# PROBLEMA 3. Tema 6 (2 puntos)

Resolver por colocación ortogonal la ecuación de Poisson en dos dimensiones:

$$\Delta u(x,y) = -1,$$

en el cuadrado unidad [-1,1] × [-1,1] con condiciones de contorno $u(x,y)=0$ en los cuatro lados.

Utilizar la base $\Phi_{mn}(x,y)$ dada por el producto tensorial de las bases de polinomios de Chebyshev en las dos coordenadas cartesianas, debidamente recombinadas para satisfacer las condiciones de contorno:

$$\Phi_{mn}(x,y) \equiv \phi_m(x)\phi_n(y) \qquad m=2,\dots,N \quad \text{y} \quad n=2,\dots,N\,,$$

donde

$$\phi_{2n}(x) = T_{2n}(x) - T_0(x) \qquad n=1,2,\dots$$
$$\phi_{2n+1}(x) = T_{2n+1}(x) - T_1(x) \qquad n=1,2,\dots$$

(se aplica lo mismo para la coordenada *y*).

La aproximación espectral de orden *N* en las dos variables tendrá la forma

$$u_N(x,y) = \sum_{m=2}^{N}\sum_{n=2}^{N} a_{mn}\Phi_{mn}(x,y) = \sum_{m=2}^{N}\sum_{n=2}^{N} a_{mn}\phi_m(x)\phi_n(y)$$

y serán necesarios $(N-1)\times(N-1)$ puntos de colocación en el interior del cuadrado unidad. Para ello considerar la cuadratura de Lobatto de *N*+1 puntos para cada coordenada, descartando los puntos extremos ya que la recombinación ha posibilitado que las funciones $\Phi_{mn}(x,y)$ de la base satisfagan las condiciones de contorno en esos puntos. Como ejemplo se muestra el polinomio obtenido para orden $N=3$:

$$u_3(x,y) = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} + \frac{x^2y^2}{3}\,.$$

El objetivo de este ejercicio es analizar el comportamiento de la solución espectral en la proximidad de la frontera. Para ello:

(a) Representar gráficamente el comportamiento de la función residuo $R(x,y) = \Delta u_N(x,y) + 1$ en una sección horizontal del dominio para $N = 4,\ 6 \text{ y } 10$ (considerar por ejemplo el intervalo $x \in [-1,1]$ con $y=0$). Representar gráficamente cómo varía el valor de la función residuo en un punto medio de la frontera, por ejemplo el $(-1,0)$, con el orden de la aproximación (esto es, representar $R(-1,0)$ vs. *N*) para valores pares de *N* entre 4 y 20. ¿Converge la aproximación? Discutir los resultados obtenidos.

(b) Representar gráficamente el comportamiento de la función residuo en una diagonal del dominio para $N = 4,\ 6 \text{ y } 10$ (considerar por ejemplo la diagonal $y = x$). Representar gráficamente cómo varía el valor de la función residuo en la esquina $(1,1)$ de la frontera con el orden de la aproximación (esto es $R(1,1)$ vs. *N*) para valores pares de *N* entre 4 y 20. ¿Converge la aproximación? Discutir los resultados obtenidos.

(c) Supongamos ahora la aproximación espectral, también de orden *N*, en la que no se han recombinado las funciones de la base de Chebyshev:

$$u_N(x,y) = \sum_{m=0}^{N}\sum_{n=0}^{N} a_{mn} T_m(x) T_n(y)$$

En este caso sí que serán necesarios $(N+1)\times(N+1)$ puntos para obtener los coeficientes espectrales, de los cuales $(N-1)\times(N-1)$ se utilizarán para anular la función residuo en el interior de la región, y los $4N$ puntos restantes, pertenecientes a la frontera, serán utilizados para fijar las condiciones de contorno. Calcular la aproximación espectral obtenida para $N=4$ y compararla con la obtenida en el caso anterior en el que se utilizó la base recombinada. ¿Qué método parece más preciso y cuál más eficiente?