Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Primera Prueba de Evaluación Continua 2015

Ejercicio 1:
En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que 2, se considera la aplicación $<,>: \mathcal{P}_2[x] \times \mathcal{P}_2[x] \to \mathbb{R}$ definida como sigue

$$< p(x), q(x) >= p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0).$$

(a) Demuestre que es un producto escalar.
(b) Determine una base ortonormal.
(c) Obtenga una base del subespacio complemento ortogonal de la recta $r = L(x^2 - 1)$.

Solución:

(a) Tenemos que comprobar que se cumplen las 4 propiedades que definen un producto escalar para cualesquiera polinomios $p(x), q(x), r(x) \in \mathcal{P}_2[x]$:

$$\begin{aligned}(1)\ \ < p(x), q(x) > &= p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0)\\ &= q(-1)p(-1) + q(1)p(1) + q(0)p(0) =< q(x), p(x) >\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ \ < p(x) + r(x), q(x) > &= (p(-1) + r(-1))q(-1) + (p(1) + r(1))q(1) + (p(0) + r(0))q(0)\\ &= p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0) + r(-1)q(-1) + r(1)q(1) + r(0)q(0)\\ &= < p(x), q(x) > + < r(x), q(x) >\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3)\ \ < a \cdot p(x), q(x) > &= ap(-1)q(-1) + ap(1)q(1) + ap(0)q(0)\\ &= a(p(-1)q(-1) + p(1)q(1) + p(0)q(0)) = a < p(x), q(x) >\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) < p(x), p(x) > &= p(-1)^2 + p(1)^2 + p(0)^2 \geq 0,\\ &\ \text{además si } p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2\\ < p(x), p(x) > = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} p(-1) = a_0 - a_1 + a_2 = 0\\ p(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0\\ p(0) = a_0 = 0\end{cases} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = 0\\ &\Leftrightarrow \ \ p(x) = 0.\end{aligned}$$

(b) Para construir una base ortonormal aplicamos el método de Gram-Schmidt a la base cualquiera. Tomamos la canónica $\mathcal{B} = \{u_1 = 1,\ u_2 = x,\ u_3 = x^2\}$:

$$\begin{aligned}e_1 &= u_1 = 1\\ e_2 &= u_2 - \frac{< u_2, e_1 >}{< e_1, e_1 >}e_1 = x - \frac{< x, 1 >}{< 1, 1 >} = 1 - \frac{-1+1-0}{1+1+1} = x\\ e_3 &= u_3 - \frac{< u_3, e_1 >}{< e_1, e_1 >}e_1 - \frac{< u_3, e_2 >}{< e_2, e_2 >}e_2 = x^2 - \frac{< x^2, 1 >}{< 1, 1 >}1 - \frac{< x^2, x >}{< x, x >}x = x^2 - \frac{2}{3} - \frac{0}{2}x.\end{aligned}$$

Ya tenemos una base ortogonal $\{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2 - \frac{2}{3}\}$ y dividiendo los vectores por su norma obtenemos la ortonormal

$$\{\frac{e_1}{||e_1||} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{e_2}{||e_2||} = \frac{x}{\sqrt{2}},\quad \frac{e_3}{||e_3||} = \frac{x^2 - \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{6}}{3}\}$$

(c) El subespacio ortogonal a la recta r viene determinado por los polinomios $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ tales que $< a_0 + a_1x + a_2x^2,\ x^2 - 1 >= 0$ Así,

$$< a_0 + a_1x + a_2x^2,\ x^2 - 1 >= (a_0 - a_1 + a_2)0 + (a_0 + a_1 + a_2)0 + a_0(-1) = 0 \ \Leftrightarrow\ a_0 = 0,$$

por lo que $r^\perp = \{a_1x + a_2x^2 :\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ está formado por los polinomios cuyo término independiente es 0, y una base es $\{x,\ x^2\}$.

Ejercicio 2: (4 puntos)
Determine la matriz en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ de la simetría respecto al plano $2x + y + z = 0$.

Solución:
Método 1: Si tomamos una base ortonormal de plano $\{v_1,\ v_2\}$ y la completamos hasta formar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, entonces la matriz de la simetría respecto a dicha base es:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que $f(v_1) = v_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}},\ f(v_2) = v_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}},\ f(v_3) = -v_3 = (0,0,-1)_{\mathcal{B}}$.
Calculamos la base tomando $\{(0,1,-1), (-1,1,1)\}$ una base ortogonal del plano y añadimos un tercer vector ortogonal a los anteriores, por ejemplo: $(2,1,1)$. Los normalizamos y ya tenemos la base:

$$\mathcal{B} = \{(0,\ 1/\sqrt{2},\ -1/\sqrt{2}),\ (-1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3}),\ (2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6})\}$$

Para obtener la matriz en la base canónica hacemos el cambio de base. Si llamamos P a la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a la canónica $\mathcal{B}'$ entonces:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}'}(f) &= PM_{\mathcal{B}}(f)P^t \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos comprobar que es una simetría ya que cumple $M^2_{\mathcal{B}'} = I_3$.
Observación: podríamos haber resuelto el problema igualmente tomando una base $\mathcal{B} = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$, tal que $\{v_1,\ v_2\}$ son una base cualquiera del plano y v_3 un vector de la recta ortogonal al plano. La matriz

de la simetría respecto a dicha base es:

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ya que se sigue cumpliendo $f(v_1) = v_1 = (1,0,0)_{\mathcal{B}},\ f(v_2) = v_2 = (0,1,0)_{\mathcal{B}},\ f(v_3) = -v_3 = (0,0,-1)_{\mathcal{B}}$. La diferencia es que para obtener la matriz en la base canónica hay que hacer el cambio de base por semejanza, es decir, teniendo en cuenta la matriz de cambio de base P y su inversa P^{-1}, es decir

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = PM_{\mathcal{B}}(f)P^{-1}.$$

La diferencia entre ambos procedimientos es que si tomamos la base ortonormal, no hay que calcular la inversa de P ya que $P^{-1} = P^t$. A cambio hay que dedicar algo más de esfuerzo en el cálculo de la base.

Método 2: Utilizando la relación que existe entre una simetría f con base el plano B y la proyección ortogonal sobre B. Si $v \in \mathbb{R}$ se obtiene la imagen por la simetría f del siguiente modo:

$$\text{Si } v = p_B(v) + p_{B^\perp(v)}, \text{ entonces } f(v) = p_B(v) - p_{B^\perp(v)} = (v - p_{B^\perp}(v)) - p_{B^\perp(v)} = v - 2\,p_{B^\perp(v)}$$

Así, podemos obtener fácilmente la imagen por f de un vector cualquiera considerando la proyección de dicho vector sobre la recta $B^\perp = L(2,1,1)$. Lo hacemos con el primer vector de la base canónica.

$$f(1,0,0) \quad = \quad (1,0,0) - 2\,p_{B^\perp}(1,0,0) = (1,0,0) - 2\,\frac{<(2,1,1),(1,0,0)>}{<(2,1,1),(2,1,1)>}\,(2,1,1) = (\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$$

Obteniendo así la primera columna de la matriz pedida. Del mismo modo se calcularían las imágenes de $f(0,1,0)$ y $f(0,0,1)$, completando la matriz.

Ejercicio 3: (1 punto)
(a) ¿Existe alguna isometría en $\mathbb{R}^2$ que transforme el vector $(1,0)$ en el vector $(1,1)$?
(b) ¿Existe alguna isometría f en $\mathbb{R}^2$ que cumpla la siguiente condición?

$$f(1,0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) \quad \text{y} \quad f(0,1) = (1,0).$$

Solución:

(a) No, porque una isometría f conserva la norma y los vectores que se indican tienen distinta norma.

(b) No, porque una isometría conserva el producto escalar y en este caso no se cumple

$$<(1,0),(0,1)> = 0 \neq < f(1,0), f(0,1) > = < (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (1,0) > = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$