Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2,5 puntos)

Justifique si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\exists x \in \mathbb{R}\ (x^2 - 1 = 0\ \wedge\ x^2 - 2 = 0)$

b) $\big(\exists x \in \mathbb{R}\ \ (x^2 - 1 = 0)\ \big)\ \ \wedge\ \ \big(\ \exists x \in \mathbb{R}\ \ (x^2 - 2 = 0)\ \big)$

c) $\forall x \in \mathbb{R}\ (x^2 - 1 \neq 0\ \vee\ x^2 - 2 \neq 0)$

d) $\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \ (|a| < \varepsilon)$

e) $\exists a > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \ (a < \varepsilon)$

Solución:

a) La afirmación de a) sería verdadera si el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases}$ tiene al menos una solución. Restando a la segunda ecuación la primera se obtiene, $\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ -2 + 1 = 0 \end{cases}$. Por tanto, la afirmación es falsa.

b) La afirmación de b) es la conjunción de dos proposiciones que será verdadera si ambas lo son. La proposición $\exists x \in \mathbb{R}\ \ (x^2 - 1 = 0)$ es verdadera, basta tomar $x = 1$. Análogamente, $\exists x \in \mathbb{R}\ \ (x^2 - 2 = 0)$ es también verdadera, por ejemplo para $x = \sqrt{2}$. Por tanto, es verdadera.

c) La afirmación de c) es verdadera. Basta observar que dicha proposición no es más que la negación de la proposición de a).

d) La afirmación de d) es verdadera. Basta tomar a=0, pues en ese caso , $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que $|a| = 0 < \varepsilon$.

e) Para ver que la proposición " $\exists a > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \ (a < \varepsilon)$" es falsa vemos que su negación, $\forall a > 0\ \exists \varepsilon > 0\ \ (a \geq \varepsilon)$, es verdadera. En efecto, dado cualquier $a > 0$ tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = \frac{a}{2}$ y claramente se cumple que $a \geq \frac{a}{2} = \varepsilon$).

Pregunta 2 (2,5 puntos)

Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ dos relaciones de orden total en un conjunto E. Se definen en E las relaciones:

$$x\,\mathcal{T}\,y \ \text{ si y sólo si } \ x\,\mathcal{R}\,y \wedge x\,\mathcal{S}\,y$$

$$x\,\mathcal{Q}\,y \ \text{ si y sólo si } \ x\,\mathcal{R}\,y \vee x\,\mathcal{S}\,y$$

Determine si las relaciones $\mathcal{T}$ y $\mathcal{Q}$ son reflexivas, antisimétricas, transitivas y en su caso, si la relación de orden resultante es de orden total.

Solución: Veamos primero las propiedades de $\mathcal{T}$.
Es reflexiva: para todo $x \in E$ se tiene que $x\,\mathcal{T}\,x$ ya que $x\,\mathcal{R}\,x \wedge x\,\mathcal{S}\,x$ pues ambas relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas.

Es antisimétrica: para todo $x, y \in E$ si $x\,\mathcal{T}\,y$ e $y\,\mathcal{T}\,x$ entonces $x\,\mathcal{R}\,y \wedge x\,\mathcal{S}\,y$ e $y\,\mathcal{R}\,x \wedge y\,\mathcal{S}\,x$. En particular, $x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,x$ y teniendo en cuenta que $\mathcal{R}$ es antisimétrica se obtiene que $x = y$.
Obsérvese que basta con que una de las dos relaciones sea antisimétrica para asegurarnos que lo es $\mathcal{T}$.

Es transitiva: sean $x, y, z \in E$ tales que $x\,\mathcal{T}\,y$ e $y\,\mathcal{T}\,z$. Por tanto, entonces $x\,\mathcal{R}\,y \wedge x\,\mathcal{S}\,y$ e $y\,\mathcal{R}\,z \wedge y\,\mathcal{S}\,z$. En consecuencia, $x\,\mathcal{R}\,y \wedge y\,\mathcal{R}\,z$ y $x\,\mathcal{S}\,y \wedge y\,\mathcal{S}\,z$. Se obtiene que $x\,\mathcal{T}\,z$ pues ambas relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son transitivas.

$\mathcal{T}$ es una relación de orden pero no tiene por qué ser de orden total. Dados dos elementos $x, y \in E$, teniendo en cuenta que ambas relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son de orden total se tiene que ($x\,\mathcal{R}\,y$ o $y\,\mathcal{R}\,x$) y ($x\,\mathcal{S}\,y$ o $y\,\mathcal{S}\,x$). Puede darse el caso que $x\,\mathcal{R}\,y$ e $y\,\mathcal{S}\,x$ en cuyo caso no se puede garantizar que $x\,\mathcal{S}\,y$ o $y\,\mathcal{S}\,x$. Por ejemplo, consideramos el conjunto $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con las dos relaciones de orden total $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ que determinan las siguientes cadenas:

$$1\,\mathcal{R}\,2\,\mathcal{R}\,3\,\mathcal{R}\,4\,\mathcal{R}\,5$$

$$2\,\mathcal{S}\,1\,\mathcal{S}\,3\,\mathcal{S}\,4\,\mathcal{S}\,5$$

Los elementos 1 y 2 no están relacionados mediante $\mathcal{T}$ pues no es cierto que $1\,\mathcal{T}\,2$ ya que no se cumple que $1\,\mathcal{S}\,2$ y tampoco es cierto que $2\,\mathcal{T}\,1$ pues no se cumple que $2\,\mathcal{R}\,1$.

Estudiamos las propiedades de $\mathcal{Q}$.
Es reflexiva: para todo $x \in E$ se tiene que $x\,\mathcal{Q}\,x$ pues $x\,\mathcal{R}\,x \vee x\,\mathcal{S}\,x$ pues las relaciones $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas.

Obsérvese que basta con que una de las dos relaciones sea reflexiva para asegurarnos que lo es $\mathcal{Q}$.

La relación $\mathcal{Q}$ no es en general antisimétrica. Obsérvese que si $x, y \in E$ son tales que $x\,\mathcal{Q}\,y$ e $y\,\mathcal{Q}\,x$ entonces $x\,\mathcal{R}\,y \vee x\,\mathcal{S}\,y$ e $y\,\mathcal{R}\,x \vee y\,\mathcal{S}\,x$. Puede darse el caso donde $x\,\mathcal{R}\,y$ e $y\,\mathcal{S}\,x$ en cuyo caso no se puede garantizar que $x = y$. Consideremos el ejemplo anterior $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ con las relaciones allí definidas tenemos que $1\,\mathcal{Q}\,2$ pues $1\,\mathcal{R}\,2$ y $2\,\mathcal{Q}\,1$ pues $2\,\mathcal{S}\,1$. Sin embargo, $1 \neq 2$.

La relación $\mathcal{Q}$ no es en general transitiva. Obsérvese que si $x, y \in E$ son tales que $x\,\mathcal{Q}\,y$ e $y\,\mathcal{Q}\,z$ entonces $x\,\mathcal{R}\,y \vee x\,\mathcal{S}\,y$ e $y\,\mathcal{R}\,z \vee y\,\mathcal{S}\,z$. Puede darse el caso donde $x\,\mathcal{R}\,y$ e $y\,\mathcal{S}\,z$ en cuyo caso no se puede garantizar que $x\,\mathcal{Q}\,z$. Por ejemplo, sea ahora el conjunto $E = \{1, 2, 3\}$ con las dos relaciones de orden total $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ que determinan las siguientes cadenas:

$$1\,\mathcal{R}\,2\,\mathcal{R}\,3$$

$$3\,\mathcal{S}\,1\,\mathcal{S}\,2$$

Tenemos que $2\,\mathcal{Q}\,3$ pues $2\,\mathcal{R}\,3$ y $3\,\mathcal{Q}\,1$ pues $3\,\mathcal{S}\,1$. Sin embargo no es cierto que $2\,\mathcal{Q}\,1$ pues no es cierto que $2\,\mathcal{R}\,1$ y tampoco es cierto que $2\,\mathcal{S}\,1$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)

Sean E y F dos conjuntos y $f\colon E \longrightarrow F$ una aplicación. Sean $A \subset E$ y $B \subset F$. Demuestre que

$$f^{-1}(B) \cap A \;\subset\; f^{-1}\big(B \cap f(A)\big)$$

siendo f^{-1} la relación inversa de f. Muestre que la inclusión

$$f^{-1}\big(B \cap f(A)\big) \;\subset\; f^{-1}(B) \cap A$$

no es siempre cierta.
Solución: Veamos que se cumple $f^{-1}(B) \cap A \;\subset\; f^{-1}\big(B \cap f(A)\big)$. En efecto para todo $x \in E$ tenemos:

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B) \cap A \Longrightarrow &\quad x \in f^{-1}(B) \wedge x \in A \Longrightarrow f(x) \in B \wedge f(x) \in f(A) \\ \Longrightarrow &\qquad f(x) \in B \cap f(A) \Longrightarrow x \in f^{-1}\big(B \cap f(A)\big) \end{aligned}$$

La inclusión $f^{-1}\big(B \cap f(A)\big) \;\subset\; f^{-1}(B) \cap A$ no es siempre cierta. Veamos un ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida para todo $x \in \mathbb{Z}$ mediante $f(x) = x^2$. Sean $A = \{2\}$ y $B = \mathbb{Z}$. En consecuencia $f(A) = \{4\}$ y $B \cap f(A) = \{4\}$. Por tanto, $f^{-1}\big(B \cap f(A)\big) = f^{-1}\big(\{4\}\big) = \{-2, 2\}$ mientras que $f^{-1}(B) \cap A = \{2\}$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación: $z^n = \overline{z}$.

Solución: Observemos en primer lugar que $z = 0$ es solución de la ecuación pues $0^n = 0$ y $\overline{0} = 0$. Además, si $n = 1$ entonces se cumple $z = \overline{z}$ si y sólo si $z \in \mathbb{R}$.
Para $z \neq 0$ y $n > 1$, expresamos en forma exponencial $z = re^{i\alpha}$ con $r > 0$ y la ecuación se transforma en:

$$r^n e^{in\alpha} = re^{-i\alpha}$$

Por tanto se obtiene:

i) $r^n = r$, es decir, $r(r^{n-1} - 1) = 0$ cuya única solución para $r > 0$ y $n > 1$ es $r = 1$.

ii) $n\alpha = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ o equivalentemente, $(n+1)\alpha = 2k\pi$, esto es, $\alpha = \frac{2k\pi}{n+1}$ cuyas soluciones módulo 2π se obtienen dando a k los valores $0, 1, 2, \ldots, n$. Por tanto la ecuación tiene $n + 2$ soluciones que son:

$$\left\{\, 0,\; e^0,\; e^{i\frac{2\pi}{n+1}},\; e^{i\frac{4\pi}{n+1}},\; e^{i\frac{6\pi}{n+1}},\; \ldots,\; e^{i\frac{2n\pi}{n+1}} \,\right\}$$