Ejercicio 2.

(a) Sean X e Y dos variables aleatorias independientes con distribución geométrica de parámetros $0 < p < 1$ y $0 < q < 1$, respectivamente. Determinar la función de probabilidad de la variable aleatoria $Z = \min\{X, Y\}$.

Una urna contiene bolas rojas, azules y blancas en proporciones p_1, p_2 y p_3, respectivamente, siendo los p_i estrictamente positivos con $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Se extraen sucesivamente bolas de la urna con reemplazamiento. Sea T_1 el número de extracción en el que ha salido, por primera vez, una bola roja; y sea T_2 el número de extracción en el que ha salido, por primera vez, una bola azul.

(b) Hallar la función de probabilidad de $\min\{T_1, T_2\}$, que es el número de extracción en que ha salido, por primera vez, una bola roja o azul.

(a) La función de probabilidad de X es $\mathrm{P}\{X = n\} = (1-p)^{n-1}p$ para $n \geq 1$, y análogamente para Y. Se tiene pues que

$$\mathrm{P}\{X > n\} = (1-p)^n \quad \text{y} \quad \mathrm{P}\{Y > n\} = (1-q)^n \quad \text{para } n \geq 0.$$

Siendo X e Y independientes,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{Z > n\} &= \mathrm{P}\{X > n, Y > n\} \\ &= \mathrm{P}\{X > n\} \cdot \mathrm{P}\{Y > n\} \\ &= \big((1-p)(1-q)\big)^n. \end{aligned}$$

Se deduce que Z tiene distribución geométrica de parámetro $1-(1-p)(1-q)$.

(b) Las variables aleatorias T_1 y T_2 tienen distribución geométrica de parámetros p_1 y p_2, respectivamente. Fijado $n \geq 0$, calculamos $\mathrm{P}\{\text{mín}\{T_1, T_2\} > n\}$. Se tiene la siguiente igualdad de sucesos.

$$\{\text{mín}\{T_1, T_2\} > n\} = \{T_1 > n\} \cap \{T_2 > n\} = \{\text{las primeras } n \text{ bolas son blancas}\}.$$

Por tanto,

$$\mathrm{P}\{\text{mín}\{T_1, T_2\} > n\} = p_3^n$$

y resulta que $\text{mín}\{T_1, T_2\}$ tiene distribución geométrica de parámetro $1 - p_3$.

Se observa que esta distribución no se corresponde con la del apartado (a), dado que $1 - (1 - p_1)(1 - p_2) \neq 1 - p_3$. Esto es porque las variables aleatorias T_1 y T_2 no son independientes. En efecto, si $T_1 = n$ entonces necesariamente $T_2 \neq n$, lo que implica que las variables no son independientes.