ALGEBRA II

Licenciatura en Ciencias Matemáticas

1. Probar, que el conjunto de matrices de la forma

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a \in \mathbb{R} \right\},$$

es un grupo con el producto usual de matrices. (1.5 puntos)
Solución.
Es uno de los ejemplos desarrollados en las notas.

2. Probar que no existe ningún isomorfismo del grupo $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ en el grupo $(\mathbb{Q}, +)$. (1.5 puntos)
Solución.

Es una parte del problema 29 de nuestro libro de texto.

3. Clasificar todos los grupos de orden 14. (2 puntos)

Solución.

Es el lema 2.14 en el caso en que $p = 7$.

4. Probar que si p es un número primo, el grupo Z_p^* es cíclico. (2 puntos)

Solución.
Es uno de los problemas complementarios incluidos en el tema de subgrupos de Sylow.

5. Sea G un grupo y H un subgrupo normal suyo tal que $Z(H) = \{1\}$ y de tal forma que todo automorfismo de H es interno. Probar que

$$G = H \times C_G(H)$$

(3 puntos).

Solución.

Es una apliacación del lema 2.20.3. Notemos que $H \cap C_G(H) = Z(H) = \{1\}$. Además como H es normal en G, se comprueba que también lo es $C_G(H)$. De esta forma, por 2.20.3, la aplicación

$$f : H \times C_G(H) \to G : (h, c) \longmapsto hc,$$

es un isomorfismo de $H \times C_G(H)$ con su imagen, (que como sabemos es el subgrupo $H \cdot C_G(H)$). Nos falta ver que $\mathrm{Im}(f) = G$. Sea pues g un elemento de G y consideremos el automorfismo

$$a_g : H \to H : x \longmapsto gxg^{-1}.$$

(Puestas así las cosas, a_g es un automorfismo de H, por ser éste normal en G, pero no tiene por qué ser un automorfismo interno a H, pues g es un elemento arbitrario de G, que puede nopertenecer a H). Ahora bien, por la hipótesis del enunciado, como todo automorfismo de H ha de ser interno, existirá $h \in H$, de tal forma que $a_g = a_h$ sobre H, esto es

$$gxg^{-1} = hxh^{-1}, \ \forall x \in H,$$

lo que implica que $h^{-1}gx = xh^{-1}g$, esto es, $h^{-1}g \in C_G(H)$. Así, es claro que

$$f(h, h^{-1}g) = g,$$

con lo que f es epiyectiva y se concluye.