EJERCICIO 1:

Dada la bimatriz:

$$BM = \begin{pmatrix} (-1/2\,,0) & (-\,1/2\,,-4) \\ (1,2) & (-2,4) \\ (4,-4) & (-\,1/2\,,0) \end{pmatrix}$$

Para buscar el par de arbitraje, debemos encontrar primero un punto de partida para la negociación. Un buen par inicial es el par *maxmin* formado por los valores *maxmin* de ambos jugadores.

El primer valor podemos calcularlo simplemente a través de la relación por dominancia y considerando que el jugador de columnas querrá minimizar nuestra recompensa:

$$P_1 = \begin{pmatrix} -\,1/2 & -\,1/2 \\ 1 & -2 \\ 4 & -\,1/2 \end{pmatrix} \approx (4 \quad -1/2) \;\rightarrow\; u_0 = -\,1/2$$

El segundo valor tras aplicar relaciones de dominancia requiere de una estrategia mixta:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector de probabilidad por simetría es: $\vec{q} = (1/2\,,1/2)$ con un valor *maxmin*: $v_0 = -2$

Tenemos por tanto nuestro punto de partida para la negociación: $(u_0, v_0) = (-\,1/2\,,-2)$

Por otro lado, debemos ver cuál es nuestro conjunto de negociación, que está formado por la frontera "noreste" de la región de recompensas factibles (que no es más que la envoltura convexa de las entradas de la bimatriz $BM$ entendidas como puntos de $\mathbb{R}^2$) y que estará delimitada por el cuadrante superior al punto inicial. Vemos esto en el siguiente gráfico:

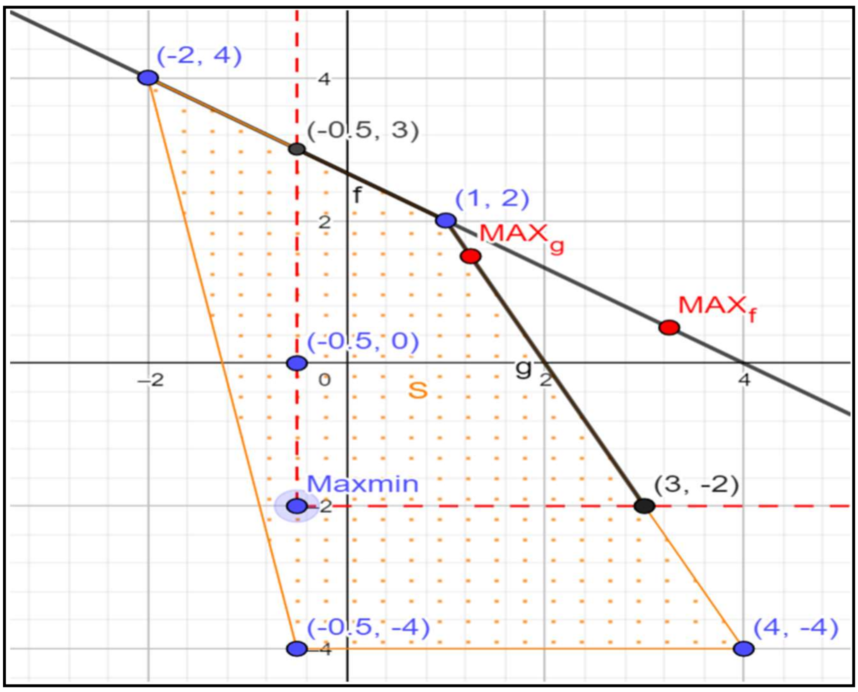



*Gráfico ejercicio 1*

En naranja vemos la envoltura convexa ($S$) de los puntos (en azul) dados por la matriz $BM$, el punto inicial que hemos llamado Maxmin y las líneas discontinuas que delimitan el cuadrante superior de Maxmin.

La región de negociación aparece representada por la unión de dos segmentos negros:

1. El segmento $f\ dado\ por\ \alpha(-1/2\,,3)+(1-\alpha)(1,2)\ \ \alpha\in(0,1)$ (1.1)
2. El segmento $g\ dado\ por\ \alpha(1,2)+(1-\alpha)(3,-2)\ \ \alpha\in(0,1)$ (1.2)

En los tres puntos, la función $G(u,v)=(u-u_0)(v-v_0)=(u+1/2)(v+2)$ toma los valores: $g(-1/2\,,3)=0$; $g(1{,}2)=6$; $g(3,-2)=0$; luego el máximo está alrededor del punto extremo "noreste" de $S$: (1,2).

Para saber en cuál de los segmentos se encuentra el par de arbitraje debemos resolver dos problemas de optimización restringida. El primero:

$$\max_{sa} G(u,v)=\left(u+\frac{1}{2}\right)(v+2)$$

$$(u,v)\in f$$

Por (1.1) podemos relacionar $u$ y $v$: $\quad 2u+3v=8$

Así la función $G$ queda en función de $v$:

$$G(v)=\left(\frac{8-3v}{2}+\frac{1}{2}\right)(v+2)$$

$$G(v)=-\frac{3}{2}v^2+\frac{3}{2}v+9$$

Un polinomio con valor máximo en:

$$v=\frac{1}{2}\ \rightarrow u=\frac{13}{4}$$

Sin embargo, a pesar de que $\frac{75}{8}=g\left(\frac{13}{4},\frac{1}{2}\right)>G(1,2)=6$, el punto se encuentra fuera de la zona de negociación, y no es factible adoptarlo, por lo que debemos buscar el par de arbitraje en el otro segmento $g$:

$$\max_{sa} G(u,v)=\left(u+\frac{1}{2}\right)(v+2)$$

$$(u,v)\in g$$

Por (1.2) podemos relacionar $u$ y $v$: $\quad 2u+v=4$

Así la función $G$ queda en función de $u$:

$$g(u)=\left(u+\frac{1}{2}\right)(4-2u+2)$$

$$g(u)=5u-2u^2+3$$

Un polinomio con máximo en $u=5/4$ con $v=3/2$.

El punto se encuentra sobre la zona de negociación, y con valor:

$$\frac{49}{8} = G\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right) > g(1,2) = 6$$

SOLUCIÓN

El par de arbitraje por el método de Shapley es:

$$\psi\left(S, \left(-\frac{1}{2}, -2\right)\right) = (\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$$

EJERCICIO 2:

Tenemos dos jugadores, el monopolista $(M)$ y el potencial entrante $(N)$. Los conjuntos de acciones para cada jugador son:

- $A_M = \{GV, O, N\}$ según apoye al grupo verde, a la oposición o a ninguno.
- $A_N = \{E, NE\}$ según decida entrar $(E)$ o no entrar $(NE)$.

Por otro lado, las recompensas de cada jugador son un par $(m, n)$ con $m$ la recompensa de $M$ y $n$ la recompensa de $N$. Estos pares vienen determinados por las acciones de cada jugador.

<u>Según la acción de $N$</u>:

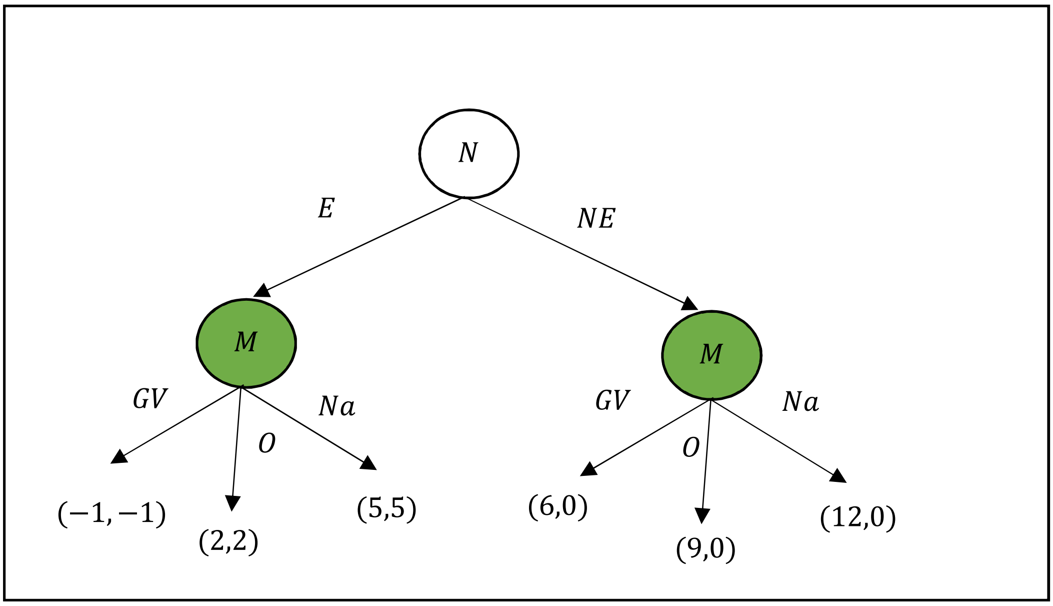
- Si decide entrar $(E)$ las recompensas *básicas* son $(5{,}5)$
- Si decide no entrar $(NE)$ las recompensas *básicas* son $(12{,}0)$

**Entendiendo por *"básicas"* como la recompensa que se les aplica por defecto a la espera de cambiar por la decisión de $M$, que repercutirá en los costes fijos y por tanto en la recompensa final**

<u>Según la acción de $M$</u>: (las variaciones son respecto a las mencionadas anteriormente)

- Si decide apoyar al grupo verde $(GV)$ entonces las recompensas disminuyen 6 unidades para ambos jugadores.
- Si decide apoyar al grupo de la oposición $(O)$ entonces las recompensas disminuyen 3 unidades para ambos jugadores.
- Si decide no apoyar ninguna opción $(Na)$ entonces las recompensas se mantienen intactas.

Con estas aclaraciones, la forma extensiva del juego viene dada por:




*Forma extensiva ejercicio 2*

Los nodos verdes representan el conjunto de información de $M$, es decir, sabe está en alguno de los dos nodos verdes, pero no exactamente en cuál de ellos.

La bimatriz del juego es:

$$\begin{array}{cccc} & E & NE & \leftarrow {}^{N}\!/_{M} \downarrow \\ BM = & \left(\begin{array}{c} (-1,-1) \\ (2{,}2) \\ (5{,}5) \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} (6{,}0) \\ (9{,}0) \\ (12{,}0) \end{array}\right) & \begin{array}{c} GV \\ O \\ Na \end{array} \end{array}$$

En la bimatriz podemos encontrar el equilibrio a través de relaciones de dominancia, puesto que para el jugador $M$ la tercera fila domina a las dos primeras por reportar mayor recompensa, lo que nos permite reducir el juego a:

$$\begin{array}{cccc} & E & NE & \\ BM = & ((5,5) & (12,0)) & GV \end{array}$$

Y podemos concluir que el par (5,5) domina al par (12,0) por reportar al jugador $N$ mayor recompensa.

Podemos comprobar que el par (5,5) es un equilibrio y además único, porque es el único par $(m, n)$ donde ninguno de los jugadores tiene incentivo (aumento de recompensa) por abandonar su estrategia.

Podemos ver que sucedería con el par $(m, n)$ si uno de los jugadores abandona el equilibrio y comprobamos que ello se traduce en menor recompensa para el jugador que sale.

- Si M abandona el equilibrio $NaE$, puede jugar $O$ o bien $GV$, sin embargo, si decide cambiar a $O$ entonces $\Delta m$= -3 y si decide cambiar a $GV$ entonces $\Delta m = -6$.
- Si $N$ abandona el equilibrio $NaE$, puede jugar su otra opción $NE$, sin embargo $\Delta n = -5$.

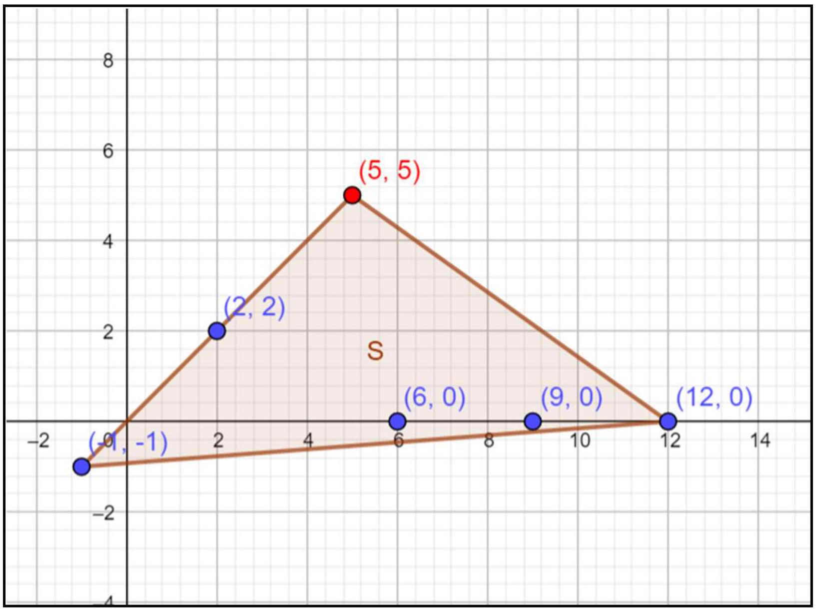


*Gráfico ejercicio 2*

Por otro lado, observamos que el punto de equilibrio es un máximo de la función

$$g(u,v) = (u-5)(v-5)$$

en el recinto delimitado por la envoltura convexa $S$ de los pares de beneficios que nos da la bimatriz del juego. Esto es porque los valores maximin forman un par que coincide con el valor situado más al noreste de la zona de recompensas. Por tanto, no es necesario el uso de estrategias mixtas ni proceso de negociación.

SOLUCIÓN

Existe un único punto de equilibrio (en estrategias puras) cuando el monopolista no apoya ninguna de las propuestas políticas y el nuevo competidor decide entrar en el mercado, lo que se traduce en la estrategia $NaE$, con una recompensa para ambos dada por el par $(5{,}5)$.

EJERCICIO 3

En primer lugar, establecemos la notación:

- $Q_i^j$ denota la cantidad del producto $i$ que fabrica la empresa $j$.
- $P_i$ es el precio del producto $i$.
- $B^j$ es el beneficio de la empresa $j$.
- $I_i^j$ es el ingreso de la empresa $j$ por el producto $i$.
- $C_i^j$ es el coste por unidad que le genera a la empresa $j$ cada unidad del producto $i$.

La producción de cada empresa podemos expresarla como un par $(Q_1^j,\ Q_2^j)$ para $j = \{1,2\}$ que expresa las posibles acciones de cada empresa:

- Acciones de la empresa $I$: $\{(400, 0),\ (300, 100)\}$
- Acciones de la empresa $II$: $\{(150,\ 0),\ (0,\ 200)\}$

Definimos también:

$$Beneficio = Ingresos - costes$$

$$Ingresos = produccion_{vendida}\ x\ \ precio$$

$$costes = produccion_{total}\ \ x\ \ precio$$

Donde **no necesariamente** se tiene: $produccion_{vendida} =\ produccion_{total}$

Los beneficios de cada empresa pueden desglosarse como:

$$B^j = (I_1^j + I_2^j) - (C_1^j + C_2^j) = (Q_1^j P_1 + Q_2^j P_2) - (C_1^j Q_1^j + C_2^j Q_2^j)$$

Señalamos en rojo que, si la producción de ambos supera la demanda semanal, la producción que se va a vender es proporcional a lo que han producido respecto a la demanda total, por tanto, los factores en rojo los sustituimos por:

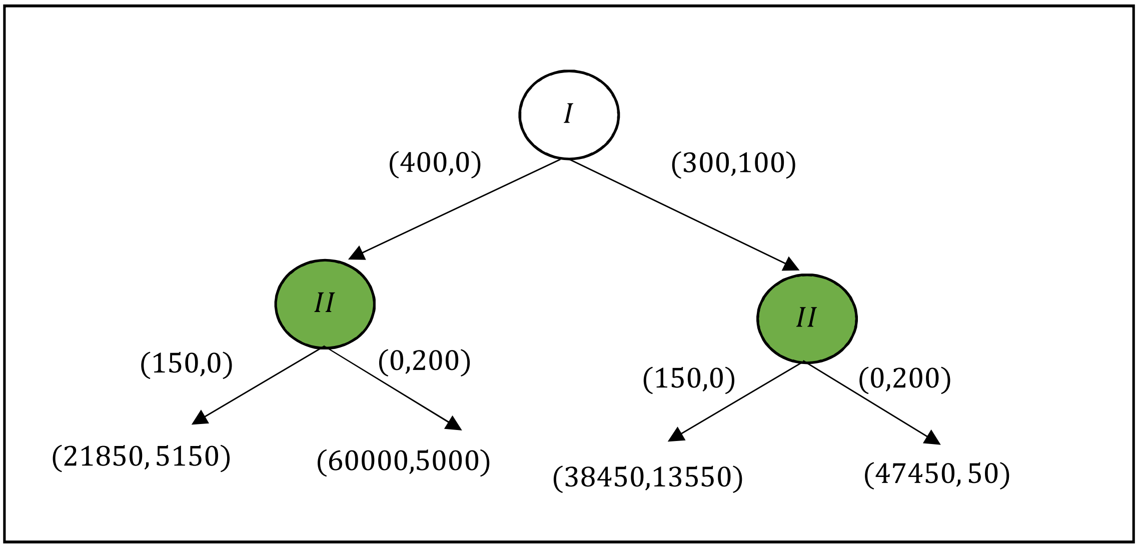
$$Q_1^j = Q_1^j \frac{400}{Q_1^1 + Q_1^2} \qquad Q_2^j = Q_2^j \frac{250}{Q_2^1 + Q_2^2}$$

Con estas aclaraciones, resumimos en la siguiente tabla la información necesaria para el cálculo de los beneficios de cada empresa según la estrategia de producción que adopten.

| estrategia {(400,0), (150,0)} | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Ventas de P1 | Ventas de P2 | Ingresos | Costes | Beneficios |
| Empresa I | 291,00 | 0 | 101850 | 80000 | 21850 |
| Empresa II | 109,00 | 0 | 38150 | 33000 | 5150 |
| | | | | | |
| estrategia {(400,0), (0,200)} | | | | | |
| | Ventas de P1 | Ventas de P2 | Ingresos | Costes | Beneficios |
| Empresa I | 400,00 | 0 | 140000 | 80000 | 60000 |
| Empresa II | 0,00 | 200 | 30000 | 25000 | 5000 |
| | | | | | |
| estrategia {(300,100), (150,0)} | | | | | |
| | Ventas de P1 | Ventas de P2 | Ingresos | Costes | Beneficios |
| Empresa I | 267,00 | 100 | 108450 | 70000 | 38450 |
| Empresa II | 133,00 | 0 | 46550 | 33000 | 13550 |
| | | | | | |
| estrategia {(300,100), (0,200)} | | | | | |
| | Ventas de P1 | Ventas de P2 | Ingresos | Costes | Beneficios |
| Empresa I | 300,00 | 83 | 117450 | 70000 | 47450 |
| Empresa II | 0,00 | 167 | 25050 | 25000 | 50 |

*Cálculo de los beneficios ejercicio 3*

Estos cálculos nos permiten construir la forma extensiva del juego, donde asumiremos que la empresa $II$ desconoce la decisión de la empresa $I$, y su conjunto de información son los nodos verdes.




*Forma extensiva ejercicio 3*

Esto nos proporciona la bimatriz del juego:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} (150,0) & (0,200) & \leftarrow II/I \downarrow \end{array} \\ BM = & \begin{pmatrix} (21850, 5150) & (60000,5000) \\ (38450,13550) & (47450, 50) \end{pmatrix} \begin{array}{c} (400,0) \\ (300,100) \end{array} \end{array}$$

Donde podemos observar que para la empresa $II$ la columna 1 domina a la columna 2, por lo que el juego se reduce a:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} (150,0) & \leftarrow II/I \downarrow \end{array} \\ BM = & \begin{pmatrix} (21850, 5150) \\ (38450,13550) \end{pmatrix} \begin{array}{c} (400,0) \\ (300,100) \end{array} \end{array}$$

De donde deducimos finalmente que la empresa $I$ optará por la segunda fila ya que le reporta mayor beneficio. Por lo que el equilibrio es el par (38450,13550).

Vemos que es un punto de equilibrio puesto que ninguno de los jugadores tiene incentivos a abandonar el equilibro (aumento de beneficios) sino que es castigado disminuyendo su beneficio:

- Si $I$ abandona el equilibrio puede producir (400,0), sin embargo $\Delta B_1 = -16600$.
- Si $II$ abandona el equilibrio puede producir $(0, 200)$, sin embargo $\Delta B_2 = -13500$.

Por otro lado, podemos apreciar en el gráfico, que el punto de equilibrio se encuentra en la zona situada “más al noreste” de la zona de recompensas, lo que en términos analíticos significa que es el máximo de la función

$$g(u, v) = (u - 38450)(v - 13550)$$

en el recinto delimitado por la envoltura convexa $S$ de los pares de beneficios que nos da la bimatriz del juego.

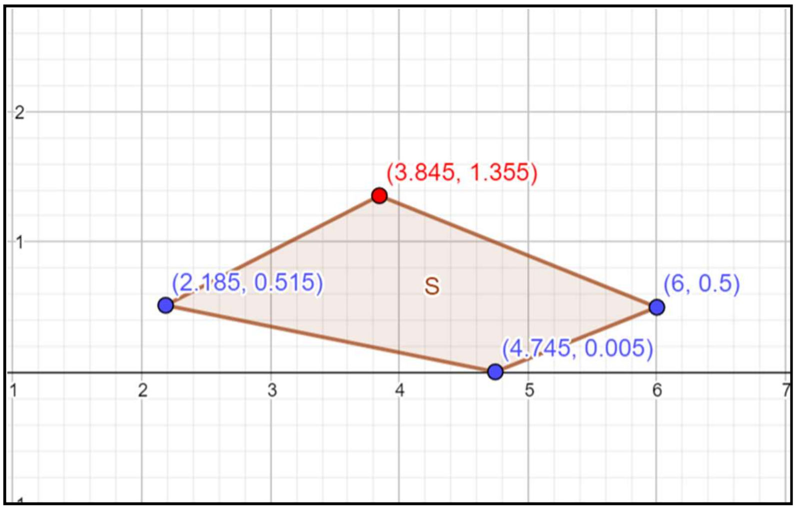



*Gráfico ejercicio 3 a escala 1:* $10^4$

Es decir, los valores maxmin coinciden con el punto más al noreste de la zona de recompensas, por lo que no es necesaria ninguna estrategia mixta ni negociación en el caso cooperativo.

SOLUCIÓN

El equilibrio lo encontramos en estrategias puras, donde la empresa $I$ debe producir $300$ unidades de $P_1$ y $100$ unidades de $P_2$, por otro lado, la empresa $II$ debe producir $150$ unidades de $P_1$ y ninguna unidad del producto $P_2$. Con estas acciones maximizan sus beneficios, siendo estos de $38450$€ para la empresa $I$ y $13550$€ para la empresa $II$.