Funciones de Varias Variables I. CC. Matemáticas.
Prueba Presencial Ordinaria. Junio 2018

1S

La puntuación máxima de cada preguntase indica en cada una de ellas. Se valorará la exposición de las respuestas dadas. No se permite el uso de ningún tipo de material.

1. (2 puntos) Calcular el siguiente límite, explicando todos los pasos para su resolución:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$$

2. (3 puntos) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en (a,b), un punto del dominio de f. Consideramos en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\mathbf{T}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{k}$ y $\mathbf{T}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\mathbf{k}$.

a) Obtener una ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(a,b,f(a,b))$ a partir del vector $\mathbf{n} = \mathbf{T}_y \times \mathbf{T}_x$.

b) Si $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, hallar una ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(1,1,0)$.

3. (2 puntos) El punto $P(1,1,92)$ yace en el paraboloide elíptico de ecuación

$$z = 100 - 2x^2 - 6y^2$$

¿Cuál es la ecuación de la recta tangente al paraboloide en ese punto que está contenida en el plano $z=92$?.

4. (3 puntos) Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales primeras y diferenciabilidad de la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si}(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si}(x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Examen 2018 1a semana

Nelson

1.

Pasando a coordenadas polares, $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, y aplicando l'Hopital, entonces

$$\lim_{x,y\to 0,0} f(x) = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{r^2} = \lim_{r\to 0} e^{r^2} = 1$$

2.

a)

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{T}_y \times \overrightarrow{T}_x = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\overrightarrow{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$$

entonces el plano buscado es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) - z + f(a,b) = 0$$

b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2y}{(x+y)^2} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-2x}{(x+y)^2}$$

por el apartado anterior tenemos que el plano buscado es

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y = z$$

3.

La recta buscada es la intersección del plano tangente a la gráfica de f con el plano dado, $y = 92$, por lo tanto como

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = -4x \quad \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = -12y$$

el plano tangente en $(1,1,92)$ es

$$4x + 12y + z = 108$$

en intersección con $z = 92$, nos da la recta resultante

$$x + 3y = 4$$

4.

La función es continua en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ por ser composición de funciones continuas. Para analizar en el punto $(0,0)$ tomamos el límite en ese valor pasando a coordenadas cilindricas, $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$, entonces

$$\lim_{r\to 0} \frac{\operatorname{sen}(r^2)}{r} = 0 = f(0,0)$$

por lo tanto la función es continua en todo $\mathbb{R}$.

Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y\cos(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$$

continuas en $\mathbb{R}^2 - (0,0)$ y no estan definidas en $(0,0)$. Para ver si existe la derivada en dicho punto calculamos la derivada por la definición

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h^2)}{h^2} \to \text{no existe}$$

por simetría la derivada respecto a y tampoco existe. Por lo que la función no es diferenciable.