Propiedades

Dados tres sucesos *A,B* y *C* de un espacio muestral *S*

$$\text{Conmutativa}:\begin{cases} A\cup B = B\cup A \\ A\cap B = B\cap A \end{cases}$$

$$\text{Asociativa}:\begin{cases} A\cup (B\cup C) = (A\cup B)\cup C \\ A\cap (B\cap C) = (A\cap B)\cap C \end{cases}$$

$$\text{Distributiva}:\begin{cases} A\cup (B\cap C) = (A\cup B)\cap (A\cup C) \\ A\cap (B\cup C) = (A\cap B)\cup (A\cap C) \end{cases}$$

$$\text{Leyes de Morgan}:\begin{cases} \overline{\mathrm{A}\cup \mathrm{B}} = \overline{A}\cap \overline{B} \\ \overline{\mathrm{A}\cap \mathrm{B}} = \overline{A}\cup \overline{B} \end{cases}$$

Propiedades de las operaciones con sucesos:

Las operaciones con sucesos tienen las siguientes propiedades, la mayoría de ellas bien conocidas:

	Intersección	Unión
Conmutativa	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
Asociativa	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
Idempotente	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
Simplificación	$A \cap (A \cup B) = A$	$A \cup (A \cap B) = A$
Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Elemento neutro	$A \cap E = A$	$A \cup \varnothing = A$
Absorción	$A \cup \varnothing = A$	$A \cup E = A$

Además de estas sencillas propiedades (que se demuestran fácilmente mediante un diagrama de Venn), las operaciones con sucesos tienen otras dos propiedades muy importantes:

Leyes de De Morgan: Si A y B son dos sucesos, se verifican:

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Demostración: Demostraremos la primera de las igualdades.

En primer lugar, representemos en un diagrama de Venn $\overline{(A \cup B)}$. Para ello, primero representamos $A \cup B$, y luego su contrario $\overline{(A \cup B)}$:

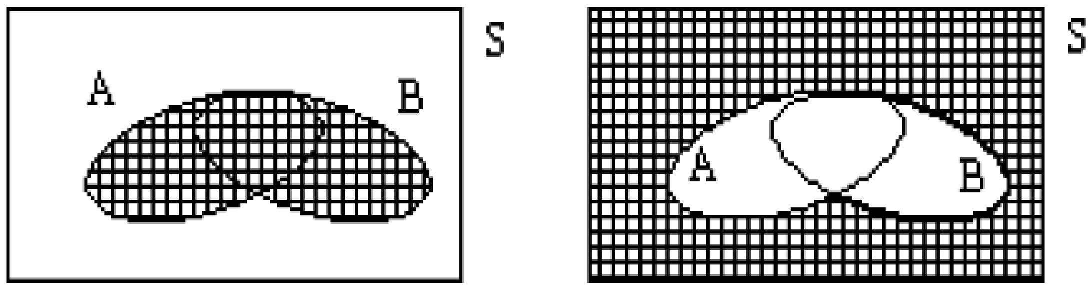


Figura 2.7: Imagen 1 corresponde a $A \cup B$. Imagen 2 corresponde a $\overline{A \cup B}$

Ahora, representaremos en otro diagrama el otro miembro, es decir $\bar{A} \cap \bar{B}$. En primer lugar, representaremos $\bar{A}$, luego $\bar{B}$ y luego su intersección:

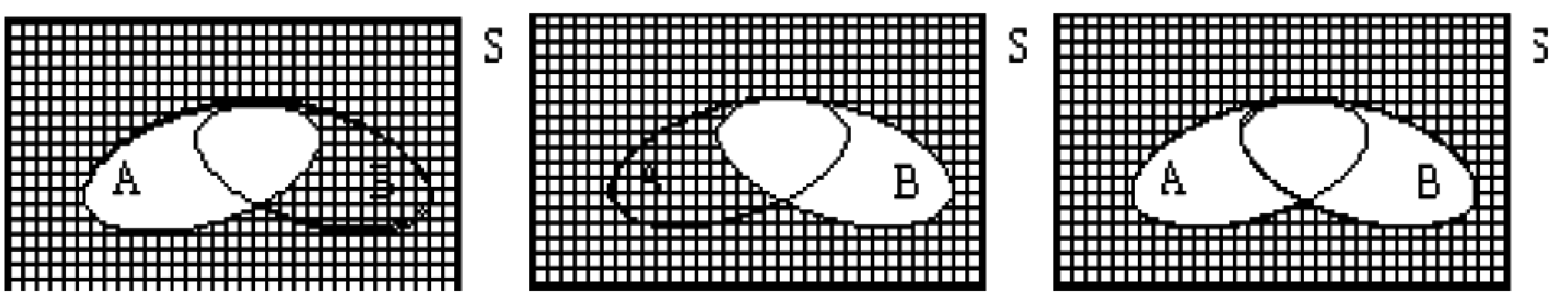


Figura 2.8: Imagen 1 corresponde a $\bar{A}$. Imagen 2 corresponde a $\bar{B}$. Imagen 3 corresponde a $\bar{A} \cap \bar{B}$.

Problema fundamental

- Dado un espacio muestral discreto con resultados $A_1, A_2, ..., A_n$, el experimento aleatorio queda caracterizado si asignamos un valor $P(A_i)$ no negativo a cada resultado A_i que verifique

$$P(A_1)+P(A_2)+ ...+P(A_n)=1.$$

- **Ejemplo**. Se lanza dos veces una moneda.

{XX,XC,CX,CC}

Se asigna probabilidad 1/4 a cada uno de los cuatro resultados.

¿ Es una asignación correcta?

Propiedades elementales

1. $P(\varnothing) = 0.$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$
3. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
4. Para dos sucesos cualesquiera $A, B \subset S$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5. Para n sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset S$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Asignación de probabilidades

1. Clásica (Laplace): Equiprobabilidad
2. Frecuencialista (von Mises, 1931)
3. Subjetiva

Clásica: sucesos equiprobables

Sea un experimento con un número finito de resultados excluyentes y equiprobables, la probabilidad del suceso A es

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N},}$$

donde N es el número de resultados posibles del experimento y N(A) el número de resultados favorables al suceso A.

Ejemplos (equiprobabilidad)

- Lanzamiento de una moneda. S={C,X}

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

- Lanzamiento de un dado. S={1,2,3,4,5,6}

$$P(\text{"}\,Número\ par\text{"}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- Extracción de una de las 40 cartas de la baraja, S={1 Oros,2 Oros,...., Rey Bastos}

$$P(Bastos) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

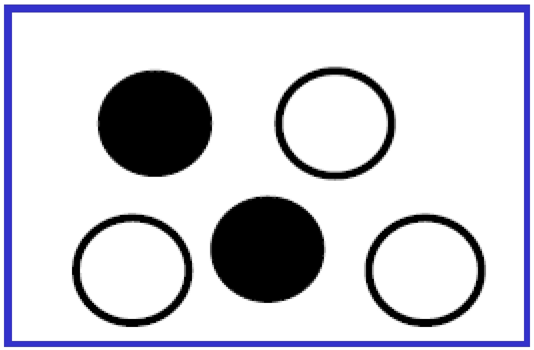
Lanzamiento de dos dados

1er Dado

2º Dado	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

$$P(\text{“suma 7”}) = 6/36 = 1/6$$

Urna: 2 Negras y 3 Blancas



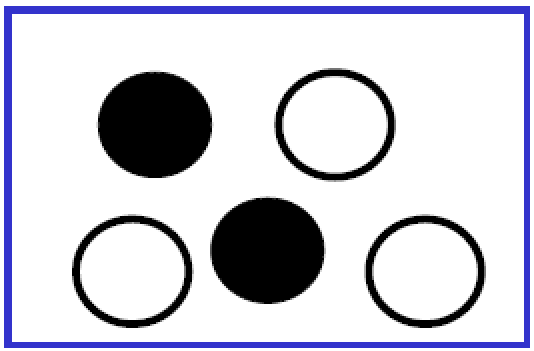
1ª Bola

2ª Bola	B1	B2	B3	N1	N2
B1		B2,B1	B3,B1	N1,B1	N2,B1
B2	B1,B2		B3,B2	N1,B2	N2,B2
B3	B1,B3	B2,B3		N1,B3	N2,B3
N1	B1,N1	B2,N1	B3,N1		N2,N1
N2	B1,N2	B2,N2	B3,N2	N1,N2	

Se extraen dos bolas al azar, una detrás de otra, sin reposición.

P("1ª Blanca y 2ª Negra") = 6/20 = 3/10

Urna: 2 Negras y 3 Blancas



1ª Bola

2ª Bola

	B1	B2	B3	N1	N2
B1	B1,B1	B2,B1	B3,B1	N1,B1	N2,B1
B2	B1,B2	B2,B2	B3,B2	N1,B2	N2,B2
B3	B1,B3	B2,B3	B3,B3	N1,B3	N2,B3
N1	B1,N1	B2,N1	B3,N1	N1,N1	N2,N1
N2	B1,N2	B2,N2	B3,N2	N1,N2	N2,N2

Se extraen dos bolas al azar, una detrás de otra, **con reposición.**

P("1ª Blanca y 2ª Negra") = 6/25

Combinatoria: 5 objetos tomados de dos en dos

	SIN REEMPLAZAMIENTO	CON REEMPLAZAMIENTO

IMPORTA EL ORDEN — SIN REEMPLAZAMIENTO

Primera extracción

	1	2	3	4	5
1		(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
2	(1,2)		(3,2)	(4,2)	(5,2)
3	(1,3)	(2,3)		(4,3)	(5,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)		(5,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	

Número = 20

IMPORTA EL ORDEN — CON REEMPLAZAMIENTO

Primera Extracción

	1	2	3	4	5
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)

Número = 25

NO IMPORTA EL ORDEN — SIN REEMPLAZAMIENTO

Primera extracción

	1	2	3	4	5
1					
2	(1,2)				
3	(1,3)	(2,3)			
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)		
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	

Número = 10

NO IMPORTA EL ORDEN — CON REEMPLAZAMIENTO

Primera extracción

	1	2	3	4	5
1	(1,1)				
2	(1,2)	(2,2)			
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)		
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)

Número = 15

Combinatoria: Número posible de reordenaciones de n objetos tomados de r en r

	SIN REEMPLAZAM IENTO	CON REEMPLAZAM IENTO
IMPORTA ELORDEN	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
NO IMPORTA EL ORDEN	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

1 - 6 - 21 - 29 - 33 -43

La primitiva. Se eligen 6 números distintos del 1 al 49, ambos inclusive.

• Probabilidad de acertar los 6.

• Probabilidad de acertar 5.

• Probabilidad de acertar 4.

• Probabilidad de no acertar ninguno.

• Probabilidad de que salga un número concreto, por ejemplo el número 1.

Primitiva

$$P(\text{Acertar 6}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816} = 0{,}000000072$$

$$P(\text{Acertar 5}) = \frac{\binom{6}{5} \times \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13.983.816} = 0{,}000018$$

$$P(\text{Acertar 4}) = \frac{\binom{6}{4} \times \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13.545}{13.983.816} = 0{,}00097$$

$$P(\text{Ninguno}) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{6.096.454}{13.983.816} = 0{,}44$$

$$P(\text{Salga el 1}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{49} = 0{,}1224$$

• En una estación de metro hay 5 pasajeros esperando a un tren con 10 vagones, si cada pasajero elige un vagón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todos elijan un vagón diferente?

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{10^5} = 0.3024$$

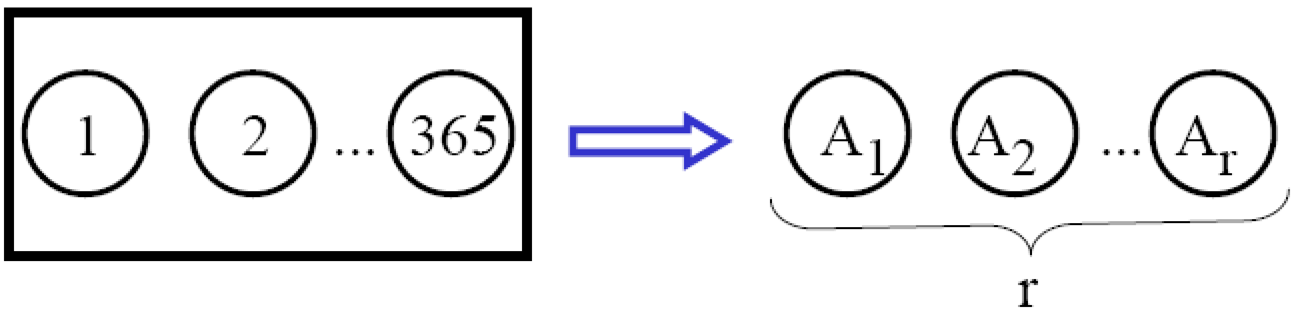
• De un lote con 100 piezas se toman al azar 10, si todas las piezas elegidas son buenas se acepta el lote y se rechaza en caso contrario. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote con 10 piezas defectuosas?

$$N = \binom{100}{10} = \frac{100!}{10!\,90!}; \quad N(A) = \binom{90}{10} = \frac{90!}{80!\,10!}$$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{90!}{80!}\frac{90!}{100!} = \frac{90 \times 89 \times \cdots \times 81}{100 \times 99 \times \cdots \times 91} = 0.330$$

Cumpleaños

Probabilidad de que en un grupo de $r = 25$ personas haya al menos dos con el mismo cumpleaños.



$A =$ " No haya ninguna coincidencia"

$$P(A) = \frac{365 \times (365 - 1) \times \cdots \times (365 - r + 1)}{365^r}$$

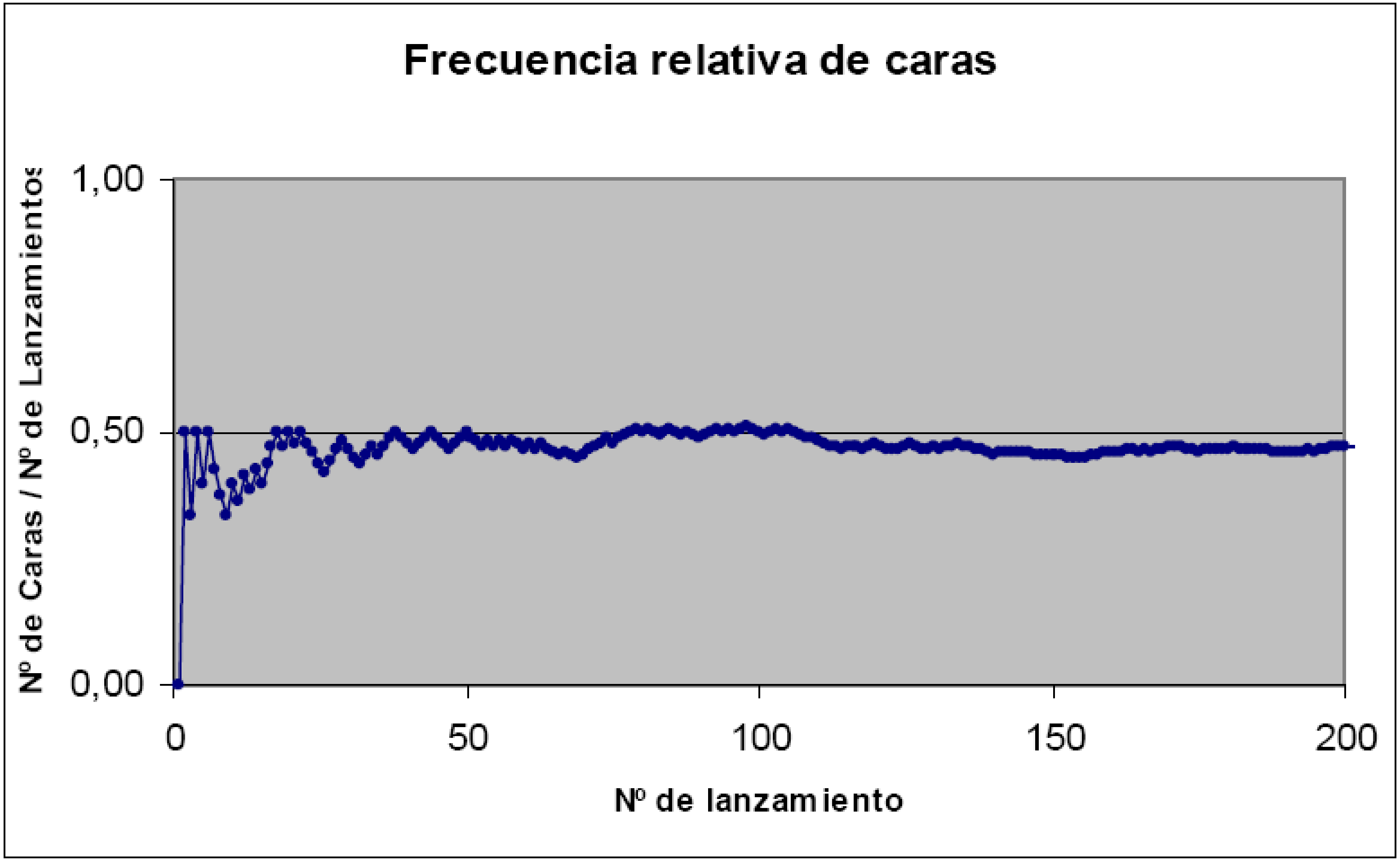
$$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \qquad r = 25 \rightarrow P(\overline{A}) = 0.578$$

Probabilidad y Frecuencia Relativa

La probabilidad *P(A)* de un suceso *A* es el límite

$$\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}}$$

dónde n_A es el número de veces que ha ocurrido *A* al repetir el experimento *n* veces en idénticas condiciones.


Frecuencia relativa de caras
Nº de Caras / Nº de Lanzamientos
1,00
0,50
0,00
0
50
100
150
200
Nº de lanzamiento