Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2016, 2ª Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)
Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Subespacio vectorial invariante irreducible.
(b) Simetría ortogonal.
(c) Matriz de Gram de un producto escalar.
(d) Signatura de una forma cuadrática.

Ejercicio 1: (2 puntos) Teorema 9.3, pág. 326
Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestre que si $f : V \to V$ es una aplicación lineal que conserva la norma de los vectores, es decir $||v|| = ||f(v)||$ para todo $v \in V$, entonces f conserva el producto escalar:

$$< u, v >=< f(u), f(v) > \text{ para todo } u, v \in V.$$

Ejercicio 2: (3 puntos)
Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de V es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar una base $\mathcal{B}'$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan de f.
Ejercicio 5.18 (b), pág. 407
(b) Respecto de la base $\mathcal{B}'$, determine los planos f-invariantes irreducibles.

Ejercicio 3: (3 puntos)
(a) Determine una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la siguiente forma cuadrática tenga una matriz diagonal tal que los elementos de la diagonal principal sean iguales a 1, -1 o 0; e indique su signatura. Ejercicio F4.12

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 6x_1x_3 - 2x_2^2 - 6x_2x_3 - 9x_3^2$$

(b) Encuentre, si es posible, un plano P de modo que la restricción de Φ a P sea una forma cuadrática definida negativa.

Ejercicio 2 (b): Sea $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ la base respecto de la cual

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El espacio vectorial V se descompone en suma directa de los subespacios máximos

$$V = M(-1) \oplus M(1) \;\text{ con }\; M(-1) = L(v_1, v_2),\; M(1) = L(v_3, v_4),\; v_4 = (f - \mathrm{Id})(v_3)$$

Los subespacios f-invariantes irreducibles están contenidos en los subespacios máximos, luego si buscamos los planos P, f-invariantes irreducibles, que estarán contenidos en $M(-1)$ o bien $M(1)$, ambos dos planos; entonces los posibles planos son $P = M(-1)$ o bien $P = M(1)$. El primer caso se descarta pues es reducible (al ser el subespacio propio todas las rectas contenidas en él son invariantes, una descomposición en rectas invariantes es $M(-1) = L(v_1) \oplus L(v_2)$. Luego el único posible es $P = M(1)$ que efectivamente es irreducible pues es 2-cíclico.

Otra forma de razonar porqué los subespacios máximos son reducibles o no es mirando la matriz. La matriz de la restricción de f a $M(-1)$ es:

$$\left(\begin{array}{c|c} -1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)$$

formada por dos bloques de Jordan de tamaño 1, luego $M(-1)$ es reducible.
Mientras que la matriz de la restricción de f a $M(1)$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

formada por un único bloque de Jordan, luego $M(1)$ es irreducible.

Ejercicio 3 (b): Sea $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ la base obtenida en el apartado (a), respecto de la cual

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(\Phi) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El plano $P = L(v_1, v_2)$ cumple las condiciones requeridas ya que la matriz de la restricción de Φ a P, respecto de la base $\mathcal{B}'' = \{v_1, v_2\}$ de P, es la matriz diagonal

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}''}(\Phi|_P) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y por tanto $\Phi|_P$ es definida negativa ya que su signatura es $(0, 2)$.