Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (3 puntos)
En el espacio $\mathcal{H}$ de las funciones reales derivables y con derivada continua en $[0,1]$ se define

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle : \ \mathcal{H}\times\mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (f,g) &\longmapsto \langle f,g\rangle = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt \end{aligned}$$

a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{H}$.

b) Sea g la función constante 1, esto es, $g(t)=1$ $\forall t\in[0,1]$. Determine el subespacio ortogonal a g.

c) Sea $F=\{f\in\mathcal{H}\colon f(0)=0\}$. Determine $F^{\perp}$.

Solución: a) $\langle f,f\rangle = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,dt \geq 0$ pues $(f'(t))^2\geq 0$ y $(f(0))^2$ para todo $t\in[0,1]$.
Además si $\langle f,f\rangle = (f(0))^2 + \int_0^1 (f'(t))^2\,dt = 0$, se cumple que $f(0)=0$, y teniendo en cuenta que el integrando es una función continua positiva en $[0,1]$, resulta que $f'(t)=0$ para todo $t\in[0,1]$. Por tanto, $f(t)=C$ para todo $t\in[0,1]$ y de $f(0)=0$ resulta que $C=0$.

Claramente $\langle f,g\rangle=\langle g,f\rangle$ pues $f(0)g(0)=g(0)f(0)$ y $f'(t)g'(t)=g'(t)f'(t)$ para todo t.

Además para todo $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y para todo $f,h,g\in\mathcal{H}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \langle \alpha f+\beta h, g\rangle &= (\alpha f(0)+\beta h(0))g(0) + \int_0^1 \big(\alpha f'(t)+\beta h'(t)\big)g'(t)\,dt \\ &= \alpha\Big(f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt\Big) + \beta\Big(h(0)g(0)+\int_0^1 h'(t)g'(t)\,dt\Big) \\ &= \alpha\langle f,g\rangle + \beta\langle h,g\rangle \end{aligned}$$

b) Sea $f\in\mathcal{H}$ tal que f es ortogonal a g. Se cumple por tanto que $\langle f,g\rangle = f(0)g(0)+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt = f(0)=0$. En consecuencia el subespacio ortogonal a $\{g\}$ es:

$$\{g\}^{\perp} = \{f\in\mathcal{H}\colon f(0)=0\}$$

c) Sea $h\in F^{\perp}=\{f\in\mathcal{H}\colon f(0)=0\}^{\perp}$. Se cumple que

$$\langle h,f\rangle = h(0)f(0)+\int_0^1 h'(t)f'(t)\,dt = \int_0^1 h'(t)f'(t)\,dt$$

para todo $f\in F$. En particular para todo $f\in\{t,t^2,t^3,\cdots\}$. Así pues si $h\in F^{\perp}$, entonces h' es ortogonal (con el producto interno usual de $L^2[0,1]$) al sistema completo $\{1,t,t^2,t^3,\cdots\}$ de $L^2[0,1]$. Por tanto $h'(t)=0$ y resulta que $h(t)=C$. En consecuencia, $F^{\perp}=\operatorname{span}\{g\}$.

Nota: Aunque hemos demostrado directamente el apartado c) también puede deducirse observando que $\{g\}^{\perp} = (\operatorname{span}\{g\})^{\perp}=F$ y por tanto $F^{\perp}=(\operatorname{span}\{g\})^{\perp\perp}$. Dado que $\operatorname{span}\{g\}$ es un subespacio de dimensión finita, $\operatorname{span}\{g\}$ es un subespacio vectorial completo de $\mathcal{H}$ y en consecuencia, del teorema 3.11 se deduce que $F^{\perp}=\operatorname{span}\{g\}^{\perp\perp}=\operatorname{span}\{g\}$.

Pregunta 2 (2,5 puntos)
En el espacio de sucesiones reales ℓ^2, sea el conjunto:

$$C=\big\{\ \{x_n\}_{n=1}^{\infty}\in\ell^2\colon x_n\geq 0 \text{ para todo } n\big\}$$

1. Demuestre que C es un subconjunto convexo y cerrado de ℓ^2.

2. Demuestre que la proyección P_C sobre C es:

$P_C(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) = \{\text{máx}\{x_1, 0\}, \text{máx}\{x_2, 0\}, \ldots, \text{máx}\{x_n, 0\}, \ldots\}$.

Solución:1) Convexidad de C: hay que comprobar que para todo $x, y \in C$ y para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \alpha \leq 1$ se cumple que $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$. De $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in C$ se deduce que $x_n \geq 0, y_n \geq 0$ para todo n y dado que $\alpha \geq 0, 1-\alpha \geq 0$ entonces $\alpha x_n + (1-\alpha)y_n \geq 0$ para todo n si $x_n, y_n \geq 0$ para todo n.
Para ver que C es cerrado basta observar que si $\{x^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión en C que converge en ℓ^2 a x, siendo para cada k, $x^{(k)} = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}, \ldots\}$ y $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, entonces para cada n fijo, la sucesión la sucesión de números reales positivos $\{x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \cdots, x_n^{(k)}, \cdots\}$ converge a x_n y en consecuencia $x_n \geq 0$.

2) Veamos que el mejor aproximante de $x \in \ell^2$ en C es

$$y = P_C(x) = P_C(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) = \{\text{máx}\{x_1, 0\}, \text{máx}\{x_2, 0\}, \ldots, \text{máx}\{x_n, 0\} \ldots\}.$$

En efecto, como para todo $b \geq 0$ y para todo $a \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$|a - \text{máx}(a, 0)| = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \geq 0 \\ |a| & \text{si} \quad a < 0 \end{cases} \leq |a - b|$$

en consecuencia

$$\|x - P_C(x)\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - \text{máx}(x_n, 0))^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} (x_n - z_n)^2$$

para toda sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \in C$. Por tanto, $P_C(x)$ es el mejor aproximante de $x \in \ell^2$ en C.

Pregunta 3 (2 puntos) Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano complejo ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) y $T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal. Demuestre que si $\langle T(x), x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Solución: Veamos que si $\langle T(x), x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $T(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.
En primer lugar deducimos que si $\langle T(x), x \rangle = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$, entonces $\langle T(x), y \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. En efecto, sean $x, y \in \mathcal{H}$. Como

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(x+y), x+y \rangle = \langle T(x), x \rangle + \langle T(y), x \rangle + \langle T(x), y \rangle + \langle T(y), y \rangle \\ &= \langle T(y), x \rangle + \langle T(x), y \rangle \end{aligned}$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$. En consecuencia, aplicando lo anterior a x y a iy también se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle T(iy), x \rangle + \langle T(x), iy \rangle = i\langle T(y), x \rangle + \bar{i}\langle T(x), y \rangle \\ &= i(\langle T(y), x \rangle - \langle T(x), y \rangle) \end{aligned}$$

Por tanto se satisfacen las dos igualdades $\langle T(y), x \rangle - \langle T(x), y \rangle = 0$ y $\langle T(y), x \rangle + \langle T(x), y \rangle = 0$, de donde se concluye que $\langle T(x), y \rangle = 0$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$.
Finalmente, tomando $y = T(x)$ se obtiene que $\|T(x)\|^2 = 0$, esto es, $T(x) = 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.

Pregunta 15 Sea en ℓ^2 la sucesión $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq 1}$ dada por $\mathbf{v}_n = \{\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{2(n-1) \text{ términos}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \ldots\}$.

a) Demuestre que $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq 1}$, es un sistema ortonormal de ℓ^2.

b) Sea $\mathbf{x} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$. Compruebe si $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \mathbf{v}_n \rangle \, \mathbf{v}_n$.
¿Qué se puede concluir sobre $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq 1}$?

Solución: a) Para todo n se tiene que $\|\mathbf{v}_n\| = \sqrt{(1/2 + 1/2)} = 1$.
Por otro lado, si $n \neq j$ se cumple que $\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ pues los elementos no nulos de $\mathbf{v}_n$ son los términos $2n - 1$ y $2n$ mientras que los elementos no nulos de $\mathbf{v}_j$ son los términos $2j - 1$ y $2j$ y no coinciden.

b) Para cada $n \geq 1$

$$\langle x, \mathbf{v}_n \rangle = \frac{1}{2n-1}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2n}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n+2n-1}{2n(2n-1)} = \frac{4n-1}{2\sqrt{2}n(2n-1)}$$

y por tanto

$$\langle x, \mathbf{v}_n \rangle \, \mathbf{v}_n = \{\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{2(n-1)}, \frac{4n-1}{4n(2n-1)}, \frac{4n-1}{4n(2n-1)}, 0, 0, \ldots\} \, .$$

En consecuencia, $\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \mathbf{v}_n \rangle \, \mathbf{v}_n = \{ \overbrace{\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{7}{24}, \frac{7}{24}, \ldots,}^{2(n-1)} \frac{4n-1}{4n(2n-1)}, \frac{4n-1}{4n(2n-1)}, \ldots \}$, donde se ve que $\mathbf{x} \neq \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, \mathbf{v}_n \rangle \, \mathbf{v}_n$. Se puede por tanto concluir que $\{\mathbf{v}_n\}_{n \geq 1}$ no es un sistema ortonormal completo de ℓ^2.