La puntuación máxima de cada preguntase indica en cada una de ellas. Se valorará la exposición de las respuestas dadas. No se permite el uso de ningún tipo de material.

1. (3 puntos) Estudiar la continuidad de

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x-y|}} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

2. (2 puntos) Sean $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones diferenciables, y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = h(x)g(g(y)) + g(y)h(g(x)).$$

Calcular las derivadas parciales de f.

3. (3 puntos) Sea $f(x,y) = \sqrt{x^2 + 2e^y}$. Estudiar el dominio de f. Calcular el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0, f(1,0))$.

4. (3 puntos) Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right) \operatorname{sen} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

calcular las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y estudiar la diferenciabilidad de la función f.

Examen 2016 Junio 2a semana

Nelson

1.

Consideramos el cambio de variable $t = x - y$, así cuando $x = y$ entonces $t = 0$. Por lo tanto podemos escribir

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|t|}} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

Y por lo tanto

$$\lim_{t \to 0} f(t) = e^{-\infty} = 0 = f(0)$$

podemos decir que f es continua en $\mathbb{R}$.

2.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = h'(x)g(g(y)) + g(y)g'(x)h'(g(x))$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = h(x)g'(y)g'(g(y)) + g'(y)h(g(x))$$

3.

El dominio de la función f vendrá dado por los valores x, y tales que $0 \leqslant x^2 + 2e^y$, por no existir en $\mathbb{R}$ raices cuadradas de valores negativos, como $-2e^y < 0 \leqslant x^2$ tenemos que el dominio de f es $\mathbb{R}$.

La pendientes en los ejes x e y del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 0, f(1, 0) = sqrt3)$ tendran el mismo valor que la pendiente de f en dicho punto, que vienen dadas por sus derivadas parciales, por lo tanto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2e^y}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{\sqrt{x^2 + 2e^y}}$$

evaluando en $(1, 0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

por lo tanto el plano tangente tendrá la forma

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}y + c = z$$

evaluamos en $(1, 0, f(1, 0) = \sqrt{3})$ para encontrar el valor de c y obtenemos que

$$c = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

por lo tanto el plano que buscamos es

$$x + y + 2 = \sqrt{3}z$$

4.

$$\lim_{x,y\to 0,0} f(x,y) = \lim_{r\to 0} r^2 \operatorname{sen}\frac{1}{r} = 0 = f(0,0)$$

por lo tanto f es continua en todo $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Las derivadas parciales de f no están definidas en $(0,0)$ pues no evaluamos la derivada en ese punto mediante la definición de límite

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{t\to 0}\frac{h^2 \operatorname{sen}\frac{1}{h}}{h} = \lim_{h\to 0} h \operatorname{sen}\frac{1}{h} = 0$$

la función tiene derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ y por lo tanto es diferenciable en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$, estudiarmeos el caso $(0,0)$ por la definición de diferenciabilidad por límite

$$\lim_{x,y\to 0,0}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{||(x,y)||} = \lim_{x,y\to 0,0}\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

por lo tanto en el punto $(0,0)$ la función es diferenciable.

En conclusión la función es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$