FUNCIONES DE UNA VARIABLE II

- Cada ejercicio se valora sobre 2,5 puntos.
- En la valoración se tendrá en cuenta: La corrección del resultado, el razonamiento utilizado, la exposición escrita.

Ejercicio 1. Enunciar un **criterio de comparación para integrales impropias de primera especie**. Demostrarlo.

Ejercicio 2. Estudiar la convergencia o la divergencia de las integrales $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x + 15}$ y $\int_5^\infty \frac{dx}{\log(x) - 1}$

Ejercicio 3. Pruébese que la serie $\sum_0^\infty \frac{n}{e^{nx}}$ converge uniformemente en $[a, +\infty)$, para $a > 0$. Sea $f(x)$ su suma definida en $(0, +\infty)$. Calcúlese una primitiva de f y obténgase f explícitamente.

Ejercicio 4.

a) Calcular $I = \int sen^5(x)\cos^6(x)dx$

b) Calcular $I = \int_{-1}^{1} sen^5(x)\cos^6(x)dx$

Estudiar la convergencia o la divergencia de las integrales

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15} \quad y \quad \int_0^\infty \frac{dx}{\log(x)-1}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15} = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+15} + \int_1^\infty \frac{dx}{e^x+1}$$

En $[0,1]$ el integrando es continuo por tanto $\int_0^1 \frac{dx}{e^x+15} < +\infty$

Veamos ahora en $(1,\infty)$, usamos el criterio de comparación

$$\frac{\frac{1}{e^x+15}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2}{e^x+15}, \text{ aplicando L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x+15} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

luego $\int_1^\infty \frac{dx}{e^x+15}$ y $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ tienen el mismo carácter

y por tanto es convergente.

Ahora estudiamos $\int_5^\infty \frac{dx}{\log(x)-1}$

$$\frac{\frac{1}{\log(x)-1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{\log(x)-1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\log(x)-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$$

Como $\int_5^\infty \frac{1}{x}\,dx$ es divergente también lo es $\int_5^\infty \frac{dx}{\log(x)-1}$

2 $\int \operatorname{sen}^5(x)\cos^6(x)\,dx = \int \operatorname{sen}^4(x)\cos^6(x)\,(\operatorname{sen}(x)\,dx)$

$= \int (1-\cos^2(x))^2 \cos^6(x)\,(\operatorname{sen}(x)\,dx) =$
$= \int (1-2\cos^2(x)+\cos^4(x))\cos^6(x)\,(\operatorname{sen}(x)\,dx)$

$= \int \cos^6(x) - 2\cos^8(x) + \cos^{10}(x)\,(\operatorname{sen}(x)\,dx) =$

$= -\dfrac{\cos^7(x)}{7} + \dfrac{2\cos^9(x)}{9} - \dfrac{\cos^{11}(x)}{11} + K$

3. $\sum_0^\infty \dfrac{n}{e^{nx}}$

Sea $a>0$, $\dfrac{n}{e^{nx}} \le \dfrac{n}{e^{na}}$ $\quad a \le x$

Pero $\sum_0^\infty \dfrac{n}{e^{na}}$ converge pues por el criterio de la raíz

$\lim \sqrt[n]{\dfrac{n}{e^{na}}} = \dfrac{1}{e^a} < 1$. Por tanto la serie $\sum_0^\infty \dfrac{n}{e^{nx}}$ converge uniformemente si $x \ge a > 0$

Llamemos $f(x) = 0 + \dfrac{1}{e^x} + \dfrac{2}{e^{2x}} + \dfrac{3}{e^{3x}} + \dots$

Una primitiva de f es $\int_a^x f(t)\,dt = \int_a^x \sum_0^\infty \dfrac{n}{e^{nt}}\,dt =$
$= \sum_0^\infty \int_a^x \dfrac{n}{e^{nt}}\,dt = \int_a^x \dfrac{1}{e^t} + \int_a^x \dfrac{2}{e^{2t}} + \dots + K$

$= \sum_1^\infty e^{-na} - e^{-nx} + K = \sum_1^\infty \left(\dfrac{1}{e^{na}} - \dfrac{1}{e^{nx}}\right)$

Luego la primitiva es

$g(x) = \dfrac{e^{-a}}{1-e^{-a}} - \dfrac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \dfrac{1}{\frac{1}{e^{-a}}-1} - \dfrac{1}{\frac{1}{e^{-x}}-1} =$

$= \dfrac{1}{e^a-1} - \dfrac{1}{e^x-1}$, y derivando

$f(x) = \dfrac{e^x}{(e^x-1)^2}$

2.

$I = \int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15}$, como $\frac{1}{e^x+15} < \frac{1}{e^x}$

y $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+15} \leq \int_0^\infty \frac{1}{e^x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty =$

$= 1 - 0$

luego I es convergente

$J = \int_5^\infty \frac{dx}{\log(x)-1}$; si $x \geq 5$ $\log(x)-1 \leq x$

En efecto si consideramos $f(x) = x - (\log(x)-1)$

$f(1) = 2$, pero $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ $\forall x > 1$

luego en concreto si $x \geq 5$ se da la inecuación

$\int_5^\infty \frac{dx}{\log(x)-1} \geq \int_5^\infty \frac{1}{x} dx$, por ser esta última divergente

lo es la primera.

3. $\sum_0^\infty \frac{n}{e^{nx}}$

$x \in [a, +\infty)$ $\qquad \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{e^{na}}$ y por tanto $\sum_0^\infty \frac{n}{e^{nx}} \leq \sum_0^\infty \frac{n}{e^{na}}$

Ahora bien, $\sum_0^\infty \frac{n}{e^{na}}$ es convergente pues

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{e^{na}}} = \frac{1}{e^a} < 1 \quad a > 0$$

Por el criterio de Weierstrass la serie converge uniformemente en $[a, +\infty)$.

Sea $f(x) = \sum_0^\infty \frac{n}{e^{nx}}$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

Una primitiva de la función $f(x)$ es

$$F(t) = \int_a^t \sum \frac{n}{e^{nx}} \, dx \overset{(1)}{=} \sum_0^\infty \int_a^t \frac{n}{e^{nx}} \, dx =$$

$$= \sum_0^\infty -e^{-nx} \Big|_a^t = \sum_0^\infty e^{-na} - e^{-nt} =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-a}} - \frac{1}{1-e^{-t}}$$

(1) Por ser la convergencia uniforme $\sum \int = \int \sum$

Ahora $f(x) = F'(x) = + \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$

4.

$$I = \int \operatorname{sen}^5(x)\cos^6(x)\,dx = -\int \operatorname{sen}^4(x)\cos^6(x)(-\operatorname{sen}\,dx) =$$

$$y = \cos(x)$$

$$dy = -\operatorname{sen}(x)\,dx$$

$$= -\int (1-y^2)^2 y^6\,dy = -\int (1-2y^2+y^4)\,y^6\,dx =$$

$$= -\int (y^6-2y^8+y^{10})\,dx = -\left[\frac{y^7}{7}-\frac{2y^9}{9}+\frac{y^{11}}{11}\right] =$$

$$= -\left[\frac{\cos^7(x)}{7}-\frac{2\cos^9(x)}{9}+\frac{\cos^{11}(x)}{11}\right]$$

b) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \operatorname{sen}^5(x)\cos^6(x)\,dx$$

Esta integral es 0 porque $\operatorname{sen}^5(x)\cos(x)$ es impar en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.