Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano de dimensión infinita. Justifique que la bola cerrada unidad

$$B = \{x \in \mathcal{H} \colon \|x\| \leq 1\}$$

no es compacta.

Solución: Si $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano de dimensión infinita, sabemos que existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que forma un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$. Para $n \neq m$ se cumple:

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|x_n\|^2 + \|x_m\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle x_n, x_m\rangle = 2$$

Consideramos para cada $x \in B$, la bola $B_x = \{y \in \mathcal{H} \mid \|y - x\| < 1/2\}$. Obtenemos así el recubrimiento abierto, $\{B_x \mid x \in B\}$ de B que no admite subrecubrimiento finito. En efecto, si $n \neq m$, x_n y x_m no pueden pertenecer a un misma bola B_x pues si $x_n, x_m \in B_x$ entonces $\|x_n - x_m\| \leq \|u_n - x\| + \|u_m - x\| \leq 1$,en contradicción con $\|x_n - x_m\|^2 = 2$. Luego cualquier subrecubrimiento contiene al menos una bola por cada elemento x_n.

Pregunta 2 (3 puntos)
En el espacio $\mathcal{C}[-1,1]$ de las funciones $f \colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas, con el producto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$$

sean los subespacios

$$F = \big\{f \in \mathcal{C}[-1,1] \colon f(t) = 0 \text{ para todo } t \in [-1,0]\big\}$$

y

$$G = \big\{f \in \mathcal{C}[-1,1] \colon f(0) = 0\big\}.$$

a) Determine $F^{\perp}$.

b) Determine $G^{\perp}$ y determine si es cierta la igualdad $\mathcal{C}[-1,1] = G \oplus G^{\perp}$.

Solución: a) Veamos que $F^{\perp} = \big\{g \in \mathcal{C}[-1,1] \colon g(t) = 0 \text{ para todo } t \in [0,1]\big\}$. En efecto si $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ es tal que $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$ entonces $\langle g, f\rangle = 0$ para todo $f \in F$ pues $g(t)\overline{f(t)} = 0$ para todo $t \in [-1,1]$ y en consecuencia $\int_{-1}^{1} g(t)\overline{f(t)}dt = 0$. Inversamente si $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ es tal que no es cierto que $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, de la continuidad de g se deduce la existencia de un intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ tal que $g(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ o $g(t) < 0$ para todo $t \in [a,b]$. Sea una función f continua en $[-1,1]$ que se anula fuera de $[a,b]$ y tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in (a,b)$. Por ejemplo,

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ t - a & \text{si } a \leq t \leq (a+b)/2 \\ \frac{-t+b}{\varepsilon'} & \text{si } (a+b)/2 \leq t < b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$

Claramente $f \in F$ y $\int_{-1}^{1} g(t)\overline{f(t)}dt = \int_a^b g(t)f(t)dt \neq 0$ pues $g(t)f(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ o $g(t)f(t) < 0$ para todo $t \in [a,b]$.
Hemos supuesto g real pues si $g(t) \neq 0$ para algún $t \in [0,1]$, entonces $\mathrm{Re}(g(t)) \neq 0$ o $\mathrm{Im}(g(t)) \neq 0$ y el razonamiento sería válido para $\mathrm{Re}(g)$ o $\mathrm{Im}(g)$.

b) Veamos que $G^{\perp} = \{0\}$. En efecto, sea $g \in G^{\perp}$ tal que $g \neq 0$.
Si g es tal que $g(0) = 0$ entonces $g \in G^{\perp} \cap G = \{0\}$, que contradice la hipótesis de $g \neq 0$.
Por tanto se cumple que $g(0) \neq 0$. Por la continuidad de g, existe ε, son $0 < \varepsilon < 1$, tal que $g(t) \neq 0$ para todo t tal que $|t| < \varepsilon$. Tomando

$$f(t)=\begin{cases}\frac{|t|g(t)}{\varepsilon} & \text{si } |t|<\varepsilon\\ g(t) & \text{si } |t|\geq\varepsilon\end{cases}$$

Como $f(0)=0$ y f es continua en $[-1,1]$, resulta que $f\in G$. Sin embargo,

$$\langle g,f\rangle=\int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt\geq\frac{1}{\varepsilon}\int_{|t|\leq\varepsilon}|t||g(t)|^2\,dt>0$$

que contradice la hipótesis de $g\in G^{\perp}$.
La igualdad $\mathcal{C}[-1,1]=G\oplus G^{\perp}$ no es verdadera. Basta observar que $G\oplus G^{\perp}=G$ y $G\neq\mathcal{C}[-1,1]$ pues cualquier función $f\in\mathcal{C}[-1,1]$ tal que $f(0)\neq 0$ no pertenece a G.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T\colon\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$ una aplicación lineal tal que $\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ para todo $x,y\in\mathcal{H}$. Demuestre que $T^*T=I_{\mathcal{H}}$ y que $\mathrm{Im}(T)=\ker(I_{\mathcal{H}}-TT^*)$.

Solución: De $\langle T(x),T(y)\rangle=\langle x,y\rangle$ para todo $x,y\in\mathcal{H}$ se deduce que

$$\langle T(x),T(y)\rangle=\langle T^*(T(x)),y\rangle=\langle x,y\rangle$$

para todo $x,y\in\mathcal{H}$. Por tanto, $T^*T=I_{\mathcal{H}}$.

Por otro lado, para todo $y\in\mathrm{Im}(T)$, existe al menos un elemento $x\in\mathcal{H}$ tal que $y=T(x)$. Se tiene

$$\begin{aligned}TT^*(y) &= TT^*(T(x))=T\big(T^*(T(x))\big)=T\big(T^*T(x)\big)=T(x)\\ &= y\end{aligned}$$

En consecuencia, $\big(I_{\mathcal{H}}-TT^*\big)(y)=0$ y por tanto $\mathrm{Im}(T)\subset\ker(I_{\mathcal{H}}-TT^*)$.

La inclusión inversa se obtiene teniendo en cuenta que si $y\in\ker(I_{\mathcal{H}}-TT^*)$ entonces $y=TT^*(y)=T\big(T^*(y)\big)$ y por tanto, $y\in\mathrm{Im}(T)$.

Pregunta 4 (2 puntos)
Sabiendo que la transformada de Fourier de la función

$$f(t)=\mathrm{e}^{-at^2}\,,\ t\in\mathbb{R}\quad\text{es}\quad\widehat{f}(w)=\frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{4a}}\,,\ w\in\mathbb{R}\,.$$

calcule la siguiente convolución:

$$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}}\ *\ \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2b^2}}\,.$$

Solución: Sabemos que $f(t)=\mathrm{e}^{-at^2}\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto}\frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-w^2/(4a)}$, por tanto $f(t)=\mathrm{e}^{-t^2/(2a^2)}\overset{\mathcal{F}}{\longmapsto}a\mathrm{e}^{-a^2w^2/2}$.
Si $g(u):=\big(\mathrm{e}^{-t^2/(2a^2)}*\mathrm{e}^{-t^2/(2b^2)}\big)(u)$ su transformada de Fourier será $\widehat{g}(w)=\sqrt{2\pi}\,ab\,\mathrm{e}^{-\frac{a^2+b^2}{2}w^2}$. Por tanto,

$$g(u)=\sqrt{2\pi}\,ab\,\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{-u^2/2(a^2+b^2)},\ u\in\mathbb{R}\,.$$

Concluyendo,

$$\Big(\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2a^2}*\frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2b^2}\Big)(u)=\frac{1}{c\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-u^2/2c^2}\,,\quad u\in\mathbb{R}\quad(c=\sqrt{a^2+b^2})\,.$$