Algunos Apuntes de Funciones de Varias Variables I

(Referencia: "Cálculo Vectorial". Marsden, J.E.; Tromba, A.J.
"Apuntes Cálculo II". A. de Pablo, D. Pestana y J.M. Rodríguez)

1. Cálculo diferencial en varias variables

1.1. Funciones de varias variables

1.1.1. El espacio euclídeo - conceptos básicos de topología

Definición 1.1.1. La norma de un vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ es $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)}$. La distancia entre dos puntos $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ es la norma de su diferencia, es decir, $\operatorname{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$

La norma en $\mathbb{R}^n$ verifica propiedades similares al valor absoluto en $\mathbb{R}$, ya que, de hecho, la norma es igual al valor absoluto si $n = 1$:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leqslant \|\mathbf{x}\| + \|\,\mathbf{y}\|, \qquad |\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,| \leqslant \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Definición 1.1.2. La bola abierta $B(\mathbf{x}_0, r)$ de centro en $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor que r del punto $\mathbf{x}_0$, es decir,

$$B(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}.$$

La bola cerrada $\overline{B}(\mathbf{x}_0, r)$ de centro en $\mathbf{x}_0$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a una distancia menor o igual que r del punto $\mathbf{x}_0$, es decir,

$$\overline{B}(\mathbf{x}_0, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leqslant r\}.$$

Definición 1.1.3. Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto si para todo $\mathbf{x} \in U$ existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq U$

Un entorno de un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que contiene a $\mathbf{x}$.
Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n \backslash F$ es abierto.
La frontera ∂E de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, tales que en todo entorno de $\mathbf{x}$ hay algún punto de E y algún punto de E^c.
Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si $\partial E \subseteq E$.
El interior de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subconjunto de puntos $\mathbf{x} \in E$ para los que existe un $r > 0$ tal que $B(\mathbf{x}, r) \subseteq E$. El interior de E es el mayor subconjunto abierto de E.
La clausura $\overline{E}$ de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$, es $\overline{E} = E \cup \partial E$. La clausura de E es el menor conjunto cerrado que contiene a E.
Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si existe un $r > 0$ tal que $E \subseteq B(\mathbf{0}, r)$.
Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado.
Se verifica que una bola abierta es un conjunto abierto y que una bola cerrada es un conjunto compacto. También se verifica que la unión e intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto, y que la unión e intersección de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

1.1.2. Funciones

Definición 1.1.4. Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un punto de $\mathbb{R}^m$ y sólo uno a cada punto de un cierto conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $f(\mathbf{x})$ es el valor de la función f en el punto $\mathbf{x}$.

El dominio de una función es el conjunto de puntos para los que la función está definida, en este caso el conjunto A, y se denota por $Dom(f)$. Si no se especifica lo contrario se debe entender que el dominio de una función está formado por todos los puntos para los cuales la definición tiene sentido.

Habitualmente se escribe $f : A \to \mathbb{R}^m$ para indicar que A es el conjunto de partida o dominio y $\mathbb{R}^m$ el conjunto de llegada, de tal manera que a cada punto de A la función le hace corresponder un punto de $\mathbb{R}^m$.

La imagen de una función es el conjunto de puntos $\mathbf{y}$ tales que existe un punto $\mathbf{x}$ con $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, y se denota por $Img(f)$.

La gráfica de una función es el conjunto de puntos $\{(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) : \mathbf{x} \in Dom(f)\}$.

Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$, el conjunto de nivel de valor c es el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in A$ para los cuales $f(\mathbf{x}) = c$, es decir, el conjunto $\{\mathbf{x} \in A : f(\mathbf{x}) = c\} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$, se le llama curva de nivel de valor c, y si $n = 3$, se le llama superficie de nivel de valor c.

1.2. Límites y continuidad

Definición 1.2.1. Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0$ un punto de A o un punto frontera de A y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Se dice que $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^m$ es el límite de $f(\mathbf{x})$ cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$, y se escribe $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{l}$, si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{l}\| < 0$ si $0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$.

Teorema 1.2.1. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Si existe el límite cuando $\mathbf{x}$ tiende a $\mathbf{x}_0$ de $f(\mathbf{x})$, entonces es único. Es decir, si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_1$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_2$, entonces $\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_2$.

Proposición 1.2.1. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f, g : A \to \mathbb{R}$. $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = 0$ y g está acotada en un entorno de $\mathbf{x}_0$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})f(\mathbf{x}) = 0$.

Teorema 1.2.2. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \to \mathbb{R}^m$. Si existen $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})$ y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$, entonces:

1) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(cf(\mathbf{x})) = c(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}))$.
2) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})$.
3) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})) = (\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}))(\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}))$, si $m = 1$.
4) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}}{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$, si $m = 1$, y $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) \neq 0$
5) $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}(f(\mathbf{x}))^{g(\mathbf{x})} = (\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}))^{\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x})}$, si $m = 1$, y todas las expresiones tienen sentido.

Teorema 1.2.3. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Si $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$, son las funciones componentes de f, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{l} = (l_1, ..., l_m)$ si y sólo si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = l_i$, para cada $i = 1, 2, ..., m$.

Definición 1.2.2. Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es continua en el punto $\mathbf{x}_0$ si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema 1.2.4. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \to \mathbb{R}^m$. Si f y g son continuas en $\mathbf{x}_0$, entonces:

1) $cf(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$.
2) $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$.
3) $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$, si $m = 1$
4) $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$, si $m = 1$ y $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$
5) $(f(\mathbf{x}))^{g(\mathbf{x})}$ es continua en $\mathbf{x}_0$, si $m = 1$ y $(f(\mathbf{x}))^{g(\mathbf{x})}$ está definida en un entorno de $\mathbf{x}_0$.

Teorema 1.2.5. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$ y $f : A \to \mathbb{R}^m$. Si$f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$, donde $f_i : A \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$, son las funciones componentes de f, entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$, si y sólo si f_i es continua para cada $i = 1, 2, ..., m$.

Teorema 1.2.6. Sean A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in A$, $f : A \to \mathbb{R}^m$ y $g : B \to \mathbb{R}^k$, donde B es un entorno de $f(\mathbf{x}_0)$. Si $f(\mathbf{x})$ es continua en $\mathbf{x}_0$ y $g(\mathbf{x})$ es continua en $f(\mathbf{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ es continua en $\mathbf{x}_0$.

Teorema 1.2.7. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Si A es compacto y f es continua en A, entonces f está acotada en A.

Teorema 1.2.8. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \to \mathbb{R}$. Si A es un conjunto compacto y f una función continua en A, entonces existen los valores máximo y mínimo de f en A.

1.3. Diferenciación

1.3.1. Derivadas

Definición 1.3.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f :\to \mathbb{R}$. Entonces la derivada parcial $\partial f/\partial x_j$ de f con respecto a la variable x_j se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1, ..., x_j + h, ...x_n) - f(x_1, ..., x_n)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h},$$

donde $1 \leqslant j \leqslant n$ y $\mathbf{e}_j$ es el j-ésimo vector de la base canónica; es decir, la derivada parcial de f con respecto a la variable x_j es "simplemente" la derivada de f con respecto a la variable x_j, si se supone que el resto de las variables son constantes.

Si $f : U \to \mathbb{R}^m$, entonces $f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), ..., f_m(\mathbf{x}))$, y se puede hablar de la derivada parcial $\partial f_i/\partial x_j$ de la componente i-ésima de f con respecto a la variable x_j

Observación. Se define el gradiente de f en $\mathbf{x}$ como el vector

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) = (\tfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, ..., \tfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n})$$

Definición 1.3.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si $\partial f/\partial x$ y $\partial f/\partial y$ existen en (x_0, y_0) y si

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

En este caso se define el plano tangente a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0) como

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

O lo que es lo mismo

$$z = f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

Es el plano que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de la gráfica de f y tiene como vector característico al vector

$$\mathbf{v} = (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1)$$

Definición 1.3.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si las derivadas parciales de f existen en $\mathbf{x}_0$ y si

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0,$$

donde $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ es la matriz $m\,x\,n$ cuyo elemento de la fila i y columna j es $\partial f_i/\partial x_j$ evaluada en $\mathbf{x}_0$ y $\mathbf{T}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ es el producto de $\mathbf{T}$ con $(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ (considerado como matriz columna). Se le llama a $\mathbf{T}$ la derivada o diferencial o matriz jacobiana de f en $\mathbf{x}_0$

Definición 1.3.4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ diferenciable en U. En este caso la matriz derivada de f en $\mathbf{x}$ tiene 1 fila y n columnas, es decir es el vector

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right)$$

y también se le denomina gradiente de f en $\mathbf{x}$. El gradiente suele designarse por los símbolos grad f ó ∇f.

Teorema 1.3.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ entonces f es continua en $\mathbf{x}_0$.

Observación. Puede ocurrir que existan las derivadas parciales de una función en $\mathbf{x}_0$, y que la función no sea continua en $\mathbf{x}_0$.

Teorema 1.3.2. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f y son continuas en un entorno de $\mathbf{x}_0$, entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

Teorema 1.3.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U, c \in \mathbb{R}$ y $f, g : U \to \mathbb{R}^m$. Si f y g son diferenciables en $\mathbf{x}_0$, entonces:
1) $cf(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{D}(cf)(\mathbf{x}_0) = c\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$.
2) $f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{D}(f + g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.
3) $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si $m = 1$, y $\mathbf{D}(fg)(\mathbf{x}_0) = g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)$.
4) $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si $m = 1$, y $g(\mathbf{x}_0) \neq 0$, y

$$\mathbf{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0)}{(g(\mathbf{x}_0))^2}$$

Teorema 1.3.4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos con $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f(\mathbf{x}_0) \in V$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ y $g : V \to \mathbb{R}^k$. Si $f(\mathbf{x})$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $g(\mathbf{x})$ es diferenciable en $f(\mathbf{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\mathbf{x}) = g(f(\mathbf{x}))$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y

$$\mathbf{D}(g \circ f)(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{D}g)(f(\mathbf{x}_0))\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$$

Este teorema es conocido como Regla de la cadena.

Definición 1.3.5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, y $f : U \to \mathbb{R}^m$. La derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ a lo largo del vector $\mathbf{v}$ se define como

$$\mathbf{D}_{\mathbf{v}}f(\mathbf{x}_0) = \frac{d}{dt}f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v})|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{v}) - f(\mathbf{x}_0)}{t}.$$

habitualmente se elige el vector $\mathbf{v}$ unitario (con norma 1). En este caso se habla de la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{v}$.

Teorema 1.3.5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$, y $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ entonces existen todas las derivadas direccionales de f en $\mathbf{x}_0$. Además, la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{v}$ es igual a $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}$.

En este último producto $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}$, el vector $\mathbf{v}$ debe escribirse como vector columna para que pueda realizarse el producto de matrices.

Teorema 1.3.6. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$, y $f : U \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es perpendicular al conjunto de nivel de f de valor $f(\mathbf{x}_0)$.

Teorema 1.3.7. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$, y $f : U \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y $\nabla f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es máxima y $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en $\mathbf{x}_0$ de f es mínima (f crece más rápidamente desde $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\nabla f(\mathbf{x}_0)$, y decrece más rápidamente en la dirección $-\nabla f(\mathbf{x}_0)$.

Definición 1.3.6. Una trayectoria en $\mathbb{R}^n$ es una aplicación $c : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ es una trayectoria en el plano, y si $n = 3$ es una trayectoria en el espacio. Se le llama curva a la imagen de c en $\mathbb{R}^n$. Si $c(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, se define la velocidad de c como $c'(t) = (x'_1(t), ..., x'_n(t))$, y la aceleración de c como $c''(t) = (x''_1(t), ..., x''_n(t))$. Se le llama rapidez de c a la norma del vector velocidad $c'(t)$.

Definición 1.3.7. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}$. Se define las derivadas parciales de orden 2 de f como

$$\tfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \tfrac{\partial}{\partial x}(\tfrac{\partial f}{\partial x}), \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \tfrac{\partial}{\partial x}(\tfrac{\partial f}{\partial y}), \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \tfrac{\partial}{\partial y}(\tfrac{\partial f}{\partial x}), \quad \tfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \tfrac{\partial}{\partial y}(\tfrac{\partial f}{\partial y}).$$

Esto puede repetirse para las derivadas de tercer orden o de orden superior a tres. De forma análoga se definen las derivadas parciales de orden mayor que uno para funciones de n variables.

Definición 1.3.8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}$. Se dice que f es de clase C^k en U si f y todas sus derivadas parciales de orden $1, 2, ..., k$, son continuas en U.

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}^m$. Si $f = (f_1, ..., f_m)$, se dice que f es de clase C^k en U si f_i es de clase C^k en U para $i = 1, 2, ..., m$

Teorema 1.3.8. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}$. Si f es de clase C^2 en U entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir, si $1 \leqslant i, j \leqslant n$ se tiene en U

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

1.3.2. Operadores diferenciales

Definición 1.3.9. Se ha definido el gradiente de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\text{grad } f = \nabla f = (\tfrac{\partial f}{\partial x_1}, \tfrac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \tfrac{\partial f}{\partial x_n})$$

- Se define la divergencia de $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (es decir $F = (F_1, F_2, ..., F_n)$) como

  $$\text{div } F = \nabla.F = \tfrac{\partial F_1}{\partial x_1} + \tfrac{\partial F_2}{\partial x_2} + ... + \tfrac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

  Es la traza de la matriz jacobiana de F.

- Se define el rotacional de $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (es decir $F = (F_1, F_2, F_3)$) como

  $$\text{rot } F = \nabla \text{x} F = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = (\tfrac{\partial F_3}{\partial y} - \tfrac{\partial F_2}{\partial z}, \tfrac{\partial F_1}{\partial z} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x}, \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y})$$

- Se define el rotacional de un campo vectorial en dimensión dos, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ como el vector

  $$\text{rot } F = (0, 0, \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y})$$

  Por simplicidad se suele escribir,

  $$\text{rot } F = \tfrac{\partial F_2}{\partial x} - \tfrac{\partial F_1}{\partial y}$$

Definición 1.3.10. Se define la matriz Hessiana de $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Si las segundas derivadas son continuas la matriz es simétrica.

Definición 1.3.11. Se define el laplaciano de $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\triangle\ f = \text{div grad } f = \nabla^2 f = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

Observación. El laplaciano es la traza de la matriz Hessiana.

Definición 1.3.12. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, una función $f : U \to \mathbb{R}$ se le llama armónica en U si sobre U tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden y satisfacen la ecuación de Laplace:

$$\triangle\ f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0.$$

Definición 1.3.13. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, una función $f \to \mathbb{R}$ es suave (o C^∞) si todas sus derivadas parciales, de cualquier orden, existen.

2. Estudio local de funciones de varias variables

2.1. Teorema de Taylor

Teorema 2.1.1. Teorema de Taylor para una variable.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave (infinitamente diferenciable). Entonces,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + ... + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + R_k(x_0, h),$$

donde

$$R_k(x_0, h) = \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0 + h - \tau)^k}{k!} f^{k+1}(\tau) d\tau$$

para h pequeño, este resto es pequeño hasta orden k, en el sentido de que

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_k(x_0, h)}{h^k} = 0.$$

Es decir, $R_k(x_0, h)$ es pequeño comparado con h^k.

Teorema 2.1.2. Fórmula de Taylor de primer orden.
Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en $\mathbf{x}_0 \in U$. Entonces,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + R_1(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_1(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\| \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ en $\mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1.3. Fórmula de Taylor de segundo orden.
Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas de tercer orden. Entonces,

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{h}),$$

donde $R_2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})/\|\mathbf{h}\|^2 \to \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$, y la segunda suma es sobre todo i y j entre 1 y n (de manera que hay n^2 términos).

2.2. Extremos

Definición 2.2.1. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$.

- Se dice que $\mathbf{x}_0$ es un máximo local de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$; $\mathbf{x}_0$ es un máximo local estricto de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V \backslash \{\mathbf{x}_0\}$.
- Se dice que $\mathbf{x}_0$ es un mínimo local de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal que $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V$; $\mathbf{x}_0$ es un mínimo local estricto de f si existe un entorno V de $\mathbf{x}_0$ tal $f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{x}_0)$ para todo $\mathbf{x} \in V \backslash \{\mathbf{x}_0\}$.
- El punto $\mathbf{x}_0$ es un extremo local de f si es un mínimo local o un máximo local.
- Los puntos $\mathbf{x}_0$ que verifican $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$ se denominan puntos críticos de f. Un punto crítico que no es un extremo local se denomina punto de silla.

Teorema 2.2.1. Condición de la derivada primera para puntos de extremo local.
Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\mathbf{x}_0 \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ y f presenta en $\mathbf{x}_0$ un extremo local, entonces $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ (ó $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$), es decir, $\mathbf{x}_0$ es un punto crítico de f.

Teorema 2.2.2. Criterio de la derivada segunda para puntos de extremo local.
Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es de clase C^3, $\mathbf{x}_0 \in U$ es un punto crítico de f, y $H(f)(\mathbf{x}_0)$ es definida positiva, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de mínimo relativo de f. Análogamente, si $H(f)(\mathbf{x}_0)$ es definida negativa, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto de máximo relativo.

Teorema 2.2.3. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U. Un punto $(x_0, y_0) \in U$ es un mínimo local (estricto) de f si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. (x_0, y_0) es un punto crítico de f,
2. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$,
3. D= det $H(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y})^2 > 0$, en (x_0, y_0).

D se llama **discriminante**. Si en la condición 2. ponemos < 0 en lugar de > 0, sin cambiar las condiciones 1. y 3., entonces se tiene un máximo local (estricto).

Teorema 2.2.4. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U. Si (x_0, y_0) es un punto crítico de f y el **discriminante** D de f en (x_0, y_0) **verifica** $D < 0$, entonces (x_0, y_0) es un **punto de silla** de f.

Si el discriminante D de f en (x_0, y_0) verifica $D = 0$, **no podemos deducir** que (x_0, y_0) sea máximo local, mínimo local o punto de silla de f. En este caso los puntos críticos se pueden examinar directamente, por medio de conjuntos de nivel, secciones o cualquier otro método.

Teorema 2.2.5. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U, y $\mathbf{x}_0 \in U$ un punto crítico de f.

1. Si todos los autovalores de la matriz $H(f)(\mathbf{x}_0)$ son estrictamente positivos, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto mínimo local estricto de f.
2. Si todos los autovalores de la matriz $H(f)(\mathbf{x}_0)$ son estrictamente negativos, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto máximo local estricto de f.
3. Si dos autovalores de la matriz $H(f)(\mathbf{x}_0)$ tienen distinto signo, entonces $\mathbf{x}_0$ es un punto silla de f.

Definición 2.2.2. Supongamos que $f : A \to \mathbb{R}$ es una función definida en un conjunto A de $\mathbb{R}^2$ o R^3. Se dice que un punto $\mathbf{x}_0 \in A$ es un **punto de máximo absoluto** (o **de mínimo absoluto**) de f si $f(\mathbf{x}) \leqslant f(\mathbf{x}_0)$ [o $f(\mathbf{x}) \geqslant f(\mathbf{x}_0)$] para todo $\mathbf{x}$ en A.

Observación. Estrategia para hallar los puntos de máximo y mínimo absolutos en una región con frontera.
Sea f una función continua de dos variables definida en una región D en $\mathbb{R}^2$ cerrada y acotada, que está limitada por una curva cerrada suave. Para hallar el máximo y el mínimo absolutos de f en D:

1. Localizar todos los puntos críticos de f en D.
2. Hallar los puntos críticos de f considerada como una función definida sólo en ∂D.
3. Calcular el valor de f en todos estos puntos críticos.
4. Comparar todos estos valores y seleccionar el mayor y el menor.

2.3. Extremos condicionados

Teorema 2.3.1. (Multiplicadores de Lagrange). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f, g : U \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en U. Sean $\mathbf{x}_0 \in U$, $c = g(\mathbf{x}_0)$ y S el conjunto de nivel de g de valor c (es decir, el conjunto de puntos $\mathbf{x} \in U$ tales que $g(\mathbf{x}) = c$). Supongamos que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Si la restricción de f a S (denotadas por $f|_s$) tiene un máximo o un mínimo local en $\mathbf{x}_0$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0).$$

Los puntos $\mathbf{x}_0$ que verifican $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$ se denominan puntos críticos de $f|_s$.

Teorema 2.3.2. (Localización de máximos y mínimos absolutos). Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y $f : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{U}$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en $\overline{U}$ se alcanza en puntos pertenecientes a alguno de los siguientes conjuntos:

1. los puntos de U en los que f no es diferenciable,
2. los puntos críticos de f en U,
3. los puntos máximo y mínimo de $f|_{\partial U}$.

Teorema 2.3.3. (Localización de máximos y mínimos absolutos)´. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, A un conjunto abierto que contiene a $\overline{U}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en A. Supongamos que existen $c \in \mathbb{R}$ y una función g tales que $\partial U = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = c\}$, g es diferenciable en ∂U y $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$ para todo $\mathbf{x} \in \partial U$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en $\overline{U}$ se alcanzan en los puntos críticos de f en U o en los puntos críticos de $f|_{\partial U}$.

2.4. Teorema de la función implícita

Supongamos que, Dada la función $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, definida por $F(\mathbf{x}, z) = 0$, donde $x \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$, queremos despejar z en función de $\mathbf{x}$.

Teorema 2.4.1. Caso particular del teorema de la función implícita.
Supongamos que $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales continuas. Denotamos los puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ por $(\mathbf{x}, z)$, donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y $z \in \mathbb{R}$, suponemos que $(\mathbf{x}_0, z_0)$ satisface

$$F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0 \quad \text{y} \quad \tfrac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0.$$

Entonces hay una bola U que contiene a $\mathbf{x}_0$ en $\mathbb{R}^n$ y un entorno V de z_0 en $\mathbb{R}$ tales que existe una única función $z = g(\mathbf{x})$ definida para $\mathbf{x}$ en U y z en V que satisface

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Más aún, si $\mathbf{x}$ en U y z en V satisfacen $F(\mathbf{x}, z) = 0$, entonces $z = g(\mathbf{x})$. Finalmente, $z = g(\mathbf{x})$ es continuamente diferenciable, con derivada dada por

$$\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z)} \mathbf{D}_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}, z)|_{z=g(\mathbf{x})},$$

donde $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F$ denota las derivadas (parciales) de F con respecto a la variable x, esto es, $\mathbf{D}_{\mathbf{x}} F = [\partial F/\partial x_1, ..., \partial F/\partial x_n]$. En otras palabras,

$$\tfrac{\partial g}{\partial x_i} = -\tfrac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}, \quad i = 1, ..., n.$$

Ahora intentamos despejar m variables $z_1, ..., z_m$ de m ecuaciones:

$$\begin{aligned} F_1(x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m) &= 0 \\ F_2(x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m) &= 0 \\ &... \\ &... \\ &... \\ F_m(x_1, ..., x_n, z_1, ..., z_m) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Denotemos por Δ al determinante de la matriz $m \times n$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial z_1} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial z_m} \\ . & & . \\ . & & . \\ . & & . \\ \frac{\partial F_m}{\partial z_1} & ... & \frac{\partial F_m}{\partial z_m} \end{bmatrix}$$

evaluado en el punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$; en un entorno de dicho punto podemos despejar **z**., de manera única, en términos de **x**.

Teorema 2.4.2. Si $\Delta \neq 0$, entonces la Ecuación (1) define de manera única funciones (suaves)

$$z_i = k_i(x_1, ..., x_n) \quad (i = 1, ..., m),$$

cerca del punto $(\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0)$. Sus derivadas se pueden calcular mediante diferenciación implícita.

El teorema de la función inversa.
Aquí trataremos de despejar $x_1, ..., x_n$ como funciones de $y_1, ..., y_n$ en las ecuaciones

$$\begin{aligned} f_1(x_1, ..., x_n) &= y_1 \\ &... \\ f_n(x_1, ..., x_n) &= y_n \end{aligned} \tag{2}$$

es decir, intentamos invertir las ecuaciones del sistema (2). Esta posibilidad lo estudiamos mediante el teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, ..., x_n)$ con las incógnitas $(x_1, ..., x_n)$ (antes llamadas $(z_1, ..., z_n)$).

Denotemos por Δ al determinante de la matriz $Df(\mathbf{x}_0)$, y $f = (f_1, ...f_n)$. También a la cantidad Δ se denota por $\partial(f_1, ..., f_n)/\partial(x_1, ..., x_n)$, $\partial(y_1, ..., y_N)/\partial(x_1, ..., x_n)$ o $J(f)(\mathbf{x}_0)$, y recibe el nombre de **determinante jacobiano** de f. Explícitamente,

$$\frac{\partial(f_1, ..., f_n)}{\partial(x_1, ..., x_n)}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = J(f)(\mathbf{x}_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & ... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & ... & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{vmatrix} \tag{3}$$

Teorema 2.4.3. Teorema de la función inversa.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sean $f_1 : U \to \mathbb{R}, ..., f_n : U \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas. Consideramos las ecuaciones de (2) cerca de una solución dada $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$. Si $J(f)(\mathbf{x}_0)$ (definido por la Ecuación (3)) es distinto de cero, entonces en las ecuaciones de (2) se puede despejar de manera única $\mathbf{x} = g(\mathbf{y})$, para $\mathbf{x}$ cerca de $\mathbf{x}_0$ e $\mathbf{y}$ cerca de $\mathbf{y}_0$. Además, la función g tiene derivadas parciales continuas.