GEOMETRÍA BÁSICA. 2014

NO SE PERMITE NINGÚN TIPO DE MATERIAL ESCRITO.Todas las respuestas deben estar justificadas razonadamente.

**Ejercicio 1**. (4 puntos) Sea $\mathbf{P}$ el plano euclidiano y $\mathcal{C}$ una circunferencia de centro $O$.

1. Defínase la inversión del plano $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbf{P} - \{O\} \to \mathbf{P} - \{O\}$.
2. Probar que $\iota_{\mathcal{C}} : \mathbf{P} - \{O\} \to \mathbf{P} - \{O\}$ es una biyección.
3. Si $P \in \mathbf{P}$ se mantiene fijo con respecto a $\iota_{\mathcal{C}}$, es decir $\iota_{\mathcal{C}}(P) = P$, ¿qué se puede decir de $P$?
4. Si $P, Q \in \mathbf{P}$, ¿se verifica que $d(P,Q) = d(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q))$?

Justifique las respuestas 3 y 4.

**Ejercicio 2**. (3 puntos) Recuérdese que un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos de sus lados sobre rectas paralelas. Probar que si un trapecio tiene sus vértices en una circunferencia entonces es un trapecio isósceles, es decir dos de sus lados tienen la misma longitud.

**Ejercicio 3**. (3 puntos) Responda las siguientes preguntas justificando su respuesta :

1. ¿Cuántas simetrías que sean rotaciones de $120^o$ tiene un dodecaedro regular? ¿Cuántas medias vueltas?
2. ¿Cuántas simetrías que sean rotaciones de $90^o$ tiene un octaedro regular? ¿Cuántas medias vueltas?

# Soluciones

**Ejercicio 1**.

Apartado 1. Definición 8.13, página 140.

Apartado 2. Observación 8.14 y Nota 8.15.1

Apartado 3. Si $\iota_{\mathcal{C}}(P) = P$ entonces $OP \cdot OP = \rho^2$, donde $\rho$ es el radio de la circunferencia $\mathcal{C}$. Luego $OP = \rho$ y como $\mathcal{C} = \{X : OX = \rho\}$, tenemos que $P \in \mathcal{C}$.

Apartado 4. No se verifica en general. Hay muchos ejemplos y muchos modos de mostrarlo. Por ejemplo si $P, Q$ son dos puntos del interior de $\mathcal{C}$ y de modo que $O, P, Q$ estén alineados entonces $d(P,Q) < 2\rho$. Los puntos $\iota_{\mathcal{C}}(P)$, $\iota_{\mathcal{C}}(Q)$ y $O$ también están alineados pero $\iota_{\mathcal{C}}(P)$ y $\iota_{\mathcal{C}}(Q)$ son exteriores a $\mathcal{C}$, luego $d(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q)) > 2\rho$, con lo que $d(P,Q) \neq d(\iota_{\mathcal{C}}(P), \iota_{\mathcal{C}}(Q))$.

**Ejercicio 2**. Sea $Q = (A, B, C, D)$ un trapecio con $r_{AB} \| r_{CD}$ y con los vértices $A, B, C, D$ sobre una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $O$. Sea $m_{AB}$ la mediatriz de $[A, B]$, como $m_{AB}$ es el conjunto $\{X : d(X, A) = d(X, B)\}$ tenemos que $O \in m_{AB}$, pues $A, B \in \mathcal{C}$. Análogamente $O \in m_{CD}$, donde $m_{CD}$ es la mediatriz de $[C, D]$. Por otro lado $m_{AB}$ es perpendicular a $r_{AB}$, $m_{CD}$ es perpendicular a $r_{CD}$ y $r_{AB} \| r_{CD}$, luego $m_{AB}$ y $m_{CD}$ son paralelas y como las dos pasan por $O$ son coincidentes. Si llamamos $m = m_{AB} = m_{CD}$ y $\sigma$ es la reflexión con eje $m$, tenemos que $\sigma(A) = B$ y $\sigma(D) = C$, de donde $\sigma([A, D]) = [B, C]$ y por tanto el trapecio es isósceles.

Este ejercicio se puede hacer de otros muchos modos, por ejemplo usando ángulos con vértice sobre una circunferencia y ángulos alternos internos que ha sido otro de los métodos más usados en el examen.

**Ejercicio 3**.

Apartado 1. Por cada vértice pasa el eje de dos rotaciones de $120^o$ (üna rota en un sentido y la otra en el contrario") que son simetrías del dodecaedro regular, pero ese mismo eje pasa por el vértice opuesto del dodecaedro, entonces hay tantas rotaciones de $120^o$ como vértices del dodecaedro multiplicadas por 2 y después hemos de dividir por 2, es decir hay tantas rotaciones como vértices tiene el dodecaedro: 20. Por el centro de cada arista pasa el eje de una media vuelta que es simetría del dodecaedro, como tal eje a su vez pasa por el centro de la arista opuesta hay tantas medias vueltas que son simetrías como la mitad del número de aristas del dodecaedro, es decir 15.

Apartado 2. Por cada vértice del octaedro pasa el eje de dos rotaciones de $90^o$ que son simetrías del octaedro, como el eje pasa por un vértice y su opuesto tenemos que el número de rotaciones de $90^o$ es $\frac{n^o \ de \ vértices \times 2}{2} = n^o \ de \ vértices = 6$. Por el punto medio de cada arista pasa el eje de una media vuelta que es simetría, dicho eje pasa por el punto medio de la arista opuesta, luego de este tipo tenemos $12/2 = 6$ medias vueltas más las medias vueltas cuyos ejes pasan por los vértices, como cada eje pasa por dos vértices opuestos, que son $6/2 = 3$. Por tanto en total tenemos $6 + 3 = 9$ medias vueltas que son simetrías.