Pregunta 1 (2 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y $x, y \in \mathcal{H}$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$.

a) Demuestre que $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq 1$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Demuestre que si en la desigualdad de a) se tiene la igualdad, $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| = 1$, entonces $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o $x = y$.

Pregunta 2 (2,5 puntos) (1+1,5)
Considere en el espacio de Hilbert $L^2(0, 2\pi)$ el conjunto,

$$V = \left\{ f \in L^2(0, 2\pi) \ : \ \int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \right\}.$$

a) Demuestre que V es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(0, 2\pi)$.
b) Determine la función f de V que está a distancia mínima de g siendo $g(t) = 3\cos^2(5t)$ si $t \in (0, 2\pi)$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T\colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado. Demuestre que

a) $\mathrm{Ker}(T^*) = \mathrm{Im}(T)^\perp$.

b) $\mathrm{Im}(T^*) \subset \mathrm{Ker}(T)^\perp$.

Pregunta 4 (3 puntos) (1+0,5+ 1,5)
Sea la función 2π periódica g tal que $g(x) = \dfrac{x}{2}$ para todo $-\pi < x \leq \pi$.

a) Determine su serie de Fourier en términos de senos y cosenos.

b) Justifique la igualdad $\dfrac{x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} nx$ para todo $-\pi < x < \pi$.

c) Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.