⁕ Duración del examen: dos horas ⁕

⁕ No se permite el uso de ningún tipo de material ⁕

Ejercicio 1) **(2.5 puntos)** Resolver el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} yu_y - (x+1)u_x = u + 2x \\ u(1,y) = y. \end{cases}$$

⁕

Ejercicio 2) **(3.5 puntos)** utilizando el método de variables separadas, hallar las soluciones del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = 0, \quad (x,y) \in (0,\pi) \times (0,\pi) \\ u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0 \\ u(0,y) = 0 \\ u(\pi,y) = \cos(2y) \end{cases}$$

⁕

Ejercicio 3) **(4 puntos)** Dada una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, denotemos por $\widehat{g}$ su transformada de Fourier.

(3.1) Sea f una función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y de clase C^2. Demostrar que la transformada de Fourier $\widehat{f''}(\xi)$ de f'' es la función $-\xi^2 \widehat{f}(\xi)$.

(3.2) Utilizando que la transformada de Fourier de la función $f(x) := e^{-ax^2}$ es $\widehat{f}(\xi) = (1/\sqrt{2a})e^{-\xi^2/4a}$, calcular la transformada de Fourier de la función $(x^2-1)e^{-x^2/2}$.

(3.3) Aplicando la transformada de Fourier, hallar la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u \text{ acotada.} \end{cases}$$