Problema 1. *Un cierto mecanismo está compuesto por una unidad principal y otra idéntica, de repuesto, que funciona sólo cuando la principal se avería. El tiempo de funcionamiento de cada componente, antes de la avería, es exponencial de media 1/2 y la reparación dura un tiempo exponencial de media 1. Cada unidad está a cargo de un operario e inicialmente las dos unidades están en servicio.*

a) Hallar la probabilidad de que el mecanismo funcione en el tiempo t

b) Hallar la proporción límite de tiempo que funciona cada unidad.

c) Determinar la probabilidad de que hasta el instante t el mecanismo haya estado en servicio.

Solución:
a) Sea X_t el número de componentes que funcionan en el instante $t: 2, 1$ ó 0.
Será:

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 2 & 1 & 0 \\
\hline
2 & -2 & 2 & \\
1 & 1 & -3 & 2 \\
0 & & 2 & -2 \\
\hline
\end{array} = \mathrm{P}'(0).$$

La descomposición de Jordan de $\mathrm{P}'(0)$ es:

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{15}.$$

luego

$$\mathrm{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-2t} & \\ & & e^{-5t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 5 & 0 & -5 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{15}.$$

con lo cual

$$p_{20}(t) = \frac{2}{5} - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{4}{15}e^{-5t}$$

y $1 - p_{20}(t)$ es la probabilidad de que el mecanismo funcione en el instante t.

b) Distingamos las situaciones: $PR, \bar{P}R, P\bar{R}, \bar{P}\bar{R}$ según que funcionen o no la componente *P*rincipal y la de *R*epuesto. La evolución entre las 4 situaciones se rige por la matriz infinitesimal:

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & PR & \bar{P}R & P\bar{R} & \bar{P}\bar{R} \\
\hline
PR & -2 & 2 & & \\
\bar{P}R & 1 & -3 & & 2 \\
P\bar{R} & 1 & & -3 & 2 \\
\bar{P}\bar{R} & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
\end{array} = \mathrm{P}'(0).$$

La distribución estacionaria satisface:

$$\left.\begin{array}{r} -2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0 \\ 2\pi_1 - 3\pi_2 + \pi_4 = 0 \\ -3\pi_3 + \pi_4 = 0 \\ 2\pi_2 + 2\pi_3 - 2\pi_4 = 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{array}{l} \pi_1 = 3/15 \\ \pi_2 = 4/15 \\ \pi_3 = 2/15 \\ \pi_4 = 6/15 \end{array}\right.$$

Así que la componente principal funciona $\pi_1 + \pi_3 = 5/15$ del tiempo y la de repuesto 4/15.

c) Haciendo absorbente el estado 0, se tiene

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} -2 & 2 & \\ 1 & -3 & 2 \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

con lo cual

$$\mathrm{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-t} & \\ & & e^{-4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}.$$

y, por consiguiente,

$$p_{20}(t) = 1 - \frac{4}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{-4t}.$$

La probabilidad de que, hasta el instante t, no se haya pasado por 0 es $1 - p_{20}(t)$.

Problema 2. *Un contador Geiger puede registrar la llegada de dos tipos de partículas A y B. Se sabe que en cada intervalo de tiempo $(t, t+\Delta t)$ la probabilidad de que se produzca una llegada de tipo A es $\Delta t/4 + o(\Delta t)$ y la probabilidad de que se produzca una llegada de tipo B es $\Delta t + o(\Delta t)$. Cuando se registra una llegada se produce un tiempo muerto, durante el cual no se pueden producir nuevos registros, que tiene una duración exponencial de media 4/5 ó 2 según el tipo de partícula registrada.*

a) Determinar la probabilidad de que en el instante t el contador no esté en tiempo muerto.

b) Hallar la proporción límite de tiempo durante la cual el aparato es capaz de registrar llegadas.

c) Calcular la probabilidad de que la primera vez que se registren tres partículas idénticas consecutivas sean de tipo A.

d) Obtener el número medio de registros hasta la primera vez que se registran tres idénticas consecutivas.

Solución:
a) Hay que distinguir los siguientes estados:

$R \rightarrow$ el contador puede registrar nuevas llegadas,

$A \rightarrow$ tiempo muerto tras una partícula de tipo A

$B \rightarrow$ tiempo muerto tras una partícula de tipo B.

La evolución comienza en R y se produce según la matriz infinitesimal de transición

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & R & A & B \\
\hline
R & -5/4 & 1/4 & 1 \\
A & 5/4 & -5/4 & 0 \\
B & 1/2 & 0 & -1/2 \\
\hline
\end{array} = \mathrm{P}'(0).$$

La descomposición de Jordan de $\mathrm{P}'(0)$ es:

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{16}$$

luego

$$\mathrm{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-t} & \\ & & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{16}.$$

En particular

$$p_{RR}(t) = \frac{5}{16} + \frac{2}{16}\, e^{-t} + \frac{9}{16}\, e^{-2\,t}$$

es la probabilidad de estar en R en el instante t. Y la proporción límite de tiempo en R es:

$$\pi_R = \lim_{t\to\infty} p_{RR}(t) = \frac{5}{16}.$$

b) Representemos por iA la situación en que los i últimos registros son de tipo A $(i = 1, 2, 3)$ y lo mismo para iB $(i = 1, 2, 3)$. La observación se prolonga hasta que hay tres registros idénticos consecutivos; es decir, hasta que se alcanza una de las situaciones $3A$ o $3B$.

Cuando se registra una partícula, es de tipo A con probabilidad $\dfrac{1/4}{5/4} = \dfrac{1}{5}$ y de tipo B con probabilidad $\dfrac{1}{5/4} = \dfrac{4}{5}$. Luego las sucesivas llegadas hacen evolucionar la situación entre los estados: $E = \{3A, 2A, 1A, 1B, 2B, 3B\}$ con matriz de transición:

	3A	2A	1A	1B	2B	3B
3A	1					
2A	1/5			4/5		
1A		1/5		4/5		
1B			1/5		4/5	
2B			1/5			4/5
3B						1

Si f_j es la probabilidad de llegar a $3A$ desde j, será:

$$\left.\begin{aligned} f_{2A} &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5}\, f_{1B} \\ f_{1A} &= \frac{1}{5}\, f_{2A} + \frac{4}{5}\, f_{1B} \\ f_{1B} &= \frac{1}{5}\, f_{1A} + \frac{4}{5}\, f_{2B} \\ f_{2B} &= \frac{1}{5}\, f_{1A} \end{aligned}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{aligned} f_{1A} &= \frac{25}{409} \\ f_{1B} &= \frac{9}{409} \\ f_{2A} &= \frac{89}{409} \\ f_{2B} &= \frac{5}{409} \end{aligned}\right.$$

y la probabilidad de llegar a $3A$ es: $\dfrac{1}{5}\,\dfrac{25}{409} + \dfrac{4}{5}\,\dfrac{9}{409} = \dfrac{61}{2045}$.

c) Si m_j, es el número medio de registros hasta la absorción partiendo de j, verificará:

$$\left.\begin{aligned}
m_{2A} &= \frac{4}{5}\, m_{1B} + 1 \\
m_{1A} &= \frac{1}{5}\, m_{2A} + \frac{4}{5}\, m_{1B} + 1 \\
m_{1B} &= \frac{1}{5}\, m_{1A} + \frac{4}{5}\, m_{2B} + 1 \\
m_{2B} &= \frac{1}{5}\, m_{1A} + 1
\end{aligned}\right\} \qquad \text{luego} \qquad \left\{\begin{aligned}
m_{1A} &= \frac{1830}{409} \\
m_{1B} &= \frac{1395}{409} \\
m_{2A} &= \frac{1525}{409} \\
m_{2B} &= \frac{775}{409}
\end{aligned}\right.$$

y el número medio de registros resulta

$$\frac{1}{5}\,\frac{1830}{409} + \frac{4}{5}\,\frac{1395}{409} = \frac{1482}{409}.$$

Problema 3. *Unos almacenes tienen dos secciones A y B. Se ha observado que de cada 9 clientes que realizan una compra en A, 3 siguen comprando en A y 2 pasan a comprar en B; mientras que de cada 10 clientes que realizan una compra en B, 2 siguen comprando en B y 3 pasan a comprar en A.*
El 60 % de los clientes inician sus compras en A y el resto en B.

a) Determinar el número medio de artículos de cada sección que compra un cliente cualquiera.

b) Hallar la probabilidad de que un cliente cualquiera compre al menos dos artículos en la misma sección.

c) Si los intervalos de permanencia de los clientes en cada una de las secciones tienen distribución exponencial de media 1/2 y 1/3 (horas) respectivamente, determinar la distribución del tiempo que pasan los clientes en el establecimiento.

Solución:
a) La evolución de cada cliente entre A, B y el exterior (E) se produce de acuerdo con la matriz de transición

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{E} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{E} \end{array} \\ \left|\begin{array}{ccc} 3/9 & 2/9 & 4/9 \\ 3/10 & 2/10 & 5/10 \\ & & 1 \end{array}\right| \end{array} = \text{P.}$$

Las probabilidades f_{iA} de llegar a A desde i cumplen

$$\left.\begin{array}{l} f_{AA} = \dfrac{3}{9} + \dfrac{2}{9}\, f_{BA} \\ f_{BA} = \dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{10}\, f_{BA} \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{array}{l} f_{AA} = \dfrac{5}{12} \\ f_{BA} = \dfrac{3}{8} \end{array}\right.$$

luego

$$\begin{aligned} P_{AA}(1) &= \frac{5}{12}\,(\,1 + P_{AA}(1)\,) \qquad \text{o bien} \qquad P_{AA}(1) = \frac{5}{7} \\ P_{BA}(1) &= f_{BA}\,(\,1 + P_{AA}(1)\,) = \frac{3}{8}\left(1 + \frac{5}{7}\right) = \frac{9}{14} \end{aligned}$$

de manera que el número medio de compras en A es $1 + P_{AA}(1) = 12/7$ para los clientes que empiezan comprando en A, y $P_{BA}(1) = 9/14$ para los clientes que hacen su primera compra en B.

En total, el número medio de compras en A de un cliente cualquiera es:

$$0'6\,\frac{12}{7} + 0'4\,\frac{9}{14} = \frac{9}{7}.$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} f_{AB} &= \frac{2}{9} + \frac{3}{9}\,f_{AB} \qquad \text{es decir} \qquad f_{AB} = \frac{1}{3} \\ f_{BB} &= \frac{2}{10} + \frac{3}{10}\,fAB = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

con lo cual

$$P_{BB}(1) = \frac{3}{10}(1 + P_{BB}(1)) \quad \text{y} \quad 1 + P_{BB}(1) = \frac{10}{7}$$

es el número medio de compras en B de los clientes que empiezan en B; mientras que el de los que empiezan por A es

$$P_{AB}(1) = \frac{1}{3}(1 + P_{BB}(1)) = \frac{10}{21}$$

y, en promedio,

$$0'6\,\frac{10}{21} + 0'4\,\frac{10}{7} = \frac{6}{7}.$$

b) La probabilidad de que un cliente compre:

- un único artículo en A, es $0'6\ 4/9$.
- un único artículo en B, es $0'4\ 5/10$.
- un primer artículo en A, otro en B y se marche, es $0'6\,(2/9)\,(5/10)$.
- un primer artículo en B, y el segundo y último en A, es $0'4\,(3/10)\,(4/9)$.

En total, la probabilidad de comprar a lo sumo dos artículos de secciones distintas, es 44/75. Al menos 2 artículos en la misma sección se compran en cualquier otro caso; es decir, con probabilidad 31/75.

c) En tiempo continuo la evolución se rige por la matriz infinitesimal

$$\begin{array}{c} \\ \text{A} \\ \text{B} \\ \text{E} \end{array} \!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{A} & \text{B} & \text{E} \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 2/3 & 4/3 \\ 9/8 & -3 & 15/8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = P'(0)$$

ya que, al salir de A, se va con probabilidad 1/3 a B y 2/3 a E, y, al salir de B, se va con probabilidad 3/8 a A y 5/8 a E. Ahora bien

$$\mathrm{P}'(0) \; = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -3/2 & \\ & & -7/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3/16 & 1/12 & -13/48 \\ 1/16 & -1/12 & 1/48 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\mathrm{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -9 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-3t/2} & \\ & & e^{-7t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3/16 & 1/12 & -13/48 \\ 1/16 & -1/12 & 1/48 \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{aligned} p_{AE}(t) &= 1 - \frac{13}{12}\, e^{-\frac{3}{2}t} + \frac{1}{12}\, e^{-\frac{7}{2}t} \\ p_{BE}(t) &= 1 - \frac{13}{16}\, e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{3}{16}\, e^{-\frac{7}{2}t} \end{aligned}$$

y, la probabilidad de que un cliente permanezca en el establecimiento a lo sumo un tiempo t será

$$p_E(t) = 0'6\, p_{AE}(t) + 0'4\, p_{BE}(t) = 1 - \frac{39}{40}\, e^{-3t/2} - \frac{1}{40}\, e^{-7t/2}.$$

Problema 4. *Un sistema funciona durante un tiempo exponencial de media 4 días antes de sufrir una avería. En tal caso, el servicio de mantenimiento tarda un tiempo exponencial de media 1 día en emprender su reparación y, una vez comenzada, consume un tiempo exponencial de media 2/5 en dejar el sistema como nuevo.*

a) Hallar la proporción media de tiempo de funcionamiento del sistema.

b) Determinar la probabilidad de que el sistema funcione en el instante t si inicialmente está en funcionamiento.

c) Calcular el tiempo medio de funcionamiento durante el primer mes.

d) Obtener el número medio de averías ocurridas durante un mes.

Solución:

a) Entre los estados: Funcionamiento, Avería y Reparación, las transiciones ocurren según la matriz infinitesimal:

$$\begin{array}{c|ccc|} & F & A & R \\ \hline F & -1/4 & 1/4 & \\ A & & -1 & 1 \\ R & 5/2 & & -5/2 \\ \hline \end{array} = \mathrm{P}'(0).$$

La distribución estacionaria cumple entonces

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{4}\pi_F + \frac{5}{2}\pi_R = 0 \\ \frac{1}{4}\pi_F - \pi_A = 0 \\ \pi_A - \frac{5}{2}\pi_R = 0 \\ \pi_F + \pi_A + \pi_R = 1 \end{array}\right\} \text{ de donde } \left\{\begin{array}{l} \pi_F = \frac{20}{27} \\ \pi_A = \frac{5}{27} \\ \pi_R = \frac{2}{27} \end{array}\right.$$

Luego 20/27 es la proporción límite de tiempo de funcionamiento del sistema.

b) La descomposición de Jordan de $\mathrm{P}'(0)$, proporciona

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & -8 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -3/2 & \\ & & -9/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & -3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{27}.$$

luego

$$\mathrm{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -10 & -8 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-3t/2} & \\ & & e^{-9t/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 5 & 2 \\ 6 & -3 & -3 \\ -5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \frac{1}{27}.$$

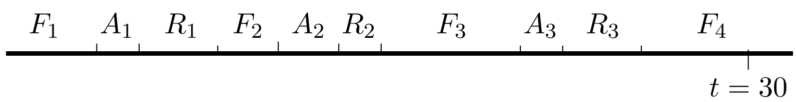
y la probabilidad de que el sistema funcione en el instante t es

$$p_{FF}(t) = \frac{20}{27} + \frac{4}{9}e^{-3t/2} - \frac{5}{27}e^{-9t/4}.$$

c) El tiempo medio de funcionamiento, durante un mes (30 días) en que el sistema empieza funcionando, es

$$\int_0^{30} p_{FF}(t)\,dt = \frac{20}{27}\,30 + \frac{4}{9}\left[-\frac{2}{3}e^{-3t/2}\right]_0^{30} - \frac{5}{27}\left[-\frac{4}{9}e^{-9t/4}\right]_0^{30} = 22'43 \text{ días}.$$

d) Los sucesivos periodos de funcionamiento, avería y reparación se suceden en la forma:



En el instante t se han producido i averías si el sistema está en uno de los estados A_i, R_i o F_{i+1}. Las probabilidades de estar en dichos estados obedecen a las ecuaciones de futuro:

$$\left.\begin{aligned} p'_{F_{i+1}}(t) &= -\frac{1}{4}p_{F_{i+1}}(t) + \frac{5}{2}\,p_{R_i}(t) \\ p'_{A_{i+1}}(t) &= -p_{A_i}(t) + \frac{1}{4}\,p_{F_i}(t) \\ p'_{R_{i+1}}(t) &= -\frac{5}{2}\,p_{R_i}(t) + p_{A_i}(t) \end{aligned}\right\}$$

y, sumando miembro a miembro, se obtiene

$$p'_{A_i}(t) + p'_{R_i}(t) + p'_{F_{i+1}}(t) = \frac{1}{4}\left[\,p_{F_i}(t) - p_{F_{i+1}}(t)\,\right].$$

El número medio de averías ocurridas hasta el instante t es

$$m(t) = \sum_{i=1}^{\infty} i\left(\,p_{A_i}(t) + p_{R_i}(t) + p_{F_{i+1}}(t)\,\right)$$

y, de acuerdo con lo anterior, cumple

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\infty} i\left[\,p_{F_i}(t) - p_{F_{i+1}}(t)\,\right] = \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{\infty} i\,p_{F_i}(t) - \sum_{i=2}^{\infty}(i-1)p_{F_i}(t)\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[p_{F_1}(t) + \sum_{i=2}^{\infty} p_{F_i}(t)\right] = \frac{1}{4}p_F(t) \end{aligned}$$

Por tanto

$$m(t) = \frac{1}{4}\int_0^t p_F(s)\,ds = \frac{1}{4}\int_0^t \left(\frac{20}{27} + \frac{4}{9}e^{-3s/2} - \frac{5}{27}e^{-9s/4}\right)ds$$

En particular, $m(30) = 22'43/4 = 5'6$ es el número medio de averías en un mes.

Problema 5. *Consideremos una urna con tres bolas numeradas con los números 1, 4 y 5. Se extraen bolas sucesivamente, no devolviéndose la bola extraída hasta después de realizada la extracción siguiente. Tras cada extracción se añade a un depósito de capacidad total k, inicialmente vacío, una cantidad aleatoria de agua con distribucuión exponencial de parámetro $2^{\text{número extraído}}$; siendo las cantidades sucesivas independientes entre sí.*

a) Hallar la probabilidad de que la bola que provoca el desbordamiento del depósito sea la 4.

b) Hallar la probabilidad de que, si la bola que provoca el desbordamiento del depósito es la 1, la anterior fuese la 4.

Solución:
a) Sea $X_t = 1, 4, 5$ el número de la última bola extraída cuando el deposíto contiene una cantidad de agua igual a t . La evolución de X_t en función de t se rige por la matriz infinitesimal

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & 4 & 5 \\
\hline
1 & -2 & 1 & 1 \\
4 & 8 & -16 & 8 \\
5 & 16 & 16 & -32 \\
\hline
\end{array} = \mathrm{P}'(0).$$

La descomposición de Jordan de $\mathrm{P}'(0)$ es:

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & -20 \\ 1 & 4 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -12 & \\ & & -38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 416 & 52 & 26 \\ -76 & 57 & 19 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{494}$$

luego

$$\mathrm{P}(k) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 6 & -20 \\ 1 & 4 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-12\,k} & \\ & & e^{-38\,k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 416 & 52 & 26 \\ -76 & 57 & 19 \\ -2 & -5 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{494}.$$

y la probabilidad pedida es

$$p_4(k) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \mathrm{P}(k) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{19} + \frac{9}{26}\, e^{-12\,k} - \frac{175}{1482}\, e^{-38\,k}.$$

b) Sea τ la cantidad de agua que había en el momento en que se realizó la extracción que provocó el desbordamiento. Calcularemos

$$\mathrm{P}\{X_k = 1, \lim_{s \uparrow \tau} X_s = 4\}$$

para lo cual, obsérvese que

$$\mathrm{P}\{X_k = 1,\ \tau \in (u, u + du),\ \lim_{s\uparrow\tau} X_s = 4\} = p_4(u) \cdot p'_{4,1}(0)\, du \cdot e^{p'_{11}(0)(k-u)}$$

puesto que el primer factor es la probabilidad de estar en el estado 4 en el instante u, el segundo factor es la probabilidad de cambiar de 4 a 1 durante cualquier intervalo de longiotud du y el tercer factor es la probabilidad de que no se produzcan cambios entre los instantes u y k. Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_k = 1,\ \lim_{s\uparrow\tau} X_s = 4\} &= \int_0^k \left\{\frac{2}{19} + \frac{9}{26}\, e^{-12u} - \frac{175}{1482}\, e^{-38u}\right\} 8\, du\, e^{-2(k-u)} \\
&= \frac{8}{19} - \frac{23}{135}e^{-2k} - \frac{18}{65}e^{-12k} + \frac{175}{6669}e^{-38k}.
\end{aligned}$$

expresión que, dividida por

$$p_1(k) = \frac{16}{19} - \frac{6}{13}\, e^{-12k} - \frac{35}{741}\, e^{-38k}$$

proporciona el valor de $\mathrm{P}\{X_k = 1,\ \lim_{s\uparrow\tau} X_s = 4 \,|\, X_k = 1\}$.

Problema 6. *En una cadena de Markov en tiempo continuo con espacio de estados finito E, supongamos que i comunica con j. Sea* $\tau_j = \inf\{t \geq 0 \mid X_t = j\}$ *y consideremos*

$$H_{i,j}(t) = P\{\tau_j > t \mid X_0 = i\} \qquad h_{i,j}(t) = -H'_{i,j}(t)$$

y $m_{i,j} = E\{\tau_j \mid X_0 = i\}$. *Probar que*

$$h_{i,j}(t) = -\sum_{k \neq j} p'_{i,k}(0) H_{k,j}(t)$$

y, si i *es recurrente,*

$$m_{i,j} = -\frac{1}{p'_{i,i}(0)} + \sum_{k \neq i,j} \frac{-p'_{i,k}(0)}{p'_{i,i}(0)} m_{k,j}$$

Solución:
Se puede expresar

$$\begin{aligned} H_{i,j}(t+h) &= P\{\tau_j > t+h \mid X_0 = i\} = \sum_{k \neq j} p_{ik}(h)\, P\{\tau_j > t \mid X_0 = k\} \\ &= \sum_{k \neq i,j} p_{i\,k}(h)\, H_{kj}(t) + p_{ii}(h)\, H_{ij}(t) \end{aligned}$$

con lo cual

$$\frac{H_{i,j}(t+h) - H_{i\,j}(t)}{h} = \sum_{k \neq i,j} \frac{p_{ik}(h)}{h} H_{kj}(t) + \frac{p_{ii}(h) - 1}{h} H_{ij}(t).$$

Al hacer $h \downarrow 0$ se obtiene

$$-h_{i,j}(t) = \sum_{k \neq i,j} p'_{ik}(0)\, H_{kj}(t) + p'_{ii}(0)\, H_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} p'_{ik}(0)\, H_{kj}(t).$$

Si i es recurrente y comunica con j, $P\{\tau_j < \infty \,|\, X_0 = i\} = 1$; es decir que la densidad $h_{ij}(t)$ de τ_j, bajo la condición $X_0 = i$, integra 1 en $(0,\infty)$. Por tanto*

$$1 = -\sum_{k \neq j} p'_{ik}(0) \int_0^\infty H_{kj}(t)\, dt = -\sum_{k \neq j} p'_{ik}(0)\, m_{kj}$$

de donde

$$p'_{ii}(0)\, m_{i\,j} = -1 - \sum_{k \neq i,j} p'_{ik}(0)\, m_{kj}$$

*Recuérdese que $\mathrm{E}[X] = \int_0^\infty \mathrm{P}\{X > t\}\, dt$ siempre que $X > 0$.

Problema 7. *Cierta substancia radiactiva emite partículas espaciadas por tiempos exponenciales de parámetro λ, independientes entre sí. Las partículas están formadas por un número aleatorio de protones, independientes entre sí y del tiempo que tardan en emitirse, cuya distribución es geométrica de parámetro p. Determinar, mediante su función generatriz, la distribución del número total de protones emitidos antes del instante t. Hallar su media.*

Solución:
Sean

$$\begin{aligned} N_t &= \text{número de partículas emitidas hasta el instante } t, \\ \xi_i &= \text{número de protones que contiene la partícula } i, \\ M_t &= \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i = \text{número de protones emitidos hasta el instante } t. \end{aligned}$$

N_t sigue un proceso de Poisson, de parámetro λ:

$$\mathrm{P}(N_t = k) = e^{-\lambda\, t}\, \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mientras que $$\mathrm{P}\{\xi_i = n\} = p^{n-1} q.$$
Como
$$\mathrm{E}\left[\, s^{\xi_i} \,\right] = \sum_{n=1}^{\infty} s^n p^{n-1} q = \frac{s\, q}{1 - sp}$$

la función generatriz de M_t, condicionada por $N_t = k$ es

$$F_k(s) = \mathrm{E}\left[\, s^{M_t} \mid N_t = k \,\right] = \mathrm{E}\left[\, s^{\sum_{i=1}^{k} \xi_i} \,\right] = \left(E\left[\, s^{\xi_1} \,\right] \right)^k = \left(\frac{s\, q}{1 - s\, p} \right)^k .$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathrm{E}\left[\, s^{M_t} \,\right] = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(s)\, \mathrm{P}\{N_t = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s\, q}{1 - s\, p} \right)^k e^{-\lambda\, t}\, \frac{(\lambda\, t)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda\, t}\, e^{\lambda\, t\, s\, q/(1 - s\, p)} = e^{\lambda\, t (s-1)/(1 - s\, p)}. \end{aligned}$$

Este resultado determina la distribución de M_t, pues el coeficiente de s^n en el desarrollo de $F(s)$ es por un lado $\mathrm{P}(M_t = n)$ y por otro $F^{(n)}(0)/n!$. Así

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{M_t = 0\} &= e^{-\lambda t} \\ \mathrm{P}\{M_t = 1\} &= \lambda\, t\, e^{-\lambda\, t}(1 - p) \\ \mathrm{P}\{M_t = 2\} &= \lambda\, t\, e^{-\lambda t}(1 - p)\, [\, 2p + \lambda t (1 - p) \,] \ldots \end{aligned}$$

Por otra parte
$$E\,[\, M_t \,] = F'(1) = \frac{\lambda\, t}{1 - p} .$$

Problema 8. *Cierta componente de una máquina tiene una vida de distribución exponencial de parámetro λ y se renueva inmediatamente cada vez que se avería. Determinar el tiempo medio que lleva en servicio la componente que está instalada en el instante t.*

Solución:
Sea N_t el número de averías producidas hasta el instante t y $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots$ los instantes en que se producen las sucesivas averías, cuyas diferencias consecutivas $(\tau_1, \tau_2 - \tau_1, \tau_3 - \tau_2, \ldots)$ son variables independientes, con distribución exponencial de parámetro λ.
La avería anterior al instante t se produce en el instante τ_{N_t} y el tiempo que lleva en servicio la componente que está instalada en el instante t es

$$\xi_t = t - \tau_{N_t}$$

(debe interpretarse $\tau_0 = 0$ para que el resultado sea correcto cuando $N_t = 0$).
Desde luego

$$\mathrm{P}\{\xi_t > t\} = 0 \qquad \text{y} \qquad \mathrm{P}\{\xi_t = t\} = \mathrm{P}\{\tau_1 > t\} = e^{-\lambda t}.$$

Además, para $0 < x < t$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{N_t = k,\ \xi_t \le x\} &= \mathrm{P}\{\tau_k < t < \tau_{k+1},\ t - \tau_k \le x\} \\
&= \mathrm{P}\{t - x \le \tau_k < t,\ \tau_{k+1} > t\} \\
&= \int_{t-x}^{t} g_k(s)\, \mathrm{P}\{\tau_{k+1} - \tau_k > t - s \,|\, \tau_k = s\}\, ds \\
&= \int_{t-x}^{t} g_k(s) e^{-\lambda(t-s)}\, ds
\end{aligned}$$

cualquiera que sea $k = 1, 2, 3, \ldots$, donde

$$g_k(s) = \frac{\lambda^k\, s^{k-1}\, e^{-\lambda s}}{(k-1)!} \qquad \text{para } s > 0$$

es la densidad $\gamma(\lambda, k)$ de τ_k. Ahora bien

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k(s) = e^{-\lambda s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k\, s^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda,$$

luego

$$\mathrm{P}\{\xi_t \le x\} = \int_{t-x}^{t} \lambda\, e^{-\lambda(t-s)} ds = 1 - e^{-\lambda x}.$$

O sea que ξ_t tiene distribución exponencial de parámetro λ, salvo que el punto t acumula toda la probabilidad del intervalo (t, ∞). Así pues

$$\mathrm{E}\,[\,\xi_t\,] = \int_0^t x\, \lambda\, e^{-\lambda x}\, dx + t\, e^{-\lambda t} = \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda}.$$

Si se intenta estimar λ, a partir del valor observado $\xi_t = y$, hay que resolver la ecuación $\lambda y = 1 - e^{-\lambda t}$. Cuando t es grande, $\mathrm{E}\,[\,\xi_t\,] \simeq 1/\lambda$ y puede estimarse λ mediante $1/\xi_t$.

Problema 9. *Consideremos sucesivos lanzamientos de un dado que se realizan espaciados por intervalos de tiempo independientes y con distribución exponencial de parámetro λ. Sea X_t el mayor de los resultados obtenidos hasta el instante t.*

a) Calcular $P\{X_t = k \mid X_s = i\}$ siendo $0 < s < t$ y $0 \le i \le k \le 6$.

b) Hallar la distribución marginal de X_t.

Solución:
a) El número $N_t - N_s$ de lanzamientos realizados en el intervalo $(s,t]$ tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda(t-s)$. Si $X_s = i$ e $i \le k \le 6$, para que sea $X_t \le k$ los $N_t - N_s$ lanzamientos tienen que dar un resultado inferior a k; es decir

$$\mathrm{P}\{X_t \le k \mid X_s = i\} = \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda(t-s)} \, \frac{[\,\lambda(t-s)\,]^r}{r!} \left(\frac{k}{6}\right)^r = e^{\lambda(t-s)(k/6-1)}$$

de donde

$$\mathrm{P}\{X_t = k \mid X_s = i\} = \begin{cases} e^{\lambda(t-s)(k/6-1)} - e^{\lambda(t-s)[\,(k-1)/6-1\,]} & \text{para} \quad k > i \\ \\ e^{\lambda(t-s)(i/6-1)} & \text{para} \quad k = i \end{cases}$$

b) Si el tiempo empieza a contar en el instante en que se realiza el primer lanzamiento, será $\mathrm{P}\{X_0 = i\} = 1/6$ para $i = 1, \ldots, 6$, de forma que

$$\mathrm{P}\{X_t \le k\} = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{6} \, e^{\lambda\, t\, (k/6-1)} = \frac{k}{6} \, e^{\lambda\, t\, (k/6-1)}.$$

Por tanto

$$\mathrm{P}\{X_t = 1\} = \frac{1}{6}\, e^{-5\lambda t/6} \qquad \mathrm{P}\{X_t = 2\} = \frac{2}{6}\, e^{-4\lambda t/6} - \frac{1}{6}\, e^{-5\lambda t/6}$$

$$\mathrm{P}\{X_t = 3\} = \frac{3}{6}\, e^{-3\lambda t/6} - \frac{2}{6}\, e^{-4\lambda t/6} \quad \mathrm{P}\{X_t = 4\} = \frac{4}{6}\, e^{-2\lambda t/6} - \frac{3}{6}\, e^{-3\lambda t/6}$$

$$\mathrm{P}\{X_t = 5\} = \frac{5}{6}\, e^{-\lambda t/6} - \frac{4}{6}\, e^{-2\lambda t/6} \quad \mathrm{P}\{X_t = 6\} = 1 - \frac{5}{6}\, e^{-\lambda t/6}$$

Problema 10. *Un ascensor parte del piso bajo de un edificio y va recogiendo, en cada piso, un número de personas N_i, independientes y con distribución de Poisson de parámetro λ_i. Cada persona que sube en el piso i puede, con independencia de las demás, salir en el piso $j > i$ con probabilidad p_{ij}, siendo $\sum_{j>i} p_{ij} = 1$*

a) Hallar la distribución y el número esperado de personas que bajan en el piso j.

b) Hallar la distribución conjunta del número de personas que bajan en los pisos j y k.

Solución:
Si N tiene distribución de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ y X condicionada por N tiene distribución binomial $\mathcal{B}(N,p)$, entonces X y $N-X$ son independientes con distribuciones $\mathcal{P}(\lambda p)$ y $\mathcal{P}(\lambda q)$ respectivamente ($q = 1-p$). En efecto

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\{X = x, N - X = y\} = \mathrm{P}\{N = x + y, X = x\} = \\ &\qquad = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x+y}}{(x+y)!}\binom{x+y}{x} p^x q^y = \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^x}{x!}\,\frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^y}{y!}\ . \end{aligned}$$

a) Sea $q_{ij} = 1-p_{ij}$. Si $\xi_{i,j}$ es el número de pasajeros que suben en i y bajan en j, el número de personas que bajan en j será

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{j-1} \xi_{i,j}.$$

• N_i tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda_i)$ y la distribución de $\xi_{i,i+1}$, condicionada por N_i, es $\mathcal{B}(N_i, p_{i,i+1})$, luego la distribución de $\xi_{i,i+1}$ es $\mathcal{P}(\lambda_i p_{i,i+1})$, la de $N_i - \xi_{i,i+1}$ es $\mathcal{P}(\lambda_i q_{i,i+1})$ y ambas son independientes.
• Condicionado por $N_i - \xi_{i,i+1}$, la distribución de $\xi_{i,i+2}$ es $\mathcal{B}(N_i - \xi_{i,i+1}, p_{i,i+2})$ y, por tanto, la distribución de $\xi_{i,i+2}$ es $\mathcal{P}(\lambda_i q_{i,i+1} p_{i,i+2})$, $N - \xi_{i,i+1} - \xi_{i,i+2}$ tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda_i q_{i,i+1} q_{i,i+2})$ y ambas son independientes.
• En general, $\xi_{i,j}$ tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda_i\, p_{i,j} \prod_{k=i+1}^{j-1} q_{i,k})$, la distribución de $N_i - \sum_{k=i+1}^{j} \xi_{i,j}$ es $\mathcal{P}(\lambda_i \prod_{k=i+1}^{j} q_{i,k})$ y ambas son independientes.

Puesto que $(\xi_{i,j})_{j=i+1,\ldots}$ y $(\xi_{l,j})_{j=l+1,\ldots}$ son independientes entre sí, ξ_j tiene distribución de Poisson de parámetro

$$\mathrm{E}\,[\,\xi_j\,] = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i\, p_{i,j} \prod_{k=i+1}^{j-1} q_{i,k}.$$

b) Puesto que las poblaciones que suben en cada piso son independientes, consideremos sólo la que proviene de un piso fijo $i\,(< j < k)$. De ellos, sea R_m el número de los que quedan en el ascensor después del piso m:

$$R_i = N_i, \quad R_{i+1} = R_i - \xi_{i,i+1}, \quad R_{i+2} = R_{i+1} - \xi_{i,i+2}, \ldots$$

con lo cual

$$\xi_{i,j} = R_j - R_{j-1}.$$

Naturalmente $(R_m)_{m=i,i+1,\ldots}$ es un proceso markoniano, además, según (a), $\xi_{i,j}$ es independiente de R_j. Luego $\xi_{i,k}$ condicionado por R_j es independiente de $\xi_{i,j}$, de forma que $\xi_{i,k}$ es independiente de $\xi_{i,j}$. En definitiva ξ_j y ξ_k son indepenedientes.

Problema 11. *Una empresa tiene N camiones cada uno de los cuales tiene probabilidad $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ de estropearse en cada intervalo de tiempo de longitud Δt. Para atender a las reparaciones la empresa tiene un único mecánico que tarda un tiempo exponencial de parámetro μ en realizar cada reparación.*

a) Hallar la distribución estacionaria del número de camiones disponibles.

c) Si $N = 2$, $\lambda = 2$ y $\mu = 7'5$ obtener la distribución del número de camiones disponibles, un tiempo t después de comprar ambos camiones.

Solución:
a) Sea $X_t = 0, 1, 2, \ldots, N$ el número de camiones disponibles en el instante t. La matriz infinitesimal de evolución de X_t es

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & N-1 & N \\
\hline
0 & -\mu & \mu & & & & & \\
1 & \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu & & & & \\
2 & & 2\lambda & -(2\lambda+\mu) & \mu & & & \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
N-1 & & & & & (N-1)\lambda & -((N-1)\lambda+\mu) & \mu \\
N & & & & & & N\lambda & -N\lambda \\
\hline
\end{array}$$

La distribución estacionaria Π cumple $\Pi\, P'(0) = 0$; es decir

$$\left.\begin{array}{l}
\lambda\, \pi_1 = \mu\, \pi_0 \\
2\lambda\, \pi_2 = (\lambda + \mu)\pi_1 - \mu\, \pi_0 \\
3\lambda\, \pi_3 = (2\lambda + \mu)\pi_2 - \mu\, \pi_1 \\
\quad\vdots \\
N\lambda\, \pi_N = \mu\, \pi_{N-1}
\end{array}\right\}$$

con lo cual

$$\pi_j = \frac{\mu}{j\,\lambda}\pi_{j-1} \qquad \text{y por tanto} \qquad \pi_j = \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^j \frac{\pi_0}{j!}.$$

Como $\sum_{j=0}^{N} \pi_j = 1$, resulta:

$$\pi_j = \frac{\left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^j \dfrac{1}{j!}}{\displaystyle\sum_{j=0}^{N} \left(\dfrac{\mu}{\lambda}\right)^j \dfrac{1}{j!}}.$$

b) Para $N = 2$, queda

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} -\mu & \mu & 0 \\ \lambda & -(\lambda+\mu) & \mu \\ 0 & 2\lambda & -2\lambda \end{pmatrix}$$

y la última fila de $\mathrm{P}(t) = e^{\mathrm{P}'(0)\,t}$ es la distribución del número de camiones disponibles en el instante t. Si $\lambda = 2$ y $\mu = 7'5$

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 75 & 45 \\ 1 & 10 & -42 \\ 1 & -16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -13/2 & \\ & & -29/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 512 & 1920 & 3600 \\ 58 & 29 & -87 \\ 26 & -91 & 65 \end{pmatrix} \frac{1}{6032}$$

luego

$$\mathrm{P}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 75 & 45 \\ 1 & 10 & -42 \\ 1 & -16 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-13t/2} & \\ & & e^{-29t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 512 & 1920 & 3600 \\ 58 & 29 & -87 \\ 26 & -91 & 65 \end{pmatrix} \frac{1}{6032}$$

y

$$\begin{aligned} p_{2,0}(t) &= \left(512 - 928\, e^{-13t/2} + 416\, e^{-29t/2}\right)/6032 \\ p_{2,1}(t) &= \left(1920 - 464\, e^{-13t/2} - 1456\, e^{-29t/2}\right)/6032 \\ p_{2,2}(t) &= \left(3600 + 1392\, e^{-13t/2} + 1040\, e^{-29t/2}\right)/6032 \end{aligned}$$

Problema 12. *Tres máquinas A, B y C van a ser reparadas por orden, por dos operarios; de manera que el que termine primero emprenderá la reparación de C. Suponiendo que las reparaciones tienen duraciones independientes y con distribución exponencial de parámetro μ, calcular:*

a) La probabilidad de que la máquina A sea la última en entrar en funcionamiento.

b) La probabilidad de que la máquina C no sea la última en funcionar.

c) La distribución del tiempo que tarda C en entrar en funcionamiento.

Solución:
a) Hay que distinguir los estados: $0, A, B, AB, AC, BC, ABC$, según las máquinas que estén reparadas. Si cada etapa transcurre cuando se produce una reparación, la matriz de transición (en tiempo discreto) será

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ A \\ B \\ AB \\ AC \\ BC \\ ABC \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & A & B & AB & AC & BC & ABC \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} & 1/2 & 1/2 & & & & \\ & & & 1/2 & 1/2 & & \\ & & & 1/2 & & 1/2 & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{array}\right] \end{array} = \text{P.}$$

La probabilidad $f_{0,BC}$ de alcanzar el estado BC es

$$f_{0,BC} = \frac{1}{2} f_{A,BC} + \frac{1}{2} f_{B,BC} = \frac{1}{4}$$

puesto que $f_{A,BC} = 0$ y $f_{B,BC} = 1/2$. La probabilidad de que A sea la última máquina en ser reparada es, pues, $1/4$.

b) Análogamente, como $f_{A,AB} = 1/2$ y $f_{B,AB} = 1/2$, se tiene

$$f_{0,AB} = \frac{1}{2} f_{A,AB} + \frac{1}{2} f_{B,AB} = \frac{1}{2}$$

que es la probabilidad de que C sea la última máquina en ser reparada. La de que no lo sea es $1 - f_{0,AB} = 1/2$.

c) Si T_A, T_B, T_C son los tiempos que se tarda en reparar cada máquina, el instante de funcionamiento de C es

$$\tau = \text{mín}(T_A, T_B) + T_C.$$

Como

$$\mathrm{P}\{\min(T_A, T_B) > t\} = P\{T_A > t\}\, P\{T_B > t\} = e^{-2\,\mu\, t}$$

$\min(T_A, T_B)$ tiene densidad $2\mu e^{-2\mu t}$ para $t > 0$. Así que, τ tiene densidad

$$\int_0^t 2\mu e^{-2\mu s}\, \mu e^{-\mu(t-s)}\, ds = 2\mu e^{-\mu t}(1 - e^{-\mu t}) \quad \text{para } t > 0.$$