Unidad didáctica 3: Espacios vectoriales

3.1 Introducción

El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo así como el de las matrices de un orden dado tienen propiedades comunes: la combinación lineal de dos soluciones de un sistema es otra solución del sistema, y la combinación lineal de dos matrices del mismo orden es otra matriz del mismo orden. Estas "combinaciones lineales" que todavía no se han definido formalmente -salvo para las ecuaciones de un sistema lineal- son la base del Método de Gauss-Jordan que ha impregnado hasta ahora -y lo seguirá haciendo- todo lo visto.

Generalizando lo que ha pasado con los sistemas lineales y las matrices, aparece la estructura abstracta de **espacio vectorial**. Las combinaciones lineales de los elementos de un espacio vectorial, a los que llamaremos **vectores**, producen nuevos elementos de dicho espacio, nuevos vectores. Así, los conjuntos de matrices o de soluciones de sistemas lineales son ejemplos de espacios o subespacios vectoriales.

Comenzamos con el concepto abstracto de espacio vectorial E, que es una estructura algebraica ligada a un cuerpo de números $\boldsymbol{K}$ que será el de los reales: $\mathbb{R}$, o el de los complejos $\mathbb{C}$. En el espacio vectorial se podrán operar sus elementos entre sí (la operación normalmente se denotará como "+") y se podrán multiplicar por los elementos del cuerpo, a los que se llamará **escalares**; de modo que las operaciones cumplan las propiedades enunciadas en la pág. 142.

A los elementos del espacio vectorial E se les suele denotar por letras latinas como u, v, w.. o también $x,\ y,\ z\ ..$.; mientras que se suelen utilizar las letras griegas α, β, γ o también λ (lambda), μ (mu)..., para denotar a los escalares.

Un espacio vectorial que jugará un papel importante será $\boldsymbol{K}^n = \mathbb{R}^n\ o\ \ \mathbb{C}^n$ formado por secuencias ordenadas de n elementos de K, esto es

$$\boldsymbol{K}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n), con\ \ x_i\ elementos\ de\ \boldsymbol{K}\}.$$

Nos interesaremos por los subconjuntos de un espacio vectorial que, en sí mismos, tienen estructura de espacio vectorial, a los que llamaremos **subespacios vectoriale**s. Finalmente, en la primera Sección, la II.6 conoceremos los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores, que será importantísimo tener bien claros.

En la Sección II.7 se centra el estudio en los espacios vectoriales de tipo finito o de **dimensión finita**, que son los únicos que trabajaremos en este curso. En un espacio de dimensión finita se puede encontrar un conjunto finito de vectores, de manera que el resto de vectores del espacio se generan mediante combinaciones lineales de ellos. A este conjunto se le denomina **sistema de generadores**. Y al sistema de generadores con el menor número de vectores posibles se le denomina **base** del espacio (o subespacio) vectorial y tiene lugar cuando los vectores del sistema de generadores son linealmente independientes. Todas las bases de un espacio vectorial tienen el mismo número de elementos al que se llama **dimensión**, y todo conjunto de vectores linealmente independiente se puede ampliar hasta obtener una base (**Teorema de prolongación de la base**).

Dada una base de un $\boldsymbol{K}$-espacio vectorial E de dimensión n, pongamos $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, se tiene que cualquier vector v de E se puede escribir de modo único como combinación lineal de los elemento de la base

$$v = x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n,$$

con $x_1, \dots, x_n$ escalares, a los que se denomina coordenadas de v en la base B. Este hecho es importantísimo, pues permite, fijada una base B, identificar todo vector con sus coordenadas respecto a dicha base:

$$v \quad \leftrightarrow \quad (x_1, \dots, x_n)$$

representando así los vectores de un espacio vectorial mediante elementos de $\boldsymbol{K}^n$ y facilitando su manipulación y el uso de matrices para el estudio de espacios y subespacios.

Un mismo vector *v* tiene distintas coordenadas en distintas bases *B* y *B'*, y podemos obtener una matriz que nos permita pasar de coordenadas en una base a otra. A esta matriz se la denomina: **matriz de cambio de base**.

La representación de vectores mediante coordenadas respecto a una base, permite también definir cualquier subespacio vectorial *V* como el conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, al que llamaremos **ecuaciones implícitas o cartesianas** del subespacio. El conjunto de soluciones de dichas ecuaciones se denominan **ecuaciones paramétricas** del subespacio.

Una vez que se tiene una representación de los subespacios vectoriales mediante ecuaciones y de los vectores mediante coordenadas - todo ello relativo a una base fijada-, en la Sección II.8 se construyen nuevos subespacios vectoriales haciendo distintos tipos de operaciones con subespacios dados: suma, intersección y cociente módulo un subespacio.

3.2 Conceptos más importantes

Sección II.6. Espacios vectoriales:
- Espacio vectorial: operaciones y propiedades.
- Combinación lineal de vectores.
- Subespacio vectorial.
- Subespacio vectorial trivial y propio.
- Vectores linealmente dependientes e independientes.
- Rango de un conjunto de vectores.

Sección II.7. Espacios vectoriales de tipo finito:
- Sistema de generadores, base y dimensión.
- Coordenadas de un vector respecto de una base.
- Matriz de cambio de base o de cambio de coordenadas.
- Teorema de prolongación de la base.
- Codimensión de un subespacio vectorial.
- Hiperplano.
- Ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial. vectores.

Sección II.8. Operaciones con subespacios:
- Suma e intersección de subespacios vectoriales.
- Suma directa.
- Fórmula de Grassman de las dimensiones.
- Suplementario de un subespacio vectorial.
- Cociente de un espacio vectorial módulo un subespacio.
- Subespacios vectoriales como intersección de hiperplanos.

3.3 Resultados del aprendizaje

- Conocer de forma precisa los conceptos expresados en el apartado anterior. Saber definirlos con precisión y enunciar sus propiedades más importantes.
- Saber enunciar los resultados (Teoremas y proposiciones) más importantes.

  Se desarrollarán las siguientes habilidades:
- Demostrar que un conjunto dado tiene estructura de espacio vectorial.
- Encontrar un sistema de generadores y una base de un subespacio vectorial.

- Determinar las coordenadas de un vector en distintas bases. Obtener la matriz de cambio de base o cambio de coordenadas.
- Determinar unas ecuaciones implícitas y/o paramétricas de un subespacio vectorial a partir de un sistema de generadores.
- Determinar un suplementario de un subespacio vectorial dado.
- Dados dos subespacios vectoriales U y V de un espacio vectorial E , determinar ecuaciones, dimensión y base de $U+V,\ U\cap V\ \ y\, del\, cociente\ \ E/V.$
- Determinar si la suma de dos subespacios es directa.