Problema 1. *Sean G un grupo y $g \in G$. Definimos en G otra operación mediante $a \star b = agb$. Demostrar que con la nueva operación G es un grupo isomorfo al de partida*

Solución. Primero veamos que $(G, \star)$ es grupo:

1. Asocitividad. Sea $a, b, c \in G$, entonces

$$(a \star b) \star c = (a \star b)gc = agbgc = ag(b \star c) = a \star (b \star c)$$

2. Elemento neutro. Sea $g^{-1} \in G$, entonces

$$g^{-1} \star a = a \star g^{-1} = agg^{-1} = a \ .$$

   Luego g^{-1} es el elemento neutro.

3. Elemento inverso. Sea $a \in G$, entonces $(gag)^{-1}$ es el elemento inverso:

$$(gag)^{-1} \star a = a \star (gag)^{-1} = ag(gag)^{-1} = g^{-1}$$

Ahora demostraremos que existe un isomorfismo entre $(G, \cdot)$ y $(G, \star)$. Sea el homomorfismo dado por

$$\begin{array}{rccc} \phi: & (G, \cdot) & \longrightarrow & (G, \star) \\ & a & \longmapsto & ag^{-1} \ . \end{array}$$

Es homomorfismo ya que

$$\phi(ab) = abg^{-1}ag^{-1}gbg^{-1} = ag^{-1} \star bg^{-1} = \phi(a) \star \phi(b) \ .$$

Para ver que ϕ es inyectiva calculamos su núcleo. Sea $a \in G$ tal que $f(a) = g^{-1}$, es decir,

$$f(a) = ag^{-1} = g^{-1} \ .$$

Esto implica que $a = 1$ y por tanto el núcleo es $\{1\}$ y ϕ es inyectiva. Por último veamos que es sobreyectiva. Sea $a \in G$, entonces el elemento $ag \in G$ satisface

$$f(ag) = agg^{-1} = a \ .$$

Luego ϕ es sobreyectiva y por tanto es isomorfismo.