Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Segunda Prueba de Evaluación Continua 2017

Ejercicio 1: (3 puntos) Sean A y D las siguientes matrices reales

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Determine una matriz regular P tal que $P^t AP = D$.

Solución:

Método 1: Tomar A como la matriz de una forma bilineal simétrica real $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Construir una base de vectores conjugados $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $f(v_1, v_1) = 2$, $f(v_2, v_2) = 2$, $f(v_3, v_3) = -3$ y en tal caso

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = D = \begin{pmatrix} f(v_1, v_1) = 2 & 0 & 0 \\ 0 & f(v_2, v_2) = 2 & 0 \\ 0 & 0 & f(v_3, v_3) = -3 \end{pmatrix}$$

Comenzamos construyendo una base de vectores conjugados cualquiera $\{u_1, u_2, u_3\}$. A la vista de la matriz A nos sirven los vectores $u_1 = (1, 0, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 0)$ de la base canónica ya que son conjugados. Buscamos u_3 que sea conjugado con u_1 y también con u_2:

$$\begin{aligned} u_1^c &= \{(x, y, z) : f((x, y, z), (1, 0, 0) = 0\} \equiv \{x + z = 0\} \\ u_2^c &= \{(x, y, z) : f((x, y, z), (0, 1, 0) = 0\} \equiv \{y + 4z = 0\} \end{aligned}$$

nos sirve $u_3 = (-1, 4, 1)$. A continuación basta escalar los vectores u_1, u_2 y u_3 convenientemente para tener el resultado deseado:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f(u_1,u_1)}}\, u_1 = \frac{\sqrt{2}}{1}\, u_1 = (\sqrt{2}, 0, 0) \\ v_2 &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{f(u_2,u_2)}}\, u_2 = \frac{\sqrt{2}}{1}\, u_2 = (0, \sqrt{2}, 0) \\ v_1 &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-f(u_3,u_3)}}\, v_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}\, u_3 = \frac{1}{2}\, u_3 = (-\tfrac{1}{2}, -2, \tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

La matriz P es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}'$ a la base canónica, cuyas columnas son las coordenadas de los vectores u_1, u_2 y u_3.

Método 2: Se hace la diagonalización por congruencia hasta llegar a una matriz diagonal D', y se continúa hasta transformar los elementos positivos en 2 y el negativo en -3.

$$(A|I_3) \xrightarrow[f_3 \to f_3 - 4f_2,\ c_3 \to c_3 - 4c_2]{f_3 \to f_3 - f_1,\ c_3 \to c_3 - c_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right) = (D'|Q)$$

$$\xrightarrow{\substack{f_1 \to \sqrt{2}f_1,\ c_1 \to \sqrt{2}c_1 \\ f_2 \to \sqrt{2}f_2,\ c_2 \to \sqrt{2}c_2 \\ f_3 \to \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}f_3,\ c_3 \to \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}c_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right) = (D|P^t)$$

Ejercicio 2: (3 puntos)
Determine la signatura y la matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{K}^3$ de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}$ que cumpla las siguientes propiedades:

(a) La restricción de Φ al plano $P = L(v_1, v_2)$ es definida positiva y $\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2\}$ es una base de vectores conjugados de P respecto de Φ.

(b) El subespacio conjugado de P es la recta $R = L(v_1 + v_3)$ y $\Phi(v_1 + v_3) = -2$.

Solución: Con los datos del problema deducimos que $\mathcal{B}' = \{v_1 + v_2,\ v_1 - 2v_2,\ v_1 + v_3\}$ es una base de vectores conjugados y $\Phi(v_1 + v_3) = -2 < 0$. Además por ser la forma cuadrática definida positiva restringida a P, entonces $\Phi(v_1 + v_2) = a > 0$ y $\Phi(v_1 - 2v_2) = b > 0$. Así la signatura de Φ es $(2, 1)$. Para obtener la matriz presentamos dos métodos:

Método 1: $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{pmatrix} \Phi(v_1+v_2) & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(v_1-2v_2) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(v_1+v_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Como se pide una en particular, entonces podemos dar valores concretos, positivos, a los parámetros $a, b \in \mathbb{R}^+$ y obtener una forma cuadrática en las condiciones pedidas, tras un cambio de base. Y habríamos terminado.Si dejamos sin fijar esos valores, obtenemos todas las posibles formas cuadráticas, aunque esto no lo pedía el ejercicio.

En cualquier caso, queda deshacer el cambio de base para dar la matriz en la base pedida

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = P^t \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) P, \quad \text{con} \quad P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}\,\mathcal{B}'} = \mathfrak{M}^{-1}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$$

Calculamos P

$$P = \mathfrak{M}^{-1}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz en la base canónica es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_{a,b}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4a+b & 2a-b & -4a-b \\ 2a-b & a+b & -2a-b \\ -4a-b & -2a-b & 4a+b-18 \end{pmatrix}$$

Método 2: Sea $A = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

la matriz (simétrica) de Φ en la base $\mathcal{B}$. Sabemos que $a_{ij} = f(v_i, v_j)$ con f la forma polar asociada a Φ. Es decir $\Phi(v) = f(v, v)$. Vamos imponiendo las condiciones del enunciado:
(a) $v_1 + v_2$ y $v_1 - 2v_2$ son conjugados si y sólo si

$$f(v_1 + v_2, v_1 - 2v_2) = f(v_1, v_1) - 2f(v_1, v_2) + f(v_2, v_1) - 2f(v_2, v_2) = a - b - 2d = 0 \Leftrightarrow d = \frac{a-b}{2}$$

(b) Por ser $R = P^c$ y $\Phi(v_1 + v_3) = -2$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(v_1, v_1 + v_3) &= f(v_1, v_1) + f(v_1, v_3) = a + c = 0 \quad &\Leftrightarrow& \quad c = -a \\ f(v_2, v_1 + v_3) &= f(v_2, v_1) + f(v_2, v_3) = b + e = 0 \quad &\Leftrightarrow& \quad e = -b \\ \Phi(v_1 + v_3) = f(v_1 + v_3, v_1 + v_3) &= f(v_1, v_1) + 2f(v_1, v_3) + f(v_3, v_3) && \\ &= a + 2c + f = a - 2a + f = -2 \quad &\Leftrightarrow& \quad f = a - 2 \end{aligned}$$

de donde se tiene la matriz $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} a & b & -a \\ b & \dfrac{a-b}{2} & -b \\ -a & -b & a-2 \end{pmatrix}$

(a) Falta por usar el dato de la signatura, en particular que Φ es definida positiva restringida a P, es decir $\Phi(v_1+v_2) > 0$ y $\Phi(v_1-2v_2) > 0$:

$$\begin{array}{l} \Phi(v_1+v_2) = f(v_1+v_2, v_1+v_2) = a+2b+d = a+2b+\frac{a-b}{2} = \frac{3}{2}(a+b) > 0 \Leftrightarrow a+b > 0 \\ \Phi(v_1-2v_2) = f(v_1-2v_2, v_1-2v_2) = a-4b+4d = 3a-6b > 0 \Leftrightarrow a-2b > 0 \end{array}$$

Basta tomar dos valores concretos de a y b que cumplan las dos condiciones, y se tiene una forma cuadrática válida. Y habríamos terminado.

Se pueden trabajar un poco más las dos inecuaciones y obtener todos los valores posibles

$$a+b > 0 \ \wedge \ a-2b > 0 \ \Rightarrow \ a > 0 \ \wedge \ -a < b < \frac{a}{2}$$

Nota: Todos los cálculos del tipo $f(u,v)$ o $\Phi(w)$ se han hecho utilizando la bilinealidad de f y sabiendo que $a_{ij} = f(v_i, v_j)$. También pueden hacerse usando la matriz y coordenadas de los vectores en $\mathcal{B}$. El significado de los parámetros a y b es distinto en cada uno de los métodos.

Ejercicio 3: (4 puntos)
Dado el producto escalar de $\mathbb{R}^3$ definido por:

$$< (x_1,x_2,x_3),\ (y_1,y_2,y_3) >= 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_3y_3 \qquad (*)$$

(a) Determine una base ortonormal del plano $U \equiv \{x_2+x_3=0\}$. (1 punto)

(b) Determine el conjunto S de vectores $v=(x_1,x_2,x_3)$ tales que su proyección ortogonal sobre el plano $U \equiv \{x_2+x_3=0\}$ es el vector $(1,0,0)$. ¿Es S un subespacio vectorial? (2 puntos)

(c) Determine si existen en S vectores unitarios. Es decir, vectores v tales que $||v|| = 1$ y $proy_U(v) = (1,0,0)$, siendo $||\cdot||$ la norma definida por el producto escalar dado. (1 punto)

Solución:
(a) Construimos una base ortogonal de U, tomando primero un vector cualquiera de U, por ejemplo $u_1 = (1,0,0)$ y vemos que $||u_1||^2 =< u_1, u_1 >= 2$. A continuación u_2 será un vector de U ortogonal a u_1:

$$u_1^{\perp} = \{(x_1,x_2,x_3) : < (x_1,x_2,x_3),\ (1,0,0) >= 0\} \equiv \{2x_1+x_2=0\}$$

Entonces, nos sirve $u_2 = (1,-2,2)$ que cumple ambas ecuaciones, la de U y la de $u_1^{\perp}$. Calculamos su norma $||u_2||^2 =< u_2, u_2 >= 10$. Una base ortonormal de U es

$$\{\frac{u_1}{||u_1||} \frac{u_2}{||u_2||},\} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0),\ \frac{1}{\sqrt{10}}(1,-2,2)\}$$

(b) Utilizamos coeficientes de Fourier relativos a la base ortogonal $\{u_1,u_2\}$ de U para calcular la proyección ortogonal de un vector genérico $v = (x_1, x_2, x_3)$ sobre U (Proposición 8.26, pág. 299):

$$\begin{aligned}
proy_U(v) &= \frac{< v, u_1 >}{< u_1, u_1 >} u_1 + \frac{< v, u_2 >}{< u_2, u_2 >} u_2 = \frac{< v, u_1 >}{2} u_1 + \frac{< v, u_2 >}{10} u_2 \\
&= \frac{< (x_1, x_2, x_3), (1, 0, 0) >}{2} (1, 0, 0) + \frac{(x_1, x_2, x_3), (1, -2, 2)}{10} (1, -2, 2) \\
&= \frac{(10x_1 + 4x_2 + 4x_3,\ x_2 - 4x_3,\ -x_2 + 4x_3)}{10} = (1, 0, 0) \\
&\Leftrightarrow \{\ 10x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 10,\ \ x_2 - 4x_3 = 0\ \}
\end{aligned}$$

Los vectores de S son las soluciones de ese sistema lineal **no homogéneo** y por tanto no es un subespacio vectorial (en particular no contiene al vector 0).

(c) Resolviendo el sistema se obtiene la forma de los vectores de $S = \{(1 - 2\lambda,\ 4\lambda, \lambda) :\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$, y determinamos si hay alguno unitario (de norma 1)

$$||(1 - 2\lambda,\ 4\lambda, \lambda)||^2 =< (1 - 2\lambda,\ 4\lambda, \lambda),\ (1 - 2\lambda,\ 4\lambda, \lambda) >= 2 + 10\lambda^2$$

La respuesta es que no, pues la ecuación $2 + 10\lambda^2 = 1$ no tiene ninguna solución real. Todos los vectores de S tienen longitud o norma mayor o igual que $\sqrt{2}$.

Nota: todos los productos escalares se han calculado utilizando la expresión analítica $(*)$, los cálculos pueden hacerse igualmente utilizando la matriz de Gram.