Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano real y $x, y \in \mathcal{H}$. Demuestre que x e y son ortogonales si y sólo si $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea F el subespacio de $\mathcal{H} = \ell^2$, definido mediante

$$F = \left\{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \colon x_1 = x_2\right\}.$$

Demuestre que F es cerrado en $\mathcal{H}$ y calcule la distancia mínima de $\mathbf{f}$ a F, siendo $\mathbf{f} = \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{A} = \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sean $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $T \colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}$ el operador lineal tal que $T(x_n) = \alpha_n x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que T es acotado si y sólo si $\alpha \in \ell^{\infty}$.

b) ¿Bajo qué condiciones se puede asegurar que T se extiende a una proyección ortogonal $\overline{T} \colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$?

Pregunta 4 (2,5 puntos)

a) Demuestre, usando la transformada de Fourier, que no existe ninguna función h en $L^1(\mathbb{R})$ tal que $f * h = f$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

b) Resuelva en $L^1(\mathbb{R})$ la ecuación $f * f = f$.

Nota: El símbolo $*$ indica el operador de convolución.