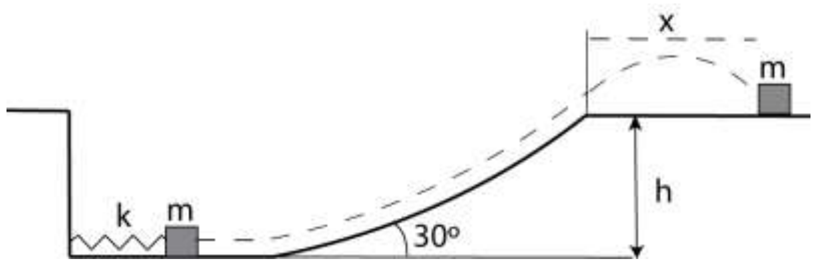
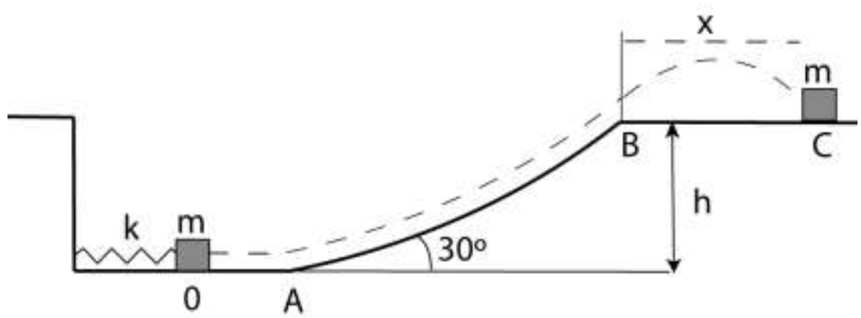
Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2017/2018, Septiembre

1. Se deja libre una partícula de masa m que, en reposo, comprimía un muelle de constante k una distancia d. La partícula inicia un movimiento, sin pérdidas por rozamiento, primero horizontalmente, después sobre un plano inclinado 30º con la horizontal y, cuando alcanza una altura h, un tiro parabólico (ver figura). Encuentre la expresión del alcance horizontal del movimiento parabólico, x, como función del resto de parámetros (m, k, d, h, g). **(2 puntos)**



Solución

Señalamos los diferentes momentos del movimiento como 0, A, B y C según la figura:



Al no haber rozamiento la energía total del sistema se conserva hasta el momento en el que la partícula choca con la plataforma tras la trayectoria parabólica.

Considerando el origen de la energía potencial en la altura inicial de la partícula, al principio únicamente hay energía almacenada en el muelle. Al salir de la rampa, la partícula tiene energía potencial debida a la altura alcanzada y cinética por la velocidad:

$$E_0 = E_B \quad \rightarrow \quad E_{muelle} = U_h + K_B$$

$$\frac{1}{2} k\, d^2 = m\, g\, h + \frac{1}{2} m\, v_B^2 \qquad \rightarrow \quad v_B = \sqrt{\frac{k\, d^2}{m} - 2\, g\, h}$$

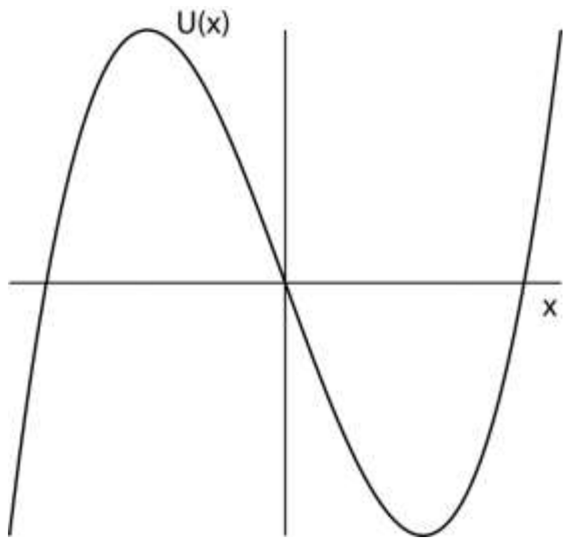
En B la partícula inicia un movimiento parabólico de velocidad v_B formando un ángulo de 30 grados con la horizontal. Si desarrollamos el cálculo del alcance máximo:

$$x = v_B \cos 30\ t$$

$$0 = v_B \sin 30\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 \qquad \rightarrow \qquad t = \frac{2 v_B \sin 30}{g}$$

$$x = \left(\frac{k\, d^2}{m} - 2\, g\, h\right) cos30\ \frac{2 \sin 30}{g} = \sqrt{3}\left(\frac{k\, d^2}{2g\, m} - \ h\right)$$

2. Una partícula de masa m se mueve a lo largo del eje X sometida únicamente a una fuerza F(x) cuya energía potencial asociada viene dada por $U(x) = A\ \left(\frac{1}{3}x^3 - B^2 x\right)$ (ver figura).
a) Calcule la expresión de la fuerza F(x). **(0,75 puntos)**
b) Señale el/los punto/s de equilibrio estable/s y describa el movimiento si la energía total de la partícula es cero. **(0,75 puntos)**
c) Si la partícula se encuentra en reposo en la posición $x_1 = B$ y se la lleva hasta el reposo en la posición $x_2 = \sqrt{3}B$ en un tiempo t_1, ¿cuál es la expresión de la potencia media desarrollada para este desplazamiento? **(0,5 puntos)**



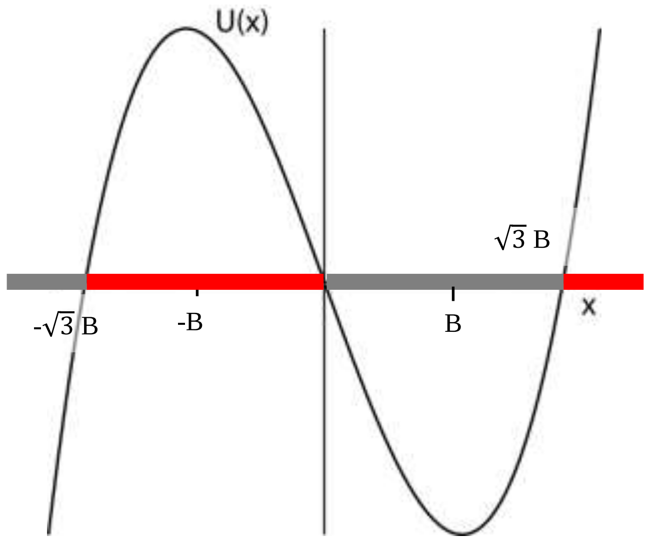
<u>**Solución**</u>

a) La fuerza desarrollada por el campo conservativo U(x) es

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} = A\ (B^2 - x^2)$$

b) U(x) se anula en los puntos $-\sqrt{3}B$ y $\sqrt{3}B$. Tiene máximo o mínimo local en F(x)=0, es decir, -*B* y *B*.

El único punto de equilibrio estable está en $x_1 = B$ en el que la fuerza se anula la energía potencial alcanza un mínimo. En $x_3 = -B$ la fuerza se anula, es un punto crítico, pero inestable ya que la energía potencial alcanza un máximo.



Si la energía total de la partícula es cero, en los puntos en los que la energía potencial es igual a cero, $x_0 = 0$ y $\pm\sqrt{3}B$ la energía cinética también tiene que ser cero. Para los valores entre ellos, la energía potencial puede ser:

-positiva: esas zonas (en rojo en la figura superior) están fuera de su alcance. Es decir, la partícula no tiene energía suficiente para llegar a ellas ya que requieren una energía potencial superior a la energía total de la que dispone.

-negativa: son las zonas en las que se puede mover la partícula (en gris en la figura superior). La energía de la partícula será superior a la energía potencial que tendrá por ocupar esas zonas, por lo que en ellas tendrá una energía cinética positiva. Si inicialmente está en la zona entre 0 y $\sqrt{3}B$, la partícula oscilará entre esos dos extremos, alcanzando una velocidad máxima en $x_1 = B$. Si inicialmente está a la izquierda de $-\sqrt{3}B$ la partícula se mueve hacia la izquierda sin límite y con velocidad creciente.

c) La potencia media viene dada por el cociente entre el trabajo realizado y el tiempo en el que se ha realizado

$$P_m = \frac{W}{t}$$

El trabajo realizado por la fuerza será igual a la variación de la energía potencial, que dado que es nula en la posición x_2 (U_2=0) tenemos que

$$W = -U_1 = \frac{2}{3}AB^3$$

por lo que,

$$P_m = \frac{2AB^3}{3t_1}$$

También se puede llegar a este resultando utilizando directamente la definición de potencia como

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

La potencia media será

$$P_m = F_m \cdot v_m = F_m \cdot \frac{x_2 - x_1}{t_1}$$

El promedio de la fuerza durante el espacio recorrido es:

$$F_m = \frac{\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx}{x_2 - x_1} = \frac{U_2 - U_1}{x_2 - x_1}$$

llegando a la misma fórmula

$$P_m = \frac{-U_1}{t_1}$$

3. Se pone en órbita un satélite artificial que describe una órbita elíptica alrededor de la Tierra (de masa M_T), que ocupa uno de los focos. El perigeo de la órbita (punto de máximo acercamiento) está situado a una distancia r_p del centro de la Tierra y el satélite lo transita a una velocidad v_p. Calcular la distancia a la Tierra en la que se produce el apogeo y la velocidad del satélite en este punto, en función de los datos del problema y de G. **(2 puntos)**

Solución

Por un lado tenemos la conservación del momento angular (fuerza central), que el en el perigeo (subíndice p) y en el apogeo (subíndice a) tiene la forma:

$$r_a v_a = r_p v_p$$

Por otro la conservación de la energía mecánica (fuerza conservativa):

$$\frac{1}{2}v_a{}^2 - G\frac{M}{r_a} = \frac{1}{2}v_p{}^2 - G\frac{M}{r_p}$$

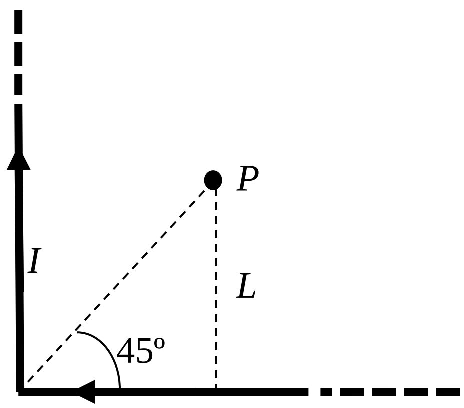
Esto nos da un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: r_a y v_a.
Resolviendo el sistema obtenemos:

$$r_a = \frac{r_p{}^2 v_p{}^2}{2GM_T - r_p v_p{}^2}$$

$$v_a = \frac{2GM_T}{r_p v_p} - v_p$$

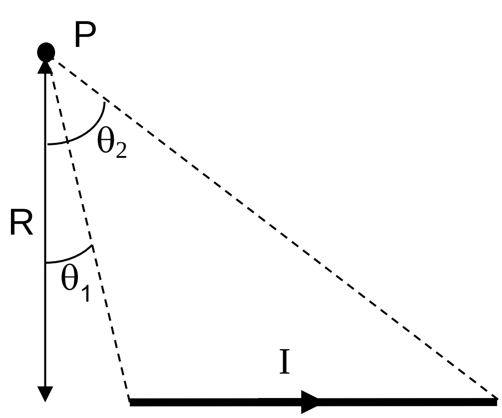
Evidentemente también que hay una segunda solución que corresponde a la órbita circular $r_a = r_p$ y $v_a = v_p$.

4. Supongamos el conductor rectilíneo infinitamente largo que se muestra en la figura, que tiene forma de "L". Por él circula una corriente I en el sentido indicado. Calcular el campo magnético producido en el punto P. **(2,5 puntos)**



Ayuda: Dado el segmento de conductor rectilíneo mostrado en la siguiente figura por el que circula una corriente I, el módulo del campo magnético generado en el punto P situado a una distancia R de la dirección definida por el segmento rectilíneo es:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1 \right)$$



<u>Solución</u>

Por simetría, ambas partes del conductor darán el mismo campo. El campo será perpendicular al papel, y el sentido será hacia dentro. El módulo del campo producido por un segmento de corriente rectilíneo (ver deducción en el libro de texto) es

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{L}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right)$$

En nuestro caso, para el segmento horizontal tenemos $\theta_1 = -\pi/4$ y $\theta_2 = \pi/2$ de modo que

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{L}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{L}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Para el segmento vertical tenemos $\theta_1 = -\pi/2$ y $\theta_2 = \pi/4$ lo cual nos da el mismo resultado

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{L}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{L}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

Por consiguiente, el campo total será

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{L}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

dirigido perpendicularmente hacia el papel.

5. Los mesones-μ se crean en la atmósfera a una altura de $6000\ \mathrm{m}$ (con respecto a la superficie terrestre) y tienen una vida media de 2×10^{-6} s (medida en su propio sistema de referencia). Si la velocidad con la que se dirigen hacia la Tierra es de $0.998c$, ¿llegarán a la superficie terrestre antes de desintegrarse?

- Resolver el problema desde un observador situado en la superficie terrestre. **(0,75 puntos)**
- Resolver el problema desde un observador que viaja junto al mesón. **(0,75 puntos)**

Solución

Para un observador situado en la superficie terrestre, el tiempo de vida de los mesones (tiempo propio Δt_P) se dilata de la forma

$$\Delta t = \gamma \Delta t_P = 31.6\times10^{-6}\ \mathrm{s}$$

y la longitud del camino que recorrerán antes de desintegrarse será

$$l = v\Delta t = 9472.6\ \mathrm{m}$$

que es superior a la altura en la que se crearon, de modo que sí que alcanzarán la superficie terrestre.

Para un observador moviéndose con el mesón, la distancia entre el punto de creación y la superficie terrestre se contrae de la forma

$$l = \gamma^{-1} l_P = 379{,}3 \text{ m}$$

siendo $l_P = 6000 \text{ m}$ la distancia propia entre los dos sucesos. Además, para este observador le mesón recorrerá una distancia

$$l = v\Delta t_P = 598.8 \text{ m}$$

Comparando ambas distancias comprobamos que, desde el punto de vista del mesón, también se llegará a la superficie terrestre antes de desintegrarse.
La relación entre la distancia de viaje y la separación entre el punto de creación y la superficie terrestre es la misma:

$$\frac{9472.6}{6000} = \frac{598.8}{397.3} = 1.58$$