RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES
PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA
CURSO 2020

-INSTRUCCIONES

- La prueba está disponible desde el 20 de abril hasta el 10 de mayo y se entrega a través del curso virtual, para ello se ha abierto una tarea denominada

  Prueba de Evaluación Continua

- El examen consta de ocho apartados, todos puntúan un diez por ciento de la nota.
- El restante 20 por ciento de la nota se corresponde a la presentación del mismo. Para obtener la máxima nota en este apartado se debe utilizar LaTeX y presentar un fichero pdf.
- Todas las preguntas deben estar debidamente razonadas.
- Se deben entregar todos ficheros, tanto el fichero pdf con la respuesta y los ficheros con los códigos, en un fichero comprimido.

-ENUNCIADO

Consideramos el siguiente problema de Cauchy: Hallar una función $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha u(t) = g(t) \text{ para todo } t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

en donde u_0 es el valor inicial, $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función dada[1]. Se pide lo siguiente:

1. Escribiendo la solución de (1) como $u(t) = e^{-\alpha t} v(t)$, determine la ecuación diferencial que verifica v. Resuelva analíticamente dicha ecuación y verifique que
$$u(t) = e^{-\alpha t} \left(u_0 + \int_0^t e^{\alpha s} g(s) ds \right). \tag{2}$$
2. Calcule razonadamente la solución exacta en el caso en que $\alpha = \alpha(t)$ dependa del tiempo.
3. Considerando que α, g son constantes, encuentre una expresión para u y calcule $\lim_{t\to\infty} u(t)$.
4. En este caso, consideramos que $g = 0$ y un coeficiente complejo $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i \in \mathbb{C}$, con parte real $\alpha_r > 0$. Pruebe que $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$.

[1]Esta ecuación diferencial describe un modelo físico de absorción (o producción) en donde α es una constante física y g es el término fuente. Un ejemplo sería la intensidad de radiación emitida por un cuerpo radiactivo, en donde $u(t)$ es una medida de la concentración de un isótopo inestable. En general, la concentración de radiación decae a la mitad en un intervalo de tiempo de vida media T según la ecuación

$$u'(t) = \alpha u(t), \text{ con } \alpha = -\frac{\ln 2}{T}.$$

5. Utilice Octave, Scilab o Maxima para implementar una función del método explícito de Euler. La función debe tener la siguiente expresión

$$\texttt{u} = \texttt{EDO\_EulerExp}(\texttt{u0}, \texttt{t0}, \texttt{t1}, \texttt{n})$$

en donde

```
% t0 tiempo inicial
% u0 condición inicial
% t1 tiempo final
% n número de pasos entre t0 y t1
% u vector solución de dimensión n+1 con solución en cada paso t0+i*h, (i=0,...,n),
h=(t1-t0)/n
```

6. Escriba un script que llame a dicha función y resuelva la ecuación

$$u'(t) + 4u(t) = 0,\ u(0) = 1. \tag{3}$$

Considere para ello $t_0 = 0$, $t_1 = 3$, y $n = 24$ $(h = 1/8)$. Represente gráficamente los resultados, representando la solución exacta como la numérica en una misma gráfica. Haga lo mismo para el caso $n = 6$ $(h = 1/2)$.

7. Los métodos de Runge-Kutta son métodos de un paso que generalizan al método de Euler como alternativa a los métodos multipasos. Uno de los más conocidos es el método de cuatro étapas. Considerando un problema de valor inicial

$$u'(t) = f(t, u(t)),\ u(0) = u_0,$$

se define iterativamente de la siguiente manera:

$$\texttt{(RK4)} \begin{cases} \quad k_1 = hf(t_n, u_n), \\ \quad k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ \quad k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_2}{2}), \\ \quad k_4 = hf(t_n + h, u_n + k_3), \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \tag{4}$$

En este ejercicio se pide realizar lo mismo que en los dos apartados anteriores para este método, implementando una función

$$\texttt{u} = \texttt{EDO\_RK4}(\texttt{u0}, \texttt{t0}, \texttt{t1}, \texttt{n})$$

y aplicándola al ejemplo concreto (3) en las mismas condiciones que anteriormente.

8. Consideremos que $g = 0$, si aplicamos el método de Euler tenemos $u_n = (1 - \alpha h)^n u_0$. Denotando $G(-\alpha h) = (1 - \alpha h)$ podemos escribir la iteración de la siguiente manera

$$u_n = G(-\alpha h)^n u_0.$$

Así, denotando $z = -\alpha h$ y considerando la función $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en el plano complejo, el conjunto

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |G(z)| < 1\}$$

nos determina la región de estabilidad fuerte del método[2]. A esta función G se la denomina *función de amplificación* y se puede calcular para cada método.

En este ejercicio se pide calcular la función de amplificación para el método de Euler explícito y el método Runge-Kutta (4), y dibujar y comparar las correspondientes regiones de estabilidad en un mismo gráfico por ordenador. A tenor de lo calculado comente los resultados numéricos obtenidos en los apartados anteriores.

[2]Véase que si $|G(z)| < 1$, entonces se verifica que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ lo que coincide con el comportamiento de la solución $\lim\limits_{t_n\to\infty} u(t_n) = \lim\limits_{t_n\to\infty} e^{-at_n} = 0$ y se verifica una propiedad de estabilidad fuerte.