Solución Prueba Presencial 2^a semana

28 de junio de 2015

1. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definida por la ecuación

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 24$$

- Hallar la ecuación del plano tangente a S en el punto $(a, b, c) \in S$.
- ¿Cuáles son los puntos de S tales que el plano tangente a S que pasa por ellos es paralelo al plano $x + y + \sqrt{2}z = 0$?

Solución: Para calcular un plano tangente, hallamos primero un vector ortogonal a la superficie, que consideramos como la superficie de nivel de una cierta función

$$\nabla f(x, y, z) = (2x, 4y, 8z) \quad \rightarrow \quad \nabla f(a, b, c) = (2a, 4b, 8c)$$

El plano tangente a S en el punto (a, b, c) tiene ecuación

$$2ax + 4by + 8cz = k$$

y para determinar k imponemos la condición de que $(a, b, c) \in S$ y tenemos la ecuación:

$$2ax + 4by + 8cz = 2a^2 + 4b^2 + 8c^2$$

En los puntos (r, s, t) en los que el plano tangente a S es paralelo al plano $x + y + \sqrt{2} = 0$ el vector gardiente tiene la misma dirección que el vector $(1, 1, \sqrt{2})$; es decir

$$(2r, 4s, 8t) = \lambda(1, 1, \sqrt{2})$$

de aquí resulta $2r = 4s = 4\sqrt{2}t$ y el punto puede escribirse en función de un parámetro $(2\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, t)$. Para determinar el valor de t sustituimos en la ecuación de S

$$8t^2 + 2 \cdot 2t^2 + 4t^2 = 24 \quad \rightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

y sustituyendo tenemos los puntos

$$\left(\pm 2\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

2. Estudiar la continuidad de la función.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y=z}} f(x,y,z) = \lim_{x\to 0}\frac{0}{3x^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y,z)\to(0,0,0)\\ x=y,z=0}} f(x,y,z) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

y tenemos dos límites distintos tendiendo a $(0,0,0)$ por dos rectas diferentes, por lo tanto no existe límite y la función no es continua.

3. Describir, utilizando coordenadas polares, los conjuntos de nivel de la función:

$$f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Solución: La expresión de f en coordenadas polares es

$$\begin{aligned} f(r,\theta) &= \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} \\ &= \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta \\ &= \cos 2\theta \end{aligned}$$

y un conjunto de nivel es de la forma

$$L_k = \cos 2\theta, \quad L_k \in [-1,1]$$

Consideramos la función $\varphi(\theta) = \cos 2\theta$ en $[0,2\pi)$. La gráfica de φ es uns homotecia de la de la función coseno en $[0,2\pi)$. Cada valor $y_0 \in [-1,1]$ tiene preimágenes $\theta_0, \pi-\theta_0, \pi+\theta_0, 2\pi-\theta_0$ donde $\theta_0 \in [0,\pi/2)$, es tal que $\cos 2\theta_0 = y_0$. Estos valores de θ representan los ángulos que definen las semirrectas ($r \geq 0$) de los conjuntos de nivel. De esta forma cada conjunto de nivel lo podemos representar como un par de rectas formandoágulo θ_0 y $-\theta_0$ si $\theta \in (0,\pi/2)$ junto con los ejes de coordeandas.

4. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = xy - x^3 - y^3$$

Estudiar y clasificar los puntos críticos de f. **Solución:** La función f es polinómica, y por lo tanto diferencable. Hacemos las derivadas primeras e igualamos a cero

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y - 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x - 3y^2 = 0 \end{aligned}$$

de donde se tiene

$$y = 3(3y^2)^2 = 27y^4$$

si $y \neq 0$ podemos dividir por y

$$1 = 27y^3 \;\Rightarrow\; y = 1/3 \;\Rightarrow\; x = 1/3$$

la otra opción es $y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$.

Tenemos dos únicos puntos críticos $(0,0)$ y $(1/3,1/3)$.

Ahora hallamos la matriz hessiana.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -6x\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -6y\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1\end{aligned}$$

y entonces

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -6y \end{bmatrix}$$

1 $(x, y) = (0, 0)$, en este caso

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y tenemos $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = -1 < 0$, la matriz es indefinida y se trata de un punto silla.

2 $(x, y) = (1/3, 1/3)$, en este caso

$$Hf(0, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

y tenemos $\Delta_1 = -2 < 0, \Delta_2 = 3 > 0$, la matriz es definida negativa y se trata de un máximo realtivo.