Modelos estocásticos

Soluciones de los ejercicios del tema 1

15 de marzo de 2021

Dr. Víctor Hernández

Universidad Nacional de Educación a distancia
Departamento de Estadística e Investigación operativa

Ejercicios resueltos del tema 1

Ejercicio 0.1. Si elegimos dos puntos X, Y, al azar en el intervalo $[0,1]$, el intervalo queda divido en tres intervalos.

1. Calcular la distribución de la longitud del intervalo que contiene al punto $1/2$.

2. Calcular la distribución de la longitud del intervalo que contiene al punto t, $0 < t < 1$.

Solución. Este ejercicio es excelente para practicar el cálculo de probabilidades basado en la probabilidad condicionada. Está enunciado de lo concreto a lo general, proponiendo primero un caso particular y luego el general, ya que de esta forma es más fácil tener éxito cuando uno se enfrenta por primera vez al problema; sin embargo, para no alargar innecesariamente la solución, daré tan sólo la solución general.

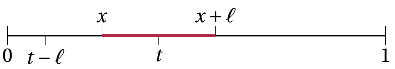
Una vez elegidos los puntos X e Y en el intervalo, éste queda dividido, de izquierda a derecha, en tres segmentos que nosotros denominaremos: *primero*, *segundo* (o *intermedio*) y *tercero*. De manera formal, esos segmentos son

$$[0,\min(X,Y)],\quad [\min(X,Y),\max(X,Y)],\quad [\max(X,Y),1]$$

La pequeña complejidad de los cálculos está en discutir bajo qué condiciones el punto t pertenece a cada uno de esos segmentos. Designemos por L la longitud del segmento que contiene a t. Para fijar ideas, supongamos que $t < 1/2$; el caso $t > 1/2$ se deducirá fácilmente de este por simetría.

Ahora, supongamos que $\ell \leq t$ (lo denominaremos **caso 1**) y calculemos $P(L \leq \ell)$. Se comprende que si tanto X como Y son menores que t, el segmento que contiene a t (el tercero) tendrá longitud mayor que $1-t > 1/2 > \ell$, luego no puede ser $L \leq \ell$; de manera semejante, si X, Y son mayores que t, el punto t está contenido en el primer segmento que tiene longitud $L > t > \ell$, luego tampoco puede ocurrir $\{L \leq \ell\}$. Así pues, cuando $0 < \ell < t < 1/2$, la única manera de que ocurra el suceso $\{L \leq \ell\}$ es que t esté contenido en el segmento intermedio y que haya un punto entre 0 y t, y otro punto entre t y 1; hay dos formas de lograrlo, o bien $X \in (0,t)$ e $Y \in (t,1)$ (**caso 1A**), o bien $Y \in (0,t)$ y $X \in (t,1)$ (**caso 1B**). Estudiemos el caso **caso 1A**; se comprende que no todos estos casos son favorables a $\{L \leq \ell\}$, por ejemplo, si X está muy próximo a 0, ocurrirá que el segmento (X,t) tendrá longitud mayor que ℓ y, con más razón, la longitud del segmento intermedio será mayor que ℓ. Imaginemos que alejamos X de t, en dirección hacia 0, a partir del punto $t-\ell$ ocurre que la longitud del segmento (X,t) es mayor que ℓ; así pues, X puede variar entre $t-\ell$ y t. Por otra parte, fijado $X = x$, el punto Y debe ser mayor que t, pero no puede superar $x+\ell$, ya que en este caso también el segmento intermedio tendría longitud mayor que ℓ. Todo el análisis anterior se refleja en el gráfico de la figura 0.1. Así, hemos obtenido

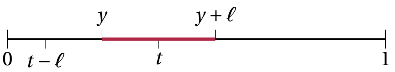
Caso 1A: $0 < \ell < t < 1/2$, $X < Y$.



La probabilidad que aporta este caso es

$$\int_{t-\ell}^{t}\int_{t}^{x+\ell} dy\,dx = \frac{\ell^2}{2}$$

Caso 1B: $0 < \ell < t < 1/2$, $Y < X$.



La probabilidad que aporta este caso es

$$\int_{t-\ell}^{t}\int_{t}^{y+\ell} dx\,dy = \frac{\ell^2}{2}$$

Figura 0.1:

$$P(L \le \ell) = \ell^2, \qquad \text{si } 0 < \ell < t$$

Estudiemos ahora el caso $\ell \ge t$; un sencillo análisis gráfico previo parece indicar que debemos dividirlo en dos: o bien $t \le \ell \le 1 - t$ (**caso 2**), o bien $1 - t < \ell < 1$ (**caso 3**). Por otra parte, visto el análisis del caso anterior, consideraremos siempre $X < Y$ y luego multiplicaremos por dos la probabilidad obtenida.

Puesto que en estos casos ℓ es "grande", parece apropiado considerar el suceso $L > \ell$, pues podemos esperar que los casos en los que la longitud del intervalo es todavía mayor deben ser menos (y más fáciles de estudiar) que los del suceso $L \le \ell$. En la figura 0.2, se estudia de manera gráfica las tres manera en que puede ocurrir $L > \ell$ cuando $t \le t \le 1 - t$. En el primer caso (**2A**), los dos puntos, X, Y pertenecen al intervalo $(0, t)$, entonces el punto t pertenece al tercer segmento que tiene una longitud mayor que $1 - t \ge \ell$; la probabilidad que este caso aporta al suceso $\{L > \ell\}$ es t^2.

En el segundo caso (**2B**), los dos puntos, X, Y pertenecen al intervalo $(\ell, 1)$, entonces t pertenece al primer segmento que tiene una longitud mayor que ℓ. La probabilidad de este caso es $(1 - \ell)^2$.

Por último, en el tercer caso (**2C**), un punto pertenece al intervalo $(0, t)$ y el segundo punto se encuentra a una distancia mayor que ℓ del primero. Si suponemos que $X < Y$, la probabilidad de este caso es

$$\int_0^t \int_t^{x+\ell} dy\,dx = \frac{1}{2}\left((1-\ell)^2 - (1-\ell-t)^2\right)$$

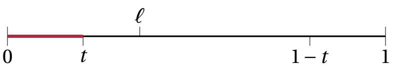
El subcaso $Y < X$ tiene la misma probabilidad y, en total, el caso **2C** aporta una probabilidad $\ell^2 - (\ell - t)^2$ al suceso. En resumen, se tiene

$$\begin{aligned} P(L > \ell) &= t^2 + (1-\ell)^2 + (1-\ell)^2 - (1-\ell-t)^2 \\ &= 2(1-\ell)^2 + t^2 - (1-\ell-t)^2 \end{aligned}$$

luego

$$P(L \le \ell) = 1 - 2(1-\ell)^2 - t^2 + (1-\ell-t)^2, \qquad \text{si } t \le \ell \le 1 - t$$

Caso 2A: $t \le \ell \le 1-t$

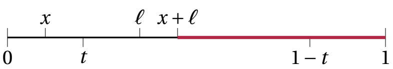


Los dos puntos pertenecen al intervalo $(0,t)$. La probabilidad que esto ocurra es t^2.

Caso 2B: $t \le \ell \le 1-t$

Los dos puntos pertenecen al intervalo $(\ell,1)$. La probabilidad que esto ocurra es $(1-\ell)^2$.

Caso 2C: $t \le \ell \le 1-t$



Un punto pertenece al intervalo $(0,t)$ y el otro está a una distancia mayor que ℓ; la probabilidad que este caso aporta es

$$2\int_0^t \int_{x+\ell}^1 dy\,dx = (1-\ell)^2 - (1-\ell-t)^2$$

Figura 0.2:

Por último, estudiaremos el caso $\ell > 1-t$ que hemos denominado caso **3**; es similar al caso **2** y está estudiado gráficamente en la figura 0.3. En total se tiene

$$P(L > \ell) = 3(1-\ell)^2, \qquad \text{si } 1-t < \ell < 1$$

y la función de distribución de L es:

$$P(L \le \ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \le 0 \\ \ell^2 & \text{si } 0 < \ell < t \\ 1 - 2(1-\ell)^2 - t^2 + (1-\ell-t)^2 & \text{si } t \le \ell \le 1-t \\ 1 - 3(1-\ell)^2 & \text{si } 1-t < \ell < 1 \\ 1 & \text{si } \ell \ge 1 \end{cases}$$

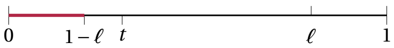
la función de densidad de L es

$$f_t(\ell) = \begin{cases} 2\ell & \text{si } 0 < \ell < t \\ 2(1-\ell+t) & \text{si } t \le \ell \le 1-t \\ 6(1-\ell) & \text{si } 1-t < \ell < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

En particular, si $t = 1/2$, se tiene:

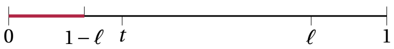
$$f_{1/2}(\ell) = \begin{cases} 2\ell & \text{si } 0 < \ell < 1/2 \\ 6(1-\ell) & \text{si } 1/2 \le \ell < 1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Caso 3A: $1-t<\ell<1$



Los dos puntos pertenecen al intervalo $(0,1-\ell)$. La probabilidad que esto ocurra es $(1-\ell)^2$.

Caso 3B: $1-t<\ell<1$.



Los dos puntos pertenecen al intervalo $(\ell,1)$. La probabilidad que esto ocurra es $(1-\ell)^2$.

Caso 3C: $1-t<\ell<1$

Un punto pertenece al intervalo $(0,1-\ell)$ y el otro está a una distancia mayor que ℓ; la probabilidad que este caso aporta es

$$2\int_0^{1-\ell}\int_{x+\ell}^{1} dy\,dx=(1-\ell)^2$$

Figura 0.3:

Observemos que la longitud media del segmentos que contiene a $1/2$ es

$$E\{L_{1/2}\}=\int_0^{1/2}2\ell^2\,d\ell+\int_{1/2}^{1}6\ell(1-\ell)\,d\ell=\frac{7}{12}$$

Es interesante comparar este resultado con la longitud media de cualquiera de los segmentos en que queda dividido el intervalo al elegir dos puntos al azar; esa longitud media es $1/3$. La explicación de esta diferencia radica en que los segmentos más largos tienen más probabilidad de contener al punto fijo t; en consecuencia, la distribución de L está apuntada hacia los valores grandes de L.

Ejercicio 0.2. El tiempo, T, hasta que una componente electrónica se avería es aleatorio con distribución exponencial de parámetro $\lambda>0$. Suponemos que las componentes son reemplazadas inmediatamente y que los tiempos hasta la avería son independientes entre sí. Calcular la distribución del número de averías que ocurren en el intervalo de tiempo $[0,t]$.

Solución. Los ejercicios de esta clase se estudiarán intensivamente en el próximo tema, dedicado especialmente a los modelos exponenciales y de POISSON. Sin embargo, aquí lo resolveremos mediante un procedimiento más elemental y general.

Designemos por N la variable aleatoria número de clientes atendidos en el intervalo de tiempo $[0,t]$; debemos calcular $P(N=k)$, $k=0,1,2,\ldots,$ puesto que se tiene

$$\{N=k\}=\{X_1+X_2+\cdots+X_k\le t<X_1+X_2+\cdots+X_{k+1}\}$$

parece más sencillo calcular $P(N \geq k) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq t)$ y hallar $P(N = k)$ por diferencia

$$P(N = k) = P(N \geq k) - P(N \geq k+1)$$

Ahora, el cálculo de $P(N \geq k)$ se puede hacer directamente en la distribución conjunta de $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, mediante la expresión

$$\begin{aligned} P(N \geq k) &= P(X_1 + X_2 + \cdots + X_k \leq t) \\ &= \int_0^t \lambda e^{-\lambda x_1}\, dx_1 \int_0^{t-x_1} \lambda e^{-\lambda x_2}\, dx_2 \cdots \int_0^{t-x_1-\cdots-x_{k-1}} \lambda e^{-\lambda x_k}\, dx_k \end{aligned}$$

o bien podemos intentar un procedimiento secuencial; pongamos que $f_k(s)$ es la función de densidad de $S_k = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$; si conocemos $f_k(s)$ el cálculo de $P(N \geq k)$ es inmediato, ya que se tiene

$$P(N \geq k) = \int_0^t f_k(s)\, ds$$

Nuestro propósito es calcular f_k de manera secuencial gracias a la fórmula de la convolución de densidades, consecuencia de ser $S_k = S_{k-1} + X_k$ con S_{k-1} y X_k independientes, fórmula que se expresa en la relación recursiva

$$f_k(s) = \int_0^s f_{k-1}(s-x)\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx$$

Fácilmente se obtiene

$$\begin{aligned} f_2(s) &= \int_0^s f_1(s-x)\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \int_0^s \lambda e^{-\lambda(s-x)}\, \lambda e^{-\lambda x}\, dx \\ &= \frac{\lambda^2}{1!} s e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos $f_3(s) = \frac{\lambda^3}{2!} s^2 e^{-\lambda s}$; resulta inmediato formular la hipótesis de inducción

$$f_k(s) = \frac{\lambda^k}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-\lambda s}$$

y unos simples cálculos la confirman. Así, obtenemos

$$P(N \geq k) = \int_0^t \frac{\lambda^k}{(k-1)!} s^{k-1} e^{-\lambda s}\, ds$$

si integramos por partes esta integral, con $u = s^{k-2}$ y $v' = \lambda e^{-\lambda s}$, resulta

$$P(N \geq k) = -\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{\lambda^{k-1}}{(k-2)!} s^{k-2} e^{-\lambda s}\, ds$$

es decir

$$P(N \geq k) = -\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t} + P(N \geq k-1)$$

lo que nos permite poner

$$P(N \geq k-1) - P(N \geq k) = P(N = k-1) = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda t}, \qquad \text{para } k = 1, 2, \ldots$$

lo que prueba que N es una variable de POISSON de parámetro λt.

Ejercicio 0.3. En una circunferencia de radio uno hay un punto de color rojo. Elegimos dos puntos X_1 y X_1 al azar en la circunferencia y la cortamos por cada uno de los puntos elegidos, con lo que queda dividida en dos arcos, el arco X_1X_2 que va de X_1 a X_2 en el sentido de las agujas del reloj, y el arco X_2X_1.

1. Calcular la distribución de la longitud del arco X_1X_2 y del arco X_2X_1.
2. Calcular la distribución de la longitud del arco que contiene al punto marcado en rojo.

Solución. Este ejercicio trata un asunto que conviene reflexionar y que es fuente de razonamientos erróneos y malas interpretaciones. En apariencia, ambas preguntas son muy semejantes, casi iguales; sin embargo, esconden una diferencia crucial; en ambos casos la circunferencia se divide al azar en dos segmentos pero, en el primer caso, se considera un segmento determinado entre los dos, mientras que en el segundo caso el intervalo es a su vez elegido aleatoriamente entre los dos en que se ha divido la circunferencia.

La respuesta a la primera pregunta es casi inmediata si tenemos astucia para elegir un origen de referencia. Imaginemos que elegido el punto X_1 al azar en la circunferencia y que, a continuación, cortamos la circunferencia por X_1 de manera que se convierte en el intervalo $[0,1]$; ahora, el punto X_2 se elige al azar en este intervalo y la longitud del segmento $\overline{X_1X_2}$ es igual a la longitud del intervalo $[0,X_2]$ que es uniforme en $[0,1]$. La función de densidad de la longitud es $f(\ell) = 1$, para $0 \leq \ell \leq 1$, y la longitud media del segmento es $1/2$. El arco X_2X_1 es completamente simétrico y también tiene distribución uniforme.

Supongamos que no tenemos la buena idea de corta la circunferencia precisamente por el punto X_1, imaginemos que la cortamos por un punto determinado antes de elegir X_1; ahora, el problema es equivalente a elegir X_1 y X_2 al azar en el intervalo $[0,1]$, o bien, a elegir un punto (X_1,X_2) al azar en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$. Lo crucial es analizar el valor de la longitud del arco X_1X_2 de la circunferencia a partir del punto elegido en el cuadrado, designemos por L a esa longitud. La primera observación es que si $X_1 \leq X_2$, es decir, si (X_1,X_2) pertenece al triángulo superior de los dos triángulos en que la diagonal principal divide al cuadrado, entonces $L = X_2 - X_1$, mientras que si $X_1 > X_2$, es decir, si el punto pertenece al triángulo inferior, entonces

$L = 1 - X_1 + X_2$, ya que el arco $X_1 X_2$ está formado por lo puntos $[X_1, 1] \cup [0, X_2]$, para comprender esto basta imaginar que volvemos a reconstruir la circunferencia "pegando" el punto 1 con el 0. En resumen, nuestro análisis nos ha llevado a

$$L = \begin{cases} X_2 - X_1 & \text{si } X_1 \le X_2 \\ 1 - X_1 + X_2 & \text{si } X_1 > X_2 \end{cases}$$

Ahora, fijado ℓ, $0 \le \ell \le 1$, tratemos de representar el suceso $L \le \ell$ en el cuadrado; de acuerdo con nuestro análisis, en el triángulo triángulo superior, T_1, se tiene

$$L = X_2 - X_1 \le \ell$$

luego los puntos de T_1 que verifican $L \le \ell$ son los comprendidos entre las rectas $X_2 - X_1 = 0$ y $X_2 - X_1 = \ell$, región que aparece representada en la figura 0.4 (**a**). Puesto que la densidad de (X_1, X_2) es uniforme en el cuadrado, la

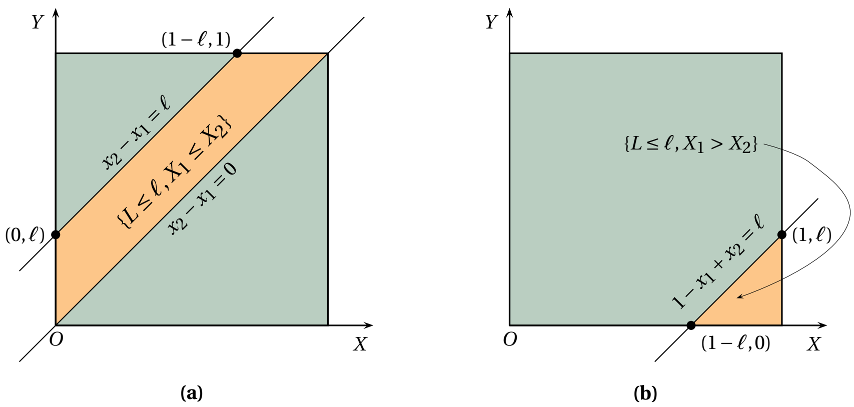


Figura 0.4: Representación gráfica del suceso $L \le \ell$

probabilidad $P(L \le \ell)$ es igual a la suma de las áreas de las dos regiones que componen el suceso $\{L \le \ell\}$.

$$P(L \le \ell) = \text{área}\{L \le \ell, X_1 \le X_2\} + \text{área}\{L \le \ell, X_1 >\}$$

Para calcularlo, mejor que integrar por separado sobre cada región, es *superponer* las dos regiones como se muestra en la figura 0.5, se sigue

$$P(L \le) = \int_0^1 dx_1 \int_{x_1}^{x_1+\ell} dx_2 = \int_0^1 \ell \, dx_1 = \ell$$

luego L se distribuye con función de densidad $f(\ell) = 1$, para $0 \le \ell \le 1$ y L es uniforme en $[0, 1]$.

En el apartado anterior, establecimos que al dividir la circunferencia en dos intervalos al azar, la distribución de cada uno de ellos es uniforme entre 0 y la longitud total de la circunferencia. Ahora nos planteamos una segunda cuestión que consiste en establecer la distribución de la longitud del

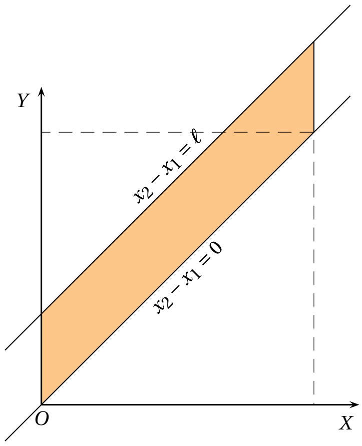
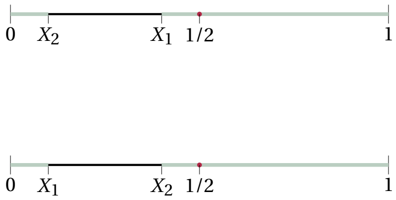


Figura 0.5: Superposición de las regiones que componen el suceso $L \leq \ell$

intervalo que *contiene a un punto fijo*, esa longitud será representada por L^*. De manera intuitiva parece que, al dividir la circunferencia en dos intervalos al azar, el *más largo* de los dos contendrá con mayor probabilidad al punto fijo, por lo que la distribución de la longitud del intervalo que lo contiene está apuntada hacia los valores mayores. Comprobaremos que esa intuición es cierta, para ello, transformaremos el problema en otro equivalente en el cuadrado; si cortamos la circunferencia por el punto simétrico al punto rojo, se convertirá en un intervalo $[0,1]$ y el punto rojo es el punto $1/2$. Ahora, elegimos dos puntos X_1 y X_2 al azar en el intervalo $[0,1]$, lo que equivale a elegir un punto (X_1, X_2) en el cuadrado $\mathbf{Q} = [0,1]^2$. Nuestro análisis parte de determinar el intervalo que contiene al punto $1/2$; se comprende que hay que distinguir tres casos que, a su vez, se dividen en dos. La figura 0.6 muestra el primero de los tres casos que consideraremos y que ocurre cuando ambos puntos son menores que $1/2$, entonces, según que X_1 sea mayor o menor que X_2, la longitud del arco que contiene al punto rojo es $L^* = 1 - X_1 + X_2$ o $L^* = 1 - X_2 + X_1$. La figura 0.7 muestra las dos posiciones correspondientes al caso 2 que ocurre cuando un punto está a la derecha del punto rojo y el otro a su izquierda; entonces, si $X_1 > X_2$, la longitud del arco de circunferencia que contiene al punto rojo es $L^* = X_1 - X_2$, mientras que si $X_1 < X_2$, la longitud es $L^* = X_2 - X_1$. La figura 0.8 muestra las dos posiciones correspondientes al caso 3 que ocurre cuando un punto está a la derecha del punto rojo y el otro a su izquierda; entonces, si $X_1 > X_2$, la longitud del arco de circunferencia que contiene al punto rojo es $1 - X_1 + X_2$, mientras que si $X_1 < X_2$, la longitud es $1 - X_2 + X_1$.

Ahora trasladaremos al cuadrado $\mathbf{Q}$ los resultados del análisis anterior, en la figura 0.9 (**a**) aparecen representadas las regiones en que se dan cada uno de los tres casos; en la figura 0.9 (**b**) hemos señalado el valor de L^* en

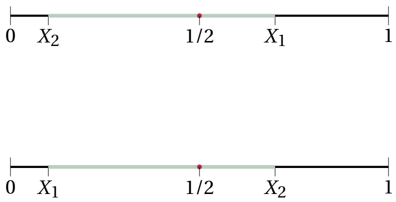
Caso 1: Ambos puntos son menores que 1/2; tiene dos subcasos, $X_1 > X_2$ y $X_1 < X_2$.



Si $X_1 > X_2$, la longitud del arco circular que contiene al punto rojo es $L^* = 1 - X_1 + X_2$, mientras que si $X_1 < X_2$, la longitud del arco circular que contiene al punto rojo es $L^* = 1 - X_2 + X_1$

Figura 0.6: Caso 1

Caso 2: Un punto es menor que 1/2 y otro mayor; tiene dos subcasos, $X_1 > X_2$ y $X_1 < X_2$.



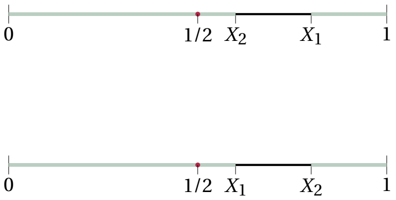
Si $X_1 > X_2$, la longitud del arco circular que contiene al punto rojo es $L^* = X_1 - X_2$, mientras que si $X_1 < X_2$, la longitud del arco circular que contiene al punto rojo es $L^* = X_2 - X_1$

Figura 0.7: Caso 2

función del caso y del subcaso, según el análisis que realizamos más arriba. El último paso es determinar qué región del cuadrado representa al suceso $\{L^* \leq \ell\}$, para ello, estudiamos en cada uno de los subcasos de la figura 0.9 (**b**) qué conjunto de puntos cumple la condición $L^* \leq \ell$; sin dificultad observamos que en los casos 1 y 3, la longitud L^* es siempre mayor o igual que 1/2, luego debemos hacer el análisis en función de los valores de ℓ, por una parte cuando se verifica $0 \leq \ell \leq 1/2$ y por otra cuando se cumple $1/2 < \ell \leq 1$. Ambos análisis se muestran en la figura 0.10 donde se representan las regiones favorables a $L^* \leq \ell$ bajo cada una de las hipótesis. Para calcular $P(L^* \leq \ell)$ basta con calcular las áreas correspondientes; así obtenemos

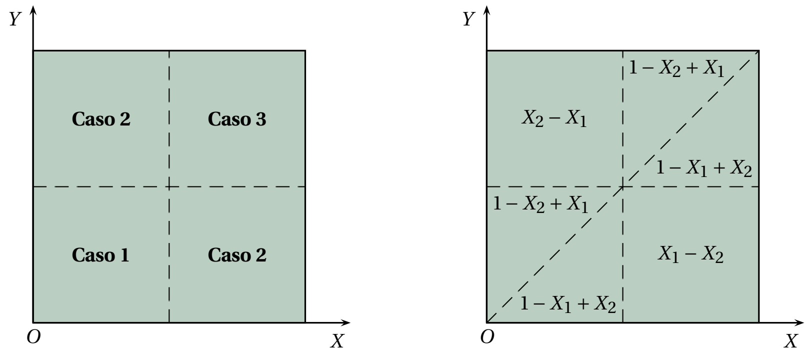
$$P(L^* \leq \ell) = 2\frac{\ell^2}{2} = \ell^2, \qquad \text{si } 0 \leq \ell \leq 1/2 \tag{1}$$

Caso 3: Ambos puntos son mayores que $1/2$; tiene dos subcasos, $X_1 > X_2$ y $X_1 < X_2$.



Si $X_1 > X_2$, la longitud del arco circular que contiene al punto rojo es $L^* = 1 - X_1 + X_2$, mientras que si $X_1 < X_2$, la longitud del arco circular que contiene al punto rojo es $L^* = 1 - X_2 + X_1$

Figura 0.8: Caso 3



(a) **(b)**

Figura 0.9: Longitud, L^*, del intervalo que contiene al punto rojo según los casos

y

$$P(L^* \leq \ell) = 2(\ell - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} - (1-\ell)^2 = \ell^2, \qquad \text{si } 1/2 < \ell \leq 1 \qquad (2)$$

En resumen, la función de distribución de L^* es $F(\ell) = \ell^2$, para $0 \leq \ell \leq 1$, y la función de densidad

$$f(\ell) = 2\ell, \qquad \text{si } 0 \leq \ell \leq 1$$

función de densidad que está apuntada hacia los valores mayores de ℓ, como señalaba la intuición, de manera que cuanto mayor es ℓ, mayor es la densidad. Por ejemplo, $P(L^* \leq 1/2) = 1/4$, mientras que $P(L^* \leq 1/2) = 3/4$; otro ejemplo de ese apuntamiento lo tenemos en el valor medio de L^*, que

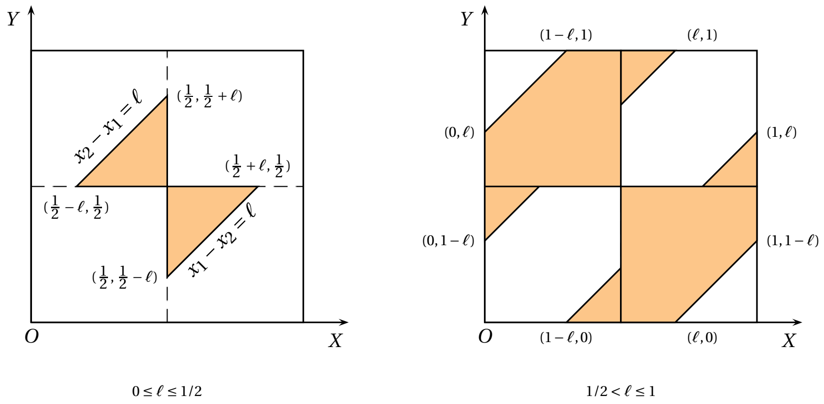


Figura 0.10: Regiones favorables al suceso $L^* \le \ell$ según los valores de ℓ

es igual a

$$E\{L^*\} = \int_0^1 \ell \cdot 2\ell \, d\ell = \frac{2}{3}$$

mayor que el valor medio del intervalo tomado al azar. De nuevo, observamos que este fenómeno se debe a que, cuando dividimos la circunferencia al azar en dos intervalos, cada uno de los intervalos tiene (por simetría) la misma distribución y es uniforme, pero tras cada división, el mayor de los intervalos tiene más probabilidad de ser el que contiene al punto fijo, lo que hace que la distribución del intervalo que contiene al punto fijo no sea uniforme sino que esté apuntada hacia la derecha.

Ejercicio 0.4. Elegimos un número x al azar en el intervalo $(0,1]$. luego, elegimos otro número real y al azar en el intervalo $(0,[1/x])$, donde $[1/x]$ es la parte entera de $1/x$.

Calcular $P(x \le x \mid y \le y)$ para cada par de valores x, y, $0 < x < 1$, $y > 0$.

Solución. He cambiado ligeramente el enunciado, donde decía $(0,1)$ he puesto $(0,1]$, esto no altera en absoluto el resultado, pero hace más “redonda” la demostración.

La distribución de Y está determinada por la parte entera de $1/X$, nos interesa condicionar por $[1/X] = k$. Ahora, dado que $[1/X] = k$ equivale a

$$k \le \frac{1}{X} < k+1$$

o bien

$$\frac{1}{k+1} < X \le \frac{1}{k}$$

si designamos por A_k al suceso

$$A_k = \{\frac{1}{k+1} < X \le \frac{1}{k}\}$$

resulta que $Y \mid A_k$ es uniforme en $(0,k)$. La sucesión $\{A_k\}$, con $k = 1, 2, \dots,$ es una partición del espacio muestral Ω, es decir, si $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, y $\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$; además, por ser X uniforme, se tiene

$$P(A_k) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$$

Del teorema de la probabilidad total, se sigue

$$P(Y \le y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(Y \le y \mid A_k) P(A_k)$$

Por otra parte, puesto que $Y \mid A_k$ es uniforme en $(0,k)$, resulta

$$P(Y \le y \mid A_k) = \begin{cases} \frac{y}{k} & \text{si } 0 < y < k \\ 1 & \text{si } y \ge k \end{cases}$$

La expresión anterior es perfecta para devolver el valor de $P(Y \le y \mid A_k)$ cuando k está fijo y variamos y, pero también podemos interpretarla al revés. Si fijamos y, $y > 0$, y variamos k, resulta $P(Y \le y \mid A_k) = 1$, si $k \le [y]$, mientras que $P(Y \le y \mid A_k) = y/k$, si $k > [y]$, de donde se sigue

$$\begin{aligned} F_Y(y) = P(Y \le y) &= \sum_{k=1}^{[y]} P(A_k) + \sum_{k=[y]+1} \frac{y}{k} P(A_k) \\ &= \sum_{k=1}^{[y]} \frac{1}{k(k+1)} + y \sum_{k=[y]+1} \frac{1}{k^2(k+1)} \end{aligned}$$

Las propiedades de F_Y se estudian fácilmente; en los valores enteros positivos, $y = n$, $n = 1$, $n = 2, \dots$, F_Y toma el valor

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + y \sum_{k=n+1} \frac{1}{k^2(k+1)}$$

entre $F_Y(n)$ y $F_Y(n+1)$, la función de distribución es lineal: la gráfica de F_Y es una poligonal; se sigue que es continua en cada punto y que no tiene componente discreta. La función candidata a ser densidad es igual a la pendiente de cada uno de los tramos lineales; por ejemplo, si $n < y < n+1$, entonces

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

para comprobar que es una función de densidad debemos verificar que

$$\int_0^{\infty} f_Y(y)\, dy = 1$$

es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2(k+1)}$$

Para calcular esta serie intercambiamos el orden de sumación

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k+1)}\sum_{n=0}^{k-1}1\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}\end{aligned}$$

que es una serie telescópica, su cálculo se basa en la descomposición

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

luego

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right) = 1-\frac{1}{N+1}$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{N\to\infty} 1-\frac{1}{N+1} = 1$$

lo que implica que f_Y es una función de densidad y que F_Y sólo tiene componente absolutamente continua.

Ejercicio 0.5. En el intervalo $[0,1]$ tomamos un punto X al azar; a continuación, elegimos un punto Y al azar en el intervalo $[X,1]$.

1. calcular la distribución de la variable $Y-X$.
2. calcular $P(X<0.5 \mid Y>0.75)$.
3. Calcular la función de densidad $f(x\mid y)$ de la variable X condicionada por $Y=y$.

Solución.

1. Mediante la expresión $f(x,y)=f(y\mid x)f(x)$, calculamos la función de densidad conjunta a partir de los datos: $f(x)=1$, si $x\in[0,1]$, y $f(y\mid x)=1/(1-x)$, si $y\in[x,1]$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & \text{si } 0\le x\le y<1\\ 0 & \text{en otro caso}\end{cases}$$

El dominio, **T**, donde está definida la función de densidad conjunta aparece representado en la figura 0.11. Para calcular la distribución de D, nuestra primera intención puede ser hallar $P(D\le d)$, pero, dada la forma de **T**, resulta más conveniente calcular su complementario $P(D>d)$. Este cálculo está

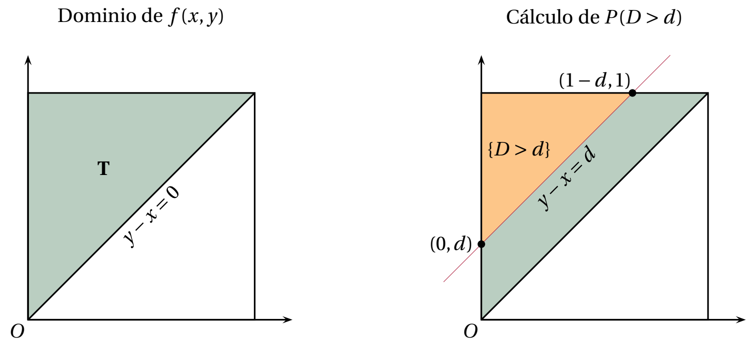


Figura 0.11:

ilustrado en la figura 0.11, la región favorable es triangular y su probabilidad es

$$\begin{aligned} P(D>d) &= \int_0^{1-d} dx \int_{x+d}^1 \frac{1}{1-x}\,dx \\ &= \int_0^{1-d} \left(1-\frac{d}{1-x}\right) dx \\ &= 1-d+d\lg d \end{aligned}$$

Se sigue que la función de distribución de D es igual a $F_D(d) = d - d\log d$ y la función de densidad

$$f_D(d) = \begin{cases} -\log d & \text{si } 0<d<1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

2. Pongamos $A = \{X \le 0.5\}$, $B = \{Y > 0.75\}$; se trata de calcular $P(A \mid B)$ y, como es sabido, es igual a

$$P(A \mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Los cálculos de $P(A\cap B)$ y $P(B)$ están ilustrados en la figura 0.12. El Cálculo de $P(A\cap B)$ es bien sencillo, por ser $A\cap B$ un rectángulo.

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= \int_0^{0.5} \frac{dx}{1-x} \int_{0.75}^1 dy \\ &= -0.25\,\log(1-x)\Big|_0^{0.5} \\ &= -0.25\log 0.25 \approx 0.173 \end{aligned}$$

Por su parte, para calcular $P(B)$ mediante una única integral, ponemos primero límites a y.

$$P(B) = \int_{0.75}^1 dy \int_0^y \frac{dy}{1-x} = -\int_{0.75}^1 \log(1-y)\,dy$$

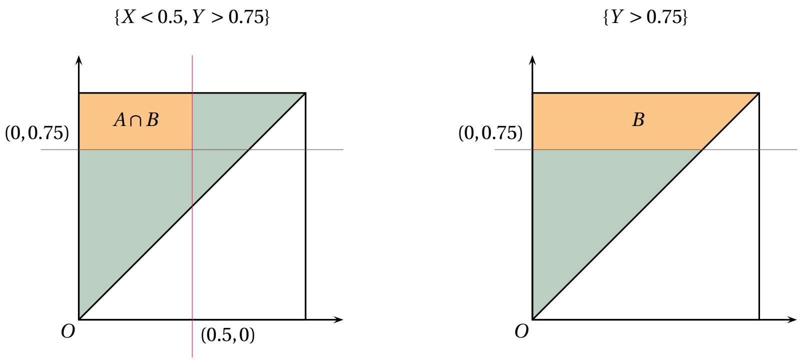


Figura 0.12:

Ahora, si ponemos $t = 1 - y$, resulta

$$-\int_{0.75}^{1} \log(1-y)\,dy = -\int_{0}^{0.25} \log t\,dt \tag{3}$$

integral que se resuelve, sin dificultad, integrando por partes.

$$\begin{aligned} -\int_{0}^{0.25} \log t\,dt &= -t\log t\Big|_0^{0.25} + \int_0^{0.25} dt \\ &= -0.25\log 0.25 + 0.25 \approx 0.596 \end{aligned}$$

Se tiene $P(X \leq 0.5 \mid Y > 0.75) \approx 0.173/0.596 \approx 0.29$.

3. El cálculo de la función de densidad condicionada $f(x \mid y)$ es rutinario, sabemos que se tiene

$$f(x \mid y) = \frac{f(x,y)}{f(y)}$$

sólo resta calcular la densidad marginal $f(y)$.

$$\begin{aligned} f(y) = \int_0^y f(x,y)\,dx &= \int_0^y \frac{1}{1-x}\,dx \\ &= -\log(1-x)\Big|_0^y \\ &= -\log(1-y), \qquad \text{para } 0 \leq y < 1 \end{aligned}$$

Luego

$$f(\mid y) = \frac{-1}{(1-x)\log(1-y)}, \qquad \text{para } 0 \leq x \leq y < 1$$

Nota. Quizá algún espíritu exigente se haya sorprendido del cambio de variables de la expresión 3, y piense que la integral

$$\int_{0.75}^{1} \log(1-y)\,dy$$

se debería calcular también por partes. Sí y no: puede ser calculada por partes, pero teniendo un poco de cuidado al hacerlo. ¿Te atreverías a resolverla así?

Ejercicio 0.6. Modelo de PERT aleatorizado. Nuestra empresa de ingeniería ha contratado la ejecución de un proyecto que tiene tres operaciones: fabricar dos subsistemas S_1 y S_2, y ensamblarlos. El diagrama de proyecto se muestra en la figura 0.13.

Consideramos $t = 0$ el instante en que comienza la fabricación de cada subsistema; éstos son fabricados independiente y simultáneamente. La operación de ensamblaje es independiente de la fabricación de los subsistemas y comienza inmediatamente después de la terminación de ambos subsistemas.

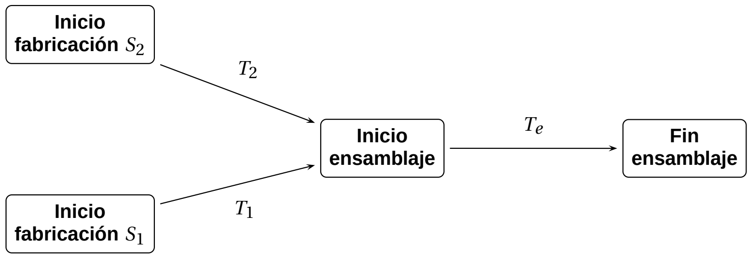


Figura 0.13: Diagrama del proyecto

Designaremos por T_1 el tiempo de fabricación del subsistema S_1, T_2 el de S_2 y T_e el tiempo de ensamblaje. Suponemos que los tiempos de fabricación y ensamblaje son aleatorios, que T_1 y T_2 son variables uniformes en el intervalo $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, donde $t_0 \geq \alpha > 0$, y que T_e es una variable uniforme en el intervalo $[t_1 - \alpha, t_1 + \alpha]$, donde $t_1 \geq \alpha > 0$.

1. Si T es el tiempo transcurrido desde el inicio de la fabricación hasta el fin del ensamblaje, hallar la distribución de T y calcular $P(T > t_0 + t_1)$.

2. Supongamos que el cliente ha establecido una condición en el contrato del proyecto por la cual, si no está terminado antes del tiempo $t_0 + t_1 + 2\lambda\alpha$, donde $0 < \lambda < 1$, pagaremos una indemnización. Calcular el valor de λ tal que

$$P(T \leq t_0 + t_1 + 2\lambda\alpha) = 0.95$$

(*Hallar λ con dos decimales exactos*).

3. Supongamos que el contrato se cierra fijando el pago de una indemnización si se supera el tiempo de entrega $t_0 + t_1 + 1.4\alpha$. Supongamos que cuando ha transcurrido un tiempo igual a $t_0 - 0.7\alpha$ nos informan que el primer subsistema está terminado y que sólo falta terminar el

segundo, ¿cuál es la probabilidad de no tener que pagar la indemnización?

Solución.

Apartado 1. Llamemos $T_{1,2}$ al tiempo hasta que ambas componentes están fabricadas; se tiene $T_{1,2} = \max(T_1, T_2)$. La variable $T_{1,2}$ se distribuye en el intervalo $[\, t_0 - \alpha, t_0 + \alpha\,]$ y, si $t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha$, se tiene

$$\begin{aligned} P(T_{1,2} \le t) &= P(T_1 \le t, T_2 \le t) && (4)\\ &= P(T_1 \le t)P(T_2 \le t) && (5)\\ &= \frac{(t - t_0 + \alpha)^2}{(2\alpha)^2} && (6) \end{aligned}$$

mientras que si $t < t_0 - \alpha$ se tiene $P(T_{1,2} \le t) = 0$, y si $t > t_0 + \alpha$, resulta $P(T_{1,2} \le t) = 1$.

En resumen, la función de distribución de $T_{1,2}$ es igual a

$$F_{1,2}(t) = P(T_{1,2} \le t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 - \alpha \\ \frac{1}{2\alpha^2}(t - t_0 + \alpha)^2 & t_0 - \alpha \le t \le t_0 + \alpha \\ 1 & \text{si } t > t_0 + \alpha \end{cases} \qquad (7)$$

Puesto que T_1 y T_2 son independientes de T_e, la variable $T_{1,2}$ es independiente de T_e y función de densidad conjunta de $(T_e, T_{1,2})$ es el producto de las funciones de densidad de ambas variables.

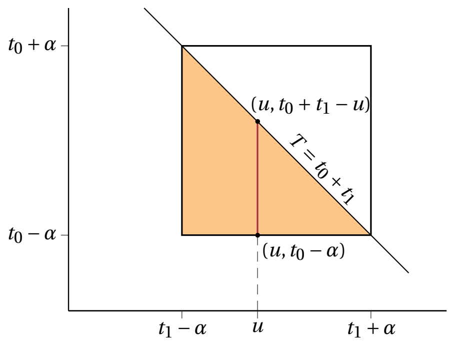


Figura 0.14: Cálculo de $P(T \le t_0 + t_1)$

Calcularemos la probabilidad del suceso contrario, $P(T \le t_0 + t_1)$, el cálculo está esbozado en la figura 0.14. La distribución de $(T_e, T_{1,2})$ se concentra en el cuadrado $[\, t_1 - \alpha, t_1 + \alpha\,] \times [\, t_1 - \alpha, t_1 + \alpha\,]$, la región en que se verifica $T \le t_0 + t_1$ es el triángulo coloreado de la figura. El cálculo de $P(T \le t_0 + t_1)$ puede hacerse integrando la función de densidad conjunta sobre ese triángulo o mediante la probabilidad condicionada por $T_e = u$, como nosotros haremos. Se tiene

$$P(T \le t_0 + t_1) = \int_{t_1-\alpha}^{t_1+\alpha} P(T_{1,2} + T_e \le t_0 + t_1 \mid T_e = u)\, \frac{du}{2\alpha} \tag{8}$$

Ahora, puesto que $T_{1,2}$ y T_e son independientes y por la función de distribución de $T_{1,2}$ calculada en 7, resulta

$$\begin{aligned} P(T_{1,2} + T_e \le t_0 + t_1 \mid T_e = u) &= P(T_{1,2} + u \le t_0 + t_1) \\ &= P(T_{1,2} \le t_0 + t_1 - u) \\ &= \frac{1}{4\alpha^2}(t_0 + t_1 - u - t_0 + \alpha)^2 \\ &= \frac{1}{4\alpha^2}(t_1 - u + \alpha)^2 \end{aligned} \tag{9}$$

Luego

$$\begin{aligned} P(T \le t_0 + t_1) &= \frac{1}{8\alpha^3}\int_{t_1-\alpha}^{t_1+\alpha} (t_1 - u + \alpha)^2\, du \\ &= \frac{1}{24\alpha^3}\Big(-(t_1 - u + \alpha)^3\Big|_{t_1-\alpha}^{t_1+\alpha} \\ &= \frac{8\alpha^3}{24\alpha^3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \tag{10}$$

lo que implica $P(T > t-0 + t_1) = 1 - 1/3 = 2/3$.

Cálculos similares para diferentes valores de t permiten calcular la función de distribución de T, $F(t) = P(T \le t)$, dada por

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_0 + t_1 - 2\alpha \\ \frac{1}{24\alpha^3}(t - t_0 - t_1 + 2\alpha)^3 & \text{si } t_0 + t_1 - 2\alpha \le t \le t_0 + t_1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{2\alpha}(t - t_0 - t_1) - \frac{1}{24\alpha^3}(t - t_0 - t_1)^3 & \text{si } t_0 + t_1 < t \le t_0 + t_1 + 2\alpha \\ 1 & \text{si } t > t_0 + t_1 + 2\alpha \end{cases}$$

Apartado 2. Con los resultados del apartado anterior, resulta bastante sencillo responder a esta cuestión.

Puesto que $P(T \le t_0 + t_1) = 1/3$, el valor t^* tal que $P(T \le t^*) = 0.95$ debe verificar $t_0 + t_1 < t^* \le t_0 + t_1 + 2\alpha$. Ahora, por la expresión de la función de distribución en este intervalo, t^* debe ser tal que se cumpla

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2\alpha}(t^* - t_0 - t_1) - \frac{1}{24\alpha^3}(t^* - t_0 - t_1)^3 = 0.95$$

si reemplazamos $t^* = t_0 + t_1 + 2\lambda\alpha$, resulta que el valor de λ que buscamos debe cumplir

$$\frac{1}{3} + \lambda - \frac{1}{3}\lambda^3 = 0.95$$

o bien

$$\lambda^3 - 3\lambda + 1.85 = 0$$

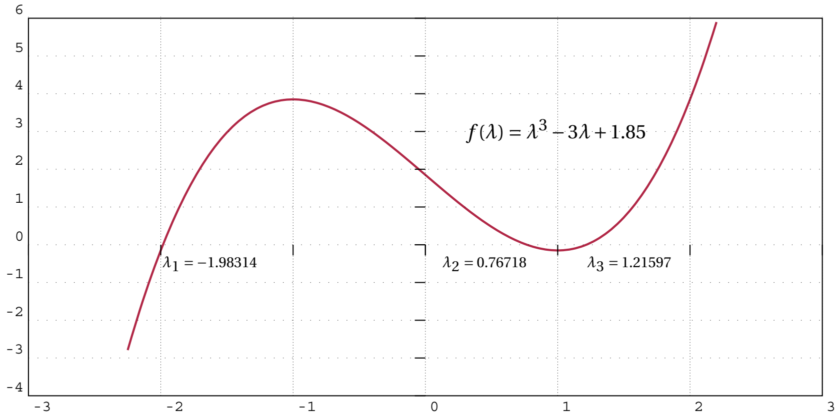


Figura 0.15: Gráfica de $f(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 1.85$

Esta ecuación cúbica, cuya gráfica se muestra en la figura 0.15, tiene tres raíces reales que fácilmente se acotan; con un mínimo esfuerzo comprobamos que $f(-2) < 0$, $f(-1) > 0$, $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Por consiguiente, tiene una raíz real en el intervalo $(-2,-1)$, otra en el intervalo $(0,1)$ y una tercera en el intervalo $(1,2)$. Evidentemente, tanto la raíz negativa como la raíz mayor que 1 no son soluciones de nuestro problema. Con una aproximación mayor que 10^{-4}, las tres raíces son

$$\lambda_1 = -1.98314, \qquad \lambda_2 = 0.76718, \qquad \lambda_3 = 1.21597 \tag{11}$$

y la respuesta pedida es: debemos establecer en el contrato que acabaremos el proyecto antes del tiempo $t_0 + t_1 + 1.53436\alpha$.

Apartado 3. Este apartado es interesante porque el enunciado, aparentemente simple, nos muestra una de las dificultades de formalizar las afirmaciones transmitidas mediante un lenguaje no formal. La cuestión es ¿como debemos interpretar la información acerca de que el primer subsistema está terminado? No se sabe si significa que el primer subsistema es el primero en estar listo o si significa que el primero está terminado y no sabemos si el segundo lo está o no. Nosotros adoptaremos la primera interpretación, en la hipótesis de que somos los encargados del cumplimiento de los plazos del proyecto y se nos avisa puntualmente cada vez que hay una novedad en su ejecución. Sin embargo, también podría modelarse la segunda interpretación, y sería un bonito modelo bayesiano en el que intervendría cierta probabilidad p de que el segundo subsistema haya sido terminado antes del tiempo $t_0 - 0.7\alpha$ y que todavía no se nos haya comunicado su finalización.

La interpretación que damos al enunciado equivale a saber que $T_2 > t_0 - 0.7\alpha$ y que $T_2 > T_1$, es decir $T_{1,2} = T_2$. Con esta información, la distribución de $T_{1,2}$ es igual a la de T_2 *condicionada* por $T_2 > t_0 - 0.7\alpha$. Llamemos T^* a la variable $T_{1,2}$ condicionada por $T_2 > t_0 - 0.7\alpha$ y $T_2 > T_1$; T^* se distribuye en

$[\,t_0 - 0.7\alpha, t_0 + \alpha\,]$ y su función de distribución es igual a

$$
\begin{aligned}
P(T^* \le t) &= \frac{P(T_2 \le t, T_2 > t_0 - 0.7)}{P(T_2 > t_0 - 0.7)} \\
&= \frac{t - t_0 + 0.7\alpha}{t_0 + \alpha - t_0 + 0.7\alpha} \\
&= \frac{t - t_0 + 0.7\alpha}{1.7\alpha}, \qquad \text{si } t_0 - 0.7\alpha \le t \le t_0 + \alpha
\end{aligned} \tag{12}
$$

siendo $P(T_{1,2} \le t) = 0$ si $t < t_0 - 0.7\alpha$ y $P(T_{1,2} \le t) = 1$ si $t > t_0 + \alpha$; esto es, T^* es uniforme en $[\,t_0 - 0.7\alpha, t_0 + \alpha\,]$.

Con los datos de la nueva distribución de T^* y la independencia de T_e y T^*, calcularemos la probabilidad del suceso $\{T \le t_0 + t_1 + 1.4\alpha\}$, donde $T = T^* + T_e$ o, mejor dicho, calcularemos la probabilidad de su suceso contrario

$$P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha) = 1 - P(T \le t_0 + t_1 + 1.4\alpha)$$

de manera semejante al cálculo que hicimos en el primer apartado. El cálculo está esbozado en la representación gráfica de la figura 0.16.

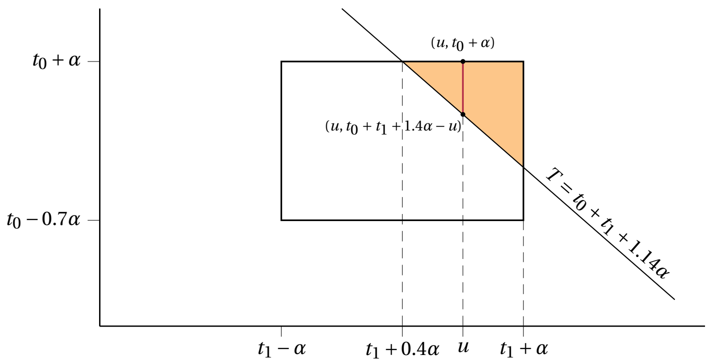


Figura 0.16: Cálculo de $P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha)$

Calculamos $P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha)$ condicionando por el valor de T_e, y resulta

$$P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha) = \int_{t_1 + 0.4\alpha}^{t_1 + \alpha} P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha \mid T_e = u)\,\frac{du}{2\alpha} \tag{13}$$

Ahora bien, se tiene

$$
\begin{aligned}
P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha \mid T_e = u) &= P(T^* + T_e > t_0 + t_1 + 1.4\alpha \mid T_e = u) \\
&= P(T_{1,2} > t_0 + t_1 + 1.4\alpha - u)
\end{aligned}
$$

luego

$$
\begin{aligned}
P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha \mid T_e = u) &= 1 - P(T^* \leq t_0 + t_1 + 1.4\alpha - u) \\
&= 1 - \frac{t_0 + \alpha - (t_0 + t_1 + 1.4\alpha - u)}{1.7\alpha} \\
&= 1 - \frac{t_1 + 2.1\alpha - u}{1.7\alpha} \\
&= \frac{u - t_1 - 0.4\alpha}{1.7\alpha} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

se sigue

$$
\begin{aligned}
P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha) & \frac{1}{1.7\alpha} \int_{t_1+0.4\alpha}^{t_1+\alpha} (u - t_1 - 0.4\alpha) \frac{du}{2\alpha} \\
&= \frac{1}{6.8\alpha} \Big((u - t_1 - 0.4\alpha)^2 \Big|_{t_1+0.4\alpha}^{t_1+\alpha} \\
&= \frac{(0.6\alpha)^2}{6.8\alpha} = 0.0529 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

luego la probabilidad de acabar el proyecto antes del plazo establecido en el contrato es

$$
P(T \leq t_0 + t_1 + 1.4\alpha) = 1 - P(T > t_0 + t_1 + 1.4\alpha) = 0.9470 \qquad (16)
$$