Álgebra Lineal I

Nota importante: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras.
Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema1

Calcular las bases de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ $S+T$ y $S \cap T$, siendo $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \mid x_1 - 2x_2 + x_4 = 0\}$ y T el subespacio vectorial generado por los vectores $(1,1,1,1)$ y $(2,0,1,2)$. (3 puntos)

Como $x_4 = -x_1 + 2x_2$, entonces los vectores son de la forma $(x_1, x_2, x_3, -x_1+2x_2)$, entonces los vectores $(1,0,0,-1)$, $(0,1,0,2)$, $(0,0,1,0)$ generan S y son independientes, luego forman una base

Como $S+T$ esta generado por los vectores de $S \cup T$ y $(2,0,1,2)$ no pertenece a S, los vectores anteriores con el $(2,0,1,2)$ forman una base de $S+T$.

Conocemos que

$$\dim(S \cap T) = \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{\dim(S)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 2}}{\dim(T)} - \underset{\substack{\shortparallel \\ 4}}{\dim(S+T)} = 1$$

Puesto que $(1,1,1,1) \in S \cap T$, forma una base de $S \cap T$.

2

Problema 2

a) Sea $f : E \to F$ una aplicación lineal. Demostrar que las siguientes afirmaciones son equivalentes: (i) F conserva la independencia lineal: si $u_1, \ldots, u_p$ son vectores independientes en E, sus imágenes $f(u_1), \ldots, f(u_p)$ lo son en F. (ii) El núcleo de f es trivial: $ker(f) = \{0\}$. (iii) f es inyectiva. (2 puntos)

b) Discutir y calcular las soluciones del sistema de n ecuaciones con n incógnitas

$$
\begin{aligned}
(1-n)x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= 0 \\
x_1 + (1-n)x_2 + \ldots + x_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &= 0 \\
x_1 + x_2 + \ldots + (1-n)x_n &= 0
\end{aligned}
$$

(2 puntos)

a) Página 194 del libro de teoría

b) Problema prueba de evaluación del 2010; mirar en la web de la asignatura

Problema 3

Sea $B_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, v_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$ y sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal tal que $f(u_1 - u_2) = 2v_1 - v_2 + v_3$, $f(2u_2 + u_3) = v_1 - 3v_2$, $f(-u_1 - u_3) = 5v_3$. Determinar la matriz asociada a f respecto a la base B_1 en el espacio de partida y la base B_2 en el espacio de llegada. (3 puntos)

$f(u_1 - u_2) = 2v_1 - v_2 + v_3 \Rightarrow f(u_1) - f(u_2) = 2v_1 - v_2 + v_3$

$f(2u_2 + u_3) = v_1 - 3v_2 = 2f(u_2) + f(u_3)$

$f(-u_1 - u_3) = 5v_3 = -f(u_1) - f(u_3)$

Resolviendo el sistema se tiene

$f(u_1) = 5v_1 - 5v_2 + 7v_3$

$f(u_2) = 3v_1 - 4v_2 + 6v_3$

$f(u_3) = -5v_1 + 5v_2 - 12v_3$

La matriz asociada a f es

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -5 \\ -5 & -4 & 5 \\ 7 & 6 & -12 \end{pmatrix}$$