Resolución automática de problemas

Los problemas que nos planteamos en esta hoja están enfocados a demostrar que no existe un método sistemático (o un algoritmo) que resuelva todos los problemas.

Para conseguir aclarar todas las paradojas, Hilbert, a comienzos del siglo XX, intentó dar una base sólida a las matemáticas, dando ciertos axiomas y ciertas reglas para manejar los mismos. Esto es lo que llamamos un sistema formal.

Sistemas formales.

Un sistema formal es un conjunto de **símbolos** en el que se establecen unas convenciones iniciales que reciben el nombre de postulados o **axiomas**, que se suponen ciertos a priori. A partir de los axiomas, manipulándolos según unas **reglas establecidas**, se deducen los teoremas.

Cuando un matemático quiere ofrecer una demostración de una situación dada, debe utilizar un sistema de lógica. Esto también es cierto para un científico de la computación que desarrolla los algoritmos necesarios para un programa o sistema de programas.
En el desarrollo de cualquier teoría se hacen afirmaciones en forma de oraciones enunciativas; a algunas de estas oraciones las llamaremos proposiciones.

Proposición.- Es una oración enunciativa que, o bien es verdadera, o bien es falsa, pero no ambas cosas a la vez.

Es posible obtener nuevas proposiciones a partir de otras existentes, de la siguiente forma:
1.- Transformando una proposición **p** en otra **~p** , que se lee "no p".
2.- Combinando dos o más proposiciones lógicas en una proposición compuesta, mediante los siguientes **conectores lógicos:**

- Conjunción: $p \wedge q$, que se lee "p y q"
- Disyunción: $p \vee q$, que se lee "p o q"; esta "o" se usa en el sentido inclusivo, es decir, $p \vee q$ es p, o q, o ambas
- Implicación: $p \rightarrow q$, que se lee "si p entonces q", o bien "p implica q" ; a la proposición p se le suele llamar hipótesis, y a la proposición q se le llama tesis o conclusión
- Bicondicional: $p \leftrightarrow q$, que se lee "p si y sólo q" o "p implica q".

El valor de verdad de una proposición compuesta depende del valor de verdad de las proposiciones componentes.

Proposición abierta.- Es una frase enunciativa que contiene una o más variables, y no es una proposición, pero se convierte en una proposición cuando las variables que aparecen en ella se reemplazan por opciones permisibles (el conjunto de las opciones permisibles recibe el nombre de **universo**).

Una proposición abierta p(x) puede ser verdadera para todos los valores de x en su universo (en este caso se dice que es una tautología), o bien falsa para todos los valores de x en su universo (se dice que es una contradicción), o ser verdadera para algunos valores de x y falsa para otros. Las frases "para algún..." y "para todo..." cuantifican las proposiciones abiertas, por lo que se llaman **cuantificadores lógicos**. Una proposición abierta cuantificada (en todas sus variables) es ya una proposición, y por tanto tiene un único valor de verdad.

Cuantificador existencial: "Para algún x", que también se puede expresar como "existe un x" o "para al menos un x". En forma simbólica se representa por "$\exists$ x ".

Cuantificador universal: “Para todo x”, que también se puede expresar como “para cada x” o “para cualquier x”. En forma simbólica se representa por “$\forall$ x ”.

De conseguir la completa axiomatización de las matemáticas, cualquier problema matemático podría ser resuelto por una máquina: si introducimos en el ordenador los axiomas y las reglas para manejarlos, con el tiempo llegaría a demostrar todo lo demostrable. Por tanto, de resolverse el problema planteado por Hilbert, se encontraría un algoritmo para la resolución automática de problemas, y con ello se podría “garantizar que las matemáticas no tienen errores”.

El trabajo de Gödel en 1931 demostró que el método axiomático no es completo, que ni siquiera la aritmética ordinaria de los números enteros puede ser plenamente axiomatizada. Y aún más, demostró que es imposible establecer la consistencia de una serie de sistemas.

Resulta, por tanto, inalcanzable la completa sistematización de muchas zonas de la matemática, y no puede darse garantías de que el pensamiento matemático se halle libre de contradicción interna.

Teorema de Gödel.

En cualquier sistema matemático que sea suficientemente grande para que en él se pueda desarrollar la aritmética de los números naturales existen proposiciones P con perfecto sentido dentro del sistema que son indecidibles (es decir, no puede demostrarse ni “P” ni “no P”), y una de ellas es precisamente la que afirma la consistencia del sistema.

Para demostrar este teorema, dado un sistema axiomático, Gödel construye explícitamente una proposición P, tal que en dicho sistema no puede demostrarse ni P ni no-P. Esta proposición P nunca podrá ser demostrada por el ordenador, o siguiendo los pasos de un algoritmo.
Hay que destacar, que nosotros, utilizando intuiciones exteriores al sistema axiomático de partida, sí podemos comprobar que P es verdadera; pero el sistema axiomático no puede.

Problema 1.- Determina si son verdaderas o falsas las siguientes proposiciones:
a) Si $1 > 2$, entonces $5 > 10$
c) Si $2 > 3$, entonces el Pisuerga pasa por Valladolid
c) Si $3 < 5$, entonces $2 < 9$
d) Si $2 < 3$, entonces el Pisuerga no pasa por Valladolid
(Recordatorio de geografía: El Pisuerga sí pasa por Valladolid)

Problema 2.- Si $p \to q$ es falsa ¿cuál es el valor de verdad de las siguientes proposiciones?
a) $p \wedge q$
b) $\sim p \vee q$
c) $q \to p$
d) $\sim q \to \sim p$

Problema 3.- Sean p, q, r, s las siguientes proposiciones:
p: Termino de escribir mi programa de computación antes de la comida
q: Jugaré al tenis esta tarde
r: El sol está brillando
s: La humedad es baja
Escribe en lenguaje simbólico:
a) Si el sol está brillando, jugaré al tenis esta tarde
b) Terminar de escribir mi programa de computación antes de la comida es necesario para que juegue al tenis esta tarde
c) La humedad baja y el sol brillante son condiciones suficientes para que juegue al tenis esta tarde

Problema 4.- Sean p, q, r las siguientes proposiciones acerca de un triángulo ABC particular:
p: el triángulo ABC es isósceles
q: el triángulo ABC es equilátero
r: el triángulo ABC es equiangular
Traduce cada una de las siguientes proposiciones a una frase en castellano:
a) $p \to q$
b) $\sim p \to \sim q$
c) $q \leftrightarrow r$
d) $p \wedge \sim q$
e) $r \to p$

Problema 5.- Escribe cada una de las siguientes proposiciones como una implicación de la forma "si...entonces":
a) El entrenamiento diario es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo
b) Arregle mi aire acondicionado o no pagaré la renta
c) María puede subir a la motocicleta de Luis sólo si usa el casco

Problema 6.- Al inicio de un programa MAPLE la variable entera n recibe el valor 7. Determina el valor de n después de encontrar cada uno de los siguientes enunciados sucesivos durante la ejecución del programa (el valor que resulta después de ejecutar el apartado a) es el valor de n para el enunciado b), etc.)

```
> n:=7
a) if  n > 5  then n:= n+2  fi ;
b) if  n+2 = 8  or  n-3 = 6  then  n:= 2*n+1  fi ;
c) if  n-3 = 16 and  n mod 6 = 1  then n:= n+3  fi ;
d) if  n <> 21  and  n-7 = 15  then n:= n - 4 fi ;
e) if  n mod 5 = 2  or  n+1 = 20  then n:= n+1  fi ;
```

Problema 7.- Al inicio de un programa MAPLE las variables enteras n y m reciben los valores 8 y 3 respectivamente. Determina el valor de n y de m después de encontrar cada uno de los siguientes enunciados sucesivos durante la ejecución del programa.

```
>  n:= 8 : m:= 3 :
a) if  n-m = 5  then n:= n-2  fi ;
b) if  2*m = n and n mod 4 = 2  then  n:= 4*m-3  fi ;
c) if  n < 8 or  m mod 2 = 0   then n:= 2*m  else  m:= 2*n  fi ;
d) if m < 20 and  n mod 6 = 3  then m:= m-n-5  fi ;
e) if  n = 2*m  or  n mod 7 = 5  then m:= m+2 fi ;
f) if  n mod 3 = 0  and  m  mod 3 <>1  then  m:= n fi ;
g) if  m*n <> 35  then  n:=3*m+7  fi ;
```

Problema 8.- En el siguiente segmento de un programa MAPLE, las variables n, m i, j son enteras. ¿Cuántas veces se ejecuta la sentencia "print"?

```
m:= 5 ; n:= 5 ;
for  i  from  1  to  m  do
     for j  from  1  to  n  do
          if   i <> j  then  print ( `la suma de`, i , `y` , j , `es`, i+j )  fi ;
     od ;
od ;
```

Problema 9.- En el siguiente segmento de un programa MAPLE, ¿cuántas veces se ejecuta la sentencia "print"?

```
x:=10;
for  i  from  1  to  7  do
    for  j  from  1  to  i+3  do
        if  x > 8  or  ( i > 5  and  j < 10 )  then  print(x)  fi;
    od;
    x:=x-1;
od;
```

Problema 10.- Determina si el siguiente segmento de un programa MAPLE, acaba, para los siguientes valores iniciales:
a) x = 5 , y = 2, t = 4 b) x = -1, y = 2, t = 4

```
while  (x <> 0  and  y > 0 ) or  not  t = 3  do
       x:= x-1;  t:= 3;
od;
```

Problema 11.- Quieres demostrar que "$p \rightarrow q$" y sabes que q es falso. ¿Qué tendrías que demostrar?
a) que p es verdadero
b) que p es falso

Problema 12.- Quieres demostrar que "$A \rightarrow B$ es falso" ¿Qué tendrías que demostrar?
a) B es falso b) B es verdadero y A es falso c) B es falso y A verdadero
d) A es falso e) B es falso y A es falso

Problema 13.- Sea : M el conjunto de todas las personas de una cierta ciudad
P el conjunto de todos los periódicos que se publican en esa ciudad
D el conjunto de todos los días del año

Escribe utilizando los símbolos de los cuantificadores lógicos cada una de las afirmaciones entre barras:

a) /Algún loco hay que cada día lee todos los periódicos/
b) /Algún loco hay cada día que lee todos los periódicos/
c) Esta ciudad es muy instruida. Aquí /cada uno lee algún periódico cada día/
d) /Cada día hay algún periódico que todo el mundo lee/
e) Somos muy brutos en este pueblo, pero /todos los días hay alguien que lee algún periódico/
f) Es una ciudad de maníacos, /todos leen todos los periódicos cada día/
g) /Al menos hubo un día en el que alguien leyó un periódico/
h) Esta ciudad está dominada por un diario, /todo el mundo lo lee todos los días/
i) Aquí somos muy fieles, /cada uno lee siempre el mismo periódico/, el suyo de toda la vida
j) Fue tal el notición que /aquel día todo el mundo leyó todos y cada uno de los periódicos/
k) /Ese día hubo un periódico que fue leído por todo el mundo/

Problema 14.- Escribe la negación de cada una de las siguientes proposiciones, y di cuál es la verdadera.

a) $\forall x \in (0,\infty)$, $x^2 - x > 0$ b) $\exists x \in (0,\infty)$ / $x^2 - x > 0$
c) $A = [1,4]$, $a = 4, 3$; $\forall \varepsilon > 0$, $(a - \varepsilon , a + \varepsilon)$ contiene elementos de A
d) $\exists M \in (0,\infty)$ / $\forall x \in (-\infty, 1)$, $x < M$ e) $\forall x \in (-\infty, 1)$, $\exists M \in (0,\infty)$ / $x < M$
f) $\forall x \in [0,1]$, $\exists y \in [-1,1]$ / $x + y^2 = 1$ g) $\exists y \in [-1,1]$ / $\forall x \in [0,1]$, $x + y^2 = 1$

En la Isla de los Caballeros y Bribones

Nos situamos en la Isla de los Caballeros y los Bribones, donde cada habitante de la isla, o es un caballero o es un bribón. Y la característica de estos personajes es: los caballeros siempre formulan enunciados verdaderos y los bribones siempre formulan enunciados falsos.
El empadronador, señor Max, decidió hacer un censo de la isla. Max es un razonador que siempre es correcto en sus deducciones, es decir, nunca creerá algo que es falso (Max va a hacer el papel de nuestro sistema de axiomas, que se supone, nunca va a deducir una proposición falsa).
Max se encontró los siguientes problemas cuando llegó a la isla:

Problema 15.- La primera persona a la que Max le preguntó si era un caballero o un bribón, estaba demasiado lejos para poder oírle bien, pero a Max le pareció entender que decía: "Yo soy un bribón". ¿Es el nativo un bribón o es un caballero?

Problema 16.- Max llamó a una puerta de la casa de un matrimonio; el marido la abrió a medias y le preguntó qué deseaba.
- Hago un censo - respondió Max -, y necesito información sobre usted y su esposa, ¿cuál, si alguno lo es, es un caballero, y cuál, si alguno lo es, es un bribón?
- ¡Ambos somos bribones! – dijo el marido enojado mientras cerraba la puerta de un golpe.
¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Problema 17.- En la siguiente casa, Max le preguntó al marido: "¿Ambos son bribones?", a lo que el marido respondió: "Por lo menos uno de nosotros lo es". ¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Problema 18.- La siguiente casa que visitó Max resultó un mayor enigma. Un hombre algo introvertido abrió la puerta tímidamente. Cuando Max le pidió que dijera algo sobre sí mismo y su esposa, lo único que dijo el esposo fue: "Si soy un caballero, entonces también lo es mi esposa".

Max se fue no muy complacido. “¿Cómo puedo deducir algo sobre alguno de los dos a partir de una respuesta tan evasiva?”, pensó. Estaba a punto de escribir “Marido y Mujer ambos son desconocidos”, cuando súbitamente exclamó: “¡Por supuesto que puedo determinar de qué clase son ambos!”
¿De qué clase es el marido y de qué clase es la mujer?

Problema 19- Cuando el empadronador visitó a la cuarta pareja, el esposo dijo: “Mi esposa y yo somos de la misma clase”. ¿Qué puede deducirse sobre el marido y qué sobre la esposa?

Problema 20.- Consideremos tres habitantes A, B y C de la isla de los Caballeros y los Bribones. Supongamos que A y B formulan los siguientes enunciados:
A: B y C son ambos caballeros B: A es un bribón y C es un caballero
¿De qué clase son A, B y C?

Problema 21.- Supongamos que A, B y C son habitantes de la isla de los Caballeros y los Bribones, y que A y B hacen las siguientes declaraciones:
A: B es un bribón B: A y C son de clases diferentes
¿Es C un caballero o un bribón?

Problema 22. (Teorema de Incompletitud de Gödel).- Supongamos que un nativo de la isla comenta: “Max nunca creerá que soy un caballero”. ¿Qué puede creer Max sobre el nativo? ¿Qué puedes deducir tú sobre el nativo? (Recuerda que Max, siempre es correcto en sus creencias)

Problema 23.- A un razonador de delicada salud le recomiendan una cura de baños de azufre y aguas minerales en la Isla de los Caballeros y los Bribones. Al llegar a la Isla pregunta a un nativo si la cura servirá de algo. El nativo responde: “ Si soy un caballero, entonces la cura servirá”.
Al principio no le pareció muy tranquilizador al razonador, pero luego suspiró aliviado ¿Por qué?

Problema 24.- Después de hornear un pastel para sus cuatro sobrinos, la tía Natalia lo deja en la mesa para que se enfríe. Sale de compras, y al regresar descubre que alguien se ha comido un trozo del pastel. Pregunta cuál de sus sobrinos se lo comió, y los cuatro “sospechosos” le dicen lo siguiente:
Delia: Yo no me lo comí. Carlos: Jimena se comió el trozo de pastel
Jimena: Toño se lo comió Toño: Jimena mintió cuando dijo que yo me había comido el pastel
Si sólo una de las proposiciones es verdadera, y sólo uno de ellos se comió el trozo de pastel ¿quién fue?

Problema 25. – Supongamos que ofrecen dos premios, Premio 1 y Premio 2. Tienes que formular un enunciado; si el enunciado es verdadero, entonces recibes uno de los dos premios (no se sabe a priori cuál de los dos es); si el enunciado es falso, entonces no ganas ningún premio. ¿Qué enunciado formularás que te garantice ganar el Premio 1?

Problema 26.- Nuevamente se ofrecen los dos premios. Si formulas un enunciado verdadero, recibirás por lo menos uno de los premios y posiblemente ambos. Si formulas un enunciado falso, no ganas ningún premio. ¿Qué enunciado formularías que te hiciese ganar los dos premios?

Problema 27.- Si formulas un enunciado verdadero, ganas el Premio 2, y si formulas un enunciado falso, no ganas el Premio 2 (puedes o no ganar el premio 1) ¿Qué enunciado te hará ganar el Premio 1?

Problema 28.- Si formulas un enunciado verdadero, no ganas ningún premio, y si formulas un enunciado falso, ganarás uno de los dos premios. ¿Con qué enunciado ganarás el Premio 1?

Problema 29.- Te ofrecen nueve cajas para que abras sólo una. En una de las cajas hay premio; cada una de las demás cajas, o bien está vacía o bien tiene un recargo de 20 euros. El letrero de la caja donde está el premio es cierto, los letreros de las cajas con recargo mienten y los letreros de las cajas vacías pueden mentir o decir la verdad. Además, se te ha comunicado por escrito si la caja 8 está o no vacía; y aunque está escrito en un idioma que desconoces, sabes que, con estos datos, puedes encontrar la caja con premio. ¿Qué caja eliges? **1**: El premio está en una caja de número impar. **2**: Esta caja está vacía. **3**: O el 5 está bien o el 7 está mal. **4**: El 1 está mal. **5**: O el 2 o el 4 está bien. **6**: El 3 está mal. **7**: El premio no está en la caja 1. **8**: En esta caja hay recargo y la 9 está vacía. **9**: En esta caja hay recargo y el 6 está mal.

Problema 30.- Un jugador coloca una ficha sobre el recuadro 1 y otra sobre el 7. En cada paso, para realizar un movimiento, se elige una de las dos fichas y se siguen las instrucciones del recuadro en el que está situada. El objetivo del juego es efectuar una serie de movimientos de modo que al menos una de las dos fichas acabe en el cuadro rotulado META ¿Puedes encontrar la forma de llegar a META?