FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I
(Grado en Matemáticas)
Junio de 2019

NO SE PERMITE NINGÚN TIPO DE MATERIAL

Todas las respuestas **deben** estar **justificadas** razonadamente.

Se aconseja utilizar borrador en los ejercicios de más cálculos y pasar luego a limpio.

1. (2 Puntos) *En $\mathbb{R}^3$ con coordenadas esféricas, ¿que curva es $C = \{(\rho, \phi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : \rho = 2, \phi = \pi/4, \theta \in [0, 2\pi]\}$?*

Explíquelo en palabras, no solamente en fórmulas.

Resolución:

Al ser ρ y ϕ constantes, también lo es la coordenada rectangular $z = \cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Luego nuestra curva está en el plano $z = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Y también está en el cono determinado por $\phi = \pi/4$, pues al variar θ, con ϕ fijo, se describe un cono.

Luego C es la interseccion $C = K \cap \alpha$

del cono K completo (completo porque θ toma todos los valores entre 0 y 2π) y que hace ángulo de $\pi/4$ con el eje de los zz

con el plano $\alpha : z = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

También se puede observar (desarrolando las coordenadas rectangulares en terminos de las esféricas) que se tiene :

$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \sin^2\phi \sin^2\theta + \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 \sin^2\phi + \rho^2 \cos^2\phi = \rho^2 = 4$

Luego $C = K \cap \alpha = S \cap \alpha = K \cap \alpha \cap S$

Resulta que C es un paralelo de la esfera S centrada en el origen de radio 2.

2. (2,5 puntos) *En que dirección es igual a cero la variación de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^{\frac{x+y}{2}} \cos(y - x)$ en el punto $(1, 1)$?*

Calcule la derivada direccional de f en $(1, 1)$ en la dirección de mayor variación de f en ese punto.

Resolución:

La direción pedida es perpendicular al gradiente de f *en* $(1,1)$.
$\nabla f(1,1) = e^{\frac{x+y}{2}} \left[\frac{1}{2}\cos(y-x) + \sin(y-x), \frac{1}{2}\cos(y-x) - \sin(y-x)\right](1,1) = \frac{e}{2}(1,1)$.
Luego la dirección en la que la variación de f es 0 es la dirección del vector unitario $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ (pues $(1,-1)$ es claramente ortogonal a $(1,1)$).

La dirección de mayor variación de f en $(1,1)$ es la del $\nabla f(1,1)$ y entonces, la derivada direccional pedida es:

$$\nabla f(1,1).\frac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|} = \frac{\|\nabla f(1,1)\|^2}{\|\nabla f(1,1)\|} = \|\nabla f(1,1)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}e$$

3. (3 puntos) *Dada la función*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ f(x,y) = \frac{4x^3}{x^2+y^2} \ \textit{si} \ (x,y) \neq (0,0) \ \ \textit{y} \ \ f(0,0) = 0$$

a) Estudiar si f es continua en el origen.

b) Hallar, si es posible, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Estudiar si f es diferenciable en el origen.

Resolución:

a) f *es continua en el origen* si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$

Podemos ver que este límite es cero utilizando el criterio de la majoración:

Cerca del origen se tiene: $\left|\frac{4x^3}{x^2+y^2}\right| \leq \left|\frac{4x^3}{x^2}\right| = |4x|$ como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |4x| = 0$ resulta que también $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$.

Por tanto f es continua en el origen.

** Utilizando coordenadas polares:el límite que tenemos que estudiar se reduce a:
$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{4\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim\limits_{\rho\to 0} 4\rho\cos^3\theta = 0$ porque se trat del límite de un producto de una función **acotada** (importante decírlo) por otra que tiende a 0.

b) Hay que calcular estas derivadas por la definición:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 4 = 4$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}}{h} = 0$$

c) Tenemos que calcular el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0)}{\|(x-0,y-0)\|} =$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-0-4.x-0.y}{\|(x,y)\|} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{4x^3}{x^2+y^2}-4x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3-4x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} =$
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-4xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Este límite no existe:

De hecho, si hacemos el límite según puntos de la recta $(x, \lambda x)$, tenemos $\lim\limits_{(x,\lambda x)\to(0,0)} \frac{-4\lambda^2 x^3}{x^3(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$

El valor obtenido varia con el parámetro λ, (es decir que varia según los puntos $(x, \lambda x)$ tomados).

Por tanto: no existe el límite.

Concluímos que f **no es diferenciable en** $(0,0)$.

4. (2,5 puntos) Hallar el valor máximo global de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^3 + xy^2 + 3$ *en el disco* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Resolución: (Ver Ejemplo 3.20, pág 213 de la 5^a ed.)

Para calcular el valor máximo global tenemos de ver los máximos locales en el **interior del disco y en la frontera (o borde)**;

para eso, buscamos primero los puntos críticos de f en el interior del disco y los de la función restrita al borde;

Calculemos el gradiente de f y igualémoslo a 0 para calcular los primeros:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + y^2, 2xy) = (0,0) \Leftrightarrow 2xy = 0 \text{ y } 3x^2 + y^2 = 0,$$

La solución se reduce a la origen$(0,0)$ que es el único punto crítico de f en el disco abierto.

El borde (o frontera) del disco se puede parametrizar por $c(t) = (\cos t, \sin t), t \in [0, 2\pi]$

f sobre el borde se puede ver como la composición $g(t) = f \circ c(t) = \cos^3 t + \cos t \sin^2 t + 3 = \cos t(\cos^2 t + \sin^2 t) + 3 = \cos t + 3$

y los puntos críticos de f en el borde son los que anulan $g'(t) = -\sin t$. Es decir, $t \in \{0, \pi\}$ ($g(2\pi) = g(0)$).

Ahora comparamos:

$f(0,0) = 3 \qquad f(c(0)) = f(1,0) = 4 \quad f(c(\pi)) = f(-1,0) = 2$

Conclusión: el máximo global de f en el disco es el valor 4 y es obtenido en el punto $(1,0)$.