

Suponemos que f y g son dos funciones continuas de I en R , siendo I un intervalo abierto (no vacío) de la recta real, y siendo f no idénticamente nula.

Consideramos la ecuación diferencial $y' = fy + g$. (I)

Supongamos que $\varphi : I \rightarrow R$ es una función derivable, no idénticamente nula, que es solución de la ecuación diferencial $y' = fy$;

y que $\psi : I \rightarrow R$ es una función derivable que es solución de la ecuación diferencial (I). Se pide:

1.- Decir si es cierto o no, demostrando la respuesta, que la función φ no se anula en ningún punto de I .

Demostrar también que, si $b \in I$ y $\varphi(b) = a$ ($a \neq 0$), entonces la función φ es única, y es de la forma $\varphi(x) = ae^{\int_b^x f(t)dt}$ ($x \in I$).

(Sugerencia: Tener en cuenta que, en un intervalo I de la recta real R , el único subconjunto no vacío de I , que es simultáneamente abierto y cerrado [para la topología relativa], es el propio intervalo I).

(Hay que demostrar las respuestas, no suponerlas conocidas).

2.- Demostrar que, fijada cualquier constante $C \in R$, la función $y = C\varphi + \psi$ es solución de la ecuación diferencial (I).

3.- Demostrar que cualquier función derivable de I en R , que sea solución de la ecuación diferencial (I), es de la forma indicada en el apartado anterior.

4.- Sea $a \in I$. Demostrar que, si $f(a) \neq 0$, todas las rectas tangentes a las curvas $y = C\varphi + \psi$, en los puntos de abscisa $x = a$, se cortan en un punto. Calcular este punto.

5.- Sea $a \in I$. Demostrar que, si $f(a) = 0$, todas las rectas tangentes a las curvas $y = C\varphi + \psi$, en los puntos de abscisa $x = a$, son paralelas. Calcular su pendiente.

6.- Obtener la solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{\sin x} + \tan \frac{x}{2}$, para $0 < |x| < \pi$, que verifique $y(\frac{\pi}{2}) = y(-\frac{\pi}{2}) = 1$.

Solución.-

1.- Que la función φ no se anula en ningún punto de I , es única verificando que $\varphi(b) = a$ ($a \neq 0$), y es de la forma indicada, se demuestra del mismo modo que en el ejercicio resuelto que se puso en el foro.

2.- Teniendo en cuenta las hipótesis, se tiene que, fijada cualquier constante $C \in R$, la función $y = C\varphi + \psi$ es una función derivable, definida en I , que verifica:

$$y' = C\varphi' + \psi' = C(f\varphi) + f\psi + g = f(C\varphi + \psi) + g = fy + g.$$

Luego la función $y = C\varphi + \psi$ es solución de (I).

3.- Supongamos que $h : I \rightarrow R$ es una función derivable, solución de (I).

Se tiene que $h' = fh + g$.

Puesto que la función φ no se anula en ningún punto, en particular, dado $b \in I$,

$\varphi(b) \neq 0$. Ponemos $K = \frac{h(b)-\psi(b)}{\varphi(b)}$.

La función $y_1 = K\varphi + \psi$ es derivable y es solución de (I), según hemos probado en el apartado anterior. Además, verifica que

$$y_1(b) = K\varphi(b) + \psi(b) = h(b) - \psi(b) + \psi(b) = h(b).$$

En consecuencia, la función $h - y_1$ es derivable, está definida en toda la recta, y cumple que

$(h - y_1)' = h' - y_1' = (fh + g) - (fy_1 + g) = fh - fy_1 = f(h - y_1)$. Luego $h - y_1$ es solución de la ecuación diferencial $y' = fy$.

Si $h - y_1$ no fuera idénticamente nula, entonces $h - y_1$ no se anularía en ningún punto, según se probó en el primer apartado. Ahora bien, se tiene que

$(h - y_1)(b) = h(b) - y_1(b) = h(b) - h(b) = 0$. Luego $h - y_1$ debe ser idénticamente nula.

Por tanto, $h = y_1 = K\varphi + \psi$, siendo $K = \frac{h(b)-\psi(b)}{\varphi(b)}$.

Hemos probado así que cualquier solución de (I) es de la forma indicada en el apartado anterior.

4.- Suponemos que a es un número real verificando que $f(a) \neq 0$. Sea $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria.

Una recta tangente a la curva $y = C\varphi + \psi$, en el punto $(a, y(a)) = (a, C\varphi(a) + \psi(a))$, tiene como pendiente

$$\begin{aligned} y'(a) &= (fy + g)(a) = \\ &= f(a)y(a) + g(a) = f(a)(C\varphi(a) + \psi(a)) + g(a) = Cf(a)\varphi(a) + f(a)\psi(a) + g(a). \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de dicha recta tangente, $Y - y(a) = y'(a)(x - a)$, es $Y - C\varphi(a) - \psi(a) = Cf(a)\varphi(a)(x - a) + [f(a)\psi(a) + g(a)](x - a)$.

O lo que es lo mismo,

$$Y = C\varphi(a)[1 + f(a)(x - a)] + [f(a)\psi(a) + g(a)](x - a) + \psi(a).$$

Esta expresión no depende de la constante C en el caso de que sea $1 + f(a)(x - a) = 0$ (y sólo en ese caso, pues $\varphi(a) \neq 0$, ya que la función φ no se anula en ningún punto).

Ahora bien, ya que $f(a) \neq 0$ por hipótesis, se tiene que $1 + f(a)(x - a) = 0$ si, y solamente si, $x - a = -\frac{1}{f(a)}$; o lo que es lo mismo, $x = a - \frac{1}{f(a)}$. Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente, se tiene que, para este valor de x ,

$$Y = [f(a)\psi(a) + g(a)](-\frac{1}{f(a)}) + \psi(a) = -\psi(a) - \frac{g(a)}{f(a)} + \psi(a) = -\frac{g(a)}{f(a)}.$$

Por tanto, si $f(a) \neq 0$, todas las rectas tangentes consideradas pasan por el punto $(a - \frac{1}{f(a)}, -\frac{g(a)}{f(a)})$.

(Una demostración distinta del mismo resultado, pero sin calcular el punto donde se cortan las tangentes, puede verse en el libro).

5.- Suponemos que a es un número real verificando que $f(a) = 0$. Sea $C \in \mathbb{R}$ una constante arbitraria.

Una recta tangente a la curva $y = C\varphi + \psi$, en el punto $(a, y(a)) = (a, C\varphi(a) + \psi(a))$, tiene como pendiente

$$y'(a) = (fy + g)(a) = f(a)y(a) + g(a) = 0y(a) + g(a) = g(a).$$

Por tanto, dicha pendiente no depende de la constante C . Todas las rectas tangentes consideradas tienen esa misma pendiente ($g(a)$), luego son paralelas.

6.- Obsérvese que, para un número real x , $0 < |x| < \pi \Leftrightarrow x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Consideremos en primer lugar la ecuación homogénea $y' = \frac{y}{\operatorname{sen} x}$ ($0 < x < \pi$).

Pongamos $b = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$.

De acuerdo con lo antes probado, una solución φ de la ecuación homogénea, definida en el intervalo abierto $I = (0, \pi)$, que verifique $\varphi(b) = a$ ($a \in \mathbb{R}$), es de la forma

$\varphi(x) = ae^{\int_b^x \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt}$, para todo $x \in I = (0, \pi)$, tanto si $a \neq 0$ (antes probado) como si $a = 0$ (como se comprueba fácilmente).

Ahora bien, haciendo el cambio de variable $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$, se tiene que $t = 2 \arctg(u)$,

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2 \cos^2(\frac{t}{2})},$$

$$\begin{aligned} \int_b^x \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt &= \int_b^x \frac{1}{2 \operatorname{sen}(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})} dt = \int_b^x \frac{1/\cos^2(\frac{t}{2})}{2 \operatorname{sen}(\frac{t}{2}) \cos(\frac{t}{2})/\cos^2(\frac{t}{2})} dt = \int_b^x \frac{1/\cos^2(\frac{t}{2})}{2 \operatorname{tg}(\frac{t}{2})} dt = \int_{\operatorname{tg} \frac{b}{2}}^u \frac{1}{u} du = \\ &= \log|u| - \log\left|\operatorname{tg}\left(\frac{b}{2}\right)\right| = \log|u| - \log\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \log|u| - \log 1 = \log u - 0 = \\ &= \log u = \log\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right|. \end{aligned}$$

(Nótese que $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2} = |u|$, pues $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > 0$, ya que

$x \in (0, \pi)$.)

Luego $\varphi(x) = ae^{\log|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|} = a|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| = a \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, para todo $x \in (0, \pi)$.

Por tanto, si consideramos una función derivable $g : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que la función $\psi(x) = g(x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ sea una solución particular de la ecuación dada (es decir, de la ecuación $y' = \frac{y}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$), en el intervalo abierto $(0, \pi)$, es inmediato comprobar que debe ser

$g'(x) \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, para todo $x \in (0, \pi)$; luego debe ser $g'(x) = 1$ y $g(x) = x + K$, siendo K una constante, para $x \in (0, \pi)$, $x \neq 0$; y ya que la función g está bien definida y es continua (pues es derivable) en el intervalo $(0, \pi)$, debe ser $g(x) = x + K$, siendo K una constante, para todo $x \in (0, \pi)$.

Por tanto, de acuerdo con lo anterior, $y = (x + K) \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, siendo K una constante, es la solución general de la ecuación dada, en el intervalo $(0, \pi)$.

En el referido intervalo $(0, \pi)$, la solución que verifica $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ es, por tanto, la única que cumple $1 = (\frac{\pi}{2} + K) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} + K \Leftrightarrow K = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{2}$.

Análogamente, si consideramos el intervalo abierto $J = (-\pi, 0)$, y ponemos por ejemplo $b = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, 0)$, se tiene que, dado $a \in \mathbb{R}$, una solución φ de la ecuación homogénea, definida en el intervalo abierto $J = (-\pi, 0)$, que verifique $\varphi(b) = a$, es de la forma

$\varphi(x) = ae^{\log|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|} = a|\operatorname{tg} \frac{x}{2}| = -a \operatorname{tg} \frac{x}{2} = e \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (siendo $e = -a$), para todo $x \in (-\pi, 0)$.

También procediendo como antes, se comprueba que una solución general de la ecuación dada (es decir, de la ecuación $y' = \frac{y}{\operatorname{sen} x} + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$), en el intervalo abierto $J = (-\pi, 0)$, es de la forma $y = (x + L) \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$, siendo L una constante.

En el referido intervalo $(-\pi, 0)$, la solución que verifica $y(-\frac{\pi}{2}) = 1$ es, por tanto, la única que cumple $1 = (-\frac{\pi}{2} + L) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - L \Leftrightarrow L = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}$.

En consecuencia, en el conjunto abierto
 $JUI = (-\pi, 0) \cup (0, \pi) = \{x \in R / 0 < |x| < \pi\}$, la solución de la ecuación cosniderada
 $(y' = \frac{y}{\text{sen}x} + \text{tg} \frac{x}{2})$, que verifica $y(\frac{\pi}{2}) = y(-\frac{\pi}{2}) = 1$, es única y es la siguiente:

$$y = \begin{cases} (x + \frac{\pi-2}{2})\text{tg}(\frac{x}{2}), & \text{si } -\pi < x < 0 \\ (x + \frac{2-\pi}{2})\text{tg}(\frac{x}{2}), & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

(Es fácil realizar la comprobación, y conviene hacerlo).