Examen de prueba Historia de las Matemáticas

"Sea ϕ*x* un enunciado que contiene una variable *x* y que se convierte en una proposición cuando se le asigna a *x* cualquier significado determinado fijo. Entonces ϕ*x* se llama una *"función proposicional*"

"Una clase es […] todos los objetos que satisfacen una función proposicional"

Russell & Whitehead, *Principia Mathematica*

1. Explique si podemos dar cuenta de los conjuntos cantorianos en términos de funciones proposicionales. (3 puntos)

La función proposicional pretende ser la base de un sistema lógico que, mediante los axiomas de la lógica proposicional, conduzca a resultados sin contradicciones, basándose en lo que Russell denomina proposiciones elementales, es decir, aquellas no afectadas por ninguna variable, donde no hay cuantificadores. En esencia existe cierto paralelismo entre el planteamiento de la función proposicional de Russell, que identifica una condición o propiedad, y la función característica establecida por Cantor para determinar los conjuntos, los subconjuntos de un conjunto y el conjunto de las partes de dicho conjunto, teorema a su vez reformulado por el propio Russell. Sin embargo, debemos tener presente el hecho de que Cantor consideraba y concebía un conjunto como una esfera conceptual, más allá del agrupamiento de elementos por una condición o por una propiedad, generalmente expresada por una función, admitiendo incluso las denominadas pluralidades inconsistentes, asumiendo una idea de conjunto en base a los dominios, identificando cada conjunto con su potencia, estableciendo el concepto de equinumerosidad para establecer el criterio de equivalencia de conjuntos, buscando un orden que establezca una secuencia de los elementos, definiendo el ordinal y adoptando la denominación de álef para la designación de los transfinitos, surgidos a partir de la comparación de los números enteros, o naturales, y los números reales a través de una biyección.

Examen de prueba Historia de las Matemáticas

2. Explique si podemos dar cuenta de la noción fregeana de *número* en términos de funciones proposicionales (3 puntos).

En su intento de crear el programa “logicista” que demuestre los axiomas de Peano que sustentan toda la aritmética, Frege se apoya en dos cuestiones, por un lado, la teoría de conjuntos de Cantor y su aplicación al desarrollo de la aritmética y, por otro lado, la lógica matemática, constituida por unas expresiones predicativas con una intensión y una extensión. Pero para ello necesita definir previamente el término “número” que entiende como objetos lógicos que designan conceptos, y no de tipo psicológico, como algo subjetivo, o formal, como un símbolo sin contenido, a partir de los cuales se contempla la función matemática como la estructura lógica común a un conjunto de enunciados. De esta manera, cada concepto determina una clase, o extensión del concepto, siendo el número de un concepto dado el número de miembros de la clase de cosas identificadas con ese concepto, lo que permitiría establecer el concepto de numerabilidad. Frege postula el concepto de número en términos de su lógica, a partir del cual, se deben definir las nociones primitivas de la aritmética (como el cero y el uno), y en base al cual se puede usar para las demostraciones de los teoremas de la aritmética, es decir, la esencia es el número y en torno al él se construye con el andamiaje de la lógica la estructura matemática.

Las funciones proposicionales de Russell, si bien establecen un criterio para establecer las clases de un conjunto, son a su vez un vehículo para introducir la paradoja de Russell, el conjunto de los elementos que no pertenecen al propio conjunto, lo que desbarata la teoría logística de Frege, quien en sus últimos años abandona su creencia inicial de que la matemática era reducible a la lógica, consciente de que su planteamiento puede conducir a contradicciones matemáticas.

Examen de prueba Historia de las Matemáticas

3. Explique si podemos usar el concepto de clase para interpretar el Axioma de Selección de Zermelo. (4 puntos)

De los posibles enunciados del Axioma de Selección de Zermelo, podríamos seleccionar el que indica que para todo conjunto A, existe una función de elección sobre la colección de sus subconjuntos no vacíos. En esencia, esto significa que existe una condición que permite constituir una clase, o dicho alternativamente, para que los elementos de un conjunto formen un subconjunto deben cumplir una condición predicativa, que no es sino una función proposicional, tal vez no estrictamente ene le sentido logicista russelliano, pero sí en el matemático. En realidad, Zermelo recurre, para la elaboración y planteamiento de su Axioma de Selección, a la figura del "selector", que es la función que relaciona un conjunto con la envolvente, unión de todos sus subconjuntos, y, en particular, asigna a un elemento del conjunto definido un elemento del conjunto final, verificando el Teorema del Buen Orden de Cantor.

El trabajo de Zermelo consistente en la axiomatización de la matemática, entre los que se incluye el Axioma de Selección, permite esquivar las paradojas generadas en la teoría de conjuntos, con el banal argumento de negar la existencia de los conjuntos que los provocan. En síntesis, para cada fórmula $\phi(X)$, se conviene en que la notación $A = \{X \mid \phi(X)\}$ (que leeremos "A es la clase de todos los conjuntos que cumplen $\phi(X)$") significará simplemente que $X \in A$ es una forma alternativa de escribir $\phi(X)$.

Examen de prueba Historia de las Matemáticas

"Sea φx un enunciado que contiene una variable x y que se convierte en una proposición cuando se le asigna a x cualquier significado determinado fijo. Entonces φx se llama una 'función proposicional'"

"Una clase es [...] todos los objetos que satisfacen una función proposicional"

Russell & Whitehead, Principia Mathematica

(1) Explique si podemos dar cuenta de los conjuntos cantorianos en términos de funciones proposicionales. (3 puntos)

El hilo para responder a esta pregunta está en la cuestión 8 de las PEC ("¿Por qué no toda "pluralidad bien definida" sería un conjunto en el sentido de Cantor?"). Como os decía en mi comentario:

[...] Una vía que explorarán Frege y Russell es la de definir los conjuntos como si fueran conceptos, entidades semánticas que contribuyen, por ejemplo, a decidir si una proposición es verdadera o falsa (además de lógicos, ambos autores fueron filósofos del lenguaje). De ahí, la dificultad de las paradojas -Burali-Forti, etc: delatan la existencia de conjuntos que apelan a conceptos mal definidos. Como algunos de vosotros apuntáis, Cantor no suponía la equivalencia entre conjunto y concepto. De ahí que no tuviera dificultad en aceptar pluralidades inconsistentes, aunque denominase conjunto sólo a aquellas que sean consistentes.

Para responder correctamente a esta pregunta, hay que explicar la diferencia entre la definición de conjunto de Cantor y la de Russell, explicando cómo las "pluralidades inconsistentes" no se pueden definir en términos de funciones proposicionales.

El problema en tu respuesta es que señalas que hay diferencia entre Cantor y Russell (correctamente), pero no acabas de responder a la pregunta: ¿podemos o no podemos definir los conjuntos cantorianos mediante funciones proposicionales? ¿Y por qué?

Pregunta 1: Leyendo el proceso de desarrollo de la teoría Cantoriana a partir de las series trigonométricas, y procediendo a establecer la teoría del continuo y el teorema del buen orden, Cantor opta por la selección de las partes o clases de un conjunto dado, y esto lo hace utilizando la función característica, que atribuye valor 1 ó 0 según pertenezca o no al conjunto (Torretti, pag 43). Aunque el propósito de Russell es diferente, por su logismo, sí me ha parecido que existe cierta similitud en los planteamientos para argumentar cada uno su estructura. Evidentemente, no incluyo aquí las pluralidades inconsistentes, que menciono en mi respuesta de pasada, que, la verdad, no asumía, tal vez erróneamente, como conjunto cantoriano, sino como un recurso para la justificación de algunas inconsistencias.

Aciertas en ver la similitud, pues ambas funciones operan extensionalmente (se puede decir si x pertenece o no al conjunto) Pero eso no te permite contestar a la pregunta, me temo, porque Cantor y Russell no tienen la misma idea de conjunto: a Cantor le dan igual las paradojas, Russell quiere evitarlas con su definición.

Examen de prueba Historia de las Matemáticas

(2) Explique si podemos dar cuenta de la noción fregeana de número en términos de funciones proposicionales (3 puntos).

Para responder conviene empezar por ver qué dice Torretti sobre la noción fregeana de número: en la p. 160, podéis leer "Frege exige una definición de número que certifique la unicidad del uno, el dos, el tres, etc. Como veremos, esta exigencia lo indujo a la contradicción que arruina su teoría". Hay que explicar entonces este proyecto de Frege, tal como os pedía en la pregunta 13 de las PEC.

Como sabéis, la contradicción que arruinó su teoría fue formulada por el propio Russell. Para resolverla, Russell desarrolló la teoría de los tipos lógicos, sobre la que os digo en mi comentario del a pregunta 13:

Pero las paradojas que surgieron de este proyecto supusieron, en última instancia, la separación de lógica y matemáticas: los conjuntos no podrían definirse como conceptos sin incurrir en ellas. La teoría de los tipos de Russell mostró los costes de adoptar un punto de vista intensional riguroso (los objetos se multiplicaban, uno por tipo).

Es decir, se acaba la unicidad que pretendía Frege para los números. Explicar la conexión entre funciones proposicionales y teoría de los tipos la expone Torretti en la sección 2.4 de su libro. Se pueden construir explicaciones más simples o más complicadas a partir de esas páginas, pero con las más simples (a partir de las pp. 180-183) ya os doy los 3 puntos completos de la pregunta

De nuevo aquí explicas los preliminares, sin llegar a contestar a la pregunta

(3) Explique si podemos usar el concepto de clase para interpretar el Axioma de Selección de Zermelo. (4 puntos)

Esta pregunta es, con diferencia, la menos obvia. Pero la solución la encontráis en el texto de I. Jané, "¿De qué trata la teoría de conjuntos?" (en la carpeta de Recursos). Dice Jané (p. 13):

Para Russell, por el contrario, "toda clase está definida por alguna función proposicional que es verdadera de los miembros de la clase y falsa de lo demás" (Russell 1919, pág. 183); en consecuencia, aunque se vio obligado a usar el axioma de elección, hubo de reconocer la imposibilidad de justificarlo, ya que "a no ser que podamos hallar una regla para seleccionar [un objeto de cada parte], no sabremos que una selección es siquiera teóricamente posible" (Russell 1919, pág. 126).

Aun sin leer el texto de Jané, se puede llegar a la misma conclusión a partir de mi comentario a las PEC (9-10), citando la Wikipedia:

La dificultad aparece cuando no hay una elección natural de elementos de cada conjunto. Si no se pueden hacer elecciones explícitas, ¿cómo saber que existe el conjunto deseado?

En el enunciado de esta pregunta os digo ""Una clase es […] todos los objetos que satisfacen una función proposicional". Si el axioma de elección no nos permite determinar los objetos que satisfacen una clase, ¿cómo podría Russell justificarlo?

Examen de prueba Historia de las Matemáticas

Idéntico problema en tu respuesta, empiezas bien, pero no acabas de responder a la pregunta.

Pregunta 3: creo que, como en la pregunta 1, no acabo de entender el matiz que cada autor le confiere a los términos utilizados (función proposicional, función característica o función de selección). Observo que Torreti, en la explicación del Axioma de Selección, se refiere a la función que clasifica los conjuntos, "selecciona" pag 64, como selector, pero esto es lo que ordena un conjunto en clases, no en el sentido que le infiere Russell, pero en esencia es un criterio de clasificación, es decir, de definición de clases, aunque como puedo apreciar, no universalmente válido, dado que existen conjuntos donde no hay una elección antural. Entiendo que el propio Zermelo acaba excluyendo el Axioma de Selección del resto de los axiomas porque lo considera un principio lógico universal, pero en su fundamentación me había parecido entender el uso de una función de selección para la clasificación.

El problema del axioma de elección es que no es constructivo, no nos permite determinar los objetos que pertenecen a una clase. Si el primer elemento está dado de modo natural, no se nota, pero en cuanto ascendemos al continuo, ya no se puede aplicar intuitivamente. Y una función proposicional como decíamos antes exige esa determinación