1º) Hallar un intervalo abierto I y una función derivable $f : I \to \mathbb{R}$ verificando que, en cada punto de su gráfica, la tangente no es horizontal y forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área 1. Puede suponerse que $y = f(x)$ es dos veces derivable y que y'' es continua. Se deben hallar todas las soluciones posibles, expresando y como función de x, y exigiendo en cada caso que el intervalo abierto I sea el mayor posible.

2º) Poner un ejemplo para cada uno de los siguientes casos, demostrándolo. (Si alguno no fuera posible, demostrar por qué).

a) Una sucesión de funciones reales continuas, definidas en $\mathbb{R}$, que no sea equicontinua en ningún punto.

b) Una sucesión equicontinua de funciones reales , definidas en $\mathbb{R}$, que no esté acotada (en ningún punto).

c) Una sucesión equicontinua de funciones reales , definidas en $\mathbb{R}$, que esté acotada pero no sea convergente (en ningún punto).

d) Una sucesión equicontinua de funciones reales , definidas en $\mathbb{R}$, que sea convergente, y que no converja uniformemente.

e) Una sucesión de funciones reales continuas, definidas en $\mathbb{R}$, que converja uniformemente, y que no sea equicontinua.

(Hay que demostrar todas las respuestas. En cada ejemplo, probar que cumple lo indicado. Si no es posible, probar por qué.)

Soluciones.-

1º) La ecuación de la recta tangente a la gráfica, en un punto (x,y), es $Y - y = y'(X - x)$.

Puesto que la tangente no es horizontal, corta a los ejes de coordenadas.

Es inmediato comprobar, ya que $y' \neq 0$. que los puntos de corte son $P(0, y - y'x)$ y $Q(x - \frac{y}{y'}, 0)$.

El área del triangulo cuyos vértices son estos puntos y el origen de coordenadas debe ser 1. Por tanto, P y Q deben ser distintos, y debe cumplirse que

$1 = \frac{1}{2}|y - y'x|\left|x - \frac{y}{y'}\right|$, lo cual equivale a que $2|y'| = (y - y'x)^2$, siendo $y' \neq 0$.

Podemos distinguir los casos $y' > 0$, $y' < 0$. (Nótese que, puesto que y' es continua [ya que es derivable], si es estrictamente mayor que cero [resp.estrictamente menor que cero] en un punto, lo es también en un entorno del punto.)

a) Si $y' > 0$, tenemos que $2y' = (y - y'x)^2$. Si derivamos (podemos hacerlo, puesto que y' es derivable), obtenemos que debe ser

$$2y'' = 2(y - y'x)(-y''x) = 2(y'x - y)y''x \Leftrightarrow y'' = (y'x - y)y''x.$$

(Obsérvese que, al derivar, es posible que hayamos añadido soluciones, que cumplan la nueva ecuación pero no la inicial).

Puesto que y'' es continua, si es distinta de cero en un punto, lo es en un entorno del punto.

a) I) Si $y'' \neq 0$, obtenemos que $1 = (y'x - y)x$, luego debe ser $x \neq 0$.

Se tiene por tanto que, siendo $x \neq 0$, debe ser $y'x - y = \frac{1}{x}$.

Derivando (nótese que al hacerlo podemos de nuevo añadir soluciones), obtenemos que debe ser $y''x = -\frac{1}{x^2}$, siendo $x \neq 0$; luego

$y'' = -\frac{1}{x^3}$, con $x \neq 0$.

En consecuencia, debe ser $y' = \frac{1}{2x^2} + a$, siendo a una constante.

Luego $y = -\frac{1}{2x} + ax + b$, siendo a y b constantes.

Sustituyendo en la ecuación inicial, $2y' = (y - y'x)^2$, se tiene que

$\frac{1}{x^2} + 2a = (-\frac{1}{2x} + ax + b - \frac{1}{2x} - ax)^2 = (-\frac{1}{x} + b)^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2b}{x} + b^2 \Leftrightarrow \frac{2b}{x} = b^2 - 2a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2b = (b^2 - 2a)x$.

Puesto que esto debe ocurrir para distintos valores de x (de hecho, para todo x perteneciente a un intervalo abierto), es inmediato comprobar que debe ser

$b^2 - 2a = 0 = b$, y por tanto $a = b = 0$.

Así pues, la solución es $y = -\frac{1}{2x}$, definida y derivable (de hecho, indefinidamente derivable) para $x \neq 0$.

Y se tiene que $y' = \frac{1}{2x^2} > 0$, para todo $x \neq 0$.

Ya que nos piden que la solución esté definida en un intervalo, hemos obtenido así dos respuestas (ramas de hipérbolas, crecientes):

1.- La función $y = -\frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$.

2.- La función $y = -\frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R} / x < 0\}$.

(Conviene hacer dibujos para representar gráficamente estas funciones, y comprobar también en el dibujo que cumplen lo que se pide).

a) II) Si $y'' = 0$ (en un abierto), entonces debe ser (en ese abierto) $y' = a$ (constante), $y = ax + b$ (siendo a y b constantes).

Sustituyendo en la ecuación inicial, $2y' = (y - y'x)^2$, se tiene que

$2a = b^2 \Leftrightarrow a = \frac{b^2}{2}$, siendo b una constante distinta de cero (puesto que $0 \neq y' = a = \frac{b^2}{2}$).

Nótese que $y' = a = \frac{b^2}{2} > 0$.

Así pues, en este caso las soluciones son rectas, son crecientes, y son las siguientes:

3.- Para cualquier constante $b \neq 0$, la función $y = \frac{b^2}{2}x + b$, definida en el intervalo abierto $I = \mathbb{R}$.

(Conviene hacer dibujos. Nótese que, puesto que ahora cada gráfica es una recta, coincide con su tangente. Es bueno comprobar que, para cualquier valor no nulo de b, la recta así obtenida cumple lo que se pide).

b) Supongamos ahora que $y' < 0$, y procedamos de manera análoga.

Tenemos que $-2y' = (y - y'x)^2$. Si derivamos (nótese que y' es derivable), obtenemos que debe ser

$-2y'' = 2(y - y'x)(-y''x) = 2(y'x - y)y''x \Leftrightarrow -y'' = (y'x - y)y''x$.

(Obsérvese que, al derivar, es posible que hayamos añadido soluciones, que cumplan la nueva ecuación pero no la inicial).

Puesto que y'' es continua, si es distinta de cero en un punto, lo es en un entorno del punto.

b) I) Si $y'' \neq 0$, obtenemos que $-1 = (y'x - y)x$, luego debe ser $x \neq 0$.

Se tiene por tanto que, siendo $x \neq 0$, debe ser $y'x - y = -\frac{1}{x}$.

Derivando (nótese que al hacerlo podemos de nuevo añadir soluciones), obtenemos que debe ser $y''x = \frac{1}{x^2}$, siendo $x \neq 0$; luego

$y'' = \frac{1}{x^3}$, con $x \neq 0$.

En consecuencia, debe ser $y' = -\frac{1}{2x^2} + a$, siendo a una constante.

Luego $y = \frac{1}{2x} + ax + b$, siendo a y b constantes.

Sustituyendo en la ecuación inicial, $-2\,y' = (y - y'x)^2$, se tiene que

$$\frac{1}{x^2} - 2a = \left(\frac{1}{2x} + ax + b + \frac{1}{2x} - ax\right)^2 = \left(\frac{1}{x} + b\right)^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{2b}{x} + b^2 \Leftrightarrow \frac{2b}{x} = -b^2 - 2a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -2b = (b^2 + 2a)x.$$

Puesto que esto debe ocurrir para distintos valores de x (de hecho, para todo x perteneciente a un intervalo abierto), es inmediato comprobar que debe ser

$b^2 + 2a = 0 = b$, y por tanto $a = b = 0$.

Así pues, la solución es $y = \frac{1}{2x}$, definida y derivable (de hecho, indefinidamente derivable) para $x \neq 0$.

Y se tiene que $y' = -\frac{1}{2x^2} > 0$, para todo $x \neq 0$.

Ya que nos piden que la solución esté definida en un intervalo, hemos obtenido así dos respuestas (ramas de hipérbolas, decrecientes):

4.- La función $y = \frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$.

5.- La función $y = \frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\}$.

(Conviene hacer dibujos para representar gráficamente estas funciones, y comprobar también en el dibujo que cumplen lo que se pide).

b) II) Si $y'' = 0$ (en un abierto), entonces debe ser (en ese abierto) $y' = a$ (constante), $y = ax + b$ (siendo a y b constantes).

Sustituyendo en la ecuación inicial, $-2\,y' = (y - y'x)^2$, se tiene que

$-2a = b^2 \Leftrightarrow -a = \frac{b^2}{2}$, siendo b una constante distinta de cero (puesto que $0 \neq y' = a = -\frac{b^2}{2}$).

Nótese que $y' = a = -\frac{b^2}{2} < 0$.

Así pues, en este caso las soluciones son rectas, son decrecientes, y son las siguientes:

6.- Para cualquier constante $b \neq 0$, la función $y = -\frac{b^2}{2}x + b$, definida en el intervalo abierto $I = \mathbb{R}$.

(Conviene hacer dibujos. Nótese que, puesto que cada gráfica es una recta, coincide con su tangente. Es bueno comprobar que, para cualquier valor no nulo de b, la recta así obtenida cumple lo que se pide).

Resumiendo, las soluciones son las siguientes:

— La función $y = -\frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$.

— La función $y = -\frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\}$.

— La función $y = \frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$.

— La función $y = \frac{1}{2x}$, definida en el intervalo abierto $I = \{x \in \mathbb{R}/x < 0\}$.

— Para cualquier constante $b \neq 0$, la función $y = \frac{b^2}{2}x + b$, definida en toda la recta real $I = \mathbb{R}$.

— Para cualquier constante $b \neq 0$, la función $y = -\frac{b^2}{2}x + b$, definida en toda la recta real $I = \mathbb{R}$.

(Nótese que las soluciones de los dos últimos tipos son las rectas de la forma $y = ax + b$ siendo $|a| = \frac{b^2}{2} \neq 0$).

2º) a) Poner un ejemplo de una sucesión de funciones reales continuas, definidas en $\mathbb{R}$, que no sea equicontinua en ningún punto.

Como de costumbre, es bueno procurar que los ejemplos sean sencillos.

Consideremos por ejemplo la sucesión de funciones (f_n) dada por $f_n(x) = nx$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Obviamente, las funciones así obtenidas son continuas. Veamos que la sucesión no es equicontinua en ningún punto.

Sea $a \in \mathbb{R}$. Si la sucesión dada fuera equicontinua en a, entonces, dado por ejemplo $1 > 0$, existiría $\delta > 0$ tal que,

si $|x - a| < \delta$, entonces $\left| f_n(x) - f_n(a) \right| < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por tanto, poniendo $x = a + \frac{\delta}{2}$, se tiene que $|x - a| = \frac{\delta}{2} < \delta$, luego debería ser $|nx - na| = n\frac{\delta}{2} < 1$, y por tanto $n < \frac{2}{\delta}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual es una contradicción.

Luego la sucesión de funciones dada no es equicontinua en ningún punto $a \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que, en este ejemplo, cada una de esas funciones es una recta que pasa por el origen, y es bueno hacer un dibujo para entender mejor por qué la sucesión dada no es equicontinua en ningún punto.

(Podrían ponerse otros muchos ejemplos).

---

b) Poner un ejemplo de una sucesión equicontinua de funciones reales , definidas en $\mathbb{R}$, que no esté acotada (en ningún punto).

Consideremos por ejemplo la sucesión de funciones (f_n) dada por $f_n(x) = x + n$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es inmediato comprobar que esta sucesión es equicontinua (en todos los puntos). En efecto, dados $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$,

si ponemos $\delta = \varepsilon > 0$ se verifica que, si $x \in \mathbb{R}$ y $|x - a| < \delta = \varepsilon$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$\left| f_n(x) - f_n(a) \right| = |x + n - a - n| = |x - a| < \delta = \varepsilon.$

(Obsérvese que, de hecho, la sucesión es uniformemente equicontinua, pues δ sólo depende de ε y no depende del punto a).

Y en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$, la sucesión $(f_n(x)) = (a + n)$ no está acotada.

Es bueno hacer un dibujo para entender mejor lo que sucede.

(Podrían ponerse otros muchos ejemplos. Uno más sencillo sería la sucesión de funciones constantes (f_n) dada por $f_n(x) = n$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.)

---

c) Poner un ejemplo de una sucesión equicontinua de funciones reales , definidas en $\mathbb{R}$, que esté acotada pero no sea convergente (en ningún punto).

Consideremos por ejemplo la sucesión de funciones constantes (f_n) dada por $f_n(x) = (-1)^n$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$;

es decir, $f_n(x) = 1$ si n es par, y $f_n(x) = -1$ si n es impar.

Obviamente esta sucesión es equicontinua (de hecho, es uniformemente equicontinua), pues $f_n(x) - f_n(a) = 0$ para todo $x,a \in \mathbb{R}$.

Además, ya que $\left| f_n(x) \right| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión está acotada.

Y fijado $a \in \mathbb{R}$, la sucesión $(f_n(a))$, cuyos términos valen 1 si n es par y -1 si n es impar, no es convergente.

(Podrían ponerse otros muchos ejemplos).

d) Poner un ejemplo de una sucesión equicontinua de funciones reales , definidas en $\mathbb{R}$, que sea convergente, y que no converja uniformemente.

Consideremos por ejemplo la sucesión de funciones (f_n) dada por $f_n(x) = \frac{x}{1+n}$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta sucesión es equicontinua (en todos los puntos). En efecto, dado $a \in \mathbb{R}$, y dado $\varepsilon > 0$, pongamos $\delta = \varepsilon > 0$.

Si $|x-a| < \delta$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se verifica que

$\left| f_n(x) - f_n(a) \right| = \frac{|x-a|}{1+n} \leq |x-a| < \delta = \varepsilon.$

Es inmediato comprobar que esta sucesión converge, en cada punto $x \in \mathbb{R}$, a la función constante $f(x) = 0$.

Esta convergencia no es uniforme. En efecto, si la convergencia fuera uniforme, entonces, dado por ejemplo $1 > 0$, existiría $\nu \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq \upsilon$, entonces

$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{x}{1+n} - 0 \right| = \frac{|x|}{1+n} < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. En particular, para $x = 1+n$ obtendríamos que $1 < 1$, lo cual es una contradicción.

Obsérvese que, en este ejemplo, cada una de esas funciones es una recta que pasa por el origen, y es bueno hacer un dibujo para entender mejor por qué la sucesión dada converge en cada punto a la función nula pero no lo hace uniformemente.

(Podrían ponerse otros muchos ejemplos).

---

e) Poner un ejemplo de una sucesión de funciones reales continuas, definidas en $\mathbb{R}$, que converja uniformemente, y que no sea equicontinua.

Supongamos que (f_n) es una sucesión de funciones reales continuas, definidas en $\mathbb{R}$, que converge uniformemente, a una función real f.

Puesto que la función f es límite uniforme de una sucesión de funciones continuas, f debe ser continua.

Sea $a \in \mathbb{R}$, y sea $\varepsilon > 0$. Puesto que la función f es continua, debe existir $\delta > 0$ verificando que, si $x \in \mathbb{R}$ y $|x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Por otra parte, ya que la función f es el límite uniforme de la sucesión (f_n), para ese número $\varepsilon > 0$ existirá un número natural υ tal que,

si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq \upsilon$, entonces $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

En consecuencia, si $x \in \mathbb{R}$ y $|x-a| < \delta$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq \upsilon$, se verifica que

$|f_n(x) - f_n(a)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(a)| + |f(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$

Por otra parte, cada una de las υ funciones $f_0, f_1, \ldots, f_{\upsilon-1}$ es continua, por hipótesis. Por tanto, para esos números $a \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$,

y para cada índice $i \in \{0, 1, \ldots, \upsilon-1\}$, existirá un número $\delta_i > 0$ tal que, si $x \in \mathbb{R}$ y $|x-a| < \delta$, entonces $|f_i(x) - f_i(a)| < \varepsilon$.

Poniendo $\eta = m\acute{\imath}n\{\delta, \delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{\upsilon-1}\}$, se tiene que $\eta > 0$ y, si $x \in \mathbb{R}$ y $|x-a| < \delta$, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon$.

Luego la sucesión (f_n) es equicontinua.

Hemos probado pues que una scuesión de funciones reales continuas, definidas en $\mathbb{R}$, que converja uniformemente, ha de ser equicontinua.

En consecuencia, el caso que nos piden no puede darse.