Introducción a las Ecuaciones Diferenciales / 1ª semana. / Enero de 2019

Alumno...

Nota.- Simplificar al máximo la respuesta y remarcarla claramente (en un recuadro). Escribir también la solución (excepto las demostraciones) en los recuadros de esta hoja, que se debe entregar junto con el ejercicio.

1º) a) Integrar la ecuación diferencial

$((-y)sen(xy))dx + (\frac{1}{2y}\cos(xy) + (-x)sen(xy))dy = 0 \qquad (y \neq 0)$

mediante la determinación de un factor integrante. (Se debe dar la respuesta en la forma $F(x,y) = k$, y decir cuál es el factor integrante que se considera). Decir tambien si es posible o no definir la función F en todo el conjunto abierto $A = \{(x,y) \in R^2 / y \neq 0\}$

b) Hallar, expresando y como función de x, la solución general de la ecuación diferencial

$2y^2 + 2yy' = 2x^2 + 4x - 39$

Hallar también el máximo intervalo abierto en el que está definida la solución cuya gráfica pasa por el punto $(20, 20)$.

2º) a) Hallar, expresando y como función de x, todas las soluciones de la siguiente ecuación diferencial, indicando cuál es el máximo conjunto abierto I en el que está definida cada solución.-

$(y')^2 + y^2 = 1.$

---

b) Hallar una función real $f(x)$, definida y derivable para $x < 0$, verificando que $f(-2) = 4$; y que, en cada punto $P(x, f(x))$ de su gráfica $(x < 0)$, la tangente no es horizontal, y la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto P y el eje horizontal $y = 0$ coincide con la distancia del punto P al origen de coordenadas. Se deben hallar todas las soluciones posibles, si las hay.

3º) Supongamos que (f_n) es una sucesión equicontinua de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Se pide:

a) Poner un ejemplo en que la sucesión (f_n) sea uniformemente equicontinua (en toda la recta real), y otro ejemplo en que no lo sea. (Justificar las respuestas). (Si alguno de estos casos no pudiera darse, indicar por qué).

b) Decir si es cierto o no, demostrando la respuesta, que la segunda sucesión dada (en el apartado anterior) es siempre uniformemente equicontinua en el intervalo compacto $I = [4, 5]$. (Es consecuencia de un teorema general, pero se pide probarlo. Sólo se pide hacer la demostración para el caso concreto del segundo ejemplo del apartado anterior, de una sucesión equicontinua de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ que no es uniformemente equicontinua. Si no se supo poner un ejemplo concreto en el apartado anterior, entonces probarlo en general, para el intervalo compacto dado, si es posible. Si el resultado no fuera cierto, decir por qué.)

Resumen de respuestas.-

1º) a) Un cálculo muestra que la ecuación dada admite un factor integrante que depende sólo de y.

Si $y > 0$, un factor integrante puede ser $\mu = \sqrt{y}$; para este factor la integral general es $\sqrt{y}\cos(xy) = k$, siendo k una constante.

Si $y < 0$, un factor integrante puede ser $\mu = \sqrt{-y}$; para este factor la integral general es $\sqrt{-y}\cos(xy) = d$, siendo d una constante.

La función $F(x,y) = \sqrt{|y|}\cos(xy) = \begin{cases} \sqrt{y}\cos(xy), \text{ si } y > 0 \\ \sqrt{-y}\cos(xy), \text{ si } y < 0 \end{cases}$ está definida, y admite derivadas parciales, en todo el conjunto abierto $A = \{(x,y) \in R^2 / y \neq 0\}$.

b) Las soluciones son, para cualquier constante real A, las funciones
$y = \sqrt{Ae^{-2x} + x^2 + x - 20}$, $y = -\sqrt{Ae^{-2x} + x^2 + x - 20}$,
funciones ambas definidas y derivables para $Ae^{-2x} + x^2 + x - 20 > 0$.

La solución cuya gráfica pasa por el punto $(20,20)$ es $y = \sqrt{x^2 + x - 20}$, función definida en el intervalo abierto $I = \{x > 4\} = \{x \in \mathbb{R}/x > 4\} =]4.\rightarrow[$.

(Nótese que
$x^2 + x - 20 = x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 20 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{81}{4} > 0 \Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 > \frac{81}{4} = (\frac{9}{2})^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} > \frac{9}{2}$ o $-x - \frac{1}{2} > \frac{9}{2} \Leftrightarrow x > 4$ o $x < -5 \Leftrightarrow x \in]\leftarrow, -5[\cup]4.\rightarrow[$.

El conjunto abierto $]\leftarrow, -5[\cup]4.\rightarrow[$ no es un intervalo. El máximo intervalo abierto, contenido en este conjunto, al que pertenece el número 20, es $]4.\rightarrow[$.)

2º)a) Las soluciones son:

— La función constante $y = 1$, definida en $I = \mathbb{R}$.

— La función constante $y = -1$, definida en $I = \mathbb{R}$.

— Para cualquier constante real C, la función $y = sen(x + C)$, definida en $I = \mathbb{R}$.

Nótese que, dado un número real B, la función $y = -sen(x + B)$ es una de las anteriores, pues $-sen(x + B) = sen(x + B + \pi)$.

Nótese también que, dado un número real B, la función $y = \cos(x + B)$ es una de las anteriores, pues $\cos(x + B) = sen(x + B + \frac{\pi}{2})$.

2º)b) Las soluciones, ambas definidas y derivables para $x < 0$ tal como nos piden, son las funciones $y = -2x$, $y = -\frac{8}{x}$.

Nótese que la primera puede extenderse a toda la recta real $I = \mathbb{R}$, y tiene como gráfica una recta, mientras que la gráfica de la segunda es una rama de parábola.

(Conviene hacer sendos dibujos para interpretarlo gráficamente).

3º) a) Es inmediato comprobar que, si ponemos por ejemplo $f_n(x) = x + n$, $g_n(x) = x^2 + n$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $n \in \mathbb{N}$, entonces las sucesiones de funciones (f_n) y (g_n) son ambas equicontinuas, (f_n) es uniformemente equicontinua, y (g_n) no es uniformemente equicontinua.

(Se pueden poner muchos más ejemplos).

b) De acuerdo con lo que indica el enunciado, puede resolverse aplicando a este caso una demostración muy similar a la del Teorema 4.1.1 (páginas 328-329 del libro).