FUNCIONES DE UNA VARIABLE II

- Cada ejercicio de valora sobre 2,5 puntos.
- En la valoración se tendrá en cuenta: La corrección del resultado, el razonamiento utilizado, la exposición escrita.

Ejercicio 1. Enuncie el teorema de Dini. Demuestre que la compacidad del conjunto en el enunciado es necesaria usando la sucesión

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} : (0,1) \to \mathbf{R}.$$

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función con derivada estrictamente mayor que 0. Determine los puntos en los que la función

$$F(x) = \int_0^{x^2-5x+6} f(t)dt$$

tiene extremos relativos.

Ejercicio 3. Calcule

$$I = \int \cos(x)\log(1+sen(x))dx.$$

Ejercicio 4. Dada la serie $\sum_1^\infty x^n(1-x^n)$. Determine el campo de convergencia A y calcular su suma F .Estudiar si la convergencia es uniforme o no.

Calcular a) $I_1 = \int \cos x \log(1+\text{sen}(x))\,dx$ ← ESTE APARTADO EN EL EXAMEN

b) $I_2 = \int \text{arcotg}(x)\,dx$ ← ESTE NO

SOLUCIÓN

a) Integramos por partes

$u = \log(1+\text{sen}(x)) \Rightarrow du = \dfrac{\cos x}{1+\text{sen}(x)}$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \text{sen}(x)$

$$I_1 = \text{sen}(x)\log(1+\text{sen}(x)) - \int \frac{\text{sen}(x)\cos(x)}{1+\text{sen}(x)}\,dx$$

como $(\text{sen}(x))' = \cos(x)$ hacemos el cambio $t = \text{sen}\,x$, obteniendo

$$I_1 = \text{sen}(x)\log(1+\text{sen}(x)) - \int \frac{t}{1+t}\,dt =$$

$$= \text{sen}(x)\log(1+\text{sen}(x)) - \int \frac{1+t-1}{1+t}\,dt =$$

$$= \text{sen}(x)\log(1+\text{sen}(x)) - \int \frac{1+t}{1+t}\,dt + \int \frac{1}{1+t}\,dt$$

$$= \text{sen}(x)\log(1+\text{sen}(x)) - t + \log(1+t) =$$

$$= \text{sen}(x)\log(1+\text{sen}(x)) - \text{sen}(x) + \log(1+\text{sen}(x)) + K.$$

b) $I_2 = \int 1 \cdot \text{arcotg}(x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} dx = du \Rightarrow u = x \\ v = \text{arcotg}(x) \Rightarrow dv = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \end{array} \right\} =$

$$= x\,\text{arcotg}(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\,\text{arcotg}(x) - \frac{1}{2}\log|1+x^2| + K$$

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada mayor que 0 tal que $f(t)=0$ si $t=0$.

Determinar los puntos en los que la función

$$F(x) = \int_0^{x^2-5x+6} f(t)\,dt$$

tiene extremos relativos

SOLUCIÓN:

Por el Tª fundamental del calculo

$$F'(x) = f(x^2-5x+6)\cdot(2x-5)$$

Para que $F'(x)=0 \to 2x-5=0 \Rightarrow x=5/2$

$\hookrightarrow f(x^2-5x+6)=0$, pero como la derivada de f es positiva y $f(0)=0$, este punto es el único 0 de la función

luego $x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2$ ó $x=3$

$$F''(x) = (2x-5)^2 f'(x^2-5x+6) + 2f(x^2-5x+6)$$

$$F''(2) = 2\cdot f(0) + f'(0) = f'(0) > 0 \quad \text{MÍNIMO}$$

$$F''(3) = 2\cdot f(0) + f'(0) = f'(0) > 0 \quad \text{MÍNIMO}$$

$$F''\left(\frac{5}{2}\right) = 2\cdot f\left(\frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6\right) = 2\cdot f\left(\frac{25-50+24}{4}\right) = 2\,f\left(-\frac{1}{4}\right)$$

Como f es estrictamente creciente y $f(0)=0$, entonces $f(-1/4)<0$

Por tanto $F''\left(\frac{5}{2}\right)<0$ y es un MÁXIMO

SEP12-ORG

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^n)$

a) Determinar el campo de convergencia A y su suma F y studiar si la convergencia en A s uniforme o no.

b) Probar que la serie converge uniformemente en todo intervalo cerrado contenido en $(-1,1)$ ← ESTE APARTADO NO ES DEL EXAMEN.

SOLUCIÓN:

a) La suma parcial

$$F_n = x + x^2 + \dots + x^n - (x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{2n}) =$$

$$= \frac{x(x^n-1)}{x-1} - \frac{x^2(x^{2n}-1)}{x^2-1} \qquad \text{si } |x| \neq 1$$

luego si $|x|<1$ la serie converge y

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \frac{-x}{x-1} + \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-x^2} =$$

$$= \frac{x - x^3 - x^2 + x^3}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{x(1-x)}{(1-x)(1-x^2)} = \frac{x}{1-x^2}$$

si $x = 1$

$x^n(1-x^n) = 0$ y $F(1) = 0$

si $x = -1$

$$x^n(1-x^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ -2 & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}$$

y la serie diverge

Luego $A = (-1, 1]$ y su suma s

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1-x^2} & x \in (-1,1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

como $x^n(1-x^n)$ s continua y $F(x)$ no s continua la convergencia no s uniforme en A

b) si $[a,b] \subset (-1,1)$ entonces dado $c = \max\{|a|,|b|\}$ se tiene $\forall x \in [a,b]$

$[a,b] \subset [-c,c] \subset (-1,1)$. se tiene $\forall x \in [a,b]$

$$|x^n(1-x^n)| \leq |x^n| + |x^{2n}| \leq c^n + c^{2n}$$

y como $|c|<1$ entonces $\sum c^n$ y $\sum c^{2n}$ convergen y por tanto

$$\left|\sum x^n(1-x^n)\right| \leq \sum c^n + c^{2n}$$

y la serie $\sum x^n(1-x^n)$ converge uniformemente en $[a,b]$.