Introducción a los espacios de Hilbert

Resolución de los ejercicios recomendados. Capítulo 8

Ejercicio 1

Sabemos que la aplicación $f \mapsto \{f(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un operador unitario entre los espacios PW_π y $\ell^2(\mathbb{Z})$. Es decir, se cumple que $\langle f, g\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\overline{g(n)}$ para todo $f, g \in PW_\pi$. Por otra parte, si $g \in PW_\pi$ se tiene que $\overline{g} \in PW_\pi$ ya que

$$\overline{g(t)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{\widehat{g}(-w)}\mathrm{e}^{iwt}dw\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Por tanto,

$$\langle f, \overline{g}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(n)\,, \quad f, g \in PW_\pi\,.$$

Ejercicio 2

Sabemos que si $f \in PW_\pi$, se cumple la representación integral $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\widehat{f}(w)\mathrm{e}^{iwt}dw$, $t \in \mathbb{R}$, que es indefinidamente derivable respecto del parámetro t. En particular, $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} iw\widehat{f}(w)\mathrm{e}^{iwt}dw$, $t \in \mathbb{R}$, de donde se deduce que $\widehat{f'}(w) = iw\widehat{f}(w)$. Aplicando el teorema de Plancherel-Parseval se obtiene que

$$\|f'\|^2 = \|\widehat{f'}\|^2 = \|w\widehat{f}(w)\|^2 \leqslant \pi^2\|\widehat{f}\|^2 = \pi^2\|f\|^2 \quad \text{para todo } f \in PW_\pi\,.$$

Ejercicio 5

Para $t \in \mathbb{R}$ fijo, desarrollamos la función $\cos tx \in L^2[0,\pi]$ en la base ortonormal sugerida. Así,

$$\begin{aligned}
\cos tx &= \langle \cos tx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\rangle\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\langle \cos tx, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx\rangle\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx \\
&= \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2t\operatorname{sen}\pi t}{\pi(t^2-n^2)}\cos nx \quad \text{en } L^2[0,\pi]\,.
\end{aligned}$$

Las funciones del enunciado se pueden escribir como

$$f(t) = \int_0^{\pi} F(x)\cos\, tx\, dx = \langle F, \cos tx\rangle_{L^2[0,\pi]}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Introduciendo el desarrollo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta la continuidad del producto interno respecto a la convergencia en $L^2[0,\pi]$, se obtiene

$$\begin{aligned}
f(t) = \langle F, \cos tx\rangle_{L^2[0,\pi]} &= \langle F, \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}\rangle_{L^2[0,\pi]} + \sum_{n=1}^{\infty}\langle F, \cos nx\rangle_{L^2[0,\pi]}\frac{(-1)^n 2t\operatorname{sen}\pi t}{\pi(t^2-n^2)} \\
&= \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{(-1)^n 2t\operatorname{sen}\pi t}{\pi(t^2-n^2)}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.
\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Sabemos que la fórmula de muestreo de Shannon proviene de un desarrollo en base ortonormal y que las bases ortonormales son incondicionales. Por tanto, el valor de la fórmula de Shannon no depende del orden de sumación en la serie cardinal. Así, para cada $f \in PW_\pi$, se obtiene

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{\operatorname{sen}\pi(t-n)}{\pi(t-n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{\operatorname{sen}\pi t\cos\pi n - \cos\pi t\operatorname{sen}\pi n}{\pi(t-n)} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\frac{(-1)^n\operatorname{sen}\pi t}{\pi(t-n)} = f(0)\frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t} + \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{-1} f(n)\frac{(-1)^n}{t-n} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{(-1)^n}{t-n}\right) \\
&= \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi}\left(\frac{f(0)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} f(-n)\frac{(-1)^{-n}}{t+n} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\frac{(-1)^n}{t-n}\right),
\end{aligned}$$

de donde se obtiene el resultado pedido ya que $(-1)^{-n} = (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Si f es una función par, $f(t) = f(-t)$, y por tanto

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi} \left(\frac{f(0)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{2t(-1)^n}{t^2 - n^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si f es una función impar, $f(t) = -f(-t)$ (en particular $f(0) = 0$ al ser f continua), y por tanto

$$f(t) = \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{2n(-1)^n}{t^2 - n^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 12

La señal analítica $f_a := f + i\widetilde{f}$ asociada a f (véase la sección 7.3) es una función bandalimitada al intervalo $[w_0, w_0 + \pi]$ ya que

$$f_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{w_0}^{w_0+\pi} 2\widehat{f}(w) \mathrm{e}^{iwt} dw, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la función $\mathrm{e}^{-iw_1 t} f_a(t)$, con $w_1 := w_0 + \frac{\pi}{2}$, será bandalimitada al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Aplicando la fórmula de muestreo correspondiente al espacio $PW_{\pi/2}$ se obtiene que

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_a(2n) \mathrm{e}^{iw_1(t-2n)} \frac{\operatorname{sen} \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finalmente, como $f = \operatorname{Re} f_a$, se deduce la siguiente fórmula de muestreo para f:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big\{ f(2n) \cos w_1(t - 2n) - \widetilde{f}(2n) \operatorname{sen} w_1(t - 2n) \big\} \frac{\operatorname{sen} \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particular, para $f \in PW_\pi$ real, como $w_0 = 0$, se cumple que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big\{ f(2n) \cos \frac{\pi}{2}(t - 2n) - \widetilde{f}(2n) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}(t - 2n) \Big\} \frac{\operatorname{sen} \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$