Enunciado 2. Un computador ejecuta el mismo programa una y otra vez. Si no hay errores, el tiempo que tarda en ejercutarse es una variable aleatoria positiva con función de densidad $f(x)$. Cada vez que un programa se ha ejecutado en su totalidad, vuelve a ejecutarse de nuevo desde el principio.

Sin embargo, en ocasiones, durante la ejecución del programa ocurre un error, entonces debe volver al comienzo y ejecutarlo de nuevo dejando sin terminar la ejecución que estaba en marcha. Los errores ocurren conforme a un proceso de Poisson de parámetro $\lambda > 0$.

Aceptaremos que los sucesivos tiempos de ejcución son variables independientes e independientes del proceso de Poisson de los errores.

Cuestión 2. A largo plazo, ¿cuál es el número de programas que se ejecutan totalmente por unidad de tiempo?

Aplicar el resultado anterior al caso en que el tiempo que tarda en ejecutarse el programa tenga densidad $f(x) = xe^{-x} I_{\{x>0\}}(x)$, donde $I_{\{x>0\}}(x)$ es la función indicadora del conjunto $(0, \infty)$.

<u>*Solución:*</u>

Consideraremos un proceso de renovación $\{N(t), t > 0\}$, considerando que se produce una renovación cada vez que se termina una ejecución completa de un programa (sin que haya sido interrumpida por un error). Definimos ahora las siguientes variables aleatorias:

- T_n : tiempo que tarda en ejecutarse el programa la n-ésima vez que se ejecuta, sin tener en cuenta el proceso de errores.
- E_n: tiempo transcurrido entre la aparición de los errores $(n-1)$-ésimo y n-ésimo.
- X_n: tiempo entre las renovaciones $(n-1)$-ésima y n-ésima del proceso de renovación considerado.

Para todo $n \in \mathbb{N}$, todas las variables aleatorias $\{T_n\}$ tienen la misma distribución, determinada por la densidad $f(x)$, y las variables $\{E_n\}$ tienen todas distribución $\exp(\lambda)$. Llamaremos ahora

$$p = P\{E_n < T_m\} \text{ para } n, m \in \mathbb{N} \text{ cualesquiera.}$$

Vamos a calcular la distribución de X_1, que es la misma que la de todas las variables aleatorias$\{X_n\}$. Vamos a condicionar por el número de errores que aparecen antes de que se lleve a cabo la primera ejecución completa, llamaremos C a esa variable aleatoria.

$$P\{C = n\} = P\{E_1 < T_1, \ldots, E_n < T_n, E_{n+1} \geq T_{n+1}\} = P\{E_1 < T_1\} \ldots P\{E_n < T_n\} P\{E_{n+1} \geq T_{n+1}\} =$$

$$= p^n (1-p).$$

Además, condicionando por C, se tiene que

$$E[X_1 \mid C = n] = E[E_1 + \ldots + E_n + T_{n+1} \mid C = n] = \sum_{i=1}^{n} E[E_i \mid C = n] + E[T_{n+1} \mid C = n] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} E[E_i \mid E_i < T_i] + E[T_{n+1} \mid T_{n+1} \leq E_{n+1}] = \sum_{i=1}^{n} E[\min\{E_i, T_i\}] + E[\min\{E_{n+1}, T_{n+1}\}] =$$
$$= (n+1) E[\min\{E_1, T_1\}].$$

Podemos concluir entonces que

$$E[X_1] = \sum_{n=0}^{\infty} P\{C=n\}E[X_1 \mid C=n] = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(1-p)(n+1)E[\min\{E_1,T_1\}] =$$

$$= (1-p)E[\min\{E_1,T_1\}] \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p^n = \frac{E[\min\{E_1,T_1\}]}{1-p}.$$

Y se tiene entonces que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E[X_1]} = \frac{1-p}{E[\min\{E_1,T_1\}]}.$$

Para el caso concreto en que la función de densidad de T_1 sea $f(x) = xe^{-x}I_{\{x>0\}}(x)$, se tiene que

$$p = P\{E_1 < T_1\} = \int_0^{\infty} f(x)P\{E_1 < x\}\,dx = \int_0^{\infty} xe^{-x}(1-e^{-\lambda x})\,dx = \frac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}.$$

Por otro lado, la función de distribución de T_1 viene dada por

$$F(x) = \int_0^x se^{-s}\,ds = 1-(x+1)e^{-x}.$$

Por tanto, se tiene que la función de distribución de $\min\{E_1,T_1\}$ viene dada por

$$P\{\min\{E_1,T_1\} \le x\} = P\{E_1 \le x\}P\{T_1 \le x\} = (1-(x+1)e^{-x})(1-e^{-\lambda x}) =$$

$$1-e^{-\lambda x}-(x+1)e^{-x}+(x+1)e^{-(\lambda+1)x}.$$

Por tanto, su densidad viene dada por

$$\lambda e^{-\lambda x}+xe^{-x}-(\lambda x+\lambda+x)e^{-(\lambda+1)x}$$

En definitiva, se tiene que

$$E[\min\{E_1,T_1\}] = \int_0^{\infty} x(\lambda e^{-\lambda x}+xe^{-x}-(\lambda x+\lambda+x)e^{-(\lambda+1)x})\,dx = \frac{2\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda(\lambda+1)^2}.$$

Por tanto,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t} = \frac{1-p}{E[\min\{E_1,T_1\}]} = \frac{1-\dfrac{\lambda(\lambda+2)}{(\lambda+1)^2}}{\dfrac{2\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda+1}{\lambda(\lambda+1)^2}} = \frac{\lambda}{2\lambda^3+4\lambda^2+2\lambda+1}.$$