Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2014, 1^a semana.

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)
(a) Matriz de Gram un producto escalar.
(b) Vectores conjugados respecto a una forma cuadrática.
(c) Polinomio anulador de un endomorfismo.
(d) Forma polar.

Ejercicio 1: (2 puntos)
Demuestre que, en un espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$, la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales B y B' es una matriz ortogonal.

Ejercicio 2: (3 puntos)
Sea f la isometría vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Determine el tipo de isometría y los elementos geométricos que la caracterizan: eje de giro, ángulo, plano de simetría; según corresponda.

Ejercicio 3: (1.5 puntos)
Encontrar la matriz canónica de Jordan, J, de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ que cumpla:

$$\begin{aligned} Ker(f-I)^3 &: \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ Ker(f-I)^2 &: \quad (x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_4 = 0) \\ Ker(f-I) &: \quad (x_1 + x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 = 0) \\ Ker(f) &: \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \end{aligned}$$

Determinar una base B tal que $M_B(f) = J$.

Ejercicio 4: (1.5 punto)
Determine la signatura de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que cumpla las siguientes condiciones:
a) Existe un plano $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que es el subespacio de mayor dimensión respecto al cual la restricción de Φ a U, $\Phi_{|U}$, es definida positiva.
b) En el subespacio conjugado de U existen vectores autoconjugados.

Soluciones

Definiciones:

Matriz de Gram de producto escalar Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Se denomina matriz de Gram del producto escalar $<,>$ respecto a la base $\mathcal{B}$, a la matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, de orden n, cuyos términos son:

$$a_{ij} =< v_i, v_j > \text{ con } i, j = 1, ..., n.$$

Vectores conjugados respecto a una forma cuadrática Dada una forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{K}$ y $f_p : V \times V \to \mathbb{K}$ su forma polar asociada, se dice que dos vectores $u, v \in V$ son conjugados respecto a Φ si y sólo si $f_p(u.v) = 0$.

Polinomio anulador de un endomorfismo Dados un endomorfismo f de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y un polinomio $p(t) \in \mathbb{K}[t]$ con coeficientes en $\mathbb{K}$: $p(t) = a_n t^n + ... + a_1 t + a_0$, se dice que $p(t)$ anula a f si el endomorfismo:

$$p(f) = a_n f^n + ... + a_1 f + a_0 I$$

es nulo.

Forma polar Dado un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y $\Phi : V \to \mathbb{K}$ una forma cuadrática, se denomina forma polar de Φ a la única forma bilineal simétrica f_p que cumple $f_p(v, v) = \Phi(v)$, para todo $v \in V$. Además, f_p queda totalmente determinada por Φ mediante la siguiente relación:

$$f_p(u, v) = \frac{1}{2}(\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v)).$$

Ejercicio 1: Proposición página 111

Ejercicio 2: Sea f la isometría vectorial de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Determine el tipo de isometría y los elementos geométricos que la caracterizan: eje de giro

Solución: Para determinar el tipo de isometría basta con saber la dimensión del subespacio de vectores fijos $V_f = Ker(f - I)$. Así, si llamamos A a la matriz dada, $\dim V_f = 3 - rg(A - I)$:

$$\det(A - I) = \det \begin{pmatrix} -3/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & -1 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & -3/2 \end{pmatrix} = -4 \quad \Rightarrow \quad rg(A - I) = 3 \quad \Rightarrow \quad \dim V_f = 0.$$

Ya podemos afirmar que se trata de un giro g compuesto con una simetría σ respecto a un plano ortogonal al eje del giro: $f = g \circ \sigma$.

El eje del giro es el subespacio $V_{-f} = Ker(f + I)$ que tiene ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -\sqrt{2}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\text{simplificando}}{\Rightarrow} \quad (x + z = 0,\ y = 0).$$

El plano de la simetría es el complemento ortogonal al eje de giro:

$$V_{-f}^{\perp} = (x - z = 0).$$

Para determinar el ángulo buscamos la forma de Jordan real de f que será

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

respecto a una base ortonormal $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que v_1 pertenece al eje de giro y v_2 y v_3 pertenecen al plano de simetría. Tomamos

$$v_1 = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2),\ v_1 = (0, 1, 0)\ \text{ y } v_3 = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$$

con orientación positiva, es decir $det(v_1, v_2, v_3) = 1$, y hacemos el cambio de base para obtener:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = J$$

A la vista de la matriz de Jordan real, tenemos $\cos\alpha = 0$ y $\operatorname{sen}\alpha = -1$, de donde $\alpha = \frac{3\pi}{2}$.

Ejercicio 3:
Encontrar la matriz canónica de Jordan, J, de un endomorfismo f de $\mathbb{K}^4$ que cumpla:

$$\begin{aligned} Ker(f - I)^3 &: \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ Ker(f - I)^2 &: \quad (x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ x_4 = 0) \\ Ker(f - I) &: \quad (x_1 + x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_2 = 0) \\ Ker(f) &: \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \end{aligned}$$

Determinar una base B tal que $M_B(f) = J$.

Solución: Con los datos del problema tenemos dos autovalores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 \quad &, \quad \alpha_1 = 3,\ d_1 = 1 = \dim\ker(f - I) \\ \lambda_2 = 0 \quad &, \quad \alpha_2 = 1,\ d_2 = 1 = \dim\ker(f); \end{aligned}$$

Como las multiplicidades geométricas son iguales a 1, entonces sólo hay un bloque por cada autovalor, y por tanto una única línea en cada esquema de subespacios generalizados:

$$\begin{array}{ccccccc} E(1) & \subset & E(1)^2 & \subset & E(1)^3 = M(1) & \qquad & E(0) = M(0) \\ v_1 & \leftarrow & v_2 & \leftarrow & v_3 & & v_4 \end{array}$$

Por lo tanto, la matriz de Jordan de dicho endomorfismo es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si f es un endomorfismo en las condiciones dadas, la base B tal que $M_B(F) = J$ tendrá que cumplir

$$B = \{v_1 = (f-I)(v_2),\ v_2 = (f-I)(v_3),\ v_3,\ v_4\},\ \text{ con } v_3 \in \ker(f-I)^3 - \ker(f-I)^2.$$

Entonces tomando los vectores:
$v_3 \in \ker(f-I)^3 - \ker(f-I)^2$, por ejemplo $v_3 = (1,0,0,1)$,
$v_2 \in \ker(f-I)^2 - \ker(f-I)$, por ejemplo $v_2 = (1,1,0,0)$,
$v_1 \in \ker(f-I)$, por ejemplo $v_1 = (1,0,-1,0)$;
los tres linealmente independientes, y el autovector asociado al autovalor 0:
$v_4 \in \ker(f)$, por ejemplo $v_4 = (0,0,0,1)$.
La matriz en la base B del endomorfismo f tal que

$$f(v_1) = v_1,\ (f-I)(v_2) = v_1,\ (f-I)(v_3) = v_2,\ f(v_4) = 0,$$

es la matriz de Jordan J.
La matriz de este endomorfismo en la base canónica sería:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = PJP^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: Determine la signatura de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que cumpla las siguientes condiciones:
a) Existe un plano $U \subset \mathbb{R}^3$ tal que es el subespacio de mayor dimensión respecto al cual la restricción de Φ a U, $\Phi_{|U}$, es definida positiva.
b) En el subespacio conjugado de U existen vectores autoconjugados.

Solución: Formamos una base de $\mathbb{R}^3$ de vectores conjugados del siguiente modo: tomamos una base $\{v_1, v_2\}$ de vectores conjugados de U, y un vector autoconjugado $v_3 \in U^c$, entonces la matriz de la forma cuadrática en la base $\{v_1, v_2, v_3\}$ es diagonal

$$\begin{pmatrix} \Phi(v_1) > 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(v_2) > 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(v_3) = 0 \end{pmatrix};$$

con dos elementos positivos y uno 0 en la diagonal. Como la signatura no depende de la base, si es de vectores conjugados, entonces se tiene siempre signatura $(2,0)$.