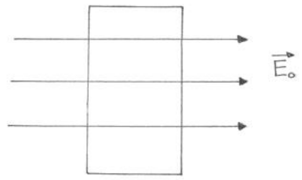
Cuestiones y problemas
Tema 4. Campo electromagnético: Campo electrostático

Una lámina gruesa de un cierto material conductor se introduce en el seno de un campo eléctrico externo constante de valor E_0 (ver figura). Cómo es el campo eléctrico en el interior del material?

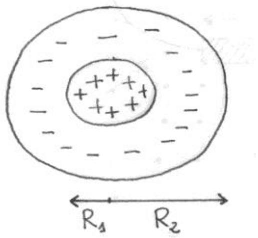


a) $\vec{E}_{interior} = -\vec{E}_0$

b) $\vec{E}_{interior} = \vec{E}_0$

c) $\vec{E}_{interior} = \vec{0}$ (V)

Un modelo muy simple de neutrón consiste en considerar a dicha partícula como una esfera de radio R_2 en la que la parte central, de radio R_1, está cargada positivamente con carga $+e$. Esta parte central estaría rodeada por una corteza de carga total $-e$, como se indica en la figura. Suponer que en ambas capas la carga está distribuida uniformemente en el volumen que ocupa.



- Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico si $0 < r \le R_1$.

a) $E(r) = k\dfrac{er}{R_1^3}$, dirigido radialmente hacia fuera del neutrón. (V)

b) $E(r) = k\dfrac{er}{R_1^3}$, dirigido radialmente hacia dentro del neutrón.

c) $E(r) = k\dfrac{e}{r^2}$, dirigido radialmente hacia fuera del neutrón.

- Encuéntrese la magnitud y dirección del campo eléctrico si $R_1 < r \le R_2$.

a) $E(r) = ke\left(\dfrac{r}{R_1^3} - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)$, dirigido radialmente hacia dentro del neutrón.

b) $E(r) = k\dfrac{e}{r^2}\left(1 - \dfrac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)$, dirigido radialmente hacia dentro del neutrón.

c) $E(r) = k\,\dfrac{e}{r^2}\left(1 - \dfrac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\right)$, dirigido radialmente hacia fuera del neutrón. (V)

Sean dos bolas conductoras con cargas estáticas de una centésima de microculombio cada una, dispuestas a 10 cm una de otra.

- El módulo de la fuerza eléctrica entre ambas es (tomar $k = 9\times10^9\ \mathrm{N\,m^2\ C^{-2}}$)

a) 9×10^{-5} N (V)
b) 9×10^{-1} N
c) 9 N

- Supongamos ambas bolas colgadas de sendos hilos de igual longitud. ¿Con qué masa aproximada tendríamos que escoger las bolas para que se desvíen visiblemente bajo la acción de la fuerza eléctrica

a) del orden centigramo (V)
b) del orden del gramo
c) de unos diez gramos

Consideremos una pequeña esfera de material aislante recubierta de una fina capa de aluminio. El peso total de la capa de aluminio es 0,1g. Se sabe que cada átomo-gramo de aluminio – en otras palabras, 27 g – contiene el número de Avogadro de átomos (6×10^{23}). Cada átomo de aluminio tiene 13 electrones (carga= $1,6\times10^{-19}$ C). Suponga que fuésemos capaces de extraer la centésima parte de todos esos electrones de dos bolas similares a ésta, y las ponemos a un metro de distancia una de otra.

- La fuerza que ejercen entre ellas es aproximadamente ($k = 9\times10^9\ \mathrm{N\,m^2\ C^{-2}}$)

a) $2,25\times10^{13}$ N (V)
b) $7,0\times10^{5}$ N
c) $1,2\times10$ N

- Disponiendo de esta fuerza para ser utilizada, podríamos levantar como máximo el peso

a) de un gato
b) de un camión
c) un objeto de dos mil millones de toneladas (V)

Un alambre infinitamente delgado tiene forma de anillo y un radio *R*= 10 cm. El mismo alberga una carga de –5 nC. ¿En qué punto del mismo eje del anillo la intensidad del campo es máxima?

a) A ±7 cm del centro del anillo. (V)
b) A ±11 cm del centro del anillo.
c) No existe ningún máximo, sino que la intensidad del campo decrece monótonamente a medida que nos alejamos del centro.

Un dipolo está formado por una carga puntual $+q$ situada en el origen y una carga igual pero opuesta $-q$ situada sobre el eje *x* en el punto $x = a$.

- ¿Cuánto vale el módulo del campo eléctrico en los puntos del eje *x* muy alejados del origen $(|x| >> a)$?

a) $\frac{kqa}{x^3}$

b) $\frac{2kq}{x^2}$

c) $\frac{2kqa}{x^3}$ (V)

- ¿Cuánto vale el módulo del campo eléctrico en los puntos del eje *x* muy alejados del origen $(|x| >> a)$ si las dos cargas tienen el mismo signo?

a) $\frac{2kq}{x^2}$ (V)

b) $\frac{2kqa}{x^3}$

c) $\frac{kqa}{x^3}$

En un tubo de plástico cuya sección tiene radios interior y exterior de 2cm y 3cm, respectivamente, se distribuye uniformemente una carga de $3\mu C$ por metro lineal de tubo.
***Datos*: $k = 9\ 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$**
- ¿Cuál es la densidad de carga volumétrica del tubo?
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 1cm del eje del tubo?
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 2,5cm del eje del tubo?
- ¿Cuál es el campo eléctrico en un punto situado a 10cm del eje del tubo?

Solución:

$Volumen = \pi\left(R_2^2 - R_1^2\right) = 5\pi \cdot 10^{-4}\, m^3$, por lo que la densidad de carga volumétrica será:

$$\rho = \frac{q}{Volumen} = \frac{3\cdot 10^{-6}}{5\pi \cdot 10^{-4}} = 1{,}91\cdot 10^{-3}\, C/m^3 .$$

El campo eléctrico en un punto situado a 1cm del eje del tubo es $E = 0$.

Para calcular el campo eléctrico en un punto situado a 2,5cm del eje del tubo utilizamos el teorema de Gauss:

$$\oint E \cdot dA = 4\pi k q_{\text{int}} \ ;$$

$$q_{inc}(\text{en C}) = \rho \cdot \pi\left(R_3^2 - R_1^2\right)L = 1{,}91\cdot 10^{-3}\pi \cdot 2{,}25\cdot 10^{-4} \cdot L = 1{,}35\cdot 10^{-6} \cdot L$$

$$E \cdot 2\pi R_3 L = 4\pi k \cdot 1{,}35\cdot 10^{-6} \cdot L$$

Finalmente obtenemos $E = \frac{2{,}70\cdot 10^{-6} \cdot 9\cdot 10^9}{\left(2{,}25\cdot 10^{-2}\right)} = 1{,}08\cdot 10^6\, N/C$.

Por último, para responder a la última pregunta hacemos lo mismo
$E \cdot 2\pi R_4 L = 4\pi k \cdot 3\cdot 10^{-6} \cdot L$, y obtenemos:

$$E=\frac{6\cdot 10^{-6}\cdot 9\cdot 10^{9}}{\left(10^{-1}\right)}=5,4\cdot 10^{5}\,N/C\,.$$

Podemos considerar un modelo simple de átomo de hidrógeno en el cual el electrón y el protón están separados por una distancia de $5,3\times 10^{-11}$ *m*. Calcule los módulos de las fuerzas electrostática y gravitatoria y explique la consecuencia que puede extraer del resultado. Datos: $m_{e^-}=9{,}1\ 10^{-31}$ kg, $m_p=1{,}7\ 10^{-27}$ kg, $e=1{,}6\ 10^{-19}$ C, $k=9\ 10^{9}$ Nm^2/C^2 **y** $G=6{,}7\ 10^{-11}$ Nm^2/kg^2.

Solución:

$$F_{eléctrica}=k\,\frac{e^2}{d^2}$$

$$F_{gravitatoria}=G\,\frac{m_{e^-}m_p}{d^2}$$

$$\frac{F_{eléctrica}}{F_{gravitatoria}}=\frac{ke^2}{Gm_{e^-}m_p}\approx 10^{39}$$

La Fuerza electrostática es muchísimo más intensa que la gravitatoria.

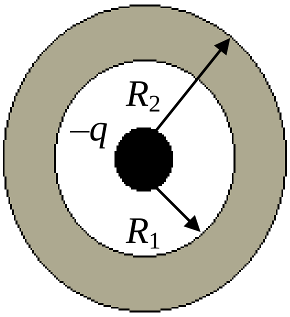
Una superficie esférica encierra una carga *q*.
¿Cómo varía el flujo eléctrico neto a través de la superficie si la superficie se convierte en un cubo?

¿En qué medida varía el flujo eléctrico neto si la carga *q* se desplaza permanentemente dentro de los límites de la superficie?

Solución:

El número de líneas de campo que atraviesan una superficie que encierra una carga es siempre el mismo independientemente de la forma de la superficie. Por consiguiente, el flujo neto a través de cualquier superficie que encierre a una carga *q* es siempre el mismo y vale $4\pi kq$. La respuesta a ambas preguntas es que el flujo eléctrico neto no variará.

Una carga puntual de valor –*q* está situada en el centro de una esfera hueca conductora de radio interior R_1 y radio exterior R_2, tal y como se muestra en la figura. La esfera se encuentra en equilibrio electrostático y su carga neta es cero.



- ¿Cuál es la densidad de carga en la superficie exterior de la esfera?

- Calcular el valor del campo eléctrico en función de *r* en las regiones: $r < R_1$, $R_1 < r < R_2$ **y** $r > R_2$.

Solución:
Debido a la presencia de la carga –*q* en el interior de la esfera hueca conductora, se induce una carga positiva +*q* en la superficie interior de la esfera $r = R_1$ y una carga –*q* en la superficie exterior de la esfera $r = R_2$.

La densidad superficial de carga en la superficie exterior será $\sigma = \dfrac{-q}{4\pi R_2^2}$.

El campo eléctrico dentro del conductor es cero y fuera de la esfera solo tenemos la carga puntual –*q* como generadora de campo eléctrico (Ley de Gauss):

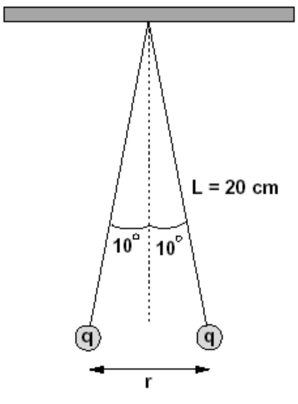
$$\vec{E}(r < R_1) = k\frac{-q}{r^2}\vec{u}_r, \quad \vec{E}(R_1 < r < R_2) = \vec{0}, \qquad \vec{E}(r > R_2) = k\frac{-q}{r^2}\vec{u}_r,$$

siendo $\vec{u}_r$ el vector unitario radial hacia fuera de la esfera.

Se disponen 4 cargas puntuales en los vértices de un cuadrado centrado en el origen, una carga q en (-1, +1), una carga 2q en (+1, +1), una carga -3q en (+1, -1) y otra igual a 6q en (-1, -1). Calcular el campo eléctrico en el origen.

Solución:
Por el principio de superposición, el campo eléctrico en el origen vale $\vec{E} = \left(kq2\sqrt{2}\right)\,\vec{i}\ \mathrm{N/C}$, siendo $\vec{i}$ el vector unitario en la dirección X y sentido positivo.

Dos masas de 0,5 g con igual carga *q* cuelgan de sendos hilos de 20,0 cm, tal como muestra la figura. ¿Cuál es el valor de la carga *q*?



Solución:
Las ecuaciones del equilibrio son:

$$mg = T\cos\alpha \quad \text{(eje y)}$$

$$K\frac{q^2}{r^2} = T\sin\alpha \quad \text{(eje x)}$$

Sabiendo que $\dfrac{r}{2} = L\sin\alpha$ podemos despejar fácilmente el valor de *q*.

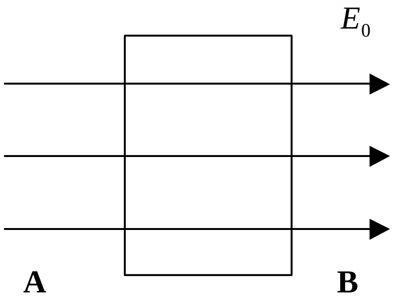
¿Cuál es la distancia que debe separar dos cargas de $75,0\times10^{-9}$ **C para que haya una fuerza de 1,0 N entre ellas?**
(Dato: $k=9\times10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ **)**
<u>Solución</u>:
La fuerza electrostática entre las cargas tiene la forma

$$F=k\frac{q^2}{r^2}\,.$$

Despejando *r* tenemos que

$$r=\sqrt{k\frac{q^2}{F}}=7{,}1\times10^{-3}\,\mathrm{m}$$

Una lámina gruesa de un cierto material conductor se introduce en el seno de un campo eléctrico externo constante de valor E_0 **(ver figura). ¿Cómo es la situación y naturaleza de las densidades superficiales de carga que aparecen en el mismo?**



a) Positiva sobre la superficie del conductor indicada con la letra B y negativa sobre la indicada con la letra A (V)
b) Negativa sobre la superficie B del conductor y positiva sobre la A
c) Si el conductor es inicialmente neutro, no puede haber polarización alguna

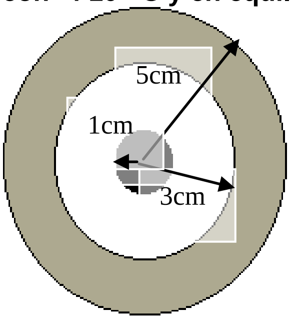
Supongamos una esfera sólida no conductora con densidad de carga uniforme y carga total Q. Entonces:
a) El campo en un punto interior es proporcional a la distancia de este al centro de la esfera. (V)
b) el campo es el mismo en cualquier punto del interior de la esfera.
c) el campo en un punto interior es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera.

Toda la carga eléctrica de un conductor esférico en equilibrio
a) está concentrada en su centro
b) está sobre su superficie (V)
c) está distribuida homogéneamente en todo el volumen

Colocamos sobre el eje coordenado *x* dos cargas positivas: una de ellas, $q_1 = 6\mu C$, en el origen de coordenadas, y la otra, $q_2 = 15\mu C$, en la posición *x*=2 m. ¿Dónde debe colocarse una carga negativa q_3 sobre el eje *x* de forma a que la fuerza resultante sobre ella sea nula?

a) *x*=1,225 m
b) *x*=0,775 m (V)
c) *x*=0,445 m

Una esfera hueca de radio interior 3 cm y radio exterior 5 cm, contiene una carga uniformemente distribuida por todo su volumen con una densidad de 4 $10^{-5}/\pi$ C/m^3. En su centro hay una esfera conductora de 1 cm de radio cargada con -4 10^{-9} C y en equilibrio electrostático.



- ¿Cuál de estas soluciones para el campo eléctrico es correcta? ($\vec{u}_r \equiv$ vector unitario radial hacia fuera de la esfera)

a) $\vec{E}(r<0.01) = \left(16\cdot 10^4 r - \dfrac{12}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C, \quad \vec{E}(0.01<r<0.03) = \left(\dfrac{-36}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C$

b) $\vec{E}(r<0.01) = \vec{0}\ N/C, \quad \vec{E}(0.01<r<0.03) = \left(\dfrac{-18}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C$

c) $\vec{E}(r<0.01) = \vec{0}\ N/C, \quad \vec{E}(0.01<r<0.03) = \left(\dfrac{-36}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C$ (V)

- ¿Cuál de estas soluciones para el campo eléctrico es correcta? ($\vec{u}_r \equiv$ vector unitario radial hacia fuera de la esfera)

a) $\vec{E}(0.03<r<0.05) = \left(48\cdot 10^4 r - \dfrac{49}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C \quad \vec{E}(r>0.05) = \left(\dfrac{11}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C$ (V)

b) $\vec{E}(0.03<r<0.05) = \left(\dfrac{-49}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C, \quad \vec{E}(r>0.05) = \left(\dfrac{-36}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C$

c) $\vec{E}(0.03<r<0.05) = \left(48\cdot 10^4 r\right)\vec{u}_r \ N/C, \quad \vec{E}(r>0.05) = \left(\dfrac{11}{r^2}\right)\vec{u}_r \ N/C$

Solución:

- Caso $r<0.01$:

Al tratarse de un conductor en equilibrio electrostático, toda la carga se encuentra en su superficie, por lo que el campo eléctrico en su interior es 0.

- Caso $0.01<r<0.03$:

Al aplicar Gauss, la carga encerrada dentro del esfera de radio *r* es la del conductor, -4 10^{-9} C, por lo que el campo vale $\vec{E} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{-4 \cdot 10^{-9}}{r^2} \vec{u}_r = \dfrac{-36}{r^2} \vec{u}_r$

- Caso $0.03 < r < 0.05$:

La carga encerrada dentro del esfera de radio *r* es la del conductor, -4 10^{-9} C, más la de la esfera hueca, $4 10^{-5}/\pi \cdot \dfrac{4}{3}\pi(r^3 - 0.03^3) = 5.33 10^{-5} r^3 - 1.44 10^{-9} C$.

Así pues, la carga total es $5.33 10^{-5} r^3 - 5.44 10^{-9}$ C y el campo vale:

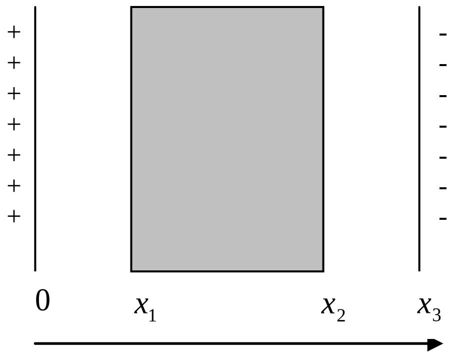
$$\vec{E} = 9 \cdot 10^9 \frac{5.33 10^{-5} r^3 - 5.44 10^{-9}}{r^2} \vec{u}_r = \left(48 \cdot 10^4 r - \frac{49}{r^2}\right) \vec{u}_r$$

- Caso $r > 0.05$:

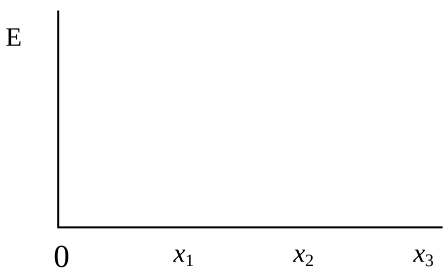
La carga encerrada dentro de la esfera de radio *r* es la del conductor, -4 10^{-9} C, más la de la esfera hueca: $4 10^{-5}/\pi \cdot \dfrac{4}{3}\pi(0.05^3 - 0.03^3) = 5.22 \cdot 10^{-9}$ C.

Así el campo vale $\vec{E} = 9 \cdot 10^9 \dfrac{1.22\ 10^{-9}}{r^2} \vec{u}_r = \dfrac{11}{r^2} \vec{u}_r$

Dos láminas planas paralelas están cargadas con cargas iguales de signo opuesto tal y como se muestra en la figura. Se interpone entre ellas un conductor metálico que deja espacio libre ocupado por aire a ambos lados (ver figura).

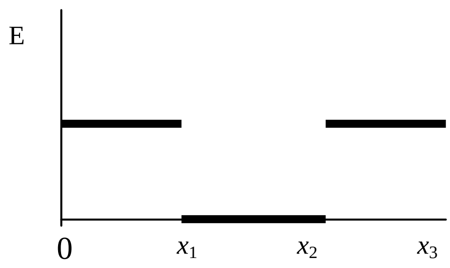


- Representar cualitativamente en una gráfica como la mostrada en la figura la variación del campo eléctrico entre las dos láminas con la distancia *x*



<u>Solución:</u>

En la superficie izquierda del conductor metálico se inducirá una carga igual a la de la lámina izquierda, pero con signo negativo. En la derecha ocurrirá lo mismo, pero la carga será positiva. En el interior del conductor el campo es nulo. Cualitativamente, la variación del campo con *x* será:



El campo $\vec{E}$ ha sido indicado como positivo porque su sentido es el del eje positivo de las X.

¿Sabría dar una explicación a la inusual acumulación de polvo sobre la pantalla de un ordenador?
Solución:
La electricidad estática de la pantalla atrae las partículas de polvo que están cargadas.

Se dispone de un sistema formado por 2 cargas iguales en módulo pero de signo opuesto, separadas por una distancia L. Tomamos el eje X como la dirección de la recta que separa ambas cargas, y el origen como el punto intermedio. Suponiendo que dicho sistema se encuentra en el seno de un campo eléctrico variable E(x), esto es, el valor de E depende de x, demostrar que en el límite L→0 la fuerza neta ejercida por el campo E sobre el sistema es proporcional a la derivada del campo respecto de x.

Solución:
La fuerza del campo $E(x)$ sobre el sistema compuesto por las dos cargas vale

$$F = -qE(-L/2) + qE(L/2) = qL\frac{E(L/2) - E(-L/2)}{L}.$$

Si tomamos el límite $L \to 0$ tenemos que

$$\lim_{L\to 0} F \propto \lim_{L\to 0}\frac{E(L/2) - E(-L/2)}{L} = \lim_{L\to 0}\frac{E(-L/2+L) - E(-L/2)}{L} = \left.\frac{dE}{dx}\right|_{x=-L/2}$$

Un dipolo está constituido por dos cargas positivas iguales *q* situadas en el eje Y: una está en *y* = *a* y la otra en *y* = -*a*. Obtener la expresión del campo eléctrico en cualquier punto del eje X y demostrar que cerca al origen, cuando *x* es mucho menor que *a*, E_X vale aproximadamente $\mathbf{E}_\mathbf{x} = k2qx/a^3\mathbf{i}$, y que para valores de *x* mucho mayor que *a*, E_X puede ser aproximado por $\mathbf{E}_\mathbf{x} = k2q/x^2\mathbf{i}$.

Solución:

Por la simetría del problema es fácil darse cuenta que campo eléctrico producido por el dipolo en el eje X no tiene componente Y , y que vale

$$\mathbf{E} = k\frac{2qx}{\left(x^2+a^2\right)^{3/2}}\mathbf{i}$$

Cuando $x \ll a$ tenemos

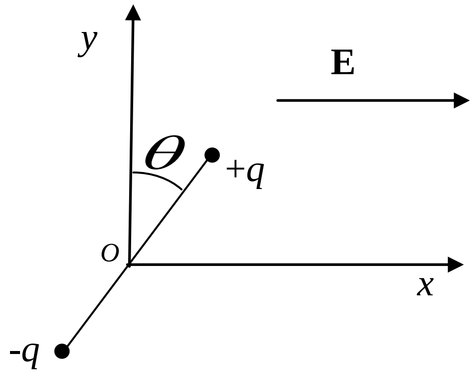
$$\mathbf{E} = k\frac{2qx}{a^3}\mathbf{i}$$

Cuando $x >> a$ tenemos

$$\mathbf{E} = k\frac{2q}{x^2}\mathbf{i}$$

que es igual al campo producido por una carga de valor $2q$ situada en el origen.

Un dipolo consta de dos cargas iguales pero de distinto signo separadas por una distancia *l*. Supongamos el dipolo mostrado en la figura, que forma un ángulo θ con el eje *y*. El punto medio de su eje imaginario pasa por el origen de coordenadas. El dipolo se encuentra dentro de un campo eléctrico constante apuntando en la dirección *x* positiva, y de módulo *E*.



Se dice que un sistema está en equilibrio cuando la fuerza total y el momento total que actúan sobre él son nulos. El equilibrio es estable cuando, ante una pequeña perturbación de ese estado inicial de equilibrio, el sistema tiende espontáneamente a recuperarlo (imaginar una bola en el fondo de una valle que es golpeada suavemente). Se define equilibrio inestable cuando la respuesta del sistema a una pequeña perturbación es alejarlo indefinidamente del estado inicial de equilibrio (imaginar una bola en el punto más alto de una montaña que es tocada ligeramente). ¿Cuáles serán las posiciones de equilibrio del dipolo con respecto al campo eléctrico, y en cuál de ellas el equilibrio será estable y en cuál inestable?

<u>Solución:</u>

Como el campo eléctrico es constante, la fuerza eléctrica neta sobre el dipolo será siempre nula (la fuerza producida por el campo eléctrico sobre la carga negativa compensa exactamente a la fuerza del campo sobre la carga positiva) por lo que en cualquier posición el dipolo se encontrará en equilibrio bajo traslación. Sin embargo, la fuerza ejercida por el campo sobre las cargas crea un par de fuerzas que lo hacen girar alrededor del origen de coordenadas. Cuando el dipolo se alinea con el campo eléctrico, el momento de las fuerzas eléctricas sobre las cargas se anula, por lo que esa será su posición de equilibrio. Por consiguiente, sólo cuando el dipolo se alinea con la dirección del campo estará en equilibrio. El equilibrio será estable en ese caso ($\theta = 90^{\circ}$) ya que si desviamos el dipolo un pequeño ángulo con respecto a la horizontal, las fuerzas del campo producirán un momento total sobre el dipolo que tenderá a devolverlo a la posición inicial. El equilibrio inestable ocurrirá cuando el dipolo esté alineado con el campo, pero con la carga positiva a la izquierda y la negativa a la derecha ($\theta = 270^{\circ}$). En ese caso, una pequeña perturbación hará que el dipolo gire hasta alcanzar la posición anterior de equilibrio estable.

Una carga q está situada sobre el eje *x* en el punto $x = a$. ¿Explicar razonadamente cuál de estas cinco expresiones proporciona la expresión correcta del vector campo eléctrico generado por la carga en un punto cualquiera del eje *x*?

a) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x+a)^3}\dfrac{x+a}{|x+a|}\mathbf{i}$

b) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x-a)^2}\mathbf{i}$

c) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x+a)^2}\mathbf{i}$

d) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{x^2}\mathbf{i}$

e) $\mathbf{E}(x) = k\dfrac{q}{(x-a)^2}\dfrac{x-a}{|x-a|}\mathbf{i}$

Solución:
Por la simetría del problema es fácil darse cuenta de que el campo eléctrico producido por la carga en el eje X no tiene componente Y. El campo en un punto *x* del eje X será inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre el punto y la carga, y su sentido vendrá dado por el signo de la carga cuando $x > a$ y el contrario cuando $x < a$. Por lo tanto la solución correcta es la e):

$$\mathbf{E}(x) = k\frac{q}{(x-a)^2}\frac{x-a}{|x-a|}\mathbf{i}$$