Funciones de Varias Variables I. CC. Matemáticas.
Prueba Presencial Ordinaria. Curso 2016/17

2S

La puntuación máxima de cada preguntase indica en cada una de ellas. Se valorará la exposición de las respuestas dadas. No se permite el uso de ningún tipo de material.

1. (3 puntos) Sea la función

$$f(x,y) = e^{-\frac{1}{|x-y|}}$$

definida en $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : x \neq y\}$. Estudiar si existe una función $\widetilde{f}$ continua en todo $\mathbb{R}^2$ tal que $\widetilde{f} = f$ en D.

2. (2 puntos) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea C la curva de intersección de la gráfica de la función $z = f(x,y)$ con el plano $y = y_0$. Hallar la ecuación de la recta tangente a C en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

3. (2 puntos) Sea $z = e^{xy}$ y a su vez $x = t \operatorname{sen} t$ e $y = t \cos t$. Calcular $\dfrac{dz}{dt}$ en $t = \pi$.

4. (3 puntos) Hallar y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x,y) = (x+y)e^{-x^2-xy-y^2}$$

Examen 2017 Junio 2a semana

Nelson

1.

Tenemos que f no está definida en $x = y$ ya que entonces $x - y = 0$ y no existe $\frac{1}{|x-y|}$. Aproximaremos el valor $x = y$ por limites usando el cambio de variable $t = x - y$ de esta forma cuando $x = y$ entonces $t = 0$. Por lo tanto tenemos

$$\lim_{t \to 0} f(t) = e^{-\infty} = 0$$

por lo tanto si consideramos

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

entonces F es continua en $\mathbb{R}^2$ y $F = f$ en D.

2.

La recta que buscamos sera la interseccìon del plano $y = y_0$ con el planto tangente a la gráfica de f en el punto dado.

Tenemos entonces que el plano tangente a la gráfica de f en el punto dado es

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

haciendo la intersección con $y = y_0$ tenemos la recta

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0)$$

3.

$$z = e^{t^2 \operatorname{sen} t \cos t} = e^{t^2 \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}}$$

por lo tanto

$$z' = [\operatorname{sen}(2t) + t\cos(2t)]te^{t^2 \frac{\operatorname{sen}(2t)}{2}}$$

4.

Hallar y clasificar los puntos criticos de

$$f(x, y) = (x + y)e^{-x^2 - xy - y^2}$$

Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-xy-y^2} + (x + y)(-2x - y)e^{-x^2-xy-y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-xy-y^2} + (x + y)(-x - 2y)e^{-x^2-xy-y^2}$$

igualandolas a 0 obtenemos los puntos críticos de la función

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \quad , \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \to (x, y) = (\pm\frac{1}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}})$$

La matriz hessiana tendra la forma

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y) \end{bmatrix}$$

Calculando tenemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = e^{-x^2-xy-y^2}[2(-2x-y)+(-2x-2y)+(x+y)(-2x-y)^2]$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^{-x^2-xy-y^2}[(-2y-x)+(-2x-y)+(-x-y)+(x+y)(-2y-x)(-2x-y)]$$

y evaluando en $(x,y) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$, la matriz hessiana es

$$H(x,y) = e^{-1/2}\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, por el criterio de Sylvester, la matriz es definida negativa y el punto $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$ es un máximo.

Para $(x,y) = (\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$, la matriz hessiana es

$$H(x,y) = e^{-1/2}\frac{\sqrt{6}}{6}\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

por lo tanto, por el criterio de Sylvester, la matriz es definida positiva y el punto $(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})$ es un mínimo.

Observación: el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ y el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ son iguales por simetria en los puntos (x,y) con $x = y$, por eso no se calcula $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$.