Solución Prueba Presencial 1^a semana

30 de junio de 2015

1. Hallar la ecuación de un plano tangente a la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ descrita por la ecuación

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$$

en el punto $P = (1, 1, 1)$. Hallar una recta tangente a la curva $C \subset \mathbb{R}^2$ descrita por las ecuaciones $x^2 + 2y^2 = 3, z = 0$.

Solución: La ecuación que describe a S puede verse como una superficie de nivel de una función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Un vector perpendicular a esta superficie de nivel en unn punto se tiene calculando el gradiente de la función en el punto.

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 \Rightarrow \nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 6z) \Rightarrow \nabla f(1, 1, 1) = (2, 4, 6)$$

de esta forma el plano tangente a S en el punto P tiene euación $2x + 4y + 6z = k$ y para determinar k imponemos que el punto P pertenece al plano. Se tiene como ecuación

$$x + 2y + 3z = 6$$

La curva C es la proyección sobre el plano $z = 0$ de la curva que resulta al intersecar S con el plano $z = 1$. La recta tangente a esta curva es

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ z = 1 \end{cases}$$

y una recta tangente a C se teiene proyectando la recta anterior

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

2. Sea $f = f(x, y)$ una función diferenciable. Donde $x = e^s \cos t$, $y = e^s \operatorname{sen} t$. Calcular la matriz Hessiana $H(f)(s, t)$.

Solución: Tenemos $u = f(x, y), x = x(s, t), y = y(s, t)$. Haciendo las primeras derivadas tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f_x \frac{\partial x}{\partial t} + f_y \frac{\partial y}{\partial t}$$

donde utilizamos la notación $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$. Ahora derivando de nuevo, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} &= f_{xx} \left[\frac{\partial x}{\partial s}\right]^2 + 2 f_{xy} \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial s} + f_{yy} \left[\frac{\partial y}{\partial s}\right]^2 + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= f_{xx} \left[\frac{\partial x}{\partial t}\right]^2 + 2 f_{xy} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial t} + f_{yy} \left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]^2 + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial t} &= f_{xx} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + f_{yx} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} + f_{xy} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + f_{yy} \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} + f_x \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} + f_y \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s}
\end{aligned}$$

Ahora, en este ejercicio tenemos $x = e^s \cos t$ y $y = e^s \operatorname{sen} t$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial s} &= e^s \cos t \quad \to \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = e^s \cos t \\
\frac{\partial y}{\partial s} &= e^s \operatorname{sen} t \quad \to \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = e^s \operatorname{sen} t \\
\frac{\partial x}{\partial t} &= -e^s \operatorname{sen} t \quad \to \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -e^s \cos t \to \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} = -e^s \operatorname{sen} t \\
\frac{\partial y}{\partial t} &= e^s \cos t \quad \to \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -e^s \operatorname{sen} t \to \frac{\partial^2 y}{\partial s \partial t} = e^s \cos t
\end{aligned}$$

y la matriz hessiana

$$Hf(s,t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} & \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} &= f_{xx} e^{2s} \cos^2 t + 2 f_{xy} e^{2s} \cos t \operatorname{sen} t + f_{yy} e^{2s} \operatorname{sen}^2 t + f_x e^s \cos t + f_y e^s \operatorname{sen} t \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} &= -f_{xx} e^{2s} \cos^2 t - 2 f_{xy} e^{2s} \cos t \operatorname{sen} t - f_{yy} e^{2s} \operatorname{sen}^2 t - f_x e^s \cos t - f_y e^s \operatorname{sen} t \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} &= -f_{xx} e^{2s} \operatorname{sen} t \cos t + f_{xy} e^{2s} \cos^2 t - f_{xy} e^{2} \operatorname{sen}^2 t + f_{yy} e^{2s} \operatorname{sen} t \cos t - f_x e^{2s} \operatorname{sen}^2 t + f_y e^{2s} \cos^2 t
\end{aligned}$$

3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x,y) = (x^2 - 3y, yx, 2x - \ln(1 + y^2))$$

Hallar $D(f)(0,0)$. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función de clase C^1, $g(1,2) = (0,0)$ y

$$D(g)(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Encontrar $D(f \circ g)(1,2)$.

Solución: Tenemos la composición de funciones

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3$$

$$(1,2) \longrightarrow (0,0) \longrightarrow f(0,0)$$

y las matrices jacobianas son

$$Dg(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -3 \\ y & x \\ 2 & -\frac{2y}{1+y^2} \end{pmatrix} \Rightarrow Df(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

y entonces

$$D(f \circ g)(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -12 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Sea la función

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- Estudiar la continuidad de f en $(0,0)$.
- Hallar $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,y)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0)$.
- ¿Es f diferenciable en $(0,0)$?

Solución: Para la continuidad podemos considerar coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^2(cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) = 0$$

ya que tenemos el producto de una función acotada por otra que tience a cero, por lo tanto f es continua en $(0,0)$.

Derivando parcialmente par $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2x\frac{xy}{x^2+y^2} - y\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= -2y\frac{xy}{x^2+y^2} + x\frac{(y^2-x^2)^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) &= -y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,y) &= 0 \end{aligned}$$

Calculamos las parciales en $(0,0)$ para estudiar la diferenciabilidad

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{0}{h} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \frac{0}{k} = 0 \end{aligned}$$

entonces

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-(0,0)\cdot(h,k)-f(0,0)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk\dfrac{h^2-k^2}{h^2+k^2} - 0 - 0}{(h^2+k^2)^{1/2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk(h^2-k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} = 0$$

donde el último paso se puede ver con coordenadas polares. Por lo tanto la función es diferenciable.