Examen Álgebra, Mayo 2020:

① en $\mathbb{Z}$, resolver $5X+36Y=1$. (se puede pues $mcd(5,36)=1$).

Algoritmo Euclides

$36 = 5\cdot 7+1 \longrightarrow 1 = 5\cdot(-7)+36\cdot 1$, así $\boxed{X=-7,\ Y=1}$ es una solución particular.

Veamos las soluciones generales de

$$5X+36Y=0,$$

ha de ser $36Y=-5X \Rightarrow 36Y\equiv 0 \bmod 5 \Rightarrow Y\equiv 0 \bmod 5$

$\Rightarrow Y=5k$ para algún $k\in\mathbb{Z}$. Así, es

$$5X+36(5k)=0 \Rightarrow X+36k=0 \Rightarrow X=-36k.$$

solución homogénea: $X=-36k,\ Y=5k$.

Solución buscada: $\begin{cases} X=-7-36k \\ Y=1+5k \end{cases}$

Por cambio de variable:

$$5X+36Y=1 \Leftrightarrow 5(X+7Y)+Y=1,$$

haciendo $X+7Y=m$, es $5m+Y=1$, de donde

$Y=1-5m$, y sustituyendo:

$$5X+36Y=1 \Leftrightarrow 5X+36(1-5m)=1 \Leftrightarrow 5X+36-180m=1$$

$\Leftrightarrow 5X=-35+180m \Leftrightarrow X=-7+36m$, solución:

$$\begin{cases} X=-7+36m \\ Y=1-5m \end{cases},\ m\in\mathbb{Z}. \blacksquare$$

Escaneado con CamScanner

② Resto de 2020^{2020} entre 19.

$2020 = 19\cdot 106 + 6$, así que es $2020^{2020} = (2020^{19})^{106}\cdot 2020^{6}$,

y por el Pequeño Teorema de Fermat, es

$$2020^{19} \equiv 2020 \bmod 19,$$ así

$$(2020^{19})^{106} \equiv 2020^{106} \bmod 19 \Rightarrow 2020^{2020} \equiv 2020^{112} \bmod 19,$$

y como $112 = 19\cdot 5 + 17$, es

$$2020^{112} = (2020^{19})^{5}\cdot 2020^{17} \equiv 2020^{5}\cdot 2020^{17} \equiv 2020^{22} \bmod 19 \equiv$$

$$\equiv 2020^{19}\cdot 2020^{3} \equiv 2020 \cdot 2020^{3} \bmod 19 \equiv 2020^{4} \bmod 19,$$

y como $2020 = 19\cdot 106 + 6$, es $2020 \equiv 6 \bmod 19$ y

por tanto $2020^{4} \equiv 6^{4} \bmod 19$. Como $6^{2} = 36 \equiv 17 \bmod 19$,

es $6^{4} \equiv 17^{2} \bmod 19 \equiv 4 \bmod 19$.

El resto es 4. ■

③ Estudiar si $f(T) = T^4+36$ es irreducible en $\mathbb{Z}[T]$.

Como $T^4 \geq 0$, $T^4+36 > 0$ para cualquier valor de T, así f no tiene raíces $\Rightarrow$ no tiene factores lineales.

Sean $g, h \in \mathbb{Z}[T]$ tales que $gh = f$, entonces son de la forma: (con $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$)

$$f = (T^2+aT+b)(T^2+cT+d) = T^4+(a+c)T^3+(b+d+ac)T^2+(ad+bc)T+bd.$$

Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} a+c = 0 \longrightarrow a=-c \\ b+d+ac=0 \\ ad+bc=0 \\ bd=36 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} b+d-c^2=0 \\ c(b-d)=0 \longrightarrow \text{si } c=0 \text{ es } \begin{cases} b+d=0 \\ bd=36 \end{cases}, \text{ imposible!} \\ bd=36 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{si } b-d=0}$ es $b=d$ y queda: $\begin{cases} 2b-c^2=0 \longrightarrow c^2=2b=\pm 12, \text{ imposible pues } c\in\mathbb{Z}. \\ b^2=36 \longrightarrow b=\pm 6 \end{cases}$

Así, es imposible que f tenga factores en $\mathbb{Z}[T]$, es irreducible. ■

(4) Sea $u = \sqrt{-1+v}$, siendo $v = \sqrt{2}$

(a) Determine el Polinomio Mínimo de u sobre $\mathbb{Q}$.

$u^2 = -1 + \sqrt{2} \to u^2 + 1 = \sqrt{2} \to (u^2+1)^2 = 2 \to$

$\to u^4 + 2u^2 + 1 - 2 = 0 \to u^4 + 2u^2 - 1 = 0$,

así $f(T) = T^4 + 2T^2 - 1 \in \mathbb{Q}[T]$ verifica $f(u) = 0$.

Veamos que es irreducible:

Como $f(\pm 1) = 2 \neq 0$, no tiene raíces en $\mathbb{Z}$ y por tanto tampoco en $\mathbb{Q}$. Sean $g, h \in \mathbb{Z}[T]$ tales que $f = gh$, entonces

$(T^2 + aT + b)(T^2 + cT + d) = T^4 + (a+c)T^3 + (b+d+ac)T^2 + (ad+bc)T + bd$

y tenemos el sistema en $\mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ b+d+ac = 2 \\ ad+bc = 0 \\ bd = -1 \end{cases}$$

Caso 1: $b = 1, d = -1$,

$$\begin{cases} a+c = 0 \to 2a = 0 \to a = c = 0 \\ ac = 2 \longrightarrow 0 = 2, \text{ ¡imposible!} \\ c-a = 0 \to a = c \end{cases}$$

Caso 2: $b = -1, d = 1$,

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ ac = 2 \longrightarrow 0 = 2, \text{ ¡imposible!} \\ a-c = 0 \end{cases}$$

Como f es irreducible en $\mathbb{Z}[T]$ y $c(f) = 1$, entonces f es irreducible en $\mathbb{Q}[T]$. Así, al ser mónico, es $f = P(u, \mathbb{Q})$.

(b) Determinar si $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$ es de Galois.

Como es $[\mathbb{Q}(u):\mathbb{Q}] = \partial f = 4$, tenemos que ver si las 4 raíces de f están en $\mathbb{Q}(u)$.

Resolvamos $T^4 + 2T^2 - 1 = 0$. Cambio de variable $X = T^2$

$$X^2 + 2T - 1 = 0 \longrightarrow X = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2},$$

Así $T = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{2}}$, son

$$u = \sqrt{-1+\sqrt{2}}, \quad -u = -\sqrt{-1+\sqrt{2}}, \quad w_1 = \sqrt{-1-\sqrt{2}} \text{ y } w_2 = -\sqrt{-1-\sqrt{2}},$$

Como $-1-\sqrt{2} < 0$, es $w_1, w_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, así que $w_1, w_2 \notin \mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u,-u)$. Por lo tanto $\mathbb{Q}(u)/\mathbb{Q}$ no es de Galois. ∎