PRIMERA SEMANA

1) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$ $\qquad V = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$

$$\int_V e^{x+y+z}\,dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz$$

Donde hemos usado el Teorema de Fubini para calcular la integral de volumen como una integral iterada.

Por la dependencia funcional de f la integral factoriza como

$$\int_V e^{x+y+z}\,dV = \left(\int_0^1 e^x\,dx\right)^3 = \left(e^x\Big|_0^1\right)^3 = \underline{\underline{(e-1)^3}}$$

También se puede calcular haciendo las integrales iteradas

Número total de hojas entregadas (incluyendo ésta): 4

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1\int_0^1 e^{x+y+z}\Big|_{x=0}^{x=1} dy\,dz =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 e^{1+y+z} - e^{y+z}\,dy\,dz = \int_0^1 \left(e^{1+y+z} - e^{y+z}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dz$$

$$= \int_0^1 \left(e^{2+z} - e^{1+z}\right) - \left(e^{1+z} - e^{z}\right)\,dz$$

$$= \int_0^1 e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z}\,dz = \left(e^{2+z} - 2e^{1+z} + e^{z}\right)\Big|_{z=0}^{z=1}$$

$$= e^3 - 2e^2 + e - \left(e^2 - 2e + 1\right) = e^3 - 3e^2 + 3e - 1 =$$

$$= \underline{\underline{(e-1)^3}}$$

2) $V(x,y,z) = y\vec{i} - x\vec{j}$

Notamos que $V(x,y,z)$ está definida en todo $\mathbb{R}^3$ (no tiene puntos excepcionales).

Por tanto será un campo gradiente si y sólo si $\nabla \times V = 0$.

Calculamos

$$\nabla \times V = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \partial_y & \partial_z \\ -x & 0 \end{vmatrix}} \vec{i} - \cancelto{0}{\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_z \\ y & 0 \end{vmatrix}} \vec{j} + \underbrace{\begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y \\ y & -x \end{vmatrix}}_{-2} \vec{k}$$

$$= -2\vec{k}$$

Como $\nabla \times V \neq 0$, $\nexists f \,/\, V = \nabla f$, es decir, $V(x,y,z)$ no es un campo gradiente.

Se puede comprobar además que si

$$V = (V^{(1)}, V^{(2)}) = (\partial_x f, \partial_y f)$$

se tendría

$$V_y^{(1)} = \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = V_x^{(2)}$$

por la igualdad de las derivadas cruzadas, pero

$$V_y^{(1)} = 1 \neq -1 = V_x^{(1)}.$$

Por tanto, $V(x,y,z)$ no es un campo gradiente

3) $f(x,y,z) = xyz$

$$S(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 2$$

Estudiamos los máximos y mínimos de $f|_{S=2}$

Como $S=2$ define una superficie compacta y la función f es continua debe alcanzar un valor máximo y mínimo en S.

Por el Teorema de los multiplicadores de Lagrange, los puntos de extremo local satisfacen

$$\nabla f = \lambda \vec{n} = \lambda \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|}$$

con $\nabla f = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$ $\nabla S = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$$\|\nabla S\| = 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{2}$$

Debemos resolver las ecuaciones

$$yz = \frac{\lambda x}{\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$xz = \frac{\lambda y}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$xy = \frac{\lambda z}{\sqrt{2}} \quad (3)$$

Dividiendo la (1) por la (2) obtenemos

$$\frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = \pm x$$

De forma similar dividiendo la (2) por la (3)

$$z = \pm y$$

Estudiando los casos $\lambda > 0$ y $\lambda < 0$ e imponiendo que la solución se encuentre en la esfera se puede ver que las soluciones son

$\lambda = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Máximos

$$(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{3}}(1,1,1)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}(1,-1,-1)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}(-1,-1,1)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}(-1,1,-1)$$

$\lambda = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

Mínimos

$$(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{3}}(-1,-1,-1)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}(-1,1,1)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}(1,1,-1)$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}(1,-1,1)$$

Por tanto es fácil ver que las soluciones con un número impar de números negativos son mínimos con $f_{min} = -\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3$ y las soluciones con un número par de ~~[illegible]~~ números negativos son máximos con $f_{max} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^3$.

No es necesario utilizar el criterio de la derivada segunda.

Aún así, si se quiere comprobar, se construye

$$h(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda\,(x^2+y^2+z^2-2)$$

Se calcula el Hessiano

$$H_{ij} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

$h_x = yz - 2\lambda x$

$h_y = xz - 2\lambda y$

$h_z = xy - 2\lambda z$

$h_\lambda = -(x^2+y^2+z^2-2)$

$$H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2x & -2y & -2z \\ -2x & -2\lambda & z & y \\ -2y & z & -2\lambda & x \\ -2z & y & x & -2\lambda \end{pmatrix}$$

$h_{xx} = -2\lambda$ $\qquad h_{\lambda\lambda} = 0$

$h_{yy} = -2\lambda$ $\qquad h_{\lambda x} = -2x$

$h_{zz} = -2\lambda$ $\qquad h_{\lambda y} = -2y$

$h_{xy} = z$ $\qquad h_{\lambda z} = -2z$

$h_{xz} = y$

$h_{yz} = x$

y se estudia en los puntos hallados anteriormente si los determinantes de orden 3 en adelante son positivos (mínimo) o alternan signos (máximo)