Álgebra lineal I, Grado en Matemáticas

Ejemplo de examen tipo test con contenidos similares a los del examen de febrero 2020, segunda semana.

Preguntas relacionadas con los conceptos pedidos en las definiciones:

Pregunta 1 Matriz. Si dos matrices A y B cumplen que su producto es una matriz AB de orden n, entonces

(a) Siempre existe el producto BA.

(b) El producto BA no siempre se puede realizar.

(c) Si existe el producto BA, entonces es una matriz de orden n.

Pregunta 2 Coordenadas. Si v es el vector de coordenadas $(1, 2, 3)$ respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de V, entnces sus coordenadas en la base $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2 + v_1, v_3 + v_1\}$ son

(a) Los vectores $\{v_1, v_2 + v_1, v_3 + v_1\}$ no forman una base de V.

(b) $(2, -1, 3)$

(c) $(-4, 2, 3)$

Pregunta 3 Espacio vectorial cociente. Si $U = L(v_1, v_2)$ es un subespacio de V y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es una base de V, y V/U es el espacio vectorial cociente de V módulo U, entonces

(a) $v_3 + U,\ v_4 + U$ es una base de

(b) V/U es un espacio vectorial de dimensión distinta a la de U.

(c) $v_3 + v_2 + U,\ v_4 + v_1 + U$ no es una base de V/U.

Pregunta 4 Aplicación lineal. Sea $f : U \to V$ una aplicación lineal y P un plano contenido en U. Si el subespacio $f(P)$, imagen por f de dicho plano, es un plano de V , entonces

(a) f es inyectiva pues conserva las dimensiones.

(b) f no puede ser sobreyectiva.

(c) f puede ser inyectiva y sobreyectiva.

Preguntas relacionadas con la realización de ejercicios:

Ejercicio 1: (2 puntos)Demuestre que si C es una matriz de orden n y rango n, entocnes $\mathrm{rg}(AC) = \mathrm{rg}(A)$ para toda matriz A de orden $m \times n$.

Este ejercicio no tendrá correspondencia en el examen tipo test. Los 2 puntos se repartirán entre más preguntas del tipo anterior y algún ejercicio o apartado de ejercicio más.

Ejercicio 2: Dada la matriz de orden n $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \lambda_{n-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$

Pregunta 5 El determinante de A es

(a) $\det(A) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$

(b) $\det(A) = -\lambda_1 \cdots \lambda_n$

(c) $\det(A) \neq 0$ si $\lambda_1 \cdots \lambda_n \neq 0$

Pregunta 6 Si A es invertible y la inversa es $B = (b_{ij})$, entonces

(a) $b_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $b_{i,i} = \frac{1}{\lambda_{i+n-1}}$ para $i = 1, \ldots, n$.

(b) $b_{ij} = 0$ si $i + j \neq n + 1$ y $b_{i,n-i+1} = \frac{1}{\lambda_{n-i+1}}$ para $i = 1, \ldots, n$.

(c) $b_{ij} = 0$ si $i + j \neq n + 1$ y $b_{i,n-i+1} = \frac{1}{\lambda_i}$ para $i = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 3: Sean u, v y w vectores linealmente independientes de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V de dimensión mayor que 3, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Pregunta 7 : Los vectores $v_1 = au + 3v + w$, $v_2 = u - v - w$, $v_3 = 2u - av - w$ con $a \in \mathbb{K}$ son

(a) Linealmente independientes si $a \neq \pm 1$.

(b) Linealmente dependientes si y sólo si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ y $a = i$.

(c) Linealmente independientes para todo $a \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4: Sea $f : \mathbb{K}_3[x] \to \mathbb{K}_3[x]$ la aplicación lineal definida por $f(p(x)) = p(x) - xp'(x)$

Pregunta 8 : La matriz de f en la base $\mathcal{B} = \{1,\, 1+x,\, 1+x^2,\, 1+x^3\}$ es

(a) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (b) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (c) $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Pregunta 9 : La aplicación lineal f

(a) Es un isomorfismo

(b) El subespacio $\mathrm{Ker}(f)$ no contiene polinomios de grado 2.

(c) El subespacio $\mathrm{Im}(f)$ tiene dimensión 2.

Pregunta 10 : Sea U el subespacio generado por el polinomio $p(x) = x + x^2 + x^3$. Entonces

(a) U no está contenido en $\mathrm{Im}(f)$.

(b) $U \cap \mathrm{Im}(f)$ es una recta.

(c) $f(U) = U$.

Soluciones 1a, 2c, 3a, 4c, 5c, 6b, 7c, 8a, 9b, 10 a.