**INTEGRAL DE LEBESGUE**
**Exámenes**

<u>*Febrero 2020 - 1ª Semana*</u>

**<u>Ejercicio 2.</u>** Dado un conjunto $X$, sea $\kappa_X : P(X) \to [0,\infty]$ la medida de cardinalidad, definida para cada $A \subseteq X$ como

$$\kappa_X(A) = \begin{cases} Card(A) & A \text{ finito} \\ \infty & A \text{ infinito} \end{cases}$$

Consideremos los espacios de medida $(\mathbb{N}, P(\mathbb{N}), \kappa_{\mathbb{N}})$ y el espacio producto $(\mathbb{N}^2, P(\mathbb{N}^2), \kappa_{\mathbb{N}} \otimes \kappa_{\mathbb{N}})$.

A) ¿Es cierto que $\kappa_{\mathbb{N}^2} = \kappa_{\mathbb{N}} \otimes \kappa_{\mathbb{N}}$?

B) Se define la función

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & m = n \\ -1 & m = n+1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Calcular

$$\int_{\mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\kappa_{\mathbb{N}}(m) \right) d\kappa_{\mathbb{N}}(n) \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\kappa_{\mathbb{N}}(n) \right) d\kappa_{\mathbb{N}}(m)$$

C) ¿Es $f$ una función $(\kappa_{\mathbb{N}} \otimes \kappa_{\mathbb{N}})$-integrable en $\mathbb{N}^2$?

<u>*Solución:*</u>

A) Se puede observar que $P(\mathbb{N}^2)$ coincide con la $\sigma$-álgebra generada por la familia $R$ (anillo) de las uniones disjuntas de rectángulos medibles generalizados de $\mathbb{N}^2$. Por tanto, como se sabe ambas medidas coinciden sobre $R$ y son $\sigma$-finitas, el Teorema de Extesión de Hahn asegura que hay una única medida en $\sigma(R) = P(\mathbb{N}^2)$ que es extensión de las anteriores. Como consecuencia de dicha unicidad se tiene que ambas medidas deben ser iguales. Por tanto, $\kappa_{\mathbb{N}^2} = \kappa_{\mathbb{N}} \otimes \kappa_{\mathbb{N}}$ en $P(\mathbb{N}^2)$.

B) Es fácil observar que

$$\int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\kappa_{\mathbb{N}}(n) = 0 \qquad\qquad \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\kappa_{\mathbb{N}}(m) = 0$$

Por tanto,

$$\int_{\mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\kappa_{\mathbb{N}}(m) \right) d\kappa_{\mathbb{N}}(n) = \int_{\mathbb{N}} 0\, d\kappa_{\mathbb{N}}(n) = 0$$

$$\int_{\mathbb{N}} \left( \int_{\mathbb{N}} f(m,n)\, d\kappa_{\mathbb{N}}(n) \right) d\kappa_{\mathbb{N}}(m) = \int_{\mathbb{N}} 0\, d\kappa_{\mathbb{N}}(m) = 0$$

C) La función $|f(m,n)|$ vale $1$ en los puntos tales que $m = n, n+1$ y es nula en el resto. Como se tiene que $\kappa_{\mathbb{N}} \otimes \kappa_{\mathbb{N}} = \{(m,n) : m = n \vee m = n+1\} = +\infty$ (recuérdese el primer apartado). Es obvio que se tiene que

$$\int_{\mathbb{N}^2} |f(m,n)|\, d\kappa_{\mathbb{N}} \otimes \kappa_{\mathbb{N}} \geq +\infty$$

de donde se concluye que $f$ no es $(\kappa_{\mathbb{N}} \otimes \kappa_{\mathbb{N}})$-integrable en $\mathbb{N}^2$.