Geometría Básica. Mayo 2015.

Duración 2 horas. **No se permite ningún tipo de material**.

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (3 puntos)

Se tienen dos triángulos $\triangle\{A, B, C\}$ y $\triangle\{D, E, F\}$ de modo que $r_{A,C} = r_{F,D} = r$ y B, E están en semiplanos distintos de los dos determinados por r. Además $F \in [A, C]$, $C \in [F, D]$, $AB = DE$, $BC = EF$ y $AF = CD$. Probar que $r_{B,C}$ es paralela a r_{EF}.

Ejercicio 2. (4 puntos)

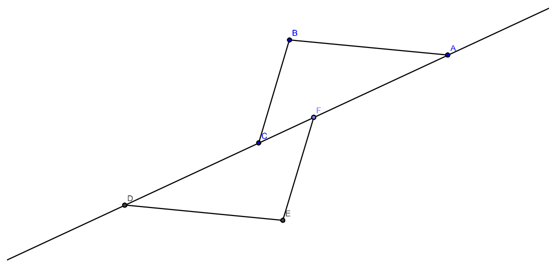
A. Dados dos puntos A y B del plano, describir como construir con regla y compás un punto $C \in [A, B]$ de modo que $AB \cdot BC = AC^2$.

B. Demostrar que el punto C, con la construcción del apartado A, verifica $AB \cdot BC = AC^2$.

Ejercicio 3. (3 puntos)

Sea $\mathcal{C}$ un cubo, C una de sus caras, a una arista de C y V un vértice de a. Encontrar rotaciones ρ_1, ρ_2, ρ_3 que son simetrías de $\mathcal{C}$, de modo que el eje de ρ_1 pase por el centro de C, el eje de ρ_2 pase por el punto medio de a y el eje de ρ_3 pase por el vértice V y además:

$$\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}.$$



SOLUCIONES

Ejercicio 1. El triángulo $\triangle\{A,B,C\}$ es congruente con $\triangle\{D,E,F\}$, pues $AB = DE$, $BC = EF$, y dado que A, C, F y D están alineados:

$$AC = AF + FC = FC + CD = FD$$

Entonces $\angle_{\triangle\{A,B,C\}}F$ es congruente con $\angle_{\triangle\{A,B,C\}}C$ por lo que $r_{B,C}$ es paralela a r_{EF}.

Ha habido otras soluciones también válidas. Por ejemplo se prueba que $\triangle\{D,E,F\}$ es la imagen de $\triangle\{A,B,C\}$ por una mediavuelta con centro en el punto medio$[C,F]$. Como además las medias vueltas llevan rectas a rectas paralelas: $r_{B,C}$ es paralela a r_{EF}.

Ejercicio 2.
A. Construcción del Teorema 10.24.
B. Ejercicio 10.2.

Ejercicio 3.
Sea $C = (V,W,X,Y)$ y $a = [V,W]$. Sea $D = (V,W,Z,T)$ la cara adyacente a C y con la arista $[V,W]$ en común.

Hay dos rotaciones cuyo eje pasa por el centro de C y que son rotaciones de ángulo $\pi/2$. Sea ρ_1 la rotación cuyo eje es ortogonal a C y que es simetría de $\mathcal{C}$ tal que $\rho_1(V) = W$, $\rho_1(W) = X$, $\rho_1(X) = Y$, $\rho_1(Y) = V$.

Hay una única media vuelta ρ_2 que es simetría de $\mathcal{C}$ y con eje que pasa por el punto medio de $a = [V,W]$.

Por último hay dos rotaciones que son simetrías de $\mathcal{C}$, cuyo eje pasa por V. Una de ellas es ρ_3 que verifica $\rho_3(T) = W$.

Veamos como actúa $\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1$ sobre algunos vértices de $\mathcal{C}$:
$\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1(V) = \rho_3 \circ \rho_2(W) = \rho_3(V) = V$
$\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1(W) = \rho_3 \circ \rho_2(X) = \rho_3(T) = W$
$\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1(Y) = \rho_3 \circ \rho_2(V) = \rho_3(W) = Y$
Al tener $\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1$ tres puntos fijos: V, W, Y más el centro del cubo, entonces $\rho_3 \circ \rho_2 \circ \rho_1 = \mathrm{id}_{\mathbf{E}}$.