Geometría diferencial de curvas y superficies

2019

Duración 2 horas

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (3 puntos)

Dada un curva del plano con parametrización natural $\alpha : (-2, 2) \to \mathbb{R}^2$. Suponemos que la función curvatura es $\kappa_\alpha(t) = t^5$, probar que la rotación de ángulo 180^o y centro $\alpha(0)$, deja invariante la curva.

Ejercicio 2. (3 puntos)

Sea C una curva sin puntos de inflexión en una superficie M.

a) ¿Cómo tiene que estar situado el plano osculador a C respecto al plano tangente a M en cada punto de C para que C sea geodésica?

b) Supongamos que N es una superficie de modo que $M \cap N$ es la curva C y en todos los puntos p de C se verifica que $T_pM = T_pN$, es decir las superficies M y N son tangentes a lo largo de C. Si C es geodésica de M, probar que C es geodésica de N.

Ejercicio 3. (4 puntos)

Sea S el conjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$S = \{(t, t^3 + s, s) \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R}\}$$

a) Probar que S es superficie diferenciable. ¿Es S una superficie orientable?

b) Obtener las direcciones y curvaturas principales de S en $(0, 0, 0)$.

c) Calcular la curvatura de Gauss en un punto genérico de S.

Soluciones

Ejercicio 1.

En el enunciado original faltaba precisar que $\alpha : (-2,2) \to \mathbb{R}^2$ tiene que ser parametrización natural, la totalidad de los estudiantes lo han entendido así, es decir se han percatado de la errata por omisión.

Es un caso particular del Ejercicio 10 del capítulo 1 del texto base.

Ejercicio 2.

a) El plano osculador a C y el plano tangente a M deben ser perpendiculares en cada punto de C. Proposición 4.11 del texto base.

b) Si C es geodésica de M en cada punto p de C el plano osculador $\pi_C(p)$ es perpendicular a T_pM y como $T_pM = T_pN$, se tiene que $\pi_C(p)$ es también perpendicular a T_pN y por tanto C es también geodésica de N.

Ejercicio 3.

Sea S el conjunto de $\mathbb{R}^3$ dado por:

$$S = \{(t, t^3 + s, s) \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R}\}$$

a) Definimos $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por $\varphi(t,s) = (t, t^3 + s, s)$. Ahora $c = (\mathbb{R}^2, \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ es un tipo de carta de Monge (aunque no es exactamente del tipo $(x,y) \longmapsto (x, y, f(x,y))$, se demuestra que al ser de la forma $(x,z) \longmapsto (x, g(x,z), z)$ se prueba de forma análoga que se trata de una carta). La imagen de c cubre toda la superficie y por tanto S es superficie diferenciable. Por otra parte como la carta cubre toda la superficie se trata de una superficie orientable y $\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\|}$ es una orientación.

b)

$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,s) = (1, 3t^2, 0)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s) = (0,1,1)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,s) \times \frac{\partial\varphi}{\partial s}(t,s) = (3t^2, -1, 1)$, $\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\|\frac{\partial\varphi}{\partial s} \times \frac{\partial\varphi}{\partial t}\|} = \frac{1}{\sqrt{9t^4+2}}$

$g_{11} = 1 + 9t^4$, $g_{12} = g_{21} = 3t^2$, $g_{22} = 2$

$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}(t,s) = (0, 6t, 0)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t}(t,s) = (0,0,0)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial s\partial t} = (0,0,0)$

$L_{11} = \frac{6t}{\sqrt{9t^4+2}}$, $L_{12} = L_{21} = L_{22} = 0$

En el punto $(0,0,0)$, tenemos:

$g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = 2$

$L_{11} = L_{22} = L_{12} = L_{21} = 0$, de donde se tiene que el operador de Weingarten es $[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ con todos sus autovalores nulos: se trata de un punto plano. Por tanto todas las curvaturas principales son nulas y todas las direcciones son direcciones principales.

c) Como $\det[L_{ij}] = \det \begin{bmatrix} \frac{6t}{\sqrt{9t^4+2}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, en cualquier punto la curvatura de Gauss es siempre nula.