1. El jugador J_2 lanza un dado con seis caras numeradas del uno al seis y, mira si el resultado es par (P) o impar (I). A continuación elige seguir un plan (S) o cambiarlo (C).

   Después el jugador J_1 sin conocer la elección de J_2 pero sabiendo el resultado del dado, elige seguir (S) o cambiar (C).

   La función de pago es:

$$\begin{array}{ll} M(P,S,S) = -3 & M(I,S,S) = -5 \\ M(P,S,C) = 4 & M(I,S,C) = 8 \\ M(P,C,S) = 2 & M(I,C,S) = -2 \\ M(P,C,C) = 1 & M(I,C,C) = 3 \end{array}$$

   Hallar la forma extensiva, la forma normal y, resolver este juego.

   (4 puntos)

2. Para el juego bimatricial:

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (0,5) \\ (5,0) & (-10,-10) \end{pmatrix}$$

   Encontrar los valores maximín y los pares de equilibrio de estrategias mixtas.

   (2 puntos)

R
PTO
"

3. En el siguiente juego entre cuatro personas en forma coalicional:

$$v(\{i\}) = 0 \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,4\}) = v(\{3,4\}) = 1$$
$$v(\{1,4\}) = v(\{2,3\}) = 0$$
$$v(\{2,3,4\}) = v(\{1,3,4\}) = v(\{1,2,4\}) = 1$$
$$\boxed{v(\{1,2,3\}) = 2 = v(\{1,2,3,4\})}$$

CLAVE → VUELVE REDUNDANTE Y DA ,INFORMACIÓN ÚTI

   a) Mostrar que el núcleo de este juego consiste en un único vector de asignación.

   b) Calcular el valor de Shapley de este juego.

   (4 puntos)

1. (PEC1 2019)

2.

Para encontrar los valores maximin debemos considerar la matriz de cada jugador por separado, teniendo en cuenta que se puede considerar como un juego de suma nula y que el adversario quiere minimizar los pagos:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}$$

la segunda columna domina a la primera puesto que el jugador de columnas quiere minimizar el pago del jugador de filas (1).

$M_1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0)$ el valor maxmin es 0.

Análogamente para el jugador de columnas:

$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (0)$$

y el valor maxmin es 0.

Los pares de equilibrio podemos calcularlos por el método gráfico

Scanned with CamScanner

MÉTODO GRÁFICO:

Sean $(p, 1-p)$ y $(q, 1-q)$ dos estrategias mixtas para P_1 y P_2.

$$\Pi_1(\vec{p}, \vec{q}) = 3pq + 5(1-p)q - 10(1-p)(1-q) =$$

$$= p(10-12q) + 15q - 10$$

si $10 - 12q < 0$ $\quad q > \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \Rightarrow p = 0$

si $10 - 12q > 0$ $\quad q < \frac{5}{6} \Rightarrow p = 1$

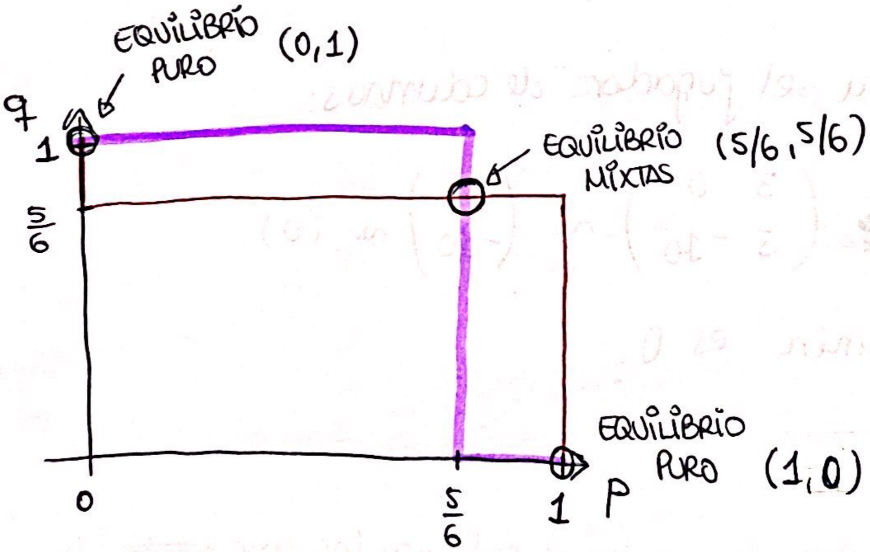
$$\Pi_2(\vec{p}, \vec{q}) = 3pq + 5p(1-q) - 10(1-p)(1-q) =$$

$$= 3pq + 5p - 5pq - 10 + 10q + 10p - 10pq =$$

$$= q(10-12p) + 15p - 10$$

si $p > \frac{5}{6} \Rightarrow q = 0$ $\quad$ (por simetría con el anterior)

si $p < \frac{5}{6} \Rightarrow q = 1$



El equilibrio en estrategias mixtas es $\vec{p} = (5/6, 1/6)$ $\quad \vec{q} = (5/6, 1/6)$

con valores esperados: $\Pi_1(5/6, 5/6) = \Pi_2(5/6, 5/6) = \frac{65}{6}$

$\boxed{3.}$

Existe un corolario que da una expresión analítica para todo vector $\vec{x} = (x_1, \dots, x_4)$ del núcleo ("core"):

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = v(P)$$

$$\sum_{P_i \in S} x_i \geq v(S)$$

Si nos fijamos en el ejercicio tenemos:

$v(\{1,2,3\}) = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geq 2$

$v(\{1,2,3,4\}) = 2 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$

Por tanto $\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 2}$ ① y $\boxed{x_4 = 0}$ ②

Por otro lado podemos ver que: (usando ②)

$v(\{2,4\}) = 1 \Rightarrow x_2 + x_4 \geq 1 \Rightarrow \boxed{x_2 \geq 1}$

$v(\{3,4\}) = 1 \Rightarrow x_3 + x_4 \geq 1 \Rightarrow \boxed{x_3 \geq 1}$

Que junto a las ecuaciones: (usando ① y ②)

$v(\{1,3,4\}) = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 \geq 1 \Rightarrow 2 - x_2 \geq 1 \Rightarrow \boxed{x_2 \leq 1}$

$v(\{1,2,4\}) = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_4 \geq 1 \Rightarrow 2 - x_3 \geq 1 \Rightarrow \boxed{x_3 \leq 1}$

Concluimos que
$x_2 \leq 1$ y $x_2 \geq 1 \Rightarrow \boxed{x_2 = 1}$
$x_3 \leq 1$ y $x_3 \geq 1 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$

y como $x_1 + x_2 + x_3 = 2$ tenemos $\boxed{x_1 = 0}$

La única imputación del núcleo es: $x_1 = x_4 = 0 \quad x_2 = x_3 = 1$

El valor de Shapley para el jugador i es:

$$\phi_i = \sum_{P_i \in S} \frac{(|S|-1)!\,(N-|S|)!}{N!}\,\partial(P_i,S)$$

donde $\partial(P_i,S) = v(S) - v(S-\{P_i\})$ es la contribución del jugador i a la coalición S.

<u>Jugador 1:</u>

$\partial(P_1,\{P_1\}) = 0-0=0$

$\partial(P_1,\{P_1,P_2\}) = \partial(P_1,\{P_1,P_3\}) = 1-0=1$

$\partial(P_1,\{P_1,P_4\}) = 0-0=0$

$\partial(P_1,\{P_1,P_3,P_4\}) = \partial(P_1,\{P_1,P_2,P_4\}) = 1-1=0$

$\partial(P_1,\{P_1,P_2,P_3\}) = 2-0=2$

$\partial(P_1,P) = 2-1=1$

$$\phi_1 = 2\,\partial(P_1,\{P_1,P_2\})\cdot\frac{1!\,2!}{4!} + \partial(P_1,\{P_1,P_2,P_3\})\,\frac{2!\,1!}{4!} + \partial(P_1,P)\cdot\frac{3!\,0!}{4!} = 2\cdot1\cdot\frac{1}{4\cdot3} + 2\cdot\frac{1}{4\cdot3} + 1\cdot\frac{1}{4} =$$

$$= \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4} = \frac{2+2+3}{12} = \frac{7}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$$

Scanned with CamScanner

Jugador 4:

$\partial(P_4, \{P_4\}) = 0$

$\partial(P_4, \{P_2, P_4\}) = \partial(P_4, \{P_3, P_4\}) = 1 - 0 = 1$

$\partial(P_4, \{P_4, P_1\}) = 0 - 0 = 0$

$\partial(P_4, \{P_2 P_3 P_4\}) = 1 - 0 = 1$

$\partial(P_4, \{P_1 P_3 P_4\}) = 1 - 1 = 0$

$\partial(P_4, \{P_1, P_2, P_4\}) = 1 - 1 = 0 = \partial(P_4, \{P_1, P_3, P_4\})$

$\partial(P_4, \underline{P}) = 2 - 2 = 0$

$$\phi_4 = 2 \cdot \partial(P_4, \{P_2, P_4\}) \cdot \frac{1!\, 2!}{4!} + \partial(P_4, \{P_2, P_3, P_4\}) \cdot \frac{2!\, 1!}{4!} =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{2+1}{12} = \frac{3}{12} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

El vector de Shapley es $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = \left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}\right)$

** El cuarto valor podríamos haberlo obtenido de:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 2$$

$$\phi_4 = 2 - [\phi_1 + \phi_2 + \phi_3] = 2 - \frac{21}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \;*$$

Scanned with CamScanner