FUNCIONES DE UNA VARIABLE II

- Cada ejercicio de valora sobre 2,5 puntos.
- En la valoración se tendrá en cuenta: La corrección del resultado, el razonamiento utilizado, la exposición escrita.

Ejercicio 1. Dar una condición necesaria y suficiente para que una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada sea integrable. Demostrarla.

Ejercicio 2. Calcular $\displaystyle\int_{0+}^{1-} (\log(x))^4 dx$.

Ejercicio 3. Calcular $\displaystyle I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

Ejercicio 4. Dada la serie $\sum_1^\infty \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}(-1)^{n+1}$.Calcular el intervalo de convergencia y sumar la serie.

EXAMEN 2.

1. Dar una condición necesaria y suficiente para que una función $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada sea integrable Riemann. Demostrarlo.

2 $\int_0^1 (\ln(x))^4 dx$ $\qquad \ln(x) = -t$, $x = e^{-t}$ $\quad dx = -e^{-t}dt$

$= \int_{\infty}^{0} -(-t)^4 e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^4 e^{-t} dt = \Gamma(p) \qquad p-1=4 \quad p=5$

$I = \Gamma(5) = 4!$

Nota: Por partes y con cuidado se puede hacer aunque es largo.

3. Sea $f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$

$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \qquad t = x^2$

$1 - t + t^2 - t^3 + \dots$

Como $\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 \dots$

$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 +$

Luego $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

4. $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

$= \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}$

$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = u \Rightarrow du = dx \\ \frac{x}{(1+x^2)^2} dx = dv \Rightarrow v = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1} \end{array} \right\} =$

$$\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+x^2)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{x}{(1+x^2)^2}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)$$

$$I=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{x}{2(1+x^2)}+C$$