligned} \text{i) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) (z+1+i)^n \quad , \\ \text{ii) } & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(z-i)^n}{n!} + (z+1-i)^n \right) \quad . \end{aligned}$$

Solución.

i) El dominio de convergencia es el círculo $B(-1-i, 1)$ pues es una serie de potencias y

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1 \quad .$$

ii) El dominio de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n!}$ es \mathbb{C} pues el radio de convergencia $R_1 = \infty$, en efecto

$$\frac{1}{R_1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} \quad ,$$

ahora bien

$$\log \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log n!}{n}$$

y por la fórmula de Stirling

$$n! \simeq n^n \sqrt{2\pi n} e^{-n} ,$$

luego

$$\log \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n \log n + n - \frac{\log n}{2}}{n} = -\infty ,$$

luego $\frac{1}{R} = 0$ and $R = \infty$.

Es decir la primera serie converge en todo el plano y por tanto el dominio de la serie suma coincidirá con el de la segunda serie $\sum_{n=1}^{\infty} (z+1-i)^n$ que es el círculo $B(-1+i, 1)$, pues

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$$

de tal forma que $R = 1$.

Problema 3. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series en función del parámetro

$$\text{i) } \sum_{n=1}^{\infty} e^{n^p} z^n ,$$

$$\text{ii) } \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} z^n , \quad q > 0 .$$

Solución.

i) $\frac{1}{R_p} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{n^p}}$, tomamos logaritmos y obtenemos

$$\begin{aligned} \log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{n^p}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \sqrt[n]{e^{n^p}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{p-1} = \begin{cases} \infty & , \quad p > 1 \\ 1 & , \quad p = 1 \\ 0 & , \quad p < 1 \end{cases} , \text{ es decir } R_p = \begin{cases} 0 & , \quad p > 1 \\ \frac{1}{e} & , \quad p = 1 \\ 1 & , \quad p < 1 \end{cases} . \end{aligned}$$

ii) $\frac{1}{R_q} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q^{n^2}}$, tomamos logaritmos y obtenemos

$$\log \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{q^{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log \sqrt[n]{q^{n^2}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \log q}{n} = \begin{cases} +\infty & , \quad q > 1 \\ 0 & , \quad q = 1 \\ -\infty & , \quad q < 1 \end{cases} \quad , \text{ es decir } R_q = \begin{cases} 0 & , \quad q > 1 \\ 1 & , \quad q = 1 \\ \infty & , \quad q < 1 \end{cases} .$$

Problema 4.

i) Calcular el radio de convergencia de la serie

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2} ,$$

y estudiar el comportamiento de la serie en la frontera del círculo de convergencia,

ii) Determinar el desarrollo en serie de $F'(z)$ en el interior del círculo de convergencia. ¿Presentan el mismo comportamiento F y F' en la frontera?

Solución.

i) $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}} = 1$, la serie converge absoluta y uniformemente en la frontera, es decir la circunferencia unidad $C = \{z \mid |z| = 1\}$, pues está mayorada por la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

ii) por el teorema de derivación término a término de las series de potencias, el desarrollo en serie de la derivada $F'(z)$ es $F'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ que tiene el mismo radio de convergencia $R = 1$ pero el comportamiento en la frontera C es distinto pues la serie diverge para $z = 1$

Problema 5. Dadas las series de potencias

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \quad , \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n z^n \quad , \quad \lambda > 0 \quad ,$$

se pide:

- 1) determinar el radio de convergencia en cada caso,
- 2) sumar la serie en el círculo de convergencia,
- 3) estudiar la continuidad de las expresiones obtenidas en la circunferencia de en la circunferencia de radio igual al radio de convergencia.

Solución.Serie *i*)

$$1) \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = 1,$$

$$2) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^n}{n}, \quad f'(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} z^n,$$

luego

$$f'(z) = \frac{1}{1-z} \quad \text{y por tanto} \quad f(z) = \ln \frac{1}{1-z},$$

por los teoremas de derivación e integración de una serie de potencias término a término.

$$3) \quad f(z) \text{ es continua en } C = \{z \mid |z| = 1\} \text{ excepto en } z = 1.$$

Serie *ii*)

$$1) \quad R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\lambda^n}} = \frac{1}{\lambda},$$

$$2) \quad f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \lambda^n z^n = \frac{\lambda z}{1 - \lambda z},$$

$$3) \quad f(z) \text{ es continua en } C_{1/\lambda} = \left\{z \mid |z| = \frac{1}{\lambda}\right\} \text{ excepto en } z = \frac{1}{\lambda}.$$

Problema 6. Dada la serie

$$S(z) = z^2 + \frac{z^2}{1+z^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^2} + \frac{z^2}{(1+z^2)^3} \dots,$$

se pide:

i) demostrar que la suma $S_n(z)$ de los n primeros términos es

$$S_n(z) = 1 + z^2 - \frac{1}{(1+z^2)^{n-1}},$$

ii) estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de la serie.

Solución.

i)

$$\begin{aligned}
S_n(z) &= z^2 \left(1 + \frac{1}{1+z^2} + \dots + \frac{1}{(1+z^2)^{n-1}} \right) \\
&= z^2 \frac{\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}} \frac{1}{1+z^2} - 1}{\frac{1}{1+z^2} - 1} = z^2 \frac{\frac{1}{(1+z^2)^n} - 1}{\frac{1}{1+z^2} - 1} \\
&= z^2 \frac{\frac{1}{(1+z^2)^{n-1}} - (1+z^2)}{1 - (1+z^2)} \\
&= 1 + z^2 - \frac{1}{(1+z^2)^{n-1}} ,
\end{aligned}$$

ii) la serie converge en $\{z \mid |1+z^2| > 1\}$ y converge uniformemente en $\{z \mid |1+z^2| > 1+\epsilon\}$ para todo $\epsilon > 0$ y diverge en $\{z \mid |1+z^2| < 1\}$.

Problema 7. Describir las curvas del plano complejo, a lo largo de las cuales son reales las funciones

$$i) w = e^z, \quad ii) w = \cos z, \quad iii) w = \operatorname{sen} z.$$

Solución.

$$i) w = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y,$$

para que e^z sea real tiene que ocurrir que $e^x \operatorname{sen} y = 0$ o equivalentemente $\operatorname{sen} y = 0$ es decir las líneas buscadas son las rectas $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
ii) w &= \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} = \frac{e^{-y} \cos x + e^y \cos x + i(e^{-y} \operatorname{sen} x - e^y \operatorname{sen} x)}{2},
\end{aligned}$$

así pues para que $\cos z$ sea real tiene que ocurrir $(e^{-y} - e^y) \operatorname{sen} x = 0$, es decir $e^{-y} - e^y = 0$ o bien $\operatorname{sen} x = 0$, luego las líneas buscadas son la recta real $y = 0$, y también las rectas $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned}
iii) w &= \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} = \frac{e^{-y} \cos x - e^y \cos x + i(e^{-y} \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x)}{2i} \\
&= \frac{(e^{-y} \operatorname{sen} x + e^y \operatorname{sen} x) - i(e^{-y} \cos x - e^y \cos x)}{2},
\end{aligned}$$

luego para que $\operatorname{sen} z$ sea real tiene que ocurrir $(e^{-y} - e^y) \cos x = 0$, es decir las líneas buscadas son la recta real $y = 0$, y las rectas $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

CAPITULO 4

INTEGRACION EN EL CAMPO COMPLEJO. EL TEOREMA DE CAUCHY

CAPITULO 4. INTEGRACION EN EL CAMPO COMPLEJO EL TEOREMA DE CAUCHY

- 4.1 Integral de Riemann-Stieltjes
- 4.2 La integral de una función de variable compleja
- 4.3 Integrales y primitivas
- 4.4 El teorema de Cauchy
- 4.5 Ejercicios

4.1 INTEGRAL DE RIEMANN-STIELTJES

Sean f, γ dos funciones complejas acotadas de variable real

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} , \gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} ,$$

donde $[a, b]$ es un intervalo compacto de \mathbb{R} .

Como es usual en la teoría de la integración en el campo real, se consideran particiones finitas Δ del intervalo $[a, b]$. Una tal partición Δ viene descrita por una cantidad finita de puntos

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}.$$

Llamaremos norma de una partición Δ y lo representaremos por $|\Delta|$ al número

$$|\Delta| = \max \{|t_{k-1} - t_k| , k = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}([a, b])$ al conjunto de todas las particiones finitas de $[a, b]$.

Diremos que una partición Δ' es más fina que Δ si $\Delta \subset \Delta'$.

Como en el campo real llamaremos suma de Riemann-Stieltjes de la función f respecto a γ correspondiente a la partición Δ al número

$$S(\Delta, f, \gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) [\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)],$$

donde s_k es un punto del intervalo $[t_k, t_{k+1}]$.

Diremos que f es integrable en el sentido de Riemann-Stieltjes respecto de γ , si existe un número complejo I tal que para cada $\epsilon > 0$, existe una partición Δ_ϵ , de manera que para toda partición Δ más fina que Δ_ϵ se tenga

$$|S(\Delta, f, \gamma) - I| < \epsilon,$$

para toda suma de Riemann-Stieltjes asociada a Δ .

El número I se denomina integral de f respecto de γ y se escribe

$$I = \int_a^b f d\gamma.$$

Se deducen facilmente las propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes análogas al campo real como por ejemplo la linealidad.

Una propiedad importante que tendrá aplicación continuamente en la teoría de las funciones de variable compleja es dada por la siguiente proposición.

Proposición 4.1.1. *Si f es una función compleja continua en $[a, b]$ y γ define un camino rectificable en $[a, b]$, entonces existe la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto de γ y se tiene la relación*

$$\left| \int_a^b f d\gamma \right| \leq ML(\gamma),$$

donde $M = \max \{|f(t)| : t \in [a, b]\}$ y $L(\gamma)$ denota la longitud de γ .

Demostración. La existencia de la integral se deduce mediante un argumento análogo al usado para probar la integrabilidad en sentido de Riemann de una función continua.

La desigualdad de la proposición se obtiene de la relación

$$\begin{aligned} |S(\Delta, f, \gamma)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(s_k)| |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \\ &\leq (\max \{|f(t)|, t \in [a, b]\}) \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)| \\ &\leq ML(\gamma), \end{aligned}$$

pues $L(\gamma)$ por definición es el supremo de las sumas

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)|$$

para todas las particiones Δ de $[a, b]$. q.e.d.

Un caso de especial importancia y que será el que nos encontremos con más frecuencia es cuando la función γ es de clase C^1 , en cuyo caso define un

camino rectificable. En este caso la siguiente importante proposición permite transformar la integral de Riemann-Stieltjes en una integral de Riemann.

Proposición 4.1.2. *Si f continua en $[a, b]$ y γ define un camino de clase C^1 entonces la integral de Riemann-Stieltjes de f respecto de γ viene dada por*

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f \gamma' dt.$$

Demostración. Sea $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, donde γ y por tanto φ, ψ son de clase C^1 . De las definiciones se deduce

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f d\varphi + i \int_a^b f d\psi.$$

La existencia de estas integrales se deduce de la Proposición 4.1.1 y del hecho que los caminos de clase C^1 son rectificables.

Por ser f integrable respecto de φ , para cada $\epsilon > 0$ existe una partición Δ_ϵ tal que para toda Δ más fina y cualquier sucesión finita $\{s_k\}$, $s_k \in [t_k, t_{k+1}]$ se tiene

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s_k) [\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k)] - \int_a^b f d\varphi \right| < \epsilon$$

Por el teorema de los incrementos finitos

$$\varphi(t_{k+1}) - \varphi(t_k) = \varphi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k),$$

con $s'_k \in (t_k, t_{k+1})$. Considerando ahora como sucesión intercalada $\{s'_k\}$, se obtiene

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \varphi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f d\varphi \right| < \epsilon.$$

Por otra parte como $f\varphi'$ es integrable Riemann existe una partición Δ'_ϵ tal que

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(s'_k) \varphi'(s'_k)(t_{k+1} - t_k) - \int_a^b f\varphi' dt \right| < \epsilon,$$

luego tomando Δ_ϵ más fina que Δ'_ϵ concluimos

$$\left| \int_a^b f\varphi' dt - \int_a^b f d\varphi \right| < 2\epsilon,$$

y puesto que ϵ es arbitrario

$$\int_a^b f\varphi' dt = \int_a^b f d\varphi,$$

procediendo de manera análoga con $\int_a^b f d\psi$ concluimos con el enunciado del teorema. q.e.d.

El resultado anterior es aplicable a caminos γ diferenciables a trozos.

4.2 LA INTEGRAL DE UNA FUNCION DE VARIABLE COMPLEJA

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja en el dominio A , y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{C}$ un camino rectificable con imagen dentro de A . Se define la integral de f a lo largo de γ y se representa por

$$\int_{\gamma} f dz$$

a la integral de Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b (f \circ \gamma) d\gamma.$$

De acuerdo con la Proposición 4.1.2, si γ es de clase C^1 la integral de f a lo largo de γ viene dada por

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Las siguientes propiedades de la integración compleja a lo largo de caminos se deducen inmediatamente a partir de las correspondientes propiedades de la integral de Riemann-Stieltjes.

i) Propiedad de linealidad

$$\int_{\gamma} (c_1 f_1 + c_2 f_2) dz = c_1 \int_{\gamma} f_1 dz + c_2 \int_{\gamma} f_2 dz,$$

ii) Si γ_1 es el camino opuesto a γ_2 , i.e. $\gamma_2 = -\gamma_1$, se tiene

$$\int_{\gamma_1} f dz = - \int_{\gamma_2} f dz,$$

iii) Si γ_1 y γ_2 son caminos yuxtapuestos, es decir, si $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{C}$, donde $a < b < c$, y $\gamma_2(a) = \gamma_1(b)$, entonces

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz,$$

donde $\gamma_1 \cup \gamma_2$ puede ser parametrizado en $[a, c]$ mediante

$$\gamma_1 \cup \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1(t) & , \quad 0 \leq t \leq b \\ \gamma_2(t) & , \quad b \leq t \leq c \end{cases},$$

iv) Se tiene la siguiente estimación

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq ML(\gamma),$$

donde $M = \max \{|f(z)|, z \in \gamma^* = \gamma[a, b]\}$, y $L(\gamma) = \text{longitud de } \gamma$.

La integral $\int_{\gamma} |f| |dz|$ ha de entenderse como la integral de Riemann-Stieltjes de la función $|f|$ respecto de la función $s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por

$$s(t) = L(\gamma, [a, t]),$$

donde $L(\gamma, [a, t])$ denota la longitud de la curva γ restringida a $[a, t]$, $a \leq t \leq b$. Es habitual escribir $|dz|$ en lugar de ds .

En el caso en que γ es diferenciable entonces $s(t)$ también es diferenciable y se verifica

$$\frac{ds(t)}{dt} = |\gamma'(t)|,$$

luego por la Proposición 4.1.2 se tiene

$$\int_{\gamma} |f| |dz| = \int_a^b |f(t)| |\gamma'(t)| dt.$$

La siguiente proposición permite tomar límites dentro de la integral a lo largo de un camino en el caso de convergencia uniforme.

Proposición 4.2.1. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $f_n : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto y sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino rectificable con $\gamma^* = \gamma[a, b] \subset A$. Si las funciones f_n son continuas en γ^* y $f_n \rightarrow f$ uniformemente entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n = \int_{\gamma} f dz.$$

Análogamente, si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente a F , i.e. $\sum f_n \rightarrow F$ uniformemente entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n dz = \int_{\gamma} F dz.$$

Demostración. Por la convergencia uniforme de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(\gamma(t)) - f(\gamma(t))| < \epsilon$, para todo $t \in [a, b]$ y todo $n \geq n_0$.

La función f es continua sobre γ^* , luego existe su integral respecto de γ y por iv) de las propiedades anteriores se tiene

$$\left| \int_{\gamma} f dz - \int_{\gamma} f_n dz \right| \leq \int_{\gamma} |f - f_n| |dz| < \epsilon L,$$

donde L es la longitud de γ , de donde se deduce la primera afirmación.

La afirmación del teorema relativa a las series es consecuencia de la primera afirmación aplicada a la sucesión $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $F_n = \sum_{k=1}^n f_k$ y de la aditividad finita de la integral

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dz &= \int_{\gamma} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} F_n dz \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} \sum_{k=1}^n f_k dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} f_k dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n dz. \end{aligned}$$

q.e.d.

4.3 INTEGRALES Y PRIMITIVAS

En el campo complejo, análogamente al caso real, la existencia de una primitiva F en un dominio de una función f permite el cálculo de la integral de f a lo largo de un camino contenido en el dominio. Una cuestión que surge de forma natural en el campo complejo, es si la integrabilidad de una función a lo largo de todo camino en un dominio permite asegurar la existencia de una primitiva en el dominio. Esto será cierto solamente en casos particulares, por ejemplo, esto será cierto si el dominio es simplemente conexo.

Proposición 4.3.1. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ un camino de clase C^1 , $\gamma^* \subset A$. Entonces si F es una función primitiva de f , se tiene*

$$\int_{\gamma} f dz = F(z_2) - F(z_1),$$

donde $z_1 = \gamma(a)$, $z_2 = \gamma(b)$.

Demostración. Partimos de

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt,$$

ahora bien la función $F(\gamma(t))$ tiene como derivada la función

$$F'(\gamma(t)) \gamma'(t) = f(\gamma(t)) \gamma'(t),$$

para $t \in [a, b]$, luego por el Teorema fundamental del Cálculo para funciones de variable real se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b [F(\gamma(t))]' dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\ &= F(z_2) - F(z_1). \end{aligned}$$

q.e.d.

El resultado es también válido para caminos rectificables, esto se puede ver aproximando el camino rectificable por caminos poligonales que son C^1 a trozos y para estos el enunciado de la Proposición 4.3.1 es válido aplicando la anterior demostración a cada segmento y sumando sobre todos los segmentos de la poligonal.

Proposición 4.3.2. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, una función continua. Entonces f tiene una primitiva F en A si y sólo si el valor de la integral de f a lo largo de un camino sólo depende de los extremos del camino, es decir si $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$, $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ entonces*

$$\int_{\gamma_1} f dz = \int_{\gamma_2} f dz,$$

con $\gamma_1, \gamma_2 \subset A$.

Demostración. Tenemos que construir la primitiva F . A este fin, fijamos $\alpha \in A$ y escribimos

$$F(z) = \int_{\alpha}^z f(\xi) d\xi,$$

donde la integral puede tomarse a lo largo de cualquier camino γ tal que $\gamma(a) = \alpha$, $\gamma(b) = z$. Claramente F está bien definida por la hipótesis de la independencia de la integral respecto del camino.

Resta probar que

$$F'(z_1) = f(z_1),$$

para cualquier $z_1 \in A$.

Consideremos el cociente

$$\frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1},$$

y observamos que el numerador viene dado por

$$F(z) - F(z_1) = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta,$$

pues

$$\int_{\alpha}^z f(\zeta) d\zeta - \int_{\alpha}^{z_1} f(\zeta) d\zeta = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta.$$

Suponemos ahora z suficientemente próximo a z_1 de tal forma que el segmento $[z_1, z]$ está contenido en A y la integral

$$\int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta$$

puede ser considerada como la integral a lo largo de dicho segmento.

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| &= \left| \frac{1}{z - z_1} \int_{z_1}^z (f(\zeta) - f(z_1)) d\zeta \right| \\ &\leq \frac{1}{|z - z_1|} \int_{z_1}^z |f(\zeta) - f(z_1)| |d\zeta|. \end{aligned}$$

Ahora por la continuidad de f en z_1 , para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que

$$|f(z) - f(z_1)| < \epsilon,$$

si

$$|z - z_1| < \delta,$$

luego

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq \frac{1}{|z - z_1|} \int_{z_1}^z \epsilon |d\zeta| = \epsilon,$$

si

$$|z - z_1| < \delta.$$

Concluimos que

$$F'(z_1) = f(z_1).$$

q.e.d.

En el caso particular en que A es un abierto convexo basta exigir la anulaci3n de la integral a lo largo de caminos de la forma $\gamma = \partial T$ con T un triángulo arbitrario contenido en A , para poder asegurar la existencia de primitiva de una funci3n continua f en A . Esta condici3n se llama condici3n triangular.

Proposici3n 4.3.3. *Una funci3n continua $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, con $A \subset \mathbb{C}$ abierto y convexo posee primitiva F en A si y s3lo si f verifica la condici3n triangular.*

Demostraci3n. La funci3n primitiva F est3 definida por

$$F(z) = \int_{[\alpha, z]} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in A,$$

donde $[\alpha, z]$ es el segmento que une α y z , este segmento est3 contenido en A por la convexidad de A .

La demostraci3n que $F'(z) = f(z)$ se hace de forma completamente an3loga a la de la Proposici3n 4.3.2. q.e.d.

4.4 EL TEOREMA DE CAUCHY

El Teorema de Cauchy podría enunciarse en términos no precisos diciendo que en un dominio $A \subset \mathbb{C}$ del plano complejo, se verifica

$$\int_{\gamma} f dz = 0,$$

para toda función f analítica en A y todo camino γ de tal forma que A también contiene el "interior" de γ .

La formulación anterior es imprecisa en la afirmación que A contiene el "interior" de γ pues γ no ha de ser necesariamente simple. Hay fundamentalmente dos medios de expresar de forma rigurosa este hecho que son respectivamente a través de la homotopía y la homología.

En primer lugar daremos una demostración de alguna manera imprecisa del teorema, pero que es ilustrativa en el sentido que surgen de forma manifiesta las ecuaciones de Cauchy-Riemann y además es la idea original de la demostración de Cauchy.

A continuación presentaremos versiones rigurosas pero restringidas del teorema para dominios particulares, triángulos, dominios convexos. En el Capítulo 6 presentaremos una versión general.

4.4.1 VERSION PRELIMINAR DEL TEOREMA DE CAUCHY

La siguiente versión del Teorema de Cauchy es restrictiva, respecto a las versiones más generales que presentaremos más adelante, en el sentido que supondremos que f' es continua y que la curva también es diferenciable.

También, como dijimos anteriormente, queda de forma imprecisa el concepto de "interior" de la curva.

La demostración hace uso de la conocida fórmula de Green sobre integrales de línea.

Teorema 4.4.1. *Supongamos que f es analítica con derivada continua en un abierto A que contiene a una curva cerrada γ y su "interior". Entonces*

$$\int_{\gamma} f dz = 0.$$

Demostración. En primer lugar recordamos la fórmula de Green que afirma que si $P(x, y)$, $Q(x, y)$ son funciones de clase C^1 entonces se tiene

$$\int_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_A \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right] dx dy,$$

donde A representa el "interior" de γ y γ es recorrido de tal forma que A queda a la izquierda.

Escribamos ahora $f = u + iv$, entonces operando formalmente obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} f dz &= \int_{\gamma} (u + iv) (dx + idy) \\ &= \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx),\end{aligned}$$

y aplicando la fórmula de Green se obtiene

$$\int_{\gamma} f dz = \iint_A \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + \iint_A \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy,$$

de tal forma que la integral ha de ser cero pues las integrales del miembro derecho son nulas por las ecuaciones de Cauchy-Riemann. q.e.d.

Observemos que nuestras operaciones sobre las integrales de línea son correctas pues ateniéndonos a las definiciones

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

y

$$\begin{aligned}& \int_{\gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\gamma} (u dy + v dx) \\ &= \int_a^b (u(\gamma(t)) x'(t) - v(\gamma(t)) y'(t)) dt + i \int_a^b (u(\gamma(t)) y'(t) + v(\gamma(t)) x'(t)) dt,\end{aligned}$$

se puede comprobar que son la misma integral de variable real.

Nuestra principal objeción al Teorema 4.4.1 es la imprecisión del concepto "interior de γ ", también el hecho que supongamos como hipótesis la continuidad de la derivada, es decir $f \in C^1$, esto es una restricción frente al resultado que probaremos más adelante.

4.4.2 EL TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT PARA EL TRIANGULO

La demostración del Teorema 4.4.1 presentada en la sección anterior sigue la idea original de Cauchy. Ahora presentaremos una demostración del Teorema de Cauchy cuando γ es la frontera de un triángulo que es esencialmente debida a Goursat, donde no es necesario suponer la continuidad de la derivada. Goursat presentó esta demostración varias décadas más tarde que el trabajo de Cauchy.

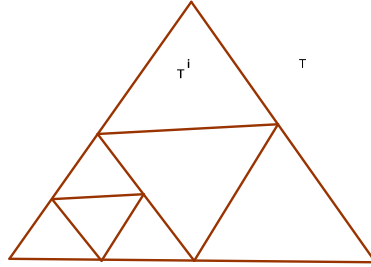
Teorema 4.4.2. (Teorema de Cauchy-Goursat para el triángulo).

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, una función continua en A y analítica en $A \setminus \{p\}$, con $p \in A$. Entonces si T es un triángulo cerrado contenido en A , se tiene

$$\int_{\partial T} f dz = 0.$$

Demostración. Suponemos en primer lugar $p \notin T$.

Descomponemos entonces el triángulo T en cuatro triángulos parciales tomando los puntos medios de los lados de T como se indica en la figura



4.1

Designemos por T_1 uno de los cuatro triángulos T^1, T^2, T^3, T^4 en que se descompone T , cuya integral sea en módulo mayor o igual que el de los otros tres.

Evidentemente se tiene

$$\int_{\partial T} f dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial T^i} f dz,$$

y por tanto también

$$\left| \int_{\partial T} f dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f dz \right|.$$

A continuación hacemos la misma operación con el triángulo T_1 y obtenemos un triángulo T_2 para el cual se tiene

$$\left| \int_{\partial T_1} f dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_2} f dz \right|.$$

Mediante este proceso obtenemos una sucesión de triángulos $\{T_n\}$ tales que $T \supset T_1 \supset T_2 \supset \dots$, cuyos perímetros tienen longitudes

$$L, \frac{L}{2}, \frac{L}{2^2}, \dots, \frac{L}{2^n}, \dots$$

y que satisfacen las desigualdades

$$\left| \int_{\partial T} f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f dz \right|.$$

Cuando n crece indefinidamente existe un único punto z_0 que pertenece a todos los triángulos T_n , $n = 1, 2, \dots$. En dicho punto z_0 existe la derivada de f , es decir dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que llamando

$$\eta(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0),$$

se tiene

$$|\eta(z)| < \epsilon \text{ para } |z - z_0| < \delta.$$

De esto podemos concluir

$$f(z) = f(z_0) - z_0 f'(z_0) + z f'(z_0) + (z - z_0) \eta(z),$$

con $|\eta(z)| < \epsilon$, cuando $z \in T_n$, con n suficientemente grande.

Integrando a lo largo de ∂T_n , se obtiene

$$\int_{\partial T_n} f dz = (f(z_0) - z_0 f'(z_0)) \int_{\partial T_n} dz + f'(z_0) \int_{\partial T_n} z dz + \int_{\partial T_n} (z - z_0) \eta(z) dz.$$

Los dos primeros sumandos del miembro de la derecha son nulos pues las funciones integrando 1, z tienen primitiva y el último se puede estimar como sigue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial T_n} (z - z_0) \eta(z) dz \right| &\leq \int_{\partial T_n} |z - z_0| |\eta(z)| |dz| \\ &\leq \frac{L}{2^n} \epsilon \frac{L}{2^n} = \frac{L^2}{4^n} \epsilon, \end{aligned}$$

luego también

$$\left| \int_{\partial T_n} f dz \right| \leq \frac{L^2}{4^n} \epsilon.$$

Esta estimación junto con la desigualdad probada anteriormente relacionando las integrales sobre ∂T y ∂T_n permiten concluir

$$\left| \int_{\partial T} f dz \right| \leq 4^n \left| \int_{\partial T_n} f dz \right| \leq \epsilon L^2,$$

puesto que $\epsilon > 0$ puede ser elegido arbitrariamente se obtiene finalmente

$$\int_{\partial T} f dz = 0.$$

El teorema está probado en el caso en que p no pertenece al triángulo. A continuación consideramos el caso en que p es un punto del triángulo.

Supongamos otra vez un caso particular y es cuando p es un vértice del triángulo T . Sean por tanto $\alpha = p, \beta, \gamma$ los tres vértices de T y elijamos dos puntos $z_1 \in [\alpha, \beta]$, $z_2 \in [\alpha, \gamma]$ es decir en los dos lados del triángulo que se encuentran en α , tales que z_1, z_2 son suficientemente próximos a α .

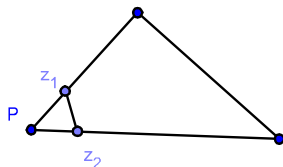


Figura 4.2

La integral de f a lo largo de la frontera del triángulo original T es igual a la suma de las integrales de f a lo largo de las fronteras de los triángulos en que queda descompuesto según la figura con las orientaciones inducidas correspondientes.

Las integrales correspondientes a los dos triángulos que no contienen a p son nulos por lo probado anteriormente.

La integral correspondiente al triángulo con vértices $\alpha = p, z_1, z_2$ se puede estimar por el producto del máximo del módulo de la función en el triángulo por el perímetro de dicho triángulo. Puesto que la función es continua en p , tomando el triángulo suficientemente pequeño, es decir z_1, z_2 suficientemente próximos a p , podemos conseguir que dicha estimación sea tan pequeña como queramos y como consecuencia la integral ha de ser cero.

Por último si p es un punto interior a T , descomponemos el triángulo en tres subtriángulos de acuerdo con la figura

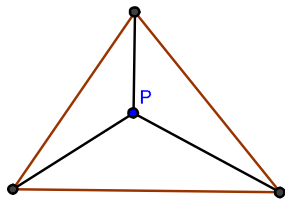


Fig 4.3

Otra vez la integral a lo largo del contorno de T es igual a la suma de las integrales correspondientes a estos tres triángulos, para los cuales p es un vértice de tal forma que por la conclusión anterior aplicada a cada uno de estos tres triángulos obtenemos que la integral correspondiente a T es cero. q.e.d.

Teorema 4.4.3. (Teorema de Cauchy para un conjunto convexo).

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto y convexo, una función analítica en $A \setminus \{p\}$, con $p \in A$, y continua en A . Entonces

$$\int_{\gamma} f dz = 0,$$

para todo camino cerrado y rectificable en A .

Demostración. Comprobamos que la función f tiene una primitiva F en A , entonces el Teorema 4.4.3. se sigue de la Proposición 4.3.1.

La función F se construye fijando un punto $\alpha \in A$, entonces por la hipótesis de convexidad sobre A , el segmento $[\alpha, z] \subset A$ para todo $z \in A$, luego podemos definir

$$F(z) = \int_{[\alpha, z]} f(\zeta) d\zeta.$$

El segmento $[\alpha, z]$ puede parametrizarse como camino de la manera siguiente

$$\gamma : \begin{array}{ll} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{C} \\ t & \rightarrow \alpha t + z(1 - t). \end{array}$$

Hemos de probar

$$F'(z) = f(z),$$

para lo cual utilizamos un argumento paralelo a la Proposición 4.3.2. En efecto escribimos

$$F(z) - F(z_1) = \int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta,$$

pues la integral en el triángulo $\alpha \overset{\Delta}{z_1} z$ ha de ser cero

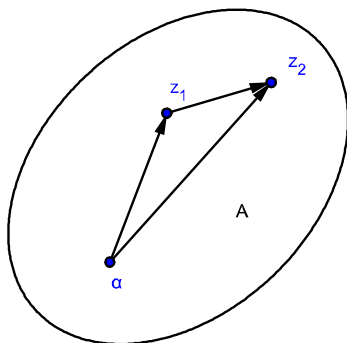


Fig.4.4

y concluimos

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq \frac{1}{|z - z_1|} \int_{z_1}^z |f(\zeta) - f(z_1)| |d\zeta|,$$

de tal forma que utilizando la continuidad de f en z_1 obtenemos

$$\left| \frac{F(z) - F(z_1)}{z - z_1} - f(z_1) \right| \leq \frac{1}{|z - z_1|} \int_{z_1}^z \epsilon |d\zeta| = \epsilon,$$

si z está suficientemente próximo a z_1 , luego

$$F'(z_1) = f(z_1).$$

q.e.d.

4.5 EJERCICIOS

1. Calcular la integral

$$I = \int_{\gamma} |z - 1|^2 dz ,$$

donde

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C} , \gamma(t) = e^{it} .$$

2. Demostrar que si C es una circunferencia que no pasa por el punto a y n es un entero, entonces

$$\int_C (z - a)^n dz = \begin{cases} 0 , & \text{si } n \neq -1 , \\ 2\pi i , & \text{si } n = -1 , \quad a \text{ está en el interior de } C , \\ 0 , & \text{si } n = -1 , \quad a \text{ está en el exterior de } C . \end{cases}$$

3. Calcular

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz ,$$

a lo largo del perímetro de triángulo con vértices $0, 1, i$, recorrido en sentido positivo.

4. Calcular

$$\int_{\gamma=\{|z|=1\}} \frac{\text{Log} z}{z} dz = 0 ,$$

donde se ha elegido una rama de $\text{Log} z$ en \mathbb{C}/\mathbb{R}^+ .

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 4

Problema 1. Calcular la integral

$$I = \int_{\gamma} |z - 1|^2 dz ,$$

donde $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$.

Solución. Por definición

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} |\gamma(t) - 1|^2 \gamma'(t) dt = \int_0^{2\pi} |e^{it} - 1|^2 i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\cos t - 1 + i \operatorname{sen} t|^2 i (\cos t + i \operatorname{sen} t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((\cos t - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 t) (-\operatorname{sen} t + i \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - 2 \cos t + 1 + \operatorname{sen}^2 t) (-\operatorname{sen} t + i \cos t) dt \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \cos t (-\operatorname{sen} t + i \cos t) dt \\ &= -2 \left[\frac{1}{2} \cos^2 t \right]_0^{2\pi} - 2i \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt \\ &= -2i \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt = -2\pi i - 2i [\operatorname{sen} t]_0^{2\pi} = -2\pi i. \end{aligned}$$

Problema 2. Demostrar que si C es una circunferencia que no pasa por el punto a y n es un entero, entonces

$$\int_C (z - a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \text{ } a \text{ está en el interior de } C \\ 0 & \text{si } n = -1 \text{ } a \text{ está en el exterior de } C \end{cases}$$

Solución.

El caso $n \neq -1$ se deduce inmediatamente del hecho que la función admite la primitiva $F(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ en todo el plano.

El caso $n = -1$ y a en el exterior de C se deduce del Teorema de Cauchy para conjuntos convexos, pues en este caso el integrando es analítica en el círculo.

Finalmente en el caso $n = -1$ y a en el interior de C observamos que podemos definir la función $\log(z - a)$ en todo el plano \mathbb{C} cortado a lo largo de la semirrecta paralela al eje real y pasando por el centro de la circunferencia, de tal forma que la función así definida

$$F(z) = \log(z - a) = \log|z - a| + i \operatorname{Arg}(z - a) ,$$

a ambos lados de la semirrecta difiere en $2\pi i$. Concluimos que

$$\int_C (z - a)^{-1} dz = F(z_0^+) - F(z_0^-) = 2\pi i ,$$

donde z_0 es el punto intersección de la circunferencia con la semirrecta y $F(z_0^+)$ es el límite de $F(z)$ cuando nos aproximamos a z_0 por la parte superior a la semirrecta y $F(z_0^-)$ es el límite cuando nos aproximamos por la parte inferior. Hemos hecho uso de la continuidad de $(z - a)^{-1}$ en z_0 .

Problema 3. Calcular la integral

$$\int_{\gamma} |z|^2 dz ,$$

a lo largo del perímetro del triángulo con vértices $0, 1, i$ en sentido positivo.

Solución. Calculamos sucesivamente las integrales a lo largo de los tres lados

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]} |z|^2 dz &= \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3} , \\ \int_{[1,i]} |z|^2 dz &= - \int_0^1 |t + (1-t)i|^2 (1-i) dt \\ \text{where } z(t) &= t + (1-t)i , z'(t) = 1-i , z(0) = i , z(1) = 1 , \\ \text{so that } \int_{[1,i]} |z|^2 dz &= -(1-i) \int_0^1 (2t^2 - 2t + 1) dt \\ &= -(1-i) \left[\frac{2t^3}{3} - t^2 + t \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{2(i-1)}{3} , \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \int_{[i,0]} |z|^2 dz &= - \int_{[0,i]} |z|^2 dz = -i \int_0^1 t^2 dt = -\frac{i}{3} , \\ z(t) &= it , z'(t) = i , z(0) = 0 , z(1) = i \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} |z|^2 dz &= \int_{[0,1]} |z|^2 dz + \int_{[1,i]} |z|^2 dz + \int_{[i,0]} |z|^2 dz \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2(i-1)}{3} - \frac{i}{3} = -\frac{1}{3} + \frac{i}{3}.\end{aligned}$$

Problema 4. Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{\text{Log} z}{z},$$

donde γ es la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo $\text{Log} z$ es una rama del logaritmo en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Solución. El integrando admite una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ que es $F(z) = \frac{(\text{Log} z)^2}{2}$ luego tendremos

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} \frac{\text{Log} z}{z} &= \left[\frac{(\text{Log} z)^2}{2} \right]_{z=1^+}^{z=1^-} = \frac{1}{2} \left[(\log |z| + i \text{Arg} z)^2 \right]_{z=1^+}^{z=1^-} \\ &= \frac{1}{2} [-\text{Arg}^2 z]_{z=1^+}^{z=1^-} = \frac{1}{2} (-4\pi^2) = -2\pi^2,\end{aligned}$$

donde $z = 1^+, 1^-$ denota que tenemos que tomar límites de la función cuando la variable se aproxima a 1 por el semiplano superior o inferior respectivamente y donde hemos hecho uso que $\log |z| = 0$ en $z = 1$.

CAPITULO 5

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE CAUCHY

CAPITULO 5. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE CAUCHY

5.1 Índice de un camino cerrado respecto de un punto

5.2 Fórmula integral de Cauchy

5.3 Teorema del desarrollo de Taylor

5.4 Desigualdades de Cauchy. Teorema de Liouville

5.5 Derivación del límite de una sucesión de funciones analítica

5.6 Propiedad de la media. Principio del máximo

5.7 Lema de Schwarz

5.8 Ejercicios

Del Teorema de Cauchy para regiones convexas se obtienen importantes conclusiones sobre las funciones analíticas. Una consecuencia fundamental es la llamada Fórmula integral de Cauchy que permite la representación integral de una función analítica. Para enunciar de una forma general la Fórmula integral de Cauchy es necesario introducir el índice de un camino γ respecto de un punto exterior al camino que intuitivamente representa el número de vueltas que da el camino respecto del punto.

5.1 INDICE DE UN CAMINO CERRADO RESPECTO DE UN PUNTO

En esta sección presentamos y estudiamos con detalle el concepto índice de un camino respecto de un punto.

Si calculamos la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z},$$

donde γ es la circunferencia unidad, es decir $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$, obte-

nemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-it} e^{it} i dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1.$$

Análogamente si consideramos el camino que da n vueltas a la circunferencia unidad en el sentido positivo, es decir $\gamma_n : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, donde $\gamma_n(t) = e^{int}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{-int} n i e^{int} dt \\ &= \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = n. \end{aligned}$$

Esto sugiere que para un camino cerrado diferenciable γ , la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \alpha},$$

podría medir el "número de vueltas" que el camino γ da alrededor de α .

Esta idea es reforzada por el siguiente argumento que exponemos a continuación.

La función $\frac{1}{z-\alpha}$ admite una primitiva $\ln(z - \alpha)$ uniforme en el entorno de todo punto excepto para el punto α .

Subdividiendo el camino γ en subarcs suficientemente pequeños $\gamma_j = \widehat{z_j z_{j+1}}$ de extremos $z_j, z_{j+1} \in \gamma$, $j = 1, \dots, n-1$, de tal forma que $z_n = z_1$, entonces la integral puede ser calculada de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \alpha} &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{dz}{z - \alpha} \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln(z_{j+1} - \alpha) - \ln(z_j - \alpha)] \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi i} [\ln|(z_{j+1} - \alpha)| - \ln|(z_j - \alpha)|] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)]. \end{aligned}$$

La primera suma es igual a cero pues es una suma telescópica y $z_n = z_1$, luego concluimos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \alpha} = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{2\pi} [\text{Arg}(z_{j+1} - \alpha) - \text{Arg}(z_j - \alpha)],$$

y la magnitud del miembro de la derecha mide la variación neta del argumento de $z - \alpha$ dividida por 2π cuando z recorre γ , esto es el "número de vueltas" de γ alrededor de α .

Llamaremos índice de γ respecto de α a esta integral y lo representaremos por $Ind_{\gamma}(\alpha)$, es decir,

$$Ind_{\gamma}(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \alpha},$$

que por las observaciones anteriores mide el "número de vueltas" de γ respecto de α .

A continuación probamos de forma precisa las propiedades del índice

Teorema 5.1.1. *Si γ es un camino diferenciable cerrado del plano, α es un punto en el exterior del camino γ , es decir $\alpha \notin \gamma^*$, entonces*

i) $Ind_{\gamma}(\alpha)$ es un número entero.

ii) $Ind_{\gamma}(\alpha)$ es cero cuando α pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ y definimos la función

$$F(t) = \exp \left(\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - \alpha} ds \right), \quad t \in [a, b].$$

La afirmación en i) es equivalente a a que $F(b) = 1$. Para comprobar esto observemos que F es continua y diferenciable en $[a, b]$ con derivada logarítmica

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - \alpha},$$

de donde

$$F'(t)(\gamma(t) - \alpha) - \gamma'(t)F(t) \equiv 0.$$

De esta relación se concluye que la derivada de la función

$$G(t) = \frac{F(t)}{\gamma(t) - \alpha},$$

es idénticamente cero y por tanto

$$\frac{F(t)}{\gamma(t) - \alpha} \equiv C, \quad C \text{ constant, for every } t \in [a, b].$$

Del hecho que $F(a) = 1$, deducimos que esta constante ha de ser $\frac{1}{\gamma(a) - \alpha}$, por tanto

$$F(t) = \frac{\gamma(t) - \alpha}{\gamma(a) - \alpha},$$

y puesto que γ es cerrado, es decir $\gamma(a) = \gamma(b)$, obtenemos que $F(b) = 1$, pero esto es equivalente a decir, como observábamos anteriormente que

$$\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - \alpha} ds = 2\pi i k, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}$$

es decir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \alpha} = k,$$

que es i).

Para probar *ii*), primero comprobamos que el índice $Ind_{\gamma}(\alpha)$ es una función continua de α una vez fijado el camino γ .

En efecto fijado $\alpha_0 \notin \gamma^*$, llamemos s a la distancia entre α_0 y γ^* que es positiva por ser $\gamma^* = \gamma([a, b])$ compacto, es decir

$$s = dist(\alpha_0, \gamma^*),$$

entonces tomando α suficientemente próximo a α_0 , por ejemplo $\alpha \in B(\alpha_0, \frac{s}{2})$ entonces se tiene también

$$dist(\alpha, \gamma^*) \geq \frac{s}{2}.$$

Por tanto tenemos para $z \in \gamma^*$

$$\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha_0} = \frac{\alpha - \alpha_0}{(z - \alpha)(z - \alpha_0)},$$

luego concluimos

$$\left| \frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha_0} \right| < \frac{1}{s^2/4} |\alpha - \alpha_0|, \quad z \in \gamma^*,$$

y por tanto

$$\left| \int_{\gamma} \left(\frac{1}{z - \alpha} - \frac{1}{z - \alpha_0} \right) dz \right| \leq \frac{1}{s^2/4} |\alpha - \alpha_0| L(\gamma),$$

de donde se deduce la continuidad de $Ind_{\gamma}(\alpha)$ como función de α .

Puesto que $Ind_{\gamma}(\alpha)$ es una función continua de α y sólo tomo valores enteros ha de ser constante en cada componente conexa de \mathbb{C}/γ^* . En particular sobre la componente no acotada esta constante ha de ser cero pues tomando α con módulo suficientemente grande podemos conseguir que el integrando

$$\frac{1}{z - \alpha}$$

tenga módulo muy pequeño sobre γ , por ejemplo

$$\left| \frac{1}{z - \alpha} \right| < \frac{2\pi}{L(\gamma)},$$

de tal forma que

$$\begin{aligned} |Ind_{\gamma}(\alpha)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - \alpha} \right| \\ &< \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{1}{z - \alpha} \right| |dz| < 1, \end{aligned}$$

de donde se sigue que el entero $Ind_{\gamma}(\alpha)$ ha de ser cero .q.e.d.

5.2 FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

En esta sección presentamos la Fórmula integral de Cauchy que proporciona una representación integral de una función analítica y de la cual deduciremos la existencia de las derivadas sucesivas y la representación de las funciones analíticas en series de potencias.

Teorema 5.2.1. (Fórmula integral de Cauchy). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto convexo de \mathbb{C} , y sea γ un camino cerrado en A , es decir $\gamma^* \subset A$. Entonces para todo z en A tal que $z \notin \gamma^*$, se tiene

$$f(z) Ind_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Demostración. Definimos la función $g : A \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} & \text{para } \zeta \in A, \quad \zeta \neq z \\ f'(z) & \text{para } \zeta = z \end{cases}$$

donde $z \in A \setminus \gamma^*$ es un punto fijo.

La función g es analítica para $\zeta \neq z$ y

$$g'(\zeta) = \frac{(\zeta - z)f'(\zeta) - f(\zeta) + f(z)}{(\zeta - z)^2},$$

y además es continua para $\zeta = z$ pues

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} g(\zeta) = f'(z).$$

Por tanto podemos aplicar el Teorema de Cauchy-Goursat para regiones convexas y se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(\zeta) d\zeta = 0,$$

y como $z \notin \gamma^*$, se puede escribir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &\quad - \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \end{aligned}$$

es decir

$$\frac{f(z)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

es decir

$$f(z) \operatorname{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

q.e.d

5.3 TEOREMA DEL DESARROLLO DE TAYLOR

En esta sección probaremos el Teorema de Taylor para funciones complejas que afirma que una función compleja derivable en un dominio A es desarrollable localmente en serie de potencias en torno a cualquier punto α de A . De esta manera queda justificada la identificación de los términos holomorfa, es decir, derivable en todo punto y analítica, es decir, desarrollable en serie de potencias localmente.

El Teorema de Taylor se obtiene como una consecuencia de la representación integral proporcionada por la Fórmula de Cauchy.

Teorema 5.3.1.(Teorema de Taylor). *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, una función holomorfa y $\alpha \in A$. Designemos por $d > 0$, la distancia de α a la frontera de A , entonces para todo $z \in B(\alpha, d)$, se verifica la igualdad*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n,$$

es decir el radio de convergencia de esta serie de potencias es mayor o igual que d , y en el círculo $B(\alpha, d)$ su suma coincide con $f(z)$.

Además las derivadas sucesivas $f^{(n)}(\alpha)$ de f en α vienen dadas por

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta,$$

donde γ es cualquier circunferencia de centro α y radio r , con $0 < r < d$.

Demostración. Sea pues γ la circunferencia de centro α y radio r , con $0 < r < d$, de tal manera que el círculo $B(\alpha, r) \subset A$.

Sea $z \in B(\alpha, s)$, donde $0 < s < r$ y sea $\zeta \in \gamma$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - \alpha - (z - \alpha)} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \left[\frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}} \right] \\ &= \frac{1}{\zeta - \alpha} \left(1 + \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} + \left(\frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right)^2 + \dots \right). \end{aligned}$$

La serie converge absoluta y uniformemente pues

$$\left| \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha} \right| \leq \frac{s}{r} < 1.$$

Aplicamos este desarrollo en la fórmula integral de Cauchy y obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^n}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} \right) d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta (z - \alpha)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \end{aligned}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta.$$

La integración término a término está justificada por la convergencia uniforme sobre γ .

Por otra parte aplicando reiteradamente a esta serie potencial el Teorema 3.3.2 que permite la derivación término a término obtenemos

$$f^{(n)}(z) = n!a_n + (n+1)n...2(z - \alpha) + \dots$$

luego

$$f^{(n)}(\alpha) = n!a_n \text{ ó } a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!},$$

es decir concluimos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (z - \alpha)^n,$$

y

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta.$$

q.e.d.

Remarquemos el hecho que la existencia de la primera derivada implica la existencia de las derivadas sucesivas de orden arbitrario.

Esto se ha obtenido como consecuencia del hecho más fuerte que la existencia de la primera derivada implica la representabilidad local como serie de potencias, es decir la analiticidad.

5.4 DESIGUALDADES DE CAUCHY. TEOREMA DE LIOUVILLE.

De las expresiones integrales para las derivadas sucesivas contenidas en el Teorema 5.3.1 se deducen las siguientes estimaciones llamadas "Desigualdades de Cauchy".

Teorema 5.4.1. (Desigualdades de Cauchy). *Si $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto, es analítica y $B(\alpha, d) \subset A$, entonces se verifica*

$$\left| f^{(n)}(\alpha) \right| \leq \frac{n! M(r)}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

donde $M(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$, con $r < d$.

Una consecuencia inmediata de las desigualdades de Cauchy es el importante Teorema de Liouville.

Se llaman funciones enteras a las funciones analíticas $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, es decir aquellas funciones que son analíticas en todo \mathbb{C} .

Teorema 5.4.2. (Teorema de Liouville). *Si f es una función entera acotada entonces f es constante.*

Demostración. Por ser f analítica en \mathbb{C} existe un desarrollo en serie

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

cuyo radio de convergencia es infinito.

Sea K una cota de f , es decir

$$|f(z)| < K, \text{ para todo } z \in \mathbb{C},$$

entonces de las desigualdades de Cauchy se obtiene

$$|a_n| < \frac{K}{r^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

para todo r . Por tanto se concluye

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

luego $f(z) = a_0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. q.e.d.

5.5 DERIVACION DEL LIMITE DE UNA SUCESION DE FUNCIONES ANALITICAS.

Otra importante consecuencia de la Fórmula integral de Cauchy lo proporciona el siguiente teorema.

Teorema 5.5.1. *Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones analíticas en un abierto $A \subset \mathbb{C}$, que converge uniformemente en todo compacto de A , entonces la sucesión $\{f'_n\}$ converge uniformemente en todo compacto de A . Además si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = f(z),$$

entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(z) = f'(z),$$

para todo $z \in A$.

Demostración. Bastará demostrar la convergencia uniforme de la sucesión $\{f'_n\}$ hacia la función f' en todo círculo $B \subset A$, pues todo compacto $K \subset A$ puede ser recubierto por una cantidad finita de círculos.

Sea γ^* una circunferencia concéntrica con B , cuyo radio supere el de B en r y contenida en A ,

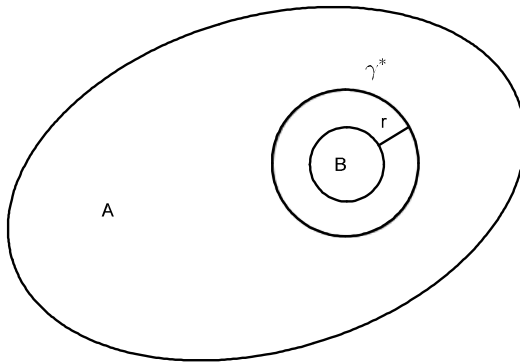


Fig.5.1

Sea $z \in B$ y γ_z la circunferencia de centro z y radio r recorrida en sentido positivo. Entonces se tiene

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta, \quad f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_z} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta,$$

de donde

$$\begin{aligned} |f'(z) - f'_n(z)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_z} \frac{|f(\zeta) - f_n(\zeta)|}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M_n}{r^2} 2\pi r = \frac{M_n}{r}, \end{aligned}$$

donde M_n es el máximo de $|f(\zeta) - f_n(\zeta)|$ cuando ζ recorre el círculo cerrado de centro z y radio r .

Puesto que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente sobre todo círculo cerrado, se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n = 0,$$

de tal manera que

$$\frac{M_n}{r} < \epsilon,$$

para $n \geq n_0$, y $z \in B$. q.e.d.

Mediante la aplicación reiterada del Teorema 5.5.1 concluimos también que la convergencia uniforme sobre compactos de una sucesión de funciones analíticas en un abierto $A \subset \mathbb{C}$, implica la convergencia uniforme sobre compactos de la sucesión de las derivadas k -ésimas $\{f^{(k)}\}$, para todo $k = 1, 2, \dots$

5.6 PROPIEDAD DE LA MEDIA. PRINCIPIO DEL MAXIMO

Una función f real o compleja continua en un abierto $A \subset \mathbb{C}$, se dice que tiene la propiedad de la media en A si para todo círculo cerrado $\bar{D}(\alpha, r) = \{z \mid |z - \alpha| \leq r\}$ contenido en A , el valor $f(\alpha)$ en el centro es la media de los valores de la función en la circunferencia $C(\alpha, r)$, es decir

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt.$$

Una consecuencia inmediata de la Fórmula integral de Cauchy es el siguiente hecho.

Proposición 5.6.1 *Toda función analítica $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, abierto tiene la propiedad de la media.*

Como consecuencia de la Proposición 5.6.1 obtenemos el siguiente importante teorema.

Teorema 5.6.1 (Principio del módulo máximo). *Una función analítica no constante $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, A abierto conexo, tiene la propiedad que para todo $\alpha \in A$, en cualquier entorno de α existe $\beta \in A$ para el cual se tiene*

$$|f(\alpha)| < |f(\beta)|.$$

Demostración. Supongamos que f no tuviera esta propiedad, es decir, existe un $\alpha \in A$ donde $|f(z)|$ tiene un máximo local.

Es decir, existe $\rho > 0$ tal que para todo $z \in B(\alpha, \rho) \subset A$, se tiene

$$|f(z)| \leq |f(\alpha)|.$$

Consideremos entonces la función

$$M(r) = \max_{t \in [0, 2\pi]} |f(\alpha + re^{it})|,$$

entonces por ser $|f(\alpha)|$ máximo relativo de $|f(z)|$ se ha de verificar

$$|f(\alpha)| \geq M(r), \quad 0 \leq r < \rho.$$

Por otra parte por la propiedad de la media se tiene

$$|f(\alpha)| \leq \int_0^{2\pi} M(r) dt = M(r),$$

para todo r con $0 \leq r < \rho$.

De las dos desigualdades anteriores resulta

$$|f(\alpha)| = M(r),$$

para todo con $0 \leq r < \rho$.

Podemos suponer $f(\alpha) \neq 0$, pues si $f(\alpha) = 0$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in B(\alpha, \rho)$ y por tanto $f(z) \equiv 0$ en A , contrario a nuestra hipótesis.

También podemos suponer $f(\alpha)$ real y positivo, pues si no lo fuera podríamos considerar la función $g(z) = \frac{f(z)}{f(\alpha)}$ y la función $g(z)$ verifica las mismas hipótesis del teorema para $f(z)$ y además $g(\alpha) = 1$. Razonaríamos con g y las conclusiones se trasladan también a f .

Consideremos las partes imaginarias u, v de f , es decir

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

y en particular

$$f(\alpha + re^{it}) = u(\alpha + re^{it}) + iv(\alpha + re^{it}).$$

Por la definición de $M(r)$ tenemos

$$M(r) \geq u(\alpha + re^{it}), \quad t \in [0, 2\pi],$$

de tal forma que en el intervalo $[0, 2\pi]$ la función de t

$$M(r) - u(\alpha + re^{it}) = f(\alpha) - u(\alpha + re^{it}),$$

es positiva o nula.

De la propiedad de la media resulta

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [u(\alpha + re^{it}) + iv(\alpha + re^{it})] dt, \end{aligned}$$

y como $f(\alpha)$ es real, resulta

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\alpha + re^{it}) dt,$$

de donde

$$\int_0^{2\pi} [f(\alpha) - u(\alpha + re^{it})] dt \equiv 0.$$

En esta última igualdad, el integrando es continuo y positivo, luego ha de ser nulo, es decir

$$f(\alpha) = u(\alpha + re^{it}), \text{ para todo } t \in [0, 2\pi], \quad 0 \leq r < \rho,$$

o sea

$$f(\alpha) \equiv u(z) \text{ para } z \in B(\alpha, \rho).$$

Por tener $|f|$ un máximo relativo en α , se tiene $|f(z)| \leq f(\alpha)$ para $z \in B(\alpha, \rho)$ y como

$$f(z) = f(\alpha) + iv(z)$$

y $v(z)$ es real, se ha de verificar también

$$|f(z)| \geq f(\alpha),$$

de tal forma que se ha de tener

$$v(z) \equiv 0,$$

es decir

$$f(z) \equiv f(\alpha),$$

luego $f(z)$ es una función analítica constante, en contra de la hipótesis. q.e.d.

5.7 LEMA DE SCHWARZ

Una aplicación importante del principio del módulo máximo es el llamado lema de Schwarz.

Lema 5.7.1 *Sea $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ una función analítica del círculo unidad en sí mismo, es decir $|f(z)| < 1$, para todo $z \in B(0, 1)$, tal que*

$f(0) = 0$. Entonces se tiene $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in B(0, 1)$ y $|f'(0)| \leq 1$. Además si para un $z_0 \in B(0, 1)$, $z_0 \neq 0$, se tiene $|f(z_0)| = |z_0|$, o si se verifica $f'(0) = 1$, entonces $f(z)$ es de la forma $f(z) = cz$, donde $|c| = 1$.

Demostración. Definimos la siguiente función asociada $g : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{para } z \in B(0, 1), z \neq 0 \\ f'(0) & \text{para } z = 0. \end{cases}$$

La función g es analítica en $B(0, 1)$ pues f tiene un cero en el punto $z = 0$, de tal forma que la posible singularidad de g en este punto es evitable.

Consideremos el círculo cerrado

$$\overline{B}(0, r) = \{z \mid 0 < |z| \leq r\}$$

con $0 < r < 1$. La función g es analítica en este círculo y sobre la circunferencia $C_r = \{z \mid |z| = r\}$ se tiene

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{1}{r},$$

y por el principio del módulo máximo se ha de tener

$$|g(z)| \leq \frac{1}{r},$$

es decir

$$|f(z)| \leq \frac{|z|}{r},$$

para todo $z \in \overline{B}(0, r)$. Supuesto z fijo y haciendo r tender hacia 1, obtenemos finalmente $|f(z)| \leq |z|$.

Finalmente si para un $z_0 \in B(0, 1)$, $z_0 \neq 0$, se tiene $|f(z_0)| = |z_0|$ entonces $|g(z_0)| = 1$. También si $|f'(0)| = 1$ se tiene $|g(0)| = 1$. En ambos casos $|g|$ tiene un máximo relativo en un punto interior de $B(0, 1)$. Por el principio del módulo máximo se ha de tener que g es constante en $B(0, 1)$, es decir,

$$g(z) \equiv c, \quad |c| = 1,$$

o equivalentemente

$$f(z) \equiv cz, \quad |c| = 1.$$

q.e.d.

5.8 EJERCICIOS

1. Calcular las siguientes integrales utilizando la fórmula integral de Cauchy

i) $\int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2+z}$, donde $C = \{z \mid |z-1| = \frac{1}{2}\}$

ii) $\int_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2+2z} dz$, donde $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

2. Calcular la siguiente integral utilizando la fórmula integral de Cauchy para las derivadas

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz,$$

donde $C = \{z \mid |z+1| = 3\}$.

3. i) Demostrar que los coeficientes de la serie de Taylor de la función

$$F(z) = \frac{1}{1-z-z^2},$$

en torno al origen $z = 0$, satisfacen

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_{n+2} = c_{n+1} + c_n, \quad n \geq 0.$$

- ii) Descomponer F en fracciones simples para determinar el valor de c_n .

4. Dada una f función no constante tal que

$$f(z+a) = f(z), \quad f(z+bi) = f(z),$$

donde $a > 0$ y $b > 0$ son constantes dadas, probar que $f(z)$ no puede ser analítica en ningún abierto conteniendo el rectángulo.

$$R = \{z = x + yi \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}.$$

5. Probar que si $f(z)$ es analítica y no constante en la región acotada G , es continua en \overline{G} y tiene valor constante en la frontera de G , entonces debe tener al menos un cero en G .

6. Sea $f(z)$ una función entera y consideremos la función de variable real asociada

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

se pide:

- i) probar que $M(r, f)$ es monótona,
- ii) probar que $M(r, f)$ es continua,
- iii) determinar $M(r, f)$ para $f(z) = e^{z^2}$.

7. Probar utilizando el lema de Schwarz que una aplicación analítica $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ del círculo unidad en sí mismo, biyectiva con $f(0) = 0$ y tal que f^{-1} es también analítica, tiene que ser una rotación, es decir debe ser de la forma $f(z) = e^{i\alpha} z$.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 5

Problema 1. Calcular las siguientes integrales utilizando la fórmula integral de Cauchy

$$i) \int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 + z} dz ,$$

donde C es la circunferencia $C = \{z \mid |z - 1| = \frac{1}{2}\}$ recorrida una vez en sentido positivo,

$$ii) \int_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz ,$$

donde C es la circunferencia $C = \{z \mid |z| = 1\}$ recorrida una vez en sentido positivo.

Solución.

$$i) \int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^2 - z} dz = \int_C \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z(z + 1)} dz = 0 ,$$

puesto que los posibles polos están en el exterior del camino de integración y por tanto la función es analítica y podemos aplicar el Teorema de Cauchy.

$$\begin{aligned} ii) \int_C \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z} dz &= \int_C \frac{e^z \cos \pi z}{z(z + 2)} dz \\ &= \int_C \frac{\frac{e^z \cos \pi z}{z+2}}{z} dz = 2\pi i \left[\frac{e^z \cos \pi z}{z + 2} \right]_{z=0} = \pi i . \end{aligned}$$

Problema 2. Calcular la siguiente integral utilizando la fórmula integral de Cauchy para las derivadas

$$\int_C \frac{e^{2z}}{(z + 1)^4} dz ,$$

donde $C = \{z \mid |z + 1| = 3\}$ recorrida una vez en sentido positivo.

Solución. Aplicando la fórmula integral de Cauchy para las derivadas obtenemos en este caso

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz &= \frac{2\pi i}{3!} \left[\frac{d^3}{dz^3} (e^{2z}) \right]_{z=-1} \\ &= \frac{2\pi i}{3!} [2^3 e^{2z}]_{z=-1} = \frac{8\pi i}{3e^2} .\end{aligned}$$

Problema 3.

i) Demostrar que los coeficientes de la serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2} ,$$

en torno al origen $z = 0$, satisfacen

$$c_0 = c_1 = 1 , \quad c_{n+2} = c_{n+1} + c_n , \quad n \geq 0 ,$$

ii) Descomponer $f(z)$ en fracciones simples para determinar el valor de c_n .

Solución.

i) De

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \frac{1}{1 - z - z^2} ,$$

obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n (1 - z - z^2) \equiv 1 .$$

Identificando coeficientes se deduce:

$$\begin{aligned}c_0 &= 1 , \\ c_1 - c_0 &= 0 \text{ es decir } c_1 = c_0 ,\end{aligned}$$

y

$$c_{n+2} - c_{n+1} - c_n = 0 .$$

ii) Descomponiendo $\frac{1}{1-z-z^2}$ en fracciones simples

$$\frac{1}{1 - z - z^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{z + \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)} + \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) - z} \right] ,$$

donde los dos términos en el corchete son sumas de progresiones geométricas. Desarrollando ambas series se obtiene

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^{-(n+1)} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2} \right)^{-(n+1)} \right] .$$

Problema 4. Dada una función f no constante tal que

$$f(z+a) = f(z) , f(z+bi) = f(z) ,$$

donde $a > 0$, $b > 0$ son constantes dadas, probar que $f(z)$ no puede ser analítica en ningún abierto conteniendo el rectángulo

$$R = \{z = x + iy \mid 0 \leq x \leq a , 0 \leq y \leq b\} .$$

Solución. Si $f(z)$ fuera analítica en

$$R = \{z = x + iy \mid 0 \leq x \leq a , 0 \leq y \leq b\} ,$$

puesto que este rectángulo es compacto, f sería acotada allí, digamos $|f(z)| \leq K$, para todo $z \in R$.

Dado cualquier $z \in \mathbb{C}$, podemos escribir z como

$$z = ma + nbi + z_1 ,$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$, $z_1 \in R$.

Por las hipótesis sobre f

$$f(z) = f(z_1) ,$$

de tal forma que

$$|f(z)| \leq K , \text{ para todo } z \in \mathbb{C} .$$

Por otra parte $f(z)$ también sería analítica en z al serlo en z_1 , luego $f(z)$ sería analítica y acotada en todo el plano. Por el teorema de Liouville $f(z)$ ha de ser una constante en contra de la hipótesis.

Problema 5. Probar que si $f(z)$ y no constante en la región acotada G , es continua en \overline{G} y tiene un valor constante en la frontera de G , entonces debe tener al menos un cero en G .

Solución. Sea c el valor de $f(z)$ para cualquier valor $z \in \partial G$ de la frontera de G . Puesto que $f(z)$ no es constante, haciendo uso del Principio del módulo máximo debe existir algún valor z_0 en el interior de G donde

$$|f(z_0)| < |c| .$$

Por otro lado si $f(z)$ no tuviera ningún cero en G , podríamos considerar la función $h(z) = \frac{1}{f(z)}$, que sería analítica en G , y que claramente satisface $h(z) = \frac{1}{c}$, para todo $z \in \partial G$ y $h(z_0) = \frac{1}{f(z_0)}$, de tal forma que

$$|h(z_0)| = \left| \frac{1}{f(z_0)} \right| > \frac{1}{c},$$

en contradicción con el Principio del módulo máximo para $h(z)$.

Problema 6. Sea $f(z)$ una función entera y consideremos la función de variable real asociada

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

se pide

- i) probar que $M(r, f)$ es monótona,
- ii) probar que $M(r, f)$ es continua,
- iii) determinar $M(r, f)$ para $f(z) = e^{z^2}$.

Solución.

i) Es una consecuencia del teorema del módulo máximo.

ii) Supongamos que $M(r, f)$ no es continua por la derecha para $r = r_0$.

Entonces existirá una sucesión $\{r_n\} \downarrow r_0$ tal que $M(r_n, f) \downarrow M > M(r_0, f)$. Sea $\{z_n\}$ tal que $|z_n| = r_n$ y $|f(z_n)| = M(r_n, f)$, que existe pues la circunferencia $C_n = \{z \mid |z| = r_n\}$ es compacto.

Tendremos que $\{z_n\}$ es una sucesión acotada y por tanto tendrá una sub-sucesión $\{z'_n\}$ convergente a un punto z'_0 .

Puesto que el módulo es una función continua, se tendrá

$$r_n = |z'_n| \rightarrow |z'_0| = r_0.$$

Ahora bien

$$|f(z'_n)| \rightarrow |f(z'_0)|,$$

y como

$$|f(z'_n)| = M(r_n, f) \rightarrow M,$$

se concluirá

$$|f(z'_0)| = M > M(r_0, f),$$

pero esto es una contradicción.

En el caso de discontinuidad por la izquierda, se razonará de forma análoga.

iii) Tenemos

$$|f(z)| = \left| e^{r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} \right| = e^{r^2 \cos 2\theta}, \quad z = re^{i\theta},$$

luego

$$M(r, f) = e^{r^2} ,$$

que se alcanza para $\theta = 0$.

Problema 7. Probar utilizando el Lema de Schwarz que una función analítica $f : B(0, 1) \rightarrow B(0, 1)$ del círculo unidad en sí mismo, biyectiva con $f(0) = 0$ y tal que f^{-1} también es analítica, tiene que ser una rotación, es decir debe ser de la forma $f(z) = e^{i\alpha}z$.

Solución. Por el Lema de Schwarz aplicado a $f(z)$ obtenemos

$$|f(z)| \leq |z| ,$$

y por otro lado aplicando el Lema de Schwarz a $f^{-1}(z)$ obtenemos

$$|f^{-1}(z)| \leq |z| ,$$

que por la biyectividad es equivalente a

$$|z| \leq |f(z)| ,$$

de tal forma que concluimos de la primera y la última relación

$$|f(z)| = |z| .$$

CAPITULO 6

EL TEOREMA GENERAL DE CAUCHY

CAPITULO 6. EL TEOREMA GENERAL DE CAUCHY

6.1 Teorema general de Cauchy, versión homotópica

6.2 Homología

6.3 Dominios simplemente conexos

6.4 Desarrollo en serie de Laurent

6.5 Ejercicios

6.1 TEOREMA GENERAL DE CAUCHY, VERSION HOMOTOPICA

Decíamos en el Capítulo 4 que el Teorema de Cauchy es aplicable a curvas cerradas γ en un dominio A y a funciones analíticas en A , de tal manera que A contenga el "interior" de γ . Esta idea imprecisa de que A contenga "el interior" de γ puede ser descrita en términos rigurosos por medio de las nociones de "homotopía" y "homología".

Estos conceptos no son equivalentes, siendo ambos naturales, la condición expresada en términos de la homotopía es estrictamente más fuerte que la homológica.

Definición 6.1.1. *Se dice que dos caminos γ_0, γ_1 contenidos en el mismo abierto A , es decir $\gamma_0^*, \gamma_1^* \subset A$, son A -homótopos, si existe una aplicación continua h del cuadrado unidad $I \times I$ en A , es decir*

$$h : \begin{array}{ccc} I \times I & \rightarrow & A \\ (s, t) & \rightarrow & h(s, t) \end{array} \quad , \text{ donde } I = [0, 1] ,$$

tal que

$$h(0, 1) = \gamma_0(t) \quad , \quad h(1, t) = \gamma_1(t) \quad \text{para } t \in I .$$

En el caso que γ_0, γ_1 tienen los mismos extremos entonces se exige adicionalmente que los caminos intermedios $\gamma_s(t) = h(s, t)$ tengan también los mismos extremos, es decir

$$h(s, t) = \gamma_0(t) = \gamma_1(0) \quad , \quad h(1, t) = \gamma_0(t) = \gamma_1(1) \quad \text{para } s \in I .$$

Finalmente si γ_0, γ_1 son cerrados, exigimos también que los γ_s sean cerrados, es decir

$$h(s, 0) = h(s, 1) \text{ para } s \in I.$$

Intuitivamente esta definición significa que γ_0, γ_1 son A -homótopos cuando γ_0 puede ser deformado de manera continua dentro de A en γ_1 , a través de una familia de caminos γ_s en A , donde γ_s viene dado por $\gamma_s(t) = h(s, t)$, $t \in I$.

Finalmente diremos que un camino γ es homotópico a un punto $z_0 \in A$, cuando γ es homotópico al camino constante γ_{z_0} cuya imagen se reduce a este punto.

El hecho de que un camino cerrado simple γ es homotópico a un punto implica intuitivamente que su "interior" ha de estar contenido en A .

Teorema 6.1.1. (Teorema general de Cauchy, versión homotópica).

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto una función analítica y sean γ_0, γ_1 dos caminos con extremos comunes, es decir, $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, entonces

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

También si γ_0, γ_1 son cerrados y homotópicos obtenemos la misma conclusión, es decir, la igualdad de la integral de f a lo largo de ambos caminos son iguales.

Demostración. Sea $\gamma : I \times I \rightarrow A$ la función que define la homotopía de γ_0, γ_1 . Recubramos el cuadrado $K = I \times I$ por un sistema de cuadrados K_{mn} , $m, n = 1, \dots, N$ de tal forma que cada $K_{m,n}$ tiene intersección con interior no vacío con sus cuadrados contiguos $K_{(m-1)n}$, $K_{(m+1)n}$, $K_{m(n-1)}$, $K_{m(n+1)}$.

Por la continuidad uniforme de γ podemos elegir los cuadrados K_{mn} suficientemente pequeños de tal forma que $\gamma(K_{mn})$ esté contenido en un círculo $D_{mn} \subset A$ donde f posee una primitiva, ver Teorema 4.3.3. Fijamos el índice m y elegimos arbitrariamente una primitiva F_{m1} en U_{m1} . A continuación elegimos la primitiva F_{m2} en U_{m2} de tal forma que $F_{m1} = F_{m2}$ en $U_{m1} \cap U_{m2}$, lo cual es posible pues dos primitivas difieren en una constante.

Procediendo de esta manera obtendríamos primitivas $F_{m1}, F_{m2}, F_{m3}, \dots, F_{mN}$ en $U_{m1}, U_{m2}, U_{m3}, \dots, U_{mN}$, con $F_{mn} = F_{m(n+1)}$ en $U_{mn} \cap U_{m(n+1)}$. Entonces se construye la función

$$\Phi_m(s, t) = F_{mn} \circ \gamma(s, t), \text{ para } s, t \in K_{mn}, n = 1, \dots, N,$$

la función Φ_m es claramente continua en el rectángulo $K_m = \bigcup_{n=1}^N K_{mn}$ y está definida salvo una constante aditiva. Elegimos Φ_1 arbitrariamente y entonces

elegimos Φ_2 de tal forma que $\Phi_1 = \Phi_2$ en la intersección $K_1 \cap K_2$. De esta manera elegimos también las funciones Φ_3, \dots, Φ_N , es decir cumpliendo la condición $\Phi_m = \Phi_{m+1}$ en $K_m \cap K_{m+1}$. Finalmente definimos

$$\Phi(s, t) = \Phi_m(s, t), \text{ para } (s, t) \in K_m, m = 1, \dots, N.$$

Para $s \in I$ fijo, la función $\Phi(s, t)$ es una primitiva a lo largo del camino $\gamma_s(t) = \gamma(s, t)$, por tanto se tiene

$$\int_{\gamma_s} f dz = \Phi(s, 1) - \Phi(s, 0).$$

En el caso en que γ_0, γ_1 tienen extremos comunes, entonces por la definición de homotopía en este caso se tiene también $\gamma(s, 0) = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $\gamma(s, 1) = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ para todo $s \in I$. Las funciones $\Phi(s, 0), \Phi(s, 1)$ son por tanto localmente constantes en cada punto de I , y por tanto sobre todo I , es decir $\Phi(0, 0) = \Phi(1, 0)$, $\Phi(0, 1) = \Phi(1, 1)$ de tal forma que la fórmula anterior implica el teorema en este caso.

En el caso en que γ_0, γ_1 son cerrados se tiene $\gamma(s, 0) = \gamma(s, 1)$, para todo $s \in I$, luego $\Phi(s, 1) - \Phi(s, 0)$ es localmente constante en cada punto de I , por tanto es constante sobre I de tal forma que en este caso también obtenmos la conclusión del teorema. q.e.d.

6.2 HOMOLOGIA

Definición 6.2.1. Diremos que dos caminos cerrados γ_0, γ_1 contenidos en el mismo abierto A son A -homólogos cuando

$$Ind_{\gamma_0}(\alpha) = Ind_{\gamma_1}(\alpha),$$

para todo $\alpha \notin A$.

La noción de homología introducida en la Definición 6.2.1 tiene su marco natural en un espacio más amplio que en el espacio de caminos cerrados en un abierto A del plano, este espacio más amplio será el espacio de cadenas formales de caminos cerrados en A .

En primer lugar consideraremos el siguiente ejemplo

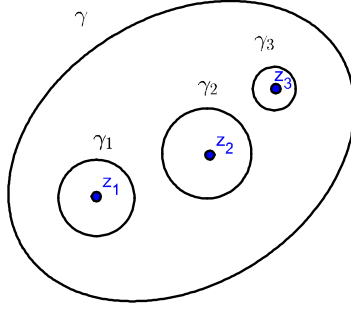


Fig.6.2

Sea γ el camino de la figura donde A es un abierto que tiene en su complementario tres puntos z_1, z_2, z_3 que son componente conexas en dicho complementario, es decir, existen discos perforados $B^*(z_1, \epsilon_1)$, $B^*(z_2, \epsilon_2)$, $B^*(z_3, \epsilon_3)$ contenidos en A .

En estas condiciones podemos encontrar caminos simples $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ en A tales que la suma de los índices

$$Ind_{\gamma_1}(z_i) + Ind_{\gamma_2}(z_i) + Ind_{\gamma_3}(z_i), \quad i = 1, 2, 3$$

de estos tres caminos respecto de estos tres puntos es igual al índice de γ respecto de los mismos puntos

$$Ind_{\gamma}(z_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

En estas condiciones parece natural decir que γ es homológicamente equivalente al "conjunto" de los tres caminos γ_i , $i = 1, 2, 3$.

A continuación describimos el medio de hacer precisa esta idea.

Llamaremos cadena de caminos en un abierto A a una expresión formal

$$m_1\gamma_1 + \dots + m_n\gamma_n$$

donde γ_i , $i = 1, \dots, n$ son caminos en A y m_i , $i = 1, \dots, n$ son números enteros. Si los caminos γ_i son cerrados, diremos que una tal cadena es un ciclo.

Podemos definir la integral de una función f a lo largo de una cadena γ mediante

$$\int_{\gamma} f dz = m_1 \int_{\gamma_1} f dz + \dots + m_n \int_{\gamma_n} f dz.$$

Para un ciclo $\gamma = \sum_{i=1}^n m_i \gamma_i$, donde los γ_i son caminos cerrados, llamaremos, consecuentemente, índice de γ respecto de un punto $\alpha \notin \gamma_1^* \cup \dots \cup \gamma_n^*$ al número

$$Ind_{\gamma}(\alpha) = Ind_{\gamma_1}(\alpha) + \dots + Ind_{\gamma_n}(\alpha),$$

y diremos que dos ciclos γ, η son A – homólogos y escribiremos $\gamma \sim \eta$ cuando $\gamma^*, \eta^* \subset A$, A abierto e

$$Ind_{\gamma}(\alpha) = Ind_{\eta}(\alpha) \text{ , para todo } \alpha \notin A.$$

Diremos que un ciclo γ contenido en A es A – homólogo a cero y escribiremos $\gamma \sim 0$ cuando

$$Ind_{\gamma}(\alpha) = 0 \text{ , para todo } \alpha \notin A.$$

Como mencionábamos al principio de este apartado, el concepto de homotopía es más estricto que el de homología, este hecho viene expresado por el siguiente teorema que enunciaremos pero no demostraremos.

Teorema 6.2.1. *Si γ_0, γ_1 son dos caminos cerrados en $A \subset \mathbb{C}$, A abierto, tales que γ_0, γ_1 son A – homótopos, entonces son también A – homólogos. En particular si γ_0 es homótopo a un punto en A , entonces es A – homólogo a un punto, es decir, es A – homólogo a cero.*

Se puede probar una versión homológica del Teorema de Cauchy que nosotros no demostraremos,

Teorema 6.2.2. (Teorema general de Cauchy, versión homológica). *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, A abierto una función analítica y sean γ_0, γ_1 dos ciclos A – homólogos, entonces*

$$\int_{\gamma_0} f dz = \int_{\gamma_1} f dz.$$

De los Teoremas 6.2.1 y 6.2.2 se deduce inmediatamente el Teorema 6.1.1, es decir, la versión homológica del Teorema de Cauchy implica la versión homotópica sin embargo nosotros sólo hemos presentado la demostración de la versión homotópica.

6.3 DOMINIOS SIMPLEMENTES CONEXOS

Recordemos que el Teorema 4.4.3 nos aseguraba que, para un dominio convexo, la integral de una función analítica a lo largo de cualquier camino contenido en el dominio se anula.

Mediante la noción de homotopía introducimos la clase mucho más general de los dominios simplemente conexos que poseen la misma propiedad.

Definición 6.3.1. *Un abierto conexo no vacío $A \subset \mathbb{C}$, se dice que es simplemente conexo si todo camino cerrado $\gamma \subset A$ es A – homótopo a cero.*

De la versión homotópica del Teorema de Cauchy, Teorema 6.1.1, se deduce inmediatamente el Teorema de Cauchy para conjuntos simplemente conexos.

Teorema 6.3.1. (Teorema de Cauchy para conjuntos simplemente conexos). Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$, un abierto simplemente conexo, una función analítica. Entonces

$$\int_{\gamma} f dz = 0.$$

para todo camino cerrado y rectificable en A .

Consecuencia inmediata del Teorema 6.3.1 es la existencia de primitiva F para toda función analítica f en un dominio simplemente conexo A .

En efecto la función

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta,$$

está bien definida pues la integral es independiente del camino elegido uniendo z_0 y z y estamos en las condiciones de la Proposición 4.3.2.

Finalmente mencionaremos que existen diferentes caracterizaciones de los dominios simplemente conexos. Enunciaremos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 6.3.2. Sea $A \subset \mathbb{C}$ un dominio, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) A es simplemente conexo.
- ii) Todo ciclo γ contenido en A es homológico a cero.
- iii) $\widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ es conexo donde $\widehat{\mathbb{C}}$ es el plano ampliado.

La equivalencia entre i) y ii) podría sugerir la equivalencia del hecho que un camino γ sea homotópico a cero y que γ sea homológico a cero.

Sin embargo esto no es así, existen ejemplos de caminos homológicos a cero que no son homotópicos a cero. Ver Rudin [], pag.

6.4 DESARROLLO EN SERIE DE LAURENT

A continuación obtenemos el llamado desarrollo en serie de Laurent a partir de la Fórmula integral de Cauchy para funciones analíticas en una corona, de forma análoga a como obteníamos el desarrollo en serie de Taylor para funciones analíticas en un círculo.

Teorema 6.4.1 (Teorema del desarrollo en serie de Laurent). Sea $f(z)$ una función analítica en la corona circular

$$A = \{z \mid r < |z - \alpha| < R\},$$

donde r puede ser 0 y R infinito. Entonces existen dos desarrollos en serie según las potencias de $z - \alpha$ y de $(z - \alpha)^{-1}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n},$$

convergentes en A y tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - \alpha)^n},$$

para $z \in A$. Además estas series convergen uniformemente en toda corona cerrada $A' \subset A$ de la forma

$$A' = \{z \mid r < r' \leq |z - \alpha| \leq R' < R\},$$

y los coeficientes a_n, b_n vienen dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, \dots \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

donde γ es una circunferencia dada por

$$\gamma(t) = \alpha + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

siendo ρ un radio cualquiera entre r y R .

Demostración.

Sean r_1, r_2 dos radios tales que $r < r_1 < r_2 < R$, y sean γ_1, γ_2 las circunferencias

$$\gamma_1(t) = \alpha + r_1 e^{it}, \quad \gamma_2(t) = \alpha + r_2 e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

de tal forma que si z está situado entre ambas circunferencias se tiene $\text{Ind}_{\gamma_2}(z) = 1$, $\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = 0$.

Sea z tal que $r_1 < |z - \alpha| < r_2$, y supongamos que $z - \alpha$ no es un número real positivo, es decir z no pertenece al segmento γ_3 que une el punto $\alpha + r_1$ y el punto $\alpha + r_2$, si z estuviera en este segmento se modificaría ligeramente el argumento tomando por γ_3 otro segmento uniendo las dos circunferencias.

Consideramos entonces el camino $\Gamma = \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_1 + \gamma_3$,

intuitivamente se ha efectuado un corte transversal entre γ_1 y γ_2 . Entonces z está en el recinto simplemente conexo encerrado por Γ y de la Fórmula integral de Cauchy obtenemos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Utilizaremos ahora desarrollos en serie similares a los utilizados en la deducción del desarrollo en serie de Taylor.

Para $\zeta \in \gamma_2$ y z en el interior de γ_2 tendremos

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - \alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - \alpha}{\zeta - \alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - \alpha)^n}{(\zeta - \alpha)^{n+1}},$$

siendo convergente la serie geométrica, además la convergencia es uniforme en $\zeta \in \gamma_2$.

Para $\zeta \in \gamma_1$ y z exterior a γ_1 tendremos

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \alpha} \frac{1}{1 - \frac{\zeta - \alpha}{z - \alpha}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - \alpha)^{n-1}}{(z - \alpha)^n},$$

siendo, de nuevo, convergente la serie geométrica y uniformemente convergente en $\zeta \in \gamma_1$.

Integrando término a término ambos desarrollos se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta \right) (z - \alpha)^n,$$

y

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_1} f(\zeta) (\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta \right) \frac{1}{(z - \alpha)^n}.$$

Puesto que los caminos $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ son A-homótopos y las funciones

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}}, \quad f(\zeta) (\zeta - \alpha)^{n-1},$$

son analíticas en A , se tiene

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \alpha)^{n+1}} d\zeta = a_n,$$

y

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} f(\zeta) (\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(\zeta) (\zeta - \alpha)^{n-1} d\zeta = b_n.$$

Por tanto concluimos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - \alpha)^n}, \quad z \in A,$$

pues dado $z \in A$ podemos encontrar r_1, r_2 tales que $r_1 < |z| < r_2 < R$.

Queda por probar la convergencia uniforme en una corona cerrada contenida en A .

Sean z_1, z_2 puntos de A tales que

$$r < |z_1 - \alpha| < r' < R' < |z_2 - \alpha| < R.$$

Como $z_2 \in A$, la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n$$

converge y por tanto converge uniformemente en el círculo cerrado de centro α y radio $R' < |z_2|$.

Análogamente, puesto que $z_1 \in A$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z_1 - \alpha} \right)^n,$$

converge y la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - \alpha} \right)^n,$$

convergerá uniformemente para $|z - \alpha| \geq r'$ con $r' > |z_1 - \alpha|$, pues en estas condiciones

$$\left| \frac{1}{z - \alpha} \right| \leq \frac{1}{r'} < \left| \frac{1}{z_1 - \alpha} \right|.$$

Análogamente se comprueba la convergencia uniforme en $|z - \alpha| < R'$ de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n.$$

Concluimos que en la corona cerrada

$$\{z \mid r' \leq |z - \alpha| \leq R'\},$$

la convergencia de la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{z - \alpha} \right)^n$$

es uniforme. q.e.d.

6.5 EJERCICIOS

1. Probar que toda región convexa A del plano complejo \mathbb{C} es también simplemente conexa.
2. Dar una demostración analítica que el plano puntuado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo.
3. Justificar mediante el Teorema general de Cauchy la siguiente igualdad

$$\int_{C(0,2)} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz = \int_{C(1, \frac{1}{2})} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz + \int_{C(-1, \frac{1}{2})} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz,$$

donde $C(\alpha, r)$ denota la circunferencia $\{z \mid |z - \alpha| = r\}$.

4. Desarrollar en serie de Laurent la función

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)},$$

en las coronas

- i) $A_1 = \{z \mid |z| < 1\}$
- ii) $A_2 = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$,
- iii) $A_3 = \{z \mid 3 < |z|\}$.

5. Desarrollar en serie de Laurent la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2},$$

en las coronas

- i) $A_1 = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$,
- ii) $A_2 = \{z \mid |z| < 1\}$,
- iii) $A_3 = \{z \mid |z| > 2\}$.

6. Desarrollar en serie de Laurent en la corona $A = \{z \mid 0 < |z - \pi| < \infty\}$ la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^2}.$$

SOLUCIONES DE LOS PROBLEMAS DEL TEMA 6

Problema 1. Probar que toda región convexa A del plano complejo \mathbb{C} , es también simplemente conexa.

Solución. Bastará ver que todo camino $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$, contenido en A , es homotópico a un punto fijo z_0 en A . En efecto consideremos la aplicación

$$\begin{aligned} H : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow A \\ (s, t) &\rightarrow (1-s)\gamma(t) + sz_0 \end{aligned}$$

la imagen de un punto (s, t) por la función está en A pues por hipótesis $\gamma(t)$ y z_0 están en A , y cuando s recorre $[0, 1]$ el punto $s\gamma(t) + (1-s)z_0$ recorre el segmento que les une, que está contenido en A por la hipótesis de convexidad. Es inmediato que H es continua del hecho que $\gamma(t)$ es continua y claramente $H(t, 0) \equiv \gamma(t)$, $H(t, 1) = z_0$. Luego H es una homotopía y $\gamma(t)$ es homotópico al camino constante $\gamma_{z_0}(t) = z_0$. Concluimos que A es también simplemente conexo.

Problema 2. Dar una demostración analítica que el plano puntuado $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ no es simplemente conexo.

Solución. Por el Teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos basta encontrar un camino cerrado γ , contenido en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, y una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tales que

$$\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0.$$

En efecto, sean $f(z) = \frac{1}{z}$, y γ la circunferencia unidad, es decir $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, que claramente satisfacen estas condiciones, tenemos

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_0^{2\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i \neq 0.$$

Problema 3. Justificar mediante el Teorema general de Cauchy la siguiente igualdad

$$\int_{C(0,2)} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz = \int_{C(1, \frac{1}{2})} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz + \int_{C(-1, \frac{1}{2})} \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz,$$

donde $C(\alpha, r)$ denota la circunferencia $\{z \mid |z - \alpha| = r\}$ recorrida en sentido positivo una sola vez.

Solución. Consideremos un abierto A conteniendo en su interior el círculo $B(0, 2)$ y no conteniendo los círculos $B(1, \frac{1}{2}), B(-1, \frac{1}{2})$, entonces el ciclo C formado por las circunferencias

$$\begin{aligned} C_1 &= C(0, 2) \text{ en sentido positivo ,} \\ C_2 &= C\left(1, \frac{1}{2}\right) \text{ en sentido negativo,} \end{aligned}$$

y

$$C_3 = C\left(-1, \frac{1}{2}\right) \text{ en sentido negativo,}$$

está contenido en A y es homólogo a cero. Luego, por el Teorema de Cauchy, versión homológica

$$\int_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2 - 1)} dz = 0, \quad (1)$$

pues $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 - 1}$ es analítica en A . La relación (1) es claramente equivalente a la relación pedida en el problema.

Problema 4. Desarrollar en serie de Laurent de potencias de z la función

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)},$$

en las coronas

- i) $A_1 = \{z \mid |z| < 1\}$,
- ii) $A_2 = \{z \mid 1 < |z| < 3\}$,
- iii) $A_3 = \{z \mid 3 < |z|\}$.

Solución. Descomponemos la función en fracciones simples

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+3} \right),$$

i) Si $|z| < 1$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+3} \right) &= \frac{1}{2 \cdot 3} \left(\frac{1}{\frac{z}{3} + 1} \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n, \end{aligned}$$

es decir

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{3^{n+1}} \right) z^n,$$

ii) Si $1 < |z| < 3$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) &= \frac{1}{2z \left(1 + \frac{1}{z} \right)} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} , \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+3} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n ,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n-1} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n ,\end{aligned}$$

iii) Si $3 < |z|$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+1} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-n} , \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z+3} \right) &= \frac{1}{2z \left(\frac{3}{z} + 1 \right)} = \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n z^{-n} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n z^{-n-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 3^{n-1} z^{-n}\end{aligned}$$

es decir

$$f(z) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - 3^{n-1}) z^{-n} .$$

Problema 5. Desarrollar en serie de Laurent de potencias de z la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2} ,$$

en las coronas

- i) $A_1 = \{z \mid |z| < 1\}$,
- ii) $A_2 = \{z \mid 1 < |z| < 2\}$,
- iii) $A_3 = \{z \mid |z| > 2\}$.

Solución. Descomponemos la función en fracciones simples

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} ,$$

i) Si $|z| < 1$ entonces

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n ,$$

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n ,$$

luego

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} z^n ,$$

ii) Si $1 < |z| < 2$ entonces

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \right) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} ,$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n ,$$

por tanto

$$f(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} ,$$

iii) Si $|z| > 2$ entonces

$$\frac{1}{z-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n} ,$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} z^{-n} ,$$

luego

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1 + 2^{n-1}) z^{-n} .$$

Problema 6. Desarrollar en serie de Laurent en la corona $A = \{z \mid 0 < |z - \pi| < \infty\}$ la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^2} .$$

Solución. Recordando el desarrollo en serie de Taylor de $\operatorname{sen} z$ obtenemos el desarrollo en \mathbb{C}

$$\operatorname{sen}(z - \pi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (z - \pi)^{2n+1} ,$$

y teniendo en cuenta la relación

$$\operatorname{sen} z = -\operatorname{sen}(z - \pi) \ ,$$

concluimos

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{\operatorname{sen} z}{(z - \pi)^2} = -\frac{\operatorname{sen}(z - \pi)}{(z - \pi)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} (z - \pi)^{2n-1} \ , \end{aligned}$$

en $A = \{z \mid 0 < |z - \pi| < \infty\}$.

CAPITULO 7

CEROS DE LAS FUNCIONES ANALITICAS. SINGULARIDADES AISLADAS

CAPITULO 7. CEROS DE LAS FUNCIONES ANALITICAS SINGULARIDADES AISLADAS

- 7.1 Ceros de las funciones analíticas
- 7.2 Singularidades aisladas de las funciones analíticas
- 7.3 Funciones meromorfas. Polos
- 7.4 Aplicaciones del desarrollo de Laurent al estudio de las singularidades aisladas
- 7.5 Ejercicios

7.1 CEROS DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, A abierto convexo de \mathbb{C} , diremos que $\alpha \in A$, es un cero de f si $f(\alpha) = 0$. Al conjunto de ceros de f lo representaremos por $\mathbb{Z}(f)$.

El conjunto $\mathbb{Z}(f)$ de ceros de una función analítica tiene la importante propiedad de ser un conjunto discreto en A , es decir, no tiene puntos de acumulación en A , salvo en el caso particular de la función f idénticamente nula.

Este hecho está contenido y precisado en el siguiente teorema.

Teorema 7.1.1. *Sea $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ analítica donde A es un dominio. Entonces el conjunto $\mathbb{Z}(f)$ de ceros, o bien coincide con A , o no tiene puntos de acumulación en A .*

Si $\mathbb{Z}(f)$ no tiene puntos de acumulación en A , entonces para cada $\alpha \in A$, existe un número natural m , tal que

$$f(z) = (z - \alpha)^m g(z), \text{ con } g(\alpha) \neq 0,$$

para todo $z \in A$, donde g es una función analítica en A .

Demostración. Denotemos por C el conjunto de puntos de acumulación de $\mathbb{Z}(f)$ que pertenezcan a A . Por la continuidad de f , estos puntos también serán ceros de f , es decir $C \subset \mathbb{Z}(f)$.

Para probar la primera afirmación del teorema bastará probar que C es vacío o coincide con A

Sea pues $\alpha \in \mathbb{Z}(f)$, y sea $B(\alpha, r)$ un círculo con centro α , contenido en A . Por el Teorema del desarrollo de Taylor existe una serie de potencias tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n, \text{ para } z \in B(\alpha, r).$$

Entonces pueden ocurrir los siguientes casos:

- i) todos los coeficientes a_n son nulos,
- ii) algún coeficiente a_n no es nulo.

En el caso i) f es idénticamente nula en $B(\alpha, r)$, luego $B(\alpha, r) \subset \mathbb{Z}(f)$, pero como todos los puntos de $B(\alpha, r)$ son de acumulación de $\mathbb{Z}(f)$, entonces también $B(\alpha, r) \subset \mathbb{C}$.

En el caso ii) existirá un número entero mínimo $m > 0$ tal que $a_m \neq 0$ y el desarrollo de f tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n = (z - \alpha)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - \alpha)^n.$$

Consideremos entonces la función $g(z)$ definida de la siguiente manera

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^m} & , \text{ para } z \in A \setminus \{\alpha\} \\ a_m & , \text{ para } z = \alpha. \end{cases}$$

La función g es analítica en $A \setminus \{\alpha\}$ como cociente de funciones analíticas y también es derivable en α pues en $B(\alpha, r)$ admite el desarrollo en serie de potencias

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - \alpha)^n, \text{ para } z \in B(\alpha, r).$$

Puesto que $g(\alpha) = a_m \neq 0$, por la continuidad de g existe un entorno de α donde $g(z) \neq 0$.

Como $f(z) = (z - \alpha)^m g(z)$ y ninguno de los dos factores se anula en este entorno, tampoco se anula $f(z)$ en él. Luego en este caso α es un punto aislado de $\mathbb{Z}(f)$.

En consecuencia $\alpha \in \mathbb{Z}(f)$ sólo puede ser punto de C en el caso i) y entonces α es un punto interior de C por lo que C es un conjunto abierto en A .

Como C es abierto y cerrado al mismo tiempo en A y A es conexo, C ha de ser el conjunto \emptyset o bien el conjunto total A y esto es la afirmación inicial del teorema.

La segunda parte se sigue de la definición de g en esta demostración y su analiticidad. q.e.d.

Teorema 7.1.2 (Principio de Identidad). Si f_1, f_2 son dos funciones analíticas en una región A de \mathbb{C} de tal forma que

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ , } z \in B \subset A,$$

entonces si B tiene un punto de acumulación en A entonces f_1, f_2 han de ser idénticas en A , es decir

$$f_1(z) = f_2(z) \text{ , para todo } z \in A.$$

El principio de identidad de las funciones analíticas, es decir Teorema 7.1.2, se sigue inmediatamente considerando la función $f = f_1 - f_2$ y aplicando el Teorema 7.1.1.

7.2 SINGULARIDADES AISLADAS DE LAS FUNCIONES ANALÍTICAS

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto y $\alpha \in A$, diremos que la función f tiene una singularidad aislada en α si f es analítica en $A \setminus \{\alpha\}$, pero desconocemos el comportamiento de f en α .

Definición 7.2.1 Sea $A \subset \mathbb{C}$ abierto y $\alpha \in A$. Diremos que la función f tiene una singularidad evitable en α si tiene una singularidad aislada en α pero se puede encontrar un valor $b \in \mathbb{C}$, de tal manera que poniendo $f(\alpha) = b$, resulta que la función f es analítica en A .

La siguiente proposición da una condición necesaria y suficiente para que una singularidad aislada de una función f sea evitable.

Teorema 7.2.1 Sea α una singularidad aislada de la función f en $A \subset \mathbb{C}$ abierto, y supongamos que la función f es acotada en un círculo perforado $B^*(\alpha, r) = \{z \mid 0 < |z - \alpha| < r\}$ contenido en $A \setminus \{\alpha\}$. Entonces la función tiene una singularidad evitable en α .

Demostración. Definamos la función $h : A \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$h(z) = \begin{cases} (z - \alpha)^2 f(z) & \text{para } z \in A \setminus \{\alpha\} \\ 0 & \text{para } z = \alpha \end{cases}.$$

Por la hipótesis de acotación se deduce que existe $h'(\alpha)$ y que $h'(\alpha) = 0$. Luego h es analítica en A y por tanto existe un desarrollo en serie de potencias en un círculo de centro α de radio mayor o igual que r , es decir tendremos la relación

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

para todo z en dicho círculo y por tanto también en $B(\alpha, r)$.

Los coeficientes $a_0 = h(\alpha)$, $a_1 = h'(\alpha)$ son ambos nulos. Consideremos entonces la función analítica en $B(\alpha, r)$ definida por la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (z - \alpha)^n ,$$

esta función vale a_2 en $z = \alpha$ y coincide con f en $B^*(\alpha, r)$, luego concluimos que α es una singularidad evitable para f . q.e.d.

El siguiente teorema describe los posibles comportamientos de una función en el entorno de una singularidad aislada y permite por tanto la clasificación de las singularidades.

Teorema 7.2.2 (Teorema de Weierstrass). *Sea $\alpha \in A$ una singularidad aislada para la función analítica f en $A \setminus \{\alpha\}$. Entonces se presenta una de las siguientes posibilidades excluyentes:*

- i) *f tiene una singularidad evitable en α ,*
- ii) *Existen números complejos c_1, \dots, c_m , $m \in \mathbb{Z}$, $m > 0$ tal que $c_m \neq 0$*

y la función

$$f(z) - \sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - \alpha)^k}$$

tiene una singularidad evitable en α .

iii) *Para todo $r > 0$ tal que $B(\alpha, r) \subset A$, entonces la imagen por f del círculo perforado $B^*(\alpha, r)$ es densa en \mathbb{C} .*

En el caso ii) se dice que f tiene un polo de orden m en α . La función

$$\sum_{k=1}^m \frac{c_k}{(z - \alpha)^k}$$

es llamada la parte principal de la función f en el polo α . Es claro que si α es un polo entonces

$$|f(z)| \rightarrow \infty \text{ cuando } z \rightarrow \alpha.$$

En el caso iii) se dice que f tiene una singularidad esencial en α .

Demostración. Supongamos que iii) no es cierto, entonces podemos encontrar $r > 0, \delta > 0$ y un número complejo w tales que para todo $z \in B^*(\alpha, r)$ se tiene

$$|f(z) - w| > \delta.$$

Definimos entonces la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

en $B^*(\alpha, r)$, entonces tendremos que g es analítica en $B^*(\alpha, r)$ y

$$|g(z)| < \frac{1}{\delta}, \quad z \in B^*(\alpha, r).$$

Por tanto, por el Teorema 7.2.1, g tiene una singularidad evitable en α y por tanto puede extenderse a una función analítica en $B(\alpha, r)$.

Si $g(\alpha) \neq 0$, entonces se tendrá $|g(z)| > \epsilon > 0$, para un cierto $\epsilon > 0$ en un entorno $B^*(\alpha, \rho)$ con $\rho < r$, pero entonces ha de tenerse

$$|f(z) - w| < \frac{1}{\epsilon},$$

para $z \in B^*(\alpha, \rho)$, y también

$$|f(z)| < \frac{1}{\epsilon} + |w|,$$

luego f también ha de ser acotada en $B^*(\alpha, \rho)$ y por el Teorema 8.2.1, α también es una singularidad evitable para f .

Si g tiene un cero de orden $m \geq 1$ en a , es decir

$$g(z) = (z - \alpha)^m g_1(z),$$

con $g_1(z)$ analítica en $B(\alpha, r)$ y $g_1(\alpha) \neq 0$, entonces definimos $h = \frac{1}{g_1}$ en un círculo $B(\alpha, \rho_1)$ donde $g_1(z) \neq 0$, entonces h es analítica en $B(\alpha, \rho_1)$ y distinta de cero allí y tendremos

$$f(z) - w = \frac{1}{g(z)} = (z - \alpha)^{-m} h(z), \quad z \in B(\alpha, \rho_1).$$

Pero h tendrá un desarrollo de la forma

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n, \quad z \in B(\alpha, \rho_1),$$

con $b_n \neq 0$, luego

$$f(z) = w + (z - \alpha)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - \alpha)^n,$$

y obtenemos ii) con $c_k = b_{m-k}$, $k = 1, \dots, m$.

Esto completa la demostración del teorema. q.e.d.

El concepto de singularidad aislada de una función analítica en un punto $\alpha \in \mathbb{C}$, puede extenderse al punto del infinito. Diremos que f tiene una singularidad aislada en ∞ , si f es analítica en $A \setminus \{\infty\}$, y desconocemos el comportamiento de f en ∞ , donde A es un abierto del plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$ e $\infty \in A$.

El estudio de las singularidades de una función en ∞ puede hacerse directamente, pero es más cómodo, mediante un cambio de variable, trasladar este estudio al punto $z = 0$.

Definición 7.2.2 Sea $A \subset \overline{\mathbb{C}}$ un abierto del plano ampliado y f analítica en $A \setminus \{\infty\}$. Se dice que la función f tiene en ∞ una singularidad evitable, un polo de orden m o una singularidad esencial, si la función $\varphi : B \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right),$$

donde $B = \{z \mid z \in \mathbb{C}, \frac{1}{z} \in A\}$, tiene una singularidad de tal tipo en $z = 0$.

De esta definición y del estudio anterior de las singularidades aisladas en punto finito de \mathbb{C} , deducimos el siguiente teorema.

Teorema 7.2.3 Los siguientes casos excluyentes pueden ocurrir respecto al comportamiento en torno al ∞ , cuando ∞ es una singularidad aislada para una función analítica f ,

i) f tiene una singularidad evitable. Esto ocurre si y sólo si existe un entorno perforado de ∞ , es decir, si existe $r > 0$, tal que f está acotada en $\{z \mid |z| > r\}$.

ii) f tiene un polo de orden m , si existe $r > 0$ y un polinomio de orden m

$$a_m z^m + \dots + a_1 z, \quad a_m \neq 0,$$

tal que la función $f(z) - a_1 z - \dots - a_m z^m$ está acotada en $\{z \mid |z| > r\}$.

iii) Para todo r suficientemente grande la imagen por f de $\{z \mid |z| > r\}$ es densa en \mathbb{C} .

7.3 FUNCIONES MEROMORFAS. POLOS

Definición 7.3.1 Diremos que una función $f : A \rightarrow \mathbb{C}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, es meromorfa si existe un conjunto $P \subset A$, sin puntos de acumulación en A , tal que f es analítica en $A \setminus P$ y f presenta en cada punto $p \in P$ una singularidad aislada que es un polo.

Brevemente, f es una función meromorfa si en todo el dominio de definición es analítica y sus únicas singularidades son polos.

A continuación presentamos un breve estudio de los polos de una función meromorfa.

Teorema 7.3.1 Una función $f(z)$ tiene un polo en $\alpha \in \mathbb{C}$ si y sólo si existe un entero $m > 0$ y un entorno U de α , contenido en el dominio A de definición de f tal que la función

$$g(z) = f(z)(z - \alpha)^m,$$

es analítica en U y $g(\alpha) \neq 0$. Diremos que m es el orden del polo.

Demostración. Sea

$$p(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_n}{(z-\alpha)^n}$$

la parte principal del polo, de tal forma que

$$h = f - p$$

es analítica en un entorno $U(\alpha)$ de α y por tanto también lo será la función

$$h(z)(z-\alpha)^m.$$

Como

$$p(z)(z-\alpha)^m = c_m + c_{m-1}(z-\alpha) + \dots + c_1(z-\alpha)^{m-1},$$

es también analítica, también lo será la función

$$f(z)(z-\alpha)^m = h(z)(z-\alpha)^m + p(z)(z-\alpha)^m.$$

Llamando $g(z)$ a esta función, obtenemos

$$g(\alpha) = c_m \neq 0.$$

Inversamente, si para un entero $m > 0$, se tiene que $g(z) = f(z)(z-\alpha)^m$ es analítica y $g(\alpha) \neq 0$ en un entorno $U(\alpha)$ de α , entonces admitirá un desarrollo en serie de potencias de $z-\alpha$

$$f(z)(z-\alpha)^m = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n, \text{ con } b_0 \neq 0.$$

De esta igualdad resulta si $z \neq \alpha$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-\alpha)^m} \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-\alpha)^n \\ &= p(z) + \sum_{n=m}^{\infty} b_n(z-\alpha)^{n-m}, \end{aligned}$$

donde

$$p(z) = \sum_{n=1}^m \frac{b_{m-n}}{(z-\alpha)^n}, \text{ con } b_0 \neq 0.$$

De aquí se deduce que α es un polo de orden m y su parte principal es p .
q.e.d.

De los Teoremas 7.1.1 y 7.3.1 se obtiene inmediatamente el siguiente teorema.

Teorema 7.3.2 Si la función $f(z)$ es analítica en el abierto $A \subset \mathbb{C}$ y si $f(z)$ tiene un cero de orden m en $\alpha \in A$, entonces la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene

un polo de orden m en α . Recíprocamente si $f(z)$ tiene un polo de orden m en α , entonces la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, es analítica en un entorno de α y tiene un cero de orden m en α .

En la siguiente definición se introduce el importante concepto de residuo en un polo. Este concepto será extendido al caso general de una singularidad aislada, posiblemente esencial en el siguiente capítulo.

Definición 7.3.2. Si $f(z)$ es una función con un polo de orden m en el punto α y su parte principal es

$$p(z) = \sum_{n=1}^m \frac{c_n}{(z-\alpha)^n},$$

llamaremos residuo de f en el polo α al coeficiente c_1 del término $\frac{1}{z-\alpha}$.

El residuo de f en α se designa por $\text{Res}(f, \alpha)$.

A continuación presentamos una versión limitada a las funciones meromorfas de importante Teorema de los residuos.

Teorema 7.3.3 (Teorema de los residuos para funciones meromorfas). Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y $f(z)$ una función meromorfa con polos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$. Sea γ un camino cerrado contenido en A que no pasa por ninguno de los polos α_i . Entonces se tiene

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^r \text{Ind}_{\gamma}(\alpha_i) \text{Res}(f, \alpha_i).$$

Demostración. Sean los polos $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ de multiplicidades m_1, \dots, m_r y sean $p_i(z)$, $i = 1, \dots, r$ sus partes principales con

$$p_i(z) = \sum_{n=1}^{m_i} \frac{c_{i,n}}{(z-\alpha_i)^n}, \quad i = 1, \dots, r,$$

entonces la función $f - \sum_{i=1}^r p_i$ es analítica en A pues ambas funciones f y $\sum_{i=1}^r p_i$ son meromorfas en A , con los mismos polos, cuyas partes principales se cancelan en cada polo.

Así pues podemos aplicar el Teorema 7.4.1, i.e. el Teorema de Cauchy para dominios simplemente conexos y obtenemos

$$\int_{\gamma} (f - (p_1 + p_2 + \dots + p_r)) dz = 0,$$

luego

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{i=1}^r \int_{\gamma} p_i dz.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} p_i(z) &= \int_{\gamma} \frac{c_{i,1}}{z - \alpha_i} dz + \dots + \int_{\gamma} \frac{c_{i,m_i}}{(z - \alpha_i)^{m_i}} dz \\ &= 2\pi i c_{i,1} \text{Ind}_{\gamma}(\alpha_i),\end{aligned}$$

las últimas $m_i - 1$ integrales son nulas pues las funciones integrando tienen primitiva.

De ambas igualdades se concluye el enunciado del teorema. q.e.d.

Mencionemos finalmente que el concepto de residuo se extiende al caso de un polo en infinito para funciones meromorfas f definidas en un abierto $A \subset \widehat{\mathbb{C}}$ con $\infty \in A$. Se utiliza análogamente la notación $\text{Res}(f, \infty)$.

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^m a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n},$$

en un entorno perforado del ∞ , es decir

$$\sum_{n=0}^m a_n z^n,$$

es la parte principal de f en ∞ .

En este caso pondremos

$$\text{Res}(f, \infty) = -b_1.$$

Esta definición aparentemente arbitraria se justifica mediante el siguiente argumento.

Sea $f(z)$ una función analítica en un entorno del ∞ , es decir, según nuestra definición en el Capítulo 2, queremos decir que la función $g(z) = f(\frac{1}{z})$ es analítica en el cero, y sea γ_R la circunferencia

$$\gamma_R(t) = R e^{-it}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

de tal forma que γ_R cae dentro del dominio de analiticidad de f .

El sentido de γ_R es el opuesto al habitual.

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n},$$

el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $B^*(0, R_1)$ con $R_1 < R$. Entonces mediante integración término a término obtenemos

$$\int_{\gamma_R} f(z) dz = -2\pi i b_1 = 2\pi i \text{Res}(f, \infty).$$

Es decir el residuo $\text{Res}(f, \infty)$ representa aquí también, salvo el factor $2\pi i$, la integral a lo largo de una circunferencia rodeando el infinito y no conteniendo otros polos en su interior.

7.4 APLICACIONES DEL DESARROLLO DE LAURENT AL ESTUDIO DE LAS SINGULARIDADES AISLADAS

Supongamos que $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $\alpha \in A$, A abierto. Es decir $f(z)$ es analítica en $A \setminus \{\alpha\}$ y desconocemos su comportamiento en α . Entonces existirá un círculo perforado

$$B^*(\alpha, R) = \{z \mid 0 < |z - \alpha| < R\},$$

donde f es analítica, pero $B^*(\alpha, R)$ es una corona donde $r = 0$, r el radio menor.

Por tanto f admitirá un desarrollo en serie de Laurent en $B^*(\alpha, R)$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - \alpha)^n}.$$

La parte correspondiente a las potencias negativas

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{(z - \alpha)^n},$$

se llamará parte principal de f en el punto singular aislado α y llamaremos residuo de f en α y lo representaremos por

$$\text{Res}(f, \alpha),$$

al primer coeficiente b_1 .

Si el desarrollo de Laurent de f en α no tiene parte principal, es decir, $b_n = 0$ para todo n , entonces f admitirá un desarrollo en $B^*(\alpha, R)$ de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

por tanto definiendo $f(\alpha) = a_0$, obtenemos una función analítica en $B(\alpha, R)$ y α es una singularidad evitable.

Si el desarrollo de Laurent tiene una parte principal con un número m finito de términos, entonces tendremos un desarrollo de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n + \frac{b_1}{z - \alpha} + \dots + \frac{b_m}{(z - \alpha)^m},$$

en $B^*(\alpha, R)$ y por tanto

$$f(z) - \frac{b_1}{z - \alpha} - \dots - \frac{b_m}{(z - \alpha)^m},$$

que viene dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n,$$

tendrá una singularidad evitable y por tanto α tendrá un polo de orden m .

Por tanto el caso en que α es una singularidad esencial corresponde al caso en que la parte principal de f en α tiene infinitos términos, es decir $b_n \neq 0$, para infinitos valores de n .

Análogamente se pueden analizar las singularidades aisladas de las funciones analíticas en ∞ , según la Definición 7.2.2, en términos del desarrollo de Laurent. De acuerdo con esta definición existirá un círculo perforado del punto $z = 0$, digamos $B^*(0, r)$, donde la función $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ es analítica.

Esto es equivalente a que existe un entorno perforado de ∞ , a saber

$$B^*\left(\infty, \frac{1}{r}\right) = \left\{z \mid |z| > \frac{1}{r}\right\},$$

donde f es analítica. Ahora bien $B^*\left(\infty, \frac{1}{r}\right)$ es una corona de radios $\frac{1}{r} < R < \infty$, y por tanto podemos considerar el desarrollo de Laurent de f allí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{1}{z^n},$$

teniendo en cuenta la Definición 7.2.2 y el análisis para los puntos finitos singulares, obtenemos las siguientes conclusiones.

El punto ∞ es una singularidad evitable si la parte principal de f en ∞ , que por definición es

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

tiene todos los coeficientes nulos, es decir $a_n = 0$ para todo $n \geq 0$.

El punto ∞ es un polo si la parte principal de f en ∞ tiene un número finito de términos, es decir si $a_n = 0$, salvo para una cantidad finita de valores de n . El polo es de orden m si $a_m \neq 0$ es el último coeficiente no nulo.

Finalmente ∞ será una singularidad esencial si la parte principal de f en ∞ tiene in

nitos términos, es decir, $a_n \neq 0$ para infinitos valores de n .

7.5 EJERCICIOS

1. Determinar si puede existir una función analítica en el disco unidad $D = \{z \mid |z| < 1\}$, tal que

$$\begin{aligned} i) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \dots \\ ii) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \dots \\ iii) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}, \dots \\ iv) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{6}, \dots \end{aligned}$$

2. Determinar los puntos singulares y su naturaleza de las siguientes funciones

$$i) f(z) = e^{\frac{1}{z}}, ii) f(z) = z \operatorname{sen} \frac{1}{z}.$$

3. Determinar y clasificar las singularidades aisladas de las siguientes funciones

$$i) f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}, ii) f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}.$$

4. Determinar todas las funciones $f(z)$ analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, tales que en $z = 0$ presentan un polo simple con residuo igual a uno y que satisfacen $|f(z)| < 3$ para $|z| > 1$ y $f(i) = i$.

5. Calcular la siguiente integral por el método de los residuos

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+z^2}}{z^5} dz,$$

donde γ es la circunferencia $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Calcular el valor de la integral

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2},$$

utilizando la Fórmula Integral de Cauchy, donde C es la circunferencia

$$i) \{z \mid |z - i| = 1\}, ii) \{z \mid |z + i| = 1\}, iii) \{z \mid |z| = 2\}.$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 7

Problema 1. Determinar si puede existir una función analítica no idénticamente nula en el círculo unidad $B(0, 1) = \{z \mid |z| < 1\}$, tal que

$$\begin{aligned} i) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= 0, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 1, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \dots \\ ii) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = 0, \dots \\ iii) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}, \dots \\ iv) \quad f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{2}{3}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{4}, \quad f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{5}, \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{6}, \dots \end{aligned}$$

Solución.

i) No puede existir pues $z = 0$ sería punto de acumulación de ceros, lo cual no puede ocurrir por el Principio de Identidad.

ii) Por el Principio de Identidad deberíamos tener $f(z) \equiv z$ pues $z = 0$ es un punto de acumulación donde ambas funciones son iguales. Pero por otro lado tenemos $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$, luego no puede existir tal función.

iii) Por el mismo razonamiento que en ii) deberíamos tener $f(z) \equiv z$ pero $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

iv) En este caso sí existe una tal función que es $f(z) = \frac{1}{z+1}$.

Problema 2. Determinar los puntos singulares y su naturaleza de las siguientes funciones,

$$i) f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad ii) f(z) = z \operatorname{sen} \frac{1}{z}.$$

Solución.

i) En este caso solamente $z = 0$ puede ser un punto singular y en efecto es un punto singular esencial pues la función no tiene límite cuando nos

aproximamos al punto,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{n}\right\} &\rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \infty, \\ \left\{-\frac{1}{n}\right\} &\rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(-\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0,\end{aligned}$$

ii) En este caso solamente $z = 0$ puede ser un punto singular y en efecto es un punto singular esencial pues la función no tiene límite cuando nos aproximamos al punto,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{1}{2\pi n}\right\} &\rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n} \operatorname{sen} 2\pi n = 0, \\ \text{pues } \operatorname{sen} 2\pi n &= 0,\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\frac{i}{n} &\rightarrow 0 \text{ y } \operatorname{sen}\left(\frac{n}{i}\right) = \frac{1}{2i} (e^{i\frac{n}{i}} - e^{-i\frac{n}{i}}) = \frac{1}{2i} (e^n - e^{-n}), \\ \text{luego } f\left(\frac{i}{n}\right) &= \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{2i} (e^n - e^{-n}) = \frac{1}{2n} (e^n - e^{-n}) \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

Problema 3. Determinar y clasificar las singularidades de las siguientes funciones,

$$i) f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}, \quad ii) f(z) = e^{\frac{1+z}{1-z}}.$$

Solución.

i) En este caso las singularidades de la función son los ceros del denominador es decir $z_n = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, que son ceros simples de la función $\operatorname{sen} z$ y por tanto polos simples de la función $f(z)$.

ii) En este caso el único punto singular posible es $z = 1$ y es un punto singular esencial pues no existe límite de $f(z)$ cuando nos aproximamos a $z = 1$,

$$\begin{aligned}\left\{1 + \frac{1}{n}\right\} &\rightarrow 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{n(1+\frac{1}{n})} = \infty, \\ \left\{1 - \frac{1}{n}\right\} &\rightarrow 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n(1-\frac{1}{n})} = 0.\end{aligned}$$

Problema 4. Determinar todas las funciones $f(z)$ analíticas en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tales que en $z = 0$ presentan un polo simple con residuo igual a uno y que satisfacen $|f(z)| < 3$ para $|z| > 1$ y $f(i) = i$.

Solución. De la primera condición se deduce

$$f(z) = \frac{1}{z} + g(z) ,$$

con $g(z)$ analítica en \mathbb{C} . Por la segunda condición obtenemos

$$|g(z)| \leq |f(z)| + 1 \leq 4 , \text{ para } |z| > 1 ,$$

por tanto $g(z)$ es acotada en todo el plano \mathbb{C} y por el Teorema de Liouville es constante. Luego concluimos que $f(z) = \frac{1}{z} + C$ y por la última condición

$$f(i) = -i + C = i , \text{ luego } C = 2i ,$$

luego concluimos que tenemos una única función que satisface nuestras condiciones que es $f(z) = \frac{1}{z} + 2i$.

Problema 5. Calcular la siguiente integral por el método de los residuos

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+z^2}}{z^5} dz ,$$

donde γ es la circunferencia $\gamma(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Solución. La función $\frac{e^{z+z^2}}{z^5}$ tiene un único polo en el interior de γ , a saber $z = 0$ y es de orden cinco. Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+z^2}}{z^5} dz = 2\pi i \operatorname{Re}_{s_z=0} \left(\frac{e^{z+z^2}}{z^5} \right) ,$$

y para calcular el residuo estudiamos el desarrollo en serie de la función

$$\begin{aligned} e^{z+z^2} &= 1 + (z + z^2) + \frac{(z + z^2)^2}{2!} + \dots + \frac{(z + z^2)^n}{n!} + \dots \\ &= 1 + z + z^2 + \frac{z^2 + z^4 + 2z^3}{2!} + \frac{z^3 + z^6 + 3z^4 + 3z^5}{3!} + \dots \end{aligned}$$

luego

$$\frac{e^{z+z^2}}{z^5} = \left(\frac{1}{4!} + \frac{1}{3!}3 + \frac{1}{2!} \right) \frac{1}{z} + \dots$$

es decir

$$\operatorname{Re}_{s_z=0} \left(\frac{e^{z+z^2}}{z^5} \right) = \frac{25}{4} ,$$

luego

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+z^2}}{z^5} dz = \pi i \frac{25}{12} .$$

Problema 6. Calcular el valor de la integral

$$\int_C \frac{dz}{1+z^2} ,$$

utilizando la fórmula integral de Cauchy, donde C es la circunferencia

$$i) \{z \mid |z-i|=1\} , \quad ii) \{z \mid |z+i|=1\} \quad iii) \{z \mid |z|=2\} .$$

Solución.

$$\begin{aligned} i) \int_C \frac{dz}{1+z^2} &= \int_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)} \\ &= \int_C \frac{\frac{1}{z+i}}{(z-i)} dz = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi , \end{aligned}$$

pues la función $\frac{1}{z+i}$ es analítica en un abierto conteniendo la circunferencia $i)$.

$$\begin{aligned} ii) \int_C \frac{dz}{1+z^2} &= \int_C \frac{dz}{(z-i)(z+i)} \\ &= \int_C \frac{\frac{1}{z-i}}{(z+i)} dz \\ &= 2\pi i \frac{1}{(-2i)} = -\pi , \end{aligned}$$

pues la función $\frac{1}{z-i}$ es analítica en un abierto conteniendo la circunferencia $ii)$.

$$\begin{aligned} iii) \int_C \frac{dz}{1+z^2} &= \int_C \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right) dz \\ &= \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z-i} - \frac{1}{2i} \int_C \frac{dz}{z+i} \\ &= \frac{1}{2i} [2\pi i \text{Ind}_C(i) - 2\pi i \text{Ind}_C(-i)] = 0 . \end{aligned}$$

CAPITULO 8

APLICACIONES DEL METODO DE LOS RESIDUOS AL CALCULO DE INTEGRALES REALES

CAPITULO 8. APLICACIONES DEL METODO DE LOS RESIDUOS AL CALCULO DE INTEGRALES. REALES

8.1 Introduccion

8.2. Integrales de la forma $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) dx$, R racional

8.3 Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$, donde R es una función racional

8.4 Integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx$, donde $a \in \mathbb{R}$, R es una función racional

8.5 Ejercicios

8.1 INTRODUCCION

El teorema de los residuos proporciona un método eficaz para el cálculo de integrales definidas en el campo real. En muchas ocasiones es imposible encontrar la integral indefinida de una función real dada, pero incluso si este no fuera el caso y fuera posible determinar una primitiva el método de los residuos frecuentemente ahorra trabajo y resulta más eficiente.

Existen limitaciones para este método, quizás la más importante es que el método general solo es aplicable a integrales sobre todo \mathbb{R} o sobre una semirrecta y solamente en casos específicos es aplicable a integrales en intervalos finitos.

En este capítulo presentamos los casos más típicos de la aplicación del método de los residuos al cálculo de integrales definidas reales.

8.2 INTEGRALES DE LA FORMA $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) d\theta$, R RACIONAL

Para el cálculo de estas integrales efectuamos el cambio $z = e^{i\theta}$ de tal forma que se tienen las relaciones

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \\ \operatorname{sen} \theta &= \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right), \\ d\theta &= \frac{dz}{iz},\end{aligned}$$

de tal forma que nuestra integral se transforma en la integral compleja

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right] \frac{dz}{iz}, \quad z = \gamma(\theta) = e^{i\theta},$$

que calculamos mediante el método de los residuos.

Ejemplo

Consideremos la integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}.$$

Mediante el cambio de variable indicado anteriormente obtenemos la integral

$$\int_{\gamma} \frac{-idz}{z \left[2 + \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \right]} = -2i \int_{\gamma: \{|z|=1\}} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.$$

Los polos del integrando son las raíces del denominador, es decir las soluciones de

$$z^2 + 4z + 1 = 0,$$

que son

$$a_1 = -2 + \sqrt{3}, \quad a_2 = -2 - \sqrt{3}.$$

Es decir tenemos polos simples y solamente uno de ellos a_1 está en el interior del círculo unidad, luego concluimos por el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}& \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(f(z) = \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}, a_1 = -2 + \sqrt{3} \right).\end{aligned}$$

Para el cálculo del residuo de un polo simple α de una función meromorfa f tenemos la sencilla fórmula siguiente

$$\text{Res}(f(z), \alpha) = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z),$$

en efecto si el desarrollo de f entorno a α es

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + c_0 + c_1(z - \alpha) + \dots$$

entonces claramente

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \alpha} [c_{-1} + c_0(z - \alpha) + c_1(z - \alpha)^2 + \dots] \end{aligned}$$

Aplicamos esta sencilla fórmula a nuestro caso particular y obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(f(z) = \frac{-2i}{z^2 + 4z + 1}, a_1 = 2 + \sqrt{3} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{[z - (-2 + \sqrt{3})](-2i)}{z^2 + 4z + 1} \\ &= \lim_{z \rightarrow -2 + \sqrt{3}} \frac{[z - (-2 + \sqrt{3})](-2i)}{[z - (-2 + \sqrt{3})][z - (-2 - \sqrt{3})]} \\ &= \frac{-2i}{2\sqrt{3}} = -\frac{i}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta} = 2\pi i \left(-\frac{i}{\sqrt{3}} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

8.3 INTEGRALES DE LA FORMA $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$, DONDE R ES UNA FUNCIÓN RACIONAL

El procedimiento de los residuos nos proporcionará el valor de esta integral en el caso que conozcamos de antemano su existencia, pero no nos garantiza su existencia en caso contrario.

Consideremos el caso de ausencia de singularidades en el eje real y supondremos que se cumple la siguiente condición

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(r \max_{|z|=r} |R(z)| \right) = 0,$$

esta condición es claramente satisfecha si el orden del denominador Q en R ,

$$R = \frac{P}{Q}, \quad P, Q \text{ polinomios},$$

es dos unidades superior, por lo menos, al orden de P , es decir, $ord(Q) \geq ord(P) + 2$.

En estas condiciones se puede asegurar la existencia de nuestra integral. Por el método de los residuos lo que nosotros obtenemos es el valor principal, es decir el límite

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R R(x) dx.$$

La existencia del valor principal no asegura la existencia de la integral impropia en la que intervienen dos variables R, R'

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = \lim_{R \rightarrow \infty, R' \rightarrow \infty} \int_{-R'}^R R(x) dx,$$

sin embargo si conocemos la existencia de la integral impropia, también podremos asegurar la existencia del valor principal y los dos valores serán iguales.

Supongamos pues que nuestra integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$$

satisface las hipótesis mencionadas anteriormente y sean $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ los polos de la función racional, es decir los ceros de Q , que se encuentran en el semiplano superior $H^+ = \{z | \text{Im } z > 0\}$, entonces mostramos a continuación que la integral impropia tiene el valor

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^m \text{Res}(R, \alpha_i).$$

Para comprobar esta relación consideramos el camino formado por el segmento del eje real $[-R, R]$ y la semicircunferencia γ_R de radio R situada en el semiplano superior, siendo R suficientemente grande de manera que este camino contiene todos los polos $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ en su interior. Sea Γ_R el camino así obtenido recorrido en sentido positivo. Por el teorema de los residuos se tiene

$$\int_{\Gamma_R} R(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^m \text{Res}(f, \alpha_i).$$

Ahora bien la integral a lo largo de Γ_R se compone de las integrales a lo largo de $[-R, R]$ y γ_R , es decir

$$\int_{\Gamma_R} R(z) dz = \int_{-R}^R R(x) dx + \int_{\gamma_R} R(z) dz,$$

y comprobamos que por nuestra hipótesis

$$\int_{\gamma_R} R(z) dz \rightarrow 0, \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

En efecto

$$\left| \int_{\gamma_R} R(z) dz \right| \leq \pi R \max_{|z|=R} |R(z)| \rightarrow 0.$$

Tomando límites y considerando las relaciones anteriores concluimos

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R R(x) dx &= VP \int_{-R}^R R(x) dx \\ &= 2\pi i \sum_{i=1}^m Res(R(z), \alpha_i). \end{aligned}$$

Ahora bien nuestras hipótesis también garantizan la integrabilidad de R , es decir la existencia de la integral impropia, luego también

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{i=1}^m Res(R(z), \alpha_i).$$

Ejemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Es claro que esta integral satisface las hipótesis exigidas para poder aplicar nuestra fórmula pues las raíces del denominador son $\alpha_1 = i$, $\beta_1 = -i$, ambas de orden dos y fuera del eje real y también

$$\frac{r}{\max_{|z|=r} (|z^2 + 1|)} \rightarrow 0, \text{ cuando } r \rightarrow \infty.$$

Así pues tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i Res(R(z), \alpha_1 = i),$$

con

$$R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}.$$

En este caso R presenta un polo de orden dos. Presentamos a continuación la fórmula general para la obtención del residuo de una función f en un polo α de orden $m \geq 1$.

Sea el desarrollo de f en torno a α

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - \alpha)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - \alpha} + c_0 + c_1(z - \alpha) + \dots$$

de tal manera que obtenemos

$$\begin{aligned} (z - \alpha)^m f(z) &= c_{-m} + c_{-(m-1)}(z - \alpha) + \dots + c_{-1}(z - \alpha)^{m-1} \\ &\quad + c_0(z - \alpha)^m + c_1(z - \alpha)^{m+1} + \dots \end{aligned}$$

Llamando $g(z) = (z - \alpha)^m f(z)$, es claro que el coeficiente c_{-1} de la potencia de orden $(m - 1)$ en el desarrollo de g satisface

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \operatorname{Res}(f, \alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{(m-1)} g(z)}{dz^{m-1}} \right]_{z=\alpha} \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \left[\frac{d^{(m-1)} ((z - \alpha)^m f(z))}{dz^{m-1}} \right]_{z=\alpha}. \end{aligned}$$

Aplicando esta fórmula a nuestro caso

$$R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \quad \alpha = i,$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(R(z), \alpha = i) &= \left[\frac{d \left((z - i)^2 R(z) \right)}{dz} \right]_{z=i} \\ &= \left[\frac{d (z - i)^2 \frac{1}{(z - i)^2 (z + i)^2}}{dz} \right]_{z=i} \\ &= \left[-\frac{2}{(z + i)^3} \right]_{z=i} = -\frac{2}{(2i)^3} = -\frac{i}{4}, \end{aligned}$$

luego concluimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = 2\pi i \left(-\frac{i}{4} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

8.4 INTEGRALES DE LA FORMA $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx$, $a \in \mathbb{R}$, $R(x)$ RACIONAL

Aquí supondremos otra vez que R no tiene singularidades en el eje real y haremos esta vez la hipótesis

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\max_{|z|=r} |R(z)| \right) = 0.$$

Observamos que simultáneamente al cálculo de nuestra integral obtenemos también las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos ax dx = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx$$

y

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \operatorname{sen} ax dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{iax} dx.$$

Supongamos en primer lugar que $a > 0$ y sean otra vez $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ los polos de la función compleja

$$R(z) e^{iaz}$$

que se encuentran en el semiplano superior H^+ , que de hecho son los polos de $R(z)$ en H^+ , entonces en este caso se tiene la fórmula

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(f(z), \alpha_j).$$

Otra vez, si podemos asegurar previamente la existencia de la integral impropia, esta expresión nos proporciona su valor.

En el caso $a < 0$, se considerarán los polos en el semiplano inferior β_1, \dots, β_n y se obtiene la fórmula

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = -2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res}(f(z), \beta_j).$$

Para comprobar la fórmula en el primer caso $a > 0$, se considera el mismo contorno que en el caso anterior de las integrales de la forma $\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx$ y como entonces todo se reducirá a probar

$$\int_{\gamma_R} R(z) e^{iaz} dz \rightarrow 0,$$

donde γ_R es la circunferencia de radio R y centro el origen.

Procedemos a estimar esta integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R} R(z) e^{iaz} dz \right| &\leq \int_{\gamma_R} |R(z)| |e^{iaz}| |dz| \\ &\leq \left(\max_{|z|=R} |R(z)| \right) \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz|. \end{aligned}$$

Pero

$$|e^{iaz}| = e^{-ay}$$

y sobre γ_R se tiene $y = R \operatorname{sen} \theta$ de tal forma que se obtiene

$$\int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| = \int_0^\pi e^{-aR \operatorname{sen} \theta} R d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \operatorname{sen} \theta} R d\theta.$$

Ahora hacemos uso de las desigualdades

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} < 1,$$

para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ y concluimos

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \sin \theta} R d\theta &< \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aR \frac{2}{\pi} \theta} R d\theta \\ &= \frac{\pi}{2a} (1 - e^{-aR}) \rightarrow \frac{\pi}{2a}, \end{aligned}$$

cuando $R \rightarrow \infty$.

Teniendo en cuenta este hecho y nuestra hipótesis

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\max_{|z|=R} |R(z)| \right) = 0,$$

concluimos

$$\left| \int_{\gamma} R(z) e^{iaz} dz \right| \leq \left(\max_{|z|=R} |R(z)| \right) \int_{\gamma_R} |e^{iaz}| |dz| \rightarrow 0,$$

como queríamos demostrar.

Ejemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx, \quad a > 0.$$

En este caso

$$R(z) = \frac{1}{1+z^2},$$

y por tanto el único polo en el semiplano superior es $\alpha_1 = i$, y se tiene

$$\begin{aligned} &Res(R(z) e^{iaz}, \alpha_1 = i) \\ &= Res\left(\frac{e^{iaz}}{1+z^2}, \alpha_1 = i\right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z-i) e^{iaz}}{(z-i)(z+i)} = \frac{e^{-a}}{2i}. \end{aligned}$$

Por tanto concluimos

$$VP \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = 2\pi i \left(\frac{e^{-a}}{2i} \right) = \pi e^{-a}.$$

Puesto que la integral impropia existe también se tendrá

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \pi e^{-a}.$$

8.5 EJERCICIOS

1. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2}.$$

2. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \operatorname{sen} \theta}, \quad k > 1.$$

3. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx.$$

4. Calcular la siguiente integral, en función del parámetro $a > 0$, por el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x - i)(x^2 + a^2)}.$$

5. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2 + 4} dx.$$

6. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + x^2} dx.$$

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 8

Problema 1. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2 + \cos \theta)^2} .$$

Solución. Hacemos el cambio

$$z = e^{i\theta} , dz = ie^{i\theta} d\theta = iz d\theta ,$$

de tal forma que

$$d\theta = \frac{dz}{iz} , \quad \cos \theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} .$$

Obtenemos la integral compleja

$$\begin{aligned} \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right)^2} &= \int_{|z|=1} \frac{dz}{iz \left(2 + \frac{z^2 + 1}{2z}\right)^2} \\ &= \int_{|z|=1} \frac{4z^2 dz}{iz (4z + z^2 + 1)} = \int_{|z|=1} \frac{-4iz dz}{(z^2 + 4z + 1)^2} . \end{aligned}$$

El integrando tiene dos polos dobles que se obtienen de

$$z^2 + 4z + 1 = 0 ,$$

y son

$$\alpha_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3} ,$$

escribamos

$$\alpha_1 = -2 + \sqrt{3} , \quad \alpha_2 = -2 - \sqrt{3} ,$$

de tal forma que

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 2\sqrt{3} .$$

Calculamos el residuo en α_1

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re} s_{z=\alpha_1} \left[\frac{-4iz}{(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)^2} \right] \\
 = & \frac{d}{dz} \left[\frac{-(z-\alpha_1)^2 4iz}{(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)^2} \right]_{z=\alpha_1} \\
 = & -\frac{4i}{(\alpha_1-\alpha_2)^2} + \frac{8i\alpha_1}{(\alpha_1-\alpha_2)^2} \\
 = & -\frac{4i}{(2\sqrt{3})^2} + \frac{8i(-2+\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})^3} \\
 = & \frac{2\sqrt{3}(-4i) + 8i(-2+\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})^3} = -\frac{2i}{3\sqrt{3}},
 \end{aligned}$$

y concluimos por el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} &= 2\pi i \operatorname{Re} s_{z=\alpha_1} \left[\frac{-4iz}{(z-\alpha_1)^2(z-\alpha_2)^2} \right] \\
 &= 2\pi i \frac{(-2i)}{3\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.
 \end{aligned}$$

Problema 2. Calcular la siguiente integral mediante el método de los residuos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \operatorname{sen}\theta}, \quad k > 1.$$

Solución. Hacemos el cambio

$$z = e^{i\theta}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz},$$

de tal forma que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i},$$

y

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \operatorname{sen}\theta} &= \int_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{k + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \\
 &= \int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 2ikz - 1}.
 \end{aligned}$$

Los polos del integrando en esta última integral son

$$z_{1,2} = -ik \pm i\sqrt{k^2 - 1},$$

de los cuales solamente

$$z_1 = -ik + i\sqrt{k^2 - 1} ,$$

está en $D = \{z \mid |z| < 1\}$. El residuo en z_1 es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_1} \left[\frac{2}{z^2 + 2ikz - 1} \right] &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{2(z - z_1)}{(z - z_1)(z - z_2)} \\ &= \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{2}{2i\sqrt{k^2 - 1}} , \end{aligned}$$

y por tanto por el teorema de los residuos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + \operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi i}{i\sqrt{k^2 - 1}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - 1}}$$

Problema 3. Calcular la siguiente integral por el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx .$$

Solución. Consideramos la función

$$f(z) = \frac{z^2}{1 + z^4} ,$$

que claramente cumple la condición

$$|zf(z)| = \left| \frac{z^3}{1 + z^4} \right| \rightarrow 0 , \text{ cuando } z \rightarrow \infty .$$

Entonces podemos aplicar la fórmula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_i > 0} \operatorname{Res}_{z_i} \frac{z^2}{1 + z^4} ,$$

donde los puntos z_i son los polos de la función, de los cuales sólo consideramos aquellos en el semiplano superior.

Los polos son las raíces de

$$z^4 + 1 = 0 ,$$

es decir

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} , z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}} , z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} , z_4 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} ,$$

y los residuos son

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_1} \frac{z^2}{1 + z^4} &= \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} , \\ \operatorname{Res}_{z_2} \frac{z^2}{1 + z^4} &= \frac{1}{4} e^{-i\frac{3\pi}{4}} . \end{aligned}$$

Por tanto concluimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{2\pi i}{4} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} .$$

El cálculo de los residuos se puede hacer de forma sencilla por la siguiente fórmula. Si $f(z) = g(z)/h(z)$ tiene un polo simple en z_0 entonces

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} .$$

Problema 4. Calcular la siguiente integral, en función del parámetro real $a \neq 0$, por el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)(x^2+a^2)} .$$

Solución. Consideramos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z^2+a^2)} ,$$

que satisface

$$|f(z)| |z| \rightarrow 0 , \text{ cuando } z \rightarrow \infty ,$$

de tal forma que se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)(x^2+a^2)} = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_j} \operatorname{Res}_{z_j} f(z) .$$

Distinguiremos dos casos

i) $a \neq 1$

En este caso tendremos tres polos simples $z_1 = i$, $z_2 = ai$, $z_3 = -ai$,

$$\operatorname{Res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z-i)(i^2+a^2)} = \frac{1}{a^2-1} ,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_2} f(z) &= \lim_{z \rightarrow ai} \frac{z-ai}{(z-i)(z-ai)(z+ai)} = \frac{1}{(ai-i)2ai} \\ &= \frac{1}{2a(1-a)} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_3} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -ai} \frac{z+ai}{(z-i)(z-ai)(z+ai)} = \frac{1}{(-ai-i)(-2ai)} \\ &= -\frac{1}{2a(a+1)} , \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)(x^2+a^2)} &= 2\pi i \left(\frac{1}{a^2-1} + \frac{1}{2a(1-a)} \right) \\ &= \frac{\pi i}{a(a+1)},\end{aligned}$$

ii) $a = 1$

En este caso se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)(x^2+1)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)^2(x+i)},$$

luego tenemos un polo doble en $z = i$ de tal forma que

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} s_{z=i} \left[\frac{1}{(z-i)^2(z+i)} \right] &= \frac{1}{2!} \left[\frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)} \right]_{z=i} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{(z+i)^2} \right]_{z=i} = \frac{1}{8},\end{aligned}$$

y por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-i)(x^2+1)} = 2\pi i \operatorname{Re} s_{z=i} \left[\frac{1}{(z-i)^2(z+i)} \right] = \frac{\pi i}{4}.$$

Problema 5. Calcular la siguiente integral por el método de los residuos

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{x^2+4}.$$

Solución. En primer lugar, puesto que la función $\frac{\cos 3x}{x^2+4}$ es par, observamos que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x dx}{x^2+4} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i3x} dx}{x^2+4}.$$

Ahora consideramos la función de variable compleja

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{z^2+4},$$

y el camino C_R formado por el intervalo $I_R = [-R, R]$ y la semicircunferencia $\Gamma_R : z = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

En Γ_R se tiene

$$|e^{i3z}| = |e^{i3R \cos \theta - 3R \operatorname{sen} \theta}| = e^{-3R \operatorname{sen} \theta} \leq 1,$$

puesto que $\operatorname{sen}\theta \geq 0$ para $\theta \in [0, \pi]$. Así pues se deduce

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{i3z} dz}{z^2 + 4} \right| \leq \frac{\pi R}{R^4 - 4} \rightarrow 0, \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

Por otra parte los polos son $z = \pm 2i$, de los cuales solamente $z = 2i$ está en el interior de C_R .

Concluimos, utilizando el teorema de los residuos

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\cos 3x dx}{x^2 + 4} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i3x} dx}{x^2 + 4} \\ \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-R}^R \frac{e^{i3x} dx}{x^2 + 4} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{C_R} \frac{e^{i3z}}{z^2 + 4} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=2i} \left(\frac{e^{i3z}}{z^2 + 4} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{(z - 2i) e^{i3z}}{(z - 2i)(z + 2i)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi i e^{-6}}{4i} \right\} = \frac{\pi e^{-6}}{4} \end{aligned}$$

Problema 6. Calcular la siguiente integral por el método de los residuos

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x dx}{1 + x^2}.$$

Solución. En primer lugar recordamos la fórmula trigonométrica

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

de tal forma que descomponemos nuestra integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x dx}{1 + x^2}.$$

Por un lado tenemos

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{2} [\operatorname{arctg} x]_{-\infty}^\infty = \frac{\pi}{2},$$

y por otro lado, argumentando como en el Problema 5, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty \frac{\cos 2x dx}{1 + x^2} &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i2x} dx}{1 + x^2} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \left(\frac{e^{i2z}}{1 + z^2} \right) \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{(z - i) e^{i2z}}{(z - i)(z + i)} \right\} \\ &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{2\pi i e^{-2}}{2i} \right\} = \pi e^{-2}. \end{aligned}$$

Por tanto concluimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} e^{-2} = \frac{\pi}{2} (1 - e^{-2}) \ .$$

CAPITULO 9

TRANSFORMACION CONFORME.

CAPITULO 9. TRANSFORMACION CONFORME

9.1 Introducción

9.2 Transformaciones fraccionarias lineales o de Möbius

9.3 Transformaciones de Möbius particulares

9.4 El Teorema de Riemann de la transformación conforme

9.5 Ejercicios

9.1 INTRODUCCION

En el Capítulo 2 se definió la noción de transformación conforme en el plano como aquellas que conservan los ángulos y comprobamos que las funciones analíticas en un dominio del plano poseen esta propiedad.

En este capítulo estudiamos extensivamente las funciones analíticas desde este punto de vista. Introducimos las transformaciones fraccionarias lineales o de Möbius que poseen la importante propiedad de transformar circunferencias y rectas en circunferencias o rectas y que son analíticas en la esfera de Riemann o plano ampliado y que resultan ser una herramienta muy importante en el tratamiento de los problemas de transformación compleja en el plano.

El teorema fundamental de la transformación conforme en el plano es el famoso Teorema de Riemann que permite transformar conformemente cualquier dominio simplemente conexo del plano sobre el círculo unidad. Es un teorema de gran importancia en las aplicaciones.

9.2 TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES O DE MÖBIUS.

Llamaremos transformaciones fraccionarias lineales o transformaciones de Möbius a las transformaciones del plano complejo ampliado, o esfera de Riemann, sobre sí mismo de la forma

$$w = \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c, d , son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

En la definición de $w = \varphi(z)$ se puede despejar y obtenemos

$$z = \varphi^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a},$$

y concluimos que toda transformación de Möbius es una aplicación biyectiva del plano ampliado, o esfera de Riemann, sobre sí mismo de tal manera que

$$\varphi(\infty) = \frac{a}{c}, \varphi^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}.$$

Casos particulares de la transformación fraccionaria lineal o de Möbius son:

i) Las traslaciones del plano

$$w = \varphi(z) = z + b,$$

ii) Las homotecias de centro el origen

$$w = \varphi(z) = az, a \in \mathbb{R},$$

iii) Los giros alrededor del origen

$$w = \varphi(z) = az, |a| = 1,$$

iv) La transformación

$$w = \varphi(z) = \frac{1}{z},$$

que representa una inversión respecto a la circunferencia unidad seguida de una simetría respecto del eje x .

Ahora observamos que toda transformación de Möbius se puede escribir como composición de transformaciones de este tipo. En efecto, dada una transformación de Möbius general, la escribimos en la forma

$$w = \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz + d} \text{ donde } \lambda = \frac{bc - ad}{c},$$

y consideramos las transformaciones

$$\zeta = \varphi_1(z) = cz, \xi = \varphi_2(\zeta) = \zeta + d, \sigma = \varphi_3(\xi) = \frac{\lambda}{\xi}, w = \varphi_4(\sigma) = \frac{a}{c} + \sigma,$$

de tal forma que se tiene

$$w = \varphi(z) = \varphi_4 \circ \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1(z).$$

Haciendo uso de este hecho es fácil comprobar que las transformaciones de Möbius dejan invariante el conjunto de circunferencias y rectas del plano, es decir, si C es una circunferencia o recta entonces su imagen por una transformación de Möbius será también una circunferencia o bien una recta.

Para comprobar este hecho será suficiente comprobarlo con la transformación $\varphi(z) = \frac{1}{z}$, pues para el resto de transformaciones elementales anteriores es evidente por consideraciones puramente geométricas.

En efecto, para comprobar este hecho consideremos la ecuación general de una circunferencia

$$|z - z_0|^2 = R^2,$$

o equivalentemente

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) = R^2,$$

es decir

$$z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0,$$

con

$$\beta = -z_0, \gamma = |z_0|^2 - R^2, \text{ de donde } \gamma < \beta\bar{\beta}.$$

Esta ecuación es transformada mediante $w = \varphi(z) = \frac{1}{z}$ en

$$\gamma w\bar{w} + \bar{\beta}\bar{w} + \beta w + 1 = 0,$$

o también si $\gamma \neq 0$ en

$$w\bar{w} + \frac{\bar{\beta}}{\gamma}\bar{w} + \frac{\beta}{\gamma}w + \frac{1}{\gamma} = 0,$$

que representa la ecuación de la circunferencia

$$\left(w + \frac{\bar{\beta}}{\gamma}\right)\left(\bar{w} + \frac{\beta}{\gamma}\right) = \frac{\beta\bar{\beta}}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma},$$

de centro

$$w_0 = -\frac{\bar{\beta}}{\gamma}$$

y radio R_w determinado por

$$R_w^2 = \frac{\beta\bar{\beta}}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma} > 0.$$

Si $\gamma = 0$, se obtiene la recta $\bar{\beta}w + \beta\bar{w} + 1 = 0$.

Análogamente comprobamos que la ecuación de una recta en el plano z

$$\bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0,$$

se transforma mediante $w = \frac{1}{z}$ en una recta o circunferencia.

A continuación introducimos la noción de inversión o conjugación respecto de una recta o circunferencia y veremos que las transformaciones de Möbius preservan la inversión en este sentido.

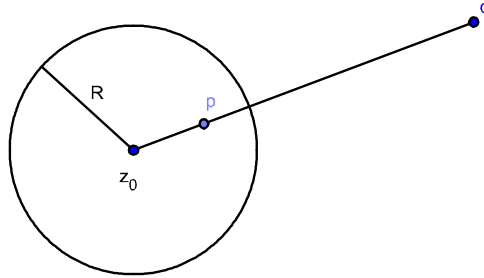
Dos puntos p, q del plano complejo \mathbb{C} se dicen inversos respecto a la circunferencia $|z - z_0| = R$ si p, q, z_0 están alineados, z_0 no separa a p y q y el producto de las distancias de p y q a z_0 es R^2 , es decir

$$(p - z_0)(q - z_0) = R^2,$$

pues se ha de tener

$$\begin{aligned}(p - z_0) &= |p - z_0| e^{i\theta}, \\ (\bar{q} - \bar{z}_0) &= |p - z_0| e^{-i\theta},\end{aligned}$$

por las condiciones de alineación impuestas



De acuerdo con esta definición, los puntos de la circunferencia son inversos a sí mismos y se conviene en aceptar como inversos los puntos z_0 e ∞ .

En el caso de una recta, se definen como inversos los puntos simétricos respecto de la recta.

La transformación de puntos inversos p, q , respecto de una circunferencia C , mediante una traslación, homotecia o giro, en puntos inversos p^*, q^* respecto de la circunferencia C^* , imagen de C , es evidente.

De nuevo para probar esta importante propiedad de las transformaciones de Möbius, la conservación de pares de puntos inversos, queda solamente comprobarla en el caso de la inversión. Para ver este hecho observamos que si p y q son inversos se ha de tener

$$(p - z_0)(\bar{q} - \bar{z}_0) = R^2,$$

es decir

$$p\bar{q} + \bar{\beta}p + \beta\bar{q} + \gamma = 0,$$

con β y γ como fueron definidos anteriormente.

Dividiendo esta relación por $p\bar{q}$ se obtiene

$$1 + \bar{\beta}\left(\frac{1}{q}\right) + \beta\left(\frac{1}{p}\right) + \gamma\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{q}\right) = 0,$$

es decir $\left(\frac{1}{p}\right)$ y $\left(\frac{1}{q}\right)$ son inversos respecto de la circunferencia

$$\gamma w\bar{w} + \bar{\beta}\bar{w} + \beta w + 1 = 0,$$

que es la imagen de la circunferencia o recta dada

$$z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0,$$

mediante la inversión $w = \frac{1}{z}$.

Análogamente se comprueba la conservación de los inversos respecto de una recta mediante las transformaciones de Möbius.

9.3 TRANSFORMACIONES DE MÖBIUS PARTICULARES

En primer lugar vamos a caracterizar las transformaciones de Möbius que transforman el semiplano superior $H^+ = \{z = x + iy \mid y > 0\}$ sobre el círculo unidad $D = \{w \mid |w| < 1\}$.

Partimos de una transformación de Möbius general

$$w = \varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

e impongamos la condición que ha de transformar H^+ sobre D . Por consideraciones topológicas φ ha de transformar el eje real \mathbb{R} en la circunferencia unidad C .

Sea α el punto de H^+ que se transforma en $w = 0$, entonces el punto simétrico $\bar{\alpha}$ respecto de \mathbb{R} , es decir su conjugado complejo, se transformará en $w = \infty$ que es el inverso de cero respecto de la circunferencia C .

En la expresión general de la transformación de Möbius $w = \varphi(z)$ se tiene

$$\alpha = -\frac{b}{a},$$

y el punto z que se transforma en $w = \infty$ es

$$z = -\frac{d}{c},$$

luego se ha de tener

$$\alpha = -\frac{b}{a} = \overline{\left(-\frac{d}{c}\right)},$$

es decir

$$w = \varphi(z) = \frac{a\left(z - \left(-\frac{b}{a}\right)\right)}{c\left(z - \left(-\frac{d}{c}\right)\right)} = \frac{a(z - \alpha)}{c(z - \bar{\alpha})}.$$

Además como la imagen $w = \varphi(0)$ de $z = 0$, ha de estar en la circunferencia unidad C , se ha de tener $\left|\frac{a}{c}\right| = 1$, i.e. $\frac{a}{c} = e^{i\theta}$, para algún $\theta \in [0, 2\pi]$. Concluimos que $w = \varphi(z)$ ha de ser de la forma

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}.$$

Recíprocamente, la transformación de Möbius

$$w = \varphi(z) = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \alpha \in H^+,$$

transforma el semiplano superior H^+ en el círculo unidad $D(0, 1)$ pues transforma el eje real en la circunferencia unidad C y $w(\alpha) = 0$, donde $\alpha \in H^+$.

Resumimos nuestra conclusión en la siguiente proposición

Proposición 9.3.1 *Una transformación de Möbius transforma el semiplano superior $H^+ = \{z | \operatorname{Im} z > 0\}$ en el círculo unidad $D(0, 1) = \{z | |z| < 1\}$ si y solo si es de la forma*

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}},$$

donde $\alpha \in H^+$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Un caso particular es la transformación

$$w = \frac{z - i}{z + i},$$

donde $\alpha = i, \theta = 0$.

La transformación inversa es

$$z = -i \frac{w + 1}{w - 1},$$

que transforma el círculo unidad sobre el semiplano superior.

Finalmente caracterizamos la clase de transformaciones de Möbius que transforman círculo unidad $D(0, 1)$ en sí mismo.

Proposición 9.3.2 *Las transformaciones de Möbius que transforman el círculo unidad $D(0, 1) = \{z | |z| < 1\}$ sobre sí mismo, son aquellas de la forma*

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z},$$

donde $|\alpha| < 1$ y $\theta \in [0, 2\pi]$.

Demostración. Por razones topológicas de nuevo, puesto que las transformaciones de Möbius son homeomorfismos del plano ampliado $\hat{\mathbb{C}}$ sobre sí mismo, toda transformación de Möbius que transforme el círculo unidad sobre sí mismo habrá de transformar la circunferencia unidad $C(0, 1)$ sobre sí misma.

Sea otra vez α el punto de $D(0, 1)$ que se transforma mediante una tal transformación en el origen $w = 0$, entonces el inverso $\frac{1}{\alpha}$ respecto de $C(0, 1)$ se transformará en ∞ . Concluimos de aquí que la transformación dada

$$w = \frac{az + b}{cz + d},$$

debe satisfacer $\alpha = -\frac{b}{a}, \frac{1}{\alpha} = -\frac{d}{c}$, es decir

$$w = \frac{a(z - \alpha)}{c(z - \frac{1}{\alpha})} = \frac{a\bar{\alpha}}{c} \frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - 1},$$

pero como la imagen de $z = 1$ ha de estar en la circunferencia unidad, es decir $|w(1)| = 1$, se tendrá

$$\left| \frac{a\bar{\alpha} \frac{1-\alpha}{c} - 1}{\frac{1-\alpha}{c} - 1} \right| = \left| \frac{a\bar{\alpha}}{c} \right| = 1,$$

lo que prueba la proposición. q.e.d.

9.4 EL TEOREMA DE RIEMANN DE LA TRANSFORMACION CONFORME

El teorema central en la teoría de la transformación conforme es el famoso Teorema de Riemann que básicamente permite asegurar que dadas dos regiones simplemente conexas del plano A, B son conformemente equivalentes, es decir, existe una aplicación $f : A \rightarrow B$ que es analítica y biyectiva.

Enunciamos a continuación de manera precisa este teorema pero no daremos la demostración que excede los límites de este curso.

Teorema 9.4.1. (Teorema de Riemann de la transformación conforme). *Sea A una región simplemente conexa de \mathbb{C} y distinta de \mathbb{C} , i.e. $A \subsetneq \mathbb{C}$. Entonces existe una transformación conforme $f : A \rightarrow D(0, 1)$, es decir una función analítica y biyectiva de A sobre el círculo unidad. Además si fijamos $z_0 \in A$ podemos construir f de tal forma que $f(z_0) = 0$ y $f'(z_0)$ es un número real positivo, es decir, $f'(z_0) > 0$. Además con estas condiciones f es única.*

La unicidad es consecuencia del Lema de Schwarz. En efecto supongamos que hubiera dos transformaciones conformes f, g biyectivas $f, g : A \rightarrow D(0, 1)$ con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $f'(z_0) > 0, g'(z_0) > 0$. Entonces podemos definir $h : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ mediante $h(w) = g \circ f^{-1}(w)$, de tal forma que $h(0) = g(f^{-1}(0)) = g(z_0) = 0$, y por tanto por el Lema de Schwarz $|h(w)| \leq |w|$ para $w \in D$. El mismo argumento es aplicable a $h^{-1} = f \circ g^{-1}$, de tal forma que $|h^{-1}(\zeta)| \leq |\zeta|$ para $\zeta \in D$ con $\zeta = h(w)$. Concluimos que $|h(w)| = |w|$ para todo $w \in D$, pero en este caso el Lema de Schwarz asegura que $h(w) = e^{i\theta}w$ para $w \in D$ y por tanto tomando $w = f(z)$, $z \in A$ también $e^{i\theta}f(z) = h(f(z)) = g \circ f^{-1}(f(z)) = g(z)$. De aquí se concluye $e^{i\theta}f'(z_0) = g'(z_0)$ y puesto que $f'(z_0), g'(z_0)$ son ambos positivos, obtenemos que $e^{i\theta} = 1$ y por tanto $f(z) \equiv g(z)$. q.e.d.

En situaciones concretas tenemos la expresión explícita para la transformación conforme de un dominio simplemente conexo sobre el círculo unidad cuya existencia es garantizada por el Teorema de Riemann. Un caso particular es el semiplano superior, en este caso de acuerdo con las conclusiones de la sección 3, la transformación viene dada por la transformación de Möbius

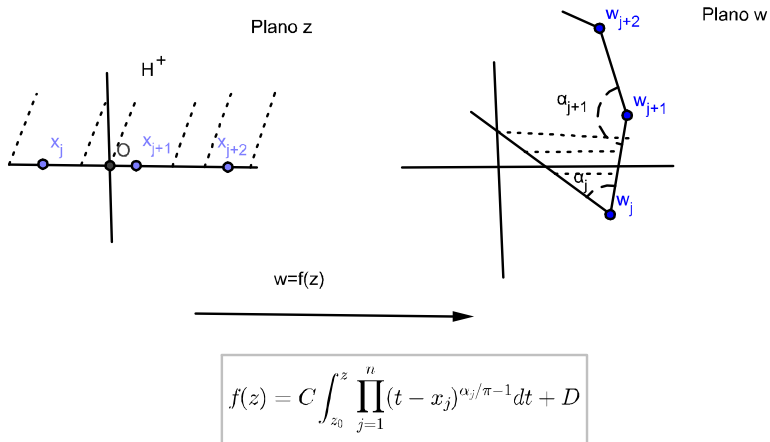
$$w = f(z) = e^{i\theta} \frac{z - \frac{\alpha}{z}}{z - \frac{\alpha}{z}}.$$

Un caso más general es el caso de un polígono P con vértices w_1, \dots, w_n y ángulos exteriores $\pi\alpha_1, \dots, \pi\alpha_n$ con $-1 < \alpha_i < 1, i = 1, \dots, n$, cuya transformación sobre el semiplano superior viene dada por la Fórmula de Schwarz-Christoffel que presentamos a continuación y que tampoco demostramos.

Teorema 9.4.2 (Fórmula de Schwarz-Christoffel). *La transformación conforme del semiplano superior $H^+ = \{z \mid \text{Im } z > 0\}$ sobre el polígono P descrito anteriormente viene dada por*

$$w = f(z) = a \left(\int_{z_0}^z (\zeta - x_1)^{-\alpha_1} \dots (\zeta - x_n)^{-\alpha_n} d\zeta \right) + b,$$

donde a, b son parámetros a determinar a partir de los datos del polígono, la integración se realiza a lo largo de cualquier camino γ in H^+ comenzando en un punto $z_0 \in H^+$. Los puntos x_1, \dots, x_n pueden ser elegidos arbitrariamente y se verifica $f(x_1) = w_1, \dots, f(x_n) = w_n$.



La transformación de Riemann $f : P \rightarrow D(0, 1)$ se obtendrá como composición $f_1 \circ f_2$ donde f_1 es la transformación de Möbius descrita anteriormente transformando H^+ sobre $D(0, 1)$ y f_2 será la transformación inversa de la transformación de Schwarz-Christoffel que transforma P sobre H^+ .

Ejemplo.

Sea P un triángulo equilátero en \mathbb{C} con vértices en $w_1 = -a$, $w_2 = a$, $w_3 = ia\sqrt{3}$. Podemos elegir $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

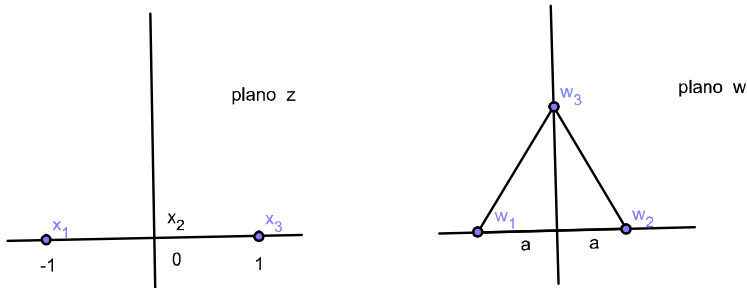


Fig.9.3

Tomando $z_0 = -1$, $D = -a$ en la Fórmula de Schwarz-Christoffel obtenemos

$$w = f(z) = -a + C \int_{-1}^z (t+1)^{-\frac{2}{3}} t^{-\frac{2}{3}} (t-1)^{-\frac{2}{3}} dt.$$

Para determinar el valor de C utilizamos el hecho que $f(0) = 0$, es decir

$$a = -a + C \int_{-1}^0 (t+1)^{-\frac{2}{3}} (-t) (1-t)^{-\frac{2}{3}} dt.$$

De esta relación se obtiene C como función de a , si bien el cálculo explícito de la integral definida no es elemental y no entraremos en más detalles sobre esta cuestión.

9.5 EJERCICIOS

1. Encontrar una transformación de Möbius que transforme el círculo unidad $D(0, 1) = \{z \mid |z| \leq 1\}$ en el semiplano superior $H^+ = \{w \mid \text{Im } w \geq 0\}$. Describir la familia de las curvas imágenes de los diámetros de la circunferencia $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

2. Describir en que se transforma la franja

$$L = \{z = x + yi \mid 0 < x < 1\},$$

mediante la transformación

$$w = \frac{z}{z-1}.$$

3. Se consideran los círculos

$$D_1 = \{z \mid |z-1| < 1\} \text{ , } D_2 = \{z \mid |z-i| < 1\} \text{ ,}$$

se pide:

i) Hallar una transformación de Möbius T tal que $T(0) = 0$ y que envíe el otro punto de intersección de las circunferencias

$$C_1 = \{z \mid |z-1| = 1\} \text{ , } C_2 = \{z \mid |z-i| = 1\} \text{ ,}$$

al infinito.

ii) Justificar que T transforma C_1 y C_2 en rectas perpendiculares.

iii) Determinar la imagen de la intersección $D_1 \cap D_2$ mediante T ,

iv) Finalmente hallar una transformación de Möbius que transforme $D_1 \cap D_2$ conformemente sobre el primer cuadrante,

4. Encontrar una transformación conforme del dominio

$$A = \left\{ z \mid 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2} \right\} \text{ ,}$$

sobre el disco unidad $D = \{w \mid |w| < 1\}$.

5. Considerar el dominio

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ , } \operatorname{Im} z > 0\} \text{ .}$$

Encontrar la imagen de A mediante la transformación

$$w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 \text{ .}$$

6. La función

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ ,}$$

se conoce como la función de Joukowski. Describir las imágenes por f de las circunferencias con centro el origen y de las semirrectas que parten de él.

Sugerencia. Utilizar la forma polar $z = re^{i\theta}$ en el plano de partida y la forma cartesiana $w = u + vi$ en el espacio imagen.

SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DEL TEMA 9

Problema 1. Encontrar una transformación de Möbius que transforme el círculo unidad $B(0, 1) = \{z \mid |z| \leq 1\}$ en el semiplano superior $H^+ = \{w \mid \operatorname{Im} w \geq 0\}$. Describir la familia de las curvas imágenes de los diámetros de la circunferencia $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

Solución. Por la Proposición 9.3.1 del libro, la transformación

$$z = \frac{w - i}{w + i},$$

transforma el semiplano superior $H^+ = \{w \mid \operatorname{Im} w \geq 0\}$ en el círculo unidad $B(0, 1) = \{z \mid |z| \leq 1\}$, luego la transformación inversa

$$w = \frac{1}{i} \frac{z + 1}{z - 1},$$

transforma el círculo unidad en el semiplano superior como se pide en el problema.

Por las propiedades de las transformaciones de Möbius, las imágenes de los diámetros serán las semicircunferencias en el semiplano superior que pasan por $i = w(0)$ y que cortan ortogonalmente al eje real. Hay que incluir también el semieje imaginario positivo que es la imagen del diámetro que une -1 y 1 .

Problema 2. Describir en que se transforma la franja

$$L = \{z = x + iy \mid 0 < x < 1\},$$

mediante la transformación

$$w = \frac{z}{z - 1}.$$

Solución. Esta transformación fraccionaria lineal o de Möbius transformará las rectas frontera de la banda $x = 0$, $x = 1$, en rectas o circunferencias.

Puesto que

$$\begin{aligned} w(0) &= 0, \quad w(\infty) = 1, \quad w(i) = \frac{1-i}{2}, \\ w(1) &= \infty, \quad w(\infty) = 1, \quad w(1+i) = 1-i, \end{aligned}$$

transformará la primera recta en una circunferencia que pasa por los puntos $0, 1, \frac{1-i}{2}$ y la segunda en una recta que pasa por 1 y $-1-i$, es decir, $x = 1$ otra vez. La imagen será pues el semiplano $H_1 = \{z \mid \operatorname{Re} z < 1\}$ menos el círculo de centro $\frac{1}{2}$ y radio $\frac{1}{2}$.

Problema 3. Se consideran los círculos

$$\begin{aligned} D_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| < 1\} , \\ D_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 1\} , \end{aligned}$$

se pide:

i) Hallar una transformación de Möbius T tal que $T(0) = 0$ y que envíe al infinito el otro punto de intersección de las circunferencias

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| = 1\} , \\ C_2 &= \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| = 1\} . \end{aligned}$$

ii) Justificar que T transforma C_1 y C_2 en rectas perpendiculares,
 iii) Determinar la imagen de la intersección $D_1 \cap D_2$ mediante T ,
 iv) Finalmente hallar una transformación de Möbius que transforme $D_1 \cap D_2$ conformemente sobre el primer cuadrante,

Solución.

i) El otro punto de intersección es $z = 1 + i$, la transformación

$$T(z) = \frac{z}{z - (1 + i)} ,$$

envía este punto al infinito.

ii) T es conforme, transforma circunferencias en rectas o circunferencias. En este caso, puesto que $T(1 + i) = \infty$ y $z = 1 + i$ pertenece a ambas circunferencias, T transforma C_1, C_2 en rectas. Puesto que C_1, C_2 son perpendiculares en el origen, las rectas imágenes también serán perpendiculares en el origen.

iii) Puesto que

$$\begin{aligned} T(2) &= \frac{2}{2 - (1 + i)} = \frac{2}{1 - i} = 1 + i , \\ T(2i) &= \frac{2i}{2i - (1 + i)} = \frac{2i}{-1 + i} = 1 - i , \end{aligned}$$

la circunferencia C_1 es transformada en la recta L_1 bisectriz del primer y tercer cuadrante y C_2 en la recta L_2 bisectriz del segundo y cuarto cuadrante.

Por otra parte el segmento $t(1+i)$, $0 \leq t \leq 1$, que está contenido en la intersección $D_1 \cap D_2$ se transforma

$$T(t(1+i)) = \frac{t(1+i)}{t(1+i) - (1+i)} = \frac{t}{t-1}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

es decir, el semieje real negativo. Concluimos que $D_1 \cap D_2$ se transforma por T en el sector $S = \{z = te^{i\theta} \mid \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4}\}$

iv) Para obtener una transformación que envíe $D_1 \cap D_2$ sobre el primer cuadrante giramos el sector S de amplitud $\frac{\pi}{2}$ sobre el primer cuadrante multiplicando por $e^{-\frac{3\pi}{4}}$, es decir,

$$T_1 = e^{-i\frac{3\pi}{4}} T.$$

Problema 4. Encontrar una transformación conforme del dominio

$$A = \left\{ z \mid 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2} \right\},$$

sobre el círculo unidad $D = \{w \mid |w| < 1\}$.

Solución. La transformación

$$s = z^2,$$

transforma A sobre el semiplano superior $H^+ = \{s \mid \operatorname{Im} s > 0\}$. La transformación

$$w = \frac{s-i}{s+i},$$

transforma el semiplano superior H^+ sobre el círculo unidad D . Así pues

$$w = \frac{z^2 - i}{z^2 + i},$$

transforma conformemente A sobre D .

Problema 5. Considerar el dominio

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Encontrar la imagen de A mediante la transformación

$$w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2.$$

Solución. Consideramos la transformación dada como composición de las dos transformaciones siguientes:

$$\begin{aligned} w &= \lambda^2, \\ \lambda &= \frac{z-1}{z+1}. \end{aligned}$$

Estudiamos en primer lugar la imagen de A mediante la transformación

$$\lambda = \frac{z-1}{z+1},$$

observamos que A es el semicírculo cuya frontera está formada por el segmento $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$ y la semicircunferencia $\{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}$. Mediante la transformación $\lambda = \frac{z-1}{z+1}$, el segmento se transforma en la semirrecta $\{\lambda_1 \mid -\infty \leq \lambda_1 \leq 0\}$, pues para x real, el número $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ es real y cuando x crece de -1 a 1 , $\lambda_1 = \lambda$ crece de $-\infty$ a 0 .

Un punto $e^{i\theta}$ de la semicircunferencia se transforma en

$$\lambda = \frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2i \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}},$$

que cuando θ varía de 0 a π , entonces $\frac{\theta}{2}$ varía de 0 a $\frac{\pi}{2}$ y λ varía de 0 a ∞ recorriendo el semieje imaginario positivo.

Concluimos que A se transforma en el segundo cuadrante.

Finalmente, mediante $w = \lambda^2$, este cuadrante se transforma en el semiplano inferior.

Problema 6. La función

$$w = f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right),$$

se conoce como la función Joukowski. Describir las imágenes por $f(z)$ de las circunferencias con centro el origen y de las semirrectas que parten de él.

Sugerencia: Utilizar la forma polar $z = re^{i\theta}$ en el plano de partida y la forma cartesiana $w = u + iv$ en el espacio imagen.

Solución. Sustituyendo en la ecuación obtenemos

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = u(r, \theta) + iv(r, \theta),$$

de donde se tiene

$$u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta, \quad v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \operatorname{sen} \theta,$$

de estas dos ecuaciones se obtiene eliminando θ

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2} = 1,$$

es decir las imágenes de las circunferencias $C(0, r)$ de centro el origen y radio r son elipses con focos en el eje real, en los puntos 1 y -1 , y semiejes

$$\left(r + \frac{1}{r} \right), \quad \left| r - \frac{1}{r} \right|.$$

Al crecer r monótonamente desde 0 a 1 se acortan los ejes de la elipse que cerca de $r = 0$ son muy grandes. Cuando $r \rightarrow 1$, las elipses se contraen, hasta que para $r = 1$, se reducen al segmento $[-1, 1]$ que une los dos focos. Si r continúa creciendo monótonamente desde 1 a ∞ , los semiejes vuelven a crecer ilimitadamente.

Por otro lado, eliminando r en u y v , se obtiene la familia de hipérbolas

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta} = 1 \quad .$$

References

- [1] L.V.Ahlfors. Complex Analysis. Mcgraw-Hill. Book Co. 1966.
- [2] J.B.Conway.Functions of one complex variable. Graduate Texts. Springer Verlag. 1978.
- [3] S.Lang. Complex Analysis. Addison Wesley Publishing Company. 1977.
- [4] E.Linés. Variable compleja. Ed.Reverté.
- [5] R.Remmert. Theory of complex functions. Graduate Texts. Springer Verlag. 1991.
- [6] W.Rudin. Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Book Co. 1966
- [7] D.Sarason. Complex Function Theory. American Mathematical Society. 2007
LIBROS DE PROBLEMAS
- [8] K.Knopp. Theory of functions. Problem book I,II. Dover Publications Inc.
- [9] Krasnov, Kiseliov, Makarenko.
- [10] J.G.Krzyż. Problems in complex variable theory. American Elsevier Publishing Company, Inc. Pwn Polish Scientific Publishers. Warszawa. 1971
- [11] R.Shakarchi. Problems and solutions for complex analysis. Springer Verlag. 1999.
- [12] L.I. Volkoviyskii, G.L.Lunts and I.G. Aramanovich. A collection of problems in complex analysis. Dover Publications Inc.1965.