Pregunta 1 (2,5 puntos)
Se define en $\mathbb{N}^*$ la relación $\ll$ dada por:

$$x \ll y \quad \text{si y sólo si} \quad \text{existe } \ k \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } y = x^k$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}^*$.

b) Si $A = \{2, 8\}$ y $B = \{3, 5\}$ estudie la existencia, y en su caso explicítelos, de cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales de los conjuntos A y B.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \colon \exists (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \text{ tal que } n \text{ impar y } x = \dfrac{m}{n}\right\}$.

a) Demuestre que A, con las operaciones de $\mathbb{Q}$ restringidas a A, es un anillo unitario.

b) Determine en el anillo A los elementos que son inversibles.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Demuestre por inducción que para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ se cumple que $2^n \geq n^2$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Utilice la fórmula de Moivre para expresar $\cos 5\alpha$ y $\operatorname{sen} 5\alpha$ en función de $\cos \alpha$ y $\operatorname{sen} \alpha$.