RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES
PRUEBA DE EVALUACIÓN CONTINUA
CURSO 2020-21

-INSTRUCCIONES

- La prueba está disponible desde el 20 de abril hasta el 10 de mayo y se entrega a través del curso virtual, para ello se ha abierto una tarea denominada *Prueba de Evaluación Continua*.
- El examen consta de varios apartados, entre todos puntúan un ochenta por ciento de la nota.
- El restante veinte por ciento de la nota depende de la presentación del trabajo. Para obtener la máxima nota en este apartado debe utilizar LaTeX y escribir los códigos de forma eficiente y clara.
- Todas las respuestas deben ser razonadas y los códigos deben estar comentados.
- Entregue un único fichero comprimido que contenga todos los ficheros relacionados con el trabajo: fichero pdf con la respuesta y ficheros con los códigos comentados.

-ENUNCIADO

Cuestión A. En ocasiones el coste computacional de evaluar la derivada en el método de Newton puede ser elevado. En ese caso, el siguiente algoritmo puede resultar más adecuado

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)^2}{f(x_n + f(x_n)) - f(x_n)}. \tag{1}$$

1. En esencia, el método propuesto reemplaza la derivada que aparece en el método de Newton por una expresión que la aproxima. ¿Por qué expresión? ¿Por qué podemos esperar que esa expresión aproxime a la derivada? (Puntuación 10/100)
2. Implemente el algoritmo (1) en Maxima, Octave o Scilab utilizando el test de parada $|x_n - x_{n-1}|/|x_{n-1}| < 10^{-12}$. Además, para evitar problemas de división entre 0, haga que antes de cada iteración se compruebe que $f(x_n + f(x_n)) - f(x_n) \neq 0$ en la precisión de la computadora. Compare y comente los resultados con los obtenidos con el método de Newton considerando la ecuación $\operatorname{sen}(x) = 0$ y tomando como datos iniciales, $x_0 = 2.0$, $x_0 = 3.0$, $x_0 = 4.71$, $x_0 = 4.72$ y $x_0 = 5.0$, respectivamente. (Puntuación 10/100)
3. Como sabe, esta asignatura compara distintos métodos numéricos. En el apartado anterior habrá observado que tanto el método de Newton como el propuesto pueden converger a raíces distintas de $f(x) = 0$, dependiendo de la condición inicial. Si fijamos una raíz, x^*, el conjunto de condiciones iniciales para las que hay convergencia a x^* se llama *cuenca de atracción* de x^* para el método. Fijada una ecuación y una raíz y dados dos métodos iterativos para aproximarla, establezca una relación de equivalencia y otra de orden en el conjunto de métodos numéricos para aproximar la raíz x^* utilizando el concepto de cuenca de atracción. ¿Le parecen esas relaciones adecuadas para comparar métodos? (Puntuación 10/100)
4. La cuenca de atracción puede ser un conjunto sencillo o muy complicado. Para aproximarlo podemos utilizar una computadora. El resultado es más vistoso en $\mathbb{C}$ que en $\mathbb{R}$. Considere las extensiones naturales del método de Newton y del método propuesto en (1) a $\mathbb{C}$. Utilizando Maxima, Scilab u Octave dibuje una aproximación de las cuencas de atracción para cada uno de

los dos métodos en el caso de $f(z) = z^3 - 1$. Siga los siguientes pasos. Considere un conjunto discreto de puntos que aproxime la región $\{x + iy : -2 \leq x, y \leq 2\}$. Itere el método numérico, durante un máximo de 10 iteraciones, tomando como condición inicial cada uno de esos puntos. Asigne un color diferente al punto dependiendo de si el método ha convergido a una u otra de las tres raíces de la ecuación $z^3 = 1$ o no ha habido convergencia con ese número de iteraciones (si el método se ha detenido por verificarse el criterio de parada, $|x_k - x_{k-1}|/|x_{k-1}| < 10^{-6}$, o por llegar a la décima iteración entonces tome que existe convergencia a una raíz, x^*, si $|x_k - x^*| \leq 0.1$). Dibuje el resultado. Debería obtener algo similar a lo que aparece en la Figura 1. A la vista de los resultados, ¿están relacionados los dos métodos por alguna de las relaciones del apartado anterior? (Puntuación 10/100)

Nota: Si utiliza Maxima, utilice la sentencia `rectform` para que Maxima simplifique los cálculos en cada iteración. Ejecute las líneas que siguen para entender la diferencia de utilizar esa sentencia.

```
numer:true;
F(z):=z^3-1;
G(z):=3*z^2;
a:1+%i*1;
b:(a-F(a)/G(a));
c:rectform((a-F(a)/G(a)));
```

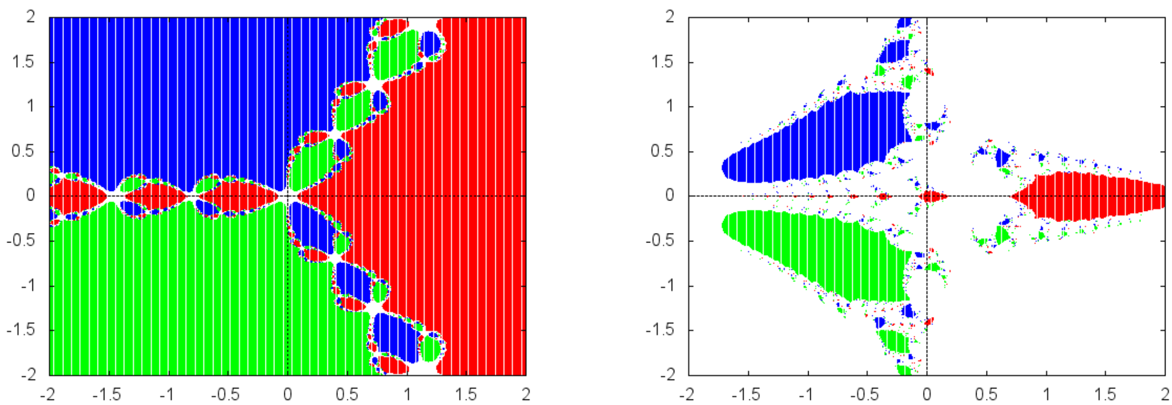

Figura 1: A la izquierda aparecen las cuencas de atracción para el método de Newton y a la derecha para el método (1). En rojo se señalan los puntos que han convergido a $z_1 = 1$, en azul los que lo han hecho a $z_2 = \cos(2\pi/3) + i\,\text{sen}(2\pi/3)$ y en verde los que han convergido a $z_3 = \cos(4\pi/3) + i\,\text{sen}(4\pi/3)$.

Cuestión B.

Consideramos el siguiente problema de Cauchy: Hallar una función $u : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha u(t) = g(t) \text{ para todo } t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2}$$

en donde $u_0 \in \mathbb{R}$ es el valor inicial, $\alpha \in \mathbb{R}$ es una constante y $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función dada[1].

Se pide lo siguiente:

1. Utilice Octave, Scilab o Maxima para implementar una función que calcule una solución aproximada del problema anterior mediante el método explícito de Euler. La función debe tener la siguiente expresión

   $$\mathtt{u = EDO\_EulerExp(u0,t0,t1,n)}$$

   en donde

   ```
   % t0 tiempo inicial
   % u0 condición inicial
   % t1 tiempo final
   % n número de pasos entre t0 y t1
   % u vector solución de dimensión n+1 con solución en cada paso t0+i*h, (i=0,...,n),
   h=(t1-t0)/n
   ```

   (Puntuación 10/100)

2. Escriba un *script* que llame a dicha función y resuelva la ecuación

   $$u'(t) + 4u(t) = 0,\ u(0) = 1. \tag{3}$$

   Considere para ello $t_0 = 0$, $t_1 = 3$, y $n = 24$ ($h = 1/8$). Represente gráficamente los resultados, mostrando tanto la solución exacta, $u(t) = \exp(-4t)$, como la numérica en la misma figura. Haga lo mismo para el caso $n = 6$ ($h = 1/2$). (Puntuación 10/100)

3. Los métodos de Runge-Kutta son métodos de un paso que generalizan al método de Euler como alternativa a los métodos multipasos. Uno de los más conocidos es el método de cuatro etapas. Considerando un problema de valor inicial

   $$u'(t) = f(t, u(t)),\ u(0) = u_0,$$

   se define iterativamente de la siguiente manera:

   $$\texttt{(RK4)} \begin{cases} k_1 = hf(t_n, u_n), \\ k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_1}{2}\right), \\ k_3 = hf(t_n + \frac{h}{2}, u_n + \frac{k_2}{2}), \\ k_4 = hf(t_n + h, u_n + k_3), \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{cases} \tag{4}$$

[1] Esta ecuación diferencial describe un modelo físico de absorción (o producción) en donde α es una constante física y g es el término fuente. Un ejemplo sería la intensidad de radiación emitida por un cuerpo radiactivo, en donde $u(t)$ es una medida de la concentración de un isótopo inestable. En general, la concentración de radiación decae a la mitad en un intervalo de tiempo de vida media T según la ecuación

$$u'(t) = \alpha u(t), \text{ con } \alpha = -\frac{\ln 2}{T}.$$

En este ejercicio se pide realizar lo mismo que en el apartado anterior para este método. Es decir, implementar una función

$$\mathtt{u} = \mathtt{EDO\_RK4}(\mathtt{u0}, \mathtt{t0}, \mathtt{t1}, \mathtt{n})$$

y aplicarla al ejemplo concreto (3) en las mismas condiciones que anteriormente. (Puntuación 10/100)

4. Considere ahora el problema de Cauchy en el plano complejo: Hallar una función $u : [0, \infty) \to \mathbb{C}$ tal que

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha u(t) = 0 \text{ para todo } t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{5}$$

en donde $u_0 \in C$ es el valor inicial y $\alpha \in \mathbb{C}$ es una constante.

Al aplicar el método de Euler tenemos $u_n = (1-\alpha h)^n u_0$. Denotando $G(-\alpha h) = (1-\alpha h)$, podemos escribir la iteración de la siguiente manera

$$u_n = G(-\alpha h)^n u_0.$$

Así, denotando $z = -\alpha h$ y considerando la función $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ en el plano complejo, el conjunto

$$\mathcal{S} = \{z \in \mathbb{C} : |G(z)| < 1\}$$

nos determina la región de estabilidad fuerte del método[2]. A esta función G se la denomina *función de amplificación* y se puede calcular para cada método.

En este ejercicio se pide calcular la función de amplificación para el método de Euler explícito y el método Runge-Kutta (4), y dibujar y comparar las correspondientes regiones de estabilidad en un mismo gráfico por ordenador. A tenor de lo calculado comente los resultados numéricos obtenidos en los apartados anteriores. (Puntuación 10/100)

[2]Véase que si $|G(z)| < 1$, entonces se verifica que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ lo que coincide con el comportamiento de la solución $\lim_{t_n\to\infty} u(t_n) = \lim_{t_n\to\infty} e^{-at_n} = 0$ y se verifica una propiedad de estabilidad fuerte.