Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2015, 2ª Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

(1) Producto escalar.

(2) Transformación ortogonal o isometría.

(3) Signatura de una forma cuadrática.

(4) Criterio de Sylvester.

Ejercicio 1: (2 puntos)

Demuestre el siguiente resultado: Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo, se cumple que las matrices de Gram del producto escalar $<, >$ en distintas bases son matrices congruentes.

Ejercicio 2: (3 puntos)

(a) Determine las posibles matrices de Jordan de un endomorfismo f de un espacio vectorial real de dimensión 4 que cumple las siguientes condiciones:

(1) Admite una forma canónica de Jordan.

(2) No tiene planos invariantes que contengan infinitas rectas invariantes.

(3) No tiene hiperplanos irreducibles invariantes.

(4) No es diagonalizable.

(b) De las opciones obtenidas ¿cuál de ellas tiene exactamente dos rectas invariantes?

Ejercicio 3: (3 puntos)

(a) Determine la matriz de una forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que:

(1) El conjugado de la recta $R = L(1, 0, 0)$ es $R^c \equiv x + y + z = 0$.

(2) $\Phi(0, 0, 1) = 1$.

(3) La signatura de Φ es $(1, 0)$.

(b) Determine una base de vectores conjugados respecto a Φ.