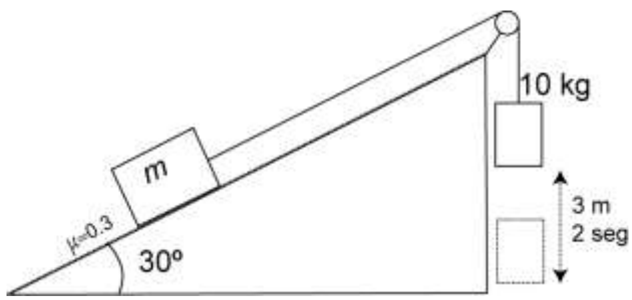
Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2016/2017, Junio, 1ª y 2ª semana

1ª Semana

1. Una masa de 10 kg está suspendida por una cuerda de masa despreciable, que pasando por una polea, está unida a otra masa *m* sobre un plano inclinado, como se ilustra en la figura. Cuando se deja libre el sistema, inicialmente en reposo, la masa suspendida recorre una distancia de 3 m en 2 s. El plano forma 30º con la horizontal y el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano y la masa *m* es μ=0.3. El momento de inercia de la polea es despreciable y la cuerda desliza por la polea sin hacerla girar. Tome g = 10 m/s^2.

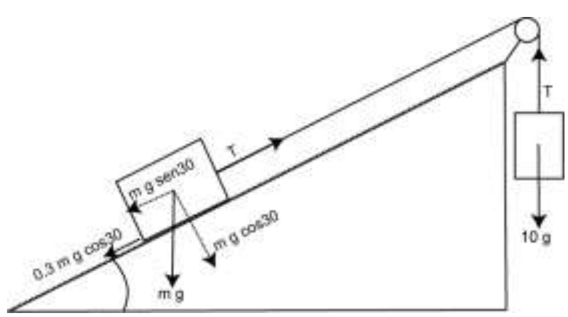
- Determine la masa *m* **(1 punto)**

- Calcule el cambio en la energía mecánica total, E_{mec}, del sistema en ese intervalo de tiempo de 2 segundos. **(1 punto)**



Solución

a) En base al diagrama de fuerzas que actúan sobre el sistema de la figura:



planteamos las ecuaciones del movimiento:

$$T - m\, g \sin 30 - \mu\, m\, g \cos 30 = m\, a$$
$$10\, g - T = 10\, a$$

El sistema describe un movimiento uniformemente acelerado descrito por:

$$s = v_0 t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

Substituyendo el resto de los datos del enunciado, v_0=0, t=2, s=3, obtenemos que a= 1.5 m/s^2, $m = \frac{170}{13+3\sqrt{3}} = 9.34\ kg$

b) La forma más rápida es calcular la energía disipada por el rozamiento cinético:

$$W_{roz} = F_{roz} d = \mu\, m\, g \cos 30\ \ d = 72.82\ \ J$$

Dado que el sobre el sistema no actúan otras fuerzas que no sean conservativas, la variación de energía mecánica tiene que compensar la energía disipada por el rozamiento:

$$\Delta E_{mec} = -W_{roz} = -72.82\ \ J$$

Por supuesto, también se pueden calcular los cambios en las energías cinética y potencial de las dos masas:

Masa de 10 kg:

$$\Delta U_1 = M\ g\ x = 10\ g\ 3\ = -300\, J$$

$$\Delta K_1 = \frac{1}{2}\, M\, v_f^2 = \frac{1}{2}\, M\, (a\, t)^2 = \frac{1}{2}\ 10\ (1.5\ \ 2)^2 = 45\, J$$

Masa *m*:

$$\Delta U_2 = m\ g\ x = m\ g\ (s\ sin30) = \frac{170}{13 + 3\sqrt{3}}\ g\ (3\ sin30) = 140.14\, J$$

$$\Delta K_2 = \frac{1}{2}\, m\, v_f^2 = \frac{1}{2}\, m\, (a\, t)^2 = \frac{1}{2}\, \frac{170}{13 + 3\sqrt{3}}\ (1.5\ 2)^2 = 42.04\, J$$

$$\Delta E_{mec} = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta K_1 + \Delta K_2 = -72.82\, J$$

2. Una masa 2 kg se desplaza por el plano XY con una aceleración dada por $\vec{a}(t)$ = (0, 0.4·t) m/s^2. Si en el instante inicial la partícula está en el origen, $\vec{r}_0$ = (0, 0) m, con una velocidad de $\vec{v}_0$ = (3, 1) m/s. Determine el momento angular de la masa respecto al origen en función del tiempo, *L(t)*. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

La velocidad en el eje x es constante, v_x=3 m/s, la posición es x(t)=3 t

La velocidad en el eje y es la integral de la aceleración

$$v_y = \int a\, dt = \int 0.4\, t\, dt = 0.2\, t^2 + c$$

De la velocidad en el origen deducimos que c = 1 m/s

Por tanto la velocidad es $\vec{v}(t) = (3,\ 1 + 0.2\, t^2\ ) m/s$

y la posición es

$$y = \int v\, dt = \int 1 + 0.2\, t^2 dt = t + \frac{0.2}{3}\ t^3 + d$$

donde d=0 para que x(0) = 0

El momento angular $\vec{L} = \vec{r}\ \times \vec{p} = 2 \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 3t & t + \frac{0.2}{3}\ t^3 & 0 \\ 3 & 1 + 0.2\, t^2 & 0 \end{vmatrix} = 2\ (3t +\ 0.6\, t^3 - 3t - 0.2\, t^3)\vec{k} = 0.8 t^3\ \vec{k}\ \ kg \cdot m^2/s$

3. Consideremos un sistema estelar binario completamente aislado compuesto por dos estrellas de la misma masa *M* separadas una distancia constante *d*. Ambas estrellas orbitan alrededor del punto medio de la recta imaginaria que las une debido a la interacción gravitatoria mutua. Suponer que conocemos *G*.

- Calcular el periodo de rotación en función de los datos del problema. **(1 punto)**
- Supongamos que en un momento dado las estrellas dejan de orbitar y se paran, quedando en reposo y separadas por la distancia *d*. Describir qué ocurrirá y calcular su velocidad cuando la distancia entre ellas sea de *d*/2. **(1 punto)**

<u>Solución</u>

Como la rotación está producida por la interacción gravitatoria entre ambas, tenemos que:

$$G\frac{M^2}{d^2} = M\frac{v^2}{d/2} = M\omega^2\frac{d}{2} = M\frac{4\pi^2}{T^2}\frac{d}{2}$$

Despejando

$$T = \sqrt{\frac{2\pi^2 d^3}{GM}}\ .$$

Si su movimiento de giro cesa, las dos estrellas comenzarán a dirigirse una hacia la otra debido a la atracción gravitatoria en la dirección del eje imaginario que las une. Aplicando la conservación de la energía mecánica, tenemos:

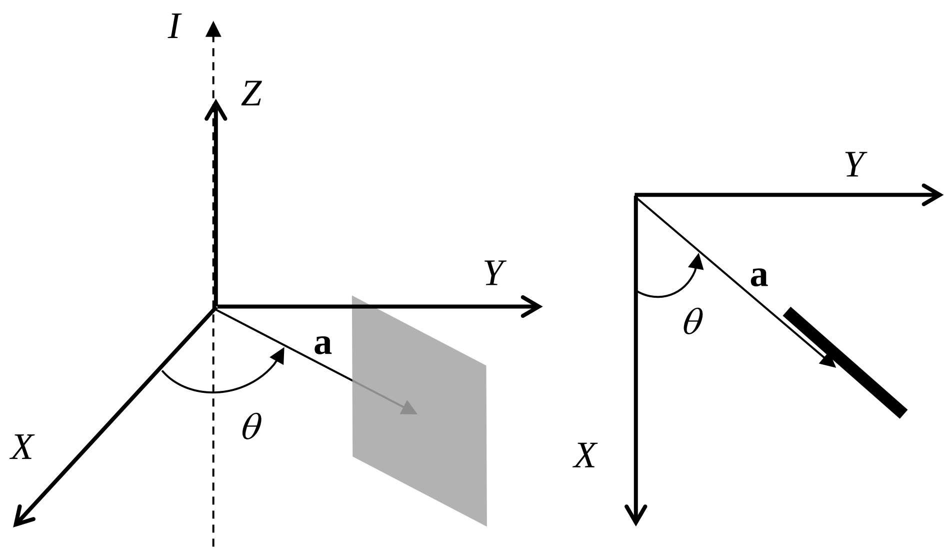
$$E_i = E_f \quad \rightarrow \quad E_{c,i} + U_i = E_{c,f} + U_f$$

$$0 - G\frac{M^2}{d} = 2\frac{1}{2}Mv^2 - G\frac{M^2}{d/2}$$

Despejando llegamos a

$$v = \sqrt{G \frac{M}{d}}$$

4. Consideremos la distribución indicada en la figura de la izquierda (la figura de la derecha muestra una proyección de la misma distribución sobre el plano XY). Por un lado tenemos un conductor rectilíneo muy largo situado en el eje Z por el que circula una corriente I en el sentido positivo del eje. Por otro lado tenemos una región cuadrada de lado *L* paralela al eje Z. La posición del cuadrado en nuestro sistema de referencia está determinada por el vector $\mathbf{a}$ perpendicular a Z que va desde el centro del cuadrado al eje Z, cuyo módulo es a y forma un ángulo θ con el eje X. Calcular el flujo del campo magnético generado por la corriente que atraviesa el cuadrado en función de los datos del problema. **(2 puntos)**
Ayuda: El campo magnético creado por un conductor rectilíneo muy largo que transporta una corriente I en un punto situado a una distancia r perpendicular al conductor tiene módulo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.



Solución

El flujo magnético que atraviesa una superficie se define como

$$d\phi_m = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A}.$$

El campo magnético creado por el conductor rectilíneo es perpendicular a la superficie del cuadrado en cualquier punto del mismo independientemente del ángulo θ, así que tenemos

$$d\varphi_m = BdA = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA.$$

donde r es la distancia a lo largo de la dirección del vector $\mathbf{a}$. Para obtener el flujo total debemos integrar sobre todo el área del cuadrado tomando como diferencial de área una lámina infinitesimalmente estrecha $dA = Ldr$:

$$\phi_m = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dA = \int_{a-L/2}^{a+L/2} \frac{\mu_0 IL}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 IL}{2\pi} \ln\left(\frac{2a+L}{2a-L}\right)$$

5. Dos observadores S y S' se alejan con una velocidad relativa constante de 0,8*c.* Cuando se han cruzado han sincronizado sus relojes en $t = t' = 0$. En el instante en el que el reloj de S marca 2 horas, éste emite un destello luminoso hacia S'. Calcular la hora que marcará el reloj de S' en el momento en el que es alcanzado por el destello. **(2 puntos)**

Recordamos que las transformaciones de Lorentz son:

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

<u>Solución</u>

Como en todos los problemas de este tipo podemos resolverlo desde los dos sistemas de referencia. Lo haremos así.

Desde el sistema S'

Supongamos el sistema S' en reposo y el sistema S moviéndose con velocidad $v = 0.8c$ con respecto a él ($\gamma = 5/3$). Llamemos t_1 y t_1' al tiempo medido por los relojes de los sistemas S y S' en el momento en el que se emite el destello desde S. Si S ha medido dos horas (tiempo propio), el tiempo medido en S' será

$$t_1' = \gamma t_1 = \frac{10}{3}\,\mathrm{h} = 3{,}33\ \mathrm{h}$$

Durante este tiempo, S se ha alejado respecto de S' una distancia

$$x = vt_1' = \frac{8c}{3}$$

Desde ese punto se emite el rayo hacia S', que tardará en llegar

$$\frac{x}{c} = \frac{8}{3}\mathrm{h}$$

de modo que su reloj indicará

$$\frac{10}{3}+\frac{8}{3}=6\text{ h}$$

Desde el sistema S

Supongamos ahora el sistema S en reposo y el sistema S' moviéndose con velocidad $v=0.8c$ con respecto a él ($\gamma=5/3$).

En el momento en el que se emite el destello (tiempo al que llamaremos t_1 y t_1') tenemos que $t_1=2\text{ h}$ y $x_1=0$, de modo que tenemos $x_1'=-vt_1$ y

$$t_1'=\gamma\left(t_1-\frac{vx_1}{c^2}\right)=\gamma t_1=\frac{10}{3}\text{h}=3{,}33\text{ h}$$

Este será el tiempo marcado en un reloj del sistema S' en el momento en el que se emite el destello desde el sistema S. Si nos fijamos es el mismo resultado que se obtendría si consideramos que el tiempo en el sistema S es el tiempo propio (los dos sucesos: cruce y emisión del rayo, suceden en el mismo punto del sistema S, en un intervalo de dos horas), y el tiempo medido en el sistema S' está dilatado un factor γ.

Llamemos t_2 y t_2' al instante en el que el rayo de luz llega al sistema S'. Cuando se emite el destello, la posición de S' con respecto a S es $x_1=vt_1$. Al cabo del tiempo Δt (medido en S) que separa los dos eventos (emisión desde S y recepción en S'), la nueva posición de S' con respecto a S será:

$$x_2=x_1+\Delta tv$$

Por otro lado sabemos que el rayo viaja a la velocidad de la luz, de modo que:

$$x_2=\Delta tc$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos que

$$x_2=\frac{x_1}{1-\frac{v}{c}}=4ct_1$$

$$\Delta t=\frac{x_1}{c-v}=4t_1=8\text{ h}$$

De modo que

$$t_2=t_1+\Delta t=10\text{ h}$$

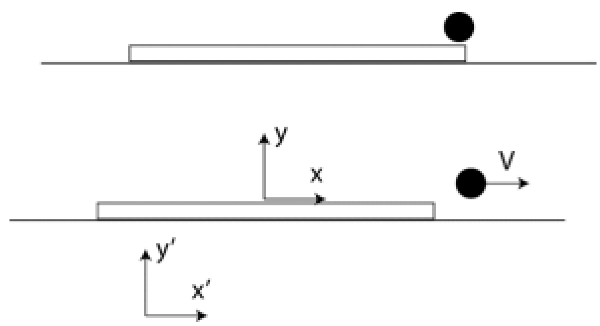
Sustituyendo en las ecuaciones de Lorentz obtenemos

$$t_2'=\gamma\left(t_2-\frac{vx_2}{c^2}\right)=6\text{ h}$$

2ª Semana

1. Dos bañistas de masas iguales, *m*, están parados en el extremo de una barca de masa *M*, también en reposo. Sabemos que cuando un bañista se tira al agua desde la barca, esté en reposo la barca o no, siempre tiene una velocidad horizontal relativa al sistema de la barca de *v* justo después del salto (ver figura para un bañista). Determine las velocidades finales de la barca, respecto a un sistema de referencia externo (*x'y'* en la figura) si los dos bañistas se tiran simultáneamente o si lo hace uno después del otro.

Suponga que la barca desliza sobre el agua sin pérdidas por rozamiento. **(2 puntos)**



Solución

Sobre el sistema no actúan fuerzas externas, por lo que se conserva el momento lineal en el sistema de referencia no-inercial (el exterior).

El momento lineal inicial es nulo.

Si la velocidad del bañista sigue el sentido positivo de la coordenada *x*, la barca tendrá velocidad negativa, representamos su módulo en el sistema externo como *V'*. Así, la velocidad del bañista respecto al sistema externo justo después de tirarse es *v'*=*v*-*V'*.

a) Juntos.

$$(m+m)v' - M\,V' = 0$$

$$2m\,(v - V') - V'M = 0$$

de donde

$$2\,m\,v = V'(M+2m)$$

$$V' = \frac{2\,m\,v}{M+2m}$$

b) uno después de otro

La velocidad de la barca en el sistema de referencia externo después del primer salto es V'_1. La conservación de la cantidad de movimiento en el primero de los saltos:

$$m\,(v - V'_1) - V'_1(M + m) = 0$$

de donde

$$m\,v - 2mV'_1 - MV'_1 = 0$$

$$V'_1 = \frac{m\,v}{M + 2m}$$

Antes del segundo salto el sistema formado por el segundo bañista y la barca sí tiene momento lineal inicial, que debe ser igual al momento final:

$$(m + M)(-V'_1) = m\,(v - V'_2) - V'_2 M$$

de donde

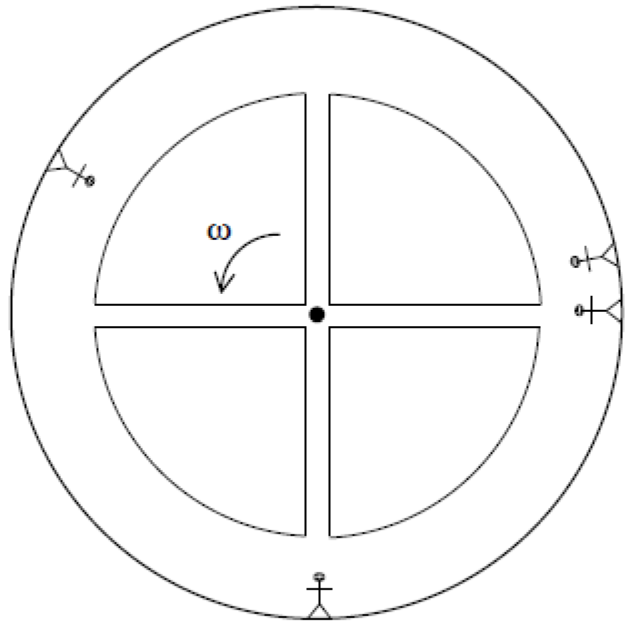
$$mV'_1 + MV'_1 = m\,v - mV'_2 - V'_2 M$$

$$V'_2 = mv\left(\frac{1}{m + M} + \frac{1}{2m + M}\right) = mv\left(\frac{1}{m + M} + \frac{1}{2m + M}\right)$$

Cuando saltan primero uno y luego otro, se obtiene una velocidad de la barca mayor que si saltan por separado.

2. Una estación espacial tiene forma de rueda de radio 100 m. Cuando no tiene población en su interior, su momento de inercia con respecto al eje que pasa por el centro y es perpendicular al plano de la estación es de I = $6 \cdot 10^8$ kg m^2. Normalmente, 150 personas viven en su borde exterior (ver figura) y experimentan una gravedad 'aparente' de 9.8 m/s^2 debida a la rotación de la estación en torno al eje anterior, con velocidad angular ω.

Supongamos que 100 de esos habitantes se desplazaran al centro de la estación para una reunión. Si no actuara ninguna fuerza externa, ¿qué gravedad experimentarían los 50 habitantes restantes del borde? Suponga que cada persona pesa 70 kg. **(2 puntos)**



Solución

Calculemos primero la gravedad aparente dada por la aceleración centrípeta experimentada en el borde externo

$a_c = \frac{v^2}{R} = w^2\, R = g \qquad w = \sqrt{\frac{g}{R}} = 0.31\, rad/s$

Si no hay fuerzas externas se conserva el momento angular

$$L_0 = L_f$$

$$(I + 150\, m\, R^2)\, w_0 = (I + 50\, m\, R^2)\, w_f$$

$$w_f = \frac{I + 150\, m\, R^2}{I + 50\, m\, R^2}\sqrt{\frac{g}{R}} = \frac{6\; 10^8 + 150\; 70\; 100^2}{6\; 10^8 + 50\; 70\; 100^2}\sqrt{\frac{9.8}{100}} = \frac{7.05\; 10^8}{6.35\; 10^8}\sqrt{\frac{9.8}{100}} = 0.34\, rad/s$$

$$g_f = w_f^2\, R = \left(\frac{I + 150\, m\, R^2}{I + 50\, m\, R^2}\right)^2 g = \left(\frac{7.05}{6.35}\right)^2 9.8 = 12.08\, m\, s^{-2}$$

3. Una nave espacial de masa *m* describe una órbita circular de radio *R* en torno a la Tierra bajo la acción de su campo gravitatorio, ¿en cuánto se ha de incrementar su velocidad, al menos, para conseguir escapar de la atracción gravitatoria terrestre? Expresar el resultado únicamente en función de *G*, M_T y *R*. **(2 puntos)**

Solución

Para que esto ocurra, la energía potencial gravitatoria final debe ser nula $U_f = 0$ mientras que el mínimo incremento de velocidad hará que llegue a este punto con velocidad nula, de modo que $E_f = 0$. Inicialmente tenemos

$$E_i = E_{c,i} + U_i = \frac{1}{2}m(v+x)^2 - G\frac{M_T m}{R}$$

Igualando energías inicial y final obtenemos

$$0 = \frac{1}{2}m(v+x)^2 - G\frac{M_T m}{R} \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{G\frac{2M_T}{R}} - v$$

Por otro lado, de la dinámica de la órbita deducimos que

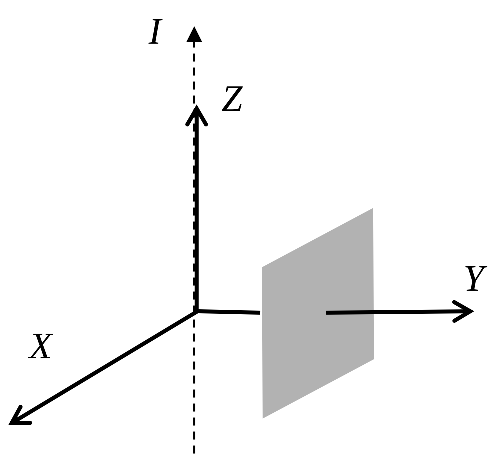
$$v = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}$$

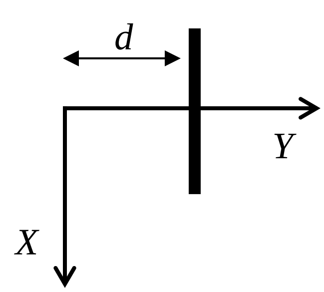
De modo que

$$x = \sqrt{G\frac{2M_T}{R}} - \sqrt{G\frac{M_T}{R}} = \sqrt{G\frac{M_T}{R}}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

4. Consideremos la distribución indicada en la figura de la izquierda (la figura de la derecha muestra una proyección de la misma distribución sobre el plano XY). Por un lado tenemos un conductor rectilíneo muy largo situado en el eje Z por el que circula una corriente I en el sentido positivo del eje. Por otro lado tenemos una región cuadrada de lado *L* perpendicular al eje Y (el cual pasa por su centro) situada a una distancia d del eje Z. Calcular el flujo del campo magnético generado por la corriente que atraviesa el cuadrado en función de los datos del problema. **(2 puntos)**

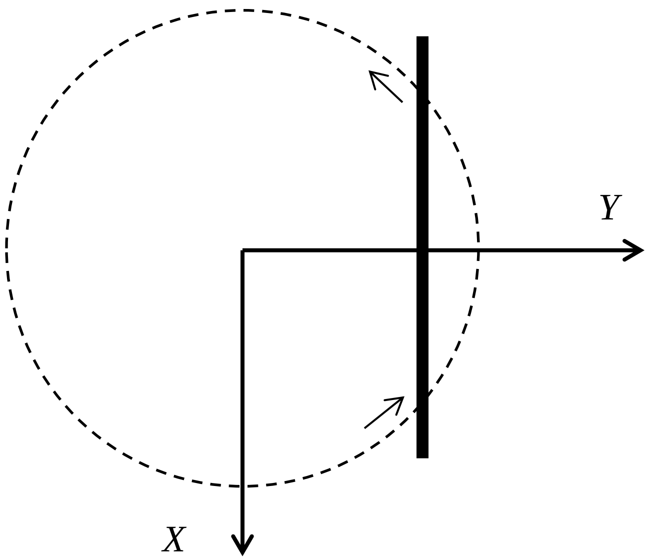
Ayuda: El campo magnético creado por un conductor rectilíneo muy largo que transporta una corriente I en un punto situado a una distancia r perpendicular al conductor tiene módulo $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.





Solución

La resolución detallada para un caso general, del cual se deduce fácilmente el nuestro, aparece en solución de la PEC de 2017. Sin embargo, la solución de este caso particular es muy sencilla si consideramos la simetría del problema. Sabemos que la dirección del campo magnético creado por una corriente rectilínea muy larga en cualquier punto del espacio es tangencial a la circunferencia que pasa por ese punto situada en el plano perpendicular a la corriente y con centro en el eje dado por la dirección de corriente. Podemos hacer una representación sencilla de cómo serán las líneas de campo que atraviesan el cuadrado.



Es fácil darse cuenta que las líneas del campo magnético (circunferencias) entran y salen del cuadrado, por lo que el flujo neto que lo atraviesa será cero.

5. Un cohete de 100 m de longitud se aleja a una cierta velocidad constante con respecto a la Tierra. Para un observador situado en la Tierra la longitud del cohete es de 99,5 m. Supongamos que en el momento del despegue un observador situado en la base sincroniza su reloj con el del astronauta que viaja dentro del cohete. ¿Durante cuánto tiempo (medido en el reloj del observador situado en la Tierra) debe viajar el cohete para que el reloj del astronauta haya retrasado un segundo con respecto al reloj del observador en la base? **(2 puntos)**

Recordamos que las transformaciones de Lorentz son:

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

Solución

Si aplicamos la contracción de longitudes podemos obtener γ, y de ahí la velocidad del cohete con respecto a la Tierra (aunque no nos hará falta)

$$L = \gamma^{-1} L_P = 99{,}5 \text{ m}$$

con

$$\gamma = \frac{L_P}{L} = 1.0050251 \quad \text{y} \quad v = 0.099875c$$

Sabemos que el reloj del astronauta (tiempo propio) retrasa con respecto al reloj situado en la Tierra a razón de:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_P$$

Queremos además que $\Delta t_P = \Delta t - 1$

Sustituyendo llegamos a

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t - 1\right)$$

y despejando

$$\Delta t = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = 200 \text{ s}$$