Sean A, B y C sucesos. Hallar el conjunto que representa a los sucesos definidos por:

1. $D_1 = \{$alguno de los sucesos A o B, ocurre$\}$

2. $D_2 = \{$al menos dos de los sucesos A, B o C, ocurren$\}$

3. $D_3 = \{$ninguno de los sucesos A o B ocurre$\}$

4. $D_4 = \{$exactamente uno de los sucesos A, B, C, ocurre$\}$

5. $D_5 = \{A$ y B ocurren, pero C no$\}$

Sean A, B y C sucesos. Hallar el conjunto que representa a los sucesos definidos por:

1. $D_1 = \{$alguno de los sucesos A o B, ocurre$\}$

2. $D_2 = \{$al menos dos de los sucesos A, B o C, ocurren$\}$

3. $D_3 = \{$ninguno de los sucesos A o B ocurre$\}$

4. $D_4 = \{$exactamente uno de los sucesos A, B, C, ocurre$\}$

5. $D_5 = \{A$ y B ocurren, pero C no$\}$

1. $D_1 = A \cup B$.

2. D_2 es el suceso "A y B ocurren, o A y C ocurren, o B y C ocurren", y se representa por:

$$D_2 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \tag{1.1}$$

El conjunto que representa a cada suceso es único, pero puede ser expresado de diferentes maneras. En el caso de D_2 podemos dar otra expresión, ya que "al menos dos de los sucesos A, B o C ocurren" significa que ocurren *exactamente* dos de los sucesos o que ocurren los tres. Por ello, también se tiene:

$$D_2 = (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C) \tag{1.2}$$

con la ventaja de que en 1.2, D_2 se descompone en conjuntos disjuntos.

Sean A, B y C sucesos. Hallar el conjunto que representa a los sucesos definidos por:

1. $D_1 = \{$alguno de los sucesos A o B, ocurre$\}$

2. $D_2 = \{$al menos dos de los sucesos A, B o C, ocurren$\}$

3. $D_3 = \{$ninguno de los sucesos A o B ocurre$\}$

4. $D_4 = \{$exactamente uno de los sucesos A, B, C, ocurre$\}$

5. $D_5 = \{A$ y B ocurren, pero C no$\}$

3. Para que ninguno de los sucesos A o B ocurran, no tiene que ocurrir A y no tiene que ocurrir B, lo que implica:

$$D_3 = A^c \cap B^c$$

Otra forma equivalente es $(A \cup B)^c$.

4. Es semejante al apartado 2.

$$D_4 = (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C)$$

Los conjuntos de la descomposición son disjuntos.

5. También es semejante al apartado 2.

$$D_5 = A \cap B \cap C^c$$

Si A y B son dos sucesos de cierto espacio de posibilidades, expresar en términos de $P(A)$, $P(B)$, y $P(A \cap B)$, las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. $A^c \cup B^c$

2. $A^c \cap B^c$

3. $A^c \cup B$

4. $A^c \cap B$

5. $A \cup (A^c \cap B)$

Si A y B son dos sucesos de cierto espacio de posibilidades, expresar en términos de $P(A)$, $P(B)$, y $P(A \cap B)$, las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. $A^c \cup B^c$

2. $A^c \cap B^c$

3. $A^c \cup B$

4. $A^c \cap B$

5. $A \cup (A^c \cap B)$

1. Sabemos que $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$; por la propiedad 1, se verifica:

$$P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B)$$

2. *Idem*:

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) &= 1 - P(A \cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) \end{aligned}$$

Si A y B son dos sucesos de cierto espacio de posibilidades, expresar en términos de $P(A)$, $P(B)$, y $P(A \cap B)$, las probabilidades de los siguientes sucesos:

1. $A^c \cup B^c$

2. $A^c \cap B^c$

3. $A^c \cup B$

4. $A^c \cap B$

5. $A \cup (A^c \cap B)$

3. Por la propiedad 4, se tiene:

$$P(A^c \cup B) = P(A^c) + P(B) - P(A^c \cap B)$$

Ahora, por la propiedad 1, $P(A^c) = 1 - P(A)$ y, por la propiedad 2,

$$P(A^c \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

Así, resulta:

$$P(A^c \cup B) = 1 - P(A) + P(A \cap B)$$

4. Por la propiedad 2,

$$P(A^c \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

5. Puesto que $A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$, resulta:

$$P(A \cup (A^c \cap B)) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Consideremos el experimento aleatorio de elegir al azar un número de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ y los sucesos:

A="El número elegido es múltiplo de 2"
B=" El número elegido es menor que 10"
C=" El número elegido es primo"
D=" El número elegido es múltiplo de 3"

Describir el espacio muestral y expresar como subconjuntos de él los sucesos:

$A \cap \overline{B}$

$B \cap C$

$A \cap D$

$A \cup D$

$\overline{A} \cup \overline{D} \cup \overline{C}$

$C \cap \overline{D}$

Un número es elegido al azar de la recta real $\mathbb{R}$. Sean A, B, C los sucesos asociados con el experimento representados por:

$A = [3,8]$

$B = (7,10]$

$C = [0,+\infty)$

Describir el espacio muestral y expresar como subconjuntos de él los siguientes sucesos:

$\overline{B}$

$A \cup B$

$B \cap C$

$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

$(A \cup B) \cap \overline{C}$

$\overline{A} \cap B$

$A \cap \overline{B}$

1. Un experimento consiste en preguntarle a 3 personas elegidas al azar si lavan sus platos con el detergente marca X.

a) Enumerar los elementos del espacio muestral Ω utilizando la letra s para las respuestas afirmativas y n para las negativas.

b) Escribir los elementos de Ω que corresponden al suceso $A =$ "al menos una de las personas utilizan la marca X".

c) Definir (describir) un suceso que tenga como elementos los puntos $\{sss, nss, ssn, sns\}$.

1. Un experimento consiste en preguntarle a 3 personas elegidas al azar si lavan sus platos con el detergente marca X.

a) Enumerar los elementos del espacio muestral Ω utilizando la letra s para las respuestas afirmativas y n para las negativas.

b) Escribir los elementos de Ω que corresponden al suceso $A =$ "al menos una de las personas utilizan la marca X".

[1] Sol.: a) $\{sss, ssn, sns, nss, nns, nsn, snn, nnn\}$, b) $A = \{sss, ssn, sns, nss, nns, nsn, snn\}$, c) Al menos dos personas utilizan el detergente X.

3. El director de unos almacenes ha supervisado el número de quejas recibidas a la semana por un servicio deficiente. Las probabilidades correspondientes al número de quejas por semana encontradas en la revisión se muestran en la tabla.

0	0.14
1 - 3	0.39
4 - 6	0.23
7 - 9	0.15
10 - 12	0.06
más de 12	0.03

Sean A el suceso "se recibirá al menos una queja por semana", y B "se recibirán menos de 10 quejas por semana".

a) Calcular la probabilidad del suceso A.

b) Calcular la probabilidad del suceso B.

c) Describir el complementario del suceso A.

d) Calcular la probabilidad del complementario del suceso A.

e) Describir el suceso intersección de los sucesos A y B.

f) Calcular la probabilidad del suceso intersección de A y B.

g) Describir el suceso unión de los sucesos A y B.

h) Calcular la probabilidad de la unión de los sucesos A y B.

i) ¿ Son los sucesos A y B mutuamente excluyentes?

j) ¿ Forman los sucesos A y B un sistema completo de sucesos?

[3] Sol.: a) 0.86, b) 0.91, d) 0.14, f) 0.77, h) 1, i) No, j) No.

8. Calcular la probabilidad de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ conocidas $P(A) = a$, $P(B) = b$ y $P(A \cup B) = c$.

9. Calcular la probabilidad de $P(A \cap \bar{B})$ conocidas $P(A) = a$, $P(B) = b$ y $P(A \cup B) = c$.

8. Calcular la probabilidad de $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ conocidas $P(A) = a$, $P(B) = b$ y $P(A \cup B) = c$.

9. Calcular la probabilidad de $P(A \cap \bar{B})$ conocidas $P(A) = a$, $P(B) = b$ y $P(A \cup B) = c$.

[8] Sol.: 1-c
[9] Sol.: c-b

10. Sean A, B y C tres sucesos de un mismo experimento. Consideremos los sucesos:

$$S_1 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C \quad \text{y} \quad S_2 = (A \cup B) \cap C$$

Demostrar que:

a) S_1 y S_2 son dos sucesos mutuamente excluyentes.

b) Calcular la probabilidad de S_1 y S_2 sabiendo que

$$P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.6, \quad P(C) = 0.7, \quad P(A \cap B) = 0.3$$

$$P(A \cap C) = 0.2, \quad P(B \cap C) = 0.1, \quad P(A \cap B \cap C) = 0.05$$

11. Dados tres sucesos cualesquiera A, B y C demostrar que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

10. Sean A, B y C tres sucesos de un mismo experimento. Consideremos los sucesos:

$$S_1 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C \quad \text{y} \quad S_2 = (A \cup B) \cap C$$

Demostrar que:

a) S_1 y S_2 son dos sucesos mutuamente excluyentes.

b) Calcular la probabilidad de S_1 y S_2 sabiendo que

$$P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.6, \quad P(C) = 0.7, \quad P(A \cap B) = 0.3$$

$$P(A \cap C) = 0.2, \quad P(B \cap C) = 0.1, \quad P(A \cap B \cap C) = 0.05$$

[10] Sol.: b) $P(S_1) = 0.45$, $P(S_2) = 0.25$

11. Dados tres sucesos cualesquiera A, B y C demostrar que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Problema 8. N tiradores disponen de k cartuchos cada uno y disparan independientemente. Las probabilidades de hacer diana son p_i $(i = 1, \ldots, N)$ y cada uno deja de disparar cuando consigue hacer diana. Determinar

a) La probabilidad de que por lo menos un tirador no agote su munición.

b) La probabilidad de que ningún tirador agote su munición.

c) La probabilidad de algún tirador sea el único que agote su munición.

Problema 8. N tiradores disponen de k cartuchos cada uno y disparan independientemente. Las probabilidades de hacer diana son p_i $(i = 1, \ldots, N)$ y cada uno deja de disparar cuando consigue hacer diana. Determinar

a) La probabilidad de que por lo menos un tirador no agote su munición.

b) La probabilidad de que ningún tirador agote su munición.

c) La probabilidad de algún tirador sea el único que agote su munición.

a) La probabilidad de que el tirador i consuma toda su munición es

$$P(A_i) = (1 - p_i)^{k-1}$$

ya que, para ello, debe fallar con los $k - 1$ primeros cartuchos.

Puesto que cada tirador se comporta independientemente de los demás, la probabilidad de que los N agoten su munición es

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) = \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i)^{k-1}$$

Y la probabilidad de que alguno no agote sus cartuchos resulta entonces

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i^c\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{N} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{N} (1 - p_i)^{k-1}$$

Problema 8. N tiradores disponen de k cartuchos cada uno y disparan independientemente. Las probabilidades de hacer diana son p_i $(i = 1, \ldots, N)$ y cada uno deja de disparar cuando consigue hacer diana. Determinar

a) La probabilidad de que por lo menos un tirador no agote su munición.

b) La probabilidad de que ningún tirador agote su munición.

c) La probabilidad de algún tirador sea el único que agote su munición.

b) El tirador i no agota su munición con probabilidad

$$\mathrm{P}(A_i^c) = 1 - (1 - p_i)^{k-1}$$

Como se comportan independientemente, la probabilidad de que ninguno agote su munición es

$$\mathrm{P}(\bigcap_{i=1}^{N} A_i^c) = \prod_{i=1}^{N} \left[1 - (1 - p_i)^{k-1}\right]$$

c) La probabilidad de que i agote su munición y los demás no, es

$$\mathrm{P}(A_i \cap \left(\cap_{j\neq i} A_j^c\right)) = (1 - p_i)^{k-1} \prod_{j\neq i} \left[1 - (1 - p_i)^{k-1}\right]$$

La probabilidad de que algún tirador agote su munición, mientras el resto conserva algún cartucho, resulta

$$\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{N} \left[A_i \cap \left(\cap_{j\neq i} A_j^c\right)\right]) = \sum_{i=1}^{N} (1 - p_i)^{k-1} \prod_{j\neq i} \left[1 - (1 - p_j)^{k-1}\right]$$