Introducción a los espacios de Hilbert

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1

Sea $\mathcal{H}$ el espacio vectorial real de las funciones $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas y sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión del intervalo $[0,1]$.
Se define la aplicación:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \, : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f,g) \longmapsto \langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n)$$

a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(1/2^n) f(a_n) g(a_n)$ no es absolutamente convergente.
b) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es siempre un producto interno.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 2

Sea c_{00}, el subespacio de ℓ^2 de las sucesiones complejas que tienen sólo un número finito de términos no nulos, dotado de la restricción del producto interno de ℓ^2. Sea A el siguiente subconjunto de c_{00}:

$$A = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00} \colon \sum_{n=1}^{\infty} (x_n/n) = 0 \right\}$$

Se tiene:
a) $A^{\perp} \neq \{0\}$.
b) A es denso en c_{00}.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 3

Sabiendo que $\dfrac{2}{\pi} + \dfrac{4}{\pi} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}$ es el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(x) = |\cos x|$ en $L^2[0,\pi]$, el valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$ es:

a) $\dfrac{3(\pi-3)}{4}$.

b) $\dfrac{\pi^2-8}{16}$.

c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 4

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tales que $|\alpha| = |\beta|$ y sea $S = \alpha T + \beta T^*$.
Se puede asegurar que :

a) $SS^* = I_{\mathcal{H}}$.
b) $SS^* \neq S^*S$.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 5

Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado tal que $TT^* = T^*T$. Se tiene:

a) $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
b) T es un operador autoadjunto.
c) T es un operador unitario.

Soluciones

Ejercicio 1

Observemos que toda función $h\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua está acotada y existe $M_h = \max_{x\in[0,1]} |h(x)|$. En consecuencia para las funciones $f, g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(1/2^n) f(a_n) g(a_n)\right| \le M_f\, M_g \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = M_f\, M_g\,.$$

Luego la serie es absolutamente convergente y la aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tiene sentido.

Las siguientes propiedades de la definición de producto interno se cumplen, independientemente de como sea la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $[0,1]$.

1. $\langle f, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \big(f(a_n)\big)^2 \ge 0$ para todo $f \in \mathcal{H}$.
2. $\langle g, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} g(a_n) f(a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n) = \langle f, g\rangle$ para todo $f, g \in \mathcal{H}$.
3. Finalmente, para todo $f, h, g \in \mathcal{H}$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\langle \alpha f + \beta h, g\rangle \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} (\alpha f + \beta h)(a_n) g(a_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f(a_n) g(a_n) + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} h(a_n) g(a_n) = \alpha\langle f, g\rangle + \beta\langle h, g\rangle$$

Por tanto, tenemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto interno en $\mathcal{H}$ si y sólo si se cumple que si $\langle f, f\rangle = 0$ entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Pero esto no es en general cierto y depende de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. De $\langle f, f\rangle = 0$ se deduce que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \big(f(a_n)\big)^2 = 0$ y de ahí se tiene que $f(a_n) = 0$ para todo n. Pero en general no se puede concluir que f sea la función nula. Por ejemplo, si tomamos la sucesión constante $a_n = 0$ para todo n y la función $f(x) = x$ se obtiene que $\langle f, f\rangle = 0$ y sin embargo $f \neq 0$.
En consecuencia la opción correcta es la c).

Ejercicio 2

Es en parte el ejercicio 3.14 del texto base donde se demostró que $A^{\perp} = \{0\}$ y que A es un subespacio vectorial cerrado de c_{00}. En consecuencia, A no es denso en c_{00}. Luego ninguna de las otras dos opciones es verdadera.

Ejercicio 3

La sucesión

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(2nx)\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{sen}(2nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una base ortonormal de $L^2[0,\pi]$. La serie de Fourier de g,

$$g = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2nx) + b_n \operatorname{sen}(2nx)] \qquad \text{en} \quad L^2(0,\pi)\,,$$

es la serie que nos dan,

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}\,.$$

La igualdad de Parseval correspondiente al desarrollo es:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |g(x)|^2 dx &= \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \\
\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 x dx &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (4n^2 - 1)^2} \\
\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} \\
\frac{1}{\pi} \Big[\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}\Big]_0^{\pi} &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} \\
\frac{1}{2} &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2} = \Big(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\Big)\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2-8}{16}\,.$$

En consecuencia la opción correcta es la b).

Ejercicio 4

En primer lugar si $S = \alpha T + \beta T^*$ entonces $S^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T$. En consecuencia,

$$SS^* = \alpha T(S^*) + \beta T^*(S^*) = \alpha T(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T) + \beta T^*(\overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} T) = |\alpha|^2 TT^* + \alpha\overline{\beta} TT + \beta\overline{\alpha} T^*T^* + |\beta|^2 T^*T$$

y análogamente

$$S^*S = |\alpha|^2 T^*T + \alpha\overline{\beta} TT + \beta\overline{\alpha} T^*T^* + |\beta|^2 TT^*\,.$$

Teniendo en cuenta que $|\alpha| = |\beta|$ resulta que $S^*S = SS^*$.

La igualdad $SS^* = I_{\mathcal{H}}$ no es cierta en general. Por ejemplo, si $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y T es autoadjunto se obtiene $S = S^* = \mathbf{0}$. La opción correcta es la c)

Ejercicio 5

La opción correcta es la a).

$\|T(x)\|^2 = \langle T(x), T(x)\rangle = \langle x, T^*(T(x))\rangle = \langle x, T(T^*(x))\rangle = \langle T^*(x), T^*(x)\rangle = \|T^*(x)\|^2$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Todo operador autoadjunto o unitario cumple que $TT^* = T^*T$, pero el recíproco no es cierto. Por ejemplo, el operador T que respecto de una base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ está definido por la matriz $\begin{pmatrix} 2 & i \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ no es ni unitario, ni autoadjunto y sí cumple que $TT^* = T^*T$.