Cálculo de Probabilidades I — Septiembre 2015

Ejercicio 1. Una ficha se desplaza por el siguiente tablero, pudiendo hacer únicamente desplazamientos verticales u horizontales.

A	**B**
C	**D**

Cuando la ficha se encuentra en una casilla puede pasar a cada una de las dos adyacentes, con la misma probabilidad, 1/2, e independientemente de los movimientos anteriores. La posición de la ficha en cada etapa se designa por $X_1, X_2, X_3, \ldots$, siendo la posición inicial $X_1 = A$.

Se define B_n como el suceso “la ficha no ha estado en B en ninguna de las n primeras etapas”, es decir, $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} \{X_k \neq B\}$, y análogamente para los sucesos C_n y D_n.

(a) Siendo $n \geq 2$, calcular las probabilidades de los sucesos B_n, C_n y D_n.

(b) Calcular la probabilidad de que, a lo largo de las n primeras etapas, la ficha no haya visitado aún todas las casillas del tablero.

(c) Sea T la etapa en que la ficha ha visitado por primera vez todas las casillas del tablero. Calcular $\mathrm{E}[T]$.

Ejercicio 2. Un profesor esparce sobre la mesa los trabajos corregidos de los n alumnos de su clase, para que cada uno tome uno de ellos al azar.

(a) Calcular el número esperado de alumnos que obtienen su propio trabajo.

Los alumnos que consiguen su trabajo se lo llevan y el resto vuelve a depositarlo sobre la mesa para repetir el reparto por el mismo procedimiento. Así se continúa hasta que todos obtienen su trabajo.

(b) Hallar el número esperado de rondas hasta que se marchan todos.

Solución

Ejercicio 1. (a) Si n es impar, entonces $X_n \in \{A, D\}$, mientras que si n es par se tiene $X_n \in \{B, C\}$. Se calcula la probabilidad de los sucesos B_n, C_n y D_n.

- Si $n = 2k$ o si $n = 2k + 1$ para algún $k \geq 1$ entonces $\mathrm{P}(B_n) = 1/2^k$, pues en los instantes $1, 3, \ldots, 2k-1$, en los que el proceso estaba en $\{A, D\}$, el proceso ha debido pasar siempre al estado C.
- Análogamente, si $n = 2k$ o si $n = 2k + 1$ para algún $k \geq 1$ entonces $\mathrm{P}(C_n) = 1/2^k$.
- Si $n = 2k$ para algún $k \geq 1$ entonces $\mathrm{P}(D_n) = 1/2^{k-1}$, pues en los instantes $2, 4, \ldots, 2k - 2$ en los que el proceso estaba en $\{B, C\}$, la transición ha debido ser siempre a A. Del mismo modo, si $n = 2k + 1$ para algún $k \geq 1$, entonces es $\mathrm{P}(D_n) = 1/2^k$.

(b) El suceso K_n definido como no haber visitado alguno de los estados a lo largo de las etapas $1, \ldots, n$ se escribe

$$K_n = B_n \cup C_n \cup D_n.$$

Por tanto, su probabilidad es igual a

$$\mathrm{P}(B_n) + \mathrm{P}(C_n) + \mathrm{P}(D_n) - \mathrm{P}(B_n \cap D_n) - \mathrm{P}(C_n \cap D_n) - \mathrm{P}(B_n \cap C_n) + \mathrm{P}(B_n \cap C_n \cap D_n).$$

- Es claro que las dos últimas probabilidades son nulas para $n \geq 2$.
- Se tiene $\mathrm{P}(B_n \cap D_n) = 1/2^{n-1}$, pues para no visitar ni B ni D, todas las transiciones han debido ocurrir entre A y C.
- Igualmente, es $\mathrm{P}(C_n \cap D_n) = 1/2^{n-1}$.

Operando se obtiene que la probabilidad $p_n = \mathrm{P}(K_n)$, es igual a

$$p_n = \frac{2^{n/2} - 1}{2^{n-2}} \quad \text{y} \quad p_n = \frac{3 \cdot 2^{(n-3)/2} - 1}{2^{n-2}}$$

según n sea par o impar, respectivamente. Se observa que la fórmula también es válida para $n = 1$, resultando $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. Puede verse que cuando $n \to \infty$ se tiene

$$p_n \sim 4 \cdot 2^{-n/2} \quad \text{y} \quad p_n \sim 3\sqrt{2} \cdot 2^{-n/2},$$

según n sea par o impar, respectivamente, en el sentido de que los cocientes de las cantidades tienden a uno. Igualmente,

$$p_{n+1}/p_n \sim 3/4 \quad \text{y} \quad p_{n+1}/p_n \sim 2/3$$

según n sea par o impar, respectivamente.

(c) Para cada $n \geq 1$ se tiene $K_n = \{T > n\}$ puesto que el suceso K_n "no haber visitado todas las casillas del tablero en las etapas $1, \ldots, n$" es lo mismo que decir que el instante T es posterior (estrictamente) a n. Así, se tiene $\mathrm{P}\{T > n\} = p_n$, y

$$\mathrm{E}[T] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\{T > n\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n.$$

Distinguiendo según n sea par o impar, se escribe

$$\mathrm{E}[T] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{4^{k-1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 2^{k-1} - 1}{2^{2k-1}}.$$

Operando, resulta $\mathrm{E}[T] = 7$.

Ejercicio 2. (a) Cuando cada alumno elige uno de los n trabajos, cada uno tiene probabilidad $1/n$ de que sea el suyo. Si $X_i = 1$ o 0 según que el alumno i recoja o no su trabajo, será $E[X_i] = 1/n$. Ahora bien, $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ es el número total de alumnos que obtienen su trabajo y su media es

$$\mathrm{E}[T] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\,\frac{1}{n} = 1.$$

Es decir, en la primera ronda, hay en media 1 alumno que se lleva su trabajo (independientemente del número n de los que componen la clase). Obsérvese que las variables X_i no son independientes, pues es imposible que $n-1$ de ellos obtengan su trabajo y el último no; por consiguiente, $X_1 + \cdots + X_n$ no tiene distribución binomial de parámetros n y $p = 1/n$, a pesar de que la media sea la misma. La distribución está especificada en el Ejemplo 4.4 del Texto.

(b) Según (a), el número medio de los que participan en la segunda ronda es $n-1$, en la tercera $n-2$ y así sucesivamente; de forma que parecen necesarias n rondas para que todos obtengan su trabajo. Para hacer una comprobación exacta, sea N el número de alumnos presentes, R el número de rondas hasta el final y $r_k = E[R|N = k]$. Desde luego $r_1 = 1$; además, suponiendo que $r_k = k$ para $k < n$ y descomponiendo por el número T de alumnos que se marchan en la primera ronda, será (haciendo el convenio $r_0 = 0$)

$$\begin{aligned} r_n &= \sum_{k=0}^{n} \big(1 + r_{n-k}\big)\, P\{T = k\} \\ &= 1 + r_n\, P\{T = 0\} + \sum_{k=1}^{n} (n-k)\, P\{T = k\} \\ &= 1 + r_n\, P\{T = 0\} + n(1 - P\{T = 0\}) - E[T] \end{aligned}$$

es decir, $r_n = r_n\, P\{T = 0\} + n\,(1 - P\{T = 0\})$ puesto que $E[T] = 1$ y resulta $r_n = n$.