Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Segunda Prueba de Evaluación Continua 2015

Ejercicio 1: Demuestre que no existe ningún valor $\theta \in \mathbb{R}$ para el cual la siguiente matriz sea diagonalizable en $\mathbb{R}$:

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 0 & -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: Calculamos el polinomio característico para obtener los autovalores de la matriz

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta & -\lambda & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda\operatorname{sen}^2\theta - \lambda\cos^2\theta \\ &= -\lambda^3 - \lambda(\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta) = -\lambda(\lambda^2+1) \end{aligned}$$

Las raíces del polinomio son 0 real y las complejas i y $-i$; por lo que no es diagonalizable en $\mathbb{R}$ pues sólo tiene un autovalor real $\lambda = 0$ simple.

Ejercicio 2: Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica B es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine la forma canónica de Jordan J y una base B' tal que la matriz de f en dicha base sea J.
b) Determine si el plano de ecuación $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$ en la base canónica es invariante por f.
b) Estudie si f admite una cantidad infinita de planos invariantes.

Solución:

(a) Llamamos A a la matriz dada y calculamos el polinomio característico para determinar los autovalores.

$$p(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix},$$

que desarrollado por la segunda fila resulta

$$p(\lambda) = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda(2-\lambda)+1) = (1-\lambda)^3.$$

Así, f tiene un único autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad algebraica $\alpha = 3$. Determinamos la multiplicidad geométrica $d = 3 - \operatorname{rg}(A-I)$:

$$\operatorname{rg}(A-I) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow d = 2.$$

Entonces la matriz de Jordan está formada por dos bloques y es de la forma

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Para calcular la base B' tal que $M_{B'}(f) = J$ obtenemos las ecuaciones de los subespacios generalizados. $E^1(1) = V_1 = \ker(f - I)$ tiene ecuaciones $(A - I)X = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E^1(1) \equiv x + 2y + z = 0$$

Como $\dim E^1 = 2$, entonces $\dim E^2 = 3$, luego $E^2 = M(1)$ el subespacio máximo, que no tiene ecuaciones implícitas por ser el espacio vectorial total.
El esquema de la base de Jordan es

$$\begin{array}{ccc} \overset{1}{E^1(1)} & \subset & \overset{2}{E^2(1)} = M(1) \\ v_1 & \leftarrow & v_2 \\ v_3 & & \end{array}$$

Por lo que $v_2 \in E^2(1) - E^1(1)$, $v_1 = (f - I)v_2$, y v_3 es un vector de $E^1(1)$ linealmente independiente de v_1. Tomamos, por ejemplo, $v_2 = (1, 0, 0)$ y

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \to v_1 = (1, 0, -1)$$

y podemos tomar $v_3 = (0, 1, -2)$.
Finalmente, si formamos la matriz de paso P cuyas columnas son las coordenadas de los vectores v_1, v_2 y v_3, podemos comprobar que se cumple $J = P^{-1}AP$ o, si queremos evitar el cálculo de la inversa, $PJ = AP$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Buscamos una base del plano P de ecuación $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$, por ejemplo

$$\{u = (1, -2, 0)_B,\ w = (0, -3, 1)_B\}.$$

El plano será invariante si y sólo si las imágenes $f(u)$ y $f(w)$ pertenecen al plano. Como nos han dado la ecuación del plano en la base canónica, entonces tenemos que utilizar la matriz A y no la matriz de Jordan. Calculamos las imágenes.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Y comprobamos que $f(u) = (-2, 2, 3)_B \notin P$ y $f(w) = (-5, -3, 6)_B \notin P$, por lo que no es un plano invariante.

(c) En primer lugar, observamos que los planos son hiperplanos, por estar en dimensión 3. El endomorfismo tiene infinitas rectas invariantes, que son todas las contenidas en el subespacio propio $E^1(1)$. Como el número de rectas invariantes es igual al número de hiperplanos invariantes, entonces sí existen infinitos planos invariantes por f.

Ejercicio 3: Determine las posibles formas canónicas de Jordan (o Jordan real) de un endomorfismo f de un espacio vectorial real de dimensión 4 que admite exactamente una única recta invariante.

Solución:

Si deja una única recta invariantes, entonces tiene un único autovalor λ con multiplicidad geométrica $d = \dim V_\lambda = 1$. Si f admite una forma de Jordan, entonces

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Si f no admite una forma canónica de Jordan, entonces el polinomio característico tiene alguna raíz compleja (y su conjugada) $a \pm bi$, por lo que la forma de Jordan real será

$$J_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$$

Nótese que las raíces complejas no pueden ser dobles, porque en tal caso no tendría un autovalor real, y por tanto no tendría ninguna recta invariante.