Tema 4.

Problemas básicos.

Ejercicio. *Sea G un $p-$grupo finito y H* un subgrupo que verifica $[G : H] = p$. *Probar que* H es normal en G.

Solución. Aunque este problema es consecuencia de la proposición 3.12.1, vamos a enfrentar su enunciado a nuestras nuevas técnicas. Sea $N = N(H)$ el normalizador de H, hemos de probar que $N = G$. Sabemos que

$$[G : H] = [G : N] \cdot [N : H],$$

de donde $[N : H] = 1$ o $[N : H] = p$. Por otra parte, por la congruencia del normailizador

$$[N : H] \equiv [G : H] \bmod(p),$$

con lo que necesariamente ha de ser $[N : H] = p$; así $[G : N] = 1$ y se concluye.

Ejercicio. *Sea G un grupo finito tal que $ord(G) = 13 \cdot 6$. Demostrar que G contiene un subgrupo normal de orden* 13.

Solución. Denotemos con n_{13} al número de 13-subgrupos de Sylow en G. Sabemos, por el tercer teorema de Sylow que n_{13} ha de verificar las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{array}{c} n_{13} \mid 6 \\ n_{13} \equiv 1 \bmod(13). \end{array} \right.$$

La primera condición dice que $n_{13} \in \{1, 2, 3, 6\}$, con lo que necesariamente $n_{13} = 1$ y se concluye.

Ejercicio. *Demostrar que un grupo G de orden 48 no puede ser simple.*

Solución. Puesto que $ord(G) = 2^4 \cdot 3$, tenemos

$$\left\{ \begin{array}{c} n_2 \mid 3 \\ n_2 \equiv 1 \bmod(2), \end{array} \right.$$

con lo que $n_3 = 1$ o $n_3 = 3$. En el primer caso en G hay un único 3-subgrupo de Sylow y por tanto éste es normal.

Si $n_3 = 3$, sean H, K, J los tres $2-$subgrupos de Sylow de G. Entonces $H \cap K \cap J$ es el corazón de cualquiera de ellos, y por tanto normal en G, con lo que si probamos éste grupo no se reduce al neutro habremos concluido.

Si llamamos $N = N_G(H)$ entonces $[G : N] = 3$; de esta forma existe un morfismo de grupos

$$\Psi : G \to S_3.$$

Como $ord(G) = 48$ y $ord(S_3) = 6$, Ψ no puede ser inyectivo, con lo que su núcleo, que del tema anterior sabemos que es precisamente $H \cap K \cap J$, no puede ser el elemento neutro de G, y se concluye.

Estamos en condiciones de probar ya la proposición 2.23 (pág. 111), cuya demostración habíamos soslayado al estudiar el tema 2. Necesitamos una breve reflexión previa sobre la estructura de cuerpo. Cuando afirmamos que la recta real $\mathbb{R}$ es un cuerpo estamos diciendo básicamente que $(\mathbb{R}, +)$ es grupo aditivo y que además, si quitamos el 0, entonces $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ también es un grupo. Esto mismo pasa con $\mathbb{Z}_p$. Que es un grupo aditivo ya es de sobra conocido, y si quitamos la clase del cero, obtenemos exactamente el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_p^*$ descrito en 2.3.3. Puede ser conveniente, examinar un ejemplo concreto. Si tomamos $\mathbb{Z}_7$, entonces el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_7^*$ de las clases primas con 7, está formado por todas las clases salvo la del cero: $\mathbb{Z}_7^* = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$. Es ilustrativo jugar con la ley de grupo aquí y buscar el inverso de cada clase:

$$\overline{2} \cdot \overline{4} \equiv \overline{1} \bmod(7), \overline{3} \cdot \overline{5} \equiv \overline{1} \bmod(7), \overline{6} \cdot \overline{6} \equiv 1 \bmod(7).$$

Una última cosa muy intuitiva que necesitamos, es que un polinomio de gardo n con coeficientes en un cuerpo dado, tiene **a lo más** n raíces en él. Por ejemplo, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, el polinomio $X^2 + 1$, no tiene ninguna raíz, mientras que $X^2 - 1$ tiene dos.

Ejercicio. Si p es un número primo, el grupo $\mathbb{Z}_p^*$ es cíclico.

Solución. Por 4.6.3, como $\mathbb{Z}_p^*$ es un grupo abeliano finito, para ver que es cíclico, basta comprobar que cada subgrupo de Sylow en él lo es. Sea pues H un subgrupo de Sylow en $\mathbb{Z}_p^*$ de orden q^n. Sea x un elemento de orden máximo en H y escribamos $ord(x) = q^a$ con $a \leq n$. Por el lema 2.20 (pág. 104), el orden de cualquier otro elemento $y \in H$ es un divisor de q^a, y por tanto, todos los elementos de H verifican:

$$X^{q^a} - 1 = 0.$$

Como esta ecuación puede tener a lo sumo q^a raíces, se sigue que $q^n = q^a$; de esta forma, el orden de x coincide con el de H, luego éste es cíclico y generado por x.

Problemas correspondientes al capítulo 4. (Págs. 216, 217.)

Establecemos las siguientes puntualizaciones:

- Problema 64, su enunciado se restringe al caso $p \geq 5$.
- Problema 65, no entra en programa.
- Problema 66, sólo consideraremos el caso en que $m > 1$.
- Problema 68, sólo estudiaremos el caso de un grupo G de orden $27 \cdot 13^3$. En la solución ofrecida en la página 432, se alude a un resultado del apartado 4.12.1, que vamos a obviar como sigue. Sabemos que $H \subset N_G(H \cap K)$, y por la misma razón $K \subset N_G(H \cap K)$, con lo que

$$H \cdot K \subseteq N_G(H \cap K).$$

Así, como sabemos que $o(H \cdot K) = 13^3 \cdot 13$ y $o(N_G(H \cap K)) \leq 13^3 \cdot 3^i$ (con $i \leq 3$, ya que es un subgrupo de G) forzosamente $i = 3$, con lo que $N_G(H \cap K) = G$.

- Problema 69, no entra en programa.
- Problema 73, no entra en programa.
- La solución al problema 74 es bastante interesante; aunque el apartado 4.7 no se exige como teoría, se consulta y se utiliza su enunciado sin más.
- Problemas 75 y 76, se excluyen de la materia del curso.
- La solución al problema 77 es un incómodo argumento combinatorio en parámetros. En lo que a nosotros nos interesa, basta suponer que el subgrupo K es normal en G, y aplicar entonces el primer teorema de Sylow a G/K.
- El problema 78 es consecuencia directa de la congruencia del normalizador.
- Los problemas 79 y 80 no entran en programa.