Cuestiones y problemas
Tema 1: Dinámica clásica

Si una misma fuerza actúa 1 segundo sobre un cuerpo de 1 kg y 4 segundos sobre un cuerpo de 4 kg.

a) imprimirá a ambos la misma aceleración
b) el incremento de velocidad será el mismo en ambos casos
c) el incremento de la cantidad de movimiento será el mismo en ambos casos

Solución:

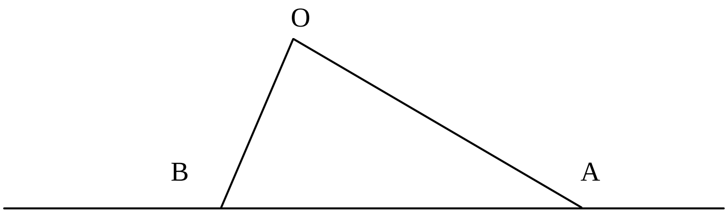
En el primer caso tenemos que $a_1 = F$, y la velocidad final justo en el instante en el que deja de actuar la fuerza es $v_f - v_i = a_1 t = F$.

En el segundo caso tenemos que $a_2 = F/4$, y la velocidad final justo en el instante en el que deja de actuar la fuerza es $v_f - v_i = a_2 t = F$.

Así pues, la respuesta correcta es la b).

Desde un mismo punto O se dejan caer a la vez dos cuerpos por dos planos inclinados OA y OB de diferentes pendientes y sin rozamiento, tal como se muestra en la figura. Siendo v_A y v_B las velocidades de los dos cuerpos en los puntos A y B, respectivamente, y a_A y a_B las respectivas aceleraciones, tenemos que:

a) $a_A < a_B$ y $v_A = v_B$
b) $a_A < a_B$ y $v_A < v_B$
c) $a_A > a_B$ y $v_A > v_B$



Solución:

La aceleración de caída viene determinada por la 2ª Ley de Newton:

$$a = g \sin \alpha$$

En el plano inclinado OB la pendiente es mayor y por lo tanto la aceleración también es mayor: $a_A < a_B$. Como no hay rozamiento la energía mecánica se conserva, por lo que en el punto más bajo de los dos planos las velocidades de los dos cuerpos son exactamente las mismas $v_A = v_B$.

Un bloque de 10 Kg de masa se encuentra en reposo en un plano inclinado 30º. Si el coeficiente de rozamiento estático y dinámico entre el plano y el cuerpo es 0.7, ¿cuánto vale la fuerza de rozamiento? ($g = 9.8$ m/s^2)

Solución:

Como el bloque se encuentra en reposo, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él debe ser 0. Por lo tanto, la Fuerza de Rozamiento debe ser igual a la componente tangencial del peso: $mgsen\alpha$, que vale 49.0 N

Un peso de 80 kg está de pie sobre una balanza de muelle sujeta al suelo de un ascensor. La balanza está calibrada en newtons. Tomamos como positiva la dirección hacia arriba ¿Qué peso indicará la balanza cuando el ascensor se mueve con aceleración a_1 *positiva*?
Solución:
Sobre el peso, y en dirección vertical, se aplican la fuerza normal de la balanza F_n (hacia arriba) y el peso, mg , hacia abajo. La ecuación del movimiento será

$$F_n - mg = ma_1$$

puesto que a_1 es positiva. Despejando, la lectura de la balanza es $F_n = m(g + a_1)$

En el problema anterior, ¿qué peso indicará la balanza cuando el ascensor *asciende* pero con aceleración a_2 *negativa*?
Solución:
El argumento es el mismo que el caso anterior, pero esta vez la aceleración en el término ma es negativa.

Una persona se encuentra sobre una báscula en un ascensor. ¿En cuál de los casos siguientes será menor la lectura de la báscula?
a) el ascensor está en reposo
b) el ascensor baja con velocidad constante
c) el ascensor baja aumentando su velocidad
Solución:
Sobre la persona actúan dos fuerzas: su peso *P* y la fuerza normal de reacción de la báscula que soporta a la persona, F_N . El peso que mide la báscula es igual a F_N . Así pues, tenemos que averiguar en que condiciones es menor F_N . Si tomamos el sentido hacia abajo como positivo, tenemos que

$$P - F_N = ma \,.$$

Por lo tanto $F_N = P - ma$. Si no hay aceleración del ascensor, la báscula medirá el peso real de la persona, pero si el ascensor baja aceleradamente la lectura de la báscula será menor.

Una persona con la que usted viaja propone disminuir un poco la presión de los neumáticos de su coche en cuanto empieza a llover, dándole como explicación: "*así, aumentando la superficie de contacto de las ruedas con la carretera, aumentamos la fuerza de rozamiento y disminuimos el peligro de patinar en las curvas*". ¿Le daría usted la razón?
Solución:
No, la superficie de contacto en nada interviene en la fuerza de rozamiento. Es el peso el factor clave y el coeficiente de rozamiento.

Un coche de 1.500 kg se mueve sobre una carretera horizontal y plana y sigue una curva cuyo radio es de 35m. Si el coeficiente de rozamiento estático entre los neumáticos y el pavimento es igual a 0,5, calcular el módulo máximo de la velocidad con la que el coche tomar la curva sin problemas.
Solución:
El rozamiento es lo que permite al coche describir la curva sin derrapar. La fuerza de rozamiento hará el papel de fuerza centrípeta en el giro y su valor máximo determinará el valor máximo de la velocidad con la que el coche podrá describir la curva:

$$F_{roz\max} = \mu_{est} mg = m\frac{v_{\max}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad v_{\max} = \sqrt{R\mu_{est} g}$$

Un ascensor de 3 m de altura sube con una velocidad constante de 1 m/s^2. Cuando se encuentra a una cierta altura se desprende la lámpara del techo. Si t_1 es el tiempo que tarda la lámpara en llegar al suelo del ascensor medido por un observador situado dentro del ascensor y t_2 es el tiempo que tarda en caer la lámpara medido por un observador en reposo fuera del ascensor, ¿serán iguales los dos tiempos? (Tomar g=9.8 m/s^2)

Solución:

Si el ascensor se mueve con velocidad constante, los dos tiempos serán iguales puesto que están medidos en sistemas de referencia inerciales. Podemos, por consiguiente, estudiar la dinámica del problema desde cualquiera de los dos sistemas. Sin embargo, lo haremos desde los dos puntos de vista.

- Dentro del ascensor:

Un observador situado dentro del ascensor ve simplemente una caída libre de la lámpara:

$$h = \frac{1}{2}gt^2,$$

y el tiempo que mide es 0.78 s.

- Fuera del ascensor:

Un observador situado fuera del ascensor también ve una caída libre pero con una velocidad inicial $v_0 = -1\, m/s$, donde hemos escogido positivo el sentido hacia abajo. Por lo tanto tenemos que

$$h = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 .$$

Durante la caída de la lámpara, el observador situado fuera del ascensor ve que el suelo ha subido una distancia $|v_0 t|$. Entonces la distancia *h* que recorre la lámpara desde que se desprende hasta que llega al suelo es $h = 3 + v_0 t = 3 - t$. Así pues tenemos que

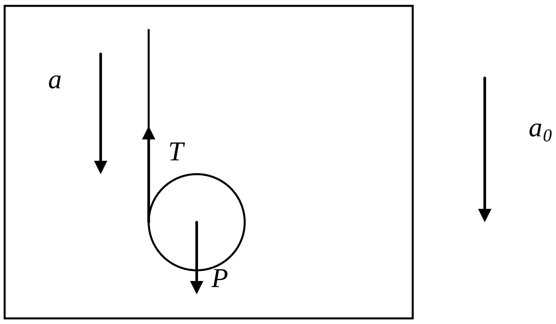
$$3 - t = -t + \frac{1}{2}gt^2$$

y el tiempo que mide es 0.78 s.

Un niño se encuentra en un ascensor que está bajando con una aceleración a_0. Si deja caer su yo-yo, ¿cuál es la aceleración del yo-yo que mediría el niño?. El momento de inercia del yo-yo es $I = \frac{1}{2}MR^2$.

Solución:

Las leyes de Newton sólo son aplicables a sistemas de referencia inerciales, por lo tanto, analizaremos el problema desde el punto de vista de un observador situado fuera del ascensor, en reposo con respecto a la Tierra (sistema inercial). Si *a* es la aceleración con la que el niño (sistema no inercial) ve caer el yo-yo, la aceleración con la que cae el yo-yo desde fuera del ascensor, a_I, será la composición de las dos aceleraciones: $a_I = a + a_0$ (se suman ya que tienen el mismo sentido).



Aplicando las leyes de Newton al yo-yo, y atendiendo al diagrama de fuerzas que se muestra en la figura tenemos

$$\begin{cases} mg - T = ma_I \\ TR = I\alpha \end{cases}$$

$$a = \alpha R$$

$$a_I = a + a_0$$

cuya solución para *a* es $\frac{2}{3}\left(g - a_0\right)$.
Otra forma de resolver el problema menos formal y más heurística, aunque más rápida, consistiría en suponer que desde el punto de vista de un observador situado dentro del ascenso, la aceleración de la gravedad "efectiva" sobre el yo-yo es menor que *g*, puesto que el ascensor baja con aceleración a_0. La nueva gravedad que vería ese observador es $g' = g - a_0$. Ahora sólo tenemos que resolver el problema como si de un sistema inercial se tratara bajo la acción de una gravedad g'. La solución es entonces

$$a = \frac{2}{3} g' = \frac{2}{3}\left(g - a_0\right).$$

En general, el estudio de la dinámica en un sistema de referencia no inercial, es decir acelerado, se puede realizar utilizando las leyes de Newton siempre y cuando se añada la correspondiente *fuerza de inercia* $\vec{F}_i$ a las fuerzas exteriores que actúan sobre el sistema. La fuerza de inercia siempre tiene el valor $\vec{F}_i = -m\vec{a}_0$, donde $\vec{a}_0$ es la aceleración con la que se mueve el sistema no inercial respecto a un sistema inercial que casi siempre somos nosotros. Así pues, la segunda ley de Newton para un sistema de referencia acelerado $\vec{a}_0$ con respecto a nosotros es

$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_i = m\vec{a},$$

done $\vec{a}$ es la aceleración medida en el sistema no inercial.

Así pues, volviendo a nuestro problema, la ecuación que obtendríamos para la aceleración $\vec{a}$ del yo-yo dentro del ascensor sería:

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_i = m\vec{a}.$$

Si consideramos la dirección de caída *y* como positiva hacia abajo, tenemos que

$$mg - T - ma_0 = ma.$$

Vemos que es la misma ecuación que hemos obtenido analizando el problema desde el punto de vista de un observador situado fuera del ascensor en un sistema inercial.

¿Cuál sería el periodo de un péndulo de longitud *l* que realizara pequeñas oscilaciones alrededor de su punto de equilibrio y que estuviera colgado del techo de un ascensor que desciende con una aceleración a_0 si se midiera por un observador situado dentro del ascensor?

Solución:

Esta cuestión se resuelve de forma similar a la cuestión 3. La solución es $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - a_0}}$.

En un tren que frena al entrar en una estación, un niño sentado de espaldas al sentido de marcha lanza una pelota al aire. La pelota, ¿caerá detrás, delante o en las manos del niño?

Solución:

El problema se puede resolver tanto en el sistema de referencia inercial situado fuera del tren como en el sistema de referencia no inercial que es donde se encuentra sentado el niño.

En el primer caso tenemos que si v_0 es la velocidad con la que circulaba el tren justo en el momento en el que el niño lanza la pelota al aire y *v* la velocidad con la que ésta es lanzada verticalmente por el niño, para un observador situado fuera del tren, la pelota describirá un movimiento parabólico con v_0 como componente horizontal de la velocidad inicial de la pelota y *v* como la componente vertical:

$$x = tv_0$$

$$y = tv - \frac{1}{2}gt^2$$

Al cabo de un cierto tiempo t', la pelota volverá a $y = 0$, y por tanto habrá recorrido una distancia $x_{pelota} = t'v_0$. Mientras tanto, el tren habrá recorrido en el mismo tiempo una distancia menor puesto que partiendo de la velocidad v_0 ha ido frenando. $x_{tren} = t'v_0 - \frac{1}{2}at'^2$. Como $x_{tren} < x_{pelota}$ la pelota caerá por delante del tren, y como el niño está sentado de espaldas al avance del tren, la pelota caerá detrás del niño.

Si nos situamos dentro del vagón, al estar en un sistema acelerado debemos añadir a las fuerzas que actúan sobre la pelota la fuerza de inercia correspondiente al movimiento $F_{inercia} = -ma$, donde *m* es la masa de la pelota y *a* la aceleración del tren. Como *a* es negativa, el niño verá que la pelota experimenta un fuerza horizontal en el sentido de avance del tren que no se compensa con ninguna otra fuerza (puesto que el resto de fuerzas que actúan sobre la pelota son sólo la gravedad, y actúa en la dirección perpendicular) y que hace que la pelota caiga detrás de él.

¿En cuál de los dos experimentos que proponemos a continuación se estirará más el mismo muelle?

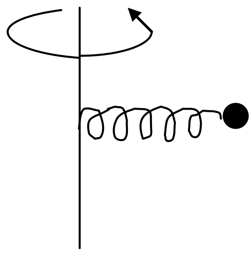
1. Sujetamos el muelle a una pared vertical y estiramos del extremo libre con una fuerza *F*.

2. Estiramos de los dos extremos libres del muelle al mismo tiempo aplicando una fuerza *F* en cada extremo.

Solución:

La pared vertical ejerce sobre el muelle una fuerza de reacción *F*, igual pero de sentido contrario a la que aplicamos sobre el extremo libre, por lo que obtenemos el mismo efecto que en el experimento 2.

Un masa de 50g está unida a un extremo de un muelle horizontal, el cual está unido por el otro extremo a un eje vertical (ver dibujo) que gira con una velocidad de 4 vueltas/s. Si la constante elástica del muelle vale $k = 196N/m$. Calcular cuanto se alarga el resorte sabiendo que su longitud en reposo es de 0.50 m (despreciar cualquier rozamiento)



Solución:
La fuerza de recuperación del muelle debe ser igual a la fuerza centrípeta que origina el giro:

$$F = kx = m\omega^2(l + x)$$

$$x = \frac{m\omega^2 l}{k - m\omega^2} = 9.6\,10^{-2}\,m$$

Colgamos del techo de un vagón una masa por medio de una cuerda. Encontrar el ángulo α que forma la cuerda con la vertical, y su tensión T, cuando el vagón se mueve con una aceleración constante *a* sobre raíles horizontales.
Solución:
Si hacemos un esquema de las fuerzas que actúan sobre la masa para un observador situado fuera del vagón tendremos:

$$T sen\alpha = ma$$

$$T\cos\alpha = mg$$

Dividiendo ambas expresiones encontramos que $\alpha = \arctan\frac{a}{g}$, a partir de la que podemos obtener fácilmente *T*.

Queremos arrastrar por un suelo horizontal un cuerpo de 100 kg de masa con velocidad constante; para ello lo atamos a una cuerda y tiramos de ella formando un ángulo con el suelo. Calcular el ángulo que hace mínima la fuerza con la que debemos tirar de la cuerda si el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo y el suelo es de 0,5.
Solución:
La tensión de la cuerda que tira del cuerpo es igual a la fuerza aplicada en el extremo de la cuerda, de módulo *F*. Esta fuerza se puede descomponer en una componente horizontal en la dirección *X*, $F\cos\alpha$, que es la que provoca el movimiento, y otra en la dirección *Y*, $F sen\alpha$, que hace que el cuerpo pese menos y que la fuerza normal de reacción del plano sea menor que mg. Como el cuerpo tiene velocidad constante, la suma de las fuerzas que actúan en la dirección *X* deber ser nula

$$F\cos\alpha = R$$

Por otro lado, la fuerza de rozamiento vale

$$R = \mu(mg - F sen\alpha)$$

A partir de estas ecuaciones obtenemos

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu sen\alpha}$$

Si ahora minimizamos la fuerza obtenemos

$$\frac{dF}{d\alpha} = 0 \Rightarrow tg\alpha = \mu = 0.5 \Rightarrow \alpha = 26,57^{o}$$

Durante el despegue de un avión la acción combinada de motores y alas produce una fuerza de 90.000 N en módulo y de 60º en dirección sobre la horizontal. El avión levanta el vuelo con velocidad constante en la dirección vertical mientras acelera en la dirección horizontal.
¿Cuál es la masa del avión?
¿Cuál es la aceleración horizontal?

Solución:

La componente horizontal de la fuerza es

$$F_x = F\cos 60 = 45000 \text{ N},$$

y la vertical:

$$F_y = F\sin 60 = 77942,3 \text{ N}.$$

Como la velocidad vertical es constante, la suma de fuerzas en la componente vertical debe ser nula. Por lo tanto, la masa será

$$m = F_y / g = 7953,3 \text{ kg}.$$

La aceleración horizontal vendrá dada por

$$a_x = F_x / m = 5,66 \text{ m/s}^2.$$

Supongamos un bloque de masa *m* situado sobre una mesa que va inclinándose paulatinamente, hasta alcanzar un ángulo de inclinación crítico θ_c a partir del cual el bloque empieza a deslizar.
Calcule el coeficiente de rozamiento estático del bloque μ_e en función de ese ángulo crítico.

Solución:

El máximo valor de la fuerza de rozamiento es $F_{roz} = \mu_e mg\cos\theta$.

El ángulo crítico a partir del cual el bloque comienza a deslizar es aquel en el que la componente del peso tangencial al plano $mgsen\theta$ se iguala a la máxima fuerza de rozamiento.

Igualando ambas expresiones obtenemos que $\mu_e = tg\theta_c$.

Un motorista toma una curva de 20 metros de radio con una velocidad de 36 Km /h.
¿Cuál es el valor mínimo del coeficiente de fricción estática para que el motorista no deslice?

Solución:

La fuerza de rozamiento debe proporcionar la fuerza centrípeta necesaria para efectuar el giro. Igualando obtenemos el coeficiente de fricción mínimo. Un valor menor de este coeficiente producirá una fuerza de rozamiento menor que la necesaria para producir el giro y el motorista se saldrá de la carretera.

$$m\frac{v^2}{R} = mg\mu$$

$$\mu = \frac{v^2}{gR} = 0.51$$

Queremos bajar verticalmente por una ventana un peso de 1500 N, pero solo disponemos de una cuerda que puede soportar una tensión máxima de 980 N. ¿Se puede utilizar dicha cuerda para bajarlo sin romperla? ($g = 9.8\text{m/s}^2$)

Solución:
Si escogemos el sentido positivo hacia abajo las ecuaciones de la dinámica son:

$$mg - T = ma \quad \to \quad T = mg - ma \leq 980 \quad \to \quad 1500 - ma \leq 980$$

de donde obtenemos que $ma \geq 1500 - 980$.

Como $m = \dfrac{peso}{g} = \dfrac{1500}{9.8} = 153.1\text{ Kg}$, tenemos que $a \geq \dfrac{520}{153.1} = 3.4\text{ m/s}^2$

La respuesta es: sí, si se baja con una aceleración $a \geq 3.4\text{m/s}^2$

Debido al rozamiento con el suelo una moto pasa de 70 km/h a 0 km/h en 15 m. ($g = 9.8\ m/s^2$). Calcular el tiempo de frenada y el coeficiente de rozamiento.

Solución:
Aplicando las ecuaciones de la cinemática para un movimiento uniformemente acelerado tenemos:

$$v_f^2 - v_i^2 = 2as \to a = -12.60\,\text{m/s}^2.$$

Por lo tanto el tiempo de frenada es $t = \dfrac{v_f - v_i}{a} = 1.54\,\text{s}$.

Finalmente, la 2ª ley de Newton nos dice que $ma = -F_{roz} = -mg\mu$ de donde $\mu = 1.28$.

A un cuerpo de 10Kg de masa que se encuentra sobre un plano inclinado 30º se le aplica una fuerza de 60 N paralela al plano y hacia arriba. El coeficiente de rozamiento estático y dinámico entre plano y cuerpo es 0.3 (g=9.8 m/s^2).
- ¿Qué ocurrirá?
- ¿Cuánto vale la fuerza de rozamiento?

Solución:
Las fuerzas que se oponen al movimiento son la tangencial del peso (hacia abajo):
$P_t = mg\sin\alpha = 49\text{ N}$ y la fuerza de rozamiento, cuyo valor máximo es
$F_{roz,\max} = \mu mg\cos\alpha = 25.46\text{ N}$. Como $60 < \left(P_t + F_{roz,\max}\right)$ el cuerpo no se moverá. En ese caso, el cuerpo permanece en equilibrio y la suma de todas las fuerzas que actúan sobre él tiene que ser 0, por lo tanto la fuerza de rozamiento vale $60 - 49 = 11\,\text{N}$.

Se cuelga del techo de un ascensor un cuerpo de 10 kg de masa por medio de una cuerda capaz de soportar una tensión de 150 N. Sabiendo que al poner en marcha el ascensor la cuerda se rompe ¿qué puede deducirse del valor de la aceleración del ascensor?
Solución:
La ecuación de la dinámica del cuerpo es

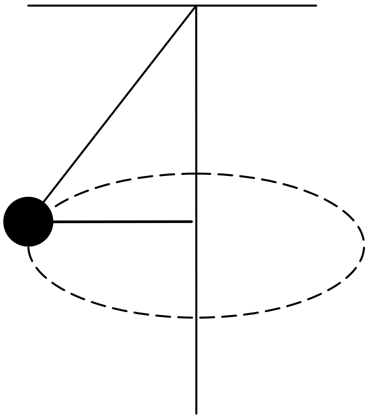
$$T - mg = ma.$$

Para que se rompa, la tensión de la cuerda debe ser mayor que 150 N, por lo que tenemos que

$$T = m(a+g) > 150\text{ N},$$

de forma que $a > 5.2\ \mathrm{m/s^2}$. Como hemos escogido la dirección vertical hacia arriba como positiva, el ascensor debe subir con una aceleración superior al valor obtenido.

Un péndulo cónico consiste en un objeto de masa *m*, suspendido de una cuerda de longitud *L*, que puede girar trazando un circulo horizontal de radio *r.* Encuentre la expresión para la velocidad lineal del objeto



Solución:
La componente vertical de la tensión de la cuerda se iguala con el peso, mientras que la componente horizontal proporciona la fuerza centrípeta necesaria para describir el giro:

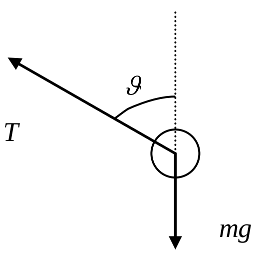
$$T\cos\alpha = mg$$

$$T\sin\alpha = mv^2/r$$

De aquí obtenemos que $v = \sqrt{rg\tan\alpha}$. Ahora es fácil, por trigonometría, obtener el ángulo α que forma la cuerda con la vertical en función de *L* y *r*.

$$\alpha = \arcsin\frac{r}{L}$$

Un niño tiene una piedra atada con una cuerda, y la hace girar intentando que la cuerda esté siempre en un plano horizontal con respecto del suelo. En ausencia de cualquier tipo de rozamiento, ¿podrá conseguirlo?
Solución:
Atendiendo al siguiente diagrama de fuerzas que actúan sobre la piedra tenemos



$$T\cos\vartheta - mg = 0$$

$$T\sin\vartheta = \frac{mv^2}{R}$$

y la solución es $tg\,\vartheta = \dfrac{v^2}{gR}$. Así pues sería necesaria imprimir una velocidad infinita para lograr que ϑ valga 90º y que por tanto la piedra gire en un plano horizontal con respecto al suelo, lo cual es imposible.

Una masa está atada a una cuerda de longitud *l*. Supongamos que la podemos hacer girar en un plano horizontal con respecto del suelo y que la cuerda se rompe cuando el giro es de 50 r.p.m. Si ahora cortamos 1/4 de la cuerda y le atamos a ese cuarto de cuerda la misma masa, ¿qué velocidad angular máxima puede adquirir sin que se rompa la cuerda?

Solución:

La fuerza a la que se rompe la cuerda viene dada por la tensión de la cuerda, que es igual a la fuerza centrípeta que provoca el giro de la masa:

$$F_{rotura} = T = F_{centrípeta} = mv_1^2 / l = m\omega_1^2 l\ .$$

Cuando la cuerda se corta la fuerza de rotura seguirá siendo la misma:

$$F_{rotura} = m\omega_2^2 l / 4\ .$$

Igualando obtenemos

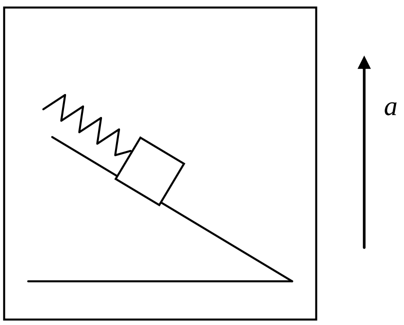
$$m\omega_1^2 l = m\omega_2^2 l/4 \quad \to \quad \omega_2^2 = 4\omega_1^2 \quad \to \quad \omega_2 = 100\text{rpm}\ .$$

Por consiguiente la velocidad angular nunca podrá llegar a ser de 100rpm. De lo contrario la cuerda se romperá.

Sobre un plano inclinado un ángulo *α*, sin rozamiento, descansa una masa *m* sujeta a un muelle como se muestra en la figura. La longitud natural del muelle es *l_0* y su constante *K*. Si situamos este sistema dentro de un ascensor:

Calcular la longitud que tiene el muelle si el ascensor sube con aceleración *a*.

Discutir las condiciones del movimiento del ascensor, si debe subir o bajar y cual debe ser el valor de la aceleración, para que el muelle se comprima y su longitud sea menor que *l_0*



Solución:

Cuando sube, las ecuaciones del movimiento son

$$N sen\alpha = Kx\cos\alpha,$$

$$N\cos\alpha + Kx sen\alpha - mg = ma,$$

de donde se obtiene que

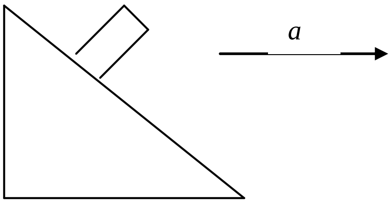
$$x = \frac{m(g+a)sen\alpha}{K}, \quad \text{con } l = l_0 + x\,.$$

Por consiguiente, cuando el ascensor sube acelerado el muelle siempre se estira. Cuando baja, el alargamiento tiene la forma

$$x = \frac{m(g-a)sen\alpha}{K}, \quad \text{con } l = l_0 + x\,,$$

por lo que el muelle se comprimirá ($l < l_0$) cuando $a > g$.

Una masa *m* se apoya sobre un plano inclinado 45º; el plano se desplaza horizontalmente con aceleración constante. Si no existe ningún tipo de rozamiento, calcular la aceleración con la que se debe mover el plano inclinado para que el cuerpo no deslice por el plano

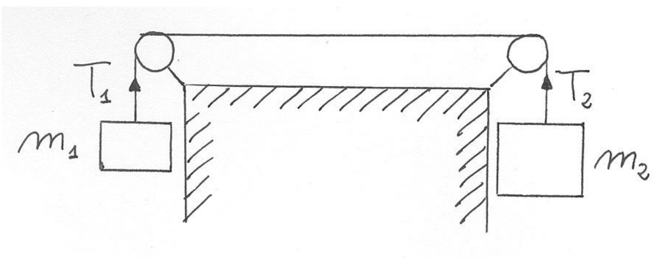


Solución:
Si la masa no desliza sobre el plano, su movimiento con respecto a un observador en reposo será el mismo que el del plano, esto es, movimiento horizontal con aceleración constante. Sobre ella la única fuerza que actúa es la reacción (normal) del plano que se puede descomponer en una componente vertical $F_N \cos 45$, que se debe anular con el peso pues no hay movimiento en esta dirección, y otra horizontal $F_N \sin 45$ que debe ser la responsable del movimiento de la masa pues es la única que actúa en la dirección horizontal. Las ecuaciones de la dinámica son

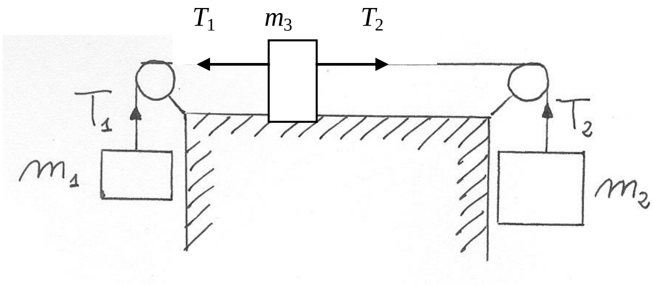
$$F_N \sin 45 = ma$$
$$F_N \cos 45 = mg$$

y despejando llegamos a $a = g$.

Dos masas m_1 y m_2 (m_2 > m_1) están unidas mediante una cuerda a través de dos poleas, tal y como se muestra en la figura (se supone que las poleas carecen de masa, y que el rozamiento entre cuerda y polea es despreciable). Suponiendo que la masa de la cuerda no es despreciable calcular qué tensión es mayor, T_1 ó T_2.



Solución:
Supongamos que la cuerda tiene una masa m_3. Entonces el diagrama de fuerzas del sistema es



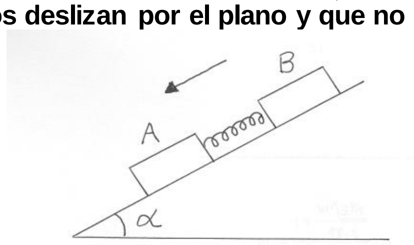
Aplicando las leyes de Newton tenemos a las tres masas tenemos

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g = m_1 a \\ T_2 - T_1 = m_3 a \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \end{cases}$$

La solución es

$$T_1 = \frac{m_1(2m_2 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} g$$
$$T_2 = \frac{m_2(2m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} g$$
$$T_2 > T_1$$

El cuerpo A de la figura de masa *M*, está unido por un muelle de masa despreciable al cuerpo B, de masa también *M*. El ángulo de inclinación del plano es α, el coeficiente dinámico de rozamiento entre el cuerpo A y el plano inclinado vale μ_A y entre el cuerpo B y el plano μ_B. Si suponemos que ambos cuerpos deslizan por el plano y que no hay oscilaciones :



- ¿Qué tiene que cumplirse para que el muelle se estire durante el descenso del sistema por el plano inclinado?
- Si el muelle tiene una constante *K*, ¿cuál será su estiramiento en el caso de que ocurra?
- ¿Cuál será la aceleración del sistema en el caso en el que el muelle se contraiga durante el descenso?

Solución:
Cuando los dos cuerpos comienzan a bajar por el plano, cada uno lo hace con una cierta aceleración inicial. El muelle se estirará durante el descenso si la aceleración inicial del cuerpo A, a_A, es mayor que la del cuerpo B, a_B.
Como

$$a_A = gsen\alpha - \mu_A g \cos\alpha$$
$$a_B = gsen\alpha - \mu_B g \cos\alpha,$$

tenemos que para que se cumpla $a_A > a_B$ se debe cumplir $\mu_A < \mu_B$.

En este caso, el muelle se estira provocando una tensión T en cada uno de los cuerpos, y el sistema desciende con una aceleración constante. La dinámica del sistema viene descrita por las siguientes ecuaciones:

$$Ma = Mgsen\alpha - \mu_A Mg\cos\alpha - T$$

$$Ma = Mgsen\alpha - \mu_B Mg\cos\alpha + T.$$

Resolviendo el sistema tenemos que

$$T = \frac{(\mu_B - \mu_A)Mg\cos\alpha}{2}$$

y la elongación del muelle x, vendrá dada por T/K.

En el caso de que el muelle se comprima durante el descenso, tendríamos que $\mu_A > \mu_B$ y la dinámica sería la siguiente

$$Ma = Mgsen\alpha - \mu_A Mg\cos\alpha + T$$

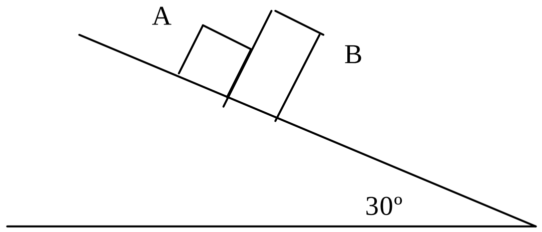
$$Ma = Mgsen\alpha - \mu_B Mg\cos\alpha - T.$$

La aceleración será

$$a = g\ sen\alpha - g\cos\alpha\left(\frac{\mu_A + \mu_B}{2}\right).$$

Como se puede comprobar, la aceleración del sistema en el caso en el que el muelle se comprime es exactamente la misma que en el caso en el que el muelle se estira. Esto es debido a que las fuerzas del muelle son internas, y no afectan para nada a la dinámica del sistema.

Sobre un plano inclinado un ángulo de 30º se colocan dos cuerpos juntos A y B de masa 1 y 5 Kg, respectivamente, tal y como se muestra en la figura. Los coeficientes de rozamiento entre el bloque A y el plano inclinado es 0.1, y entre el bloque B y dicho plano 0.2. ¿Cuánto vale la velocidad de cada cuerpo después de haberse desplazado 1 m a lo largo del plano inclinado partiendo del reposo? (Tomar g=9.8 m/s^2)



Solución:
Para resolver el problema necesitamos saber si ambos cuerpos caen juntos. Para ello calculamos cual es la aceleración con la que inicialmente caería cada uno si estuvieran separados:

$$m_A a_A = m_A gsen\alpha - \mu_A m_A g\cos\alpha$$

$$m_B a_B = m_B gsen\alpha - \mu_B m_B g\cos\alpha$$

Restando ambas ecuaciones tenemos

$$a_A - a_B = g\cos\alpha(\mu_B - \mu_A)$$

Como $\mu_B > \mu_A$ entonces $a_A > a_B$, por lo que ambos cuerpos bajarán juntos.
Sabiendo esto, podemos escribir las ecuaciones de la dinámica para ambos cuerpos:

$$m_A a = m_A gsen\alpha - F_{BA} - \mu_A m_A g\cos\alpha$$

$$m_B a = m_B gsen\alpha + F_{AB} - \mu_B m_B g\cos\alpha\ ,$$

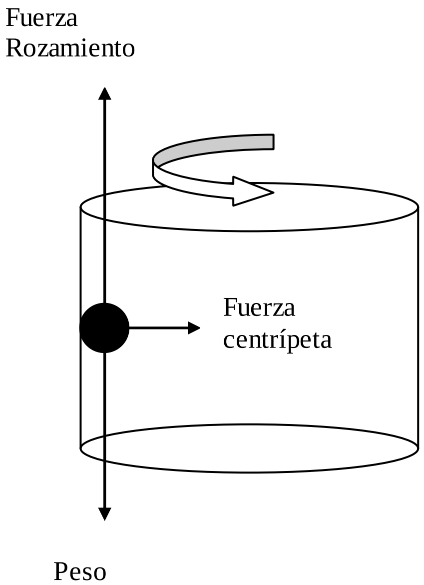
siendo F_{BA} el módulo de la fuerza que el cuerpo B ejerce sobre el cuerpo A y F_{AB} el módulo de la fuerza que el cuerpo A ejerce sobre el cuerpo B. Por el principio de acción y reacción tenemos que

$$F_{BA} = F_{AB}$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos el valor de la aceleración de caída del conjunto formado por ambos cuerpos: $a \approx 3.34\ m/s^2$.

Utilizando la ecuación de la cinemática $v_f^2 - v_i^2 = 2as$, obtenemos que la velocidad del sistema después de recorrer 1m es $2.59\ m/s$.

En un parque de atracciones, la principal atracción consiste en un cilindro hueco colocado verticalmente que gira. Los participantes se sostienen contra las paredes interiores del cilindro mantenidos por la fuerza de rozamiento. Si el coeficiente de rozamiento estático entre los participantes y la pared vale 0.4 y el radio del cilindro es de 5 m, hallar la velocidad angular mínima con la que tiene que girar para que no se caigan. (g=9.8 m/s²)



Solución:
Del diagrama de fuerzas anterior tenemos que Fuerza Rozamiento = Peso.
La Fuerza de rozamiento es proporcional a la fuerza normal que el cuerpo ejerce sobre las paredes del cilindro. Esta fuerza es igual en módulo (aunque en sentido opuesto) a la fuerza que las paredes del cilindro ejercen sobre el cuerpo, que es la fuerza centrípeta necesaria para que el cuerpo gire. Por lo tanto podemos escribir:

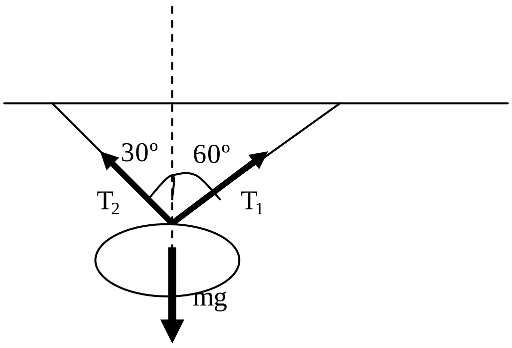
$$\mu m \frac{v^2}{R} = mg$$

Como $v = \omega R$ tenemos que

$$\mu m \omega^2 R = mg$$

de donde obtenemos que $\omega \approx 2.21\ rad/s$

Una masa m cuelga en equilibrio de dos cables que forman unos ángulos de 60º y 30º con la vertical, con tensiones T_1 y T_2, respectivamente. Determinar la tensión de los dos cables.

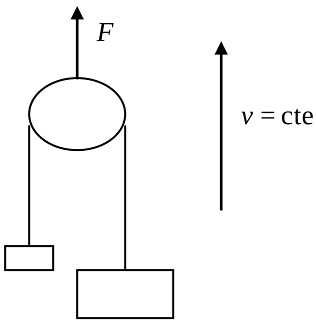


Solución:
Estas tensiones se obtienen al resolver el conjunto de ecuaciones que determinan la estática de la masa en las dos direcciones del espacio, horizontal y vertical:

$$T_1 sen60 = T_2 sen30$$

$$mg = T_1 \cos 60 + T_2 \cos 30$$

Por una polea pasa una cuerda inextensible y de masa despreciable de la que cuelgan en cada extremo dos masas de 1 y 2 kg. La polea es izada a velocidad constante si tiramos de ella con una fuerza *F* de 40 N (Véase figura). Calcular la masa de la polea. No considerar ningún tipo de rozamiento ni el giro de la polea.



Solución:
Para que el sistema suba con velocidad constante, la suma de todas las fuerzas que actúan sobre la polea debe ser cero:

$$F - 2T - mg = 0\ ,$$

donde T es la tensión de la cuerda, hacia abajo, y m es la masa de la polea.
La tensión es obtenida a partir de las ecuaciones del movimiento de las dos masas:

$$m_2 a = m_2 g - T$$

$$m_1 a = T - m_1 g$$

Despejando tenemos que

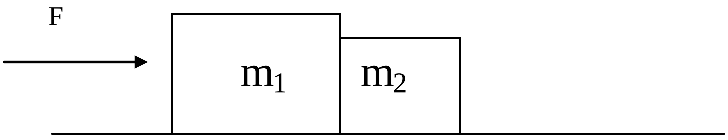
$$a = g\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} = g/3$$

$$T = 4m_1 g/3 = 13{,}1\ \mathrm{N}$$

Finalmente

$$m = \left(F - 2T\right)/g = 1.4\ \mathrm{kg}$$

Dos bloques de masas m_1 y m_2, con $m_1 > m_2$, se colocan tocándose entre sí sobre una superficie horizontal y sin rozamiento, como se indica en la figura.



Se aplica una fuerza horizontal F a m_1, tal como se indica.
- Hallar el módulo de la aceleración del sistema formado por ambos bloques.
- Determine la fuerza de contacto que ejerce el bloque m_1 sobre el m_2.

Solución:

Sean F_{12} y F_{21} los módulos de las fuerzas internas que ejercen los bloques entre sí (la que ejerce el bloque 1 sobre el 2, y la que ejerce el 2 sobre el 1, respectivamente). Por el principio de acción y reacción sabemos que estas fuerzas son iguales en módulo y dirección, aunque tienen sentidos opuestos. Las ecuaciones de la dinámica de ambos bloques son:

$$F - F_{21} = m_1 a$$
$$F_{12} = m_2 a$$

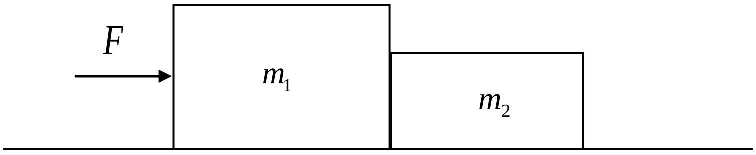
Resolviendo el sistema tenemos que

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$
$$F_{12} = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2} = F_{21}$$

Como se puede apreciar, las fuerzas internas no participan en la aceleración de las dos masas, sólo las fuerzas externas *F*, y el movimiento es el mismo que el de una masa $m_1 + m_2$ sometida a una fuerza externa *F*.

Por otro lado, si $m_1 \gg m_2$ tenemos que F_{12} y F_{21} son mucho menores que *F*; mientras que F_{12} y F_{21} son aproximadamente iguales a *F* cuando $m_1 \ll m_2$.

Sobre dos bloques de masas m_1 y m_2 actúa una fuerza $\vec{F}$ como se indica en la figura. Si μ es el coeficiente de rozamiento entre cada uno de los bloques y el suelo, $\vec{F}_{12}$ la fuerza que ejerce el bloque 1 sobre el bloque 2, y $\vec{F}_{21}$ la fuerza que ejerce el bloque 2 sobre el 1. Calcular la aceleración del sistema y el módulo de $\vec{F}_{21}$.



Solución:
La dinámica del sistema viene descrita por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$m_1 a = F - F_{21} - m_1 g\mu$$
$$m_2 a = F_{12} - m_2 g\mu \quad ,$$

donde *F*, F_{12} y F_{21} son los módulos de las fuerzas $\vec{F}$, $\vec{F}_{12}$ y $\vec{F}_{21}$ respectivamente.

Teniendo en cuenta que $\vec{F}_{21}$ y $\vec{F}_{12}$ son fuerzas de acción y reacción y que sus módulos son iguales, obtenemos que

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - g\mu \qquad\qquad F_{21} = F_{12} = \frac{m_2 F}{m_1 + m_2}$$

Como se puede observar, la aceleración es la misma que la que tendría un solo bloque de masa $m_1 + m_2$, ya que las fuerzas internas no afectan a la dinámica de un sistema.

Un camión circula a una velocidad de 20 m/s. Hallar la distancia mínima que debe recorrer para detenerse sin que resbalen las cajas que lleva en su interior, sabiendo que el coeficiente de rozamiento estático entre las cajas y el suelo del camión vale 0.4. *g*=9.8 m/s^2

Solución:
Desde el punto de vista de un observador en reposo situado fuera del camión (sistema inercial) la única fuerza que actúa sobre las cajas en la dirección del movimiento es la fuerza de rozamiento, cuyo valor máximo es $F_{roz-\max} = \mu m g = 3.92 m\ \mathrm{N}$, siendo *m* la masa de las cajas. Como el camión está frenando, el movimiento de las cajas que ve ese observador es un movimiento decelerado. Por lo tanto, la dinámica del sistema está descrita por

$$m a_{\max} = -F_{roz-\max} \;\Rightarrow\; a_{\max} = -3.92\ \mathrm{m/s}^2 .$$

Como $v_f^{\,2} - v_i^{\,2} = 2as$, tenemos que $s = 51\,\mathrm{m}$. Si el camión frenara con una aceleración mayor, la distancia *s* sería menor, pero la fuerza de rozamiento no podría “sujetar” las cajas y estas resbalarían dentro del camión.

Dos bloques unidos por una cuerda inextensible están en reposo sobre un plano inclinado. El bloque que se encuentra en la parte inferior del plano tiene una masa $m_1 = 0.2$ kg y un coeficiente de rozamiento con el plano inclinado de $\mu_1 = 0.4$. El bloque situado más arriba en el plano inclinado tiene una masa $m_2 = 0.1$ kg y un coeficiente de rozamiento $\mu_2 = 0.6$.
Si el ángulo de inclinación del plano aumenta lentamente, ¿a partir de qué ángulo se tensará la cuerda?
¿Para qué ángulo de inclinación del plano comienzan a deslizar los dos bloques?
Discutir qué ocurrirá si se invierte la posición inicial de los dos bloques, es decir, si el bloque m_1 se encuentra más arriba que el bloque m_2.

Solución:
Inicialmente, las condiciones del equilibrio para cada bloque en reposo son:

$$m_i g \sin\alpha = F_{r,i} \;\Rightarrow\; m_i g \sin\alpha = \mu_i m_i g \cos\alpha \;\Rightarrow\; \alpha = \arctan \mu_i$$

Como $\mu_1 < \mu_2$, cuando el ángulo de inclinación sea de 21.8 grados ($\arctan \mu_1$), el peso de la masa m_1 se igualará al máximo valor de la fuerza de rozamiento y comenzará a deslizar. Sin embargo, la masa m_2 necesita un ángulo mayor, 31º, para vencer su rozamiento, por lo que la cuerda se tensará.

A medida que aumenta al grado de inclinación a partir de los 21.8º, mayor será la tensión de la cuerda. En el momento en el que esta tensión, junto a la componente paralela al plano del peso de m_2, igualen a su fuerza de rozamiento, la masa m_2 comenzará a deslizar. Este ángulo se obtiene del siguiente par de ecuaciones, cada una correspondiente a la condición estática de cada masa:

$$m_1 g \sin\alpha = \mu_1 m_1 g \cos\alpha + T$$

$$m_2 g \sin\alpha + T = \mu_2 m_2 g \cos\alpha$$

Resolviendo el sistema tenemos que $\alpha = 25^{o}$, es decir, a partir de 25º deslizan los dos bloques.

Si consideramos ahora la situación inversa, por el razonamiento inicial tenemos que la masa m_1 comenzará a caer cuando $\alpha = 21.8^{o}$, hasta que choca con la masa m_2, por lo que la cuerda no se tensará nunca. De nuevo, cuando $\alpha = 25^{o}$, los dos bloques comenzarán a bajar juntos.