PROBLEMAS DE TEOREMA DE GREEN

ENUNCIADO DEL TEOREMA

Sea C una curva simple y cerrada, suave a trozos y orientada positivamente, y sea $\mathbf{F}(x;y) = (P;Q)$ un campo vectorial cuyas funciones coordenadas tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a la región D acotada por C. Entonces:

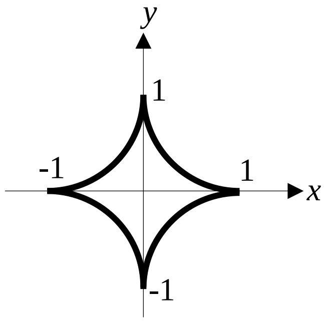
$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_C P dx + Q dy$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1.) *Transformación de una integral de línea en una de área.* Evaluar $\int_C x^4 dx + xy dy$, donde C es la curva triangular que une los puntos (0;0), (0;1) y (1;0), orientada positivamente.

2.) *Determinación de un área mediante una integral de línea.* Determine el área de la región limitada por la hipocicloide que tiene la ecuación vectorial

$$\mathbf{r}(t) = \cos^3 t\ \mathbf{i} + \mathrm{sen}^3 t\ \mathbf{j} \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$



3.) *Limitaciones en la aplicación del Teorema de Green.* Dado

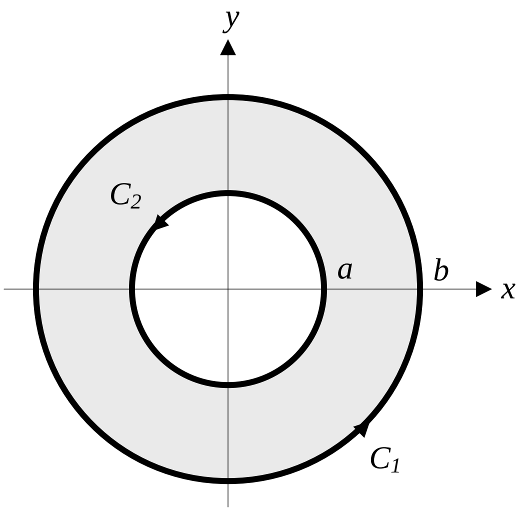
$$\mathbf{F}(x;y) = (P;Q) = (-y\ \mathbf{i} + x\ \mathbf{j})\ /\ (x^2 + y^2)$$

a) Calcular su integral de línea sobre el círculo $x^2 + y^2 = 1$

b) Calcular $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$, donde D es la región encerrada por la curva del punto a).

c) Discutir si estos resultados están de acuerdo o no con el Teorema de Green.

4.) *Aplicación del teorema de Green a un problema físico sobre una región con agujeros.* Determinar el momento de inercia de una arandela homogénea de radio interno *a*, radio externo *b* y masa *M*, respecto a uno de sus diámetros.



Determinaremos el momento de inercia respecto al diámetro colineal con el eje *x*. De Física sabemos que:

$$I_x = \iint_D \rho y^2 dA$$

Donde ρ es la densidad superficial de la arandela, supuesta constante dado que es homogénea.