Introducción a la Astronomía
Soluciones Prueba Personal. Curso 2018-19
1ª semana

Ejercicio 1. (3 puntos)

a) Halle la altura de una estrella de declinación $\delta = \phi$ en el momento de su paso por el primer vertical al Oeste, para un observador situado en un punto de latitud $\phi = \epsilon$.

b) Si la longitud eclíptica de la estrella es $\lambda = 90^{\circ}$ ¿Cuál es su ascensión recta?

c) ¿Cuál es la distancia cenital de esta estrella a su paso por el meridiano superior?

Solución

a) El primer vertical al Oeste tiene un azimut $A = 90^{\circ}$. Por la tercera fórmula de (1.12) del libro de texto tenemos

$$\operatorname{sen}\delta = -\operatorname{sen} z \cos A \cos\phi + \cos z \operatorname{sen}\phi$$

Como $A = 90^{\circ}$ la fórmula anterior queda $\operatorname{sen}\delta = \cos z \operatorname{sen}\phi$ y de aquí, $\cos z = 1$. Por tanto, $z = 0$ y $\boxed{h = 90^{\circ}.}$

b) La tercera fórmula de (1.13) nos dice que

$$\operatorname{sen}\delta = \cos\beta \operatorname{sen}\lambda \operatorname{sen}\epsilon + \operatorname{sen}\beta \cos\epsilon,$$

por lo que,

$$\operatorname{sen}\epsilon = \cos\beta \operatorname{sen}\epsilon + \operatorname{sen}\beta \cos\epsilon = \operatorname{sen}(\beta + \epsilon)$$

así que $\beta = 0^{\circ}$. Por la primera fórmula de (1.13) tenemos que $\cos\alpha = 0^{\circ}$, así que $\alpha = 0^{\circ}$ ó $\alpha = 270^{\circ}$. De la segunda fórmula de (1.13) tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\cos\beta \operatorname{sen}\lambda \cos\epsilon - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\epsilon}{\cos\delta} = \frac{\cos\epsilon}{\cos\epsilon} = 1$$

Por tanto, $\alpha = 90^{\circ}$, es decir, $\boxed{\alpha = 6^{\mathrm{h}}.}$

c) Por la tercera fórmula de (1.11):

$$\cos z = \cos\delta \cos H \cos\phi + \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\phi,$$

como $H = 0$ y $\delta = \phi$ se tiene que $\cos z = 1$ y por tanto $\boxed{z = 0^{\circ}}$. La estrella está en el cenit.

⋆⋆

Ejercicio 2. (3 puntos)

Un cometa periódico tiene una órbita con excentricidad $e = 0.432$. Sabemos que su velocidad cuando está a 3 UA del Sol es 1.777 veces su velocidad cuando está a 5 UA.

a) Calcule el periodo del cometa.

b) Calcule las velocidades radial y transversal, expresándolas en función de μ, cuando la anomalía verdadera es $f = 90^{\text{o}}$.

Solución

a) Necesitamos calcular el semieje de la órbita, a. La velocidad de un cuerpo en una órbita elíptica cuando está a una distancia r del Sol es

$$v_r = \sqrt{\mu}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}}$$

Por tanto,

$$v_3^2 = \mu\left(\frac{2a-3}{3a}\right), \qquad v_5^2 = \mu\left(\frac{2a-5}{5a}\right).$$

Como $v_3 = 1.777\ v_5$:

$$\left(\frac{2a-3}{3a}\right) = 1.777^2\left(\frac{2a-5}{5a}\right) \Leftrightarrow 10a - 15 = 1.777^2(6a-15),$$

y obtenemos

$$a = \frac{15 \cdot 1.777^2 - 15}{6 \cdot 1.777^2 - 10} = 3.618\,\text{UA}.$$

El periodo es

$$\boxed{P = \sqrt{a^3} = 6.882 \text{ años}}$$

b) Las velocidades radial y transversal de un cuerpo en una órbita elíptica alrededor del Sol a una distancia r son

$$\begin{aligned} v_{rad} &= \dot{r} = \frac{G}{p}e\,\text{sen}\,f = \frac{\sqrt{p\mu}}{p}e\,\text{sen}\,f = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}e\,\text{sen}\,f \\ v_{trans} &= r\dot{f} = \frac{G}{r} = \frac{\sqrt{p\mu}}{r} \end{aligned}$$

donde $p = a(1-e^2)$ es el *semilatus rectum*. Como $f = 90^{\text{o}}$, y para esta anomalía verdadera $r = p$, tenemos redondeando a tres decimales:

$$\boxed{v_{rad} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}e = 0.252\sqrt{\mu}}$$

$$\boxed{v_{trans} = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} = 0.583\sqrt{\mu}}$$

⋆⋆

Ejercicio 3. (2 puntos)

Halle el ángulo θ, de los puntos estacionarios de la órbita de Urano sabiendo que el semieje de la órbita de Urano es 19.191 UA. ¿Qué distancia hay en ese momento entre la Tierra y Urano? Se supone que las órbitas de la Tierra y Urano son circulares y coplanarias. **(2 puntos)**

Solución

Por la fórmula (3.8) del texto básico sabemos que para los puntos estacionarios

$$\cos\theta = \frac{a_U + \sqrt{a_U}}{\sqrt{a_U^3} + 1} = 0.2770831764,$$

y obtenemos

$$\boxed{\theta = 73.91^{\rm o} \text{ y } \theta = 286.09^{\rm o}.}$$

Por el teorema del lado opuesto a un ángulo agudo tenemos

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{a_T^2 + a_U^2 - 2a_U\cos\theta} \\ &= \sqrt{1^2 + 19.191^2 - 2\cdot 19.191\cdot 0.2770831764} \end{aligned}$$

y

$$\boxed{d = 18.94 \text{ UA.}}$$

⋆⋆

Ejercicio 4. (2 puntos)

a) Sea e la excentricidad de la elipse de aberración de una estrella de latitud eclíptica β. Calcule en función de e la excentricidad de la elipse de aberración de otra estrella de latitud $\beta/2$.

b) Sea una estrella de longitud eclíptica λ. ¿Cuál es la longitud eclíptica del Sol, $\odot$, en el momento en que las coordenadas cartesianas de la estrella en su elipse de paralaje anual son $x = 0$ e $y = -1$.

Solución

a) De la fórmula (5.9) que nos da la ecuación de la elipse de aberración

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2\,\mathrm{sen}^2\,\beta} = 1,$$

deducimos que la excentricidad de esa elipse satisface la igualdad $e = \cos\beta$. Por tanto, la excentricidad de la elipse de la segunda estrella será

$$e' = \cos(\beta/2) = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}},$$

es decir, $\boxed{e' = \sqrt{\dfrac{1+e}{2}}.}$

b) La ecuación de la elipse de paralaje es

$$\frac{(\Delta\lambda \cos\beta)^2}{\pi^2} + \frac{(\Delta\beta)^2}{\pi^2 \operatorname{sen}\beta^2} = 1.$$

Como $\Delta\lambda = \pi \sec\beta \operatorname{sen}(\odot - \lambda) = x = 0$, se obtiene $\operatorname{sen}(\odot - \lambda) = 0$. Por tanto, $\odot = \lambda$ ó $\odot = \lambda + 180^{\circ}$. Al ser nulo el primer sumando de la ecuación de la elipse tenemos que $(\Delta\beta)^2 = \pi^2 \operatorname{sen}\beta^2$, y como $\Delta\beta = -\pi \operatorname{sen}\beta \cos(\odot - \lambda)$, podríamos deducir que $\odot = \lambda$ ó $\odot = \lambda + 180^{\circ}$ dependiendo de que $\operatorname{sen}\beta$ sea positivo o negativo, que es lo mismo que decir que la latitud eclíptica sea positiva o negativa.

Sin embargo, obsérvese que realmente y no puede ser -1. De hecho, su valor absoluto no puede ser mayor que $\pi|\operatorname{sen}\beta|$ y la paralaje es muy pequeña, $\pi < 1''$. Algunos se han dado cuenta de esta circunstancia. He valorado el problema como correcto también cuando se ha dado la solución del parágrafo anterior.

⋆⋆