Funciones de Varias Variables I. CC. Matemáticas. Prueba Presencial Ordinaria. Curso 2016/17

1S

La puntuación máxima de cada preguntase indica en cada una de ellas. Se valorará la exposición de las respuestas dadas. No se permite el uso de ningún tipo de material.

1. (2 puntos) Describa los conjuntos de nivel de las siguientes funciones definidas en $\mathbb{R}^2$:

a) $f(x,y) = |x+y|$.

b) $g(x,y) = \sqrt{xy}$.

2. (3 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable de manera que en el punto $(x,y) = (2,5)$ se tiene $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5) = 0$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(2,5) = 3$.

a) Calcular la derivada de f en $(2,5)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (-1,2)$.

b) Supongamos que C es una curva de nivel de f que pasa por $(2,5)$. Hallar la ecuación de la recta tangente a C que pasa por ese punto.

c) Hallar la intersección del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,5,f(2,5))$ con el plano $z = f(2,5)$.

3. (2 puntos) Estudie si la siguiente función es armónica.

$$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$$

4. (3 puntos) Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales primeras y diferenciabilidad de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si}(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Examen 2017 Junio 1a semana

Nelson

1.

a) $f(x,y)=|x+y|=c$, eso es $y=-x+c$ si $0\leqslant x+y$ o $y=-x-c$ si $x+y\leqslant 0$. Por lo tanto, los conjuntos de nivel son las rectas de pendiente -1 que cortan el eje x en c o $-c$ dependiendo de si $0\leqslant x+y$ o $x+y\leqslant 0$.

b) $g(x,y)=\sqrt{xy}=c$ es decir, los conjuntos de nivel son las hiperbolas de la forma $y=\frac{c^2}{x}$.

2.

a) La derivada direccional de $f(x,y)$ en la dirección de $\overrightarrow{v}$ es $\nabla f(x,y)\cdot\frac{\overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{v}||}$, en este caso $(0,3)\cdot\frac{(-1,2)}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

b) El gradiente de una función en un punto es perpendicular a la superficie de nivel que pasa por dicho punto, por lo que el vector de la recta que buscamos tendrá que cumplir $\nabla f(2,5)\cdot(x,y)=0$ por lo tanto $\overrightarrow{v}=(x,0)$, dando un valor a x, y sabiendo que la recta pasa por el punto $(2,5)$ podemos construir la recta buscada $\overrightarrow{l}(t)=(1,0)t+(2,5)$.

c) El plano tangente tiene la forma $3y+c=z$, evaluando en el punto dado obtenemos $c=f(2,5)-15$, por lo tanto el plano tangente es $3y+f(2,5)-15=z$, si consideramos el plano $z=f(2,5)$, entonces para saber donde se cortan los dos planos basta resolver el sistema de donde se obtiene que los planos se cortan en la recta $y=5$.

3.

Calculando las derivadas parciales primeras y segundas tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

y

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}=\frac{2(x^3-3xy^2+3x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^3},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=\frac{2(-x^3+3xy^2-3x^2y+y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{-2(x^3-3x^2y-3xy^2+y^3)}{(x^2+y^2)^3}$$

Vemos que las derivadas parciales primeras y segundas son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ menos en $(0,0)$ donde no estan definidas, además tenemos que $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}+\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}=0$, por lo tanto podemos decir que f es armónica en $\mathbb{R}^2-(0,0)$.

4.

Pasamos a coordenadas cilindricas, $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$, y calculamos el límite cuando $r\to 0$ entonces $(x,y)\to 0$,

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}}=0=f(0,0)$$

por lo tanto la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

Las derivadas parciales primeras son

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-\frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\sqrt{x^2+y^2}-\frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

vemos que las derivadas parciales no estan definidas en $(0,0)$, veremos si existe la derivada en dicho punto mediante la definición de derivada por límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

las derivadas parciales son continuas en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, por lo tanto es diferenciable en dichos puntos, y existen las derivadas parciales en $(0,0)$, además

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = \lim_{x,y\to 0,0} \frac{xy}{x^2+y^2} \neq 0$$

por lo tanto f no es diferenciable en $(0,0)$.