RESUMEN

<u>Aleph ($\aleph_0, \aleph_1, \ldots$)</u>: Es el tamaño de los infinitos. Desde cero el más pequeño, va creciendo.

<u>Potencia</u>: Numerosidad del conjunto

<u>Tipos de infnitos</u>:

- Equinumerosos: Misma potencia (aplicación biyectiva) → Card(A)=Card(B)
- Más numerosos: Mayor potencia (Inyectiva) → Card(A)<Card(B)

<u>Hipotesis del continuo</u>: *un continuo C nunca incluirá un subconjunto D que sea a la vez menos numeroso que C y más numeroso que los enteros positivos.*

Card ($\mathbb{N}$) = Card ($\mathbb{Q}$) → Equipotentes, correspondencia biunívoca.

Card ($\mathbb{Q}$) < Card ($\mathbb{R}$) → <u>Cardinales transfinitos</u>: son las potencias de los conjuntos concebidas como lo común de todos los conjuntos cuando se consideran equivalentes por biyecciones. Aritmetica transfinita

Aritmetica transfinita: se puede hacer lo mismo ($+,\cdot$) con $\mathbb{N}$ que con los cardinales infinitos.

(*) No hay ningún infinito entre Card ($\mathbb{N}$) = Card ($\mathbb{Q}$) y Card ($\mathbb{R}$).

Cantor no pudo demostrar la hipótesis del continuo pero Göel y Cohen demostraron que es un enunciado indecible → Se debe aceptar como axioma adicional.

<u>Ordinales transfinitos</u>: Una extensión de la sucesión ordenada de los enteros que surgieron como índices que ordenan las sucesiones de conjuntos derivados. (Primer ordinal transfinito ω).

<u>Pluralidad</u>: es una magnitud discontinua (ejemplo, puntos de una recta). **<u>Conjunto</u>**: Cantidad de una magnitud (los elementos se pueden contar). Conjunto extensional (se numeran los elementos, ejemplo, 2, 4, 6) y conjunto intensional (se define el conjunto, “los primeros $\dot{3}$)

<u>Absolutamente infinita / INCOSISTENTE</u>: la pluralidad no se puede captar como una unidad (Paradoja de Russel) → Totalidad de ordinales y cardinales.

<u>Consistente (Cantor los llama conjunto)</u>: se puede captar como una cosa.

Orden simple → Nuestro orden lineal

Pluralidad simplemente ordenada = Bien ordenada → cada una de sus partes tiene un primer elemento → Secuencia.

Ω → Sistema de todos los ordinales.

<u>Teorema de buen orden</u>: Todo conjunto puede ser bien ordenado, relación de orden lineal en el que cualquier subconjunto tiene un primer elemento. Un conjunto X está bien ordenado por un orden estricto si todo subconjunto no vacío de X tiene un elemento mínimo bajo dicho orden

<u>Axioma de Selección</u>: para cada familia de conjuntos no vacíos, existe otro conjunto que contiene un elemento de cada uno de aquellos, es decir, dada una colección de «cajas» con objetos dentro de ellas, es posible elegir un objeto de cada caja. Es trivialmente cierto siempre que dicha familia sea finita, o cuando existe una regla bien determinada que permite «elegir» un único elemento de cada conjunto de ella. Sin embargo, el axioma es indispensable en el caso más general de una familia infinita arbitraria. Fue formulado en 1904 por Ernst Zermelo, para demostrar que todo conjunto puede ser bien ordenado.

(*) Uno se deduce del otro.

Controversia entre la matemática conjuntista y la matemática constructivista: Demostrar la existencia de un objeto sin construirlo es suficiente para los conjuntistas mientras que la corriente constructivista, por otro lado, no acepta la existencia de un objeto si no se determina la forma de dar con él. Este enfrentamiento marca gran parte de la discusión matemático-filosófica durante el siglo XX. (Zermelo vs. Poincaré)

El programa de Hilbert: El programa de Hilbert pretendía dar una solución a la crisis de los fundamentos de las matemáticas producida por las paradojas de los enfoques conjuntistas, mediante su axiomatización y su formalización simbólica. El objetivo era independizar las matemáticas del pensamiento humano, objetivándolas en un juego de signos que se operan mecánicamente, y que supuestamente estaría libre de paradojas y críticas por tratarse de un sistema finito de signos y operaciones.

Consistencia: la imposibilidad de deducir de un sistema proposiciones contradictorias.

Punto de vista finito: definición de un conjunto finito de símbolos y axiomas que sean el sistema formal con el cual se escribirán los enunciados matemáticos

Razonamiento sustantivo: El programa de Hilbert suponía dividir las matemáticas en dos niveles, la matemática formalizada y una metamatemática o teoría de la prueba, encargada de demostrar la consistencia de la primera. En los sistemas axiomáticos el pensamiento se elimina, sustituido por un tipo de inferencia formal, pero en la metamatemática permanece el razonamiento matemático intuitivo tradicional, que Hilbert llama razonamiento sustantivo, ya que tiene sustancia o contenido, semántico y cognitivo, por contraposición al razonamiento formal.

Gottlob Frege: Crea la escritura conceptual con el propósito de expresar en ella razonamientos matemáticos y utilizarla en la fundamentación estrictamente lógica de la matemática (en cierto modo, se anticipa al programa de Hilbert).

Dedekind: presentó su propia fundamentación de la aritmética donde precisó que «el concepto de número es enteramente independiente de las representaciones del espacio y del tiempo» y concluyó que «es un producto inmediato de las leyes del pensamiento». Pero en esos desarrollos no aparecía nada relacionado con la fundamentación de número de Frege.

Peano: publicó *Arithmetices principia, nova metodo exposita* donde se definen los cinco axiomas que llevan su nombre, con los cuales se construye hoy en día el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Frege: su planteamiento logra caracterizar el concepto de número de forma única pero la idea de unicidad es la que arruinó su teoría. Una construcción de la forma «el conjunto de todos los conjuntos que…» plantea la cuestión de si el conjunto está o no está contenido en sí mismo, lo que conduce a la paradoja de Russell, invalidando el planteamiento de Frege.

La paradoja de Cantor: “*El conjunto de todos los conjuntos tiene una cardinalidad menor que la de su conjunto potencia*”.

La paradoja de Burali-Forti: *“El conjunto de los ordinales está bien ordenado y por lo tanto tiene un ordinal, mayor que cualquier ordinal perteneciente a dicho conjunto, el cual, por ser un ordinal, pertenece sin embargo a ese conjunto*”.

Skolem: Presenta un enfoque finitista a la aritmética. Según él, algunas partes de la matemática se pueden fundamentar sin cuantificaciones sobre dominios infinitos para evitar las paradojas causadas por la inclusión del infinito en la lógica y la teoría de conjuntos. Para Skolem, una definición axiomática no permite formular un concepto absoluto de cardinalidad: a partir de una teoría axiomática de primer orden, se puede obtener modelos con cardinalidad distinta a la del original.

> Aseveración funcional: consiste en afirmar una proposición como válida en aso que sea indeterminado.
>
> Modo recursivo (la inducción sobre los naturales): apela a ello para demostrar los teoremas de la aritmética.

Ackermann (1925): Su tesis doctoral se basa en eliminar las paradojas mediante un sistema axiomático consistente capaz de deducir la matemática entera. Los axiomas que plantea se dividen en dos grupos: matemática finita (demuestra completamente su consistencia) y transfinitos. Su prueba de consistencia sirve para comprobar que no se ha realizado ningún fallo en el proceso.

Von Neumann (1927): Uno de sus escritos trata lo mismo, pero lo desarrolla de una forma más sencilla. Formula y clasifica los axiomas de los cuales se puede “deducir” toda la matemática clásica. No logra probar la consistencia del sistema, llega a lo mismo que Ackermann.

Herbrand (1931): Deslinda la teoría axiomática cuya consistencia la estableció von Neumann y esboza un método suyo, más sencillo, para llegar al mismo resultado.

> Según Herbrand, para el programa de Hilbert es primordial tener algoritmos mecánicos para determinar la pertenencia de un símbolo al sistema o la validez de una cadena de símbolos como una fórmula sintáctica para poder resolver cálculos lógicos. Estos métodos eran finitistias porque se llevaban a cabo en un número de pasos finito. Este tipo de problemas se denominan problema de decisión.

Post: en su tesis doctoral presenta y resuelve el problema de la decisión basándose en un subsistema del sistema deductivo planteado en *Principia*. Post trabaja con la lógica formal.

Gödel: en su tesis doctoral demuestra la completitud del cálculo predicativo de primer orden

Verdad lógica → validez sintáctica (deducibilidad)

Verdad simbólica → validez semántica (lo lógicamente verdadero)

En su teorema final, estableció que un conjunto infinito de fórmulas del sistema predicativo de primer orden es realizable (admite un modelo) si y solo si cada uno de los subconjuntos finitos es realizable. A pesar de que el teorema de completitud de Gödel sea un logro dentro del programa de Hilbert, la demostración no es constructiva, lo que no termina de encajar dentro de la teoría de la prueba. De todas formas, Gödel no se preocupó de este aspecto en ese momento.

Hilbert: equipara su teoría de la prueba a un proceso matemático que se formaliza mediante la axiomatización y la formalización.

> La teoría de la prueba: tiene como objetivo analizar las demostraciones utilizando métodos finitos que no usasen el principio del Tercero excluido en dominios finitos para que el programa de Hilbert propone probar la consistencia del sistema formal de la matemática clásica con medios finitos razonando sustantivamente sobre sus enunciados y derivaciones, considerados como combinaciones de signos sin sentido.

La distinción entre sintaxis y semántica comienza a formularse con Gödel. Lo que se investiga durante los años 1920 es la existencia de algoritmos que puedan decidir si un conjunto de fórmulas es o no suficiente.

Una teoría tiene más de un modelo (interpretación). Si el conjunto de teoremas (sintácticamente) demostrables en un sistema lógico incluye el conjunto de verdades (semánticas) de tal sistema, el sistema es completo.

Gödel: En 1929-30 demostró que el cálculo predicativo de primer orden (la lógica de predicados cuyas variables constantes se refieren a objetos o individuos) es completo

> El teorema de completitud: los axiomas y reglas de inferencia bastan para deducir todas las proposiciones verdaderas del sistema en que consiste dicho cálculo.
>
> A pesar de que el teorema de completitud de Gödel no encajaba con el enfoque finitista de la metamatemática de Hilbert, los teoremas de completitud cambiarán de enfoque.
>
> Los teoremas de Gödel suponen un duro golpe para los hilbertianos, que identifican matemática con formalismo.

Church: Su tesis se puede resumir en si toda función calculable es computable (evaluar en una cantidad finita de operaciones). Dicha tesis en el ámbito de las ciencias de la computación define el concepto de algoritmo, pero el enunciado de la tesis no está probado matemáticamente porque en cualquier momento puede aparecer una herramienta que no concuerda con dicha definición de algoritmo.

El problema de la detención: saber de antemano si un algoritmo parará o no, y en caso de hacerlo saber la cantidad de iteraciones que hará. Como no se puede predecir, se dice que el problema de la detención es insoluble.

El programa de Hilbert no era viable porque el enfoque finitista tomado como punto de partida era demasiado estricto para poder demostrar la consistencia matemática, y además, el problema de los teoremas de incompletitud no tenia solución.

Gentzen: Publica dos demostraciones de la consistencia aritmética formalizada que no contradicen los resultados de Gödel pero los hilbertianos no lo pueden aceptar por no ser un recurso que entra en el marco de la matemática finitista aunque la inducción transfinita sí es un recurso valido. Hilbert creía en que el formalismo finitista rescataría las ideas del infinito en su totalidad sin necesidad de argumentos tan delicados como los que recurrieron los cantorianos. Y, expresamente, para el programa de Hilbert, «la consistencia era imprescindible, pues solo sobre esa base se podía establecer la consistencia de la teoría de conjuntos formalizada, recuperando así todas las comodidades que ofrecía al matemático el paraíso de Cantor sin suscribir la metafísica cantoriana del infinito».

Tras la publicación de los teoremas de incompletud Hilbert y sus seguidores asumieron que su programa era inviable.

Al fin y al cabo, este anunciamiento se puede tomar como la aceptación de la derrota y de la adopción de la libertad matemática defendida por Cantor, por lo que, a partir de este punto, se hace clara la necesidad de superar los límites del formalismo para aceptar la teoría de conjuntos, es decir, instalarse en el Paraíso de Cantor.