Introducción a las ecuaciones diferenciales   Enero de 2020

Alumno...

Nota.- Hacer cada problema en páginas distintas, simplificando al máximo la respuesta y remarcándola claramente (en un recuadro), Escribir también la solución (excepto las demostraciones) en los recuadros de esta hoja, que se debe entregar junto con el ejercicio.

1º) a) Integrar la ecuación diferencial

$$(2y^2 - 3xy)dx + (3xy - 2x^2)dy = 0$$

mediante la determinación de un factor integrante. (Se debe dar la respuesta en la forma $F(x,y) = k$, y decir cuál es el factor integrante que se considera. (Indicación: La ecuación dada admite, entre otros, un factor integrante que depende de xy),

$\boxed{y^3x^2 - x^3y^2 = k, \text{ siendo } k \text{ una constante.}}$

b) Hallar las líneas de máxima pendiente de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

$$\boxed{\left.\begin{array}{c} y = kx \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{array}\right\}, \text{ siendo } k \text{ una constante.}}$$

2º) Encontrar (expresando y como función de x) todas las soluciones de la ecuación

$(y')^2 - yy' + e^x = 0$.

$\boxed{y = ae^x + \frac{1}{a} \text{ (siendo } a \text{ cualquier número real distinto de cero)}, y = 2e^{\frac{x}{2}},\ y = -2e^{\frac{x}{2}}}$

(Sugerencia: Hacer el cambio $e^x = t$).

3º) Hallar un intervalo abierto I, con $2 \in I$, y una función derivable $f : I \to \mathbb{R}$, con derivada continua, verificando que $f(2) = 3$ y, en cada punto $P(x,y)$ de la gráfica de f, el segmento de la normal a dicha curva comprendido entre el punto P y el eje horizontal tiene longitud 3. Hallar todas las soluciones, con la condición de que el intervalo abierto I sea el mayor posible.

$\boxed{y = 3, \text{ definida en } I = \mathbb{R}. \quad / \quad y = \sqrt{9-(x-2)^2} = \sqrt{5+4x-x^2}, \text{ definida en } I = (-1,5).}$

4º) Resolver, expresando y como función de x, la ecuación diferencial

$y'' + y - 2\cos x = 0$, sabiendo que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. $\boxed{y = (x+1)senx.}$

1º) a) Llamemos μ a un factor integrante que depende de xy. Se tiene que

$\mu_y(2y^2 - 3xy) + (4y - 3x)\mu = \frac{d}{dy}(2y^2 - 3xy)\mu = \frac{d}{dx}(3xy - 2x^2)\mu =$

$= (3xy - 2x^2)\mu_x + (3y - 4x)\mu.$

Por tanto, $(y + x)\mu = (3xy - 2x^2)\mu_x + (3xy - 2y^2)\mu_y$.

Poniendo $xy = t$, obtenemos que

$(y + x)\mu = (3xy - 2x^2)y\mu_t + (3xy - 2y^2)x\mu_t = (3xy^2 + 3x^2y - 2x^2y - 2y^2x)\mu_t =$

$= (xy^2 + x^2y)\mu = xy(y + x)\mu_t$.

Si $y \neq -x$, entonces $y + x \neq 0$, y se verifica que $\mu = t\mu_t$.

Si $\mu \neq 0$, y $t \neq 0$, entonces $\frac{\mu_t}{\mu} = \frac{1}{t}$; luego $\log|\mu| = \log|t| + a$, siendo a una constante.

En consecuencia, $|\mu| = e^a|t|$. Por tanto, $\mu = bt = bxy$, siendo $b = \pm e^e$ una constante distinta de cero.

Se tiene que $\int (2y^2 - 3xy)xydx = \int(2y^3x - 3x^2y^2)dx = y^3x^2 - x^3y^2 + \varphi(y)$,

donde

$\frac{d}{dy}(y^3x^2 - x^3y^2 + \varphi(y)) = 3y^2x^2 - 2x^3y + \varphi'(y) = (3xy - 2x^2)xy = 3x^2y^2 - 2x^3y$, luego $\varphi'(y) = 0$.

$\boxed{\text{Así pues, la solución es } y^3x^2 - x^3y^2 = k, \text{ siendo } k \text{ una constante.}}$

Es inmediato comprobar que $\frac{d}{dx}(y^3x^2 - x^3y^2) = 2y^3x - 3x^2y^2 = (2y^2 - 3xy)xy$,
$\frac{d}{dy}(y^3x^2 - x^3y^2) = 3y^2x^2 - 2x^3y = (3yx - 2x^2)xy$.

1º) b) Obsérvese que la superficie que nos dan es la superficie de una esfera, de centro en el origen de coordenadas y radio 1.

Las líneas de máxima pendiente deben ser ortogonales a las curvas de nivel. Si $z = c$ (constante), entonces una curva de nivel vendría dada por la circunferencial horizontal

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ z = c \end{array}\right\} \text{; o lo que es lo mismo, } \left.\begin{array}{c} x^2+y^2+c^2 = 1 \\ z = c \end{array}\right\}.$$

(Debe ser $1 - c^2 \geq 0$; si fuera $1 - c^2 = 0$, entonces la circunferencia se reduciría al punto $(0,0,1)$, o bien al punto $(0,0,-1)$).

La proyección de esta curva de nivel sobre el eje horizontal sería la curva $x^2 + y^2 = 1 - c^2$.

Debe ser pues $2x + 2yy' = 0 \Leftrightarrow x + yy' = 0$.

Puesto que una línea de máxima pendiente debe ser ortogonal a esa curva, la proyección de esta línea debería cumplir que $y - xy' = 0 \Leftrightarrow y = xy'$.

Un sencillo cálculo muestra que $y = kx$, siendo k cualquier constante.

Así pues, las líneas de máxima pendiente (de la superficie dada) son

$$\left.\begin{array}{c} y = kx \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{array}\right\} \text{, siendo } k \text{ una constante.}$$

Es fácil ver que estas líneas son circunferencias contenidas en planos "verticales" (perpendiculares al plano horizontal $z = 0$).

2º) Consideramos la ecuación $(y')^2 - yy' + e^x = 0$.

Siguiendo la sugerencia, hacemos el cambio de variable $e^x = t$.

Se tiene entonces que $t > 0$, $x = \log t$.

Además, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^x = t\frac{dy}{dt}$.

Si ponemos $u = y(x(t)) = y(t)$, la ecuación se transforma en $t^2(u')^2 - tuu' + t = 0$.

Puesto que $t \neq 0$, obtenemos que $t(u')^2 - uu' + 1 = 0$. (I)

Derivando con respecto a t (obsérvese que al hacerlo podemos añadir soluciones), tenemos que

$(u')^2 + 2tu'u'' - (u')^2 - uu'' = u''(2tu' - u) = 0$.

Si $u'' = 0$ (en un conjunto abierto), entonces $u' = a$ (constante), y $u = at + b = ae^x + b$.

Sustituyendo en la ecuación (I),

$0 = t(u')^2 - uu' + 1 = ta^2 - a^2t - ab + 1 = -ab + 1 \Leftrightarrow ab = 1$.

Por tanto, debe ser $a \neq 0$, $y = ae^x + \frac{1}{a}$.

Es inmediato comprobar que, en efecto, para cualquier número $a \neq 0$, si ponemos $y = ae^x + \frac{1}{a}$

se verifica que $(y')^2 - yy' + e^x = a^2e^{2x} - a^2e^{2x} - \frac{1}{a}(ae^x) + e^x = 0$.

Si existe un punto en el que $u'' \neq 0$, entonces, suponiendo que u'' es continua, debe ser $u'' = 0$ en un abierto (en un etorno abierto del punto en cuestión): Así pues, en ese conjunto abierto, $2tu' - u = 0 \Leftrightarrow 2tu' = u$. Puesto que $t > 0$, tenemos que $u' = \frac{u}{2t}$.

Ahora bien, $u \neq 0$; pues si en algún punto fuera $u = 0$, entonces, sustituyendo en (I), se tendría que $t(u')^2 = -1$, lo cual es una contradicción porque $t > 0$.

Tenemos pues que debe ser $\frac{u'}{u} = \frac{1}{2t}$, siendo $t > 0$; luego $\log|u| = c + \log\sqrt{t}$, siendo c una constante;

y $u = k\sqrt{t}$, con $k = \pm e^c \neq 0$. Por tanto, $y = k\sqrt{e^x} = ke^{\frac{x}{2}}$, siendo $k \neq 0$.

Sustituyendo en la ecuación inicial, se tiene que

$0 = (y')^2 - yy' + e^x = \frac{k^2}{4}e^x - \frac{k^2}{2}e^x + e^x = (1 - \frac{k^2}{4})e^x$,

lo cual es cierto si y sólo si $k = 2$ o $k = -2$.

Así pues, las soluciones son las funciones

$\boxed{y = ae^x + \frac{1}{a} \text{ (siendo } a \text{ cualquier número real distinto de cero)}, y = 2e^{\frac{x}{2}},\ y = -2e^{\frac{x}{2}}}$;

y nótese que todas estas funciones están definidas en toda la recta real $\mathbb{R}$.

3º) Si en un intervalo abierto J la derivada y' es idénticamente nula, entonces la función y es constante en ese intervalo, y la normal a la gráfica en cada punto es vertical. Es inmediato comprobar que entonces debe ser $y = 3$ o $y = -3$, en el intervalo considerado.

Si y es constante en J, $2 \in J$ y $f(2) = 3$, entonces debe ser $y = 3$. Es inmediato comprobar que la función constante $y = 3$, definida en toda la recta real $I = \mathbb{R}$, satisface las condiciones requeridas.

Si $y' \neq 0$ en un punto, y suponemos que y' es continua, entonces debe ser $y' \neq 0$ en un entorno de ese punto.

En un punto (x,y) de la gráfica de f, con $y' \neq 0$, la ecuación de la normal a la gráfica viene dada por

$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$.

Esta normal corta al eje horizontal $y = 0$ en el punto $(x + yy', 0)$.

La distancia entre los dos puntos (x,y) y $(x + yy', 0)$ es $\sqrt{(yy')^2 + y^2} = |y|\sqrt{1 + (y')^2}$.

Debe ser pues $|y|\sqrt{1 + (y')^2} = 3$. Luego $y \neq 0$. Ya que I es un intervalo, y la función y es continua y no se anula en I, debe ser $y > 0$ o $y < 0$ en todo el intervalo. Y puesto que $f(2) = 3 > 0$, debe ser $y > 0$ en todo el intervalo I.

Tenemos pues que

$y\sqrt{1 + (y')^2} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{3}{y} \Rightarrow 1 + (y')^2 = \frac{9}{y^2} \Leftrightarrow (y')^2 = \frac{9}{y^2} - 1 = \frac{9-y^2}{y^2}$.

Puesto que $y' \neq 0$, debe ser $9 - y^2 > 0 \Leftrightarrow |y| < 3$. Además, ya que $y > 0$,

$y' = \frac{\sqrt{9-y^2}}{y} \Leftrightarrow yy' = \sqrt{9 - y^2}$.

Teniendo en cuenta que $9 - y^2 > 0$, obtenemos que $\frac{yy'}{\sqrt{9-y^2}} = 1$. Integrando,

$-\sqrt{9 - y^2} = x + A$, siendo A una constante.

Puesto que $2 \in I$ y $f(2) = 3$, debe ser $0 = 2 + A$, luego $A = -2$.

Así pues, $9 - y^2 = (x-2)^2 \Leftrightarrow y^2 = 9 - (x-2)^2 = 5 + 4x - x^2$.

Y se tiene, puesto que $f(2) = 3$, que $y = \sqrt{9 - (x-2)^2} = \sqrt{5 + 4x - x^2}$, función definida y derivable para

$9 - (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow 9 > (x-2)^2 \Leftrightarrow |x - 2| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 2 < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (-1, 5)$.

Así pues, las soluciones, tal como resulta inmediato comprobar, son:

– La función constante $y = 3$, definida en $I = \mathbb{R}$.

– La función $y = \sqrt{9 - (x-2)^2} = \sqrt{5 + 4x - x^2}$, definida en $I = (-1, 5)$.

4º) Consideramos la ecuación $y'' + y - 2\cos x = 0$; sabemos que $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

La ecuación homogénea asociada es $y'' + y = 0$.

Esta ecuación puede resolverse directamente. Por ejemplo, poniendo $y'' = y'\frac{dy'}{dy}$, se tiene que $y'\frac{dy'}{dy} = -y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dy}((y')^2) = -y \Leftrightarrow \frac{d}{dy}((y')^2) = -2y$,

luego $(y')^2 = -y^2 + K \Leftrightarrow y' = \pm\sqrt{K - y^2}$, siendo K una constante (nótese que debe ser $K \geq 0$, y de hecho $K > 0$ si suponemos que la función y no es idénticamente nula). En este caso ($y \neq 0$), debe ser también $y'' \neq 0$, y por tanto la función $y' = \pm\sqrt{K - y^2}$ no puede ser idénticamente nula, luego ha de ser distinta de cero en algún punto, y por continunidad debe ser distinta de cero en un entorno abierto de ese punto. Suponiendo $\sqrt{K - y^2} \neq 0$ (en un abierto), se tiene que

$\frac{y'}{\pm\sqrt{K-y^2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{K}}\frac{y'}{\sqrt{1-(\frac{y}{\sqrt{K}})^2}} = \pm 1$, luego $arcsen(\frac{y}{\sqrt{K}}) = \pm x + C$ (siendo C una constante), y por tanto $\frac{y}{\sqrt{K}} = sen(x + D)$ (con $D = C$ o $D = C + \pi$),

luego poniendo $E = \sqrt{K}$ se tiene que
$y = Esen(x + D) = E\cos Dsenx + EsenD\cos x = Asenx + B\cos x$, siendo $A = E\cos D$, $B = EsenD$ constantes.

Nótese que estas constantes no se anulan a la vez (pues $E = \sqrt{K} \neq 0$), puesto que hemos supuesto que y no es idénticamente nula, pero la función constante $y = 0$ también es solución de la ecuación homogénea; por lo que de hecho la solución general es
$y = Asenx + B\cos x$, siendo A y B constantes arbitrarias, como también se comprueba directamente).

Es más corto resolver la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ viendo que la ecuación característica asociada es $r^2 + 1 = 0$, que tiene las soluciones complejas $y_1 = i$, $y_2 = -i$; y por tanto, aplicando lo demostrado en el Tomo II (Unidad 4) del libro, la solución general (real) de la ecuación homogénea es $y = Asenx + B\cos x$, siendo A y B constantes cualesquiera. (Coincide con lo anterior, claro).

(De hecho, esta misma ecuación homogénea está resuelta en el libro, es la primera parte del ejercicio 13 del Tema IV del Tomo II, Unidad Didáctica 4, pág. 83.)

Calculemos ahora una solución particular de la ecuación inicial. Aplicando el método de variación de parámetros, ponemos $y = A(x)senx + B(x)\cos x$, siendo $A(x)$ y $B(x)$ funciones dos veces derivables. Una forma de buscar una solución particular sería sustituir directamente en la ecuación inicial, con lo que tendríamos que
$A''(x)senx + B''(x)\cos x + 2A'(x)\cos x - 2B'(x)senx = 2\cos x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (A''(x) - 2B'(x))senx + (B''(x) + 2A'(x) - 2)\cos x = 0$.

Si ponemos $B(x) = 0$ para todo x, nos queda $A''(x)senx + (2A'(x) - 2)\cos x = 0$. Es inmediato comprobar que una solución es $A'(x) = 1$ para todo x; con lo cual, poniendo $A(x) = x$, obtenemos que $y_0(x) = xsenx$ es una solución particular de la ecuación dada.

Esto mismo también puede obtenerse, y es más rápido, de la forma indicada en el libro (Tomo II, página 98, Nota 2), que por otro lado es fácil de comprobar, poniendo $y_0 = axsenx + bx\cos x$, y sustituyendo en la ecuación inicial, con lo que nos quedaría $-2bsenx + (2a - 2)\cos x = 0$, para todo x; lo que se verifica si y sólo si $b = 0$, $a = 1$. Así pues, $y_0(x) = xsenx$.

Otra forma de obtener una solución particular, tal como se indica en la Unidad 4 (Tema II) del libro, es pedir que ser verifique, para todo x, que

$$\left.\begin{array}{r} A'(x)senx + B'(x)\cos x = 0 \\ A'(x)\cos x - B'(x)senx = 2\cos x \end{array}\right\}$$

Puesto que $\begin{vmatrix} senx & \cos x \\ \cos x & -senx \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, el sistema anterior tiene solución única, y es inmediato calcular que es $A'(x) = 2\cos^2 x = 2\cos^2 x - 1 + 1 = 1 + \cos(2x)$, $B'(x) = -2senx\cos x = -sen(2x)$.

Por tanto, una solución particular sería, poniendo $A(x) = x + \frac{1}{2}sen(2x)$, $B(x) = \frac{1}{2}\cos(2x)$, la función $y_0(x) = (x + \frac{1}{2}sen(2x))senx + (\frac{1}{2}\cos(2x))\cos x$.

Nótese que $\frac{1}{2}sen(2x)senx + \frac{1}{2}\cos(2x)\cos x = sen^2x\cos x + \frac{1}{2}\cos x - sen^2x\cos x = \frac{1}{2}$.

Luego esta solución particular sería $y_I(x) = xsenx + \frac{1}{2}\cos x$.

Puesto que $y = \frac{1}{2}\cos x$ es solución de la ecuación homogénea, otra solución particular sería $y_0(x) = xsenx$, que es la misma que hemos obtenido antes.

Por tanto, la solución general sería $y = (x + A)senx + B\cos x$, siendo A y B constantes, como por otra parte es fácil comprobar.

Puesto que debe ser $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, tenemos que $B = 0, A = 1$.

Así pues, la solución pedida es $\boxed{y = (x + 1)senx}$.