Problema 3. *Sea* $f : G \longrightarrow G'$ *un homomorfismo de grupos. Sea* H *un subgrupo normal de* G *y* $\pi : G \longrightarrow G/H$ *la proyección natural de* $\pi(x) = xH$. *Demostrar que* $H \subset \ker f$ *si y solo si existe un homomorfismo* $g : G/H \longrightarrow G'$ *tal que* $f = g \circ \pi$.

Solución. Suponemos que $H \subset \ker f$. Entonces la aplicación

$$\begin{array}{rccc} g: & G/H & \longrightarrow & G' \\ & xH & \mapsto & f(x)\ . \end{array}$$

Vemos que esta aplicación está bien definida: si $xH = yH$, entonces $xy^{-1} \in H$. Como H está incluido en el núcleo de f, tenemos que

$$f(x)\ f(y)^{-1} = f(xy^{-1}) = 0\ .$$

Esto implica que $f(x) = f(y)$, luego está bien definida. Además g es homomorfismo por serlo f:

$$g((xH)(yH)) = g(xyH) = f(xy) = f(x)\ f(y) = g(xH)\ g(yH)$$

Si componemos con la proyección π tenemos que $f = g \circ \pi$. Ahora veamos que si existe un homomorfismo $g : G/H \longrightarrow G'$ tal que $f = g \circ \pi$, entonces $H \subset \ker f$. Sea $x \in H$, luego $xH = 1H$ y por tanto tenemos que

$$f(x) = g \circ \pi(x) = g(\pi(x)) = g(xH) = g(1H) = 1\ ,$$

donde hemos utilizado que $g(1) = 1$ por ser homomorfismo. Esta ecuación nos dice que $H \subset \ker f$.