Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (2, 5 puntos)
Demuestre que en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ se tiene para $x, y, z \in \mathcal{H}$,

$$\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\|$$

si y sólo si

$$\text{existe } \alpha \in [0,1] \text{ tal que } y = \alpha x + (1-\alpha)z\,.$$

Solución: $\Leftarrow$) Supongamos que existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $y = \alpha x + (1-\alpha)z$. En ese caso,
$\|x - y\| = \|x - \alpha x - (1-\alpha)z\| = \|(1-\alpha)(x-z)\| = (1-\alpha)\|x - z\|$
$\|y - z\| = \|\alpha x + (1-\alpha)z - z\| = \|\alpha(x-z)\| = \alpha\|x - z\|$.
En consecuencia, $\|x - y\| + \|y - z\| = (1-\alpha)\|x - z\| + \alpha\|x - z\| = \|x - z\|$
$\Rightarrow$) Si $\|x - z\| = \|x - y\| + \|y - z\|$ entonces $\|(x-y) + (y-z)\| = \|x - y\| + \|y - z\|$. Elevando al cuadrado ambos términos se obtiene $\|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle x-y, y-z\rangle = \|x-y\|^2 + \|y-z\|^2 + 2\|x-y\|\|y-z\|$ y en consecuencia, $u = x - y$ y $v = y - z$ son dos elementos de $\mathcal{H}$ tales que $\mathrm{Re}\langle u, v\rangle = \|u\|\|v\|$. Como además $\mathrm{Re}\langle u, v\rangle \leqslant |\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\|v\|$, resulta que

$$\mathrm{Re}\langle u, v\rangle = |\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$$

y por tanto procediendo como en el ejercicio 2.11 se obtiene que $u = \beta v$. De $\mathrm{Re}\langle u, v\rangle = |\langle u, v\rangle|$ se deduce que $\langle u, v\rangle = |\langle u, v\rangle|$ y en consecuencia como $\langle u, v\rangle = \langle \beta v, v\rangle = \beta\|v\|^2$ resulta que $\beta \geq 0$. Finalmente sustituyendo, u y v, se obtiene $x - y = \beta(y - z)$, esto es, $x + \beta z = (1+\beta)y$, esto es

$$y = \frac{1}{1+\beta}x + \frac{\beta}{1+\beta}z$$

y tomando $\alpha = \frac{1}{1+\beta}$ se obtiene el resultado final. Nótese que $\alpha \in [0,1]$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ el espacio de las funciones polinómicas reales de grado menor o igual que 2. Se define la aplicación:

$$\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\cdot\rangle : & \mathcal{H}\times\mathcal{H} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto \langle P, Q\rangle = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2) \end{array}$$

a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{H}$.

b) Encuentre las constantes a y $b \in \mathbb{R}$ que minimizan la expresión $\|x^2 - ax - b\|$ para la norma inducida por el producto interno del apartado anterior.

Solución: a) Comprobamos que se cumplen las tres propiedades de un producto interno.
1. $\langle P, P\rangle = \sum_{n=0}^{2} |P(n)|^2 \geq 0$ para todo $P \in \mathcal{H}$. Además, si $\langle P, P\rangle = 0$, entonces $P(0) = P(1) = P(2) = 0$, es decir P tiene 3 raíces distintas. Como el grado de P es a lo sumo 2, se obtiene que $P = 0$.
2. $\langle P, Q\rangle = \sum_{n=0}^{2} P(n)Q(n) = \sum_{n=0}^{2} Q(n)P(n) = \langle Q, P\rangle$ para todo $P, Q \in \mathcal{H}$.
3. Finalmente, para todo $P, P', Q \in \mathcal{H}$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \alpha P + \beta P', Q\rangle &= \sum_{n=0}^{2}(\alpha P(n) + \beta P'(n))Q(n) = \alpha\sum_{n=0}^{2} P(n)Q(n) + \beta\sum_{n=0}^{2} P'(n)Q(n) \\ &= \alpha\langle P, Q\rangle + \beta\langle P', Q\rangle \end{aligned}$$

b) Si $F = \text{span}\,\{1, x\}$, el vector $ax + b$ es la proyección ortogonal, con el producto interno del apartado a), de x^2 sobre F. Por tanto $x^2 - ax - b$ es ortogonal a F. Es decir,

$$\begin{cases} x^2 - ax - b \perp 1 \\ x^2 - ax - b \perp x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -b + (1-a-b) + (4-2a-b) = 0 \\ 0 + 1 - a - b + 2(4-2a-b) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 5 - 3a - 3b = 0 \\ 9 - 5a - 3b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Pregunta 3 (2,5 puntos) (1+1,5)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano real y $T\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ una aplicación tal que $T(0) = 0$ y $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.
a) Demuestre que $\|T(x)\| = \|x\|$ y que $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

b) Calcule $\|T(x + y) - T(x) - T(y)\|^2$. Deduzca que T es lineal.

Solución: a) La igualdad $\|T(x)\| = \|x\|$ se deduce trivialmente de $\|T(x)\| = \|T(x) - T(0)\| = \|x - 0\| = \|x\|$. Para demostrar que $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ calculamos por separado.

$$\|T(x) - T(y)\|^2 = \|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 - \langle T(x), T(y)\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle T(x), T(y)\rangle$$

y

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle\,.$$

Igualando ambas expresiones se obtiene $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

b)$\|T(x+y)-T(x)-T(y)\|^2 = \|T(x+y)\|^2+\|T(x)\|^2+\|T(y)\|^2-2\langle T(x+y), T(x)\rangle-2\langle T(x+y), T(y)\rangle-2\langle T(x), T(y)\rangle$

$$= \|x + y\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x + y, x\rangle - 2\langle x + y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle$$

$$= \|(x + y) - x - y\|^2 = 0$$

En consecuencia $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Para ver que T es lineal sólo falta demostrar que $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

i) $T(nx) = nT(x)$, si $n = 1, 2, \cdots$. Por inducción: claramente es cierto para $n = 1$ y supuesto cierto para n se tiene

$$T\big((n + 1)x\big) = T(nx + x) = T(nx) + T(x) = nT(x) + T(x) = (n + 1)T(x)$$

ii) $T(nx) = nT(x)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En efecto, sólo hay ver que $T(-nx) = (-n)T(x)$, si $n = 1, 2, \cdots$ En efecto $0 = T(0) = T(nx + (-nx)) = T(nx) + T(-nx)$. En consecuencia, $-T(nx) = T(-nx)$ y de i) se obtiene $T(-nx) = -T(nx) = -(nT(x)) = (-n)T(x)$.

iii) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{Q}$. En efecto, si $m \in \mathbb{Z}^*$ se tiene que $T(x) = T\big(m(\frac{1}{m}x)\big) = mT\big(\frac{1}{m}x\big)$. Por tanto,

$$T\Big(\frac{1}{m}x\Big) = \frac{1}{m}T(x)\,.$$

En consecuencia para $\alpha = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ se obtiene

$$T\Big(\frac{n}{m}x\Big) = T\Big(n\Big(\frac{1}{m}x\Big)\Big) = nT\Big(\frac{1}{m}x\Big) = n\Big(\frac{1}{m}T(x)\Big) = \frac{n}{m}T(x)$$

iv) Finalmente, $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. En efecto, T es continua pues $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, y la multiplicación por un número real es una función continua de $\mathbb{R} \times \mathcal{H}$ en $\mathcal{H}$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Sabiendo que $\displaystyle\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\big((2n-1)t\big)}{(2n-1)^3}$ es el desarrollo en serie de Fourier de la función impar,

$$g(t) = \begin{cases} t(\pi + t) & \text{si } -\pi \le t < 0,\\ t(\pi - t) & \text{si } 0 \le t < \pi. \end{cases}$$

deduzca
a) la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$;

b) la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$.

Solución: a) Al ser g una función (de $L^1(-\pi,\pi)$) continua y derivable en $\dfrac{\pi}{2}$, aplicamos el teorema de Dirichlet y se obtiene que el límite de la serie en $\dfrac{\pi}{2}$ es el valor de la función g en $\dfrac{\pi}{2}$.

$$g\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$$

Por tanto la suma de la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$.

b) Utilizamos ahora la igualdad de Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2\,dt = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|g(t)|^2\,dt &= \frac{1}{2\pi}2\int_{0}^{\pi}t^2(\pi-t)^2\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\pi^2t^2+t^4-2\pi t^3\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}\Big[t^5/5-2\pi t^4/4+\pi^2t^3\Big]_o^{\pi} = \pi^4(1/5-1/2+1/3) = \frac{\pi^4}{30}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 \quad = \quad \frac{1}{2}\,\frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$$

Igualando y despejando se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}\,.$$