Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (2,5 puntos)
En el espacio $\mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,+\infty)$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a dos, se define

$$\langle P, G\rangle = \int_0^\infty P(t)G(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt\,.$$

a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,+\infty)$.

b) Determine una base ortonormal, respecto de este producto interno, de $\mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,+\infty)$.

Solución: Observemos en primer lugar que la integral $\int_0^\infty P(t)G(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt$ converge para cualquier par de polinomios $P, G \in \mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,+\infty)$. De hecho se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,dt &= \Big[\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty = 1\\
\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\,dt &= \Big[-t\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,dt = 1\\
\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt &= \Big[-t^2\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty + 2\int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\,dt = 2\\
\int_0^\infty t^3\mathrm{e}^{-t}\,dt &= \Big[-t^3\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty + 3\int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt = 3\cdot 2 = 3! = 6\\
\int_0^\infty t^4\mathrm{e}^{-t}\,dt &= \Big[-t^4\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^\infty + 4\int_0^\infty t^4\mathrm{e}^{-t}\,dt = 4! = 24
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\int_0^\infty P(t)G(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt <$ converge para cualquier par de polinomios $P, G \in \mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,+\infty)$.

a) $\langle P, P\rangle = \int_0^\infty P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt \geq 0$ pues $P^2(t) \geq 0$ y $\mathrm{e}^{-t} > 0$ para todo $t \in [0,+\infty)$.
Además si $\langle P, P\rangle = \int_0^\infty P^2(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt = 0$, teniendo en cuenta que el integrando es una función continua positiva, resulta que $P^2(t)\mathrm{e}^{-t} = 0$ para todo $t \in [0,+\infty)$. Por tanto, $P(t) = 0$ para todo $t \in [0,+\infty)$ y en consecuencia $P \equiv 0$.

Claramente $\langle P, G\rangle = \langle G, P\rangle$ pues $P(t)G(t)\mathrm{e}^{-t} = G(t)P(t)\mathrm{e}^{-t}$ para todo t.

Además para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $P, Q, G \in \mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,\infty)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha P + \beta Q, G\rangle &= \int_0^\infty \big(\alpha P(t) + \beta Q(t)\big)G(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt\\
&= \alpha\int_0^\infty P(t)G(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt + \beta\int_0^\infty Q(t)G(t)\mathrm{e}^{-t}\,dt\\
&= \alpha\langle P, G\rangle + \beta\langle Q, G\rangle
\end{aligned}$$

b) Ortonormalizamos, siguiendo el proceso de Gram-Schmidt, la base $\{x_1, x_2, x_3\}$ de F tal que $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = t$, $x_3(t) = t^2$ para todo $t \in [0,+\infty)$.
$e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ por tanto $e_1(t) = 1$. A su vez,

$$y_2(t) = x_2(t) - \langle x_2, e_1\rangle e_1(t) = t - \int_0^\infty t\mathrm{e}^{-t}\,dt = t - 1$$

Como $\langle y_2, y_2\rangle = \int_0^\infty (t-1)^2\mathrm{e}^{-t}\,dt = 2-2+1 = 1$ en consecuencia, se obtiene el vector unitario $e_2(t) = \dfrac{y_2(t)}{\|y_2\|} = t-1$.
Finalmente,

$$\begin{aligned}
y_3(t) &= x_3(t) - \langle x_3, e_1\rangle e_1(t) - \langle x_3, e_2\rangle e_2(t) = t^2 - \int_0^\infty t^2\mathrm{e}^{-t}\,dt - \Big(\int_0^\infty t^2(t-1)\mathrm{e}^{-t}\,dt\Big)(t-1)\\
&= t^2 - 2 - (6-2)(t-1) = t^2 - 2 - 4t + 4 = t^2 - 4t + 2
\end{aligned}$$

Como $\langle y_3, y_3\rangle = \int_0^\infty (t^2-4t+2)^2 \mathrm{e}^{-t}\,dt = \int_0^\infty (t^4-8t^3+20t^2-16t+4)\mathrm{e}^{-t}\,dt = 24-48+40-16+4 = 4$ en consecuencia, se obtiene el vector unitario $e_3(t) = \dfrac{y_3(t)}{\|y_3\|} = t^2/2-2t+1$
Por tanto, una base ortonormal de F es $\{e_1, e_2, e_3\}$ siendo $e_1(t)=1$, $e_2(t)=t-1$ y $e_3(t)=t^2/2-2t+1$ para todo $t\in[0,+\infty)$.

Pregunta 2 (2 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano y $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}\subset\mathcal{H}$ un sistema de n vectores unitarios tales que para todo $x\in\mathcal{H}$ se cumple el desarrollo $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k$.

a) Demuestre que $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ para todo $i, j\in\{1,2,\cdots,n\}$ tales que $i\neq j$.

b) Demuestre que $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es una una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Solución: a) Si para todo $x\in\mathcal{H}$ se cumple el desarrollo $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k$, en particular para cada $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ se tiene que

$$e_i=\sum_{k=1}^{n}\langle e_i, e_k\rangle\, e_k\,.$$

En consecuencia,

$$\langle e_i, e_i\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n}\langle e_i, e_k\rangle\, e_k, e_i\Big\rangle = \sum_{k=1}^{n}\langle e_i, e_k\rangle\langle e_k, e_i\rangle = \sum_{k=1}^{n}\big|\langle e_i, e_k\rangle\big|^2.$$

Simplificando se obtiene

$$0=\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\big|\langle e_i, e_k\rangle\big|^2.$$

En consecuencia $\langle e_i, e_k\rangle = 0$ si $k\neq i$.
b) Si para todo $x\in\mathcal{H}$ se cumple el desarrollo $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\langle x, e_k\rangle\, e_k$, también se deduce que el sistema de vectores unitarios $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es un sistema de generadores de $\mathcal{H}$ (por tanto, $\mathcal{H}$ es un espacio de dimensión finita) y por el apartado a) $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es un sistema ortonormal de $\mathcal{H}$. En consecuencia, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es un sistema ortonormal completo de $\mathcal{H}$, es decir, una base ortonormal de $\mathcal{H}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{H}$ y $\{f_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathcal{H}$ dos sistemas ortonormales. Sea $a=\{a_n\}_{n=1}^\infty\in\ell^\infty(\mathbb{N})$ fijo. Se define $T\colon\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ mediante:

$$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\langle x, e_n\rangle\, f_n\,,\quad \text{para todo } x\in\mathcal{H}\,.$$

a) Demuestre que la expresión de $T(x)$ es convergente en $\mathcal{H}$ y que T es un operador lineal acotado.

b) Calcule $\|T\|$ y T^*.

Solución: a) Sea $A=\sup\{|a_n|\colon n\in\mathbb{N}\}$. Veamos que $\big\{\sum_{n=1}^{N}a_n\langle x, e_n\rangle\, f_n\,, N\in\mathbb{N}\big\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$. En efecto, si $M>N$

$$\Big\|\sum_{n=N+1}^{M}a_n\langle x, e_n\rangle\, f_n\Big\|^2 = \sum_{n=N+1}^{M}|a_n|^2|\langle x, e_n\rangle|^2 \le A^2\sum_{n=N+1}^{M}|\langle x, e_n\rangle|^2$$

Aplicando la desigualdad de Bessel sabemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\langle x, e_n\rangle\Big|^2 \leq \|x\|^2\,,$$

por tanto la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\langle x, e_n\rangle\Big|^2$ es convergente y en consecuencia $\sum_{n=N+1}^{M}|\langle x, e_n\rangle|^2$ converge a cero si $N\to\infty$. Luego $\big\{\sum_{n=1}^{N} a_n\langle x, e_n\rangle\, f_n\,, N\in\mathbb{N}\big\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{H}$. En consecuencia, como $\mathcal{H}$ es un espacio completo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle x, e_n\rangle\, f_n$ es convergente en $\mathcal{H}$.
Además

$$\begin{aligned}\|T(x)\|^2 &= \Big\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle x, e_n\rangle\, f_n\Big\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2|\langle x, e_n\rangle|^2\\ &\leq A^2\sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, e_n\rangle|^2 \leq A^2\|x\|^2\end{aligned}$$

En consecuencia T es un operador acotado.

b) De la desigualdad anterior se deduce que $\|T\|\leq A$.
Si en la expresión de T sustituimos x por e_N se obtiene que $T(e_N)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle e_N, e_n\rangle\, f_n = a_N\langle e_N, e_N\rangle\, f_N$ y por tanto $\frac{\|T(e_N)\|}{\|e_N\|}=|a_N|$ para todo $N\in\mathbb{N}$. Así pues,

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|T(x)\|}{\|x\|}\geq\frac{\|T(e_N)\|}{\|e_N\|} = |a_N| \quad\text{para todo}\quad N\in\mathbb{N}\,,$$

y en consecuencia $\|T\|\geq\sup\{|a_n|\colon n\in\mathbb{N}\} = A$. Por tanto, $\|T\| = A$.

Calculemos T^*. Para cada $x, y\in\mathcal{H}$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle T(x), y\rangle &= \Big\langle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle x, e_n\rangle\, f_n\,, y\Big\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle x, e_n\rangle\,\langle f_n\,, y\rangle\\ &= \Big\langle x\,, \sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n\langle f_n\,, y\rangle} e_n\Big\rangle\end{aligned}$$

Por tanto el operador T^* viene definido por $T^*(y)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a_n}\,\langle y\,, f_n\rangle\, e_n$ para cada $y\in\mathcal{H}$.

Pregunta 4 (3 puntos)
Sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ una función 2π-periódica con derivada continua y tal que $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = 0$. Denotamos por $c_n(f)$ y $c_n(f')$ los coeficientes de Fourier de f y f' respectivamente.

a) Calcule los coeficientes de Fourier $c_0(f)$ y $c_0(f')$.

b) Justifique que $f(t)=\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{in}c_n(f')\mathrm{e}^{int}$ para todo $t\in\mathbb{R}$. (Notación: $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}\setminus\{0\}$)

c) Demuestre que $\big|f(t)\big|^2\leq\Big(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2}\Big)\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\big|c_n(f')\big|^2\Big)$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

d) Deduzca que $M\leq\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\,\|f'\|$ siendo $M=\max\{|f(t)|\colon t\in\mathbb{R}\}$.

   Nota: utilice que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{3}$.

Solución: a) Los coeficientes de Fourier pedidos son

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0$$

$$c_0(f') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \big(f(\pi) - f(-\pi) \big) = 0$$

donde la última igualdad se debe a que f es 2π-periódica.

b) El teorema 5.17 aplicado a la función f, que es 2π-periódica y con derivada continua, implica que $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$. Por tanto, la serie de Fourier de f es $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{in} c_n(f')\mathrm{e}^{int}$ en $L^2(-\pi,\pi)$. Además del apartado 3 del teorema 5.17 sabemos que la serie de Fourier de f converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a $f(t)$. Por tanto se tiene la convergencia puntual, es decir, $f(t) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{in} c_n(f')\mathrm{e}^{int}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

c) Para cada t fijo consideremos las sucesiones u y v de $\ell^2(\mathbb{Z}^*)$ definidas mediante $u_n = \frac{1}{in}$ y $v_n = \overline{c_n(f')\mathrm{e}^{int}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^*$. Como

$$\|u\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{|in|^2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \quad \text{y} \quad \|v\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} |\overline{c_n(f')\mathrm{e}^{int}}|^2 = (\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \big|c_n(f')\big|^2 ,$$

si aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\ell^2(\mathbb{Z}^*)$ a u y v se obtiene

$$\big|f(t)\big|^2 = \big|\langle u, v\rangle\big|^2 \le \|u\|^2 \, \|v\|^2 = \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \Big) \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \big|c_n(f')\big|^2 \Big) .$$

d) Del apartado anterior se deduce que para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\big|f(t)\big| \le \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{1}{n^2} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \big|c_n(f')\big|^2 \Big)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}} \frac{\|f'\|}{\sqrt{2\pi}} ,$$

donde hemos utilizado la identidad de Parseval para la función f'. Por tanto, también se cumple que si $M = \text{máx}\{|f(t)| \colon t \in \mathbb{R}\}$ entonces $M \le \sqrt{\frac{\pi}{6}}\, \|f'\|$.