Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (3 puntos)
Sea c_{00}, el subespacio de ℓ^2 de las sucesiones complejas que tienen sólo un número finito de términos no nulos, dotado de la restricción del producto interno de ℓ^2.
Sea F el siguiente subconjunto de c_{00}:

$$F = \big\{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in c_{00} \colon \sum_{n=1}^{\infty}(x_n/n^2) = 0\}$$

Demuestre que

a) F es un subespacio vectorial cerrado de c_{00}.
b) $F^{\perp\perp} \neq F$ y $c_{00} \neq F \oplus F^{\perp}$.

Solución: a) Para ver que F es un subespacio vectorial cerrado de c_{00} se procede como en el ejercicio 3.14. del texto base, es decir, viendo que para $y = \{1/(n^2)\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$, $F = \{y\}_{\ell^2}^{\perp} \cap c_{00}$ siendo $\{y\}_{\ell^2}^{\perp}$ el subespacio ortogonal a y en ℓ^2. Sabemos que $\{y\}_{\ell^2}^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de ℓ^2 (proposición 2.33) y en consecuencia, se obtiene fácilmente $F = \{y\}_{\ell^2}^{\perp} \cap c_{00}$ es un subespacio vectorial cerrado de c_{00}.

b) Por otro lado, $F^{\perp} = \{0\}$ pues si $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in F^{\perp}$, en particular x es ortogonal a $y^{(p)} = \{1, 0, \cdots, -p^2, 0 \cdots\} \in F$ para todo $p \in \mathbb{N}$, siendo $y_1^{(p)} = 1, y_p^{(p)} = -p^2$ e $y_i^{(p)} = 0$ si $i \neq 1, p$. Si $N \in \mathbb{N}$ es tal que $x_n = 0$ si $n > N$ se obtiene

$$0 = \langle x, y^{(p)} \rangle = \begin{cases} x_1 & \text{si } \; p > N \\ x_1 - p^2 x_p & \text{si } \; p \leq N \end{cases}$$

En consecuencia, $x_1 = x_2 = \cdots = x_N = 0$.
De $F^{\perp} = \{0\}$, se deduce que $F^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = c_{00} \neq F$.
Además $F \oplus F^{\perp} = F \neq c_{00}$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Considere en el espacio de Hilbert $L^2[0, 1]$ el conjunto,

$$V = \big\{f \in L^2[0, 1] \; : \; \int_0^1 f(t)dt = \int_0^{1/2} f(t)dt = 0\big\} \, .$$

a) Demuestre que V es un subespacio vectorial cerrado de $L^2[0, 1]$. Determine una base ortonormal de $V^{\perp}$.
b) Calcule la proyección ortogonal de f sobre V siendo $f(t) = t$ si $t \in [0, 1]$ y la distancia de f a V.

Solución: a) Observemos que $V = \{h, g\}^{\perp} = (\operatorname{span}\{h, g\})^{\perp}$ siendo h y g las funciones de $L^2[0, 1]$ tales que $h = \chi_{[0,1]}$ y $g = \chi_{[0,1/2]}$. De la proposición 2.33 del texto base se deduce que $V = \{h, g\}^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de $L^2[0, 1]$.

Por otro lado, aplicando el teorema 3.11 al subespacio completo $F = \operatorname{span}\{h, g\}$ de $L^2[0, 1]$ se obtiene

$$V^{\perp} = (\operatorname{span}\{h, g\})^{\perp\perp} = \operatorname{span}\{h, g\} \, .$$

Ortonomalizamos por tanto el sistema $\{h, g\}$. Teniendo en cuenta que $\|h\|_2 = 1$, sea $e_1 = h = \chi_{[0,1]}$. Siguiendo la ortonormalización de Gram-Schmidt tomamos $y_2 = \chi_{[0,1/2]} - \langle \chi_{[0,1/2]}, \chi_{[0,1]} \rangle \chi_{[0,1]} = \chi_{[0,1/2]} - \frac{1}{2}\chi_{[0,1]}$. Como $\|y_2\|_2^2 = \int_0^{1/2}(1/4)dt + \int_{1/2}^{1}(1/4)dt = 1/4$, se toma $e_2 = 2\chi_{[0,1/2]} - \chi_{[0,1]}$. Por tanto $\{e_1 = \chi_{[0,1]}, e_2 = 2\chi_{[0,1/2]} - \chi_{[0,1]}\}$ es una base ortonormal de $V^{\perp}$.

b) La proyección ortogonal de f sobre $V^{\perp}$ es $v = \langle f, e_1 \rangle e_1 + \langle f, e_2 \rangle e_2$. Como $\langle f, e_1 \rangle = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}$ y $\langle f, e_2 \rangle = 2\int_0^{1/2} tdt - \int_0^1 tdt = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, se obtiene $v = \frac{1}{2}\chi_{[0,1]} - \frac{1}{4}(2\chi_{[0,1/2]} - \chi_{[0,1]}) = \frac{3}{4}\chi_{[0,1]} - \frac{1}{2}\chi[0, 1/2]$.

La proyección ortogonal de f sobre V es $u = f - v$, es decir, $u(t) = f(t) - v(t) = \begin{cases} t - 1/4 \text{ si } 0 \le t \le 1/2 \\ t - 3/4 \text{ si } 1/2 < t \le 1 \end{cases}$.

La distancia de f a V es $\|v\| = \sqrt{(1/2)^2 + (1/4)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$.

Pregunta 3 (2 puntos)
En el espacio $L^2[-1,1]$ se define la aplicación

$$\begin{aligned} T\colon\ L^2[-1,1] &\longrightarrow L^2[-1,1] \\ f &\longmapsto Tf \end{aligned}$$

tal que $(Tf)(x) = \int_{-1}^{1}(x^3 + t^3 + i3xt)f(t)dt$.
Demuestre que T es un operador lineal acotado y obténgase su adjunto.

Solución: T es un lineal. En efecto, para todo $f, g \in L^2[-1,1]$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\begin{aligned} (T(\alpha f + \beta g)(x) &= \int_{-1}^{1}(x^3 + t^3 + i3xt)(\alpha f(t) + \beta g(t))dt \\ &= \alpha \int_{-1}^{1}(x^3 + t^3 + i3xt)f(t)dt + \beta \int_{-1}^{1}(x^3 + t^3 + i3xt)g(t)dt = \alpha(Tf)(x) + \beta(Tg)(x) \end{aligned}$$

T es un operador acotado. En efecto, aplicando la desigualdad de Cauchy Schwarz se tiene:

$$\begin{aligned} |(Tf)(x)| &= \Big| \int_{-1}^{1}(x^3 + t^3 + i3xt)f(t)\Big|dt \\ &\le \Big(\int_{-1}^{1}|x^3 + t^3 + i3xt|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{-1}^{1}|f(t)|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}} = (K(x))^{\frac{1}{2}}\|f\| \end{aligned}$$

siendo $K(x) = \int_{-1}^{1}|x^3 + t^3 + i3xt|^2dt$. En consecuencia,

$$||T(f)||^2 = \int_{-1}^{1}|(Tf)(x)|^2dx \le \Big(\int_{-1}^{1}K(x)dx\Big)\|f\|^2$$

y por tanto, T es acotado.
El operador adjunto de T es el operador T^* tal que $(T^*f)(x) = \int_{-1}^{1}(x^3 + t^3 - i3xt)f(t)dt$. En efecto:

$$\begin{aligned} \langle g, T^*f\rangle &= \int_{1}^{1} g(x)\Big(\int_{-1}^{1}\overline{(x^3 + t^3 - i3xt)f(t)}dt\Big)dx \\ &= \int_{1}^{1}\Big(\int_{-1}^{1}(x^3 + t^3 + i3xt)g(x)dx\Big)\overline{f(t)}dt \\ &= \langle Tg, f\rangle \end{aligned}$$

Pregunta 4 (2 puntos)
Dadas las series trigonométricas,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nt}{\pi + n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nt}{\sqrt{n-1}},$$

determine, para cada una de las series, si la serie define una función de $L^2[0,2\pi]$. Razone la respuesta.
Solución:
Los desarrollos son los desarrollos de Fourier de funciones de $L^2[0,2\pi]$ si y sólo si los coeficientes, que salvo

constante multiplicativa, son los coeficientes respecto de una base ortonormal de $L^2[0, 2\pi]$, forman una sucesión de ℓ^2. En nuestro caso, dado que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\pi + n)^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

y

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} = \infty$$

podemos concluir que la primera serie define una función de $L^2[0, 2\pi]$ mientras que la segunda no.