Cálculo de Probabilidades I — Febrero 2015 — Segunda semana

Se construye un conjunto finito A de números naturales por el procedimiento aleatorio siguiente: El máximo número M contenido en A se elige con distribución geométrica

$$\mathrm{P}\{M = m\} = \frac{1}{2^m} \quad \text{para } m = 1, 2, 3, \ldots$$

Después, para cada uno de los números $k = 1, 2, \ldots, m-1$, se sortea independientemente y con probabilidades iguales $(1/2)$ si se incluye k en A o no.

a) Para cualquier número natural n, calcular la probabilidad de que n pertenezca a A.

b) Calcular el valor esperado de la suma de los elementos de A.

c) Determinar la distribución del número de elementos de A.

d) Calcular la media y la varianza del número de elementos de A.

e) Obtener el coeficiente de correlación entre el número de elementos de A y la suma de sus elementos.

Solución

a) Dado un número natural arbitrario $n = 1, 2, 3, \ldots$, el conjunto aleatorio A contiene a n si, al elegir el máximo elemento M de A, resulta $M = n$; o bien si resulta $M > n$ y n resulta incluido en A al sortear la pertenencia de n a A. Como $\mathrm{P}\{M = n\} = 1/2^n$ y $\mathrm{P}\{M > n\} = \sum_{m=n+1}^{\infty} 1/2^m = 1/2^n$, resulta

$$\mathrm{P}\{n \in A\} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{2} = \frac{3}{2^{n+1}}.$$

b) La suma S de todos los elementos del conjunto A puede expresarse

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbf{I}_{\{n\in A\}}$$

donde $\mathbf{I}_{\{n\in A\}}$ vale 1 cuando $n \in A$ y 0 cuando $n \notin A$. Por consiguiente

$$\mathrm{E}[S] = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{P}\{n \in A\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2^{n+1}} = 3.$$

(Téngase en cuenta que, para $x = 1/2$,

$$\mathrm{E}[S] = \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{3}{4}\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{3}{4}\frac{d}{dx}\frac{x}{1-x} = \frac{3}{4(1-x)^2}.)$$

c) Si $|A|$ representa el número de elementos de A, según el procedimiento de inclusión de los elementos inferiores al máximo M, será

$$\mathrm{P}\{|A| = r \mid M = m\} = \binom{m-1}{r-1}\frac{1}{2^{m-1}} \qquad \text{para } r = 1, 2, \ldots, m.$$

Por tanto, la distribución conjunta de M y $|A|$ es

$$\mathrm{P}\{M = m, |A| = r\} = \binom{m-1}{r-1}\frac{1}{2^{2m-1}} \qquad \text{con } 1 \le r \le m.$$

Y la distribución marginal de $|A|$ resulta

$$\mathrm{P}\{|A| = r\} = 2\sum_{m=r}^{\infty}\binom{m-1}{r-1}\frac{1}{4^m} = \frac{2}{3^r} \qquad \text{para } r = 1, 2, 3, \ldots$$

El último valor se obtiene pensando en lanzamientos consecutivos de una moneda con probabilidad 3/4 de cara (y 1/4 de cruz); la probabilidad de que la r-ésima cara se obtenga en el lanzamiento m es

$$\binom{m-1}{r-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-r}\left(\frac{3}{4}\right)^{r}$$

cuya suma en m desde r a infinito tiene que ser 1. (Véase Ejercicio 8.9.)

d) La distribución determinada en el apartado anterior tiene media

$$\mathrm{E}[|A|] = 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r}{3^r} = \frac{3}{2}$$

mientras que

$$\mathrm{E}[|A|^2] = 2\sum_{r=1}^{\infty} \frac{r^2}{3^r} = 3$$

con lo cual $\mathrm{Var}(|A|) = 3 - (3/2)^2 = 3/4$. (Las sumas pueden hacerse mediante la técnica del final de la pregunta (b).)

Sin necesidad de obtener el valor explícito de $\mathrm{P}\{|A| = r\}$, cabe observar que $|A| = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{n\in A\}}$; de forma que

$$\mathrm{E}[|A|] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\{n \in A\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} = \frac{3}{2}.$$

Por otra parte, $|A|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{n\in A\}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{k,n\in A\}}$, de modo que

$$\mathrm{E}[|A|^2] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\{n \in A\} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} \mathrm{P}\{k, n \in A\},$$

pero, si $k < n$, es

$$\mathrm{P}\{k, n \in A\} = \mathrm{P}\{M = n\}\,\frac{1}{2} + \mathrm{P}\{M > n\}\,\frac{1}{4} = \frac{3}{2^{n+2}}$$

y resulta

$$\mathrm{E}[|A|^2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+1}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{3}{2^{n+2}} = \frac{3}{2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^{k+2}} = 3.$$

También puede razonarse que, condicionado por $M = m$, $|A| = 1 + X$ siendo X binomial de parámetros $m - 1$ y $1/2$. Así pues

$$\mathrm{E}[|A|\,|M = m] = 1 + \frac{m-1}{2} = \frac{m+1}{2}$$

y

$$\mathrm{E}[|A|] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+1}{2}\,\mathrm{P}\{M = m\} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m+1}{2^{m+1}} = \frac{3}{2}.$$

Análogamente, como $\mathrm{Var}(X) = (m-1)/4$ es $\mathrm{E}[X^2] = (m-1)/4 + (m-1)^2/4$, luego

$$\mathrm{E}[|A|^2|M = m] = \mathrm{E}[1 + 2X + X^2] = 1 + 2\,\frac{m-1}{2} + \frac{m-1}{4} + \frac{(m-1)^2}{4} = \frac{m(m+3)}{4}.$$

En consecuencia

$$\mathrm{E}[|A|^2] = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m(m+3)}{2^{m+2}} = 3.$$

e) De acuerdo con las expresiones $|A| = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{k\in A\}}$ y $S = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathbf{I}_{\{n\in A\}}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[|A|\cdot S] &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{P}\{k,n\in A\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1} n\,\frac{3}{2^{k+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} k\,\frac{3}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} n\,\frac{3}{2^{n+2}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k-1)}{2}\,\frac{3}{2^{k+2}} + 3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3(k+2)}{2^{k+2}} \\
&= \frac{3}{2} + 3 + 3 = \frac{15}{2}
\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que $\mathrm{P}\{k,n\in A\} = 3/2^{k+2}$ o $3/2^{n+2}$ según que sea $k > n$ o $n > k$. Por consiguiente, $\mathrm{Cov}(|A|, S) = 15/2 - 3\cdot 3/2 = 3$.
Falta determinar la varianza de S. Pero

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[S^2] &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} k\,n\,\mathrm{P}\{k,n\in A\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k-1} k\,n\,\frac{3}{2^{k+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} k^2\,\frac{3}{2^{k+1}} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty} k\,n\,\frac{3}{2^{n+2}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2(k-1)}{2}\,\frac{3}{2^{k+2}} + 9 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k(k+2)}{2^{k+2}} = \frac{15}{2} + 9 + \frac{15}{2} = 24
\end{aligned}$$

con lo cual $\mathrm{Var}(S) = 24 - 3^2 = 15$. Y, en definitiva, el coeficiente de correlación entre $|A|$ y S resulta

$$\rho = \frac{3}{\sqrt{15}\sqrt{3/4}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \simeq 0'8944.$$