Geometría diferencial de curvas y superficies - Prueba de evaluación continua

Martín de la Rosa Díaz

1.- Probaremos que ϕ es una carta, para lo cual comenzaremos viendo que ϕ es un homeomorfismo sobre su imagen $\phi(\mathscr{U})$, siendo $\mathscr{U} = (0, +\infty) \times (-\pi/2, \pi/2)$. En primer lugar, supongamos que existen u_1, v_1 y u_2, v_2 en el dominio de ϕ tales que

$$(u_1 \cos v_1, u_1 \sin v_1, \frac{1}{2}u_1^2 + v_1) = (u_2 \cos v_2, u_2 \sin v_2, \frac{1}{2}u_2^2 + v_2)$$

En particular, $u_1 \cos v_1 = u_2 \cos v_2$ y $u_1 \sin v_1 = u_2 \sin v_2$. Elevando al cuadrado estas igualdades y sumándolas, encontramos que $u_1^2 = u_2^2$. Y como u es estrictamente mayor que cero, $u_1 = u_2$. Entonces, de las terceras componentes se tiene que

$$\frac{1}{2}u_1^2 + v_1 = \frac{1}{2}u_2^2 + v_2 \Longrightarrow v_1 = v_2$$

De este modo, $\phi(u_1, v_1) = \phi(u_2, v_2) \Longleftrightarrow u_1 = u_2, v_1 = v_2$ y ϕ es inyectiva. La sobreyectividad está asegurada por definición, y ϕ es, pues, biyectiva. Además, es claro que ϕ es continua e infinitamente derivable. Falta ver que la inversa de ϕ, que está bien definida por ser ϕ biyectiva, es continua. Si para un $(x, y, z) \in \phi(\mathscr{U})$ escribimos

$$x = u \cos v \qquad y = u \sin v \qquad z = \frac{1}{2}u^2 + v$$

se tiene

$$x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 \Longrightarrow u = \sqrt{x^2 + y^2}$$

donde se toma la raíz positiva. Asimismo

$$v = z - \frac{1}{2}u^2 = z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

En consecuencia

$$\phi^{-1} : \phi(\mathscr{U}) \longrightarrow \mathscr{U} \qquad \phi^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x^2 + y^2}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2))$$

y vemos que ϕ^{-1} también es una función continua. Queda probado que $\phi : \mathscr{U} \longrightarrow \phi(\mathscr{U})$ es un homeomorfismo de clase infinito. La definición de carta exige también que la diferencial de ϕ sea inyectiva, esto es, que la matriz cuyas columnas son las componentes de $\frac{\partial \phi}{\partial u}$ y $\frac{\partial \phi}{\partial v}$, que es

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ u & 1 \end{pmatrix}$$

tenga rango máximo. El determinante formado por las dos primeras filas da

$$\begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \end{vmatrix} = u \cos^2 v + u \sin^2 v = u$$

y este nunca se anula en el dominio de ϕ. Por tanto, la matriz anterior tiene rango 2. Si ahora tomamos $\mathscr{A} = \mathbb{R}^3$, la terna $(\mathscr{U}, \phi, \mathscr{A})$ es una carta y $\phi(\mathscr{U})$ es una superficie diferenciable, ya que admite un atlas (en este caso, constituido por una sola carta).

2.- Usaremos una caracterización que nos permita discriminar si una curva es geodésica de la superficie o no con independencia de su parametrización. Esta es: una curva contenida en una superficie y que carece de puntos de inflexión es una geodésica si y solo si su plano osculador es perpendicular al plano tangente de la superficie en todos los puntos de la curva. Con esta idea, calcularemos sendos vectores ortogonales a los planos osculador y tangente y verificaremos si son perpendiculares entre sí.

Para un punto cualquiera de $\phi(\mathscr{U})$, se tiene que

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = (\cos v, \sin v, u) \qquad\qquad \frac{\partial \phi}{\partial v} = (-u \sin v, u \cos v, 1)$$

Un vector perpendicular al plano tangente, que es el subespacio vectorial generado por los anteriores vectores, viene dado por

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos v & \sin v & u \\ -u \sin v & u \cos v & 1 \end{vmatrix} = (\sin v - u^2 \cos v)\mathbf{i} - (\cos v + u^2 \sin v)\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

donde $\mathbf{i} = (1,0,0), \mathbf{j} = (0,1,0), \mathbf{k} = (0,0,1)$.

Sea la curva $\alpha(u) = \phi(u,b) = (u\cos b, u\sin b, \frac{1}{2}u^2 + b)$. El plano osculador de la curva α es el generado por los vectores α' y α'', los cuales calculamos

$$\alpha'(u) = (\cos b, \sin b, u)$$

$$\alpha''(u) = (0,0,1)$$

Nótese que α no tiene puntos de inflexión, ya que $\alpha'(u)$ y $\alpha''(u)$ nunca son paralelos ni nulos. Un vector ortogonal al plano osculador de α es

$$\alpha'(u) \times \alpha''(u) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos b & \sin b & u \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin b\mathbf{i} - \cos b\mathbf{j}$$

Para ver si este vector es perpendicular al vector ortogonal al plano tangente de $\phi(\mathscr{U})$, estudiamos si su producto escalar se anula, evaluando el segundo sobre la curva $\alpha(u)$, es decir, haciendo $v = b$

$$(\sin b - u^2\cos b, -\cos b - u^2\sin b, u)\cdot(\sin b, -\cos b, 0) = \sin^2 b - u^2 \sin b\cos b +$$
$$+\cos^2 b + u^2\sin b\cos b = 1$$

El resultado es distinto de cero sea cual sea el valor de b, por lo que $\alpha(u) = \phi(u,b)$ no puede ser geodésica. Repetimos el proceso con $\beta(v) = \phi(a,v) = (a\cos v, a\sin v, \frac{1}{2}a^2 + v)$

$$\beta'(v) = (-a\sin v, a\cos v, 1)$$

$$\beta''(v) = (-a\cos v, -a\sin v, 0)$$

Al igual que antes, β no tiene puntos de inflexión (recuérdese que $a \neq 0$). Entonces

$$\beta'(v) \times \beta''(v) = -a\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin v & a\cos v & 1 \\ \cos v & \sin v & 0 \end{vmatrix} = a(\sin v\mathbf{i} - \cos v\mathbf{j} + a\mathbf{k})$$

Hacemos el producto escalar de este vector y el perpendicular al plano tangente evaluado en $\beta(v)$, lo que quiere decir igualando $u = a$

$$(\sin v - a^2 \cos v, -\cos v - a^2 \sin v, a) \cdot a(\sin v, -\cos v, a) = a(\sin^2 v - a^2 \sin v \cos v +$$
$$+ \cos^2 v + a^2 \sin v \cos v + a^2) = a(1 + a^2)$$

y no existe ningún $a \in (0, +\infty)$ tal que $a(1 + a^2) = 0$, por lo que tampoco es posible que $\beta(v) = \phi(a, v)$ sea geodésica. Así las cosas, las respuestas a las dos preguntas planteadas son negativas.