

No se permite el uso de ningún tipo de material

Todas las respuestas deben estar justificadas

**Ejercicio 1.** (2 puntos) Se define por recurrencia la sucesión  $(a_n)$  siendo

$$a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \quad \text{para todo } n > 1 \quad \text{y} \quad a_1 > -6.$$

¿Es  $(a_n)$  convergente? En caso afirmativo, calcular su límite.

**Ejercicio 2.** (2 puntos)

- a) Definir conjunto compacto de  $\mathbb{R}$  y enunciar el teorema de Heine-Borel sobre una caracterización de los conjuntos compactos de  $\mathbb{R}$ .
- b) Si  $C$  es compacto y  $A$  es abierto ¿es  $C - A$  compacto?
- c) Si  $C$  es compacto y  $a$  es un punto de acumulación de  $C$  ¿es  $C - \{a\}$  compacto?
- d) Si  $C$  es compacto y  $B$  es cerrado ¿es  $C \cap B$  compacto?

Todas las respuestas deben estar justificadas.

**Ejercicio 3.** (2 puntos) Calcular el número de soluciones reales de la ecuación

$$x^5 - 5x + 5 = 0.$$

**Ejercicio 4.** (2 puntos) Calcular los intervalos de crecimiento, de decrecimiento, de concavidad y de convexidad de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}.$$

Determinar sus extremos relativos y sus puntos de inflexión.

**Ejercicio 5.** (2 puntos) Determinar justificadamente la convergencia o divergencia de las siguientes series:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{n+1}{2n} \right)^n, \quad \text{b) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{3/2} + n^{1/2}}{n^{5/2} + n}.$$

Tiempo: 2 horas