PROBLEMA 4. Sean G_1, ..., G_n grupos y para cada i= 1,..., n sea H_i un subgrupo normal en G_i.

Demostrar que H_1x ... x H_n es normal en G_1x ... xG_n y que

$$G_1x \ldots xG_n / H_1x \ldots x H_n \simeq G_1/H_1x \ldots x G_n/H_n$$

Todo el ejercicio se puede demostrar si podemos crear un homomorfismo biyectivo Ψ o isomorfismo con la siguiente forma:

$$\Psi : \quad G_1x \ldots xG_n / H_1x \ldots xH_n \to G_1 / H_1x \ldots xG_n / H_n$$
$$(a_1,..., a_n)/(h_1,..., h_n) \mapsto (a_1H_1,..., a_nH_n)$$

en el que si el núcleo de Ψ, ker Ψ, es H_1x…H_n entonces dicho grupo será un grupo normal y por el primer teorema de isomorfia : $G_1x \ldots xG_n / H_1x \ldots xH_n \cong G_1 / H_1x \ldots xG_n / H_n$.

Lo primero que debemos demostrar es que esta aplicación está bien definida. Para ello asumiremos los elementos iguales del grupo origen de la aplicación:

Si tomamos sólo un elemento del producto a través de una función Ψ' que sólo opera elemento a elemento, y decimos: $a_ih_i = b_ih'_i \Rightarrow b_i^{-1}a_ih_i = h'_i$ (siendo a_i y b_i elementos de G_i y h_i y h'_i elementos de H_i), entonces $\Psi'(b_i^{-1}a_ih_i) = b_i^{-1}a_iH_i = H_i \Rightarrow a_iH_i = b_iH_i$. Y esto puede extender a todo el producto interno de manera que:

$$(a_1x \ldots xa_n / h_1x \ldots xh_n) = (b_1x \ldots xb_n / h'_1 x \ldots xh'_n) \Rightarrow (a_1H_1x, \ldots xa_nH_n) = (b_1H_1x, \ldots xb_nH_n)$$

A continuación demostramos que la aplicación Ψ corresponde a un homomorfismo, para lo cual nos basaremos en la definición de producto de productos internos que se da al comienzo de la asignatura.

$$\Psi((a_1x \ldots xa_n / h_1x \ldots xh_n) \cdot (b_1x \ldots xb_n / h'_1 x \ldots xh'_n)) =$$
$$= (a_1b_1H_1x, \ldots xa_nb_nH_n) = (a_1H_1b_1H_1x, \ldots xa_nb_nH_n) =$$
$$= \Psi(a_1x \ldots xa_n / h_1x \ldots xh_n)\Psi(b_1x \ldots xb_n / h'_1 x \ldots xh'_n)$$

Para la demostración de la sobreyectividad ésta es obvia, ya que cada elemento del producto directo del grupo está formado por la proyección natural de los elementos "a" de G sobre el grupo normal H.

Para la demostración de la inyectividad, primero calcularemos el elemento neutro de $G_1 / H_1x \ldots xG_n / H_n$, de debe cumplir: $(a_1H_1x \ldots xa_nH_n) \cdot (e_1H_1x \ldots xe_nH_n) = (a_1H_1x \ldots xa_nH_n)$.

$$(a_1H_1x \ldots xa_nH_n) \cdot (e_1H_1x \ldots xe_nH_n) = (a_1H_1e_1H_1x \ldots xa_nH_ne_nH_n) = (a_1e_1H_1x \ldots xa_ne_nH_n)$$

Y para que $a_1e_1H_1$ sea igual a a_1H_1, e_1H_1 debe pertenecer a H_1, que se representa por la clase $1H_1$, luego $e_1 = 1$, $1 \leq i \leq n$.

Una vez que sabemos que $H_1x \ldots xH_n$ es el elemento neutro del grupo destino, para probar la inyectividad tendríamos que demostrat que el núcleo de Ψ es $H_1x \ldots xH_n$ siendo este subgrupo el único que cumple que su imagen es el elemento neutro de $G_1 / H_1x \ldots xG_n / H_n$, es decir, $H_1x \ldots xH_n$.

$$Ker\,\Psi = \{a_1x \ldots xa_n / h_1x \ldots xh_n \in G_1x \ldots xG_n / H_1x \ldots xH_n \,\big|\, \Psi(a_1x \ldots xa_n / h_1x \ldots xh_n) = H_1x, \ldots xH_n \, .$$

Y para que esto se cumpla de debe dar el hecho de que $a_i H_i = H_i$, y como esto sólo se cumple en el caso de que a_i pertenezca a H_i, el núcleo de Ψ está formado por los elementos $h'_1 x \ldots x h'_n / h_1 x \ldots x h_n$ que forman el grupo $H_1 x \ldots x H_n$.

Una vez visto todo esto, como el núcleo de la aplicación es el grupo $H_1 x \ldots x H_n$ podemos concluir **que $H_1 x \ldots x H_n$ es un subgrupo normal a $G_1 x \ldots x G_n$.**

Y una vez demostrada la inyectividad y la sobreyectividad podemos decir que Ψ establece un homomorfismo biyectivo o isomorfismo entre los conjuntos origen y destino de Ψ. Esto por el primer teorema de isomorfía nos permite concluir que : $G_1 x \ldots x G_n / H_1 x \ldots x H_n \cong G_1 / H_1 x \ldots x G_n / H_n$.