Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1

Sean A, B y C subconjuntos arbitrarios de un conjunto no vacío U.
Sea el conjunto $Y = \big((A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}\big) \cup \big((\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B\big)$.
Consideramos las afirmaciones:

p; $Y \subset \overline{C} \cup B$.
q; $Y = \overline{C} \cup (\overline{A} \cap B)$.
r; $Y \cap B = \varnothing$.
s; $Y \subset A \cup B$.

Las únicas afirmaciones verdaderas son:

a) p y q.
b) r y s.
c) Ninguna de las otras respuestas.

Ejercicio 2

Consideramos las relaciones definidas en $\mathbb{N}^*$ por:

p; $n \,\mathcal{R}_1\, m$ si y sólo si n divide a m.
q; $n \,\mathcal{R}_2\, m$ si y sólo si $n^2 + m^2 = 2mn + 2n$.
r; $n \,\mathcal{R}_3\, m$ si y sólo si $n^2 + m^2 = 2mn$.
s; $n \,\mathcal{R}_4\, m$ si y sólo si $n^2 = m^2$.

Única y exclusivamente son relaciones de equivalencia en $\mathbb{N}^*$:

a) La de p y la de q.
b) La de r y la de s.
c) Ninguna de las otras respuestas.

Ejercicio 3

Consideramos las relaciones definidas en $\mathbb{N}$ por:

p; $n \,\mathcal{R}_1\, m$ si y sólo si $n - m \geq 1$.
q; $n \,\mathcal{R}_2\, m$ si y sólo si $n - m \leq 1$.
r; $n \,\mathcal{R}_3\, m$ si y sólo si $\exists k \in \mathbb{N} \;\; m^2 = k - n^2$.
s; $n \,\mathcal{R}_4\, m$ si y sólo si $\exists k \in \mathbb{N} \;\; m^2 = k + n^2$.

Única y exclusivamente son relaciones de orden en $\mathbb{N}$:

a) La de p y la de q.
b) La de r y la de s.
c) Ninguna de las otras respuestas.

Ejercicio 4

Dados X e Y dos conjuntos finitos arbitrarios no vacíos y dada
$f \colon X \longrightarrow Y$ una aplicación, consideramos las afirmaciones:

p; Si $\operatorname{card}(X) > \operatorname{card}(Y)$ entonces f es sobreyectiva.
q; Si $\operatorname{card}(X) > \operatorname{card}(Y)$ entonces f no es inyectiva.
r; Si $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$ entonces f es biyectiva.
s; Si $\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y)$ y f no es sobreyectiva entonces f no es inyectiva.

Las únicas afirmaciones verdaderas son:

a) p y r.
b) q y s.
c) Ninguna de las otras respuestas.

Ejercicio 5

Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ tales que el cociente y resto de la división entera de a entre b son 18 y 48, respectivamente. Consideramos las afirmaciones:

p; El resto de la división entera de a entre 18 es 12.

q; El resto de la división entera de a entre $2b$ es 96.

r; a es múltiplo de 6.

s; El cociente de la división entera de $2a$ entre $2b$ es 96.

Las únicas afirmaciones verdaderas son:

a) p y r.
b) q y s.
c) Ninguna de las otras respuestas.

Soluciones

Observación: En estos ejercicios, la frase"Las únicas afirmaciones verdaderas son" significa que si por ejemplo se responde la opción"p y q" esto significa que p y q son verdaderas y r y s no lo son.

Ejercicio 1

p es verdadera: En efecto, basta observar que $(A \cup \overline{B}) \cap \overline{C} \subset \overline{C}$ y que $(\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B \subset B$. Por tanto, $Y = \big((A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}\big) \cup \big((\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B\big) \subset \overline{C} \cup B$.

q es verdadera:

$$\begin{aligned} Y &= \big((A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}\big) \cup \big((\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B\big) \\ &= \big((A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}\big) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{C} \cap B) \\ &= \big((A \cup \overline{B}) \cap \overline{C}\big) \cup (B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= \big((A \cup \overline{B} \cup B) \cap \overline{C}\big) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= (U \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B) \\ &= \overline{C} \cup (\overline{A} \cap B) \end{aligned}$$

Las afirmaciones r y s no son en general verdaderas. Veamos un contraejemplo: Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 5, 6\}$ y $C = \{3, 4, 5, 7\}$. Se cumple que $A \cup \overline{B} = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$, $\overline{A} \cup \overline{C} = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$ y en consecuencia $(A \cup \overline{B}) \cap \overline{C} = \{1, 2, 8\}$ y $(\overline{A} \cup \overline{C}) \cap B = \{2, 5, 6\}$. Así pues $Y = \{1, 2, 8\} \cup \{2, 5, 6\} = \{1, 2, 5, 6, 8\}$. Claramente se tiene $Y \cap B = \{2, 5, 6\} \neq \varnothing$ y además no se cumple que $Y \subset A \cup B$ pues $8 \in Y$ y $8 \notin A \cup B$.

Ejercicio 2

La relación de p, $\mathcal{R}_1$, no es una relación de equivalencia pues no es simétrica. Por ejemplo 2 divide a 6, pero 6 no divide a 2.

La relación de q, $\mathcal{R}_2$, no es reflexiva y por tanto no es de equivalencia. Para $n = m$, $n^2 + m^2 = 2n^2$, $2mn + 2n = 2n^2 + 2n$ y se cumple que $2n^2 + 2n \neq 2n^2$.

Las relaciones de r y s son ambas relaciones de equivalencia. De hecho para todo $n, m \in \mathbb{N}^*$ se tiene.

$$\begin{aligned} r;\ n\,\mathcal{R}_3\,m \quad & \text{si y sólo si} \quad n^2 + m^2 = 2mn \\ & \text{si y sólo si} \quad n^2 + m^2 - 2mn = 0 \\ & \text{si y sólo si} \quad (n - m)^2 = 0 \\ & \text{si y sólo si} \quad n = m \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} s;\ n\,\mathcal{R}_4\,m \quad & \text{si y sólo si} \quad n^2 = m^2 \\ & \text{si y sólo si} \quad n = m \end{aligned}$$

Luego ambas relaciones no son más que la relación de igualdad en $\mathbb{N}^*$, que es una relación de equivalencia.

Ejercicio 3

La relación de p, $\mathcal{R}_1$, no es una relación reflexiva pues $n - n = 0 < 1$. Por tanto, no es una relación de orden.

La relación de q, $\mathcal{R}_2$, no es antisimétrica. En efecto, $1\,\mathcal{R}_2\,0$ y $0\,\mathcal{R}_2\,1$ y sin embargo $0 \neq 1$. Por tanto, no es una relación de orden.

La relación de r, $\mathcal{R}_3$, no es antisimétrica. En efecto, $1\,\mathcal{R}_3\,2$ y $2\,\mathcal{R}_3\,1$, basta tomar $k = 5$ en ambos casos, y sin embargo $1 \neq 2$. Por tanto, no es una relación de orden. Obsérvese que esta relación es precisamente $\mathcal{R}_3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

La relación de s, $\mathcal{R}_4$, es una relación de orden.

Reflexiva: en efecto, $n\,\mathcal{R}_4\,n$, basta tomar $k = 0$.

Antisimétrica: si $n\,\mathcal{R}_4\,m$ y $m\,\mathcal{R}_4\,n$ entonces $\exists k, k' \in \mathbb{N}$ $m^2 = k + n^2$ y $n^2 = k' + m^2$. Por tanto $m^2 = k + k' + m^2$, es decir, $k + k' = 0$. Como $k, k' \in \mathbb{N}$ resulta que $k = k' = 0$, de donde se deduce que $m^2 = n^2$ y por tanto,

$m = n$.

Transitiva: si, $n \mathcal{R}_4 m$ y $m \mathcal{R}_4 p$ entonces $\exists k, k' \in \mathbb{N}$ $m^2 = k + n^2$ y $n^2 = k' + p^2$. Por tanto, $m^2 = (k + k') + p^2$ y en consecuencia $n \mathcal{R}_4 p$.

Ejercicio 4

p no es verdadera. Por ejemplo, tomamos $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2\}$ y f tal que $f(1) = f(2) = f(3) = 1$.

q es verdadera. Vemos que si f es inyectiva entonces $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$. En efecto, si f es inyectiva, de la proposición 5.12 se deduce que $\text{card}(X) = \text{card}(f(X))$ y como $f(X) \subset Y$ resulta que $\text{card}(f(X)) \leq \text{card}(Y)$. Por tanto, $\text{card}(X) \leq \text{card}(Y)$.

r no es verdadera. Por ejemplo, tomamos $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2, 3\}$ y f tal que $f(1) = f(2) = f(3) = 2$.

s es verdadera. Supongamos que $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$. Probemos que si f es inyectiva entonces f es sobreyectiva. En efecto, Si f es inyectiva entonces (proposición 5.12)$\text{card}(X) = \text{card}(f(X))$ y de $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$ resulta que $\text{card}(f(X)) = \text{card}(Y)$. Pero $f(X)$ es un subconjunto finito de Y y por la proposición 5.11, resulta que $f(X) = Y$ Por tanto f es sobreyectiva.

Ejercicio 5

Si el cociente y resto de la división entera de a entre b son 18 y 48 respectivamente entonces

$$a = 18b + 48, \text{ siendo } 48 < b\,.$$

p es verdadera pues de $48 = 2(18) + 12$ se deduce que $a = 18b + 48 = 18b + 2(18) + 12 = 18(b + 2) + 12$. Por tanto 12 es el resto de la división entera de a entre 18.

q no es verdadera. De $a = 18b + 48 = 9(2b) + 48$ se deduce que el resto de la división entera de a entre $2b$ es 48.

r es verdadera pues se tiene que $a = 18b + 48 = 6(3b + 8)$.

s no es verdadera pues de $a = 18b + 48$ se obtiene que $2a = 18(2b) + 96$ y además $96 < 2b$. Por tanto, el cociente de la división entera de $2a$ entre $2b$ es 18.