EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. FEBRERO 2005

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema de Cauchy-Goursat para un triángulo.

2.Pregunta. Definir cuando una función real o compleja tiene la propiedad de la media.

3.Pregunta. Estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen\,(nz)}{n^2}.$$

4.Pregunta. Determinar y clasificar las singularidades aisladas de las siguientes funciones

$$a)\; f(z) = \frac{e^z}{z\,(1-e^{-z})}\;,\; b)\; f(z) = \frac{z - senz}{z^3}.$$

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV.

1.P.P FEBRERO 2005. 1.SEMANA.

1.PROBLEMA. Estudiar la convergencia y la convergencia uniforme de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}$$

SOLUCION.

i) Si $z \in \mathbb{R}$, entonces $\operatorname{Im} z = y = 0$, entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}\right| = \left|\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2in^2}\right| \leq \frac{|e^{inz}| + |e^{-inz}|}{2n^2}$$

$$= \frac{e^{-ny} + e^{ny}}{2} = \frac{e^0 + e^0}{2n^2} = \frac{1}{n^2}$$

y puesto que $\sum \frac{1}{n^2}$ es convergente, nuestra serie es absolutamente y uniformemente convergente en $\mathbb{R}$.

ii) $\operatorname{Im} z = y > 0$, entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}\right| \geq \frac{|e^{inz}| - |e^{-inz}|}{2n^2} = \frac{e^{+ny} - e^{ny}}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

luego en el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$, la serie diverge

iii) $\operatorname{Im} z = y < 0$, entonces

$$\left|\frac{\operatorname{sen} nz}{n^2}\right| \geq \frac{e^{-ny} - e^{ny}}{2n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

luego la serie diverge en $\operatorname{Im} z < 0$.

2. PROBLEMA.

Determinar y clasificar las singularidades aisladas de las siguientes funciones.

a) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$, b) $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$

SOLUCION.

a) Las singularidades de

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$$

serán los ceros de $z(1-e^{-z})$, es decir

$z=0$ de orden dos

$z=2k\pi i$, $k\neq 0$, de orden 1,

Estas singularidades serán polos de orden 2 y 1 respectivamente.

b) Las singularidades de

$$f(z) = \frac{z-\operatorname{sen} z}{z^3}$$

estarán entre los ceros del denominador, es decir sólo puede ser $z=0$. Ahora bien $z=0$ es también un cero del numerador.

Consideremos $g(z) = z - \operatorname{sen} z = 0$, $z=0$ es un cero de orden 2 para g pues $g'(0)=0$, $g''(0)\neq$

Luego $z=0$ es un polo simple para f.

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. FEBRERO 2005. 2.SEMANA

1.Pregunta. Enunciar y demostrar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
2.Pregunta. Enunciar y demostrar el Lema de Schwarz.
3.Pregunta. Calcular la integral

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)\,z},$$

donde $|z_0| < 1$ y $\gamma : z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

4.Pregunta. Resolver la ecuación

$$\overline{z} = z^{n-1}, n \in \mathrm{N}.$$

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

I.P.P. 2005. 2ª SEMANA

1. PROBLEMA. Calcular la integral

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)z},$$

donde $|z_0|<1$ y $\gamma: z=e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$

SOLUCION. Aplicamos el teorema de los residuos. Polos simples $z=z_0$, $z=0$

$$\operatorname{Res}_{z=z_0}\frac{1}{(z-z_0)z}=\lim_{z\to z_0}\frac{\cancel{z-z_0}}{\cancel{(z-z_0)}z}=\frac{1}{z_0}$$

$$\operatorname{Res}_{z=0}\frac{1}{(z-z_0)z}=\lim_{z\to 0}\frac{\cancel{z}}{(z-z_0)\cancel{z}}=-\frac{1}{z_0}$$

$$\int_\gamma\frac{dz}{(z-z_0)z}=2\pi i\left(\operatorname{Res}_{z=z_0}\frac{1}{(z-z_0)z}+\operatorname{Res}_{z=0}\frac{1}{(z-z_0)z}\right)$$

$$=0.$$

2. PROBLEMA. Resolver la ecuación

$$\bar{z} = z^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

SOLUCION Distinguimos primeramente el caso $n=2$. En este caso tenemos

$$\bar{z} = z$$

y la solución general es $z \in \mathbb{R}$.

Para $n \neq 2$, escribimos $z = re^{i\theta}$ y obtenemos

$$re^{-i\theta} = r^{n-1} e^{i(n-1)\theta}$$

es decir se debe tener

$$r = r^{n-1} \Longrightarrow r = 1$$

$$e^{in\theta} = 1 \; ; \; \theta = \frac{2k\pi}{n}$$

es decir las raices son

$$z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots n-1.$$

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

1.P.P. SEPTIEMBRE 2005.

1.Pregunta.

i) Definir la función exponencial compleja.

ii) Enunciar y justificar sus propiedades mas importantes.

2.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema de Cauchy-Goursat para el triángulo.

3.Pregunta. Sea $f(z)$ una función compleja definida en el disco unidad abierto $D = \{z \,||z| < 1\}$, que es uniformemente contínua en D. Probar que para toda sucesión $\{z_n\} \subset D$, que converge a un punto $\zeta = e^{i\theta}$ de la circunferencia, entonces existe el límite

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) \ ,$$

y depende solamente de ζ. Es decir para otra sucesión $\{z'_n\} \subset D$, $z'_n \to \zeta$, el límite

$$\lim_{n \to \infty} f(z'_n) \ ,$$

sería el mismo que para la sucesión precedente.

4.Pregunta. Consideremos la función $f(z) = e^z$ en el disco cerrado $\{z \,||z| \leq 1\}$. Encontrar los puntos de este conjunto donde el módulo de $f(z)$ alcanza el máximo y el mínimo.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

SEPTIEMBRE 2005. I.P.P.

1. PROBLEMA. Sea $f(z)$ una función compleja definida en el disco unidad $D=\{z \,|\, |z|<1\}$ abierto, es decir

$$f : D \to \mathbb{C},$$

que es uniformemente continua en D. Probar que para toda sucesión de puntos $\{z_n\} \subset D$ convergiendo a un punto de la frontera $\zeta = e^{i\theta}$, entonces el $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ existe y depende sólo de ζ. Es decir para otra sucesión $\{z'_n\} \subset D$, $z'_n \to \zeta$, el $\lim_{n\to\infty} f(z'_n)$ será el mismo que para la sucesión precedente.

SOLUCION

Por la ~~convergencia~~ continuidad uniforme de $f(z)$ en D, dado $\varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ tal que si $z', z \in D$, $|z-z'|<\delta$ entonces $|f(z)-f(z')|<\varepsilon$.

Sea $\{z_n\} \to \zeta = e^{i\theta}$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|z_n - \zeta| < \delta/2$, para $n > n_0$. Por tanto para $m, n > n_0$, $|z_n - z_m| < |z_n - \zeta| + |z_m - \zeta| < \delta$ y por tanto $|f(z_n) - f(z_m)| < \varepsilon$. Es decir $\{f(z_n)\}$ es una sucesión de Cauchy y por