Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación.

a) Demuestre que $\forall B \subset Y$ se tiene que $f(f^{-1}(B)) = f(X) \cap B$.

b) Demuestre que f es inyectiva si sólo si $\forall A \subset X$ se tiene que $f^{-1}(f(A)) = A$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sean X un conjunto no vacío y $\preceq$ una relación de orden en X. Se define en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$ la relación $\mathcal{R}$ dada por:

$$A \,\mathcal{R}\, B \quad \text{si y sólo si} \quad A = B \text{ o } \; (\forall a \in A \; \forall b \in B \;\; a \preceq b)$$

Determine razonadamente si $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia o de orden en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$.

Pregunta 3 (3 puntos)
Sea $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ una aplicación tal que:

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

a) Calcule razonadamente el valor de $f(0)$.

b) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{Q}, \;\; f(-x) = -f(x)$.

c) Demuestre por inducción sobre n, que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \forall x \in \mathbb{Q}, \;\; f(nx) = nf(x)$$

Deduzca que también es cierto $\forall n \in \mathbb{Z}$.

d) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{Q}$ se cumple que $f(x) = kx$ siendo $k = f(1)$.

Pregunta 4 (2 puntos)
Si $E(a)$ denota la parte entera de cualquier $a \in \mathbb{R}$, demuestre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$E(x) + E(y) \leqslant E(x+y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$$