APUNTES DE TOPOLOGÍA

Daniel Pérez Efremova

3 de agosto de 2020

Índice

1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS. DEFINICIONES BÁSICAS. **2**

2. SUBCONJUTOS DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO. **6**

3. SUCESIONES Y BASES DE FILTRO. ESPACIOS T_2 **8**

4. APLICACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS **10**

5. TOPOLOGÍA INICIAL. SUBESPACIOS TOPOLÓGICOS. ESPACIOS PRODUCTO. **12**

6. TOPOLOGÍA FINAL. TOPOLOGÍA COCIENTE. **16**

7. ESPACIOS COMPACTOS. ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS **18**

8. ESPACIOS CONEXOS **22**

1. ESPACIOS TOPOLÓGICOS. DEFINICIONES BÁSICAS.

- **Base de entornos abiertos en los puntos de un conjunto**

  Sea X un conjunto no vacío, y para cada punto $p \in X$ consideramos una familia $B(p)$ de subconjuntos de X. Cada familia $B(p)$ es una base de entornos abiertos del punto p si todas las familias $B(p)$ verifican:

  1. Si $U \in B(p)$, entonces $p \in U$
  2. Si $U \in B(p)$ y $V \in B(p)$, entonces existe un conjunto $W \in B(p)$ tal que $W \subset U \cap V$
  3. Si $U \in B(p)$, para cada punto $q \in U$ existe un subconjunto $V \in B(q)$ tal que $V \subset U$.

  Para referirnos a todas las bases de entornos en X, diremos que se ha definido un *sistema de bases de entornos abiertos* para los distintos puntos de X.

- **Conjunto abierto**

  Sea X un conjunto para el que se ha definido un sistema de bases de entornos abiertos $B(p)$. Un subconjunto A de X es abierto si es vacío, o bien, para cada $p \in A$ existe un subconjunto $U \in B(p)$ tal que $U \subset A$.

- **Topología de un conjunto**

  La topología T del conjunto X, determinada por las bases de entornos abiertos $B(p)$ para cada $p \in X$, es la familia de conjuntos abiertos de X definidos por medio de las bases de entornos abiertos $B(p)$.

  La definición de topología de un conjunto se basa en el sistema de bases de entornos abiertos que permite definir los abiertos, por lo que es posible que varios sistemas den lugar a la misma topología T, lo cual motiva la definición de bases de entornos abiertos equivalentes.

- **Bases de entornos equivalentes**

  Sea X un conjunto y en él los sistemas de bases de entornos abiertos $B(p)$ y $B'(p)$ para cada $p \in X$. Las bases de entornos abiertos son equivalentes cuando determinan la misma topología T en X.

  CRITERIO PRÁCTICO: $B(p)$ y $B'(p)$ son equivalentes si, y solo si, para cada $p \in X$, dado un conjunto cualquiera $U \in B(p)$ existe un $U' \in B'(p)$ tal que $U' \subset U$ y que dado $V' \in B'(p)$ existe $V \in B(p)$ tal que $V \subset V'$.

- **Propiedades de una topología**[1]

  Sea X un conjunto y en él definido un sistema de bases de entornos abiertos $B(p)$, la topología T definida sobre X cumple:

  1. X y $\emptyset$ pertenecen a T.
  2. Dada una familia finita o infinita de abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda \in L}$, entonces $\bigcup_{\lambda \in L} U_\lambda \in T$
  3. Dada una familia finita de abiertos $\{U_\lambda\}_{\lambda=1}^n$, entonces $\bigcap_{\lambda=1}^n U_\lambda \in T$.

  Esta propiedad es un criterio práctico importante para decidir si un conjunto T es una topología de un conjunto X, de hecho, conociendo X y una familia H de subconjuntos de X que verifique las propiedades anteriores, basta definir $H(p) = \{U \in H | p \in U\}$ para que $H(p)$ sea base de entornos abiertos en X y H sea topología de T.

  NOTA IMPORTANTE: en general no es cierto que cuando se tiene en X un sistema de bases de entornos abiertos, todos los elementos de todas estas familias constituyan una topología para X. Hay que tener cuidado al definir una topología a través de bases de entornos abiertos, comprobando que las uniones e intersecciones de elementos de T pertenecen a T.

- **Espacio Topológico y espacio métrico**

  Un espacio topológico es un par (X, T) con X un conjunto no vacío y T una topología definida sobre X.

  Decimos que el espacio (X, T) es métrico si la topología T es métrica o metrizable. Esto es, T está basada en la distancia $d : X^2 \longrightarrow R$ que permite definir las bolas abiertas de centro p y radio ϵ denotadas $B(p, \epsilon)$ que formaran la base de entornos abiertos para cada $p \in X$.

- **Relación entre topologías**

  Sean T y T' dos topologías definidas sobre un mismo conjunto X decimos que T' es mas fina que T si para cada abierto $U \in T$ existe $U' \in T'$ tal que $U \subset U'$, es decir, cada abierto de T es un abierto de T', de manera que $T \subset T'$.

  Es un concepto importante por que permite inducir un orden de más fina a menos fina en el conjunto de todas las topologías $\mathscr{T}$ que pueden definirse sobre un conjunto X.

- **Conjuntos cerrados**

  En un espacio topológico (X, T) un subconjunto $A \subset X$ es abierto si su complementario $X - A$ es abierto en la topología.

[1] ver la similitud del concepto de topología con el concepto de $\sigma - algebra$

NOTA IMPORTANTE: No se deduce de las definiciones de abierto y cerrado que sean excluyentes. Un conjunto puede ser abierto y cerrado o ninguno de ambos.

- **Base de una topología**

Dado un espacio topológico (X, T) llamamos base de la topología T a una subfamilia B de la topología T, tal que cualquier abierto no vacío U de T es unión de elementos de B.

NOTA IMPORTANTE: Los elementos de la base son abiertos de T por la definición de B, pero no forman la topología por sí mismos, no confundir con que, la topología la formamos con las uniones entre los elementos de B.

CRITERIO PRÁCTICO: Muy útil para saber si una familia de subconjuntos de un conjunto X puede ser base de alguna topología T sobre X.

Sea X un conjunto y $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de X. F es base de alguna topología sobre X si, y solo si, se verifica:

1. $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = X$
2. Si A_λ, A_μ son elementos de F cualesquiera, y $A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$, para cualquier punto $t \in A_\lambda \cap A_\mu$ existe $A_\alpha \in F$ tal que $t \in A_\alpha \subset A_\lambda \cap A_\mu$

- **Subase de una topología**

Una familia de abiertos $\mathscr{A}$ de un espacio topológico (X, T) es una subase de la topología T cuando la familia formada por las intersecciones finitas de los elementos de $\mathscr{A}$ es una base de T.

- **Topología engendrada por una familia cualquiera de subconjuntos**

Es una noción que surge de relajar las condiciones para que una familia F de subconjuntos de X sea base de alguna topología T de X, dando lugar a que F sea subase.

Sea X un conjunto no vacío y $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una familia de subconjuntos de X tal que $\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda = X$. La familia formada por las intersecciones finitas de F es base para alguna topología del conjunto X.

Así, los abiertos de tal topología T de X resultan ser uniones arbitrarias de intersecciones finitas de los elementos de F, y por eso decimos que T está engendrada por una familia cualquiera de subconjuntos F (que cumpla la condición).

- **Entorno de un punto**

Sea (X, T) un espacio topológico, un subconjunto $A \subset X$ es entorno del punto $p \in X$ si existe un abierto $U \in T$ tal que $p \in U \subset A$.

NOTA IMPORTANTE: Se deduce directamente que todo abierto de T es entorno de todos sus puntos y, por otro lado, no todo entorno de un punto es necesariamente un conjunto abierto, puesto que un cerrado C puede contener un abierto $U \in T$ tal que $p \in U \subset C$ y C sería entorno (cerrado) de p.

- **Sistema de entornos de un punto**

  Se denota $E(p)$ y es la familia de todos los entornos de un punto p en un espacio topológico (X, T). Los sistemas de entornos de $E(p)$ de los puntos de un espacio topologico cumplen las propiedades [2]:

  1. Si $A \in E(p)$, entonces $p \in A$
  2. Si $A \in E(p)$ y $A \subset A' \subset X$ entonces $A' \in E(p)$
  3. La intersección de un número finito de entornos de p es también entorno de p.
  4. Si $A \in E(p)$ existe un entorno $U \in E(p)$ tal que, para todo $q \in U$ es $A \in E(q)$.

- **base de entornos de un punto o sistema fundamental de entornos**

  Sea p un punto en un espacio topológico (X, T) y $E(p)$ el sistema de todos sus entornos. Una subfamilia $A(p)$ de $E(p)$ es un sistema fundamental de entornos de p si todo entorno de p contiene un elemento de $A(p)$, es decir, dado $U \in E(p)$ existe $V \in A(p)$ tal que $V \subset U$.

  NOTA IMPORTANTE: No confundir con las bases de entornos abiertos del inicio de la sección 1. En este primer caso inicial no suponemos estructura topológica alguna. En la definición del concepto de este párrafo sí suponemos estructura topológica definida sobre un conjunto X. Desde el punto de vista de esta definición, una base de entornos abiertos es una base de entornos de un punto formada por entornos que son abiertos en (X, T).

- **Axiomas de numerabilidad**

  Los axiomas hacen referencia a la numerabilidad de la base de entornos de cada punto (axioma I) y de la base de una topología (axioma II). Su nombre viene de que el espacio topológico (R, T_u) verifica que T_u tiene una base numerable y cada $x \in R$ tiene una base de entornos numerable.

  Decimos que el espacio topológico (X, T) cumple el Axioma I de numerabilidad si cada punto $x \in X$ tiene una base de entornos $A(p)$ numerable. Análogamente, cumple el Axioma II de numerabilidad si la topología T tiene una base numerable.

  NOTA IMPORTANTE Cualquier espacio métrico verifica el Axioma I de numerabilidad.

[2] TB, prop.8, pág. 30

Además, suele ser buena estrategia basarse en los racionales o naturales para buscar, o probar que no existe, base numerable para una topología.

2. SUBCONJUTOS DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO.

Esta sección es esencial para la asignatura, ya que todas las demás secciones utilizan repetidamente los conceptos de esta, si no se tiene bien clara, apenas se puede avanzar.

- **Clasificación de los puntos-subconjuntos de un espacio topológico (X, T) en relación con un subconjunto M**

  Consideramos un espacio topológico cualquiera (X, T), un subconjunto $M \subset X$ y un punto $t \in X$.

  1. <u>Punto interior</u>: t es interior a M si EXISTE algún entorno V de t contenido en M. Es equivalente a que M sea entorno de t (por las propiedades de los entornos). El conjunto de todos los puntos interiores a M define su interior $int(M)$.
  2. <u>Punto exterior</u>: t es exterior a M si EXISTE un entorno V de t que no corta a M, es decir, $M \cap V = \emptyset$. Es equivalente a que t sea interior al complementario de $M^c = X - M$.
     El conjunto de todos los puntos exteriores a M define su exterior $ext(M)$.
  3. <u>Punto frontera</u>: t es punto frontera de M si TODO entorno V de t corta a los conjuntos M y $X - M$, es decir, $V \cap M \neq \emptyset$ y $(X - M) \cap V \neq \emptyset$.
     El conjunto de todos los puntos frontera de M define su frontera $front(M)$.
  4. <u>Punto adherente</u>: t es adherente a M si TODO entorno V de t es $V \cap M \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos adherentes a M es su adherencia $adh(M)$.
  5. <u>Punto de acumulación</u>: t es punto de acumulación de M si TODO entorno de V de t es $(V - \{t\}) \cap M \neq \emptyset$. El conjunto de todos los puntos de acumulación es su conjunto derivado $der(M)$.
  6. <u>Punto aislado</u>: t es punto aislado de M si EXISTE un entorno V de t tal que $(V - \{t\}) \cap M = \emptyset$.

     NOTA IMPORTANTE: debemos observar que los puntos de acumulación y aislados son subtipos de puntos adherentes.

- **Propiedades y relaciones relevantes**

  Consideramos un espacio topológico cualquiera (X, T), un subconjunto $M \subset X$ y un punto $t \in X$.

  1. Para cualquier $M \subset (X, T)$, el conjunto $int(M)$ es abierto. Además, el mayor abierto contenido en M. Del mismo modo $ext(M)$ es abierto y $front(M)$ siempre es cerrado.

2. $front(M) = front(X - M) = X - (int(M) \cup ext(M))$
3. Se cumple $adh(M) = int(M) \cup front(M) = X - ext(M)$ y que $adh(X - M) = ext(M) \cup front(M) = X - int(M)$, de ambas deducimos que $adh(M) \cap adh(X - M) = front(M)$.

   Deducimos directamente de las expresiones anteriores que la adherencia de un conjunto siempre es un conjunto cerrado.
4. $adh(M) = M \cup der(M)$. De hecho, el conjunto M es cerrado si contiene todos sus puntos de acumulación, ya que en ese caso, $adh(M) = M$ y la adherencia siempre es un conjunto cerrado.

3. SUCESIONES Y BASES DE FILTRO. ESPACIOS T_2

- **Sucesiones y bases de filtro**

  Una sucesión en un conjunto X es una aplicación $s : N \longrightarrow X$ que a cada natural le asigna un elemento del conjunto X. La generalización natural de este concepto es la base de filtro.

  Una base de filtro en X es una familia $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ de subconjuntos de X que verifica:

  1. $A_\lambda \neq \emptyset$, para TODO $\lambda \in L$.
  2. Dados A_λ, $A_\mu \in F$ EXISTE un elemento $A_\alpha \in F$ tal que $A_\alpha \subset A_\lambda \cap \mathrm{A}_\mu$.

  NOTA IMPORTANTE: El concepto de base de filtro en un conjunto X no supone definida una estructura topológica en X. Además, cabe señalar que una base de entornos en un punto $p \in X$ es una base de filtro por cumplir 1 y 2.

- **Base de filtro de Fréchet**

  Es un concepto recurrente en las aplicaciones.

  Dada una sucesión $s : N \longrightarrow X$ en un conjunto X, con $s(i) = a_i$, la base de filtro F formada por los conjuntos $A_m = \{a_i \in s, i \geq m\}$ es la base de filtro de Fréchet asociada a la sucesión $\{a_i\}_{i \in N}$.

- **Límite de una sucesión y de una base de filtro**

  Para poder definir el límite de una sucesión (o base de filtro) en X, necesitamos tener definida una topología T, y cuando usemos el concepto de límite se debe hacer en el contexto concreto de tal topología T, puesto que el límite de una sucesión en X depende de la topología definida sobre X. Así pues, solo hablamos de límites en el contexto de espacios topológicos (X, T).

  Sea $s = \{a_i\}_{i \in N}$ una sucesión definida sobre un espacio topológico (X, T). Decimos que un punto p es límite de la sucesión s si para TODO entorno U de p EXISTE un número natural m tal que para TODO $i \geq m$ es $a_i \in U$. Cuando esto suceda decimos que s converge a p.

  Sea $F = \{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ una base de filtro en el espacio topológico (X, T), un punto p es límite de la base de filtro F si dado un entorno cualquiera U de p EXISTE un elemento A_λ de F tal que $A_\lambda \subset U$.

  NOTA IMPORTANTE: De las definiciones podemos deducir directamente que $s = \{a_i\}_{i \in N}$ es coonvergente a un punto p SI Y SOLO SI la base de filtro de Frénet de $\{a_i\}_{i \in N}$ es convergente a p.

También, aun que no se desprenda directamente de las definiciones, debemos tener en cuenta que **el límite de una sucesión no tiene por qué ser único**, ya que pueden haber varios puntos p que cumplan la definición de límite. El límite es único en algunos espacios topológicos concretos, por ejemplo, en (R, T_u), el límite de cualquier sucesión, si existe, es único.

- **Espacios T_2 o de Hausdorff**

  Es un concepto muy recurrente en la práctica por su utilidad.

  Un espacio topológico (X, T) verifica el axioma de separación T_2 cuando dados dos puntos distintos cualesquiera $p, q \in X$, EXISTEN entornos U de p y V de q que son disjuntos, es decir, $U \cap V = \emptyset$.

  NOTA IMPORTANTE: En cualquier espacio topológico que se verifique el axioma de separación T_2 las sucesiones (o bases de filtro) convergentes tienen un único punto límite. El espacio (R, T_u) es separado T_2.

- **Puntos de aglomeración**

  Sea $s = \{a_i\}_{i \in N}$ una sucesión en el espacio topológico (X, T). Un punto $p \in X$ es de aglomeración de s si para TODO entorno U de p, y para TODO A_m de la base de filtro de Fréchet de s, se tiene $A_m \cap U \neq \emptyset$.

  Se puede caracterizar el conjunto de todos los puntos de aglomeración de una sucesión como la intersección de la adherencia de todos los elementos de la base de filtro de Fréchet, es decir:

  $$\bigcap_{m \in N} \{Adh(A_m)\} \neq \emptyset$$

  tal que $A_m = \{a_i : i \geq m\}$

  NOTA IMPORTANTE: Cualquier punto límite de una sucesión es punto de aglomeración, pero el recíproco no es cierto en general.

4. APLICACIONES CONTINUAS. HOMEOMORFISMOS

Su estudio está motivado, entre otros motivos, por que si F es una base de filtro convergente a p, entonces $f(B)$ es base de filtro convergente al punto $f(p)$. El concepto más importante es el de homeomorfismo, que es una aplicación biyectiva y bicontinua.

- **Aplicación continua en un punto**

  Sea $f : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ una aplicación entre espacios topológicos y $p \in X$. La aplicación f es continua en el punto p cuando dado un entorno cualquiera V del punto $f(p)$, EXISTE un entorno U de p tal que $f(U) \subset V$.

  DEFINICIÓN ALTERNATIVA: Se basa en que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir $U \subset f^{-1}(V)$, es decir, $f^{-1}(V)$ contiene un entorno U de p, lo que convierte a $f^{-1}(V)$ en entorno de p. Podemos definir entonces la continuidad de la siguiente forma:

  La aplicación f es continua en p cuando dado un entorno cualquiera V de $f(p)$, su imagen inversa $f^{-1}(V)$ es entorno de p.

  NOTA IMPORTANTE: Para definir la continuidad de una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es necesario que X e Y estén provistos de estructura topológica, es decir, la continuidad de una aplicación está completamente supeditada a las topologías definidas sobre los espacios.

- **Continuidad en todo un subespacio**

  Una aplicación $f : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ es continua en $M \subset X$ cuando es continua en todo punto $p \in M$.

  CRITERIOS PRÁCTICOS: Sea $f : (X,Y) \longrightarrow (Y,S)$ una aplicación entre espacios topológicos

  1. f es continua en (X,T) SI, Y SÓLO SI, para TODO abierto V del espacio (Y,S) la imagen inversa $f^{-1}(V)$ es un abierto del espacio (X,T).
  2. f es continua en (X,T) SI, Y SÓLO SI, para TODO cerrado M de (Y,S), es $f^{-1}(M)$ un cerrado de (X,T).
  3. f es continua en (X,T) SI, Y SÓLO SI, para TODO elemento V de una base del espacio (Y,S), la imagen inversa $f^{-1}(V)$ es abierto de (X,T).
  4. f es continua en (X,T) SI, Y SÓLO SI, para TODO elemento W de una subase de (Y,S) es $f^{-1}(W)$ un abierto de (X,T).

- **Homeomorfismo**

  Una aplicación $f : (X,T) \longrightarrow (Y,S)$ es un homeomorfismo cuando f es biyectiva y tanto f como f^{-1} son continuas. Diremos entonces que los espacios (X,T) e (Y,S) son homeomorfos.
  Además, observamos que f^{-1} es homeomorfismo y la composición de homeomorfismos es homeomorfismo

  NOTA IMPORTANTE: Se trata de una noción central ya que los homeomorfismos permiten clasificar espacios topológicos, donde dos espacios topológicos son equivalentes topológicamente SI, Y SÓLO SI son homeomorfos.

- **Invariante topológico**

  Decimos que cierta propiedad es un invariante topológico si, cuando la verifica un espacio topológico entonces la verifican todos los espacios homeomorfos a él.

  INVARIANTES IMPORTANTES:

  1. Cumplir los Axiomas I y II de numerabilidad
  2. Tener un subconjunto denso numerable (espacio separable)
  3. Ser espacio separado T_2
  4. Ser espacio compacto

  Si dos espacios topológicos no coinciden en algún invariante, entonces no pueden ser homeomorfos, de aquí que conocer invariantes topológicos es una herramienta esencial para probar rápidamente que dos espacios topológicos no pueden ser homeomorfos.

5. TOPOLOGÍA INICIAL. SUBESPACIOS TOPOLÓGICOS. ESPACIOS PRODUCTO.

- **Topología inducida por una aplicación (topología inicial)**

  Sea X un conjunto y $f : X \longrightarrow (Y, S)$ una aplicación de X en el espacio topológico (Y, S). La familia de conjuntos definida por $T = \{f^{-1}(V), V \in S\}$ es una topología para el conjunto X.

  Además T es la topología menos fina que hace que f sea continua, y está completamente determinada por la aplicación f y la topología S sobre Y.

  PROPIEDADES

  Suponemos que X es un conjunto, (Y, S) un espacio topológico y $f :\longrightarrow (Y, S)$ una aplicación entre ambos.

  1. Un conjunto A de X es cerrado SI, Y SOLO SI, A es imagen inversa por f de un cerrado del espacio (Y, S).
  2. Un subconjunto M de X es entorno de un punto $p \in X$ SI, Y SOLO SI, es la imagen inversa por f de un entorno de $f(p)$.
  3. PROPIEDAD UNIVERSAL: para TODO espacio topológico (M, R) y cualquier aplicación $g : (M, R) \longrightarrow (X, T)$, la aplicación g es continua SI, Y SOLO SI, $f \circ g : (M, R) \longrightarrow (Y, S)$ es continua.

- **topología relativa o subordinada. Subespacio topológico**

  Se trata de un caso particular de topología inducida muy importante por sus aplicaciones prácticas.

  Sea (X, T) un espacio topológico, M un subconjunto de (X, T) y $j : M \longrightarrow (X, T)$ la inyección de M en X, definida por $j(x) = x$ para cada $x \in X$. La topología T_M inducida en X por la aplicación j es la topología relativa de M o subordinada por el espacio (X, T) en M.

  Decimos entonces que (M, T_M) es subespacio topológico de (X, T).

  NOTA IMPORTANTE: Para definir la topología subordinada la condición de que la inyección j sea continua no es suficiente por sí misma para que T_M quede completamente determinada, ya que pueden haber varias topologías que lo verifiquen, debemos exigir que sea la menos fina tal que j es continua. La más fina siempre es la discreta.

CRITERIO PRÁCTICO PARA ENCONTRAR ABIERTOS DE LA TOPOLOGÍA SUBORDINADA:

Sea M un subconjunto del espacio topológico (M, T_M). $A \subset M$ es abierto de la topología subordinada T_M de M SI, Y SÓLO SI, existe un abierto U de (X, T) tal que $A = M \cap U$.

Este resultado se deduce directamente de que $A = j^{-1}(U) = M \cap U$ que es abierto por la definición de topología inducida. Lo que nos lleva a plantear una definición más manejable de topología subordinada o relativa:

$$T_M = \{M \cap U : U \in T\}$$

PROPIEDADES: las propiedades de este espacio topológico se deducen directamente de las de la topología inducida, ya que la subordinada o relativa es un caso particular de la inducida o inicial, solo que considerando la inyección j en lugar de una aplicación continua cualquiera f.

Cabe destacar que los abiertos (cerrados) de (M, T_M) no tienen por que ser abiertos (cerrados) en (X, T). Esto solo se cumple SI, Y SÓLO SI, M es abierto (cerrado).

- **Continuidad de aplicaciones restringidas a un subespacio**

  Si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ es una aplicación continua, la aplicación restringida al subespacio (M, T_M) de (X, T) dada por $f|_M : (M, T_M) \longrightarrow (Y, S)$ es continua.
  (El recíproco no es cierto en general)

- **Propiedades hereditarias**

  Decimos que una propiedad topológica es hereditaria cuando si la tiene un espacio topológico, la tienen todos sus subespacios.

  PROPIEDADES HEREDITARIAS CONOCIDAS:

  1. ser espacio T_2 o de Haussdorf.
  2. cumplir los axiomas I y II de numerabilidad
  3. ser espacio metrizable

- **Espacios producto**

  Sean (X_1, T_1) y (X_2, T_2) dos espacios topológicos. La topología inducida en el conjunto $X_1 \times X_2$ por las proyecciones coordenadas $p_i : X_1 \times X_2 \longrightarrow X_i$ con $i = 1, 2$ es la topología producto $T_1 \times T_2$ y el espacio $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es el producto topológico de los dos espacios. La topología producto es la menos fina que hace tales proyecciones continuas.

CRITERIO PRÁCTICO PARA ENCONTRAR UNA BASE DE UN ESPACIO TOPOLÓGICO PRODUCTO

Dados dos espacios topológicos (X_1, T_1) y (X_2, T_2), una base para la topología producto $T_1 \times T_2$ es la familia $B = \{U_1 \times U_2 : U_1 \in T_1, U_2 \in T_2\}$.
Esto implica directamente que un conjunto $A \subset X_1 \times X_2$ es abierto de $T_1 \times T_2$ SI, Y SÓLO SI, $A = \bigcup_{\lambda \in L} \{U_1^\lambda \times U_2^\lambda\}$.

ADAPTACIÓN DE LA PROPIEDAD UNIVERSAL

Una aplicación $f : (Y, S) \longrightarrow (X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$ es continua SI, Y SÓLO SI, las dos aplicaciones $p_1 \circ f$ y $p_2 \circ f$ son continuas.

- **Aplicación abierta**

Una aplicación $f : (Y, S) \longrightarrow (X, T)$ es abierta (cerrada) si para cada abierto (cerrado) U de S, la imagen $f(U)$ es un abierto (cerrado) de T.

La definición resulta familiar con las aplicaciones continuas pero su definición no debe confundirse. La aplicación f es globalmente continua si $f^{-1}(U)$ es abierto de S cualquiera que sea el abierto U de T.

Se aprecia que en las continuas exigimos que la contraimagen de un abierto sea un abierto, y en las abiertas exigimos que la imagen de un abierto sea abierta.

RESULTADOS RELEVANTES ASOCIADOS A LAS APLICACIONES ABIERTAS (CERRADAS)

Vemos que se trata de un concepto muy útil para encontrar homeomorfismos.

1. Una aplicación biyectiva es abierta si es cerrada.
2. La aplicación inversa de una biyección continua es una biyección abierta y cerrada.
3. Una aplicación biyectiva, continua y abierta (cerrada) es un homeomorfismo.
4. Si una aplicación es homeomorfismo entonces la aplicación es abierta, cerrada y continua.
5. Sean $f : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ y B una base de la topología T, f es abierta si para TODO $U \in B$ se tiene que $f(U)$ es abierto de S.
6. La composición de dos aplicaciones abiertas es abierta. Análogo para cerradas.

- **Base de entornos de un punto en un espacio producto**

Sea (x_1, x_2) un punto del espacio producto $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$. Si $\{V_j\}_{j \in J}$ es una base de entornos de x_1 en (X_1, T_1) y $\{W_k\}_{k \in K}$ una base de entornos de x_2 en (X_2, T_2), los conjuntos $\{V_j \times W_k\}$ constituyen una base de entornos de (x_1, x_2) en el espacio producto.

- **Propiedades nultiplicativas**

  Decimmos que una propiedad topológica es finito-multiplicativa cuando, si la cumplen (X_1, T_1) y (X_2, T_2), entonces la cumple $(X_1 \times X_2, T_1 \times T_2)$. Si además lo cumple un producto arbitrariamente grande de espacios topológicos, decimos que la propiedad es multiplicativa.

  PROPIEDADES FINITO-MULTIPLICATIVAS CONOCIDAS

  1. Cumplir los axiomas I y II de numerabilidad.
  2. Ser espacio T_2 o de Haussdorf. (multiplicativa también)
  3. Ser metrizable.
  4. Ser espacio compacto.

6. TOPOLOGÍA FINAL. TOPOLOGÍA COCIENTE.

- **Topología final para una aplicación**

  Sea una aplicación $f : (X,T) \longrightarrow Y$ de un espacio topológico en un conjunto. La familia de conjuntos de Y dada por $S = \{A \subset Y : f^{-1}(A) \in T\}$ es la topología de Y más fina, que además hace a f continua.

  PROPIEDADES DE LA TOPOLOGÍA FINAL

  1. Un conjunto M es cerrado en (Y,S) SI, Y SÓLO SI, $f^{-1}(M)$ es cerrado en (X,T).
  2. Si $q \in f(X)$ es un punto de Y, y V es entorno de q en la topología final de f, $f^{-1}(V)$ es entorno de todo punto p tal que $f(p) = q$.
  3. PROPIEDAD UNIVERSAL: Si (Y,S) es un espacio topológico con la topología final para una aplicación $f : (X,T) \longrightarrow Y$, entonces para cualquier espacio (Y',S'), la aplicación $g : (Y,S) \longrightarrow (Y',S')$ es continua si la aplicación $g \circ f : (X,T) \longrightarrow (Y',S')$ es continua.

- **Topología cociente**

  Dado un espacio topológico (X,T) y una relación de equivalencia E, queda determinado el conjunto cociente X/E y la aplicación canónica $p : (X,T) \longrightarrow X/E$. La topología cociente se define como la topología final por la aplicación p.

  CONJUNTO SATURADO POR LA RELACIÓN E: Un conjunto $A \subset X$ se dice saturado por la relación de equivalencia E si se verifica que para TODO $x \in A$ $E(x) \subset A$, es decir, que para cualquier punto x, A contiene la clase de equivalencia de x.
  Se define e, saturado de un subconjunto A cualquiera de X, como el mínimo conjunto saturado que contiene a A, que trivialmente se puede escribir como $\bigcup_{x \in A}\{E(x)\}$.

  APLICACIÓN COMPATIBLE CON UNA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA: Una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ es compatible con la relación de equivalencia E de X si toma el mismo valor en puntos equivalentes, es decir, si xEy entonces $f(x) = f(y)$.

  RELACIÓN ENTRE DOS RELACIONES DE EQUIVALENCIA: Sean E y E' dos relaciones de equivalencia definidas sobre X, decimos que E es mas fina que E' si para cualesquiera $x, y \in X$ con xEy entonces $xE'y$.

  RELACIÓN DE EQUIVALENCIA DEFINIDA POR UNA APLICACIÓN: Sea $f : (X,T) \longrightarrow Y$, entonces determina una relación de equivalencia $E(f)$ en X por la condición: $xE(f)y$ SI, Y SÓLO SI, $f(x) = f(y)$ y la aplicación inducida $f' : X/E(f) \longrightarrow f(X)$ es biyectiva.

Un resultado interesante es que si $f : (X, T) \longrightarrow Y$ es sobreyectiva, la aplicación $f'(: X/E(f), T_f) \longrightarrow (Y, S)$ con S la topología final de f, tenemos que f' es homeomorfismo.

PROPIEDADES DE LA TOPOLOGÍA COCIENTE

1. Un conjunto M de X/E es cerrado en la topología cociente SI, Y SÓLO SI, $p^{-1}(M)$ es cerrado en el espacio (X, T).
2. PROPIEDAD UNIVERSAL: Para TODO espacio (Y, S) y para TODA aplicación $g : (X/E, T_E) \longrightarrow (Y, S)$, la aplicación g es continua SI, Y SÓLO SI, la aplicación $g \circ p : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ es continua.
3. La aplicación canónica $p : (X, T) \longrightarrow (X/E, T_E)$ es una aplicación abierta (cerrada) SI, Y SÓLO SI, el saturado de un conjunto abierto (cerrado) es abierto.

DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DE UNA APLICACIÓN CONTINUA

Dada la aplicación $f : X \longrightarrow Y$, la relación de equivalencia $E(f)$ permite descomponer la aplicación en:

$$X \xrightarrow{p} X/E(f) \xrightarrow{i} f(X) \xrightarrow{j} Y$$

donde p es sobreyectiva, i es biyectiva y j es inyectiva.

Cabe destacar que la aplicación i al ser biyectiva, se le pueden imponer ciertas condiciones para que sea homeomorfismo, en particular, i es homeomorfismo SI, Y SÓLO SI, la imagen por f de todo conjunto abierto o cerrado de X que sea saturado por $E(f)$, sea un abierto o cerrado del subespacio $f(X)$.

TRANSITIVIDAD DE ESPACIOS COCIENTES

Supongamos que en X tenemos definidas dos relaciones de equivalencia E y E' de manera que E es más fina que E', la aplicación $\phi : \frac{X/E}{X/E'} \longrightarrow X/E'$ es un homeomorfismo.

Además se tiene la siguiente descomposición canónica para la aplicación entre cocientes $p' : X/E \longrightarrow X/E'$, que es:

$$X/E \xrightarrow{\psi} \frac{X/E}{X/E'} \xrightarrow{\phi} X/E'$$

donde ϕ siempre es biyectiva (y homemomorfismo en las condiciones anteriores).

7. ESPACIOS COMPACTOS. ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

- **Recubrimiento de un conjunto**

  Dado un conjunnto X, una familia $\{A_l\}_{l\in L}$ es un recubrimiento de X si $\bigcup_{l\in L}\{A_l\} = X$. Si además L es finito, decimos que el recubrimiento es finito.

- **Subrecubrimiento de un conjunto**

  Si A' es una subfamilia de A, tal que $\bigcup_{l\in L'}\{A'_l\} = X$ entonces, decimos que A' es subrecubrimiento de A. Un subrecubrimiento de A viene dado por $\bigcup_{l\in L'\subset L}\{A_l\} = X$.

- **Recubrimiento por abiertos de un conjunto**

  Sea (X, T) un espacio topológico y $A = \{A_l\}_{l\in L}$ un recubrimiento de X entonces, si TODO $A_l \in A$ es abierto de la topología T, decimos que A es recubrimiento abierto de (X, T).

- **Espacio compacto**

  Decimos que un espacio topológico (X, T) es compacto cuando TODO recubrimmiento abierto de él tiene algún subrecubrimiento finito.

- **Caracterización de espacios compactos por medio de cerrados**

  Un espacio topológico (X, T) es compacto SI, Y SÓLO SI, toda familia de conjuntos cerrados $\{F_l\}_{l\in L}$ de (X, T) de intersección vacía tiene una subfamilia finita $\{F_l\}_{l\in L'}$ con $L' \subset L$ de intersección vacía.

- **Caracterización de espacios compactos por medio de bases de filtro**

  Un espacio topológico (X, T) es compacto SI, Y SÓLO SI, toda base de filtro $\{B_l\}_{l\in L}$ tiene algún punto de aglomeración. Es decir:

  $$\bigcap_{l\in L} Adh(B_l) \neq \emptyset$$

- **Sucesiones en un espacio compacto**

  En un espacio topológico (X, T) compacto, si una sucesión $s = \{a_i\}_{i\in N}$ tiene un único punto de aglomeración p, entonces s convergente a p.

- **Conjuntos infinitos en un espacio compacto**

  Si (X, T) es compacto, cualquier subconjunto infinito M de X, tiene almenos un punto de acumulación en X.

Cabe observar que un espacio compacto X, con la topología discreta, es necesariamente finito, ya que todo punto sería aislado, y si no hay puntos de acumulación, entonces debe ser finito por la propiedad anterior.

- **PROPIEDADES RESEÑABLES**

  Ser espacio compacto es un invariante topológico y una propiedad multiplicativa, sin embargo no es hereditaria.

- **Subconjunto compacto de un espacio topológico**

  Sea (X, T) un espacio topológico, y M un subconjunto de X. Cuando el subespacio (M, T_M) es un espacio topológico compacto con la topología relativa, se dice que M es subconjunto compacto del espacio (X, T).

  NOTA IMPORTANTE: Es importante señalar que M debe estar dotado de la topología relativa T_M para que podamos decir que es subconjunto compacto, no así con otros conceptos cuya definición es independiente de la topología relativa, como ser denso, abierto, cerrado, etc.

  CARACTERIZACIÓN DE LOS SUBESPACIOS COMPACTOS A TRAVÉS DE CERRADOS

  Si (X, T) es un espacio topológico compacto, y M un subconjunto cerrado de (X, T) entonces el subespacio (M, T_M) es compacto.

- **Espacios regulares y normales**

  Un espacio topológico (X, T) es regular si para TODO conjunto cerrado M y TODO $p \notin M$ existen dos abiertos U, V en (X, T) que separan p y M.

  Diremos que un espacio topológico (X, T) es normal si para TODO par de conjuntos cerrados disjuntos, existen en él dos abiertos que los separan.

- **Espacios separables T_2 y compacidad**

  1. En un espacio (X, T) de Haussdorf, si M es un subconjunto compacto y p un punto de X tal que $p \notin M$, existen conjuntos abiertos U, V de T tales que $M \subset U$, $p \in V$ y $V \cap U = \emptyset$. Decimos entonces que U y V separan el punto p del compacto M.
  2. En un espacio Haussdorf (X, T) todo subconjuto compacto es cerrado.
  3. Sean (X, T) un espacio topológico compacto, (Y, S) un espacio Haussdorf, y $f : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ una aplicación continua. Si f es inyectiva, entonces es un homeomorfismo de (X, T) sobre el subespacio imagen $f(X)$.
  4. Todo espacio topológico (X, T) de Haussdorf y compacto es regular.

5. En un espacio (X, T) de Haussdorf, si M_1, M_2 son dos subconjuntos compactos disjuntos, existen abiertos U_1, U_2 que los separan.

- **Compacidad y operaciones conjuntistas usuales**

  Dado un espacio topológico (X, T), la unión finita y la intersección arbitraria de subconjuntos compactos $\{M_i\}_{i \in I}$, es un subconjunto compacto.

- **Compacidad sobre R y R^n**

  - En la recta numérica (R, T_u) un subespacio es compacto SI, Y SÓLO SI, es cerrado y acotado.
  - Si $f : (X, T) \longrightarrow (R, T_u)$ es continua, y (X, T) es compacto, entonces f alcanza al menos un máximo y un mínimo absolutos.

- **Espacios métricos y sucesiones**

  Sea X un espacio métrico, y M un subconjunto de X. Si p es un punto de acumulación de M, existe en M una sucesión infinita de puntos $\{x_i\}_{i \in N}$ que es convergente a p.

- **Número ρ de Lebesgue**

  Sea X un espacio métrico. Todo $\rho > 0$ es número de Lebesgue para un recubrimiento abierto $\{A_l\}_{l \in L}$ de X, si para TODO punto $x \in X$, la bola abierta $E(x, \rho)$ está contenida en algún A_l del recubrimiento.

  CRITERIO PRÁCTICO PARA SABER SI EXISTEN NÚMEROS DE LEBESGUE:

  Sea X un espacio métrico donde toda sucesión infinita tiene un punto de acumulación. Entonces, existe un número ρ de Lebesgue para todo recubrimiento abierto $\{A_l\}_{l \in L}$.

- **Espacios métricos compactos. Caracterización por sucesiones**

  Según el criterio práctico anterior, como un espacio compacto verifica que todo subconjunto infinito suyo tiene un punto de acumulación, y una sucesión es un subconjunto infinito, podemos deducir:

  1. En un espacio compacto, todo recubrimiento abierto verifica la propiedad del número ρ de Lebesgue.
  2. Si en un espacio métrico X toda sucesión tiene al menos un punto de acumulación, entonces el espacio X es compacto, y por tanto, es métrico compacto.

- **Sucesiones de Cauchy en espacios métricos compactos**

  En un espacio métrico X, una sucesión $\{x_l\}_{l\in L}$ es de Cauchy si para TODO número real $\epsilon > 0$, EXISTE un número natural m tal que para TODO $i, j \geq m$ se verifica $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$.

  NOTA IMPORTANTE: Recordamos que toda sucesión convergente es de Cauchy, pero no toda sucesión de Cauchy es convergente. Decimos que un espacio métrico X es completo si en X toda sucesión de Cauchy es convergente. En los espacios completos podemos decir entonces que una sucesión es convergente SI, Y SÓLO SI, es de Cauchy.

  Esta cuestión es importante por que nos permite enunciar un resultado muy útil, todo espacio métrico compacto es un espacio completo.

- **Propiedades topológicas de un espacio métrico compacto**

  Nos referimos a un espacio métrico y compacto X:

  1. X es normal y regular
  2. X verifica el II axioma de numerabilidad (Su topología admite una base numerable)
  3. X es separable, es decir, tiene un subconjunto denso y numerable.

- **Aplicaciones continuas sobre espacios métricos y compactos**

  Existe un resultado útil para probar que una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ continua, entre espacios métricos, es uniformemente continua, y es que basta que sea (X, d) compacto para que f sea uniformemente continua.

  CONTINUIDAD UNIFORME: Recordamos que dados dos espacios métricos (X, T) y (X', T'), la aplicación $f : X \longrightarrow X'$ es uniformemente continua, cuando, para TODO real $\epsilon > 0$, EXISTE δ tal que, si x_1, x_2 son dos puntos cualesquiera del espacio X, cuya distancia es $d(x_1, x_2) < \delta$ entonces la distancia entre sus imágenes es $d'(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$.

8. ESPACIOS CONEXOS

- **definición de espacio conexo**

  Un espacio topológico (X, T) es conexo cuando NO EXISTEN en él dos abiertos U, V disjuntos no vacíos, tales que $X = U \cup v$. En caso contrario, el espacio es no conexo.

  Es definición es equivalente a decir que (X, T) es conexo si NO EXISTE en él un conjunto U, distinto de X y $\emptyset$ que sea abierto y cerrado.

  EJEMPLOS ÚTILES: La recta real usual (R, T_u) es un espacio conexo. Un espacio discreto con más de un punto no es conexo.

- **Aplicaciones continuas y espacios conexos**

  1. Si $f : (X, T) \longrightarrow (Y, S)$ es una aplicación continua y el espacio (X, T) es conexo, entonces el subespacio imagen $f(X)$ de (Y, S) es conexo.
  2. **CRITERIO PRÁCTICO PARA RECONOCER ESPACIOS CONEXOS:** Un espacio (X, T) no es conexo SI, Y SÓLO SI, se puede definir una aplicación continua y sobreyectiva $f : X \longrightarrow \{a, b\}$ sobre el espacio discreto de dos puntos.

- **Subconjuntos conexos**

  Un subconjunto M de un espacio topológico (X, T) es conexo cuando el espacio (M, T_M) sea conexo.

  Al igual que la compacidad, la conexión es un concepto muy ligado a la topología T definida sobre X, de manera que un subespacio es conexo si con la topología relativa, tal subconjunto es conexo.

  CRITERIOS PRÁCTICOS PARA RECONOCER SUBCONJUNTOS CONEXOS:

  1. Sea (X, T) un espacio topológico y M un subconjunto de X. Si M es conexo, también es conexo cualquier conjunto A tal que $M \subset A \subset Adh(M)$.

     Por tanto, para probar que un subconjunto A es conexo, se puede reducir mucho el esfuerzo si se conoce un subconjunto conexo M tal que A contenga a M, y $Adh(M)$ contenga a A.

     En paticular, en (R, T_u), un subconjunto M es conexo si es un punto o un intervalo.
  2. Sea $\{M_l\}_{l \in L}$ una familia de subconjuntos conexos de un espacio topológico (X, T), si uno de ellos M_0 cumple que $M_0 \cap M_l \neq \emptyset$ para TODO $l \in L$ entonces $M = \bigcup_{l \in L} M_l$ es un conjunto conexo de (X, T).

- **Propiedades de la conexión**

  1. La conexión pasa al conjunto cociente, es decir, si (X, T) es conexo, entonces para TODA relación de equivalencia E, $(X/E, T_E)$ es conexo.
  2. La conexión es una propiedad finito-multiplicativa. En particular, (R^n, T_u) es conexo para cualquier $n > 0$.

- **Componentes conexas de un espacio topológico**

  En un espacio topológico (X, T) se llama componente conexa de un punto p de X al mayor conjunto conexo del espacio que contiene al punto p.

  En particular, dicha componente conexa es siempre un conjunto cerrado del espacio (X, T).

- **Espacios totalmente desconexos**

  El espacio (X, T) es totalmente desconexo si cada componente conexa es un único punto. Un subconjunto M es totalmente desconexo si (M, T_M) es totalmente desconexo.

  En particular, un espacio discreto y (Q, T_u) son totalmente desconexos.

Referencias

[1] Joaquín Arregui Fernández. Topología, Segunda edición, 1998.