ALGEBRA II

Licenciatura en Ciencias Matemáticas

1. Sea f un elemento de $\mathbb{Z}[T]$ tal que

$$f(-2) = 1, \ f(2) = 1, \ f(3) = 2.$$

Probar que f no tiene raíces enteras.
(2 puntos.)

Solución. Es muy similar a uno de los ejercicios de la colección "Problemas de congruencias". Se deduce del enunciado que f no tiene raíces en $Z/(3)$, lo que implica que tampoco las tenga en Z.

2. Sea $z = \sqrt{7} + i$ y $E = \mathbb{Q}[z]$. Probar que

$$E = \mathbb{Q}[\sqrt{7} + i] = \mathbb{Q}[\sqrt{7} - i]$$

y razónese que entonces $E = \mathbb{Q}[\sqrt{7}, i]$. Calcúlese el grado $[E : \mathbb{Q}]$ y el polinomio mínimo de un elemento primitivo de la extensión $E/\mathbb{Q}$.
(2 puntos.)

Solución. Es el problema [FL,127].

3. Consideremos el ideal I en el dominio de ideales principales $\mathbb{Q}[T]$:

$$I = (T^2 - 1, T^3 - 1, T^5 - 1, T^7 - 1).$$

Probar que I es un ideal propio y calcúlese un generador.
(2 puntos.)

Solución. Es similar al problema [FL,54]. En $\mathbb{Q}[T]$ tenemos las siguientes descomposiciones en polinomios irreducibles [GR, pág. 146]:

$$\begin{aligned} T^2 - 1 &= (T+1)(T-1), T^3 - 1 = (T-1)(T^2 + T + 1), \\ T^5 - 1 &= (T-1)(T^4 + T^3 + T^2 + T + 1), \\ T^7 - 1 &= (T-1)(T^6 + T^5 + T^4 + T^3 + T^2 + T + 1). \end{aligned}$$

De esta forma $I \subseteq (T-1)$. Por otra parte se sigue de la anterior descomposición en factores que $mcd(T^3-1, T^5-1) = (T-1)$, y por tanto existen elementos $a(T), b(T) \in \mathbb{Q}[T]$ tales que

$$T - 1 = a(T)(T^3-1) + b(T)(T^5-1).$$

Esto implica que $(T-1) \subseteq I$, con lo que $I = (T-1)$.

4. Consideremos la extensión de cuerpos

$$\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{Q}[T],$$

donde $\mathbb{Q}$ es el cuerpo racional y T es transcendente sobre $\mathbb{Q}$. Probar que todo elemento ϕ de $G(\mathbb{Q}[T] : \mathbb{Q})$, es de la forma

$$\phi(T) = \frac{aT+b}{cT+d}$$

donde a, b, c, d son números racionales verificando $ad - bc \neq 0$.
(2.5 puntos.)

Solución.
Es la última parte de la página 314 [GR].

5. Sea K un cuerpo tal que todo polinomio de grado 2 en $K[T]$ es reducible. Probar que no existen extensiones de Galois

$$K \hookrightarrow E$$

tales que $[E : K] = 2^n$ con $n \geq 1$.
(1.5 puntos.)
Solución. Este problema incide en la misma idea del ejercicio [GR,78].
(i) En primer lugar, es consecuencia del enunciado que no existen extensiones

$$K \hookrightarrow F$$

de grado 2.
(ii) Por otra parte si

$$K \hookrightarrow E$$

es una extensión de Galois con $[E : K] = 2^n$ $(n \geq 2)$, existe un subgrupo $H \subset G(E : K)$ de orden 2^{n-1}. Por el primer teorema fundamental de la teoría de Galois, el subcuerpo fijo L de E por H es una extensión de grado 2 de K, lo que contradice al apartado (i).