Examen de Topología

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros. (Tiempo 2 horas)

1.- En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define la familia T de $\mathbb{R}$ como:
$T = \{\mathbb{R}\} \cup P(\mathbb{R} - M)$ (donde $P(\mathbb{R} - M)$ es el conjunto de partes de $\mathbb{R} - M$) y
$$M = (1,3).$$
a) Probar que $(\mathbb{R}, T)$ es un espacio topológíco.
b) Describir una base de entornos de 2 y una base de entornos de 0 en $(\mathbb{R}, T)$.
c) Estudiar si alguno de los dos puntos 0 y 2 tienen una base de entornos cerrados.
(3,5 puntos)

Solución
Problema 1.4 del libro Problemas de Topología

2.- Sea (X,T) un espacio topológico T_2 y A un subconjunto compacto de X. Probar que el conjunto de puntos de acumulación A'de A es también compacto. (3 puntos)

Solución
Se tiene que $A \cup A' = \overline{A} = A$, puesto que A es es un conjunto compacto en un espacio T_2, luego es un conjunto cerrado. Por lo tanto $A' \subset A$.
Veamos ahora que A' es cerrado, ya que entonces al estar contenido en un compacto sería compacto. Para ello veremos que si suponemos que A' no es cerrado llegaremos a una contradicción.
Supongamos que existe un $x \in \overline{A'}$ que no pertenece a $A' \Rightarrow$ que para todo entorno de x, V^x se tiene que $V^x \cap A' \neq \emptyset$, como $x \notin A'$ se tiene que $V^x - \{x\} \cap A' \neq \emptyset$, y como $V^x - \{x\} \cap A' \subset V^x - \{x\} \cap A \Rightarrow V^x - \{x\} \cap A \neq \emptyset$, luego $x \in A'$, lo que contradice las hipótesis.

3.- Sean A y B dos conjuntos cerrados de un espacio (X,T) tales que $A \cup B = X$. Si $f : (X,T) \to (Y,S)$ es una aplicación tal que las restricciones $f|_A$, $f|_B$ a los subespacios (A, T_A) y (B, T_B) son continuas, demostrar que la aplicación f es continua. (3,5 puntos)

Solución
Ejercicio 5 de autocomprobacíon de la unidad didáctica 2 del libro de teoría.