(1) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de Georg Cantor apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia

(2) Explique de qué modo se originan las ideas de Cantor sobre el infinito en el estudio de las series trigonométricas

Respuesta: (ninguna)

(3) Explique el concepto cantoriano de potencia (numerosidad) y los distintos tipos de infinito que permite distinguir

(4) Según Torretti, ¿qué dos vías confluyeron en la formación del concepto de transfinito?

Respuesta: Lo que hemos visto esta semana es cómo se replantea los conceptos de cardinalidad y ordinalidad, sobre los que hasta entonces pivotaba el concepto de número. El curso pasado tenía a un estudiante con una prodigiosa capacidad de síntesis (Pedro Pablo Rivas) cuya respuesta os copio a continuación para ilustrarlo.

Las dos vías son las que conducen a los cardinales transfinitos y a los ordinales transfinitos. Los números cardinales son las potencias de los conjuntos concebidas como lo común de todos los conjuntos cuando se consideran equivalentes por biyecciones. Cantor demostró que el cardinal de **N** es menor que el de **R**. Una forma de verlo es el método diagonal, por el que se puede construir una secuencia de dígitos que es diferente de todas las contenidas en una secuencia de secuencias. Entonces **R** no es un conjunto numerable, ya que cualquier número real del intervalo (0,1) se puede codificar como una secuencia de ceros y unos. Por otro lado, una secuencia de ceros y unos también codifica un subconjunto de **N**, por lo tanto **R** es equivalente a P(**N**), el conjunto de las partes o subconjuntos de **N**. El argumento diagonal se puede generalizar, demostrando que todo conjunto K es menos potente que P(K). Por tanto, existe una sucesión de conjuntos de potencia creciente: **N**, **R**=P(**N**), P(**R**), P(P(**R**)), … La hipótesis del continuo generalizada conjetura que no hay cardinales intermedios entre K y P(K), pero Cantor no pudo demostrarla.

Por otro lado, los números ordinales transfinitos son una extensión de la sucesión ordenada de los enteros que, como vimos en la segunda cuestión, surgieron como índices que ordenan las sucesiones de conjuntos derivados. El principio de que cada número tiene un sucesor genera los ordinales finitos 1,2,3,…Cantor añade un segundo principio, que cada sucesión de ordinales sin un último elemento tiene un sucesor límite con la propiedad de que es el menor de sus sucesores. Mediante esta regla se genera el primer ordinal transfinito ω. Otra vez la primera regla genera ω+1, ω+2, ω+3,…. Volviendo a la segunda regla se obtiene otro ordinal que se denota 2ω. Combinando así los dos principios se van generando 3ω, 4ω, …. nω,…. Si se aplica la segunda regla a todos los ordinales que tenemos hasta ahora, obtenemos uno nuevo, que es natural llamar ω^2. Análogamente se llega a ω^n, ω ^ω, etc. A pesar de esta proliferación de infinitos, cualquiera de ellos ordena solo un conjunto numerable. En este hecho vemos una diferencia esencial entre números ordinales y cardinales que no se reconoce en el caso finito. Para generalizar los ordinales de modo que puedan enumerar cualquier conjunto infinito, Cantor postula que cualquier conjunto admite una buena ordenación, es decir una relación de orden lineal en el que cualquier subconjunto tiene un primer elemento. No puede probar este principio, hoy conocido como teorema del buen orden, aunque parece más aceptable intuitivamente que la hipótesis del continuo, y Cantor lo asume como una ley del pensamiento.

En resumidas cuentas, al tratar con el infinito, Cantor se ve obligado a refinar los conceptos de ordinalidad y cardinalidad, y a plantearse cómo casar con nuestras intuiciones básicas sobre ambas nociones las situaciones aparentemente paradójicas que plantea la aritmética transfinita (la hipótesis del continuo). En las próximas semanas, profundizaremos en las consecuencias de este giro cantoriano

(5) ¿Por qué el teorema del buen orden es central para el programa de Cantor?

(6) ¿Por qué los cardinales transfinitos son distintos de los ordinales?

Respuesta: Muchas gracias de nuevo por vuestra participación. Una semana más tengo que felicitaros, porque vuestras respuestas son buenas.

Quizá un elemento que eché en falta en vuestras contestaciones es una reflexión algo más general sobre lo que Cantor se traía entre manos al formular el teorema del buen orden: al poder comparar cualquier conjunto, con independencia de su cardinalidad, Cantor pudo definir las operaciones aritméticas básicas (suma, multiplicación) en número finitos y transfinitos. Justificaba así la denominación de números para sus transfinitos: aun cuando tuviesen características insólitas (la disociación de cardinalidad y ordinalidad), podíamos hacer con ellos las mismas cosas que con cualquier otro número. Esta definición está implícita en este pasaje de su correspondencia con Kronecker en 1884 (cuya traducción inglesa tomo de Ferreiros, Labyrinth of Thought, p. 277; está también en castellano en la edición de escritos de Cantor publicada por Ferreiros, que no tengo ahora a mano):

"I depart fom the concept of a "well-ordered set" and call well-ordered sets of the same type (or the same [ordinal] number) those which can be related to each other in a reciprocally univocal way, preserving the rank-order in both sides, and now I understand by a number he sign of the concept for a certain type of well-ordered sets. By limiting oneself to the finite sets, one obtains in this way the finite integers. But if one goes on to overview oall of the types of well-ordered sets of the first power, one necessarily arrives at the transfinite nubers of the second number-class, and through these to the second power"

(traducción): "Parto del concepto de un "conjunto bien ordenado", y llamo conjunto bien ordenados del mismo tipo (o mismo ordinal) a aquellos que es posible correlacionar entre si univoca y recíprocamente, representando la jerarquía de rango por ambas partes; y ahora entiendo por número el signo o el concepto para un tipo concreto de conjunto bien ordenado. Si nos limitamos a los conjuntos finitos, obtendremos de esa manera los números enteros finitos. Mas si pasamos a tener en cuenta la totalidad de los tipos de conjuntos bien ordenados de la primera potencia, nos vemos conducidos necesariamente a los números transfinitos de la segunda clase numérica, y por su mediación a la segunda potencia[1]"

El número es el signo de un concepto, un tipo de conjunto bien ordenado: Cantor salta aquí de la que fue su concepción original de número, cardinales que miden cantidades, primordialmente los números naturales, a una concepción abstracta (anti-intuitiva en la época) en la que los números serían ordinales, índices que señalan a una posición en una serie, de modo tal que bajo un mismo concepto de número se puedan subsumir finitos y transfinitos. De ahí la osadía de justificar el teorema del buen orden como si fuese una ley del pensamiento, pues la mayor parte de sus contemporáneos no pensaban así. No obstante, como veremos más tarde con Frege y ya antes con Boole, apelar a las leyes del pensamiento se consagraría como vía regia para fundamentar la matemática en la lógica.

(7) ¿Qué es la hipótesis del continuo y cómo afecta al programa de Cantor?

(8) ¿Por qué no toda "pluralidad bien definida" sería un conjunto en el sentido de Cantor?

Respuesta: Todos habéis expuesto razonablemente bien en qué consiste la Hipótesis del continuo, pero no todos os habéis detenido por igual es sus consecuencias para el programa de Cantor. El problema de fondo es que no sabemos la verdadera cantidad de elementos del continuo, o conjunto de los reales. Por lo tanto, no está claro que sea un conjunto bien definido ni que sea posible ordenarlo según su numerosidad.

Es decir, tenemos por un lado en juego la propia definición del concepto de conjunto, pues si el conjunto de los reales no tuviera un cardinal, el programa de **Cantor** quedaría en entredicho (¿podría establecerse la aritmética transfinita con semejante excepción?). Por otro lado, apelando a los resultados posteriores de **Cohen**, dependiendo de si incorporamos o no la hipótesis del continuo, la teoría de conjuntos se interpretará de distinto modo (no es necesario entrar aquí, pues excede el programa del curso).

Respecto a la segunda pregunta, hay varios puntos de interés.

De nuevo la propia definición de conjunto: una vía que explorarán Frege y Russell es la de definir los conjuntos como si fueran conceptos, entidades semánticas que contribuyen, por ejemplo, a decidir si una proposición es verdadera o falsa (además de lógicos, ambos autores fueron filósofos del lenguaje). De ahí, la dificultad de las paradojas - Burali-Forti, etc: delatan la existencia de conjuntos que apelan a conceptos mal definidos. Como algunos de vosotros apuntáis, Cantor no suponía la equivalencia entre conjunto y concepto. De ahí que no tuviera dificultad en aceptar pluralidades inconsistentes, aunque denominase conjunto sólo a aquellas que sean consistentes.

Como apuntaba uno de mis estudiantes el pasado curso, las ambiciones teológicas de Cantor están implícitas en esta posición:

"Para [**Cantor**], los transfinitos no son meros conceptos, sino que existen como entidades que trascienden las mentes humanas, y de las que las teorías matemáticas son modelos. Otras ciencias podrían investigar los conjuntos como entes naturales, o bien puede haber propiedades de los conjuntos vedadas al intelecto humano (quizá la hipótesis del continuo) pero que estarían presentes a los ojos de Dios. Si hace un momento la coherencia lógica exigía la restricción de los conjuntos respecto a las clases, ahora la trascendencia de los conjuntos extiende su realidad más allá de las clases definidas mediante conceptos. Además, la consistencia de los conjuntos ya no es una simple regla de un juego formal, sino que debe suponerse a priori en tanto estructura de algo que existe objetiva e independientemente."

Es decir, **Cantor** sería un realista acerca de la existencia de los conjuntos. En estas próximas semanas veremos algunas posiciones alternativas

(9) Explique la controversia entre Poincaré y Zermelo a propósito del axioma de selección

(10) ¿Por qué se hizo necesario definir axiomáticamente la teoría de conjuntos?

Respuesta: Una semana más felicitaciones por las estupendas respuestas, aunque de nuevo disculpas por retrasarme. Esta es mi última semana en México y está siendo acelerada.

Así que, a modo de contexto, os copio unos párrafos muy oportunos de la Wikipedia:

"a. Hasta finales del siglo XIX, **el axioma de elección se usaba casi siempre implícitamente**.

b. **No siempre se requiere el axioma de elección**. Si X es finito, el "axioma" necesario se deduce de los otros axiomas de la teoría de conjuntos.

c. **La dificultad aparece cuando no hay una elección natural de elementos de cada conjunto.** Si no se pueden hacer elecciones explícitas, ¿cómo saber que existe el conjunto deseado? Por ejemplo, supóngase que X es el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de los reales. Primero se podría intentar proceder como si X fuera finito; pero si se intenta escoger un elemento de cada conjunto, como X es infinito, el procedimiento de elección no terminará nunca y nunca se podrá producir una función de elección para X. Luego se puede intentar el truco de tomar el elemento mínimo de cada conjunto; pero algunos subconjuntos de los reales, como el intervalo abierto (0,1), no tienen mínimo, así que esta táctica no funciona tampoco.

d. La razón por la que se podían escoger elementos mínimos de los subconjuntos de los naturales es que éstos vienen ya bien ordenados: todo subconjunto de los naturales tiene un único elemento mínimo respecto al orden natural. Tal vez a este punto uno se sienta tentado a pensar: "aunque el orden usual de los números reales no funciona, debe ser posible encontrar un orden diferente que sea, este sí, un buen orden; entonces la función de elección puede ser tomar el elemento mínimo de cada conjunto respecto al nuevo orden". El problema entonces se "reduce" al de encontrar un buen orden en los reales, lo que requiere del axioma de elección para su realización: **todo conjunto puede ser bienordenado si y sólo si vale el axioma de elección.**

e. **Una demostración que haga uso del axioma de elección nunca es constructiva: aun si dicha demostración produce un objeto, será imposible determinar exactamente qué objeto es.** En consecuencia, aunque el axioma de elección implica que hay un buen orden en los reales, no da un ejemplo. Sin embargo, la razón por la que se querían bienordenar los reales era que para cada conjunto de X se pudiera escoger explícitamente un elemento; pero si no se puede determinar el buen orden usado, tal escogencia no es tampoco explícita. Esta es una de las razones por las que a algunos matemáticos les desagrada el axioma de elección; los constructivistas, por ejemplo, afirman que todas las pruebas de existencia deberían ser

> completamente explícitas, pues si existe algo, debe ser posible hallarlo; rechazan así el axioma de elección, pues afirma la existencia de un objeto sin decir qué es. Por otro lado, el solo hecho de que se haya usado el axioma de elección para demostrar la existencia de un conjunto no significa que no pueda ser construido por otros métodos.″

La oposición entre matemática abstracta y constructiva a la que alude Torretti queda bien clara en los párrafos anteriores. El axioma de elección afirma que, dados ciertos conjuntos, existe otro que no podemos definir explícitamente. Pues ¿cómo elegir el elemento particular de aquellos que habría de definir este segundo? De fondo estaba, por supuesto, el problema de ordenar el conjunto de los reales (el continuo cantoriano) y la posibilidad, que veíamos en semanas anteriores, de construir una aritmética transfinita. La matemática abstracta apela a leyes del pensamiento como justificación última del axioma de elección. La constructiva niega que nuestro pensamiento funcione así: sólo podemos entender aquello que podemos realmente hacer. Este es el transfondo de las objeciones de Poincaré.

Parte II | Cálculos

(11) Haga una breve semblanza (1000 palabras) de David Hilbert apoyándose en materiales que encuentre en la red –e incluya la referencia

(12) Explique la importancia de los conceptos de *consistencia*, *punto de vista finito* y *razonamiento sustantivo* en el programa de Hilbert

Respuesta: Muchos de vosotros habéis incluido el epitafio de Hilbert en vuestra respuesta ("wir müssen wissen, wir werden wissen": "debemos conocer, conoceremos"), pero muy pocos lo habéis explicado. E. Du Bois-Reymond fue un científico que pronunció a mediados del XIX unas famosas conferencias sobre los límites de nuestro conocimiento de la naturaleza. Asumiendo una perspectiva naturalista, se planteaba si la ciencia podía llegar a agotar nuestro conocimiento de la realidad. Y sostenía que sí: por ejemplo, a propósito del problema mente-cuerpo. Hilbert sostuvo, en cambio, que en matemáticas no cabía un ignorabimus y de ahí la ambición tanto de su famosa lista de problemas como de su programa metamatemático. De ahí también, como veremos, el golpe que supuso el resultado de Gödel para este ideal de certidumbre matemática.

De entre vuestras respuestas a la segunda pregunta, os copio aquí la de un alumno del curso pasado que capta el espíritu filosófico del programa de Hilbert -en los puntos que destaco yo en negrita.

El programa de Hilbert pretendía dar una solución a la crisis de los fundamentos de las matemáticas producida por las paradojas de los enfoques conjuntistas, mediante su axiomatización y su formalización simbólica. Los objetos matemáticos, y concretamente los conjuntos numéricos infinitos como los números reales, que siven de base de toda la matemática, quedarían definidos por el cumplimiento de un sistema de axiomas, **haciendo abstracción de cualquier significado o referencia a objetos ideales, que tenían en la concepción original de Cantor**. Por otro lado, las proposiciones sobre conjuntos se expresarían en el lenguaje lógico formalizado desarrollado por Frege, Russell y Whitehead, y su prueba consistiría en su derivación de los axiomas mediante unas reglas de manipulación de símbolos. **El objetivo era independizar las matemáticas del pensamiento humano, objetivándolas en un juego de signos que se operan mecánicamente, y que supuestamente estaría libre de paradojas y críticas por tratarse de un sistema finito de signos y operaciones.** Todo lo que restaría por hacer es probar que el sistema es consistente, es decir, que es imposible deducir del mismo proposiciones contradictorias. Esto sería suficiente para fundamentar las matemáticas, ya que **para Hilbert un objeto matemático, por ejemplo un conjunto infinito, existe si se puede modelizar en un sistema de axiomas sin contradicciones**. Los intuicionistas no estarán de acuerdo en que la consistencia es lo mismo que la existencia, pero aquí hay ya una discrepancia filosófica básica que probablemente no se puede resolver sin salir del terreno de la matemática. El programa de Hilbert suponía dividir las matemáticas en dos niveles, la matemática formalizada ya mencionada, y una metamatemática o teoría de la prueba, encargada de demostrar la consistencia de la primera. En los sistemas axiomáticos el pensamiento se elimina, sustituido por un tipo de inferencia formal, pero en la metamatemática permanece el razonamiento matemático intuitivo tradicional, que Hilbert llama razonamiento sustantivo, ya que tiene sustancia o contenido, semántico y cognitivo, por contraposición al razonamiento formal. El programa no tendría sentido si en este nivel se reproducen las paradojas y dudas surgidas por una forma de pensamiento intuitiva, y para evitar las cuales se ha procedido a la formalización de la matemática clásica, por ello Hilbert prescribe para la teoría de la prueba adoptar un punto de vista finito. La postura finita significa limitarse a usar conjuntos finitos, o a lo sumo infinitos potenciales, y demostraciones constructivas, es decir, únicamente métodos aceptables para los críticos intuicionistas, de modo que la metamatemática supuestamente estaría libre de sospechas de inconsistencia, a pesar de usar un razonamiento sustantivo.

Es decir, hemos pasado del platonismo cantoriano, en el que los transfinitos existen ante los ojos de Dios a un criterio de existencia matemática puramente formal (la consistencia) basado en una concepción de la demostración matemática potencialmente universal (finitismo). Desde estas bases pretendía Hilbert que progresase el conocimiento matemático sin ignorabimus.

(13) Explique cuál era el proyecto de Gottlob Frege y en qué sentido su definición de número introdujo una contradicción que lo arruinaría

(14) Explique las paradojas de Cantor y Burali-Forti y en qué sentido afectaban al concepto cantoriano de transfinito. Explique también en qué sentido la teoría russelliana de los tipos proporcionaba una solución y a qué coste.

Respuesta: * Hasta ahora veíamos distintas posiciones respecto a la existencia de objetos matemáticos: Cantor asumía la existencia de los transfinitos "ante los ojos de Dios"; Hilbert definía la existencia como no contradicción conceptual. Cantor adoptaba un criterio de existencia extensional: los conjuntos se pueden definir señalando sus miembros ("este, ese, aquel..."). Hilbert optaba por uno intensional: sabemos que algo existe a partir del análisis de su definición, aun cuando no podamos señalarlo (tal como ocurría con los objetos denotados por el Axioma de Elección). Frege fusiona explícitamente ambas posturas, privilegiando la intensional: define los conjuntos como conceptos dotados de referencia. Como habéis visto con el caso de los números, Frege los define intensionalmente a partir de la correspondencia entre conjuntos, desde el supuesto de que refieren extensionalmente a un solo objeto. Un único objeto corresponde a todos los conceptos que se aplican a él.

* Frege introduce estas distinciones dentro de un proyecto más ambicioso de fundamentación de la matemática a partir de la lógica. La lógica sería para Frege un lenguaje formal pero, a diferencia de la tradición aristotélica, en este lenguajes las proposiciones no se analizarían según la distinción gramatical entre sujeto y predicado, sino en términos matemáticos: función y variable. Como algunos de vosotros habéis apuntado, se trata de evitar las ambigüedades del lenguaje natural al formular los conceptos fundacionales en matemática (número, conjunto...)

* Pero las paradojas que surgieron de este proyecto supusieron, en última instancia, la separación de lógica y matemáticas: los conjuntos no podrían definirse como conceptos sin incurrir en ellas. La teoría de los tipos de Russell mostró los costes de adoptar un punto de vista intensional riguroso (los objetos se multiplicaban, uno por tipo).

* Algunos de vosotros os habéis hecho eco de las críticas de Torretti a Frege: no dejéis de leer la reseña que Ferreirós hace del libro de Torretti para apreciar el sentido de estas objeciones. Está en el foro de recursos.

(15) ¿Por qué el concepto de *aseveración funcional* y el *modo recursivo* de pensar defendidos por Thoralf Skolem permitirían una fundamentación hilbertiana de la aritmética?

(16) ¿En qué consiste el *problema de la decisión*? ¿En qué sentido lo resuelve E. Post para el cálculo proposicional?

Respuesta: Se me ocurre esta semana ahondar un poco en cómo Skolem contribuye al programa de Hilbert, para lo cual vuelvo a recurrir a los trabajos de Pepe Ferreirós (Labyrinth of Thought, pp. 360-ss). La intuición (anti-hilbertiana) subyacente a los primeros trabajos de Skolem es que la axiomatización no podía ser el fundamento último de la matemática. Para sustanciar esta crítica, Skolem desarrolla nociones (como las de aseveración funcional, etc) que contribuyen al desarrollo del programa de Hilbert, pero, en última instancia, ponen de manifiesto sus limitaciones. Veámoslo brevemente.

El primer paso de la crítica de Skolem pasa por dar una definición de lo que es axiomatizar: axiomatizar la teoría de conjuntos supone construir una formalización de primer orden, es decir, con cuantificadores sobre objetos individuales (los números). Sobre estos objetos sabemos solamente lo enunciado en los axiomas, cosa que intuitivamente se cumple con los números -somos capaces de interpretar los axiomas mediante ejemplos numéricos. Si cuantificamos sobre predicados en vez de sobre individuos, no dispondremos ya de tales intuiciones: si los predicados son conjuntos y subconjuntos, no tenemos una definición extensional intuitiva de predicados como "todos los subconjuntos de un dominio".

Supuesta es concepción de la axiomática (a la que se refería la pregunta, en lo que tiene de refinamiento de la posición de Hilbert), la oposición de Skolem radicaba en que, para él, los matemáticos no entendían la teoría de conjuntos en términos axiomáticos sino que tomaban los conjuntos como especificaciones de colecciones arbitrarias. Y al axiomatizar la teoría de conjunto sucede que los conceptos básicos de esta última (como el de pertenencia) dejan de tener su sentido intuitivo: se podran intepretar de tantas maneras como el sistema de axiomas.

Pues bien, estas interpretaciones violan nuestro sentido intuitivo de las mismas, contra las pretensiones fundacionalistas de Hilbert. El problema que plantea el teorema de Löwenheim-Skolem es que nociones como las de cardinalidad dejan de tener un sentido obvio: por ejemplo, se puede interpretar un sistema de axiomas como el de los

Principia de tal modo que obtenemos un modelo denumerable en el que, sin embargo, es posible probar que hay un conjunto indenumerable. Sin contradicción.

[Torretti, lamentablemente, no aborda el teorema de L-S en su libro, pero podéis ver una presentación sencilla en la propia Wikipedia: http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_L%C3%B6wenheim-Skolem]

En otras palabras, una definición axiomática no nos permite formular un concepto absoluto de cardinalidad: a partir de una teoría axiomática de primer orden, podemos obtener modelos con una cardinalidad distinta a la del original.

Para Skolem, semejante resultado pone de manifiesto la insuficiencia del método axiomático para la empresa de fundamentación, si es que esta tiene por propósito aclarar nuestras intuiciones matemáticas fundamentales.

Espero que esta breve nota os pueda situar algo mejor la posición de Skolem, aunque no era este el sentido de las preguntas, que, por lo demás, están muy bien respondidas una semana más.

(17) ¿De qué modo prueba Gödel que el cálculo predicativo de primer orden es completo? ¿Por qué la prueba no es constructiva?

(18) ¿Qué es, para Hilbert, la teoría de la prueba? ¿En qué sentido el procedimiento de gödelización utilizado en la prueba de los teoremas de incompletitud ejemplifica esta teoría hilbertiana?

Respuesta: Felicitaciones, como de costumbre. El comentario de hoy es una incitación a que veais la conferencia de Enrique Alonso que tenéis en el curso virtual. Quizá una buena manera de abordar el comentario sea a partir del propio artículo de Alonso y Manzano que sirve de base a la conferencia y que le puedo pasar a quien tenga curiosidad:

Maria Manzano & Enrique Alonso (2014) Completeness: from Gödel to Henkin, *History and Philosophy of Logic*, 35:1, 50-75, DOI: 10.1080/01445340.2013.816555

Es necesario recordar que la distinción entre sintaxis y semántica apenas comienza a formularse con el propio Gödel. Lo que se investiga a la altura de los años 1920 es la existencia de algoritmos que puedan decidir si un conjunto de fórmulas es o no suficiente.

En términos semánticos actuales, diríamos que una teoría tiene más de un modelo (o interpretación). Se pudo plantear entonces la cuestión de si una teoría es completa respecto a un modelo o a una clase de modelos, es decir, si el conjunto de teoremas (sintácticamente) demostrables en un sistema lógico incluye el conjunto de verdades (semánticas) de tal sistema. Si la respuesta es afirmativa, diremos que el sistema es (débilmente) completo -existe otro sentido fuerte del que no nos ocuparemos aquí.

Según Alonso y Manzano el programa de investigación consistió en ampliar, por un lado, el conjunto de modelos al máximo y, por otro, minimizar el conjunto de axiomas del que partimos para definir el sistema lógico. En la escuela de Hilbert, el problema de la compleción de un cálculo aparece a principios de los años 1920 (Bernays, Post, Behman) de la siguiente manera:

If the axiomatization of a non-formal system is not self-evident, as in some sense claimed by Russell, what criteria can be used to establish its adequacy, especially when we have alternative axiomatics? It seems necessary to prove somehow that the theorems derivable from axioms are exactly the formulae needed: no more, no less. The first part of the problem, not to prove more than what is needed, was relatively easy to tackle and led directly to the definition of the consistency of a calculus. The property of consistency is defined in terms of the impossibility of proving a formula and its negation, or equivalently, as a guarantee that there is at least one well-formed formula that is not a theorem of the calculus. The counterpart, namely the sufficiency of a given calculus, or the sufficiency of any calculus whatsoever, is much more difficult to pin down. What property of formulae is it that allows us to affirm of a given formula that it should be a theorem even before we have an effective proof of it in some suitable calculus?

En este contexto -tal como explica Torretti (pp. 247-ss)- aparecen la investigaciones de Post, cuyo teorema fundamental dice que si una fórmula es aseverable en un sistema lógico, será deducible del mismo. No tenemos todavía un concepto de verdad semántica (como el que llegará años después con Tarski): Post propone un procedimiento de decisión para saber si una fórmula es válida (aseverable) mediante lo que hoy llamamos tablas de verdad (Torretti, pp. 256-257); y prueba después que si lo es, será deducible del mismo. Es decir, el problema de si un cálculo es completo depende de si es decidible.

No obstante, esto plantea, según Alonso y Manzano, un dilema para Gödel

• Either semantics is decidable, in which case the completeness of the logic is trivial or,
• completeness is a critical property that cannot be obtained as a corollary of a previous decidability result.

Gödel lo resuelve probando que un sistema es completo sin presuponer su decidibilidad. Para ello, Gödel sigue la senda iniciada por Löwenheim-Skolem e introduce el concepto de realizabilidad, precursor de nuestro actual concepto de modelo (Torretti, pp. 276-ss). Ocurre que, como indica la pregunta que os hacía, Gödel nos ofrece una prueba no constructiva, desviándose del programa de Hilbert. Y poniendo también de manifiesto que los conceptos semánticos no parecen comportarse del mismo modo que los conceptos sintácticos: ya en el año 1930 Gödel indica que el concepto de "válido" se refiere a la totalidad no-denumerable de funciones, mientras que "demostrable" se refiere a la totalidad denumerable de pruebas formales. Mientras que el programa de Hilbert podría ser viable respecto a los conceptos sintácticos, no parece que los semánticos lo admitan del mismo modo.

Espero que esta presentación os anime a ver la conferencia de Enrique Alonso y formular nuevas preguntas

(19) Explique y comente la siguiente afirmación de Torretti (p. 352): el primer teorema de incompletitud de Gödel “habrá de parecernos mucho más grave si creemos que P y los sistemas afines comprende todos los recursos de que dispone el hombre para conocer con certeza una verdad sobre números no incluida ya en la aritmética finitista”

(20) ¿En qué sentido la tesis de Church constituye “una decisión de aceptar la computabilidad como criterio de calculabilidad” (p. 376)?

Respuesta: Una semana más elogios, pues vuestras respuestas son buenas. Eso sí, tengo que poner un reparo y es que vuestros comentarios han sido algo literarales: interpretáis correctamente a Torretti, pero apenas añadís nada sobre sus propuestas. Pues es aquí donde se trasluce más claramente la posición del autor sobre los sucesos que analiza (para los que no lo hayáis hecho todavía, echadle un vistazo a la reseña que hace J. Ferreirós de su libro, donde se explicitan las ideas de Torretti. La podéis encontrar en el foro de recursos).

(21) ¿Qué quiere decir que “el problema de la detención es insoluble”?

(22) Gerhard Gentzen utilizó la inducción transfinita en sus dos demostraciones de la consistencia de la aritmética formalizada. Explique y comente la siguiente observación de Torretti (p. 319): “Si el programa de Hilbert acaba recurriendo al transfinito, ¿por qué tantos melindres y reservas ante el paraíso heredado de Cantor? ¿por qué no instalarse en él, alegremente, de una vez por todas?”

Respuesta: De entre vuestras respuestas, me interesaba, sobre todo, la segunda pregunta, por lo que suponía precisamente de valoración del curso. Por supuesto, la habéis comprendido muy bien, pero habéis sido algo tímidos con vuestras opiniones. Pero uno podría preguntarse qué supone "instalarse en el paraíso de Cantor": el proyecto de Hilbert surge para dar respuestas a las paradojas que plantea el concepto de infinito introducido por Cantor. Al principio de curso veíamos que estas paradojas ponían en cuestión nuestro concepto intuitivo de número. ¿Con qué concepto alternativo hemos de operar, una vez abandonado el proyecto de Hilbert? ¿Cuántos paraísos conjuntistas tenemos a nuestro alcance? Las matemáticas ¿son una o muchas?

Estas son cuestiones abiertas que este curso no pretende resolver, tan sólo ayudaros a poder plantearoslas. Espero que os hayan parecido interesantes.