**8.1** Se realizan 12 lanzamientos de una moneda equilibrada. Determinar la distribución

1. del número de caras obtenidas.
2. de la diferencia entre caras y cruces.
3. del número total de rachas.

En cada caso, representar la función de probabilidad.

1. El número de caras, $X_1$, puede ser cualquiera de los números enteros de 0 a 12. Si la probabilidad de cara fuese $p$, la probabilidad de que se den $k$ caras y $12-k$ cruces en un orden determinado es $p^k(1-p)^{12-k}$. Además hay $\binom{12}{k}$ formas de elegir $k$ de las 12 posiciones para las caras, reservando las $12-k$ restantes para las cruces. Luego, la probabilidad de obterner $k$ caras es

$$p_k = \binom{12}{k} p^k (1-p)^{12-k}$$

que se reduce a

$$p_k = \binom{12}{k} \frac{1}{2^{12}}$$

en el caso $p = 1/2$. La representación gráfica de su función de probabilidad aparece en la figura siguiente:

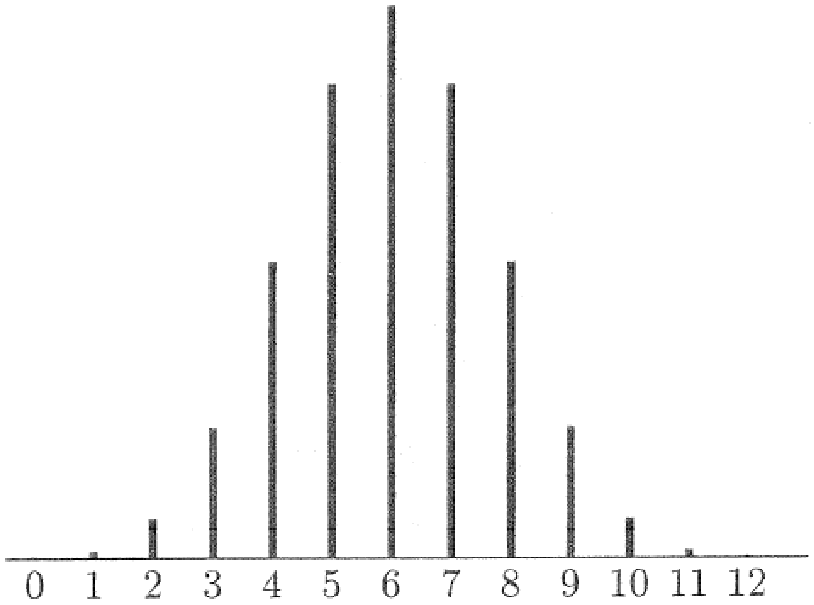


Figura VIII.1 : Distribución binomial $n = 12$, $p = 1/2$

Con valores arbitrarios de $n$ y $p$ resulta

$$\mathrm{P}\{X_1 = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

que se denomina la *distribución binomial* de parámetros $n$ y $p$. (cf. ejercicios 3.1 y 7.3).

2. La diferencia, $X_2$, entre el número de caras y el número de cruces vale

$$X_2 = X_1 - (n - X_1) = 2X_1 - n$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X_2 = j\} &= \mathrm{P}\{2X_1 - n = j\} = \mathrm{P}\{X_1 = (n+j)/2\} \\ &= \binom{n}{(n+j)/2} p^{(n+j)/2}(1-p)^{(n-j)/2} \end{aligned}$$

en el supuesto de que $n + j$ sea par y $-n \leq j \leq n$. Por ejemplo con $n = 12$ $p = 1/2$ resulta

$$\mathrm{P}\{X_2 = j\} = \binom{12}{6 + j/2} \frac{1}{2^{12}}$$

si $j = -12, -10, -8, \ldots, 10, 12$. Gráficamente, la distribución de $X_2$ sólo sitúa la mismas probabililidades de la figura anterior en los enteros pares entre $-12$ y $12$.

3. Sea $X_3$ el número total de rachas. Según el ejercicio 7.12, la probabilidad c
que aparezcan $r$ rachas en $n$ lanzamientos es

$$P\{X_3 = r\} = \binom{n-1}{r-1} \frac{1}{2^{n-1}}$$

para $1 \leq r \leq n$. En particular para $n = 12$ el resultado es un cociente de denom
nador $2^{11} = 2048$, mientras que los numeradores figuran en la tabla siguiente:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 1 | 11 | 55 | 165 | 330 | 462 | 462 | 330 | 165 | 55 | 11 | 1 |

La representación gráfica de la función de probabilidad aparece en la figura siguient

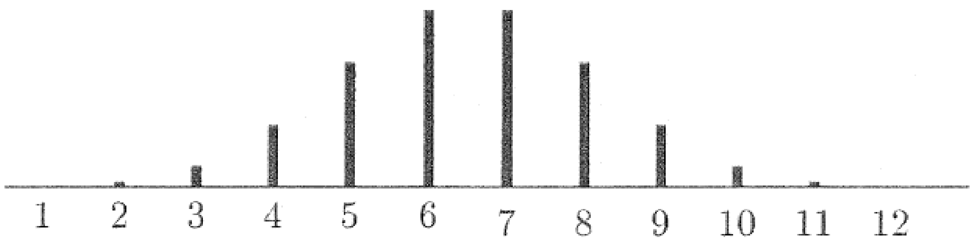


Figura VIII.2 : Distribución del número de rachas con $n = 12$ y $p = 1/2$

Se trata de una distribución binomial de parámetros 11 y 1/2, desplazada un
unidad a la derecha.

**8.3** La variable aleatoria $X$ toma valores naturales y su función de probabilidad es

$$p_n = \frac{1}{n(n+1)} \qquad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Hallar la función de probabilidad de la variable aleatoria $Y$ definida como la parte entera de $X/2$.

Desde luego

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1
\end{aligned}$$

así que $p_n$ constituye una distribución de probabilidad.
El suceso $\{Y = k\}$ equivale a $\{X = 2k\} \cup \{X = 2k+1\}$, con lo cual

$$\mathrm{P}\{Y = k\} = \frac{1}{2k(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2k(k+1)} = \frac{1}{2}\mathrm{P}\{X = k\}$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Además $\mathrm{P}\{Y = 0\} = \mathrm{P}\{X = 1\} = 1/2$.

**8.5** Cinco bolas se colocan al azar en tres urnas. Hallar la distribución del número de urnas que contienen una bola.

De los $3^5$ casos posibles que describen la colocación de las 5 bolas en las tres urnas:

a) hay 3 que corresponden a que todas las bolas estén en la misma urna: una cualquiera de las tres.

b) con 4 bolas en una urna, son $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$ casos. Tantos como maneras de escoger 4 de las 5 bolas, una de las 3 urnas para que las contenga y una de las 2 urnas restantes para contener la bola que falta.

c) para tener 3 bolas en una urna y 2 en otra hay $\binom{5}{3} 3 \cdot 2 = 60$ elecciones posibles. Corresponden a repartir las cinco bolas en dos grupos: 3 más 2; después seleccionar una de las 3 urnas para introducir el primer grupo y una de las 2 restantes para el segundo grupo.

d) 3 bolas en una urna y una en cada una de las dos restantes, se dan en $\binom{5}{3} 2 \cdot 3 = 60$ casos: el primer factor corresponde a escoger 3 bolas, el segundo a escoger una más entre las dos restantes y, por último, hay que seleccionar cuál de las 3 urnas contendrá el trío.

e) con dos bolas en dos de la urnas y una en la tercera, hay $\binom{5}{2}\binom{3}{2} 3 = 90$ casos, puesto que hay que escoger 2 de las 5 bolas, otras 2 de las 3 restantes y una de las 3 urnas para que sea la que contiene uan sóla bola.

Tras revisar que aparecen recontados los $3^5 = 243$ casos, es inmediato que en los casos (b) y (e) hay una sóla urna que contiene una única urna; mientras que en el caso (d) hay dos urnas con una sóla bola. En los casos (a) y (c) no hay ninguna urna que contenga una única bola. En definitiva, el número de urnas que contienen exactamente una bola puede valer

$$\begin{cases} 0 & \text{con probabilidad} \quad (3+60)/3^5 \simeq 0'259 \\ 1 & \text{con probabilidad} \quad (30+90)/3^5 \simeq 0'494 \\ 2 & \text{con probabilidad} \quad 60/3^5 \simeq 0'247 \end{cases}$$

**8.9** Una moneda, con probabilidad $p$ de cara, es lanzada sucesivamente. Determinar la distribución del número de lanzamientos realizados hasta que aparece la segunda cara. Resolver la misma cuestión para la tercera cara y, en general, para la $i$-ésima.

Sea $N_i$ el número de lanzamientos hasta que aparece la $i$-ésima cara.
En el conjunto de sucesiones, el suceso $\{N_2 = n\}$ significa que hay una cara en la posición $n$ y otra en una de las $n-1$ posiciones anteriores; el resto de los resultados obtenidos en los $n-1$ primeros lanzamientos son cruces:

$$\underbrace{X\,X\ldots X\,C\,X\ldots X\,X}_{n-1}\;C$$

Toda secuencia de este tipo, de longitud $n$, tiene probabilidad $p^2(1-p)^{n-2}$ puesto que consta de 2 caras y $n-2$ cruces. Además hay $n-1$ secuencias posibles, tantas como lugares para colocar la primera cara entre las $n-1$ posiciones. Por consiguiente

$$\mathrm{P}\{N_2 = n\} = (n-1)(1-p)^{n-2}p^2$$

para $n = 2, 3, \ldots$.

De forma similar, es $N_3 = n$ si hay una cara en la posición $n$ y, entre las $n-1$ primeras posiciones, figuran dos caras y $n-3$ cruces:

$$\underbrace{X\,X\ldots X\,C\,X\ldots X\,C\,X\ldots X\,X}_{n-1}\;C$$

Dado que hay $\binom{n-1}{2}$ casos posibles, todos ellos de probabilidad $(1-p)^{n-3}p^3$, es

$$\mathrm{P}\{N_3 = n\} = \binom{n-1}{2}(1-p)^{n-3}p^3$$

para $n = 3, 4, \ldots$. En general

$$\mathrm{P}\{N_i = n\} = \binom{n-1}{i-1}(1-p)^{n-i}p^i$$

para $n = i, i+1, \ldots$, puesto que se cumple el suceso $\{N_i = n\}$ para cualquier sucesión de resultados que tenga una cara en la posición $n$ y exactamente $i-1$ caras adicionales entre las $n-1$ primeras posiciones.

Cabe observar que

$$\sum_{n=i}^{\infty}\binom{n-1}{i-1}(1-p)^{n-i}p^i = p^i\sum_{k=0}^{\infty}\binom{i+k-1}{k}(1-p)^k =$$

$$= \quad p^i\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{-i}{k}(1-p)^k = p^i[1-(1-p)]^{-i} = 1$$

Esto sólo confirma que la distribución de $N_i$ reparte probabilidad 1 entre los números naturales, de $i$ en adelante. El tipo de distribución obtenido, se denomina *binomial negativa*, por la presencia de los términos del desarrollo de $p^{-i}$. Sin embargo, el nombre de *distribución binomial negativa* se atribuye más exactamente a la distribución de la variable aleatoria $X_i = N_i - i$ que, toma los valores $0, 1, 2, \ldots$, con las mismas probabilidades que $N_i$ toma los valores $i, i+1, i+2, \ldots$. Es decir, $X_i$ representa el número de cruces obtenidas antes de que aparezca la $i$-ésima cara y es

$$\mathrm{P}\{X_i = k\} = \binom{k+i-1}{k}(1-p)^k p^i$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots$.

**Ejercicio 2.** Los jugadores A y B lanzan independiente y sucesivamente (siendo A el primero en lanzar) una moneda con probabilidad $0 \leq p \leq 1$ de cara. Gana la partida el jugador que obtiene, al lanzar la moneda, el mismo resultado que el otro jugador en el lanzamiento anterior. Sea $T$ el número de lanzamientos realizados hasta que uno de los dos jugadores gana.

**(a)** Determinar la función de probabilidad de $T$ y calcular $\mathrm{E}[T]$.

**(b)** Calcular la probabilidad de ganar que tiene cada uno de los dos jugadores.

**(c)** Se elige al azar (y con iguales probabilidades) entre dos monedas 1 y 2, con respectivas probabilidades de cara $p_1 = 3/8$ y $p_2 = 1/2$, para jugar al juego anterior. Hallar la probabilidad de que se haya jugado con la moneda 1 una partida en la que A ha ganado. ¿Y si se sabe que A ha ganado en la tercera tirada?

**Solución:** (a) La variable aleatoria $T$ toma valores en $\{2, 3, \ldots\}$. Se define $q = 1 - p$. Siendo $k \geq 1$, se observa que

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{T = 2k\} &= (pq)^{k-1}(p^2 + q^2) = (pq)^{k-1}(1 - 2pq) \\ \mathrm{P}\{T = 2k+1\} &= (pq)^k. \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\mathrm{E}[T] = \sum_{k=1}^{\infty} 2kP\{T = 2k\} + \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)\mathrm{P}\{T = 2k+1\} = \frac{2 + pq}{1 - pq}.$$

(b) El jugador A gana cuando la partida dura un número impar de turnos. Por tanto,

$$p_A = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{T = 2k+1\} = \frac{pq}{1-pq}.$$

Análogamente,

$$p_B = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}\{T = 2k\} = \frac{1-2pq}{1-pq} = 1 - p_A.$$

(c) Si se juega con la primera moneda, el jugador A gana la partida con probabilidad $\frac{p_1 q_1}{1-p_1 q_1} = \frac{15}{49}$. Si se ha jugado con la segunda moneda, el jugador A gana con probabilidad $\frac{p_2 q_2}{1-p_2 q_2} = \frac{1}{3}$. Por tanto, la probabilidad de haber jugado con la primera moneda dado que A ha ganado la partida es

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{49}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{49} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{45}{94}.$$

Análogamente, si se juega con la primera moneda, el jugador A gana la partida en la tercera tirada con probabilidad $p_1 q_1 = \frac{15}{64}$. Si se ha jugado con la segunda moneda, el jugador A gana en el tercer lanzamiento con probabilidad $p_2 q_2 = \frac{1}{4}$. Por tanto, la probabilidad de haber jugado con la primera moneda dado que A ha ganado la partida en la tercera tirada es

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{64}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{64} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}} = \frac{15}{31}.$$