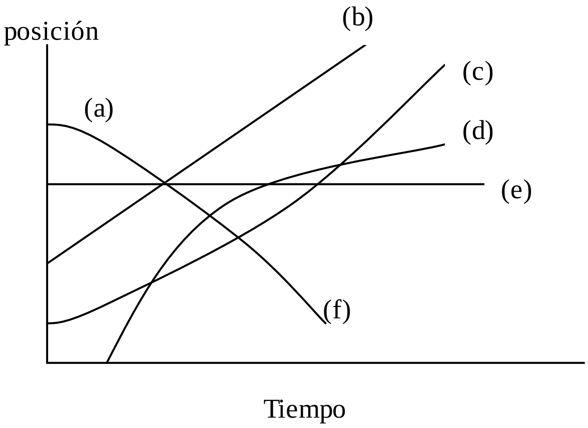
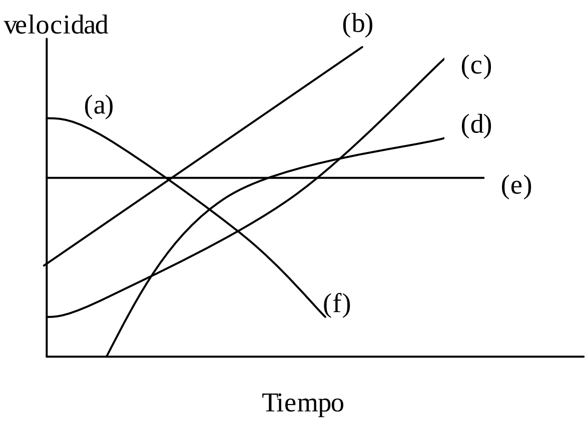
Cuestiones y problemas
Tema 0 (repaso): Cinemática

¿Cuál de las curvas en el plano posición-tiempo adjunto describe mejor el movimiento de un cuerpo sometido a una aceleración positiva y constante?



Solución: la (c)

¿Cuál de las curvas en el plano velocidad-tiempo adjunto describe mejor el movimiento de un cuerpo sometido a una aceleración positiva y constante?



Solución: la (b)

Un cazador y su perro se dirigen en línea recta hasta una cabaña que dista 10 Km. Ambos parten desde la misma distancia. El cazador camina a una velocidad constante de 5 Km/hora. El perro, que va más deprisa, se mueve a velocidad doble que el cazador. Como el perro se mueve más rápido, llega a la cabaña primero. Una vez que ha llegado a la cabaña, regresa en busca del cazador hasta que se encuentra con él. Cuando lo encuentra decide dar la vuelta y regresa otra

vez a la cabaña, y así sucesivamente se dedica a ir y venir desde el cazador a la cabaña y desde la cabaña al cazador, hasta que el cazador llega a la cabaña. ¿Qué distancia recorre el perro?
Solución:
Si el cazador ha recorrido en total 10 Km., el perro habrá recorrido el doble, puesto que su velocidad es el doble que la del cazador y ambos han estado el mismo tiempo moviéndose.

Un ascensor de 3 m de altura sube con una velocidad constante de 1 m/s. Cuando se encuentra a una cierta altura se desprende la lámpara del techo. Calcular el tiempo que tarda la lámpara en llegar al suelo del ascensor medido por un observador situado dentro del ascensor y el tiempo que tarda en caer la lámpara medido por un observador en reposo fuera del ascensor. (Tomar g=9.8 m/s^2)
Solución:
Si no tenemos en cuenta efectos relativistas (son completamente despreciables debido a la velocidad relativa tan pequeña entre ambos sistemas de referencia), el tiempo medido por ambos observadores debe ser el mismo. Veamos que esto es así.

- Desde dentro del ascensor:

Se trata de un sistema de referencia que se mueve con velocidad constante (sistema de referencia inercial), por lo que podemos aplicar directamente las ecuaciones de la cinemática derivadas de las leyes de Newton. Un observador situado dentro del ascensor ve simplemente una caída libre de la lámpara. La ecuación general de este movimiento es

$$h = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 .$$

Si tomamos el sentido positivo hacia abajo ($a = g$) y el origen de alturas en el techo del ascensor $h_0 = 0$ tenemos

$$h(t) = \frac{1}{2} g t^2 .$$

Cuando la lámpara llega al suelo tenemos que $h(t) = 3$ m. Despejando el tiempo obtenemos 0,78 s.
También podríamos haber considerado, por ejemplo, el movimiento positivo hacia arriba y el origen de alturas en el suelo del ascensor, por ejemplo. En este caso las ecuaciones serían.

$$h(t) = 3 - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Ahora cuando la lámpara llega al suelo tenemos que $h(t) = 0$ m. Despejando obtenemos el mismo tiempo.

- Desde fuera del ascensor:

Un observador situado fuera del ascensor también ve una caída libre pero con una velocidad inicial $v_0 = -1\, m/s$, donde de nuevo hemos escogido positivo el sentido hacia abajo. Tomemos como origen de alturas el punto en el que la lámpara se desprende. La altura de la lámpara en función del tiempo será

$$h_{lámpara}(t) = h_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 = -t + \frac{1}{2} g t^2 .$$

Por otro lado, la posición del suelo del ascensor en función del tiempo será

$$h_{suelo}(t) = h_0 + vt = 3 - t ,$$

Ya que inicialmente se encuentra 3 m por debajo del origen de alturas: $h_0 = 3$ m (positivo porque así lo hemos convenido) y con velocidad constante negativa hacia arriba. Por consiguiente, para encontrar el tiempo en el que la lámpara impacta con el suelo tendremos que igualar y despejar ambas ecuaciones

$$3 - t = -t + \frac{1}{2} g t^2 ,$$

dando como resultado el mismo tiempo obtenido arriba: 0,78 s.

Desde un punto situado a 50m sobre el suelo se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 20 m/s. Una vez alcanzado su punto más alto, vuelve a caer verticalmente hasta que alcanza el suelo y se detiene. ¿Cuál es la posición de la piedra transcurridos 6 segundos desde su lanzamiento? Cuando resolvemos el problema nos damos cuenta de que algo falla en la pregunta: ¿qué es?

Solución:

$$h(t) = h_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$h(6) = 50 + 120 - 5 \cdot 36$$
$$h(6) = -10 \text{ m}$$

Si hubiera un agujero muy profundo en el suelo, la piedra estaría a 10 m de profundidad, pero como no es así, el suelo ha parado su movimiento, por lo que al cabo de 6 s la piedra estará en el suelo.

Un objeto es lanzado verticalmente al aire para después volver a caer. Teniendo presente el rozamiento del aire, ¿tardará lo mismo en subir que en bajar?

Solución:

Hay muchas formas de resolver este problema. Podemos suponer que se trata de un movimiento uniformemente acelerado tanto en la subida como en la bajada. Si v_i es la velocidad inicial con la que es lanzado el objeto y v_f es la velocidad con la que vuelve al mismo punto, tenemos que $v_i > v_f$ ya que se pierde energía mecánica durante el movimiento debido al rozamiento. Podemos entonces escribir las ecuaciones de la cinética para este movimiento:

$$\begin{aligned} 0 - v_i^2 &= -2a_1 h \\ v_f^2 &= 2a_2 h \end{aligned},$$

donde a_1 es la aceleración media durante la subida, a_2 es la aceleración media durante la bajada y *h* es la altura alcanzada. De la condición $v_i > v_f$ obtenemos que $a_1 > a_2$.

También podemos escribir

$$\begin{aligned} 0 - v_i &= -a_1 t_1 \\ v_f - 0 &= a_2 t_2 \end{aligned}$$

donde t_1 es el tiempo que tarda en subir y t_2 es el tiempo que tarda en bajar.

Si ahora escribimos las ecuaciones del espacio recorrido

$$h = v_i t_1 - \frac{1}{2} a_1 t_1^2 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$
$$h = \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

e igualamos, obtenemos que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}.$$

Como $a_1 > a_2$, entonces $t_2 > t_1$ y tardará menos en subir que en bajar.

Se lanza un proyectil con velocidad inicial v_0 en módulo y ángulo α sobre la horizontal. Hallar la expresión que nos da el alcance máximo alcanzado en función de v_0, α y g.
Solución**:**
Para obtener esta expresión necesitamos el tiempo que tarda el proyectil en completar el tiro parabólico, $t_{alcance}$. La ecuación de la velocidad en la dirección *y* tiene la forma:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt\,.$$

Por la simetría del problema, la velocidad final en la dirección *y* valdrá $v_y = -v_0 \sin\alpha$, por lo que el tiempo de alcance será $t_{alcance} = 2v_0 \sin\alpha / g$. Como la posición *x* del proyectil varía de acuerdo con:

$$x = v_0 t \cos\alpha\,,$$

el alcance será: $x(t_{alcance}) = 2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha / g$.

Se deja caer verticalmente una pelota al suelo. La pelota rebota tres veces antes de ser atrapada. Trace las gráficas de su posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo. Considere que la pelota pierde energía mecánica en cada rebote.
Solución:
Las ecuaciones de la cinemática de la pelota son:

Antes del primer choque:

$$\vec{h} = \vec{h}_0 + \frac{1}{2}\vec{a}t^2; \quad \vec{v} = -gt\,\vec{j}; \quad \vec{a} = -g\vec{j};$$

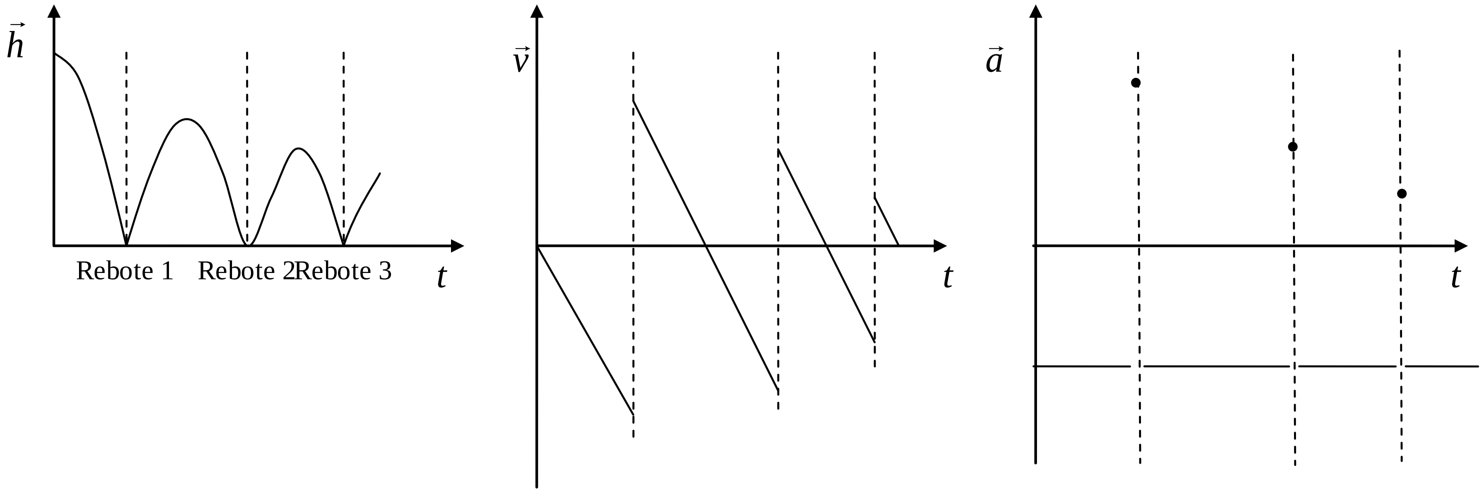
El primer choque ocurre en $t_1 = \sqrt{2h_0/g}$. Como se pierde energía en el choque, el módulo de la velocidad con la que sale la pelota del rebote $\vec{v}_f$ será menor que el módulo de la velocidad con la que llega $\vec{v}_i$.

$$\vec{v}_i = -gt_1\vec{j}$$
$$\vec{v}_f = \varepsilon g t_1 \vec{j} \;\; (\text{con } 0 \le \varepsilon < 1)$$

La aceleración media en el rebote, que se produce durante un tiempo muy pequeño Δt, será

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{\Delta t} = \frac{(\varepsilon+1)gt_1}{\Delta t}\vec{j}\,.$$

Si hacemos los cálculos para los siguientes rebotes obtendremos las gráficas:



Como se puede apreciar, después de cada choque la pelota pierde velocidad y por tanto la altura máxima que alcanza disminuye. Entre cada choque la aceleración es constante y negativa (gravedad). Sin embargo, durante cada choque la aceleración es positiva, aunque su valor decrece a medida que se suceden los choques.

En un tren que frena al entrar en una estación, un niño sentado de espaldas al sentido de marcha lanza una pelota al aire. Ésta caerá:

a) detrás de él;
b) delante de él;
c) en sus manos

Solución:

Si v_0 es la velocidad con la que circulaba el tren justo en el momento en el que el niño lanza la pelota al aire y v la velocidad con la que ésta es lanzada verticalmente por el niño, para un observador situado fuera del tren, la pelota describirá un movimiento parabólico con v_0 como componente horizontal de la velocidad inicial de la pelota y v como la componente vertical:

$$x = tv_0$$

$$y = tv - \frac{1}{2}gt^2$$

Al cabo de un cierto tiempo t', la pelota volverá a $y = 0$, y por tanto habrá recorrido una distancia $x_{pelota} = t'v_0$. Mientras tanto, el tren habrá recorrido en el mismo tiempo una distancia menor puesto que partiendo de la velocidad v_0 ha ido frenando. $x_{tren} = t'v_0 - \frac{1}{2}at'^2$. Como $x_{tren} < x_{pelota}$ la pelota caerá por delante del tren, y como el niño está sentado de espaldas al avance del tren, la pelota caerá detrás del niño.

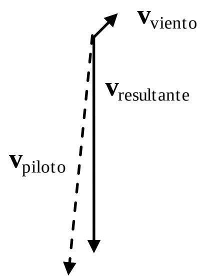
Un avión recibe la orden desde la torre de control de volar en línea recta hacia el sur con una velocidad de 800 km/h. Sabiendo que el viento sopla de suroeste hacia noreste a 100 km/h, ¿en qué dirección y con qué velocidad debe dirigir el piloto el avión para mantener el rumbo ordenado por la torre?

Solución:

Como el viento sopla hacia el noreste el avión sufrirá una deriva en esta dirección. Esta deriva debe ser compensada por el piloto de forma que la velocidad resultante de la suma de ambas sea la velocidad ordenada desde la torre de control. Es decir:

$$\mathbf{v}_{\text{resultante}} = \mathbf{v}_{\text{piloto}} + \mathbf{v}_{\text{viento}}$$

En el siguiente diagrama se ve más claro



Por consiguiente la velocidad que debe seguir el piloto es

$$\mathbf{v}_{\text{piloto}} = \mathbf{v}_{\text{resultante}} - \mathbf{v}_{\text{viento}}$$

Descomponiendo tenemos

$$\mathbf{v}_{\text{resultante}} = (0, -800) \text{ km/h}$$

$$\mathbf{v}_{\text{viento}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(100, 100) \text{ km/h}$$

Si ahora igualamos llegamos a

$$\mathbf{v}_{\text{piloto}} = \left(-70.7, -870.7\right) \text{ km/h}$$

¿Es posible que la posición de una pelota de golf venga dada por la expresión $\mathbf{r}(t) = (2 + 10t, -9.8t^2, 18t)\text{m}$ si sólo actúa la fuerza gravitatoria sobre la misma?

Solución:

Es absolutamente imposible, ya que derivando dos veces obtenemos

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = (0, -19.6, 0) \text{ m/s}^2$$

cuando debería ser $\mathbf{a}(t) = (0, -9.8, 0) \text{ m/s}^2$ puesto que la única aceleración de la partícula es la gravitatoria.