GEOMETRÍA BÁSICA Junio 2017

NO SE PERMITE NINGÚN TIPO DE MATERIAL.Todas las respuestas deben estar justificadas razonadamente.

Ejercicio 1. (3 puntos) Sabiendo que las tres mediatrices de los lados de un triángulo se cortan en un punto, probar que las tres alturas también se cortan en un punto.

Ejercicio 2. (4 puntos) Sea $\mathcal{T} = \triangle\{A, B, C\}$ un triángulo isósceles con $\measuredangle B = \measuredangle C$. Sea $D \in [B, C]$ y E el punto de corte de la recta r_{AD} con la circunferencia circunscrita de $\mathcal{T}$.

a) Probar que los triángulos $\triangle\{A, B, D\}$ y $\triangle\{A, B, E\}$ son semejantes.

b) Probar que

$$AB^2 = AD \times AE$$

Ejercicio 3. (3 puntos)

a) Describir las simetrías de un octaedro regular que son rotaciones de ángulo 180^o (medias vueltas).

b) Describir las simetrías de un octaedro regular que son reflexiones respecto de planos.

Soluciones

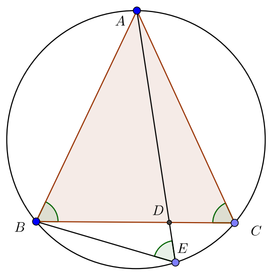
Ejercicio 1.

Teorema 7.24 en las páginas 124-125 del texto base. También hay una grabación y una construcción en geogebra sobre este tema en la virtualización.

De todos modos hay otros muchos métodos que son válidos. Por ejemplo: a partir de un triángulo $\triangle\{A, B, C\}$ se construye un triángulo $\triangle\{X, Y, Z\}$ del siguiente modo: $X = \sigma_{\text{medio}[B,C]}(A)$, $Y = \sigma_{\text{medio}[A,C]}(B)$, $Z = \sigma_{\text{medio}[A,C]}(B)$. Como $[X, B] = \sigma_{\text{medio}[B,C]}[C, A]$ y $[Z, B] = \sigma_{\text{medio}[A,B]}[C, A]$, tenemos que $r_{XZ} \| r_{AC}$ y que $B = \text{medio}[X, Z]$, por lo que la altura de $\triangle\{A, B, C\}$ que pasa por B es la mediatriz del lado $[X, Z]$. Haciendo lo mismo con los otros lados del triángulo $\triangle\{X, Y, Z\}$ tenemos que las mediatrices de $\triangle\{X, Y, Z\}$ son las alturas de $\triangle\{A, B, C\}$. Y como sabemos, por hipótesis que las mediatrices de $\triangle\{X, Y, Z\}$ se cortan en un punto, también lo hacen las alturas de $\triangle\{A, B, C\}$.

Ejercicio 2.

a) Los triángulos $\triangle\{A,B,D\}$ y $\triangle\{A,B,E\}$ comparten el ángulo $\angle A$. Por otra parte, $\triangle\{A,B,C\}$ y $\triangle\{A,B,E\}$ tienen la misma circunferencia circunscrita y un lado $[A,B]$ común, luego en virtud del teorema 8.11 tenemos que $\measuredangle_{\triangle\{A,B,C\}}C = \measuredangle_{\triangle\{A,B,E\}}E$. Como $\triangle\{A,B,C\}$ es isósceles con $\measuredangle_{\triangle\{A,B,C\}}B = \measuredangle_{\triangle\{A,B,C\}}C$ tenemos que $\measuredangle_{\triangle\{A,B,C\}}B = \measuredangle_{\triangle\{A,B,E\}}E$. Ahora bien $\angle_{\triangle\{A,B,C\}}B = \angle_{\triangle\{A,B,D\}}B$, y por tanto: $\measuredangle_{\triangle\{A,B,D\}}B = \measuredangle_{\triangle\{A,B,E\}}E$ y $\measuredangle_{\triangle\{A,B,D\}}A = \measuredangle_{\triangle\{A,B,E\}}A$, luego los dos triángulos son semejantes (ver teorema 7.15).



b) La semejanza entre los triángulos $\triangle\{A,B,D\}$ y $\triangle\{A,B,E\}$ transforma A en A, B en E y D en B. Luego

$AB = kAE$ y $AD = kAB$, por tanto $\frac{AB}{AE} = \frac{AD}{AB}$, entonces $AB^2 = AD \times AE$.

Ejercicio 3.

a) Ver páginas 236-237 del texto base.

1. Medias vueltas cuyo eje pasa por un vértice y el centro del poliedro, cada uno de estos ejes pasa por otro vértice del octaedro, el vértice opuesto. Hay tres medias vueltas de este tipo distintas en cada octaedro (una por cada par de vértices opuestos).

2. Medias vueltas cuyo eje pasa por el punto medio de una arista y el centro del octaedro, cada eje pasa por el punto medio de otra arista, la arista opuesta. Hay seis de estas medias vueltas (una por cada par de aristas opuestas).

Cuidado: las simetrías que son rotaciones con ejes perpendiculares a las caras tienen ángulo $2\pi/3$ y por tanto no son medias vueltas.

b) Ver página 237 del texto base.

1. Reflexiones sobre planos que pasan por los puntos medios de dos aristas y son ortogonales a las rectas que contienen a dichas aristas. Además dichos planos pasan por dos vértices opuestos del octaedro. Hay seis de tales reflexiones.

2. Reflexiones sobre planos que contienen a cuatro vértices y que son perpendiculares a la recta que une los otros dos vértices del octaedro (que son vértices opuestos entre sí). Hay tres reflexiones de este tipo.