8.13 De una urna que contiene a bolas blancas y b negras, se hacen extracciones sucesivas sin remplazamiento. Sea X_i el número de la extracción en que aparece la i-ésima bola blanca. Determinar

1. la distribución conjunta de X_1 y X_2.
2. las distribución de X_1 condicionada por X_2.

1. Hay $\binom{a+b}{a}$ secuencias distintas, equiprobables, que pueden obtenerse al extraer las bolas de la urna, según las a posiciones que ocupen las bolas blancas entre los $a+b$ lugares.
Las dos primeras bolas blancas aparecerán en los lugares j y k cuando se dé una secuencia de resultados de la forma:

$$\underbrace{N\,N\ldots N}_{j-1}\ B\ \underbrace{N\,N\ldots N}_{k-j-1}\ B\ \underbrace{-\ -\ -\ldots-}_{a+b-k}$$

El número de tales secuencias se obtiene situando las $a-2$ bolas blancas restantes, de todas las maneras posibles, en los $a+b-k$ últimos lugares. Así que

$$\mathrm{P}\{X_1 = j, X_2 = k\} = \binom{a+b-k}{a-2} \Big/ \binom{a+b}{a}$$

donde debe ser $1 \leq j < k \leq b+2$ (lo más tarde que puede aparecer la segunda bola blanca es en el lugar $b+2$, después de las b bolas negras y la primera bola blanca).

Directamente, la distribución marginal de X_1 tiene por función de probabilidad

$$\mathrm{P}\{X_1 = j\} = \binom{a+b-j}{a-1} \Big/ \binom{a+b}{a}$$

para $j = 1, 2, \ldots, b+1$. Naturalmente se cumple

$$\mathrm{P}\{X_1 = j\} = \sum_{k=j+1}^{b+2} \binom{a+b-k}{a-2} \Big/ \binom{a+b}{a}$$

pero la obtención del resultado requiere entonces usar la identidad I.13.
Más sencillo es sumar para obtener la distribución marginal de X_2. En efecto:

$$\mathrm{P}\{X_2 = k\} = \sum_{j=1}^{k-1} \binom{a+b-k}{a-2} \Big/ \binom{a+b}{a} = (k-1)\binom{a+b-k}{a-2} \Big/ \binom{a+b}{a}$$

para $k = 2, 3, \ldots, b+2$. Aunque el razonamiento directo es igual de sencillo: entre las $k-1$ primeras posiciones hay que colocar una única bola blanca, en la posición k aparece la segunda y las $a-2$ bolas restantes entre las $a+b-k$ últimas posiciones.

Condicionado por $X_2 = k$, la función de probabilidad de X_1 es

$$\mathrm{P}\{X_1 = j \mid X_2 = k\} = \frac{\mathrm{P}\{X_1 = j, X_2 = k\}}{\mathrm{P}\{X_2 = k\}} = \frac{1}{k-1}$$

para $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Ello significa que, si se conoce la posición de la segunda bola blanca, la primera tiene la misma probabilidad de figurar en cualquiera de las posiciones anteriores.

8.15 Se escoje un punto de coordenadas enteras, al azar en el triángulo limitado por las rectas $y = x$, $y = 0$ y $y = 2n - x$. Determinar

1. La distribución marginal de las coordenadas X e Y del punto elegido.
2. La distribución de cada coordenada condicionada por la otra.
3. La distribución de X si se sabe que $2Y + X = 2n$.

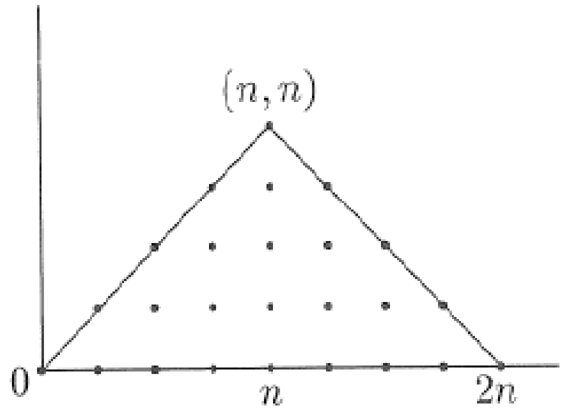
1. El recinto contiene

$$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n + 1 = (n+1)^2$$

puntos de coordenadas enteras; luego $1/(n+1)^2$ es la probabilidad de cada punto. La función de probabilidad conjunta de X e Y es pues

$$\mathrm{P}\{X = i, Y = j\} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

con $0 < j < n$ y $j \leq i < 2n - j$.



Como la función de probabilidad conjunta tiene un valor constante, el valor en i de la función de probabilidad de X es proporcional al número de puntos de abcisa i contenidos en el triángulo; es decir

$$\mathrm{P}\{X=i\}=\begin{cases}(i+1)/(n+1)^2 & \text{si } i=0,1,\ldots,n\\[2ex] (2n-i+1)/(n+1)^2 & \text{si } i=n+1,n+2,\ldots,2n\end{cases}$$

Análogamente

$$\mathrm{P}\{Y=j\}=\frac{2(n-j)+1}{(n+1)^2} \qquad \text{para } j=0,1,2,\ldots,n$$

2. Por consiguiente, si $0\le i\le n$ es

$$\mathrm{P}\{Y=j\,|\,X=i\}=\frac{1}{i+1} \qquad \text{para } j=0,1,\ldots,i$$

mientras que, si $n\le i\le 2n$,

$$\mathrm{P}\{Y=j\,|\,X=i\}=1/(2n-i+1) \qquad \text{para } j=0,1,\ldots,2n-i$$

En cambio,

$$\mathrm{P}\{X=i\,|\,Y=j\}=\frac{1}{2(n-j)+1} \qquad \text{para } i=j,j+1,\ldots,2n-j$$

supuesto que $0\le j\le n$.

3. Si se sabe que $2Y + X = 2n$, el punto elegido es uno de los situados en dicha recta y dentro del triángulo. Con tales características hay puntos correspondientes a $Y = 0, 1, 2, \ldots$, y así sucesivamente mientras $X = 2(n - Y)$ sea superior a Y; es decir, hasta $Y = [2n/3]$. Son en total $[2n/3] + 1$ puntos (el primer entero mayor que $2n/3$); por tanto

$$\mathrm{P}\{2Y + X = 2n\} = \frac{[2n/3] + 1}{(n+1)^2}$$

La distribución de X, condicionada por $2Y + X = 2n$, tiene entonces función de probabilidad

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X = i \,|\, 2Y + X = 2n\} &= \frac{\mathrm{P}\{X = i, 2Y + i = 2n\}}{\mathrm{P}\{2Y + X = 2n\}} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \text{ es impar} \\ 1/([2n/3] + 1) & \text{si } i \text{ es par y } 2n/3 \leq i \leq 2n \end{cases} \end{aligned}$$

8.20 Dos personas A y B tienen respectivamente a y b monedas que lanzan simultáneamente. Determinar la distribución de la diferencia entre el número de caras obtenidas por A y el número de caras obtenidas por B.

Sean C_a y C_b el número de caras que obtienen A y B respectivamente. Desde luego C_a y C_b son independientes, con distribuciones binomiales de parámetros $(a, 1/2)$ y $(b, 1/2)$ respectivamente. Es decir

$$\mathrm{P}\{C_a = i\} = \binom{a}{i}\frac{1}{2^a} \qquad \mathrm{P}\{C_b = j\} = \binom{b}{j}\frac{1}{2^b}$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots, a$ y $j = 0, 1, 2, \ldots, b$. Por consiguiente

$$\mathrm{P}\{C_a = i, C_b = j\} = \binom{a}{i}\binom{b}{j}\frac{1}{2^{a+b}}$$

Entonces $C_a - C_b$ puede valer $r = -b, \ldots, a$. Si $r \geq 0$ es

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{C_a - C_b = r\} &= \mathrm{P}\{C_a = C_b + r\} = \sum_{j=0}^{b} \mathrm{P}\{C_b = j\}\mathrm{P}\{C_a = j + r\} \\
&= \sum_{j=0}^{b} \binom{b}{j}\binom{a}{j+r}\frac{1}{2^{a+b}} = \frac{1}{2^{a+b}}\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}\binom{a}{a-r-j}
\end{aligned}$$

De acuerdo con la identidad I.18, resulta

$$\mathrm{P}\{C_a - C_b = r\} = \binom{a+b}{a-r}\frac{1}{2^{a+b}}$$

para $r = 0, \ldots, a$. Análogamente, si $r \leq 0$, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{C_a - C_b = r\} &= \mathrm{P}\{C_b = C_a - r\} = \sum_{j=0}^{a} \mathrm{P}\{C_a = j\}\mathrm{P}\{C_b = j - r\} \\
&= \sum_{j=0}^{a} \binom{a}{j}\binom{b}{j-r}\frac{1}{2^{a+b}} = \frac{1}{2^{a+b}}\sum_{j=0}^{a}\binom{a}{j}\binom{b}{b+r-j} \\
&= \binom{a+b}{b+r}\frac{1}{2^{a+b}} = \binom{a+b}{a-r}\frac{1}{2^{a+b}}
\end{aligned}$$

para $r = -b, \ldots, 0$. Si C_{a+b} representa el número de caras obtenidas al lanzar $a+b$ monedas, es

$$\mathrm{P}\{C_{a+b} - b = r\} = \mathrm{P}\{C_{a+b} = b + r\} = \binom{a+b}{a-r}\frac{1}{2^{a+b}}$$

para $r = -b, \ldots, a$. De forma que $C_a - C_b$ tiene la misma distribución que $C_{a+b} - b$ (o que $a - C_{a+b}$).

8.21 Sean X, Y, Z variables aleatorias independientes distribución geométrica de parámetro $1-p$; concretamente $p_k = p^k(1-p)$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$. Determinar:

1. $\mathrm{P}\{X = Y\}$.
2. $\mathrm{P}\{X + 2Y \leq Z\}$.
3. Probar que $U = \min(X, Y)$ y $V = X - Y$ son variables aleatorias independientes.

1. Como X e Y son independientes, de acuerdo con la fórmula de las probabilidades totales, se tiene

$$\mathrm{P}\{X = Y\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}\{X = n\}\mathrm{P}\{Y = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} p^n(1-p)p^n(1-p) = \frac{(1-p)^2}{1-p^2}$$

2. En primer lugar

$$\mathrm{P}\{Z \geq k\} = \sum_{n=k}^{\infty}(1-p)p^n = p^k$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X + 2Y \leq Z\} &= \sum_{m,n=0}^{\infty} \mathrm{P}\{X = m\}\mathrm{P}\{Y = n\}\mathrm{P}\{Z \geq m + 2n\} \\ &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (1-p)p^m(1-p)p^n p^{m+2n} = \frac{(1-p)^2}{(1-p^2)(1-p^3)} \end{aligned}$$

3. Si $j \geq 0$, $\{U = i, V = j\}$ coincide con $\{Y = i, X = i + j\}$; en cambio, si $j < 0$, equivale a $\{X = i, Y = i - j\}$. Por tanto

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{U = i, V = j\} &= \begin{cases} (1-p)p^i(1-p)p^{i+j} = (1-p)^2p^{2i+j} & \text{si } j \geq 0 \\[2ex] (1-p)p^i(1-p)p^{i-j} = (1-p)^2p^{2i+j} & \text{si } j < 0 \end{cases} \\
&= (1-p)^2p^{2i+|j|}
\end{aligned}$$

para i y j enteros e $i \geq 0$. Ello constituye la función de probabilidad de la distribución conjunta de U y V. Las distribución marginal de U es

$$\mathrm{P}\{U = i\} = (1-p)^2p^{2i}\sum_{j=-\infty}^{\infty} p^{|j|} = (1-p)^2p^{2i}\left(1 + 2\sum_{j=1}^{\infty} p^j\right) = (1-p)(1+p)p^{2i}$$

mientras que V tiene por función de probabilidad marginal

$$\mathrm{P}\{V = j\} = (1-p)^2p^{|j|}\sum_{i=0}^{\infty} p^{2i} = \frac{(1-p)^2p^{|j|}}{1-p^2}$$

Como $\mathrm{P}\{U = i, V = j\} = \mathrm{P}\{U = i\}\mathrm{P}\{V = j\}$, U y V son variables aleatorias independientes[3].

Ejercicio 2. La variable aleatoria X tiene distribución de Poisson de parámetro $\lambda > 0$. Condicionada por el valor $X = n$, con $n \geq 0$, la variable aleatoria Y tiene distribución binomial de parámetros n y p, con $0 < p < 1$. (Cuando $X = 0$, se entiende que $Y = 0$.)

(a) Determinar la función de probabilidad de Y y la la función de probabilidad de X condicionada por $Y = m$, para $m \geq 0$.

(b) Dar la expresión de la recta de regresión de X sobre Y. Calcular $\operatorname{Cov}(X, Y)$ y el coeficiente de correlación entre X e Y.

(c) Probar que las variables Y y $X - Y$ son independientes.

(a) Fijado $m \geq 0$ se tiene

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{Y = m\} &= \sum_{n=m}^{\infty} \mathrm{P}\{Y = m \mid X = n\} \cdot \mathrm{P}\{X = n\} \\
&= \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!}.
\end{aligned}
$$

Se concluye que Y tiene distribución de Poisson de parámetro λp.

Dados $0 \leq m \leq n$ se tiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X = n \mid Y = m\} &= \frac{\mathrm{P}\{Y = m \mid X = n\} \cdot \mathrm{P}\{X = n\}}{\mathrm{P}\{Y = m\}} \\
&= \frac{\binom{n}{m} p^m (1-p)^{n-m} \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}{e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!}} \\
&= e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^{n-m}}{(n-m)!}.
\end{aligned}$$

Por tanto, condicionada por $Y = m$, X se distribuye como una Poisson de parámetro $\lambda(1-p)$ más m unidades; informalmente, $m + \mathcal{P}(\lambda(1-p))$.

(b) Se deduce que $\mathrm{E}[X \mid Y = m] = m + \lambda(1-p)$, que es por tanto también la expresión de la recta de regresión de X sobre Y, es decir, $n = m + \lambda(1-p)$. Nótese que, por construcción, la recta de regresión de Y sobre X tiene ecuación $m = np$.

La pendiente de la recta de regresión de X sobre Y es igual a $\mathrm{Cov}(X,Y)/\mathrm{Var}(Y) = 1$. Dado que $\mathrm{Var}(Y) = \lambda p$, obtenemos $\mathrm{Cov}(X,Y) = \lambda p$. Por otro lado, el coeficiente de correlación ρ verifica

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\lambda p}{\sqrt{\lambda \cdot \lambda p}},$$

luego $\rho = \sqrt{p}$.

(c) Condicionado por $X = n$, se tiene que Y tiene distribución $B(n,p)$ y por tanto $Y - X = n - X$ tiene distribución $B(n, 1-p)$. Razonando como en el apartado (a) se llega entonces a que $Y - X$ tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda(1-p))$. Se tiene, para $n, m \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X - Y = n, Y = m\} &= \mathrm{P}\{X = n + m, Y = m\} \\
&= \mathrm{P}\{Y = m \mid X = n + m\} \cdot \mathrm{P}\{X = n + m\} \\
&= \binom{n+m}{m} p^m (1-p)^n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{n+m}}{(n+m)!} \\
&= e^{-\lambda(1-p)} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \cdot e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^m}{m!} \\
&= \mathrm{P}\{X - Y = n\} \cdot \mathrm{P}\{Y = m\}.
\end{aligned}$$

Se concluye que Y y $X - Y$ son independientes.