⁕ Duración del examen: dos horas ⁕

⁕ No se permite el uso de ningún tipo de material ⁕

Ejercicio 1) **(3 puntos)** Sea X un conjunto. Dados subconjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se define el límite ínfimo y el límite supremo

$$\liminf_n A_n := \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n \qquad\qquad \limsup_n A_n := \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n$$

Decimos que la sucesión $(A_n)_n$ de subconjuntos de X converge a un subconjunto A de X, y escribimos $\lim_n A_n = A$, cuando la sucesión de funciones características $(\chi_{A_n})_n$ converge puntualmente a la función característica χ_A de A.

(1) Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(1.a) $\lim_n A_n$ existe.

(1.b) $\lim_n A_n^c$ existe.

(1.c) $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n = A$ y $\lim_n A_n = A$.

Sea (Ω, Σ, μ) un espacio de medida (σ-aditiva, no necesariamente finita), y sea $(A_n)_n$ una sucesión de conjuntos en Σ.

(2) Demostrar que si $(A_n)_n$ converge a $A \subseteq \Omega$, entonces $A \in \Sigma$.

(3) Supongamos $\lim_n A_n$ existe y que existe B tal que $\mu(B) < \infty$ y que contiene a todos los A_n's. Demostrar que $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$. ¿De cual teorema de convergencia de funciones integrables es este resultado un caso particular?

⁕

Ejercicio 2) **(3 puntos)**

(1) Enunciar el teorema de *Radon-Nikodym.*

(2) Sea $X := \{1, 2, \ldots, n\}$, $a_1, \ldots, a_n$ números reales positivos, y sean $\mu, \nu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ las medidas $\mu(A) := \sum_{j\in A} a_j$ y $\nu(A) := \mathbf{Card}(A)$=cardinalidad de A, para cada $A \subseteq X$. Demostrar que existe la derivada de Radon-Nikodym de μ con respecto a ν y encontrarla.

⁕

Ejercicio 3) **(4 puntos)**

(1) Dar las definiciones de medida *signada* y de conjunto *positivo* de una medida signada.

(2) Enunciar el Teorema de descomposición de Jordan.

(3) Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de conjuntos λ-medibles, y sea $f \in L_1(\lambda)$. Definimos $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por

$$\mu(A) := \int_A f d\lambda \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Demostrar que μ es una medida signada y encontrar su descomposición de Jordan.