Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideraremos el siguiente problema no lineal

$$(x - \varepsilon y)y' + (x - 1)\, y - 1 = 0, \qquad y(1) = 1/2$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (3 puntos).**
    Aplique el método propuesto en el ejercicio anterior y calcule los 2 primeros términos del desarrollo correspondiente.

- Segunda parte: **Problema 6 (4 puntos).**

  Calcule por medio del método de Matched Asymptotic Expansions un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$ a la solución del problema

$$2\varepsilon y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(-1) = 0, \qquad y(1) = 1$$

  indicando la localización y de las posibles regiones de variación rápida presentes en el problema, así como el orden de magnitud de su tamaño en función del parámetro ε.

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

$$4\varepsilon^2 y'' + \varepsilon\,(1+x)\,y' - y = -e^{(1+x)/2}$$

$$y(-1) = 2, \qquad y(+1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (2 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 3 (4 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

- Segunda parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones iniciales

$$y'' + 4y = \varepsilon y^3, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 4 (1 punto).**
    Explique de manera razonada qué fuentes de no uniformidad existen en este problema.
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule una aproximación uniformemente válida a la solución de este problema por medio del método de Strained Parameters hasta orden 1, es decir, por medio de un desarrollo del tipo $y = y_0 + \varepsilon y_1$.

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones iniciales

  $$y'' + y = \varepsilon \left(1 - y^2\right) y', \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (2.5 puntos).**
    Calcule el término dominante de un desarrollo perturbativo válido a tiempos largos basado en escalas múltiples, empleando para ello dos escalas.

- Segunda parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

  $$\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon)\, y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 5 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 6 (1 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 7 (3 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones iniciales

  $$y'' + y + \varepsilon y^3 = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule el término dominante de un desarrollo perturbativo válido a tiempos largos basado en escalas múltiples, empleando para ello dos escalas.

- Segunda parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

  $$\varepsilon y'' + x^2 y' - y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 6 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 7 (1 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 8 (3 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones iniciales

$$y'' + y = \varepsilon \left(1 - y^2\right) y', \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (2.5 puntos).**
    Calcule el término dominante de un desarrollo perturbativo válido a tiempos largos basado en escalas múltiples, empleando para ello dos escalas.

- Segunda parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

$$\varepsilon y'' + (1 + \varepsilon)\, y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 5 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 6 (1 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 7 (3 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones iniciales

$$y'' + \varepsilon (y')^3 + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule el término dominante de un desarrollo perturbativo válido a tiempos largos basado en escalas múltiples, empleando para ello dos escalas.

- Segunda parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones de contorno

$$\varepsilon y'' + y\,(y' + 3) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 6 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 7 (1 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 8 (3 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones iniciales

$$\varepsilon y'' + \left(1 + \varepsilon^2 y\right) y' + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule el término dominante de un desarrollo perturbativo válido a tiempos largos basado en escalas múltiples, empleando para ello dos escalas.

- Segunda parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones de contorno

$$\varepsilon y'' + e^x y' + \varepsilon y = 1, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 5 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 6 (1 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 7 (3 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones iniciales

  $$y'' + \varepsilon (y')^3 + y = 0, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule el término dominante de un desarrollo perturbativo válido a tiempos largos basado en escalas múltiples, empleando para ello dos escalas.

- Segunda parte (5 puntos):

  Consideremos el siguiente problema no lineal de condiciones de contorno

  $$\varepsilon y'' + y\,(y' + 3) = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y(1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 5 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 6 (1 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 7 (3 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideraremos el siguiente problema no lineal

$$(x - \varepsilon y)y' + (x-1)\,y - 1 = 0, \qquad y(1) = 2$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (3 puntos).**
    Aplique el método propuesto en el ejercicio anterior y calcule los 2 primeros términos del desarrollo correspondiente.

- Segunda parte: **Problema 6 (4 puntos).**

  Calcule por medio del método de Matched Asymptotic Expansions un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$ a la solución del problema

$$2\varepsilon y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(-1) = 0, \qquad y(1) = 2$$

  indicando la localización y de las posibles regiones de variación rápida presentes en el problema, así como el orden de magnitud de su tamaño en función del parámetro ε.

Examen Presencial (10 puntos)

Consideramos el problema

$$\varepsilon^2 y''' - y' + xy = 0, \qquad \text{donde} \qquad \varepsilon \ll 1$$

$$y(0) = y'(0) = y(1) = 1$$

1. **(2 puntos)** Muestre qué zona o zonas de variación rápida (también llamadas capa límite o boundary layer) aparecen en este problema en el límite $\varepsilon \ll 1$ y explique a qué se debe este fenómeno.

2. **(2 puntos)** ¿Cómo varía el espesor de estas regiones con el parámetro ε? ¿Qué cambio de variable debemos emplear para describir cada una de estas regiones?

3. **(1 punto)** Calcule la solución aproximada de este problema válida fuera de las posibles regiones de variación rápida (es decir, la solución exterior), basada en un desarrollo perturbativo con 2 términos $(y(x) \simeq y_0(x) + \varepsilon y_1(x))$.

4. **(2 puntos)** Calcule la solución aproximada de este problema válida en cada una de las posibles regiones de variación rápida (es decir, la solución interior), basada en un desarrollo perturbativo con 2 términos $(y(x) \simeq y_0(x) + \varepsilon y_1(x))$.

5. **(3 puntos)** Construya la solución aproximada de este problema uniformemente válida en todo el intervalo $x \in [0, 1]$ por medio del matching de los desarrollos calculados en los dos últimos apartados

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

$$4\varepsilon^2 y'' + \varepsilon\,(1+x)\,y' - y = -e^{(1+x)/2}$$

$$y(-1) = 2, \qquad y(+1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (2 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 3 (4 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

- Segunda parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones iniciales

$$y'' + 4y = \varepsilon y^3, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 4 (1 punto).**
    Explique de manera razonada qué fuentes de no uniformidad existen en este problema.
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule una aproximación uniformemente válida a la solución de este problema por medio del método de Strained Parameters hasta orden 1, es decir, por medio de un desarrollo del tipo $y = y_0 + \varepsilon y_1$.

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideraremos el siguiente problema no lineal

  $$(x - \varepsilon y)y' + (x-1)\,y - 1 = 0, \qquad y(1) = 2$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (3 puntos).**
    Aplique el método propuesto en el ejercicio anterior y calcule los 2 primeros términos del desarrollo correspondiente.

- Segunda parte: **Problema 6 (4 puntos).**

  Calcule por medio del método de Matched Asymptotic Expansions un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$ a la solución del problema

  $$2\varepsilon y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(-1) = 0, \qquad y(1) = 2$$

  indicando la localización y de las posibles regiones de variación rápida presentes en el problema, así como el orden de magnitud de su tamaño en función del parámetro ε.

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

$$4\varepsilon^2 y'' - \varepsilon\,(1-x)\,y' - y = -e^{(1-x)/2}$$

$$y(-1) = 1/3, \qquad y(+1) = 2$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (2 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 3 (4 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada de este problema dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

- Segunda parte: **Problema 4 (3 puntos).**

  Explique de manera razonada en qué casos es más ventajoso emplear el método de Matched Asymptotic Expansions y en qué casos es más ventajoso emplear el método de Lighthill.
  ¿Qué tipo de no uniformidad resuelve cada método?

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

$$4\varepsilon^2 y'' + \varepsilon\,(1+x)\,y' - y = -e^{(1+x)/2}$$

$$y(-1) = 3, \qquad y(+1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (2 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 3 (4 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

- Segunda parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones iniciales

$$y'' + 4y = \varepsilon y^3, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 4 (1 punto).**
    Explique de manera razonada qué fuentes de no uniformidad existen en este problema.
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule una aproximación uniformemente válida a la solución de este problema por medio del método de Strained Parameters hasta orden 1, es decir, por medio de un desarrollo del tipo $y = y_0 + \varepsilon y_1$.

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideraremos el siguiente problema no lineal

$$(x - \varepsilon y)y' + (x - 1)\, y - 1 = 0, \qquad y(1) = 1/2$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (0.5 puntos).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (1 punto).**
    Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$.
  - **Problema 3 (1 punto).**
    Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.
  - **Problema 4 (0.5 puntos).**
    ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?
  - **Problema 5 (3 puntos).**
    Aplique el método propuesto en el ejercicio anterior y calcule los 2 primeros términos del desarrollo correspondiente.

- Segunda parte: **Problema 6 (4 puntos).**

  Calcule por medio del método de Matched Asymptotic Expansions un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$ a la solución del problema

$$2\varepsilon y'' + 2y' + y = 0, \qquad y(-1) = 0, \qquad y(1) = 1$$

  indicando la localización y de las posibles regiones de variación rápida presentes en el problema, así como el orden de magnitud de su tamaño en función del parámetro ε.

Examen Presencial (10 puntos)

- Primera parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones de contorno

$$4\varepsilon^2 y'' + \varepsilon\,(1+x)\,y' - y = -e^{(1+x)/2}$$

$$y(-1) = 3, \qquad y(+1) = 1$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 1 (1 punto).**
    Explique de manera razonada las fuentes de no uniformidad presentes en este problema.
  - **Problema 2 (2 puntos).**
    Explique qué zona (o zonas) de variación rápida existen en este problema, indicando su localización y el orden de magnitud de su anchura en función del parámetro ε.
  - **Problema 3 (4 puntos).**
    A partir de los resultados del ejercicio anterior calcule por el método de Matched Asymptotic Expansions una solución aproximada uniformemente válida, dada por un desarrollo perturbativo de primer orden (dos términos).

- Segunda parte:

  Consideremos el siguiente problema de condiciones iniciales

$$y'' + 4y = \varepsilon y^3, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0$$

  con $\varepsilon \ll 1$.

  - **Problema 4 (1 punto).**
    Explique de manera razonada qué fuentes de no uniformidad existen en este problema.
  - **Problema 5 (2 puntos).**
    Calcule una aproximación uniformemente válida a la solución de este problema por medio del método de Strained Parameters hasta orden 1, es decir, por medio de un desarrollo del tipo $y = y_0 + \varepsilon y_1$.

Examen Presencial (10 puntos)

En este examen consideraremos el siguiente problema

$$\varepsilon y'' + y' + y = 2x$$

$$y(0) = \alpha, \qquad y(1) = \beta$$

- **Problema 1 (1.5 puntos).**

  Muestre qué zona o zonas de variación rápida (también llamadas capa límite o boundary layer) aparecen en este problema en el límite $\varepsilon \ll 1$.

- **Problema 2 (1 punto).**

  ¿A qué se debe este fenómeno?

- **Problema 3 (1 punto).**

  ¿Cómo varía el espesor de estas regiones con el parámetro ε?

- **Problema 4 (1.5 puntos).**

  ¿Qué cambio de variable debemos emplear para describir cada una de estas regiones?

- **Problema 5 (1.5 puntos).**

  Calcule el desarrollo perturbativo de segundo orden (3 términos) *exterior*.

- **Problema 6 (1.5 puntos).**

  Calcule el desarrollo perturbativo de segundo orden (3 términos) *interior*.

- **Problema 7 (2 puntos).**

  Calcule una solución uniformemente válida por medio del método de desarrollos asintóticos conectados (*Matched Asymptotic Expansions*).

Examen Presencial (10 puntos)

En este examen consideraremos el siguiente problema no lineal

$$(x+\varepsilon y)\dot{y}+y=0, \qquad y(1)=1$$

- **Problema 1 (1.5 puntos).**

  Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de segundo orden (3 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$, válido en el límite $\varepsilon \ll 1$.

- **Problema 2 (1.5 puntos).**

  Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.

- **Problema 3 (0.5 puntos).**

  Compruebe que la solución exacta de este problema está dada por

$$y = -\frac{x}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 1}$$

- **Problema 4 (0.5 puntos).**

  Obtenga el desarrollo en serie de potencias de ε de la solución anterior y compare el resultado con la solución aproximada obtenida en el primer ejercicio.

- **Problema 5 (1 punto).**

  A la vista de los resultados del ejercicio anterior ¿qué puede deducirse sobre la fuente de no uniformidad de este problema?

- **Problema 6 (1 punto).**

  ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?

- **Problema 7 (4 puntos).**

  Aplique el método propuesto en el ejercicio anterior y calcule los 2 primeros términos del desarrollo correspondiente.

Examen Presencial (10 puntos)

En este examen consideraremos el siguiente problema

$$\varepsilon y'' + y' + y = 2x$$

$$y(0) = \alpha, \qquad y(1) = \beta$$

- **Problema 1 (1.5 puntos).**

  Muestre qué zona o zonas de variación rápida (también llamadas capa límite o boundary layer) aparecen en este problema en el límite $\varepsilon \ll 1$.

- **Problema 2 (1 punto).**

  ¿A qué se debe este fenómeno?

- **Problema 3 (1 punto).**

  ¿Cómo varía el espesor de estas regiones con el parámetro ε?

- **Problema 4 (1.5 puntos).**

  ¿Qué cambio de variable debemos emplear para describir cada una de estas regiones?

- **Problema 5 (1.5 puntos).**

  Calcule el desarrollo perturbativo de segundo orden (3 términos) *exterior*.

- **Problema 6 (1.5 puntos).**

  Calcule el desarrollo perturbativo de segundo orden (3 términos) *interior*.

- **Problema 7 (2 puntos).**

  Calcule una solución uniformemente válida por medio del método de desarrollos asintóticos conectados (*Matched Asymptotic Expansions*).

Examen Presencial (10 puntos)

En este examen consideraremos el siguiente problema no lineal

$$(x + \varepsilon y)\dot{y} + y = 0, \qquad y(1) = 1$$

- **Problema 1 (1.5 puntos).**

  Determine la solución aproximada que se obtiene mediante un desarrollo perturbativo de segundo orden (3 términos), del tipo $y \simeq \sum_i \varepsilon^i y_i(x)$, válido en el límite $\varepsilon \ll 1$.

- **Problema 2 (1.5 puntos).**

  Explique de manera razonada cuál es la región de validez de dicho desarrollo.

- **Problema 3 (0.5 puntos).**

  Compruebe que la solución exacta de este problema está dada por

  $$y = -\frac{x}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{x^2}{\varepsilon^2} + \frac{2}{\varepsilon} + 1}$$

- **Problema 4 (0.5 puntos).**

  Obtenga el desarrollo en serie de potencias de ε de la solución anterior y compare el resultado con la solución aproximada obtenida en el primer ejercicio.

- **Problema 5 (1 punto).**

  A la vista de los resultados del ejercicio anterior ¿qué puede deducirse sobre la fuente de no uniformidad de este problema?

- **Problema 6 (1 punto).**

  ¿Qué método podría usarse para obtener una solución aproximada por medio de un desarrollo perturbativo uniformemente válido?

- **Problema 7 (4 puntos).**

  Aplique el método propuesto en el ejercicio anterior y calcule los 2 primeros términos del desarrollo correspondiente.

Ejercicio 1. Dada la función $u(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\cos(x)$, explique con el mayor detalle posible la expansión espectral más apropiada para aproximarla en el intervalo $x\in[-\infty,\infty]$. **(2 puntos)**

Ejercicio 2. Consideremos la ecuación integro-diferencial general $Lu(x)=f(x)$, con operador L, cuya solución $u(x)$ aproximamos mediante una serie de funciones ortogonales $u_N(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n\phi_n(x)$ pertenecientes a una cierta base que tiene la propiedad de completitud en el espacio de funciones de nuestro problema, que cumplen individualmente las condiciones de contorno en nuestro problema, y cuyos coeficientes son obtenidos mediante el método espectral de Galerkin. En base a la aproximación Tau, podemos considerar que $u_N(x)$ es la solución exacta del problema perturbado

$$Lu(x)=f(x)+\tau(x).$$

Deducir la expresión general de la perturbación $\tau(x)$ en términos de la base utilizada. **(3 puntos)**

Ejercicio 3. Determinar el desarrollo en serie de potencias de $\varepsilon \ll 1$ de primer orden (es decir, con 2 términos) de la solución de

$$x''+x=\varepsilon\left(x'-\frac{1}{2}(x')^3\right)$$
$$x(0)=a$$
$$x'(0)=0$$

Explique de manera justificada si es uniformemente válida esta aproximación. En caso contrario indique la región de validez del desarrollo anterior, ¿qué método podríamos emplear para construir una aproximación uniformemente válida? **(5 puntos)**

Ejercicio 1. Supongamos que tenemos una función $u(y)$ analítica y acotada en el intervalo $y \in [0, \infty]$, que queremos aproximar mediante una serie de funciones racionales de Chebyshev $TL_n(y)$ mediante el mapping:

$$y = \frac{L(1+x)}{1-x} \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{y-L}{y+L}.$$

Discutir razonadamente cómo deberá ser el valor del parámetro de mapeo L si la función $u(y)$ sólo varía significativamente en una región δy próxima al origen. **(2 puntos)**

Ejercicio 2. Consideremos la ecuación integro-diferencial general $Lu(x) = f(x)$, con operador L y n condiciones de frontera. Queremos aproximar su solución $u(x)$ mediante una serie de funciones ortogonales $u_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \phi_n(x)$ pertenecientes a una cierta base que tiene la propiedad de completitud en el espacio de funciones de nuestro problema, que no satisface las condiciones de frontera, y cuyos coeficientes son obtenidos mediante el método espectral de Galerkin. En base a la aproximación Tau, podemos considerar que $u_N(x)$ es la solución exacta del problema perturbado

$$Lu(x) = f(x) + \tau(x).$$

Deducir la expresión general de la perturbación $\tau(x)$ en términos de la base utilizada. **(3 puntos)**

Ejercicio 3. Consideramos el problema

$$\begin{aligned} &\varepsilon^2 y''' - y' + y = 0 \\ &y(0) = \alpha \\ &y(1) = \beta \\ &y'(1) = \gamma \end{aligned}$$

Muestre qué zona o zonas de variación rápida (también llamadas capa límite o boundary layer) aparecen en este problema en el límite $\varepsilon \ll 1$. ¿A qué se debe este fenómeno? ¿Cómo varía el espesor de estas regiones con el parámetro ε? ¿Qué cambio de variable debemos emplear para describir cada una de estas regiones? **(5 puntos)**

Ejercicio 1. Dado el siguiente problema

$$\frac{1}{1+x^2}u_{xx}+u=k, \qquad k\neq 0, \qquad x\in(-\infty,\infty),$$

discutir razonadamente qué método pseudoespectral para dominios infinitos: truncamiento del dominio, interpolación mediante cardinales de Whittaker, expansión de Hermite o funciones racionales de Chebyshev, podría ser más conveniente para aproximar pseudoespectralmente la solución. **(2 puntos)**

Ejercicio 2. Supongamos el problema $u_x+u=0$ con $u(-1)=1$. Para resolverlo consideraremos la serie de Chebyshev $u_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nT_n(x)$ y calcularemos sus coeficientes mediante el método tau, esto es, reservando una de las filas de la matriz de Galerkin para imponer la condición de contorno (también denominado en el texto método de Galerkin con boundary bordering). Demostrar que la función residuo tiene la forma $R(x;a_0,a_1,...,a_N)=\tau(a_0,a_1,...,a_N)T_N(x)$, donde τ es una función escalar de los coeficientes de la serie. Suponer que la base funcional de Chebyshev satisface la propiedad de completitud para las funciones del problema. **(3 puntos)**

Ejercicio 3. Determine un desarrollo de segundo orden uniformemente válido para la solución periódica de

$$u''+u=\varepsilon\left(1-u^2\right)u',$$

en términos del parámetro $\varepsilon\ll 1$. **(5 puntos)**

Ejercicio 1. Dada la función $u(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1+x^6}}\cos(x)$, explique con el mayor detalle posible la expansión espectral más apropiada para aproximarla en el intervalo $x\in[-\infty,\infty]$. **(2 puntos)**

Ejercicio 2. Consideremos la ecuación integro-diferencial general $Lu(x)=f(x)$, con operador L, cuya solución $u(x)$ aproximamos mediante una serie de funciones ortogonales $u_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\phi_n(x)$ pertenecientes a una cierta base que tiene la propiedad de completitud en el espacio de funciones de nuestro problema, que cumplen individualmente las condiciones de contorno en nuestro problema, y cuyos coeficientes son obtenidos mediante el método espectral de Galerkin. En base a la aproximación Tau, podemos considerar que $u_N(x)$ es la solución exacta del problema perturbado

$$Lu(x)=f(x)+\tau(x).$$

Deducir la expresión general de la perturbación $\tau(x)$ en términos de la base utilizada. **(3 puntos)**

Ejercicio 3. Determinar el desarrollo en serie de potencias de $\varepsilon\ll 1$ de primer orden (es decir, con 2 términos) de la solución de

$$x''+x=\varepsilon\left(x'-\frac{1}{2}(x')^3\right)$$
$$x(0)=a$$
$$x'(0)=0$$

Explique de manera justificada si es uniformemente válida esta aproximación. En caso contrario indique la región de validez del desarrollo anterior, ¿qué método podríamos emplear para construir una aproximación uniformemente válida? **(5 puntos)**