No se permite el uso de ningún tipo de material

Todas las respuestas deben estar justificadas

Ejercicio 1. (2 puntos) Se define por recurrencia la sucesión (a_n) siendo

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{para todo } n > 1 \text{ y } a_1 > -6.$$

¿Es (a_n) convergente? En caso afirmativo, calcular su límite.

Ejercicio 2. (2 puntos)

a) Definir conjunto compacto de $\mathbb{R}$ y enunciar el teorema de Heine-Borel sobre una caracterización de los conjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

b) Si C es compacto y A es abierto ¿es $C - A$ es compacto?

c) Si C es compacto y a es un punto de acumulación de C ¿es $C - \{a\}$ compacto?

d) Si C es compacto y B es cerrado ¿es $C \cap B$ es compacto?

Todas las respuestas deben estar justificadas.

Ejercicio 3. (2 puntos) Calcular el número exacto de raíces reales de la ecuación

$$x^2 - \cos x - x \operatorname{sen} x = 0.$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Calcular los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad y de convexidad de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}.$$

Determinar sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

Ejercicio 5. (2 puntos) Estudiar el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2 - 1}.$$

En caso de convergencia, calcular su suma.

Tiempo: 2 horas