Cálculo de Probabilidades I

Tema 8
Grado en Matemáticas

Tutor Online: Angel Joval Roquet. CA La Seu d'Urgell

Tema 8: Variables aleatorias

8.1 El concepto de variable aleatoria

Una variable aleatoria X es una función que asocia a cada uno de los resultados posibles de un fenómeno aleatorio un valor numérico real.

En un espacio de probabilidad discreto (Ω,P), se denomina **variable aleatoria***, a cualquier función*

$$X : \Omega \to R$$

- *Ejemplo 1:*

  Sea el experimento aleatorio “lanzar dos dados”. Definamos el espacio espacio de probabilidad, (Ω,P) :

  Ω = {(1,1),(1,2),...(1,6),...,(5,6),(6,6)},   P({(*I, j)})*=1/36, para *I, j*= 1,2,3,4,5,6.

  La variable aleatoria discreta X_1=*suma de las puntuaciones obtenidas*, viene dada por

$$X_1 : \Omega \to R$$
$$(i, j) \to i + j$$

  es decir, $X_1(i, j) = i + j$.

- *Ejemplo 2:*

  Se lanza una moneda, con probabilidad de cara igual a p, hasta que aparece la primera cara. El experimento puede describirse mediante el espacio de probabilidad, (Ω,P), :

$$\Omega = N, \quad P(\{n\}) = p(1-p)^{n-1}$$

La variable aleatoria X_2=*número de lanzamientos hasta que aparezca la primera cara*, viene definida por

$$X_2 : \begin{array}{ccc} N & \rightarrow & R \\ n & \rightarrow & n \end{array}$$

es decir, $X_2(n) = n$.

Para cada número real $a \in R$, el suceso *X* toma el valor *a* se simboliza por $\{X = a\}$ y significa

$$\{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\} = X^{-1}(\{a\})$$

Dado un intervalo *(a,b*] de *R, X* toma un valor en *(a,b*] se expresa

$$\{a < X \leq b\} = \{\omega \in \Omega / a < X(\omega) \leq b\} = X^{-1}(a,b]$$

Analogamente,

$$\{X < a\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) < a\} = X^{-1}(-\infty,a]$$

En general, para cualquier subconjunto *B* de *R, el suceso X* toma un valor en *B* significa

$$\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \in B\} = X^{-1}(B)$$

- *Ejemplo 3:*

En el ejemplo 1, tenemos los sucesos

$\{X_1 = 2\} = \{(1,1)\}$

$\{X_1 = 3\} = \{(1,2),(2,1)\}$

$\{X_1 = 4\} = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$

$\{X_1 = 5\} = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

$\{X_1 = 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$

$\{X_1 = 7\} = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$\{X_1 = 8\} = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$

$\{X_1 = 9\} = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$

$\{X_1 = 10\} = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

$\{X_1 = 11\} = \{(5,6),(6,5)\}$

$\{X_1 = 12\} = \{(6,6)\}$

También

$$\{X_1 \leq 5\} = \{(1;1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

$$\{X_1 > 9\} = \{(4,6),(5,5),(6,4),(5,6),(6,5),(6,6)\}$$

$$\{3 < X_1 \leq 5\} = \{(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(4,1)\}$$

8.2 Distribución de una variable aleatoria

Una variable aleatoria X, es discreta, *si toma a lo sumo un número numerable de valores:*

$$X(\Omega)=\left\{x_1,x_2,x_3,\dots,x_n,\dots\right\}$$

La función que asigna a cada x_k *el valor*

$$p_k=\mathrm{P}\left\{X=x_k\right\}$$

se denomina **función de probabilidad** de X.

Obviamente debe ser

$$\sum_{k=1}^{\infty}p_k=1$$

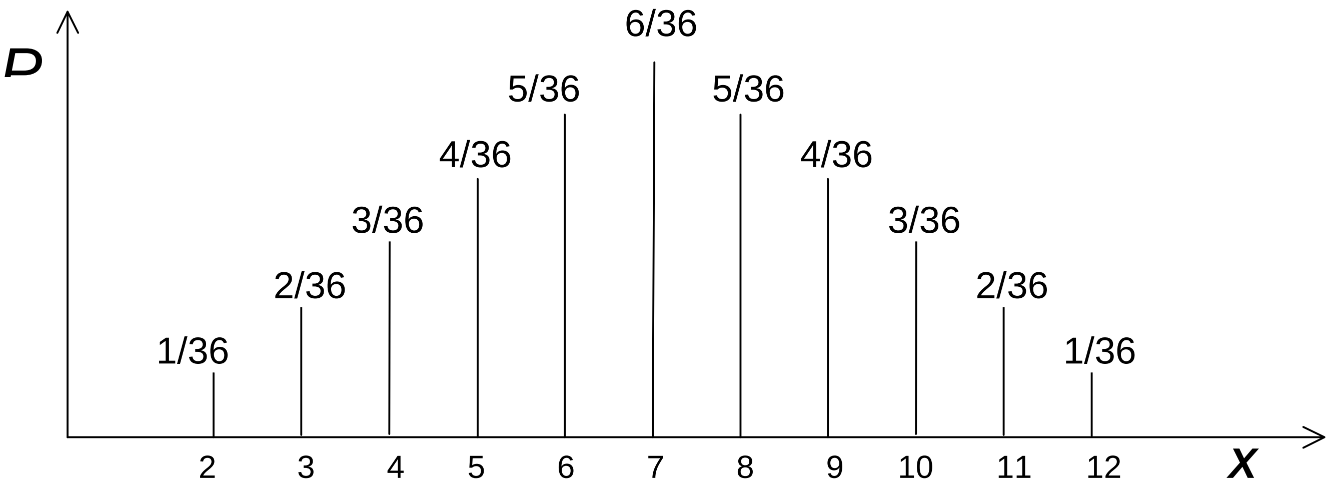
- *Ejemplo 4:*

La variable aleatoria X_1 toma valores en

$$X_1(\Omega)=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

y su función de probabilidad corresponde a los valores:

x_k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_k	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36



La función $F: R \to R$ *definida por*

$$F(x) = \mathrm{P}\{X \le x\} = \sum_{\{k / x_k \le x\}} p_k$$

se denomina **función de distribución** *de la variable aleatoria X.*

Propiedades:

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{P}\{X \le x\} = \mathrm{P}(\Omega) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} \mathrm{P}\{X \le x\} = \mathrm{P}(\varnothing) = 0$$

$$\mathrm{P}\{x_1 < X \le x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$$

F(x) es una función con saltos de magnitud p_k, en cada uno de los valores x_k.

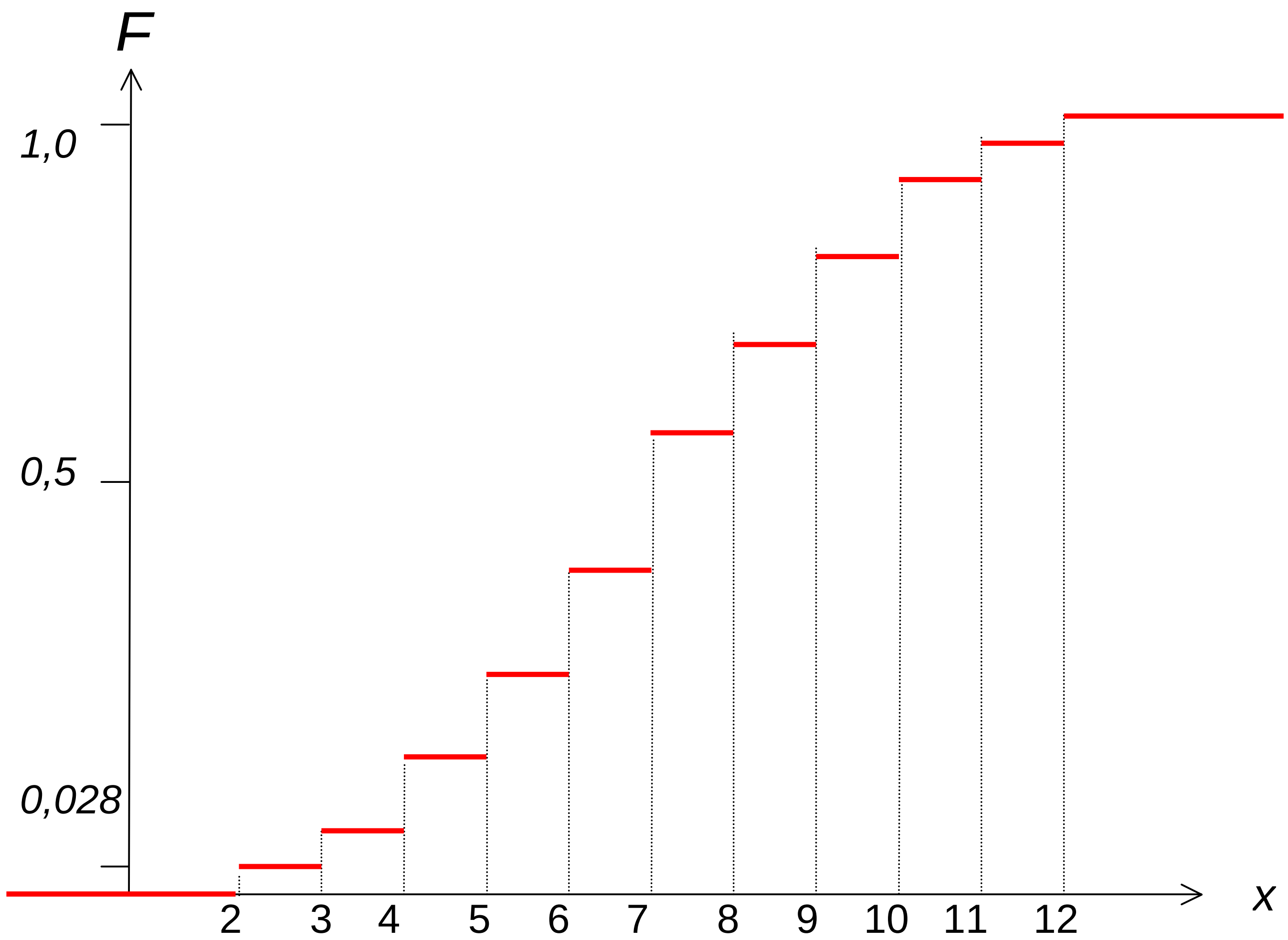
*F(X) es c*reciente de 0 a 1 y continua por la derecha.

- *Ejemplo 5:*

  La función de distribución de la variable aleatoria X_1 es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si \quad x<2 \\ 1/36 & si \quad 2\leq x<3 \\ 1/12 & si \quad 3\leq x<4 \\ 1/6 & si \quad 4\leq x<5 \\ 5/18 & si \quad 5\leq x<6 \\ 5/12 & si \quad 6\leq x<7 \\ 7/12 & si \quad 7\leq x<8 \\ 13/18 & si \quad 8\leq x<9 \\ 5/6 & si \quad 9\leq x<10 \\ 11/12 & si \quad 10\leq x<11 \\ 35/36 & si \quad 11\leq x<12 \\ 1 & si \quad x\geq 12 \end{cases}$$

y su representación gráfica es:



- *Ejemplo 6:*

Consideramos la variable aleatoria X_2=*número de lanzamientos hasta que aparezca la primera cara*, del ejemplo 2.

La función de probabilidad de X_2 es

x_n	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
p_n	p	$p(1\text{-}p)$	$p(1\text{-}p)^2$	$\cdots$	$p(1\text{-}p)^{n\text{-}1}$	$\cdots$

Como que

$$\sum_{n\leq x} p(1-p)^{n-1} = 1-\sum_{n>x} p(1-p)^{n-1} = 1-(1-p)^{[x]}$$

su función de distribución es:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & si\ \ x<1 \\ 1-(1-p)^{[x]} & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

Consideramos un espacio de probabilidad discreto *(Ω,P),* y *X* e *Y* dos variables aleatorias definidas sobre él, diremos que *una variable es función de la otra*, *Y=f(X),* si se cumple

$$Y(\omega)=f(X(\omega)),\ para\, cada\ \omega\in\Omega$$

Tendremos

$$\mathrm{P}\{Y=y\}=\sum_{\{x_i\,/\,f(x_i)=y\}}\mathrm{P}\{X=x_i\}$$

- *Ejemplo 6:*

En el espacio de probabilidad (Ω,P), con $\Omega=\{1,2,3,4\}$ y $\mathrm{P}(\{i\})=\frac{i}{10}$, para $i=1,2,3,4$, consideramos las variables aleatorias

$$X(\omega)=\omega \qquad Y=X^2+1 \qquad Z=(2-X)^2$$

Determinar las funciones de probabilidad de *X, Y y Z.*

La función de probabilidad de la variable X es

$$P\{X=i\}=\frac{i}{10} \text{ para } i=1,2,3,4 \text{, es decir}$$

i	1	2	3	4
p_i	1/10	2/10	3/10	4/10

La variable $Y=X^2+1$ tiene por función de probabilidad

j	2	5	10	17
p_j	1/10	2/10	3/10	4/10

Como que Z(1)=Z(3)=1, Z(2)=0 y Z(4)=4, su función de probabilidad es

k	0	1	4
p_k	2/10	4/10	4/10

8.3 Variables aleatorias simultáneas

Si X_1, X_2 son variables aleatorias discretas definidas en el mismo espacio de probabilidades, **la distribución conjunta** de *(X_1, X_2) es la función que asigna a cada subconjunto B* de *R^2 la probabilidad*

$$P\{(X_1, X_2) \in B\}$$

La distribución conjunta de (X_1, X_2) se caracteriza por la función de probabilidad conjunta que hace corresponder

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\}$$

a cada par (x_1, x_2) de posibles valores de (X_1, X_2).

Las funciones de probabilidad $\mathrm{P}\{X_1=x_1\}$ y $\mathrm{P}\{X_2=x_2\}$ *se denominan* **funciones de probabilidad marginales** de X_1 y X_2 *respectivamente. Tenemos*

$$\mathrm{P}\{X_1=x_1\}=\sum_{x_2\in X_2(\Omega)}\mathrm{P}\{X_1=x_1,X_2=x_2\}$$

$$\mathrm{P}\{X_2=x_2\}=\sum_{x_1\in X_1(\Omega)}\mathrm{P}\{X_1=x_1,X_2=x_2\}$$

La función de probabilidad

$$\mathrm{P}\{X_2=x_2 \mid X_1=x_1\}=\frac{\mathrm{P}\{X_1=x_1,X_2=x_2\}}{\mathrm{P}\{X_1=x_1\}}$$

donde x_1 *es fijo* y x_2 *es variable*, *corresponde a la* **distribución de** X_2 **condicionada** por $X_1=x_1$.

La **distribución de** X_1 **condicionada** por $X_2=x_2$ es

$$\mathrm{P}\{X_1=x_1 \mid X_2=x_2\}=\frac{\mathrm{P}\{X_1=x_1,X_2=x_2\}}{\mathrm{P}\{X_2=x_2\}}$$

donde x_2 *es fijo* y x_1 *es variable.*

- *Ejemplo 7:*

La distribución conjunta de dos variables X_1 y X_2 definidas en el mismo espacio de probabilidades es

$X_1 \backslash X_2$	1	2
0	0.05	0.15
1	0.30	0
2	0.05	0.45

Calcular las funciones de probabildad marginales de X_1 y X_2.

$$\mathrm{P}\{X_1=0\}=\mathrm{P}\{X_1=0,X_2=1\}+\mathrm{P}\{X_1=0,X_2=2\}=0.05+0.15=0.20$$
$$\mathrm{P}\{X_1=1\}=\mathrm{P}\{X_1=1,X_2=1\}+\mathrm{P}\{X_1=1,X_2=2\}=0.30+0=0.30$$
$$\mathrm{P}\{X_1=2\}=\mathrm{P}\{X_1=2,X_2=1\}+\mathrm{P}\{X_1=2,X_2=2\}=0.05+0.45=0.5$$

La función de probabildad marginal de X_1 es

i	0	1	2
p_i	0.20	0.30	0.50

Analogamente, la función de probabildad marginal de X_2 es

j	1	2
p_j	0.40	0.60

b) Calcular la función de probabilidad de la variable X_2 condicionada por X_1=0.

$$P\{X_2=1 \mid X_1=0\} = \frac{P\{X_1=0, X_2=1\}}{P\{X_1=0\}} = \frac{0.05}{0.20} = 0.25$$

$$P\{X_2=2 \mid X_1=0\} = \frac{P\{X_1=0, X_2=2\}}{P\{X_1=0\}} = \frac{0.15}{0.20} = 0.75$$

La función de probabilidad de la variable X_2 condicionada por X_1=0 es

k	1	2
p_k	0.25	0.75

8.4 Variables aleatorias independients

De acuerdo con las nociones de los capítulos 6 y 7, la ausencia de inflencia entre dos variables aleatorias X_1 y X_2 se detecta en que, para cualquiera valores posibles x_1 y x_2 de las variables, se verifica

$$P\{X_1 = x_1 | X_2 = x_2\} = P\{X_1 = x_1\}$$
$$P\{X_2 = x_2 | X_1 = x_1\} = P\{X_2 = x_2\}$$

Ello equivale a que X_1 y X_2 cumplan la siguiente definición:

Dos variables aleatorias discretas X_1 y X_2 *, definidas en el mismo espacio de probabilidad, se denominan* **independientes** *si se verifica*

$$P\{X_1 = x_1, X_2 = x_2\} = P\{X_1 = x_1\} P\{X_2 = x_2\}$$

cualquiera que sean x_1 y x_2 *entre los posibles valores de las variables.*

La generalización del concepto de independencia al caso de un número arbitrario de variables aleatorias discretas es

Las variables aleatorias discretas X_1, X_2 ,..., X_r , *definidas en el mismo espacio de probabilidad, se denominan* independientes *si*

$$\mathrm{P}\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_r = x_r\} = \mathrm{P}\{X_1 = x_1\}\mathrm{P}\{X_2 = x_2\}\cdots\mathrm{P}\{X_r = x_r\}$$

cualquiera que sean x_1, x_2,..., x_r *dentro de los conjuntos de valores posibles de* X_1, X_2 ,..., X_r *, respectivamente.*

- *Ejemplo 8:*

La distribución conjunta de dos variables X_1 y X_2 definidas en el mismo espacio de probabilidades es

$X_1 \backslash X_2$	1	2
0	0.05	0.15
1	0.30	0
2	0.05	0.45

¿Son X_1 y X_2 independientes?

No perque

$$\mathrm{P}\left\{X_1 = 1, X_2 = 2\right\} = 0 \neq 0.30 \cdot 0.60 = \mathrm{P}\left\{X_1 = 1\right\} \cdot \mathrm{P}\left\{X_2 = 2\right\}$$