INTEGRAL DE LEBESGUE
Exámenes

2018 - 1ª Semana

Ejercicio 1. Probar que si $\mu(\Omega)=1$, con f y g medibles positivas tales que

$$f(x)g(x)\geq 1$$

entonces se tiene que

$$\left(\int_\Omega f d\mu\right)\left(\int_\Omega g\, d\mu\right)\geq 1$$

Solución:

En primer lugar, hay que observar que las funciones pueden no ser μ-integrables. Además, no hay que suponer que las funciones sean reales, pues pueden estar definidas en espacios de medida más generales.

Vamos a denotar $\boldsymbol{F}(\Omega)$ al conjunto de las particiones finitas disjuntas de Ω formadas por elementos de la σ-álgebra del espacio de medida. Denotaremos $A=\{A_1,\ldots,A_n\}\in\boldsymbol{F}(\Omega)$ a una partición arbitraria.

Se tiene con estas consideraciones que (revisar definición pág. 155 del libro de Valdivia)

$$\int_\Omega f d\mu=\sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^n \inf_{x\in A_i}\{f(x)\}\,\mu(A_i)\right\}\qquad\qquad \int_\Omega g\, d\mu=\sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^n \inf_{x\in A_i}\{g(x)\}\,\mu(A_i)\right\}$$

Se tiene entonces que

$$\left(\int_\Omega f d\mu\right)\left(\int_\Omega g\, d\mu\right)=\left[\sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^n \inf_{x\in A_i}\{f(x)\}\,\mu(A_i)\right\}\right]\left[\sup_{B\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^m \inf_{x\in B_i}\{g(x)\}\,\mu(B_i)\right\}\right]$$

$$\geq \sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\left(\sum_{i=1}^n \inf_{x\in A_i}\{f(x)\}\,\mu(A_i)\right)\left(\sum_{i=1}^n \inf_{x\in A_i}\{g(x)\}\,\mu(A_i)\right)\right\}=$$

$$=\sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \inf_{x\in A_i}\{f(x)\}\inf_{x\in A_j}\{g(x)\}\,\mu(A_i)\mu(A_j)\right\}\underset{f,g\text{ positivas}}{\geq}$$

$$\geq \sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^n \inf_{x\in A_i}\{f(x)\}\inf_{x\in A_i}\{g(x)\}(\mu(A_i))^2\right\}\geq$$

$$\geq \sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^n \inf_{x\in A_i}\{f(x)g(x)\}(\mu(A_i))^2\right\}\underset{f(x)g(x)\geq 1}{\geq}$$

$$\geq \sup_{A\in\boldsymbol{F}(\Omega)}\left\{\sum_{i=1}^n (\mu(A_j))^2\right\}\geq(\mu(\Omega))^2=1$$

ya que $\{\Omega\}\in\boldsymbol{F}(\Omega)$. Por tanto, hemos demostrado que

$$\left(\int_\Omega f d\mu\right)\left(\int_\Omega g\, d\mu\right)\geq 1$$