Problema / I / Diciembre de 2018. / Alumno.........................................................
Introducción a las ecuaciones diferenciales.

---

Suponemos que $f$ y $g$ son dos funciones continuas de $I$ en $R$, siendo $I$ un intervalo abierto (no vacío) de la recta real, y siendo $f$ no idénticamente nula.

Consideramos la ecuación diferencial $y' = fy + g$. (I)

Supongamos que $\varphi : I \to R$ es una función derivable, no idénticamente nula, que es solución de la ecuación diferencial $y' = fy$ ;
y que $\psi : I \to R$ es una función derivable que es solución de la ecuación diferencial (I). Se pide:

1.- Decir si es cierto o no, demostrando la respuesta, que la función $\varphi$ no se anula en ningún punto de $I$. $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

Demostrar también que, si $b \in I$ y $\varphi(b) = a$ $(a \neq 0)$, entonces la función $\varphi$ es única, y es de la forma $\varphi(x) = ae^{\int_b^x f(t)dt}$ $(x \in I)$.

(Sugerencia: Tener en cuenta que, en un intervalo $I$ de la recta real $R$, el único subconjunto no vacío de $I$, que es simultáneamente abierto y cerrado [para la topología relativa], es el propio intervalo $I$).

(Hay que demostrar las respuestas, no suponerlas conocidas).

2.- Demostrar que, fijada cualquier constante $C \in R$, la función $y = C\varphi + \psi$ es solución de la ecuación diferencial (I). $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

3.- Demostrar que cualquier función derivable de $I$ en $R$, que sea solución de la ecuación diferencial (I), es de la forma indicada en el apartado anterior. $\boxed{\phantom{xxxxxxxx}}$

4.- Sea $a \in I$. Demostrar que, si $f(a) \neq 0$, todas las rectas tangentes a las curvas $y = C\varphi + \psi$, en los puntos de abscisa $x = a$, se cortan en un punto. Calcular este punto.

5.- Sea $a \in I$. Demostrar que, si $f(a) = 0$, todas las rectas tangentes a las curvas $y = C\varphi + \psi$, en los puntos de abscisa $x = a$, son paralelas. Calcular su pendiente.

6.- Obtener la solución de la ecuación diferencial $y' = \frac{y}{\operatorname{sen} x} + tg\frac{x}{2}$ , para $0 < |x| < \pi$, que verifique $y(\frac{\pi}{2}) = y(-\frac{\pi}{2}) = 1$.

---

Solución.-

1.- Que la función $\varphi$ no se anula en ningún punto de $I$, es única verificando que $\varphi(b) = a$ $(a \neq 0)$, y es de la forma indicada, se demuestra del mismo modo que en el ejercicio resuelto que se puso en el foro.

2.- Teniendo en cuenta las hipótesis, se tiene que, fijada cualquier constante $C \in R$, la función $y = C\varphi + \psi$ es una función derivable, definida en $I$, que verifica:

$$y' = C\varphi' + \psi' = C(f\varphi) + f\psi + g = f(C\varphi + \psi) + g = fy + g.$$

Luego la función $y = C\varphi + \psi$ es solución de (I).

3.- Supongamos que $h : I \to R$ es una función derivable, solución de (I).

Se tiene que $h' = fh + g$.

Puesto que la función $\varphi$ no se anula en ningún punto, en particular, dado $b \in I$,

$\varphi(b) \neq 0$. Ponemos $K = \frac{h(b)-\psi(b)}{\varphi(b)}$.

La función $y_1 = K\varphi + \psi$ es derivable y es solución de (I), según hemos probado en el apartado anterior. Además, verifica que

$y_1(b) = K\varphi(b) + \psi(b) = h(b) - \psi(b) + \psi(b) = h(b)$.

En consecuencia, la función $h - y_1$ es derivable, está definida en toda la recta, y cumple que

$(h - y_1)' = h' - y_1' = (fh + g) - (fy_1 + g) = fh - fy_1 = f(h - y_1)$. Luego $h - y_1$ es solución de la ecuación diferencial $y' = fy$.

Si $h - y_1$ no fuera idénticamente nula, entonces $h - y_1$ no se anularía en ningún punto, según se probó en el primer apartado. Ahora bien, se tiene que

$(h - y_1)(b) = h(b) - y_1(b) = h(b) - h(b) = 0$. Luego $h - y_1$ debe ser idénticamente nula.

Por tanto, $h = y_1 = K\varphi + \psi$, siendo $K = \frac{h(b)-\psi(b)}{\varphi(b)}$.

Hemos probado así que cualquier solución de (I) es de la forma indicada en el apartado anterior.

4.- Suponemos que $a$ es un número real verificando que $f(a) \neq 0$. Sea $C \in R$ una constante arbitraria.

Una recta tangente a la curva $y = C\varphi + \psi$, en el punto $(a, y(a)) = (a, C\varphi(a) + \psi(a))$, tiene como pendiente

$y'(a) = (fy + g)(a) =$

$= f(a)y(a) + g(a) = f(a)(C\varphi(a) + \psi(a)) + g(a) = Cf(a)\varphi(a) + f(a)\psi(a) + g(a)$.

Por tanto, la ecuación de dicha recta tangente, $Y - y(a) = y'(a)(x - a)$, es

$Y - C\varphi(a) - \psi(a) = Cf(a)\varphi(a)(x - a) + [f(a)\psi(a) + g(a)](x - a)$.

O lo que es lo mismo,

$Y = C\varphi(a)[1 + f(a)(x - a)] + [f(a)\psi(a) + g(a)](x - a) + \psi(a)$.

Esta expresión no depende de la constante $C$ en el caso de que sea $1 + f(a)(x - a) = 0$ (y sólo en ese caso, pues $\varphi(a) \neq 0$, ya que la función $\varphi$ no se anula en ningún punto). Ahora bien, ya que $f(a) \neq 0$ por hipótesis, se tiene que $1 + f(a)(x - a) = 0$ si, y solamente si, $x - a = -\frac{1}{f(a)}$; o lo que es lo mismo, $x = a - \frac{1}{f(a)}$. Sustituyendo en la ecuación de la recta tangente, se tiene que, para este valor de $x$,

$Y = [f(a)\psi(a) + g(a)](-\frac{1}{f(a)}) + \psi(a) = -\psi(a) - \frac{g(a)}{f(a)} + \psi(a) = -\frac{g(a)}{f(a)}$.

Por tanto, si $f(a) \neq 0$, todas las rectas tangentes consideradas pasan por el punto $(a - \frac{1}{f(a)}, -\frac{g(a)}{f(a)})$.

(Una demostración distinta del mismo resultado, pero sin calcular el punto donde se cortan las tangentes, puede verse en el libro).

5.- Suponemos que $a$ es un número real verificando que $f(a) = 0$. Sea $C \in R$ una constante arbitraria.

Una recta tangente a la curva $y = C\varphi + \psi$, en el punto $(a, y(a)) = (a, C\varphi(a) + \psi(a))$, tiene como pendiente

$y'(a) = (fy + g)(a) = f(a)y(a) + g(a) = 0y(A) + g(a) = g(a)$.

Por tanto, dicha pendiente no depende de la constante $C$. Todas las rectas tangentes consideradas tienen esa misma pendiente $(g(a))$, luego son paralelas.

6.- Obsérvese que, para un número real $x$, $0 < |x| < \pi \Leftrightarrow x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ .

Consideremos en primer lugar la ecuación homogénea $y' = \frac{y}{senx}$ $(0 < x < \pi)$.
Pongamos $b = \frac{\pi}{2} \in (0, \pi)$ .

De acuerdo con lo antes probado, una solución $\varphi$ de la ecuación homogéna, definida en el intervalo abierto $I = (0, \pi)$, que verifique $\varphi(b) = a$ $(a \in R)$, es de la forma

$\varphi(x) = ae^{\int_b^x \frac{1}{sent}dt}$, para todo $x \in I = (0, \pi)$, tanto si $a \neq 0$ (antes probado) como si $a = 0$ (como se comprueba fácilmente).

Ahora bien, haciendo el cambio de variable $u = tg\frac{t}{2}$ , se tiene que $t = 2arctg(u)$,

$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\cos^2(\frac{t}{2})}$ ,

$$\int_b^x \frac{1}{sent}dt = \int_b^x \frac{1}{2sen(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})}dt = \int_b^x \frac{1/\cos^2(\frac{t}{2})}{2sen(\frac{t}{2})\cos(\frac{t}{2})/\cos^2(\frac{t}{2})}dt = \int_b^x \frac{1/\cos^2(\frac{t}{2})}{2tg(\frac{t}{2})}dt = \int_{tg\frac{b}{2}}^u \frac{1}{u}du =$$

$$= \log|u| - \log\left|tg(\tfrac{b}{2})\right| = \log|u| - \log(tg(\tfrac{\pi}{4})) = \log|u| - \log 1 = \log u - 0 =$$

$= \log u = \log(\left|tg\frac{x}{2}\right|)$ . (Nótese que $u = tg\frac{x}{2} = |u|$, pues $tg\frac{x}{2} > 0$, ya que $x \in (0, \pi)$.)

Luego $\varphi(x) = ae^{\log(\left|tg\frac{x}{2}\right|)} = a\left|tg\frac{x}{2}\right| = a\, tg\frac{x}{2}$ , para todo $x \in (0, \pi)$.

Por tanto, si consideramos una función derivable $g : (0, \pi) \to R$ tal que la función $\psi(x) = g(x)tg\frac{x}{2}$ sea una solución particular de la ecuación dada (es decir, de la ecuación $y' = \frac{y}{senx} + tg\frac{x}{2}$), en el intervalo abierto $(0, \pi)$, es inmediato comprobar que debe ser

$g'(x)tg\frac{x}{2} = tg\frac{x}{2}$, para todo $x \in (0, \pi)$; luego debe ser $g'(x) = 1$ y $g(x) = x + K$, siendo $K$ una constante, para $x \in (0, \pi)$, $x \neq 0$; y ya que la función $g$ está bien definida y es continua (pues es derivable) en el intervalo $(0, \pi)$, debe ser $g(x) = x + K$, siendo $K$ una constante, para todo $x \in (0, \pi)$.

Por tanto, de acuerdo con lo anterior, $y = (x + K)tg(\frac{x}{2})$ , siendo $K$ una constante, es la solución general de la ecuación dada, en el intervalo $(0, \pi)$.

En el referido intervalo $(0, \pi)$, la solución que verifica $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ es, por tanto, la única que cumple $1 = (\frac{\pi}{2} + K)tg(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} + K \Leftrightarrow K = 1 - \frac{\pi}{2} = \frac{2-\pi}{2}$.

Análogamente, si consideramos el intervalo abierto $J = (-\pi, 0)$, y ponemos por ejemplo $b = -\frac{\pi}{2} \in (-\pi, 0)$, se tiene que, dado $a \in R$, una solución $\varphi$ de la ecuación homogéna, definida en el intervalo abierto $J = (-\pi, 0)$, que verifique $\varphi(b) = a$ , es de la forma

$\varphi(x) = ae^{\log\left|tg\frac{x}{2}\right|} = a\left|tg\frac{x}{2}\right| = -a\, tg\frac{x}{2} = etg\frac{x}{2}$ (siendo $e = -a$), para todo $x \in (-\pi, 0)$.

También procediendo como antes, se comprueba que una solución general de la ecuación dada (es decir, de la ecuación $y' = \frac{y}{senx} + tg\frac{x}{2}$), en el intervalo abierto $J = (-\pi, 0)$, es de la forma $y = (x + L)tg(\frac{x}{2})$, siendo $L$ una constante.

En el referido intervalo $(-\pi, 0)$, la solución que verifica $y(-\frac{\pi}{2}) = 1$ es, por tanto, la única que cumple $1 = (-\frac{\pi}{2} + L)tg(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{2} - L \Leftrightarrow L = \frac{\pi}{2} - 1 = \frac{\pi-2}{2}$.

En consecuencia, en el conjunto abierto $JUI = (-\pi,0) \cup (0,\pi) = \left\{x \in R/ \ 0 < |x| < \pi\right\}$, la solución de la ecuación cosniderada $(y' = \frac{y}{senx} + tg\frac{x}{2})$, que verifica $y(\frac{\pi}{2}) = y(-\frac{\pi}{2}) = 1$, es única y es la siguiente:

$$y = \begin{cases} (x + \frac{\pi-2}{2})tg(\frac{x}{2}), & si \ -\pi < x < 0 \\ (x + \frac{2-\pi}{2})tg(\frac{x}{2}), & si \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

(Es fácil realizar la comprobación, y conviene hacerlo).