Álgebra Lineal II

Alejandro López

Curso 2018-2019

1 Formas canónicas de endomorfismos

1.1 Invariantes lineales

(D) Grupo lineal general. Sea V un espacio vectorial. Se denota por $GL(V)$ al conjunto de todos los automorfismos definidos en V, que tiene estructura de grupo y recibe el nombre de *grupo lineal general* de V.

(P) Equivalencia lineal. Dos endomorfismos f y g de V son linealmente equivalentes si y solo si sus matrices son semejantes. Dadas dos matrices A, B, son semejantes si existe una matriz P regular tal que $A = P^{-1}BP$.

(D) Invariante lineal. Se llama *invariante lineal* a cualquier propiedad que comparten los endomorfismos linealmente equivalentes; o, de forma equivalente, las propiedades que comparten las matrices semejantes.

1.2 Autovalores y autovectores. Endomorfismos diagonalizables

(D) Autovalor. Diremos que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un *autovalor* de un endomorfismo f si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$. Se denomina *espectro* de f y se denota por $sp(f)$ al conjunto formado por todos los autovalores de f.

(D) Autovector. Un vector $v \in V$ es un *autovector* asociado a un autovalor λ de f si y solo si $f(v) = \lambda v$. El conjunto formado por todos los autovectores asociados a un autovalor λ se denomina *subespacio propio* asociado a λ y se denota por

$$V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$$

(P). Sea λ un autovalor de un endomorfismo f y A su matriz respecto de la base $\mathcal{B}$. Entonces se cumple lo siguiente:

i. $V_\lambda = Ker(f - \lambda id)$ es un subespacio vectorial de V.
ii. $dim(V_\lambda) = dim(V) - rg(A - \lambda I)$.
iii. $\lambda \in sp(f)$ si y solo si $det(A - \lambda I) = 0$.

(D) Polinomio característico. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n, y A una matriz de f respecto de una base $\mathcal{B}$. Se denomina *polinomio* característico de f, o de A, al polinomio de grado n en la indeterminada λ

$$p_f(\lambda) = det(A - \lambda I).$$

(D) Endomorfismo diagonalizable. Un endomorfismo es *diagonalizable* si existe una base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de f en dicha base es diagonal.

(P). Un endomorfismo es diagonalizable si y solo si existe una base de V formada por autovectores de f.

(P) Autovectores y autovalores.

i. Sean $\{v_1, ..., v_k\}$ autovectores no nulos asociados a autovalores distintos, entonces son linealmente independientes.

(ii. Sean $\{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ autovalores distintos, entonces se cumple esta suma directa de subespacios propios

$$V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$$

(D) Multiplicidad de un autovalor. Sea λ un autovalor de un endomorfismo f, entonces tiene asociados dos tipos de multiplicidades:

i. Llamamos *multiplicidad algebraica* de λ a su multiplicidad como raíz del polinomio característico, y la denotamos por a.

ii. Llamamos *multiplicidad geométrica* de λ a la dimensión del subespacio propio V_λ, y la denotamos por g.

(P). La multiplicidad algebraica de un autovalor es mayor o igual que la multiplicidad geométrica.

(T) Caracterización de los endomorfismos diagonalizables. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n y $\lambda_1, ..., \lambda_k$ los distintos autovalores de f con multiplicidades algebraicas $a_1, ..., a_k$ y geométricas $g_1, ..., g_k$. Entonces f es diagonalizable si y solo si se cumplen estas dos condiciones:

i. $a_1 + ... + a_k = n$

ii. $a_i = g_i, \forall i \leq k$

(P). Si un endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión n tiene n autovalores distintos, entonces f es diagonalizable.

1.3 Forma canónica de Jordan

(D) Bloque y matriz de Jordan.

i. Un *bloque de Jordan* de orden n es una matriz cuadrada de orden n que denotaremos por $B_n(\lambda)$, tal que su diagonal solo tiene valores λ, y la subdiagonal solo tiene unos.

ii. Una *matriz de Jordan* es una matriz cuadrada diagonal por bloques de modo que los bloques de la diagonal son bloques de Jordan.

(D) Subespacio invariante. Un subespacio vectorial U de V se dice que es invariante por un endomorfismo f de V, o *f-invariante*, si se cumple $f(U) \subset U$. Es decir, $\forall u \in U, f(u) \in U$.

(P) Intersección y suma de subespacios invariantes. Sean U y W dos subespacios invariantes por un endomorfismo f de V, entonces $U \cap W$ y $U + W$ también lo son.

(P) Base asociada a un bloque de Jordan. La base asociada a un bloque de Jordan es de la forma

$$\mathcal{B}_J = \{v_1, (f - \lambda Id)(v_1), ..., (f - \lambda Id)^{n-1}(v_1)\}$$

(P) Subespacio r-cíclico. Sean los vectores $\{v_1, (f-\lambda Id)(v_1), ..., (f-\lambda Id)^{n-1}(v_1)\}$ tal que $v \in Ker(f - \lambda Id)^r - Ker(f - \lambda Id)^{r-1}, r \geq 1$. El subespacio que generan se denomina *subespacio r-cíclico*, y es un subespacio invariante por f.

(D) Subespacio propio generalizado. Se denomina *subespacio propio generalizado* i-ésimo asociado a un autovalor λ de un endomorfismo f, al subespacio vectorial

$$K^i(\lambda) = Ker(f - \lambda Id)^i, \text{ para } i = 1, 2, ...$$

(P) Propiedades de los subespacios propios generalizados. Sea λ un autovalor de un endomorfismo f. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

i. $K^i(\lambda) \subseteq K^{i+1}(\lambda)$.

ii. $v \in K^i(\lambda)$ si y solo si $(f - \lambda Id)(v) \in K^{i-1}(\lambda)$.

iii. Existe un entero $k > 0$ tal que $K^k(\lambda)$ contiene o es igual que el resto de subespacios propios generalizados. Este subespacio se denomina *subespacio máximo* asociado a λ, y se denota por $M(\lambda)$.

iv. Los subespacios propios generalizados son f-invariantes.

v. Sea $d_i = dim(K^i(\lambda))$. Entonces se cumple que la diferencia en dimensiones entre subespacios propios generalizados consecutivos $r_i = d_i - d_{i-1}$ es decreciente.

(T) Base de Jordan de un subespacio máximo. Sea λ un autovalor de un endomorfismo f de un espacio vectorial V de dimensión n; entonces existe una base

B del subespacio máximo $M(\lambda)$ tal que la matriz de f restringido a $M(\lambda)$ es una matriz de Jordan.

(P). Sea f un endomorfismos y $\lambda_1, ..., \lambda_r$ autovalores de f distintos, y sean $M(\lambda_1), ..., M(\lambda_r)$ los subespacios máximos asociados. Entonces, la aplicación lineal $f - \lambda_i Id$ restringida a $M(\lambda_j) : i \neq j$, es un automorfismo de $M(\lambda_j)$.

(T). Teorema de existencia. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n. Entonces existe una base $\mathcal{B}$ tal que la matriz de f respecto de esa base es una matriz de Jordan si y solo si f tiene n autovalores teniendo en cuenta su multiplicidad (si un autovalor se repite m veces, se considera como m autovalores).

(D). Forma canónica de Jordan. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Diremos que f admite una *forma canónica de Jordan* si existe una base $\mathcal{B}_J$ de V tal que la matriz de f respecto a dicha base es una matriz de Jordan J.

(P). Teorema de Jordan. Sean f y g dos endomorfismos de un espacio vectorial V que admiten una forma de Jordan y tales que sus polinomios característicos coinciden. Sean $\lambda_1, ..., \lambda_r$ sus autovalores distintos y $K_f^i(\lambda_j)$, $K_g^i(\lambda_j)$ los subespacios propios generalizados de f y g respectivamente. Entonces g y f son linealmente equivalentes si y solo si

$$dim(K_f^i(\lambda_j)) = dim(K_g^i(\lambda_j)), \forall j = 1, ..., r; i = 1, 2, ...$$

(A) Algoritmo para calcular la base de Jordan. Sea A una matriz no diagonalizable de $n \times n$. Para hallar su base de Jordan se deben seguir los siguientes pasos:

1. Calculamos sus autovalores hallando las soluciones de su polinomio característico.

2. Calculamos los subespacios propios generalizados hasta obtener el subespacio máximo de cada autovalor.

3. Obtenemos una base de cada subespacio máximo. Para esto debemos proceder de la siguiente forma:

3.1. Sea $M(\lambda) = K^k$ el subespacio máximo de λ y $r_k = dim(K^k) - dim(K^{k-1})$. Entonces debemos seleccionar r_k vectores cualesquiera $v_1, ..., v_{r_k} \in K^k - K^{k-1}$, de forma que ninguna de sus combinaciones lineales pertenezca a K^{k-1}. Finalmente, añadimos a la base de $M(\lambda) : \mathcal{B}_{M(\lambda)}$ los vectores $v_1, ..., v_{r_k}$ y sus imágenes sucesivas por las potencias de $(f - \lambda Id)$.

3.2. Consideramos la diferencia de dimensiones entre los subespacios propios generalizados sucesivos $l_{k-1} = dim(K^{k-1}) - dim(K^{k-2})$ y seleccionamos l_{k-1} vectores arbitrarios linealmente independientes $u_1, ..., u_{l_{k-1}} \in K^{k-1} - K^{k-2}$. de forma que ninguna de sus combinaciones lineales pertenezca a K^{k-2}. Los añadimos a $\mathcal{B}_{M(\lambda)}$ junto con sus imágenes iteradas por $(f - \lambda Id)$.

Continuamos así hasta que en el último paso llegamos al subespacio propio $K^1 = V_\lambda$.

3.3. Si con los vectores que se han añadido en los pasos anteriores tenemos una base de K^1 ya hemos terminado. En caso contrario, añadimos los vectores $w_1, ..., w_{l_1}$ que fueran necesarios y el proceso ya habría terminado.

4. Finalmente, obtenemos la base de Jordan $\mathcal{B}_J$ uniendo las bases de todos los subespacios máximos calculadas en el paso anterior.

1.4 Forma de Jordan real

(T). Teorema de Ruffini. Sea $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ un polinomio y $a \in \mathbb{K}$ una de sus raíces, entonces $(x - a)$ divide a $p(x)$.

(P) Factorización compleja. Sea $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio y $a + bi, a - bi \in \mathbb{C}$ dos raíces conjugadas. Entonces:

$$p(x) = q'(x)(x - (a + bi))(x - (a - bi)) = q'(x)((x - a)^2 + b^2)$$

(P) Extensión compleja de un espacio vectorial. Sea V un espacio vectorial, llamamos *extensión compleja* de V al espacio vectorial $\hat{V} = \{v + wi : v, w \in V\}$ que contiene a V. Un endomorfismo f de $\hat{V}$ a $\hat{V}$ es de la forma

$$f : \hat{V} \longrightarrow \hat{V} : f(u + wi) = f(u) + f(w)i$$

(P). Si $\mathcal{B}$ es una base de V, también es una base de $\hat{V}$.

(P) Subespacios máximos. Sea $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_r\}$ una base de $M(\lambda)$, entonces $\hat{B} = \{\hat{v}_1, ..., \hat{v}_r\}$ lo es de $M(\hat{\lambda})$.

2 Subespacios invariantes

(D). Subespacio reducible Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial real V y U un subespacio f-invariante. Diremos que U es *reducible* si se puede descomponer en suma directa

$$U = U_1 \oplus U_2$$

Tales que U_1, U_2 son subespacios f-invariantes no triviales. En caso contrario diremos que U es *irreducible.*

2.1 Rectas e hiperplanos invariantes

(P) Rectas e hiperplanos invariantes. Sea f un endomorfismo de V y A su matriz respecto de una base dada $\mathcal{B}$. Entonces se cumple lo siguiente:

i. $L(v)$ es una recta invariante por f si y solo si v es un autovector de f.

ii. El hiperplano de ecuación $u_1x_1 + ... + u_1x_1 = 0$ es invariante por f si y solo si $(u_1, ..., u_n)_B$ es un autovector del automorfismo f^t, cuya matriz es la traspuesta de la de f.

(P). De la proposición anterior se deduce lo siguiente:

i. Todas las rectas f-invariantes $L(v)$ están contenidas en los subespacios propios V_λ, tal que $\lambda \in sp(f)$.

ii. El número de rectas invariantes es igual al número de hiperplanos invariantes.

2.2 Descomposición de subespacios invariantes

(P) Descomposición de subespacios invariantes. Sean f un endomorfismo que que admite una forma canónica de Jordan J y U un subespacio f-invariante. Entonces U se descompone como suma directa de subespacios invariantes $U_i \subset M(\lambda_i)$:

$$U = U_1 \oplus ... \oplus U_k, \text{ tal que } U_i = M(\lambda_i) \cap U$$

(P) Subespacios f-invariantes irreducibles. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V que admite una forma canónica de Jordan J. Un subespacio U de V es f-invariante e irreducible si y solo si es un subespacio r-cíclico.

2.3 Subespacios invariantes y polinomios

(P). Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V y $p(t) \in \mathbb{K}[t]$. Entonces el subespacio vectorial $Ker\, p(f)$ es f-invariante.

(P) Polinomio anulador. Diremos que un polinomio $p(t)$ anula a un endomorfismo f o que es un *polinomio anulador* de f si $p(f)$ es el polinomio nulo, lo que denotaremos por $p(f) = 0$.

(T) Teorema de Cayley-Hamilton. Si $p_f(t)$ es un polinomio característico de un endomorfismo f entonces $p_f(f) = 0$.

(P). Todo autovalor de un endomorfismo f es raíz de cualquier polinomio anulador de f.

(D) Polinomio mínimo. Se denomina *polinomio mínimo anulador* de un endomorfismo f al polinomio $m_f(t) \in \mathbb{K}[t]$ mónico de grado mínimo que anula a f.

3 Formas bilineales y cuadráticas

3.1 Introducción

(D) Forma bilineal. Dado un espacio vectorial V, una aplicación $f : V \times V \to \mathbb{K}$ es una *forma bilineal* si cumple las siguientes propiedades:

i. $f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$.

ii. $f(u, av + bw) = af(u, v) + bf(u, w)$.

3.2 Matriz de una forma bilineal

(D) Matriz de una forma bilineal. Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal y sean $x, v \in V : x = (x_1, ..., x_n)_B$ e $y = (y_1, ..., y_n)_B$, donde $B = (v_1, ..., v_n)$ es una base de V. Entonces, la matriz asociada a f se define como sigue:

$$\mathfrak{M}_B(f) = (x_1 \dots x_n)A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix} : A = f(v_i, v_j), \forall v \in \mathcal{B}.$$

(P) Congruencia de matrices. Dadas dos matrices A y B, están asociadas a la misma forma bilineal en distintas bases si y solo si son congruentes, es decir, existe una matriz P invertible tal que $A = P^t BP$.

(D) Rango de una forma bilineal. Se llama *rango* de una forma bilineal f, al rango de cualquier matriz de f.

(D) Forma bilineal simétrica y antisimétrica. Una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{K}$ puede ser:

i. *simétrica* si $f(u,v) = f(v,u), \forall u,v \in V$.

ii. *antisimétrica* si $f(u,v) = -f(v,u), \forall u,v \in V$.

3.3 Formas cuadráticas

(D) Forma cuadrática. Se llama *forma cuadrática* asociada a la forma bilineal f de V a la aplicación $\Phi : V \to \mathbb{K}$ definida por $\Phi(v) = f(v,v)$.

(P) Caracterización de la forma cuadrática. Una aplicación $\Phi : V \to \mathbb{K}$ es una forma cuadrática si y solo si cumple las siguientes propiedades:

i. $\Phi(\lambda v) = \lambda^2 \Phi(v), \forall v \in V$.

ii. La aplicación $f_\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $f_\Phi(u,v) = \frac{1}{2}[\Phi(u+v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$ es una forma bilineal simétrica (y se denomina *forma polar* de Φ).

(D) Matriz de una forma cuadrática. Se denomina *matriz de una forma cuadrática* Φ en una base $\mathcal{B}$, y se denota $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\phi)$ a la matriz de su forma polar en dicha base. Además, la ecuación

$$\phi(x) = X^t \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) X$$

se denomina expresión analítica o ecuación de Φ en la base $\mathcal{B}$.

3.4 Diagonalización de formas bilineales simétricas y formas cuadráticas

(D) Nociones de conjugación. Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica:

i. Dos vectores $v,u \in V$ son *conjugados* respecto a f si $f(u,v) = 0$.

ii. Un vector $v \in V$ conjugado de sí mismo: $f(v,v) = 0$, se denomina vector *autoconjugado* o *isótropo.*

iii. El *núcleo* o *radical* de f es el conjunto $Ker(f) = \{u \in V : f(u,v) = \forall v \in V\}$.

iv. Se dice que una forma bilineal f es *no degenerada* si $Ker(f) = 0$.

(D) Conjugado de un subconjunto. Sea $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica. Se llama *conjugado de un subconjunto* $S \subset V$ respecto a f, y se denota por S^c, al conjunto formado por todos los vectores que son conjugados de todos los vectores de S:

$$S^c = \{u \in V : f(u,v) = 0, \forall v \in V\}$$

Si S está formado por un único vector v, entonces usamos la notación v^c. En particular, de la definición se deduce que $V^c = Ker(f)$.

(P) Propiedades de la conjugación. Sean $f : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal simétrica y U y W dos subespacios vectoriales de V. Se cumplen las siguientes propiedades:

i. Si $U \subset W$, entonces $W^c \subset U^c$.

ii. $U^c + W^c \subset (U \cap W)^c$.

iii. $U^c \cap W^c = (U + W)^c$.

iv. $U \subset (U^c)^c$.

(T) Base de vectores conjugados. Dada una forma bilineal simétrica f en un espacio vectorial V de dimensión finita n, existe una base de vectores conjugados respecto a f. De forma equivalente, existe una matriz diagonal de f.

(D) Forma cuadrática diagonalizada. Dada una forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{K}$ y una base $\mathcal{B}$ de V, se dice que Φ está *diagonalizada* o escrita como suma de cuadrados, respecto de $\mathcal{B}$ si su matriz asociada $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$ es diagonal ($\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(\Phi) = D$), y su expresión analítica es:

$$\Phi(x) = X^t DX = d_1 x_1^2 + ... + d_n x_n^2.$$

3.5 Clasificación de formas bilineales y cuadráticas reales

(D) Clasificación de formas bilineales simétricas. Dada una forma bilineal simétrica f, se dice que es:

i. *Definida positiva* si $f(v,v) > 0, \forall v \in V : v \neq 0$.

ii. *Semidefinida positiva* si $f(v,v) \geq 0, \forall v \in V$ y $f(v,v) = 0$ para algún $v \neq 0$.

iii. *Definida negativa* si $f(v,v) < 0, \forall v \in V : v \neq 0$.

iv. *Semidefinida negativa* si $f(v,v) \leq 0, \forall v \in V$ y $f(v,v) = 0$ para algún $v \neq 0$.

v. *indefinida* en cualquier otro caso.

(T) Ley de inercia de Sylvester. Sea f una forma bilineal simétrica y real, y

Φ la forma cuadrática asociada. En cualquier matriz diagonal de f, el número de elementos positivos p y negativos q es siempre el mismo, tal que $p + q = rg(f)$. El par (p, q) se denomina *signatura* de f o de Φ, y se denota por $sg(f)$ o $sg(\Phi)$ respectivamente.

(P) Criterio de Sylvester. Sean A una matriz cualquiera de una forma bilineal y $\Delta_i, i = 1, ..., n$; sus menores principales. Entonces:

i. f es definida positiva si y solo si $\Delta_i = det(A_i) > 0, \forall i = 1, ..., n$.

ii. f es definida negativa si y solo si $(-1)^i \Delta_i > 0, \forall i = 1, ..., n$.

4 Espacio vectorial euclídeo

4.1 Producto escalar

(D) Producto escalar. Un producto escalar en un espacio vectorial real V es una forma bilineal $f : V \times V \to \mathbb{R}$ simétrica y definida positiva. Se suele usar la notación $<,>$; es decir $f(u, v)$ se escribirá $< u, v >$.

(D) Espacio vectorial euclídeo. Se llama *espacio vectorial euclídeo* a un espacio vectorial V en el que hay definido un producto escalar. Se denota con el par $(V, <,>)$.

(D) Matriz de un producto escalar. Sea $<,>$ un producto escalar y sean $x, v \in V : x = (x_1, ..., x_n)_B$ e $y = (y_1, ..., y_n)_B$, donde $B = (v_1, ..., v_n)$ es una base de $(V, <,>)$. Entonces, la matriz asociada a $<,>$ se define como sigue:

$$< x, y >= X^t G_{\mathcal{B}} Y = (x_1 \dots x_n) G_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_1 \end{pmatrix} : G_{\mathcal{B}} = (g_{ij}) =< v_i, v_j >, \forall v \in \mathcal{B}.$$

4.2 Norma y ángulo

(D) Norma. Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Se define la *norma* o longitud de un vector $v \in V$como el número real no negativo

$$\|v\| = \sqrt{< v, v >}$$

(D) Propiedades de la norma. Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo:

i. $\|v\| > 0, \forall v \neq 0_V; \|0_V\| = 0$.

ii. $\|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|$.

iii. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2 < u, v >$.

iv. $|< u, v >| \leq \|u\| + \|v\|$. (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

v. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. (Desigualdad triangular)

vi. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ si y solo si $< u, v >= 0$. (Teorema de Pitágoras)

vii. $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$.

4.3 Ortogonalidad. Bases ortogonales y ortonormales

(D) Vectores ortogonales y conjuntos ortogonales. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores v, u se dice que son *ortogonales* y se denota por $u \perp v$ si $< u, v >= 0$.

Un conjunto de vectores no nulos $\{v_1, ..., v_k\}$ se denomina *conjunto ortogonal* si sus vectores son ortogonales dos a dos, es decir: $< v_i, u_j >= 0, \forall i \neq j$.

(D) Bases ortogonales y ortonormales. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Una *base ortogonal* de V es una base formada por un conjunto ortogonal, y una base *ortonormal* es una base ortogonal cuyos vectores son unitarios, es decir, de norma 1.

(D) Matriz ortogonal. Sea A una matriz regular. Se dice que A es ortogonal si $A \cdot A^t = I$.

(P) Coeficientes de Fourier. Sean $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base ortogonal. Las coordenadas de un vector $u \in V$ respecto de $\mathcal{B}$ son

$$u = \left(\frac{< u, v_1 >}{\|v_1\|^2}, ..., \frac{< u, v_n >}{\|v_n\|^2}\right)_{\mathcal{B}}$$

(T) Teorema de Gram-Schmidt. Sean $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y $\mathcal{B} = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Entonces los vectores $\{e_1, ..., e_n\}$ definidos por

$$e_1 = v_1$$

$$e_2 = v_2 - \frac{< v_2, e_1 >}{\|e_1\|^2} e_1$$

$$...$$

$$e_i = v_i - \frac{< v_i, e_1 >}{\|e_1\|^2} e_1 - ... - \frac{< v_i, e_{i-1} >}{\|e_{i-1}\|^2} e_{i-1}, i = 2, ..., n$$

Forman una base ortogonal de V y satisfacen

$$L(e_1, ..., e_n) = L(v_1, ..., v_n), \forall i = 1, ..., n$$

4.4 Subespacios ortogonales. Proyección ortogonal

(D) Subespacios ortogonales. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Dados dos subconjuntos S y T de V se dice que son *ortogonales* y se denota por $S \perp T$ si se cumple que todos los vectores de S son ortogonales a todos los de T y viceversa. Es decir, $< s, t >= 0, \forall s \in S, t \in T$.
Dado un subconjunto $S \subset V$, llamaremos ortogonal de S, y lo denotaremos por $S^{\perp}$ al conjunto conjugado de S por $<, >$:

$$S^{\perp} = \{v \in V : v \perp s \forall s \in S\}$$

(D) Proyección ortogonal. Sean $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo, U un espacio vectorial de V y $v \in V$. Llamaremos *proyección ortogonal del vector v sobre el subespacio U*, y se denota por $proy_U(v)$ al único vector tal que

$$proy_U(v) \in U, y v - proy_U(v) \in U^{\perp}$$

4.5 Producto vectorial

(D) Orientación de una base. Se dice que una base $\mathcal{B}$ tiene *orientación positiva* si el determinante de la matriz cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica es positivo. Si el determinante es negativo, en cambio, diremos que la base $\mathcal{B}$ tiene orientación negativa.

(D) Producto vectorial. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y $v, u \in V$ dos vectores linealmente independientes. Llamamos *producto vectorial* de v, u al vector $u \wedge v \in V$, que cumple las siguientes condiciones:

i. $(u \wedge v) \perp u$, y $(u \wedge v) \perp v$.

ii. $\|u \wedge v\| = \|u\| \|v\| \, sen\angle(u, v)$.

iii. La orientación de $\{u, v, (u \wedge v)\}$ es positiva.

4.6 Endomorfismos simétricos

(D) Endomorfismo simétrico. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y $f : V \to V$ un endomorfismo de V. Se dice que f es un *endomorfismo simétrico* si cumple que

$$< u, f(v) >=< f(u), v >, \forall u, v \in V.$$

(T) Teorema espectral. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo de dimensión finita tal que $V \neq 0$. Entonces existe una base ortonormal de V formada por autovectores de f.

5 Isometrías vectoriales

5.1 Definición y caracterizaciones

(D) Isometría vectorial. Sean $(V, <, >)$ y $(V', <, >')$ dos espacios vectoriales euclídeos. Una aplicación lineal $f : V \to V'$ es una *isometría vectorial* si cumple

$$< u, v >=< f(u), f(v) >', \forall u, v \in V.$$

(P) Propiedades de las isometrías. ean $(V, <, >)$ y $(V', <, >')$ dos espacios vectoriales euclídeos y $f : V \to V'$ una isometría vectorial. Entonces f tiene las siguientes propiedades:

i. Conserva la norma: $\|v\| = \|f(v)\|', \forall v \in V$.

ii. Conserva los ángulos: $\angle(u, v) = \angle(f(u), f(v))$.

iii. Es inyectiva.

iv. Si $dim(V) = dim(V')$, entonces f es un isomorfismo.

v. Transforma una base ortonormal de V en una base ortonormal de V'.

(D) Grupo ortogonal. Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Se denomina *grupo ortogonal*, y se denota por $O(V)$ al conjunto de todos los automorfismos de V, que tiene estructura de grupo con la composición de isometrías. Además $O(V)$ es un subgrupo de $GL(V)$. Es decir $O(V) \leq GL(V)$.

5.2 Clasificación de isometrías

(D) Equivalencia métrica. Sean $f, g \in O(V)$ isometrías vectoriales de un espacio vectorial euclídeo $(V, <, >)$. Diremos que f y g son *métricamente equivalentes* si y solo si existe otra isometría h tal que $f = h^{-1}gh$.

Además, dos matrices A y B son *ortogonalmente semejantes* si y solo si existe una matriz ortogonal P tal que $A = P^{-1}BP$.

(D) Rotación y reflexión. Sea $f \in O(V)$ una isometría de $(V, <,>)$ y A una matriz de f respecto de una base ortonormal $\mathcal{B}$ de V.

i. Se dice que f es una *rotación* si $det(A) = 1$. Es decir, si f conserva la orientación de la base $\mathcal{B}$. El grupo $O^{+}(V)$, formado por las isometrías con determinante 1, se llama *grupo de rotaciones* de V, y es un subgrupo de $O(V)$.

ii. Se dice que f es una *reflexión* si $det(A) = -1$. Es decir, si f cambia la orientación de la base $\mathcal{B}$. El conjunto $O^{-}(V)$, formado por las isometrías con determinante -1 no tiene estructura de grupo, ya que la composición de dos reflexiones no es una reflexión.

(D) Base de una reflexión. Sea $f \in O^{-}(V)$ una reflexión de $(V, <,>)$. Los subespacios de V invariantes por f se denominan *base de la reflexión.* Cuando especificamos la base de una reflexión, nos referiremos a ella como *simetría ortogonal.*

5.3 Teorema de Cartan-Dieudonné

(D) Simetría ortogonal hiperplano. Sea $f \in O^{-}(V)$ una reflexión de un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión n. Diremos que f es una *simetría ortogonal hiperplano* si su base es un hiperplano $H \subset V$ de dimensión $n-1$.

(T) Teorema de Cartan-Dieudonné. Toda isometría f de un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$ de dimensión n es de la forma

$$f = \sigma_1 \circ ... \circ \sigma_k, k \leq n$$

Donde σ_i son simetrías ortogonales hiperplano. Lo que también se expresa diciendo que f se puede descomponer en el producto de, como máximo, n simetrías.