Pregunta 1 (3 puntos)(2 +1)
En el espacio $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1]$ de las funciones $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, con el producto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

sean los subespacios

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1] \colon f(t) = 0 \text{ para todo } t \in [-1,0] \right\}$$

y

$$G = \left\{ g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1] \colon g(t) = 0 \text{ para todo } t \in [0,1] \right\}.$$

a) Demuestre que $F^{\perp} = G$.
b) Determine si es cierta la igualdad $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1] = F \oplus F^{\perp}$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Determine la proyección ortogonal de la función $h(t) = \chi_{[0,\pi/2]}(t)$ en el subespacio vectorial de $L^2[0,\pi]$ generado por $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos) (1+1,5)
Sean las aplicaciones lineales $T, S\colon \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definidas mediante

$$\begin{aligned} T(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) &= \{0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots\} \\ S(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) &= \{x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}, \ldots\} \end{aligned}$$

a) Demuestre que T y S son continuas, determine la norma de ambas y determine los correspondientes operadores adjuntos.
b) ¿Son T y S isometrías? ¿Son T y S operadores unitarios?

Pregunta 4 (2 puntos)
Sabiendo que la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = e^{-|t|},\ t \in \mathbb{R} \quad \text{es} \quad \widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{1}{1+w^2} \right),\ w \in \mathbb{R}.$$

demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dw}{(1+w^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$