Introducción

Vamos a generalizar el estudio de las integrales definidas de funciones acotadas en un intervalo cerrado a campos escalares acotados en una región *Q* bidimensional. Esta región de integración será primeramente rectangular y más adelante generalizaremos los resultados para regiones más generales con contornos curvilíneos. La integral que resulta se denomina *integral doble* y se representa mediante los símbolos:

$$\iint_Q f \quad \text{o} \quad \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy$$

Definición de integral doble de una función definida y acotada en un rectángulo

Sea *f* una función definida y acotada en un rectángulo *Q*. Supongamos en particular que

$$|f(x,y)| \le M \quad \forall (x,y) \in Q$$

Entonces la función *f* puede quedar limitada por encima y por debajo por dos funciones escalonadas constantes *s* y *t* siendo $s(x,y) = -M$ y $t(x,y) = M \quad \forall (x,y) \in Q$. Consideremos ahora dos funciones escalonadas cualesquiera *s* y *t* definidas en *Q* tales que:

$$s(x,y) \le f(x,y) \le t(x,y) \qquad \forall (x,y) \in Q$$

Si existe un único número *I* que verifica:

$$\iint_Q s \le I \le \iint_Q t$$

para todo par de funciones que verifican $s(x,y) \le f(x,y) \le t(x,y) \qquad \forall (x,y) \in Q$ decimos que

$$I = \iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \iint_Q f$$

Cálculo de una integral doble por integración unidimensional reiterada

Teorema

Sea *f* una función definida uy acotada en u rectángulo $Q = [a,b] \times [c,d]$ y supongamos que *f* es integrable en *Q*. Supongamos también que para cada *y* fija del intervalo $[c,d]$ exista la integral unidimensional $\int_a^b f(x,y)\,dx$ y designemos su valor por $A(y)$. Si existe la integral entre *c* y *d* de $A(y)$, es igual a la integral doble de *f*, es decir:

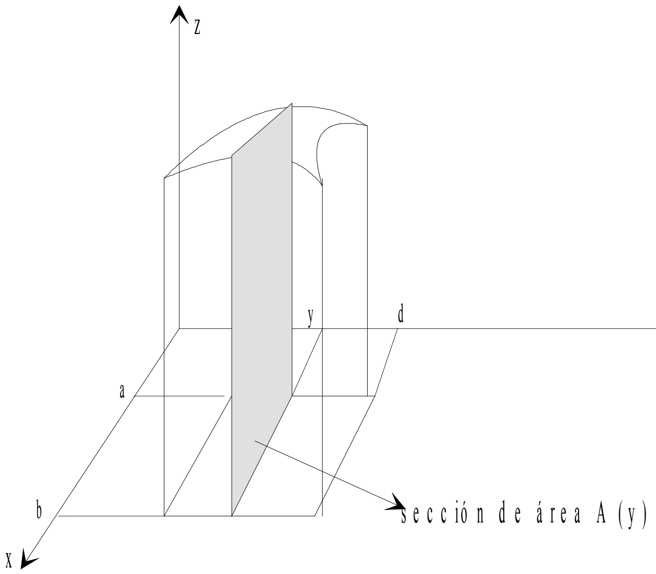
$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy$$

De forma totalmente análoga, si suponemos que $\int_c^d f(x,y)\,dy$ existe para cada *x* fija de $[a,b]$ y es integrable en $[a,b]$ se verifica:

$$\iint_Q f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx$$

Interpretación geométrica de la integral como un volumen

El teorema anterior tiene una sencilla interpretación geométrica. Si *f* es no negativa, el conjunto *S* de puntos (x,y,z) en el espacio de tres dimensiones tales que $(x,y)\in Q$ y $0\le z\le f(x,y)$ se llama conjunto de ordenadas de *f* sobre *Q*. Consta de los puntos comprendidos entre el rectángulo *Q* y la superficie $z=f(x,y)$. Para cada *y* en el intervalo $[c,d]$, la integral



$$A(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$$

es el área de la sección producida en *S* por un plano paralelo a *xz*. Puesto que el área de la sección $A(y)$ es integrable en $[c,d]$, la integral $\int_c^d A(y)\,dy$ es igual al volumen de *S*. De forma análoga podemos calcular el volumen de *S* integrando el área de las secciones producidas por los planos paralelos al plano *yz*.

De forma similar al caso de una variable se puede comprobar que toda función continua en un triángulo es integrable y la integral puede obtenerse por integración sucesiva.

Integración de funciones acotadas con discontinuidades

En este apartado se va a extender el dominio de la integral a regiones, aunque la función tenga discontinuidades sobre *Q* con tal que el número de discontinuidades "no sea demasiado grande".

Definición: Sea *A* un subconjunto acotado del plano. Se dice que tiene contenido nulo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de rectángulos cuya reunión contiene *A* y cuya suma de áreas no supera ε (sea tan pequeña como se quiera.

Las siguientes propiedades son de demostración directa a partir de la definición.

Propiedades

Cualquier conjunto finito del plano tiene contenido nulo.

La reunión de un número finito de rectángulos acotados de contenido nulo también es de contenido nulo.

Todo subconjunto de un conjunto de contenido nulo también es de contenido nulo.

Todo segmento de recta tiene contenido nulo

Teorema

Sea *f* una función definida y acotada en un rectángulo *Q*. Si el conjunto de discontinuidades de la función en *Q* es de contenido nulo existe la integral doble $\iint_Q f$.

Integrales dobles extendidas a regiones más generales

Hasta aquí, sólo se ha definido la integral doble para regiones de integración rectangulares. Definamos ahora el concepto a funciones más generales:

Sea *S* una región acotada, e incluyamos *S* en un rectángulo *Q*. Sea *f* una función definida y acotada en *S*. Definamos en *Q*

$$\bar{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & (x,y)\in S \\ 0 & (x,y)\in Q-S \end{cases}$$

Nos preguntamos si $\overline{f}$ es integrable o no en *Q*, en caso de serlo se verifica obviamente:

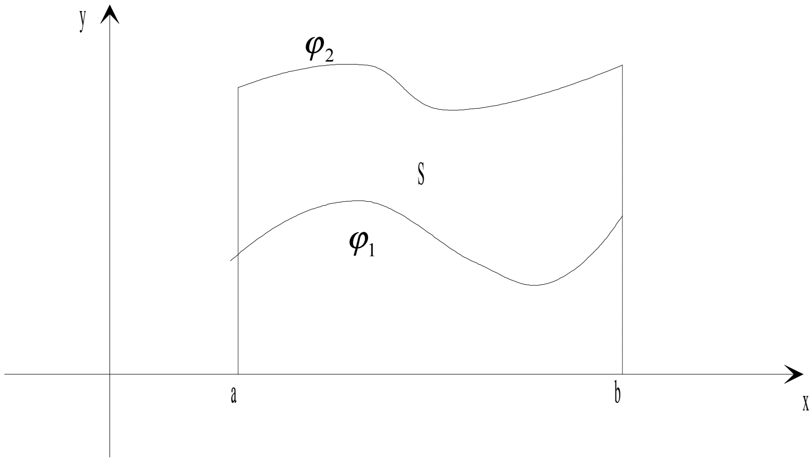
$$\iint_S f = \iint_Q \overline{f}$$

Regiones de tipo I

Sea *S* el conjunto de puntos del plano definido de la forma:

$$S=\{(x,y): a\le x\le b \quad \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x)\}$$

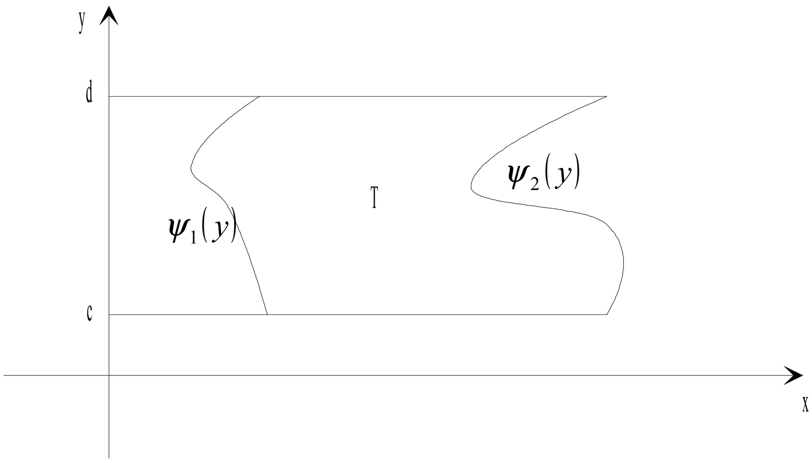
con φ_1 y φ_2 continuas en $[a,b]$ y $\varphi_1 \le \varphi_2$



Regiones de tipo II

Otro tipo de región *T* puede definirse así:

$$T = \{(x, y) : c \le y \le d \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$$



con ψ_1 y ψ_2 continuas en $[a, b]$ y $\psi_1 \le \psi_2$

Todas las regiones que se consideran en la práctica serán de alguno de los dos tipos o podrán descomponerse en un número finito de fragmentos, cada uno de los cuales de esos dos tipos.

Teorema

Si *f* es una función continua en un intervalo cerrado. Entonces la gráfica de *f* tiene contenido nulo

Prueba:

Basta construir una partición de $[a, b]$ y a partir de ahí construir rectángulos de altura $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ cuya suma de áreas será ε.

Teorema

Sea *S* una región del tipo I comprendida entre las gráficas de φ_1 y φ_2 . Supongamos que *f* está definida y acotada en *S* y que es continua en el interior de *S*, entonces existe la integral doble de *f* en *S* y puede calcularse por integración unidimensional reiterada de la forma:

$$\iint_S f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right] dx$$

Prueba:

La demostración de este teorema es directa definiendo $\overline{f}$ como antes y teniendo en cuenta que los únicos puntos donde puede dejar de ser continua $\overline{f}$ son los de la frontera de *S*. Pero según el teorema anterior, la frontera de *S* tiene contenido nulo y por consiguiente $\overline{f}$ es integrable en *Q*.

Existe naturalmente un teorema análogo para una región del tipo II.

Sea T una región del tipo II comprendida entre las gráficas de ψ_1 y ψ_2 . Supongamos que *f* está definida y acotada en *T* y que es continua en el interior de *T*, entonces existe la integral doble de *f* en *T* y puede calcularse por integración unidimensional reiterada de la forma:

$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

Aplicaciones para el cálculo de áreas

Aplicando los resultados anteriores a regiones de tipo I o II, poniendo $f(x,y)=1$ obtenemos

$$\iint_S dx\,dy = \int_a^b (\varphi_2(x)-\varphi_1(x))\,dx \qquad \left(\iint_T dx\,dy = \int_c^d (\psi_2(y)-\psi_1(y))\,dy \right)$$

Cálculo del volumen de un cuerpo

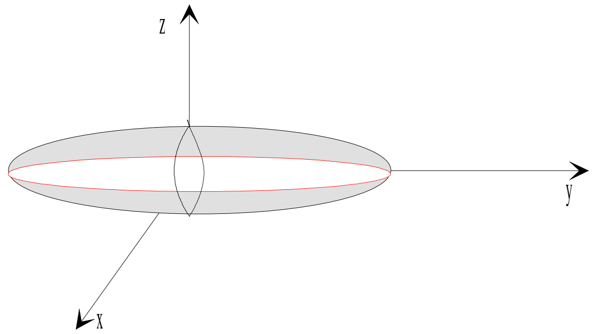
De forma análoga a como razonamos cuando la base es un rectángulo, si *f* es no negativa, la integral doble $\iint_S f(x,y)dx\,dy$ $\left(\iint_T f(x,y)dx\,dy \right)$ representa el volumen del conjunto de ordenadas de *S* (*T*) sobre *f*

En general si *f* y *g* son ambas continuas en *S* (*T)* siendo $f \le g$, la integral doble $\iint_S (g-f)$ $\left(\iint_T (g-f) \right)$ es igual al volumen del sólido comprendido entre las gráficas de *f* y de *g*.

Ejemplo 1

Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Solución



Despejando *z* deducimos que el sólido está comprendido entre las gráficas de

$$g(x,y)=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \qquad f(x,y)=-g(x,y)$$

Y aquí *S* es la región elíptica dada por:

$$S=\left\{(x,y):\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$$

Luego, aplicando los resultados obtenidos anteriormente, obtenemos:

$$V=\iint_S (g-f)\,dx\,dy=2\iint_S g \;=8c\int_0^a\left[\int_0^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\right]dx$$

Llamando ahora $A=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ **la integral interior** es:

$$\int_0^{bA}\sqrt{A^2-\frac{y^2}{b^2}}\,dy=\frac{1}{b}\int_0^{bA}\sqrt{b^2A^2-y^2}\,dy$$

lo que nos indica que hemos de realizar el cambio de variable $y=bA\,\mathrm{sen}\,t \quad dy=bA\cos t\,dt$ que nos conduce a:

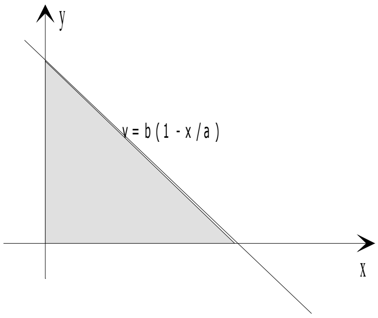
$$A^2b\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=\frac{\pi}{4}A^2b=\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b\Rightarrow V=8c\int_0^a\frac{\pi b}{4}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4\pi}{3}abc$$

Ejemplo 2

Calcular la integral $I=\iint_D\left(x^2+y^2\right)dx\,dy$ en el dominio *D* definido por

$$x\geq 0,\qquad y\geq 0,\qquad x/a+y/b-1\leq 0$$

El dominio está representado por la gráfica:



Y la integral pedida es:

$$I = \int_0^a dx \left[\int_0^{b\left(1-\frac{x}{a}\right)} \left(x^2 + y^2\right) dy \right] = \int_0^a \left(bx^2\left(1-\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{3} b^3 \left(1-\frac{x}{a}\right)^3 \right) dx = b\left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{4}\right) + \frac{1}{3} b^3 \frac{a}{4} =$$

$$= \frac{ab \cdot \left(a^2 + b^2\right)}{12}$$