

# Exámenes de la asignatura *Teoría de juegos*

Juan Luis Castaño Fernández

28 de enero de 2020

## Índice

1	Enero de 2014	2
2	Febrero de 2014	5
3	Septiembre de 2014 – Convocatoria ordinaria	9
4	Septiembre de 2014 – Convocatoria de reserva	14
5	Enero de 2015	19
6	Febrero de 2015	23
7	Septiembre de 2015 – Convocatoria ordinaria	28
8	Septiembre de 2015 – Convocatoria de reserva	32
9	Enero de 2016	36
10	Febrero de 2016	41
11	Septiembre de 2016 – Convocatoria ordinaria	45
12	Septiembre de 2016 – Convocatoria de reserva	49
13	Enero de 2017	53
14	Febrero de 2017	57
15	Septiembre de 2017 – Convocatoria ordinaria	60
16	Septiembre de 2017 – Convocatoria de reserva	64
17	Enero de 2018	67
18	Febrero de 2018	71
19	Septiembre de 2018 – Convocatoria ordinaria	76
20	Enero de 2019	80
21	Febrero de 2019	86
22	Septiembre de 2019 – Convocatoria ordinaria	91
23	Septiembre de 2019 – Convocatoria de reserva	95
24	Referencias bibliográficas	100

## Examen 1. Enero de 2014

**Problema 1.1.** Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver el siguiente juego:

(I)  $J_2$  elige un número  $p \in \{3, 4\}$ .

(II)  $J_0$  elige un número  $q \in \{1, 2\}$  con  $P(1) = \frac{3}{4}$ ,  $P(2) = \frac{1}{4}$ .

(III)  $J_1$  elige un número  $r \in \{0, 1\}$ .

Si  $p + q + r$  es par  $J_2$  paga a  $J_1$  dos unidades, en los demás casos  $J_1$  paga a  $J_2$  una unidad.

La información de  $J_1$  en la etapa (III) es que sabe el valor de  $p + q$  pero no el de  $p, q$  por separado.

**Solución del problema 1.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 1.

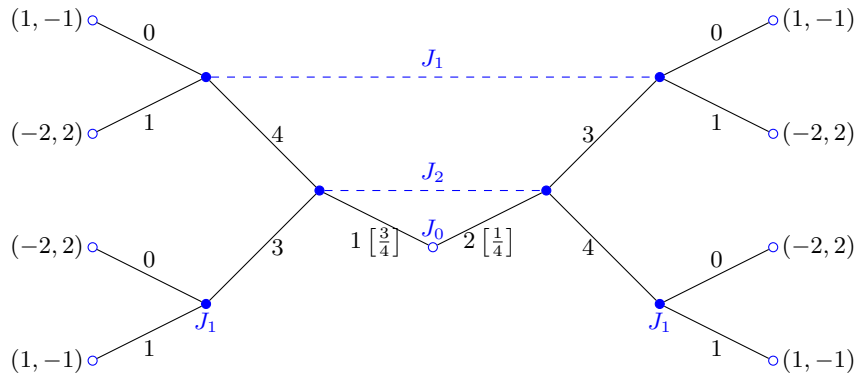


Figura 1: Forma extensiva del juego del problema 1.1.

Tras el movimiento del jugador  $J_0$ , que elige un número  $q \in \{1, 2\}$ , el jugador  $J_2$  elige un número  $p \in \{3, 4\}$  sin conocer el valor de  $q$ . Por último, tras el movimiento del jugador  $J_2$ , el jugador  $J_1$  se encontrará ante tres posibles situaciones según el valor de la suma  $p + q \in \{4, 5, 6\}$ . Una estrategia para  $J_1$  sería, por ejemplo, 001, que indica que si  $p + q = 4$  o  $p + q = 5$  entonces  $J_1$  elige el número  $r = 0$ , mientras que si  $p + q = 6$  entonces  $J_1$  elige el número  $r = 1$ . Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores  $J_2$  y  $J_1$  son

$$J_2 = \{3, 4\}, \quad J_1 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(3, 000) = \pi(3, 001) = \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{5}{4}; \quad \pi(3, 010) = \pi(3, 011) = \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot (-2) = -2;$$

$$\pi(3, 100) = \pi(3, 101) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1; \quad \pi(3, 110) = \pi(3, 111) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-2) = \frac{1}{4};$$

$$\pi(4, 000) = \pi(4, 100) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-2) = \frac{1}{4}; \quad \pi(4, 001) = \pi(4, 101) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1;$$

$$\pi(4, 010) = \pi(4, 110) = \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot (-2) = -2; \quad \pi(4, 111) = \pi(4, 111) = \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{5}{4}.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 1.

$M$		$J_1$							
		000	001	010	011	100	101	110	111
$J_2$	3	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-2	-2	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	4	$\frac{1}{4}$	1	-2	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	-2	$-\frac{5}{4}$

Cuadro 1: Forma normal del juego del problema 1.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  tiene puntos de silla, que son tanto el  $(3, 010)$  como el  $(4, 010)$ . En consecuencia el jugador  $J_2$  puede jugar cualquier estrategia (pura o mixta) y el jugador  $J_1$  debe elegir  $r = 0$  si la suma es  $p + q = 4$  o  $p + q = 6$  (si  $p + q$  es par), y debe elegir  $r = 1$  si la suma es  $p + q = 5$  (impar). El valor del juego es  $v(M) = -2$ .

**Problema 1.2.** Se considera una empresa monopolista (hasta ahora) y otra entrante potencial en su mercado. Se está discutiendo una ley de control de la contaminación y hay dos propuestas: la del Grupo Verde ( $GV$ ), que aumentaría 6 millones los costes fijos de cada empresa que está en el mercado, y la de la Oposición ( $O$ ), que aumentaría los costes de cada empresa que está en el mercado en 3 millones.

El monopolista tiene tal influencia política que una propuesta u otra solo se aprobarán si la apoya el monopolista, que debe decidir entre apoyar a  $GV$ , a  $O$ , o que no salga ley alguna. El entrante puede o no entrar en el mercado.

Se sabe que los beneficios de un monopolio son 12 millones y 0 para el entrante potencial si no entra, y 5 para cada empresa en un mercado duopolista.

Escribir la matriz del juego y encontrar los puntos de equilibrio.

**Solución del problema 1.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. Llamaremos jugador  $J_1$  a la empresa monopolista, y jugador  $J_2$  a la empresa entrante. El jugador  $J_1$  puede decidir apoyar al Grupo Verde ( $G$ ), apoyar a la Oposición ( $O$ ), o impedir que salga la ley ( $I$ ). A su vez, el jugador  $J_2$  puede entrar en el mercado ( $E$ ) o no hacerlo ( $N$ ). Así, las posibles estrategias para ambos jugadores son

$$J_1 = \{G, O, I\}, \quad J_2 = \{E, N\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 2.

$M$		$J_2$	
		$E$	$N$
$J_1$	$G$	$(-1, -1)$	$(6, 0)$
	$O$	$(2, 2)$	$(9, 0)$
	$I$	$(5, 5)$	$(12, 0)$

Cuadro 2: Forma normal del juego del problema 1.2.

Para hallar los puntos de equilibrio utilizaremos el método IDSDS<sup>1</sup>:

- La estrategia  $I$  para el jugador  $J_1$  domina estrictamente a las otras dos, por lo que  $J_1$  siempre jugará  $I$ , y el jugador  $J_2$  lo sabe. Se pueden eliminar, por tanto, las filas 1 ( $G$ ) y 2 ( $O$ ).
- En la fila restante

$M$		$J_2$	
		$E$	$N$
$J_1$	$I$	$(5, 5)$	$(12, 0)$

la estrategia  $E$  para el jugador  $J_2$  domina estrictamente a la estrategia  $N$ . Por tanto, se puede eliminar la columna 2 ( $N$ ).

En conclusión, el único punto de equilibrio es el par de estrategias  $(I, E)$ , para el cual los pagos son  $(5, 5)$ .

**Problema 1.3.** Cuatro jugadores eligen simultáneamente un número  $x \in \{1, 2\}$ . Si todos coinciden no hay pago y lo mismo si coinciden dos a dos. En el caso de que coincidan tres ganan 30 euros cada uno y el que eligió diferente paga los 90 euros.

<sup>1</sup>Iterated deletion of strictly dominated strategies (Bonanno, 2018: 35).

Hallar la función característica y decir si es o no un juego esencial.

**Solución del problema 1.3.** Estamos ante un juego tetrapersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles.

Estudiamos cada posibilidad por separado.

- Se forman las coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3, J_4\}$ . La forma normal del juego se recoge en el cuadro 3.

$M$		$\{J_2, J_3, J_4\}$							
		111	112	121	122	211	212	221	222
$\{J_1\}$	1	0	3	3	0	3	0	0	-9
	2	-9	0	0	3	0	3	3	0

Cuadro 3: Forma normal del juego del problema 1.3 para las coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3, J_4\}$ .

La matriz no tiene puntos de silla, pero la primera y la última columna dominan a todas las demás. Con esa información, una estrategia mixta para la coalición  $\{J_1\}$  ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -9(1-p) = -9p \implies p = \frac{1}{2};$$

$$\nu(\{1\}) = -9 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -9 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}.$$

Y como es un juego de suma cero,

$$\nu(\{2, 3, 4\}) = \frac{9}{2}.$$

- Se forman las coaliciones  $\{J_1, J_2\}$  y  $\{J_3, J_4\}$ . La forma normal del juego se recoge en el cuadro 4.

$M$		$\{J_3, J_4\}$			
		11	12	21	22
$\{J_1, J_2\}$	11	0	6	6	0
	12	-6	0	0	-6
	21	-6	0	0	-6
	22	0	6	6	0

Cuadro 4: Forma normal del juego del problema 1.3 para las coaliciones  $\{J_1, J_2\}$  y  $\{J_3, J_4\}$ .

La matriz tiene cuatro puntos de silla, que son los elementos  $m_{11}$ ,  $m_{14}$ ,  $m_{41}$  y  $m_{44}$ . En consecuencia,

$$\nu(\{1, 2\}) = m_{11} = m_{14} = m_{41} = m_{44} = 0.$$

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, tenemos suficiente información para dar la función característica.

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{4\}) = -\frac{9}{2};$$

$$\nu(\{1, 2\}) = \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{1, 4\}) = \nu(\{2, 3\}) = \nu(\{2, 4\}) = \nu(\{3, 4\}) = 0;$$

$$\nu(\{1, 2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 4\}) = \nu(\{1, 3, 4\}) = \nu(\{2, 3, 4\}) = \frac{9}{2}; \quad \nu(\{1, 2, 3, 4\}) = 0.$$

Como se puede ver, es un juego esencial, puesto que se verifica la definición 6.2 de Morris (1994: 154).

$$0 = \nu(\{1, 2, 3, 4\}) \neq \sum_{n=1}^4 \nu(\{n\}) = 4 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -18.$$

## Examen 2. Febrero de 2014

**Problema 2.1.** Se tienen dos cartas en una urna. Una está marcada con una  $H$  y la otra con una  $L$ . El jugador  $J_1$  elige una de las cartas al azar y sin que la vea el jugador  $J_2$ , hace una apuesta o pasa.

Si pasa, directamente le paga una cantidad  $a$  al jugador  $J_2$ . Si apuesta, entonces hay dos opciones:

- (a) Si  $J_2$  no ve su apuesta,  $J_2$  paga la cantidad  $a$  a  $J_1$ .
- (b) Si  $J_2$  ve la apuesta, entonces gana una cantidad  $b$  a  $J_1$  ( $b > a$ ), si este sacó la carta  $L$  mientras que le paga esa misma cantidad si sacó la carta  $H$ .

Hallar la forma extensiva y normal de este juego. Resolverlo.

**Solución del problema 2.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 2.

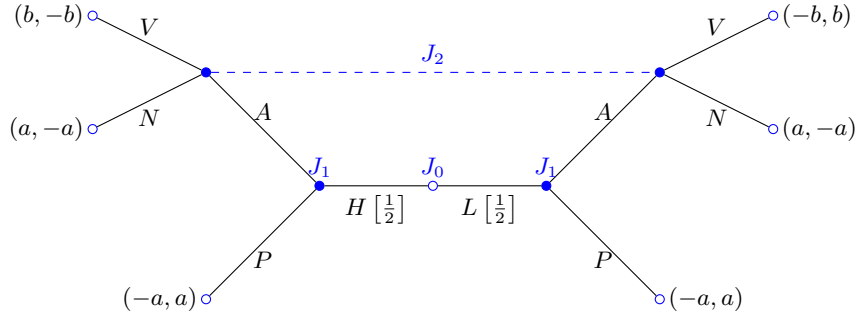


Figura 2: Forma extensiva del juego del problema 2.1.

Tras el movimiento del jugador  $J_0$  (la extracción de la carta), el jugador  $J_1$  se encontrará en dos posibles situaciones, que haya salido la carta  $H$  o que haya salido la carta  $L$ . Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es  $UD$  (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (carta  $H$ ) apostará (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 2), y si se encuentra en la segunda situación (carta  $L$ ) pasará (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador  $J_1$ , el jugador  $J_2$  también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información de la carta extraída), que el jugador  $J_1$  haya apostado o que haya pasado, en cuyo caso el juego ha terminado. Una estrategia para  $J_2$  sería, por ejemplo,  $D$  (*down*), que indica que si  $J_1$  apostó entonces  $J_2$  no ve la apuesta. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores  $J_1$  y  $J_2$  son

$$J_1 = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad J_2 = \{U, D\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(UU, U) &= \frac{1}{2} \cdot (-b) + \frac{1}{2} \cdot b = 0; & \pi(UU, D) &= \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a = a; \\ \pi(UD, U) &= \frac{1}{2} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot (-a) = \frac{b-a}{2}; & \pi(UD, D) &= \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot (-a) = 0; \\ \pi(DU, U) &= \frac{1}{2} \cdot (-a) + \frac{1}{2} \cdot (-b) = -\frac{b+a}{2}; & \pi(DU, D) &= \frac{1}{2} \cdot (-a) + \frac{1}{2} \cdot a = 0; \\ \pi(DD, U) &= \frac{1}{2} \cdot (-a) + \frac{1}{2} \cdot (-a) = -a; & \pi(DD, D) &= \frac{1}{2} \cdot (-a) + \frac{1}{2} \cdot (-a) = -a. \end{aligned}$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 5.

$M$		$J_2$	
		$U$	$D$
$J_1$	$UU$	0	$a$
	$UD$	$\frac{b-a}{2}$	0
	$DU$	$-\frac{b+a}{2}$	0
	$DD$	$-a$	$-a$

Cuadro 5: Forma normal del juego del problema 2.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 3 y a la fila 4. Eliminamos las filas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{b-a}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1-p)$  y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies \frac{b-a}{2}(1-p) = ap \implies (b-a)(1-p) = 2ap \implies (b+a)p = b-a \implies p = \frac{b-a}{b+a}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$  ha de ser de la forma  $\vec{q} = (q, 1-q)$  y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies a(1-q) = \frac{b-a}{2} \cdot q \implies 2a(1-q) = (b-a)q \implies (b+a)q = 2a \implies q = \frac{2a}{b+a}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\vec{p} = \left( \frac{b-a}{b+a}, \frac{2a}{b+a}, 0, 0 \right); \quad \vec{q} = \left( \frac{2a}{b+a}, \frac{b-a}{b+a} \right);$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(M) &= \frac{b-a}{2} \left( 1 - \frac{b-a}{b+a} \right) = a \cdot \frac{b-a}{b+a} = \frac{a(b-a)}{b+a} \\ v_2(M) &= a \left( 1 - \frac{2a}{b+a} \right) = \frac{b-a}{2} \cdot \frac{2a}{b+a} = \frac{a(b-a)}{b+a} \end{aligned} \right\} \implies v(M) = \frac{a(b-a)}{b+a}.$$

**Problema 2.2.** Dos empresas diferentes venden el mismo producto en un mismo mercado compuesto por dos segmentos  $A$  y  $B$ .

Cada una puede realizar una campaña publicitaria, enfocada al segmento  $A$  o al  $B$ . En el segmento  $A$  solo se enterará el 35 % de los clientes potenciales y en el  $B$  el 65 %.

Si ambas firmas se anuncian en el mismo segmento, cada una venderá al 40 % de los que se enteraron. Si lo hacen en segmentos diferentes, cada una venderá al 60 % de los que se enteraron.

Escribir la matriz del juego. ¿Existen puntos de equilibrio?

**Solución del problema 2.2.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  a cada una de las empresas. Ambos jugadores pueden invertir en el segmento  $A$  o  $B$ , por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$J_1 = J_2 = \{A, B\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 6 (donde los pagos indican los clientes del segmento a los que cada empresa consigue vender, en tanto por ciento).

$M$		$J_2$	
		$A$	$B$
$J_1$	$A$	(14, 14)	(21, 39)
	$B$	(39, 21)	(26, 26)

Cuadro 6: Forma normal del juego del problema 2.2.

Para hallar los puntos de equilibrio utilizaremos el método IDSDS:

- La estrategia  $B$  para el jugador  $J_1$  domina estrictamente a la estrategia  $A$ , por lo que  $J_1$  siempre jugará  $B$ , y el jugador  $J_2$  lo sabe. Se puede eliminar, por tanto, la fila 1 ( $A$ ).
- En la fila restante

$M$		$J_2$	
		$A$	$B$
$J_1$	$B$	(39, 21)	(26, 26)

la estrategia  $B$  para el jugador  $J_2$  domina estrictamente a la estrategia  $A$ . Por tanto, se puede eliminar la columna 1 ( $A$ ).

En conclusión, el único punto de equilibrio es el par de estrategias  $(B, B)$ , para el cual los pagos son  $(26, 26)$ . O sea, ambas empresas deben enfocar sus campañas publicitarias al segmento  $B$ , y de esa forma ambas conseguirán un 26 % de los clientes potenciales.

**Problema 2.3.** La función característica de un juego tripersonal general viene dada por:

$$\begin{aligned}\nu(\emptyset) &= 0, & \nu(\{1\}) &= 1, & \nu(\{2\}) &= 0, & \nu(\{3\}) &= 2, \\ \nu(\{1, 2\}) &= 3, & \nu(\{1, 3\}) &= 5, & \nu(\{2, 3\}) &= 4, & \nu(\{1, 2, 3\}) &= 6.\end{aligned}$$

Calcular el valor de Shapley.

**Solución del problema 2.3.** Estudiamos cada jugador por separado.

- Jugador  $J_1$ .

$$\begin{aligned}\delta(1, \{1\}) &= \nu(\{1\}) - \nu(\emptyset) = 1 - 0 = 1; \\ \delta(1, \{1, 2\}) &= \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{2\}) = 3 - 0 = 3; \\ \delta(1, \{1, 3\}) &= \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{3\}) = 5 - 2 = 3; \\ \delta(1, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{2, 3\}) = 6 - 4 = 2; \\ \phi_1 &= \sum_{S \ni 1} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(1, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 1 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 3 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 3 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 2 = 2.\end{aligned}$$

- Jugador  $J_2$ .

$$\begin{aligned}\delta(2, \{2\}) &= \nu(\{2\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(2, \{1, 2\}) &= \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{1\}) = 3 - 1 = 2; \\ \delta(2, \{2, 3\}) &= \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{3\}) = 4 - 2 = 2; \\ \delta(2, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 3\}) = 6 - 5 = 1; \\ \phi_2 &= \sum_{S \ni 2} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(2, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 2 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 2 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

- Jugador  $J_3$ .

$$\delta(3, \{3\}) = \nu(\{3\}) - \nu(\emptyset) = 2 - 0 = 2;$$

$$\delta(3, \{1, 3\}) = \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{1\}) = 5 - 1 = 4;$$

$$\delta(3, \{2, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{2\}) = 4 - 0 = 4;$$

$$\delta(3, \{1, 2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 2\}) = 6 - 3 = 3;$$

$$\phi_3 = \sum_{\mathcal{S} \ni 3} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)! (|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(3, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 2 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 4 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 4 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 3 = 3.$$

Por tanto, el vector de Shapley es  $\vec{\phi}(2, 1, 3)$ .



### Examen 3. Septiembre de 2014 – Convocatoria ordinaria

**Problema 3.1.** Se tiene una baraja con un número par de cartas, la mitad marcadas con la letra  $H$  y la otra mitad con la letra  $L$ .

Al comienzo del juego, dos jugadores  $P_1$  y  $P_2$  ponen cada uno un euro en un bote.

El jugador  $P_1$  saca una carta, la mira, pero no se la enseña a  $P_2$ .

$P_1$  puede apostar 2 euros o 4 euros. Si  $P_1$  apuesta 2 euros,  $P_2$  debe ver. Si  $P_1$  apuesta 4 euros,  $P_2$  puede pasar o puede ver.

Si  $P_2$  pasa,  $P_1$  gana. Si  $P_2$  ve, se enseña la carta. Si la carta es  $H$ , gana  $P_1$ ; si es  $L$ , gana  $P_2$ .

Cuando  $P_2$  ve debe igualar la apuesta de  $P_1$ .

El ganador en cada caso se lleva todo el bote.

Hallar la forma extensiva y normal de este juego. Resolverlo.

**Solución del problema 3.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 3.

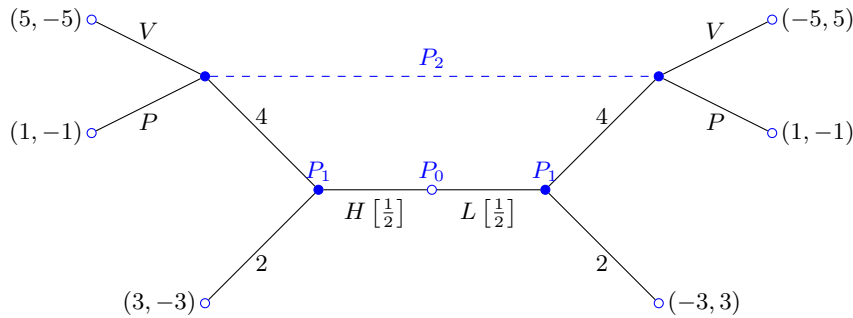


Figura 3: Forma extensiva del juego del problema 3.1.

Tras el movimiento del jugador  $P_0$  (la extracción de la carta), el jugador  $P_1$  se encontrará en dos posibles situaciones, que haya salido la carta  $H$  o que haya salido la carta  $L$ . Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es  $UD$  (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (carta  $H$ ) apostará 4€ (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 3), y si se encuentra en la segunda situación (carta  $L$ ) apostará 2€ (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador  $P_1$ , el jugador  $P_2$  también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información de la extracción de la cartas), que el jugador  $P_1$  haya apostado 4€ o que haya apostado 2€, en cuyo caso el juego ha terminado. Una estrategia para  $P_2$  sería, por ejemplo,  $D$  (*down*), que indica que si  $P_1$  apostó 4€ entonces  $P_2$  pasa. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores  $P_1$  y  $P_2$  son

$$P_1 = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad P_2 = \{U, D\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(UU, U) &= \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-5) = 0; & \pi(UU, D) &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1; \\ \pi(UD, U) &= \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 1; & \pi(UD, D) &= \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -1; \\ \pi(DU, U) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-5) = -1; & \pi(DU, D) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2; \\ \pi(DD, U) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 0; & \pi(DD, D) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 0. \end{aligned}$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 7.

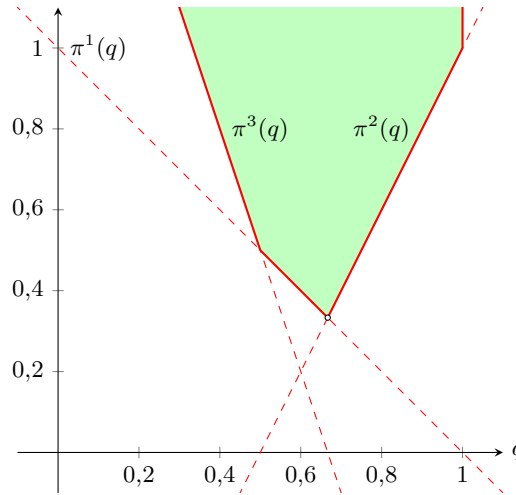
$M$		$P_2$	
		$U$	$D$
$P_1$	$UU$	0	1
	$UD$	1	-1
	$DU$	-1	2
	$DD$	0	0

Cuadro 7: Forma normal del juego del problema 3.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 4. Eliminamos la fila dominada, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Figura 4: Mínimo del máximo para el jugador  $P_2$ .

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna  $P_2$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1 - q)$ , con

$$\pi^1(q) = 1 - q; \quad \pi^2(q) = q - (1 - q) = 2q - 1; \quad \pi^3(q) = -q + 2(1 - q) = 2 - 3q.$$

Representamos en la figura 4 las funciones lineales  $\pi^j(q)$ , y comprobamos que el mínimo del máximo es el punto de intersección de  $\pi^1(q)$  y  $\pi^2(q)$ . Dicho punto es

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies 1 - q = 2q - 1 \implies 3q = 2 \implies q = \frac{2}{3}.$$

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila  $P_1$ , podemos eliminar la fila 3, puesto que esta no es activa cuando se alcanza el mínimo de los valores  $\pi^j(q)$ . En ese caso obtenemos una segunda matriz reducida

$$M^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma  $\vec{p} = (p, 1 - p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 1 - p = p - (1 - p) \implies 3p = 2 \implies p = \frac{2}{3}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right);$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(M) &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ v_2(M) &= 1 - \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v(M) = \frac{1}{3}.$$

**Problema 3.2.** Ejemplo 5.7 de Morris (1994: 144). Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (5, 1) & (7, 4) & (1, 10) \\ (1, 1) & (9, -2) & (5, 1) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 3.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Rightarrow 5p + (1 - p) = p + 5(1 - p) \Rightarrow 4p = 4(1 - p) \Rightarrow p = \frac{1}{2};$$

$$v_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3.$$

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{12}$  y  $m_{32}$ , y por tanto  $v_2 = m_{12} = m_{32} = 1$ .

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 5, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = (u - 3)(v - 1).$$

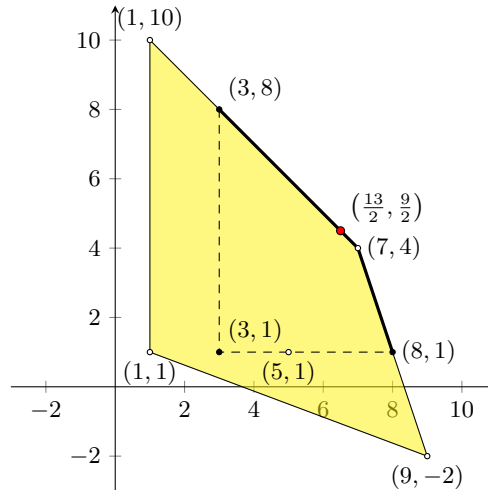


Figura 5: Región de pagos para el problema 3.2.

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto (3, 8) al punto (7, 4). La relación entre las variables es

$$v = -u + 11,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_1(u) = (u - 3)(-u + 11 - 1) = -u^2 + 13u - 30.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{13}{2}, \frac{9}{2})$ .

$$g'_1(u) = -2u + 13;$$

$$g'_1(u) = 0 \implies -2u + 13 = 0 \implies u = \frac{13}{2};$$

$$v = -\frac{13}{2} + 11 = \frac{9}{2}.$$

- Del punto (7, 4) al punto (8, 1). La relación entre las variables es

$$v = -3u + 25,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_2(u) = (u - 3)(-3u + 25 - 1) = -3u^2 + 33u - 72.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{11}{2}, \frac{17}{2})$ , que en este caso se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g'_2(u) = -6u + 33;$$

$$g'_2(u) = 0 \implies -6u + 33 = 0 \implies u = \frac{11}{2};$$

$$v = -3 \cdot \frac{11}{2} + 25 = \frac{17}{2}.$$

Dado que la función  $g_2$  decrece para valores de  $u$  mayores que 7, el par de arbitraje es el punto  $(\frac{13}{2}, \frac{9}{2})$ .

**Problema 3.3.** El juego tripersonal de parejas es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si  $P_2$  elige a  $P_3$ , y  $P_3$  elige a  $P_2$ , entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de  $\frac{1}{2}$ , mientras la persona que no entra en la pareja recibe  $-1$ .

Si no se forma pareja, por ejemplo, si  $P_1$  elige a  $P_2$ ,  $P_2$  elige a  $P_3$ , y  $P_3$  elige a  $P_1$ , entonces cada uno recibe un pago de cero.

Probar que es de suma nula y esencial.

**Solución del problema 3.3.** Estamos ante un juego tripersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles.

El único caso no trivial es cuando se forma una coalición de dos jugadores (y otra de uno). Consideramos, por ejemplo, las coaliciones  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ , para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 8.

$M$		$\{P_2, P_3\}$			
		11	12	31	32
$\{P_1\}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
	3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1

Cuadro 8: Forma normal del juego del problema 3.3 para las coaliciones  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ .

La matriz del juego tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{14}$  y  $m_{24}$ , por lo que una solución para este juego sería aquella en la que los jugadores  $P_2$  y  $P_3$  forman una pareja, independientemente de lo que haga el jugador  $P_1$ . El valor del juego es  $v(M) = -1$ .

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = -1; \quad \nu(\{1, 2\}) = \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) = 1; \quad \nu(\{1, 2, 3\}) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es esencial, puesto que se verifica

$$\nu(\{1, 2, 3\}) = 0 \neq -3 = \sum_{n=1}^3 \nu(\{n\}).$$

Además, también es de suma cero en su forma de función característica, puesto que

$$\nu(\emptyset) + \nu(\{1, 2, 3\}) = 0 + 0 = 0; \quad \nu(\{1\}) + \nu(\{2, 3\}) = -1 + 1 = 0;$$

$$\nu(\{2\}) + \nu(\{1, 3\}) = -1 + 1 = 0; \quad \nu(\{3\}) + \nu(\{1, 2\}) = -1 + 1 = 0.$$

Evidentemente, como el juego es de suma cero en su forma normal, ha de ser también de suma cero en su forma de función característica.

## Examen 4. Septiembre de 2014 – Convocatoria de reserva

**Problema 4.1.** El siguiente juego es jugado por dos jugadores,  $J_1$  y  $J_2$ . Cada jugador tira un dado, de forma que solo ve su resultado pero no puede ver el número que ha obtenido el otro jugador.

A continuación el jugador  $J_1$  apuesta 50 euros diciendo:

- (I) El total de la suma obtenida por los dos dados es menor que ocho.
- (II) El total obtenido es mayor que ocho.

Después el jugador  $J_2$  puede:

- (I) Aceptar la apuesta.
- (II) Rechazarla.

Si la apuesta es rechazada, el pago a cada uno es cero. En otro caso, ambos dados son mostrados.

Si el total es exactamente ocho, entonces ambos pagos son cero. En otro caso, uno de los jugadores gana los 50 euros del otro.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 4.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 6. Dado que el diagrama de árbol en su totalidad es muy complejo, se ha dibujado una rama genérica correspondiente al primer movimiento, el lanzamiento del dado del jugador  $J_1$ , del que se supone que se obtiene un resultado  $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$ . Esta rama coincide con el conjunto de información del jugador  $J_2$  que no conoce el valor  $i$ . Los pagos del jugador  $J_1$  son siempre de  $+50\text{€}$ ,  $0\text{€}$  o  $-50\text{€}$ , por lo que simplemente se indican por  $+$ ,  $0$  y  $-$  respectivamente. Dichos pagos se recogen en función del valor  $i$  obtenido en el lanzamiento del primer dado.

A la vista de la forma extensiva del juego se puede ver que los jugadores  $J_1$  y  $J_2$  tienen un total de  $2^6$  y  $2^{12}$  posibles estrategias, respectivamente. Por tanto, la forma normal del juego será una matriz  $M$  de  $2^6 \times 2^{12} = 2^{18} = 262\,144$  elementos. Evidentemente, dicha forma normal es demasiado grande, y en consecuencia no se recoge. Se ha calculado con ayuda de un computador, y se puede comprobar que tiene exactamente tres puntos de silla, que son

$$m_{1,3855} = m_{1,3983} = m_{1,3999} = -\frac{25}{6};$$

y que se corresponden, respectivamente, con las estrategias:

- $(mmmmM, RRRRAA AARRRR)$ . El primer jugador ha de apostar a que sale menos de 8 excepto cuando en el lanzamiento de su dado obtiene un 6, y el segundo jugador acepta la apuesta si es a menos de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado al menos un 5 o si es a más de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado como mucho un 2.
- $(mmmmM, RRRRAA AARRRR)$ . El primer jugador ha de apostar a que sale menos de 8 excepto cuando en el lanzamiento de su dado obtiene un 6, y el segundo jugador acepta la apuesta si es a menos de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado un 6 o si es a más de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado como mucho un 2.
- $(mmmmM, RRRRAA AARRRR)$ . El primer jugador ha de apostar a que sale menos de 8 excepto cuando en el lanzamiento de su dado obtiene un 6, y el segundo jugador acepta la apuesta si es a menos de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado un 6 o si es a más de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado un 1.

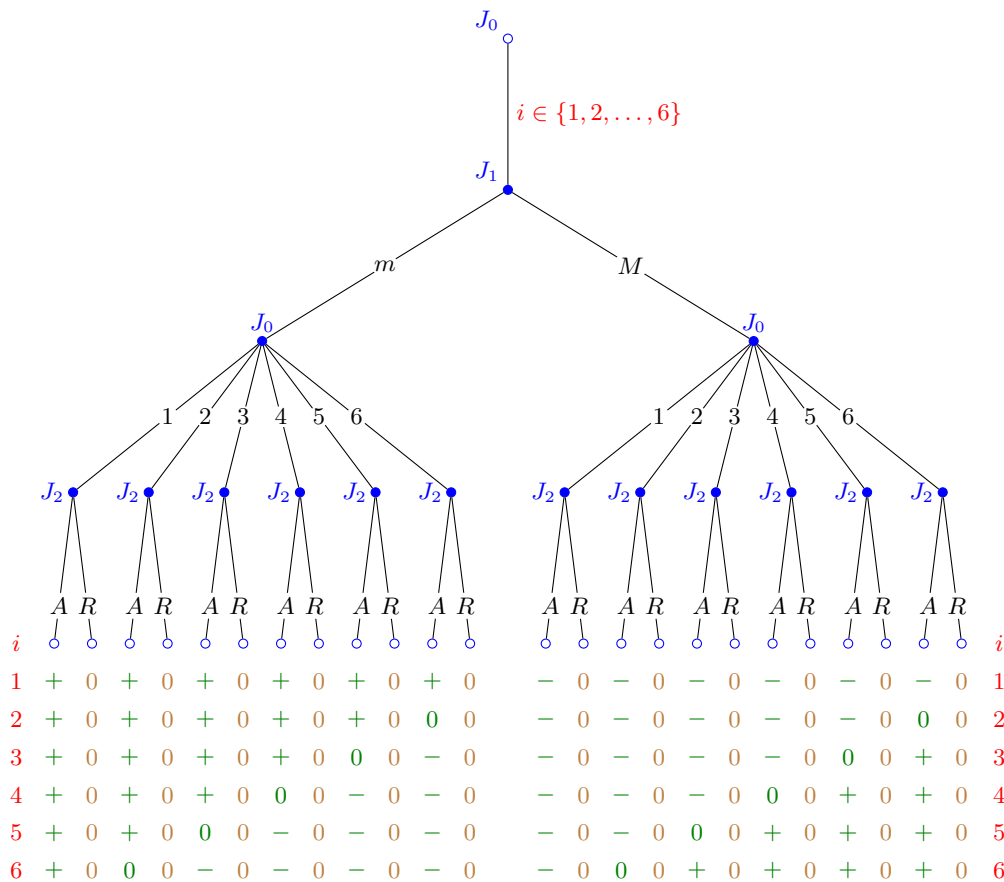


Figura 6: Forma extensiva del juego del problema 4.1.

Si bien sería difícil encontrar los puntos de silla sin la ayuda del computador, una vez encontrados sí es fácil comprobar que realmente se trata de puntos de silla, y calcular el pago o valor del juego. Consideramos, por ejemplo, el primer punto de silla dado, que se corresponde con el par de estrategias  $(mmmmmmM, RRRRAA AARRRR)$ . Como los movimientos aleatorios (los lanzamientos de ambos dados) son equiprobables, los datos del cuadro 9 nos permiten calcular el pago, que sería, tal y como ya se había anticipado,

$$v(M) = \frac{1}{36} \cdot (-150) = -\frac{25}{6}.$$

Si el jugador  $J_1$  modifica mínimamente su estrategia, suponiendo que el jugador  $J_2$  no lo haga, el pago esperado disminuye o permanece igual. Por ejemplo, en el cuadro 10 puede ver lo que ocurre si el primer jugador cambia su estrategia si el resultado del lanzamiento de su dado es un 2. Es fácil comprobar que ocurriría lo mismo (disminuye el pago esperado, aunque no necesariamente en la misma cantidad) si cambia otra cualquiera de sus estrategias individuales (qué hace si el resultado del lanzamiento de su dado es  $i$ ). Evidentemente si cambia más de una de dichas estrategias individuales el pago esperado disminuiría todavía más.

Análogamente, si el jugador  $J_2$  modifica mínimamente su estrategia, suponiendo que el jugador  $J_1$  no lo haga, el pago esperado aumenta o permanece igual. Por ejemplo, en el cuadro 11 puede ver lo que ocurre si el segundo jugador cambia su estrategia si el primer jugador apuesta a que sale menos de 8 y el resultado del lanzamiento del dado del segundo jugador es un 1, y en el cuadro 12 puede ver lo que ocurre si el segundo jugador cambia su estrategia si el primer jugador apuesta a que sale más de 8 y el resultado del lanzamiento del dado del segundo jugador es un 5. Se puede comprobar que ocurriría lo mismo (aumenta el pago esperado, aunque no necesariamente en la misma cantidad) si cambia otra cualquiera de sus estrategias individuales, o si cambia varias de ellas.

		$J_2$						
		1	2	3	4	5	6	
$J_1$	1m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(50)	A(50)	100
	2m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(50)	A(0)	50
	3m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(0)	A(-50)	-50
	4m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-100
	5m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-100
	6M	A(-50)	A(0)	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	-50
		-50	0	0	0	0	-100	-150

Cuadro 9: Pago esperado para el par de estrategias ( $mmmmmM, RRRRAA AARRRR$ ).

		$J_2$						
		1	2	3	4	5	6	
$J_1$	1m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(50)	A(50)	100
	2M	A(-50)	A(-50)	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	-100
	3m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(0)	A(-50)	-50
	4m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-100
	5m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-100
	6M	A(-50)	A(0)	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	-50
		-100	-50	0	0	-50	-100	-300

Cuadro 10: Pago esperado para el par de estrategias ( $mMmmmM, RRRRAA AARRRR$ ).

		$J_2$						
		1	2	3	4	5	6	
$J_1$	1m	A(50)	R(0)	R(0)	R(0)	A(50)	A(50)	150
	2m	A(50)	R(0)	R(0)	R(0)	A(50)	A(0)	100
	3m	A(50)	R(0)	R(0)	R(0)	A(0)	A(-50)	0
	4m	A(50)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-50
	5m	A(50)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-50
	6M	A(-50)	A(0)	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	-50
		200	0	0	0	0	-100	100

Cuadro 11: Pago esperado para el par de estrategias ( $mmmmmM, ARRRRAA AARRRR$ ).

		$J_2$						
		1	2	3	4	5	6	
$J_1$	1m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(50)	A(50)	100
	2m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(50)	A(0)	50
	3m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(0)	A(-50)	-50
	4m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-100
	5m	R(0)	R(0)	R(0)	R(0)	A(-50)	A(-50)	-100
	6M	A(-50)	A(0)	R(0)	R(0)	A(50)	R(0)	0
		-50	0	0	0	50	-100	-100

Cuadro 12: Pago esperado para el par de estrategias ( $mmmmmM, ARRRRAA AARRAR$ ).

**Problema 4.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-1, 1) & (0, 0) \\ (1, -1) & (0, 1) \\ (-1, -1) & (1, 1) \end{pmatrix}.$$



**Solución del problema 4.2.** Estamos ante un juego biperpersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda fila, que está dominada la primera. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies p - (1 - p) = 1 - p \implies p = 2(1 - p) \implies 3p = 2 \implies p = \frac{2}{3};$$

$$v_1 = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la tercera columna, que está dominada la segunda. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies p - (1 - p) = 1 - p \implies p = 2(1 - p) \implies 3p = 2 \implies p = \frac{2}{3};$$

$$v_2 = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, pero como se aprecia en la figura 7 el único punto de la región de pagos que es óptimo Pareto es el punto  $(1, 1)$ , por lo que dicho punto ha de ser el par de arbitraje.

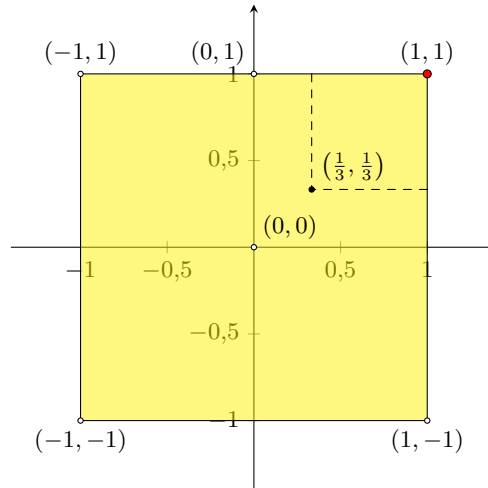


Figura 7: Región de pagos para el problema 4.2.

Alternativamente, y dado que la región de pagos es simétrica y que el punto de *statu quo*  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$  verifica  $u_0 = v_0 = \frac{1}{3}$ , el axioma 6 de Nash (Morris, 1994: 135) también nos permite asegurar que el par de arbitraje es el punto  $(1, 1)$ .

**Problema 4.3.** El juego tripersonal de parejas es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si  $P_1$  elige a  $P_2$ , y  $P_2$  elige a  $P_1$ , entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de  $\frac{1}{2}$ , mientras la persona que no entra en la pareja recibe  $-2$ .

Si no se forma pareja, por ejemplo, si  $P_1$  elige a  $P_2$ ,  $P_2$  elige a  $P_3$ , y  $P_3$  elige a  $P_1$ , entonces cada uno recibe un pago de cero.

Probar que es de suma no nula en su forma normal, pero es de suma cero en su forma de función característica.

**Solución del problema 4.3.** Estamos ante un juego tripersonal simétrico. Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles. Estudiamos por separado las distintas coaliciones que se pueden formar.

- Si se forma la gran coalición  $\{P_1, P_2, P_3\}$ , la estrategia óptima es evitar que se forme pareja con lo que en ese caso el pago es  $v_{123} = 0$ . En otro caso, si se forma una pareja, el pago sería

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1.$$

- Consideramos, por ejemplo, las coaliciones de uno y dos jugadores  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ , para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 13.

$M$		$\{P_2, P_3\}$			
		11	12	31	32
$\{P_1\}$	2	$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(0, 0)$	$(-2, 1)$
	3	$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	$(-2, 1)$

Cuadro 13: Forma normal del juego del problema 4.3 para las coaliciones  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{P_1\}$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M_1$  tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{14}$  y  $m_{24}$ , por lo que  $v_1 = m_{14} = m_{24} = -2$ .

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{P_2, P_3\}$  es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M_{23}$  tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{41}$  y  $m_{42}$ , por lo que  $v_{23} = m_{41} = m_{42} = 1$ .

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = -2; \quad \nu(\{1, 2\}) = \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) = 1; \quad \nu(\{1, 2, 3\}) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es esencial, puesto que se verifica

$$\nu(\{1, 2, 3\}) = 0 \neq -6 = \sum_{n=1}^3 \nu(\{n\}).$$

Sin embargo, el juego no es de suma cero (ni siquiera de suma constante) en su forma de función característica, puesto que

$$\nu(\{1\}) + \nu(\{2, 3\}) = -2 + 1 = -1 \neq 0 = \nu(\{1, 2, 3\}).$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 14.

		$M$		$J_2$	
				$A$	$P$
$J_1$	$A$			0	$a$
	$P$			$-a$	0

Cuadro 14: Forma normal del juego del problema 5.1.

Resolución:

- El elemento  $m_{11} = 0$  es un punto de silla, por lo que la solución es inmediata. Ambos jugadores deben apostar siempre, y en ese caso  $v(M) = m_{11} = 0$ .

**Problema 5.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-\frac{1}{2}, 0) & (-\frac{1}{2}, -4) \\ (1, 2) & (-2, 4) \\ (4, -4) & (-\frac{1}{2}, 0) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 5.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{12}$  y  $m_{32}$ , por lo que  $v_1 = m_{12} = m_{32} = -\frac{1}{2}$ .

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -4(1-p) = -4p \implies p = 1-p \implies p = \frac{1}{2};$$

$$v_2 = -4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -4 \cdot \frac{1}{2} = -2.$$

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 9, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(v + 2).$$

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto  $(-\frac{1}{2}, 3)$  al punto  $(1, 2)$ . La relación entre las variables es

$$v = -\frac{2}{3}u + \frac{8}{3},$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_1(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{2}{3}u + \frac{8}{3} + 2\right) = -\frac{2}{3}u^2 + \frac{13}{3}u + \frac{7}{3}.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{13}{4}, \frac{1}{2})$ , que se encuentra fuera del conjunto de negociación.

$$\begin{aligned} g'_1(u) &= -\frac{4}{3}u + \frac{13}{3}; \\ g'_1(u) = 0 &\implies -\frac{4}{3}u + \frac{13}{3} = 0 \implies u = \frac{13}{4}; \\ v &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{4} + \frac{8}{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

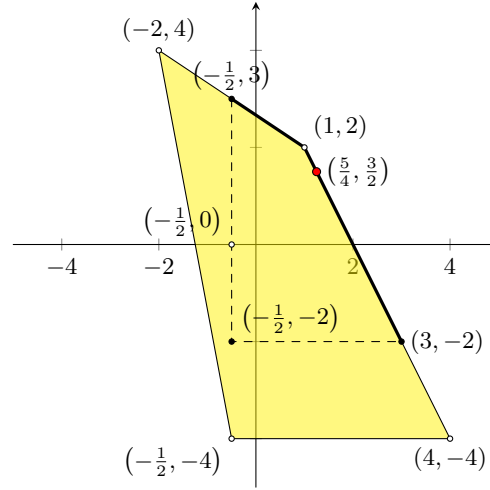


Figura 9: Región de pagos para el problema 5.2.

- Del punto  $(1, 2)$  al punto  $(3, -2)$ . La relación entre las variables es

$$v = -2u + 4,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_2(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(-2u + 4 + 2) = -2u^2 + 5u + 3.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ .

$$\begin{aligned} g'_2(u) &= -4u + 5; \\ g'_2(u) = 0 &\implies -4u + 5 = 0 \implies u = \frac{5}{4}; \\ v &= -2 \cdot \frac{5}{4} + 4 = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Dado que la función  $g_1$  crece para valores de  $u$  menores 1, el par de arbitraje es el punto  $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ .

**Problema 5.3.** Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 350 000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 700 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 775 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* de este juego.

**Solución del problema 5.3.** Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca  $P$ , la empresa que propone la utilización de la finca como polígono industrial  $I$ , y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca  $V$ . La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{P\}) = 350; \quad \nu(\{I\}) = \nu(\{V\}) = 0;$$

$$\nu(\{P, I\}) = 700; \quad \nu(\{P, V\}) = 775; \quad \nu(\{I, V\}) = 0; \quad \nu(\{P, I, V\}) = 775.$$

Sea  $\vec{x}(x_P, x_I, x_V)$  una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994: 160), se han de verificar

$$x_P + x_I + x_V = \nu(\{P, I, V\}) = 775; \quad (1)$$

$$x_P \geq \nu(\{P\}) = 350; \quad (2)$$

$$x_I \geq \nu(\{I\}) = 0; \quad (3)$$

$$x_V \geq \nu(\{V\}) = 0; \quad (4)$$

$$x_P + x_I \geq \nu(\{P, I\}) = 700; \quad (5)$$

$$x_P + x_V \geq \nu(\{P, V\}) = 775; \quad (6)$$

$$x_I + x_V \geq \nu(\{I, V\}) = 0. \quad (7)$$

De la igualdad (1) y las desigualdades (3) y (6) se deduce

$$x_I = 0, \quad x_P + x_V = 775.$$

Imponiendo además la desigualdad (5),

$$x_P \geq 700.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas las condiciones anteriores, y que se representa en la figura 10.

$$\{(x_P, 0, 775 - x_P) : 700 \leq x_P \leq 775\}.$$

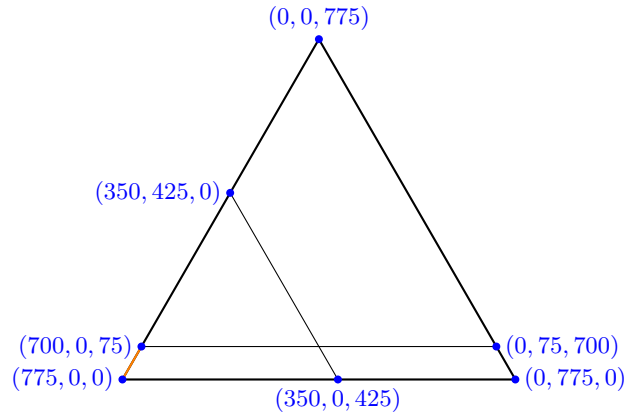


Figura 10: Obtención gráfica del *core* para el juego del problema problema 5.3.

## Examen 6. Febrero de 2015

**Problema 6.1.** Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver el siguiente juego:

El jugador  $J_1$ , elige un valor  $x \in \{1, 2\}$ . A continuación, con probabilidad  $\frac{3}{4}$  le comunica a  $J_2$  su elección y, con probabilidad  $\frac{1}{4}$  le comunica lo contrario de lo que eligió.

Por otra parte,  $J_2$ , que no sabe si la información que  $J_1$  le ha dado es verdadera o falsa, elige otro valor  $y \in \{1, 2\}$ .

Si  $x = y$  entonces  $J_1$  recibe una unidad monetaria de  $J_2$ . En caso contrario,  $J_2$  recibe una unidad monetaria de  $J_1$ .

**Solución del problema 6.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 11.

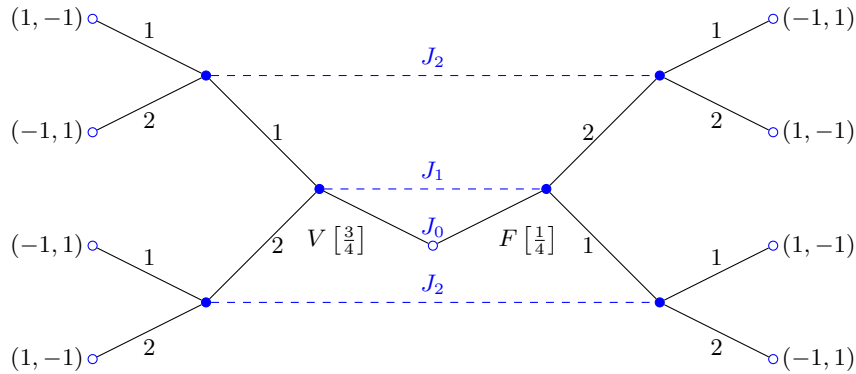


Figura 11: Forma extensiva del juego del problema 6.1.

El jugador  $J_0$  decide si va a comunicar al jugador  $J_2$  la información *verdadera* sobre el movimiento del jugador  $J_1$  (con probabilidad  $\frac{3}{4}$ ) o si va a comunicar una información *falsa*, (con probabilidad  $\frac{1}{4}$ ). A continuación, el jugador  $J_1$  elige un número de  $\{1, 2\}$ . Por último, el jugador  $J_2$ , en función de la información que le comunica  $J_0$ , elige a su vez un número de  $\{1, 2\}$ . Así, el conjunto de estrategias para el jugador  $J_1$  es  $J_1 = \{1, 2\}$ , en función del número que elige; y el conjunto de estrategias para el jugador  $J_2$  es  $J_2 = \{11, 12, 21, 22\}$ , donde  $ij$  indica que si  $J_0$  le comunica a  $J_2$  que el jugador  $J_1$  eligió el número 1 (lo cual no tiene por qué ser verdadero) entonces  $J_2$  elige el número  $i \in \{1, 2\}$  y si  $J_0$  le comunica que la elección de  $J_1$  es 2 entonces elige  $j \in \{1, 2\}$ . En función de dichas estrategias calculamos los pagos esperados.

$$\pi(1, 11) = 1; \quad \pi(1, 12) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{2}; \quad \pi(1, 21) = \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}; \quad \pi(1, 22) = -1;$$

$$\pi(2, 11) = -1; \quad \pi(2, 12) = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2}; \quad \pi(2, 21) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}; \quad \pi(2, 22) = 1.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 15.

$M$		$J_2$			
		11	12	21	22
$J_1$	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
	2	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

Cuadro 15: Forma normal del juego del problema 6.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.

- La columna 3 domina a la columna 2. Eliminamos la columna dominada, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1 - p)$ , con

$$\pi_1(p) = p - (1 - p) = 2p - 1; \quad \pi_2(p) = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}(1 - p) = -\frac{1}{2}; \quad \pi_3(p) = -p + (1 - p) = 1 - 2p.$$

Representamos en la figura 12 las funciones lineales  $\pi_j(p)$ , y comprobamos que son máximos del mínimo los puntos de intersección de  $\pi_1(p)$  y  $\pi_2(p)$ , y de  $\pi_2(p)$  y  $\pi_3(p)$ , así como cualquiera de los puntos intermedios. Dichos puntos de intersección son,

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 2p - 1 = -\frac{1}{2} \implies p = \frac{1}{4};$$

$$\pi_2(p) = \pi_3(p) \implies -\frac{1}{2} = -2p + 1 \implies p = \frac{3}{4}.$$

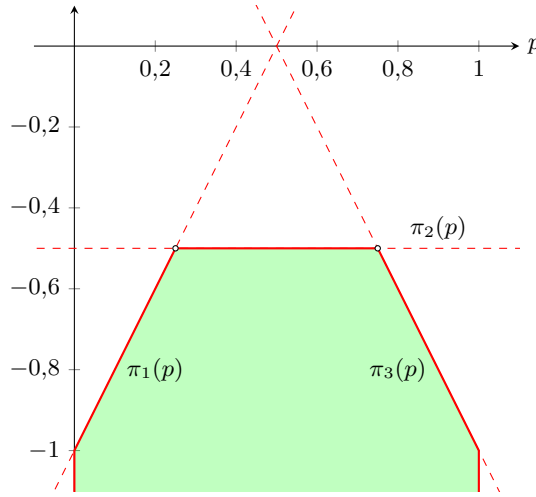


Figura 12: Máximo del mínimo para el jugador  $J_1$ .

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$ , según la estrategia elegida por el jugador  $J_1$  al menos una de las filas 1 o 3 no es activa, y se puede eliminar. En ambos casos obtenemos una solución equivalente. Si eliminamos la fila 1 la nueva matriz reducida es

$$M^{**} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

y para esta matriz una estrategia mixta será de la forma  $\vec{q} = (q, 1 - q)$ , y ha de satisfacer

$$\pi^2(q) = \pi^3(q) \implies -\frac{1}{2}q - (1 - q) = -\frac{1}{2}q + (1 - q) \implies q = 1.$$

Y si eliminamos la fila 3 la matriz reducida es

$$M^{***} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y para esta matriz una estrategia mixta será de la forma  $\vec{q} = (q, 1 - q)$ , y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies q - \frac{1}{2}(1 - q) = -q - \frac{1}{2}(1 - q) \implies q = 0.$$



- Trasladando los resultados obtenidos a la matriz  $M$  (en cualquiera de los dos casos obtenidos en el apartado anterior la estrategia mixta obtenida trasladada a la matriz  $M$  deja el mismo resultado), la solución hallada es

$$\vec{p} = (p, 1-p), \quad \frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}; \quad \vec{q} = (0, 0, 1, 0);$$

$$\left. \begin{array}{l} v_1(M) = -\frac{1}{2} \\ v_2(M) = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \implies v(M) = -\frac{1}{2}.$$

**Problema 6.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (5, 2) & (8, 6) & (2, 9) \\ (2, 2) & (10, -1) & (5, 2) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 6.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 5p + 2(1-p) = 2p + 5(1-p) \implies 3p = 3(1-p) \implies p = \frac{1}{2};$$

$$v_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{12}$  y  $m_{32}$ , y por tanto  $v_2 = m_{12} = m_{32} = 2$ .

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 13, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = \left(u - \frac{7}{2}\right)(v - 2).$$

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto  $\left(\frac{7}{2}, \frac{33}{4}\right)$  al punto  $(8, 6)$ . La relación entre las variables es

$$v = -\frac{1}{2}u + 10,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_1(u) = \left(u - \frac{7}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}u + 10 - 2\right) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{39}{4}u - 28.$$

Y su máximo es el punto  $\left(\frac{39}{4}, \frac{41}{8}\right)$ , que en este caso se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g'_1(u) = -u + \frac{39}{4};$$

$$g'_1(u) = 0 \implies -u + \frac{39}{4} = 0 \implies u = \frac{39}{4};$$

$$v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{39}{4} + 10 = \frac{41}{8}.$$

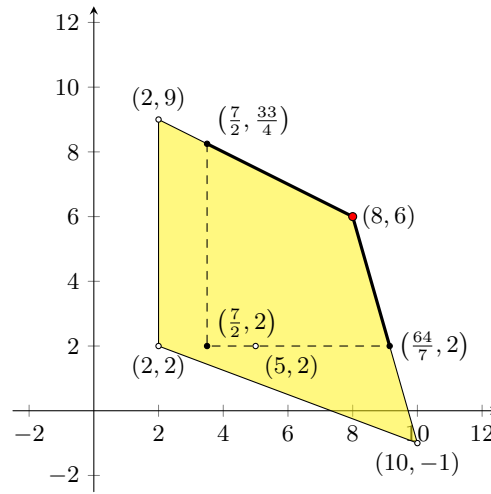


Figura 13: Región de pagos para el problema 6.2.

- Del punto  $(8, 6)$  al punto  $(\frac{64}{7}, 2)$ . La relación entre las variables es

$$v = -\frac{7}{2}u + 34,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_2(u) = \left(u - \frac{7}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}u + 34 - 2\right) = -\frac{7}{2}u^2 + \frac{177}{4}u - 112.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{177}{28}, \frac{95}{8})$ , que también se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g'_2(u) = -7u + \frac{177}{4};$$

$$g'_2(u) = 0 \implies -7u + \frac{177}{4} = 0 \implies u = \frac{177}{28};$$

$$v = -\frac{7}{2} \cdot \frac{177}{28} + 34 = \frac{95}{8}.$$

Dado que la función  $g_1$  crece para valores de  $u$  menores que 8, y que la función  $g_2$  decrece para valores de  $u$  mayores que 8, el par de arbitraje es el punto  $(8, 6)$ .

**Problema 6.3.** En un departamento universitario hay tres investigadores consolidados que trabajan en la misma línea de investigación. Se disponen a presentar solicitudes para optar a financiación de proyectos de investigación.

Si el doctor  $P_1$  presenta de manera individual la solicitud, lo previsible es que le concedan 30 000 euros, el doctor  $P_2$  no conseguirá nada si va solo, mientras que la doctora  $P_3$  conseguiría individualmente 50 000 euros. Si los doctores  $P_1$  y  $P_2$  presentan un proyecto conjunto obtendrán una financiación de 50 000 euros,  $P_1$  y  $P_3$  obtendrían 80 000 euros, y  $P_2$  y  $P_3$  obtendrían también 80 000 euros. Si los tres investigadores solicitan el proyecto de manera conjunta, previsiblemente obtendrían 100 000 euros. Cada investigador solo puede figurar en una solicitud.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el valor de Shapley para este juego.

**Solución del problema 6.3.** Estamos ante un juego tripersonal, en el que los jugadores son los investigadores  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ . La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{1\}) = 30; \quad \nu(\{2\}) = 0; \quad \nu(\{3\}) = 50;$$

$$\nu(\{1, 2\}) = 50; \quad \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) = 80; \quad \nu(\{1, 2, 3\}) = 110.$$

Obsérvese que en el caso de la gran coalición, aunque estén dispuestos a compartir las cantidades concedidas, no es interesante que presenten el proyecto de forma conjunta. Si lo hacen así obtendrían 100 000 €, mientras que si  $P_1$  presenta su proyecto en solitario y  $P_2$  y  $P_3$  lo hacen conjuntamente recibirían un total de 30 000 € + 80 000 € = 110 000 €.

Para calcular el valor de Shapley, estudiamos cada jugador por separado.

■ Jugador  $P_1$ .

$$\delta(1, \{1\}) = \nu(\{1\}) - \nu(\emptyset) = 30 - 0 = 30;$$

$$\delta(1, \{1, 2\}) = \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{2\}) = 50 - 0 = 50;$$

$$\delta(1, \{1, 3\}) = \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{3\}) = 80 - 50 = 30;$$

$$\delta(1, \{1, 2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{2, 3\}) = 110 - 80 = 30;$$

$$\phi_1 = \sum_{S \ni 1} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(1, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 30 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 50 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 30 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 30 = \frac{100}{3}.$$

■ Jugador  $P_2$ .

$$\delta(2, \{2\}) = \nu(\{2\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(2, \{1, 2\}) = \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{1\}) = 50 - 30 = 20;$$

$$\delta(2, \{2, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{3\}) = 80 - 50 = 30;$$

$$\delta(2, \{1, 2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 3\}) = 110 - 80 = 30;$$

$$\phi_2 = \sum_{S \ni 2} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(2, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 20 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 30 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 30 = \frac{55}{3}.$$

■ Jugador  $P_3$ .

$$\delta(3, \{3\}) = \nu(\{3\}) - \nu(\emptyset) = 50 - 0 = 50;$$

$$\delta(3, \{1, 3\}) = \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{1\}) = 80 - 30 = 50;$$

$$\delta(3, \{2, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{2\}) = 80 - 0 = 80;$$

$$\delta(3, \{1, 2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 2\}) = 110 - 50 = 60;$$

$$\phi_3 = \sum_{S \ni 3} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(3, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 50 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 50 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 80 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 60 = \frac{175}{3}.$$

Por tanto, el vector de Shapley es  $\vec{\phi} \left( \frac{100}{3}, \frac{55}{3}, \frac{175}{3} \right)$ .

## Examen 7. Septiembre de 2015 – Convocatoria ordinaria

**Problema 7.1.** Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver el siguiente juego:

El jugador  $J_1$  puede elegir unirse a un grupo de trabajo ( $U$ ) o seguir solo ( $S$ ).

A continuación lanza una moneda con  $P(C) = \frac{1}{4}$  y  $P(X) = \frac{3}{4}$ .

Después el jugador  $J_2$  sin conocer la elección de  $J_1$  pero viendo el resultado de la moneda, elige unirse al grupo ( $U$ ) o seguir solo ( $S$ ).

La función de pago es:

$$\begin{aligned} M(U, C, U) &= 4, & M(S, C, U) &= 3, \\ M(U, C, S) &= -2, & M(S, C, S) &= -5, \\ M(U, X, U) &= 0, & M(S, X, U) &= 1, \\ M(U, X, S) &= -1, & M(S, X, S) &= 2. \end{aligned}$$

**Solución del problema 7.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 14.

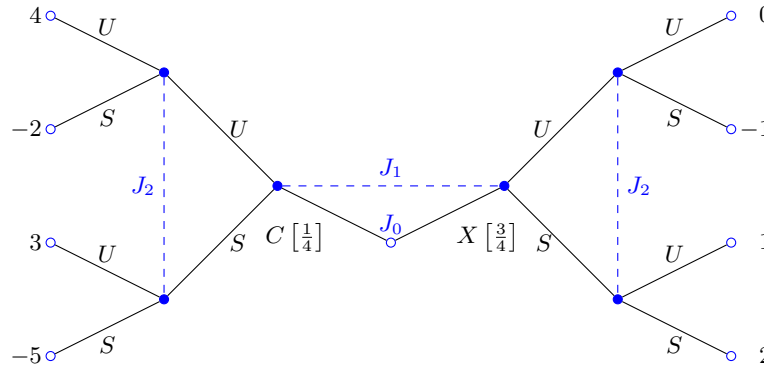


Figura 14: Forma extensiva del juego del problema 7.1.

Anteponemos el movimiento del jugador  $J_0$ , que lanza la moneda. Tras dicho movimiento el jugador  $J_1$ , sin conocer el resultado del lanzamiento, elige su movimiento en el conjunto  $\{U, S\}$ . Por último, tras el movimiento del jugador  $J_1$ , el jugador  $J_2$  se encontrará ante dos posibles situaciones según el resultado del lanzamiento de la moneda, puesto que no conoce la elección de  $J_1$ . Una estrategia para  $J_2$  sería, por ejemplo,  $US$ , que indica que si en la moneda se obtuvo cara  $C$ , el jugador  $J_2$  elegirá  $U$ ; mientras que si en la moneda se obtuvo cruz  $X$ , el jugador  $J_2$  elegirá  $S$ . Así los conjuntos de estrategias para ambos jugadores serán

$$J_1 = \{U, S\}, \quad J_2 = \{UU, US, SU, SS\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(U, UU) &= \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 1; & \pi(U, US) &= \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{4}; \\ \pi(U, SU) &= \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{3}{4} \cdot 0 = -\frac{1}{2}; & \pi(U, SS) &= \frac{1}{4} \cdot (-2) + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{5}{4}; \\ \pi(S, UU) &= \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{2}; & \pi(S, US) &= \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{9}{4}; \\ \pi(S, SU) &= \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{3}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}; & \pi(S, SS) &= \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{1}{4}; \end{aligned}$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 16.

		$J_2$			
		$UU$	$US$	$SU$	$SS$
$J_1$	$U$	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$
	$S$	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Cuadro 16: Forma normal del juego del problema 7.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  tiene un punto de silla, que es el elemento  $(S, SU)$ . En consecuencia el jugador  $J_1$  debe elegir siempre  $S$ ; y el jugador  $J_2$  debe elegir  $S$  si en la moneda ha salido cara  $C$ , y  $U$  si en la moneda ha salido cruz  $X$ . En ese caso el valor del juego es

$$v(M) = -\frac{1}{2}.$$

**Problema 7.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-2, 2) & (0, 0) \\ (2, -2) & (0, 2) \\ (-2, -2) & (2, 2) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 7.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la primera fila, que está dominada cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = 2p - 2(1 - p) = 2(1 - p) \implies 2p = 4(1 - p) \implies p = \frac{2}{3};$$

$$v_1 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la tercera columna, que está dominada por la segunda. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 2p = -2p + 2(1 - p) \implies 4p = 2(1 - p) \implies p = \frac{1}{3};$$

$$v_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 15, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = \left(u - \frac{2}{3}\right) \left(v - \frac{2}{3}\right).$$

Dado que la región de pagos es simétrica y que el punto de *statu quo*  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$  verifica  $u_0 = v_0 = \frac{2}{3}$ , el axioma 6 de Nash (Morris, 1994: 135) nos permite asegurar que el par de arbitraje es el punto  $(2, 2)$ . Otra forma de llegar a la misma conclusión sería viendo que el conjunto de negociación (de puntos óptimos Pareto) está formado únicamente por dicho punto  $(2, 2)$  por lo que necesariamente ese ha de ser el par de arbitraje.

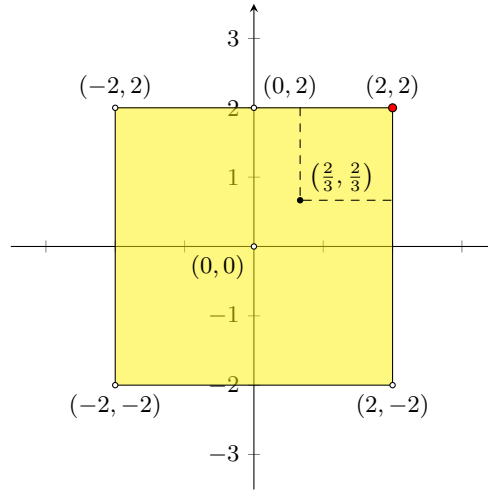


Figura 15: Región de pagos para el problema 7.2.

**Problema 7.3.** Tres jugadores pueden elegir uno de los colores: blanco, negro y rojo. Ninguno sabe lo que han elegido los demás. A continuación enseñan su elección y se establecen los pagos. Si los tres eligen lo mismo no se hace ningún pago, en caso contrario, se da la siguiente relación:

Rojo gana a blanco, blanco gana a negro, y negro gana a rojo 60 euros.

Calcular la función característica y comprobar si es o no un juego esencial.

**Solución del problema 7.3.** Estamos ante un juego tripersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles. Entonces, las únicas coaliciones relevantes son similares a  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3\}$  (por ejemplo). Si se forman dichas coaliciones, la forma normal del juego se recoge en el cuadro 17.

$M$		$\{J_2, J_3\}$								
		$BB$	$BN$	$BR$	$NB$	$NN$	$NR$	$RB$	$RN$	$RR$
$\{J_1\}$	$B$	0	60	-60	60	120	0	-60	0	-120
	$N$	-120	-60	0	-60	0	60	0	60	120
	$R$	120	0	60	0	-120	-60	60	-60	0

Cuadro 17: Forma normal del juego del problema 7.3 para las coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3\}$ .

La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, pero la columna 2 domina a la columna 4, la columna 3 domina a la columna 7 y la columna 6 domina a la columna 8. Eliminando las columnas dominadas obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & -60 & 120 & 0 & -120 \\ -120 & -60 & 0 & 0 & 60 & 120 \\ 120 & 0 & 60 & -120 & -60 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una estrategia mixta para la coalición  $\{J_1\}$  será de la forma  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ , y ha de maximizar  $v$  sujeta a las condiciones

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1; \quad (8)$$

$$-120p_2 + 120p_3 - v \geq 0; \quad (9)$$

$$60p_1 - 60p_2 - v \geq 0; \quad (10)$$

$$-60p_1 + 60p_3 - v \geq 0; \quad (11)$$

$$120p_1 - 120p_3 - v \geq 0; \quad (12)$$

$$60p_2 - 60p_3 - v \geq 0; \quad (13)$$

$$-120p_1 + 120p_2 - v \geq 0; \quad (14)$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0. \quad (15)$$

Por ejemplo, si sumamos dos veces la inecuación (11) a la inecuación (12) obtenemos

$$-3v \geq 0 \implies v \leq 0.$$

Como en la práctica queremos maximizar  $v$ , vamos a comprobar si  $v = 0$  es una posible solución del problema, puesto que en ese caso sería la solución buscada. Supuesto  $v = 0$ , el problema anterior se transforma en encontrar  $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$  verificando

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1;$$

$$-p_2 + p_3 \geq 0;$$

$$p_1 - p_2 \geq 0;$$

$$-p_1 + p_3 \geq 0;$$

$$p_1 - p_3 \geq 0;$$

$$p_2 - p_3 \geq 0;$$

$$-p_1 + p_2 \geq 0;$$

$$p_1, p_2, p_3 \geq 0.$$

Inmediatamente se comprueba que una solución del nuevo problema es

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3},$$

por lo que el valor del juego es  $v = 0$ .

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, tenemos suficiente información para dar la función característica.

$$\nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{1, 2\}) = \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) = 0.$$

Por tanto, estamos ante un juego no esencial y de suma cero en su forma de función característica.

## Examen 8. Septiembre de 2015 – Convocatoria de reserva

**Problema 8.1.** Resolver el siguiente juego:

Dos jugadores enseñan cada uno, uno o dos dedos, mientras que simultáneamente indican el número de dedos que el contrario va a sacar. Si solo uno de ellos acierta, gana una cantidad igual a la suma de los dedos enseñados por ambos. Si aciertan ambos o bien ninguno, hay empate.

**Solución del problema 8.1.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma cero con información imperfecta. La forma extensiva se representa en la figura 16.

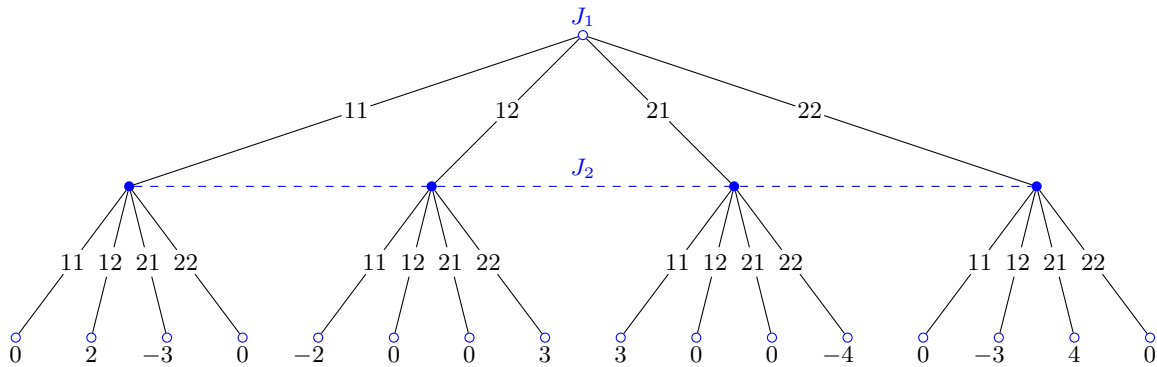


Figura 16: Forma extensiva del juego del problema 8.1.

Si cualquiera de los dos jugadores elige como estrategia  $ij$  esto indica que enseña  $i \in \{1, 2\}$  dedos y que predice que su contrincante va a enseñar  $j \in \{1, 2\}$  dedos. Ninguno de los dos jugadores conoce de antemano ni los dedos que va a enseñar su contrincante ni la predicción que este va a hacer. Por tanto, el conjunto de estrategias para ambos es

$$J_1 = J_2 = \{11, 12, 21, 22\}.$$

Como no hay movimientos aleatorios, dichas estrategias permiten obtener directamente los pagos en cada caso, por lo que tenemos los datos para escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 18.

$M$		$J_2$			
		11	12	21	22
$J_1$	11	0	2	-3	0
	12	-2	0	0	3
	21	3	0	0	-4
	22	0	-3	4	0

Cuadro 18: Forma normal del juego del problema 8.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La matriz  $M$  tampoco tiene filas ni columnas dominadas.
- Una estrategia para el jugador  $J_1$  (y también para el jugador  $J_2$ , dado que el juego es simétrico) será de la forma



$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , y ha de satisfacer

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} p_1 & + & p_2 & + & p_3 & + & p_4 & = & 1, \\ & & - & 2p_2 & + & 3p_3 & & \geq & 0, \\ 2p_1 & & & & & & - & 3p_4 & \geq & 0, \\ - & 3p_1 & & & & & + & 4p_4 & \geq & 0, \\ & & & 3p_2 & - & 4p_3 & & \geq & 0. \end{array} \right.$$

Eliminamos, por ejemplo, la última inecuación, y convertimos las demás en ecuaciones, para obtener el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} p_1 & + & p_2 & + & p_3 & + & p_4 & = & 1, \\ & & - & 2p_2 & + & 3p_3 & & = & 0, \\ 2p_1 & & & & & & - & 3p_4 & = & 0, \\ - & 3p_1 & & & & & + & 4p_4 & = & 0. \end{array} \right.$$

La solución es

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{3}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}, \quad p_4 = 0.$$

Y dado que satisface también la inecuación no utilizada, esta es la solución del juego. Por tanto,

$$\vec{p} = \vec{q} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right), \quad v(M) = 0.$$

**Problema 8.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (4, 2) & (6, 3) & (2, 9) \\ (2, 2) & (8, -3) & (4, 2) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 8.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 4p + 2(1-p) = 2p + 4(1-p) \implies 2p = 2(1-p) \implies p = \frac{1}{2};$$

$$v_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3.$$

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{12}$  y  $m_{32}$ , y por tanto  $v_2 = m_{12} = m_{32} = 2$ .

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 17, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = (u - 3)(v - 2).$$

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto  $(3, \frac{15}{2})$  al punto  $(6, 3)$ . La relación entre las variables es

$$v = -\frac{3}{2}u + 12,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_1(u) = (u - 3) \left( -\frac{3}{2}u + 12 - 2 \right) = -\frac{3}{2}u^2 + \frac{29}{2}u - 30.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{29}{6}, \frac{19}{4})$ .

$$g'_1(u) = -3u + \frac{29}{2};$$

$$g'_1(u) = 0 \implies -3u + \frac{29}{2} = 0 \implies u = \frac{29}{6};$$

$$v = -\frac{3}{2} \cdot \frac{29}{6} + 12 = \frac{19}{4}.$$

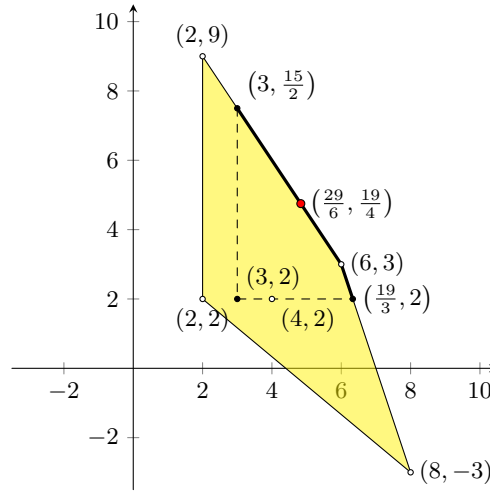


Figura 17: Región de pagos para el problema 8.2.

- Del punto  $(6, 3)$  al punto  $(\frac{19}{3}, 2)$ . La relación entre las variables es

$$v = -3u + 21,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_2(u) = (u - 3)(-3u + 21 - 2) = -3u^2 + 28u - 39.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{14}{3}, 7)$ , que en este caso se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g'_2(u) = -6u + 28;$$

$$g'_2(u) = 0 \implies -6u + 28 = 0 \implies u = \frac{14}{3};$$

$$v = -3 \cdot \frac{14}{3} + 21 = 7.$$

Dado que la función  $g_2$  decrece para valores de  $u$  mayores que 6, el par de arbitraje es el punto  $(\frac{29}{6}, \frac{19}{4})$ .

**Problema 8.3.** Un terreno está valorado por su actual propietario en 200 000 euros.

Un vecino le ofrece acondicionarlo para convertirlo en un campo de cultivo de lavanda, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 400 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar ese terreno para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor del terreno sería de 600 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* de este juego.

**Solución del problema 8.3.** Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca  $P$ , el vecino que le ofrece la utilización de la finca para el cultivo de lavanda  $V$ , y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca  $E$ . La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{P\}) = 200; \quad \nu(\{V\}) = \nu(\{E\}) = 0;$$

$$\nu(\{P, V\}) = 400; \quad \nu(\{P, E\}) = 600; \quad \nu(\{V, E\}) = 0; \quad \nu(\{P, V, E\}) = 600.$$

Sea  $\vec{x}(x_P, x_V, x_E)$  una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994: 160), se han de verificar

$$x_P + x_V + x_E = \nu(\{P, V, E\}) = 600; \tag{16}$$

$$x_P \geq \nu(\{P\}) = 200; \tag{17}$$

$$x_V \geq \nu(\{V\}) = 0; \tag{18}$$

$$x_E \geq \nu(\{E\}) = 0; \tag{19}$$

$$x_P + x_V \geq \nu(\{P, V\}) = 400; \tag{20}$$

$$x_P + x_E \geq \nu(\{P, E\}) = 600; \tag{21}$$

$$x_V + x_E \geq \nu(\{V, E\}) = 0. \tag{22}$$

De la igualdad (16) y las desigualdades (18) y (21) se deduce

$$x_V = 0, \quad x_P + x_E = 600.$$

Imponiendo además, la desigualdad (20),

$$x_P \geq 400.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas las condiciones anteriores, y que se representa en la figura 18.

$$\{(x_P, 0, 600 - x_P) : 400 \leq x_P \leq 600\}.$$

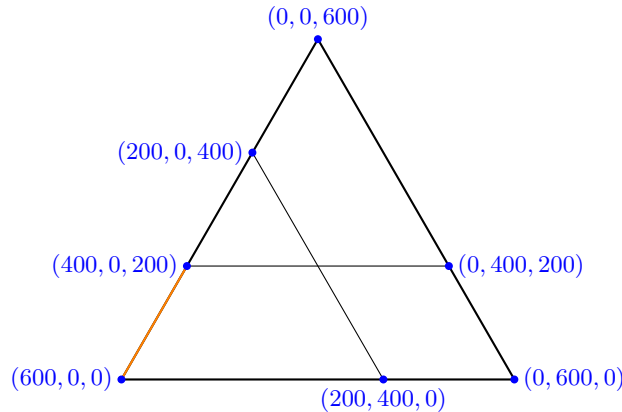


Figura 18: Obtención gráfica del *core* para el juego del problema problema 8.3.

## Examen 9. Enero de 2016

**Problema 9.1.** Se tienen tres cajas similares, con dos bolas cada una, numeradas con los números positivos  $p$  y  $q$ , donde  $p < q$ .

Los jugadores  $J_1$  y  $J_2$  poseen cada uno una caja y el juego se desarrolla en las siguientes etapas:

- (1) Se saca aleatoriamente una bola de la tercera caja, que es la que no tienen los jugadores.
- (2) Los dos jugadores enseñan simultáneamente la bola que toman de su caja.
- (3) El jugador que muestra la bola numerada más alta vence a su contrario, ganando el valor de la bola sacada en la etapa (1). Si coinciden, no hay pago alguno.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 9.1.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 19.

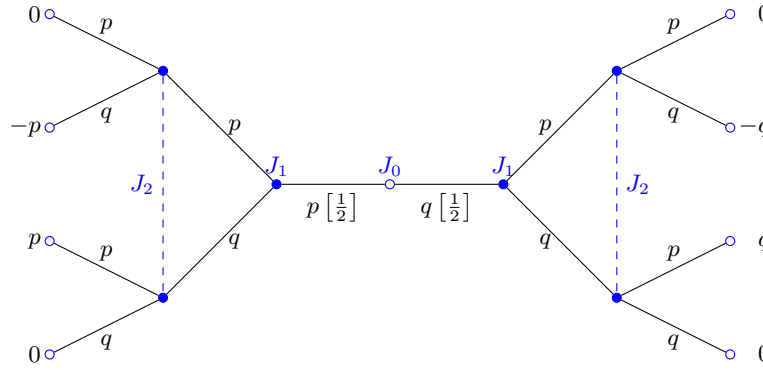


Figura 19: Forma extensiva del juego del problema 9.1.

El jugador  $J_0$  saca una bola de la tercera caja, que los jugadores  $J_1$  y  $J_2$  ven. Después, el jugador  $J_1$  sigue la estrategia  $ij$ , que indica que saca de su caja la bola  $i \in \{p, q\}$  si la bola del jugador  $J_0$  es la numerada con  $p$ , y saca de su caja la bola  $j \in \{p, q\}$  si la bola del jugador  $J_0$  es la numerada con  $q$ . El jugador  $J_2$  tiene exactamente el mismo conjunto de estrategias que  $J_1$ , puesto que no conoce la bola sacada por el jugador  $J_1$ . Por tanto, el conjunto de estrategias para ambos es

$$J_1 = J_2 = \{pp, pq, qp, qq\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(pp, pp) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0; & \pi(pp, pq) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-q) = -\frac{q}{2}; \\ \pi(pp, qp) &= \frac{1}{2} \cdot (-p) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{p}{2}; & \pi(pp, qq) &= \frac{1}{2} \cdot (-p) + \frac{1}{2} \cdot (-q) = -\frac{p+q}{2}; \\ \pi(pq, pp) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot q = \frac{q}{2}; & \pi(pq, pq) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0; \\ \pi(pq, qp) &= \frac{1}{2} \cdot (-p) + \frac{1}{2} \cdot q = \frac{q-p}{2}; & \pi(pq, qq) &= \frac{1}{2} \cdot (-p) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{p}{2}; \\ \pi(qp, pp) &= \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{p}{2}; & \pi(qp, pq) &= \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot (-q) = \frac{p-q}{2}; \\ \pi(qp, qp) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0; & \pi(qp, qq) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-q) = -\frac{q}{2}; \\ \pi(qq, pp) &= \frac{1}{2} \cdot p + \frac{1}{2} \cdot q = \frac{p+q}{2}; & \pi(qq, pq) &= \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot p = \frac{p}{2}; \end{aligned}$$

$$\pi(qq, qp) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot q = \frac{q}{2}; \quad \pi(qq, qq) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 19.

$M$		$J_2$			
		$pp$	$pq$	$qp$	$qq$
$J_1$	$pp$	0	$-\frac{q}{2}$	$-\frac{p}{2}$	$-\frac{p+q}{2}$
	$pq$	$\frac{q}{2}$	0	$\frac{q-p}{2}$	$-\frac{p}{2}$
	$qp$	$\frac{p}{2}$	$\frac{p-q}{2}$	0	$-\frac{q}{2}$
	$qq$	$\frac{p+q}{2}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{q}{2}$	0

Cuadro 19: Forma normal del juego del problema 9.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  tiene un punto de silla, que es el elemento  $(4, 4)$ . En consecuencia ambos jugadores deben elegir siempre la bola numerada con  $q$ , y el valor del juego es  $v(M) = 0$ .

**Problema 9.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (1, 4) & (-2, 4) & (3, 0) \\ (2, -1) & (2, 2) & (-3, 2) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 9.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la primera columna, que está dominada por la segunda. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -2p + 2(1-p) = 3p - 3(1-p) \implies 5p = 5(1-p) \implies p = \frac{1}{2};$$

$$v_1 = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{22}$ , y por tanto  $v_2 = m_{22} = 2$ .

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 20, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = u(v - 2).$$

El conjunto de negociación es el segmento que va del punto  $(1, 4)$  al punto  $(2, 2)$ . La relación entre las variables es la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos,

$$v = -2u + 6,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_2(u) = u(-2u + 6 - 2) = -2u^2 + 4u.$$

Y su máximo es el punto  $(1, 4)$ , que será el par de arbitraje buscado.

$$g'_2(u) = -4u + 4;$$

$$g'_2(u) = 0 \implies -4u + 4 = 0 \implies u = 1;$$

$$v = -2 \cdot 1 + 6 = 4.$$

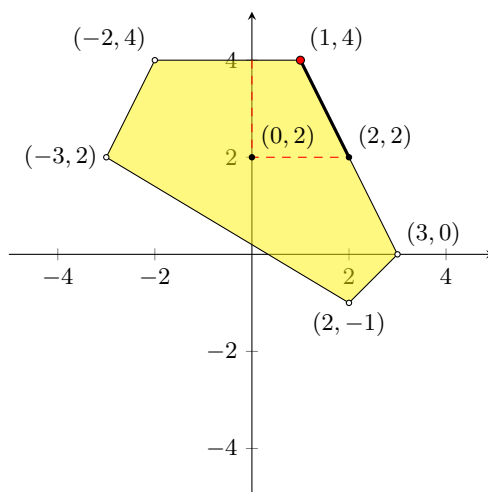


Figura 20: Región de pagos para el problema 9.2.

**Problema 9.3.** En el siguiente juego tripersonal, donde cada jugador tiene dos estrategias indicadas por 1 y 2. Hay ocho combinaciones de estrategias y ocho correspondientes 3-tuplas de pagos:

Estrategias	Pagos
(1, 1, 1)	(-2, 1, 3)
(1, 1, 2)	(2, 2, -2)
(1, 2, 1)	(0, -2, 4)
(1, 2, 2)	(1, -2, 3)
(2, 1, 1)	(2, -2, 2)
(2, 1, 2)	(0, 2, 0)
(2, 2, 1)	(2, 0, 0)
(2, 2, 2)	(-2, 4, 0)

Calcular la función característica y decir si es un juego esencial.

**Solución del problema 9.3.** Estudiamos por separado las posibles coaliciones que se pueden formar.

- Coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3\}$ . La forma normal del juego se representa en el cuadro 20.

$M$		$\{J_2, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_1\}$	1	(-2, 4)	(2, 0)	(0, 2)	(1, 1)
	2	(2, 0)	(0, 2)	(2, 0)	(-2, 4)

Cuadro 20: Forma normal del juego del problema 9.3 para las coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{J_1\}$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

La columna 1 domina a la columna 3, y la columna 4 domina a la columna 2. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_4(p) \implies -2p + 2(1-p) = p - 2(1-p) \implies 3p = 4(1-p) \implies p = \frac{4}{7};$$

$$\nu(\{1\}) = -2 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7} - 2 \cdot \left(1 - \frac{4}{7}\right) = -\frac{2}{7}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{J_2, J_3\}$  es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

En este caso la fila 1 domina a la fila 3 y la fila 4 domina a la fila 2. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 4p + (1-p) = 4(1-p) \implies 4p = 3(1-p) \implies p = \frac{3}{7};$$

$$\nu(\{2, 3\}) = 4 \cdot \frac{3}{7} + \left(1 - \frac{3}{7}\right) = 4 \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{16}{7}.$$

- Coaliciones  $\{J_2\}$  y  $\{J_1, J_3\}$ . La forma normal del juego se representa en el cuadro 21.

$M$		$\{J_1, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_2\}$	1	(1, 1)	(2, 0)	(-2, 4)	(2, 0)
	2	(-2, 4)	(-2, 4)	(0, 2)	(4, -2)

Cuadro 21: Forma normal del juego del problema 9.3 para las coaliciones  $\{J_2\}$  y  $\{J_1, J_3\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{J_2\}$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La columna 1 domina a las columnas 2 y 4. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_3(p) \implies p - 2(1-p) = -2p \implies 3p = 2(1-p) \implies p = \frac{2}{5};$$

$$\nu(\{2\}) = \frac{2}{5} - 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = -2 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{4}{5}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{J_1, J_3\}$  es

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En este caso la fila 1 domina a las filas 2 y 4. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies p + 4(1-p) = 4p + 2(1-p) \implies 3p = 2(1-p) \implies p = \frac{2}{5};$$

$$\nu(\{1, 3\}) = \frac{2}{5} + 4 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 4 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{14}{5}.$$

- Coaliciones  $\{J_3\}$  y  $\{J_1, J_2\}$ . La forma normal del juego se representa en el cuadro 22.

$M$		$\{J_1, J_2\}$			
		11	12	21	22
$\{J_3\}$	1	$(3, -1)$	$(4, -2)$	$(2, 0)$	$(0, 2)$
	2	$(-2, 4)$	$(3, -1)$	$(0, 2)$	$(0, 2)$

Cuadro 22: Forma normal del juego del problema 9.3 para las coaliciones  $\{J_3\}$  y  $\{J_1, J_2\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{J_3\}$  es

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{14}$ . Por tanto,

$$\nu(\{3\}) = m_{14} = 0.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{J_1, J_2\}$  es

$$M_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En este caso también hay un punto de silla, que es el elemento  $m_{41}$ . En consecuencia,

$$\nu(\{1, 2\}) = m_{41} = 2.$$

- Gran coalición  $\{J_1, J_2, J_3\}$ . Se puede ver que el juego es de suma constante 2 en su forma normal, por lo que

$$\nu(\{1, 2, 3\}) = 2.$$

En resumen, la función característica del juego es

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{1\}) = -\frac{2}{7}; \quad \nu(\{2\}) = -\frac{4}{5}; \quad \nu(\{3\}) = 0;$$

$$\nu(\{1, 2\}) = 2; \quad \nu(\{1, 3\}) = \frac{14}{5}; \quad \nu(\{2, 3\}) = \frac{16}{7}; \quad \nu(\{1, 2, 3\}) = 2.$$

Es inmediato ver que es un juego esencial, puesto que

$$2 = \nu(\{1, 2, 3\}) \neq \sum_{n=1}^3 \nu(\{n\}) = -\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + 0 = -\frac{38}{35}.$$



## Examen 10. Febrero de 2016

**Problema 10.1.** El jugador  $A$  saca al azar una bola de una urna que contiene cinco bolas blancas y dos negras; la mira y apuesta diez euros o cincuenta euros.

El jugador  $B$  puede jugar o no jugar.

Si  $B$  no juega, entonces  $A$  le gana diez euros, y si  $B$  juega, entonces debe igualar la apuesta de  $A$ . En ese caso  $A$  ganará todo el dinero si toma una bola negra y si toma una blanca perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 10.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 21.

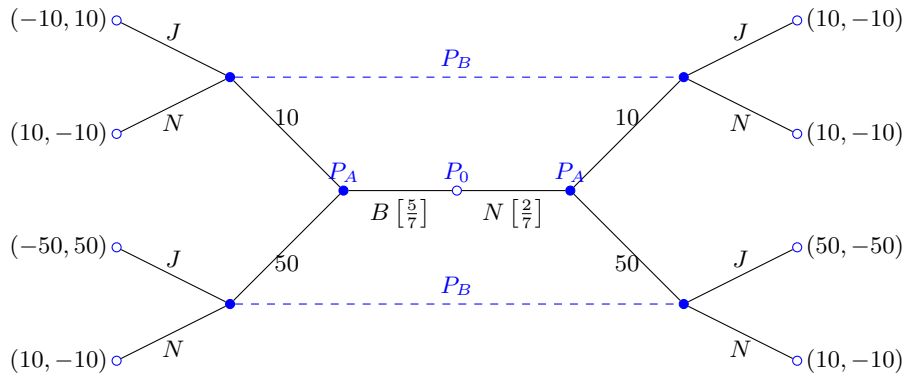


Figura 21: Forma extensiva del juego del problema 10.1.

Tras el movimiento del jugador  $P_0$  (la extracción de la bola de la urna), el jugador  $P_A$  se encontrará en dos posibles situaciones, que la bola ha ya sido blanca o que haya sido negra. Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es  $UD$  (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (bola blanca) apostará 10€ (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 21), y si se encuentra en la segunda situación (bola negra) apostará 50€ (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador  $P_A$ , el jugador  $P_B$  también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información del color de la bola extraída), que el jugador  $P_A$  haya apostado 10€ o que haya apostado 50€. Una estrategia para  $P_B$  sería, por ejemplo,  $DU$  (*down, up*), que indica que si  $P_A$  apostó 10€ entonces  $P_B$  no juega, y que si  $P_A$  apostó 50€ entonces  $P_B$  juega. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores  $P_A$  y  $P_B$  son

$$P_A = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad P_B = \{UU, UD, DU, DD\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(UU, UU) &= \frac{5}{7} \cdot (-10) + \frac{2}{7} \cdot 10 = -\frac{30}{7}; & \pi(UU, UD) &= \frac{5}{7} \cdot (-10) + \frac{2}{7} \cdot 10 = -\frac{30}{7}; \\ \pi(UU, DU) &= \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 10 = 10; & \pi(UU, DD) &= \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 10 = 10 \\ \pi(UD, UU) &= \frac{5}{7} \cdot (-10) + \frac{2}{7} \cdot 50 = \frac{50}{7}; & \pi(UD, UD) &= \frac{5}{7} \cdot (-10) + \frac{2}{7} \cdot 10 = -\frac{30}{7}; \\ \pi(UD, DU) &= \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 50 = \frac{150}{7}; & \pi(UD, DD) &= \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 10 = 10; \\ \pi(DU, UU) &= \frac{5}{7} \cdot (-50) + \frac{2}{7} \cdot 10 = -\frac{230}{7}; & \pi(DU, UD) &= \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 10 = 10; \\ \pi(DU, DU) &= \frac{5}{7} \cdot (-50) + \frac{2}{7} \cdot 10 = -\frac{230}{7}; & \pi(DU, DD) &= \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 10 = 10; \\ \pi(DD, UU) &= \frac{5}{7} \cdot (-50) + \frac{2}{7} \cdot 50 = -\frac{150}{7}; & \pi(DD, UD) &= \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 10 = 10; \end{aligned}$$

$$\pi(DD, DU) = \frac{5}{7} \cdot (-50) + \frac{2}{7} \cdot 50 = -\frac{150}{7}; \quad \pi(DD, DD) = \frac{5}{7} \cdot 10 + \frac{2}{7} \cdot 10 = 10.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 23.

$M$		$P_B$			
		$UU$	$UD$	$DU$	$DD$
$P_A$	$UU$	$-\frac{30}{7}$	$-\frac{30}{7}$	10	10
	$UD$	$\frac{50}{7}$	$-\frac{30}{7}$	$\frac{150}{7}$	10
	$DU$	$-\frac{230}{7}$	10	$-\frac{230}{7}$	10
	$DD$	$-\frac{150}{7}$	10	$-\frac{150}{7}$	10

Cuadro 23: Forma normal del juego del problema 10.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 2 domina a la fila 1, la fila 4 domina a la fila 3, la columna 1 domina a la columna 3, y la columna 2 domina a la columna 4. Eliminamos las filas y columnas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} \frac{50}{7} & -\frac{30}{7} \\ -\frac{150}{7} & 10 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila  $P_A$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1-p)$  y ha de verificar

$$\begin{aligned} \pi_1(p) = \pi_2(p) &\implies \frac{50}{7}p - \frac{150}{7}(1-p) = -\frac{30}{7}p + 10(1-p) \implies 5p + 15(1-p) = -3p + 7(1-p) \implies \\ &\implies 30p = 22 \implies p = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna  $P_B$  ha de ser de la forma  $\vec{q} = (q, 1-q)$  y ha de satisfacer

$$\begin{aligned} \pi^1(q) = \pi^2(q) &\implies \frac{50}{7}q - \frac{30}{7}(1-q) = -\frac{150}{7}q + 10(1-q) \implies 5q - 3(1-q) = -15q + 7(1-q) \implies \\ &\implies 30q = 10 \implies q = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \left(0, \frac{11}{15}, 0, \frac{4}{15}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right); \\ \left. \begin{aligned} v_A(M) &= \frac{50}{7} \cdot \frac{11}{15} - \frac{150}{7} \left(1 - \frac{11}{15}\right) = -\frac{30}{7} \cdot \frac{11}{15} + 10 \left(1 - \frac{11}{15}\right) = -\frac{10}{21} \\ v_B(M) &= \frac{50}{7} \cdot \frac{1}{3} - \frac{30}{7} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{150}{7} \cdot \frac{1}{3} + 10 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{10}{21} \end{aligned} \right\} \implies v(M) = -\frac{10}{21}. \end{aligned}$$

**Problema 10.2.** Dos compañías comparten el grueso del mercado de cierto tipo de producto. Cada una hace nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas de la otra compañía.

Cada una está considerando la posibilidad de una pequeña reducción de precio del producto. Ambas prefieren no bajarlo, pero cada una teme que la otra lo haga y, por tanto, venda más unidades del producto. Si ambas bajan el precio del producto, venden 350 unidades cada una; si ninguna lo hace venden 200 cada una, y si una lo baja y la otra no, la primera vende 500 y la segunda 150.

Calcular el punto de equilibrio si se considera el juego no cooperativo y si se considera cooperativo.

**Solución del problema 10.2.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  a cada una de las empresas. Ambos jugadores pueden bajar el precio ( $B$ ) o no hacerlo ( $N$ ), por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$J_1 = J_2 = \{B, N\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 24.

$M$		$J_2$	
		$B$	$N$
$J_1$	$B$	(350, 350)	(500, 150)
	$N$	(150, 500)	(200, 200)

Cuadro 24: Forma normal del juego del problema 10.2.

Para hallar los puntos de equilibrio del juego no cooperativo utilizaremos el método IDSDS:

- La estrategia  $B$  para el jugador  $J_1$  domina estrictamente a la estrategia  $N$ , por lo que  $J_1$  siempre jugará  $B$ , y el jugador  $J_2$  lo sabe. Se puede eliminar, por tanto, la fila 2 ( $N$ ).
- En la fila restante

$M$		$J_2$	
		$B$	$N$
$J_1$	$B$	(350, 350)	(500, 150)

la estrategia  $B$  para el jugador  $J_2$  domina estrictamente a la estrategia  $N$ . Por tanto, se puede eliminar la columna 2 ( $N$ ).

En conclusión, el único punto de equilibrio del juego no cooperativo es el par de estrategias  $(B, B)$ , para el cual los pagos son (350, 350). O sea, ambas empresas deben bajar sus precios, y de esa forma ambas conseguirán unas ventas de 350 unidades.

Para el juego cooperativo, en la figura 22 se representa el conjunto de pagos. Dado que dicha región de pagos es simétrica, y que el punto de *statu quo* (350, 350) verifica  $u_0 = v_0 = 350$ , podemos aplicar el axioma 6 de Nash (Morris, 1994: 135), e inmediatamente se obtiene que el par de arbitraje también es el punto (350, 350). Dicho de otra forma, en este caso el hecho de cooperar no mejora los beneficios que ambas empresas pueden obtener.

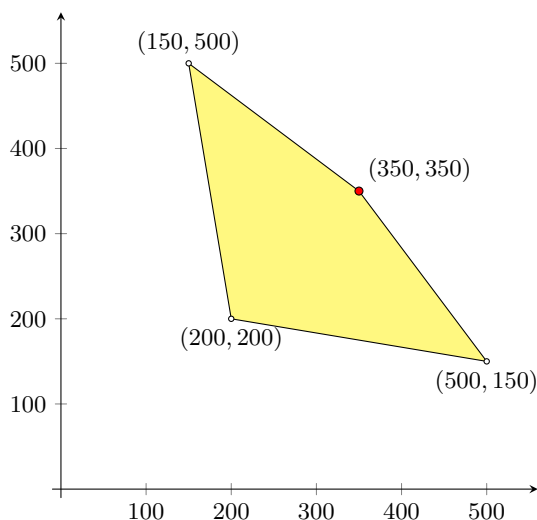


Figura 22: Región de pagos para el problema 10.2.

**Problema 10.3.** En los juegos  $N$ -personales cooperativos definir *imputaciones*, *dominancia de imputaciones*, *núcleo*, el teorema que dice cuándo una *imputación* está en el *núcleo* y *conjuntos estables de imputaciones*.

**Solución del problema 10.3.** Sea  $\nu$  un juego  $N$ -personal en forma de función característica y cuyo conjunto de jugadores es

$$\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_N\}.$$

Una  $N$ -tupla  $\vec{x}(x_1, \dots, x_N)$  de números reales (que representan los pagos de cada jugador) se llama imputación para el juego  $\nu$  (Morris, 1994: 156) si se satisfacen las condiciones:

- Racionalidad individual. Para cada jugador  $P_i \in \mathcal{P}$  se tiene que

$$x_i \geq \nu(\{P_i\}).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^N x_i = \nu(\mathcal{P}).$$

Sea  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$  una coalición, y sean  $\vec{x}, \vec{y}$  dos imputaciones para el juego  $\nu$ . Diremos que la imputación  $\vec{x}$  domina a la imputación  $\vec{y}$  para la coalición  $\mathcal{S}$  (Morris, 1994: 158), y escribiremos  $\vec{x} \succ_{\mathcal{S}} \vec{y}$ , si se verifican las condiciones:

- $\forall P_i \in \mathcal{S} : x_i > y_i$ .
- $\sum_{P_i \in \mathcal{S}} x_i \leq \nu(\mathcal{S})$ .

El núcleo del juego  $\nu$  (Morris, 1994: 159) es el conjunto de todas las imputaciones que no están dominadas por cualquier otra imputación para ninguna de las coaliciones posibles. Una imputación  $\vec{x}$  está en el núcleo de  $\nu$  si y solo si

$$\forall \mathcal{S} \subset \mathcal{P} : \sum_{P_i \in \mathcal{S}} x_i \geq \nu(\mathcal{S}).$$

Sea  $X$  un conjunto de imputaciones para el juego  $\nu$ . Diremos que  $X$  es un conjunto estable de imputaciones (Morris, 1994: 174) si se verifican las condiciones:

- Estabilidad interna. Ninguna imputación de  $X$  domina a ninguna otra imputación de  $X$  para ninguna de las posibles coaliciones.
- Estabilidad externa. Si  $\vec{y} \notin X$  es una imputación para  $\nu$ , entonces existen una imputación  $\vec{x} \in X$  y una coalición  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$  tales que  $\vec{x} \succ_{\mathcal{S}} \vec{y}$ .

## Examen 11. Septiembre de 2016 – Convocatoria ordinaria

**Problema 11.1.** Hallar la forma normal del siguiente juego y calcular las estrategias óptimas de los dos jugadores y el valor del juego:

Dos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  ponen cada uno 5 euros sobre la mesa y lanzan una moneda que tiene un 1 en una cara y un 2 en la otra. Ningún jugador sabe el resultado del lanzamiento del otro. Solo conocen el resultado de la suya.

$J_1$  juega primero. Puede pasar o apostar 3 euros adicionales.

Si pasa, se comparan los números sacados por los dos jugadores. El que consiga el mayor número toma de la mesa los 10 euros; si los números son iguales cada uno recupera sus 5 euros.

Si  $J_1$  apuesta 3 euros,  $J_2$  puede ir o no ir. Si no va,  $J_1$  gana los 10 euros de la mesa, independientemente de los números sacados. Si  $J_2$  va, añade 3 euros a los 13 de la mesa. Nuevamente se comparan los números, el mayor toma los 16 euros, y si los dos números son iguales, cada uno recupera su dinero.

**Solución del problema 11.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 23.

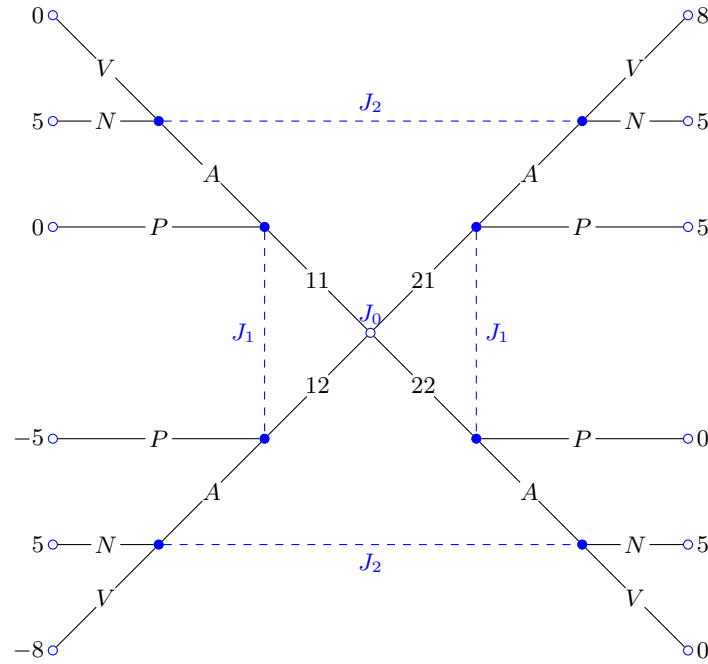


Figura 23: Forma extensiva del juego del problema 11.1.

El jugador  $J_0$  lanza las dos monedas. El jugador  $J_1$ , que conoce el resultado de la primera moneda y no el de la segunda, ha de decidir si apuesta o pasa en función del resultado que conoce. Y si el jugador  $J_1$  apuesta, el jugador  $J_2$ , que conoce el resultado de la segunda moneda y no el de la primera, ha de decidir si va o no va, en función del resultado que conoce. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores  $J_1$  y  $J_2$  son

$$J_1 = \{AA, AP, PA, PP\}, \quad J_2 = \{VV, VN, NV, NN\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(AA, VV) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-8) + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0; & \pi(AA, VN) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{9}{2}; \\ \pi(AA, NV) &= \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot (-8) + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{2}; & \pi(AA, NN) &= \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 5; \\ \pi(AP, VV) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-8) + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 0 = -\frac{3}{4}; & \pi(AP, VN) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{5}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\pi(AP, NV) &= \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot (-8) + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{2}; & \pi(AP, NN) &= \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{15}{4}; \\
\pi(PA, VV) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}; & \pi(PA, VN) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2; \\
\pi(PA, NV) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0; & \pi(PA, NN) &= \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 5 = \frac{5}{4}; \\
\pi(PP, VV) &= \pi(PP, VN) = \pi(PP, NV) = \pi(PP, NN) = \frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot (-5) + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 25.

$M$		$J_2$			
		$VV$	$VN$	$NV$	$NN$
$J_1$	$AA$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
	$AP$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
	$PA$	$\frac{3}{4}$	2	0	$\frac{5}{4}$
	$PP$	0	0	0	0

Cuadro 25: Forma normal del juego del problema 11.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 2 y a la fila 4; y la columna 1 domina a la columna 2 y a la columna 4. Eliminamos las filas y columnas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1-p)$  y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies \frac{3}{4}(1-p) = \frac{1}{2}p \implies 3(1-p) = 2p \implies 5p = 3 \implies p = \frac{3}{5}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$  ha de ser de la forma  $\vec{q} = (q, 1-q)$  y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies \frac{1}{2}(1-q) = \frac{3}{4}q \implies 2(1-q) = 3q \implies 5q = 2 \implies q = \frac{2}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\begin{aligned}
\vec{p} &= \left( \frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0 \right); & \vec{q} &= \left( \frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0 \right); \\
\left. \begin{aligned} v_1(M) &= \frac{3}{4} \left( 1 - \frac{3}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \\ v_2(M) &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{5} \right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned} \right\} & \implies v(M) = \frac{3}{10}.
\end{aligned}$$

**Problema 11.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-3, 6) & (3, 4) \\ (-\frac{1}{2}, -1) & (3, 0) \\ (-2, -2) & (5, -3) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 11.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{12}$ , por lo que  $v_1 = m_{12} = -\frac{1}{2}$ .

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

También tiene un punto de silla, en este caso el elemento  $m_{13}$ , por lo que  $v_2 = m_{13} = -2$ .

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 24, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(v + 2).$$

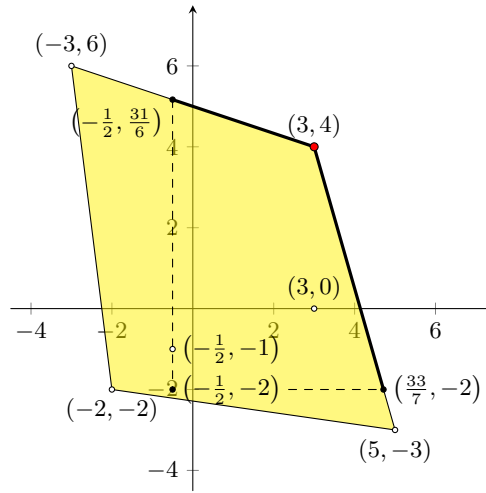


Figura 24: Región de pagos para el problema 11.2.

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto  $(-\frac{1}{2}, \frac{31}{6})$  al punto  $(3, 4)$ . La relación entre las variables es

$$v = -\frac{1}{3}u + 5,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_1(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{3}u + 5 + 2\right) = -\frac{1}{3}u^2 + \frac{41}{6}u + \frac{7}{2}.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{41}{4}, \frac{19}{12})$ , que se encuentra fuera del conjunto de negociación.

$$g'_1(u) = -\frac{2}{3}u + \frac{41}{6};$$

$$g'_1(u) = 0 \implies -\frac{2}{3}u + \frac{41}{6} = 0 \implies u = \frac{41}{4};$$

$$v = -\frac{1}{3} \cdot \frac{41}{4} + 5 = \frac{19}{12}.$$

- Del punto  $(3, 4)$  al punto  $(\frac{33}{7}, -2)$ . La relación entre las variables es

$$v = -\frac{7}{2}u + \frac{29}{2},$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_2(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right) \left(-\frac{7}{2}u + \frac{29}{2} + 2\right) = -\frac{7}{2}u^2 + \frac{59}{4}u + \frac{33}{4}.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{59}{28}, \frac{57}{8})$ , que también se encuentra fuera del conjunto de negociación.

$$g_2'(u) = -7u + \frac{59}{4};$$

$$g_2'(u) = 0 \implies -7u + \frac{59}{4} = 0 \implies u = \frac{59}{28};$$

$$v = -\frac{7}{2} \cdot \frac{59}{28} + \frac{29}{2} = \frac{57}{8}.$$

Dado que la función  $g_1$  crece para valores de  $u$  menores que 1 y que la función  $g_2$  decrece para valores de  $u$  mayores que 1, el par de arbitraje es el punto  $(3, 4)$ .

**Problema 11.3.** Se tienen tres cajas, cada una con tres bolas numeradas con el 1, 2 y 3, y tres jugadores. Cada jugador puede elegir solamente una bola de una urna. Ninguno conoce lo que han elegido los demás.

A continuación enseñan su elección y se establecen los pagos: si todos eligen lo mismo no se efectúa ningún pago, en caso contrario el jugador que muestre la bola numerada mayor paga cinco euros a cada uno de los restantes que la enseñe menor (no igual).

Calcular la función característica y decir si es un juego esencial.

**Solución del problema 11.3.** Estamos ante un juego tripersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles.

El único caso no trivial es cuando se forma una coalición de dos jugadores (y otra de uno). Consideramos, por ejemplo, las coaliciones  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ , para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 26.

$M$		$\{P_2, P_3\}$								
		11	12	13	21	22	23	31	32	33
$\{P_1\}$	1	0	5	5	5	10	10	5	10	10
	2	-10	-5	0	-5	0	5	0	5	10
	3	-10	-10	-5	-10	-10	-5	-5	-5	0

Cuadro 26: Forma normal del juego del problema 11.3 para las coaliciones  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ .

La matriz del juego tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{11}$ , por lo que una solución para este juego sería aquella en la que los todos los jugadores eligen la bola numerada con un 1. El valor del juego es  $v(M) = m_{11} = 0$ .

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\emptyset) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{1, 2\}) = \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 3\}) = \nu(\{1, 2, 3\}) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es no esencial, puesto que se verifica

$$\nu(\{1, 2, 3\}) = 0 = \sum_{n=1}^3 \nu(\{n\}).$$



## Examen 12. Septiembre de 2016 – Convocatoria de reserva

**Problema 12.1.** El jugador  $P_1$  lanza una moneda insesgada y la mira.

Puede, o bien pasar, en cuyo caso paga a  $P_2$  60 euros, o puede apostar, en cuyo caso  $P_2$  puede, o bien pasar y pagar a  $P_1$  60 euros, o bien apostar. Si apuesta, entonces recibe de, o paga a  $P_1$ , 90 euros según que  $P_1$  haya sacado cara o cruz.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 12.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 25.

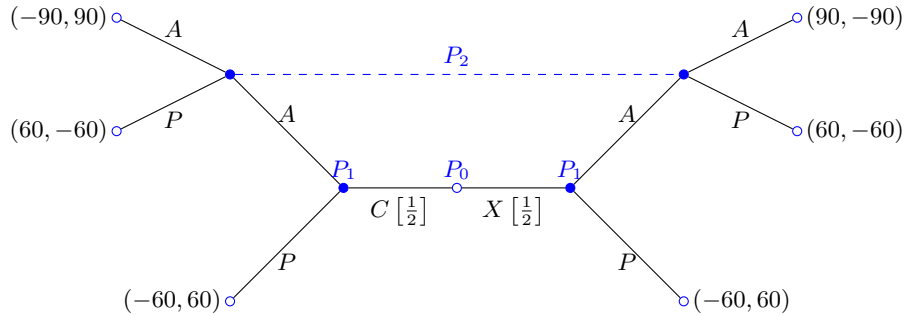


Figura 25: Forma extensiva del juego del problema 12.1.

Tras el movimiento del jugador  $P_0$  (el lanzamiento de la moneda), el jugador  $P_1$  se encontrará en dos posibles situaciones, que haya salido cara o que haya salido cruz. Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es  $UD$  (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (cara,  $C$ ) apostará (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 25), y si se encuentra en la segunda situación (cruz,  $X$ ) pasará (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador  $P_1$ , el jugador  $P_2$  también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información del resultado del lanzamiento de la moneda), que el jugador  $P_1$  haya apostado o que haya pasado, en cuyo caso el juego ha terminado. Una estrategia para  $P_2$  sería, por ejemplo,  $D$  (*down*), que indica que si  $P_1$  apostó entonces  $P_2$  pasa. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores  $P_1$  y  $P_2$  son

$$P_1 = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad P_2 = \{U, D\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(UU, U) = \frac{1}{2} \cdot (-90) + \frac{1}{2} \cdot 90 = 0; \quad \pi(UU, D) = \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 60 = 60;$$

$$\pi(UD, U) = \frac{1}{2} \cdot (-90) + \frac{1}{2} \cdot (-60) = -75; \quad \pi(UD, D) = \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot (-60) = 0;$$

$$\pi(DU, U) = \frac{1}{2} \cdot (-60) + \frac{1}{2} \cdot 90 = 15; \quad \pi(DU, D) = \frac{1}{2} \cdot (-60) + \frac{1}{2} \cdot 60 = 0;$$

$$\pi(DD, U) = \frac{1}{2} \cdot (-60) + \frac{1}{2} \cdot (-60) = -60; \quad \pi(DD, D) = \frac{1}{2} \cdot (-60) + \frac{1}{2} \cdot (-60) = -60.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 27.

$M$		$P_2$	
		$U$	$D$
$P_1$	$UU$	0	60
	$UD$	-75	0
	$DU$	15	0
	$DD$	-60	-60

Cuadro 27: Forma normal del juego del problema 12.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 2 y a la fila 4. Eliminamos las filas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila  $P_1$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1-p)$  y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 15(1-p) = 60p \implies 1-p = 4p \implies 5p = 1 \implies p = \frac{1}{5}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna  $P_2$  ha de ser de la forma  $\vec{q} = (q, 1-q)$  y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies 60(1-q) = 15q \implies 4(1-q) = q \implies 5q = 4 \implies q = \frac{4}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right);$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(M) &= 15 \left(1 - \frac{1}{5}\right) = 60 \cdot \frac{1}{5} = 12 \\ v_2(M) &= 60 \left(1 - \frac{4}{5}\right) = 15 \cdot \frac{4}{5} = 12 \end{aligned} \right\} \implies v(M) = 12.$$

**Problema 12.2.** Dos empresas automovilísticas deciden lanzar al mercado al mismo tiempo un modelo de coche de gama intermedia. Cada una de ellas se está planteando si ofrecer o no financiación a los clientes, lo cual le supondría captar mayor cuota de mercado, pero llevaría consigo ciertos costes. Ambas empresas prefieren no ofertar dicha financiación, pero cada una teme que la otra la ofrezca y, por tanto, acapare mayor número de compradores. Supongamos que los beneficios esperados por las empresas son los siguientes. Si ambas ofrecen financiación, 40 millones para cada una; si ninguna lo hace, 60 para cada una, y si una la ofrece y la otra no, la primera gana 80 y la segunda 30.

Calcular el punto de equilibrio si el juego se considera no cooperativo y si se considera cooperativo.

**Solución del problema 12.2.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  a cada una de las empresas. Ambos jugadores pueden ofrecer financiación ( $F$ ) o no hacerlo ( $N$ ), por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$J_1 = J_2 = \{F, N\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 28.

		$J_2$	
		$F$	$N$
$J_1$	$F$	(40, 40)	(80, 30)
	$N$	(30, 80)	(60, 60)

Cuadro 28: Forma normal del juego del problema 12.2.

Para hallar los puntos de equilibrio del juego no cooperativo empezamos estudiando la matriz de pagos de cada jugador, que son idénticas.

$$M = \begin{pmatrix} 40 & 80 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M$  tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{11} = 40$ . Por tanto, el único punto de equilibrio del juego no cooperativo es el par de estrategias  $(F, F)$ , para el cual los pagos son  $(40, 40)$ . O sea, ambas empresas deben ofrecer financiación, y de esa forma ambas conseguirán unos beneficios de 40 millones.

Para el juego cooperativo, en la figura 26 se representa el conjunto de pagos. Dado que dicha región de pagos es simétrica, y que el punto de *statu quo*  $(40, 40)$  verifica  $u_0 = v_0 = 40$ , podemos aplicar el axioma 6 de Nash (Morris, 1994: 135), e inmediatamente se obtiene que el par de arbitraje es el punto  $(60, 60)$ .

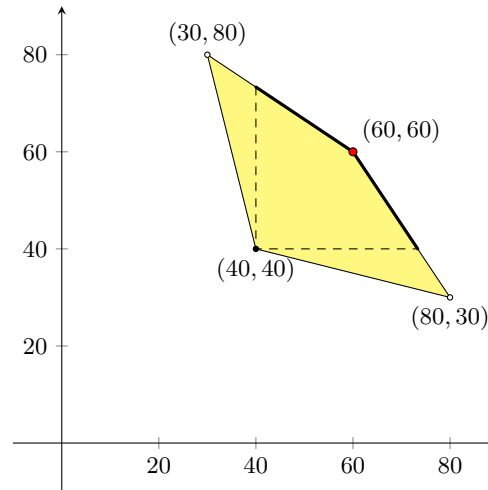


Figura 26: Región de pagos para el problema 12.2.

**Problema 12.3.** Ejercicio 1 de Morris (1994: 183). La función característica de un juego tripersonal cooperativo viene dada por:

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) &= \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = 0; \\ \nu(\{1, 2\}) &= 500; \quad \nu(\{1, 3\}) = 700; \quad \nu(\{2, 3\}) = 0; \quad \nu(\{1, 2, 3\}) = 700. \end{aligned}$$

Probar que el conjunto

$$\{(x, 0, 700 - x) : 0 \leq x \leq 700\}$$

es un conjunto estable de imputaciones para este juego.

**Solución del problema 12.3.** Comprobaremos en primer lugar que el conjunto dado

$$X = \{(x, 0, 700 - x) : 0 \leq x \leq 700\}$$

es un conjunto de imputaciones. Sea  $\vec{x}(x_1, 0, 700 - x_1) \in X$  con  $0 \leq x_1 \leq 700$ . Se verifican:

- Racionalidad individual.

$$x_1 \geq \nu(\{1\}) = 0; \quad x_2 = 0 = \nu(\{2\}); \quad x_3 = 700 - x_1 \geq 0 = \nu(\{3\}).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^3 x_i = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 0 + (700 - x_1) = 700 = \nu(\{1, 2, 3\}).$$

Y ahora veremos que el conjunto dado es un conjunto estable de imputaciones, tal y como se pedía. Se verifican:

- Estabilidad interna. Sean  $\vec{x}, \vec{y} \in X$ . Veamos que no existe ninguna coalición  $\mathcal{S} \subset \{1, 2, 3\}$  para la cual la imputación  $\vec{x}$  domine a la imputación  $\vec{y}$ . Para que esto fuese así, se tendrían que verificar las dos condiciones que definen la dominancia de imputaciones (Morris, 1994: 158),

$$\forall i \in \mathcal{S} : x_i > y_i; \tag{23}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} x_k \leq \nu(\mathcal{S}). \tag{24}$$

Como se tiene que  $x_2 = y_2 = 0$ , la condición (23) no se verifica para ninguna coalición  $\mathcal{S}$  tal que  $2 \in \mathcal{S}$ . Además, a la vista de la definición del conjunto  $X$ , sabemos que para cualquier  $i \in \{1, 2, 3\}$  se tiene que  $x_i \geq 0$ , e  $y_i \geq 0$ . Entonces, si  $i \in \mathcal{S}$  y se verifican las condiciones (23) y (24),

$$0 \leq y_i < x_i \leq \sum_{k \in \mathcal{S}} x_k \leq \nu(\mathcal{S}),$$

lo que nos indica que podemos descartar cualquier coalición  $\mathcal{S}$  que verifique  $\nu(\mathcal{S}) = 0$ . Esto nos deja únicamente la coalición  $\{1, 3\}$ , pero esta también se puede descartar, puesto que tampoco satisface la condición (23),

$$x_1 > y_1 \iff 700 - x_1 < 700 - y_1 \iff x_3 < y_3.$$

- Estabilidad externa. Sea  $y \notin X$  una imputación. Por definición, se verifica

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : y_i \geq \nu(\{i\}) = 0;$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = \nu(\{1, 2, 3\}) = 700.$$

Es evidente que si  $y_2 = 0$  entonces  $\vec{y} \in X$ , por lo que necesariamente ha de ser  $y_2 > 0$ . Consideramos la imputación  $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$  definida por

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2}.$$

Es evidente que  $\vec{x} \in X$ , puesto que

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} \geq 0; \quad x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} \leq y_1 + y_2 + y_3 = 700; \quad x_2 = 0;$$

$$x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2} = (y_1 + y_2 + y_3) - \left(y_1 + \frac{y_2}{2}\right) = 700 - x_1.$$

Y, si consideramos la coalición  $\mathcal{S} = \{P_1, P_3\}$ , se puede ver que  $\vec{x}$  domina a  $\vec{y}$  para dicha coalición.

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} > y_1; \quad x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2} > y_3;$$

$$x_1 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = \nu(\{1, 2, 3\}).$$

### Examen 13. Enero de 2017

**Problema 13.1.** Se tiene una baraja donde la quinta parte de las cartas están marcadas con la letra  $L$  y el resto con la letra  $M$ .

Al comienzo del juego, dos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  ponen cada uno 20 euros sobre una mesa.

El jugador  $J_2$  saca una carta de la baraja, la mira pero no se la enseña a  $J_1$ .

$J_2$  puede apostar 5 euros o 10 euros. Si  $J_2$  apuesta 5 euros,  $J_1$  debe ver, y si  $J_2$  apuesta 10 euros,  $J_1$  puede pasar o puede ver.

Si  $J_1$  pasa,  $J_2$  gana. Si  $J_1$  ve, se enseña la carta. Si la carta es  $L$  gana  $J_2$ ; si es  $M$ , gana  $J_1$ .

Cuando  $J_1$  ve debe igualar la apuesta de  $J_2$ .

El ganador en cada caso se lleva todo el bote.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 13.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 27.

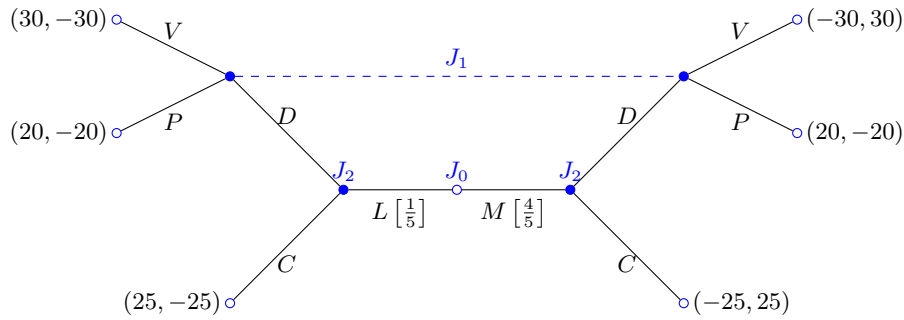


Figura 27: Forma extensiva del juego del problema 13.1.

El jugador  $J_0$  extrae aleatoriamente una carta, que puede ser  $L$  con probabilidad  $\frac{1}{5}$  o  $M$  con probabilidad  $\frac{4}{5}$ . El jugador  $J_2$ , que conoce el resultado de la extracción de la carta apuesta 5 o 10 euros (que representamos por  $C$  y  $D$ , respectivamente), en función de dicho resultado. Por último, si el jugador  $J_2$  apostó 10 euros, el jugador  $J_1$ , sin conocer el resultado de la extracción, ha de decidir si ve la apuesta ( $V$ ) o pasa ( $P$ ). Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores  $J_2$  y  $J_1$  son

$$J_2 = \{CC, CD, DC, DD\}, \quad J_1 = \{V, P\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(CC, V) = \pi(CC, P) = \frac{1}{5} \cdot 25 + \frac{4}{5} \cdot (-25) = -15;$$

$$\pi(CD, V) = \frac{1}{5} \cdot 25 + \frac{4}{5} \cdot (-30) = -19; \quad \pi(CD, P) = \frac{1}{5} \cdot 25 + \frac{4}{5} \cdot 20 = 21;$$

$$\pi(DC, V) = \frac{1}{5} \cdot 30 + \frac{4}{5} \cdot (-25) = -14; \quad \pi(DC, P) = \frac{1}{5} \cdot 20 + \frac{4}{5} \cdot (-25) = -16;$$

$$\pi(DD, V) = \frac{1}{5} \cdot 30 + \frac{4}{5} \cdot (-30) = -18; \quad \pi(DD, P) = \frac{1}{5} \cdot 20 + \frac{4}{5} \cdot 20 = 20.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 29.

$M$		$J_1$	
		$V$	$P$
$J_2$	$CC$	-15	-15
	$CD$	-19	21
	$DC$	-14	-16
	$DD$	-18	20

Cuadro 29: Forma normal del juego del problema 13.1.

Resolución:

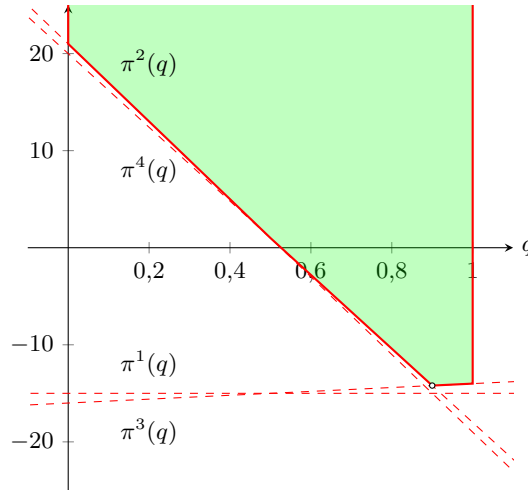
- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- No hay filas ni columnas dominadas.
- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna  $J_1$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1 - q)$ , con

$$\pi^1(q) = -15q - 15(1 - q) = -15; \quad \pi^2(q) = -19q + 21(1 - q) = 21 - 40q;$$

$$\pi^3(q) = -14q - 16(1 - q) = 2q - 16; \quad \pi^4(q) = -18q + 20(1 - q) = 20 - 38q.$$

Representamos en la figura 28 las funciones lineales  $\pi^j(q)$ , y comprobamos que el mínimo del máximo es el punto de intersección de  $\pi^3(q)$  y  $\pi^4(q)$ . Dicho punto es

$$\pi^3(q) = \pi^4(q) \implies 2q - 16 = 20 - 38q \implies 40q = 36 \implies q = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}.$$

Figura 28: Mínimo del máximo para el jugador  $J_1$ .

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila  $J_2$ , podemos eliminar las filas 1 y 2, puesto que estas no son activas cuando se alcanza el mínimo de los valores  $\pi^j(q)$ . En ese caso obtenemos una matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -14 & -16 \\ -18 & 20 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma  $\vec{p} = (p, 1 - p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -14p - 18(1 - p) = -16p + 20(1 - p) \implies 40p = 30 \implies p = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(0, 0, \frac{19}{20}, \frac{1}{20}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right);$$

$$\left. \begin{aligned} v_2(M) &= -14 \cdot \frac{19}{20} - 18 \left(1 - \frac{19}{20}\right) = -16 \cdot \frac{19}{20} + 20 \cdot \left(1 - \frac{19}{20}\right) = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{71}{5} \\ v_2(M) &= 2 \cdot \frac{9}{10} - 16 = 20 - 38 \cdot \frac{9}{10} = -\frac{71}{5} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v(M) = -\frac{71}{5}.$$

**Problema 13.2.** Juegos cooperativos: definición, axiomas de Nash, teorema de Nash y pares de arbitraje.

**Solución del problema 13.2.** Un juego cooperativo (Morris, 1994: 132) es aquel en el que los jugadores pueden hacer acuerdos vinculantes en cuanto a las estrategias que jugará cada uno de ellos.

Consideremos un juego bipersonal, con una región de pagos  $P$  y un punto de *statu quo*  $(u_0, v_0) \in P$  (que usualmente será un par de valores máximos). El par de arbitraje correspondiente a la región de pagos  $P$  y al punto de *statu quo*  $(u_0, v_0)$ , que denotaremos por  $(u^*, v^*) = \Psi(P, (u_0, v_0))$ , es un punto que satisface los axiomas de negociación de Nash (Morris, 1994: 135):

- (1) Racionalidad individual.  $u^* \geq u_0$  y  $v^* \geq v_0$ .
- (2) Optimalidad Pareto. Si  $(u', v') \in P$  es tal que  $u' \geq u^*$  y  $v' \geq v^*$ , entonces  $(u', v') = (u^*, v^*)$ .
- (3) Factibilidad.  $(u^*, v^*) \in P$ .
- (4) Independencia de alternativas irrelevantes. Si  $P' \subset P$  es otra región de pagos y  $(u_0, v_0), (u^*, v^*) \in P'$  entonces

$$(u^*, v^*) = \Psi(P', (u_0, v_0)).$$

- (5) Invarianza ante transformaciones lineales. Sea  $P'$  la región obtenida tras aplicarle a  $P$  la transformación lineal

$$\left. \begin{aligned} u' &= au + b \\ v' &= cv + d \end{aligned} \right\} \quad a, c > 0.$$

Entonces,

$$(au^* + b, cv^* + d) = \Psi(P', (au_0 + b, cv_0 + d)).$$

- (6) Simetría. Si la región de pagos  $P$  es simétrica, esto es,

$$(u, v) \in P \iff (v, u) \in P;$$

y si  $u_0 = v_0$ , entonces  $u^* = v^*$ .

**Teorema de Nash** (Morris, 1994: 138). Existe un único procedimiento de arbitraje  $\Psi$  que satisface los axiomas de negociación de Nash.

**Problema 13.3.** Dos centros de investigación, que designaremos como jugadores 1 y 2 respectivamente, han obtenido independientemente fórmulas muy parecidas de un nuevo fármaco. El centro 1 ha patentado y homologado su fórmula para los países asiáticos y países de la Unión Europea. El centro 2 tiene homologada su patente para los países asiáticos y para Estados Unidos.

La comercialización de uno de los fármacos produciría unos beneficios de 7 billones de dólares en el mercado asiático, de 3 billones en el europeo y de 3 billones en Estados Unidos. Si se comercializan a la vez los dos fármacos en un mismo mercado, los beneficios se reparten a partes iguales.

Por otra parte, hay dos empresas 3 y 4, que tienen los factores y la tecnología necesarios para la fabricación de los fármacos, pero que cada una de ellas tiene una limitación en la producción ya que solo puede abastecer al mercado asiático y a uno de los otros mercados (europeo o americano).

Cualquiera de las dos empresas puede fabricar y comercializar cualquiera de los dos fármacos pero cada uno de los centros que posee una de las fórmulas solo puede conceder su licencia a una de las empresas, y cada empresa solo puede obtener una licencia.

Representar el juego en forma de función característica y hallar el *core* de este juego.

**Solución del problema 13.3.** Estamos ante un juego tetrapersonal. Los jugadores son los dos centros de investigación ( $P_1$  y  $P_2$ ) y las dos empresas ( $P_3$  y  $P_4$ ). La función característica del juego se da a continuación (los pagos se dan en billones de dólares).

$$\begin{aligned}\nu(\emptyset) &= \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{4\}) = 0; \\ \nu(\{1, 2\}) &= 0; \quad \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{1, 4\}) = \nu(\{2, 3\}) = \nu(\{2, 4\}) = \frac{13}{2}; \quad \nu(\{3, 4\}) = 0; \\ \nu(\{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 4\}) = \nu(\{1, 3, 4\}) = \nu(\{2, 3, 4\}) = 10; \quad \nu(\{1, 2, 3, 4\}) = 13.\end{aligned}$$

Sea  $\vec{x}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994: 160), se han de verificar

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= \nu(\{1, 2, 3, 4\}) = 13; \\ x_i &\geq \nu(\{i\}) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}; \\ x_1 + x_2 &\geq \nu(\{1, 2\}) = 0; \\ x_1 + x_3 &\geq \nu(\{1, 3\}) = \frac{13}{2}; \\ x_1 + x_4 &\geq \nu(\{1, 4\}) = \frac{13}{2}; \\ x_2 + x_3 &\geq \nu(\{2, 3\}) = \frac{13}{2}; \\ x_2 + x_4 &\geq \nu(\{2, 4\}) = \frac{13}{2}; \\ x_3 + x_4 &\geq \nu(\{3, 4\}) = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq \nu(\{1, 2, 3\}) = 10; \\ x_1 + x_2 + x_4 &\geq \nu(\{1, 2, 4\}) = 10; \\ x_1 + x_3 + x_4 &\geq \nu(\{1, 3, 4\}) = 10; \\ x_2 + x_3 + x_4 &\geq \nu(\{2, 3, 4\}) = 10.\end{aligned}$$

Si sumamos las cuatro últimas inecuaciones se obtiene

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq 40 \implies x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{40}{3} > 13.$$

Como el resultado contradice la primera ecuación, no hay ninguna solución que satisfaga todas las condiciones expuestas. En consecuencia, el núcleo del juego es vacío.



## Examen 14. Febrero de 2017

**Problema 14.1.** Una empresa tiene dos compañías  $C_1$  y  $C_2$  que tienen un promedio de facturas por impuestos, de 8 y 10 millones de euros respectivamente cada año.

Para cada compañía la empresa puede, o bien pagar su verdadero impuesto obligatorio o falsificar sus cuentas y mostrar un impuesto de cero euros.

La Agencia Tributaria solo tiene recursos para investigar una de las compañías cada año. Si investigan una compañía y comprueba que son falsos los resultados, descubren el fraude y esa compañía tendrá que pagar el impuesto requerido más una multa de la mitad.

Los pagos son el dinero que la Agencia Tributaria recibe.

Hallar la forma normal y la solución de este juego.

**Solución del problema 14.1.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma cero con información imperfecta. La forma extensiva se representa en la figura 29.

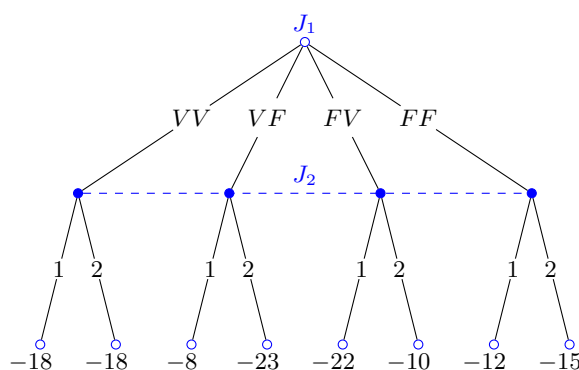


Figura 29: Forma extensiva del juego del problema 14.1.

El jugador  $J_1$  (la empresa) puede elegir para cada una de sus empresas entre pagar el verdadero impuesto ( $V$ ) o falsificar sus cuentas ( $F$ ). A continuación, el jugador  $J_2$  (la Agencia Tributaria), sin conocer la elección de  $J_1$ , elige entre investigar una de las dos compañías. Por tanto, el conjunto de estrategias para ambos jugadores es

$$J_1 = \{VV, VF, FV, FF\}, \quad J_2 = \{1, 2\}.$$

Como no hay movimientos aleatorios, dichas estrategias permiten obtener directamente los pagos en cada caso, por lo que tenemos los datos para escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 30.

$M$		$J_2$	
		1	2
$J_1$	$VV$	-18	-18
	$VF$	-8	-23
	$FV$	-22	-10
	$FF$	-12	-15

Cuadro 30: Forma normal del juego del problema 14.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.

- La fila 4 domina a la fila 1. Eliminamos la fila dominada, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -8 & -23 \\ -22 & -10 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1 - q)$ , con

$$\pi^1(q) = -8q - 23(1 - q) = 15q - 23; \quad \pi^2(q) = -22q - 10(1 - q) = -12q - 10; \quad \pi^3(q) = -12q - 15(1 - q) = 3q - 15.$$

Representamos en la figura 30 las funciones lineales  $\pi^j(q)$ , y comprobamos que el mínimo del máximo es el punto de intersección de  $\pi^2(q)$  y  $\pi^3(q)$ . Dicho punto es

$$\pi^2(q) = \pi^3(q) \implies -12q - 10 = 3q - 15 \implies 15q = 5 \implies q = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

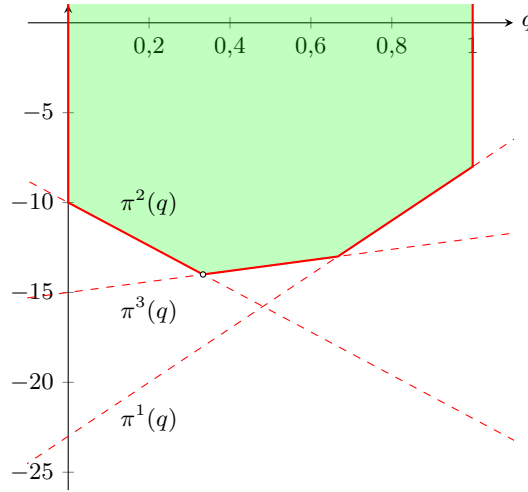


Figura 30: Mínimo del máximo para el jugador  $J_2$ .

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$ , podemos eliminar la fila 1, puesto que esta no es activa cuando se alcanza el mínimo de los valores  $\pi^j(q)$ . En ese caso obtenemos una segunda matriz reducida

$$M^{**} = \begin{pmatrix} -22 & -10 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma  $\vec{p} = (p, 1 - p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -22p - 12(1 - p) = -10p - 15(1 - p) \implies 1 - p = 4p \implies p = \frac{1}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \left(0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right); \\ \left. \begin{aligned} v_1(M) &= -22 \cdot \frac{1}{5} - 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = -10 \cdot \frac{1}{5} - 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = -14 \\ v_2(M) &= -12 \cdot \frac{1}{3} - 10 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 15 = -14 \end{aligned} \right\} \implies v(M) = -14. \end{aligned}$$

**Problema 14.2.** Dos empresas automovilísticas deciden lanzar al mercado al mismo tiempo un modelo de coche de gama intermedia. Cada una de ellas se está planteando si ofrecer o no financiación a los clientes, lo cual le supondría captar mayor cuota de mercado, pero llevaría consigo ciertos costes. Ambas empresas prefieren no ofertar dicha financiación, pero cada una teme que la otra la ofrezca y, por tanto, acapare mayor número de compradores. Supongamos que los beneficios esperados por las empresas son los siguientes. Si ambas ofrecen financiación, 40 millones para cada una; si ninguna lo hace, 60 para cada una; y si una la ofrece y la otra no, la primera gana 80 y la segunda 30.

Calcular el punto de equilibrio si el juego se considera no cooperativo y si se considera cooperativo.

**Solución del problema 14.2.** Idéntico al problema 12.2 de la página 50.

**Problema 14.3.** La función característica de un juego tripersonal cooperativo viene dada por:

$$\begin{aligned}\nu(\emptyset) &= \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = 0; \\ \nu(\{1, 2\}) &= 3; \quad \nu(\{1, 3\}) = 5; \quad \nu(\{2, 3\}) = 7; \quad \nu(\{1, 2, 3\}) = 10.\end{aligned}$$

Calcular el valor de Shapley.

**Solución del problema 14.3.** Estudiamos cada jugador por separado.

■ Jugador  $J_1$ .

$$\begin{aligned}\delta(1, \{1\}) &= \nu(\{1\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(1, \{1, 2\}) &= \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{2\}) = 3 - 0 = 3; \\ \delta(1, \{1, 3\}) &= \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{3\}) = 5 - 0 = 5; \\ \delta(1, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{2, 3\}) = 10 - 7 = 3; \\ \phi_1 &= \sum_{S \ni 1} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(1, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 3 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 5 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 3 = \frac{7}{3}.\end{aligned}$$

■ Jugador  $J_2$ .

$$\begin{aligned}\delta(2, \{2\}) &= \nu(\{2\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(2, \{1, 2\}) &= \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{1\}) = 3 - 0 = 3; \\ \delta(2, \{2, 3\}) &= \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{3\}) = 7 - 0 = 7; \\ \delta(2, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 3\}) = 10 - 5 = 5; \\ \phi_2 &= \sum_{S \ni 2} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(2, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 3 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 7 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 5 = \frac{10}{3}.\end{aligned}$$

■ Jugador  $J_3$ .

$$\begin{aligned}\delta(3, \{3\}) &= \nu(\{3\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(3, \{1, 3\}) &= \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{1\}) = 5 - 0 = 5; \\ \delta(3, \{2, 3\}) &= \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{2\}) = 7 - 0 = 7; \\ \delta(3, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 2\}) = 10 - 3 = 7; \\ \phi_3 &= \sum_{S \ni 3} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(3, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 5 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 7 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 7 = \frac{13}{3}.\end{aligned}$$

Por tanto, el vector de Shapley es  $\vec{\phi}(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3})$ .

## Examen 15. Septiembre de 2017 – Convocatoria ordinaria

**Problema 15.1.** En una urna hay tres bolas rojas y cinco verdes.

El jugador  $J_1$  extrae una bola aleatoriamente y sin mirarla, tira una moneda y elige cara ( $C$ ) o cruz ( $X$ ).

Después, al jugador  $J_2$  se le comunica si  $J_1$  ha elegido cara o cruz pero tampoco sabe el resultado de la bola extraída por  $J_1$ . Entonces  $J_2$  elige cara o cruz.

La función de pago es:

$$\begin{aligned} M(R, C, C) &= 4, & M(V, C, C) &= 2, \\ M(R, C, X) &= -3, & M(V, C, X) &= 1, \\ M(R, X, C) &= 5, & M(V, X, C) &= 0, \\ M(R, X, X) &= -2, & M(V, X, X) &= -3. \end{aligned}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 15.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 31.

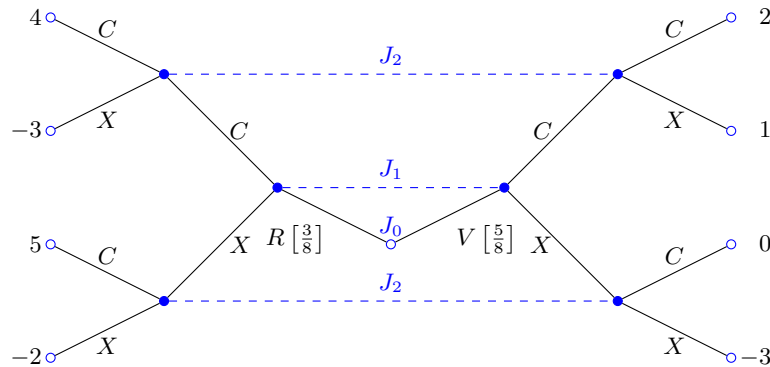


Figura 31: Forma extensiva del juego del problema 15.1.

El jugador  $J_0$  elige aleatoriamente una bola, que puede ser roja ( $R$ ) con probabilidad  $\frac{3}{8}$  o verde ( $V$ ) con probabilidad  $\frac{5}{8}$ . Después, el jugador  $J_1$ , sin conocer el color de la bola, elige cara ( $C$ ) o cruz ( $X$ ). Por último, el jugador  $J_2$ , sin conocer el color de la bola pero conociendo la elección de  $J_1$ , elige a su vez cara ( $C$ ) o cruz ( $X$ ). Así, el conjunto de estrategias posibles para ambos jugadores es

$$J_1 = \{C, X\}, \quad J_2 = \{CC, CX, XC, XX\}.$$

En función de dichas estrategias calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(C, CC) &= \pi(C, CX) = \frac{3}{8} \cdot 4 + \frac{5}{8} \cdot 2 = \frac{11}{4}; & \pi(C, XC) &= \pi(C, XX) = \frac{3}{8} \cdot (-3) + \frac{5}{8} \cdot 1 = -\frac{1}{2}; \\ \pi(X, CC) &= \frac{3}{8} \cdot 5 + \frac{5}{8} \cdot 0 = \frac{15}{8}; & \pi(X, CX) &= \frac{3}{8} \cdot (-2) + \frac{5}{8} \cdot (-3) = -\frac{21}{8}; \\ \pi(X, XC) &= \frac{3}{8} \cdot 5 + \frac{5}{8} \cdot 0 = \frac{15}{8}; & \pi(X, XX) &= \frac{3}{8} \cdot (-2) + \frac{5}{8} \cdot (-3) = -\frac{21}{8}. \end{aligned}$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 31.

$M$		$J_2$			
		$CC$	$CX$	$XC$	$XX$
$J_1$	$C$	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	$X$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{21}{8}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{21}{8}$

Cuadro 31: Forma normal del juego del problema 15.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  tiene un punto de silla, que es el elemento  $(1, 4)$ . En consecuencia, el jugador  $J_1$  debe elegir siempre cara ( $C$ ), y el jugador  $J_2$  debe elegir siempre cruz ( $XX$ ), independientemente de la elección  $J_1$ . El valor del juego es

$$v(M) = -\frac{1}{2}.$$

**Problema 15.2.** Hallar los valores maximín y el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-3, -6) & (1, 0) \\ (3, -6) & (0, 3) \\ (-3, 3) & (3, 3) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 15.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la primera fila, que está dominada por la tercera. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 3p - 3(1-p) = 3(1-p) \implies 3p = 6(1-p) \implies p = 2(1-p) \implies p = \frac{2}{3};$$

$$v_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1.$$

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{21}$ , por lo que  $v_2 = m_{21} = 0$ .

En la figura 32 se representa la región de pagos. Dado que en ella solo hay un punto óptimo Pareto, el punto  $(3, 3)$ , dicho punto será el par de arbitraje buscado, que maximiza la función

$$g(u, v) = (u - 1)v.$$

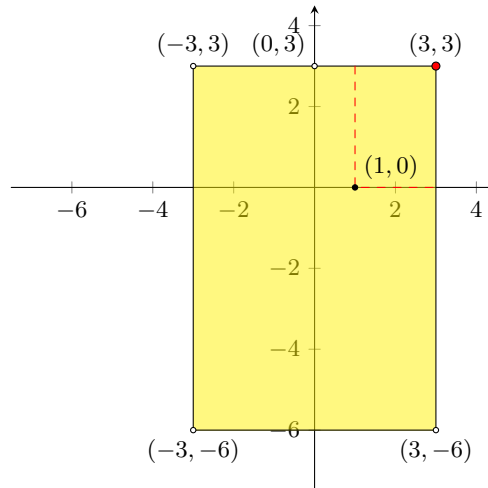


Figura 32: Región de pagos para el problema 15.2.

**Problema 15.3.** Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 200 000 euros.

Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 500 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 600 000 euros.

Si los tres participantes llegan al acuerdo de dividir la finca en dos zonas, una comercial y otra residencial se alcanzaría un valor de mercado de 900 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* o núcleo de este juego y el valor de Shapley.

**Solución del problema 15.3.** Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca  $P$ , el empresario que propone la utilización de la finca como polígono industrial  $I$ , y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca  $V$ . La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) &= 0; & \nu(\{P\}) &= 200; & \nu(\{I\}) &= \nu(\{V\}) = 0; \\ \nu(\{P, I\}) &= 500; & \nu(\{P, V\}) &= 600; & \nu(\{I, V\}) &= 0; & \nu(\{P, I, V\}) &= 900. \end{aligned}$$

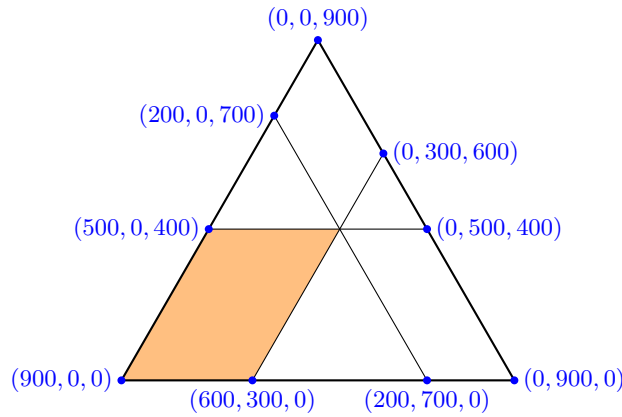


Figura 33: Obtención gráfica del *core* para el juego del problema problema 15.3.

Sea  $\vec{x}(x_P, x_I, x_V)$  una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994: 160), se han de verificar

$$x_P + x_I + x_V = \nu(\{P, I, V\}) = 900; \quad (25)$$

$$x_P \geq \nu(\{P\}) = 200; \quad (26)$$

$$x_I \geq \nu(\{I\}) = 0; \quad (27)$$

$$x_V \geq \nu(\{V\}) = 0; \quad (28)$$

$$x_P + x_I \geq \nu(\{P, I\}) = 500; \quad (29)$$

$$x_P + x_V \geq \nu(\{P, V\}) = 600; \quad (30)$$

$$x_I + x_V \geq \nu(\{I, V\}) = 0. \quad (31)$$

De las desigualdades (26) y (29) se deduce

$$x_I \leq 300.$$

Análogamente, de las desigualdades (26) y (30) se deduce

$$x_V \leq 400.$$

Imponiendo además la igualdad (25),

$$x_P = 900 - x_I - x_V.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas las condiciones anteriores, y que se representa en la figura 33.

$$\{(900 - x_I - x_V, x_I, x_V) : 0 \leq x_I \leq 300, 0 \leq x_V \leq 400\}.$$

Para calcular el valor de Shapley estudiamos cada jugador por separado.

■ Jugador  $P$ .

$$\delta(P, \{P\}) = \nu(\{P\}) - \nu(\emptyset) = 200 - 0 = 200;$$

$$\delta(P, \{P, I\}) = \nu(\{P, I\}) - \nu(\{I\}) = 500 - 0 = 500;$$

$$\delta(P, \{P, V\}) = \nu(\{P, V\}) - \nu(\{V\}) = 600 - 0 = 600;$$

$$\delta(P, \{P, I, V\}) = \nu(\{P, I, V\}) - \nu(\{I, V\}) = 900 - 0 = 900;$$

$$\phi_P = \sum_{S \ni P} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(P, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 200 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 500 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 600 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 900 = 550.$$

■ Jugador  $I$ .

$$\delta(I, \{I\}) = \nu(\{I\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(I, \{P, I\}) = \nu(\{P, I\}) - \nu(\{P\}) = 500 - 200 = 300;$$

$$\delta(I, \{I, V\}) = \nu(\{I, V\}) - \nu(\{V\}) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(I, \{P, I, V\}) = \nu(\{P, I, V\}) - \nu(\{P, V\}) = 900 - 600 = 300;$$

$$\phi_I = \sum_{S \ni I} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(I, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 300 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 300 = 150.$$

■ Jugador  $V$ .

$$\delta(V, \{V\}) = \nu(\{V\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(V, \{P, V\}) = \nu(\{P, V\}) - \nu(\{P\}) = 600 - 200 = 400;$$

$$\delta(V, \{I, V\}) = \nu(\{I, V\}) - \nu(\{I\}) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(V, \{P, I, V\}) = \nu(\{P, I, V\}) - \nu(\{P, I\}) = 900 - 500 = 400;$$

$$\phi_V = \sum_{S \ni V} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(V, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 400 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 400 = 200.$$

Por tanto, el vector de Shapley es  $\vec{\phi}(550, 150, 200)$ .

## Examen 16. Septiembre de 2017 – Convocatoria de reserva

**Problema 16.1.** El jugador  $J_2$  lanza un dado con seis caras numeradas del uno al seis y mira si el resultado es par ( $P$ ) o impar ( $I$ ). A continuación elige seguir un plan ( $S$ ) o cambiarlo ( $C$ ).

Después el jugador  $J_1$  sin conocer la elección de  $J_2$  pero sabiendo el resultado del dado, elige seguir ( $S$ ) o cambiar ( $C$ ).

La función de pago es:

$$\begin{aligned} M(P, S, S) &= -3, & M(I, S, S) &= -5, \\ M(P, S, C) &= 4, & M(I, S, C) &= 8, \\ M(P, C, S) &= 2, & M(I, C, S) &= -2, \\ M(P, C, C) &= 1, & M(I, C, C) &= 3. \end{aligned}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 16.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 34. Dado que jugador  $J_2$  juega en primer lugar, este será nuestro jugador fila, y los pagos que se recogen son los que recibe el jugador  $J_2$ .

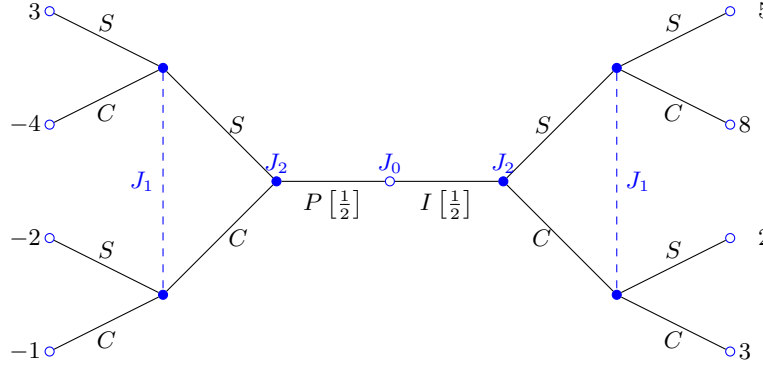


Figura 34: Forma extensiva del juego del problema 16.1.

El jugador  $J_0$  lanza un dado, que da un resultado par ( $P$ ) o impar ( $I$ ), ambos con probabilidad  $\frac{1}{2}$ . Después, el jugador  $J_1$ , que conoce el resultado del dado, elige seguir ( $S$ ) o cambiar ( $C$ ). Por último, el jugador  $J_2$ , que también conoce el resultado del dado pero no la elección de  $J_1$ , elige a su vez seguir ( $S$ ) o cambiar ( $C$ ). Así, el conjunto de estrategias posibles para ambos jugadores es

$$J_1 = J_2 = \{SS, SC, CS, CC\}.$$

En función de dichas estrategias calculamos los pagos esperados.

$$\begin{aligned} \pi(SS, SS) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 4; & \pi(SS, SC) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-8) = -\frac{5}{2}; \\ \pi(SS, CS) &= \frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{1}{2}; & \pi(SS, CC) &= \frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot (-8) = -6; \\ \pi(SC, SS) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{5}{2}; & \pi(SC, SC) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 0; \\ \pi(SC, CS) &= \frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot 2 = -1; & \pi(SC, CC) &= \frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{7}{2}; \\ \pi(CS, SS) &= \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{3}{2}; & \pi(CS, SC) &= \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot (-8) = -5; \\ \pi(CS, CS) &= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 5 = 2; & \pi(CS, CC) &= \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-8) = -\frac{9}{2}; \\ \pi(CC, SS) &= \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot 2 = 0; & \pi(CC, SC) &= \frac{1}{2} \cdot (-2) + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -\frac{5}{2}; \end{aligned}$$



$$\pi(CC, CS) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}; \quad \pi(CC, CC) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -2.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 32.

$M$		$J_1$			
		$SS$	$SC$	$CS$	$CC$
$J_2$	$SS$	4	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-6
	$SC$	$\frac{5}{2}$	0	-1	$-\frac{7}{2}$
	$CS$	$\frac{3}{2}$	-5	2	$-\frac{9}{2}$
	$CC$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2

Cuadro 32: Forma normal del juego del problema 16.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- En la matriz  $M$  la columna 4 domina a las columnas 1 y 3. Eliminamos las columnas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -6 \\ 0 & -\frac{7}{2} \\ -5 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

- En la matriz  $M^*$  la fila 2 domina a las filas 1 y 3. Eliminamos las filas dominadas, y obtenemos una nueva matriz reducida

$$M^{**} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida  $M^{**}$ , una estrategia mixta para el jugador fila  $J_2$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1-p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -\frac{5}{2}(1-p) = -\frac{7}{2}p - 2(1-p) \implies 5(1-p) = 7p + 4(1-p) \implies p = \frac{1}{8}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida  $M^{**}$ , una estrategia mixta para el jugador columna  $J_1$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1-q)$ , y tiene que verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies -\frac{7}{2}(1-q) = -\frac{5}{2}q - 2(1-q) \implies 7(1-q) = 5q + 4(1-q) \implies q = \frac{3}{8}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \left(0, \frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8}\right); \quad \vec{q} = \left(0, \frac{3}{8}, 0, \frac{5}{8}\right); \\ \left. \begin{aligned} v_2(M) &= -\frac{5}{2} \left(1 - \frac{1}{8}\right) = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = -\frac{35}{16} \\ v_1(M) &= -\frac{7}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{8} - 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = -\frac{35}{16} \end{aligned} \right\} \implies v(M) = -\frac{35}{16}. \end{aligned}$$

**Problema 16.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}, 0\right) & \left(-\frac{1}{2}, -4\right) \\ (1, 2) & (-2, 4) \\ (4, -4) & \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 16.2.** Idéntico al problema 5.2 de la página 20.

**Problema 16.3.** El juego tripersonal de parejas es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si  $P_2$  elige a  $P_3$ , y  $P_3$  elige a  $P_2$ , entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de  $\frac{1}{2}$ , mientras la persona que no entra en la pareja recibe  $-1$ .

Si no se forma pareja, por ejemplo, si  $P_1$  elige a  $P_2$ ,  $P_2$  elige a  $P_3$ , y  $P_3$  elige a  $P_1$ , entonces cada uno recibe un pago de cero.

Probar que es de suma nula y esencial.

**Solución del problema 16.3.** Idéntico al problema 3.3 de la página 12.

## Examen 17. Enero de 2018

**Problema 17.1.** Se considera el siguiente juego de suma nula:

Dos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  eligen a la vez el número de dedos que van a enseñar al contrario entre 1, 2 y 3.

Si la suma es par,  $J_1$  paga a  $J_2$  la diferencia de los dedos (en euros) sacados por ambos.

Si la suma es impar,  $J_2$  paga a  $J_1$  una cantidad igual al número de dedos (en euros) sacados por  $J_1$ .

Determinar el valor y las estrategias óptimas de los dos jugadores.

**Solución del problema 17.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta. Las estrategias de cada jugador, que no conoce de antemano lo que jugará el otro, son precisamente el número de dedos que van a enseñar.

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{1, 2, 3\}.$$

La forma extensiva del juego  $\Gamma$  se da a continuación, siendo el árbol  $T$  el representado en la figura 35.

$$\Gamma = \left\{ T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{1, 2, 3\}, \Sigma_2 = \{1, 2, 3\}\} \right\}.$$

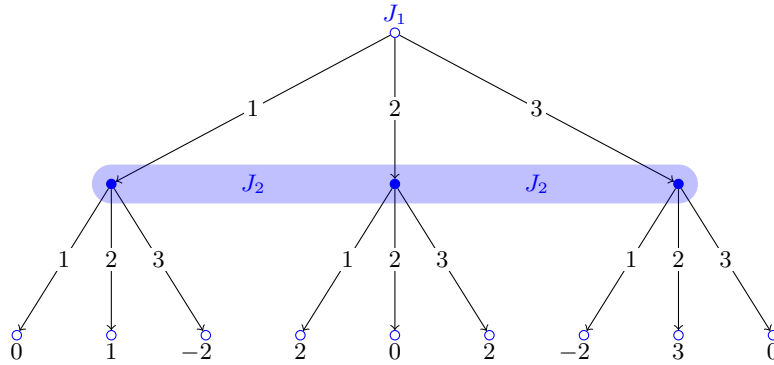


Figura 35: Árbol  $T$  del juego  $\Gamma$ , para el problema 17.1.

La forma normal del juego  $\Gamma$  se recoge en la matriz  $M$  del cuadro 33.

$M$		$J_2$		
		1	2	3
$J_1$	1	0	1	-2
	2	2	0	2
	3	-2	3	0

Cuadro 33: Forma normal del juego  $\Gamma$  del problema 17.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 está dominada por la estrategia mixta<sup>2</sup> para  $J_1$  dada por  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ . Si se elimina se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Para justificar la eliminación de una estrategia pura dominada por una estrategia mixta véanse el corolario 2.2 y el teorema 2.11 de Jones (2000: 80).

- En la matriz  $M^*$  la columna 1 domina a la columna 3. Eliminamos también la columna dominada y obtenemos una nueva matriz reducida

$$M^{**} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida  $M^{**}$ , una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1-p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 2p - 2(1-p) = 3(1-p) \implies 2p = 5(1-p) \implies p = \frac{5}{7}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida  $M^{**}$ , una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1-q)$ , y tiene que verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies 2q = -2q + 3(1-q) \implies 4q = 3(1-q) \implies q = \frac{3}{7}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right); \\ \left. \begin{aligned} v_1(M) &= 2 \cdot \frac{5}{7} - 2 \cdot \left(1 - \frac{5}{7}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{5}{7}\right) = \frac{6}{7} \\ v_2(M) &= 2 \cdot \frac{3}{7} - 2 \cdot \frac{3}{7} + 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{6}{7} \end{aligned} \right\} \implies v(M) = \frac{6}{7}. \end{aligned}$$

**Problema 17.2.** Dos comerciantes en competencia, compran un producto a 10 euros la unidad y entre los dos venden 500 unidades por día. Cada uno ha estado vendiendo a 15 euros la unidad con lo que se dividían el mercado a partes iguales.

Uno de los comerciantes está pensando en vender a menor precio que el otro y se sabe que el comerciante que ponga el precio más bajo automáticamente se queda con todas las ventas del día. Si ambos fijan el mismo precio, se reparten a partes iguales el mercado.

Obligatoriamente el precio del producto debe ser un número entero entre 11 y 15 ambos inclusive.

- Escribir la matriz de pagos.
- ¿Cuál debería ser el precio definitivo para un día, utilizando el criterio de las estrategias dominadas?

**Solución del problema 17.2.** Hay una cierta ambigüedad en este problema. Si ambos comerciantes fijan precios distintos el que ofrece el precio más barato vende 500 unidades y obtiene beneficios. Pero el que ofrece el precio más caro podemos considerar que tiene pérdidas (beneficios negativos) puesto que tiene que comprar el producto, y podemos considerar que tiene beneficios nulos (compra el producto, pero podría venderlo otro día, por lo que no se consideraría una pérdida). Lo voy a resolver con la primera interpretación, aunque en este caso no afectaría demasiado al resultado, solo a los valores de la matriz de pagos.

- Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Si ambos jugadores venden a un precio  $p$  se reparten el mercado, por lo que cada uno obtendría unos beneficios de

$$\frac{500}{2}(p - 10) = 250(p - 10).$$

En otro caso, si un jugador vende a un precio  $p$  y otro a precio  $q$  con  $p < q$ , el que vende a precio más alto no tendría beneficios, y el que vende a precio más bajo tendría unos beneficios de

$$500(p - 10).$$

Con esta información se puede dar la bimatriz  $M$  de la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 34.

$M$		$J_2$				
		11	12	13	14	15
$J_1$	11	(250, 250)	(500, 0)	(500, 0)	(500, 0)	(500, 0)
	12	(0, 500)	(500, 500)	(1 000, 0)	(1 000, 0)	(1 000, 0)
	13	(0, 500)	(0, 1 000)	(750, 750)	(1 500, 0)	(1 500, 0)
	14	(0, 500)	(0, 1 000)	(0, 1 500)	(1 000, 1 000)	(2 000, 0)
	15	(0, 500)	(0, 1 000)	(0, 1 500)	(0, 2 000)	(1 250, 1 250)

Cuadro 34: Forma normal del juego del problema 17.2.

- (b) El juego es simétrico, por lo que basta con resolverlo para uno de los jugadores, dado que ambos tienen el mismo conjunto de estrategias y la misma matriz de pagos. La matriz de pagos para cualquiera de los jugadores se recoge en el cuadro 35.

	11	12	13	14	15
11	250	500	500	500	500
12	0	500	1 000	1 000	1 000
13	0	0	750	1 500	1 500
14	0	0	0	1 000	2 000
15	0	0	0	0	1 250

Cuadro 35: Matriz de pagos para ambos jugadores.

La matriz anterior tiene un punto de silla,  $m_{11,11} = 250$ , por lo que ambos jugadores deberían fijar un precio de 11 €, siendo en ese caso los beneficios para ambos de 250 €. Si se hace el mismo razonamiento únicamente por dominancia, es fácil ver que la primera columna domina a todas las demás. Y si nos quedamos únicamente con dicha columna, entonces la primera fila también domina a todas las demás.

**Problema 17.3.** Conceptos de solución de los juegos  $N$ -personales cooperativos.

**Solución del problema 17.3.** En el caso de los juegos  $N$ -personales cooperativos estudiamos dos conceptos de solución:

- **Conjunto estable de imputaciones.** Sea  $\nu$  un juego  $N$ -personal con jugadores  $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_N\}$ . Llamaremos imputación (Morris, 1994: 156) a un vector de la forma  $\vec{x}(x_1, \dots, x_N)$ , y tal que satisface:

- Racionalidad individual:

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} : x_i \geq \nu(\{J_i\}).$$

- Racionalidad colectiva:

$$\sum_{i=1}^N x_i \geq \nu(\mathcal{P}).$$

Sean  $\vec{x}, \vec{y}$  dos imputaciones, y sea  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$  una coalición. Diremos que  $\vec{x}$  domina a  $\vec{y}$  para la coalición  $\mathcal{S}$  (Morris, 1994: 158), y lo denotaremos por  $\vec{x} \succ_{\mathcal{S}} \vec{y}$ , si se satisfacen:

- $\forall J_i \in \mathcal{S} : x_i > y_i$ .
- $\sum_{J_i \in \mathcal{S}} x_i \leq \nu(\mathcal{S})$ .

Por último, diremos que  $X$  es un conjunto estable de imputaciones (Morris, 1994: 174), si es un conjunto de imputaciones que satisface:

- Estabilidad interna. No existen en  $X$  dos imputaciones  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$  tales que  $\vec{x}$  domine a  $\vec{y}$  para ninguna coalición.
- Estabilidad externa. Si  $\vec{y} \notin X$  es una imputación, existe otra imputación  $\vec{x} \in X$  y una coalición  $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$  tales que  $\vec{x}$  domina a  $\vec{y}$  para la coalición  $\mathcal{S}$ .

Según el teorema 6.21 de Morris (1994: 177), si  $\nu$  es un juego simple,

$$\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{P} : \nu(\mathcal{T}) \in \{0, 1\},$$

y si  $\mathcal{S}$  es una coalición ganadora mínima,

$$\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S} \implies 0 = \nu(\mathcal{T}) < \nu(\mathcal{S}) = 1,$$

entonces el conjunto de todas las imputaciones  $\vec{x}(x_1, \dots, x_N)$  que verifiquen

$$\forall J_i \notin \mathcal{S} : x_i = 0$$

es un conjunto estable de imputaciones.

Un conjunto estable de imputaciones  $X$  puede ser visto como la solución de un juego  $N$ -personal cooperativo. Si se da una imputación que no pertenece a  $X$ , es fácil que esta se abandone en favor de otra que sí pertenezca a  $X$ , sin embargo, no debería ocurrir el cambio a la inversa, es decir, que se abandone una imputación de  $X$  por otra que no es de  $X$ . Esto está garantizado por la estabilidad externa. Además, cualquiera de las imputaciones de  $X$  podrían ocurrir sin que una prevalezca sobre las otras, por la estabilidad interna.

- **Valor de Shapley.** Sea  $\nu$  un juego  $N$ -personal con jugadores  $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_N\}$ . Llamaremos vector de Shapley (Morris, 1994: 180) del juego  $\nu$  al vector  $\vec{\phi}(\phi_1, \dots, \phi_N)$ , donde cada  $\phi_i$  será denominado valor de Shapley para el jugador  $J_i$  y es de la forma

$$\phi_i = \sum_{\mathcal{S} \ni J_i} \frac{(N - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{N!} \delta(J_i, \mathcal{S});$$

con

$$\delta(J_i, \mathcal{S}) = \nu(\mathcal{S}) - \nu(\mathcal{S} \setminus \{J_i\}). \quad (32)$$

Según el teorema 6.22 de Morris (1994: 181), el vector de Shapley de un juego es una imputación para dicho juego.

El valor de Shapley es una solución para un juego cooperativo en el sentido en que es una imputación en la que se trata de asignar los pagos de cada jugador en función de *cuánto* contribuye dicho jugador en cada una de las posibles coaliciones en las que participa. En particular, el término (32), es una forma de medir precisamente cuánto contribuye el jugador  $J_i$  a los pagos de la coalición  $\mathcal{S}$  (a la que pertenece).

## Examen 18. Febrero de 2018

**Problema 18.1.** Se considera el siguiente juego de suma nula:

El jugador  $J_1$  saca al azar una bola de una urna que contiene tres bolas negras y dos blancas; la mira y apuesta cinco euros o diez euros.

El jugador  $J_2$  puede jugar o no jugar.

Si  $J_2$  no juega, entonces  $J_1$  le gana cinco euros, y si  $J_2$  juega, entonces debe igualar la apuesta de  $J_1$ . En ese caso  $J_1$  ganará todo el dinero si toma una bola blanca, y si toma una negra perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 18.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador  $J_0$ , elige una bola negra o blanca con probabilidades

$$\mathcal{P}(N) = \frac{3}{5}, \quad \mathcal{P}(B) = \frac{2}{5}.$$

En la segunda etapa, el jugador  $J_1$ , tras ver la bola extraída, elige apostar cinco ( $C$ ) o diez ( $D$ ) euros. El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{CC, CD, DC, DD\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia  $CD$  indica que si la bola extraída es negra entonces  $J_1$  apostará 5€, mientras que si la bola elegida es blanca entonces  $J_1$  apostará 10€. Por último, en la tercera etapa, el jugador  $J_2$  elige jugar o no jugar, conociendo la apuesta del jugador  $J_1$ , pero no la bola extraída<sup>3</sup>. Por tanto, el conjunto de estrategias para  $J_2$  será

$$\Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\};$$

donde, por ejemplo la estrategia  $JN$  indica que si  $J_1$  apostó 5€ entonces  $J_2$  jugará, mientras que si  $J_1$  apostó 10€ entonces  $J_2$  no jugará.

La forma extensiva del juego  $\Gamma$  se da a continuación, siendo el árbol  $T$  el representado en la figura 36.

$$\Gamma = \left\{ T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{CC, CD, DC, DD\}, \Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\}\} \right\}.$$

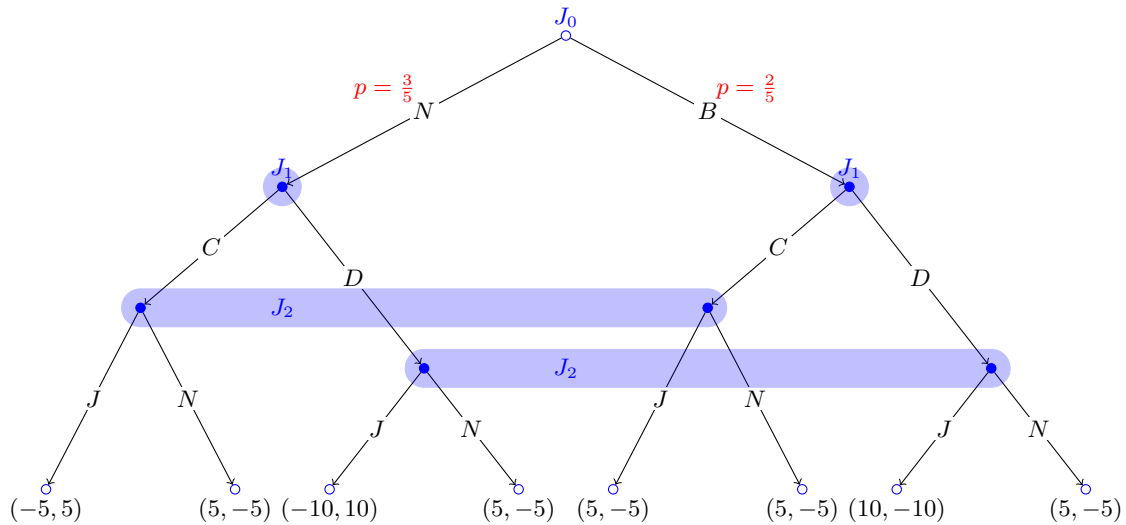


Figura 36: Árbol  $T$  del juego  $\Gamma$ , para el problema 18.1.

<sup>3</sup>No se especifica, pero entendemos que  $J_2$  no conoce la bola extraída puesto que en otro caso el juego sería casi trivial.

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(CC, JJ) = \pi(CC, JN) = \frac{3}{5} \cdot (-5) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -1; \quad \pi(CC, NJ) = \pi(CC, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$

$$\pi(CD, JJ) = \frac{3}{5} \cdot (-5) + \frac{2}{5} \cdot 10 = 1; \quad \pi(CD, JN) = \frac{3}{5} \cdot (-5) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -1;$$

$$\pi(CD, NJ) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 10 = 7; \quad \pi(CD, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$

$$\pi(DC, JJ) = \frac{3}{5} \cdot (-10) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -4; \quad \pi(DC, JN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$

$$\pi(DC, NJ) = \frac{3}{5} \cdot (-10) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -4; \quad \pi(DC, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$

$$\pi(DD, JJ) = \pi(DD, NJ) = \frac{3}{5} \cdot (-10) + \frac{2}{5} \cdot 10 = -2; \quad \pi(DD, JN) = \pi(DD, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz  $M$  se recoge en el cuadro 36.

$M$		$J_2$			
		$JJ$	$JN$	$NJ$	$NN$
$J_1$	$CC$	-1	-1	5	5
	$CD$	1	-1	7	5
	$DC$	-4	5	-4	5
	$DD$	-2	5	-2	5

Cuadro 36: Forma normal del juego  $\Gamma$  del problema 18.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 2 dominada a la fila 1, y la fila 4 domina a la fila 3. Asimismo, la columna 1 domina a las columnas 3 y 4. Si se eliminan las filas y columnas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida  $M^*$ , una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1-p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies p - 2(1-p) = -p + 5(1-p) \implies 2p = 7(1-p) \implies p = \frac{7}{9}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida  $M^*$ , una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1-q)$ , y tiene que verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies q - (1-q) = -2q + 5(1-q) \implies 3q = 6(1-q) \implies q = \frac{2}{3}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(0, \frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right);$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(M) &= \frac{7}{9} - 2 \cdot \left(1 - \frac{7}{9}\right) = -\frac{7}{9} + 5 \cdot \left(1 - \frac{7}{9}\right) = \frac{1}{3} \\ v_2(M) &= \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = -2 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} \implies v(M) = \frac{1}{3}.$$



**Problema 18.2.** Hallar los valores maximín y el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (2, 8) & (3, 2) & (3, 7) \\ (1, 2) & (6, 5) & (10, -1) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 18.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{11}$ , y por tanto  $v_1 = m_{11} = 2$ .

- La matriz de pagos del jugador  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la tercera fila, que está dominada por la primera. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 8p + 2(1-p) = 2p + 5(1-p) \implies 6p = 3(1-p) \implies p = \frac{1}{3};$$

$$v_2 = 8 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4.$$

El par de valores maximín, que tomaremos como punto de *statu quo* para el cálculo del par de arbitraje, es  $(2, 4)$ .

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 37, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = (u - 2)(v - 4).$$

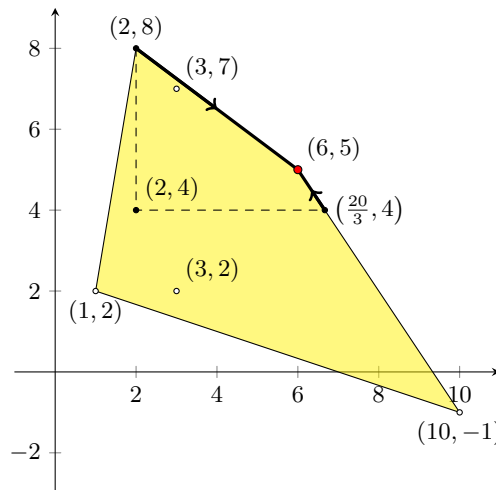


Figura 37: Región de pagos para el problema 18.2.

El conjunto de negociación (o conjunto de puntos óptimos Pareto) está formado por los segmentos que van del punto  $(2, 8)$  al punto  $(6, 5)$  y del punto  $(6, 5)$  al punto  $(\frac{20}{3}, 4)$ . Estudiaremos cada uno de los segmentos por separado.

- Del punto (2, 8) al punto (6, 5). La relación entre las variables es la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos,

$$v = -\frac{3}{4}u + \frac{19}{2},$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_1(u) = (u - 2) \left( -\frac{3}{4}u + \frac{19}{2} - 4 \right) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{13}{2}u - 11.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{13}{2}, \frac{37}{8})$ , que se encuentra fuera del conjunto de negociación. No obstante nos permite saber que el valor de  $g$  crece en el sentido que va del punto (2, 8) al punto (6, 5).

$$g'_1(u) = -u + \frac{13}{2};$$

$$g'_1(u) = 0 \implies -u + \frac{13}{2} = 0 \implies u = \frac{13}{2} > 6;$$

$$v = -\frac{3}{4} \cdot \frac{13}{2} + \frac{19}{2} = \frac{37}{8} < 5.$$

- Del punto (6, 5) al punto  $(\frac{20}{3}, 4)$ . La relación entre las variables es

$$v = -\frac{3}{2}u + 14,$$

y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_2(u) = (u - 2) \left( -\frac{3}{2}u + 14 - 4 \right) = -\frac{3}{2}u^2 + 13u - 20.$$

Y su máximo es el punto  $(\frac{13}{3}, \frac{15}{2})$ , que también se encuentra fuera del conjunto de negociación. En este caso nos permite saber que el valor de  $g$  crece en el sentido que va del punto  $(-1, 10)$  al punto (6, 5).

$$g'_2(u) = -3u + 13;$$

$$g'_2(u) = 0 \implies -3u + 13 = 0 \implies u = \frac{13}{3} < 6;$$

$$v = -\frac{3}{2} \cdot \frac{13}{3} + 14 = \frac{15}{2} > 5.$$

Con toda la información obtenida podemos asegurar que el par de arbitraje es el punto (6, 5).

**Problema 18.3.** Un experto en programación ha desarrollado un *software* de Investigación Operativa pero no tiene recursos para lanzarlo al mercado. Puede vender sus derechos a la empresa del sector *Soft 1* o *Soft 2*.

La empresa seleccionada compartirá con el experto una ganancia de 1 000 000 de euros. Determinar:

- La función característica del juego.
- El núcleo (o *core*) del juego.
- El valor de Shapley del juego.

**Solución del problema 18.3.** Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el experto en programación, que llamaremos  $J_3$ , y cada una de las empresas *Soft 1* o *Soft 2*, que llamaremos  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente.

- La función característica del juego se obtiene inmediatamente de los datos del enunciado. Los pagos se expresan en millones de euros.

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{J_1\}) = \nu(\{J_2\}) = \nu(\{J_3\}) = 0;$$

$$\nu(\{J_1, J_2\}) = 0; \quad \nu(\{J_1, J_3\}) = \nu(\{J_2, J_3\}) = 1; \quad \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) = 1.$$

(b) Sea  $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$  una imputación del núcleo. Según el corolario 6.8 de Morris (1994: 160), se han de verificar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) = 1; \\ x_1 &\geq \nu(\{J_1\}) = 0; \\ x_2 &\geq \nu(\{J_2\}) = 0; \\ x_3 &\geq \nu(\{J_3\}) = 0; \\ x_1 + x_2 &\geq \nu(\{J_1, J_2\}) = 0; \\ x_1 + x_3 &\geq \nu(\{J_1, J_3\}) = 1; \\ x_2 + x_3 &\geq \nu(\{J_2, J_3\}) = 1. \end{aligned}$$

Sumando las dos últimas inecuaciones se obtiene

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2,$$

lo que combinado con la primera ecuación nos da  $x_3 \geq 1$ . Y como todas las variables han de ser no negativas, otra vez la primera ecuación nos garantiza que  $x_1 = x_2 = 0$  y  $x_3 = 1$ . Los valores obtenidos satisfacen todas las condiciones, por lo que el núcleo está constituido por una única imputación,

$$\{(0, 0, 1)\}.$$

(c) Para calcular el valor de Shapley estudiamos cada jugador por separado.

■ Jugador  $J_1$ .

$$\begin{aligned} \delta(J_1, \{J_1\}) &= \nu(\{J_1\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(J_1, \{J_1, J_2\}) &= \nu(\{J_1, J_2\}) - \nu(\{J_2\}) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(J_1, \{J_1, J_3\}) &= \nu(\{J_1, J_3\}) - \nu(\{J_3\}) = 1 - 0 = 1; \\ \delta(J_1, \{J_1, J_2, J_3\}) &= \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) - \nu(\{J_2, J_3\}) = 1 - 1 = 0; \\ \phi_1 &= \sum_{S \ni J_1} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(J_1, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 1 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■ Jugador  $J_2$ .

$$\begin{aligned} \delta(J_2, \{J_2\}) &= \nu(\{J_2\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(J_2, \{J_1, J_2\}) &= \nu(\{J_1, J_2\}) - \nu(\{J_1\}) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(J_2, \{J_2, J_3\}) &= \nu(\{J_2, J_3\}) - \nu(\{J_3\}) = 1 - 0 = 1; \\ \delta(J_2, \{J_1, J_2, J_3\}) &= \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) - \nu(\{J_1, J_3\}) = 1 - 1 = 0; \\ \phi_2 &= \sum_{S \ni J_2} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(J_2, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 1 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

■ Jugador  $J_3$ .

$$\begin{aligned} \delta(J_3, \{J_3\}) &= \nu(\{J_3\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(J_3, \{J_1, J_3\}) &= \nu(\{J_1, J_3\}) - \nu(\{J_1\}) = 1 - 0 = 1; \\ \delta(J_3, \{J_2, J_3\}) &= \nu(\{J_2, J_3\}) - \nu(\{J_2\}) = 1 - 0 = 1; \\ \delta(J_3, \{J_1, J_2, J_3\}) &= \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) - \nu(\{J_1, J_2\}) = 1 - 0 = 1; \\ \phi_3 &= \sum_{S \ni J_3} \frac{(3 - |S|)! (|S| - 1)!}{3!} \delta(J_3, S) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 1 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 1 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Por tanto, el vector de Shapley es  $\vec{\phi}(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$ .

## Examen 19. Septiembre de 2018 – Convocatoria ordinaria

**Problema 19.1.** El jugador  $J_1$  saca al azar una bola de una urna que contiene cuatro bolas rojas y tres azules. Sin mirarla apuesta 20 euros o 30 euros.

El jugador  $J_2$  puede jugar o no jugar.

Si  $J_2$  no juega, entonces  $J_1$  le gana 20 euros, y si  $J_2$  juega, entonces debe igualar la apuesta de  $J_1$ . En ese caso  $J_1$  ganará todo el dinero si toma una bola azul y, si toma una roja perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 19.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador  $J_0$ , elige una bola roja o azul con probabilidades

$$\mathcal{P}(R) = \frac{4}{7}, \quad \mathcal{P}(A) = \frac{3}{7}.$$

En la segunda etapa, el jugador  $J_1$ , sin conocer la bola extraída, elige apostar 20€ o 30€. El conjunto de estrategias para el primer jugador será precisamente

$$\Sigma_1 = \{20, 30\}.$$

Por último, en la tercera etapa, entendemos que el jugador  $J_2$  elige jugar o no jugar, conociendo la apuesta del jugador  $J_1$ , pero no la bola extraída. Por tanto, el conjunto de estrategias para  $J_2$  será

$$\Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\};$$

donde, por ejemplo la estrategia  $JN$  indica que si  $J_1$  apostó 20€ entonces  $J_2$  jugará, mientras que si  $J_1$  apostó 30€ entonces  $J_2$  no jugará.

La forma extensiva del juego  $\Gamma$  se da a continuación, siendo el árbol  $T$  el representado en la figura 38.

$$\Gamma = \left\{ T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{20, 30\}, \Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\}\} \right\}.$$

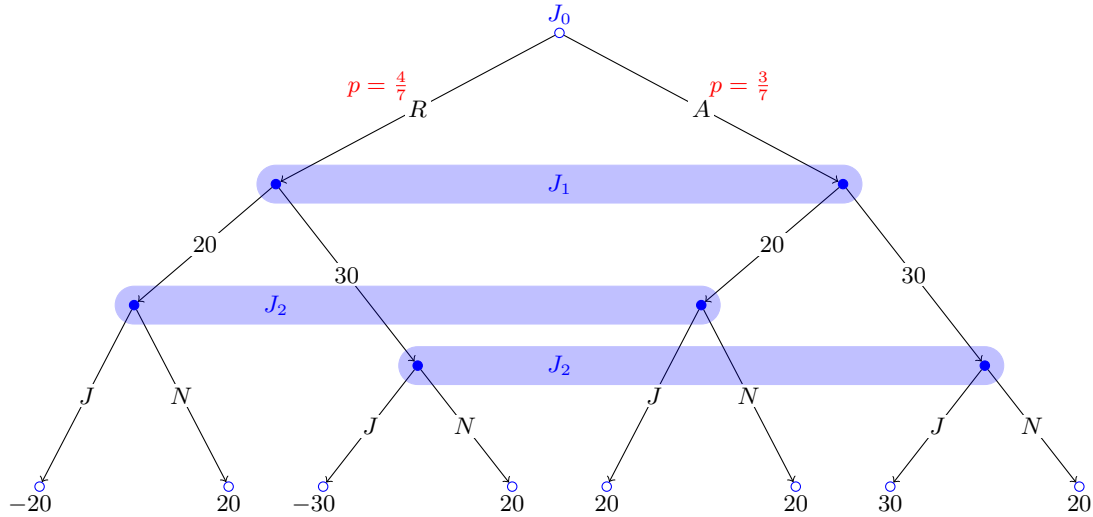


Figura 38: Árbol  $T$  del juego  $\Gamma$ , para el problema 19.1.

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(20, JJ) = \pi(20, JN) = \frac{4}{7} \cdot (-20) + \frac{3}{7} \cdot 20 = -\frac{20}{7}; \quad \pi(20, NJ) = \pi(20, NN) = \frac{4}{7} \cdot 20 + \frac{3}{7} \cdot 20 = 20;$$

$$\pi(30, JJ) = \pi(30, NJ) = \frac{4}{7} \cdot (-30) + \frac{3}{7} \cdot 30 = -\frac{30}{7}; \quad \pi(30, JN) = \pi(30, NN) = \frac{4}{7} \cdot 20 + \frac{3}{7} \cdot 20 = 20.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz  $M$  se recoge en el cuadro 37.

$M$		$J_2$			
		$JJ$	$JN$	$NJ$	$NN$
$J_1$	20	$-\frac{20}{7}$	$-\frac{20}{7}$	20	20
	30	$-\frac{30}{7}$	20	$-\frac{30}{7}$	20

Cuadro 37: Forma normal del juego  $\Gamma$  del problema 19.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{11} = -\frac{20}{7}$ . En consecuencia, una solución del juego es que el jugador  $J_1$  apueste siempre 20€, y que el jugador  $J_2$  juegue siempre, siendo en ese caso el valor del juego  $v(M) = m_{11} = -\frac{20}{7}$ .

**Problema 19.2.** Dos compañías comparten el grueso del mercado de cierto tipo de producto. Cada una hace nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas de la otra compañía.

Cada una está considerando la posibilidad de una pequeña reducción de precio del producto. Ambas prefieren no bajarlo, pero cada una teme que la otra lo haga y, por tanto, venda más unidades del producto. Si ambas bajan el precio del producto, venden 500 unidades cada una; si ninguna lo hace venden 400 cada una, y si una lo baja y la otra no, la primera vende 600 y la segunda 200.

Calcular el punto de equilibrio si se considera el juego no cooperativo y si se considera cooperativo.

**Solución del problema 19.2.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores  $J_1$  y  $J_2$  a cada una de las compañías. Ambos jugadores pueden bajar el precio ( $B$ ) o no hacerlo ( $N$ ), por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$J_1 = J_2 = \{B, N\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 38.

$M$		$J_2$	
		$B$	$N$
$J_1$	$B$	(500, 500)	(600, 200)
	$N$	(200, 600)	(400, 400)

Cuadro 38: Forma normal del juego del problema 19.2.

Para hallar los puntos de equilibrio utilizaremos el método IDSDS.

- La estrategia  $B$  para el jugador  $J_1$  domina estrictamente a la estrategia  $N$ . Se puede eliminar, por tanto, la fila 1 ( $H$ ), puesto que sería irracional que el jugador  $J_1$  siguiese la estrategia correspondiente (hecho conocido también por el jugador  $J_2$ ).

$M^1$		$J_2$	
		$B$	$N$
$J_1$	$B$	(500, 500)	(600, 200)

Cuadro 39: Bimatrix  $M^1$  obtenida tras la primera iteración del método IDSDS.

- En la fila restante (cuadro 39), la estrategia  $B$  para el jugador  $J_2$  domina estrictamente a la estrategia  $N$ . Por tanto, se puede eliminar la columna 2 ( $N$ ).

En conclusión, el único punto de equilibrio es el par de estrategias puras  $(B, B)$ , para el cual los pagos son 500 unidades para cada jugador.

Para hallar los valores maximin del juego no cooperativo empezamos estudiando la matriz de pagos de cada jugador, que son idénticas.

$$M = \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 200 & 400 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M$  tiene un punto de silla, que es el elemento  $m_{11} = 500$ . Por tanto, el único punto de equilibrio del juego no cooperativo es el par de estrategias  $(B, B)$ , para el cual los pagos son  $(500, 500)$ . O sea, ambas compañías deben bajar el precio, y de esa forma ambas conseguirán unas ventas de 500 unidades.

Para el juego cooperativo, en la figura 39 se representa el conjunto de pagos. Dado que el conjunto de negociación (el conjunto de puntos óptimos Pareto) se reduce únicamente al punto de *statu quo*, el  $(500, 500)$ , necesariamente dicho punto será también el par de arbitraje.

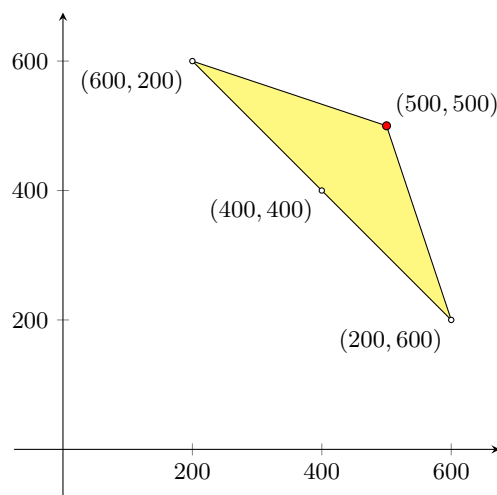


Figura 39: Región de pagos para el problema 19.2.

**Problema 19.3.** Cuatro jugadores eligen simultáneamente uno de los colores: blanco, negro.

Si todos coinciden no hay pago y lo mismo si coinciden dos a dos.

En el caso de que coincidan tres ganan 20 euros cada uno y el que eligió diferente paga los 60 euros.

Hallar la función característica y decir si es o no un juego esencial.

**Solución del problema 19.3.** Estamos ante un juego tetrapersonal simétrico de suma cero en su forma normal. Por ser simétrico son indistinguibles todos los jugadores y todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores. Y por ser de suma cero en su forma normal también será de suma cero en su forma de función característica, según el teorema 6.9 de Morris (1994: 164). Estudiamos las posibles coaliciones *distintas* por separado.

- Se forman las coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3, J_4\}$ . La forma normal del juego se recoge en el cuadro 40.

		$\{J_2, J_3, J_4\}$							
		$BBB$	$BBN$	$BNB$	$BNN$	$NBB$	$NBN$	$NNB$	$NNN$
$\{J_1\}$	$B$	0	20	20	0	20	0	0	-60
	$N$	-60	0	0	20	0	20	20	0

Cuadro 40: Forma normal del juego del problema 19.3 para las coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3, J_4\}$ .

En la matriz del juego la primera y la última columna dominan a todas las demás. Eliminando las columnas dominadas, sabemos que el pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_1(p) \implies -60(1-p) = -60p \implies p = \frac{1}{2};$$

$$\nu(\{J_1\}) = -60 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -60 \cdot \frac{1}{2} = -30.$$

Y como es un juego de suma cero,

$$\nu(\{J_2, J_3, J_4\}) = 30.$$

- Se forman las coaliciones  $\{J_1, J_2\}$  y  $\{J_3, J_4\}$ . La forma normal del juego se recoge en el cuadro 41.

		$\{J_3, J_4\}$			
		$BB$	$BN$	$NB$	$NN$
$\{J_1, J_2\}$	$BB$	0	40	40	0
	$BN$	-40	0	0	-40
	$NB$	-40	0	0	-40
	$NN$	0	40	40	0

Cuadro 41: Forma normal del juego del problema 19.3 para las coaliciones  $\{J_1, J_2\}$  y  $\{J_3, J_4\}$ .

En este caso es evidente vista la forma de la matriz que el juego de dos jugadores es simétrico (ya se había razonado además que todas las coaliciones son indistinguibles), y el corolario 2.12 de Morris (1994: 60) nos garantiza que el valor del juego ha de ser  $v = 0$ . Por tanto,

$$\nu(\{J_1, J_2\}) = 0.$$

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, y que el juego es de suma cero, tenemos suficiente información para dar la función característica. En este caso es

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{J_1\}) = \nu(\{J_2\}) = \nu(\{J_3\}) = \nu(\{J_4\}) = -30;$$

$$\nu(\{J_1, J_2\}) = \nu(\{J_1, J_3\}) = \nu(\{J_1, J_4\}) = \nu(\{J_2, J_3\}) = \nu(\{J_2, J_4\}) = \nu(\{J_3, J_4\}) = 0;$$

$$\nu(\{J_1, J_2, J_3\}) = \nu(\{J_1, J_2, J_4\}) = \nu(\{J_1, J_3, J_4\}) = \nu(\{J_2, J_3, J_4\}) = 30; \quad \nu(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}) = 0.$$

Como se puede ver, es un juego esencial, según la definición 6.2 de Morris (1994: 154)

$$\nu(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}) = 0 \neq -120 = \sum_{i=1}^4 \nu(\{J_i\}).$$

## Examen 20. Enero de 2019

**Problema 20.1.** En una urna hay nueve bolas: seis rojas ( $R$ ) y tres verdes ( $V$ ). Se extrae una bola aleatoriamente y, a continuación el jugador  $J_1$  mira el resultado de esa extracción y elige un número del conjunto  $\{3, 4\}$ .

Después, al jugador  $J_2$  se le comunica si  $J_1$  ha elegido un número par o impar de su conjunto de elección y, elige un número del conjunto  $\{1, 2\}$ .

La función de pago es:

$$\begin{aligned} M(R, 3, 1) &= -3, & M(R, 4, 1) &= 1, \\ M(V, 3, 1) &= 3, & M(V, 4, 1) &= 5, \\ M(R, 3, 2) &= 4, & M(R, 4, 2) &= -1, \\ M(V, 3, 2) &= -2, & M(V, 4, 2) &= 2. \end{aligned}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 20.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador  $J_0$ , elige una bola roja o verde con probabilidades

$$\mathcal{P}(R) = \frac{2}{3}, \quad \mathcal{P}(V) = \frac{1}{3}.$$

En la segunda etapa, el jugador  $J_1$ , sabiendo la bola extraída, elige un número del conjunto  $\{3, 4\}$ . El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{33, 34, 43, 44\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia 34 indica que  $J_1$  elige el número 3 si la bola extraída fue roja, y elige el número 4 si la bola extraída fue verde. Por último, en la tercera etapa, el jugador  $J_2$  selecciona un número del conjunto  $\{1, 2\}$ , conociendo el número elegido por  $J_1$ , pero no la bola extraída. Por tanto, el conjunto de estrategias para  $J_2$  será

$$\Sigma_2 = \{11, 12, 21, 22\};$$

donde, en este caso la estrategia 12 indica que si  $J_1$  eligió el número 3 entonces  $J_2$  elegirá el número 1, mientras que si  $J_1$  eligió el número 4 entonces  $J_2$  elegirá el número 2.

La forma extensiva del juego  $\Gamma$  se da a continuación, siendo el árbol  $T$  el representado en la figura 40.

$$\Gamma = \left\{ T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{33, 34, 43, 44\}, \Sigma_2 = \{11, 12, 21, 22\}\} \right\}.$$

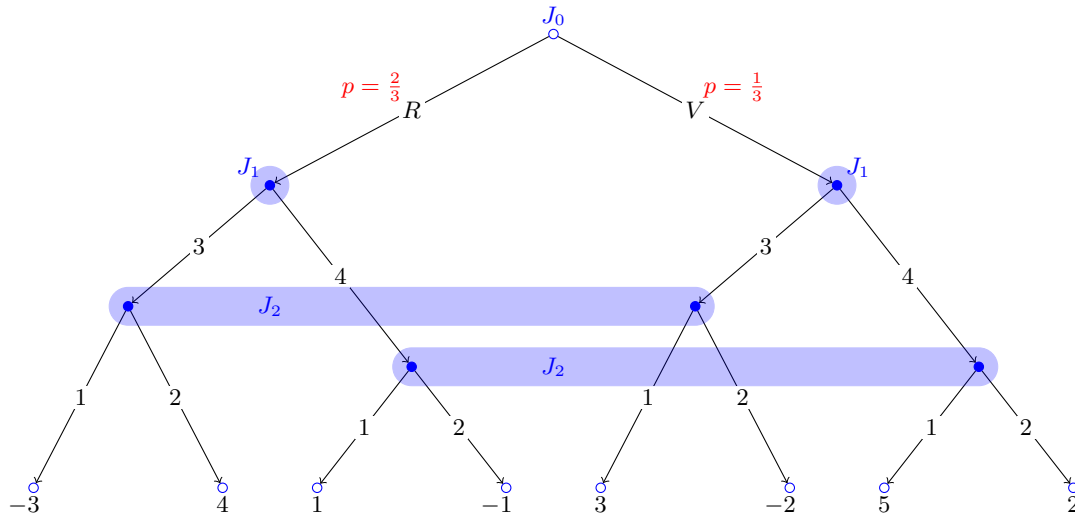


Figura 40: Árbol  $T$  del juego  $\Gamma$ , para el problema 20.1.



En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(33, 11) = \pi(33, 12) = \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 3 = -1; \quad \pi(33, 21) = \pi(33, 22) = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot (-2) = 2;$$

$$\pi(34, 11) = \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 5 = -\frac{1}{3}; \quad \pi(34, 12) = \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3};$$

$$\pi(34, 21) = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{13}{3}; \quad \pi(34, 22) = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{10}{3};$$

$$\pi(43, 11) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{5}{3}; \quad \pi(43, 12) = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 3 = \frac{1}{3};$$

$$\pi(43, 21) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot (-2) = 0; \quad \pi(43, 22) = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot (-2) = -\frac{4}{3};$$

$$\pi(44, 11) = \pi(44, 21) = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{7}{3}; \quad \pi(44, 12) = \pi(44, 22) = \frac{2}{3} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 2 = 0.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz  $M$  se recoge en el cuadro 42.

$M$		$J_2$			
		11	12	21	22
$J_1$	33	-1	-1	2	2
	34	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{10}{3}$
	43	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$
	44	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	0

Cuadro 42: Forma normal del juego  $\Gamma$  del problema 20.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La columna 2 domina a la columna 1 y la columna 4 domina a la columna 3. Eliminando las columnas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida  $M^*$ , una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1 - q)$ , con

$$\pi^1(q) = -q + 2(1 - q) = -3q + 2; \quad \pi^2(q) = -\frac{4}{3}q + \frac{10}{3}(1 - q) = -\frac{14}{3}q + \frac{10}{3};$$

$$\pi^3(q) = \frac{1}{3}q - \frac{4}{3}(1 - q) = \frac{5}{3}q - \frac{4}{3}; \quad \pi^4(q) = 0.$$

Representamos en la figura 41 las funciones lineales  $\pi^j(q)$ , y comprobamos que son máximos del mínimo los puntos de intersección de  $\pi^1(p)$  y  $\pi^4(p)$ , y de  $\pi^3(p)$  y  $\pi^4(p)$ , así como cualquiera de los puntos intermedios. Dichos puntos de intersección son,

$$\pi^1(q) = \pi^4(q) \implies -3q + 2 = 0 \implies q = \frac{2}{3};$$

$$\pi^3(q) = \pi^4(q) \implies -\frac{5}{3}q - \frac{4}{3} = 0 \implies q = \frac{4}{5}.$$

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$ , según la estrategia elegida por el jugador  $J_2$  la fila 2 no es activa y al menos una de las filas 1 o 3 no es activa. En ambos casos obtenemos una solución equivalente. Si eliminamos, por ejemplo, la fila 2 y la 3 la nueva matriz reducida es

$$M^{**} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma  $\vec{p} = (p, 1 - p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -p = 2p \implies p = 0.$$

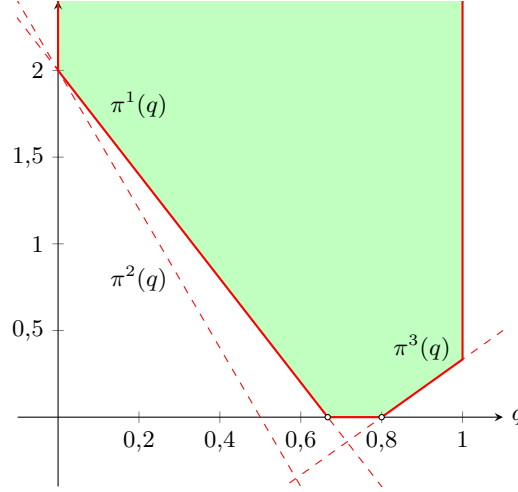


Figura 41: Mínimo del máximo para el jugador  $J_2$ .

- Trasladando los resultados obtenidos a la matriz  $M$  (en cualquiera de los dos casos obtenidos en el apartado anterior la estrategia mixta obtenida trasladada a la matriz  $M$  deja el mismo resultado), la solución hallada es

$$\vec{p} = (0, 0, 0, 1); \quad \vec{q} = (0, q, 1 - q, 0), \quad \frac{2}{3} \leq q \leq \frac{4}{5};$$

$$\left. \begin{array}{l} v_1(M) = 0 \\ v_2(M) = 0 \end{array} \right\} \implies v(M) = 0.$$

**Problema 20.2.** Ejercicio 7 de Morris (1994: 124). Para el juego bimatricial

$$\begin{pmatrix} (2, -1) & (-1, 1) \\ (0, 2) & (1, -1) \end{pmatrix},$$

encontrar los valores maximín y los pares de equilibrio de estrategias mixtas.

**Solución del problema 20.2.** Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. Para hallar los valores maximín del juego no cooperativo estudiamos la matriz de pagos de cada jugador por separado.

- La matriz de pagos del jugador fila  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como no tiene ni puntos de silla, ni filas ni columnas dominadas buscamos una solución por estrategias mixtas. Así, el pago máximo se obtiene con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 2p = -p + (1 - p) \implies p = \frac{1}{4};$$

$$v_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

- La matriz de pagos del jugador columna  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo no hay puntos de silla, ni filas ni columnas dominadas. Buscamos una solución por estrategias mixtas, que en este caso ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -p + (1-p) = 2p - (1-p) \implies 2(1-p) = 3p \implies p = \frac{2}{5};$$

$$v_2 = -\frac{2}{5} + \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 2 \cdot \frac{2}{5} - \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia, el par de valores maximín para el juego no cooperativo es  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{5})$ .

Sean  $\vec{p}(p, 1-p)$  y  $\vec{q}(1-q, q)$  un par de estrategias mixtas para los jugadores  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente. Los pagos esperados de ambos jugadores serían

$$\begin{aligned}\pi_1(p, q) &= 2pq - p(1-q) + (1-p)(1-q) = \\ &= 4pq - 2p - q + 1 = \\ &= (4q - 2)p - q + 1; \\ \pi_2(p, q) &= -pq + p(1-q) + 2(1-p)q - (1-p)(1-q) = \\ &= -5pq + 3q + 2p - 1 = \\ &= (-5p + 3)q + 2p - 1.\end{aligned}$$

Se puede ver que el valor de  $p$  que maximiza  $\pi_1$  para  $q$  fijo es  $p = 0$  si  $q < \frac{1}{2}$ , cualquiera si  $q = \frac{1}{2}$ , y  $p = 1$  si  $q > \frac{1}{2}$ . Análogamente, el valor de  $q$  que maximiza  $\pi_2$  para  $p$  fijo es  $q = 1$  si  $p < \frac{3}{5}$ , cualquiera si  $p = \frac{3}{5}$ , y  $q = 0$  si  $p > \frac{3}{5}$ .

En la figura 42 se representan los valores de  $p$  que maximizan  $\pi_1$  para  $q$  fijo (en azul) y los valores de  $q$  que maximizan  $\pi_2$  para  $p$  fijo (en rojo), en aplicación del que Thomas (2003: 59) denomina *método de la esvástica*. El único punto donde ambos conjuntos intersectan, que es en este caso el único punto de equilibrio, es el punto  $(\frac{3}{5}, \frac{1}{2})$ .

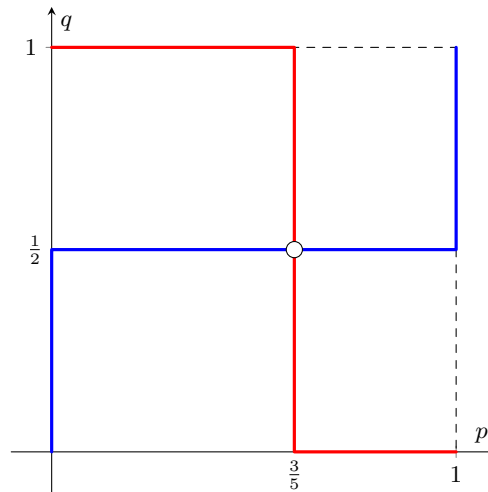


Figura 42: Método de la esvástica para el problema 20.2.

**Problema 20.3.** Un terreno está valorado por su actual propietario en 300 000 euros.

Un vecino le ofrece acondicionarlo para convertirlo en un campo de cultivo de olivos, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 500 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar ese terreno para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor del terreno sería de 700 000 euros.

Si los tres participantes llegan al acuerdo de dividir el terreno en dos zonas, una comercial y otra residencial se alcanzaría un valor de mercado de 900 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* o núcleo de este juego y el valor de Shapley.

**Solución del problema 20.3.** Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca  $J_1$ , el vecino que le ofrece la utilización de la finca para el cultivo de olivos  $J_2$ , y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca  $J_3$ . La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{J_1\}) = 300; \quad \nu(\{J_2\}) = \nu(\{J_3\}) = 0;$$

$$\nu(\{J_1, J_2\}) = 500; \quad \nu(\{J_1, J_3\}) = 700; \quad \nu(\{J_2, J_3\}) = 0; \quad \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) = 900.$$

Sea  $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$  una imputación del núcleo (o core) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994: 160), se han de verificar

$$x_1 + x_2 + x_3 = \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) = 900; \quad (33)$$

$$x_1 \geq \nu(\{J_1\}) = 300; \quad (34)$$

$$x_2 \geq \nu(\{J_2\}) = 0; \quad (35)$$

$$x_3 \geq \nu(\{J_3\}) = 0; \quad (36)$$

$$x_1 + x_2 \geq \nu(\{J_1, J_2\}) = 500; \quad (37)$$

$$x_1 + x_3 \geq \nu(\{J_1, J_3\}) = 700; \quad (38)$$

$$x_2 + x_3 \geq \nu(\{J_2, J_3\}) = 0. \quad (39)$$

De la igualdad (33) y la desigualdad (38) se deduce

$$x_2 \leq 200.$$

Análogamente, de la igualdad (33) y la desigualdad (37) se deduce

$$x_3 \leq 400.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas las condiciones anteriores, y que se representa en la figura 43.

$$\{(900 - x_2 - x_3, x_2, x_3) : 0 \leq x_2 \leq 200, 0 \leq x_3 \leq 400\}.$$

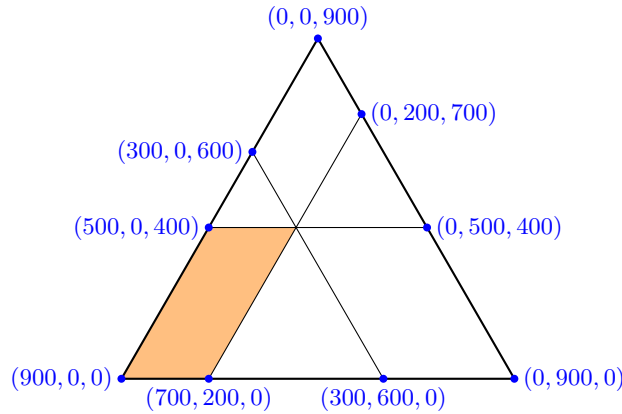


Figura 43: Obtención gráfica del core para el juego del problema problema 20.3.

Para calcular el valor de Shapley estudiamos cada jugador por separado.

■ Jugador  $J_1$ .

$$\delta(J_1, \{J_1\}) = \nu(\{J_1\}) - \nu(\emptyset) = 300 - 0 = 300;$$

$$\delta(J_1, \{J_1, J_2\}) = \nu(\{J_1, J_2\}) - \nu(\{J_2\}) = 500 - 0 = 500;$$

$$\delta(J_1, \{J_1, J_3\}) = \nu(\{J_1, J_3\}) - \nu(\{J_3\}) = 700 - 0 = 700;$$

$$\delta(J_1, \{J_1, J_2, J_3\}) = \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) - \nu(\{J_2, J_3\}) = 900 - 0 = 900;$$

$$\phi_1 = \sum_{\mathcal{S} \ni J_1} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(J_1, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 300 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 500 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 700 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 900 = 600.$$

■ Jugador  $J_2$ .

$$\delta(J_2, \{J_2\}) = \nu(\{J_2\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(J_2, \{J_1, J_2\}) = \nu(\{J_1, J_2\}) - \nu(\{J_1\}) = 500 - 300 = 200;$$

$$\delta(J_2, \{J_2, J_3\}) = \nu(\{J_2, J_3\}) - \nu(\{J_3\}) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(J_2, \{J_1, J_2, J_3\}) = \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) - \nu(\{J_1, J_3\}) = 900 - 700 = 200;$$

$$\phi_2 = \sum_{\mathcal{S} \ni J_2} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(J_2, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 200 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 200 = 100.$$

■ Jugador  $J_3$ .

$$\delta(J_3, \{J_3\}) = \nu(\{J_3\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(J_3, \{J_1, J_3\}) = \nu(\{J_1, J_3\}) - \nu(\{J_1\}) = 700 - 300 = 400;$$

$$\delta(J_3, \{J_2, J_3\}) = \nu(\{J_2, J_3\}) - \nu(\{J_2\}) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta(J_3, \{J_1, J_2, J_3\}) = \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) - \nu(\{J_1, J_2\}) = 900 - 500 = 400;$$

$$\phi_3 = \sum_{\mathcal{S} \ni J_3} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(J_3, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 400 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 400 = 200.$$

Por tanto, el vector de Shapley es  $\vec{\phi}(600, 100, 200)$ .

## Examen 21. Febrero de 2019

**Problema 21.1.** En el juego bipersonal de suma nula:

Se tienen dos cartas, una mayor que otra, gana el jugador que tenga la carta más alta, de la siguiente manera:  $J_1$  elige una de las dos cartas al azar, la mira sin que la vea  $J_2$ , y decide jugar o dejarlo. Si no juega, paga 3 unidades a  $J_2$ , y si juega le toca a  $J_2$  elegir si juega o no.

Si  $J_2$  no juega, paga 3 unidades a  $J_1$ , y si  $J_2$  juega, se miran las cartas: si la carta de  $J_1$  es la baja, paga 7 unidades a  $J_2$ , y si su carta es la alta, recibe 7 unidades de  $J_1$ .

Hallar la forma extensiva, la forma normal, el valor del juego y las estrategias óptimas de cada jugador.

**Solución del problema 21.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador  $J_0$ , elige la carta alta  $A$  o la baja  $B$  con idénticas probabilidades

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

En la segunda etapa, el jugador  $J_1$ , sabiendo la carta elegida, decide si jugar o no. El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{JJ, JN, NJ, NN\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia  $JN$  indica que  $J_1$  juega si la bola elegida es alta  $A$ , y no juega si la carta elegida es baja  $B$ . Por último, en la tercera etapa, si  $J_1$  decidió jugar el jugador  $J_2$  decide a su vez si jugar o no, sin conocer la carta elegida. Por tanto, el conjunto de estrategias para  $J_2$  será

$$\Sigma_2 = \{J, N\}.$$

La forma extensiva del juego  $\Gamma$  se da a continuación, siendo el árbol  $T$  el representado en la figura 44.

$$\Gamma = \left\{ T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{JJ, JN, NJ, NN\}, \Sigma_2 = \{J, N\}\} \right\}.$$

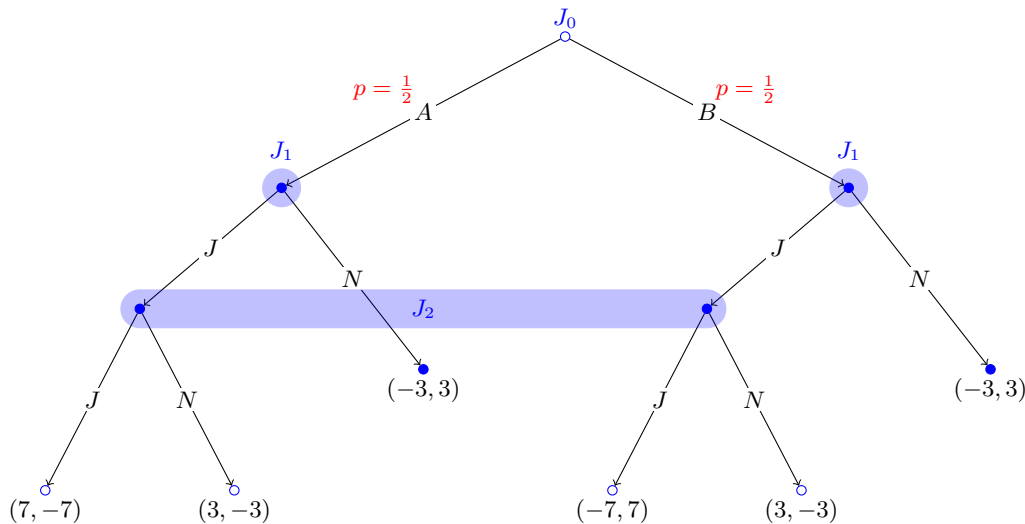


Figura 44: Árbol  $T$  del juego  $\Gamma$ , para el problema 21.1.

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(JJ, J) = \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot (-7) = 0; \quad \pi(JJ, N) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 3;$$

$$\begin{aligned}\pi(JN, J) &= \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 2; & \pi(JN, N) &= \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 0; \\ \pi(NJ, J) &= \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-7) = -5; & \pi(NJ, N) &= \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 3 = 0; \\ \pi(NN, J) &= \pi(NN, N) = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -3.\end{aligned}$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz  $M$  se recoge en el cuadro 43.

$M$		$J_2$	
		$J$	$N$
$J_1$	$JJ$	0	3
	$JN$	2	0
	$NJ$	-5	0
	$NN$	-3	-3

Cuadro 43: Forma normal del juego  $\Gamma$  del problema 21.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- Cualquiera de las dos primeras filas domina a cualquiera de las otras dos. Si se eliminan las filas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida  $M^*$ , una estrategia mixta para el jugador fila  $J_1$  será de la forma  $\vec{p} = (p, 1 - p)$ , y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 2(1 - p) = 3p \implies p = \frac{2}{5};$$

- Análogamente, para la matriz reducida  $M^*$ , una estrategia mixta para el jugador columna  $J_2$  será de la forma  $\vec{q} = (q, 1 - q)$ , y tiene que verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies 3(1 - q) = 2q \implies q = \frac{3}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right); & \vec{q} &= \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right); \\ \left. \begin{aligned} v_1(M) &= 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 3 \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{5} \\ v_2(M) &= 3 \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right) = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5} \end{aligned} \right\} & \implies v(M) &= \frac{6}{5}.\end{aligned}$$

**Problema 21.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-3, 1) & (0, 3) & (2, 1) \\ (-2, 3) & (1, -1) & (3, -2) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 21.2.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Para hallar los valores maximin del juego no cooperativo estudiamos la matriz de pagos de cada jugador por separado.

- La matriz de pagos del jugador fila  $J_1$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, el elemento  $m_{21} = -2$ , por lo que  $v_1 = m_{21} = -2$ .

- La matriz de pagos del jugador columna  $J_2$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

En este caso no hay puntos de silla, pero cualquiera de las dos primeras filas domina a la tercera. Si eliminamos la fila dominada obtenemos la matriz reducida

$$M_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y para la matriz reducida  $M_2^*$  buscamos una solución por estrategias mixtas, que en este caso ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies p + 3(1-p) = 3p - (1-p) \implies 4(1-p) = 2p \implies p = \frac{2}{3};$$

$$v_2 = \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

En consecuencia, el par de valores maximín para el juego no cooperativo es  $(-2, \frac{5}{3})$ , y tomaremos este punto como punto de *statu quo* para calcular el par de arbitraje.

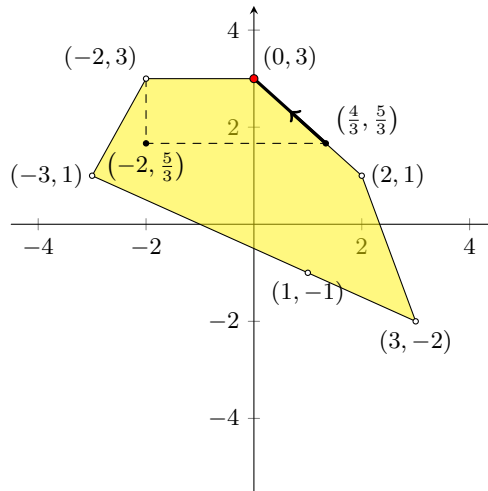


Figura 45: Región de pagos para el problema 21.2.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 45, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = (u + 2) \left( v - \frac{5}{3} \right).$$

Y el conjunto de negociación (o conjunto de puntos óptimos Pareto) es el segmento que va del punto  $(0, 3)$  al punto  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ . Sobre dicho conjunto, la relación entre las variables es la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos,

$$v = -u + 3,$$



y sustituida en la función  $g$  permite obtener

$$g_1(u) = (u+2) \left( -u+3 - \frac{5}{3} \right) = -u^2 - \frac{2}{3}u + \frac{8}{3}.$$

Su máximo es el punto  $(\frac{13}{2}, \frac{37}{8})$ , que se encuentra fuera del conjunto de negociación. No obstante nos permite saber que el valor de  $g$  crece en el sentido que va del punto  $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$  al punto  $(0, 3)$ .

$$g'_1(u) = -2u - \frac{2}{3};$$

$$g'_1(u) = 0 \implies -2u + \frac{2}{3} = 0 \implies u = -\frac{1}{3} < 0;$$

$$v = -\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{10}{3} > 3.$$

En conclusión, el par de arbitraje ha de ser el punto  $(0, 3)$ .

**Problema 21.3.** El juego tripersonal de parejas es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si  $P_2$  elige a  $P_3$ , y  $P_3$  elige a  $P_2$ , entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de 1, mientras la persona que no entra en la pareja recibe  $-3$ .

Si no se forma pareja, por ejemplo, si  $P_1$ , elige a  $P_2$ ,  $P_2$  elige a  $P_3$ , y  $P_3$  elige a  $P_1$ , entonces cada uno recibe un pago de cero.

Calcular la función característica de este juego y comprobar si es un juego esencial.

**Solución del problema 21.3.** Estamos ante un juego tripersonal simétrico. Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles. Estudiamos por separado las *distintas* coaliciones que se pueden formar.

- Si se forma la gran coalición  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$ , la estrategia óptima es evitar que se forme pareja con lo que en ese caso el pago es  $v_{123} = 0$ . En otro caso, si se forma una pareja, el pago sería

$$1 + 1 - 3 = -1.$$

- Consideramos, por ejemplo, las coaliciones de uno y dos jugadores  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ , para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 44.

$M$		$\{P_2, P_3\}$			
		11	12	31	32
$\{P_1\}$	2	(1, -2)	(1, -2)	(0, 0)	(-3, 2)
	3	(1, -2)	(0, 0)	(1, -2)	(-3, 2)

Cuadro 44: Forma normal del juego del problema 21.3 para las coaliciones  $\{P_1\}$  y  $\{P_2, P_3\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{P_1\}$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M_1$  tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{14}$  y  $m_{24}$ , por lo que  $v_1 = m_{14} = m_{24} = -3$ .

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{P_2, P_3\}$  es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M_{23}$  tiene dos puntos de silla, que son los elementos  $m_{41}$  y  $m_{42}$ , por lo que  $v_{23} = m_{41} = m_{42} = 2$ .

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\emptyset) = 0; \quad \nu(\{P_1\}) = \nu(\{P_2\}) = \nu(\{P_3\}) = -3;$$

$$\nu(\{P_1, P_2\}) = \nu(\{P_1, P_3\}) = \nu(\{P_2, P_3\}) = 2; \quad \nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es esencial, puesto que se verifica

$$\nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 0 \neq -9 = \sum_{i=1}^3 \nu(\{P_i\}).$$

## Examen 22. Septiembre de 2019 – Convocatoria ordinaria

**Problema 22.1.** El jugador  $J_2$  lanza un dado con seis caras numeradas del uno al seis y, mira si el resultado es par ( $P$ ) o impar ( $I$ ). A continuación elige seguir un plan ( $S$ ) o cambiarlo ( $C$ ). Después el jugador  $J_1$  sin conocer la elección de  $J_2$  pero sabiendo el resultado del dado, elige seguir ( $S$ ) o cambiar ( $C$ ). La función de pago es:

$$\begin{aligned} M(P, S, S) &= -3, & M(I, S, S) &= -5, \\ M(P, S, C) &= 4, & M(I, S, C) &= 8, \\ M(P, C, S) &= 2, & M(I, C, S) &= -2, \\ M(P, C, C) &= 1, & M(I, C, C) &= 3. \end{aligned}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 22.1.** Idéntico al problema 16.1 de la página 64.

**Problema 22.2.** Ejercicio 9 de Morris (1994: 124). Para el juego bimatricial

$$\begin{pmatrix} (3, 3) & (0, 5) \\ (5, 0) & (-10, -10) \end{pmatrix}$$

encontrar los valores maximín y los pares de equilibrio de estrategias mixtas.

**Solución del problema 22.2.** Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Para hallar los valores maximín del juego no cooperativo estudiamos la matriz de pagos de cada jugador, que en este caso son idénticas. La matriz de pagos cualquiera de los dos jugadores es

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, el elemento  $m_{12} = 0$ , por lo que  $v = m_{12} = 0$  y en consecuencia el par de valores maximín es  $(0, 0)$ .

Sean  $\vec{p}(p, 1-p)$  y  $\vec{q}(q, 1-q)$  un par de estrategias mixtas para los jugadores  $J_1$  y  $J_2$  respectivamente. Por ejemplo, los pagos esperados para el jugador  $J_1$  serían

$$\begin{aligned} \pi_1(p, q) &= 3pq + 5(1-p)q - 10(1-p)(1-q) = \\ &= -12pq + 10p + 15q - 10 = \\ &= (-12q + 10)p + 15q - 10. \end{aligned}$$

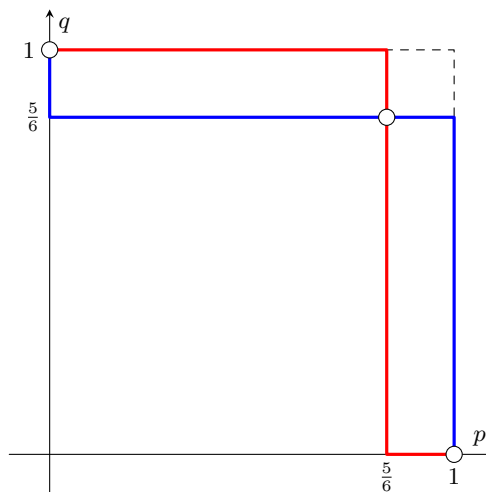


Figura 46: Método de la esvástica para el problema 22.2.

En este caso se puede ver que el valor de  $p$  que maximiza  $\pi_1$  para  $q$  fijo es  $p = 1$  si  $q < \frac{5}{6}$ , cualquiera si  $q = \frac{5}{6}$ , y  $p = 0$  si  $q > \frac{5}{6}$ . Análogamente y por simetría, el valor de  $q$  que maximiza  $\pi_2$  para  $p$  fijo es  $q = 1$  si  $p < \frac{5}{6}$ , cualquiera si  $p = \frac{5}{6}$ , y  $q = 0$  si  $p > \frac{5}{6}$ .

En la figura 46 se representan los valores de  $p$  que maximizan  $\pi_1$  para  $q$  fijo (en azul) y los valores de  $q$  que maximizan  $\pi_2$  para  $p$  fijo (en rojo), en aplicación del que Thomas (2003: 59) denomina *método de la esvástica*. Existen tres pares de equilibrio, que son los pares de estrategias puras  $((0, 1), (1, 0))$  y  $((1, 0), (0, 1))$ , y el par de estrategias mixtas  $((\frac{5}{6}, \frac{1}{6}), (\frac{5}{6}, \frac{1}{6}))$ .

**Problema 22.3.** En el siguiente juego entre cuatro personas en forma coalicional:

$$\begin{aligned}\nu(\{i\}) &= 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}; \\ \nu(\{1, 2\}) &= \nu(\{1, 3\}) = \nu(\{2, 4\}) = \nu(\{3, 4\}) = 1; \\ \nu(\{1, 4\}) &= \nu(\{2, 3\}) = 0; \\ \nu(\{2, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 3, 4\}) = \nu(\{1, 2, 4\}) = 1; \\ \nu(\{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3, 4\}) = 2.\end{aligned}$$

- (a) Mostrar que el núcleo de este juego consiste en un único vector de asignación.
- (b) Calcular el valor de Shapley de este juego.

**Solución del problema 22.3.** Estamos ante un juego tetrapersonal.

- (a) Sea  $\vec{x}(x_1, x_2, x_3, x_4)$  una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 Morris (1994: 160), se han de verificar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \nu(\{1, 2, 3, 4\}) = 2; \quad (40)$$

$$x_i \geq \nu(\{i\}) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}; \quad (41)$$

$$x_1 + x_2 \geq \nu(\{1, 2\}) = 1; \quad (42)$$

$$x_1 + x_3 \geq \nu(\{1, 3\}) = 1; \quad (43)$$

$$x_1 + x_4 \geq \nu(\{1, 4\}) = 0; \quad (44)$$

$$x_2 + x_3 \geq \nu(\{2, 3\}) = 0; \quad (45)$$

$$x_2 + x_4 \geq \nu(\{2, 4\}) = 1; \quad (46)$$

$$x_3 + x_4 \geq \nu(\{3, 4\}) = 1; \quad (47)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \nu(\{1, 2, 3\}) = 2; \quad (48)$$

$$x_1 + x_2 + x_4 \geq \nu(\{1, 2, 4\}) = 1; \quad (49)$$

$$x_1 + x_3 + x_4 \geq \nu(\{1, 3, 4\}) = 1; \quad (50)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 \geq \nu(\{2, 3, 4\}) = 1. \quad (51)$$

Sabiendo que los  $x_i$  son no negativos, de la ecuación (40) y de la inecuación (48) se obtienen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_4 = 0.$$

Aplicando además las desigualdades (46) y (47) se obtiene que

$$x_2 = x_3 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Como la imputación  $(0, 1, 1, 0)$  verifica todas las demás condiciones, necesariamente ha de ser una imputación del núcleo, y como es la única imputación que verifica todas las condiciones, el núcleo es el conjunto cuyo único elemento es dicha imputación.

(b) Para calcular el valor de Shapley, estudiamos cada jugador por separado:

- Jugador 1. Calculamos la medida en la que contribuye 1 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
 \delta(1, \{1\}) &= \nu(\{1\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\
 \delta(1, \{1, 2\}) &= \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{2\}) = 1 - 0 = 1; \\
 \delta(1, \{1, 3\}) &= \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{3\}) = 1 - 0 = 1; \\
 \delta(1, \{1, 4\}) &= \nu(\{1, 4\}) - \nu(\{4\}) = 0 - 0 = 0; \\
 \delta(1, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{2, 3\}) = 2 - 0 = 2; \\
 \delta(1, \{1, 2, 4\}) &= \nu(\{1, 2, 4\}) - \nu(\{2, 4\}) = 1 - 1 = 0; \\
 \delta(1, \{1, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 3, 4\}) - \nu(\{3, 4\}) = 1 - 1 = 0; \\
 \delta(1, \{1, 2, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 2, 3, 4\}) - \nu(\{2, 3, 4\}) = 2 - 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \sum_{S \ni 1} \frac{(4 - |S|)! (|S| - 1)!}{4!} \delta(1, S) = \\
 &= \frac{3!0!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 0 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 2 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 0 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 0 + \frac{0!3!}{4!} \cdot 1 = \\
 &= \frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

- Jugador 2. Calculamos la medida en la que contribuye 2 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
 \delta(2, \{2\}) &= \nu(\{2\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\
 \delta(2, \{1, 2\}) &= \nu(\{1, 2\}) - \nu(\{1\}) = 1 - 0 = 1; \\
 \delta(2, \{2, 3\}) &= \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{3\}) = 0 - 0 = 0; \\
 \delta(2, \{2, 4\}) &= \nu(\{2, 4\}) - \nu(\{4\}) = 1 - 0 = 1; \\
 \delta(2, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 3\}) = 2 - 1 = 1; \\
 \delta(2, \{1, 2, 4\}) &= \nu(\{1, 2, 4\}) - \nu(\{1, 4\}) = 1 - 0 = 1; \\
 \delta(2, \{2, 3, 4\}) &= \nu(\{2, 3, 4\}) - \nu(\{3, 4\}) = 1 - 1 = 0; \\
 \delta(2, \{1, 2, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 2, 3, 4\}) - \nu(\{1, 3, 4\}) = 2 - 1 = 1.
 \end{aligned}$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
 \phi_2 &= \sum_{S \ni 2} \frac{(4 - |S|)! (|S| - 1)!}{4!} \delta(2, S) = \\
 &= \frac{3!0!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 0 + \frac{0!3!}{4!} \cdot 1 = \\
 &= \frac{7}{12}.
 \end{aligned}$$

- Jugador 3. Calculamos la medida en la que contribuye 3 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
 \delta(3, \{3\}) &= \nu(\{3\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\
 \delta(3, \{1, 3\}) &= \nu(\{1, 3\}) - \nu(\{1\}) = 1 - 0 = 1; \\
 \delta(3, \{2, 3\}) &= \nu(\{2, 3\}) - \nu(\{2\}) = 0 - 0 = 0; \\
 \delta(3, \{3, 4\}) &= \nu(\{3, 4\}) - \nu(\{4\}) = 1 - 0 = 1; \\
 \delta(3, \{1, 2, 3\}) &= \nu(\{1, 2, 3\}) - \nu(\{1, 2\}) = 2 - 1 = 1;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta(3, \{1, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 3, 4\}) - \nu(\{1, 4\}) = 1 - 0 = 1; \\
\delta(3, \{2, 3, 4\}) &= \nu(\{2, 3, 4\}) - \nu(\{2, 4\}) = 1 - 1 = 0; \\
\delta(3, \{1, 2, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 2, 3, 4\}) - \nu(\{1, 2, 4\}) = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= \sum_{S \ni 3} \frac{(4 - |S|)! (|S| - 1)!}{4!} \delta(3, S) = \\
&= \frac{3!0!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 0 + \frac{0!3!}{4!} \cdot 1 = \\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

- Jugador 4. Calculamos la medida en la que contribuye 4 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
\delta(4, \{4\}) &= \nu(\{4\}) - \nu(\emptyset) = 0 - 0 = 0; \\
\delta(4, \{1, 4\}) &= \nu(\{1, 4\}) - \nu(\{1\}) = 0 - 0 = 0; \\
\delta(4, \{2, 4\}) &= \nu(\{2, 4\}) - \nu(\{2\}) = 1 - 0 = 1; \\
\delta(4, \{3, 4\}) &= \nu(\{3, 4\}) - \nu(\{3\}) = 1 - 0 = 1; \\
\delta(4, \{1, 2, 4\}) &= \nu(\{1, 2, 4\}) - \nu(\{1, 2\}) = 1 - 1 = 0; \\
\delta(4, \{1, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 3, 4\}) - \nu(\{1, 3\}) = 1 - 1 = 0; \\
\delta(4, \{2, 3, 4\}) &= \nu(\{2, 3, 4\}) - \nu(\{2, 3\}) = 1 - 0 = 1; \\
\delta(4, \{1, 2, 3, 4\}) &= \nu(\{1, 2, 3, 4\}) - \nu(\{1, 2, 3\}) = 2 - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_4 &= \sum_{S \ni 4} \frac{(4 - |S|)! (|S| - 1)!}{4!} \delta(4, S) = \\
&= \frac{3!0!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 0 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{2!1!}{4!} \cdot 1 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 0 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 0 + \frac{1!2!}{4!} \cdot 1 + \frac{0!3!}{4!} \cdot 0 = \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el valor de Shapley es el vector

$$\vec{\phi} \left( \frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4} \right).$$

No se pide, pero para detectar posibles errores, se puede comprobar fácilmente que el valor de Shapley obtenido es una imputación. Verifica:

- Racionalidad individual.

$$\phi_1 = \frac{7}{12} > 0 = \nu(\{1\}), \quad \phi_2 = \frac{7}{12} > 0 = \nu(\{2\}), \quad \phi_3 = \frac{7}{12} > 0 = \nu(\{3\}), \quad \phi_4 = \frac{1}{4} > 0 = \nu(\{4\}).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^4 \phi_i = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \frac{7}{12} + \frac{7}{12} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 2 = \nu(\{1, 2, 3, 4\}).$$

## Examen 23. Septiembre de 2019 – Convocatoria de reserva

**Problema 23.1.** Se considera el siguiente juego de suma nula:

El jugador  $J_2$  saca al azar una bola de una urna que contiene dos bolas negras y cuatro blancas. La mira y apuesta cinco mil o siete mil euros.

El jugador  $J_1$  puede jugar o no jugar.

Si  $J_1$  no juega, entonces  $J_2$  le gana cinco mil euros, y si  $J_1$  juega, entonces debe igualar la apuesta de  $J_2$ . En ese caso  $J_2$  ganará todo el dinero si toma una bola blanca y si toma una negra perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

**Solución del problema 23.1.** Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. Por comodidad expresaremos todos los pagos en miles de euros, o sea, una unidad monetaria equivale a mil euros.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador  $J_0$ , elige una bola negra o blanca con probabilidades

$$\mathcal{P}(N) = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{P}(B) = \frac{2}{3}.$$

En la segunda etapa, el jugador  $J_2$ , sabiendo la bola extraída, elige un apostar 5 o 7 unidades. El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{55, 57, 75, 77\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia 57 indica que  $J_2$  apuesta 5 unidades si la bola extraída fue negra, y apuesta 7 unidades si la bola extraída fue blanca. Por último, en la tercera etapa, el jugador  $J_1$  decide si juega o no, conociendo la apuesta de  $J_2$ , pero no la bola extraída. Por tanto, el conjunto de estrategias para  $J_2$  será

$$\Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\};$$

donde, en este caso la estrategia  $JN$  indica que si  $J_2$  apostó 5 unidades entonces  $J_1$  jugará, mientras que si  $J_2$  apostó 7 unidades entonces  $J_1$  no jugará

La forma extensiva del juego  $\Gamma$  se da a continuación, siendo el árbol  $T$  el representado en la figura 47.

$$\Gamma = \left\{ T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{55, 57, 75, 77\}, \Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\}\} \right\}.$$

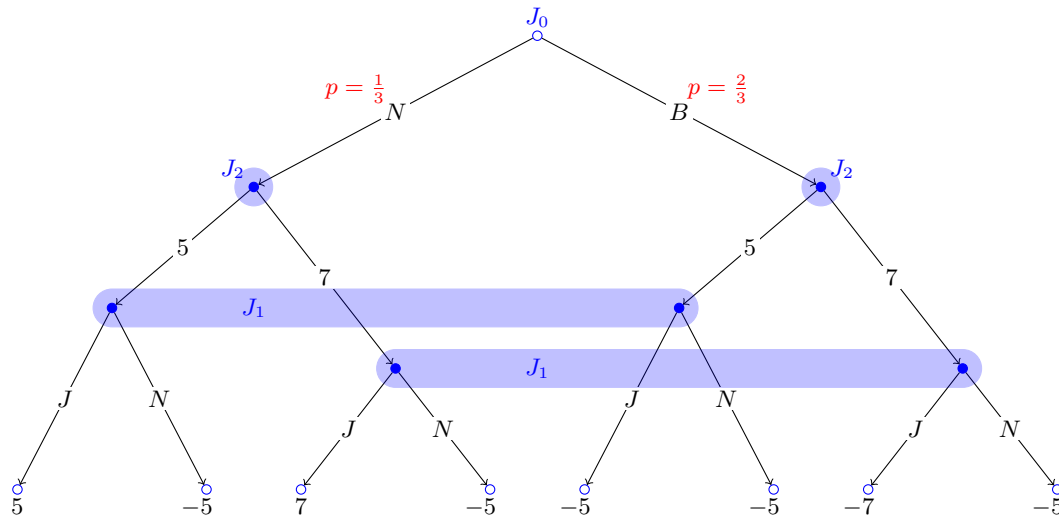


Figura 47: Árbol  $T$  del juego  $\Gamma$ , para el problema 23.1.

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(55, JJ) = \pi(55, JN) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -\frac{5}{3}; \quad \pi(55, NJ) = \pi(55, NN) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot 5 = -5;$$

$$\pi(57, JJ) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (-7) = -3; \quad \pi(57, JN) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -\frac{5}{3};$$

$$\pi(57, NJ) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot (-7) = -\frac{19}{3}; \quad \pi(57, NN) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -5;$$

$$\pi(75, JJ) = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -1; \quad \pi(75, JN) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -5;$$

$$\pi(75, NJ) = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -1; \quad \pi(75, NN) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -5;$$

$$\pi(77, JJ) = \pi(55, NJ) = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot (-7) = -\frac{7}{3}; \quad \pi(77, JN) = \pi(77, NN) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -5.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz  $M$  se recoge en el cuadro 45.

$M$		$J_2$			
		55	57	75	77
$J_1$	$JJ$	$-\frac{5}{3}$	-3	-1	$-\frac{7}{3}$
	$JN$	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-5	-5
	$NJ$	-5	$-\frac{19}{3}$	-1	$-\frac{7}{3}$
	$NN$	-5	-5	-5	-5

Cuadro 45: Forma normal del juego  $\Gamma$  del problema 23.1.

Resolución:

- La matriz  $M$  no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a las filas 3 y 4, la columna 2 domina a la columna 1 y la columna 4 domina a la columna 3. Eliminando las filas y columnas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} & -5 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida  $M^*$ , una estrategia mixta óptima para el jugador fila  $J_1$  será de la forma  $\vec{p}(p, 1-p)$ , y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -3p - \frac{5}{3}(1-p) = -\frac{7}{3}p - 5(1-p) \implies p = \frac{5}{6}.$$

- De la misma forma, para la matriz reducida  $M^*$ , una estrategia mixta óptima para el jugador columna  $J_2$  será de la forma  $\vec{q}(q, 1-q)$ , y ha de verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \implies -3q - \frac{7}{3}(1-q) = -\frac{5}{3}q - 5(1-q) \implies q = \frac{2}{3}.$$

- Trasladando los resultados obtenidos a la matriz  $M$ , la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0\right); \quad \vec{q} = \left(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right);$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(M) &= -3 \cdot \frac{5}{6} - \frac{5}{3} \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{7}{3} \cdot \frac{5}{6} - 5 \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) = -\frac{25}{9} \\ v_2(M) &= -3 \cdot \frac{2}{3} - \frac{7}{3} \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3} - 5 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{25}{9} \end{aligned} \right\} \implies v(M) = -\frac{25}{9}.$$



**Problema 23.2.** Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (1, 4) & (-2, 4) & (3, 0) \\ (2, -1) & (2, 2) & (-3, 2) \end{pmatrix}.$$

**Solución del problema 23.2.** Idéntico al problema 9.2 de la página 37.

**Problema 23.3.** En el siguiente juego tripersonal, cada jugador tiene dos estrategias indicadas por 1 y 2. Hay ocho combinaciones de estrategias y ocho correspondientes 3-tuplas de pagos:

Estrategias	Pagos
(1, 1, 1)	(1, -1, 1)
(1, 1, 2)	(0, 0, 0)
(1, 2, 1)	(-1, 2, 0)
(1, 2, 2)	(0, 1, -1)
(2, 1, 1)	(1, 1, -2)
(2, 1, 2)	(-2, 1, 0)
(2, 2, 1)	(1, 0, 1)
(2, 2, 2)	(0, 0, 1)

Calcular la función característica y decir si es un juego esencial.

**Solución del problema 23.3.** Estudiamos por separado las posibles coaliciones que se pueden formar.

- Coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3\}$ . La forma normal del juego se representa en el cuadro 46.

$M$		$\{J_2, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_1\}$	1	(1, 0)	(0, 0)	(-1, 2)	(0, 0)
	2	(1, -1)	(-2, 1)	(1, 1)	(0, 1)

Cuadro 46: Forma normal del juego del problema 23.3 para las coaliciones  $\{J_1\}$  y  $\{J_2, J_3\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{J_1\}$  es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La columna 2 domina a las columnas 1 y 4. Eliminadas las columnas dominadas, el pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -2(1-p) = -p + (1-p) \implies p = 3(1-p) \implies p = \frac{3}{4};$$

$$\nu(\{J_1\}) = -2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{J_2, J_3\}$  es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este hay un punto de silla,  $m_{32} = 1$ , por lo que

$$\nu(\{J_2, J_3\}) = 1.$$

- Coaliciones  $\{J_2\}$  y  $\{J_1, J_3\}$ . La forma normal del juego se representa en el cuadro 47.

$M$		$\{J_1, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_2\}$	1	$(-1, 2)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(1, -2)$
	2	$(2, -1)$	$(1, -1)$	$(0, 2)$	$(0, 1)$

Cuadro 47: Forma normal del juego del problema 23.3 para las coaliciones  $\{J_2\}$  y  $\{J_1, J_3\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{J_2\}$  es

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La columna 3 domina a la columna 4, y la estrategia mixta para el jugador columna  $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$  domina a la columna 2. Eliminando las columnas dominadas, el pago máximo para  $\{J_2\}$  se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -p + 2(1-p) = p \implies p = \frac{1}{2};$$

$$\nu(\{J_2\}) = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{J_1, J_3\}$  es

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso la fila 1 domina a la fila 2, y la fila 3 domina a la fila 4. Eliminando las fila dominadas, el pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies 2p - (1-p) = -p + 2(1-p) \implies p = \frac{1}{2};$$

$$\nu(\{J_1, J_3\}) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Coaliciones  $\{J_3\}$  y  $\{J_1, J_2\}$ . La forma normal del juego se representa en el cuadro 48.

$M$		$\{J_1, J_2\}$			
		11	12	21	22
$\{J_3\}$	1	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(-2, 2)$	$(1, 1)$
	2	$(0, 0)$	$(-1, 1)$	$(0, -1)$	$(1, 0)$

Cuadro 48: Forma normal del juego del problema 23.3 para las coaliciones  $\{J_3\}$  y  $\{J_1, J_2\}$ .

La matriz de pagos para la coalición  $\{J_3\}$  es

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La estrategia mixta para el jugador columna de la forma  $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$  domina a las columnas 1 y 4. Eliminando las columnas dominadas, el pago máximo para  $\{J_3\}$  se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \implies -(1-p) = -2p \implies p = \frac{1}{3};$$

$$\nu(\{J_3\}) = -\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición  $\{J_1, J_2\}$  es

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso de nuevo hay un punto de silla, que es el elemento  $m_{22}$ . En consecuencia,

$$\nu(\{J_1, J_2\}) = m_{22} = 1.$$

- Gran coalición  $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, J_3\}$ . Se puede ver que la mejor estrategia para la gran coalición es  $(2, 2, 1)$ , y que en ese caso consigue un pago de

$$\nu(\{J_1, J_2, J_3\}) = 2.$$

En resumen, la función característica del juego es

$$\begin{aligned} \nu(\emptyset) &= 0; & \nu(\{J_1\}) &= -\frac{1}{2}; & \nu(\{J_2\}) &= \frac{1}{2}; & \nu(\{J_3\}) &= -\frac{2}{3}; \\ \nu(\{J_1, J_2\}) &= 2; & \nu(\{J_1, J_3\}) &= \frac{1}{2}; & \nu(\{J_2, J_3\}) &= 1; & \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) &= 2. \end{aligned}$$

Es inmediato ver que es un juego esencial, puesto que

$$2 = \nu(\{J_1, J_2, J_3\}) \neq \sum_{i=1}^3 \nu(\{J_i\}) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

## Referencias bibliográficas

BONANNO, Giacomo, *Game Theory*, 2<sup>nd</sup> ed., CreateSpace, 2018, 592 p.

JONES, Antonia J., *Game Theory: Mathematical Models of Conflict*, Cambridge (UK), Woodhead, 2000, ISBN 978-1-898563-14-3, 286 p.

MORRIS, Peter, *Introduction to Game Theory*, New York (US), Springer-Verlag, 1994, ISBN 978-1-4612-4316-8, 230 p.

OSBORNE, Martin J.; RUBINSTEIN, Ariel, *A Course in Game Theory*, Cambridge (Massachusetts, US), The MIT Press, 1994, ISBN 0-262-15041-7, 352 p.

OSBORNE, Martin J., *An Introduction to Game Theory*, Oxford (UK), Oxford University Press, 2004, ISBN 978-0-19-512895-6, 533 p.

PRISNER, Erich, *Game Theory Through Examples*, Washington, D.C. (US), The Mathematical Association of America, 2014, ISBN 978-1-61444-115-1, 287 p.

THOMAS, L. C., *Games, Theory and Applications*, Mineola (New York, US), Dover, 2003, ISBN 0-486-43237-8, 279 p.