

ESPACIOS NORMADOS

NO OLVIDEN SU NOMBRE Y DNI EN CADA PÁGINA

- Cada ejercicio se valora sobre 2,5 puntos.
- En la valoración se tendrá en cuenta:
La corrección del resultado, el razonamiento utilizado y la exposición escrita.
- Es muy importante que los razonamientos estén fundamentados y
no hacer afirmaciones que contengan errores.

Ejercicio 1. Sea $E = (C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$

a) Para cada $t \in [0, 1]$, sea $\delta_t : E \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\delta_t(f) = f(t)$. Probar que $f \in E'$ y calcular su norma.

b) Sean $f, g \in E$ tales que $f(x) \leq g(x) \forall x \in [0, 1]$.

Probar que

$$[f, g] = \{h \in E : f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in [0, 1]\}$$

es un conjunto cerrado y acotado.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$C_n = \{f \in E : f(0) = 1, 0 \leq f(t) \leq 1 \text{ si } t \in [0, 1/n] \\ \text{y } f_{[1/n, 1]} = 0\}.$$

Probar que $\{C_n\}$ es una sucesión decreciente de cerrados y acotados, además $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$. ¿Nos dice

esto algo sobre la compacidad?

Ejercicio 2.

a) Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con un subespacio vectorial $Y \neq X$ denso en X .

Probar que el operador lineal Identidad

$I : Y \rightarrow Y$ no puede ser extendido a un operador continuo $\tilde{I} : X \rightarrow Y$.

b) Dados dos espacios normados $(X, \|\cdot\|_X)$,

$(Y, \|\cdot\|_Y)$ y W un subespacio de X .

Si $T : W \rightarrow Y$ operador lineal con $T(W)$ de dimensión

finita. Probar que existe $\tilde{T} : X \rightarrow Y$ operador lineal y continuo tal que extiende a T y $\tilde{T}(X) = T(W)$.

Ejercicio 3.

Sea (H, \langle, \rangle) un espacio de Hilbert, probar que

a) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

b) Sea M un subespacio vectorial de H . Probar que $\overline{M} = H$ sí y sólo si $M^\perp = \{0\}$.

Ejercicio 4.

Sea $E = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$ un conjunto numerable.

Se define $d(a_n, a_n) = 0$ y

$$d(a_n, a_m) = \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \text{ si } n \neq m.$$

Compruébese que d es una distancia y estudiar si (E, d) es completo.

Estimadas/os estudiantes:

El rectorado nos ha fijado la fecha del examen de Espacios Normados, habrá dos turnos

02 de Junio de 2020 de 9.00 a 11.00

05 de Junio de 2020 de 16.15 a 18.15

Han fijado las fechas y los horarios para que sea fácil el tránsito digital tanto a la bajada del enunciado como a la subida de las respuestas. Se dejará, si es técnicamente posible, un poco más de tiempo para subir la solución, pero una vez transcurrido el tiempo se cierra la aplicación y no se puede hacer la subida. Si se produjese un accidente en el envío de la respuesta, y en el mismo horario habría que enviarlo a mi correo

jdemia@mat.uned.es

con el asunto : EXAMEN DE ESPACIOS NORMADOS, nombre y apellidos.

INSTRUCCIONES

- A partir de la hora de comienzo del examen en entrega de tareas aparecerá el enunciado que podrán bajar, descargar o leer. Durante dos horas pueden ir resolviendo el examen que al acabar con las hojas un único PDF que se puede subir en los plazos horarios establecidos. Habrá unos minutos más para subirlo.
- El examen consta de 4 ejercicios del estilo de los que se vienen haciendo en los exámenes presenciales o de los problemas del texto base.
- Haga el examen a mano, como lo haría en la prueba presencial, poniendo en la parte superior DE CADA HOJA SU NOMBRE APELLIDOS Y DNI.
- Hay que hacer un PDF con las respuestas y en ÚNICO DOCUMENTO colgarlo en ENTREGA DE TRABAJO QUE SE ENCUENTRA EN EL CURSO VIRTUAL DE ESPACIOS NORMADOS de dónde ha obtenido el enunciado. (Ya les comenté que yo normalmente escaneo pero me han enseñado app en los móviles que escanean y agrupan los documentos en un PDF)
- Los enunciados son largos para que no les explique, lo más posible, lo que les pide en el examen. Haga despacio los problemas recordando que no hay que hacerlos todos, si no hacerlos bien. Es muy importante que los razonamientos sean correctos y que no haya afirmaciones tremendas por falsas. Se trata de mostrar lo que se sabe, no lo que no se sabe. Es preferible hacer la mitad bien que todo mal y mal expresado.
- No haga un examen largo con desarrollos que no se piden. Esto hace perder mucho tiempo y no centrarse en lo importante. Es preferible que sean más rigurosos en lo que respondan que hacer mucho mal razonado.

- Un examen de final de Grado para mí debe de mostrar conocimientos y madurez, por tanto me importan mucho a la hora de calificar ambos aspectos.

Les deseo suerte. Estaré pendiente en el horario de examen por si surge algún problema. En cuyo caso nos comunicaremos por el mail y yo les envío información por el Tablón de Noticias del curso virtual.

Un saludo

Jose Leandro de María

En consultas generales o por correo me dicen si tienen alguna duda.