Problema 5. *Sea G un grupo finito en el que $a^2 = 1$ para cada $a \in G$. Demostrar que el orden de G es potencia de dos.*

Solución. Como $a^2 = 1$ para todo elemento de G, entonces cada elemento coincide con su inversa. Además el grupo G es abeliano, ya que se verifica que

$$1 = (ab)^2 = abab = aba^{-1}b^{-1} \ .$$

Esto implica que $ab = ba$,

Aplicamos el teorema de estructura de grupos abelianos finitos. Se puede comprobar que G es isomorfo a

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \overset{(n)}{\cdots} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

En el caso de que alguno de los grupos cíclicos de la descomposición no tuviera órden 2 existiría un elemento de órden distinto de 2, contradiciendo el enunciado del problema. En particular hemos demostrado que o(G)= 2^n.