Unidad Didáctica 2: Matrices

2.1 Introducción

Podríamos definir el Álgebra como la disciplina matemática que se dedica a la resolución de ecuaciones. Cuando las ecuaciones son lineales, es decir, de grado 1, como por ejemplo: $2x + 3y = 1$ o también $\sqrt{2}x_1 + x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0$; entonces estamos en la rama del Álgebra llamada Lineal, ligada a la estructura algebraica de espacio vectorial, como veremos en la siguiente Unidad Didáctica. Mientras que, si tratamos ecuaciones no lineales, por ejemplo: $3x^3 = 1$ cúbica o $x^2y + 2y = 4$, estamos en otras ramas del Álgebra y aparece el estudio de otras estructuras algebraicas. pero esto es materia para cursos superiores.

Como hemos dicho, el Álgebra Lineal, a cuyo estudio se dedica esta asignatura se interesa por las ecuaciones lineales, que son las que hemos tratado de resolver en la Unidad Didáctica anterior. Para ello, hemos utilizado las matrices, herramienta fundamental en el Álgebra Lineal que volveremos a usar más adelante para el estudio de los espacios vectoriales y de las aplicaciones lineales. Ahora, vamos a estudiar las matrices en sí mismas.

La sección I.3 se presenta una operación adicional a las vistas anteriormente: el producto de matrices de dimensiones adecuadas. A veces, para simplificar el producto de matrices resulta interesante contemplar las matrices por "trozos": a esto lo llamamos división por cajas o bloques de una matriz.

Se estudia la relación de el rango de una matriz respecto a las operaciones suma y producto:

$$|rg(A) + rg(B)| \leq rg(A + B) \leq rg(A) + rg(B)$$

$$rg(AB) \leq rg(A) \cdot rg(B).$$

Y se introduce el concepto de inversa de una matriz, así como un método de cálculo de la inversa mediante el Método de Gauss-Jordan (pág. 38).

En la sección I.4 se estudia el concepto de **determinante** de una matriz cuadrada, así como distintas reglas de cálculo: bien sea recurriendo al método de escalonamiento de Gauss-Jordan o bien utilizando el desarrollo por una fila o columna a lo que llamamos Método de Laplace. El determinante de una matriz triangular se calcula trivialmente como el producto de los elementos de la diagonal, y el método de escalonamiento simplificará el cálculo del determinante convirtiendo una matriz cuadrada en escalonada (y en particular triangular superior).

El determinante se comporta bien respecto al producto y trasposición de matrices:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) \text{ y } \det(A) = \det(A^t).$$

En la sección II.5 se utiliza el determinante para el cálculo alternativo de: el rango y la inversa de una matriz, así como en la resolución de sistemas compatibles.

2.2 Conceptos más importantes

Sección I.3 Operaciones con matrices

Representación por cajas o bloques de una matriz.
Propiedades de las operaciones: suma, producto por escalares y producto de matrices.
Tipos de matrices: cuadrada, triangular superior, triangular inferior, diagonal, identidad, etc.
Matriz inversa. Cálculo de la inversa utilizando el método de Gauss-Jordan (operaciones elementales).

Sección I.4 El determinante

Determinante por filas o columnas de una matriz cuadrada.
Regla de Laplace (Por filas o por columnas). Regla de Sarrus.
Propiedades del determinante.
Relación del determinante con las operaciones elementales.
Determinante de Vandermonde.

Sección I.5 Aplicaciones del determinante

Menor de una matriz.
Caracterización del rango de una matriz utilizando menores (proposición 5.1, pág. 61).
Adjunto de un elemento de una matriz. Matriz adjunta.
Caracterización de la matriz inversa a partir de la adjunta y el determinante. (pág. 64).
Regla de Cramer para resolver sistemas compatibles determinados.
Generalización de la Regla de Cramer para cualquier tipo de sistema compatible (pág. 67).

2.3 Resultados de aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con rigor y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) que exhiben las propiedades más importantes de los conceptos anteriores.

Se desarrollarán las siguientes **habilidades**:

- Realizar operaciones con matrices: suma, producto por escalares y producto.
- Decidir si una matriz es invertible y calcular la inversa por los dos métodos: de Gauss-Jordan y por menores.
- Calcular el rango de una matriz por menores.
- Calcular el determinate de una matriz por los dos métodos:
    - El método de Gauss-Jordan de escalonamiento.
    - La regla de Laplace: desarrollándolo por una fila o una columna
- Dominar las propiedades del determinante para simplificar su cálculo.
- Resolver sistemas lineales compatibles utilizando la Regla de Cramer (pág. 65) y la Regla de Cramer generalizada (pág.67).