# Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

## Ejercicio 1

Sean $A$, $B$ y $C$ subconjuntos arbitrarios de un conjunto no vacío $U$.
Sea el conjunto $Y = \big((A \cup B) \cap C\big) \cup \big((A \cap B) \cap \overline{C}\big)$.
Consideramos las afirmaciones:

p; $Y \subset (A \cap B) \cup B$.

q; $Y = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

r; $Y \subset (A \cap \overline{C}) \cup B$.

s; $Y \subset (A \cap C) \cup B$.

Las únicas afirmaciones verdaderas son:

a) p y q.
b) r y s.
c) Ninguna de las otras respuestas.

## Ejercicio 2

Sea $U$ un conjunto con al menos dos elementos distintos y $a$ un elemento fijo de $U$. Se considera en $\mathcal{P}(U)$ la relación:

$$A \,\mathcal{R}\, B \text{ si y sólo si } (a \in A \cap B) \vee (a \in \overline{A} \cap \overline{B})$$

Consideramos las afirmaciones:

p; $\mathcal{R}$ es una relación de orden en $\mathcal{P}(U)$.

q; $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(U)$.

r; $[\emptyset] = \mathcal{P}\big(U \setminus \{a\}\big)$.

s; $\min \mathcal{P}\big(U \setminus \{a\}\big) = \emptyset$

Las únicas afirmaciones verdaderas son:

a) p y s.
b) q y r.
c) Ninguna de las otras respuestas.

## Ejercicio 3

Para cualquier número natural $n$, sea "$(n)$ módulo 6"el resto de la división entera de $n$ por 6. Sea el conjunto $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
Consideramos las siguientes aplicaciones de $E$ en $E$ :

p; $n \to (n+1)$ módulo 6.
q; $n \to (2n)$ módulo 6.
r; $n \to (n^2)$ módulo 6.
s; $n \to (5n)$ módulo 6.

Única y exclusivamente son aplicaciones sobreyectivas:

a) La de p y la de s.
b) La de q y la de r.
c) Ninguna de las otras respuestas.

## Ejercicio 4

Sea $E$ un conjunto de $n$ elementos. Para todo $n \in \mathbb{N}$, el número de pares $(X, Y)$ de subconjuntos de $E$ tales que $X \subset Y$ es :

a) $2^{n+1} - 1$.
b) $3^n$.
c) Ninguna de las otras respuestas.

## Ejercicio 5

Consideramos las afirmaciones:

p; $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \exists m \in \mathbb{N}^*$ cumpliendo $m \leq n$.

q; $\forall n \in \mathbb{N}^* \; \forall m \in \mathbb{N}^*$ cumpliendo $m \leq n$.

r; $\exists n \in \mathbb{N}^* \; \forall m \in \mathbb{N}^*$ cumpliendo $n \leq m$.

s; $\exists n \in \mathbb{N}^* \; \forall m \in \mathbb{N}^*$ cumpliendo $m \leq n$.

Las únicas afirmaciones verdaderas son:

a) p y q.
b) r y s.
c) Ninguna de las otras respuestas.

# Soluciones

Observación: En estos ejercicios, la frase"Las únicas afirmaciones verdaderas son" significa que si por ejemplo se responde la opción"$p$ y $q$" esto significa que $p$ y $q$ son verdaderas y $r$ y $s$ no lo son.

**Ejercicio 1**

Observemos que

$$\begin{aligned} Y &= \big((A \cup B) \cap C\big) \cup \big((A \cap B) \cap \overline{C}\big) \\ &= (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \end{aligned}$$

$q$ es verdadera: En efecto, de $A \cap B \cap \overline{C} \subset A \cap B$ se deduce que

$$Y = (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \subset (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C)\,.$$

Inversamente, por un lado

$$(B \cap C) \cup (A \cap C) \ \subset \ (A \cap C) \cup (B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = Y$$

y por otro lado

$$A \cap B = A \cap B \cap (C \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \ \subset \ (A \cap B) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) \subset Y$$

En consecuencia,

$$(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \subset Y \cup Y = Y\,.$$

$s$ es verdadera:
$Y = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) \ \subset \ B \cup B \cup (A \cap C) = (A \cap C) \cup B.$

Las afirmaciones $p$ y $r$ no son en general verdaderas. Veamos un contraejemplo.
Sean $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,3,5,6\}$ y $C = \{3,4,5,7\}$.
Se cumple que $Y = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (A \cap C) = \{2,3\} \cup \{3,5\} \cup \{3,4\} = \{2,3,4,5\}$,
$(A \cap B) \cup B = B = \{2,3,5,6\}$,
$(A \cap \overline{C}) \cup B = \{1,2\} \cup \{2,3,5,6\} = \{1,2,3,5,6\}$

La respuesta correcta es:"Ninguna de las otras opciones".

**Ejercicio 2**

La relación $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia.
Es reflexiva pues para todo $A \in \mathcal{P}(U)$ se tiene que $a \in A \vee a \in \overline{A}$ y $A \cap A = A$ y $\overline{A} \cap \overline{A} = \overline{A}$. Por tanto, $A \,\mathcal{R}\, B$.

Es simétrica pues si $A, B \in \mathcal{P}(U)$ cumplen que $A \,\mathcal{R}\, B$ entonces $(a \in A \cap B = B \cap A) \vee (a \in \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{B} \cap \overline{A})$ y por tanto $B \,\mathcal{R}\, A$.

Es transitiva pues si $A, B, C \in \mathcal{P}(U)$ cumplen que $A \,\mathcal{R}\, B$ y $B \,\mathcal{R}\, C$ entonces $(a \in A \cap B) \vee (a \in \overline{A} \cap \overline{B})$ y $(a \in B \cap C) \vee (a \in \overline{B} \cap \overline{C})$, es decir,

$$\begin{aligned} & a \in \big((A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})\big) \cap \big((B \cap C) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})\big) \\ = \ & \big((A \cap B) \cap (B \cap C)\big) \cup \big((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (B \cap C)\big) \cup \big((A \cap B) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})\big) \cup \big((\overline{A} \cap \overline{B}) \cap (\overline{B} \cap \overline{C})\big) \\ = \ & (A \cap B \cap C) \cup \ \varnothing \ \cup \ \varnothing \ \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \\ \subset \ & (A \cap C) \cup (\overline{A} \cap \overline{C}) \end{aligned}$$

Por tanto, $A \,\mathcal{R}\, C$.

$r$ es verdadera: En efecto $A \,\mathcal{R}\, \varnothing$ si y sólo si $a \in ((A \cap \varnothing) \cup (\overline{A} \cap \overline{\varnothing}) = \varnothing \cup (\overline{A} \cap U) = \overline{A}$, es decir, $A \subset U \setminus \{a\}$.
La relación $\mathcal{R}$ no es una relación de orden pues no es antisimétrica. Si tomamos $A = \{a\}$ y $B = \{a, b\}$ con $a \neq b$ se tiene que $A \,\mathcal{R}\, B$ y $B \,\mathcal{R}\, A$ y sin embargo $A \neq B$.

Como la relación $\mathcal{R}$ no es de orden $\mathcal{P}(U)$ no tiene sentido hablar del mínimo de un subconjunto de $\mathcal{P}(U)$.

**Ejercicio 3**

Serán sobreyectivas las aplicaciones cuya imagen sea el conjunto E.
La aplicación de $p$, $f_p$, es sobreyectiva pues $f_p(0) = 1$, $f_p(1) = 2$, $f_p(2) = 3$, $f_p(3) = 4$, $f_p(4) = 5$ y $f_p(5) = 0$.

La aplicación de $q$, $f_q$, no es sobreyectiva pues $f_q(0) = 0$, $f_q(1) = 2$, $f_q(2) = 4$, $f_q(3) = 0$, $f_q(4) = 2$ y $f_q(5) = 4$. Así, por ejemplo, 1 no es la imagen de ningún elemento de $E$.

La aplicación de $r$, $f_r$, no es sobreyectiva pues $f_r(0) = 0$, $f_r(1) = 1$, $f_r(2) = 4$, $f_r(3) = 3$, $f_r(4) = 4$ y $f_r(5) = 1$. Así, por ejemplo, 2 no es la imagen de ningún elemento de $E$.

La aplicación de $s$, $f_s$, es sobreyectiva pues $f_s(0) = 0$, $f_s(1) = 5$, $f_s(2) = 4$, $f_p(3) = 3$, $f_p(4) = 2$ y $f_p(5) = 1$.

## Ejercicio 4

Escogemos primero el subconjunto $Y \subset E$ con $p$ elementos, donde $p = 0, 1, 2, \dots n$. Fijado $p$, $Y$ se puede escoger de $\binom{n}{p}$ distintas. Fijado $Y$ con $p$ elementos, $X$, que es un subconjunto cualquiera de $Y$, se puede escoger de $2^p$ maneras distintas. Por tanto el número de pares es

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{0}2^0 + \binom{n}{1}2^1 + \cdots + \binom{n}{p}2^p + \cdots + \binom{n}{n-1}2^{n-1} + \binom{n}{n}2^n \\
= \; & \binom{n}{0}1^n \cdot 2^0 + \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot 2^1 + \cdots + \binom{n}{p}1^{n-p} \cdot 2^p + \cdots + \binom{n}{n-1}1^1 \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{n}1^0 \cdot 2^n \\
= \; & (1+2)^n = 3^n
\end{aligned}$$

donde la última línea se deduce del binomio de Newton.

## Ejercicio 5

$p$ es verdadera para tomando, por ejemplo, $m = n$. (También se podría tomar $m = 1$).

$q$ no es verdadera. Por ejemplo, si se toma $n = 3$ y $m = 5$ no es cierto que $5 \leq 3$.

$r$ es verdadera pues $\exists n = 1 \; \forall m \in \mathbb{N}^*$ cumpliendo $1 \leq m$.

$s$ no es verdadera pues la negación de esta proposición, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists m \in \mathbb{N}^*$ cumpliendo $m > n$ es verdadera. Basta tomar $m = n + 1$.
La respuesta correcta es:"Ninguna de las otras opciones".