Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Prueba de Evaluación Continua 2013

Ejercicio 1: En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se define un producto escalar que, respecto a una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$, cumple las siguientes condiciones:
(a) $||e_1|| = \sqrt{2}$ y $||e_2|| = \sqrt{3}$
(b) El plano de ecuaciones $x + y + z = 0$ es ortogonal a la recta $L(e_1)$
(c) La proyección ortogonal del vector $e_1 + e_2 + e_3$ sobre el subespacio $L(e_2)$ es el vector $3e_2$.
(d) El complemento ortogonal de la recta $L(e_3)$ es un plano que contiene al vector $2e_1 + 4e_2 - e_3$.

Encuentre la matriz de Gram del producto escalar en la base B.

Solución: Sea $M = (< e_i, e_j >)$ la matriz de Gram del producto escalar en la base B. De (a) deducimos que

$$< e_1, e_1 >= ||e_1||^2 = 2 \quad \text{y} \quad < e_2, e_2 >= ||e_2||^2 = 3,$$

por lo tanto la matriz simétrica M será de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Consideramos la condición (b) y tomamos dos vectores que sean una base del plano $x + y + z = 0$, por ejemplo $u = (1, -1, 0)_B$ y $v = (0, 1, -1)_B$. Se tiene que cumplir $< u, e_1 >=< v, e_1 >= 0$, es decir

$$< \ u, e_1 >= (1, -1, 0) \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ a & 3 & c \\ b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2$$

$$< \ v, e_1 >= (0, 1, -1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 2 & 3 & c \\ b & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

Así, la matriz resulta

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ 2 & c & d \end{pmatrix}$$

Considerando la condición (c) y aplicando los coeficientes de Fourier para el cálculo de la proyección ortogonal tenemos que

$$\begin{aligned} P_{L(e_2)}(e_1 + e_2 + e_3) &= \frac{< e_1 + e_2 + e_3, \ e_2 >}{< e_2, e_2 >} e_2, \\ &= \frac{(1,1,1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & c \\ 2 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}{3} e_2 = \frac{c+5}{3} e_2 \end{aligned}$$

Entonces, $\dfrac{c+5}{3} e_2 = 3e_2 \ \Rightarrow \ c = 4.$

De la condición (d) se deduce que e_3 y $2e_1 + 4e_2 - e_3$ son vectores ortogonales, luego

$$< e_3,\ 2e_1 + 4e_2 - e_3 >= (0,0,1)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 20 - d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 20$$

y la matriz queda completamente determinada.

Ejercicio 2:
Justificar razonadamente en qué casos existe algún endomorfismo f de $\mathbb{K}^6$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$) que tenga un único autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de multiplicidad algebraica 6, tal que para cualquier matriz de A de f se cumpla:

(a) $rg(A - \lambda I) = 4,\ rg(A - \lambda I)^2 = 3,\ rg(A - \lambda I)^3 = 2,\ rg(A - \lambda I)^4 = 0.$
(b) $rg(A - \lambda I) = 4,\ rg(A - \lambda I)^2 = 3,\ rg(A - \lambda I)^3 = 1,\ rg(A - \lambda I)^4 = 0.$
(c) $rg(A - \lambda I) = 4,\ rg(A - \lambda I)^2 = 2,\ rg(A - \lambda I)^3 = 1,\ rg(A - \lambda I)^4 = 0.$
(d) $rg(A - \lambda I) = 3,\ rg(A - \lambda I)^2 = 2,\ rg(A - \lambda I)^3 = 1,\ rg(A - \lambda I)^4 = 0.$

En los casos en los que exista tal endomorfismo, dar la matriz de Jordan.

Solución: En cada caso traducimos las condiciones sobre los rangos de las matrices a las equivalentes sobre las dimensiones de los subespacios generalizados $E^i(\lambda) = Ker(f - \lambda I)^i$ y representamos los esquemas de subespacios correspondientes que determinan una base del subespacio máximo $M(\lambda)$, que en este caso en particular, será todo el espacio $\mathbb{K}^6$. Recordamos que el número de bloques de Jordan asociados al autovalor λ es igual a $dimE^1(\lambda)$ y es el número de filas en el esquema. Para abreviar denotamos $E^i(\lambda) = E^i$.

- Caso (a): $dimE^1 = 2$ (=n^o filas)

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{2}{E^1(\lambda)} & \subset & \overset{3}{E^2(\lambda)} & \subset & \overset{4}{E^3(\lambda)} & \subset & \overset{6}{E^4(\lambda)} = M(\lambda) \\ v_1 & \leftarrow & v_2 & \leftarrow & v_3 & \leftarrow & v_4 \\ v_5 & \leftarrow & v_6 & \leftarrow & v_7 & \leftarrow & v_8 \end{array}$$

  La diferencia $\dim E^4 - \dim E^3$ deteremina la existencia de los vectores v_4 y v_8 del esquema, y las dos líneas de longitud cuatro. Esto es claramente imposible ya que habría en la base de $M(\lambda)$ más vectores que diménsión tiene el espacio vectorial. Además, en la columna 3^a aparecen 2 vectores y deben aparecer $\dim E^3 - \dim E^2 = 1$. Lo mismo ocurre en la segunda.

- Caso (b): $\dim E^1 = 2$ (=n^o filas)

$$\begin{array}{ccccccc} \overset{2}{E^1(\lambda)} & \subset & \overset{3}{E^2(\lambda)} & \subset & \overset{5}{E^3(\lambda)} & \subset & \overset{6}{E^4(\lambda)} = M(\lambda) \\ v_1 & \leftarrow & v_2 & \leftarrow & v_3 & \leftarrow & v_4 \\ v_5 & \leftarrow & v_6 & \leftarrow & v_7 & & \end{array}$$

  El esquema es claramente imposible ya que habría en la base de $M(\lambda)$ más vectores que dimensión tiene el espacio vectorial. Además, en la columna 3^a aparecen 2 vectores y deben aparecer $\dim E^3 - \dim E^2 = 1$. Lo mismo ocurre en la segunda.

- Caso (c): $\dim E^1 = 2$ (=n^o filas)

$$\begin{array}{ccccccc}
\overset{2}{E^1(\lambda)} & \subset & \overset{4}{E^2(\lambda)} & \subset & \overset{5}{E^3(\lambda)} & \subset & \overset{6}{E^4(\lambda)} = M(\lambda) \\
v_1 & \leftarrow & v_2 & \leftarrow & v_3 & \leftarrow & v_4 \\
v_5 & \leftarrow & v_6 & & & &
\end{array}$$

Es un esquema totalmente válido y se corresponde con la matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix}
\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{pmatrix}$$

- Caso (d): $dimE^1 = 3$ (=n^o filas)

$$\begin{array}{ccccccc}
\overset{3}{E^1(\lambda)} & \subset & \overset{4}{E^2(\lambda)} & \subset & \overset{5}{E^3(\lambda)} & \subset & \overset{6}{E^4(\lambda)} = M(\lambda) \\
v_1 & \leftarrow & v_2 & \leftarrow & v_3 & \leftarrow & v_4 \\
v_5 & & & & & & \\
v_6 & & & & & &
\end{array}$$

Es un esquema totalmente válido y se corresponde con la matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix}
\lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda
\end{pmatrix}$$