TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS

<u>AR1.</u> Comprobar lo que se indica en el ejemplo 1: las familias $B(a), B(b), B(c), B(d)$ cumplen las condiciones para ser un sistema de bases de entornos abiertos en el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$. Hallar la topología determinada por ellas y la familia de cerrados correspondiente.

<u>Solución:</u>

Es inmediato comprobar que las familias cumplen las condiciones para ser un sistema de bases de entornos abiertos de X. Vamos a hallar ahora la topología que determinan.

Conjuntos que son abiertos:
$\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}$

Por tanto, dicho sistema de bases de entornos abiertos determinan el espacio topológico (X, T) donde

$$T = \{\varnothing, X, \{a\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$$

AR2. Comprobar la condición necesaria suficiente que se da en 1.3 para que dos sistemas de bases de entornos abiertos sean equivalentes.

Solución:

Supongamos que los dos sistemas de bases de entornos abiertos $B(t)$ y $B'(t)$ de X son equivalentes. Tomemos un punto $p \in X$ arbitrario y sean $U \in B(p)$, $V' \in B'(p)$. Sabemos que U es un abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B(t)$ y que V' es un abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B'(t)$. Como los dos sistemas de bases de entornos abiertos son equivalentes, entonces U es un abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B'(t)$ y V' es abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B(t)$. Por tanto, por ser $p \in U \cap V'$ y ser estos subconjuntos abiertos, se tiene que existe$U' \in B'(p)$ tal que $U' \subset U$ y que existe $V \in B(p)$ tal que $V \subset V'$.

Supongamos ahora lo recíproco. Sea $A \subset X$ un abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B(t)$. Tenemos entonces que para cada $p \in A$ existe $U \in B(p)$ tal que $U \subset A$. Por hipótesis, existe un entorno abierto $U' \in B'(p)$ tal que $U' \subset U$. Por tanto, se tiene que $U' \subset U \subset A$. Así, para cada $p \in A$ existe $U' \in B'(p)$ tal que $U' \subset A$, y por tanto se tiene que A también es un abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B'(t)$. Razonando análogamente se obtiene que si $A \subset X$ es un abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B'(t)$, entonces A también es un abierto de la topología determinada por el sistema de bases de entornos abiertos $B(t)$.

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 1: ESPACIOS TOPOLÓGICOS

AR3. Sea (X,T) un espacio topológico, y M un subconjunto no vacío de X. Demostrar que la familia $T_M = \{M \cap U\}$, de las intersecciones de M con los abiertos U del espacio (X,T), es una topología del conjunto M. Se llama la topología inducida o subordinada por el espacio (X,T) en M o la topología relativa de M. El espacio (M,T_M) es un subespacio del espacio topológico (X,T).

Solución:

1. $\varnothing$ y M son abiertos de la topología T_M.

2. Sea una familia, finita o infinita, de abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$ de T. Entonces, la familia

$$V_\lambda = \{M \cap U_\lambda\}_{\lambda\in L}$$

verifica que

$$\bigcup_\lambda \{V_\lambda\} = \bigcup_\lambda \{M \cap U_\lambda\} = M \cap \underbrace{\left(\bigcup_\lambda \{U_\lambda\}\right)}_{\text{abierto}}$$

Por tanto, $\bigcup_\lambda \{V_\lambda\}$ es un abierto de T_M.

3 Sea una familia finita de abiertos $\{U_i\}$ con $i = 1, 2, \ldots, n$. Se tiene que

$$\bigcap_{i=1}^{n} \{V_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{M \cap U_i\} = M \cap \underbrace{\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{U_i\}\right)}_{\text{abierto}}$$

Por tanto, $\bigcap_{i=1}^{n} \{V_i\}$ es un abierto de T_M.

Así, se ha demostrado que T_M es una topología del conjunto M y por tanto (M,T_M) es un espacio topológico (y un subespacio topológico de (X,T))

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 2: BASE DE UNA TOPOLOGÍA

AR1. Sean $B(x)$ bases de entornos abiertos en los puntos de un conjunto X, y T la topología que definen. Comprobar que la familia B formada por el conjunto vacío y todos los conjuntos que constituyen las distintas bases $B(x)$ es una base de la topología T de X.

(Esto es lo que hemos probado antes)

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 3: ENTORNOS EN UN ESPACIO TOPOLÓGICO

AR1. Sea (X,T) un espacio topológico, y B una base de la topología T. Comprobar que para cada punto $t \in X$, la familia $F(t)$, formada por todos los conjuntos de B que contienen el punto t, es un sistema fundamental de entornos de t en el espacio topológico (X,T).

Como consecuencia, si un espacio (X,T) verifica el axioma II de numerabilidad, entonces (X,T) verifica el axioma I de numerabilidad.

Solución:

Sea A un entorno de t. Entonces existe un abierto U tal que $t \in U \subset A$. Como U es abierto, es unión de elementos de la base B, y como $t \in U$, existirá $V \in B$ tal que $t \in V \subset U \subset A$. Como esto se puede hacer con cada abierto A, entonces se tiene directamente que la familia $F(t)$ es un sistema fundamental de entornos de t en el espacio topológico (X,T), ya que todo entorno de t contiene al menos a un elemento de esta familia, como hemos visto antes.
Si un espacio topológico (X,T) verifica el axioma II de numerabilidad, entonces se puede encontrar una base numerable B de dicho espacio topológico. Como para cada punto $t \in X$ podemos considerar como sistema fundamental de entornos la familia $F(t)$ de los conjuntos de la base B que contienen a t, como B es numerable y $F(t) \subset B$, entonces $F(t)$ también es numerable. Como esto se puede hacer con cada punto $t \in X$, entonce sse puede encontrar para cada punto de X un sistema fundamental de entornos numerable, con lo cual, el espacio topológico (X,T) verifica el axioma I de numerabilidad.

Por tanto, con este ejercicio queda claro que:

- Si un espacio topológico verifica el axioma II de numerabilidad, entonces verifica el axioma I de numerabilidad.
- Si un espacio topológico verifica el axioma I de numerabilidad, no necesariamente tiene que verificar el axioma II de numerabilidad (ver ejercicio 4 de este mismo tema).

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 4: SUBCONJUNTOS EN UN ESPACIO TOPOLÓGICO

AR1. En un espacio topológico, el interior de un conjunto verifica estas propiedades:
a) Un conjunto M de X es abierto si y sólo si $\overset{\circ}{M} = M$.
b) $\overset{\circ\circ}{M} = \overset{\circ}{M}$.
c) Si $A \subset B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.
d) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$
e) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$

Solución:

a) Sabemos que $\overset{\circ}{M}$ es el mayor abierto contenido en M. Esto quiere decir que si A es un abierto tal que $A \subset M$, entonces $A \subset \overset{\circ}{M}$. Por tanto, si $\overset{\circ}{M} = M$, se tiene que M es abierto, ya que lo es $\overset{\circ}{M}$. Por otro lado, si M es abierto, por un lado se tiene que $\overset{\circ}{M} \subset M$, que esto se cumple siempre, y por ser M abierto, se tiene que $M \subset \overset{\circ}{M}$. Por tanto, tenemos que $M = \overset{\circ}{M}$. Así, un subconjunto de un espacio topológico es abierto si y sólo si es igual a su interior.

Aunque no se pide y viene demostrado en el libro, vamos a demostrar que el interior es abierto y que es el mayor abierto contenido en el conjunto. Por definición, decimos que un punto $x \in M$ pertenece al interior de M si existe un entorno V de x tal que $x \in V \subset M$. Notamos el conjunto de estos puntos como $\text{int}(M)$ o $\overset{\circ}{M}$. Sea $t \in M$, entonces existe $V \in E(t)$ tal que existe un abierto U que verifica $t \in U \subset V \subset M$. Todos los puntos del abierto U son interiores a M. Por tanto, para todo $t \in \text{int}(M)$ existe un entorno de t contenido en $\text{int}(M)$. Por tanto, el conjunto $\text{int}(M)$ es abierto.

Si ahora A es un abierto contenido en M, se tiene que para todo punto $t \in A$ existe un abierto U tal que $t \in U \subset A \subset M$. Por tanto, todo punto de A es del interior de M. Por tanto, si A es un abierto contenido en M se tiene que $A \subset \overset{\circ}{M}$.

b) Como $\overset{\circ}{M}$ es abierto, entonces, consecuencia directa del apartado anterior es $\overset{\circ\circ}{M} = \overset{\circ}{M}$.

c) Sea $t \in \overset{\circ}{A}$. Entonces existe $V \in E(t)$ tal que $V \subset A$, y por tanto $V \subset B$. Así $t \in \overset{\circ}{B}$ y por tanto $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$.

d) Sea $t \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Entonces existen entornos $V, W \in E(t)$ tal que $V \subset A$ y $W \subset B$. Como $V \cap W \in E(t)$ y $V \cap W \subset A \cap B$, entonces $t \in \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$.
Por otra parte, sea $t \in \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}}$. Entonces se tiene que existe $V \in E(t)$ tal que $t \in V \subset A \cap B$. Así, es evidente que $t \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

e) Evidentemente si $t \in \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, entonces existe o bien $V \in E(t)$ tal que $V \subset A$ o bien $W \in E(t)$ tal que $W \subset B$. Tomemos sin pérdida de generalidad que se verifica la primera condición. Entonces, evidentemente $V \subset A \cup B$ y $t \in \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$. Así, se tiene que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$, como se quería demostrar.

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 4: SUBCONJUNTOS EN UN ESPACIO TOPOLÓGICO

AR2. En un espacio topológico, la adherencia de un conjunto verifica estas propiedades:
a) Un conjunto M de X es cerrado si y sólo si $\overline{M} = M.$
b) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$
c) Si $A \supset B,$ entonces $\overline{A} \supset \overline{B}.$
d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
e) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

Solución:

a) En primer lugar, tenemos que notar que $\overline{M} = \overset{\circ}{M} \cup \mathrm{fr}(M) = X - \mathrm{ext}(M)$ y es cerrado. Evidentemente $M \subset \overline{M}.$ Si A es un cerrado que contiene a $M, M \subset A,$ entonces $\overline{M} \subset A.$ Por ser A cerrado, se tiene que $X - A$ es abierto y $X - A \subset X - M.$ Por tanto, $X - A \subset \mathrm{ext}(M)$ y $A \supset \overline{M}.$ Así, se tiene que $\overline{M}$ es el mínimo cerrado que contiene a $\overline{M}.$ Por tanto, si $\overline{M} = M$ se tiene por definición que M es cerrado. Por otra parte, se tiene que si M es cerrado, entonces $M \subset \overline{M} \subset M$ y $\overline{M} = M,$ como se quería demostrar.

b) Como $\overline{M}$ es cerrado, entonces $\overline{\overline{M}} = \overline{M},$ aplicando directamente el resultado del apartado anterior.

c) Supongamos que $B \subset A.$ Sea $t \in \overline{B}.$ Entonces, $\forall V \in E(t)$, se tiene $V \cap B \neq \varnothing.$ Por tanto, se tiene que $\varnothing \neq V \cap B \subset V \cap A.$ Por tanto, $t \in \overline{A}$ y $\overline{B} \subset \overline{A}.$

d) Como $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado (unión finita de cerrados); entonces por a) $\overline{A \cup B} \subset \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y así $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}.$

Sea ahora $t \in \overline{A} \cup \overline{B}.$ Entonces, supongamos sin pérdida de generalidad que $\forall V \in E(t)$ se tiene $V \cap A \neq \varnothing.$ Por tanto, $V \cap (A \cup B) \neq \varnothing$ y así $t \in \overline{A \cup B}.$ Por tanto, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}.$ Así, hemos llegado a que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

e) Sea $t \in \overline{A \cap B}.$ Entonces, para todo $V \in E(t)$ se tiene que $V \cap (A \cap B) \neq \varnothing.$ Por tanto, $V \cap A \neq \varnothing$ y $V \cap B \neq \varnothing.$ Así, se tiene que $t \in \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 5: SUCESIONES. LÍMITES DE SUCESIONES

AR1. Si X es un conjunto no vacío y $B = \{A_\lambda\}_{\lambda\in L}$ es una base de filtro en X, comprobar que la familia F de los subconjuntos de X que contienen algún elemento de B verifica estas propiedades:
A) Si $M \in F$, entonces $M \neq \emptyset$.
B) Si $M_\lambda, M_\mu \in F$ entonces $M_\lambda \cap M_\mu \in F$.
C) Si $M_\lambda \in F$ y $M \supset M_\lambda$, entonces $M \in F$.

Solución:

A) Como B es una base de filtro, se tiene que cada elemento $A_\lambda \in B$ verifica que $A_\lambda \neq \emptyset$.
Como $M \in F$, entonces existe $A_\lambda \in B$ tal que $A_\lambda \subset M$. Como $A_\lambda \neq \emptyset$ entonces se tiene que $M \neq \emptyset$.

B) Es propiedad de las bases de filtro que para dos cualesquiera elementos $A_\lambda, A_\mu \in B$ existe otro elemento $A_\phi \in B$ tal que $A_\phi \subset A_\lambda \cap A_\mu$. Por tanto, dados dos elementos $M_\lambda, M_\mu \in F$ se verifica que existen $A_\lambda, A_\mu \in B$ tales que $A_\lambda \subset M_\lambda$ y $A_\mu \subset M_\mu$. Por tanto, si $A_\phi \in B$ es tal que $A_\phi \subset A_\lambda \cap A_\mu$, se tiene que $A_\phi \subset A_\lambda \cap A_\mu \subset M_\lambda \cap M_\mu$. Y, por tanto, se tiene que $M_\lambda \cap M_\mu \in F$.

C) Si $M_\lambda \in F$, entonces existe $A_\lambda \in B$ tal que $A_\lambda \subset M_\lambda$. Por tanto, si $M \supset M_\lambda$ se tiene que $A_\lambda \subset M_\lambda \subset M$. Por tanto, $M \in F$.

Por tanto, quedan probadas esas tres propiedades de la familia F, que es el filtro generado por la base de filtro B.

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 5: SUCESIONES. LÍMITES DE SUCESIONES

AR2. Demostrar que, en un conjunto X, dos bases de filtro equivalentes engendran el mismo filtro.

Solución:

Sean B_1 y B_2 dos bases de filtro equivalentes en el conjunto X y sean F_1, F_2 los filtros que generan en X, respectivamente.

Como B_1 y B_2 son equivalentes, se verifica que:
- Para cada $A_1 \in B_1$ existe $A_2 \in B_2$ tal que $A_2 \subset A_1$ (B_2 más fina que B_1).
- Para cada $A_2' \in B_2$ existe $A_1' \in B_1$ tal que $A_1' \subset A_2'$ (B_1 más fina que B_2).

Sea entonces $M \in F_1$. Entonces existe $A_1 \in B_1$ tal que $A_1 \subset M$. Sabemos que existe $A_2 \in B_2$ tal que $A_2 \subset A_1 \subset M$. Por tanto, se verifica que $M \in F_2$. Así $F_1 \subset F_2$.

Análaogamente, sea $M \in F_2$. Existirá $A_2' \in B_2$ tal que $A_2' \subset M$. Por tanto, existe $A_1' \in B_1$ tal que $A_1' \subset A_2' \subset M$. Por tanto, se tiene que $M \in F_1$. Así, $F_2 \subset F_1$.

Por tanto, es evidente que $F_1 = F_2$, es decir, las dos bases de filtro engendran el mismo filtro en X.

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 6: APLICACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS

AR1. Comprobar que, para un espacio topológico, el ser separado T_2, y también el ser separable, son propiedades topológicas; es decir, invariantes por homeomorfismos.

Solución:

En todo el ejercicio serán $(X,T),(Y,S)$ dos espacios topológicos homeomorfos, es decir, existirá una aplicación $f: X \to Y$ biyectiva y bicontinua (continua y tal que f^{-1} también es continua).

Supongamos que (X,T) es separado T_2. Sean $p,q \in Y$ distintos. Sabemos que en (X,Y) existen entornos U,V de $f^{-1}(x),f^{-1}(y)$ respectivamente tales que $U \cap V = \varnothing$. Por tanto, como $f(U),f(V)$ son entornos de $p,q,$ repectivamente, y pos ser f biyectiva, se tiene que $f(U) \cap f(V) = \varnothing$. Así, se tiene que para cada dos puntos distintos de $Y,$ existen entornos disjuntos de dichos puntos. Así, se tiene que (Y,S) es un espacio topológico separado T_2. Con el mismo argumento, si (Y,S) fuese separado T_2, también lo sería (X,T). Por tanto, el ser separado T_2 es una propiedad topológica, es decir, invariante por homeomorfismos.

Supongamos que (X,T) es separable, es decir, existe un subconjunto numerable $D \subset X$ denso en X. Veremos que el subconjunto $f(D)$, evidentemente numerable, es denso en Y.
Sea $q \in Y$ y V un entorno de q. Entonces se tendrá que $f^{-1}(V)$ es un entorno de $f^{-1}(q)$. Por tanto, habrá algún punto $p \in D \cap f^{-1}(V)$. Así, se tiene que $f(p) \in f(D) \cap V$ y por tanto, $f(D)$ es denso en Y. Si fuese (Y,S) separable, con el mismo razonamiento obtendríamos que también lo sería (X,T). Por tanto, hemos visto que el ser separable es una propiedad topológica, es decir, invariante por homeomorfismos.

TOPOLOGÍA
U.D. 1 - TEMA 6: APLICACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS

<u>AR2.</u> Sea $f : X \to (Y, S)$ una aplicación del conjunto X en un espacio topológico, y B una base de filtro en el conjunto X. Si la base de filtro imagen $f(B)$ es convergente en el espacio (Y, S) a un punto p, se dice que el punto p es límite de la aplicación f según la base de filtro B, y se escribe $p = \lim_B f$. Comprobar que, cuando X es un espacio topológico, son equivalentes estas dos afirmaciones:
A) La aplicación $f : (X, T) \to (Y, S)$ es continua en $x \in X$.
B) $\lim_{E(x)} f = f(x)$, donde $E(x)$ es la base de filtro formada por los entornos de x en el espacio (X, T).

<u>*Solución:*</u>

A$\Rightarrow$B: Supongamos que la aplicación $f : (X, T) \to (Y, S)$ es continua en $x \in X$.
Dado entonces un entorno V de $f(x)$, se tiene que $f^{-1}(V)$ es un entorno de x. Por tanto, $U = f^{-1}(V) \in E(x)$, y $f(U) \in f(E(x))$. Además, $f(U) \subset V$. Por tanto, $f(E(x))$ es convergente en el espacio (Y, S) al punto $f(x)$. Así, $\lim_{E(x)} f = f(x)$.

B$\Rightarrow$A: Sea V un entorno de $f(x)$. Entonces existe $U \in E(x)$ tal que $f(U) \subset V$. Se sigue directamente que f es continua en $x \in X$.

Por tanto, queda probada la equivalencia de las dos afirmaciones anteriores.

TOPOLOGÍA
U.D. 3 - TEMA 1: ESPACIOS COMPACTOS

A.R.1. Encontrar en $(\mathbb{R}, T_u)$ una base de filtro que no tenga puntos de aglomeración.

Solución:

Sea en $\mathbb{R}$ la familia de subconjuntos $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde $A_n = \{m \in \mathbb{N}, m \geq n\}$.

Esta familia es una base de filtro de $(\mathbb{R}, T_u)$ ya que:

1. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n \neq \varnothing$.
2. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_m \cap A_n = A_k$, donde $k = \max\{m, n\}$.

Por tanto, dicha familia es una base de filtro en $\mathbb{R}$.

Veamos que no tiene puntos de aglomeración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $A_n = \overline{A_n}$. Por tanto,

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \varnothing$$

verificándose así que ningún punto es de aglomeración de la base de filtro.

TOPOLOGÍA
U.D. 3 - TEMA 1: ESPACIOS COMPACTOS

A.R.2. En el subespacio de $(\mathbb{R}, T_u)$ definido por el intervalo abierto $(0,1)$, encontrar un recubrimiento abierto que no tenga ningún subrecubrimiento finito.

Solución:

Consideremos la familia de subconjuntos de $(0,1)$ dada por $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde es

$$A_n = \left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)$$

Evidentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in T$, donde T es la topología relativa de $(0,1)$ como subespacio de $(\mathbb{R}, T_u)$.

Además, veamos que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = (0,1)$. En efecto, dado $x \in (0,1)$, existirá algún n tal que $\frac{1}{n+2} < x < \frac{1}{n}$, y por tanto $x \in A_n$. Por tanto, la familia dada es un recubrimiento abierto de $(0,1)$.

Por otra parte, no se puede extaer ningún subrecubrimiento finito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el elemento $\frac{1}{n+1} \in (0,1)$ verifica que

- Para cada $k \in \mathbb{N}, k > n$, se tiene que $\frac{1}{n+1} \notin \left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k}\right)$. Por tanto, $\frac{1}{n+1} \notin A_k$.
- Para cada $k \in \mathbb{N}, k < n$, se tiene que $\frac{1}{n+1} \notin \left(\frac{1}{k+2}, \frac{1}{k}\right)$. Por tanto, $\frac{1}{n+1} \notin A_k$.

En definitiva, para cada $n \in \mathbb{N}$, el elemento $\frac{1}{n+1} \in (0,1)$ sólo está contenido en el abierto A_n del recubrimiento abierto. Por tanto, si tomamos cualquier sufamilia del recubrimiento abierto necesariamente estaremos eliminando puntos de $(0,1)$. Por tanto, evidentemente no se puede obtener un subrecubrimiento finito del recubrimiento abierto dado.

TOPOLOGÍA
U.D. 3 - TEMA 1: ESPACIOS COMPACTOS

<u>A.R.3.</u> Demostrar que en un espacio discreto (X,D) todo punto es aislado.

<u>Solución:</u>

Como para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\} \in D$, entonces $(\{x\} - \{x\}) \cap X = \emptyset \cap X = \emptyset$. Por tanto, x es un punto aislado, ya que existe un entorno reducido que tiene intersección nula con el total.

Como esto es cierto para cada $x \in X$, entonces todo punto del espacio topológico es aislado.

TOPOLOGÍA
U.D. 3 - TEMA 3: ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

A.R.2. Comprobar que en un espacio métrico (X,d), si M es un subconjunto no vacío de X, la aplicación $\varphi : X \to (\mathbb{R}, T_u)$ dada por $\varphi(p) = d(M,p)$ es continua; $\varphi(p) = 0$ si $p \in \overline{M}$ y $\varphi(p) > 0$ si $p \in \operatorname{ext}(M)$.

Solución:

En primer lugar, aclararemos que la función expresada en el enunciado admite la siguiente definición:

$$\varphi(p) = d(M,p) = \inf\{d(x,p) \mid x \in M\}$$

Esta función está bien definida, ya que, por ser $M \neq \varnothing$, se tiene que $\{d(x,p) \mid x \in M\}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío. Además, dicho conjunto está acotado inferiormente por el cero. Por tanto, como todo subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente tiene ínfimo (demostrado en este tema), la aplicación está bien definida.

Dado $p \in X$ y $\varepsilon > 0$, tomamos la bola abierta $E(p,\varepsilon)$. Se tiene que si $t \in E(p,\varepsilon)$, entonces

$$\varphi(t) = \inf\{d(x,t) \mid x \in M\} \leq \inf\{d(x,p) + d(p,t) \mid x \in M\} = \inf\{d(x,p) \mid x \in M\} + d(p,t) <$$

$$< \varphi(p) + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(t) < \varphi(p) + \varepsilon}$$

$$\varphi(p) = \inf\{d(x,p) \mid x \in M\} \leq \inf\{d(x,t) + d(t,p) \mid x \in M\} = \inf\{d(x,t) \mid x \in M\} + d(t,p) <$$

$$< \varphi(t) + \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi(p) - \varepsilon < \varphi(t)}$$

Así, se tiene que dado $\varepsilon > 0$ y $p \in X$, si $t \in E(p,\varepsilon)$ se verifica que $\varphi(t) \in (\varphi(p) - \varepsilon, \varphi(p) + \varepsilon)$, o equivalentemente $\varphi[E(p,\varepsilon)] \subset (\varphi(p) - \varepsilon, \varphi(p) + \varepsilon)$. De esto se deduce directamente que la aplicación es continua en todo punto, como vemos a continuación.

Efectivamente, dado cualquier $p \in X$ si V es un entorno en $(\mathbb{R}, T_u)$ de $\varphi(p)$, se tendrá que existirá $\varepsilon > 0$ tal que $(\varphi(p) - \varepsilon, \varphi(p) + \varepsilon) \subset V$. Por otra parte, tenemos que $W = E(p,\varepsilon)$ es un entorno de p que verifica que $\varphi(W) \subset (\varphi(p) - \varepsilon, \varphi(p) + \varepsilon) \subset V$. Por tanto, se tiene que la función es continua en p. Como esto es válido para todo punto, se tiene que la función dada es continua en todo punto. $\square$