# Matemática Discreta

*Soluciones de los ejercicios de autoevaluación*

1 de enero de 2021

## Parte I

# Teoría de Números

### Ejercicio 1.1

Dados los números de la forma $n = 2^k - 1$, con $k$ natural compuesto, entonces:

***a***) $n$ es primo si y sólo si $k$ es primo.

***b***) ***Siempre compuestos.***

***c***) Primos o compuestos dependiendo de $k$.

Los primos de Mersenne son números de Mersenne con $k$ primo, pero no todos los números de Mersenne con $k$ primo son primos de Mersenne, de manera que $n$ debe ser compuesto.

- Mersenne prime.

### Ejercicio 1.2

Sean $a$ y $b$ números naturales tales que $a^n$ divide a $b^n$, entonces:

***a***) $b$ divide a $a^n$.

***b***) $a$ ***es siempre un divisor de*** $b$.

***c***) $a$ divide a $b$ dependiendo de los valores de $n$.

Si $d$ es el máximo común divisor de $a$ y $b$, entonces $a$ y $b$ son múltiplos de $d$ y así

$$d = \operatorname{mcd}(a,b) = \operatorname{mcd}(dq, dq') = d \cdot \operatorname{mcd}(q,q') \quad \Rightarrow \quad \operatorname{mcd}(q,q') = 1.$$

Como $a^n \mid b^n$ , se tiene que $d^n q^n \mid d^n q'^n$, $q^n \mid q'^n$, luego $q^n = q = 1$ y $a = dq = d$. Por lo tanto, $a \mid b$.

## Ejercicio 1.3

Dados los números escritos en base 5: 433 y 424, su suma (en base 5) es:

***a***) 1122. ***b***) 1012. ***c***) ***1412.***

$$433 + 424 = (4+4)\cdot 5^2 + (3+2)\cdot 5 + (3+4) = (5+3)\cdot 5^2 + 5^2 + 5 + 2 = 5^3 + 4\cdot 5^2 + 5 + 2 = (1412)_5\,.$$

## Ejercicio 1.4

El resto de la división de $11^{434292}$ por 5 es:

***a***) 2. ***b***) ***1.*** ***c***) 3.

$$11 \equiv 1 \mod 5 \quad \Rightarrow \quad 11^{434292} \equiv 1 \mod 5.$$

## Ejercicio 1.5

Un estudiante compra un total de 5 libros de dos series distintas $A$ y $B$ pagando un total de 57 euros. Sabiendo que el precio de cada libro de la serie $A$ es 9 euros más que el precio de cada libro de la serie $B$, ¿cuántos libros compró de la serie $A$ y cuál es el precio de cada libro de esta serie?

$$A + B = 5, \quad aA + bB = 57, \quad a = b + 9$$

$$aA + (a-9)(5-A) = \cancel{aA} - \cancel{aA} + 9A + 5a - 45 = 57$$

$$9A + 5a = 102 \quad \Rightarrow \quad 9\cdot(-1) + 5\cdot 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 9\cdot(-102) + 5\cdot 204 = 102$$

$A = -102$ y $a = 204$ son solución de la ecuación, luego

$$A = -102 + 5\cdot 21 = -102 + 105 = 3$$

$$a = 204 - 9\cdot 21 = 15$$

y la solución que buscamos es

$$A = 3 \text{ libros}, \quad a = 15 \text{ €/libro}.$$

## Ejercicio 1.6

Sea $n$ el número cuyas cifras de izquierda a derecha son un 1, dos 2, tres 3, ..., nueve 9. ¿Cuál es el múltiplo de 11 más próximo a $n = 122333\dots999999999$?

El número $n$ se puede escribir como

$$n = 9\dots + 8\dots \cdot 10^{9} + 7\dots \cdot 10^{17} + 6\dots \cdot 10^{24} + 5\dots \cdot 10^{30} + 4\dots \cdot 10^{35} + 3\dots \cdot 10^{39} + 22 \cdot 10^{42} + 1 \cdot 10^{44}.$$

Teniendo en cuenta que

$$10 \equiv -1 \quad \text{mód } 11 \quad \Rightarrow \quad 10^n \equiv (-1)^n \quad \text{mód } 11,$$

tenemos que

$$n \equiv 9\dots - 8\dots - 7\dots + 6\dots + 5\dots - 4\dots - 3\dots + 22 + 1 \quad \text{mód } 11$$

$$n \equiv 9 - 0 - 7 + 0 + 5 - 0 - 3 + 0 + 1 \equiv 5 \quad \text{mód } 11$$

De esta manera, el múltiplo de 11 más cercano a $n$ es $n - 5.$

## Ejercicio 1.7

El número de pares ordenados de enteros $(x, y)$ tales que $x^2 + y^2 \leq 5$ es:

***a***) 23. ***b***) ***21.*** ***c***) 36.

Sabemos que $|x| \not> 2$ y $|y| \not> 2$, de manera que la búsqueda queda restringida a los valores $-2, -1, 0, 1, 2$. ¿Cuántos pares ordenados podemos formar con estos números? $5^2$. De estos pares ordenados, los que estén formados por combinaciones de $-2$ y $2$ no son válidos, ya que $x^2 + y^2 = 8 > 5$, ¿cuántos pares se pueden formar con estos números? $2^2$. Así, tenemos que hay

$$5^2 - 2^2 = 21 \text{ pares.}$$

## Ejercicio 1.8

La solución general del sistema de congruencias

$$\begin{aligned} x+3y &\equiv 0 \quad \text{mód } 11 \\ 3x+2y &\equiv 1 \quad \text{mód } 11 \end{aligned}$$

es:

***a***) $x = 5 + 11t,\ y = 3 + 11s.$ ***b***) $x = 2 + 11t,\ y = 3 + 11s.$ ***c***) $x = 2 + 11t,\ y = 5 + 11s.$

$$x+3y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad 3x+9y \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad 3x \equiv -9y \equiv 2y \qquad \text{mód } 11$$

$$3x+2y \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad 6x \equiv 1 \quad \Rightarrow \quad x \equiv 2 \quad \text{mód } 11$$

$$2y \equiv 3x \equiv 6 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 3 \quad \text{mód } 11$$

## Ejercicio 1.9

Una de las siguientes afirmaciones no es correcta:

***a***) La suma de los cuadrados de dos enteros impares no puede ser un cuadrado.

***b***) La suma de los cuadrados de dos enteros impares no puede ser múltiplo de 4.

***c***) ***La suma de los cuadrados de dos enteros impares es múltiplo de 4.***

Por el Algoritmo de la División, cualquier entero se puede escribir como $4k$, $4k+1$, $4k+2$ ó $4k+3$. Equivalentemente,

$$n \equiv 0,1,2,3 \quad \text{mód } 4 \quad \Rightarrow \quad n^2 \equiv 0,1,0,1 \quad \text{mód } 4.$$

Es decir, los cuadrados son congruentes con 0 ó 1 módulo 4, siendo congruentes con 1 los cuadrados de enteros impares. La suma de los cuadrados de dos números impares sería entonces congruente con 2, por lo que no podría ser múltiplo de 4.

$$a^2+b^2 \equiv 2 \not\equiv 0 \quad \text{mód } 4 \quad \Rightarrow \quad 4 \nmid a^2+b^2.$$

## Ejercicio 1.10

Sea $n$ cualquier número natural. El resto de dividir el número $21^{4n+1} - 5n + 7$ por 5 es:

***a***) 2. ***b***) *3.* ***c***) Depende de $n$.

$$21 \equiv 1 \mod 5 \quad \Rightarrow \quad 21^{4n+1} \equiv 1 \mod 5$$

$$-5n \equiv 0 \mod 5, \quad 7 \equiv 2 \mod 5$$

$$21^{4n+1} - 5n + 7 \equiv 3 \mod 5.$$

## Ejercicio 2.1

Los números de la forma $2^k + 1$ con $k$ natural múltiplo de 3, son:

***a***) Siempre primos.

***b***) ***Siempre compuestos.***

***c***) Primos o compuestos dependiendo de $k$.

Existe un teorema que dice que si $2^k + 1$, $k > 0$, es primo, entonces $k$ tiene que ser una potencia de 2. En tal caso, sería un primo de Fermat. De manera que si $k$ es múltiplo de 3, entonces $2^k + 1$ no puede ser primo.

- Other theorems about Fermat numbers.

## Ejercicio 2.2

Sabemos que el número $62x0204$ es divisible por 132. ¿Qué cifra es $x$?

- Es divisible por 3 si

$$6 + 2 + x + 2 + 4 \equiv x + 14 \equiv x + 2 \equiv 0 \mod 3 \quad \Rightarrow \quad x \equiv 1 \mod 3.$$

  Es decir, si

$$x = 1, \ 4 \text{ ó } 7.$$

- Es divisible por 4 porque

$$62x0200 + 4 \equiv 0 \mod 4.$$

- Es divisible por 11 si
$$6 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + x \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^2 + 4 \equiv 0 \mod 11$$
$$6 - 2 + x + 2 + 4 \equiv x + 10 \equiv 0 \mod 11 \quad \Rightarrow \quad x \equiv 1 \mod 11.$$
Es decir, si $x = 1$.
- Por ser divisible por 3, 4 y 11, al ser coprimos, el número también es divisible por 132.

# Ejercicio 2.3

¿Cuál es el número de divisores positivos de 600 incluyendo el 1 y el 600?

***a***) 6. ***b***) 30. ***c***) ***24.***

Para un número $n$ con factorización
$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$
el número de divisores es
$$\prod_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1),$$
de manera que en el caso de 600 tenemos que
$$600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$$
y el número de divisores es
$$4 \cdot 2 \cdot 3 = 24.$$

# Ejercicio 2.4

Sea $n$ un número natural $n \equiv 3 \mod 7$, entonces $n$ es el cuadrado de un número natural

***a***) Para todo $n$ impar.

***b***) ***Nunca.***

***c***) Unas veces sí y otras no, dependiendo de $n$.

Los cuadrados de los enteros módulo 7 son:

$$m \equiv 0,1,2,3,4,5,6 \quad \text{mód } 7 \quad \Rightarrow \quad m^2 \equiv 0,1,4,2,2,4,1 \quad \text{mód } 7,$$

de manera que $n$ no puede ser el cuadrado de un número natural ya que

$$n \text{ mód } 7 = 3 \notin \{0,1,2,4\}.$$

## Ejercicio 2.5

Las soluciones enteras del sistema

$$\begin{aligned} 2x+3y &\equiv 3 \quad \text{mód } 8 \\ x+4y &\equiv 7 \quad \text{mód } 8 \end{aligned}$$

son de la forma: $x = x_0 + 8t,\ y = y_0 + 8s$. Entonces:

***a***) $0 \le y_0 \le 6,\ 0 \le x_0 \le 3$. ***b***) $0 \le y_0 \le 4,\ 0 \le x_0 \le 5$. ***c***) $0 \le y_0 \le 7,\ 0 \le x_0 \le 4$.

$$x+4y \equiv 7 \quad \Rightarrow \quad 2x \equiv 6 \quad \text{mód } 8$$

$$2x+3y \equiv 3 \quad \Rightarrow \quad 6+3y \equiv 3 \quad \Rightarrow \quad 3y \equiv 5 \quad \Rightarrow \quad y \equiv 7 \quad \text{mód } 8$$

## Ejercicio 2.6

El resto de la división de $13!$ por $17$ es:

***a***) 13. ***b***) *3.* ***c***) 16.

Por el teorema de Wilson sabemos que

$$16! \equiv -1 \quad \text{mód } 17$$

$$16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13! \equiv -1 \quad \text{mód } 17$$

$$(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot 13! \equiv -1 \quad \text{mód } 17$$

$$6 \cdot 13! \equiv 1 \quad \text{mód } 17$$

Como 6 y 17 son coprimos, 6 tiene inversa multiplicativa, que es 3, así que multiplicando a ambos lados por 3 tenemos

$$13! \equiv 3 \quad \text{mód } 17.$$

## Ejercicio 2.7

Un número escrito en base 7 es múltiplo de 6 si y sólo si:

***a***) El número formado por las tres últimas cifras es 0 o múltiplo de 6.

***b***) ***La suma de sus cifras es múltiplo de 6.***

***c***) La última cifra es un 7.

$$7 \equiv 1 \mod 6 \quad \Rightarrow \quad 7^n \equiv 1 \mod 6$$

$$a_k 7^k + a_{k-1} 7^{k-1} + \cdots + a_1 7 + a_0 \equiv a_k + a_{k-1} + \cdots + a_0 \mod 6$$

Es decir, cuando la suma de sus cifras sea múltiplo de 6.

## Ejercicio 2.8

¿Cuántas soluciones en números enteros positivos tiene la ecuación $x^2 - y^2 = 348$?

***a***) Ninguna. ***b***) Cuatro. ***c***) ***Dos.***

El número 348 se puede factorizar como producto de dos números de la misma paridad de dos maneras, así que la ecuación tiene dos soluciones en los enteros positivos.

$$348 = 2^2 \cdot 3 \cdot 29 = 58 \cdot 6 = 174 \cdot 2$$

$$x_1 = \frac{58+6}{2} = 32, \quad y_1 = \frac{58-6}{2} = 26; \qquad x_2 = \frac{174+2}{2} = 88, \quad y_2 = \frac{174-2}{2} = 86.$$

## Ejercicio 2.9

El número de enteros positivos menores que 119 y primos con 119 es:

***a***) 118. ***b***) ***96.*** ***c***) 24.

Como $119 = 7 \cdot 17$, serán primos con 119 los números que no sean múltiplos de 7 ó 17. Entonces,

$$\#\{7k \mid k \in \mathbb{N},\ 7k < 119\} = 16$$

$$\#\{17k \mid k \in \mathbb{N},\ 17k < 119\} = 6$$

De manera que tenemos

$$118 - 16 - 6 = \boxed{96}$$

enteros positivos menores que 119 y primos con 119.

O de forma más elegante, mediante la función $\varphi$ de Euler,

$$\varphi\,(119) = \varphi\,(7 \cdot 17) = \cancel{7} \cdot \cancel{17} \cdot \frac{6}{\cancel{7}} \cdot \frac{16}{\cancel{17}} = 6 \cdot 16 = \boxed{96.}$$

## Ejercicio 2.10

Supongamos que contamos con los dedos meñique, anular, corazón, índice y pulgar (en este orden) los números desde el 1 al $81^{401}$. ¿En qué dedo acabará la cuenta?

$$81 \equiv 1 \mod 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{81^{401} \equiv 1 \mod 5.}$$

Es decir, la cuenta acabará en el meñique.

# Parte II

# Teoría de Grafos

## Ejercicio 1.1

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

***a*) *Un grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar.***

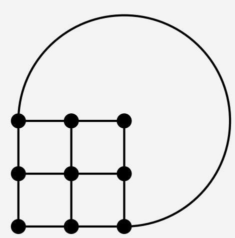
***b*)** Un grafo es bipartito si y sólo si tiene un número par de vértices.

***c*)** Un grafo es bipartito si y sólo si es un grafo completo con un número par de vértices.

- Proof: Bipartite Graphs have no Odd Cycles.
- Proof: If a Graph has no Odd Cycles then it is Bipartite.

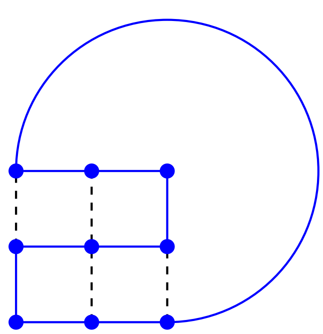
## Ejercicio 1.2

Dado el grafo



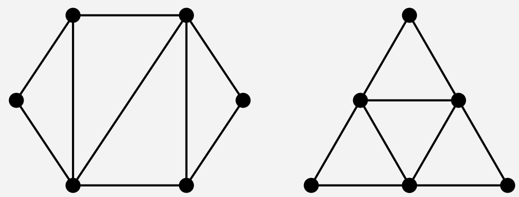
***a*) *Es hamiltoniano.*** ***b*)** Es euleriano. ***c*)** Es bipartito.

El grafo admite un ciclo hamiltoniano:



## Ejercicio 1.3

Los dos grafos de la figura:

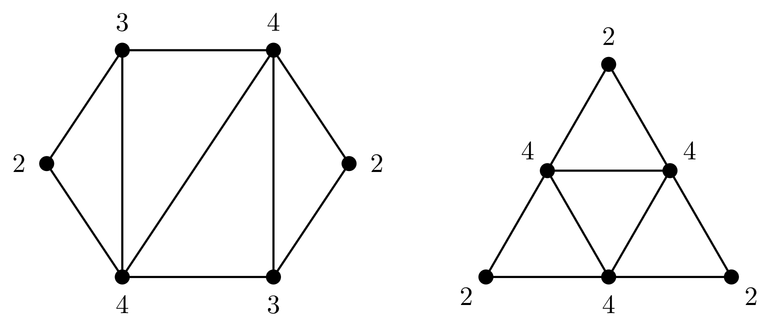


***a***) Son isomorfos pues tienen el mismo número de aristas y de vértices.

***b***) Son isomorfos pues se puede establecer un isomorfismo entre ellos.

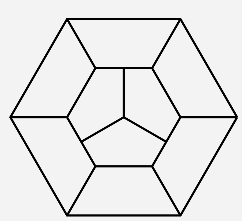
***c***) ***No son isomorfos.***

No pueden ser isomorfos, ya que los grados de los vértices son diferentes:




## Ejercicio 1.4

Sea $M$ el mapa de la figura:



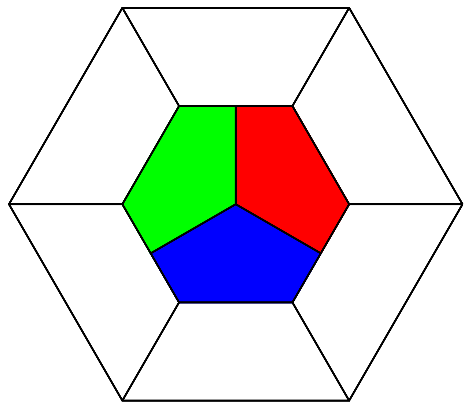
***a***) $M$ se puede colorear con tres colores diferentes.

***b***) $M$ ***necesita cuatro colores para ser coloreado.***

***c***) Son necesarios más de cuatro colores para colorear $M$.

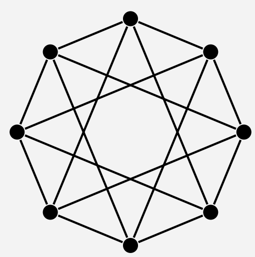
Es imposible terminar de colorear el mapa con los colores rojo, verde y azul. Por otro lado, nunca son necesarios más de cuatro colores para colorear un mapa.

- Four color theorem.



## Ejercicio 1.5

El grafo de la figura:



***a***) Es plano. ***b***) ***No es plano.*** ***c***) Es completo.

El grafo de la figura es el grafo bipartito completo $K_{4,4}$, que contiene como subgrafo el grafo de Kuratowski $K_{3,3}$, luego no puede ser plano.

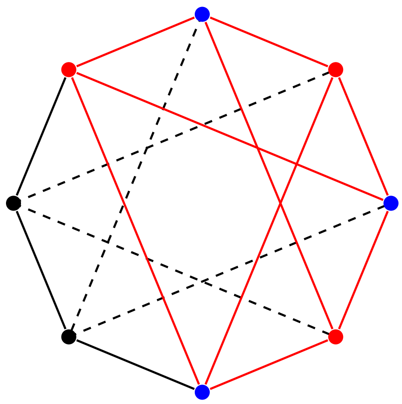
Por otro lado, no contiene ningún subgrafo isomorfo a $K_3$ y es conexo. Una condición necesaria y suficiente para que sea plano es que

$$\#E \leq 2\#V - 4,$$

que en este caso no se cumple, ya que

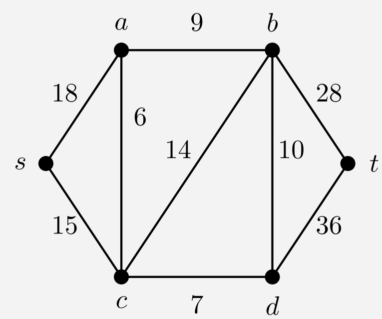
$$16 \not\leq 2 \cdot 8 - 4 = 12.$$

- Kuratowski's theorem.



## Ejercicio 1.6

Dado el grafo etiquetado:




se aplica el algoritmo de Dijkstra partiendo del vértice $s$. Se designa por $\delta(s,w)$ la distancia entre $s$ y cualquier otro vértice $w$. ¿Cuál de los siguientes resultados es cierto?

***a***) $\delta(s,a)=18,\ \delta(s,b)=27,\ \delta(s,c)=15,\ \delta(s,d)=22,\ \delta(s,t)=55.$

***b***) $\delta(s,a)=18,\ \delta(s,b)=27,\ \delta(s,c)=15,\ \delta(s,d)=22,\ \delta(s,t)=57.$

***c***) $\delta(s,a)=18,\ \delta(s,b)=29,\ \delta(s,c)=15,\ \delta(s,d)=22,\ \delta(s,t)=57.$

Es evidente a partir de la figura que los caminos más cortos para ir desde $s$ hasta $b$ y $t$ son:

$$s\to a\to b,\quad \delta(s,b)=18+9=\boxed{27,}$$

$$s\to a\to b\to t,\quad \delta(s,t)=18+9+28=\boxed{55.}$$

## Ejercicio 1.7

Sea $M$ un mapa cuyas regiones se pueden colorear con sólo dos colores. Entonces:

***a***) ***El pseudografo dual de $M$ es bipartito.***

***b***) Todas las caras de $M$ son polígonos con un número par de lados.

***c***) No existen tales mapas.

Por la definición de pseudomultigrafo dual $G_M$, los vértices del pseudomultigrafo representan las regiones del mapa $M$ y cada par de vértices está conectado por una arista si las regiones son adyacentes, de manera que si el mapa se puede colorear con sólo dos colores quiere decir que los vértices del multigrafo dual están divididos en dos conjuntos disjuntos y sólo hay aristas entre vértices de conjuntos diferentes. Es decir, el pseudomultigrafo dual es bipartito.

## Ejercicio 1.8

Sea $G$ un grafo y $M$ un mapa que representa a $G$. Supongamos que el grado de todos los vértices de $G$ es 3 y que $G$ tiene 12 aristas. Entonces el número de regiones de $M$ es

***a***) 10 ***b***) 8. ***c***) ***6.***

La suma de los grados de los vértices es el doble que el número de aristas, de manera que hay

$$\sum_{i=1}^{p} \mathrm{gr}\,(v_i) = 3p = 2\#E = 24 \quad \Rightarrow \quad p = 8\,\text{vértices}.$$

Por otro lado, la fórmula de Euler nos dice que

$$\#V - \#E + \#R = 2,$$

de manera que hay

$$\#R = 2 + \#E - \#V = 2 + 12 - 8 = \boxed{6 \text{ regiones.}}$$

## Ejercicio 1.9

Sea $A$ la matriz de adyacencia de un multigrafo $G$ con vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y sea $a_{23} = 3$ una de las entradas de $A$. Entonces,

***a***) Existe un camino con tres vértices entre $v_2$ y $v_3$.

***b***) ***Hay tres aristas con extremos los vértices $v_2$ y $v_3$.***

***c***) Hay tres vértices adyacentes con $v_2$ y $v_3$.

Por la definición de matriz de adyacencia, las entradas $a_{ij}$ de dicha matriz son el número de aristas entre los vértices $v_i$ y $v_j$.

## Ejercicio 1.10

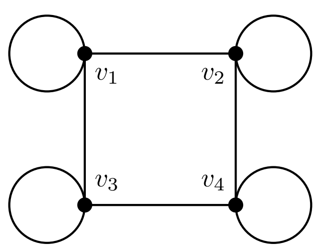
Dado el grafo $G$ con matriz de adyacencia:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces:

***a***) $G$ es un grafo completo. ***b***) $G$ no es conexo. ***c***) ***$G$ es un pseudografo.***

Los 1 de la diagonal nos indican que cada vértice tiene un lazo que lo conecta consigo mismo, de manera que se trata de un pseudografo. La matriz $A$ podría ser la matriz de adyacencia del siguiente pseudografo:



## Ejercicio 2.1

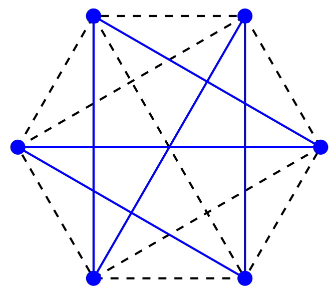
Sea $K_6$ el grafo completo de 6 vértices. Entonces:

***a***) Es bipartito ya que tiene un número par de vértices.

***b***) ***Es hamiltoniano.***

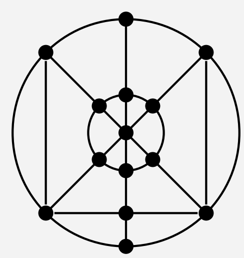
***c***) Es euleriano.

Todos los grafos completos (con más de dos vértices) son hamiltonianos. El ciclo más fácil de encontrar es $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Un ejemplo de ciclo hamiltoniano más interesante es el siguiente:



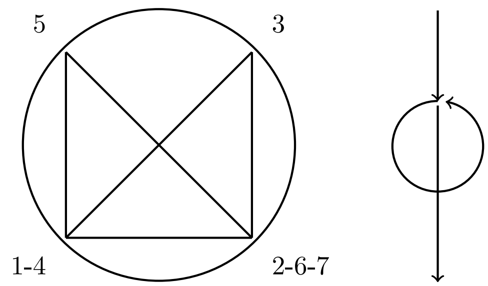
## Ejercicio 2.2

¿Cuál es el número mínimo de veces que se debe levantar el lápiz para dibujar la figura sin repetir ninguna arista?



***a***) Ninguna vez. ***b***) ***Una vez.*** ***c***) Dos veces.

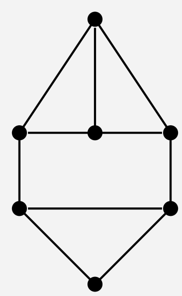
El grafo no es euleriano ni admite un camino euleriano porque no todo vértice tiene grado par ni todos los vértices menos dos tienen grado par, de manera que necesariamente hay que levantar el lápiz al menos una vez. Se puede dibujar de dos veces decomponiendo el grafo de la siguiente manera:




En la figura de la izquierda, empezamos por la parte interior y después dibujamos la parte exterior. Luego superponemos la figura de la derecha.

## Ejercicio 2.3

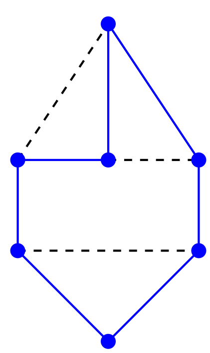
Sea el grafo de la figura.



Entonces:

***a***) Es euleriano. ***b***) Es 3-regular. ***c***) ***Es hamiltoniano.***

El grafo admite un ciclo hamiltoniano:

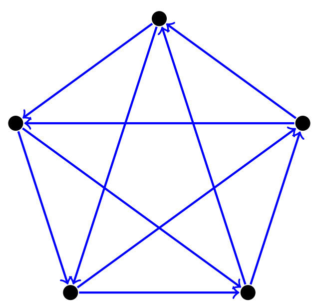


# Ejercicio 2.4

Sea $G$ el grafo formado por los vértices y aristas de un tetraedro $T$ más el centro de $T$ y las aristas que unen dicho centro con los vértices de $T$. Entonces:

***a***) $G$ es bipartito. ***b***) ***$G$ es euleriano.*** ***c***) $G$ no es hamiltoniano.

Este grafo es isomorfo al grafo completo $K_5$, que admite un circuito euleriano:



Partiendo de cualquier vértice recorremos el perímetro hasta llegar al vértice de partida y desde ahí recorremos la estrella interior.

# Ejercicio 2.5

Sea $G$ un grafo y $M$ un mapa con $r$ regiones que representa a $G$. Si $G$ tiene $a$ vértices de grado 3 y $b$ vértices de grado 4, con $a > b > 0$, y 14 aristas, ¿cuántas regiones $r$ tiene el mapa $M$?

***a***) ***7.*** ***b***) 8. ***c***) 9.

La suma de los grados de los vértices es el doble que el número de aristas, de manera que hay

$$\sum_{i=1}^{a+b} \operatorname{gr}(v_i) = 3a + 4b = 2\#E = 28 \quad \Rightarrow \quad 3a + 4b = 28 \quad \Rightarrow \quad a = 8,\ b = 1,$$

$$\#V = a + b = 8 + 1 = 9 \text{ vértices.}$$

Por otro lado, la fórmula de Euler nos dice que

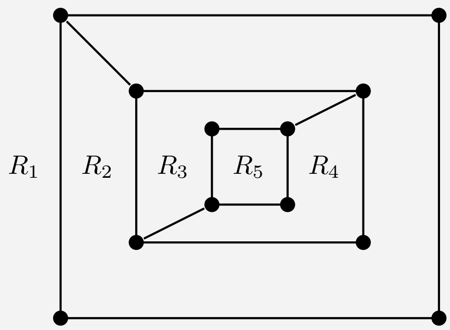
$$\#V - \#E + \#R = 2,$$

de manera que hay

$$\#R = 2 + \#E - \#V = 2 + 14 - 9 = \boxed{7 \text{ regiones.}}$$

# Ejercicio 2.6

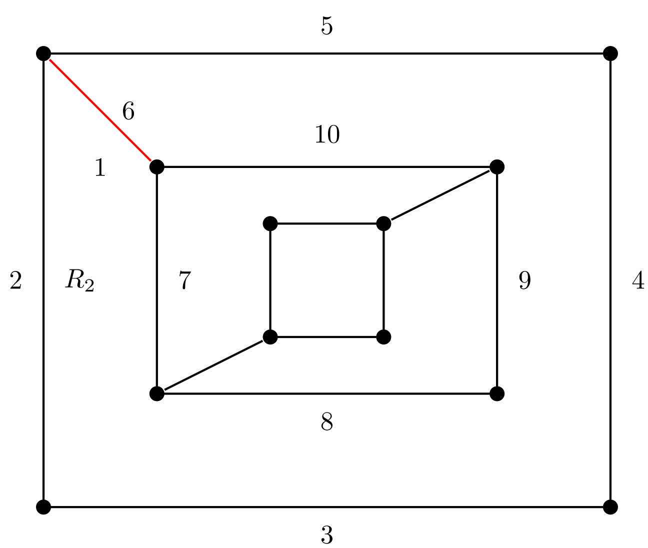
En el mapa de la figura las regiones se designan por $R_i$.




Entonces el grado de la región $R_2$ es:

***a***) 3. ***b***) 9. ***c***) ***10.***

El grado de una región es el número de aristas que la delimitan (la arista roja se cuenta dos veces):



## Ejercicio 2.7

Sea $K_r$ el grafo completo de $r$ vértices, $(r > 2)$. Entonces su matriz de adyacencia satisface:

***a***) $a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 1$ ($i$ distinto de $j$).

***b***) $a_{ii} = 1,\ a_{ij} = 0$ ($i$ distinto de $j$).

***c***) $a_{ii} = 0,\ a_{ij} = 1$ ***($i$ distinto de $j$).***

Por la definición de matriz de adyacencia, si el grafo es un grafo simple, es decir, no es digrafo, multigrafo, pseudografo, entonces la matriz de adyacencia es una matriz cuadrada, simétrica, con ceros en la diagonal y ceros o unos fuera de la diagonal. Si el grafo es completo, todos los pares de vértices están conectados entre sí, de manera que todos los elementos de fuera de la diagonal deben ser uno.

## Ejercicio 2.8

Sea $M$ la matriz de adyacencia de un grafo $G$ con $p > 1$ vértices. Sea $C = M^{p-1} + M^{p-2} + \cdots + M$.

***a***) Si $C$ tiene alguna entrada no nula, entonces el grafo es conexo.

***b***) Si la entrada $(i, j)$ de $C$ es igual a 1, entonces existe una arista entre el vértice $i$ y el vértice $j$.

***c***) ***Si el grafo es conexo, entonces todas las entradas de $C$ son no nulas.***

El elemento $a_{ij}$ de la matriz $M^n$ nos indica el número de caminos de longitud $n$ entre los vértices $v_i$ y $v_j$. Por otro lado, el camino simple más largo entre dos vértices en un grafo con $p$ vértices tiene longitud $p - 1$, de manera que si la matriz $C$ tiene algún elemento nulo significaría que no hay ningún camino entre el par de vértices correspondientes.

## Ejercicio 2.9

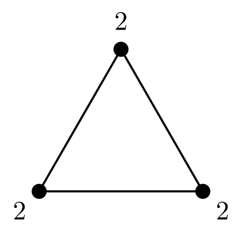
¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

***a***) ***Todo grafo tiene un número par de vértices de grado par.***

***b***) Todo grafo tiene un número par o cero de vértices de grado impar.

***c***) La suma de los grados de los vértices de un grafo es par.

Simple contraejemplo:




## Ejercicio 2.10

Sea $G$ un grafo con 7 vértices y $C = \{v1, v3, v2, v4, v5, v7, v6, v1\}$ un camino en $G$. Entonces:

***a***) $C$ es un camino euleriano.

***b***) ***$C$ es un ciclo hamiltoniano.***

***c***) $C$ no está bien definido.

El camino $C$ es cerrado (empieza y termina en el mismo vértice) y pasa por todos los vértices una sola vez (pasar significa entrar y salir), luego es un ciclo hamiltoniano.

# Parte III

# Métodos Combinatorios

## Ejercicio 1.1

¿Cuál es el coeficiente de $x^6$ en el producto $\left(1-x+x^3\right)(3+2x)^6$?

***a***) 5256. ***b***) ***3808.*** ***c***) 5253.

Nos interesan los coeficientes $k=3,5,6$ de la expansión de $(3+2x)^6$,

$$c_3=\binom{6}{3}\cdot 3^3\cdot 2^3=5\cdot 3^3\cdot 2^5,\quad c_5=\binom{6}{5}\cdot 3\cdot 2^5=3^2\cdot 2^6,\quad c_6=\binom{6}{6}\cdot 3^0\cdot 2^6=2^6.$$

El coeficiente de $x^6$ que buscamos es entonces

$$2^6-3^2\cdot 2^6+5\cdot 3^3\cdot 2^5=2^5\cdot\left(2-3^2\cdot 2+5\cdot 3^3\right)=32\cdot(2-18+135)=\boxed{3808.}$$

## Ejercicio 1.2

Queremos colocar siete libros diferentes en un estante. Elegimos al principio tres libros y queremos que cualesquiera dos de ellos no estén juntos en la colocación. ¿Cuántas colocaciones diferentes existen con estas condiciones?

***a***) 1520. ***b***) 1634. ***c***) ***1440.***

Por cada colocación permitida, podemos ordenar los libros de $P(3)\cdot P(4)$ maneras.

Las colocaciones permitidas son aquellas en las que entre los libros que no pueden estar juntos hay entre 1 y 3 libros de los restantes.

$$||\star|\star|\star,\quad |\star||\star|\star,\quad |\star|\star||\star,\quad \star|\star|\star||,\quad \star|\star||\star|,\quad \star||\star|\star|$$

$$\star|||\star|\star,\quad \star|\star|||\star,\quad \star||\star||\star,\quad |\star|\star|\star|.$$

Si eliminamos los dos libros que obligatoriamente tienen que separar a los tres que no pueden estar juntos, esto es equivalente a buscar las posibles formas de ordenar

$$|\star|\star\star,$$

lo que se puede hacer de

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10 \text{ maneras.}$$

Es decir, tenemos

$$10 \cdot 3! \cdot 4! = \text{1440 colocaciones.}$$

## Ejercicio 1.3

Una organización estudiantil tiene que elegir delegado y subdelegado. Hay siete candidatos. ¿Cuántos resultados distintos son posibles?

***a***) 21. ***b***) 49. ***c***) ***42.***

Se pide el número de variaciones de orden 2 de un conjunto de 7 candidatos:

$$V(7,2) = \frac{7!}{5!} = 7 \cdot 6 = 42.$$

## Ejercicio 1.4

¿Cuál es el número de soluciones enteras positivas de la ecuación: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$?

***a***) ***2024.*** ***b***) 3276. ***c***) 5375.

El problema es equivalente a buscar el número de soluciones no negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$, o de ordenar

$$\star | \star \star | \star \star \star \cdots \star | \star,$$

con 3 barras y 21 estrellas. Esto se puede hacer de

$$\binom{24}{3} = \frac{24!}{3!21!} = 8 \cdot 11 \cdot 23 = \text{2024 maneras.}$$

## Ejercicio 1.5

Un grupo de tres libros distintos de Matemáticas y dos libros distintos de Física es colocado al azar alrededor de una mesa circular. Sea $a$ el número de colocaciones diferentes en las que los dos libros de Física están juntos y sea $b$ el número de colocaciones diferentes en las que no están juntos. Dos colocaciones se consideran iguales si una puede obtenerse de la otra mediante una rotación apropiada. Entonces:

***a***) $a = 12$ ***y*** $b = 12$. ***b***) $a = 12$ y $b = 24$. ***c***) $a = 15$ y $b = 24$.

Cinco libros se pueden colocar alrededor de una mesa circular de

$$\frac{5!}{5} = 24 \text{ maneras},$$

de las cuales en

$$\frac{2! \cdot 5 \cdot 3!}{5} = 12$$

están juntos. Así,

$$\boxed{a = 12, \quad b = 12.}$$

## Ejercicio 1.6

¿Cuántos números diferentes de cinco cifras se pueden escribir con cuatro doses y cuatro cincos?

***a***) 36. ***b***) ***30.*** ***c***) 50.

Sin tener en cuenta la limitación, tenemos $2^5$ números de cinco cifras compuestos por doses y cincos, de los cuales 22222 y 55555 no son números válidos. Por lo tanto, tenemos

$$2^5 - 2 = \boxed{30}$$

números de cinco cifras que no tienen más de cuatro doses o cincos.

## Ejercicio 1.7

¿Cuál debe ser el tamaño mínimo de una población para que exista, al menos, un día al año donde coincida la fecha del aniversario de nacimiento de al menos nueve personas? (Se consideran años de 365 días).

***a***) ***2921.*** ***b***) 2633. ***c***) 3025.

Por el principio de distribución,

$$365 \cdot 8 + 1 = \boxed{2921.}$$

## Ejercicio 1.8

Una solución de la ecuación recurrente: $g(n) = 6g(n-1) - 11g(n-2) + 6g(n-3)$ con $g(1) = 1$, $g(2) = 6$, $g(3) = 20$, es:

***a***) $-7 + 2 \cdot 3^n + 2^n$. ***b***) $1 + 3^n - 3 \cdot 2^{n-1}$. ***c***) $-2 + 2 \cdot 3^{n-1} + 2^{n-1}$.

Esta ecuación es una relación de recurrencia lineal homogénea con coeficientes constantes y la ecuación característica asociada es

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) = 0,$$

que tiene como soluciones $x = 1, 2, 3$. Así, la solución general es

$$g(n) = c_1 + c_2 \cdot 2^n + c_3 \cdot 3^n.$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 20 \end{pmatrix},$$

que tiene como soluciones:

$$c_1 = -2, \quad c_2 = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{2}{3}.$$

Con esto podemos escribir la solución particular como

$$g(n) = -2 + 2^{n-1} + 2 \cdot 3^{n-1}.$$

## Ejercicio 1.9

¿Cuántas sucesiones de $n > 3$ dígitos se pueden formar con los elementos del conjunto $\{0, 1, 2\}$, que posean al menos un 0, un 1 y un 2?

***a***) $3^n$. ***b***) $3^n - 3 \cdot 2^n + 3$. ***c***) $3^n - 2^n + 1$.

Tenemos $3^n$ posibles sucesiones de $n$ dígitos. De estas $3^n$ sucesiones hay $3 \cdot (2^n - 2)$ formadas por sólo dos números y 3 formadas por sólo uno de los números.

Así, tenemos

$$3^n - 3 \cdot (2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \cdot 2^n + 3$$

sucesiones de $n$ dígitos que contienen al menos uno de cada uno de los números del conjunto.

## Ejercicio 1.10

Sea $E$ un alfabeto con 5 vocales y 21 consonantes. ¿Cuántas palabras de 5 letras pueden formarse con las letras de $E$, tales que la primera y la última letra sean vocales distintas y las otras tres sean consonantes distintas?

***a***) $26!/3!2!$. ***b***) $25 \cdot 3^{21}$. ***c***) $V(5, 2) \cdot V(21, 3)$.

Como las palabras tienen 5 letras de las cuales 2 son vocales de un conjunto de 5 y 3 son consonantes de un conjunto de 21, el orden importa y no hay repeticiones, nos están pidiendo variaciones de orden 2 y 3 de conjuntos de 5 y 21, respectivamente. De manera que, por el principio de multiplicación, hay

$$\boxed{V(5,2)\cdot V(21,3)} = \frac{5!}{3!}\cdot\frac{21!}{18!} = 5\cdot 4\cdot 21\cdot 20\cdot 19 = 159600 \text{ palabras.}$$

## Ejercicio 2.1

Sea $Z_n$ el conjunto de restos módulo $n$. ¿Cuántas aplicaciones inyectivas hay entre $Z_5$ y $Z_8$?

***a***) 56. ***b***) 85. ***c***) ***6720.***

Si a cada número 0-4 le corresponde un número distinto 0-7, nos están pidiendo variaciones de orden 5 de un conjunto de 8:

$$V(8,5) = \frac{8!}{3!} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = \boxed{6720.}$$

## Ejercicio 2.2

Se tienen "cadenas" formadas por dos letras seguidas de cuatro dígitos y luego otras tres letras más. No están permitidas las repeticiones de letras y dígitos dentro de cada grupo, pero el último grupo de letras puede contener ninguna, una o dos de las letras utilizadas al principio de la cadena. ¿Cuántas cadenas diferentes pueden formarse si el número de letras disponible es 26?

***a***) 560000000. ***b***) 720100029. ***c***) ***51105600000.***

- Las "cadenas" son del tipo AB-0123-CDE.
- Hay $V(10,4)$ números posibles, ya que no se admiten repeticiones.
- En el primer grupo de letras tenemos $V(26,2)$ grupos posibles.
- Para el segundo grupo de letras tenemos $V(26,3)$, ya que pueden aparecer todas las letras.

Por el principio de multiplicación, el número de cadenas diferentes que pueden formarse es:

$$V(10,4)\cdot V(26,2)\cdot V(26,3) = \boxed{51105600000.}$$

## Ejercicio 2.3

¿De cuántas formas diferentes se pueden colorear 8 bolas de golf con 4 colores diferentes, usando necesariamente todos los colores? (Cada bola se pinta de un solo color y las bolas son indistinguibles)

***a***) 65536. ***b***) ***35.*** ***c***) 165.

Empezamos por pintar una bola de cada color y las separamos. Ahora hay que distribuir las 4 bolas restantes entre 4 colores. Es decir, buscamos las formas de ordenar

$$\star| \star | \star |\star,$$

con 3 barras y 4 estrellas. Esto se puede hacer de

$$\frac{7!}{3!4!} = \boxed{35 \text{ maneras.}}$$

## Ejercicio 2.4

¿De cuántas maneras se puede formar un equipo de baloncesto de 5 jugadores si en la plantilla hay 12 jugadores? (No se tiene en cuenta el puesto de cada jugador)

***a***) 125. ***b***) $\binom{12}{5}$. ***c***) 5!/12.

Como no hay repeticiones y el orden no importa, se pide el número de combinaciones de orden 5 de un conjunto de 12 jugadores:

$$C\,(12, 5) = \boxed{\binom{12}{5}} = \frac{12!}{5!7!} = 792.$$

## Ejercicio 2.5

Una ficha de un $n$-dominó es una pieza rectangular cuya superficie está dividida en dos cuadrados. Cada cuadrado puede ser blanco o contener de uno a $n$ puntos. ¿Cuántas fichas diferentes contiene un $n$-dominó?

***a***) $(n+1)^2$. ***b***) $\left(n^2+3n+2\right)/2$. ***c***) $n^2+n$.

Hay $n+1$ cuadrados diferentes. Si hacemos el producto $(n+1)\times(n+1)$ estaríamos contando dos veces las fichas que no tienen los dos cuadrados iguales. Entonces a los $(n+1)^2$ pares ordenados les restamos las $n+1$ fichas con cuadrados iguales y dividimos entre dos. A continuación sumamos las fichas con cuadrados iguales para obtener todas las fichas diferentes:

$$\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)\,(n+2)}{2} = \boxed{\frac{n^2+3n+2}{2}.}$$

## Ejercicio 2.6

¿Cuántas permutaciones de los números $\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$ satisfacen la condición de que en la primera y en la última posición haya un múltiplo de 3?

***a***) ***144.*** ***b***) 360. ***c***) 23.

Hay $V(3,2)$ formas de elegir el primer y último número y P(4) de elegir los restantes, de manera que, por el principio de múltiplicación:

$$V(3,2) \cdot P(4) = 3! \cdot 4! = \boxed{144.}$$

## Ejercicio 2.7

¿Cuántas permutaciones de los números 1, 2, ..., 6, dejan fijos exactamente tres números?

***a***) 36. ***b***) 6. ***c***) ***40.***

- Fijando tres números hay

$$d(3) = 3! \sum_{j=0}^{3} \frac{(-1)^j}{j!} = 3! \left( \cancel{\frac{1}{0!}} - \cancel{\frac{1}{1!}} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) = \frac{3!}{2!} - 1 = 2$$

  desordenaciones, es decir, permutaciones de los tres números restantes que no dejan a estos últimos en la misma posición.

- Hay $C(6,3)$ maneras de elegir los números que quedan fijos.

Por el principio de multiplicación, tenemos

$$d(3) \cdot C(6,3) = 2 \cdot \frac{6!}{3!3!} = \boxed{40 \text{ permutaciones.}}$$

# Ejercicio 2.8

¿Cuál es el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 30$?

***a***) 60211. ***b***) ***46376.*** ***c***) 48520.

Este problema es equivalente a contar las posibles ordenaciones de

$$\star|\star\star|\star|\star\star\cdots\star|\star,$$

donde tenemos 30 estrellas y 4 barras, de manera que la ecuación tiene

$$\binom{34}{4} = \frac{34!}{4!30!} = \frac{34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \text{46376 soluciones.}$$

# Ejercicio 2.9

Con los dígitos 0, 1, 2, ..., 8 se forman números de 5 cifras. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse sin repetir cifras?

***a***) 15120. ***b***) ***13440.*** ***c***) 12882.

En este caso nos piden variaciones de orden 5 de un conjunto de 9 dígitos, pero hay que tener en cuenta que no puede haber un 0 a la izquierda, ya que entonces el número tendría 4 cifras. Entonces tenemos

$$V(9,5) - V(8,4) = \frac{9! - 8!}{4!} = 8^2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 13440.$$

# Ejercicio 2.10

El coeficiente numérico de $y^6$ en la expansión de $\left(2x + y^2\right)^9$ es:

***a***) 7315. ***b***) 3765. ***c***) ***5376.***

Como $y$ está elevado al cuadrado, nos interesa el término $k = 3$, de manera que el coeficiente pedido es

$$c_3 = 2^{9-3} \cdot \binom{9}{3} = 5376.$$