# Introducción a los espacios de Hilbert

**Pregunta 1** (2 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial real en el cual hay definido dos productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $(\cdot, \cdot)$. Demuestre que los dos productos coinciden si y sólo si $\langle x, x \rangle = (x, x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

**Solución:** Es obvio que si los dos productos coinciden entonces $\langle x, x \rangle = (x, x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Veamos el recíproco. Supongamos que $\langle x, x \rangle = (x, x)$ para todo $x \in \mathcal{H}$.Utilizando la identidad de polarización para ambos productos en el espacio vectorial real $\mathcal{H}$ se tiene

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}\big[\langle x+y, x+y \rangle - \langle x-y, x-y \rangle\big] \\ &= \frac{1}{4}\big[(x+y, x+y) - (x-y, x-y)\big] \\ &= (x, y) \end{aligned}$$

**Pregunta 2** (3 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ el espacio de las funciones polinómicas reales de grado menor o igual que 2. Se define la aplicación:

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \ \mathcal{H} \times \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P, Q) &\longmapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{4} P(n)Q(n) \end{aligned}$$

a) Demuestre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{H}$.

b) Considerando el producto interno del apartado a), aplique el método de ortonormalización de Gram-Schmidt a $\{P_0, P_1, P_2\} = \{1, t, t^2\}$.

**Solución:** a) Comprobamos que se cumplen las tres propiedades de un producto interno.
1. $\langle P, P \rangle = \sum_{n=0}^{4} |P(n)|^2 \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{H}$. Además, si $\langle P, P \rangle = 0$, entonces $P(0) = P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 0$, es decir $P$ tiene 5 raíces distintas. Como el grado de $P$ era a lo sumo 2, se obtiene que $P = 0$.

2. $\langle P, Q \rangle = \sum_{n=0}^{4} P(n)Q(n) = \sum_{n=0}^{4} Q(n)P(n) = \langle Q, P \rangle$ para todo $P, Q \in \mathcal{H}$.

3. Finalmente, para todo $P, P', Q \in \mathcal{H}$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \alpha P + \beta P', Q \rangle &= \sum_{n=0}^{4} (\alpha P(n) + \beta P'(n))Q(n) = \alpha \sum_{n=0}^{4} P(n)Q(n) + \beta \sum_{n=0}^{4} P'(n)Q(n) \\ &= \alpha \langle P, Q \rangle + \beta \langle P', Q \rangle \end{aligned}$$

b) Siguiendo el proceso de Gram-Schmidt se tiene:
$\|P_0\|^2 = \sum_{n=0}^{4} |P(n)|^2 = 5$, se toma $Q_0 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.
$Q_1'(t) = P_1(t) - \langle P_1, Q_0 \rangle Q_0(t) = t - \dfrac{1}{5}(1+2+3+4) = t - 2$
$\|Q_1'\|^2 = \sum_{n=0}^{4} |Q_1'(n)|^2 = 4+1+0+1+4 = 10$, por tanto $Q_1(t) = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(t-2)$

$$\begin{aligned} Q_2'(t) &= P_2(t) - \langle P_2, Q_1 \rangle Q_1(t) - \langle P_2, Q_0 \rangle Q_0(t) \\ &= t^2 - (1/10)(0 - 1 + 0 + 9 + 32)(t-2) - (1/5)(0+1+4+9+16) \\ &= t^2 - 4t + 2 \end{aligned}$$

$\|Q_2'\|^2 = \sum_{n=0}^{4} |Q_2'(n)|^2 = 4+1+4+1+4 = 14$, por tanto $Q_2(t) = \dfrac{1}{\sqrt{14}}(t^2-4t+2)$

La base ortonormal obtenida es $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{1}{\sqrt{10}}(t-2),\ \dfrac{1}{\sqrt{14}}(t^2-4t+2)\right\}$

**Pregunta 3** (2,5 puntos)

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $P$ y $P'$ dos proyecciones ortogonales en $\mathcal{H}$. Sean $F = \mathrm{Im}(P)$ y $F' = \mathrm{Im}(P')$. Demuestre que los siguientes apartados son equivalentes.

1. $F$ y $F'$ son ortogonales.
2. $P(F') = \{0\}$.
3. $PP'(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

**Solución:** a) (1) $\Rightarrow$ (2) Vemos que si $y \in P(F')$, entonces $y = 0$. En efecto, como $P(F') = P(P'(\mathcal{H}))$, si $y \in P(F')$ entonces existe $x_0 \in \mathcal{H}$ tal que $y = P(P'(x_0))$. Se tiene que

$$\langle x, y\rangle = \langle x, P(P'(x_0))\rangle = \langle P(x), P'(x_0)\rangle = 0$$

para todo $x \in \mathcal{H}$ ya que $P(x) \in F$ y $P'(x_0) \in F'$. En consecuencia $y = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Basta observar que para todo $x \in \mathcal{H}$, $PP'(x) \in P(F')$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Veamos que si $y \in F$ e $y' \in F'$ entonces $\langle y, y'\rangle = 0$. Si $y \in F$ e $y' \in F'$ existen $x, x' \in \mathcal{H}$ tales que $y = P(x)$ e $y' = P'(x)$. Por tanto,

$$\langle y, y'\rangle = \langle P(x), P'(x)\rangle = \langle x, P(P'(x))\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$$

**Pregunta 4** (2,5 puntos)

Sabiendo que $\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\big((2n-1)t\big)}{(2n-1)^3}$ es el desarrollo en serie de Fourier de la función impar,

$$g(t) = \begin{cases} t(\pi+t) & \text{si } -\pi \le t < 0, \\ t(\pi-t) & \text{si } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

deduzca

a) la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$; b) la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$.

**Solución:** a) La función $g$ es continua y derivable en $(-\pi,\pi)$ (se comprueba fácilmente) y por tanto aplicando el teorema de Dirichlet, deducimos que su serie de Fourier converge puntualmente a $g$ en $(-\pi,\pi)$. Particularizamos a $t = \dfrac{\pi}{2}$ y se obtiene

$$g\big(\frac{\pi}{2}\big) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\Big((2n-1)\dfrac{\pi}{2}\Big)}{(2n-1)^3} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}\,.$$

Como $g\big(\dfrac{\pi}{2}\big) = \pi/2(\pi - \pi/2) = \pi^2/4$ se obtiene la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^2}{4}\frac{\pi}{8} = \frac{\pi^3}{32}$.

b) Para la segunda serie utilizamos la fórmula de Parseval,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2\,. = \frac{1}{2}\,\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$$

Como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)dt &= \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} t^2(\pi-t)^2)dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t^2\pi^2+t^4-2\pi t^3)dt \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi^2t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{\pi t^4}{2}\Big]_0^{\pi} = \pi^4(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}) = \frac{\pi^4}{30}\end{aligned}$$

se obtiene la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{30\cdot 32} = \frac{\pi^6}{960}$