Examen Matemática discreta

Andrés Rodríguez Carmonet

Septiembre 2021

Pregunta 1: El resto de dividir 117^{2n+1}, con n impar, entre 5 es X. Donde:

1) $1 \leq X \leq 2$

2) $3 \leq X \leq 4$

3) $X = 0$.

¿Cuál es la correcta?

$\boxed{\text{A}}$ La 3)

$\boxed{\text{B}}$ La 1)

$\boxed{\text{C}}$ La 2)

Varias formas de hacerlo, veamos 2:

a) Desde que $117 = 23 \times 5 + 2$:

$117^{2n+1} = 2^{2n+1} \bmod 5 \xrightarrow{n\ impar} \equiv 2^{4n+3} \bmod 5 \xrightarrow{PTFermat} (2^4)^n \cdot 2^3 \bmod 5 \equiv 3 \bmod 5$

b)Desde que $117 = 3^2 \times 13$

$117^{2n+1} \bmod 5 \equiv (3^2 \cdot 13)^{2n+1} \bmod 5 \equiv 2^{2n+1} \bmod 5 \xrightarrow{n\ impar} 2^{4n+3} \bmod 5 \rightarrow$

$\xrightarrow{PTFermat} (2^4)^n \cdot 2^3 \bmod 5 \equiv 3 \bmod 5$

Luego la respuesta correcta es la **B**.

$\blacksquare$

Pregunta 2: ¿Cuál es el número de colocaciones diferentes de 8 libros distintos en una estantería, de modo que tres determinados desde el principio esten siempre separados entre sí, es decir, ningún par de libros de estos tres, estén contiguos en una colocación?

1) 12400

2) 10400

3) 14400

¿Cuál es la correcta?

$\boxed{\text{A}}$ La 3)

$\boxed{\text{B}}$ La 1)

$\boxed{\text{C}}$ La 2)

Por cada colocación permitida, podemos ordenar los libros de $P(3) \cdot P(5)$ maneras (permutaciones). Ahora bien para contar las colocaciones permitidas hay dos formas:

a) Directa: Contando las posiciones permitidas en la estantería:

$$\{135, 136, 137, 138, 146, 147, 148, 157, 158, 168, 246, 247, 248, 257, 258, 268, 357, 358, 368, 468\}$$

b) Mediante combinaciones: Si llamamos x a los libros determinados y $|$ al resto podemos observar que empezando por cualquier libro siempre agruparemos 2 ó 3 libros de los no determinados:

$$|x|x|x|| \qquad x|x|x||| \qquad x||x|x|| \qquad ||x|x|x| \qquad ||x|x||x \qquad \ldots$$

Luego es suficiente contar estas agrupaciones eliminando dichos elementos, es decir la formas de seleccionar 2 y 3 libros de los 5 no determinados, esto es:

$$\binom{5}{3} + \binom{5}{2} = 10 + 10 = 20$$

Ambas formas lógicamente coinciden, luego la respuesta sería:

$$20 * 3! * 5! = 14400$$

Por tanto la respuesta correcta es la **A**.

■

Pregunta 3: Sean n y k dos números naturales tales que $2k \leq n$. Denotemos por X_n el conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos el grafo, que denotaremos por $G(n, k)$, que tiene como vértices los subconjuntos de X_n con k elementos. Dos de estos subconjuntos A y B dan origen a una arista, si y sólo si $A \cap B = \emptyset$. Entonces una de las siguientes afirmaciones es correcta:

1) El número de aristas de $G(n, 5)$ es $\dfrac{n!}{(n-10)! \cdot 10! \cdot 5! \cdot 2}$

2) El número de aristas de $G(n, 5)$ es $\dfrac{n!}{(n-10)! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 2}$

3) El grado de de cada vértice de $G(n, 5)$ es $\dfrac{(n-5)!}{(n-10)! \cdot 5!}$

¿Cuál es la correcta?

A La 3)

B La 1)

C La 2)

El nº de vértices viene determinado por subconjuntos de k elementos de X_n, es decir por el número combinatorio:

$$\#V = C(n, k) = C(n, 5) = \binom{n}{5} = \frac{n!}{5! \cdot (n-5)!}$$

Dos vértices están conectados por una arista si los respectivos subconjuntos son disjuntos ($A \cap B = \emptyset$). Si tenemos un subconjunto A con k elementos este será disjunto con los subconjuntos de k elementos del conjunto $X_n - A$. Por tanto el grado de cada vértice vendrá determinado por el número combinatorio:

$$gr(V) = C(n-k, k) = C(n-5, 5) = \binom{n-5}{5} = \frac{(n-5)!}{5! \cdot (n-5-5)!} = \frac{(n-5)!}{5! \cdot (n-10)!}$$

Por tanto el número de aristas, aplicando el **Primer Teorema de la Teoría de Grafos** será:

$$\#E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} gr(V_i) = \frac{\#V \cdot gr(V)}{2}$$

$$\#E = \frac{1}{2} \cdot \frac{n!}{5! \cdot \cancel{(n-5)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-5)!}}{5! \cdot (n-10)!} = \frac{n!}{(n-10)! \cdot 5! \cdot 5! \cdot 2}$$

Así, tanto la afirmación 2) como la 3) son ciertas, luego la opción correcta serían dos, la **C** y la **A**. Entiendo este doble marcaje es un error al variar las respuestas de examen a examen.

■

Pregunta 4: Sea G un grafo con doce vértices etiquetados con números del 1 al 12. Dos vértices m y n tienen una arista común si y sólo si $|m-n|$ es múltiplo de 4 o de 7. Entonces:

1) El grafo es euleriano.

2) El grafo es plano.

3) El grafo es hamiltoniano.

¿Cuántas afirmaciones son correctas?

A Dos.

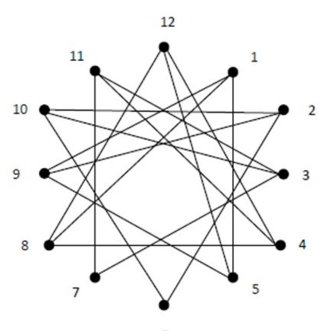
B Una.

C Tres.

Condición para arista: $|m-n| = 4k = \{4, 8\}$ *ó* $|m-n| = 7k = 7, \quad m \neq n$

Calculamos grados:

$gr(v_1) = |1-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{5,8,9\} = 3$
$gr(v_2) = |2-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{6,9,10\} = 3$
$gr(v_3) = |3-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{4,10,11\} = 3$
$gr(v_4) = |4-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{8,11,12\} = 3$
$gr(v_5) = |5-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{1,9,12\} = 3$
$gr(v_6) = |6-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{2,10\} = 2$
$gr(v_7) = |7-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{3,11\} = 2$
$\vdots$
$gr(v_{12}) = |12-n| = \{4,7,8\} \Rightarrow n = \{4,5,8\} = 3$, y el grafo podría ser:



.

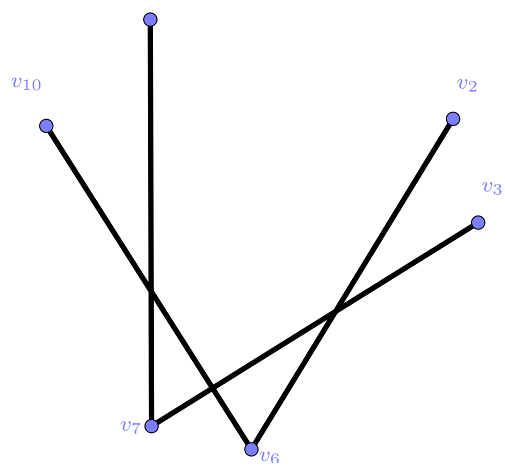
1) El grafo es euleriano: **NO** es euleriano ya que existen vértices de grado impar. Tampoco puede existir un camino euleriano ya que el número de vértices de grado impar es mayor que 2.

2) El grafo es plano: **SI**, aplicando el **Corolario 2-4.9**:

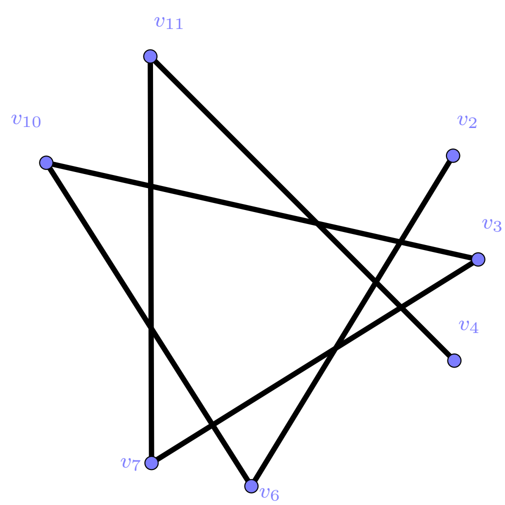
$$\#E \leq 3\#V - 6 \Rightarrow \frac{10 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{2} \leq 3 \cdot 12 - 6 \Rightarrow 17 \leq 30$$

3) El grafo es hamiltoniano: **SI**, construyamos el ciclo:

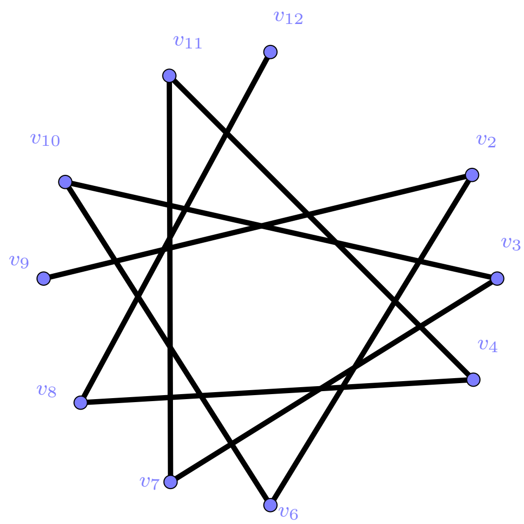
- Paso 1: Empezamos con v_6 y v_7 puesto que solo tienen 2 aristas, ambas estaran en el ciclo.



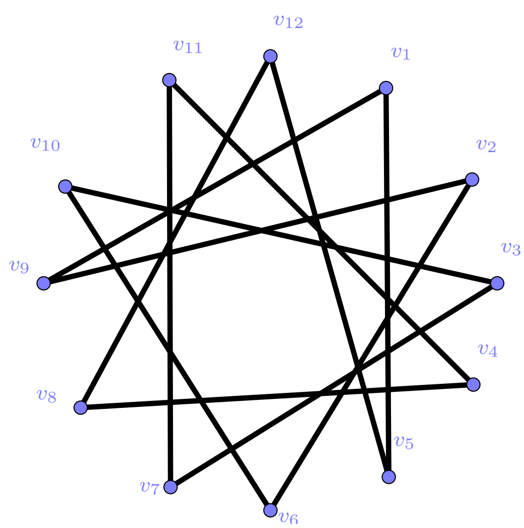
- Paso 2: Vamos incorporando aristas sin formar ciclos. Incorporamos aristas $v_{10} - v_3$ y $v_{11} - v_4$ ya que $v_{10} - v_2$ y $v_{11} - v_3$ cierran ciclo. Ya tenemos 7 vértices incorporados.



- Paso 3: Seguimos construyendo a partir v_2 y v_4. v_2 solo puede ir a v_9 y v_4 puede ir a v_{12} y v_8 pero seleccionando v_8 podemos llegar a v_{12} incorporando más vértices.



- Paso 4: Completamos ciclo a partir de v_9 uniendo a v_1 y este con v_5, cerrando el ciclo hamiltoniano uniéndolo a v_{12}.



Tenemos ciclo hamiltoniano que pasa por todos los vértices sin repetir aristas.

También, se puede añadir, que NO puede ser bipartito porque hay caminos cerrados de longitud impar. Por ejemplo, el camino de vértices $(2, 6, 10, 2)$ tiene longitud 3 que es precisamente la arista que no añadimos para evitar el ciclo en la construcción del ciclo hamiltoniano. Por tanto la respuesta correcta es la **A**.

■

Pregunta 5: Calcule el número de formas de colocar 50 objetos indistinguibles en 6 bolsas, $x_1, x_2, \ldots, x_6$, de modo que en la bolsa x_i haya al menos i objetos si i impar o $2i$ si i es par, es uno de los siguientes:

1) $\dfrac{22!}{5! \cdot 17!}$

2) $\dfrac{22!}{4! \cdot 18!}$

3) $\dfrac{22!}{5! \cdot 18!}$

¿Cuál es la correcta?

A La 3)

B La 1)

C La 2)

$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = 50$
Realizamos asignación:
$x_1 ------------------- > 1$
$x_2 ------------------- > 4$
$x_3 ------------------- > 3$
$x_4 ------------------- > 8$
$x_5 ------------------- > 5$
$x_6 ------------------- > 12$

Total..33

Hay que hallar el número de soluciones de la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 = (50 - 33) = 17$$

La solución buscada del problema será:

$$CR(6 + 17 - 1, 17) = \binom{22}{17} = \frac{22!}{5! \cdot 17!} = 26334$$

Luego la respuesta correcta es la **B**.

■

Pregunta 6: Sea $p > 10$ un número primo. Diremos que el número q es el inverso de $(p-4)!$ modulo p, si $(p-4)!q \equiv 1 \mod p$. Entonces una de las siguientes afirmaciones es correcta:

1) $q = (p-2)(p-3)$ es un número inverso de $(p-4)!$ modulo p.

2) $q = (p-3)(p-4)$ es un número inverso de $(p-4)!$ modulo p.

3) $q = (p-2)(p-4)$ es un número inverso de $(p-4)!$ modulo p.

¿Cuál es la correcta?

$\boxed{\text{A}}$ La 3)

$\boxed{\text{B}}$ La 2)

$\boxed{\text{C}}$ La 1)

Tan solo hemos de sustituir:

1) $q = (p-2)(p-3)$; $\quad (p-4)!q \equiv 1 \mod p$

$(p-4)![(p-2)(p-3)] \equiv 1 \mod p \Rightarrow (p-2)! \equiv 1 \mod p \Rightarrow 1 \equiv 1 \mod p$ **OK**

2) $q = (p-4)(p-3)$; $\quad (p-4)!q \equiv 1 \mod p$

$$\begin{aligned}(p-4)![(p-4)(p-3)] \equiv 1 \mod p \Rightarrow (p-4)![(p-4)(p-3)(p-2)] \equiv (p-2) \mod p \Rightarrow \\ \Rightarrow (p-4)(p-2)! \equiv (p-2) \mod p \Rightarrow (p-4) \not\equiv (p-2) \mod p \Rightarrow \\ \Rightarrow (-4) \not\equiv (-2) \mod p;\ \mathit{con}\ p > 10 \qquad \textbf{KO}\end{aligned}$$

3) $q = (p-4)(p-2)$; $\quad (p-4)!q \equiv 1 \mod p$

$$\begin{aligned}(p-4)![(p-4)(p-2)] \equiv 1 \mod p \Rightarrow (p-4)![(p-4)(p-3)(p-2)] \equiv (p-3) \mod p \Rightarrow \\ \Rightarrow (p-4)(p-2)! \equiv (p-3) \mod p \Rightarrow (p-4) \not\equiv (p-3) \mod p \Rightarrow \\ \Rightarrow (-4) \not\equiv (-3) \mod p;\ \mathit{con}\ p > 10 \qquad \textbf{KO}\end{aligned}$$

Luego la opción correcta es la 1) y por tanto la respuesta es **C**.

■

Pregunta 7: Sea A un árbol que tiene dos vértices de grado 4, r vértices de grado 3, s vértices de grado 2 y 7 hojas.

1) Entonces puede ser $r = 1$ y $s = 10$

2) Entonces puede ser $r = 1$ y $s = 12$

3) Entonces puede ser $r = 2$ y $s = 8$

¿Cuántas afirmaciones son correctas?

$\boxed{\text{A}}$ Ninguna.

$\boxed{\text{B}}$ Una.

$\boxed{\text{C}}$ Dos.

Aplicando el **Primer Teorema de la Teoría de Grafos**:

$$\#E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} gr(V_i) = \frac{2 \cdot 4 + r \cdot 3 + s \cdot 2 + 7 \cdot 1}{2} = \frac{15 + 3r + 2s}{2}$$

El número de vértices será:

$$\#V = 2 + r + s + 7 = 9 + r + s$$

En un árbol se cumple:

$$\#E = \#V - 1 = 9 + r + s - 1 = 8 + r + s$$

Igualando ambas expresiones del número de aristas:

$$\frac{15 + 3r + 2s}{2} = 8 + r + s \Rightarrow 15 + 3r + \cancel{2s} = 16 + 2r + \cancel{2s} \Rightarrow r = 1$$

Recalculando el nº de vértices y aristas:

$$\#V = 9 + r + s = 10 + s \quad y \quad \#E = 8 + r + s = 9 + s$$

Despejando s de la primera expresión:

$$s = \#V - 10 \Rightarrow \#V \geq 10 \; con \; r = 1$$

Luego:

- Si $\#V = 20 \Rightarrow s = 10 \; con \; r = 1$. Nos quedaría un árbol en las condiciones establecidas.

- Si $\#V = 22 \Rightarrow s = 12 \; con \; r = 1$. Nos quedaría un árbol en las condiciones establecidas.

Por tanto la respuesta correcta es la **C**.

■

Pregunta 8: Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_7\}$ un conjunto de números naturales distintos cuya suma es 83. Entonces:

1) En este conjunto hay necesariamente 4 números cuya suma es, al menos X, donde $45 \leq X \leq 48$.

2) En este conjunto hay necesariamente 4 números cuya suma es, al menos X, donde $42 \leq X \leq 44$.

3) En este conjunto hay necesariamente 4 números cuya suma es, al menos X, donde $38 \leq X \leq 41$.

¿Cuál es la correcta?

A La 2)

B La 1)

C La 3)

Formemos sumas de 4 elementos:

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \\
S_2 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \\
&\vdots \\
S_{n-1} &= a_{n-1} + a_n + a_1 + a_2 \\
S_n &= a_n + a_1 + a_2 + a_3
\end{aligned}
$$

Se puede observar que cada término aparece 4 veces en las sucesivas sumas, luego:

$$\sum_{i=1}^{7} S_i = 4 \cdot \sum_{i=1}^{7} a_i = 4 \cdot 83 = 332$$

Calculando el valor promedio:

$$\frac{\sum_{i=1}^{7} S_i}{7} = \frac{332}{7} = 47\frac{3}{7} > 47$$

Aplicando el Principio de Distribución, se tienes que existe una suma S_i mayor que 47.

Por tanto, la respuesta correcta es **B**.

■

Pregunta 9 (extra): Sea $k \geq 4$ un número natural. Si expresamos k^4 como combinación lineal de los números combinatorios de la forma:

$$k^4 = a\binom{k}{1} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{3} + d\binom{k}{4}$$

Entonces:

1) Necesariamente $a = 2$.

2) Necesariamente $b = 10$.

3) Necesariamente $c = 36$.

¿Cuántas afirmaciones son correctas?

A Dos.

B Ninguna.

C Una.

Desarrollemos:

$$k^4 = a\binom{k}{1} + b\binom{k}{2} + c\binom{k}{3} + d\binom{k}{4} = ak + \frac{bk(k-1)}{2} + \frac{ck(k-1)(k-2)}{6} + \frac{dk(k-1)(k-2)(k-3)}{24}$$

Para k=1:

$$1^4 = a1 \Rightarrow a = 1$$

Para k=2:

$$2^4 = a2 + \frac{b \cdot 2 \cdot (2-1)}{2} \Rightarrow b = 14$$

Para k=3:

$$3^4 = a3 + \frac{b \cdot 3(3-1)}{2} + \frac{c \cdot 3(3-1)(3-2)}{6} \Rightarrow c = 36$$

Para k=4:

$$4^4 = a4 + \frac{b \cdot 4(4-1)}{2} + \frac{c \cdot 4(4-1)(4-2)}{6} + \frac{d \cdot 4(4-1)(4-2)(4-3)}{24}$$

$$256 = 4 + 84 + 144 + d \Rightarrow d = 24$$

Luego podemos expresar k^4 como:

$$k^4 = \binom{k}{1} + 14\binom{k}{2} + 36\binom{k}{3} + 24\binom{k}{4}$$

Por tanto, la respuesta correcta es **C** ya que $c = 36$.

$\blacksquare$

Pregunta 10 (extra): Sea G un grafo con 10 vértices y 28 aristas. Entonces:

1) El grafo G es necesariamente conexo.

2) El grafo G puede tener a lo más 3 componentes conexas.

3) El grafo G puede tener 4 componentes conexas.

¿Cuál es la correcta?

A La 1)

B La 2)

C La 3)

Sabemos que si un grafo G posee k componentes conexas verifica:

$$\#E \leq \frac{1}{2}(\#V - k)(\#V - k + 1)$$

Solo hay que sustituir:

$$28 \leq \frac{1}{2}(10 - k)(11 - k) \Rightarrow 56 \leq (10 - k)(11 - k)$$

Resolviendo la inecuación nos queda que:

$$k \in (-\infty, 3] \cup [18, \infty]$$

Como k no puede ser superior al número de vértices, nos queda que el número de compontes conexas del grafo G es a lo más $k = 3$ y por tanto la respuesta correcta es la **B**.

$\blacksquare$

Pregunta 11 (extra): Las reglas de divisibilidad por 12 y por 14 para los números escritos en base 13 son:

1) Un número escrito en base 13 es divisible por 12, si y sólo si la suma de sus cifras es congruente con 0 mod(12), y es divisible por 14, si y sólo si la suma de las cifras de lugar impar menos la suma de las cifras de lugar par es congruente con 0 mod(14).

2) Un número escrito en base 13 es divisible por 12, si y sólo si la suma de las cifras de lugar par menos la suma de las cifras de lugar impar es congruente con 0 mod(12), y es divisible por 14, si y sólo si la suma de las cifras es congruente con 0 mod(14).

3) Un número escrito en base 13 es divisible por 12, si y sólo si la suma de las cifras de lugar impar menos la suma de las cifras de lugar par es congruente con 0 mod(12), y es divisible por 14, si y sólo si la suma de las cifras es congruente con 0 mod(14).

¿Cuál es la correcta?

A La 1)

B La 2)

C La 3)

Necesitamos los critrios de divisibilidad de 12 y 14 en base 13, para ello calculamos los restos potenciales de 13 en módulo 12 y 14:

$$\begin{aligned} 13^0 &\equiv 1 \text{ mód } 12 \\ 13^1 &\equiv 1 \text{ mód } 12 \\ &\vdots \\ 13^r &\equiv 1 \text{ mód } 12 \end{aligned}$$

Como $n = \sum_{i=1}^{r} a_i 13^i \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i 13^i \mod 12 \equiv \sum_{i=1}^{r} a_i \mod 12 \equiv 0 \mod 12$

Un número en base 13 es divisible por 12 si y sólo si la sumas de sus cifras es congruente con 0 mod(12)

$$\begin{aligned} 13^0 &\equiv 1 \text{ mód } 14 \\ 13^1 &\equiv -1 \text{ mód } 14 \\ 13^2 &\equiv 1 \text{ mód } 14 \\ &\vdots \\ 13^r &\equiv (-1)^r \text{ mód } 14 \end{aligned}$$

Como $n = \sum_{i=1}^{r} a_i 13^i \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_i 13^i \mod 14 \equiv \sum_{i=1}^{r} (-1)^i a_i \mod 14 \equiv 0 \mod 14$

Un número en base 13 es divisible por 14 si y sólo si la suma de las cifras en posición impar menos la suma de las cifras en posición par es congruente con 0 mod(14).

Por tanto, la respuesta correcta es **A**.

■

Pregunta 12 (extra): Una coloración de un grafo es una coloración de sus vértices, cumpliendo ciertas condiciones. Entonces:

1) Existe un número $k \geq 3$ de modo que todos los grafos conexos con k vértices necesitan más de dos colores para poderse colorear.

2) No existen grafos que necesiten más de 5 colores para ser coloreados.

3) La coloración de un grafo de n vértices es única dado k colores, con $k < n$.

¿Cuántas afirmaciones son correctas?

A Tres.

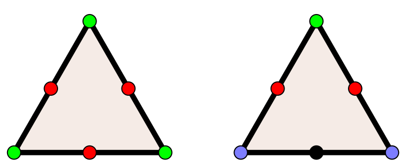
B Ninguna.

C Una.

1) **FALSO**: Dado cualquier $k \geq 3$, sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$. El grafo $G = (V, E)$, donde $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{k-1}v_k\}$, es conexo y se puede colorear con dos colores.

2) **FALSO**: Los grafos completos K_r, $r > 5$, necesitan r colores para ser coloreados, ya que todo par de vértices está unido por una arista.

3) **FALSO**: El **número cromático** de un grafo G es el número mínimo de colores que se requieren para una coloración de G y se denota como $\chi(G)$. Dicha definición nos dice que la coloración de un grafo puede admitir varias coloraciones. Ejemplo:



Con 2 colores　　Con 4 colores

Por tanto, la respuesta correcta es **B**.

■