Introducción a los espacios de Hilbert

Resolución de los ejercicios recomendados. Capítulo 5

Ejercicio 1

Desarrollamos según la base ortonormal de $L^2(-\pi,\pi)$, véase (5.4),

$$\left\{\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos(nt)\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}\operatorname{sen}(nt)\right\}_{n=1}^{\infty}$$

escribiendo la serie de Fourier como

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(nt) + b_n\operatorname{sen}(nt)\right] \quad \text{en} \quad L^2(-\pi,\pi)\,. \tag{1}$$

Los coeficientes a_n y b_n del desarrollo vienen dados por

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt \quad \text{para } n \geqslant 0\ , \text{ y} \\ b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen}(nt)dt\,, \quad \text{para } n \geqslant 1\,. \end{aligned}$$

a) Se tiene que

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} dt = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

y para $n \geqslant 1$, se obtiene

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\cos nt\, dt = \frac{2}{2n\pi}\Big(\operatorname{sen} nt\Big)_0^{\pi} = 0$$

y

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nt\, dt = \frac{-2}{2n\pi}\Big(\cos nt\Big)_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases},$$

de donde se sigue el desarrollo dado. b) Como f es una función impar se tendrá que $a_n = 0$ para $n \geqslant 0$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{0}\operatorname{sen} nt\, dt + \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nt\, dt = \frac{4}{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen} nt\, dt = \frac{-4}{2n\pi}\Big(\cos nt\Big)_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases}, \end{aligned}$$

de donde se sigue el desarrollo dado. c) Como f es una función par se tendrá que $b_n = 0$ para $n \geqslant 1$. Por otro lado,

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} tdt = \pi\,.$$

Para $n \geqslant 1$, integrando por partes, se tiene que

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|t|\cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\, dt = \frac{2}{n\pi}\Big(t\operatorname{sen} nt + \frac{1}{n}\cos nt\Big)_0^{\pi} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ par} \\ -\frac{4}{n^2\pi} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases},$$

de donde se sigue el desarrollo dado.

Ejercicio 2

Como f es una función par, en su desarrollo de Fourier escrito como (5.4) se tendrá que $b_n = 0$ para $n \geqslant 1$. Por lo que respecta a los coeficientes a_n, $n \geqslant 0$, se tiene que

$$a_0 = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 dt = \frac{2\pi^2}{3}\,.$$

Para $n \geqslant 1$, integrando por partes, se tiene que

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos nt\, dt = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} t^2 \cos nt\, dt = \frac{-4}{n\pi}\int_{0}^{\pi} t \operatorname{sen} nt dt = \frac{4}{n^2}\cos n\pi = \frac{4(-1)^n}{n^2}\,,$$

de donde se sigue el desarrollo dado.
Aplicando la identidad de Parseval $\frac{2}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = \frac{|a_0|^4}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n|^2 + |b_n|^2\big)$ al desarrollo anterior:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\, dt = \frac{\pi^4}{5} = \frac{\pi^4}{9} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}\,,$$

de donde se obtiene que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
Para $t_0 = \pi$ se cumplen las hipótesis del teorema de Dirichlet (teorema 5.13); por tanto

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos \pi n = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,$$

de donde $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejercicio 3

Si denotamos por $f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{2\pi int/T}$, sabemos que $\|f - f_N\|_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Se tiene que

$$\Big|\int_0^x \big(f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{2\pi int/T}\big)dt\Big| \leqslant \int_0^x \big|f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{2\pi int/T}\big|dt$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se obtiene finalmente

$$\Big|\int_0^x \big(f(t) - \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathrm{e}^{2\pi int/T}\big)dt\Big| \leqslant \sqrt{x}\|f - f_N\|_2 \leqslant \sqrt{T}\|f - f_N\|_2 \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Ejercicio 9

(a) Sabemos por (5.5) que $\sigma_N(t_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t_0+u)F_N(u)du$ de donde

$$\sigma_N(t_0) = \int_0^{\pi} f(t_0+u)F_N(u)du + \int_{-\pi}^{0} f(t_0+u)F_N(u)du = \int_0^{\pi}[f(t_0+u) + f(t_0-u)]F_N(u)du\,.$$

En la segunda integral hemos hecho el cambio de variable $u \mapsto -u$ y hemos tenido en cuenta que F_N es una función par.
(b) Teniendo en cuenta que $\int_0^{\pi} F_N(u)du = 1/2$ (véase la proposición 5.9), será suficiente probar que

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\big[f(t_0+u) - f(t_0^+)\big]F_N(u)du = 0\,.$$

Dado $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que, si $0 < u < \delta$, entonces $|f(t_0+u) - f(t_0^+)| < \varepsilon/2$. Teniendo en cuenta la propiedad 4 de la proposición 5.9, existirá $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $N \geqslant N_0$, se cumple que

$$|F_N(u)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4(\|f\|_1 + \pi|f(t_0^+)|)}\,,\quad \text{para todo } u \in [\delta,\pi]\,,\quad \text{donde } \|f\|_1 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(s)|ds\,.$$

Se tiene que

$$\int_0^{\pi}\big[f(t_0+u) - f(t_0^+)\big]F_N(u)du = \int_0^{\delta}\big[f(t_0+u) - f(t_0^+)\big]F_N(u)du + \int_{\delta}^{\pi}\big[f(t_0+u) - f(t_0^+)\big]F_N(u)du\,.$$

Por lo que respecta al primer sumando,

$$\Big|\int_0^{\delta}\big[f(t_0+u) - f(t_0^+)\big]F_N(u)du\Big| \leqslant \int_0^{\delta}\big|f(t_0+u) - f(t_0^+)\big|F_N(u)du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\int_0^{\delta}F_N(u)du \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Por lo que respecta al segundo,

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_{\delta}^{\pi}\big[f(t_0+u)-f(t_0^+)\big]F_N(u)du\Big| &\leqslant \int_{\delta}^{\pi}\big|f(t_0+u)-f(t_0^+)\big|F_N(u)du \\
&\leqslant \int_{\delta}^{\pi}|f(t_0+u)|F_N(u)du+|f(t_0^+)|\int_{\delta}^{\pi}F_N(u)du \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4(\|f\|_1+\pi|f(t_0^+)|)}\int_{\delta}^{\pi}|f(t_0+u)|du+\frac{\varepsilon\pi|f(t_0^+)|}{4(\|f\|_1+\pi|f(t_0^+)|)}\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}\,,
\end{aligned}
$$

para todo $N\geqslant N_0$. Reuniendo ambos trozos, hemos probado que

$$
\Big|\int_{0}^{\pi}\big[f(t_0+u)-f(t_0^+)\big]F_N(u)du\Big|\leqslant\varepsilon\,,\quad \text{para todo } N\geqslant N_0\,.
$$

El apartado (c) se prueba análogamente al apartado anterior. Finalmente, aplicando el apartado (a) se deduce el resultado buscado.

Ejercicio 10

Por el problema 9 sabemos que $\lim_{N\to\infty}\sigma_N(t)=\frac{1}{2}[f(t_0^+)+f(t_0^-)]$. Ahora bien, si existe $\lim_{N\to\infty}S_N(t_0)$, se tiene que (aplicando la indicación, esto es, el criterio de Stölz)

$$
\lim_{N\to\infty}\sigma_N(t)=\lim_{N\to\infty}\frac{S_0(t_0)+S_1(t_0)+\cdots+S_{N-1}(t_0)}{N}=\lim_{N\to\infty}S_{N-1}(t_0)=\lim_{N\to\infty}S_N(t_0)\,.
$$

Ejercicio 11

Sabemos que la matriz inversa de la matriz de Fourier Ω_N viene dada por $\Omega_N^{-1}=\frac{1}{N}\overline{\Omega}_N$, es decir, $\mathbf{I}_N=\Omega_N\Omega_N^{-1}=\frac{1}{N}\Omega_N\overline{\Omega}_N$. Por lo tanto,

$$
N\mathbf{I}_N=\Omega_N\overline{\Omega}_N\,,
$$

lo que nos dice que las filas de la matriz Ω_N son ortogonales (la matriz Ω_N es simétrica), con norma $1/\sqrt{N}$.

Ejercicio 12

Respecto del producto interno $\sum_{n=0}^{N-1}x_n\overline{y_n}=\mathbf{x}^\top\overline{\mathbf{y}}$ de $\mathbb{C}^N$, donde $\mathbf{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_{N-1})^\top$ e $\mathbf{y}=(y_0,y_1,\cdots,y_{N-1})^\top$, se tiene que

$$
\sum_{k=0}^{N-1}|y_k|^2=\mathbf{y}^\top\overline{\mathbf{y}}=(\Omega_N\mathbf{Y})^\top(\overline{\Omega}_N\overline{\mathbf{Y}})=\mathbf{Y}^\top\Omega_N\overline{\Omega}_N\overline{\mathbf{Y}}=N\mathbf{Y}^\top\overline{\mathbf{Y}}=N\sum_{n=0}^{N-1}|Y_n|^2\,.
$$