Cuestiones y problemas
Tema 5: Relatividad especial

En este ejercicio vamos a analizar en detalle la relatividad del tiempo. Para ello vamos a considerar un ejemplo clásico: un tren que pasa por dos puntos A y B de una estación moviéndose a una velocidad *v* con respecto a la misma. Tenemos dos observadores, uno situado en la estación y otro situado en el tren, y vamos a calcular cuál es el tiempo medido por cada observador y cuál es el tiempo que cada observador estima que ha medido su compañero. Evidentemente, el tiempo medido por cada observador es único y no depende del sistema de referencia que utilicemos para hacer el cálculo. Esto lo demostraremos haciendo el análisis desde ambos sistemas de referencia.

Para realizar este análisis utilizaremos las dos consecuencias más importantes de los postulados de Einstein en relación a los tiempos medidos por observadores inerciales con movimiento relativo:

1. Dilatación del tiempo. Para un observador situado en un sistema de referencia inercial, los relojes de cualquier sistema de referencia inercial que se mueva con respecto a él con velocidad constante *v* retrasan en un factor $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$. Esto quiere decir que el reloj del observador avanza más rápidamente que un reloj que se mueve con respecto a él con velocidad constante (un segundo en el reloj móvil serán γ segundos en el reloj del observador). Cuanto mayor sea la velocidad con la que el observador ve pasar el reloj, tanto más lentamente verá avanzar sus manecillas. Por consiguiente, el intervalo de tiempo entre dos sucesos medido por el observador en reposo será mayor que el intervalo de tiempo medido por otro observador situado en el sistema de referencia que se mueve.
2. Relatividad de la simultaneidad. Si dos relojes se han sincronizado en el sistema de referencia en el que ambos se encuentran en reposo, en un sistema en el que se mueven con velocidad *v* paralela a la línea que los une, el reloj situado detrás va adelantado en un tiempo vL_P / c^2 respecto al reloj que va por delante, siendo L_P la distancia propia entre los dos relojes, esto es, la distancia medida en el sistema de referencia en el que se encuentran en reposo.

Los dos sucesos que vamos a estudiar son el paso del tren por el punto A de la estación (suceso 1) y el paso del tren por el punto B de la estación (suceso 2). Ambos puntos están separados una distancia L_P en el sistema de referencia de la estación, por lo que es su distancia propia. Definamos ahora los siguientes tiempos:

Δt_e : tiempo medido entre los dos sucesos por un observador situado en la estación.

$\Delta t'_e$: tiempo que el observador situado en la estación espera que mida un observador en el tren.

Δt_t : tiempo que el observador situado en el tren espera que mida un observador en la estación.

$\Delta t'_t$: tiempo medido entre los dos sucesos por un observador situado en el tren.

Como se puede apreciar, se han utilizado las tildes para denotar el tiempo medido en el sistema de referencia que viaja con el tren, mientras que se han utilizado los subíndices para distinguir el sistema de referencia desde el que se realiza el análisis. Si todo va bien deberíamos obtener que estos tiempos son los mismos independientemente del sistema de referencia empleado para el análisis, esto es:

$$\Delta t_e = \Delta t_t$$
$$\Delta t'_e = \Delta t'_t$$

- Comenzaremos nuestro análisis para un observador situado en la estación.

Para este observador el cálculo del tiempo transcurrido entre los dos sucesos es muy simple ya que el tren se desplaza con velocidad constante entre dos puntos fijos separados por una distancia L_P:

$$\Delta t_e = \frac{L_p}{v}.$$

Veamos ahora qué opina este observador del tiempo medido por un viajero situado en el tren. Para él, un viajero situado en el tren medirá el intervalo entre los dos sucesos con un único reloj, el cual ya sabemos que retrasa en un factor γ con respecto al reloj de la estación. Por consiguiente:

$$\Delta t'_e = \frac{1}{\gamma}\Delta t_e = \frac{L_P}{\gamma v}.$$

Como el tiempo medido en el tren se realiza con un único reloj que está en reposo en ese sistema de referencia, este será el tiempo propio:

$$\Delta t_P = \Delta t'_e = \frac{L_P}{\gamma v}.$$

- Ahora veamos cómo se ve todo desde el sistema de referencia del tren.

Para un viajero situado en el tren, la estación se mueve con respecto a él con velocidad *v*. Por otro lado, la distancia entre los dos puntos A y B, L', está contraída un factor γ ya que estos dos puntos se están moviendo con respecto a él. Esto es

$$L' = \frac{L_P}{\gamma},$$

de modo que el tiempo que tardan estos dos puntos en pasar por delante de él será

$$\Delta t'_t = \frac{L'}{v} = \frac{L_p}{\gamma v}.$$

Comprobamos con satisfacción que este tiempo coincide con la previsión hecha por el observador situado en la estación: $\Delta t'_t = \Delta t'_e$.

Respecto a lo que el observador situado en el tren pensará sobre el tiempo transcurrido en la estación, en primer lugar el observador situado en el tren pensará que como los relojes de la estación se mueven con respecto a él, deben por tanto retrasar un factor γ con respecto a su propio reloj. Por consiguiente, el intervalo de tiempo medido por un mismo reloj en la estación será $\frac{\Delta t'_t}{\gamma} = \frac{L_p}{\gamma^2 v}$. Sin embargo, ese tiempo no es el intervalo de tiempo que el viajero espera que un observador situado en la estación mida, definido más arriba como Δt_t, ya que el tiempo entre los dos sucesos visto desde la estación tiene que ser medido con dos relojes, uno en el punto A y otro en el punto B, sincronizados en el sistema estación pero no en el sistema tren. Supongamos que en el momento en el que el punto A (suceso 1) pasa al lado del tren el reloj de la estación en ese punto marca t_0:

$$t_{A,1} = t_0$$

Desde el punto de vista del pasajero, en ese mismo instante el reloj situado en B, que persigue al reloj en A y que por tanto lo adelanta en vL_P / c^2, marcará:

$$t_{B,1} = t_0 + vL_P / c^2.$$

Como para ambos relojes pasa el mismo tiempo entre el suceso A y el suceso B (siempre visto desde el sistema de referencia situado en el tren), calculado más arriba $\frac{\Delta t'_t}{\gamma} = \frac{L_p}{\gamma^2 v}$, en el momento en el que el punto B pase por delante del viajero los dos relojes marcarán:

$$t_{A,2} = t_0 + \frac{L_p}{\gamma^2 v}$$

$$t_{B,2} = t_0 + \frac{vL_P}{c^2} + \frac{L_p}{\gamma^2 v} = t_0 + \frac{L_p}{v}$$

Por consiguiente, para el observador situado en el tren, un observador situado en la estación medirá un tiempo

$$\Delta t_t = t_{B,2} - t_{A,1} = \frac{L_p}{v} ,$$

que coincide con el tiempo Δt_e calculado más arriba desde un sistema de referencia ligado a la estación.

Hemos podido comprobar que el problema se puede resolver desde los dos sistemas de referencia dando los mismos resultados (postulado I de Einstein: principio de relatividad). Puede, sin embargo, plantearse la siguiente paradoja o contradicción: si hay simetría entre los dos sistemas de referencia en el sentido de que cada observador ve como es el otro el que se mueve con velocidad constante *v* con respecto a él, de modo que es imposible distinguir quien se mueve realmente, y que además cada observador ve que los relojes del sistema que se mueve retrasan con respecto a sus relojes en la misma cantidad, entonces ¿por qué los tiempos medidos por ambos observadores son diferentes, independientemente del sistema de referencia desde el que se haga el análisis? La respuesta es que no hay tal contradicción. Existe simetría respecto al hecho de que el análisis puede ser realizado en cualquiera de los dos sistemas de referencia sin que ello afecte al resultado, pero la simetría se rompe cuando nos damos cuenta de que un observador situado en la estación necesita dos relojes para medir el tiempo transcurrido entre los dos sucesos mientras que un observador situado en el tren sólo necesita uno, de modo que en el tren lo que se mide es el tiempo propio. Por esta razón el tiempo medido en el tren siempre será menor que el tiempo medido en la estación a pesar de que en el sistema de referencia del tren sea la estación la que se mueve respecto al mismo.

Un astronauta vuelve a la Tierra desde un planeta situado a 10^{-4} años-luz. La velocidad de la nave es de 0.8*c*. Si en el momento de la salida pone una película que dura dos horas, ¿llegará a la Tierra antes de que acabe la película? Resolver el problema desde los dos sistemas de referencia: nave y Tierra.

Solución:

Desde un sistema de referencia S´ en reposo con respecto a la nave.

En este caso el comienzo y final de la película son dos sucesos que ocurren en el mismo punto del sistema de referencia, por lo que éste será el tiempo propio: $\Delta t_P = 2\ \mathrm{h}$.

Por otro lado, la distancia del planeta a la Tierra medida desde la Tierra (sistema S) es la distancia propia del planeta ya que éste no se mueve con respecto a la Tierra: $L_P = 10^{-4}$ años-luz. Para calcular la distancia planeta-Tierra en el sistema de referencia móvil S´ tendremos que aplicar la contracción de longitudes:

$$L' = \frac{1}{\gamma} L_P = 0.6 L_P$$

En el sistema S´ la Tierra se mueve hacia la nave a una velocidad de 0.8*c* y tiene que recorrer una distancia L', por lo que el tiempo que durará el viaje será de:

$$t = \frac{L'}{v} = \frac{0.6\times10^{-4}c}{0.8c} = 7.5\times10^{-5} \text{ años} \simeq 0.66 \text{ horas},$$

por lo que la nave llegará antes de que acabe la película. El astronauta habrá visto 1/3 de la película

Desde un sistema de referencia S en reposo con respecto a la Tierra.

En este caso, el tiempo de duración de la película desde la Tierra se calcula aplicando la dilatación del tiempo al tiempo propio de la nave:

$$\Delta t' = \gamma \Delta t_P = 3.33 \text{ h}$$

El tiempo que tardará la nave en llegar a la Tierra será:

$$t = \frac{L_P}{v} = \frac{10^{-4}c}{0.8c} = 1.25\times10^{-4} \text{ años} \simeq 1.1 \text{ horas},$$

Por lo que de nuevo obtenemos que la nave llegará a la Tierra antes de que acabe la película. Para un observador en la Tierra el astronauta habrá visto 1/3 de la película.

PARADOJA DE LOS GEMELOS

Supongamos que tenemos dos gemelos en la Tierra. Uno de ellos realiza un viaje hasta un planeta muy lejano situado a 8 años-luz de la Tierra y vuelve. Supongamos que tanto el viaje de ida como el de vuelta se realizan a velocidad constante v = 0.8c y que podemos despreciar los tiempos de aceleración. Calcular el tiempo que ha pasado para cada gemelo en el momento en el que se vuelven a reencontrar. Resolver el problema desde ambos sistemas de referencia

Solución:

Analicemos lo que ocurre desde un sistema de referencia S situado en la Tierra.

El primer gemelo que se queda en la Tierra ve como se marcha su hermano hacia un planeta a 8 años-luz a una velocidad de 0.8c, por lo que el tiempo que tardará en la ida será:

$$\Delta t_{1,ida} = \frac{L_P}{v} = 10 \text{ años},$$

donde $L_P = 8$ años-luz es la distancia propia ya que el planeta no se mueve con respecto a la Tierra. Para la vuelta tendremos el mismo tiempo así que el tiempo total que ha pasado para el gemelo 1 que se ha quedado en la Tierra es

$$\Delta t_{1,total} = 2\Delta t_{1,ida} = 20 \text{ años}.$$

Para el gemelo que se marcha tenemos que el tiempo que pasa es el tiempo propio:

$$\Delta t_{2,ida} = \Delta t_{P,ida} = \frac{\Delta t_{1,ida}}{\gamma} = 6 \text{ años}.$$

Como para la vuelta emplea el mismo tiempo tendremos que el tiempo total de viaje para el segundo gemelo es

$$\Delta t_{2,total} = 2\Delta t_{2,ida} = 12 \text{ años},$$

de modo que la será 8 años más joven que el gemelo que se ha quedado en la Tierra.

Analicemos lo que ocurre ahora desde el sistema de referencia S' situado en la nave.

En este caso la Tierra se aleja de la nave a una velocidad de 0.8c para recorrer una distancia (no propia):

$$L = \frac{L_P}{\gamma} = 4.8 \text{ años-luz}$$

por lo que para el gemelo que está en la nave tendremos que en "la ida" del planeta ha pasado un tiempo de

$$\Delta t_{2,ida} = \frac{L}{v} = 6 \text{ años},$$

y lo mismo para la vuelta, obteniendo el resultado anterior. Ahora este tiempo no es el tiempo propio del sistema ya que se obtiene a partir de la diferencia de tiempos de dos relojes situados en puntos distintos: uno en el punto inicial dado por la posición de la nave (la tierra estaba en esa misma posición y los dos gemelos estaban juntos) y otro en el punto final en el que la Tierra está alejada con respecto de la nave una distancia L. Para el gemelo que se había quedado en la Tierra y que por tanto ahora se está moviendo con respecto al gemelo 2 sí que será el tiempo propio, que podemos obtener del tiempo anterior aplicando la dilatación del tiempo

$$\Delta t_{1,ida} = \Delta t_{P,ida} = \frac{1}{\gamma}\Delta t_{2,ida} = 3.6 \text{ años},$$

lo que hace un resultado final de 7.2 años. Resumiendo los resultados obtenidos tenemos que:

Sistema S Tierra: $\Delta t_{1,total} = 20 \text{ años} \qquad \Delta t_{2,total} = 12 \text{ años}$

Sistema S' Nave: $\Delta t_{1,total} = 7.2 \text{ años} \qquad \Delta t_{2,total} = 12 \text{ años}$

Nótese que estos tiempos están en acuerdo con lo estudiado en el texto sobre simultaneidad y retardo.

- En el sistema Tierra se observa que el reloj de la nave atrasa en un factor:

$$\frac{\Delta t_{1,total}}{\Delta_{2,total}} = \frac{20}{12} = \gamma$$

- En el sistema nave se observa que el reloj de la Tierra atrasa en un factor :

$$\frac{\Delta t_{1,total}}{\Delta_{2,total}} = \frac{12}{7.2} = \gamma$$

Como se puede ver, la previsión realizada por el gemelo que está en la nave sobre el tiempo que ha pasado en la Tierra durante su viaje, 7.2 años, no coincide con el tiempo medido en el sistema Tierra, de 20 años.

Podemos recuperar este valor si tenemos en cuenta que para el gemelo que está en la nave, los relojes que se utilizan en el sistema Tierra para medir la duración del viaje, uno situado en la Tierra y el otro situado en el planeta de llegada, y que están sincronizados en ese sistema S, no lo están desde su punto de vista. Desde un observador situado en el sistema S', en el viaje de ida el reloj situado en el planeta adelanta al reloj de la Tierra en un tiempo:

$$\Delta t_S = L_P \frac{v}{c^2} = 6.4 \text{ años}$$

En el viaje de vuelta es el reloj de la Tierra el que adelanta al reloj del planeta en la misma cantidad, de modo que para el gemelo que está en la nave, el tiempo total medido en el sistema de Tierra estará "falseado" por ese desfase, y por lo tanto vendrá dado por su estimación de 7.2 años más dos veces el adelanto debido a la no sincronización de los relojes: $7.2 + 2\times 6.4 = 20 \text{ años}$.

A pesar de que de este modo parece que las "cuentas salen", hay que tener mucho cuidado porque en este último análisis hemos considerado dos sistemas de referencia inerciales diferentes durante el viaje del gemelo: un sistema S' ligado a la nave durante la ida al planeta, y otro sistema S" situado en la nave durante su regreso, y para cambiar de un sistema a otro la nave ha tenido que experimentar una deceleración y luego una aceleración, es decir, ha pasado de ser un sistema de referencia inercial a uno no-inercial. La célebre paradoja de los gemelos está basada en la conjetura de que existe simetría en el análisis realizado por cada gemelo: cada gemelo ve que es el otro el que viaja, y como el tiempo propio es menor durante el viaje (se contrae), paradójicamente supondrá que es el otro el que será más joven cuando se reencuentren. A pesar de que históricamente se ha denominado así, la paradoja no es tal, es decir, no hay ninguna paradoja, pues no existe tal simetría. Cuando tenemos dos sistemas inerciales (uno moviéndose con velocidad constante respecto al otro) se dice que hay simetría porque es imposible distinguir cuál de los sistemas se mueve respecto al otro (primer postulado de Einstein de su teoría de la relatividad especial: no puede detectarse el movimiento absoluto uniforme). En este caso el problema puede resolverse desde cualquiera de los sistemas utilizando los postulados de Einstein y las transformaciones de Lorentz. En el caso de la paradoja de los gemelos no hay tal simetría entre los movimientos de los hermanos porque el que viaja en la nave se acelera al menos en el momento en el que tiene que cambiar de sentido, por lo que deja de ser un sistema inercial y a diferencial del movimiento absoluto uniforme, la aceleración absoluta sí que puede ser detectada. Como no hay simetría, no resulta por tanto paradójico que uno de los gemelos sea más joven que el otro.

El problema puede ser resuelto exactamente desde los dos sistemas de referencia. Sin embargo, para ello es necesario un marco más general de la relatividad especial que el estudiado en este curso, y que incluya el movimiento acelerado relativista y sistemas no inerciales, o bien utilizando la relatividad general, como hizo Einstein. Sea cual sea el análisis teórico empleado, la solución a la "paradoja" es siempre la misma, el gemelo que se queda en la Tierra envejecerá más rápidamente que el gemelo que ha emprendido el viaje. Este resultado ha sido verificado experimentalmente y actualmente no hay ninguna duda sobre la no existencia de tal "paradoja".

Por último, otra reflexión sobre la no simetría del problema. Cuando resolvimos el problema desde el punto de vista del gemelo 1 que se queda en la Tierra dijimos que el tiempo medido por el gemelo 2 en su nave era el tiempo propio ya que utilizaba sólo un reloj. Sin embargo, si consideramos el movimiento conjunto de ida y vuelta, también podríamos decir lo mismo del tiempo medido por el gemelo 1, ya que sólo necesitaría un reloj puesto que el suceso inicial (partida) y el suceso final (regreso) se dan en el mismo punto del sistema de referencia. Así pues tendríamos que el tiempo medido en ambos sistemas de referencia es el tiempo propio, lo cual no podría ocurrir si uno de los sistemas se mueve respecto al otro con velocidad constante sin experimentar ninguna aceleración.

Consideremos el ejemplo anterior de los dos gemelos pero quedándonos sólo con el viaje de ida del gemelo 2 hasta el planeta. Calcular desde ambos sistemas de referencia el tiempo que ha pasado para cada gemelo e interpretar el resultado.

<u>Solución:</u>
Los resultados son los mismos que ya obtuvimos pero divididos por 2:

Sistema Tierra: $\Delta t_{1,total} = 10 \text{ años} \qquad \Delta t_{2,total} = 6 \text{ años}$

Sistema Nave: $\Delta t_{1,total} = 3.6 \text{ años} \qquad \Delta t_{2,total} = 6 \text{ años}$

Aparentemente hay una contradicción entre los tiempos medidos por el gemelo 1 que se queda en la Tierra. Cuando medimos este tiempo en el sistema de referencia de la Tierra obtenemos 10 años, sin embargo, cuando lo medimos desde la nave es solamente de 3.6 años. Esto se debe a la sincronización de los relojes en el sistema Tierra y a la no sincronización de estos vistos desde el sistema nave. En primer lugar debemos darnos cuenta de que este tiempo, al no ser un tiempo propio, debe medirse con dos relojes en reposo con respecto al sistema Tierra. Uno de los relojes está en la Tierra y mide el tiempo inicial en el momento de la separación de los gemelos, y el otro reloj está en el planeta y mide el tiempo final cuando llega el gemelo 2 con la nave.
En el sistema Tierra los dos relojes están sincronizados y el tiempo que pasa para el gemelo 1 que se queda en la Tierra vendrá dado por la diferencia entre los tiempos de los dos relojes. Este tiempo será de 10 años.
En el sistema nave estos dos relojes no están sincronizados. El reloj situado en el planeta adelanta al reloj situado en la Tierra en una cantidad:

$$\Delta t_S = L_P \frac{v}{c^2} = 6.4 \text{ años}.$$

Por lo tanto, un observador situado en la nave dirá que el gemelo 1 ha medido 10 años porque los relojes con los que medía no estaban sincronizados, es decir, los relojes del sistema Tierra sólo se han movido 3.6 años, pero como el segundo reloj estaba avanzado 6.4 años respecto al primero, y el tiempo final de éste es el que se toma como tiempo final, es por esta razón que en la Tierra creen que ha sido 10 años.

En la Sec. 39.4: "Sincronización de relojes y simultaneidad" se muestra un ejemplo presentado por Einstein para demostrar que dos sucesos que son simultáneos en el sistema S no lo son en otro sistema S' que se mueve con movimiento relativo constante respecto a S. El ejemplo consiste en dos rayos que caen en los extremos de un tren (sistema S') en el momento en el que éste pasa por el andén de la estación (sistema S). En el texto se explica de forma cualitativa por qué en el sistema S' no hay simultaneidad cuando sí que la hay en el sistema S. En este problema pretendemos demostrar matemáticamente que esta explicación es correcta. Para ello vamos a calcular el intervalo de tiempo que transcurre en el punto C' (punto medio del tren) entre la llegada de los destellos procedentes de los dos rayos. Esto lo haremos para los dos sistemas de referencia.

Solución:

1. Desde el punto de vista de un observador situado en S

Supongamos un observador situado en el andén. Para este observador, la distancia que recorre el destello del rayo que cae en el punto A' hasta llegar a C' es:

$$s_1 = \frac{L_{tren,S}}{2} - vt_1$$

donde t_1 es el tiempo que tarda en llegar ese destello a C' y $L_{tren,S}$ es la longitud del tren vista desde S, que coincide con la distancia entre los dos rayos en S (distancia AB) y también con la longitud propia del andén indicada en el texto como $L_{P,andén}$ (véase Fig. 39.5). En nuestra notación $L_{P,andén}$ es equivalente a $L_{andén,S}$. Por consiguiente, t_1 se obtiene de la siguiente ecuación:

$$t_1 = \frac{s_1}{c} = \frac{L_{tren,S}/2 - vt_1}{c} \quad \rightarrow \quad t_1 = \frac{L_{tren,S}}{2(c+v)}$$

Haciendo lo mismo para el segundo destello tenemos que:

$$s_2 = \frac{L_{tren,S}}{2} + vt_2$$

y

$$t_2 = \frac{s_2}{c} = \frac{L_{tren,S}/2 + vt_2}{c} \quad \rightarrow \quad t_2 = \frac{L_{tren,S}}{2(c-v)} .$$

El intervalo de tiempo que transcurre entre la llegada desde los dos destellos a C', medido desde un observador en S, será

$$\Delta t_S = t_2 - t_1 = L_{tren,S} \frac{v}{c^2 - v^2} .$$

2. Desde el punto de vista de un observador situado en S'

Supongamos ahora un observador situado en el punto C' moviéndose con el tren. En este caso los dos tiempos son medidos en el mismo punto de ese sistema de referencia (sistema S'), por lo que este intervalo de tiempo será el tiempo propio $\Delta t_{S'} = \Delta t_P$, de modo que podemos aplicar la dilatación del tiempo para obtener:

$$\Delta t_{S'} = \Delta t_P = \frac{1}{\gamma} \Delta t_S = \frac{L_{tren,S}}{\gamma} \frac{v}{c^2 - v^2} .$$

Ahora queremos ver si podemos llegar a este resultado a partir de la explicación cualitativa que se da en el texto. En el sistema S', la distancia recorrida por los destellos en llegar a C' desde los extremos del tren donde han caído los rayos es la misma ya que se encuentra en el punto medio, así que el intervalo de tiempo entre la recepción de uno y otro será igual al intervalo de tiempo que pasa entre la caída de ambos vista desde el tren, que según la Fig. 39.7 del texto viene dado por el tiempo que transcurre entre el momento en el que el punto A pasa delante del extremo delantero del tren (punto A') (Fig. 39.7a) y el momento en el que el punto B pasa por el extremo trasero (punto B') (Fig. 39.7b). Recordamos que en S' es el andén el que se mueve hacia la izquierda.

La distancia *s* recorrida por el andén será

$$s = L_{tren,S'} - L_{andén,S'} .$$

Como $L_{tren,S'}$ está medida con respecto a S' y el tren se encuentra en reposo, entonces ésta será la longitud propia del tren ($L_{P,tren}$), la cual, aplicando la contracción de longitudes es igual a $\gamma L_{tren,S}$.

Por otro lado, aplicando otra vez la contracción de longitudes tenemos que $L_{andén,S'}$ será igual a $1/\gamma\, L_{andén,S}$ ya que $L_{andén,S}$ es la longitud propia del andén, y como por definición inicial (véase de nuevo la Fig. 39.5) teníamos que $L_{andén,S} = L_{tren,S}$, llegamos a

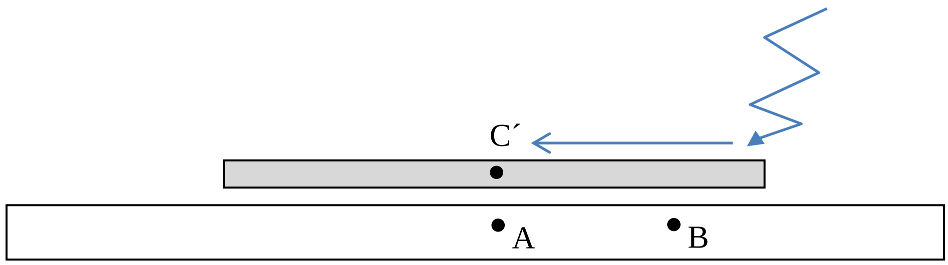
$$s = L_{tren,S}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right)$$

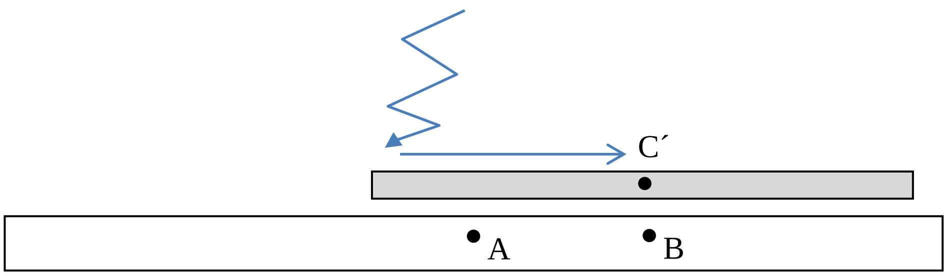
El tiempo que el andén tarda en recorrer esa distancia será

$$\Delta t_{S'} = \frac{L_{tren,S}}{v}\left(\gamma - \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{L_{tren,S}}{\gamma}\left(\frac{\gamma^2 - 1}{v}\right) = \frac{L_{tren,S}}{\gamma}\frac{v}{c^2 - v^2} ,$$

que es exactamente el mismo resultado que obtuvimos aplicando la dilatación del tiempo sobre el intervalo de tiempo medido en S.

En el mismo ejemplo del problema anterior, describir qué verá un pasajero desde el tren si situamos en el andén dos relojes en los puntos A y B, que son los puntos del sistema S por los que pasa el punto medio del tren C' cuando recibe los destellos de los dos rayos.





<u>Solución:</u>
Supongamos que tenemos dos relojes en los puntos A y B, fijos con respecto al sistema S (la estación) y sincronizados en dicho sistema. Definamos el instante inicial como el momento en el que el punto C' recibe el destello del rayo que ha caído a su derecha y el instante final como el momento en el que C' recibe el destello del rayo que ha caído a su izquierda. Supongamos también que en el instante inicial

ambos marcan un tiempo t_0 con respecto a un observador en S. Para un observador situado en el tren, el reloj en B adelanta con respecto al reloj situado en A una cantidad

$$\Delta t_{adelanto} = L_{andén,S} \frac{v}{c^2} ,$$

donde $L_{andén,S}$ es la distancia propia entre los puntos A y B, esto es, medida en S.
Esta distancia vendrá dada por

$$L_{andén,S} = v\Delta t_S ,$$

donde como ya vimos, Δt_S es el intervalo de tiempo que pasa entre la recepción de los dos rayos en C' según un observador en S.

Por lo tanto, ese pasajero del tren verá los siguientes tiempos en los relojes

$$t_{A,i} = t_0 \qquad t_{B,i} = t_0 + \Delta t_{adelanto}$$

Como el tiempo transcurrido en el sistema S tiene que ser Δt_S, en el punto final los relojes marcarán los tiempos

$$t_{A,f} = t_0 + \Delta t_S - \Delta t_{adelanto} \qquad t_{B,f} = t_0 + \Delta t_S$$

de modo que el tiempo transcurrido en la estación (sistema S) será $t_{B,f} - t_{A,i} = \Delta t_S$. Nótese para un observador en el sistema S se trata de dos sucesos que ocurren en distintos puntos del sistema, por lo que son necesarios dos relojes, uno en cada posición.
Por consiguiente, para el pasajero situado en S', los relojes indicarán que el tiempo transcurrido entre la recepción de los dos rayos será

$$t_{B,f} - t_{B,i} = t_{A,f} - t_{A,i} = \Delta t_S - \Delta t_{adelanto}$$

mientras que en S', el intervalo observado en C' entre los dos rayos es $\Delta t_{S'}$. Por lo tanto, para el pasajero del tren los relojes en S retrasan en una cantidad

$$\frac{\Delta t_{S'}}{\Delta t_S - \Delta t_{adelanto}} = \frac{\frac{1}{\gamma}\Delta t_S}{\Delta t_S - \frac{\Delta t_S v^2}{c^2}} = \gamma$$

Lo mismo podrá decir un observador en S de los relojes en S', ya que estos miden un intervalo de tiempo $\Delta t_{S'}$ mientras que los relojes en S miden Δt_S. De nuevo tenemos que los relojes en S' retrasan con respecto a los relojes en S con una tasa:

$$\frac{\Delta t_S}{\Delta t_{S'}} = \gamma .$$

¿Cómo sabemos si un problema debe tratarse de forma relativista?

Solución:
Cuando las velocidades de las partículas sean próximas o comparables a la de la luz, lo que equivale a energías cinéticas comparables o superiores a la energía en reposo de las partículas. Para comprobar esto podemos despejar v/c de la definición de energía total relativista:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = E_0 + E_c \quad \Rightarrow \quad \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E_0 + E_c}\right)^2}$$

Cuando $O(E_c) \geq O(E_0)$ (con el símbolo $O(x)$ nos referimos al orden de la cantidad x) entonces tenemos que $O(v) \approx O(c)$. Sin embargo, cuando $O(E_c) << O(E_0)$ vemos que $O(v) << O(c)$.
Supongamos por ejemplo una pelota de tenis de 100 g que se mueve a 100 km/h. Su energía en reposo vale

$$E_0 = m_0 c^2 = 0{,}1 \times \left(3 \times 10^8\right)^2 \text{ J} = 0{,}9 \times 10^{16} \text{J} = 5{,}610 \times 10^{28} \text{MeV}$$

Su energía cinética clásica es de

$$E_c = \frac{1}{2} m_0 v^2 = \frac{1}{2} 0{,}1 \times \left(27{,}8\right)^2 \text{ J} = 38{,}6 \text{ J} = 2{,}408 \times 10^{14} \text{MeV}$$

Su energía cinética relativista es

$$E_c = E - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - 85{,}7 \times 10^{-16}}} - 1 \right) = 4{,}219 \times 10^{-15} m_0 c^2 = 2{,}367 \times 10^{14} \text{MeV}$$

Como se puede apreciar, la energía cinética es mucho menor que la energía en reposo debido a que la velocidad de la pelota es mucho menor que la velocidad de la luz. Además, el resultado de la energía cinética clásica es muy parecido al de la energía cinética relativista (error del 1,7 %).

Una partícula de masa 2 MeV/c^2 y energía cinética 3 MeV choca contra otra partícula en reposo de masa 4 MeV/c^2. Si después del choque las dos partículas quedan unidas, determinar el incremento de masa del sistema y el incremento de energía cinética. Verificar que la energía total se conserva.

<u>Solución:</u>
Como las energías cinéticas son del orden de las energías en reposo el problema debe ser abordado de forma relativista.
Se trata de un choque perfectamente inelástico entre dos partículas. Desde un punto de vista clásico esto significa que la energía cinética no se conserva pero el momento lineal sí. Desde un abordaje relativista la energía total siempre se conserva, al igual que el momento lineal, y lo que ocurre es que la pérdida de energía cinética da lugar a un incremento de la energía en reposo del sistema, es decir, de la masa.
De la ecuación de la energía relativista total podemos calcular el momento lineal de la partícula incidente

$$E_1^{\,2} = \left(p_1 c\right)^2 + \left(m_{01} c^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad p_1 = \frac{1}{c}\sqrt{E_1^{\,2} - \left(m_{01} c^2\right)^2} = 4{,}58 \text{ MeV/c},$$

siendo

$$E_1 = E_{c1} + E_{01} = 5 \text{ MeV}.$$

Por la conservación del momento lineal sabemos que el momento lineal relativista del sistema de masa M, p_2, formado después del choque vale también 4,58 MeV/c:

$$p_2 = \frac{M v_2}{\sqrt{1 - \left(v_2/c\right)^2}} = 4{,}58 \text{ MeV/c}.$$

Como desconocemos M, para calcular v_2 necesitamos aplicar el principio de conservación de la energía relativista total:

$$E_i = E_f \quad \Rightarrow \quad E_1 + E_{02} = E_M = 9 \text{ MeV},$$

donde

$$E_M = E_{cM} + E_{0M} = \frac{M c^2}{\sqrt{1 - \left(v_2/c\right)^2}} = \frac{p_2 c^2}{v_2}.$$

Igualando ambas expresiones llegamos a

$$v_2 = \frac{p_2 c^2}{E_M} = \frac{4,58}{5+4} c = 0,509c \ .$$

Ahora es fácil calcular M

$$E_M = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-(v_2/c)^2}} \quad \Rightarrow \quad M = \frac{E_M \sqrt{1-(v_2/c)^2}}{c^2} = 7,75 \mathrm{MeV}/c^2 \ .$$

Como se puede apreciar, la masa del sistema ha aumentado de 6 MeV/c^2 a 7,75MeV/c^2. Este aumento de energía $\Delta E_0 = \Delta mc^2 = (M - m_1 - m_2)c^2 = 1,75 \ \mathrm{MeV}$ compensa la pérdida de energía cinética. En efecto:

$$\Delta E_c = E_{cM} - E_{c1} = E_M - E_{0M} - E_{c1} = 9 - 7,75 - 3 = -1,75 \ \mathrm{MeV} \ ,$$

de forma que

$$\Delta E_0 = -\Delta E_c \ ,$$

o lo que es lo mismo

$$\Delta E = \Delta E_0 + \Delta E_c = 0 \quad \rightarrow \quad E = E_0 + E_c = \text{constante} \ .$$

Los fotones son partículas sin masa. Un fotón con energía 207 keV colisiona frontalmente con un electrón de forma que el fotón rebota con una energía de 114 keV. Calcular:
- La energía cinética del electrón después de la dispersión
- La velocidad del electrón (Dato: la energía en reposo del electrón es 0,511 MeV)

Solución:
Para calcular la energía cinética del electrón E_{c_e} aplicamos el principio de conservación de la energía relativista total:

$$E_{1f} + E_{0e} = E_{2f} + E_{0e} + E_{ce} \ ,$$

siendo E_{1f} y E_{2f} las energías inicial y final del fotón.

$$E_{ce} = E_{1f} - E_{2f} = 93 \ \mathrm{keV} \ .$$

Para obtener la velocidad del electrón calcularemos su momento lineal. Por conservación de momento tenemos:

$$p_e = p_{1f} + p_{2f} = \frac{E_{1f}}{c} + \frac{E_{2f}}{c} = 321 \ \mathrm{keV/c}$$

Como

$$E_e = \frac{p_e c^2}{v_e}$$

y la energía total del electrón es

$$E_e = E_{0e} + E_{ce} = 0,511 + 0,093 \ \mathrm{MeV} = 0,604 \ \mathrm{MeV}$$

tenemos finalmente que

$$v_e = \frac{p_e c^2}{E_e} = \frac{0,321}{0,604} c = 0,53c$$

También podríamos haber obtenido esta velocidad a partir de la expresión de la energía relativista total del electrón:

$$E_e = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1-\left(v_e/c\right)^2}} \quad \Rightarrow \quad v_e = c\sqrt{1-\left(\frac{E_{0e}}{E_e}\right)^2} = 0.53c$$

Una vez más vemos que el tratamiento relativista es acertado puesto que la energía cinética del electrón dispersado es el 18% de la energía en reposo.

Calcular la energía liberada en la reacción nuclear $\mathrm{O}+\mathrm{O}\rightarrow\mathrm{He}+\mathrm{Si}$ sabiendo que la masa del O es 15,99491 u, la del Si es 27,97693 u y la del He es 4,00260 u. (La unidad atómica de masa u vale $u = 931{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2$)

<u>Solución:</u>
Supondremos que los núcleos de O están en reposo. La energía en reposo inicial del sistema es

$$E_{0i} = 2m_{\mathrm{O}}c^2 = 2{,}9799\times10^4\ \mathrm{MeV}$$

La energía en reposo final del sistema después de la reacción es

$$E_{0f} = m_{\mathrm{He}}c^2 + m_{\mathrm{Si}}c^2 = 2{,}9789\times10^4\ \mathrm{MeV}$$

Por consiguiente, la variación de energía en reposo es

$$\Delta E_0 = E_{0f} - E_{0i} \approx -10\ \mathrm{MeV}.$$

Como se puede apreciar, la masa del sistema disminuye; como la energía total se conserva tenemos que esta pérdida de energía en reposo se liberará en forma de energía cinética de los productos He y Si.

$$\Delta E_c = E_{c,f} - E_{c,i} = E_{c,f} = -\Delta E_0 = 10\ \mathrm{MeV}.$$

Una posible reacción de fisión del uranio-235 ($^{235}_{92}\mathrm{U}$) es

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{148}_{57}\mathrm{La} + {}^{85}_{35}\mathrm{Br} + 3\,{}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

(donde los $^{1}_{0}\mathrm{n}$ denotan neutrones). Si las masas de los isótopos son: $m_{\mathrm{U\text{-}235}}$ = 235,1 u, $m_{\mathrm{La\text{-}148}}$ = 148,0 u, $m_{\mathrm{Br\text{-}85}}$ = 84.9 u y m_{n} = 1.009 u, calcúlese la energía desprendida en la reacción.
(Dato: $u = 931{,}5\ \mathrm{MeV}/c^2$)

<u>Solución:</u>
Calculamos la variación de la masa en reposo del sistema:

$$\Delta m = m_{\mathrm{La\text{-}148}} + m_{\mathrm{Br\text{-}85}} + 3m_{\mathrm{n}} - m_{\mathrm{U\text{-}235}} - m_{\mathrm{n}} = -0{,}182\ \mathrm{u}$$

Este defecto de masa da lugar a una disminución de la energía en reposo del sistema:

$$\Delta E_0 = \Delta m c^2 \approx -170\ \mathrm{MeV}$$

Como la energía total se conserva, este defecto de masa deberá ser compensado por un incremento en la energía cinética de las partículas. En este caso, como las partículas iniciales están en reposo, la energía cinética de las partículas resultantes de la fisión será de 170 MeV.

El $^{41}\mathrm{Ar}$ sufre una desintegración β^- para dar $^{41}\mathrm{K}$:

$$^{41}\mathrm{Ar} \rightarrow {}^{41}\mathrm{K} + e^- + \gamma\,.$$

Sabiendo que la masa atómica del hijo es $m_{^{41}\mathrm{K}} = 40{,}97847\ \mathrm{u}$, que la energía de los electrones emitidos es de 1,20 MeV y que también se liberan fotones γ (partículas sin masa) con una energía

de 1,29 MeV, calcular la masa atómica del padre ^{41}Ar. Despreciar la masa de los electrones. (Dato: c^2 = 931,5 MeV/u).

<u>Solución:</u>
La energía liberada en la desintegración se obtiene a partir de la pérdida de masa

$$\Delta E = -\Delta mc^2 = \left(m_{^{41}\mathrm{Ar}} - m_{^{41}\mathrm{K}}\right)c^2 = E_c(e^-) + E_\gamma \,,$$

Donde hemos despreciado la masa de los electrones y hemos tenido en cuenta que los fotones son partículas sin masa. Despejando tenemos

$$m_{^{41}\mathrm{Ar}} = m_{^{41}\mathrm{K}} + \frac{E_c(e^-) + E_\gamma}{c^2} = 40{,}98115 \text{ u}$$

Dada la reacción nuclear $^{4}_{2}\mathrm{He} + ^{14}_{7}\mathrm{N} \rightarrow ^{17}_{8}\mathrm{O} + ^{1}_{1}\mathrm{H}$, ¿con qué energía deben chocar las partículas alfa $\left(^{4}_{2}\mathrm{He}\right)$ contra los núcleos de nitrógeno $\left(^{14}_{7}\mathrm{N}\right)$ en reposo para que la reacción pueda ocurrir? (Datos $m_{^{14}\mathrm{N}} = 14{,}003074$ u, $m_{^{17}\mathrm{O}} = 16{,}999131$ u, $m_{^{4}\mathrm{He}} = 4{,}002603$ u, $m_{^{1}\mathrm{H}} = 1{,}007825$ u, $c^2 = 931{,}5$ MeV/u)

<u>Solución:</u>
La variación de la energía en reposo en la reacción es

$$\Delta E_0 = \Delta m\, c^2 = (m_{^{17}\mathrm{O}} + m_{^{1}\mathrm{H}} - m_{^{14}\mathrm{N}} - m_{^{4}\mathrm{He}})c^2 = 1{,}19 \text{ MeV}\,.$$

Aplicando el principio de conservación de la energía total relativista tenemos que

$$\Delta E_c = -\Delta E_0 = -1{,}19 \text{ MeV}\,.$$

Esto quiere decir que la energía cinética inicial debe ser mayor que la energía cinética final. Si suponemos que los productos de la reacción están en reposo y que las únicas partículas que se mueven son las partículas alfas, la energía cinética de estas partículas deberá ser de 1,19 MeV

Esto no es del todo correcto, ya que si éstas chocan con los núcleos de nitrógeno con una energía cinética igual a 1,19 MeV, toda esta energía se irá a la reacción, de forma que la energía cinética de los núcleos productos de la reacción (protón y núcleo de oxígeno) será nula y esto violaría el principio de conservación de momento lineal en el choque: momento lineal inicial mayor que cero y momento lineal final cero. Por consiguiente, para que la reacción tenga lugar, la energía cinética inicial debe ser mayor que 1,19 MeV

Un átomo de He-4 está compuesto por dos electrones y un núcleo compuesto de dos protones más dos neutrones. Calcular la energía liberada en la síntesis de este átomo a partir de sus constituyentes. Datos: $m_{\text{He-4}}$ = 4,002603 u, m_p = 1,00728 u, m_n = 1,00867 u, m_e = 0,000549 u, c^2 = 931,5 MeV/u.

<u>**Solución**</u>
La energía liberada vendrá dada por el defecto másico:

$$E = -\Delta mc^2 = \left(2\times m_p + 2\times m_n + 2\times m_e - m_{\text{He-4}}\right)c^2$$

$$= 0{,}030398 \times 931{,}5 \text{ MeV} = 28{,}32 \text{ MeV}$$