EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. FEBRERO 2008. 1.SEMANA

1.Pregunta Enunciar y demostrar el Teorema de Cauchy-Goursat para el triángulo.

2.Pregunta. Enunciar y demostrar el teorema que caracteriza las singularidades aisladas esenciales.

3.Pregunta. Determinar la imagen en el plano complejo $\mathbb{C}$ mediante la proyección estereográfica del paralelo de la esfera de Riemann $\mathbb{S}$ con latitud β, $-\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$. Discutir los casos $\beta = \pm\frac{\pi}{2}$, correspondientes a los polos.

Indicación: observar que la distancia al origen desde la proyección de un punto $p \in \mathbb{S}$, se expresa en términos de la tangente del ángulo formado por la recta que une el polo norte N y p con el eje perpendicular al plano y posteriormente relacionar este ángulo con el ángulo β.

4.Pregunta. Demostrar que la serie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

define una función analítica en el semiplano $H_1 = \{z \,|\, \mathrm{Re}\, z > 1\}$. Esta es la conocida función zeta de Riemann.

Duración del Examen: 2 horas.

084059	Febrero - 2008 Original	Código 405 **ANALISIS MATEMATICO IV** Código 08 **MATEMATICAS**	
		Duración: 120 min	Modelo: - Parcial: 1ª P.P.
	Material:YaÐäÜ Ninguno		Hoja: 1 de 1

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. FEBRERO 2008. 2.SEMANA

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el teorema sobre la derivación de una serie de potencias.

2.Pregunta. Enunciar con detalle el teorema del desarrollo en serie de Taylor.

3.Pregunta. Determinar el dominio de convergencia de las series

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{senz}{n^2}\ ,\ ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{1-z^n}.$$

4.Pregunta. Si $f(z)$ es analítica en un abierto A que contiene la banda

$$L_h = \{z \in \mathbb{C}\,|\, z = x + iy\ ,\ 0 \leq y \leq h\}\,,$$

de tal forma que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x+iy) = 0,$$

uniformemente para y, $0 \leq y \leq h$, y tal que la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

existe, entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\,dx$$

también existe y ambas integrales son iguales.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

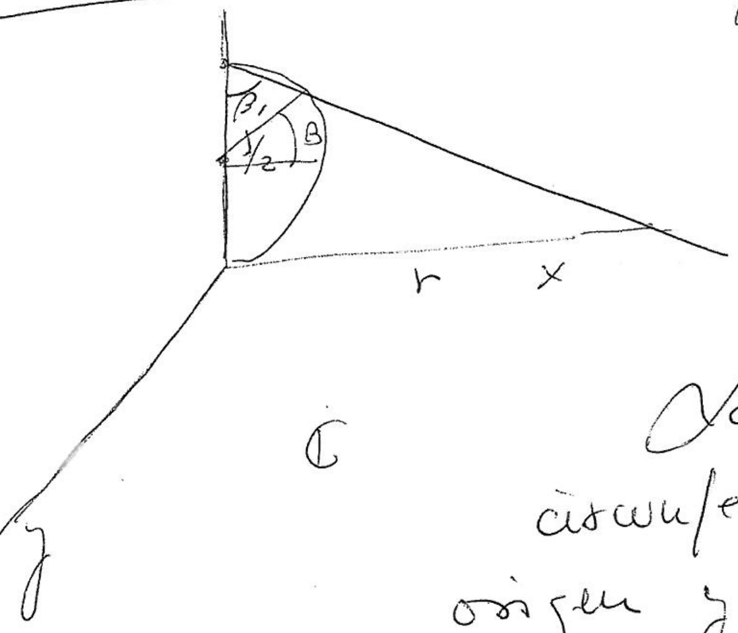
I.P.P. FEBRERO 2008. 1. SEMANA

1. PROBLEMA. Determinar la imagen en el plano complejo $\mathbb{C}$ mediante la proyección estereográfica del paralelo de la esfera de Riemann S con latitud β, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Indicación. Observar que la distancia al origen de la proyección de un punto $p \in S$, es la tangente del ángulo formado, por la recta que une el polo norte N y p, con el eje perpendicular al plano, y posteriormente relacionar este ángulo con el ángulo β.

SOLUCION.

$$\beta_1 = \frac{\beta - \frac{\pi}{2}}{2}$$



$$r = \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

La imagen es la circunferencia de centro el origen y radio $\operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

2. PROBLEMA. Demostrar que la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

es analítica en el semiplano $H_1 = \{z \mid \mathrm{Re}\, z > 1\}$.
Esta es la conocida función zeta de Riemann.

SOLUCION.

¡¡???

$$n^{-z} = e^{-z \log n}$$

$$|n^{-z}| = |e^{-(x+iy)\log n}| = e^{-x\log n} \cdot |e^{-iy\log n}|$$

$$= e^{-x\log n} = n^{-x}.$$

Pero la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} \quad , \quad x > 1$$

converge luego por el teorema de la mayorante de Weierstrass la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ converge uniformemente en todo semiplano $H_{1+\varepsilon} = \{z \mid \mathrm{Re}\, z \geq 1+\varepsilon\}$ y por tanto $f(z)$ es analítica en H_1.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

I.P.P. FEBRERO 2008. 2. SEMANA

1. PROBLEMA. Determinar el dominio de convergencia de las series,

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{\cancel{n}^2} \quad , \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^4}{1-z^4}$$

SOLUCION.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{\cancel{n}^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i\cancel{n}^2}$$

• z = real, es decir $y=0$, $z=x$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} nz}{\cancel{n}^2} \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$$

y puesto que $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, por el criterio de la mayorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$ converge uniformemente.

Si $z = x+iy$, $y>0$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2} \right| = \left| \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2in^2} \right| \geq \left| \frac{e^{-in(x+iy)}}{2n^2} \right| - \left| \frac{e^{+in(x+iy)}}{2n^2} \right|$$

$$= \frac{e^{ny}}{2n^2} - \frac{e^{-ny}}{2n^2} \to \infty, \quad n \to \infty$$

luego la serie diverge

Si $z = x+iy$, $y<0$

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}\right| = \left|\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2in^2}\right| \geq \left|\frac{e^{inz}}{2n^2}\right| - \left|\frac{e^{-inz}}{2n^2}\right|$$

$$= \frac{e^{-ny}}{2n^2} - \frac{e^{ny}}{2n^2} \to \infty, \quad n \to \infty$$

luego también diverge.

Dominio de convergencia $\mathbb{R}$.

ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^4}{1-z^4}$

Si $|z|=1$ entonces

$$\left|\frac{z^4}{1-z^4}\right| > \frac{1}{2}$$

luego el término general no tiende a cero, la serie diverge

Si $|z|>1$ la serie diverge por el mismo motivo

Si $|z|<1$ entonces $\left|\frac{z^4}{1-z^4}\right| < \frac{|z|^4}{2}$, y la serie está mayorada por $\sum \frac{z^4}{2}$ que converge.

Dominio de convergencia $= D = \{z \,/\, |z|<1\}$

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

J. P. P. FEBRERO 2008 . 2 SEMANA (CONTINUACION)

2. PROBLEMA. Si $f(z)$ es analítica en un abierto A que contiene la banda

$$I_h = \{z \in \mathbb{C} \mid z = x+iy,\ 0 \leq y \leq h\}$$

de tal forma que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x+iy) = 0$$, uniformemente en y, $0 \leq y \leq h$

y la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

existe entonces la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\,dx$$

también existe y ambas integrales son iguales.

SOLUCION. Tenemos que demostrar que

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to -\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Por definición existen M_1, M_2 de tal forma que

$$\left|\int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \quad (1)$$

para todos $x_1 > M_1$, $x_2 < M_2$, y por hipótesis

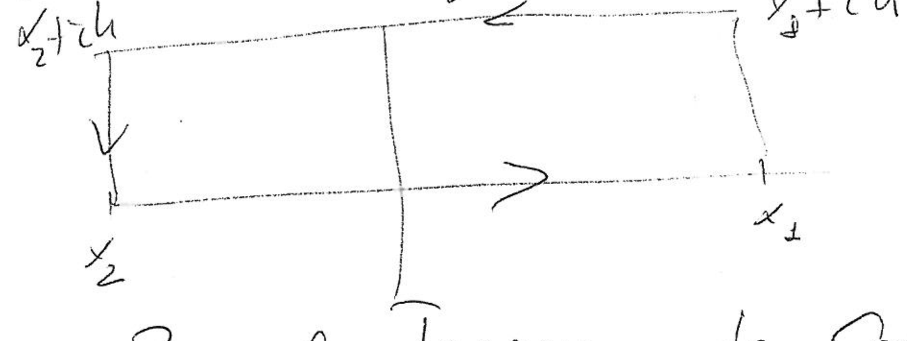
$$\left|\int_{x_1}^{x_1+ih} f(z)\,dz\right| \leq \int_{x_1}^{x_1+ih} |f(z)|\,|dz| < \varepsilon \quad (2)$$

$$\left|\int_{x_2}^{x_2+ih} f(z)\,dz\right| \leq \int_{x_2}^{x_2+ih} |f(z)|\,|dz| < \varepsilon \quad (3)$$

para todos $x_1 > M_1'$, $x_2 < M_2'$, para ciertos M_1', M_2'.

Tomando $H_1 = \max\{M_1', M_1\}$, $H_2 = \min\{M_2, M_2'\}$ se satisfacen simultáneamente las relaciones (1), (2), (3).

Consideramos $x_1 > H_1$, $x_2 < H_2$ y el camino rectangular Γ.



Por el Teorema de Cauch

$$\int_\Gamma = \int^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_1+ih} f(z)\,dz + \int_{x_1+ih}^{x_2+ih} f(z)\,dz + \int_{x_2+ih}^{x_2} f(z)\,dz =$$

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV
I.P.P. FEBRERO 2008. 2.SEMANA (CONTINUACION)

Teniendo en cuenta (2) y (3) obtenemos

$$\left| \int_{x_2}^{x_1} f(x)\,dx - \int_{x_2+h}^{x_1+h} f(z)\,dz \right| < 2\varepsilon ,$$

y por (1)

$$\left| \int_{x_2+h}^{x_1+h} f(x+ih)\,dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \right| < 3\varepsilon ,$$

luego efectivamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+ih)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

084059		ANALISIS MATEMATICO IV		405
		MATEMATICAS		08
	Septiembre - 2008 Original	Duración: 120 min.	EXAMEN: Tipo - Desarrollo	Extranjero (America-Guine 1 Prueba Presencial
MATERIAL: I~{zy Ninguno				Hoja: 1 de 1

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. SEPTIEMBRE 2008

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema de Cauchy-Goursat para el triángulo.

2.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema de Liouville.

3.Pregunta. Sumar las siguientes series en el disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} nz^n\ ,\ ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\ ,\ iii)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

4. Pregunta. Encontrar las funciones analíticas $f(z)$ en todo el plano cuya derivada n-ésima en el origen son respectivamente

$$i)\ f^{n)}(0) = 1\ ,\ ii)\ f^{n)}(0) = (-1)^n\ ,\ iii)\ f^{n)}(0) = i^n.$$

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DE ANALISIS MATEMATICO IV

I.P.P. SEPTIEMBRE 2008

1. PROBLEMA. Sumar las siguientes series en en el disco unidad $D=\{z / |z|<1\}$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n, \quad ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

SOLUCION.

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = z \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)'$$

$$= z \left(\frac{1}{1-z} \right)' = + \frac{z}{(1-z)^2}$$

$$ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-1} \right) dz$$

$$= \int \frac{dz}{1-z} = -\ln(1-z)$$

$$iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \int \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} = \int \frac{1}{1-z^2}$$

$$= \int \frac{1/2}{1-z} + \int \frac{1/2}{1+z} = -\frac{1}{2} \ln(1-z) + \frac{1}{2} \ln(1+z).$$

2. PROBLEMA. Encontrar dos funciones analíticas $f(z)$ en todo el plano cuyas derivadas n-simas en el origen son respectivamente

i) $f^{n)}(0) = 1$, ii) $f^{n)}(0) = (-1)^n$, iii) $f^{n)}(0) = i^n$

SOLUCION

i) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot z^n = e^z$

ii) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n!} = e^{-z}$

iii) $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = e^{iz}$