Unidad didáctica 1: Sistemas lineales

1.1. Introducción

En esta Unidad Didáctica se estudian métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, o simplemente, sistemas lineales.

Una ecuación lineal en n incógnitas $x_1, \dots, x_n$ tiene una expresión de la forma

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

donde los $a_1, \dots, a_n$ se llaman coeficientes y son escalares (números) o elementos de un cuerpo que será el de los números reales: $\mathbb{R}$, o el de los complejos $\mathbb{C}$. El término b es un escalar del mismo cuerpo y se denomina término independiente. Cuando $b = 0$ la ecuación se dice que es homogénea. Una solución de la ecuación anterior es un conjunto de n escalares $c_1, \dots, c_n$ que son valores que sustituidos en las n incógnitas $x_1, \dots, x_n$ cumplen la ecuación.

Un sistema lineal es un conjunto de varias ecuaciones lineales, en las mismas incógnitas, que tienen que cumplirse a la vez y dos sistemas se dicen **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

El objetivo de esta Unidad Didáctica es encontrar métodos para decidir si un sistema lineal tiene o no soluciones (discusión de un sistema), y en caso afirmativo encontrarlas todas (resolución de un sistema). Para ello, dado un sistema lineal S, se transformará en otro equivalente S' que sea fácil de discutir y resolver. Este tipo de sistemas son los **escalonados reducidos** (pág. 8) y también los **escalonados** (pág. 32).

El método a seguir para transformar un sistema lineal en uno escalonado reducido se denomina **Método de Gauss-Jordan** y se basa en el uso de las denominadas **operaciones elementales** que consisten en realizar ciertas combinaciones lineales con las ecuaciones del sistema.

En la Sección II.2 utilizaremos una **representación matricial de los sistemas** (pág. 17) que hace más cómoda y operativa su manipulación. Para ello, se hace una presentación muy básica de lo que es una matriz, la suma de matrices y el producto por escalares. Se profundiza en el estudio de las matrices en la siguiente sección (I.3).

Las operaciones elementales de las ecuaciones del sistema serán equivalentes a las operaciones elementales de las filas de la matriz que representa el sistema. En esta unidad, tendrá gran importancia el concepto de **rango de una matriz**. El rango se corresponde con el número de filas independientes de la matriz y será un invariante por operaciones elementales. Es decir, si dos matrices se pueden obtener una a partir de la otra realizando operaciones elementales, entonces ambas tendrán el mismo rango. El rango de una matriz escalonada reducida o escalonada es igual al número de filas no nulas. Si sólo queremos calcular el rango de una matriz utilizando el método de escalonamiento, entonces basta con obtener una escalonada equivalente, que requiere mucho menos trabajo que una escalonada reducida. Ésta última será mejor para la resolución de sistemas.

Para finalizar esta Unidad, el estudio del rango de las matrices asociadas a un sistema nos da un método de discusión del sistema: **Teorema de Rouché-Frobenius** (pág. 28). El sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz ampliada es igual al rango de la matriz de coeficientes.

1.2. Conceptos más importantes

Sección I.1 Sistemas de ecuaciones. El Método de Gauss-Jordan

- Ecuación Lineal y sistema lineal.
- Solución de un sistema lineal. Tipos de sistemas lineales: compatible (determinado o indeterminado), incompatible.
- Sistemas equivalentes.

Sistema homogéneo.
Combinación lineal de ecuaciones. Ecuaciones independientes.
Operaciones elementales.
Sistema escalonado reducido (pág. 8).
Sistema escalonado (pág. 31, ejercicio 10).
Método de escalonamiento de Gauss-Jordan.

Sección I.2 Teorema de Rouché-Frobenius

Matrices: filas, columnas, orden de una matriz, suma de matrices, producto de una matriz por un escalar.
Matriz de coeficientes y matriz ampliada de un sistema.
Operaciones elementales por filas o por columnas.
Matrices equivalentes (por filas o columnas).
Escalonamiento de matrices.
Rango de una matriz. Matriz traspuesta.
Teorema de Rouché-Frobenius.

1.3. Resultados de aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con precisión y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) más importantes.

Se desarrollarán las siguientes **habilidades**:

- Transformar un sistema lineal en uno escalonado o escalonado reducido equivalente aplicando el Método de Gauss-Jordan.
- Obtener la representación matricial de un sistema.
- Calcular el rango de una matriz transformándola en una escalonada equivalente.
- Utilizar el Teorema de Rouché-Frobenius para discutir un sistema.
- Resolver un sistema compatible transformándolo previamente en uno escalonado reducido (Proposición 3.13, Ejemplo 1.14).