⁕ DURACIÓN DEL EXAMEN: DOS HORAS ⁕

⁕ NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE MATERIAL ⁕

EJERCICIO 1) **(2 puntos)** Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} yu_y + xu_x = x + y, & x \neq 0,\ y \in \mathbb{R} \\ u(x,1) = x + 1 + \frac{1}{x^2}, & x \neq 0. \end{cases}$$

a) Demostrar que (P) tiene solución única.

b) Encontrar la solución de (P).

⁕

EJERCICIO 2) **(4 puntos)** Consideremos el siguiente problema (P)

$$(P) \qquad \begin{cases} X'' + 2X' + \lambda X = 0 & \text{en } (0,1) \\ X(0) = X(1) + X'(1) = 0. \end{cases}$$

a) Hallar los autovalores y autofunciones de (P).

b) Hallar la forma autoadjunta de (P) y el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ correspondiente.

c) Calcular $\langle e^{-x}, X \rangle$ para cada autofunción X de (P).

⁕

EJERCICIO 3) **(4 puntos)** Consideremos el problema

$$(P_f) \qquad \begin{cases} u_{tt} + u_{xt} - 2u_{xx} = 0 & \text{para } (x,t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = f'(x) & \text{para } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

donde f es una función de clase C^1 en $\mathbb{R}$.

a) Utilizando la *transformada de Fourier* hallar la solución de (P_f).

b) Deducir la solución de (P_f) para $f(x) := x^2$.