Capítulo 1

# Espacios de Medida

Este capítulo es una introducción a los espacios de medida, colecciones de subconjuntos de uno dado y una forma aditiva (medida) de asignar a cada uno de ellos una cantidad.

## 1.1. Sobre familias de conjuntos

NOTACIÓN. • *Una familia de un conjunto $X$ es una colección de subconjuntos de $X$. Utilizaremos letras caligráficas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}, \dots$ $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}, \dots$ para denotarlas.*

• *Dadas familias $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ de $X$, sean*

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} &= \{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} &= \{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}\\ \mathcal{A} \ominus \mathcal{B} &= \{A \setminus B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.\end{aligned}$$

• *Dada una familia $\mathcal{A}$ de $X$, e $Y \subseteq X$, sea $\mathcal{A} \upharpoonright Y := \mathcal{A} \otimes \{Y\} = \{A \cap Y : A \in \mathcal{A}\}$ se denomina la* restricción *de $\mathcal{A}$ en $Y$.*

• *Dado un espacio vectorial $V$, $p \in V$ y $A \subseteq V$, sea $p + A = \{p + x : x \in A\}$; dada una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $V$, sea $p + \mathcal{A} = \{p + A : A \in \mathcal{A}\}$.*

• *Dada $f : X \to Y$ y $A \subseteq Y$ a veces utilizaremos la notación probabilística $\{f \in A\}$ para referirse al la preimagen $f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$.*

La siguiente es una noción fundamental en teoría de la medida.

**Definición 1.1.1** (álgebras, $\sigma$-álgebras, espacios de medida)**.** *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ es un* álgebra de conjuntos *o* álgebra de Boole *sobre $X$ si:*

*a) $X \in \mathcal{A}$.*

*b) $\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos, i.e., $X \setminus A \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

*c) $\mathcal{A}$ es cerrado bajo reuniones.*

*$\mathcal{A}$ se denomina* $\sigma$-álgebra *(de $X$) cuando es una álgebra de Boole que es cerrada bajo reuniones numerables, es decir si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Un* espacio medible *es un par $(X, \mathcal{A})$, donde $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $X$.*

Se sigue de las leyes de De Morgan que todo $\sigma$-álgebra es cerrada bajo intersecciones, y por tanto es una álgebra de Boole.

**Ejemplo 1.1.2.** *Toda álgebra de Boole finita es obviamente una $\sigma$-álgebra. Recordemos que las $\sigma$-álgebras son isomorfas la familia de partes de un conjunto finito. En general, las partes de un conjunto son $\sigma$-álgebras.*

**Proposición 1.1.3** (Uniones vs uniones disjuntas)**.** *Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos cerrada bajo uniones disjuntas y diferencias. Entonces para toda $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ existe $\{B_n\}_n \subseteq \mathcal{A}$ disjuntos* *dos a dos tales que* $B_n \subseteq A_n$ *y*

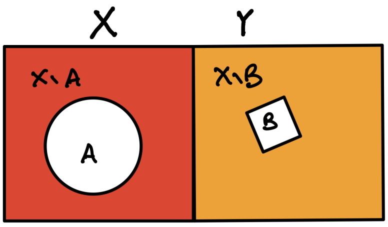
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

*En particular,* $\mathcal{A}$ *es cerrado bajo uniones finitas.*

Demostración. Fijemos una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{A}$. Sea $B_0 := A_0$; $B_{n+1} := A_{n+1}\backslash(B_0\cup\cdots\cup B_n)$. Es fácil ver que $\bigcup_{n=0}^k A_n = \bigcup_{n=0}^k B_n$ para todo $k$ y por tanto $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$. Veamos que $B_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por inducción sobre $n$. $B_0 = A_0 \in \mathcal{A}$; supongamos que $\{B_k\}_{k\leqslant n} \subseteq \mathcal{A}$ y veamos que $B_{n+1} \in \mathcal{A}$: Como $(B_k)_{k\leqslant n}$ son disjuntos dos a dos, $C := B_0 \cup \cdots \cup B_n \in \mathcal{A}$. Por tanto, $B_{n+1} = A_{n+1}\backslash C \in \mathcal{A}$. □

**Proposición 1.1.4** (Uniones de familias)**.** *Supongamos que* $X$ *e* $Y$ *son conjuntos disjuntos, y supongamos que* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *y* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$*. Si* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *son* $\sigma$*-álgebras de* $X$ *e* $Y$ *respectivamente, entonces* $\mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ *es una* $\sigma$*-álgebra de* $X \cup Y$*.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\sigma$-álgebras de $X$ e $Y$ respectivamente. Entonces $X\cup Y \in \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$. Supongamos que $C \in \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$ y veamos que $(X \cup Y)\backslash C \in \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$. Pongamos $C = A \cup B$ con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Entonces $(X \cup Y)\backslash(A \cup B) = (X\backslash A) \cup (Y\backslash B) \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ ya que $X$ e $Y$ son disjuntos y $X\backslash A \in \mathcal{A}$ y $Y\backslash B \in \mathcal{B}$.




Supongamos que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $C_n = A_n \cup B_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$ y $B_n \in \mathcal{B}$. Entonces $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ y $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$. Se sigue de aquí que $\bigcup_n C_n = \bigcup_n A_n \cup \bigcup_n B_n \in \mathcal{A}\oplus\mathcal{B}$. □

**Definición 1.1.5** (familias inducidas)**.** *Sean* $(X, \mathcal{A})$ *y* $(Y, \mathcal{B})$ *dos espacios medibles y sea* $T : X \to Y$*. Se definen*

$$T^{-1}(\mathcal{B}) := \{f^{-1}(B) \,:\, B \in \mathcal{B}\} \text{ *es el álgebra* preimagen}$$

$$T(\mathcal{A}) := \{B \,:\, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \text{ *es el álgebra* imagen.}$$

**Proposición 1.1.6.** $T^{-1}(\mathcal{B})$ *es una* $\sigma$*-algebra de* $X$ *y* $T(\mathcal{A})$ *es una* $\sigma$*-álgebra de* $Y$*.*

Demostración. Ejercicio. □

Ejercicio 1.1.1. *Demostrar que la intersección arbitraria de* $\sigma$*-álgebras es una* $\sigma$*-álgebra.*

Como $\mathcal{P}(X)$ es una $\sigma$-álgebra (y por tanto una $\lambda$-familia), el concepto siguiente está bien definido.

**Definición 1.1.7** (Generados; borelianos)**.** *Dada una familia* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* $X$*, sea* $\Sigma_X(\mathcal{A})$ *la mínima, bajo inclusión,* $\sigma$*-álgebra que contiene a* $\mathcal{A}$*. Similarmente, sea* $\Lambda_X(\mathcal{A})$ *la mínima* $\lambda$*-familia que contiene a* $\mathcal{A}$*.*

*Dado un espacio topológico* $(X, \tau)$*, sea* $\mathcal{B}(X) := \Sigma_X(\tau)$ *la* $\sigma$*-álgebra de* $X$ *generada por los abiertos de* $X$*. Los elementos de* $\mathcal{B}(X)$ *se denominan* borelianos *de* $X$ *y al álgebra* $\mathcal{B}(X)$ *se la denomina el* álgebra de Borel *de* $X$*.*

Cuando no haya posible confusión escribiremos $\Sigma(\mathcal{A})$, $\Lambda(\mathcal{A})$ para denotar $\Sigma_X(\mathcal{A})$, $\Lambda_X(\mathcal{A})$, resp.

**Proposición 1.1.8** (Restricciones y generados)**.** *Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de $X$, y supongamos que $Y \subseteq X$.*

*a) Si $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra entonces $\mathcal{A} \upharpoonright Y$ es una $\sigma$-álgebra de $Y$.*
*b) $\Sigma_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y) = (\Sigma_X(\mathcal{A})) \upharpoonright Y$.*

Demostración. *a)*: Supongamos que $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra; entonces $Y = X \cap Y \in \mathcal{A} \upharpoonright Y$; si $A \in \mathcal{A}$, entonces

$$Y \setminus (A \cap Y) = Y \setminus A = Y \cap (X \setminus A) \in \mathcal{A} \upharpoonright Y.$$

Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap Y) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \cap Y \in \mathcal{A} \upharpoonright Y.$$

*b)*: Se sigue de *a)* que $(\Sigma_X(\mathcal{A})) \upharpoonright Y$ es una $\sigma$-álgebra de $Y$, que claramente contiene a $\mathcal{A} \upharpoonright Y$, y por tanto

$$\Sigma_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \subseteq (\Sigma_X(\mathcal{A})) \upharpoonright Y.$$

Por otro lado, $\Sigma_{X\setminus Y}(\mathcal{A}[X\setminus Y])$ es una $\sigma$-álgebra de $X\setminus Y$ y se sigue de la Proposición 1.1.4 que $\Sigma_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \oplus \Sigma_{X\setminus Y}(\mathcal{A}[X\setminus Y])$ es una $\sigma$-álgebra de $Y \cup (X\setminus Y) = X$. Por tanto, $\Sigma_X(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \oplus \Sigma_{X\setminus Y}(\mathcal{A}[X\setminus Y])$ y

$$(\Sigma_X(\mathcal{A})) \upharpoonright Y \subseteq (\Sigma_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y) \oplus \Sigma_{X\setminus Y}(\mathcal{A}[X\setminus Y])) \upharpoonright Y = \Sigma_Y(\mathcal{A} \upharpoonright Y). \qquad \square$$

$\square$

De particular importancia son las $\sigma$-álgebras productos.

**Definición 1.1.9** (producto de $\sigma$-álgebras)**.** *Supongamos que $\{X_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos. Un* cilindro *$C$ es un subconjunto del producto cartesiano $\prod_{i\in I} X_i$ de la forma $\prod_{i\in I} C_i$ donde existe $i_0 \in I$ tal que $C_i = X_i$ para todo $i \in I\setminus\{i_0\}$.*

*Supongamos ahora que tenemos una familia de espacios medibles $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$. Diremos que un cilindro $C = \prod_{i\in I} C_i$ es* medible *(con respecto a $\{(X_i, \mathcal{A}_i)\}_{i\in I}$ si $C_i \in \mathcal{A}_i$ para todo $i \in I$. Se define entonces la $\sigma$-*álgebra producto

$$\bigtimes_{i\in I} \mathcal{A}_i$$

*como la $\sigma$-álgebra generada por los cilindros medibles.*

**Definición 1.1.10** ($\liminf A_n$ y $\limsup A_n$)**.** *Sea $X$ un conjunto. Dados subconjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $X$ se define el límite ínfimo y el límite supremo*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant m} A_n,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geqslant m} A_n.$$

*Decimos que la sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos de $X$ converge a un subconjunto $A$ de $X$, y escribimos $\lim_n A_n = A$, cuando la sucesión de funciones características $(\mathbb{1}_{A_n})_n$ converge puntualmente a la función característica $\mathbb{1}_A$ de $A$.*

**Proposición 1.1.11.** *Son equivalentes:*

*a) $\lim_n A_n$ existe.*

*b)* $\lim_n A_n^c$ *existe.*
*c)* $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = A$ *y* $\lim_n A_n = A$.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que el límite $\lim_n A_n = A$. Esto quiere decir que $\lim_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_A$ puntualmente y por tanto,

$$\lim_n \mathbb{1}_{X\setminus A_n} = \lim_n (\mathbb{1}_X - \mathbb{1}_{A_n}) = \mathbb{1}_X - \lim_n \mathbb{1}_{A_n} = \mathbb{1}_X - \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_{X\setminus A}.$$

Veamos que *b)* implica *c)*. Supongamos que $\lim_n A_n^c = B$. Entonces como *a)* implica *b)* aplicada a $A_n^c$, se tiene que $\lim_n A_n = B^c = A$. Veamos que $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = A$. Por definición, $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$. Sea $a \in \limsup_n A_n$. Entonces hay un número infinito de $n$'s tal que $a \in A_n$ y por tanto, como $\lim_n A_n = A$, $\lim_n \mathbb{1}_{A_n}(a) = 1 = \mathbb{1}_A(a)$, o sea $a \in A$ y a partir de un cierto $n$, $a \in A_n$. Esto implica que $\limsup_n A_n = \liminf_n A_n \subseteq A$. De la misma manera se demuestra que $A \subseteq \liminf_n A_n$. Finalmente *c)* implica *a)* trivialmente. □

EJERCICIO 1.1.2. *Encontrar una sucesión* $(A_n)_n$ *de subconjuntos de* $X$ *tal que* $\lim_n A_n$ *no existe. (Indicación: Sea* $X$ *un conjunto no vacío y sean* $A_{2n} := X$, $A_{2n+1} := \varnothing$. *Entonces* $\limsup_n A_n = X$, *mientras que* $\liminf_n A_n = \varnothing$.*)*

## 1.2. Medidas

**Definición 1.2.1** (Medida, espacio de medida)**.** *Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ es una* medida *cuando*

*a)* $\mu(\varnothing) = 0$.

*b) $\mu$ es aditiva, i.e., $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para todos $A, B \in \mathcal{A}$ disjuntos.*

*$\mu$ es una medida $\sigma$-*aditiva *si*

*c) $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra y $\mu$ es $\sigma$-aditiva, i.e. $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$ para toda $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos.*

*Un* espacio de medida *es un triple $(X, \mathcal{A}, \mu)$ donde $(X, \mathcal{A})$ es un espacio medible y $\mu$ es una medida $\sigma$-aditiva sobre $\mathcal{A}$.*

*Una medida $\mu$ en $X$ se denomina* finita *cuando $\mu(X) < \infty$, y $\sigma$-*finita *cuando $X$ tiene un recubrimiento numerable por conjuntos de $\mu$-medida finita. La medida $\mu$ se denomina* medida de probabilidad *o simplemente* probabilidad *cuando $\mu(X) = 1$.*

**Definición 1.2.2** (Medida Borel)**.** *Una* medida de Borel *es una medida sobre el álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ de un espacio topológico $X$ para la que los conjuntos compactos de $X$ tienen medida finita.*

**Definición 1.2.3** (Medida imagen)**.** *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y una función $f : X \to Y$, se define la* medida imagen *$f_*\mu : f(\mathcal{A}) \to [0, \infty]$, definida sobre el álgebra imagen $f(\mathcal{A})$, por*

$$f_*\mu(B) := \mu(\{f \in B\}), \text{ para } B \subseteq Y \text{ tal que } \{f \in B\} \in \mathcal{A}.$$

**Nota 1.2.4** (Importante)**.** *Salvo que se diga explícitamente lo contrario, se supondrá siempre que las medidas son $\sigma$-aditivas.*

**Proposición 1.2.5** (Continuidad de la medida)**.** *Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida no necesariamente finita. Se cumple:*

*a) Si $(B_n)_n$ es $\subseteq$-creciente, entonces $\mu(\bigcup_n B_n) = \sup_n \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.*

*b) Si $(C_n)_n$ es $\subseteq$-decreciente y $\mu(C_0) < \infty$, entonces $\mu(\bigcap_n C_n) = \inf_n \mu(C_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$.*

*c) $\mu(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n)$.*

*d) Si $\mu(\bigcup_n A_n) < \infty$, entonces $\mu(\limsup_n A_n) \geqslant \limsup_n \mu(A_n)$.*

Demostración. *a)* se sigue de la $\sigma$-aditividad de $\mu$. *b)*: Para cada $n$, sea $D_n := C_0 \backslash C_n$. Entonces $(D_n)_n$ es $\subseteq$-creciente y por tanto

$$\begin{aligned}\mu(C_0) - \mu(\bigcap_n C_n) =& \mu(C_0 \backslash \bigcap_n C_n) = \mu(\bigcup_n D_n) = \sup_n \mu(D_n) =_{(\star)} \sup_n(\mu(C_0) - \mu(C_n)) = \\ =& \mu(C_0) - \inf_n \mu(C_n)\end{aligned}$$

donde en $(\star)$ hemos utilizado que $\mu(C_0) < \infty$. Por tanto, $\mu(\bigcap_n C_n) = \inf_n \mu(C_n)$. Si $\mu(C_0) = \infty$, el resultado no es cierto en general: Tomemos la medida de Lebesgue $\lambda$ en $\mathbb{R}$, y sea $C_n := [n, \infty[$. Entonces $\bigcap_n C_n = \varnothing$, por tanto $\mu(\bigcap_n C_n) = 0$, mientras que $\inf_n \mu(C_n) = \infty$.

*c):* Sea $B_n := \bigcap_{m\geqslant n} A_m$. Entonces $\liminf_n A_n = \bigcup_n B_n$. Por tanto, por *a)*,

$$\mu(\liminf_n A_n) = \sup_n \mu(B_n) \leqslant \sup_n \inf_{m\geqslant n} \mu(A_m) = \liminf_n \mu(A_n).$$

De la misma manera se demuestra *d)*. $\square$

**Proposición 1.2.6.** *Sea $(\Omega, \Sigma, \mu)$ un espacio de medida ($\sigma$-aditiva, no necesariamente finita), y sea $(A_n)_n$ una sucesión de conjuntos en $\Sigma$.*

*a) Si $(A_n)_n$ converge a $A \subseteq \Omega$, entonces $A \in \Sigma$.*

*b) Supongamos $\lim_n A_n$ existe y que existe $B$ tal que $\mu(B) < \infty$ y que contiene a todos los $A_n$'s. Entonces se tiene que $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$.*

Demostración. *a)*: Si $\lim_n A_n = A$, entonces $A = \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geqslant n} A_m$, que pertenece a $\Sigma$ ya que este conjunto es cerrado bajo uniones e intersecciones numerables. *b)*: Supongamos que $\lim_n A_n = A$ y $A_n \subseteq B$ para un cierto $B$ con $\mu(B) < \infty$. Entonces a partir de la Proposición 1.2.5 se sigue

$$\mu(A) = \mu(\liminf_n A_n) \leqslant \liminf_n \mu(A_n) \leqslant \limsup_n \mu(A_n) \leqslant \mu(\limsup_n A_n) = \mu(A);$$

por tanto $\lim_n \mu(A_n)$ existe y es igual a $\mu(A)$. □

Ejercicio 1.2.1. *Encontrar un espacio de medida $(\Omega, \Sigma, \mu)$ y una sucesión de conjuntos $(A_n)_n$ en $\Sigma$ tal que $\mu(\lim A_n) \neq \lim_n \mu(A_n)$. (Indicación: En $\mathbb{R}$ consideremos la medida de Lebesgue $\lambda$, y para cada $n$ sea $A_n := [n, \infty[$. Entonces $\lim_n A_n = \varnothing$, y por tanto $\lambda(\lim_n A_n) = 0$, mientras que $\lim_n \lambda(A_n) = \infty$.)*

**Proposición 1.2.7** (Lema de Borel-Cantelli)**.** *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y sean $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tales que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty. \tag{1}$$

*Entonces se tiene que*

$$\mu(\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = 0.$$

Demostración. Por definición, $\limsup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} B_m$, donde cada $B_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$. Como por hipótesis

$$\mu(B_0) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) < \infty,$$

podemos utilizar la continuidad de la medida $\mu$ expuesta en la Proposición 1.2.5 *b)* para concluir que

$$\mu(\limsup_{n \in \mathbb{N}}) = \mu(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \mu(B_m) \leqslant \inf_{m \in \mathbb{N}} \sum_{n=m}^{\infty} \mu(A_n) = 0,$$

ya que la serie en (1) es convergente. □

**Definición 1.2.8** (Pseudométricas)**.** *Recordemos que una pseudométrica en un conjunto $X$ es una función $d : X \times X \to [0, \infty]$ cumpliendo*

*a) $d$ es simétrica, es decir, $d(x, y) = d(y, x)$.*

*b) $d$ satisface la desigualdad triangular, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.*

*La topología en $X$ definida por una pseudométrica $d$ es aquella que tiene por base de abiertos las bolas abiertas $B(x, a) := \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$, o, equivalentemente, la de la $d$-convergencia.*

Por tanto, una métrica $d$ es una pseudométrica tal que si $d(x, y) = 0$ entonces $x = y$.

Ejercicio 1.2.2 (Métrica vs pseudométrica). *Sea $d$ una pseudométrica en $X$. Demostrar que son equivalentes:*

*a) $d$ es una métrica.*

*b) Todo subconjunto unitario $\{x\}$ de $X$ es un cerrado para la topología definida por $d$.*

En la Subsección A.1.2 del Anexo se pueden encontrar varias propiedades fundamentales de los espacios métricos.

**Definición 1.2.9** (Diferencia simétrica)**.** *Recordemos que la* diferencia simétrica $A\triangle B$ *de* $A, B \subseteq X$ *se define por*

$$A\triangle B = (A\backslash B) \cup (B\backslash A).$$

Ejercicio 1.2.3. *Demostrar que* $(X\backslash A)\triangle(X\backslash B) = A\triangle B$.

**Definición 1.2.10** ($d_\mu$)**.** *Ses* $(\Omega, \Sigma, \mu)$ *un espacio de medida (*$\sigma$*-aditiva, no necesariamente finita). Dados conjuntos* $A, B \in \mathcal{A}$ *definimos*

$$d_\mu(A, B) := \mu(A\triangle B),$$

**Proposición 1.2.11** ($\mu$-pseudométrica)**.** $d_\mu : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $d_\mu(A, B) := \mu(A\triangle B)$ *es una pseudométrica completa en* $\mathcal{A}$*, que denominaremos* $\mu$-pseudométrica*.*

Demostración. La desigualdad triangular se sigue de que

$$A\triangle C \subseteq (A\triangle B) \cup (B\triangle C).$$

Recordemos el siguiente hecho sencillo.

Obs. 1. Sea $(X, d)$ un espacio pseudo-métrico. Una sucesión de Cauchy es convergente si y solamente si tiene una subsucesión convergente.

Sea $(A_n)_n$ una sucesión de Cauchy para $d$. Sea $(A_{m_n})_n$ una subsucesión tal que $d(A_{m_{n+1}}, A_{m_n}) \leqslant 1/2^n$ para cada $n$. Pongamos $B_n := A_{m_n}$ para cada $n$ y $B := \limsup_n B_n$. Veamos que $d(B_n, B) \to_n 0$: Para cada $n$, sea $C_n := \bigcup_{m\geqslant n} B_m$ y $D_n := \bigcap_{m\geqslant n} B_m$. Fijemos $n$; entonces $D_n \subseteq B_n \subseteq C_n$ y

$$C_n\backslash B_n = \bigcup_{m\geqslant n}(B_m\backslash B_n) \subseteq \bigcup_{m\geqslant n}(B_{m+1}\backslash B_m)$$
$$B_n\backslash D_n = \bigcup_{m\geqslant n}(B_n\backslash B_m) \subseteq \bigcup_{m\geqslant n}(B_m\backslash B_{m+1})$$

Por tanto, $d(B_n, C_n), d(B_n, D_n) \leqslant 1/2^{n-1}$. En particular, $d(C_n, D_n) \leqslant 1/2^{n-2}$ para todo $n$. Como tenemos que $D_m \subseteq B \subseteq C_m$ para todo $m$, se tiene que $d(C_m, B) \leqslant 1/2^{m-2}$ y por tanto $d(A_m, B) \leqslant d(A_m, C_m) + d(C_m, B) \leqslant 1/2^{m-3}$, y esto implica que $d(B_m, B) \to_m 0$. $\square$

**1.2.1. Conjuntos de medida cero, compleciones.** Los conjuntos de medida cero tienen una importancia especial. En general, no tiene por qué ser cierto que la medida de un unitario es cero. Sin embargo, en medidas $\sigma$-finitas hay "pocos" unitarios no nulos.

**Definición 1.2.12** (Punto de continuidad de una medida)**.** *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, un punto $x \in X$ se denomina de $\mu$-*continuidad *cuando $\mu(\{x\}) = 0$. A los puntos que no son de $\mu$-continuidad se les denomina de $\mu$-*discontinuidad.

Se verá en la Sección 5.2 que el nombre de continuidad viene de que esos puntos son precisamente en los que las funciones de distribución son continuas.

**Proposición 1.2.13** (Pocos puntos de discontinuidad)**.** *Toda medida $\sigma$-finita tiene a lo sumo un número numerable de puntos de discontinuidad.*

Demostración. Fijemos un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ que es $\sigma$-finito, y sea $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$ un recubrimiento de $X$ por conjuntos en $\mathcal{A}$ de medida finita. Sea $D \subseteq X$ el conjunto de puntos de $\mu$-discontinuidad. Si $D$ fuera no numerable existiría un cierto $m \in \mathbb{N}$ tal que $D \cap X_m$ es no numerable. Para cada $x \in X_m \cap D$, sea $\varepsilon_x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\mu(\{x\}) > \varepsilon_x$. Como $D \cap X_n$ es no numerable y $\mathbb{Q}$ es numerable, existe un conjunto no numerable $E \subseteq D \cap X_m$ y un $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\varepsilon_x = \varepsilon$ para todo $x \in E$. Escojamos $E = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ numerable. Se sigue de la $\sigma$-aditividad de $\mu$ que

$$\infty > \mu(X_m) = \mu(E) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{e_n\}) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon = \infty,$$

que es imposible. □

En general, la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ donde está definida una medida $\mu$ no tiene por qué ser cerradas por subconjuntos. Es deseable y conveniente que si $M \subseteq N$ y $\mu(M) = 0$ entonces $M \in \mathcal{A}$, pero esto no es siempre así. Sin embargo, toda medida tiene una compleción, para la que esa propiedad es cierta.

**Definición 1.2.14** (Espacio de medida completo)**.** *Recordemos que un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denomina* completo *(y la medida se dice* completa*) cuando se tiene que si $A \in \mathcal{A}$ es $\mu$-nulo (i.e. $\mu(A) = 0$), entonces para todo $B \subseteq A$ se tiene que $B \in \mathcal{A}$ (y es $\mu$-nulo).*

Teorema 1.2.15 (Compleción de un espacio de medida). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos*

$$\widehat{\mathcal{A}} := \{A \cup M \, : \, M \subseteq N, \, N, A \in \mathcal{A} \, \text{ y } \mu(N) = 0\}.$$

*Para $B \in \widehat{\mathcal{A}}$ se define $\widehat{\mu}(B) := \mu(A)$, donde $A \in \mathcal{A}$ está contenido en $B$ y $B \backslash A$ está contenido en un conjunto de $\mathcal{A}$ de $\mu$-medida cero.*

*Entonces*

*a) $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ es un espacio de medida completo.*
*b) $\mathcal{A} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ y $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*
*c) $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ es el menor espacio de medida completo que extiende a $(X, \mathcal{A}, \mu)$, i.e., si $(X, \mathcal{B}, \nu)$ es un espacio de medida completo con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\nu(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$ y $\nu(A) = \widehat{\mu}(A)$ para todo $A \in \widehat{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Claramente $\mathcal{A} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ ya que $\mu(\varnothing) = 0$. Por otro lado, $\widehat{\mu}$ está bien definida: Sea $A \cup M \in \widehat{\mathcal{A}}$ con $A \in \mathcal{A}$ y $M \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$. Entonces $A$ cumple las condiciones para declarar

$\widehat{\mu}(A \cup M) = \mu(A)$. Supongamos que $B \in \mathcal{A}$ es tal que $A \cup M = B \cup P$ con $B \in \mathcal{A}$ y $P \subseteq Q$ con $\mu(Q) = 0$. Entonces particular, $A \backslash B \subseteq P \backslash B \subseteq Q$ mientras que $B \backslash A \subseteq M \backslash A \subseteq N$. Por tanto,

$$A \triangle B \subseteq N \cup P$$

este último con medida 0 y por tanto $\mu(A \triangle B) = 0$ ya que $A \triangle B \in \mathcal{A}$. Esto quiere decir que $\mu(B) = \mu(A)$ y la definición de $\widehat{\mu}(A \triangle B)$ es disambigua. Seguidamente veamos que $\widehat{\mathcal{A}}$ es una $\sigma$-álgebra: $\varnothing = \varnothing \triangle \varnothing \in \widehat{\mathcal{A}}$. Supongamos que $A \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$, y pongamos $B := A \cup M$. Entonces

$$\begin{aligned} X \backslash B =&(X \backslash A) \cap (X \backslash M) = ((X \backslash A) \cap (X \backslash N)) \cup ((X \backslash A) \cap ((X \backslash M) \backslash (X \backslash N))) = \\ =&(X \backslash (A \cup N)) \cup ((X \backslash A) \cap (N \backslash M)) \in \widehat{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

ya que $A \cup N \in \mathcal{A}$ y $((X \backslash A) \cap (N \backslash M)) \subseteq N$. Veamos ahora que $\widehat{\mu}$ es una medida en la $\sigma$-álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$: Supongamos que $A \cup M \subseteq B \cup N$ con $A, B \in \mathcal{A}$ y $M \subseteq M'$, $N \subseteq N'$ con $\mu(M') = \mu(N') = 0$. Entonces $A \backslash B \subseteq N'$ y por tanto $\mu(A \backslash B) = 0$. Esto quiere decir que

$$\widehat{\mu}(A \cup M) = \mu(A) = \mu(A \cap B) \leqslant \mu(B) = \widehat{\mu}(B \cup N).$$

Supongamos que $\{A_n \cup M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable disjunta dos a dos tal que cada $A_n \in \mathcal{A}$ y $M_n \subseteq P_n$ con $\mu(P_n) = 0$. Entonces $\{A_n\}_n$ son disjuntos dos a dos y por tanto,

$$\widehat{\mu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup M_n)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mu}(A_n + M_n).$$

Obviamente, $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ es un espacio completo. Supongamos ahora que $(X, \mathcal{B}, \nu)$ es otro espacio completo que extiende a $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces, dado $A \in \mathcal{A}$ y $M \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$ se sigue que $A \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y también $M \in \mathcal{B}$ ya que $N \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\nu(N) = \mu(N) = 0$. Esto demuestra que $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$. Además $\widehat{\mu}(A \cup M) = \mu(A) = \nu(A) = \nu(A \cup M)$. $\square$

**1.2.1. Conjuntos de medida cero, compleciones.** Los conjuntos de medida cero tienen una importancia especial. En general, no tiene por qué ser cierto que la medida de un unitario es cero. Sin embargo, en medidas $\sigma$-finitas hay "pocos" unitarios no nulos.

**Definición 1.2.12** (Punto de continuidad de una medida)**.** *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, un punto $x \in X$ se denomina de $\mu$-*continuidad *cuando $\mu(\{x\}) = 0$. A los puntos que no son de $\mu$-continuidad se les denomina de $\mu$-*discontinuidad*.*

Se verá en la Sección 5.2 que el nombre de continuidad viene de que esos puntos son precisamente en los que las funciones de distribución son continuas.

**Proposición 1.2.13** (Pocos puntos de discontinuidad)**.** *Toda medida $\sigma$-finita tiene a lo sumo un número numerable de puntos de discontinuidad.*

Demostración. Fijemos un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ que es $\sigma$-finito, y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ un recubrimiento de $X$ por conjuntos en $\mathcal{A}$ de medida finita. Sea $D \subseteq X$ el conjunto de puntos de $\mu$-discontinuidad. Si $D$ fuera no numerable existiría un cierto $m \in \mathbb{N}$ tal que $D \cap X_m$ es no numerable. Para cada $x \in X_m \cap D$, sea $\varepsilon_x \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\mu(\{x\}) > \varepsilon_x$. Como $D \cap X_n$ es no numerable y $\mathbb{Q}$ es numerable, existe un conjunto no numerable $E \subseteq D \cap X_m$ y un $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que $\varepsilon_x = \varepsilon$ para todo $x \in E$. Escojamos $E = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq D$ numerable. Se sigue de la $\sigma$-aditividad de $\mu$ que

$$\infty > \mu(X_m) = \mu(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(\{e_n\}) \geqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon = \infty,$$

que es imposible. ☐

En general, la $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ donde está definida una medida $\mu$ no tiene por qué ser cerradas por subconjuntos. Es deseable y conveniente que si $M \subseteq N$ y $\mu(M) = 0$ entonces $M \in \mathcal{A}$, pero esto no es siempre así. Sin embargo, toda medida tiene una compleción, para la que esa propiedad es cierta.

**Definición 1.2.14** (Espacio de medida completo)**.** *Recordemos que un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se denomina* completo *(y la medida se dice* completa*) cuando se tiene que si $A \in \mathcal{A}$ es $\mu$-nulo (i.e. $\mu(A) = 0$), entonces para todo $B \subseteq A$ se tiene que $B \in \mathcal{A}$ (y es $\mu$-nulo).*

Teorema 1.2.15 (Compleción de un espacio de medida). *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Definimos*

$$\widehat{\mathcal{A}} := \{A \cup M \,:\, M \subseteq N,\, N, A \in \mathcal{A} \text{ y } \mu(N) = 0\}.$$

*Para $B \in \widehat{\mathcal{A}}$ se define $\widehat{\mu}(B) := \mu(A)$, donde $A \in \mathcal{A}$ está contenido en $B$ y $B \backslash A$ está contenido en un conjunto de $\mathcal{A}$ de $\mu$-medida cero.*

*Entonces*

*a) $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ es un espacio de medida completo.*
*b) $\mathcal{A} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ y $\widehat{\mu}(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*
*c) $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ es el menor espacio de medida completo que extiende a $(X, \mathcal{A}, \mu)$, i.e., si $(X, \mathcal{B}, \nu)$ es un espacio de medida completo con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\nu(A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$ y $\nu(A) = \widehat{\mu}(A)$ para todo $A \in \widehat{\mathcal{A}}$.*

Demostración. Claramente $\mathcal{A} \subseteq \widehat{\mathcal{A}}$ ya que $\mu(\varnothing) = 0$. Por otro lado, $\widehat{\mu}$ está bien definida: Sea $A \cup M \in \widehat{\mathcal{A}}$ con $A \in \mathcal{A}$ y $M \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$. Entonces $A$ cumple las condiciones para declarar

$\widehat{\mu}(A \cup M) = \mu(A)$. Supongamos que $B \in \mathcal{A}$ es tal que $A \cup M = B \cup P$ con $B \in \mathcal{A}$ y $P \subseteq Q$ con $\mu(Q) = 0$. Entonces particular, $A \backslash B \subseteq P \backslash B \subseteq Q$ mientras que $B \backslash A \subseteq M \backslash A \subseteq N$. Por tanto,

$$A \triangle B \subseteq N \cup P$$

este último con medida 0 y por tanto $\mu(A \triangle B) = 0$ ya que $A \triangle B \in \mathcal{A}$. Esto quiere decir que $\mu(B) = \mu(A)$ y la definición de $\widehat{\mu}(A \triangle B)$ es disambigua. Seguidamente veamos que $\widehat{\mathcal{A}}$ es una $\sigma$-álgebra: $\varnothing = \varnothing \triangle \varnothing \in \widehat{\mathcal{A}}$. Supongamos que $A \in \mathcal{A}$, $M \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$, y pongamos $B := A \cup M$. Entonces

$$\begin{aligned} X \backslash B =& (X \backslash A) \cap (X \backslash M) = ((X \backslash A) \cap (X \backslash N)) \cup ((X \backslash A) \cap ((X \backslash M) \backslash (X \backslash N))) = \\ =& (X \backslash (A \cup N)) \cup ((X \backslash A) \cap (N \backslash M)) \in \widehat{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

ya que $A \cup N \in \mathcal{A}$ y $((X \backslash A) \cap (N \backslash M)) \subseteq N$. Veamos ahora que $\widehat{\mu}$ es una medida en la $\sigma$-álgebra $\widehat{\mathcal{A}}$: Supongamos que $A \cup M \subseteq B \cup N$ con $A, B \in \mathcal{A}$ y $M \subseteq M'$, $N \subseteq N'$ con $\mu(M') = \mu(N') = 0$. Entonces $A \backslash B \subseteq N'$ y por tanto $\mu(A \backslash B) = 0$. Esto quiere decir que

$$\widehat{\mu}(A \cup M) = \mu(A) = \mu(A \cap B) \leqslant \mu(B) = \widehat{\mu}(B \cup N).$$

Supongamos que $\{A_n \cup M_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia numerable disjunta dos a dos tal que cada $A_n \in \mathcal{A}$ y $M_n \subseteq P_n$ con $\mu(P_n) = 0$. Entonces $\{A_n\}_n$ son disjuntos dos a dos y por tanto,

$$\widehat{\mu}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup M_n)\right) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mu}(A_n + M_n).$$

Obviamente, $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ es un espacio completo. Supongamos ahora que $(X, \mathcal{B}, \nu)$ es otro espacio completo que extiende a $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Entonces, dado $A \in \mathcal{A}$ y $M \subseteq N$ con $\mu(N) = 0$ se sigue que $A \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y también $M \in \mathcal{B}$ ya que $N \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\nu(N) = \mu(N) = 0$. Esto demuestra que $\widehat{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{B}$. Además $\widehat{\mu}(A \cup M) = \mu(A) = \nu(A) = \nu(A \cup M)$. $\square$

**1.2.2. Medidas exteriores y el criterio de Carathéodory.** Vamos a ver como definir medidas de una manera muy general.

**Definición 1.2.16** (Medida exterior)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma$-álgebra hereditaria, i.e. si $B \subseteq A \in \mathcal{A}$ entonces $B \in \mathcal{A}$. Una función $\pi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$* medida exterior *si:*

*a)* $\pi(\varnothing) = 0$

*b) $\pi$ es monótona, i.e., $\pi(A) \leqslant \pi(B)$ si $A \subseteq B$ son elementos de $\mathcal{A}$.*

*c) $\pi$ es $\sigma$-subaditiva, i.e.*

$$\pi(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \pi(A_n)$$

*para toda $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$.*

**Proposición 1.2.17.** *Supongamos $\pi$ es una medida exterior en $\mathcal{A}$ y $A, B \in \mathcal{A}$ son tales que $\pi(A \triangle B) = 0$. Entonces $\pi(A) = \pi(B)$.*

Demostración. Se tiene que $\pi(A) \leqslant \pi(A \cap B) + \pi(A \backslash B) \leqslant \pi(B) + \pi(A \triangle B) = \pi(B)$ y similarmente $\pi(B) \leqslant \pi(A)$. □

**Definición 1.2.18** (Criterio de Carathéodory)**.** *Dada una medida exterior $\pi$ definida en una $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ que es hereditaria, diremos que un subconjunto $A \in \mathcal{A}$ es* $\pi$-medible *cuando para todo $E \in \mathcal{A}$ se tiene que*

$$\pi(E) = \pi(E \cap A) + \pi(E \backslash A). \tag{2}$$

*Sea $\mathcal{M}(\pi) \subseteq \mathcal{A}$ la colección de elementos de $\mathcal{A}$ que son $\pi$-medibles.*

El teorema fundamental es el siguiente.

Teorema 1.2.19 (Teorema de extensión de Carathéodory). *$(X, \mathcal{M}(\pi), \pi)$ es un espacio de medida completo que cumple que $N \in \mathcal{M}(\pi)$ si $N \in \mathcal{A}$ es tal que $\pi(N) = 0$.*

Demostración. Empecemos viendo que $\mathcal{M}(\pi)$ es un álgebra de Boole: De la definición de medibilidad se sigue directamente que $X \in \mathcal{M}(\pi)$ y que $\mathcal{M}(\pi)$ es cerrado bajo complementos. Supongamos que $A, B \in \mathcal{M}(\pi)$ y fijemos $E \in \mathcal{A}$. Entonces por la medibilidad de $A$ aplicada a $E$, y la medibilidad de $B$ aplicada a $E \cap B$, se tiene que

$$\pi(E) = \pi(E \cap A) + \pi(E \backslash A) = \pi(E \cap A \cap B) + \pi((E \cap A) \backslash B) + \pi(E \backslash A). \tag{3}$$

Por otro lado,

$$((E \cap A) \backslash B) \cup E \backslash A = (E \backslash A) \cup (E \backslash B) = E \backslash (A \cap B), \tag{4}$$

y por tanto, de la subaditividad de $\pi$,

$$\pi((E \cap A) \backslash B)) + \pi(E \backslash A) \geqslant \pi(E \backslash (A \cap B)). \tag{5}$$

Combinando (3) y (5) y otra vez la subaditividad de $\pi$, se tiene que

$$\pi(E) \geqslant \pi(E \cap (A \cap B)) + \pi(E \backslash (A \cap B)) \geqslant \pi(E).$$ □

Antes de demostrar que $\mathcal{M}(\pi)$ es una $\sigma$-álgebra, vamos a ver que la siguiente $\sigma$-aditividad de $\pi$:

Obs. 2. Si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}(\pi)$ son disjuntos dos a dos y $E \in \mathcal{A}$, entonces

$$\pi\left(E \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \pi(E \cap A_k).$$

Demostración. Como $\pi$ es $\sigma$-subaditiva, es suficiente demostrar que tenemos la siguiente desigualdad $\pi\left(E \cap \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \pi\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(E\cap A_k)\right) \geqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \pi(E\cap A_k)$. Demostremos que $\pi\left(\bigcup_{k=0}^{m}(E\cap A_k)\right) = \sum_{k=0}^{m}\pi(E\cap A_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y lo hacemos por inducción sobre $m$: $m = 0$ es trivial. Supongamos cierto para $m$. Entonces como los conjuntos $\{A_k\}_{k=0}^{m}$ son disjuntos dos a dos, $\left(\bigcup_{k=0}^{m+1} A_k\right)\cap A_{m+1} = A_{m+1}$ y $\left(\bigcup_{k=0}^{m+1} A_k\right)\backslash A_{m+1} = \bigcup_{k=0}^{m} A_k$. Por tanto, por hipótesis de inducción,

$$\begin{aligned}\pi\left(E\cap\bigcup_{k=0}^{m+1}A_k\right) =&\pi\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{m+1}A_k\right)\cap A_{m+1}\right)+\pi\left(E\cap\left(\left(\bigcup_{k=0}^{m+1}A_k\right)\backslash A_{m+1}\right)\right)=\\ =&\pi\left(E\cap A_{m+1}\right)+\pi\left(\bigcup_{k=0}^{m}(E\cap A_k)\right)=\sum_{k=0}^{m+1}\pi(E\cap A_k).\end{aligned}$$

Por tanto, dado $m \in \mathbb{N}$, utilizando la monotonía de $\pi$,

$$\pi\left(E\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\right)\right)\geqslant\pi\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{m}A_k\right)\right)=\sum_{k=0}^{m}\pi(E\cap A_k),$$

y como $m$ es arbitrario,

$$\pi\left(E\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\right)\right)\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\pi(E\cap A_k)\geqslant\pi\left(E\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\right)\right).$$

□

Veamos ahora que $\mathcal{M}(\pi)$ es una $\sigma$-álgebra. Como hemos probado que $\mathcal{M}(\pi)$ es una álgebra de Boole, es suficiente ver que $\mathcal{M}(\pi)$ es cerrado bajo reuniones disjuntos numerables (ver Proposición 1.3.2). Supongamos pues que que $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\pi)$ son disjuntos dos a dos, y sea $E \in \mathcal{A}$ arbitrario. Entonces para cada $m \in \mathbb{N}$ sabemos que $\bigcup_{k=0}^{m} A_k \in \mathcal{M}(\pi)$ y por tanto utilizando la Observación 2,

$$\pi(E)=\pi\left(E\cap\left(\bigcup_{k=0}^{m}A_k\right)\right)+\pi\left(E\backslash\left(\bigcup_{k=0}^{m}A_k\right)\right)\geqslant\sum_{k=0}^{m}\pi(E\cap A_k)+\pi\left(E\backslash\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)\right).$$

Como $m$ es arbitrario, y utilizando otra vez la Observación 2,

$$\pi(E)\geqslant\sum_{k=0}^{\infty}\pi(E\cap A_k)+\pi\left(E\backslash\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)\right)=\pi\left(E\cap\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}A_k\right)\right)+\pi\left(E\backslash\left(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k\right)\right).$$

Se sigue de la misma Observación 2 que $(X, \mathcal{M}(\pi), \pi)$ es un espacio de Medida. Finalizamos demostrando que $\mu$ es completa y que contiene a los nulos de $\mathcal{A}$: Fijémonos que, utilizando que $\mathcal{A}$ es hereditario y $\pi$ es monótona, la completitud de $\mu$ se sigue de demostrar que los nulos de $\mathcal{A}$ son medibles. Sea $A \in \mathcal{A}$ tal que $\pi(A) = 0$, y sea $E \in \mathcal{A}$ arbitrario. Entonces $\pi(E \cap A) = 0$ y por tanto, $\pi(E\cap A) + \pi(E\backslash A) = \pi(E\backslash A) \leqslant \pi(E)$. □

Hay una manera natural y sencilla de definir medidas exteriores y por tanto medidas:

**Definición 1.2.20** (Medidas exteriores por recubrimientos)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto $X$ con el único requerimiento de que $\varnothing \in \mathcal{F}$. Dada una función $\lambda : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ tal que $\lambda(\varnothing) = 0$ se define $\lambda_{\mathrm{e}} : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ para $E \subseteq X$ por*

$$\lambda_{\mathrm{e}}(E) := \inf\{\sum_{n\in\mathbb{N}}\lambda(B_n)\ :\ \{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{F},\ E\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n\}.$$

Recordemos que el ínfimo de una familia vacía es $\infty$, así que los conjuntos que no son recubiertos por reuniones numerables de elementos de $\mathcal{F}$ tienen medida infinita.

**Proposición 1.2.21.** *Sea $\lambda : \mathcal{F} \to [0,\infty]$ como en la definición anterior. Entonces $\lambda_e$ es una medida exterior.*

Demostración. Claramente $\lambda_e$ mide el vacío como 0, es monótona y positiva. Veamos que es $\sigma$-subaditiva: Supongamos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de subconjuntos de $X$. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^*(A_n) = \infty$, entonces el resultado es trivial. Supongamos entonces que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\mu^*(A_n) < \infty$ y dado $\varepsilon > 0$ escojamos un recubrimiento $(B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ de $A_n$ tal que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(B_k^{(n)}) \leqslant \lambda_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Se sigue entonces que $\{B_{k,n}\}_{k,n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ es un recubrimiento numerable de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y se cumple que

$$\lambda_e(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda(B_k^{(n)}) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\lambda_e(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_e(A_n) + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$, obtenemos la desigualdad buscada. □

Nótese que en general $\lambda_e(B) \leqslant \lambda(B)$ para todo $B \in \mathcal{F}$. Exponemos ahora una situación natural en la que $\lambda_e$ extiende a $\lambda$, y que se utilizará para definir la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ como extensión natural de los volúmenes de cubos y también para definir la medida producto en general. Además, en el caso de que $\lambda_e$ extienda a $\lambda$ se tiene el siguiente criterio más simplificado de medibilidad.

**Proposición 1.2.22** (Medibilidad cuando $\lambda_e$ extiende a $\lambda$)**.** *Supongamos que $\lambda_e$ extiende a $\lambda$. Entonces $A \subseteq X$ es $\lambda_e$-medible si y solamente si*

$$\lambda_e(B) = \lambda_e(B \cap A) + \lambda_e(B \backslash A) \text{ para todo } B \in \mathcal{F}. \tag{6}$$

Demostración. Sea $E \subseteq X$ un subconjunto arbitrario. Si $\lambda_e(E) = \infty$, entonces la igualdad en (2) es trivialmente cierta. Por tanto, supongamos que $\lambda_e(E) < \infty$ y dado $\varepsilon > 0$ sea $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ un recubrimiento de $E$ por elementos de $\mathcal{F}$ tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(B_n) \leqslant \lambda_e(E) + \varepsilon$. Entonces, de la subadividad de $\lambda_e$ y de (6),

$$\begin{aligned}\lambda_e(E) \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(B_n) - \varepsilon = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_e(B_n) - \varepsilon \geqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_e(B_n \cap A) + \lambda_n(B_n \backslash A)) - \varepsilon \geqslant \\ \geqslant \lambda_e(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \cap A)) + \lambda_e(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \backslash A)) - \varepsilon = \lambda_e((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \cap A) + \lambda_e((\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n) \backslash A) - \varepsilon \geqslant \\ \geqslant \lambda_e(E \cap A) + \lambda_e(E \backslash A) - \varepsilon,\end{aligned}$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene la desigualdad buscada. □

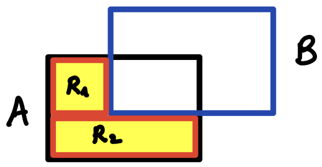
**1.2.3. Espacios de pre-medida. El teorema de extensión de Hahn-Kolmogorov.** En general, no es cierto que la medida exterior $\lambda_e$ extienda a $\lambda$. Vamos a ver una situación natural en la que esto ocurre.

**Definición 1.2.23** (Semi-anillo)**.** *Una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un conjunto fijado $X$ es un* semi-anillo *sobre $X$ cuando*

*I) $\varnothing \in \mathcal{F}$.*
*II) $\mathcal{F}$ es cerrado bajo intersecciones.*
*III) Para todos $A, B \in \mathcal{F}$ existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ finita y disjunta dos a dos tal que*

$$A \backslash B = \bigcup_{C \in \mathcal{F}} C.$$

**Ejemplo 1.2.24** (Ejemplos de semianillos)**.** *En $\mathbb{R}^n$ la familia de rectángulos $I_1 \times I_n$ donde $I_1, \ldots, I_n$ son intervalos (abiertos, cerrados, semiabiertos, o semi cerrados) es un semianillo. En general, dada dos álgebras de Boole $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en $X$ e $Y$ respectivamente, la colección de $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-rectángulos $A \times B$ con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ es un semianillo.*




**Proposición 1.2.25** (semi-anillos, anillos, álgebras)**.** *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos de un conjunto fijado $X$.*

*a) Si $\mathcal{F}$ es un semi-anillo, entonces la familia $\mathcal{R}$ de reuniones finitas y disjuntas de elementos de $\mathcal{F}$ es un* anillo *de conjuntos; es decir,*
  *I) $\varnothing \in \mathcal{R}$.*
  *II) $\mathcal{R}$ es cerrado bajo intersecciones.*
  *III) Para todos $A, B \in \mathcal{R}$ se tiene que $A \backslash B \in \mathcal{R}$.*

*b) Si $\mathcal{F}$ es un anillo sobre $X$, entonces $\mathcal{F}$ es un álgebra de conjuntos de $X$ si y solamente si $X \in \mathcal{F}$.*

*c) Si $\mathcal{F}$ es un semi-anillo, entonces toda reunión numerable de elementos de $\mathcal{F}$ es igual a una reunión numerable disjunta de elementos de $\mathcal{F}$.*

Demostración. *a)*: Si $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_n$ son subfamilias finitas de $\mathcal{F}$ cada una de ellas de elementos disjuntos dos a dos, entonces

$$\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_1} C\right) \cap \cdots \cap \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}_n} C\right) = \bigcup_{(C_1, \ldots, C_n) \in \prod_{j=1}^n \mathcal{C}_j} (C_1 \cap \cdots \cap C_n) \in \mathcal{R}$$

ya que la familia $\{C_1 \cap \cdots \cap C_n \ : \ (C_1, \ldots, C_n) \in \prod_{j=1}^n C_j\}$ es una subfamilia finita de $\mathcal{F}$ de elementos disjuntos dos a dos. Demostremos ahora que $\mathcal{R}$ es cerrado bajo diferencias. Sean $A, B \in \mathcal{R}$, $A = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C$, $B = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D$ con $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ familias finitas y cada una de ellas de elementos disjuntos dos a dos. Entonces

$$A \backslash B = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap (X \backslash \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D) = \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C\right) \cap (\bigcap_{D \in \mathcal{D}} (X \backslash D) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcap_{D \in \mathcal{D}} C \backslash D.$$

Para cada $C \in \mathcal{C}$ y cada $D \in \mathcal{D}$, sea $\mathcal{F}_{C,D} \subseteq \mathcal{F}$ finita y de elementos disjuntos dos a dos tal que $C \backslash D = \bigcup_{E \in \mathcal{F}_{C,D}} E$. Entonces de lo anterior se tiene

$$A \backslash B = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcap_{D \in \mathcal{D}} C \backslash D = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \bigcup_{E \in \mathcal{F}_{C,D}} E = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{(E_D)_{D \in \mathcal{D}} \in \prod_{D \in \mathcal{D}} \mathcal{F}_{C,D}} \bigcap_{D \in \mathcal{D}} E_D.$$

Como $\mathcal{F}$ es un semi-anillo, se tiene que $\bigcap_{D \in \mathcal{D}} E_D \in \mathcal{F}$ para todo $(E_D)_{D \in \mathcal{D}} \in \prod_{D \in \mathcal{D}} \mathcal{F}_{C,D}$. Además se ve fácilmente que la doble reunión anterior es disjunta, lo que demuestra que $A \backslash B \in \mathcal{R}$. *b)* es trivial. *c)* se sigue de la Proposición 1.1.3 aplicada al anillo $\mathcal{R}$. □

**Definición 1.2.26** (Espacio de pre-medida)**.** *Un espacio de* pre-medida *es un triple* $(X, \mathcal{F}, \mu)$ *donde:*

*a)* $\mathcal{F}$ *es un un semi-anillo sobre* $X$*.*

*b)* $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ *es una* pre-medida*, es decir, cumple que* $\mu(\varnothing) = 0$ *y es* $\sigma$*-aditiva, i.e. si* $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ *son disjuntos dos a dos y cumplen que* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \mathcal{F}$*, entonces* $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$*.*

**Nota 1.2.27.** *Toda pre-medida es monótona: Dados* $A \subseteq B$ *en* $\mathcal{F}$*, entonces* $\{A, B \backslash A\} \subseteq \mathcal{F}$ *son disjuntos y* $\mu(B) = \mu(B \backslash A) + \mu(A) \geqslant \mu(A)$*.*

**Proposición 1.2.28** (Extensión de Hahn-Kolmogorov)**.** *Supongamos que* $\mu$ *es una pre-medida. Entonces la medida exterior* $\mu_{\mathrm{e}}$ *por recubrimientos asociada a* $\mu$ *extiende a* $\mu$ *y además se cumple que todo* $A \in \mathcal{F}$ *es* $\mu_{\mathrm{e}}$*-medible. Por tanto toda pre-medida se extiende a una medida completa.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{F}$. Obviamente, $\mu_{\mathrm{e}}(B) \leqslant \mu(B)$. Sea $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ un recubrimiento de $B$. Como $\mathcal{F}$ es una álgebra de conjuntos, podemos encontrar $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos tales que cada $C_n \subseteq B_n$ y $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ (ver la Proposición 1.2.25 c)). Por tanto, $\{C_n \cap B\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ son disjuntos dos a dos, y como $\mu$ es una pre-medida, se cumple que

$$\mu(B) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n \cap B)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n \cap B) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(C_n) \leqslant \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Veamos que todo $A \in \mathcal{F}$ es $\mu_{\mathrm{e}}$-medible: es suficiente verificar el criterio de Carathéodory para $B \in \mathcal{F}$ (Proposición 1.2.22). Sea $C_1, \ldots C_n \in \mathcal{F}$ disjuntos dos a dos tales que $B \backslash A = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$. Entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{e}}(B \cap A) + \mu_{\mathrm{e}}(B \backslash A) =& \mu(B \cap A) + \mu_{\mathrm{e}}(\bigcup_{j=1}^{n} C_j) \leqslant \mu(B \cap A) + \sum_{j=1}^{n} \mu_{\mathrm{e}}(C_j) = \\ =& \mu(B \cap A) + \sum_{j=1}^{n} \mu(C_j) = \mu((B \cap A) \cup \bigcup_{j=1}^{n} C_j) = \mu(B) = \mu_{\mathrm{e}}(B). \end{aligned}$$

□

**1.2.4. Criterio de Medibilidad abstracto para $\mu_{\mathrm{e}}$.** Presentamos un criterio de medibilidad en general más práctico. Aplicando esto a la medida exterior $\mu_{\mathrm{e}}$ proveniente de una pre-medida $\mu$ tenemos el siguiente criterio de medibilidad, que se debería de comparar con el criterio correspondiente en el Teorema 2.1.14. Así que en esta parte $\mu$ es una pre-medida definida en $\mathcal{F}$.

**Definición 1.2.29** (Pre-medida $\sigma$-finita)**.** *Diremos que una pre-medida en $\mathcal{F}$ es $\sigma$-finita cuando existe un recubrimiento numerable de $X$ por elementos de $\mathcal{F}$ de pre-medida finita.*

Nótese que en particular, cuando se define la medida exterior asociada a pre-medidas $\sigma$-finitas se tiene que todo subconjunto de $X$ está recubierto por una reunión numerable de elementos de $\mathcal{S}$.

**Definición 1.2.30** ($\mathcal{X}_\sigma$)**.** *Dada una familia $\mathcal{X}$ de subconjuntos de $X$, se define*

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}_\sigma &= \{\bigcup_{A\in\mathcal{C}} A \,:\, \mathcal{C}\subseteq\mathcal{X} \text{ numerable}\}\\
\mathcal{X}_\delta &= \{\bigcap_{A\in\mathcal{C}} A \,:\, \mathcal{C}\subseteq\mathcal{X} \text{ numerable}\}\\
\mathcal{X}^c &= \{X\backslash A \,:\, A\in\mathcal{X}\}.
\end{aligned}$$

La terminología $\sigma-\delta$ viene de la semejanza $\sigma\sim$ suma $\sim$ unión y similarmente $\delta\sim$ producto $\sim$ intersección. Para simplificar la notación se suele escribir $\mathcal{X}_{\sigma\delta}$, $\mathcal{X}_{\delta\sigma}$ para denotar $(\mathcal{X}_\sigma)_\delta$ y $(\mathcal{X}_\delta)_\sigma$, respectivamente.

**Proposición 1.2.31** (Criterio de $\mu_{\mathrm{e}}$-medibilidad)**.** *Supongamos que $A\subseteq X$ tiene medida exterior finita $\mu_{\mathrm{e}}(A)<\infty$. Son equivalentes:*

*a) $A$ es $\mu_{\mathrm{e}}$-medible.*
*b) Para todo $\varepsilon>0$ existe $B\in\mathcal{F}_\sigma$ tal que $A\subseteq B$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(B\backslash A)\leqslant\varepsilon$.*
*c) Para todo $\varepsilon>0$ existe $B\in(\mathcal{F}^c)_\delta$ tal que $B\subseteq X\backslash A$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}((X\backslash A)\backslash B)\leqslant\varepsilon$.*
*d) Existe $B\in\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ tal que $A\subseteq B$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(B\backslash A)=0$.*
*e) Existe $B\in(\mathcal{F}^c)_{\delta\sigma}$ tal que $B\subseteq X\backslash A$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}((X\backslash A)\backslash B)=0$.*

*En particular, si $\mu$ es $\sigma$-finita, entonces dado $A\subseteq X$ son equivalentes*

*f) $A$ es $\mu_{\mathrm{e}}$-medible.*
*g) Para todo $\varepsilon>0$ existe $B\in\mathcal{F}_\sigma$ tal que $A\subseteq B$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(B\backslash A)\leqslant\varepsilon$.*
*h) Para todo $\varepsilon>0$ existe $B\in(\mathcal{F}^c)_\delta$ tal que $B\subseteq A$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(A\backslash B)\leqslant\varepsilon$.*
*i) Existe $B\in\mathcal{F}_{\sigma\delta}$ tal que $A\subseteq B$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(B\backslash A)=0$.*
*j) Existe $C\in(\mathcal{F}^c)_{\delta\sigma}$ tal que $C\subseteq A$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(A\backslash C)=0$.*

Demostración. *a)* implica *b)*: Sea $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{F}$ tal que $A\subseteq B:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}B_n$ y tal que $\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)\leqslant\mu_{\mathrm{e}}(A)+\varepsilon$. Se tiene entonces que $B\in\mathcal{F}_\sigma$ y $\mu_{\mathrm{e}}(B\backslash A)=\mu_{\mathrm{e}}(B)-\mu_{\mathrm{e}}(A)$ ya que $A$ es medible y $A\subseteq B$. Por tanto,

$$\mu_{\mathrm{e}}(B\backslash A)=\mu_{\mathrm{e}}(B)-\mu_{\mathrm{e}}(A)\leqslant\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu(B_n)-\mu_{\mathrm{e}}(A)\leqslant\varepsilon.$$

*b)* implica *c)*: Sea $C\in\mathcal{F}_\sigma$ tal que $A\subseteq C$ y $\mu_{\mathrm{e}}(C\backslash A)\leqslant\varepsilon$. Entonces $B:=X\backslash C$ satisface las condiciones deseadas. De la misma manera se demuestra que *c)* implica *b)*. *b)* implica *d)*: Para cada $n\in\mathbb{N}$, sea $B_n\in\mathcal{F}_\sigma$ tal que $A\subseteq B_n$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(B_n\backslash A)\leqslant 1/(n+1)$. Entonces $B:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}B_n\in(\mathcal{F}_\sigma)_\delta$ y $\mu_{\mathrm{e}}(B\backslash A)=0$. La equivalencia entre *d)* y *e)* se demuestra como la equivalencia entre *b)* y *c)*. *e)* implica *a)*: sea $C\in(\mathcal{F}^c)_{\delta\sigma}$ tal que $C\subseteq A$ y tal que $\mu_{\mathrm{e}}(A\backslash C)=0$. El Teorema de Extensión de Hahn-Kolmogorov (Proposición 1.2.28) nos dice que todo elemento de $\mathcal{F}$ es $\mu_{\mathrm{e}}$-medible, i.e. $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{M}(\mu_{\mathrm{e}})$. El Teorema de extensión de

Carathéodory (Teorema 9.1.3) nos dice que $\mathcal{M}(\mu_e)$ es una $\sigma$-álgebra que contiene a los $\mu_e$-nulos; por tanto, $B, (X\backslash A)\backslash B \in \mathcal{M}(\mu_e)$, y como $X\backslash A = ((X\backslash A)\backslash B) \cup B$, se tiene que $X\backslash A \in \mathcal{M}(\mu_e)$ y también $A \in \mathcal{M}(\mu_e)$.

Las equivalencias entre *f) − j)* son consecuencia directa de las equivalencias entre *a)–b)*.

□

## 1.3. El Teorema de Dynkin

Presentamos el teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin, que nos dará un criterio para decidir cuando dos medidas sobre una misma $\sigma$-álgebra son la misma o no (Teorema 1.3.6).

**Definición 1.3.1** ($\lambda$-familias)**.** *Una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$ es una $\lambda$-familia (de $X$) si:*

*a)* $X \in \mathcal{A}$.

*b)* *$\mathcal{A}$ es cerrado bajo complementos, i.e., $X \backslash A \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

*c)* *$\mathcal{A}$ es cerrado bajo reuniones numerables disjuntas, i.e. si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ es numerable y* disjuntos dos a dos*, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Claramente toda $\sigma$-álgebra es una $\lambda$-familia. El recíproco no es cierto, pero tenemos lo siguiente:

**Proposición 1.3.2** ($\lambda$-familias que son $\sigma$-álgebras)**.** *Sea $\mathcal{A}$ una $\lambda$-familia. Son equivalentes*

*a) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo intersecciones.*

*b) $\mathcal{A}$ es cerrada bajo diferencias.*

*c) $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra.*

Demostración. *a)* implica *b)* Supongamos que $\mathcal{A}$ es una $\lambda$-familia cerrada bajo intersecciones. Veamos primero que $\mathcal{A}$ es cerrado bajo diferencias: Dado $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$X \backslash (A \backslash B) = X \backslash (A \backslash (A \cap B)) = X \backslash (A \cap (X \backslash (A \cap B))) = (X \backslash A) \cup (A \cap B) \in \mathcal{A}$$

ya que la reunión última es disjunta. Por tanto $A \backslash B = X \backslash (X \backslash (A \backslash B)) \in \mathcal{A}$.

*b)* implica *c)*: veamos ahora que si $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$: Como $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones disjuntas y diferencias, podemos utilizar la Proposición 1.1.3 y encontrar $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjuntos dos a dos y tales que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$; como esta última reunión es disjunta, se tiene que pertenece a $\mathcal{A}$.

*c)* implica *a)* trivialmente. □

Al igual que ocurre con las $\sigma$-álgebras, tenemos lo siguiente.

**Proposición 1.3.3** (Uniones de familias)**.**

*a) La intersección arbitraria de $\lambda$-familias es una $\lambda$-familia.*

*b) Supongamos que $X$ e $Y$ son conjuntos disjuntos, y supongamos que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\lambda$-familias de $X$ e $Y$ respectivamente, entonces $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ es una $\lambda$-familia de $X \cup Y$.*

Demostración. *a)* es trivial. *b)*: Supongamos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son $\lambda$-familias de $X$ e $Y$ respectivamente. Entonces $X \cup Y \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. Supongamos que $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Entonces

$$(X \cup Y) \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cup (Y \backslash B) \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}.$$

Supongamos que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ son disjuntos dos a dos. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $C_n = A_n \cup B_n$ con $A_n \in \mathcal{A}$ y $B_n \in \mathcal{B}$. Entonces $(A_n)_n$ y $(B_n)_n$ son familias de conjuntos disjuntas dos a dos y por tanto $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ y $\bigcup_n B_n \in \mathcal{B}$. Se sigue de aquí que $\bigcup_n C_n = \bigcup_n A_n \cup \bigcup_n B_n \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$. □

Como $\mathcal{P}(X)$ es una $\sigma$-álgebra,y por tanto una $\lambda$-familia, el concepto siguiente está bien definido.

**Definición 1.3.4** ($\lambda$-familia generada)**.** *Dada una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $X$, sea $\Lambda_X(\mathcal{A})$ la mínima $\lambda$-familia que contiene a $\mathcal{A}$.*

Cuando no haya posible confusión escribiremos $\Lambda(\mathcal{A})$ para denotar $\Lambda_X(\mathcal{A})$. Obviamente $\Lambda(\mathcal{A}) \subseteq \Sigma(\mathcal{A})$. Para la otra inclusión, tenemos el siguiente resultado.

TEOREMA 1.3.5 (Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin). *Supongamos que $\mathcal{A}$ es una familia de subconjuntos de $X$ cerrada bajo intersección. Entonces*

$$\Sigma(\mathcal{A}) = \Lambda(\mathcal{A}).$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\mathcal{A} \subseteq \Lambda(\mathcal{A})$, por minimalidad de $\Sigma(\mathcal{A})$, es suficiente ver que $\Lambda(\mathcal{A})$ es una $\sigma$-álgebra, que, por la Proposición 1.3.2 es equivalente a ver que $\Lambda(\mathcal{A})$ es cerrado bajo intersecciones. Para agilizar la notación, pongamos $\mathcal{G} := \Lambda(\mathcal{A})$. Dado $A \in \mathcal{G}$, sea

$$\mathcal{G}_A := \{B \subseteq X \,:\, B \cap A \in \mathcal{G}\}.$$

Obsérvese que demostrar que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo intersección es lo mismo que demostrar que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_A$ para todo $C \in \mathcal{G}$.

OBS. 3. $\mathcal{G}_A$ es una $\lambda$-familia, es decir, $\mathcal{G}_A$ contiene a $X$, es cerrado bajo complementos y reuniones numerables disjuntas.

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $B \in \mathcal{G}_A$. Tenemos que ver que $X\backslash B \in \mathcal{G}_A$, es decir, que $(X\backslash B)\cap A \in \mathcal{G}$. Es suficiente (y más sencillo) ver que el complemento de $(X\backslash B) \cap A$ pertenece a $\mathcal{G}$:

$$X\backslash((X\backslash B) \cap A) = B \cup (X\backslash A) = (B \cap A) \cup (X\backslash A) \in \mathcal{G},$$

ya que por hipótesis $B \cap A, X\backslash A \in \mathcal{G}$, y estos dos conjuntos son disjuntos.

Demostraremos ahora que $\mathcal{G}_A$ es cerrado bajo reuniones numerables disjuntas: Fijemos una de esas sucesiones $(B_i)_{i\in I}$ en $\mathcal{G}_A$. Entonces

$$(\bigcup_{i\in I} B_i) \cap A = \bigcup_{i\in I}(B_i \cap A) \in \mathcal{G}$$

ya que por hipótesis cada intersección $B_i \cap A$ pertenece a $\mathcal{G}$ y $(B_i \cap A)_{i\in I}$ son disjuntas dos a dos. □

Por hipótesis tenemos que si $A \in \mathcal{A}$, entonces $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}_A$, y por el *Hecho* 1 y la minimalidad de $\mathcal{A}$ se sigue que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_A$, si $A \in \mathcal{A}$. Es decir, si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{G}$, entonces $A \cap B \in \mathcal{G}$. Por tanto, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{G}_B$ si $B \in \mathcal{G}$. Otra vez del HECHO 3 y la minimalidad de $\mathcal{G}$ se sigue que $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}_B$ si $B \in \mathcal{G}$, que es lo que queríamos demostrar.

Demostremos ahora que $\mathcal{G}$ es cerrado bajo reuniones numerables. Fijemos una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{G}$. Sea $B_0 := A_0$; $B_{n+1} := A_{n+1}\backslash(B_0 \cup \cdots \cup B_n)$. Es fácil ver que $\bigcup_{k=0}^n A_k = \bigcup_{k=0}^n B_k$ para todo $n$ y por tanto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$. me

OBS. 4. $B_k \in \mathcal{G}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

DEMOSTRACIÓN. Por inducción sobre $k$. $B_0 = A_0 \in \mathcal{G}$; supongamos que $\{B_i\}_{i\leqslant k} \subseteq \mathcal{G}$ y veamos que $B_{k+1} \in \mathcal{G}$: Como $(B_i)_{i\leqslant k}$ son disjuntos dos a dos, $C := B_0 \cup \cdots \cup B_k \in \mathcal{G}$, y $X\backslash C \in \mathcal{G}$. Entonces

$$B_{k+1} = A_{k+1}\backslash C = A_{k+1} \cap (X\backslash C) \in \mathcal{G},$$

ya que hemos visto que $\mathcal{G} \cap \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$. □

Nótese que $(B_k)_k$ son disjuntos dos a dos; se sigue de esto y del Hecho 2 que $\bigcup_k A_k = \bigcup_k B_k \in \mathcal{G}$. □

Veamos una consecuencia muy útil.

Teorema 1.3.6 (Dynkin). *Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $X$ cerrada bajo intersección y tal que existe una subfamilia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ $\subseteq$-creciente que recubre $X$. Sean $\mu, \nu$ medidas sobre $\Sigma(\mathcal{A})$ para las que los elementos e $\mathcal{A}$ tienen medida finita (y por tanto ambas son $\sigma$-finitas) Entonces $\mu = \nu$ si y solamente si $\mu(A) = \nu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Demostración. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $X_n \subseteq X_{n+1}$ y tal que $\bigcup_n X_n = X$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, pongamos $\mathcal{A}_n := \mathcal{A} \cap X_n := \{B \cap X_n \ : \ B \in \mathcal{A}\}$. Claramente cada $\mathcal{A}_n$ es cerrado bajo intersecciones. Fijado $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mathcal{B}_n = \{A \in \Sigma_{X_n}(\mathcal{A}_n) \ : \ \mu(A) = \nu(A)\},$$

Obs. 5. $\mathcal{B}_n = \Sigma_{X_n}(\mathcal{A}_n)$.

Demostración. Como $\mathcal{A}_n$ es cerrado bajo intersecciones, sabemos a partir del Teorema $\pi - \lambda$ de Dynkin (Teorema 1.3.5) que $\Sigma_{X_n}(\mathcal{A}_n) = \Lambda_{X_n}(\mathcal{A}_n)$; así que, como por hipótesis $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}_n$, es suficiente demostrar que $\mathcal{B}_n$ es una $\lambda$-familia de subconjuntos de $X_n$. Primeramente, $X_n \in \mathcal{B}_n$, ya que $X_n \in \mathcal{A}$, y $\mu$ y $\nu$ coinciden en $\mathcal{A}$. Supongamos que $B \in \mathcal{B}_n$. Entonces $B \subseteq X_n$ y por tanto

$$\mu(X_n \backslash B) = \mu(X_n) - \mu(B) = \nu(x_n) - \nu(B) = \nu(X_n \backslash B).$$

Supongamos ahora que $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_n$ son disjuntos dos a dos. Entonces

$$\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(C_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \nu(C_k) = \nu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k\right),$$

y por tanto $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k \in \mathcal{B}_n$. □

Sea ahora $B \in \Sigma_X(\mathcal{A})$ y veamos que $\mu(B) = \nu(B)$. Fijado $n$, se sigue de la Proposición 1.1.8 que $(\Sigma(\mathcal{A}))[X_n] = \Sigma_{X_n}(\mathcal{A}_n)$, y por tanto, $B \cap X_n \in \Sigma_{X_n}(\mathcal{A}_n)$, así que $\mu(B \cap X_n) = \nu(B \cap X_n)$. Como $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(B \cap X_n)$ es una unión creciente, se sigue que

$$\mu(B) = \sup_n \mu(B \cap X_n) = \sup_n \nu(B \cap X_n) = \nu(B).$$

□

**Corolario 1.3.7** (Los intervalos cerrados determinan medidas de Borel)**.** *Dos medidas de Borel de $\mathbb{R}$ que coincidan en los intervalos cerrados, entonces son iguales.*

Demostración. Los intevalos cerrados de $\mathbb{R}$ generan la $\sigma$-álgebra de los borelianos. Además, $\mathbb{R}$ es reunión de intervalos cerrados acotados, que tienen medida finita para las medidas de Borel. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de Dynkin para obtener el resultado deseado. □

Capítulo 2

# La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

## 2.1. Existencia de la medida de Lebesgue

### 2.1.1. Rectángulos, cubos.

**Definición 2.1.1** (Rectángulos, cubos). *Dado un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ acotado, sea $\ell(I) := \sup I - \inf I$ la* longitud *de $I$. Un* rectángulo *de $\mathbb{R}^n$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ de la forma*

$$R = I_1 \times \cdots \times I_n$$

*donde cada $I_j$, llamado* arista *de $R$, es un intervalo abierto, cerrado o semiabierto. Un* cubo *de $\mathbb{R}^n$ es un rectángulo cuyas aristas tienen longitud constante. Un rectángulo se dice* no degenerado *cuando la longitud de todas sus aristas es estrictamente positiva. Sea $\mathscr{R}_n$ la clase de los rectángulos de $\mathbb{R}^n$.*

**Definición 2.1.2** (Volumen). *El volumen $\mathrm{Vol}_n(R)$ de un* rectángulo *$R = I_1 \times \cdots \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$ se define como el producto de las longitudes de sus aristas,*

$$\mathrm{Vol}_n(R) := \prod_{j=1}^{n} \ell(I_j).$$

Vamos a ver que el triple $(\mathbb{R}^n, \mathscr{R}_n, \mathrm{Vol}_n)$ es un espacio de pre-medida, para luego definir la medida de Lebesgue como extensión de $\mathrm{Vol}_n$.

**Proposición 2.1.3** ($\mathscr{R}_n$ es un semi-anillo). *$\mathscr{R}_n$ es un semi-anillo, es decir $\varnothing$ es un rectángulo, la intersección de rectángulos es un rectángulo y la diferencia de dos rectángulos es reunión finita disjunta de rectángulos. Además, la traslación $x + R := \{x + y : y \in R\}$ de un rectángulo es también un rectángulo.*

Demostración. Evidentemente $\varnothing \in \mathscr{R}_n$; por otro lado, si $R = \prod_{k=1}^n I_k$ y $S = \prod_{k=1}^n J_k$ son rectángulos, entonces $R \cap S = \prod_{k=1}^n (I_k \cap J_k)$ es un rectángulo ya que cada $I_k \cap J_k$ es un intervalo acotado.

Obs. 6. La diferencia $R \backslash S$ es reunión disjunta de a lo sumo $2n$ rectángulos no vacíos.

Demostración. Lo hacemos por inducción sobre la dimensión $n$. Si $n = 1$, entonces $R \backslash S$ es un intervalo excepto cuando $\inf R \leqslant \inf S < \sup S \leqslant R$ que entonces es igual a la reunión de intervalos con extremos $\inf R \leqslant \inf S$ y $\sup S \leqslant \sup R$. Para $n > 1$ utilizaremos la identificación canónica de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, (x_2, \ldots, x_n))$. Entonces $R = I \times R_0$ y $S = J \times S_0$ donde $R_0, S_0$ son rectángulos de $\mathbb{R}^{n-1}$ e $I, J$ son intervalos (i.e. rectángulos) de $\mathbb{R}$, y por tanto,

$$R \backslash S = ((I \backslash J) \times R_0) \cup ((I \cap J) \times (R_0 \backslash S_0)).$$

Por hipótesis de inducción $R_0 \backslash S_0 = T_1 \cup \cdots T_{2(n-1)} \cup$, reunión disjunta de rectángulos de $\mathbb{R}^{n-1}$ (algunos de ellos puede ser el vacío) y por tanto, como $I \cap J$ es un intervalo acotado, $(I \cap J) \times (R_0 \backslash S_0) = (I \cap J) \times T_1 \cup \cdots \cup (I \cap J) \times T_{2(n-1)}$, reunión disjunta de rectángulos de $\mathbb{R}^{n-1}$. Por otro lado, $I \backslash J = K \cup L$ reunión disjunta de intervalos y entonces $(I \backslash J) \times R_0 = (K \times R_0) \cup (L \times R_0)$ reunión disjunta. $\square$

Finalmente, dado $x = (x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}^n$ y un rectángulo $R = \prod_{k=1}^n I_k$, se tiene que $x + R = \prod_{k=1}^n (x_k + I_k)$ que también es un rectángulo ya que la traslación de un intervalo es un intervalo. □ □

**Lema 2.1.4.** *Sean $R$, $S_k$, $k \in \mathbb{N}$, rectángulos de $\mathbb{R}^n$. Se cumple*

*a) Si $R \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, entonces se cumple que*

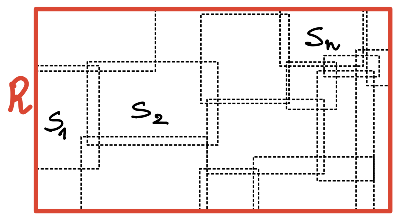
$$\mathrm{Vol}_n(R) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(S_k). \tag{7}$$

*b) Si $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos y $R = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$, entonces*

$$\mathrm{Vol}_n(R) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(S_k). \tag{8}$$

Demostración. *a)*: Supongamos primeramente que tenemos un número finito de rectángulos no vacíos $S_0, \cdots, S_m$.

Caso 1. $R, S_0, \ldots, S_m$ son todos rectángulos cerrados y se cumple que $R = \bigcup_{j=1}^m S_j$.




Pongamos

$$\begin{aligned} R =& [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n], \\ S_j =& [c_1^{(j)}, d_1^{(j)}] \times \cdots \times [c_n^{(j)}, d_n^{(j)}] \text{ para cada } j = 0, \ldots, m. \end{aligned}$$

Ahora, para cada dimension $i = 1, \ldots n$ sea

$$\begin{aligned} X_i =& \{a_i, b_i\} \cup \{c_i^{(j)} : j = 1, \ldots m\} \cup \{d_i^{(j)} : j = 0, \ldots m\} \\ Y_i =& : X_i \backslash \{\max X_i\} = X_i \backslash \{b_i\}. \end{aligned}$$

Dado $i = 1, \ldots, n$ y $x \in Y_i$ sea $s_i(x)$ el sucesor inmediato de $x$ en $X_i$. Para $(x_1, \ldots, x_n) \in Y_1 \times \cdots \times Y_n$, sea

$$T_{(x_1,\ldots,x_n)} := [x_1, s_1(x_1)] \times \cdots \times [x_n, s_n(x_n)].$$

Obsérvese que si $T_{(x_1,\ldots,x_n)} \cap S_j \neq \varnothing$, entonces $T_{(x_1,\ldots,x_n)} \subseteq S_j \neq \varnothing$. Esto se debe a que si $[c_i^{(j)}, d_i^{(j)}] \cap [x, s_i(x)] \neq \varnothing$ para cierto $x \in Y_i$, entonces, como $s_i(x)$ es el sucesor inmediato de $x$ en $X_i$ y $c_i^{(j)}, d_i^{(j)} \in X_i$ se tiene que $c_i^{(j)} \leqslant x \leqslant s_i(x) \leqslant d_i^{(j)}$. Por tanto,

$$S_j = \bigcup_{(x_1,\ldots,x_n)\in S_j \cap (Y_1\times\cdots\times Y_n)} T_{(x_1,\ldots,x_n)},$$

para todo $j = 1, \ldots, m$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_n(R) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) = \prod_{i=1}^n \sum_{x\in Y_i} (s_i(x) - x) = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in Y_1\times\cdots\times Y_n} \prod_{i=1}^n (s_i(x_i) - x_i) \leqslant_{(*)} \\ \leqslant \sum_{j=0}^m \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in S_j\cap(Y_1\times\cdots\times Y_n)} \prod_{i=1}^n (s_i(x_i) - x_i) = \sum_{j=1}^m \mathrm{Vol}_n(S_j). \end{aligned}$$

Nótese que si asumimos que $\{S_j\}_{j=0}^m$ son disjuntos dos, entonces en (*) tenemos una igualdad, que demuestra (8) para un número finito de rectángulos cerrados no vacíos.

CASO 2. $R, S_1, \dots, S_m$ son todos rectángulos cerrados (pero no necesariamente se cumple que $R = \bigcup_{j=1}^m S_j$) Como la intersección de rectángulos cerrados es un rectángulo cerrado y $R = (S_1 \cap R) \cup \cdots \cup (S_m \cap R)$, se sigue del CASO 1 que

$$\operatorname{Vol}_n R \leqslant \sum_{j=1}^m \operatorname{Vol}_n(S_j \cap R) \leqslant \sum_{j=1}^m \operatorname{Vol}_n(R)$$

ya que claramente, $\operatorname{Vol}_n(T) \leqslant \operatorname{Vol}_n(U)$, si $T \subseteq U$ son rectángulos cerrados.

CASO 3. Caso arbitrario. Se tiene que

$$\operatorname{Vol}_n(R) = \operatorname{Vol}_n(\overline{R}) \leqslant \sum_{j=1}^m \operatorname{Vol}_n(\overline{S_j}) = \sum_{j=1}^m \operatorname{Vol}_n(S_j).$$

Supongamos ahora que la familia $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es arbitraria de rectángulos y recubre a $R$. Dado un rectángulo arbitrario $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ y dado $\alpha \geqslant 0$ sea $\alpha * P = \alpha * (I_1) \times \cdots \times \alpha * (I_n)$, donde $\alpha * (I_k) = ]\alpha \cdot \inf I_k, \alpha \cdot \sup I_k[$. Nótese que $\alpha * P$ es siempre un rectángulo abierto cuando $R$ es no degenerado y se cumple

$$\operatorname{Vol}_n(\alpha * P) = \prod_{k=1}^n \ell(]\alpha \cdot \inf I_k, \alpha \cdot \sup I_k[) = \alpha^n \prod_{k=1}^n \ell(I_k) = \alpha^n \operatorname{Vol}_n(P) \tag{9}$$

y que cuando $\alpha \geqslant 1$, entonces $P \subseteq \alpha * P$. Nótese también que la frontera de un rectángulo de $\mathbb{R}^n$ es reunión de $2n$-rectángulos degenerados, las caras $C_1, \dots, C_{2n}$ de $\overline{R}$. Por tanto, $\overline{R} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k \cup \bigcup_{j=1}^{2n} C_j$. Fijemos $\alpha > 1$. Para cada $j = 1, \dots, n$ sea $P_j^{(\alpha)}$ un rectángulo abierto de volumen $\alpha - 1$ y que contiene a $C_j$. Se tiene entonces que

$$\overline{R} \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \alpha * S_k \cup \bigcup_{j=1}^{2n} \alpha * P_j^{\alpha}.$$

Como $\overline{R}$ es cerrado y acotado, por el Teorema de Heine-Borel (ver Wikipedia ) es compacto y por tanto el anterior recubrimiento tiene un subrecubrimiento finito,

$$\overline{R} \subseteq \bigcup_{k=0}^m \alpha * S_k \cup \bigcup_{j=1}^{2n} \alpha * P_j^{(\alpha)}.$$

Ahora podemos aplicar el caso de recubrimientos finitos para concluir que

$$\operatorname{Vol}_n(R) = \operatorname{Vol}_n(\overline{R}) \leqslant \alpha^n \sum_{k=0}^m \operatorname{Vol}_n(S_k) + 2n(\alpha - 1).$$

Como $\alpha > 1$ es arbitrario, se obtiene la desigualdad en (7).

Demostremos b): supongamos que $R = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} S_k$ reunión disjunta. Por tanto, $\operatorname{Vol}_n(R) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Vol}_n(S_k)$. Por otro lado, para cada $m \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$R \backslash \bigcup_{k=1}^m S_k = (\cdots((R\backslash S_0)\backslash S_1)\backslash S_2 \cdots)\backslash S_k$$

es una reunión finita disjunta de rectángulos

$$R \backslash \bigcup_{k=1}^m S_k = P_0^{(m)} \cup \cdots \cup P_{r_m}^{(m)}.$$

Así que de (*) se obtiene que

$$\sum_{k=0}^{m} \mathrm{Vol}_n(S_k) \leqslant \sum_{k=0}^{m} \mathrm{Vol}_n(S_k) + \sum_{j=0}^{r_m} \mathrm{Vol}_n(P_j^{(m)}) = \mathrm{Vol}_n(R).$$

Como $m$ es arbitrario,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(S_k) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} \mathrm{Vol}_n(S_k) \leqslant \mathrm{Vol}_n(R),$$

y hemos demostrado la desigualdad que nos faltaba. □ □

**Corolario 2.1.5** (Vol$_n$ es una pre-medida)**.** *La familia $\mathcal{R}_n$ de rectángulos de $\mathbb{R}^n$ es una semi-anillo y $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}_n, \mathrm{Vol}_n)$ es una pre-medida que es invariante por traslaciones.*

Demostración. Hemos visto que $\mathcal{R}_n$ es un semi-anillo y en el Lema 2.1.4 hemos visto que Vol$_n$ es una pre-medida. Además si $R = \prod_{k=1}^{n} I_k$ es un rectángulo y $x = (x_k)_{k01}^{n} \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\mathrm{Vol}_n(x + R) = \prod_{k=1}^{n} (\ell(x_k + I_k)) = \prod_{k=1}^{n} (\ell(I_k)) = \mathrm{Vol}_n(R)$$

ya que las traslaciones conservan distancias.

□ □

### 2.1.2. Medida de Lebesgue.

**Definición 2.1.6** (Medida exterior de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)**.** *La medida exterior de Lebesgue $\lambda_n^*$ es la medida exterior* $(\mathrm{Vol}_n)_{\mathrm{e}}$ *asociada a la pre-medida volumen. Es decir, $\lambda_n^* : \mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ está definida para $A \subseteq \mathbb{R}^n$ por*

$$\lambda_n^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(R_k) \,:\, \{R_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{R}_n,\, A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k\}.$$

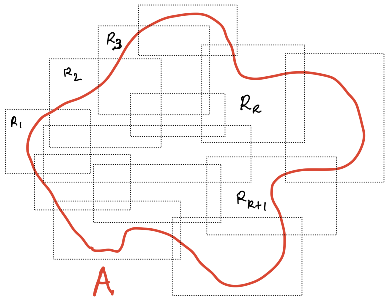



FIGURA 1. Ejemplo de recubrimiento por rectángulos

En la definición de la medida exterior no hemos dicho nada sobre los rectángulos que recubren $X$ ya que es irrelevante si son, por ejemplo, abiertos o no.

**Proposición 2.1.7** (Los recubrimientos pueden ser abiertos)**.** *Para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene*

$$\lambda_n^*(A) = \text{ínf}\{\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(R_k) \,:\, \{R_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{R}_n \text{ abiertos },\, A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k\}. \tag{10}$$

DEMOSTRACIÓN. Dado un rectángulo $R = \prod_{k=1}^n I_k$ y $\varepsilon > 0$, $R_\varepsilon := \prod_{k=1}^n (I_k)_\varepsilon$ donde para un intervalo $I$, $I_\varepsilon := ]\,\text{ínf}\, I - \varepsilon, \sup I + \varepsilon[$. Nótese que $R_\varepsilon$ es un rectángulo abierto que contiene a $R_k$ y tal que $\mathrm{Vol}_n(R_\varepsilon) = \prod_{j=1}^n (\ell(I_j) + 2\varepsilon)$ tiende a $\mathrm{Vol}_n(R)$ cuando $\varepsilon$ tiende a cero. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $\lambda_n^*(A) = \infty$, entonces también lo es el ínfimo en (10). Supongamos que $\lambda_n^*(A) < \infty$, y sea $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k$ un recubrimiento de $A$ por rectángulos tal que $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(R_k) < \infty$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ sea $\varepsilon_k > 0$ suficientemente pequeño tal que $\mathrm{Vol}_n((R_k)_{\varepsilon_k}) \leqslant \mathrm{Vol}_n(R_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. Entonces $A \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (R_k)_{\varepsilon_k}$ es un recubrimiento de $A$ por rectángulos abiertos y se cumple que

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n((R_k)_{\varepsilon_k}) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(R_k) + \varepsilon,$$

y por tanto el ínfimo que define $\lambda_n^*(A)$ y el ínfimo en (10) coinciden. □

**Proposición 2.1.8** (Propiedades de $\lambda_n^*$)**.** *La medida exterior de Lebesgue tiene las siguientes propiedades:*

*1)* $\lambda_n^*$ *es una medida exterior que extiende a* $\mathrm{Vol}_n$*, y los rectángulos y conjuntos $\lambda_n^*$-nulos son medibles de Lebesgue.*

*2)* $\lambda_n^*$ *es invariante por traslaciones.*

*3)* $\lambda_n^*(D) = 0$ *para todo subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^n$ numerable.*

DEMOSTRACIÓN. *1)* se sigue de la teoría general presentada en el Capítulo anterior (Teorema 9.1.3 y Proposición 1.2.28).

*2)*: Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces si $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por rectángulos de $A$, entonces $\{x + R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento por rectángulos de $x + A$. Como el volumen de rectángulos es invariante por traslaciones, se sigue que $\lambda_n^*(x+A) \leqslant \lambda_n^*(A)$. Aplicando lo anterior al punto $-x$ y al conjunto $x+A$, y utilizando $-x+(x+A)=A$ y por tanto $\lambda_n^*(A)=\lambda_n^*(-x+(x+A)) \leqslant \lambda_n^*(x+A)$.

*3)*: Sea $D=\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto numerable. Para cada $\varepsilon>0$ y cada $n\in\mathbb{N}$, sea $R_k$ cualquier rectángulo abierto que contiene al punto $x_k$ y con volumen $\varepsilon/2^{k+1}$. Entonces $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es un recubrimiento de $D$ por rectángulos abiertos y por tanto,

$$\lambda_n^*(D) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{Vol}_n(R_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Como $\varepsilon>0$ es arbitrario, se sigue que $\lambda_n^*(D)=0$. □

**Definición 2.1.9** (Medida de Lebesgue)**.** *El espacio de medida de Lebesgue es el espacio* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\lambda_n^*), \lambda_n^*)$ *asociado* $\lambda_n^*$*. Se denotará por* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$*. Es decir,* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *es la colección de los subconjuntos de* $\mathbb{R}^n$ *que son* $\lambda_n^*$*-medibles, y la restricción de* $\lambda_n^*$ *a* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *es la* medida de Lebesgue *en* $\mathbb{R}^n$ *y se denota por* $\lambda_n$*.*

Recuperamos el siguiente caso particular de la Proposición 1.2.22:

**Proposición 2.1.10.** *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$*. Son equivalentes.*

*a)* *$A$ es $\lambda_n^*$-medible.*

*b)* $\lambda_n^*(R) \geqslant \lambda_n^*(R\cap A) + \lambda_n^*(R\backslash A)$ *para todo rectángulo* $R \subseteq \mathbb{R}^n$*.* □

Sumarizamos las propiedades fundamentales de la medida de Lebesgue.

Teorema 2.1.11 (La medida de Lebesgue). $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ *es un espacio de medida* completo *tal que*

*a)* *Todo conjunto $\lambda_n^*$-nulo es medible de Lebesgue.*

*b)* *$\lambda_n$ es invariante por traslación.*

*c)* $\lambda_n(R) = \mathrm{Vol}_n(R)$ *para todo rectángulo* $R \subseteq \mathbb{R}^n$*.*

*d)* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*.*

Demostración. Que $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \lambda_n)$ es espacio completo se sigue del Teorema 9.1.3. a), b) y c) están demostradas en la Proposición 2.1.8. d): Sabemos que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es una $\sigma$-álgebra que contiene a los rectángulos. Como estos últimos son una base de entornos de la topología de euclídea de $\mathbb{R}^n$, que es separable. Por tanto, todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es reunión numerable de rectángulos abiertos y se tiene entonces que todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es medible de Lebesgue, y por minimalidad de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. □

### 2.1.3. Conjuntos medibles.

**Definición 2.1.12.** *Un subconjunto $A \subseteq X$ de un espacio topológico $X$ se denomina*

*a) $G_\delta$, si $A$ es intersección numerable de abiertos de $X$;*

*b) $F_\sigma$, si $A$ es reunión numerable de cerrados de $X$.*

**Proposición 2.1.13** (Medibilidad salvo medida cero)**.** *Supongamos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $B \subseteq \mathbb{R}^n$ medible de Lebesgue tal que $\lambda_n^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon$. Entonces $A$ es también medible de Lebesgue.*

*Consecuentemente, si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ son tales que su diferencia simétrica $A \triangle B$ es un conjunto de medida de Lebesgue 0, entonces $A$ es medible de Lebesgue si y solamente si $B$ es medible de Lebesgue.*

Demostración. Supongamos que $\lambda_n^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon$ para un cierto $B$ y $\varepsilon > 0$. Igualmente se tiene que $\lambda_n^*((\mathbb{R}^n \backslash A) \triangle (\mathbb{R}^n \backslash B)) \leqslant \varepsilon$. Por tanto, dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\lambda_n^*(E \cap A) \leqslant & \lambda_n^*(E \cap (A \cap B)) + \lambda_n^*(E \cap (A \backslash B)) \leqslant \lambda_n^*(E \cap (A \cap B)) + \lambda_n^*(A \backslash B) \leqslant \\ \leqslant & \lambda_n^*(E \cap B) + \varepsilon,\end{aligned}$$

y similarmente, $\lambda_n^*(E \cap B) \leqslant \lambda_n^*(E \cap A) + \varepsilon$. O sea,

$$|\lambda_n^*(E \cap A) - \lambda_n^*(E \cap B)| \leqslant \varepsilon, \tag{11}$$

y como $A \backslash B = A \cap (\mathbb{R}^n \backslash B)$, de la misma manera tenemos

$$|\lambda_n^*(E \backslash A) - \lambda_n^*(E \backslash B)| \leqslant \varepsilon, \tag{12}$$

Esto quiere decir que si suponemos que $B$ es medible de Lebesgue, entonces

$$\lambda_n^*(E) \leqslant \lambda_n^*(E \cap A) + \lambda_n^*(E \backslash A) \leqslant \lambda_n^*(E \cap B) + \lambda_n^*(E \backslash B) + 2\varepsilon = \lambda_n^*(E) + 2\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, obtenemos que $\lambda_n^*(E) \leqslant \lambda_n^*(E \cap A) + \lambda_n^*(E \backslash A)$, y como $E$ es arbitrario, $A$ es medible. □

El siguiente criterio particular de la medida de Lebesgue se tiene que comparar con el más abstracto presentado en la Proposición 1.2.31.

Teorema 2.1.14 (Criterios de Lebesgue-medibilidad). *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario. Son equivalentes:*

*1) $A$ es Lebesgue medible.*

*2) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un abierto $U$ que contiene a $A$ y tal que $\lambda_n^*(U \backslash A) \leqslant \varepsilon$.*

*3) Existe un $G_\delta$-conjunto $G$ que contiene a $A$ y tal que $\lambda_n^*(G \backslash A) = 0$.*

*4) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un cerrado $C$ contenido en $A$ tal que $\lambda_n^*(A \backslash C) \leqslant \varepsilon$.*

*5) Existe un $F_\sigma$-conjunto $F$ contenido en $A$ tal que $\lambda_n^*(A \backslash F) = 0$.*

*6) Existe un conjunto Borel $B$ tal que $\lambda^*(A \triangle B) = 0$.*

*7) Para todo $\varepsilon > 0$ existe un boreliano $B$ tal que $\lambda^*(A \triangle B) \leqslant \varepsilon$.*

Demostración. *1)* implica *2)*: Fijemos un conjunto $A$ Lebesgue medible y $\varepsilon > 0$. Supongamos primero que $A$ tiene medida finita. Sea $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ un recubrimiento por rectángulos abiertos de $A$ tal que $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(R_k) \leqslant \lambda_n^*(A) + \varepsilon$. Sea $U := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} R_k$, que es abierto. Entonces

$$\lambda_n^*(U) \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_n^*(R_k) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{Vol}_n(R_k) \leqslant \lambda_n^*(A) + \varepsilon.$$

Como $A$ es Lebesgue-medible, se tiene que

$$\lambda_n^*(U\backslash A) = \lambda_n^*(U) - \lambda_n^*(A) \leqslant \varepsilon.$$

Supongamos que $A$ tiene medida infinita; para cada $m$, sea $A_k = A \cap [-k,k]^n$, que son conjuntos medibles de medida finita y que recubren $A$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $U_k$ abierto que contiene a $A_k$ y tal que $\lambda_n^*(U_k\backslash A_k) \leqslant \varepsilon/2^{k+1}$. Sea $U := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$, que es un abierto que contiene a $A$ y

$$\lambda_n^*(U\backslash A) \leqslant \lambda_n^*\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(U_k\backslash A_k)\right) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_n^*(U_k\backslash A_k) \leqslant \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} \leqslant \varepsilon.$$

*2)* implica *3)*: Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $U_k$ un abierto que contiene a $A$ y tal que $\lambda_n^*(U_k\backslash A) \leqslant 1/2^k$. Sea $G := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} U_k$, que es una intersección numerable de abiertos y por tanto $G_\delta$. Claramente $A \subseteq G$ y

$$\lambda_n^*(G\backslash A) \leqslant \inf_k \lambda_n^*(U_k\backslash A) = 0.$$

*3)* implica *1)*: Supongamos que $G$ es un conjunto $G_\delta$ que contiene a $A$ tal que $\lambda_n^*(G\backslash A) = 0$. Entonces

$$A = G\backslash(G\backslash A).$$

Como $G$ es Borel y $G\backslash A)$ es $\lambda_n^*$-nulo y $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ es una álgebra de Boole, se sigue que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

*1)* implica *4)*: Supongamos que $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ y sea $\varepsilon > 0$; entonces $B := \mathbb{R}^n\backslash A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Aplicando 2), escojamos $U$ abierto conteniendo a $B$ tal que $\lambda_n^*(U\backslash B) < \varepsilon$. Sea $F := \mathbb{R}^n\backslash U$, que está contenido en $A$. Por otro lado,

$$\lambda_n^*(A\backslash F) = \lambda_n^*(A \cap U) = \lambda_n^*(U\backslash B) \leqslant \varepsilon.$$

*4)* implica *5)* se demuestra igual que *2)* implica *3)*. *5)* implica *6)* y *6)* implica *7)* son trivialmente ciertos. *7)* implica *1)* Se sigue de la Proposición 2.1.13 y del hecho que los conjuntos borelianos son medibles. $\square$

**Corolario 2.1.15.** *La medida de Lebesgue es regular Supongamos que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible. Entonces*

$$\lambda_n(E) = \inf\{\lambda_n(U) : E \subseteq U \text{ abierto}\} = \sup\{\lambda_n(K) : K \subseteq E \text{ compacto}\}. \tag{13}$$

Demostración. La primera igualdad se sigue del criterio de medibilidad en el Teorema 2.1.14 (punto 2)). También de allí (punto 4) se sigue que dado un medible $E$, se tiene que

$$\lambda_n(E) = \sup\{\lambda_n(C) : C \subseteq E, \text{ cerrado}\}. \tag{14}$$

Sea $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$ un recubrimiento creciente de $\mathbb{R}^n$ por compactos $K_m$. Entonces dado un cerrado $C$, por la continuidad de las medidas

$$\lambda_n(C) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \lambda_n(C \cap K_m)$$

y por tanto,

$$\lambda_n(E) = \sup_{C\subseteq E \text{ cerrado}} \sup_{m\in\mathbb{N}} \lambda_n(C \cap K_m) \leqslant \sup_{K\subseteq E \text{ compacto}} \lambda_n(K) \leqslant \lambda_n(E) \tag{15}$$

ya que cada $C \cap K_m$ es compacto cuando $C$ es cerrado.

$\square$

Las medidas regulares en espacios localmente compactos se estudiaran en más generalidad en el Capítulo 9.

## 2.2. Ejemplos de conjuntos

**Ejemplo 2.2.1** (Subespacios afines). *Todo subespacio afín $V$ de $\mathbb{R}^n$ es cerrado y por tanto medible de Lebesgue; si* $\dim V < n$*, entonces* $\lambda_n(V) = 0$*: Sea* $d := \dim V$ *y sea* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ *una aplicación afín y exhaustiva tal que* $\mathrm{Ker} T = V$*. Como $T$ es afín, $T$ es continua, y como* $V = \mathrm{Ker} T = T^{-1}(\{0\})$*, $V$ es cerrado. Supongamos que* $\dim V = d < n$*. Sea* $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ *tal que* $ImU = V$*. Como* $\dim ImU = d < n$*, se sigue de la Proposición 2.7.2 e) que* $V = ImU$ *tiene medida cero.*

**Ejemplo 2.2.2** (Un conjunto $F_\sigma$ no $G_\delta$). *Los racionales $\mathbb{Q}$ son $F_\sigma$ pero no $G_\delta$:* $\mathbb{Q} = \bigcap_{q \in \mathbb{Q}} \{q\}$*, unión numerable. Supongamos para llegar a una contradicción que $\mathbb{Q}$ es $G_\delta$,* $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$*, donde cada $U_n$ es abierto. Sea* $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \mathbb{Q}$ *una enumeración de $\mathbb{Q}$, y pongamos* $V_n := U_n \backslash \{q_n\}$ *para cada* $n \in \mathbb{N}$*. Entonces* $V_n \supset \mathbb{Q} \backslash \{q_n\}$*, este último denso en $\mathbb{R}$ y por tanto cada $V_n$ es abierto y denso en $\mathbb{R}$. Por otro lado,* $\bigcap_n V_n = \emptyset$*, contradiciendo el teorema de categoría de Baire (la intersección numerable de densos es densa); es fácil ver que una intersección numerable de abiertos densos es no vacía (y de aquí, fácil deducir el teorema) encontrando para cada* $n \in \mathbb{N}$ *intervalos cerrados* $I_n \subset V_n$ *y encajados* $I_n \subset I_{n+1}$*, de lo que se sigue del teorema de intervalos encajados que* $\emptyset \neq \bigcap_n I_n \subset \bigcap_n V_n$*.*

*Por tanto, los irracionales $\mathbb{I}$ son $G_\delta$ y no $F_\sigma$.*

**Ejemplo 2.2.3** (Un conjunto no medible de Lebesgue. Los conjuntos de Vitali). *Todo subconjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $\lambda^*(A) > 0$ *contiene un subconjunto* $B \notin \mathcal{L}(\mathbb{R})$*: Sin pérdida de generalidad, suponemos que $A$ está acotado. En $\mathbb{R}$ define la relación de equivalencia $r \sim s$ cuando* $r - s \in \mathbb{Q}$*. Sea $D$ un subconjunto de $A$ tal que para todo $a \in A$ existe un $d \in D$ tal que $a \sim d$ (Consideramos el conjunto de clases* $A/\sim = \{[b]_\sim : b \in A\}$ *y, utilizando el axioma de elección, escogemos para cada clase* $C \in A/\sim$ *un* $a \in C \cap A$*). Al conjunto $D$ se le denomina de* Vitali

Obs. 7. $D$ no es Lebesgue medible.

Demostración. Supongamos en caso contrario que $D$ es Lebesgue-medible. Como $A \subseteq \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} q + D$ y como $(q + D) \cap (q' + D) = \emptyset$ si $q \neq q'$, $\mathbb{Q}$ es numerable y $\lambda$ es invariante por traslación, se sigue que

$$\lambda^*(A) \leqslant \lambda^* \left( \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} q + D \right) = \sum_{q \in \mathbb{Q}} \lambda(D).$$

□

*Por tanto* $\alpha := \lambda(D) > 0$*. Por otro lado, sea* $m > 0$ *tal que* $A \subseteq [-m, m]$*. Entonces para cada* $q \in [0, 1]$ *se tiene que* $q + D \subseteq q + A \subseteq [-m, m + 1]$*. Sea* $k \in \mathbb{N}$ *tal que* $k\alpha > 2m + 1$*. Entonces*

$$k\alpha = \lambda \left( \bigcup_{i=1}^{k} (\frac{1}{2^i} + D) \right) \leqslant \lambda([-m, m + 1]) = 2m + 1 < k\alpha,$$

*contradicción.*

**Ejemplo 2.2.4** (Un conjunto de Berstein: Otro conjunto no medible). *Dado un intervalo $I$ no degenerado, un subconjunto $S$ de $I$ se denomina de* Bernstein *cuando ambos $S$ e* $I \backslash S$ *intersectan todo subconjunto no-numerable y cerrado de $I$. Vamos a ver que un conjunto de Berstein no puede ser medible: Supongamos en caso contrario que $S$ es medible y veamos que $S$ tiene que tener medida 0: En caso contrario, se sigue de Teorema 2.1.14 4) que existe* $C \subseteq S$ *cerrado tal que* $\lambda(C) > 0$*. En particular, $C$ es no numerable y por tanto* $C \backslash S \neq \emptyset$*, contradiciendo que* $C \subseteq S$*. Por tanto, $S$ es Lebesgue nulo. Como* $I \backslash S$ *es también un* *subconjunto de Bernstein de $I$, y es medible (por suponer que $S$ es medible), se tiene también que $I \backslash S$ es también nulo. Esto implica que $I = S \cup (I \backslash S)$ es nulo, lo que es imposible.*

*Veamos cómo construir $S$: El conjunto $S$ no puede ser "natural" (e.g. Borel) y necesariamente tiene que utilizar métodos "no constructibles" (e.g. el axioma de elección). Sea $\mathfrak{c}$ el cardinal de $\mathbb{R}$.*

OBS. 8. La familia de cerrados $\mathcal{C}$ y la familia de abiertos $\mathcal{O}$ de $\mathbb{R}$ tienen cardinalidad $\mathfrak{c}$.

DEMOSTRACIÓN. Evidentemente, $\mathcal{C}$ y $\mathcal{O}$ tienen la misma cardinalidad. Sabemos que todo abierto es reunión numerable de intervalos con extremos racionales. Por tanto $\mathcal{O}$ tiene a lo sumo la cardinalidad de las sucesiones numerables de intervalos racionales, que es la cardinalidad de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, o sea $\mathfrak{c}$; como además hay un continuo de intervalos, se sigue que $\mathcal{O}$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. □

*Enumeremos los cerrados de no-numerables de $I$, $\{F_\gamma\}_{\gamma<\mathfrak{c}}$. Vamos a definir* transfinitamente *dos sucesiones $(x_\gamma)_{\gamma<\mathfrak{c}}$ y $(x_\gamma)_{\gamma<\mathfrak{c}}$ de puntos de $I$ con las siguientes propiedades:*

I) $\{x_\gamma\}_{\gamma<\mathfrak{c}} \cap \{y_\gamma\}_{\gamma<\mathfrak{c}} = \emptyset$.
II) *Para todo $\gamma < \eta < \mathfrak{c}$ se tiene que $x_\gamma \neq x_\eta$ e $y_\gamma < y_\eta$.*
III) *Para todo $\gamma < \mathfrak{c}$ se tiene que $x_\gamma, y_\gamma \in F_\gamma$.*

*Justificaremos la construcción de estas sucesiones después, pero antes veamos que $S := \{x_\gamma : \gamma < \mathfrak{c}\}$ es un conjunto de Bernstein. Dado un cerrado no-numerable $C \subseteq I$, sea $\gamma < \mathfrak{c}$ tal que $C = F_\gamma$. Entonces $x_\gamma \in F_\gamma \cap S$, e $y_\gamma \in F_\gamma \backslash S$.*

*Justifiquemos la existencia de las sucesiones $(x_\gamma)_{\gamma<\mathfrak{c}}$ e $(y_\gamma)_{\gamma<\mathfrak{c}}$: Supongamos definido el conjunto parcial $\{(x_\gamma, y_\gamma)\}_{\gamma<\alpha}$ satisfaciendo I), II) y III), y tenemos que escoger el nuevo par $(x_\alpha, y_\alpha)$ tal que $\{(x_\gamma, y_\gamma\}_{\gamma\leqslant\alpha}$ cumpliendo esas condiciones. El conjunto cerrado $F_\alpha$ es no-numerable. Por tanto, se sigue del Teorema de Cantor-Bendixson (ver [7,* Teorema 6.4]*) que $F_\alpha$ contiene un conjunto perfecto (un conjunto cerrado sin puntos aislados), y por tanto tiene cardinalidad el continuo. Esto quiere decir que*

$$F_\alpha \backslash (\{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha} \cup \{y_\gamma\}_{\gamma<\alpha})$$

*tiene cardinalidad el continuo. En particular podemos encontrar $x_\alpha \neq y_\alpha \in F_\alpha \backslash (\{x_\gamma\}_{\gamma<\alpha} \cup \{y_\gamma\}_{\gamma<\alpha})$. Evidentemente, $(x_\gamma)_{\gamma\leqslant\alpha}$, $(y_\gamma)_{\gamma\leqslant\alpha}$ satisfacen I), II) y III).*

NOTACIÓN. *Para $r \geqslant 0$ y $A \subseteq \mathbb{R}$, sea $r \cdot A := \{r \cdot x : x \in A\}$.*

**Proposición 2.2.5.** *Supongamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función afín $f(x) = ax + b$. Entonces $\lambda(f(X)) = a\lambda(X)$ para todo conjunto medible $X \subseteq \mathbb{R}$.*

DEMOSTRACIÓN. Ejercicio. □

¿Es todo conjunto de medida cero numerable? no:

**Ejemplo 2.2.6** (Un conjunto de medida 0 no numerable. El conjunto ternario de Cantor)**.** *Consideramos las siguientes funciones afines*

$$\boldsymbol{t}_0 : [0,1] \to [0, \frac{1}{3}] \qquad x \mapsto \boldsymbol{l}(x) := \frac{1}{3}x$$

$$\boldsymbol{t}_1 : [0,1] \to [\frac{2}{3}, 1] \qquad x \mapsto \boldsymbol{l}(x) := \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x.$$

*O sea, $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{t}_1$ mueven linealmente el intervalo $[0,1]$ a $[0,1/3]$ y a $[2/3,1]$, respectivamente. Definimos inductivamente una familia de subconjuntos de $[0,1]$ como sigue: Sea*

$$\begin{aligned} C_0 :=& [0,1] \\ C_{n+1} :=& \boldsymbol{t}_0(C_n) \cup \boldsymbol{t}_1(C_n) = \frac{1}{3}\cdot C_n \cup \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot C_n\right). \end{aligned} \tag{16}$$

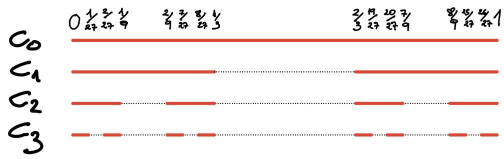



FIGURA 2. Construcción del conjunto ternario de Cantor

OBS. 9. $C_n$ es cerrado, y $C_{n+1} \subseteq C_n$ para todo $n$.

DEMOSTRACIÓN. Inducción sobre $n$. Ejercicio. □

*El* conjunto de Cantor $\mathfrak{C}$ *se define como*

$$\mathfrak{C} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

*que claramente es un cerrado y tiene la siguiente propiedad fractal.*

OBS. 10.

$$\begin{aligned} [0,\frac{1}{3}] \cap \mathfrak{C} =& \frac{1}{3}\mathfrak{C} \\ [\frac{2}{3},1] \cap \mathfrak{C} =& \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}. \end{aligned} \tag{17}$$

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la definición de los $C_n$ que $[0,1/3] \cap C_{n+1} = (1/3)C_n$. Por tanto,

$$[0,\frac{1}{3}] \cap \mathfrak{C} = [0,\frac{1}{3}] \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{n+1} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}([0,\frac{1}{3}] \cap C_{n+1}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{3}C_n = \frac{1}{3}\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \frac{1}{3}\mathfrak{C}.$$

La otra igualdad se demuestra análogamente. □

OBS. 11. $\lambda(\mathfrak{C}) = 0$.

DEMOSTRACIÓN. Se sigue de la Proposición 2.2.6 y de las igualdades en (17) que

$$\begin{aligned} \lambda(\mathfrak{C} \cap [0,\frac{1}{3}]) =& \lambda(\frac{1}{3}\mathfrak{C}) = \frac{1}{3}\lambda(\mathfrak{C}) \\ \lambda(\mathfrak{C} \cap [\frac{2}{3},1]) =& \lambda(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\mathfrak{C}) = \frac{1}{3}\lambda(\mathfrak{C}). \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{C} \cap ]1/3, 2/3[ = \varnothing$, se tiene que

$$\lambda(\mathfrak{C}) = \frac{2}{3}\lambda(\mathfrak{C})$$

y por tanto $\lambda(\mathfrak{C}) = 0$. □

*Veamos ahora la interpretación de* $\boldsymbol{t}_0$ *y* $\boldsymbol{t}_1$ *en términos del* desarrollo ternario *de* $x \in [0,1]$. *Para cada* $x \in [0,1]$ *existe una sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2\}$ *tal que*

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{3^{n+1}}.$$

*En otras palabras, la aplicación* $\boldsymbol{\sigma} : \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$,

$$\boldsymbol{\sigma}((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{3^{n+1}}$$

*es exhaustiva. Sin embargo,* $\boldsymbol{\sigma}$ *no es inyectiva:*

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(a_0,\dots,a_{n-1},1,0,0,\dots) =&\boldsymbol{\sigma}(a_0,\dots,a_{n-1},0,2,2,\dots)\\ \boldsymbol{\sigma}(a_0,\dots,a_{n-1},2,0,0,\dots) =&\boldsymbol{\sigma}(a_0,\dots,a_{n-1},1,2,2,\dots),\end{aligned}$$

*y estas son las posibles coincidencias. Por otro lado, se puede demostrar que*

$$\begin{aligned}C_{n+1} =&\boldsymbol{\sigma}(\{(a_k) \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}} \,:\, a_0,\dots,a_n \in \{0,2\}\})\\ \mathfrak{C} =&\boldsymbol{\sigma}(\{0,2\}^{\mathbb{N}}).\end{aligned}$$

*Así que la restricción* $\boldsymbol{c} : \{0,2\}^{\mathbb{N}} \to \mathfrak{C}$ *es una biyección. Como* $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ *tiene la cardinalidad del continuo* $2^{\aleph_0}$, *también el conjunto de Cantor.*

**Ejemplo 2.2.7** (La función de Cantor)**.** *Vamos a encontrar una función* $f : [0,1] \to [0,1]$ *continua, creciente* $f(0) = 0$ *y* $f(1) = 1$ *y tal que su derivada se anula en un subconjunto abierto de medida 1 de* $[0,1]$.

*Inductivamente definimos funciones* $(f_n)_n$, $f_n : [0,1] \to [0,1]$ *como sigue:*

$$\begin{aligned}f_0(x) :=&x\\ f_{n+1}(x) :=&\begin{cases}\frac{1}{2}f_n(3x) & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}\\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f_n(3x-2) & \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 1.\end{cases}\end{aligned}$$

*Los gráficos de las cuatro primeras funciones* $f_0$, $f_1$, $f_2$ *y* $f_3$ *son los siguientes*

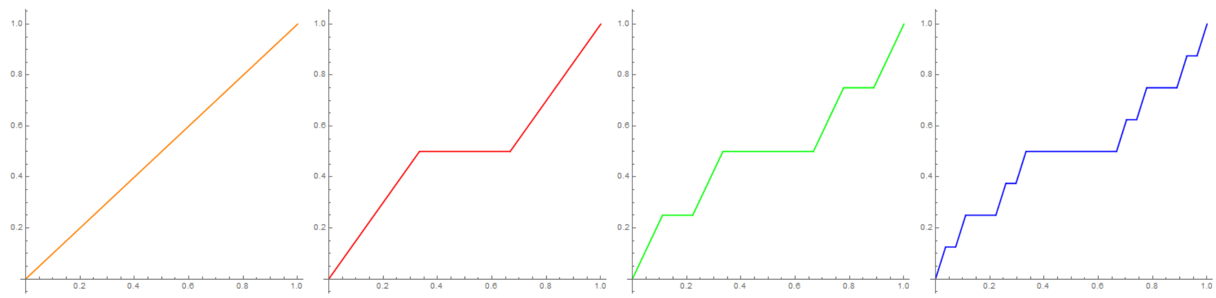



FIGURA 3. Primeras aproximaciones a la función de Cantor

*Obsérvese que:*

*a)* *las funciones* $x \mapsto 3x$ *y* $x \mapsto 3x-2$ *son las funciones inversas de* $\boldsymbol{t}_0$ *y* $\boldsymbol{t}_1$, *respectivamente.*

*b)* *las funciones* $x \mapsto \boldsymbol{d}_0(x) := 1/2x$, $x \mapsto \boldsymbol{d}_1(x) := 1/2 + 1/2x$ *mueven afínmente el intervalo* $[0,1]$ *a los intervalos* $[0,1/2]$ *y* $[1/2,1]$.

*c) Dado* $\bar{a} = (a_n)_{\in\mathbb{N}} \in \{0,1,2\}^{\mathbb{N}}$, $x \in \boldsymbol{\sigma}(\bar{a})$ *se tiene que*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_0(\boldsymbol{\sigma}(\bar{a})) =& \boldsymbol{\sigma}((0, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)) \\ \boldsymbol{t}_1(\boldsymbol{\sigma}(\bar{a})) =& \boldsymbol{\sigma}((2, a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)) \end{aligned}$$

*O sea, unos desarrollos ternarios de* $\boldsymbol{t}_0(x)$ *y* $\boldsymbol{t}_1(x)$ *son* $(0)^\frown(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, a_0, a_1, \dots, )$ *y* $(2)^\frown(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2, a_0, a_1, \dots, )$*, respectivamente, si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es un desarrollo de* $x$*. De manera similar, unos desarrollos binarios de* $\boldsymbol{d}_0(x)$ *y* $\boldsymbol{d}_1(x)$ *son* $(0)^\frown(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y* $(1)^\frown(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, respectivamente, si* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es un desarrollo de* $x$*.*

Obs. 12. Cada $f_n$ es una función continua y para todo $n > 0$ se tiene que

$$\max_{x\in[0,1]} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant (1/2) \max_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_{n-1}(x)| \tag{18}$$

Demostración. Obviamente $f_0$ es continua y por inducción en $n$, se demuestra que cada $f_n$ también. Demostremos la desigualdad en (18). Sea $x \in [0, 1/3]$. Entonces

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2}|f_n(3x) - f_{n-1}(3x)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_{n-1}(t)|.$$

Si $1/3 \leqslant x \leqslant 2/3$, entonces $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = 0$. Supongamos finalmente que $2/3 \leqslant x \leqslant 1$. Entonces

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2}|f_n(3x-2) - f_{n-1}(3x-2)| \leqslant \frac{1}{2} \max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_{n-1}(t)|.$$

□

*Como* $\max_{x\in[0,1]} |f_1(x) - f_0(x)| = 1/6$*, se sigue de* (18) *que*

$$\max_{x\in[0,1]} |f_{n+m}(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{2^n}, \tag{19}$$

*y por tanto la sucesión* $(f_n)_n$ *de funciones continuas converge uniformemente necesariamente a una función continua* $f : [0,1] \to [0,1]$*, denominada* función de Cantor*. Como cada una de las funciones* $f_n$ *es creciente, la función* $f$ *también lo es, y a partir de* (19) *se cumple que*

$$\max_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{2^n}, \tag{20}$$

*Sean* $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *los conjuntos definidos anteriormente en* (16)*, y para cada* $n$ *sea* $U_n := [0,1]\backslash C_n$*,* $\mathfrak{U} := [0,1]\backslash\mathfrak{C}$

Obs. 13. $f_{n+m} \upharpoonright U_n = f_n \upharpoonright U_n$ para todo $n, m \geqslant 1$.

Demostración. Como $U_n \subseteq U_{n+1}$ para todo $n$, es suficiente demostrar que $f_{n+1} \upharpoonright U_n = f_n \upharpoonright U_n$ para todo $n \geqslant 1$. Vamos a utilizar que

$$[0, \frac{1}{3}] \cap U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n, \ [\frac{2}{3}, 1] \cap U_{n+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}U_n.$$

Esto se sigue de la propiedad análoga de los cerrados $\{C_n\}_n$.
Probemos ahora que $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ para $x \in U_n$. Si $n = 1$, entonces $U_1 = (1/3, 2/3)$ y por tanto $f_2(x) = 1/2 = f_1(x)$. Supongamos que $n > 1$. Si $x \in [1/3, 2/3]$, $f_{n+1}(x) = f_n(x) = 1/3$; si $x \in [0, 1/3]$, entonces $x \in (1/3)U_{n-1}$, por tanto $3x \in U_{n-1}, y f_{n+1}(x) = \frac{1}{2}f_n(3x) = \frac{1}{2}f_{n-1}(3x) = f_n(x)$. Si $x \in [2/3, 1]$ la demostración es análoga. □

Obs. 14. La derivada de $f$ es cero en $\mathfrak{U}$.

DEMOSTRACIÓN. Nótese que se tiene que $U_0 = \varnothing$, $U_1 = (1/3, 2/3)$ y para cada $n$,

$$U_{n+1} = U_n \cup \boldsymbol{t}_0(U_n) \cup \boldsymbol{t}_1(U_n).$$

Dado una sucesión $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$, definamos un intervalo abierto $I_{\bar{a}}$ como sigue. Si $\bar{a} = \varnothing$ es la sucesión vacía, entonces definimos $I_{\varnothing} = (1/3, 2/3) = U_1$; si $\bar{a}$ es no trivial,

$$I_{\bar{a}} = \boldsymbol{t}_{a_0}(I_{(a_1,\ldots,a_{n-1})}.$$

Es fácil ver que

$$U_{n+1} = \bigcup_{m=0}^{n} \bigcup_{\bar{a}\in\{0,1\}^m} I_{\bar{a}} \tag{21}$$

Utilizando esta descomposición, es fácil ver por inducción en $n$ que

$$f_n \text{ es constante en } I_{(a_1,\ldots,a_{n-1})} \text{ con valor } \sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}.$$

Como

$$\mathfrak{U} = \bigcup_{m=0}^{\infty} U_m = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\bar{a}\in\{0,1\}^m} I_{\bar{a}}$$

y dada $\bar{a} \in \{0,1\}^n$ se tiene del *Hecho* 13 que $f \restriction I_{\bar{a}} = f_{n+1} \restriction I_{\bar{a}}$ es constante. Como $I_{\bar{a}}$ es un intervalo abierto no degenerado se sigue que la derivada de $f$ existe en $I_{\bar{a}}$, y es igual a cero. □

OBS. 15. $f(\mathfrak{C}) = [0,1]$

DEMOSTRACIÓN. fijemos $y \in [0,1]$. Claramente, cada $f_n$ es exhaustiva, así que sea $x_n \in C_n$ tal que $f_n(x_n) = y$. Se sigue de (20) que

$$|f(x_n) - y| = |f(x_n) - f_n(x_n)| \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{2^n} \tag{22}$$

para todo $n$. Sea $(x_{n_k})_k$ una subsucesión convergente de $(x_n)_n$, con límite $x$. Como $\mathfrak{C} = \bigcap_n C_n$, veamos que $x \in \mathfrak{C}$; en caso contrario, $x \in U_m$ para cierto $m$ y como $x_{n_k} \to_k x$ y $U_m$ es abierto, tiene que existir $k_0$ tal que para todo $k \geqslant k_0$ se tiene que $x_{n_k} \in U_m$; entonces tomando $k \geqslant k_0$ tal que $n_{k_0} \geqslant m$, $x_{n_k} \in C_{n_k}$ por hipótesis pero $n_{n_k} \in U_m \subseteq U_{n_k}$ y esto es imposible. Se sigue entonces de (22) que $f(x) = y$. □

□

**Ejemplo 2.2.8** (Un conjunto de medida cero que no es Borel)**.** *Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ la función de Cantor introducida anteriormente. Sea $g : [0,1] \to [0,2]$, $g(x) = f(x) + x$. Entonces $g$ es suma de una función continua creciente y otra continua estrictamente creciente. Por tanto $g$ es continua y estrictamente creciente. Como $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$, se tiene que $g(0) = 0$ y $g(1) = 2$ y por tanto $g : [0,1] \to [0,2]$ es una biyección continua. Como $[0,1]$ es compacto, $g$ es una aplicación abierta, o sea $g^{-1}$ es continua. Resumiendo, $g$ es un homeomorfismo entre $[0,1]$ y $[0,2]$.*

OBS. 16. $\lambda(g(\mathfrak{C})) = 1$.

DEMOSTRACIÓN. Veamos que $\lambda(g(\mathfrak{U})) = \lambda(\mathfrak{U}) = 1$: Sabemos que $\mathfrak{U} = \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\bar{a}\in\{0,1\}^m} I_{\bar{a}}$ y que $f$ es constante en $I_{(a_1,\ldots,a_m)}$ con valor

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}$$

Así que

$$g(I_{\bar{a}}) = \left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}\right) + I_{\bar{a}}.$$

Como $g$ es inyectiva, $g(I_{\bar{a}}) \cap g(I_{\bar{b}}) = \varnothing$ para $\bar{a} \neq \bar{b}$, así que

$$\lambda(g(\mathfrak{U})) = \sum_{\bar{a}\in\bigcup_{m=0}^{\infty}\{0,1\}^m} \lambda\left(\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{a_j}{2^j} + \frac{1}{2^n}\right) + I_{\bar{a}}\right) = \sum_{\bar{a}\in\bigcup_{m=0}^{\infty}\{0,1\}^m} \lambda\left(I_{\bar{a}}\right) = \lambda(\mathfrak{U}) = 1.$$

□

*Sea $B \subseteq g(\mathfrak{C})$ un conjunto no Lebesgue medible y sea $A := g^{-1}(B) \subseteq \mathfrak{C}$. Entonces $A$ tiene medida 0 y su imagen por $g$, $B$ no es medible.*

*Obsérvese que esto también demuestra que la preimagen por una función continua de un conjunto medible no tiene que ser medible, a diferencia de los conjuntos Borelianos.* □

## 2.3. Sumas de Minkowski

**Definición 2.3.1** (Suma de Minkowski). *Dados dos conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\alpha > 0$ se define la* suma de Minkowski *$A + B$ de $A$ y $B$ como*

$$A + B := \{a + b \, : \, a \in A, b \in B\}.$$

*Se define $\alpha \cdot A$ como la imagen de $A$ por la homotecia de centro $0$ y razón $\alpha$,*

$$\alpha \cdot A := \{\alpha \cdot a \, : \, a \in A\}.$$

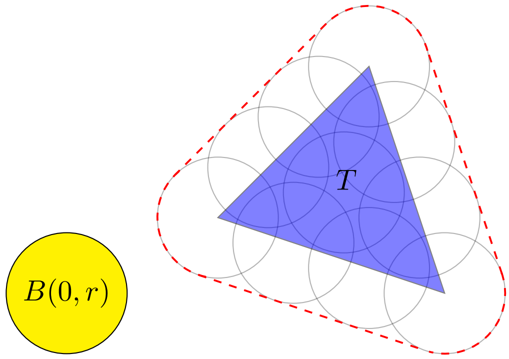



FIGURA 4. Suma de Minkowski de una bola $B(0,r)$ y un triángulo $T$.

**Proposición 2.3.2.** *Para todo $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se tiene que $\alpha \cdot A$ es medible y se cumple que*

$$\lambda_n(\alpha A) = \alpha^n \lambda_n(A).$$

DEMOSTRACIÓN. Como cada homotecia es una aplicación afín, se sigue del Teorema 2.7.4 que $\alpha A$ es medible y

$$\lambda_n(\alpha \cdot A) = \lambda_n(\alpha \cdot [0,1]^n)\lambda_n(A) = \lambda_n([0,\alpha]^n)\lambda_n(A) = \alpha^n \cdot \lambda_n(A).$$

□

¿Qué ocurre con la suma de Minkowski? La situación es un poco más delicada.

**Proposición 2.3.3** (Suma de Borel es medible). *La suma de conjuntos borelianos es medible.*

DEMOSTRACIÓN. Todo conjunto boreliano de un espacio polaco es imagen continua de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Por tanto, todo conjunto boreliano es la $\mathcal{A}$-operación (introducida por Souslin y Hausdorff) de conjuntos cerrados. Esto quiere decir que son medibles. Se explicará esto en detalle en el apéndice. □

Cuando $A, B$ son medibles la situación cambia.

**Ejemplo 2.3.4** (Suma de medibles no medible).

Veamos ahora el famoso resultado de Steinhaus.

TEOREMA 2.3.5 (Steinhaus). *Para todo conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida extrictamente positiva existe un cubo no degenerado $C$ centrado en 0 tal que $C \subseteq E - E$*

Demostración. Hemos visto en el Corolario 2.1.15 que la medida de Lebesgue es regular. Sea pues $K$ compacto y $U$ abierto tales que $K \subseteq E \subseteq U$ y tales que $\lambda_n(U) < 2\lambda_n(K)$. Para cada $x \in K$ sea $C_x$ un cubo abierto no degenerado centrado en 0 tal que $x + 2C_x \subseteq U$. Obviamente $K \subseteq \bigcup_{x \in K}(x + C_x)$ es un recubrimiento por abiertos de $K$. Como $K$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_m$ tales que $K \subseteq \bigcup_{j=1}^m x_j + C_{x_j}$. Sea $C := \bigcap_{j=1}^n C_{x_j}$, que es un cubo abierto no degenerado centrado en 0. Entonces se cumple que

$$K + C \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^m x_j + C_{x_j}\right) + C = \bigcup_{j=1}^m (x_j + C_{x_j} + C) \subseteq \bigcup_{j=1}^m (x_j + C_{x_j} + C_{x_j}) = \bigcup_{j=1}^m (x_j + 2C_{x_j}) \subseteq U. \quad (23)$$

Entonces dado $x \in C$, como $\lambda_n(x + K) = \lambda_n(K)$ estos conjuntos $K$ y $x + K$ no pueden ser disjuntos ya que ambos están contenidos en $U$, que tiene medida $< 2\lambda_n(K)$. Esto quiere decir que dado $x \in C$ existen $a, b \in K$ tales que $a = x + b$, o, equivalentemente, que $x \in K - K$. $\square$

**Corolario 2.3.6** (Subgrupos medibles de $(\mathbb{R}^n, +)$)**.** *Supongamos que $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subgrupo medible aditivo de $\mathbb{R}^n$. Entonces $E$ tiene medida 0.*

Demostración. En caso contrario, si $E$ tuviera medida estrictamente positiva, por el Teorema de Steinhaus, $E - E = E$ contiene un cubo $C$ no degenerado y centrado en 0 y por tanto $m \cdot C \subseteq E$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} m \cdot C \subseteq E$. $\square$

**Corolario 2.3.7.** *Todo conjunto medible $E \subseteq \mathbb{R}^n$ de medida $> 0$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$.*

Demostración. Todo cubo no degenerado tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$ (se puede encontrar directamente un homeomorfismo entre su interior y $\mathbb{R}^n$, que tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$). Por tanto, si $E$ tiene medida estrictamente positiva, entonces $E - E$ tiene cardinalidad $\mathfrak{c}$. Pero $E - E$ tiene como mucho la cardinalidad de $E \times E$, que es la de $E$, ya que $E$ es infinito.

$\square$

Teorema 2.3.8 (Desigualdad de Brunn-Minkowski). *Supongamos que $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos borelianos. Entonces se tiene que*

$$\lambda(A + B)^{\frac{1}{n}} \geqslant \lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}, \quad (24)$$

*y consecuentemente*

$$\lambda(tA + (1-t)B)^{\frac{1}{n}} \geqslant t\lambda(A)^{\frac{1}{n}} + (1-t)\lambda(B)^{\frac{1}{n}} \quad (25)$$

*para todo $0 \leqslant t \leqslant 1$.*

Nótese que se sigue de lo anterior que $\lambda_n(A + B) \geqslant \lambda_n(A) + \lambda_n(B)$ para todo Borel $A$, $B$.

Ejercicio 2.3.1 (Desigualdad de Young). *Demostrar que si $a_1, \ldots, a_m \geqslant 0$, $t_1, \ldots, t_m \geqslant 0$ y $\sum_{j=1}^n t_j = 1$, entonces*

$$\sum_{j=1}^m t_j a_j \geqslant \prod_{j=1} a_j^{t_j} \quad (26)$$

*con el convenio $0^0 = 1$. Deducir la desigualdad de las medias aritmética y geométrica:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \geqslant \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

Demostración. (Indicación: aplicar la función logaritmo y usar que ésta es una función cóncava.) $\square$

Demostración del Teorema 2.3.8. I) Supongamos que $A = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} C$, $B = \bigcup_{C\in\mathcal{D}} C$ con $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ cada una de ellas familias finitas de cubos disjuntos dos a dos. La demostración es por inducción en la suma de cardinalidades $m+n$ con $m := \#\mathcal{C}$ y $n := \#\mathcal{D}$. Supongamos que $m = n = 1$. Pongamos $C = \prod_{k=1}^d I_k$, $D = \prod_{k=1}^d J_k$ donde $\mathcal{C} = \{C\}$, $\mathcal{D} = \{D\}$. Entonces $C + D = \prod_{k=1}^d (I_k + J_k)$. Como $I_k + J_k$ es un intervalo con extremos $a_k + b_k$ y $c_k + d_k$, se tiene que $\ell(I_k + J_k) = \ell(I_k) + \ell(J_k)$, por tanto,

$$\lambda(C + D) = \prod_{k=1}^{d} (\ell(I_k) + \ell(J_k)) = \prod_{k=1}^{d} (\ell(I_k) + \ell(J_k)).$$

Por la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica,

$$\left(\prod_{k=1}^{d} \frac{\ell(I_k)}{\ell(I_k)+\ell(J_k)}\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\prod_{k=1}^{d} \frac{\ell(J_k)}{\ell(I_k)+\ell(J_k)}\right)^{\frac{1}{d}} \leqslant \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \frac{\ell(I_k)}{\ell(I_k)+\ell(J_k)} + \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d} \frac{\ell(J_k)}{\ell(I_k)+\ell(J_k)} = 1,$$

y de aquí se sigue que

$$\left(\prod_{k=1}^{d} \ell(I_k)\right)^{\frac{1}{d}} + \left(\prod_{k=1}^{d} \ell(J_k)\right)^{\frac{1}{d}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{d} \ell(I_k) + \ell(J_k)\right)^{\frac{1}{d}}.$$

Supongamos ahora que $m + n > 2$, y sin pérdida de generalidad supongamos que $m > 1$. Sean $C \neq C'$ en $\mathcal{C}$. Como $C \cap D = \varnothing$, tiene que haber una coordenada $1 \leqslant i_0 \leqslant d$ y un $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que exactamente uno de los dos $C, D$ está contenido en el semi-espacio $S := \{x_i \leqslant \alpha\} := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \,:\, x_i \leqslant \alpha\}$. Definamos

$$\begin{aligned} A^- :=& A \cap S \\ A^+ :=& A \backslash S. \end{aligned}$$

Para cada $\beta \in \mathbb{R}$, sea $B_\beta := B \cap \{x_i \leqslant \beta\}$. Como $\beta \in \mathbb{R} \mapsto \lambda(B_\beta)/\lambda(B) \in [0,1]$ es una función continua y exhaustiva, existe un $\beta$ tal que

$$\frac{\lambda(B_\beta)}{\lambda(B)} = \frac{\lambda(A^-)}{\lambda(A)}. \tag{27}$$

Se sigue de lo anterior que

$$\frac{\lambda(B\backslash B_\beta)}{\lambda(B)} = \frac{\lambda(B) - \lambda(B_\beta)}{\lambda(B)} = 1 - \frac{\lambda(A^-)}{\lambda(A)} = \frac{\lambda(A^+)}{\lambda(A)}. \tag{28}$$

Pongamos entonces

$$\begin{aligned} B^- :=& B_\beta \\ B^+ :=& B \backslash B_\beta. \end{aligned}$$

Sean

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\pm :=& \{C \cap A^\pm \,:\, C \in \mathcal{C}\} \qquad A^\pm := \bigcup_{C\in\mathcal{C}^\pm} C \\ \mathcal{D}^\pm =& \{C \cap B^\pm \,:\, C \in \mathcal{D}\} \qquad B^\pm := \bigcup_{C\in\mathcal{D}^\pm} C. \end{aligned}$$

Por construcción, $\mathcal{C}^-$ y $\mathcal{C}^+$ tienen cardinalidad $< m$ y $\mathcal{D}^-$ y $\mathcal{D}^+$ tienen cardinalidad $\leqslant n$. Nótese que $A^- + B^- \subseteq \{x_i \leqslant \alpha + \beta\}$ mientras que $A^+ + B^+ \subseteq \{x_i > \alpha + \beta\}$, y por tanto $A^- + B^-$ y $A^+ + B^+$ son disjuntos. Por tanto, por hipótesis de inducción

$$\begin{aligned} \lambda(A + B) \geqslant& \lambda(A^- + B^-) + \lambda(A^+ + B^+) \geqslant (\lambda(A^-)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B^-)^{\frac{1}{d}})^{\frac{1}{d}} + (\lambda(A^+)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B^+)^{\frac{1}{d}})^{\frac{1}{d}} = \\ =& \frac{\lambda(A^-)}{\lambda(A)}(\lambda(A)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{\frac{1}{d}})^{\frac{1}{d}} + \frac{\lambda(A^+)}{\lambda(A)}(\lambda(A)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{\frac{1}{d}})^{\frac{1}{d}} = (\lambda(A)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{\frac{1}{d}})^{\frac{1}{d}} \end{aligned}$$

Entonces (25) se deduce de lo anterior y del hecho que $\lambda(tA) = t^d \lambda A$.

Supongamos ahora que $A$ es un abierto y $B$ es una reunión disjunta finita de cubos. Sabemos que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ siendo $\{C_n\}_n$ una familia de cubos disjuntos dos a dos (Teorema 2.6.7). Pongamos $A_m := \bigcup_{n=1}^{m} C_n$. Entonces por continuidad de la medida,

$$\lambda(A+B)^{\frac{1}{d}} = \lim_{m\to\infty} \lambda(A_m + B)^{\frac{1}{d}} \geqslant \lim_{m\to\infty} (\lambda(A_m)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{\frac{1}{d}}) = \lambda(A)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{\frac{1}{d}}.$$

II) Supongamos que $A$ y $B$ son compactos. Sean $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que:

1) para todo $n$ se tiene que $A_n$ y $B_n$ son una unión disjunta y finita de cubos,

2) para cada $n$ se tiene que $A_{n+1} \subseteq A_n$ y $B_{n+1} \subseteq B_n$ y

3) $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A$ y $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n = B$.

Nótese que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(A_n + B_n) = A + B$ ya que tanto $A$ como $B$ son compactos. Se sigue de la continuidad de las medidas (Proposición 1.2.6) que

$$\lambda(A+B)^{\frac{1}{d}} = \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n + B_n)^{\frac{1}{d}} \geqslant \lim_{n\to\infty} (\lambda(A_n)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B_n)^{\frac{1}{d}}) = \lambda(A)^{\frac{1}{d}} + \lambda(B)^{\frac{1}{d}}.$$

III) Caso general. Sabemos por la Proposición 2.3.3 que $A+B$ es medible. Si $\lambda(A)$ o $\lambda(B)$ es infinito, entonces de la invariancia por traslación de la medida de Lebesgue se sigue que $\lambda(A+B) \geqslant \max\{\lambda(A), \lambda(B)\}$ y por tanto la desigualdad en (24) se cumple trivialmente. Supongamos entonces que las medidas de $A$ y $B$ son finitas. Fijado $\varepsilon > 0$ sean $K \subseteq A$, $L \subseteq B$ compactos tales que $\lambda(A) \leqslant \lambda(K) + \varepsilon$ y $\lambda(B) \leqslant \lambda(B) + \varepsilon$. Entonces

$$\lambda(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqslant \lambda(K+L)^{\frac{1}{n}} \geqslant \lambda(K)^{\frac{1}{n}} + \lambda(L)^{\frac{1}{n}} \geqslant (\lambda(A) - \varepsilon)^{\frac{1}{n}} + (\lambda(B) - \varepsilon)^{\frac{1}{n}}$$

y como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene la desigualdad de Brunn-Minkowski para $A$ y $B$.

Finalmente demostremos ahora la desigualdad en (24): Fijemos $0 \leqslant t \leqslant 1$. Entonces como $tA$ y $(1-t)B$ son abiertos o compactos,

$$\lambda(tA + (1-t)B)^{\frac{1}{d}} \geqslant \lambda(tA)^{\frac{1}{d}} + \lambda((1-t)B)^{\frac{1}{d}} = t\lambda(A)^{\frac{1}{d}} + (1-t)\lambda(B)^{\frac{1}{d}}.$$

$\square$

**Nota 2.3.9.** *La misma demostración anterior demuestra que si $A$ y $B$ son medibles, entonces*

$$\lambda^*(A+B)^{\frac{1}{n}} \geqslant \lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}.$$

**Próximamente se añadirá la desigualdad isoperimétrica**

## 2.4. Las medidas de Lebesgue-Stieltjes

La medida de Lebesgue extiende a conjuntos Borel, y más, los volúmenes naturales de los cubos, y en particular la longitud de los intervalos acotados en $\mathbb{R}$. Vamos a ver que que cambiando esta longitud podemos definir otras medidas, llamadas de Lebesgue-Stieltjes, y veremos que cualquier medida Borel $\sigma$-finita de $\mathbb{R}$ es una medida de este tipo. Se utilizará una función positiva y creciente que perturbar la longitud de los intervalos, y que por el Teorema de Dynkin determinará la medida.

**Definición 2.4.1** (límites laterales)**.** *Dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{N}$ se define, cuando existen, el límite $f(x^-)$ de $f$ por la izquierda de $x$ y el límite $f(x^+)$ por la derecha de $x$ por*

$$f(x^-) := \lim_{a \to x^-} f(a)$$
$$f(x^+) := \lim_{a \to x^+} f(a).$$

Es fácil ver que para una función creciente $f$ se tiene que $f(x^-) = \sup_{a<x} f(a)$ y $f(x^+) = \inf_{x<a} f(x)$.

**Definición 2.4.2** (medida de Lebesgue-Stieltjes)**.** *Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ una función creciente. Se define*

*a) $\iota_f : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(\mathbb{R})$ como*

$$\iota_f(x) := [f(x^-), f(x^+)],$$

*b) $\Phi_f : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$ como*

$$\Phi_f(A) := \bigcup_{a \in A} \iota_f(a),$$

*c) para $A$ tal que $\Phi_f(A)$ es medible de Lebesgue se define*

$$m_f(A) := \lambda(\Phi_f(A)).$$

*La función $m_f$ se denomina* medida de Lebesgue-Stieltjes *asociada a $f$*

Vamos a ver que $m_f$ es una medida.

Teorema 2.4.3 ($m_f$ es una medida de Borel). *Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ creciente. Se tiene*

*a) $\Phi_f(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R})$.*

*b) $m_f$ es una medida $\sigma$-finita sobre el espacio de Borel $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ cumpliendo que*

$$m_f([a, b]) = f(b^+) - f(a^-). \tag{30}$$

**Definición 2.4.4.** *Saltos y Vallessdfsdfsd Sea $f : I \to [0, \infty[$ una función creciente definida en un intervalo (acotado o no). Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo no degenerado, acotado o no.*

*a) Diremos que $I$ es un* salto *de $f$ cuando $I$ es un intervalo maximal de $\mathbb{R} \backslash f(I)$.*

*b) Diremos que $I$ es un* valle *de $f$ cuando $I$ es un intervalo maximal donde $f$ es constante.*

**Proposición 2.4.5.** *Sea $f : I \to [0, \infty[$ una función creciente definida en un intervalo (acotado o no). Entonces*

*a) Un intervalo $J$ es un valle si y solamente si $J = \{f = y\}$ para $y \in f(I)$ tal que $\{f = y\}$ tiene más de un punto.*

*b) Todo salto acotado contenido en $[\inf f(\mathbb{R}), \sup f(\mathbb{R})]$ es de la forma $[f(x^-), f(x)[$ o $]f(x), f(x^+)]$.*

*c) $[f(a^-), f(b^+)] = f([a, b]) \cup \bigcup_{J \subseteq [f(a^-), f(b^+)] \text{ salto}} J = \Phi_f([a, b])$ para todo $a \leqslant b$.*

*d) $m_f([a, b]) = f(b^+) - f(a^-)$ para todo $a \leqslant b$.*

*e) El número de saltos y valles es numerable.*

Demostración. a): supongamos que $a < b$ son tales que $f(a) = f(b) = y$. Entonces $f(x) = y$ para todo $a \leqslant x \leqslant b$. Esto demuestra que si $\{f = y\}$ es un intervalo. b): Veamos que $[f(x^-), f(x)[$ y $]f(x), f(x^+)]$ son saltos. Ambos son disjuntos de $f(\mathbb{R})$; por otro lado supongamos que $[f(x^-), f(x)[\subsetneq J \subseteq \mathbb{R}\backslash f(\mathbb{R})$. Entonces claramente existe $y < f(x^-)$ en $J$ y por definición de $f(x^-)$, existe $a < x$ tal que $y \leqslant f(a) \leqslant f(x^-)$ y esto implica que $f(a) \in J$, cosa que es imposible. De manera similar se demuestra que $]f(x), f(x^+)]$ es maximal.

Supongamos que $J \subseteq [\inf f(\mathbb{R}), \sup f(\mathbb{R})]$ es un salto no degenerado y acotado. Sea $y := \sup J$. Supongamos primeramente que $y = \sup f(\mathbb{R})$. Veamos que entonces $\sup f(\mathbb{R}) = \max f(\mathbb{R})$. En caso contrario, para todo $n$ podemos encontrar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente tal que $(f_n)_n$ es estrictamente creciente y $\sup_{n\in\mathbb{N}} f(x_n) = y$, y por tanto $J$ contiene $f(x_n)$'s, que es imposible por ser $J$ un salto. Nótese que $x := \inf\{f = \max f(\mathbb{R})\}$ existe ya que en caso contrario tendríamos que $f$ es constante y por tanto $J$ sería degenerado. Si $x$ es en realidad mínimo, entonces $\sup J = y = f(x) = \max f(\mathbb{R})$ y por tanto podemos encontrar $a$ suficientemente cercano a $x$ tal que $f(x) \in J$, imposible. Si $x$ no es mínimo entonces $f(x) < f(x^+) = \max f(\mathbb{R}) = y$ y por tanto $J \subseteq ]f(x), f(x^+)]$, y por maximalidad tienen que ser iguales.

Supongamos que $y = \sup J < \sup f(\mathbb{R})$. Por tanto podemos encontrar una sucesión estrictamente decreciente $(f(x_n))_n$ con límite $y$. Como $f$ es creciente, $(x_n)_n$ tiene que ser estrictamente decreciente. La sucesión tiene que estar acotadamente inferiormente, ya que si no, tendríamos que $J = \{y\}$ que es degenerado. Sea pues $x := \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$. Entonces $f(x) = \sup J$ y se cumple que $J \subseteq [f(x^-), f(x)[$, que tienen que ser iguales por maximalidad.

c): la inclusión derecha a izquierda es trivial. Veamos la otra inclusión. Supongamos que $a < b$ ya que el caso $a = b$ es trivial. Supongamos ahora que $y \in [f(a^-), f(b^+)]\backslash f([a, b])$. Sea $J$ la reunión de los intervalos $I$ que contienen $y$ y contenidos en $[f(a^-), f(b^+)]\backslash f([a, b])$. Entonces $J$ es un intervalo, que tiene que ser no degenerado: En caso contrario, si $J = \{y\}$ entonces o bien $y < f(b^+)$ o bien $f(a^-) < y$. En el primer caso, si $f(b) < y$ se sigue que $y \subseteq ]f(b), f(b^+)]$ que es un intervalo no degenerado, mientras que si $y < f(b)$, podemos encontrar una sucesión estrictamente decreciente $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y = \inf_{n\in\mathbb{N}} f(x_n)$. En este caso se demuestra como antes que $x := \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n$ cumple que $f(x) < f(x^+) = y$ y por tanto $y \in ]f(x), f(x^+)]$ que es no degenerado. Contradicción. Como $J$ es no degenerado, tiene que ser un salto.

d) se sigue del hecho que los valles son disjuntos dos a dos y los saltos también. $\square$

Demostración del Teorema 2.4.3. Sea $\mathcal{A} := \{\Phi_f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})\}$ la familia de conjuntos $A$ tales que $\Phi_f(A)$ es Lebesgue-medible. Vamos a ver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$. Primeramente, se sigue de la Proposición 2.4.5 que para todo intervalo acotado $[a, b]$ se tiene que

$$\Phi_f([a, b]) = [f(a^-), f(b^+)].$$

Por tanto, la imagen de todo intervalo cerrado es un intervalo cerrado. Por tanto, si escribimos $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ reunión numerable creciente de intervalos cerrados y acotados, entonces $\Phi_f(\mathbb{R}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_f(I_n)$ es una reunión numerable creciente de intervalos cerrados y por consecuencia también medible de Lebesgue.

Seguidamente, si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, entonces

$$\Phi_f(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_f(A_n)$$

es Lebesgue medible ya que sabemos que $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ es una $\sigma$-álgebra (Teorema 2.1.11).

Obs. 17. Sea $V := \bigcup_{I \text{ valle}} f(I)$. Entonces si $A, B$ son disjuntos, entonces $\Phi_f(A) \cap \Phi_f(B) \subseteq V$.

Demostración. Supogamos que $y \in \Phi_f(A) \cap \Phi_f(B)$, y sean $a \in A$ y $b \in B$ tales que $y \in [f(a^-), f(a^+)] \cap [f(b^-), f(b^+)]$. Como los saltos de $f$ son disjuntos, se sigue que los intervalos anteriores son degenerados, i.e., $f(a^-) = f(a^+) = f(a)$ y $f(b^-) = f(b^+) = f(b)$. Por tanto, $y = f(a) = f(b)$, $a \neq b$ pertenecen a un valle e $y \in V$. □

Ahora, dado $A \in \mathcal{A}$ se tiene que

$$\Phi_f(\mathbb{R} \backslash A) \triangle (\Phi_f(\mathbb{R}) \backslash \Phi_f(A)) \subseteq V.$$

Y como hemos visto en la Proposición 2.4.5 que $V$ es numerable, podemos concluir que $\Phi_f(\mathbb{R} \backslash A)$ difiere del conjunto medible $\Phi_f(I) \backslash \Phi_f(A)$ en un conjunto de medida cero y por tanto también es medible. Esto demuestra que $\mathcal{A}$ es una $\sigma$-álgebra. Como todo abierto es reunión numerable de intervalos cerrados, se tiene que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{A}$ por minimalidad del álgebra de Borel. De la misma manera, si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, entonces $\{\Phi_f(A_n) \backslash V\}_{n \in \mathbb{N}}$ son disjuntos dos a dos y por tanto,

$$\begin{aligned} m_f(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) &= \lambda(\Phi_f(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n)) = \lambda(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Phi_f(A_n) \backslash V)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda((\Phi_f(A_n) \backslash V) = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda((\Phi_f(A_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} m_f(A_n). \end{aligned}$$

Esto demuestra que $m_f$ es una medida, que es $\sigma$-finita ya que la medida de todo intervalo acotado es finita. □

Teorema 2.4.6. *Sea $\mu$ una medida de Borel $\sigma$-finita en $\mathbb{R}$.*

*a) Existe una función creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu = m_f$.*

*b) Supogamos que $\mu$ es finita. Se define la* distribución acumulada *de $\mu$ como la función*

$$F_\mu(x) := \mu(]-\infty, x]).$$

*Entonces $m_{F_\mu} = \mu$ y si $f$ es una función creciente, positiva y continua por la derecha tal que $m_f = \mu$ entonces $f = F_\mu + c$, donde $c = \lim_{a \to -\infty} f(a)$.*

Demostración. a): sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(a) := \mathbb{1}_{[0,\infty[}(a)\mu([0,a])$, $h(a) := \mathbb{1}_{]-\infty,0[}(a)\mu([a,0[)$. Nótese que las funciones están bien definidas ya que como $\mu$ es $\sigma$-finita, tiene que medir finitamente a los intervalos.[1] Entonces $g$ es creciente y $h$ decreciente y por tanto $f := g - h$ es creciente. Ahora, dado un intervalo cerrado $[a,b]$ se comprueba utilizando la continuidad de la medida que

$$\mu([a,b]) = m_f([a,b]) \tag{31}$$

El Teorema de Dynkin nos dice entonces que $\mu = m_f$ (ver Corolario 1.3.7). Si suponemos además que $\mu$ es finita, entonces, se sigue de (30) y de (31) que

$$\mu(]-\infty, x]) = \sup_{a<x} \mu([a,x]) = \sup_{a<x} m_f([a,x]) = f(x^+) - \inf_{a<x} f(a^-) \tag{32}$$

b): supongamos que $\mu$ es finita. Entonces la función $F_\mu$ es positiva, creciente y continua por la derecha y por tanto,

$$m_{F_\mu}([a,b]) = F_\mu(b^+) - F_\mu(a^-) = \mu(]-\infty, b]) - \mu(]-\infty, a[) = \mu([a,b]).$$

[1] En realidad veremos en el Capítulo 9 que para espacios locamente compactos y separables, ser $\sigma$-finita es equivalente a medir finitamente a los compactos

Finalmente, supongamos que $m_f = \mu$ con $f$ positiva y creciente. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\mu(]-\infty, x]) = &\sup_{a<x} \mu([a,x]) = \sup_{a<x} f(x^+) - f(a^-) = f(x^+) - \inf_{a<x} f(a^-) = f(x^+) - \lim_{a\to-\infty} f(a) = \\ =&f(x) - f(-\infty).\end{aligned}$$

□ □

Una medida que cumple que $\mu(\{x\}) = 0$ para todo $x$ se denomina *continua*. Este concepto y la función distribución acumulada se estudiarán con un poco más de profundidad en la Sección

## 2.6. Unicidad de la medida de Lebesgue

Vamos a ver que $\lambda_n$ en los borelianos es la medida de Haar del grupo aditivo $(\mathbb{R}^n, +)$.

### 2.6.1. $n$-cubos semiabiertos.

**Definición 2.6.1** (Intervalos diádicos)**.** *Recordemos que un número real se dice que es una* racional diádico *cuando*

$$|r| = \frac{k}{2^m}$$

*para ciertos* $k, m \in \mathbb{N}$*. Diremos que un intervalo cerrado-abierto* $I = [a, b[$ *es un* intervalo diádico semiabierto *cuando* $a = \frac{k}{2^m}$ *y* $b = \frac{k+1}{2^m}$ *para cierto* $k \in \mathbb{Z}$ *y cierto* $m \in \mathbb{N}$*. Diremos que un intervalo diádico semiabierto* $I$ *es un* $m$*-invervalo cuando su longitud es* $1/2^m$*, y diremos que su* profundidad $\mathfrak{p}(I)$ *es* $m$*.*

**Proposición 2.6.2.** *Para todo abierto* $U \subseteq \mathbb{R}$ *y todo* $x \in U$ *existe un intervalo diádico semiabierto* $D$ *tal que* $x \in D \subseteq U$*.*

Demostración. Sea $x \in ]a, b[\subseteq U$, sea $\varepsilon = \text{mín}\{x - a, b - x\}$, y sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $1/2^m < \varepsilon$. Finalmente, sea $k := \lfloor x \cdot 2^m \rfloor$, donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función suelo, $\lfloor r \rfloor := \text{máx}\{n \in \mathbb{Z} : n \leqslant r\}$. Por tanto

$$\frac{k}{2^m} \leqslant x < \frac{k+1}{2^m}.$$

Como $x - k/2^m, (k+1)/2^m - x < 1/2^m < \varepsilon$, se sigue que

$$x \in \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m}\right[ \subseteq ]a, b[\subseteq U.$$

□

**Proposición 2.6.3.** *Supongamos que* $I, J$ *son dos intervalos diádicos semiabiertos. Entonces* $I \subseteq J$ *o* $J \subseteq I$ *o* $I \cap J = \varnothing$*.*

Demostración. Ejercicio. □

**Definición 2.6.4.** *Un* $n$*-cubo diádico semiabierto de* $\mathbb{R}^n$ *es un rectángulo* $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$*, donde* $I_1, \ldots, I_n$ *son intervalos diádicos semiabiertos de la misma longitud.*

Evidentemente hay una cantidad infinita numerable de $n$-cubos diádicos semiabiertos.

**Proposición 2.6.5.** *Para todo abierto* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *y todo* $x \in U$ *existe un* $n$*-cubo diádico semiabierto* $D$ *tal que* $x \in D \subseteq U$*.*

Demostración. Utilícese la Proposición 2.6.2. Ejercicio. □

**Proposición 2.6.6.** *Si* $C, D$ *son* $n$*-cubos diádicos semiabiertos de* $\mathbb{R}^n$*, entonces* $C \subseteq D$ *o* $D \subseteq C$ *o* $D \cap C = \varnothing$*. Consecuentemente, la intersección de* $n$*-cubos diádicos semiabiertos es un* $n$*-cubo diádico semiabierto.*

Demostración. Utilizar Proposición 2.6.3 en cada coordenada. □

Teorema 2.6.7 (Abiertos y $n$-cubos semiabiertos en $\mathbb{R}^n$). *Todo abierto de* $\mathbb{R}^n$ *es unión disjunta numerable de* $n$*-cubos diádicos semiabiertos.*

Demostración. Fijemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que un $n$-cubo $C$ con profundidad $m$ es $U$-admisible si $C \subseteq U$ y no existe un cubo $D$ de profundidad $m-1$ tal que $C \subseteq D \subseteq U$. Veamos que

$$\bigcup_{C \text{ es } U\text{-admisible}} C = U.$$

Primeramente, veamos que la reunión anterior es disjunta, es decir, si $C \neq D$ son $U$-admisibles, entonces $C \cap D = \varnothing$. Si no, se sigue de la Proposición 2.6.5 que $C \subseteq D$ o $D \subseteq C$. Supongamos que $C \subseteq D$; por tanto la profundidad de $\mathfrak{p}(C) \geqslant \mathfrak{c}(D)$ y como $C$ es $U$-admisible, se sigue que $\mathfrak{p}(C) = \mathfrak{p}(D)$, o sea $C = D$, imposible.

Claramente $\bigcup_{C \text{ es } U\text{-admisible}} C \subseteq U$. Veamos que $\bigcup_{C \text{ es } U\text{-admisible}} C \supset U$: Sea $x \in U$. Utilizamos la Proposición 2.6.5 para encontrar un $n$-cubo diádico semiabierto $C$ tal que $x \in C \subseteq U$, y lo escogemos tal que su profundidad es mínima. Se sigue entonces que $C$ es $U$-admisible, y hemos acabado la demostración. □

**Nota 2.6.8** (Reuniones disjuntas de rectángulos). *Veamos que todo abierto de $\mathbb{R}$ es unión disjunta numerable de intervalos abiertos: Fijemos un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$; diremos que un intervalo abierto $I$ (acotado o no) es* admisible *si $I \subseteq U$ y no existe intervalo abierto tal que $I \subsetneq J \subseteq U$. Intervalos $I, J$ admisibles y diferentes, tienen que ser disjuntos ya que en caso contrario la reunión es un intervalo abierto contenido en $U$ que contiene tanto a $I$ como a $J$. Esto contradice la maximalidad de $I$ o de $J$. Por otro lado, veamos que todo $x \in U$ pertenece a un intervalo admisible: Sea $\mathfrak{X} := \{J \subseteq U \ : \ x \in J, \text{ intervalo}\}$. Nótese que $\mathfrak{X}$ es cerrado bajo reuniones: Dados $J, K \in \mathfrak{X}$ se tiene que $J \cap K \neq \varnothing$, y por tanto $J \cup K$ es un intervalo abierto contenido en $U$ que contiene a $x$. Entonces*

$$I := \bigcup_{J \in \mathfrak{X}} J.$$

*es un intervalo que contiene a $x$ ya que si $a < b$ y $a, b \in I$ entonces hay $J, K \in \mathfrak{X}$ tales que $a \in J$ y $b \in K$ y por tanto $]a, b[ \subseteq J \cup K \in \mathfrak{X}$. Está claro que $I$ es admisible y contiene a $x$. Por tanto se tiene que*

$$\bigcup_{I \text{ admisible}} I = U$$

*reunión disjunta. Finalmente veamos que la reunión es numerable: para cada $I$ admisible sea $q_I \in Q \cap I$ Entonces $I$ admisible $\mapsto q_I \in \mathbb{Q}$ es una función inyectiva y por tanto el número de intervalos admisibles es a lo sumo la cardinalidad de $\mathbb{Q}$.*

*El resultado análogo para $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ es falso ya que si fuera cierto demostraría que todo abierto conexo es un $n$-cubo abierto (o un rectángulo abierto), algo que es cierto en $\mathbb{R}$ pero no en dimensiones superiores.*

### 2.6.2. Unicidad de la medida de Lebesgue.

**Definición 2.6.9** (Medida Borel). *Recordemos que una medida $\mu$ se denomina* Borel *cuando está definida sobre la $\sigma$-álgebra de los conjuntos borelianos de un cierto espacio topológico $X$.* [2]

Teorema 2.6.10 (Unicidad de la medidas de Lebesgue). *Supongamos que $\mu$ es una medida de Borel en $\mathbb{R}^n$ tal que*

*a) $\mu$ es invariante bajo traslación, es decir $\mu(x + A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*
*b) $\mu([0,1]^n) < \infty$.*

*Entonces $\mu(A) = \mu([0,1]^n) \cdot \lambda_n(A)$ para todo boreliano $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

[2]Algunos autores piden que las medidas de Borel asignen medida finita a los subconjuntos compactos

Demostración. Vamos a utilizar el Teorema 1.3.6 de Dynkin. Sea $\mathcal{F}_n$ la familia de uniones finitas de $n$-cubos diádicos semiabiertos de $\mathbb{R}^n$.

Obs. 18. Supongamos que $D, E \in \mathcal{F}_n$. Entonces

1) $D$ es una unión disjunta de $n$-cubos diádicos semiabiertos y
2) $D \cap E \in \mathcal{F}_n$.

Demostración. 1): Dada una colección finita $\mathcal{D}$ de $n$-cubos diádicos semiabiertos, sea

$$\mathcal{M} = \{D \in \mathcal{D} \,:\, D \text{ es maximal de } \mathcal{D} \text{ con respecto a la inclusión}\}.$$

Entonces se sigue de la Proposición 2.6.6 que elementos diferentes de $\mathcal{M}$ son disjuntos. Además es fácil ver que $\bigcup_{D\in\mathcal{M}} D = \bigcup_{D\in\mathcal{D}} D$.

2): Supongamos que $\mathcal{D}$ y $\mathcal{E}$ son colecciones finitas de $n$-cubos diádicos semiabiertos. Entonces

$$\left(\bigcup_{D\in\mathcal{D}} D\right) \cap \left(\bigcup_{E\in\mathcal{E}} E\right) = \bigcup_{D\in\mathcal{D},\, E\in\mathcal{E}} D \cap E \in \mathcal{D}_n,$$

ya que la intersección de $n$-cubos diádicos semiabiertos es un $n$-cubo diádico semiabierto. □

Obs. 19. Para todo $n$-cubo diádico semiabierto $D$ se tiene

$$\mu(D) = \mu([0,1^n)\lambda_n(D) = \mu([0,1[^n)\left(\frac{1}{2^{\mathfrak{p}(D)}}\right)^n.$$

Consecuentemente, para todo $X \in \mathcal{D}_n$ se tiene que

$$\mu(X) = \mu([0,1[^n) \cdot \lambda_n(X) \tag{33}$$

Demostración. Lo demostramos por inducción sobre la profundidad $\mathfrak{p}(D)$ de $D$. Si $\mathfrak{p}(D) = 0$, entonces $D = x + [0,1[^n$, para cierto punto $x \in \mathbb{R}^n$ y por tanto la igualdad en (33) se sigue del hecho que $\mu$ es invariante por traslación. Supongamos el resultado para la profundidad $m$, y escojamos un $n$-cubo diádico semiabierto $D$ de profundidad $m$. Entonces $D$ contiene exactamente $2^n$ $n$-cubos diádicos semiabiertos de profundidad $m+1$, que son disjuntos dos a dos y cuya unión es $E$. Por tanto,

$$\mu([0,1[^n) \cdot \left(\frac{1}{2^m}\right)^n = \mu(D) = \mu\left(\bigcup_{\mathfrak{p}(E)=m+1,\, E\subseteq D} \mu(E)\right) = 2^n\mu(E_0)$$

donde $E_0$ es un $n$-cubo diádico semiabierto arbitrario, y por tanto

$$\mu(E) = \mu(E_0) = \mu([0,1[^n) \cdot \left(\frac{1}{2^{m+1}}\right)^n$$

para todo $n$-cubo diádico semiabierto $E$ de profundidad $m+1$. □

Nótese que $[-k,k[^n \in \mathcal{D}_n$ para todo $k$, y $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}[-k,k[^n = \mathbb{R}^n$. Sea $\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ la medida de Borel

$$\nu(B) := \mu([0,1[^n) \cdot \lambda_n(B).$$

Como $\mathcal{D}_n \cap \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{D}_n$, y $\mu$ y $\nu$ coinciden en $\mathcal{D}_n$, se sigue del Teorema 1.3.6 que $\mu$ y $\nu$ coinciden en $\Sigma(\mathcal{D}_n)$. Cada elemento de $\mathcal{D}_n$ es Borel, por tanto cada elemento de $\Sigma(\mathcal{D}_n)$ también. Por otro lado, se sigue del Teorema 2.6.7 que todo abierto de $\mathbb{R}^n$ pertenece a $\Sigma(\mathcal{D}_n)$ y por tanto, todo boreliano también. Es decir, $\Sigma(\mathcal{D}_n) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, y por tanto $\mu(B) = \mu([0,1[^n) \cdot \lambda_n(B)$ para todo boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^n$. Finalmente, veamos que

$$\mu([0,1]^n) = \mu([0,1[^n).$$

Diremos que un hiperrectángulo $I_1 \times \cdots \times I_n$ es un $k$-rectángulo, cuando cada $I_j$ es un intervalo cerrado y existen exactamente $k$ intervalos $I_j$ no degenerados (i.e. de longitud $> 0$).

Obs. 20. Todo $k$-rectángulo cerrado con $k < n$ tiene $\mu$-medida 0. Consecuentemente

$$\mu(R) = \mu(\overset{\circ}{R}), \tag{34}$$

para todo n-rectángulo cerrado $R$, donde $\overset{\circ}{R}$ denota el interior de $R$.

Demostración. Para $k < n$, todo $k$-rectángulo cerrado está contenido en un $n-1$-rectángulo, todo $k$-rectángulo cerrado es unión finita de $k$-rectángulos cerrado $I_j \times \cdots \times I_n$ con $\max_{i=1}^n \ell(I_j) \leqslant 1$, así que suponemos que $R$ es un $n-1$-rectángulo cerrado $R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ con $\max_i(b_i - a_i) \leqslant 1$. Además, como $\mu$ es invariante bajo traslaciones, podemos suponer que $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$. Por tanto, $R \subseteq [0,1]^n$. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$ la única coordenada tal que $b_j = a_j = 0$. Para cada $r \in [0,1]$ racional, sea $x_r$ el punto de $\mathbb{R}^n$ que tiene una única coordenada $\neq 0$ y que vale $r$. Entonces $x_r + R \subseteq [0,1]^n$ y $\mu(x_r + R) = \mu(R)$. Como $x_r + R$ y $x_s + R$ son disjuntos si $r \neq s$, se tiene necesariamente que $\mu(R) = 0$.

Finalmente, como el borde de un $n$-rectángulo cerrado $R$ es unión de $2n$ $n-1$-rectángulos, se sigue que $\mu(\partial(R)) = 0$ y por tanto

$$\mu(R) = \mu(\partial R) + \mu(\overset{\circ}{R}) = \mu(\overset{\circ}{R}).$$

□

Por tanto,

$$\mu([0,1]^n) = \mu(]0,1[^n) \leqslant \mu([0,1[^n) \leqslant \mu([0,1]^n),$$

y consecuentemente $\mu([0,1[^n) = \mu([0,1]^n)$. □

## 2.7. Transformaciones afines, Paralelepípedos

Vamos a calcular la medida de Lebesgue de un paralelepípedo.

**Proposición 2.7.1.** *Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación inyectiva tal que $T(\mathbb{R}^n)$ es medible de Lebesgue. Sea $\mathcal{A}_T := \{X \subseteq \mathbb{R}^n : T(X) \text{ es medible de Lebesgue}\}$ y definamos $\lambda_T : \mathcal{A}_T \to [0, \infty]$ por $\lambda_T(X) := \lambda(T(X))$. Entonces $\mathcal{A}_T$ es una $\sigma$-álgebra de $\mathbb{R}^n$ y $\lambda_T$ es una medida $\sigma$-aditiva.*

Demostración. Ejercicio. □

**Proposición 2.7.2** (transformaciones afines)**.** *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación afín. Entonces*

*a) Si $T$ es 1-1 entonces $T(B)$ es Borel si $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es Borel.*
*b) $T(X)$ es nulo si $X$ es nulo.*
*c) $T(X)$ es medible si $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es medible.*
*d) $\lambda(T(X)) = \lambda(T([0,1]^n))\lambda(X)$ para todo $X \subseteq \mathbb{R}^n$ medible.*
*e) $T$ no es 1-1 si y solamente si $\lambda(ImT) = 0$.*

Demostración. Obsérvese que si se demuestra el resultado suponiendo que $T$ es lineal (es decir que $T(0) = 0$), entonces se demuestra en general ya que si $T$ es afín entonces $U := T - T(0)$ es lineal y se tiene que $T(E) = U(E) + T(0)$, que es Borel (medible) si y solamente si $E(B)$ es Borel (resp. medible), mientras que $\mu_T(M) = \lambda(T(M)) = \lambda(T(M) - T(0)) = \mu_U(M)$, ya que la medida de Lebesgue es invariante bajo traslaciones. Por tanto, supongamos que $T$ es lineal. Supongamos primero que $T$ es inyectiva. Entonces $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una biyección y como $T$ es lineal, su inversa también es lineal; en particular $T$ es un homeomorfismo. Esto implica que la imagen de un abierto es un abierto y, como $T$ es una biyección, la imagen de un boreliano es un boreliano. Esto demuestra *a)*.

Obs. 21. $\lambda_T(B) = \lambda(T([0,1]^n))\lambda(B)$ para todo $B \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano.

Demostración. $\lambda_T : \mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ es una medida ($\sigma$-aditiva) invariante por traslaciones: Dado $p \in \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel, se tiene que $\lambda_T(p+B) = \lambda(T(p+B)) = \lambda(T(p)+T(B)) = \lambda(T(B)) = \lambda_T(B)$. Por tanto, por la unicidad de la medida de Lebesgue (Teorema 2.6.10) nos da el resultado buscado. ☐

Demostremos ahora *b)*: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ nulo. Dado $\varepsilon > 0$, sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un abierto tal que $X \subseteq U$ y tal que $\lambda(U) \leqslant \varepsilon$. Entonces del hecho anterior se sigue que

$$\lambda^*(T(X)) \leqslant \lambda(T(U)) = \lambda(T([0,1]^n))\lambda(U) \leqslant \lambda(T([0,1]^n))\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que $\lambda_T(X) = \lambda(T(X)) = \lambda^*(T(X)) = 0$.

Demostremos *c)*: Supongamos que $X$ es medible de Lebesgue. Utilizamos el criterio 6) en el Teorema 2.1.14 para encontrar un boreliano $B$ tal que $X \triangle B$ es nulo. Como $T$ es una biyección, se tiene que $T(X\triangle B) = T(X)\triangle T(B)$. Por b), se tiene que $T(X\triangle B)$ es nulo, y combinando esto con el hecho de que $T(B)$ es Borel, obtenemos que $T(X)$ es medible de Lebesgue, a partir del mismo criterio 6).

*d)*: Sea $X \subseteq \mathbb{R}^n$ medible. Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ borel tal que $\lambda(X\triangle B) = 0$, y por tanto, $\lambda(X) = \lambda(B)$. Similarmente, $\lambda(T(X)\triangle T(B)) = \lambda(T(X\triangle B)) = 0$ y consecuentemente $\lambda(T(X)) = \lambda(T(B))$. A partir del Hecho 21 obtenemos que

$$\lambda(T(X)) = \lambda(T(B)) = \lambda(T([0,1]^n)) = \lambda(B) = \lambda(T([0,1]^n))\lambda(X).$$

Supongamos ahora que $T$ no es inyectiva.

Obs. 22. $\lambda(\operatorname{Im} T) = 0$.

A partir de este hecho se sigue que $T(X)$ es medible (de medida cero) para *todo* $X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $k := \dim \operatorname{Im} T < n$, y sea $(y_1 \dots, y_n)$ una base de $\mathbb{R}^n$ tal que $(y_1, \dots, y_k)$ es base de $\operatorname{Im} T$. Sea $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la aplicación lineal definida por $U(e_i) = y_i$ para cada $i = 1, \dots, n$, donde $(e_1, \dots, e_n)$ es la base canónica de $\mathbb{R}^n$, $e_i = (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)$. Como $U$ es biyectivo, tenemos que

$$\lambda(\operatorname{Im} T) = \lambda(\langle y_i\rangle_{i=1}^k) = \lambda(\langle U(e_i)\rangle_{i=1}^k) = \lambda(U([0,1]^n))\lambda(\langle e_i\rangle_{i=1}^k) = 0.$$

☐

e) acabamos de ver que cuando $T$ no es 1-1, $\lambda(\operatorname{Im} T) = 0$. Supongamos ahora que $T$ es 1-1. Entonces $T$ es invertible; sea $U$ su inversa. Entonces,

$$1 = \lambda([0,1]^n) = \lambda((T(U([0,1]^n))) = \lambda(T([0,1]^n))\lambda(U([0,1]^n)),$$

y por tanto $\lambda(T[0,1]^n) \neq 0$. ☐

**Nota 2.7.3** (Conjuntos analíticos)**.** *No es cierto que si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación afín no inyectiva, entonces $T(B)$ es Borel para todo Borel $B$: Tomemos $T(e_1) = e_1$, $T(e_2) = 0$. Entonces $T(B)$ es, en general, un conjunto* analítico*, quizás no Borel, de $\mathbb{R} \times \{0\}$). Recordemos que $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto analítico si $X = f(B)$ donde es una función continua $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto boreliano. Para una información completa sobre estos conjuntos, ver* [7, Sección 14].

Calculemos ahora la medida del paralelepípedo $T([0,1]^n)$ asumiendo que $T$ es afín. Dada una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, sea $A_T$ la matriz cuadrada $d \times d$ de la aplicación $T$ en la base canónica $(e_1, \dots e_d)$, $e_i := (0, \dots, 0, \overset{(i)}{1}, 0, \dots, 0)$ para cada $i = 1, \dots, n$. Denotaremos el conjunto de todas las $n \times n$-matrices como $\mathcal{M}_n$.

TEOREMA 2.7.4 (Medida de un paralelepípedo). *Supongamos que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una aplicación lineal. Entonces se cumple que*

$$\lambda(T([0,1]^n)) = |\det A_T|. \tag{35}$$

*Por consecuencia,*

*a) Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una aplicación afín, y $A_T$ es la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^n$ de la aplicación lineal $T - T(0)$, entonces*

$$\lambda(T(X)) = |\det(A_T)|\lambda(X) \text{ para todo } X \subseteq \mathbb{R}^n \text{ medible.}$$

*b) Si $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un paralelepípedo de dimensión d definido por los vectores (lados a partir de un vértice fijado) $\bar{v}_1, \dots \bar{v}_n$, entonces la medida de Lebesgue de $P$ es*

$$\lambda(P) = |\det(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)|.$$

Utilizaremos el siguiente resultado.

**Lema 2.7.5.** *Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las $n \times n$-matrices $A$ que satisfacen una de las siguientes condiciones:*

*I) $A = A_\pi$ para cierta permutación $\pi : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, donde $A_\pi \cdot e_i = e_{\pi(i)}$ para todo $i = 1, \dots, n$;*

*II) $A = A_\alpha$ para cierto $\alpha \in \mathbb{R}$, donde $A_\alpha \cdot e_1 = \alpha e_1$ y $A_\alpha \cdot e_i = e_i$ para todo $2 \leqslant i \leqslant n$;*

*III) $A = A_s$, donde $A_s \cdot e_1 = e_1 + e_2$ y $A_s \cdot e_i = e_i$ para todo $2 \leqslant i \leqslant n$.*

*Entonces toda $n \times n$-matriz es un producto de matrices en $\mathcal{D}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $\widehat{\mathcal{D}}$ la colección de productos de elementos $\mathcal{D}$. Queremos ver que $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_n$. Nótese que $A \cdot A_\pi$ permuta las columnas de $A$ y similarmente $A_\pi \cdot A$ permuta las filas de $A$.
1) $\widehat{\mathcal{D}^\circ}$ contiene las matrices $A$ tales que $A - \mathrm{Id}$ tiene rango a lo sumo uno, es decir, tales que $Ae_i = e_i$ para todo $i$ excepto posiblemente un índice: Supongamos primeramente que $Ae_i = e_i$ para todo $i \geqslant 2$. Sea $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) := Ae_1$. Supongamos ahora que $a_1 \neq 0$. Demostramos que $A \in \widehat{\mathcal{D}}$ por inducción en el número $k$ de coordenadas $a_i$ no nulas. Si $k = 1$, entonces $A = A_{a_1} \in \mathcal{D}$. Supongamos que $k > 1$ y que $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ son las coordenadas no nulas con $1 = i_1 < \cdots < i_k$. Sea $B \in \mathcal{M}_k$ tal que $Be_1 = \sum_{j=1}^{k-1} a_{i_j} e_{i_j}$ y $Be_i = e_i$ para $i = 2, \dots, n$. Entonces por hipótesis de inducción $B \in \widehat{\mathcal{D}}$. Sea $\pi$ la permutación tal que $\pi(i_k) = 1$, y que deja fijo todos los $i \neq 1, i_k$. Entonces $C_\alpha := A_\pi \cdot A_\alpha \cdot A_\pi$ cumple que $C_\alpha e_{i_k} = \alpha e_{i_k}$ y $C_\alpha e_i = e_i$ para todo $i \neq i_k$. Entonces se cumple que $B \cdot C_\alpha e_i = Be_i$ para todo $i \neq i_k$, mientras que $B \cdot C_\alpha e_{i_k} = \alpha e_{i_k}$. Sea $\mu$ la permutación que manda 2 a $i_k$ y deja los $i \neq 2, i_k$ fijos, y definimos $D := A_\mu \cdot A_s \cdot A_\mu$. Entonces $De_i = e_i$ para $i > 1$ mientras que $De_1 = e_1 + e_{i_k}$. Entonces

$$A = C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \cdot D \cdot B \cdot C_{\frac{a_1}{a_{i_k}}}$$

ya que

$$C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \cdot D \cdot B \cdot C_{\frac{a_1}{a_{i_k}}} e_1 = C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \cdot D \cdot Be_1 = C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \cdot (Be_1 + a_1 e_{i_k}) = Ae_1,$$

mientras que

$$C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \cdot D \cdot B \cdot C_{\frac{a_1}{a_{i_k}}} e_{i_k} = C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \cdot D \cdot B \frac{a_1}{a_{i_k}} e_{i_k} = C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \cdot D \frac{a_1}{a_{i_k}} e_{i_k}) = C_{\frac{a_{i_k}}{a_1}} \frac{a_1}{a_{i_k}} e_{i_k} = e_{i_k}$$

y finalmente $C_{a_{i_k}/a_1} \cdot D \cdot B \cdot C_{a_1/a_{i_k}} e_i = e_i$ para el resto de los índices, ya que cada matriz utilizada fija esos $e_i$. Supongamos ahora que $a_1 = 0$. Sea $B \in \mathcal{M}_n$ tal que $Be_1 = e_1 + Ae_1$ y $Be_i = e_i$ para $i > 1$. Entonces acabamos de demostrar que $B \in \widehat{\mathcal{D}}$, y como $A = A_0 \cdot B$, se tiene también que $A \in \widehat{\mathcal{D}}$.

Supongamos ahora que $Ae_i = e_i$ para todo $i \neq j$ con $j > 1$. Sea $\pi$ la transposición que cambia 1 por $j$. Sea $B \in \mathcal{M}_n$ tal que $Be_i = e_i$ para $i > 1$ y $Be_1 = A_\pi A e_j$. Entonces $B \in \widehat{\mathcal{D}}$ y $A = A_\pi \cdot B \cdot A_\pi$: Si $i \neq 1, j$, entonces la columna $i$ de las tres matrices es $e_i$, por tanto la composición también. Por otro lado,

$$A_\pi \cdot B \cdot A_\pi e_1 = A_\pi \cdot U e_j = A_\pi e_j = e_1.$$

Finalmente,

$$A_\pi \cdot B \cdot A_\pi e_j = A_\pi \cdot B e_1 = A_\pi \cdot A_\pi A e_j = A e_j.$$

2) $\widehat{\mathcal{D}}$ contiene todas las matrices $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathcal{M}_n$ tales que existe $k = k_A \leqslant n$ cumpliendo que $\det(a_{ij})_{i,j=1}^l \neq 0$ si $l \leqslant k$ (en particular $Ae_1, \dots Ae_k$ son linealmente independientes), mientras que $Ae_l \in \langle Ae_j \rangle_{j \leqslant k}$ para todo $k < l \leqslant n$: fijemos una matriz $A$ de ese tipo y para cada $1 \leqslant k \leqslant n$, sea $B_k$ la $n \times n$-matriz cuyas primeras $k$ columnas coinciden con las de $A$ mientras que para todo $k < l \leqslant n$ la columna $l$-ésima de $e_l$. Demostremos por inducción sobre $k$ que $B_k \in \widehat{\mathcal{D}}$: Para $B_1$ es una matriz como las consideradas en 1) y por tanto pertenece a $\widehat{\mathcal{D}}$. Supongamos que $k > 1$. Hay dos casos a considerar. Primeramente supongamos que $k \leqslant k_A$. Como $B_{k-1}$ es la identidad a partir de $k$, se tiene que

$$\det(B_{k-1}) = \pm \det((a_{ij})_{i,j=1}^{k-1}) \neq 0,$$

por tanto $B_{k-1}$ es invertible. Sea $\bar{c} = (c_1, \dots, c_k)$ tal que $B_k e_k = B_{k-1}\bar{c}$, y sea $C$ la $n \times n$-matrix igual a la identidad excepto en la columna $k$, que es $\bar{c}$. Entonces, por 1), $C \in \widehat{\mathcal{D}}$ y como

$$B_k = B_{k-1} \cdot C,$$

y por hipótesis de inducción $B_{k-1} \in \widehat{\mathcal{D}}$, obtenemos que $B_k \in \widehat{\mathcal{D}}$. Supongamos que $k > k_A$. Entonces por la propiedad de $A$, $B_k e_k \in \langle B_{k-1} e_j \rangle_{j \leqslant k_A} \subseteq \langle B_{k-1} e_j \rangle_{j \leqslant n}$. Sea $\bar{b}$ tal que $B_k e_k = B_{k-1}\bar{b}$, y como antes definamos $C$ como la $n \times n$-matriz igual que la identidad excepto en la columna $k$ donde vale $\bar{c}$. Entonces, $B_k = B_{k-1} \cdot C \in \widehat{\mathcal{D}}$ por hipótesis de inducción.
3) $\widehat{\mathcal{D}} = \mathcal{M}_n$. Sea $A$ una matriz $n \times n$ arbitraria, y sea $k$ su rango. Utilizando que tiene que haber un $k \times k$-menor $M$ de $A$ con determinante no nulo, es fácil ver que existen permutaciones $\pi, \tau$ de $\{1, \dots, n\}$ tales que $B = A_\pi \cdot A \cdot A_\tau$ es como en 2). Entonces

$$A = A_{\pi^{-1}} \cdot B \cdot A_{\tau^{-1}} \in \widehat{\mathcal{D}}.$$

□

Demostración del Teorema 2.7.4. *a)*:

Obs. 23. El conjunto de aplicaciones afines $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que cumplen (35) es cerrado bajo composición.

Demostración. Supongamos que $\lambda(T_i([0,1]^n)) = |\det(A_{T_i})|$ para $i = 0, 1$. Entonces $A_{T_0 \circ T_1} = A_{T_0} \cdot A_{T_1}$ y por la Proposición 2.7.2 se tiene que

$$\begin{aligned}\lambda(T_0 \circ T_1([0,1]^n) =& \lambda(T_0(T_1([0,1]^n))) = \lambda(T_0([0,1]^n))\lambda(T_1([0,1]^n)) = |\det(A_{T_0})| \cdot |\det(A_{T_1})| = \\ =& |\det(A_{T_0} \cdot A_{T_1})| = |\det(A_{T_0 \circ T_1})|.\end{aligned}$$

Utilizando esto, la demostración quedará demostrada una vez que probemos que toda aplicación cuya matriz asociada pertenece a $\mathcal{D}$ del Lema 2.7.5 satisface (35). Supongamos que $T$ satisface I). Entonces $T([0,1]^n) = [0,1]^n$ y $|\det A_T| = 1$ y por tanto $\lambda(T([0,1]^n)) = 1 = |\det A_T|$. Supongamos que $T$ satisface II). Entonces $T([0,1]^n) = I \times [0,1]^{n-1}$ donde $I = [0, \alpha]$ si $\alpha \geqslant 0$ e $I = [\alpha, 0]$ si $\alpha \leqslant 0$. Como $\det A_T = \alpha$, se cumple que $\lambda(T([0,1]^n)) = |\alpha| = |\det A_T|$. Finalmente, supongamos que $T$ satisface III). Entonces $\det A_T = 0$ y es fácil ver que

$$T([0,1]^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in [0,1] \times [0,2] \times [0,1]^{n-2} \,:\, x_i \in [0,1] \text{ para } i \neq 2 \text{ y } x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_1 + x_2\}.$$

Dividimos $T([0,1]^n = X \cup Y$, donde $X = T([0,1]^n \cap [0,1]^n$ y $Y = [0,1] \times [1,2] \times [0,1]^{n-2}$. Nótese que

$$X \cup (Y - e_2) = [0,1]^n$$

y que $X \cap Y = [0,1] \times \{1\} \times [0,1]^{n-2}$, que tiene medida 0 (tiene volumen 0). Por tanto,

$$\lambda(T([0,1]^n)) = \lambda(X \cup Y) = \lambda(X) + \lambda(Y) = \lambda(X) + \lambda(Y - e_2) = \lambda(X \cup (Y - e_2)) = \lambda([0,1]^n) = 1.$$

*b)* es consecuencia directa de *a)*. □

□

Capítulo 3

# Funciones medibles

Pasamos estudiar las funciones medibles de un espacio de medida.

## 3.1. Funciones medibles

Notación. • *Dado conjuntos* $A \subseteq B$, $\mathbb{1}_A : B \to \{0,1\}$ *es la función* característica *de* $A$, *que vale 1 en los elementos de* $A$ *y 0 en los que no lo son.*
- $\mathbb{R}^*$ *denota la recta extendida con* $\pm\infty$; *es decir* $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$.
- *Dada* $f : A \to \mathbb{R}^*$ *y* $B \subseteq A$, *sea* $f \restriction B : B \to \mathbb{R}^*$ *es la restricción de* $f$ *a* $B$.
- *Dada una función* $f : X \to \mathbb{R}^*$, *y* $a \in \mathbb{R}^*$, *la notación (probabilísta)* $\{f < a\}$ *se interpreta como el conjunto pre-imagen* $f^{-1}(]a,\infty]) = \{x \in X \ : \ a < f(x) \leqslant \infty\}$. *Similarmente se interpreta* $\{f \leqslant a\}$, $\{f > a\}$, $\{f \geqslant a\}$ *y* $\{f \in B\}$ *para* $B \subseteq \mathbb{R}^*$.

**Definición 3.1.1.** *Se considera en* $\mathbb{R}^*$ *la topología que tiene entornos abiertos básicos* $]a,b[$ *y* $[-\infty, a[$, $]a,\infty]$ *para* $-\infty < a < b < \infty$.

**Definición 3.1.2** (Funciones medibles)**.** *Sea* $f : X \to Y$ *una función.*

*a) Dadas* $\sigma$*-álgebra* $\mathcal{A}$ *y* $\mathcal{B}$ *sobre* $X$ *e* $Y$ *respectivamente, se dice que* $f$ *es* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$-medible *o simplemente* medible *cuando la* $\sigma$*-álgebra* $f^{-1}(\mathcal{B})$ *está contenida en* $\mathcal{A}$, *i.e. cuando* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *para todo* $B \in \mathcal{B}$.

*b) Cuando* $Y$ *es un espacio topológico y* $(X,\mathcal{A})$ *es un espacio medible diremos que* $f$ *es* $\mathcal{A}$*-medible cuando* $f$ *es una función* $(\mathcal{A},\mathcal{B}(Y))$*-medible, i.e. cuando* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *para todo subconjunto Borel* $B \subseteq Y$.

*c) Cuando el espacio medible inicial es* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n))$ *entonces las funciones medibles correspondientes* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^*$ *se llaman* Lebesgue-medibles*.*

*d) Cuando* $Y$ *es un espacio topológico y el espacio inicial es* $(X,\mathcal{B}(X))$, *las funciones medibles correspondientes se denominan* funciones Borel*.*

El objetivo de este capítulo es estudiar las funciones medibles $f : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}^*$. Lo siguiente es sencillo de demostrar.

Ejercicio 3.1.1. *Dados un espacio medible* $(X,\mathcal{A})$, *demostrar que una función* $f : X \to \mathbb{R}^*$ *es* $\mathcal{A}$*-medible si y solamente si* $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ *para todo abierto* $U \subseteq \mathbb{R}^*$.

Ejercicio 3.1.2. *Supongamos que* $(X,\Sigma,\mu)$ *es un espacio de medida. Se considera* $\mathbb{C}$ *con la topología euclídea de* $\mathbb{R}^2$, *vía la identificación canónica. Demostrar que una función* $f : X \to \mathbb{C}$ *es medible si y solamente si* $\mathrm{Re}(f), \mathrm{Im}(f) : X \to \mathbb{R}$ *son medibles.*

Tenemos la siguiente caracterización

**Proposición 3.1.3.** *Dado un espacio medible* $(X,\mathcal{A})$ *y* $f : X \to \mathbb{R}^*$ *son equivalentes:*

*a)* $f$ *es* $\mathcal{A}$*-medible.*

*b)* $\{f \in [\alpha, \infty]\}$ *es* $\mathcal{A}$*-medible para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

*c)* $\{f \in ]\alpha, \infty]\}$ *es* $\mathcal{A}$*-medible para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

*d)* $\{f \in ]\alpha, \beta[\}$, $\{f = -\infty\}$ *y* $\{f = \infty\}$ *son* $\mathcal{A}$*-medibles para todo* $\alpha \leqslant \beta \in \mathbb{R}$.

*e)* $\{f \in [\alpha, \beta]\}$ *es* $\mathcal{A}$*-medible para todo* $\alpha \leqslant \beta \in \mathbb{R}^*$.

*f)* $\{f \in U\}$ *es* $\mathcal{A}$*-medible para todo* $U \subseteq \mathbb{R}$ *abierto.*

Demostración. Ejercicio. □

**Proposición 3.1.4** (Funciones características). *Dado un espacio medible* $(X, \mathcal{A})$*, la función característica* $\mathbb{1}_E$ *de un conjunto* $E \subseteq X$ *es una función* $\mathcal{A}$*-medible si y solamente si* $E \in \mathcal{A}$*.*

Demostración. $\{\mathbb{1}_E = 1\} = E$; en general

$$\{\mathbb{1}_E \in A\} = \begin{cases} E & \text{si } 1 \in A,\ 0 \notin A \\ \mathbb{R}^n \backslash E & \text{si } 1 \notin A,\ 0 \in A \\ \varnothing & \text{si } 0, 1 \notin A. \end{cases}$$

□

Seguidamente veamos que la suma y producto de funciones medibles. Como trabajamos con funciones que pueden tomar valores infinitos, para evitar los problemas del tipo $-\infty + \infty = ??$ trabajaremos con funciones que toman valores infinitos en conjuntos pequeños, e introducimos lo siguiente.

**Definición 3.1.5** (Casi en todas partes). *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida. Dada una propiedad* $\mathcal{P}(x)$ *de puntos* $x \in X$ *escribimos*

$$\mathcal{P}(x)\ \mathcal{A}\text{-casi en todas partes } (\mathcal{A}\text{-c.t.p.})$$

*para denotar que* $\{x \in X\ :\ \mathcal{P}(x) \text{ no se cumple}\}$ *pertenece a* $\mathcal{A}$ *y tiene* $\mu$*-medida cero.*

Casos particulares:

Dadas dos funciones $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ $\mathcal{A}$-medibles, escribimos

$$f = g\ \mathcal{A}\text{-casi en todas partes } (\mathcal{A}\text{-c.t.p.})$$

para denotar que $\{f \neq g\} = \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ f(x) \neq g(x)\}$ tiene $\mu$-medida cero.

Diremos que una función $\mathcal{A}$-medible $f : X \to \mathbb{R}^*$ es finita casi en todas partes (c.t.p.) cuando $\{f = \pm\infty\}$ tiene $\mu$-medida cero.

Diremos que una función $f$ con valores en $\mathbb{R}^*$ *está definida en c.t.p. en* $E \in \mathcal{A}$ cuando existe $A \in \mathcal{A} \upharpoonright E$ tal que $f(x)$ existe para todo $x \in A$ y $\mu(E \backslash A) = 0$.

**Proposición 3.1.6.** *Supongamos que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *es un espacio de medida completo y supongamos que* $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ *son tales que* $f = g$ $\mathcal{A}$*-c.t.p. Entonces* $f$ *es* $\mathcal{A}$*-medible si y solamente si* $g$ *es* $\mathcal{A}$*-medible.*

Demostración. Supongamos que $f$ es medible. Sea $U \subseteq \mathbb{R}^*$ abierto. Entonces

$$\{g \in U\} \triangle \{f \in U\} \subseteq \{f \neq g\},$$

que tiene medida cero; por tanto, por la completud del espacio, $\{g \in U\}$ difiere del medible $\{f \in U\}$ en un conjunto $\mathcal{A}$-medible, y consecuentemente es $\mathcal{A}$-medible. □

**Proposición 3.1.7** (Operaciones con funciones $\mathcal{A}$-medibles). *Sean* $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ *finitas* $\mathcal{A}$*-c.t.p.. Se tiene:*

*a) Si* $f, g$ *son* $\mathcal{A}$*-medibles, entonces* $f + g$, $f \cdot g$ *son* $\mathcal{A}$*-medibles.*

*b) Si $f : X \to \mathbb{R}^m$ es $\mathcal{A}$-medible y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $g \circ f$ es $\mathcal{A}$-medible.*

Demostración. *a)*: Pongamos $h := f + g$, fijemos $a \in \mathbb{R}$ y demostremos que $\{h < a\} \in \mathcal{A}$: dado $x$ tal que $f(x) + g(x) = h(x) < a$, podemos encontrar un racional $q \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) < q < a - g(x)$; o sea $\{h < a\} \subseteq \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{f < q\} \cap \{g < a - q\}$; como obviamente $\{f < q\} \cap \{g < a - q\} \subseteq \{h < a\}$, se tiene que

$$\{h < a\} = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}}(\{f < q\} \cap \{g < a - q\} \in \mathcal{A},$$

ya que $\mathbb{Q}$ es numerable.

Probemos ahora que $f \cdot g$ es medible. Supongamos primero que una de las funciones es una función constante, por ejemplo que $g(x) = c$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Si $c = 0$, entonces $c \cdot f = 0$ que obviamente es $\mathcal{A}$-medible. Supongamos que $c > 0$. Entonces, dado $a \in \mathbb{R}$, $\{cf < a\} = \{f < a/c\}$, que es $\mathcal{A}$-medible. Si $c < 0$, entonces $\{cf < a\} = \{f > a/c\}$ que tambien es $\mathcal{A}$-medible. Seguidamente, supongamos que $f = g$. Entonces dado $a \in \mathbb{R}$, si $a \leqslant 0$, $\{f^2 < a\} = \varnothing$, mientras que si $a > 0$, entonces $\{f^2 < a\} = \{f \in ]-\sqrt{a}, \sqrt{a}[\}$ ambos $\mathcal{A}$-medibles. En general, $f \cdot g = (1/2)((f + g)^2 - f^2 - g^2)$, y por tanto es una combinación lineal de cuadrados de funciones $\mathcal{A}$-medibles, por tanto $\mathcal{A}$-medible.

*b)*: Pongamos $h := g \circ f$. Dado un abierto $U \subseteq \mathbb{R}$, $\{h \in U\} = \{f \in g^{-1}U\}$ que es medible ya que $g$ es continua y por tanto $g^{-1}U$ es abierto. □

**Definición 3.1.8** (funciones definidas en conjuntos)**.** *Dado un conjunto $\mathcal{A}$-medible $E \subseteq \mathbb{R}^n$, una función $f : E \to \mathbb{R}^*$ se denomina $\mathcal{A}$-medible cuando es medible con respecto a la $\sigma$-álgebra restricción $\mathcal{A} \upharpoonright E$ de $\mathcal{A}$ a $E$.*

**Proposición 3.1.9.** *Sea $f : E \in \mathcal{A}$. Son equivalentes:*

*a) $f$ es $\mathcal{A}$-medible.*

*b) $\{f \in [\alpha, \infty]\}$ es $\mathcal{A}$-medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

*c) $\{f \in ]\alpha, \infty]\}$ es $\mathcal{A}$-medible para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

*d) $\{f \in ]\alpha, \beta[\}$, $\{f = -\infty\}$ y $\{f = \infty\}$ son $\mathcal{A}$-medibles para todo $\alpha \leqslant \beta \in \mathbb{R}$.*

*e) $\{f \in [\alpha, \beta]\}$ es $\mathcal{A}$-medible para todo $\alpha \leqslant \beta \in \mathbb{R}^*$.*

*f) $\{f \in U\}$ es $\mathcal{A}$-medible para todo $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto.*

*g) la función $\widehat{f}$ extensión* por cero *$\widehat{f} : X \to \mathbb{R}^*$*

$$\widehat{f}(x) := \begin{cases} f(x) & si\ x \in E \\ 0 & si\ x \notin E \end{cases}$$

*es $\mathcal{A}$-medible.*

Demostración. Obviamente la equivalencia de a), b),...,f) es un caso particular de la Proposición 3.1.3. Veamos la equivalencia entre a) y g): Supongamos que $f$ es $\mathcal{A} \upharpoonright E$-medible. Fijemos $\alpha$. Si $\alpha > 0$, entonces

$$\{\widehat{f} \geqslant a\} = \{x \in X \ : \ \widehat{f}(x) \geqslant a\} = \{x \in E \ : \ f(x) \geqslant a\} = \{f \geqslant \alpha\} \tag{36}$$

que pertenece a $\in \mathcal{A} \upharpoonright E \subseteq \mathcal{A}$. Supongamos que $\alpha \leqslant 0$. Entonces

$$\{\widehat{f} \geqslant a\} = \{f \geqslant \alpha\} \cup (X \backslash E) \in \mathcal{A}. \tag{37}$$

Supongamos ahora que $\widehat{f}$ es $\mathcal{A}$-medible. Supongamos que $\{f \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \upharpoonright E$. Si $\alpha > 0$, entonces por la igualdad en (36) se tiene que $\{f \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A} \upharpoonright E$; mientras que si $\alpha \leqslant 0$, la igualdad en (37) nos da que

$$\{f \geqslant \alpha\} = \{\widehat{f} \geqslant \alpha\} \cap E \in \mathcal{A} \upharpoonright E.$$

□

**Proposición 3.1.10** (funciones continuas son medibles). *Supongamos que $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida tal que $X$ es un espacio topológico y $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Si $f : E \to \mathbb{R}$ es continua y $E$ es $\mathcal{A}$-medible, entonces $f$ es $\mathcal{A}$-medible.*

Demostración. Dado $U \subseteq \mathbb{R}$ abierto, $\{f \in U\}$ es abierto de $E$ y por tanto existe $V$ abierto de $X$ tal que $\{f \in U\} = V \cap E \in \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$. □

Teorema 3.1.11 (Funciones medibles y orden). *Supongamos que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles $f_k : E \to \mathbb{R}^*$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ $\mathcal{A}$-medible. Entonces las siguientes funciones son $\mathcal{A}$-medibles*

*a)* $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$, $\text{ínf}_{k\in\mathbb{N}} f_k$.

*b)* $\text{lím sup}_{k\in\mathbb{N}} f_n$, $\text{lím inf}_{k\in\mathbb{N}} f_n$.

Demostración. *a)*: Dado $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\{(\sup_k f_k) \leqslant \alpha\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \leqslant \alpha\} \in \mathcal{A}, \text{e } \{(\text{ínf}_k f_k) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \{f_k \geqslant \alpha\} \in \mathcal{A}.$$

*b)*: recordemos que, dada una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$, el *límite superior* de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ se define por $\text{lím sup}_{k\in\mathbb{N}} := \text{ínf}_{m\in\mathbb{N}} \sup_{k\geqslant m} a_k$, mientras que el *límite inferior* de $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es $\text{lím inf}_{k\in\mathbb{N}} a_k := \sup_{k\in\mathbb{N}} \text{ínf}_{m\geqslant k} a_k$. Así que dado $a \in \mathbb{R}$,

$$\{\text{lím sup}_k f_k \leqslant \alpha\} = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geqslant k} \{f_m \leqslant \alpha + \frac{1}{2^l}\} \in \mathcal{A},$$

$$\{\text{lím inf}_k f_k \geqslant \alpha\} = \bigcap_{l\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geqslant k} \{f_m \geqslant \alpha - \frac{1}{2^l}\} \in \mathcal{A}.$$

□

**Definición 3.1.12** (Funciones monótonas en $\mathbb{R}$). *Una función $f : E \to \mathbb{R}^*$ definida en $E \subseteq \mathbb{R}$ medible se denomina* monótona *si es creciente en $E$ o decreciente en $E$.*

**Proposición 3.1.13** (Funciones monótonas son medibles). *Toda función monótona $f : E \to \mathbb{R}^*$ definida en un Lebesgue-medible $E \subseteq \mathbb{R}$ es Lebesgue-medible.*

Demostración. Como $-f$ es medible (creciente) si y solamente si $f$ es medible (decreciente), sin pérdida de generalidad suponemos que $f$ es creciente. Dado un intervalo cerrado $I \subseteq \mathbb{R}^*$, veamos que $f^{-1}I$ es un intervalo (abierto, cerrado o semiabierto) con extremos $\text{ínf}\, f^{-1}(I)$ y $\sup f^{-1}I$: Está claro que si $x \in E\backslash[\text{ínf}\, f^{-1}I, \sup f^{-1}I]$, entonces $f(x) \notin I$. Supongamos ahora que $x \in E\cap]\text{ínf}\, f^{-1}I, \sup f^{-1}I[$, entonces tiene que existir $y \in f^{-1}I$, $z \in f^{-1}I$ tales que $y < x < z$; como $f$ es creciente, $f(y) \leqslant f(x) \leqslant f(z)$ y como $f(y), f(z) \in I$, e $I$ es un intervalo, se tiene que $f(x) \in I$, i.e., $x \in f^{-1}I$. Por tanto, $f^{-1}I$ es igual a $E \cap [\text{ínf}\, f^{-1}I, \sup f^{-1}I]$, $E\cap]\text{ínf}\, f^{-1}I, \sup f^{-1}I]$, $E \cap [\text{ínf}\, f^{-1}I, \sup f^{-1}I[$ o $E\cap]\text{ínf}\, f^{-1}I, \sup f^{-1}I[$. En cualquier caso, es la intersección de un boreliano con $E$ y por tanto es medible. □

## 3.2. Convergencia puntual y funciones simples

**Definición 3.2.1.** *Convergencia puntual c.t.p. Fijado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, sean $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $f$, funciones definidas en un cierto $E \to X$ de $\mathcal{A}$, y $A \in \mathcal{A} \upharpoonright E$. Se dice que $(f_n)_n$ converge a $f$* puntualmente c.t.p. en $A$ *cuando el conjunto de $x \in A$ tales que $\lim_{k\to\infty} f_k(x) \neq f(x)$ tiene $\mu$-medida 0.*

**Proposición 3.2.2.** *Supongamos que $(f_k)_k$ es una sucesión de funciones medibles definidas en $E$ $\mu$-medible que convergen a $f : E \to \mathbb{R}$ puntualmente c.t.p. en $E$. Entonces $f$ es $\mu$-medible.*

Demostración. Sea $A \subseteq E$ el conjunto de puntos $x \in A$ donde $\lim_k f_k(x) = f(x)$. Sabemos que $\mu(E\backslash A) = 0$. Como la restricción $f \cdot \mathbb{1}_A$ es medible si y solamente si $f$ es medible, y cambiando $f_k$ por $f_k \cdot \mathbb{1}_A$ si necesario, vamos a suponer que $\lim_k f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in E$. Fijemos $a \in \mathbb{R}$; entonces una sucesión convergente $(b_n)_n$ cumple que su límite $b > a$ si y solamente si existen $k, n \in \mathbb{N}$ tales que para todo $m \geqslant n$ se tiene que $a_m > a + 1/2^k$. Por tanto,

$$\{f > a\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geqslant n} \{f_m > a + \frac{1}{2^k}\} \in \mathcal{A}.$$

□ □

**Definición 3.2.3** (Función simple)**.** *Una función $\mathcal{A}$-medible $f : E \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto $\mathcal{A}$-medible $E \subseteq X$ se denomina* $\mathcal{A}$-simple *cuando toma un número finito de valores.*

Ejercicio 3.2.1 (Simples vs características). *Una función $f : E \to \mathbb{R}$ definida en un conjunto $\mathcal{A}$-medible $E$ es $\mathcal{A}$-simple si y solamente si es una combinación lineal de funciones características de subconjuntos $\mathcal{A}$-medibles de $E$.*

Teorema 3.2.4 (Aproximación por funciones simples). *Sea $E \subseteq X$ $\mathcal{A}$-medible y $f : E \to \mathbb{R}^*$. Son equivalentes:*

*a) $f$ es $\mathcal{A}$-medible.*

*b) Existe una sucesión $(s_k)_k$ de funciones $\mathcal{A}$-simples que converge puntualmente a $f$ (es decir, $s_k(x) \to_k f(x)$ para todo $x \in E$) y tal que $|s_k| \leqslant |f|$ (i.e. $|s_k(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $x \in E$). Además, cuando $f$ es positiva, la sucesión $(s_k)_k$ se puede escoger creciente y positiva.*

Demostración. Que *b)* implica *a)* se sigue de la Proposición 3.2.2. Supongamos que $f : E \to \mathbb{R}^*$ es $\mathcal{A}$-medible. Fijemos $0 < K < \infty$.

Obs. 24. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una función $\mathcal{A}$-simple $s$ tal que

i) el soporte de $s$ $\operatorname{supp} s := \{s \neq 0\}$ está contenido en $\{|f| < K|\}$.

ii) $|s(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x$ tal que $|f(x)| < K$.

iii) $|s(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x$ tal que $|f(x)| < K$.

Demostración. Sea $(I_k)_{k=1}^m$, $(J_k)_{k=1}^m$ sucesiones de intervalos semiabiertos disjuntos dos a dos de longitud $< \varepsilon$ tales que $\bigcup_{k=1}^m I_k = [-K, 0[$ y $\bigcup_{k=1}^m J_k = [0, K[$. Para cada $k = 1, \ldots, m$, sea

$$a_k := \inf I_k,\ \ b_j := \min J_k.$$

Sean $A_k := \{f \in I_k\}$, $B_k := \{f \in J_k\}$ para $k = 1, \ldots, m$. Entonces para $x \in A_k$ se tiene que $f(x) < a_k \leqslant 0$ y para $x \in B_k$, $0 \leqslant b_k \leqslant f(x)$. Sea

$$s := \sum_{k=1}^m a_k \mathbb{1}_{A_k} + \sum_{k=1}^m b_k \mathbb{1}_{B_k}.$$

Entonces $|s| \leqslant |f|$ y para $x \in \{|f| < K$ se tiene que $|s(x) - f(x)| < \varepsilon$, ya que tanto $s(x)$ como $f(x)$ pertenecen a uno de los intervalos $I_k$ o $J_k$ que tienen longitud $< \varepsilon$. □

De esta manera, para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una función $\mathcal{A}$-simple $t_m$ tal que

III) $|t_m(x) - f(x)| < 1/2^n$ para todo $x \in \{|f| < m\}$.

IV) $|t_m(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in \{|f| < m\}$.

Para cada $m$ sea

$$s_m := t_m + m \cdot \mathbb{1}_{\{f \geqslant m\}} - m \cdot \mathbb{1}_{\{f \leqslant m\}}.$$

Veamos que $(s_m)_m$ es la sucesión buscada: Veamos primero que $\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x)$. Supongamos primero que $|f(x)| < \infty$. Sea $k$ tal que $|f(x)| < k$. Entonces para todo $m \geqslant k$ se tiene que $|s_m(x) - f(x)| < 1/2^m$ y por tanto $\lim_{m\to\infty} s_m(x) = f(x)$. Supongamos ahora que $f(x) = +\infty$. Entonces $s_m(x) = \infty$ para todo $m$. Similarmente si $f(x) = -\infty$. Veamos que $|s_m(x)| \leqslant |f(x)|$. Si $|f(x)| < m$, entonces la desigualdad se sigue de IV) para $t_m$, mientras que si $|f(x)| \geqslant m$, entonces $|s_m(x)| = m$.

Supongamos que $f$ es positiva. Sea $(s_m)_m$ una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-simples que convergen puntualmente a $f$ y tal que $|s_m(x)| \leqslant |f(x)|$ para todo $x \in E$. Para cada $m$, sea

$$u_m := \max\{|s_1|, \dots, |s_m|\}.$$

Veamos que $(u_m)_m$ es la sucesión buscada: Claramente $(u_m)_m$ es una sucesión creciente de funciones $\mathcal{A}$-simples positivas. Por otro lado, fijado $m$ y $x \in E$ se tiene que

$$\begin{aligned} |u_n(x) - f(x)| &= f(x) - |u_n(x)| = \min_{k=1}^{n}(f(x) - |s_n(x)|) = \min_{k=1}^{n} ||f(x)| - |s_k(x)|| \leqslant \\ &\leqslant \min_{k=1}^{n} |f(x) - s_k(x)| \leqslant \frac{1}{2^n}, \end{aligned}$$

ya que $||a| - |b|| \leqslant |a - b|$. □

## 3.3. Los tres principios de Littlewood

Se trata de tres ideas intuitivas sobre la medida de Lebesgue, sobre conjuntos, funciones y sucesiones de funciones que pueden ayudar a demostrar muchas de las propiedades de una medida y la integral de Lebesgue

PRINCIPIO 1) Todo conjunto Lebesgue-medible es "aproximadamente" una unión finita de intervalos disjuntos dos a dos.
PRINCIPIO 2) Toda función Lebesgue-medible es "aproximadamente" una función continua.
PRINCIPIO 3) La convergencia puntual de funciones Lebesgue medibles en intervalos acotados implica la convergencia uniforme "aproximada".

La formulación precisa de estos principios en un contexto más general necesita introducir algunos conceptos generales del espacio de medida de Lebesgue, que se presentan en más profundidad en el Capítulo 9 sobre espacios localmente compactos.

El siguiente resultado aplicado a la medida de Lebesgue es el primer principio.

TEOREMA 3.3.1. *Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de medida de Lebesgue finita. Para todo $\varepsilon > 0$ existe una colección finita $\{I_j\}_{j=1}^n$ de intervalos disjuntos dos a dos tal que*

$$\lambda(E \triangle \bigcup_{j=1}^{n} I_j) < \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\varepsilon > 0$. Sabemos por el Corolario 2.1.15 que $\lambda$ es regular, así que podemos encontrar un abierto $U$ que contiene a $E$ tal que $\mu(U \backslash E) < \varepsilon/2$. En la Nota 2.6.8 hemos visto que el abierto $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ es reunión disjunta de intervalos acotados. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda(\sum_{n>m} I_n) = \sum_{n>m} \lambda(I_n) < \varepsilon/2$. Entonces

$$\begin{aligned}\lambda\left(E \triangle \bigcup_{n=0}^{m} I_j\right) =& \lambda\left(E \backslash \left(\bigcup_{n=0}^{m} I_j\right)\right) + \lambda\left(\left(\bigcup_{n=0}^{m} I_j\right) \backslash E\right) \leqslant \lambda(\bigcup_{n>m} I_n) + \lambda(U \backslash E)\\ \leqslant& \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

□

En la Sección 6.1 sobre recubrimientos de Vitali se extiende lo anterior a $\mathbb{R}^n$. Veamos ahora los otros dos principios.

**Definición 3.3.2.** *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ una espacio de medida tal que $X$ es espacio topológico y $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Diremos que $\mu$* semi-regular interiormente *cuando para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A,\ C \textit{ cerrado de } X\}.^{1} \tag{38}$$

Entonces la medida de Lebesgue $\lambda_n$ es semi-regular interiormente, como se ve en el Corolario 2.1.15. Las medidas Borel con regularidades como la anterior se denominan de Radon y serán estudiadas en el Capítulo 9.

El segundo principio es el siguiente:

[1] se reserva el nombre de regular interiormente cuando este supremo es sobre los compactos de $X$

TEOREMA 3.3.3 (Principio de Lusin: medibles son “casi” continuas). *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida con* $\mu$ *semi-regular interiormente. Supongamos que* $E \in \mathcal{A}$ *tiene medida finita y que* $f : E \to \mathbb{R}$ *es una función* $\mathcal{A}$*-medible. Entonces para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto cerrado* $C$ *contenido en* $E$ *tal que* $\mu(E \backslash C) \leqslant \varepsilon$ *y tal que* $f$ *es continua en* $C$.

*Si además* $X$ *es localmente compacto, entonces existe una función continua* $g : X \to \mathbb{R}$ *que extiende a la restricción de* $f$ *a* $C$ *y tal que* $\sup_{x\in X} |g(x)| \leqslant \sup_{x\in X} |f(x)|$.

El tercer principio es el siguiente:

TEOREMA 3.3.4. *convergencia “casi” uniforme de Egoroff Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida con* $\mu$ *semi-regular interiormente. Supongamos que* $E \subseteq X$ *tiene* $\mu$*-medida finita y supongamos que* $(f_k)_k$ *es una sucesión de funciones* $\mathcal{A}$*-medibles* $f_k : E \to \mathbb{R}^*$ *que convergen puntualmente a una función* $f : E \to \mathbb{R}$. *Entonces para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un conjunto cerrado* $C$ *contenido en* $E$ *tal que*

$$f_k \to_n f \text{ uniformemente en } C \text{ y } \mu(E \backslash C) < \varepsilon.$$

Empezamos con la demostración del Teorema de Lusin utilizando el Teorema de Egoroff, que se demostrará después. También utilizamos el siguiente resultado topológico, un caso particular del Teorema de *extensión de Tietze*, que demostraremos en el anexo (ver Teorema A.1.4).

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.3.3. Utilizamos el Teorema 3.2.4 de aproximación por funciones simples para encontrar una sucesión $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de funciones simples en $E$ que convergen puntualmente y tales que $|s_k| \leqslant |f|$ para todo $k$. Ahora utilizamos el Teorema de Egoroff para encontrar $C_0 \subseteq E$ cerrado tal que $\mu(E \backslash C_0) \leqslant \varepsilon/2$ y tal que $s_k \to_n f$ uniformemente en $C_0$. Para $k \geqslant 1$, y para cada $p$ en la imagen $s_k(C_0)$ de $C_0$ por $s_k$, sea $C_p^{(k)} \subseteq \{s_k = p\} \cap C_0$ un cerrado tal que poniendo $C_k := \bigcup_{p\in s_k(E)} C_p^{(k)}$, entonces se tiene que

$$\mu(C_0 \backslash C_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $g_k : C_k \to \mathbb{R}$ la función

$$g_k := \sum_{p\in s_k(C_0)} p \cdot \mathbb{1}_{C_p^{(k)}}.$$

Como $\{C_p^{(k)}\}_{p\in s_k(C_0)}$ son cerrados disjuntos dos a dos, se sigue que $g_k$ es continua. Sea $C := \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C_k$, que es cerrado de $C_0$ y por tanto de $X$. Como $g_k \restriction C_k = s_k \restriction C_k$ para todo $k$, se sigue que $g_k \restriction C = s_k \restriction C$, y por tanto $g_k \to_k f$ uniformemente en $C$. Así que la restricción de $f$ a $C$ es el límite uniforme de la sucesión $(s_k \restriction C)_{k\in\mathbb{N}}$ de las restricciones, que son continuas, y por tanto $f$ es continua en $C$. Además,

$$\mu(C_0 \backslash C) = \mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (C_0 \backslash C_k) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mu(C_0 \backslash C_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

y por tanto $\mu(E \backslash C) \leqslant \varepsilon$. $\square$

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 3.3.4.

OBS. 25. Para cada $\varepsilon, \delta > 0$ existe un $m \in \mathbb{N}$ y un subconjunto $A \in \mathcal{A} \restriction E$ tales que

I) $\sup_{k\geqslant m, x\in A} |f_k(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
II) $\mu(E \backslash A) \leqslant \delta$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $m$ se tiene que

$$E_m := \bigcap_{k\geqslant m} \{|f_k - f| \leqslant \varepsilon\} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}).$$

Claramente, $E_k \subseteq E_{k+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $(f_k)_k$ converge puntualmente a $f$, se tiene que

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = E.$$

Por continuidad de medida (ver Proposición 1.2.5), se tiene que

$$\mu(E) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu(E_k).$$

Sea entonces $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(E \backslash E_m) < \varepsilon$. Entonces $A = E_m$ y $m$ satisfacen lo que queremos. □ □

Utilizando esta Obs., para cada $k \geqslant 1$, escogemos $A_k \subseteq E$ y $m_k$ tales que

$$\sup_{m \geqslant m_k, x \in A_k} |f_m(x) - f(x)| \leqslant 1/2^k \text{ y } \mu(E \backslash A_k) \leqslant \varepsilon/2^{k+1}.$$

Sea $A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Entonces claramente $\lim_k f_k(x) = f(x)$ para $x \in A$, mientras que

$$\mu(E \backslash A) = \mu\left(\bigcup_{k \geqslant 1} (E \backslash A_k)\right) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu(E \backslash A_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ahora utilizamos que $\mu$ es semi-regular interiormente para encontrar un cerrado $F \subseteq A$ tal que $\lambda(A \backslash F) \leqslant \varepsilon/2$, y $F$ tiene las propiedades buscadas. □

## 3.4. Ejercicios

Ejercicio 3.4.1. *Toda medida finita $\mu$ es semi-regular interiormente si y solamente si es regular exteriormente, i.e. $\mu$ está definida sobre una $\sigma$-álgebra de un espacio topológico $X$, contiene a $\mathcal{B}(X)$ y cumple que*

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U \ U \text{ abierto de } X\}. \tag{39}$$

Demostración. Como $\mu$ es finita, entonces dado $A \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\mu(A) =&\mu(X) - \mu(X \backslash A) = \mu(X) - \inf\{\mu(U) : X \backslash A \subseteq U, \ U \text{ abierto}\} = \\ =&\mu(X) - \inf\{\mu(X \backslash C) : C \subseteq A, \ C \text{ cerrado}\} = \sup\{\mu(C) : C \subseteq A, \ C \text{ cerrado}\}.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3.4.2 (Mejora de Lusin). *Supongamos que $f : E \to \mathbb{R}$ es una función Lebesgue-medible definida sobre $E \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue medible. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe un conjunto cerrado $C$ contenido en $E$ tal que $\lambda_n(E \backslash C) \leqslant \varepsilon$ y una función continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que extiende a la restricción de $f$ a $C$ y tal que $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| \leqslant \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$.*

Demostración. Supongamos ahora que $\lambda_n(E) = \infty$. Sea $C_0 := [-1, 1]^n$ y para cada $k$, sea

$$C_{k+1} := [-(k+1), (k+1)]^n \backslash [-(k + \varepsilon_k), k + \varepsilon_k]^n,$$

donde $\varepsilon_k > 0$ se escoge tal que $\lambda_n([-k - \varepsilon_k, k + \varepsilon_k]^n \backslash [-k, k]^n) \leqslant \varepsilon/2^{k+1}$. Entonces $(C_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de compactos disjuntos dos a dos tales que $C := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$ es cerrado y

$$\lambda_n(\mathbb{R}^n \backslash C) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n([-k - \varepsilon_k, k + \varepsilon_k]^n \backslash [-k, k]^n) =\leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Para cada $k$ encontramos $F_k \subseteq E \cap C_k$ tal que $f \restriction F_k$ es continua y $\lambda_n((E \cap C_k) \backslash F_k) \leqslant \varepsilon/2^{k+2}$. Entonces $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de cerrados tales que para todo $k \geqslant 1$ se tiene que $F_{k+1} \cap [-k, k]^n = \varnothing$. Esto implica que $F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k$ es cerrado y $f \restriction F$ es continua ya que si $(x_l)_l$ es una sucesión en $F$ y $x \in F$

es su límite, entonces tienen que existir $k, l \in \mathbb{N}$ tales que $\{x_j\}_{j \leqslant l} \subseteq F_k$ y por tanto $x \in F_k$, de lo que se deduce que $\lim_{l\to\infty} f(x_l) = f(x)$. Finalmente,

$$\lambda_n(E\backslash F) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_n((E \cap C_k)\backslash F) + \lambda_n(\mathbb{R}^n\backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} C_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n([-k-\varepsilon_k, k+\varepsilon_k]^n\backslash[-k,k]^n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $X$ es además un espacio localmente compacto, entonces el Teorema de Tietze nos dice que toda función continua $f$ real-valuada definida en un cerrado $C$ de $X$ se puede extender a una función continua $g : X \to \mathbb{R}$ tal que $\sup_{x\in C} |f(x)| = \sup_{x\in X} |g(x)|$. $\square$

Capítulo 4

# Integración abstracta

Queremos extender naturalmente la medida $\mu$ a un espacio de funciones sobre $X$ *rico*. El punto de nexo son las funciones características $\mathbb{1}_A$ de conjuntos medibles y para las que la integral tiene que ser la medida de $A$, y luego pedir linearidad. Definimos la integral de una medida abstracta de la que la integral de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ será un caso particular (fundamental).

En este capítulo supondremos $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida.

## 4.1. Funciones positivas

**Proposición 4.1.1** (Integral de funciones simples positivas)**.** *Dada una función simple, $\mathcal{A}$-medible y positiva $s : X \to [0, \infty[$ y tomando valores distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0, \infty[$. Se define la* integral *de $s$ con respecto a $\mu$ como*

$$\int s d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(s^{-1}(\alpha_i)).$$

**Nota 4.1.2.** *Obsérvese que para una función simple positiva $s : E \to \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\int s d\mu = \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot \mu(\{s = \alpha\}) = \sum_{\alpha \in [0,\infty[} \alpha \cdot \mu(\{s = \alpha\}) = \sum_{\alpha \in ]0,\infty[} \alpha \cdot \mu(\{s = \alpha\}).$$

**Proposición 4.1.3** ($\mu$-Integral de funciones medibles positivas)**.** *Dada una función $\mathcal{A}$-medible positiva $f : X \to \mathbb{R}^*$, se define la $\mu$-*integral *(o integral contra $\mu$) de $f$ como*

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int s d\mu \;:\; s \text{ es simple } \mathcal{A}\text{-medible y } 0 \leqslant s \leqslant f \right\}. \tag{40}$$

*Dado un conjunto $\mathcal{A}$-medible $A$ se define*

$$\int_A f d\mu := \int (f \cdot \mathbb{1}_A) d\mu.$$

**Proposición 4.1.4** (Desigualdad de Chebychev)**.** *Supongamos que $f$ es una función positiva $\mathcal{A}$-medible en un conjunto medible $E$. Para todo $\alpha > 0$ se tiene que*

$$\mu(f \geqslant \alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f d\mu. \tag{41}$$

Demostración. Sea $g := \alpha \mathbb{1}_{(f \geqslant \alpha)}$. Entonces $g$ es una función simple $\mathcal{A}$-medible tal que $g(x) \leqslant f(x)$ para todo $x \in E$. Por tanto, por la definición de integral en (40),

$$\mu(f \geqslant \alpha) = \frac{1}{\alpha} \int g d\mu \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f d\mu.$$

□

Una propiedad interesante que se generalizará naturalmente.

**Proposición 4.1.5** ($\mu$-integral como medida para funciones simples). *Sea $s$ una función simple $\mathcal{A}$-medible y positiva definida en $E$; se define la función $\mu_s : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ que a cada $\mathcal{A}$-medible le asocia*

$$\mu_s(A) := \int_A s d\mu.$$

*Entonces $\mu_s$ es una medida en $\mathcal{A}$ y se cumple que*

$$\mu_{s+t} = \mu_s + \mu_t$$

*para cualesquiera funciones simples $\mu$-medibles y positivas $s$ y $t$.*

Demostración. Supongamos que $(A_n)_n$ son subconjuntos $\mathcal{A}$-medibles disjuntos dos a dos, y pongamos $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Nótese que para $\alpha \neq 0$,

$$\{s \cdot \mathbb{1}_A = \alpha\} = \{s = \alpha\} \cap A.$$

Por tanto,

$$\mu_s(A) = \int_A s d\mu = \int (s \cdot \mathbb{1}_A) d\mu = \sum_{\alpha\in]0,\infty[} \alpha \cdot \mu(\{s = \alpha\} \cap A) = \sum_{\alpha\in]0,\infty[} \alpha \cdot \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{s = \alpha\} \cap A_n) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{\alpha\in]0,\infty[} \alpha \cdot \mu(\{s = \alpha\} \cap A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int (s \cdot \mathbb{1}_{A_n}) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_s(A_n).$$

La verificación de las demás propiedades que hacen que $\mu_s$ sea una medida se dejan como ejercicio. Veamos ahora que $\mu_{s+t} = \mu_s + \mu_t$. Dado $A \in \mathcal{A}$, y utilizando que

$$\{s + t = \alpha\} = \bigcup_{\beta+\gamma=\alpha} (\{s = \beta\} \cap \{t = \gamma\})$$

reunión disjunta, se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_{s+t}(A) &= \sum_{\alpha\in[0,\infty[} \alpha \cdot \mu(\{s + t) = \alpha\} \cap A) = \sum_{\alpha\in[0,\infty[} \alpha \cdot \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \mu(\{s = \beta\} \cap \{t = \gamma\} \cap A) = \\
&= \sum_{\beta,\gamma\in[0,\infty[} (\beta + \gamma)\mu(\{s = \beta\} \cap \{t = \gamma\} \cap A) = \\
&= \sum_{\beta\in[0,\infty[} \sum_{\gamma\in[0,\infty[} (\beta \cdot \mu(\{s = \beta\} \cap \{t = \gamma\} \cap A) + \gamma \cdot \mu(\{s = \beta\} \cap \{t = \gamma\} \cap A)) = \\
&= \sum_{\beta\in[0,\infty[} \beta \cdot \mu(\{s = \beta\} \cap A) + \sum_{\gamma\in[0,\infty[} \sum_{\beta\in[0,\infty[} \gamma \cdot \mu(\{s = \beta\} \cap \{t = \gamma\} \cap A) = \\
&= \mu_s(A) + \mu_t(A).
\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.1.6** (Propiedades básicas de la integral positiva). *Supongamos que $f, g : X \to \mathbb{R}^*$ son funciones medibles. Entonces*

*a) Si $f \leqslant g$ entonces $\int f d\mu \leqslant \int g d\mu$.*
*b) Si $A \subseteq B$ son conjuntos $\mathcal{A}$-medibles, entonces $\int_A f d\mu \leqslant \int_B f d\mu$.*
*c) Si $0 \leqslant c < \infty$, entonces $\int (c \cdot f) d\mu = c \cdot \int f d\mu$.*
*d) Si $f = 0$ c.t.p. entonces $\int f d\mu = 0$.*
*e) Si $\mu(A) = 0$ entonces $\int_A f d\mu = 0$.*

Demostración. Ejercicio. □

Teorema 4.1.7 (Convergencia monótona de B. Levy). *Supongamos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de funciones* $\mathcal{A}$*-medibles* $f_n : X \to [0,\infty]$ *y* $f : X \to [0,\infty]$*, y son tales que*

*a)* $(f_n(x))_n$ *es creciente para todo* $x \in X$*;*

*b)* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$*.*

*Entonces*

*c)* $f$ *es* $\mathcal{A}$*-medible y*

*d)* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$*.*

Demostración. La Proposición 3.2.2 nos garantiza que $f$ es $\mathcal{A}$-medible. Por otro lado, se sigue de la Proposición 4.1.6 que $\int f_n d\mu \leqslant \int f_{n+1} d\mu$, así que el límite de $(\int f_n d\mu)_n$ en $[0,\infty]$ existe; y como $f_n \leqslant f$ para todo $n$, se tiene que

$$\lim_n \int f_n d\mu = \sup_n \int f_n d\mu \leqslant \int f d\mu.$$

Veamos ahora la otra desigualdad. Sea $s : X \to \mathbb{R}$ una función simple tal que $0 \leqslant s \leqslant f$ puntualmente; eso quiere decir que para cada $\alpha > 1$ y cada $x \in X$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $s(x) \leqslant \alpha f_n(x)$ para todo $n \geqslant m$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\alpha > 1$, sea

$$X_n := \{s \leqslant \alpha f_n\} = \{x \in X \,:\, s(x) \leqslant \alpha f_n(x)\}.$$

Por el comentario anterior,

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$

reunión creciente. Por tanto, para cada $n$,

$$\frac{1}{\alpha}\int_{X_n} s d\mu \leqslant \int_{X_n} f_n d\mu \leqslant \int_X f_n d\mu.$$

Utilizando la Proposición 4.1.5 se tiene que

$$\int_X s d\mu = \sup_n \int_{X_n} s d\mu,$$

y por tanto,

$$\int s d\mu \leqslant \alpha \sup_n \int f_n d\mu = \alpha \lim_n \int f_n d\mu.$$

Como $\alpha > 1$ es arbitrario, se tiene que

$$\int s d\mu \leqslant \lim_n \int f_n d\mu$$

Por tanto, por definición de la integral,

$$\int f d\mu \leqslant \lim_n \int f_n d\mu,$$

y acabamos de demostrar la desigualdad que nos faltaba. □

**Proposición 4.1.8** (linealidad de integral de funciones positivas)**.** *Supongamos que* $f, g : X \to [0,\infty]$ *son funciones* $\mathcal{A}$*-medibles. Entonces*

$$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN. Utilizamos el Teorema de aproximación por funciones simples (Teorema 3.2.4) para fijar sucesiones crecientes de funciones simples $\mathcal{A}$-medibles positivas $(s_n)_n$ y $(t_n)_n$ cuyos límites puntuales son $f$ y $g$, respectivamente. Se sigue del Teorema de convergencia monótona de Lebesgue que $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu$ y $\int g d\mu = \lim_{n\to\infty} \int t_n d\mu$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $u_n := s_n + t_n$. Cada $u_n$ es una función simple $\mathcal{A}$-medible y positiva, la sucesión $(u_n)_n$ es creciente y tiene por límite puntual $f+g$. Utilizando nuevamente el Teorema de convergencia monótona de Lebesgue, y que para funciones simples $s$ y $t$ se tiene que $\int (s+t) d\mu = \int s d\mu + \int t d\mu$ (Proposición 4.1.5), se tiene

$$\begin{aligned}\int (f+g) d\mu =& b \lim_{n\to\infty} \int u_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \left( \int s_n d\mu + \int t_n d\mu \right) = \lim_{n\to\infty} \int s_n d\mu + \lim_{n\to\infty} \int t_n d\mu = \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

$\square$

TEOREMA 4.1.9 (Lema de Fatou). *Supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones $\mathcal{A}$-medibles $f_n : X \to [0,\infty]$. Entonces*

$$\int (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN. En el Teorema 3.1.11 hemos visto que $\liminf_n f_n$ es $\mathcal{A}$-medible. Recordemos que dado $x \in E$, $\liminf_n f_n(x) = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant m} f_n(x)$, así que tiene sentido definir para cada $m \in \mathbb{N}$, $g_m : E \to [0,\infty]$, $g_m := \inf_{n\geqslant m} f_n$, que también es medible. Nótese que $g_m \leqslant g_{m+1}$, $g_m \geqslant 0$ y $\lim_{m\to\infty} g_m = \sup_m g_m = \liminf_n f_n$. Podemos aplicar el Teorema de convergencia monótona de Lebesgue (Teorema 4.1.7) y la monotonía de la integral, y deducir que

$$\begin{aligned}\int \liminf_n f_n d\mu &= \int \lim_m g_m d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m d\mu = \sup_{m\in\mathbb{N}} \int g_m d\mu = \sup_{m\in\mathbb{N}} \int (\inf_{n\geqslant m} f_n) d\mu \leqslant \\ &\leqslant \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant m} \int f_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int f d\mu.\end{aligned}$$

$\square$

## 4.2. $\mu$-integral de funciones arbitrarias

**Proposición 4.2.1** (Funciones $\mu$-integrables)**.** *Una función $\mathcal{A}$-medible $f : X \to \mathbb{R}^*$ se dice* $\mu$-integrable *cuando*

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

*Una función compleja $\mathcal{A}$-medible $f : X \to \mathbb{C}$ se dice* $\mu$-integrable *cuando la parte real y la parte imaginaria son $\mu$-integrables.*

Una primera observación.

**Proposición 4.2.2.** *Una función compleja $f$ es $\mu$-integrable si y solamente si la función real $|f|$ es $\mu$-integrable.*

Demostración. Ejercicio □

**Proposición 4.2.3.** *Si $f : X \to \mathbb{R}^*$ es integrable, entonces*

$$\int_{\{|f|=\infty\}} |f| d\mu = 0 = \mu(\{|f| = \infty\}).$$

Demostración. Para cada $n > 0$ consideremos la función simple $\mathcal{A}$-medible $s_n := n \cdot \mathbb{1}_{\{|f|=\infty\}}$. Como $s_n \leqslant |f|$, se sigue de la definición de la integral de una función positiva que

$$\infty > K := \int |f| d\mu \geqslant \int s_n d\mu = n\mu(\{|f| = \infty\}).$$

Por tanto $\mu(\{|f| = \infty\}) \leqslant (1/n)K$ para todo $n$, de donde se deduce que $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$. Se sigue ahora de las propiedades básicas de la integral de funciones positivas (Proposición 4.1.6) que $\int_{\{|f|=\infty\}} |f| d\mu = 0$. □

**Proposición 4.2.4** ($L^1(\mu, \mathbb{K})$)**.** *Dado $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$, La colección de funciones $\mu$-integrables a valores en $\mathbb{K}$ y definidas c.t.p. en $X$ se denota por $L^1(\mu, \mathbb{K})$.*

**Nota 4.2.5.** *Nótese que a partir de la Proposición 4.2.3 anterior el espacio $L^1(\mu, \mathbb{R})$ consiste en* todas *las funciones integrables $f : X \to \mathbb{R}^*$, una vez que identificamos naturalmente $f$ con $f$ definida exclusivamente en $\{f \in \mathbb{R}\}$.*

*Cuando el resultado presentado es independiente de $\mathbb{K}$ se escribirá $L^1(\mu)$ para denotar $L^1(\mu, \mathbb{K})$.*

**Proposición 4.2.6** (Partes positiva y negativa)**.** *Dada una función $f : X \to \mathbb{R}^*$, sean $f^+, f^- : X \to [0, \infty]$ las partes positiva y negativa de $f$ definidas por*

$$f^+ := f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geqslant 0\}}.$$
$$f^- := -f \cdot \mathbb{1}_{\{f \leqslant 0\}}.$$

*Se tiene la descomposición*

$$f = f^+ - f^-.$$

O sea $f^+(x)$ es igual a $f(x)$ cuando este valor es positivo y vale cero en caso contrario y $f^-(x)$ vale $-f(x)$ cuando $f(x)$ es negativo y cero en el otro caso. Claramente cuando $f$ es $\mu$-medible, ambas funciones $f^+$ y $f^-$ son funciones positivas $\mu$-medibles.

**Proposición 4.2.7.** *Una función medible $f : E \to \mathbb{R}^*$ es integrable si y solamente si $f^+, f^-$ son integrables, es decir,*

$$\int f^+ d\mu < \infty \text{ y } \int f^- d\mu < \infty.$$

Demostración. Se sigue de que

$$|f| = \text{máx}\{f^+, f^-\}.$$

□

**Proposición 4.2.8** ($\mu$-Integral de una función $\mu$-integrable)**.** *La* $\mu$-integral $\int f d\mu$ *de una función $\mu$-integrable $f : X \to \mathbb{R}^*$ se define como*

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

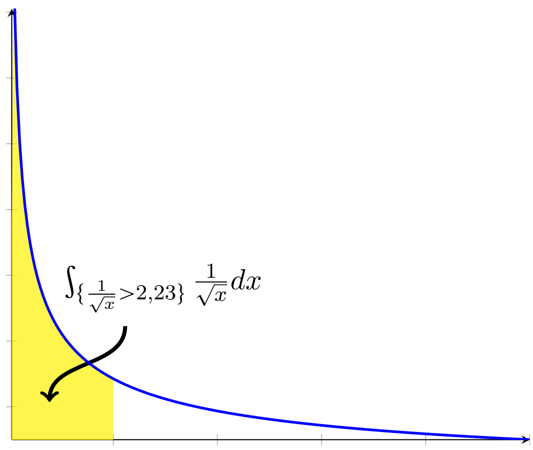
*Similarmente, la $\mu$-integral de una función $\mu$-integrable compleja $f : X \to \mathbb{C}$ se define como*

$$\int f d\mu := \int \mathrm{Re}(f) d\mu + i \int \mathrm{Im}(f) d\mu.$$

**Proposición 4.2.9** (Soporte de una función)**.** *El* soporte *de una función $f$ se define como $\{f \neq 0\}$.*

**Corolario 4.2.10** (Criterio de integrabilidad)**.** *Una función $\mu$-medible $f : X \to \mathbb{R}^*, \mathbb{C}$ cuyo soporte tiene medida finita es $\mu$-integrable si y solamente si*

$$\textit{para todo } \varepsilon > 0 \textit{ existe } K > 0 \textit{ tal que } \int_{\{|f|>K\}} |f| d\mu \leqslant \varepsilon. \tag{42}$$




Demostración. Supongamos que (42) se cumple. Sea $K > 0$ tal que $\int_{\{|f|>K\}} |f| d\mu \leqslant 1$. Por la linealidad de la integral (ya demostrada para funciones positivas en 4.1.8),

$$\int |f| d\mu = \int_{\{|f| \geqslant K\}} |f| d\mu + \int_{\{|f|<K\}} |f| d\mu \leqslant 1 + K\mu(\{f \neq 0\}) < \infty.$$

Supongamos ahora que $f$ es integrable. Sabemos por la Proposición 4.2.3 que $\int_{(|f|=\infty)} |f| d\mu$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_n := \mathbb{1}_{(|f| \leqslant n)} |f|$. Entonces $(g_n)_n$ es una sucesión de funciones positivas que convergen crecientemente a la función $g := \mathbb{1}_{(|f|<\infty)} |f|$. Por el Teorema de convergencia monótona (Teorema 4.1.7) se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(|f| \leqslant n)} |f| d\mu = \int_{(|f|<\infty)} |f| d\mu = \int |f| d\mu.$$

Por tanto dado $\varepsilon > 0$ existe $n$ tal que

$$\int_{|f|>n} |f| d\mu = \int_X |f| d\mu - \int_{|f|\leqslant n} |f| d\mu \leqslant \varepsilon.$$

□ □

Veamos que la integral es lineal:

**Proposición 4.2.11** (La $\mu$-integral es lineal)**.** *Supongamos que $f, g \in L^1(\mu)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ y*

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \cdot \int f d\mu + \beta \cdot \int g d\mu.$$

Demostración. Hacemos la demostración suponiendo que $f, g$ tienen valores reales y $\alpha, \beta$ son también reales. El caso general se hace considerando partes reales e imaginarias y dejamos los detalles al lector. Por un lado se tiene que $|\alpha f + \beta g| \leqslant |\alpha||f| + |\beta||g|$ y por tanto, utilizando la linealidad de la integral para funciones positivas (Proposición 4.1.8),

$$\int |\alpha f + \beta g| d\mu \leqslant \int (|\alpha||f| + |\beta||g|) d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu + |\beta| \int |g| d\mu < \infty.$$

Ahora demostremos que $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$: Pongamos $h := f + g$. Entonces $f = f^+ - f^-$, $g = g^+ - g^-$ y $h = h^+ - h^-$, y por tanto, $h^+ - h^- = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$, o equivalentemente,

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+.$$

Como estas funciones son todas positivas, podemos usar la linealidad de la integral para funciones positivas ya demostrada y concluir

$$\int h^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int h^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu. \tag{43}$$

Como cada integral es finita, se tiene que

$$\int h d\mu = \int h^+ d\mu - \int h^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Para finalizar, demostremos que $\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$. Si $\alpha \geqslant 0$, entonces se sigue de la Proposición 4.1.6 que

$$\begin{aligned}\int (\alpha f) d\mu = \int (\alpha f)^+ d\mu - \int (\alpha f)^- d\mu = \int \alpha \cdot f^+ d\mu - \int \alpha \cdot f^- d\mu = \\ = \alpha \cdot \int f^+ d\mu - \alpha \cdot \int f^- d\mu = \alpha \int f d\mu.\end{aligned}$$

Si $\alpha < 0$, se utiliza lo anterior para $\beta = -\alpha$ y se tiene que $\int \beta f d\mu = \beta \int d\mu$ y por tanto,

$$-\alpha \int f d\mu = \int \beta f^+ d\mu - \int \beta f^- d\mu = -\alpha \int f d\mu.$$

□

**Proposición 4.2.12** (La integral es un funcional continuo)**.** *Si $f \in L^1(\mu)$, entonces*

$$\left| \int f d\mu \right| \leqslant \int |f| d\mu.$$

Demostración.

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right| \leqslant \left| \int f^+ d\mu \right| + \left| \int f^- d\mu \right| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu.$$

□ □

**Proposición 4.2.13** (Integral y orden). *Si $f,g \in L^1(\mu)$ son funciones $\mu$-integrables tales que $f \leqslant g$, entonces*
$$\int f d\mu \leqslant \int g d\mu.$$

Demostración. La función $h := g - f : X \to \mathbb{R}^*$ es positiva y $\mu$-integrable ya que $|h| \leqslant 2|g|$. Por tanto
$$\int g d\mu - \int f d\mu = \int h d\mu \geqslant 0.$$
□

Teorema 4.2.14 (Convergencia dominada de Lebesgue). *Supongamos que $(f_n)_n$ son funciones $\mu$-medibles $f_n : X \to \mathbb{R}^*$ tales que existe una función $g \in L^1(\mu)$ tal que*
$$|f_n| \leqslant |g| \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{44}$$
*Supongamos que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$ *existe para todo $x \in X$. Entonces*

*a)* $f \in L^1(\mu)$,
*b)* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$ *y*
*c)* $\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$.

Demostración. Se tiene que $|f| \leqslant g$ y por tanto, $\int |f| d\mu \leqslant \int |g| d\mu < \infty$. Demostremos ahora b): para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n := 2g - |f_n - f|$. Cada $f_n$ es medible y, por la hipótesis (44), positiva. Claramente $\lim_{n\to\infty} h_n = 2g$. Por tanto, utilizando el Lema de Fatou,
$$\begin{aligned}\int 2g d\mu &= \int (\lim_{n\to\infty} h_n) d\mu = \int (\liminf_{n\to\infty} h_n) d\mu \leqslant \\ &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int h_n d\mu = \int 2g d\mu + \liminf_{n\to\infty} (-\int |f_n - f| d\mu) = \\ &= \int 2g d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu.\end{aligned}$$
Por tanto,
$$0 \leqslant \limsup_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu \leqslant 0. \tag{45}$$
Una sucesión de números positivos tiene límite superior 0 si y solamente si el límite existe y es igual a cero. O sea, (45) equivale a b). Finalmente, como en general para funciones $g, h$ se tiene que $|g+h| \leqslant |g| + |h|$, si además son integrables se sigue que
$$\left| \int |f| d\mu - \int |g| d\mu \right| \leqslant \int |f - g| d\mu$$
y por tanto,
$$\left| \int f_n d\mu - \int f d\mu \right| \leqslant \int |f_n - f| d\mu \to_{n\to\infty} 0, \tag{46}$$
lo que demuestra c). □ □

Tenemos la siguiente versión sencilla del teorema de cambio de variable que veremos en la Sección 6.5. Presentamos ahora una generalización del teorema de convergencia dominada.

**Proposición 4.2.15** (Integrabilidad uniforme). *Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones $\mu$-medibles. Se dice que $\mathcal{F}$ es* uniformemente $\mu$-integrable *si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*
$$\sup_{f\in\mathcal{F}, \mu(A)\leqslant\delta} \int_A |f| d\mu \leqslant \varepsilon. \tag{47}$$

EJERCICIO 4.2.1. *Demostrar que si* $f \in L^1(\mu)$ *entonces*

$$\{g : X \to \mathbb{R}^* \,:\, |g| \leqslant |f|\}$$

*es uniformemente* $\mu$*-integrable.*

El nombre escogido no es arbitrario.

**Proposición 4.2.16.** *Sea* $\mathcal{F}$ *una familia de funciones* $\mathcal{A}$*-medibles con soporte contenido en un conjunto de* $\mu$*-medida finita. Son equivalentes.*

*a)* $\mathcal{F}$ *es uniformemente* $\mu$*-integrable.*

*b) Para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $K > 0$ *tal que*

$$\int_{(|f|\geqslant K)} |f| d\mu \leqslant \varepsilon \text{ para todo } f \in \mathcal{F}. \tag{48}$$

*En particular,* $\mathcal{F} \subseteq L^1(\mu)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $K \in \mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{f\in\mathcal{F}}\{f \neq 0\} \subseteq K$ y con $\mu(K) < \infty$. a) implica b): supongamos que $\mathcal{F}$ es uniformemente integrable.

OBS. 26. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int |f| d\mu \leqslant n_\varepsilon \varepsilon.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$ tal que $\sup_{\mu(A)\leqslant\delta, f\in\mathcal{F}} \int_A |f| d\mu \leqslant \varepsilon$. Como $\mu(K) < \infty$, podemos encontrar un cubo $C$ tal que $\mu(K\backslash C) \leqslant \varepsilon$. Sea $\mathcal{C}$ una familia finita de subcubos de $C$ de medida $\leqslant \delta$ disjuntos dos a dos y que cubren $C$. Entonces $n := \#\mathcal{C}$ funciona: dado $f \in \mathcal{F}$,

$$\int |f| d\mu = \sum_{D\in\mathcal{C}} \int_{D\cap K} |f| d\mu \leqslant \varepsilon n.$$

□

Entonces dado $\varepsilon > 0$, se sigue de este hecho y de la desigualdad de Chebychev que

$$\mu(\{|f| \geqslant n_\varepsilon\}) \leqslant \frac{1}{n_\varepsilon} \int_{\{|f|\geqslant n_\varepsilon\}} |f| d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Sea $\delta > 0$ tal que (47) se cumple. Dado $f \in \mathcal{F}$, como $\mu(\{|f| \geqslant n_\delta\}) \leqslant \delta$ se sigue de (47) que

$$\int_{\{|f|\geqslant n_\delta\}} |f| d\mu \leqslant \varepsilon.$$

□

**Nota 4.2.17.** *El resultado anterior no es cierto para familias de funciones con soporte de medida infinita. Consideremos la medida de Lebesgue en* $[1, \infty[$ *y tomemos* $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. *Entonces* $\{f\}$ *es uniformemente integrable pero* $f$ *no es integrable.*

TEOREMA 4.2.18 (de Convergencia de Vitali). *Supongamos que* $(f_n)_n$ *es una sucesión de funciones uniformemente* $\mu$*-integrables* $f_n : E \to \mathbb{R}^*$ *definidas en* $E \in \mathcal{A}$ *tal que* $\mu(E) < \infty$ *y que convergen puntualmente a* $f : E \to \mathbb{R}^*$. *Entonces*

*a)* $f \in L^1(\mu)$.

*b)* $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$.

*c)* $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$

Demostración.

Obs. 27. Supongamos que $A \subseteq E$ es tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_A |f_n| d\mu \leqslant K < \infty$. Entonces $\int_A |f| d\mu \leqslant K$.

Demostración. Esto es consecuencia directa del Lema de Fatou (Teorema 4.1.9). □

*a):* se sigue de la Proposición 4.2.16 que existe $K > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n|\geqslant K\}} |f_n| d\mu \leqslant 1$. Por tanto, dada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int |f_n| d\mu \leqslant 1 + \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\{|f_n|<K\}} |f_n| d\mu \leqslant 1 + K\mu(E).$$

Por el Hecho anterior

$$\int |f| d\mu \leqslant 1 + K\mu(E) < \infty.$$

*b):* Como $f \in L^1(E)$, se sigue que $\mu(\{|f| = \infty\}) = 0$. Por tanto, cambiando cada $f_n$ y $f$ por $f_n \upharpoonright \{|f| < \infty\}$, y $f \upharpoonright \{|f| < \infty\}$, respectivamente, podemos suponer que $f : E \to \mathbb{R}$ es una función a valores reales. Sea $\varepsilon > 0$. Escogemos $\delta > 0$ tal que $\sup_{n\in\mathbb{N},\, \mu(A)\leqslant\delta} \int_A |f_n| d\mu \leqslant \varepsilon$. Utilizamos el Teorema de Egoroff (Teorema 3.3.4) para encontrar $A \subseteq E$ tal que $\mu(E\setminus A) \leqslant \varepsilon$ y tal que $f_n \to f$ uniformemente en $A$. Sea pues $n_0$ tal que

$$\sup_{n\geqslant n_0, x\in A} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Entonces para $n \geqslant n_0$,

$$\int |f_n - f| d\mu \leqslant \int_A |f_n - f| d\mu + \int_{E\setminus A} |f_n - f| d\mu \leqslant \varepsilon\mu(E) + \int_{E\setminus A} |f_n| d\mu + \int_{E\setminus A} |f| d\mu \leqslant (\mu(E) + 2)\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tenemos que $\lim_{n\to\infty} \int |f_n - f| d\mu = 0$. c) se sigue de b) trivialmente. □

## 4.3. Conjuntos de medida cero e integral

TEOREMA 4.3.1. *Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}^*$ es una función $\mathcal{A}$-medible. Se tiene:*
*a) Si $A \in \mathcal{A}$ es tal que $f$ es no negativo en $A$ e $\int_A f d\mu = 0$, entonces $f = 0$ c.t.p. de $A$.*
*b) Si se cumple que $\int_A f d\mu = 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $f = 0$ c.t.p.*
*c) Si $f \in L^1(\mu)$ cumple que*

$$\left|\int f d\mu\right| = \int |f| d\mu, \tag{49}$$

*entonces existe $\alpha \in \{0, -1, 1\}$ tal que $\alpha f = |f|$ c.t.p.*

DEMOSTRACIÓN. *a)*: para cada entero $n \geqslant 1$, sea $A_n := \{f_n \geqslant 1/n\} \cap A$. Entonces se tiene que

$$A \cap \{f \neq 0\} = \bigcup_{n \geqslant 1} A_n.$$

Para cada $n \geqslant 1$ se tiene que

$$0 = \int_A f d\mu \geqslant \int_{A_n} f d\mu \geqslant \frac{1}{n}\mu(A_n).$$

De lo que se deduce que $\mu(A_n) = 0$ para todo $n \geqslant 1$. Por tanto $\mu(A) = 0$, i.e. $f = 0$ c.t.p. en $A$.

*b)*: sea $P := \{f > 0\}$. Como

$$0 = \int_P f d\mu = \int f^+ d\mu$$

se sigue a partir de a) que $f^+ = 0$ c.t.p. en $P$. Similarmente se define $N := \{f \leqslant 0\}$ y se demuestra que $f^- = 0$ c.t.p. en $N$. como $f = f^+ - f^-$ y $E = P \cup N$, se tiene que $f = 0$ c.t.p.

*c)*: supongamos primero que $\int f d\mu = 0$. Entonces de (49) se deduce que $\int |f| d\mu = 0$ y por tanto a) nos dice que $|f| = 0$ c.t.p., o sea $\alpha = 0$ cumple los requisitos pedidos. Supongamos ahora que $\int f d\mu \neq 0$ y sea $\alpha$ el signo de $\int f d\mu$. Pongamos $g := |f| - \alpha f$, que es una función positiva y de (49) se sigue que

$$\int g d\mu = \int |f| d\mu - \alpha \int f d\mu = \int |f| d\mu - \left|\int f d\mu\right| = 0.$$

Por tanto, a partir de a) tenemos que $g = 0$ c.t.p., es decir $\alpha f = |f|$ c.t.p. □

Recordemos que una función $f$ con valores en $\mathbb{R}^*$ se dice definida c.t.p. en un conjunto medible $E$ cuando

$$\mathrm{dom}(f) := \{x \in E \, : \, f(x) \text{ está definido}\}.$$

cumple que $\mu(E \backslash \mathrm{dom}(f)) = 0$.

**Proposición 4.3.2** (Integral de funciones definidas c.t.p.)**.** *Dada una función $f$ definida c.t.p. en $X$, se define*

$$\int f d\mu := \int_{\mathrm{dom}(f)} \widehat{f} d\mu$$

*donde $\widehat{f} : X \to \mathbb{R}^*$ es la extensión de $f$ por cero.*

**Proposición 4.3.3.** *Supongamos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones medibles definidas c.t.p. en $E$ medible tales que*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int |f_n| d\mu. \tag{50}$$

*Entonces*

*a) la serie*

$$f(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \text{ converge c.t.p..}$$

*b)* $f \in L^1(\mu)$.

*c)* $\int f d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu$.

Demostración. Sea $D := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{dom}(f_n)$, que sabemos que cumple que $\mu(X\backslash A) = 0$ y cada $f_n$ está definida en $D$. Sea $\mu_D$ la restricción de la medida $\mu$ a $\mathcal{A} \upharpoonright D := \{Y \cap A : Y \in \mathcal{A}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $g_m := \sum_{n=0}^{m} |f_n|$. Entonces cada $g_m$ es medible y se sigue de (50) que $g_m \in L^1(\mu_D)$. Sea $g(x) := \sum_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$. Entonces $g : D \to [0,\infty]$. Como $g_m(x) \to_m g(x)$ para $x \in D$ y $(g_m(x))_m$ es creciente, se sigue del Teorema de convergencia monótona de Lebesgue (Teorema 4.1.7), que $g : D \to [0,\infty]$ es medible y se tiene

$$\int g d\mu_D = \lim_{m\to\infty} \int_D g_m d\mu = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \int_D |f_m| d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_D |f_n| < \infty.$$

Como $g$ es no negativa, se sigue que $g \in L^1(D)$. Por otro lado, se sigue de (50) que

$$\mu(\{x \in D : g(x) = \infty\}) = 0.$$

Sea $D_0 := \{x \in D : g(x) < \infty\}$. Entonces para cada $x \in D_0$ se tiene que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ es absolutamente convergente; por tanto, para $x \in D_0$,

$$\sum_{m=1}^{n} f_m(x) \to_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x).$$

Como $\sum_{m=1}^{n} f_m \leqslant g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue del Teorema de convergencia dominada de Lebesgue (Teorema 4.2.14) que $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ es una función integrable en $D_0$, y

$$\int_E \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \int_{D_0} \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{D_0} \sum_{m=0}^{n} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{D_0} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_E f_n d\mu.$$

□

Teorema 4.3.4. *Supongamos que $f \in L^1(E)$ para un conjunto de medida finita $E$. Supongamos que $C \subseteq \mathbb{R}$ es un cerrado tal que*

$$\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \in C \text{ para todo } A \subseteq E \text{ tal que } \mu(A) > 0. \tag{51}$$

*Entonces $f(x) \in C$ c.t.p.*

Demostración. Como $C$ es cerrado, su complemento $U$ es abierto y por tanto se puede poner como una reunión numerable de intervalos abiertos. Como queremos demostrar que $f^{-1}U$ tiene medida cero, es suficiente demostrar que $f^{-1}I$ tiene medida cero para todo intervalo abierto $I$ disjunto de $C$. Sea $I$ un intervalo abierto tal que $I \cap C = 0$, y pongamos $A := f^{-1}(I)$. Entonces, si $x$ es el punto medio de $I$,

$$\left|\frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu - x\right| = \frac{1}{\mu(A)} \left|\int_A (f - x\mathbb{1}) d\mu\right| \leqslant \frac{1}{\mu(A)} \int_A |f - x\mathbb{1}|\, d\mu < \frac{1}{\mu(A)} \mu(A) \frac{\ell(I)}{2} = \frac{\ell(I)}{2},$$

ya que si $p \in A$ entonces $f(p) \in I$ y por tanto $|f(p) - x| < \ell(I)/2$. Esto implica que $(1/\mu(A)) \int_A f d\mu \in I$, y de (51) se deduce que $\mu(A) = 0$. □

**Proposición 4.3.5** (Semicontinuidad inferior y superior)**.** *Recordemos que una función* $f : X \to \mathbb{R}$ *definida en un espacio topológico se dice* semicontinua inferiormente (lsc)[1] *cuando* $\{f > \alpha\} = f^{-1}(]\alpha, \infty[)$ *es abierto para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *y se dice* semicontinua superiormente (usc) [2] *cuando* $\{f < \alpha\} = f^{-1}(]-\infty, \alpha[)$ *es abierto para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 4.3.1. *Sea* $X$ *un espacio topológico y* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *son funciones arbitrarias.*

*a) Demostrar que* $f : X \to \mathbb{R}$ *es lsc (usc) si para todo* $x_0 \in X$ *y todo* $\varepsilon > 0$ *existe un entorno abierto* $U$ *de* $x_0$ *tal que si* $x \in U$ *entonces* $f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$ *(resp.* $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$*).*

*b) Supongamos que* $f = \mathbb{1}_Y$ *es la función característica. Demostrar que* $f$ *es lsc (usc) si y solamente si* $Y \subseteq X$ *abierto (resp. cerrado)*

*c) Si* $f, g$ *son lsc (usc) entonces* $f + g$ *es lsc (resp. usc).*

*d) Si* $f, g \geqslant 0$ *y lsc (usc) entonces* $f \cdot g$ *es lsc (resp. usc).*

*e) Si* $f$ *es lsc (usc) entonces* $-f$ *es usc (resp. lsc).*

TEOREMA 4.3.6 (Teorema de Vitali-Carathéodory). *Supongamos que* $f \in L^1(\mu)$ *es una función* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *existen funciones* $u, v \in L^1(\mu)$ *tales que:*

*a)* $u \leqslant f \leqslant v$.

*b)* $u$ *es usc y* $v$ *es lsc.*

*c)* $\int (v - u) d\mu \leqslant \varepsilon$.

DEMOSTRACIÓN. □

[1] del inglés lower semicontinuous

[2] del inglés upper semicontinuous

## 4.4. Otros temas

Teorema 4.4.1 (Las funciones continuas son densas para medidas regulares). *Para toda función $f \in L^1(\mu)$ y todo $\varepsilon > 0$ existe una función continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f - g\|_1 = \int |f - g| d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Demostración. Utilizamos el criterio de integrabilidad del Corolario 4.2.10 para encontrar $K > 0$ tal que

$$\int_{\{|f|>K\}} |f| d\mu \leqslant \varepsilon/3.$$

Nótese que se sigue de la desigualdad de Chebychev que

$$\mu(\{|f| > K\}) \leqslant \frac{\varepsilon}{3K}.$$

Sea $g := f \restriction \{|f| \leqslant K\} : \{|f| \leqslant K\} \to \mathbb{R}$. Utilizamos el Teorema de Lusin para encontrar una función continua $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $F \subseteq \{|f| \leqslant K\}$ cerrado tal que $\mu(\{|f| \leqslant K\} \backslash F) \leqslant \varepsilon/6K$, $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |h(x)| = \sup_{x\in\{|f|\leqslant K\}} |f(x)| \leqslant K$ y tal que $h = g = f$ en $F$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int |f - h| d\mu = & \int_{\{|f|>K\}} |f - h| d\mu + \int_F |f - h| d\mu + \int_{\{|f|\leqslant K\}\backslash F} |f - h| d\mu + \leqslant \\ \leqslant & \frac{\varepsilon}{3} + \mu(\{|f| > K\}) \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |h(x)| + \mu(\{|f| \leqslant K\}\backslash F) \sup_{x\in\{|f|\leqslant K\}} (|f(x)| + |h(x)|) \leqslant \\ \leqslant & \varepsilon.\end{aligned}$$

□

**Proposición 4.4.2.** *Supongamos que $f \in L^1(E)$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, y sean $A \subseteq E$ medible y $p$ tales que $p + A \subseteq E$. Entonces*

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \int_{p+A} f(x - p) d\mu(x). \tag{52}$$

Demostración. Supongamos primero que $f = \mathbb{1}_X$ para $X \subseteq E$ medible. Entonces $\int_A \mathbb{1}_X(x) d\mu(x) = \mu(A \cap X)$, mientras que

$$\int_{p+A} \mathbb{1}_X(x - p) d\mu(x) = \int_{p+A} \mathbb{1}_{p+X}(x) d\mu(x) = \mu((p + A) \cap (p + X)) = \mu(p + (A \cap X)) = \mu(A \cap X).$$

Como las dos expresiones de la igualdad en (52) son lineales en $f$, esa igualdad también es cierta para funciones simples. Ahora se utiliza que toda función $f \in L^1(E)$ es límite puntual de una sucesión de funciones simples $(s_n)_n$ tales que $|s_n| \leqslant |f|$ para todo $n$. Por el teorema de convergencia dominada,

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(x) d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{p+A} f_n(x - p) d\mu(x) = \int_{p+A} f(x - p) d\mu(x).$$

□

## 4.5. Integral de Riemann vs integral de Lebesgue

Recordemos conceptos utilizados para definir la integral de Riemann

**Proposición 4.5.1** (Función escalonada). *Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida en un intervalo $[a,b]$ se denomina* función escalonada *si es una función simple tal que*

$$f^{-1}(\alpha) \text{ es un intervalo para todo } \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Ejemplo 4.5.2.** *Demostrar que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada si y solamente si existen $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ tales que $f$ es constante en cada intervalo $]x_i, x_{i+1}[$.*

**Proposición 4.5.3** (Integral de Riemann). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada definida en un intervalo $[a,b]$. Se define la integral de Riemann inferior $\mathrm{R}_- - \int_a^b f(x)dx$ y la integral de superior $\mathrm{R}^+ - \int_a^b f(x)dx$ de $f$ como*

$$\mathrm{R}_- - \int_a^b f(x)dx := \inf_{e \geqslant f \, escalonada} \int_{[a,b]} e d\mu = \inf_{e \geqslant f \, escalonada} \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot \ell(e^{-1}(\alpha)).$$

$$\mathrm{R}^+ - \int_a^b f(x)dx := \sup_{e \leqslant f \, escalonada} \int_{[a,b]} e d\mu = \sup_{e \leqslant f \, escalonada} \sum_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha \cdot \ell(e^{-1}(\alpha)).$$

*Se dice que $f$ es Riemann-integrable cuando*

$$\mathrm{R}_- - \int_a^b f(x)dx = \mathrm{R}^+ - \int_a^b f(x)dx. \tag{53}$$

*En este caso, la integral de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ se define como el valor en (53).*

**Proposición 4.5.4** (Integral de Riemann e integral de Lebesgue). *Toda función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ que Riemann-integrable es Lebesgue-integrable y las integrales correspondientes coinciden.*

Demostración. Toda función escalonada es una función simple, por tanto Lebesgue medible; así que, dada una función escalonada $e \leqslant f$, utilizando la Proposición 4.2.13,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx =& \mathrm{R}^+ - \int_a^b f(x)dx = \sup_{e \leqslant f \text{escalonada}} \int_{[a,b]} e d\mu \leqslant \int_{[a,b]} f d\mu \leqslant \inf_{e \geqslant f \text{escalonada}} \int_{[a,b]} e d\mu = \\ =& \mathrm{R}_- - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.\end{aligned}$$

□

El recíproco no es cierto en general.

**Ejemplo 4.5.5** (La función de Dirichlet). *La función de* Dirichlet *es la función característica $\mathfrak{d} := \mathbb{1}_{[0,1] \cap \mathbb{Q}} : [0,1] \to \{0,1\}$ de los racionales del intervalo unidad. Esta función no es Riemann-integrable: dada una función escalonada $e : [0,1] \to \mathbb{R}$, si se cumple que $e \leqslant \mathfrak{d}$, entonces veamos que $e \leqslant 0$: supongamos que $I \subseteq [0,1]$ es no degenerado y que $e$ es constante en $I$ con valor $\alpha$. Sea $x \in I \backslash \mathbb{Q}$. Entonces*

$$\alpha = e(x) \leqslant \mathfrak{d}(x) = 1.$$

*Por tanto, $e \leqslant 0$. Similarmente se demuestra que si $e : [0,1] \to \mathbb{R}$ es una función escalonada tal que $\mathfrak{d} \leqslant e$ entonces $1 \leqslant e$. Se sigue entonces que*

$$\mathrm{R}_- - \int_a^b f(x)dx = 0 \text{ mientras que } \mathrm{R}^+ - \int_a^b f(x)dx = 1.$$

*Por otro lado, como* $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ *es numerable, es medible se sigue que* $\mu(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$ *y por tanto* $\int_{[0,1]} \mathfrak{d} d\mu = 0$. □

El siguiente resultado caracteriza las funciones Lebesgue integrables que son Riemann-integrables. Recordemos los siguientes conceptos.

**Proposición 4.5.6** (Oscilación; discontinuidades)**.** *Sea* $f : E \to \mathbb{R}$, $A \subseteq E$ *y* $x \in E$.

*a) La* oscilación $\omega_f(A)$ de $f$ en $A$ *se define por*

$$\omega_f(A) = \sup_{a \in A} f(a) - \inf_{a \in A} f(a) \geqslant 0.$$

*b) La* oscilación $\omega_f(x)$ en $x$ *se define por*

$$\omega_f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega_f(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[) = \inf_{\varepsilon > 0} \omega_f(]x-\varepsilon, x+\varepsilon[).$$

*c) Dado* $\delta >$, *el conjunto de* $\delta$*-saltos* $\mathrm{Disc}_\delta(f)$ *de* $f$ *se define como*

$$\mathrm{Disc}_\delta(f) := \{x \in E \,:\, \omega_f(x) \geqslant \delta\}.$$

*d) El conjunto de discontinuidades* $\mathrm{Disc}(f)$ *de* $f$ *se define como*

$$\mathrm{Disc}(f) := \bigcup_{\delta > 0} \mathrm{Disc}_\delta(f) = \{x \in E \,:\, \omega_f(x) > 0\}.$$

**Proposición 4.5.7.** *Sea* $f : E \to \mathbb{R}$ *y* $x \in E$.

*a)* $f$ *es continua en* $x \in E$ *si y solamente si* $\omega_f(x) = 0$.

*b) El conjunto* $\mathrm{Disc}_\delta(f)$ *es cerrado en* $E$ *para todo* $\delta > 0$.

*c) Supongamos que* $E$ *es un intervalo y* $f$ *es monótona (es decir,* $f$ *es creciente o decreciente). Entonces* $C := \{y \in \mathbb{R} \,:\, \mathrm{Card}(\{f = y\}) \geqslant 2\}$ *es numerable, y por tanto* $\mathrm{Disc}(f)$ *es también numerable.*

Demostración. *a)* y *b)* se dejan como ejercicio. Demostremos *c)*: Sin pérdida de generalidad, suponemos que $f$ es creciente (si $f$ es decreciente, $-f$ es creciente). Nótese que si $y \in C$, entonces $\{f = y\}$ es un intervalo no degenerado con extremos $\inf\{f = y\} < \sup\{f = y\}$. Por tanto, $\{\{f = y\} \,:\, y \in C\}$ es una colección de intervalos no degenerados disjuntos dos a dos, y eso nos da la numerabilidad de $C$. Demostremos ahora que $\mathrm{Disc}(f)$ es numerable. Dado $x \in I$, sea

$$J(x) := [\sup_{a < x} f(a), \inf_{x < b} f(b)].$$

Es fácil ver que $x \in \mathrm{Disc}(f)$ si y solamente si $J(x)$ es un intervalo no degenerado. Ahora supongamos que $a < b$ son puntos de discontinuidad tales que $J(a) \cap J(b) \neq \varnothing$. Entonces tiene que ser $y = f(a^+) = f(b^-)$ lo que implica que $f$ sea constante en el intervalo $]a, b[$ y por tanto $y \in C$. Por tanto, podemos descomponer $\mathrm{Disc}(f) = C^+ \cup C^- \cup D$, donde $C^+ = \{x \in \mathrm{Disc}(f) \,:\, f(x^+) \in C\}$, $C^- = \{x \in \mathrm{Disc}(f) \,:\, f(x^-) \in C\}$ y $D$ es el resto de puntos de discontinuidad. Como $C$ es numerable, $C^\pm$ son numerables. Finalmente, si $a \neq b \in D$, entonces $J(a)$ y $J(b)$ son intervalos no degenerados disjuntos, y por tanto $D$ es también numerable. □

Teorema 4.5.8 (de Lebesgue). *Supongamos que* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *es una función acotada. Son equivalentes:*

*a)* $f$ *es Riemann-integrable.*

*b)* $f$ *es continua c.t.p de* $[a,b]$, *i.e.* $\mu(\mathrm{Disc}(f)) = 0$.

Demostración. Supongamos que $f$ es Riemann-integrable y veamos que $\mu(\mathrm{Disc}(f)) = 0$. Fijemos $\varepsilon, \delta > 0$. Sea

$$\mathrm{Disc}_\delta(f) := \{x \in [a,b] \,:\, \omega_f(x) \geqslant \delta\}.$$

Sean $e_0 \leqslant f \leqslant e_1$ dos funciones escalonadas tales que

$$\int_{[a,b]} e_1 d\mu - \int_{[a,b]} e_0 d\mu \leqslant \delta \cdot \frac{\varepsilon}{2}. \tag{54}$$

Escojamos una partición por intervalos $(I_j)_{j=1}^n$, y $\{\alpha_j\}_{j=1}^n, \{\beta_j\}_{j=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$e_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{I_j}, \qquad e_1 = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbb{1}_{I_j}.$$

Entonces (54) se reescribe como

$$\delta \cdot \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j)\ell(I_j). \tag{55}$$

Sea $A := \{j \in \{1, \ldots, n\} \,:\, D_\alpha \cap \mathring{I}_j \neq \varnothing\}$.

Obs. 28. Si $j \in A$, entonces

$$\beta_j - \alpha_j \geqslant \delta.$$

Demostración. escojamos $x \in \mathrm{Disc}_\delta(f)$ que es punto interior de $I_j$ y sea $\gamma > 0$ tal que $x-\gamma, x+\gamma \in I_j$. Se tiene entonces que

$$\omega_f([x-\gamma, x+\gamma]) \geqslant \omega_f(x) > \delta,$$

y por tanto existen $y, z \in [x-\gamma, x+\gamma] \subseteq I_j$ tales que

$$f(y) - f(z) \geqslant \delta. \tag{56}$$

Como $e_0 \leqslant f \leqslant e_1$ y $e_1(y) = \beta_j$, $e_0(z) = \alpha_j$ se sigue de (56) que

$$\beta_j - \alpha_j \geqslant f(y) - f(z) \geqslant \delta. \tag{57}$$

□

A partir de este Hecho y (55),

$$\delta \cdot \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j)\ell(I_j) \geqslant \sum_{j\in A} (\beta_j - \alpha_j)\ell(I_j) \geqslant \delta \cdot \sum_{j \in A} \ell(I_j), \tag{58}$$

Ahora, nótese que los puntos de $\mathrm{Disc}_\delta(f)$ que no están en el interior de ningún intervalo $I_j$ tiene que ser uno de los extremos de algún intervalo $I_j$, y por tanto son un número finito $p_1, \ldots, p_m$. Entonces se tiene que

$$\mathrm{Disc}_\delta(f) \subseteq \bigcup_{j\in A} I_j \cup \bigcup_{j=1}^m ]p_j - \frac{\varepsilon}{4m}, p_j + \frac{\varepsilon}{4m}[. \tag{59}$$

De (58) y (59),

$$\mu(\mathrm{Disc}_\delta(f)) \leqslant \sum_{j\in A} \ell(I_j) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon. \tag{60}$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, $\mu(\mathrm{Disc}_\delta(f)) = 0$, y por tanto,

$$\mu(\mathrm{Disc}(f)) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^\infty \mathrm{Disc}(f)_{\frac{1}{k}}\right) \leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu(\mathrm{Disc}(f)_{\frac{1}{k}}) = 0.$$

Supongamos ahora que $\mathrm{Disc}(f)$ tiene medida cero. Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $\mathrm{Disc}_\varepsilon(f)$ está acotado, se sigue de la Proposición 4.5.7 que $\mathrm{Disc}_\varepsilon(f)$ es un compacto. Como sabemos que $\mu(\mathrm{Disc}_\varepsilon(f)) = 0$, podemos encontrar intervalos abiertos disjuntos dos a dos $I_1, \dots, I_n \subseteq [a, b]$ tales que $\mathrm{Disc}_\varepsilon(f) \subseteq \bigcup_{j=1}^n I_j$ y $\sum_{j=1}^n \ell(I_j) \leqslant \varepsilon/2$. Pongamos $K := [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^n I_j$, que es un compacto. Para cada $x \in K$ sea $\varepsilon_x > 0$ tal que

$$\omega_f([x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x]) < \varepsilon.$$

Como $K \subseteq \bigcup_{x\in K} ]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[$ y $K$ es compacto, existen $x_1, \dots, x_m \in K$ tales que

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} ]x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j}[.$$

Finalmente pongamos

$$\left(\bigcup_{j=1}^{m} ]x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j}[\right) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} I_j = \bigcup_{k=1}^{l} J_k.$$

reunión disjunta de intervalos (posiblemente semiabiertos) y tales que cada $J_k \subseteq ]x_j - \varepsilon_{x_j}, x_j + \varepsilon_{x_j}[$ para cierto $j$. Así que $\{I_j\}_{j=1}^n \cup \{J_k\}_{k=1}^l$ es una partición de $[a, b]$ en intervalos. Sean

$$e_0 := \sum_{j=1}^{n} \inf_{x\in I_j} f(x)\mathbb{1}_{I_j} + \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in J_k} f(x)\mathbb{1}_{J_k}, \qquad e_1 := \sum_{j=1}^{n} \sup_{x\in I_j} f(x)\mathbb{1}_{I_j} + \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in J_k} f(x)\mathbb{1}_{J_k}.$$

Se sigue que $e_0 \leqslant f \leqslant e_1$ y ambas $e_0, e_1$ son funciones escalonadas. Ademas,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n} \sup_{x\in I_j} f(x)\ell(I_j) + \sum_{k=0}^{l} \inf_{x\in J_k} f(x)\ell(J_k) - \left(\sum_{j=0}^{n} \sup_{x\in I_j} f(x)\ell(I_j) + \sum_{k=0}^{l} \inf_{x\in J_k} f(x)\ell(J_k)\right) \leqslant \\
\leqslant &2 \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{j=1}^{n} \ell(I_j) + \sum_{k=1}^{l} (\sup_{x\in J_k} f(x) - \inf_{x\in J_k} f(x))\ell(J_k) \leqslant 2\varepsilon \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \varepsilon \sum_{k=1}^{l} \ell(J_k) \leqslant \\
\leqslant &\varepsilon(2 \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + (b - a)).
\end{aligned}$$

Como $\varepsilon$ es arbitrario y la función $f$ está acotada por hipótesis, podemos hacer las diferencias $\int_{[a,b]} g d\mu - \int_{[a,b]} h d\mu$ tan pequeñas como queramos con funciones escalera tales que $h \leqslant f \leqslant g$, y por tanto, $f$ es Riemann integrable. $\square$