Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Septiembre 2011

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)
(1) Matriz de un producto escalar.
(2) Vectores conjugados respecto a una forma cuadrática.
(3) Ley de inercia de Sylvester.
(4) Diagonalización por congruencia.

Ejercicio: (2 puntos)
Sea $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden 2. Demuestre que la siguiente aplicación define un producto escalar en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & < A, B >= tr(AB^t) \end{array}$$

Ejercicio: (3 puntos)
Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación que respecto a la base canónica viene dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z,\ 2x - y + 2z,\ 2x + 2y - z)$$

Probar que se trata de una isometría y describirla geométricamente.

Ejercicio: (3 puntos)
Clasifique la siguiente familia de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ según los valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2bx_2x_3$$

Soluciones

Conceptos:

(1) Matriz de un producto escalar: página105.
(2) Vectores conjugados respecto a una forma cuadrática: página 278.
(3) Ley de inercia de Sylvester: página 281.
(4) Diagonalización por congruencia: página 283.

Ejercicio 1 (pág. 143, ej. 86)
Sea $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices reales cuadradas de orden 2. Demuestre que la siguiente aplicación define un producto escalar en $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \mapsto & < A, B >= tr(AB^t) \end{array}$$

Demostración: Propiedades de la traspuesta (pág.32)

$$\begin{array}{rcl} T1 & : & (AB)^t = B^t A^t \\ T2 & : & (A+B)^t = A^t + B^t \\ T3 & : & (A^t)^t = A \end{array}$$

Propiedades de la traza (pág. 34)

$$\begin{array}{rcl} TR1 & : & tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \\ TR2 & : & tr(kA) = k \cdot tr(A) \\ TR3 & : & tr(AB) = tr(BA) \\ TR4 & : & tr(A) = tr(A^t) \end{array}$$

La aplicación $<,>$ define un producto escalar, si y sólo si, para todo $A, B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ y todo $k \in \mathbb{R}$ se cumplen las propiedades:

1. $< A, B >=< B, A > \iff tr(AB^t) = tr(BA^t)$

$$tr(AB^t) \underset{TR4}{=} tr((AB^t)^t) \underset{T1}{=} tr((B^t)^t A^t) \underset{T3}{=} tr(BA^t).$$

2. $< A+B, C >=< A, C > + < B, C > \iff tr((A+B)C^t) = tr(AC^t) + tr(BC^t)$

$$tr((A+B)C^t) = tr(AC^t + BC^t) \underset{TR1}{=} tr(AC^t) + tr(BC^t).$$

3. $< kA, B >= k < A, B > \iff tr((kA)B^t) \underset{TR2}{=} k \cdot tr(BA^t)$

4. $< A, A > \geq 0$ y $< A, A >= 0$ si y sólo si $A = 0$

   Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, entonces

$$\begin{array}{rl} < & A, A >= tr(AA^t) = tr(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}) \\ = & tr \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2 \geq 0 \text{ para todo } A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}). \end{array}$$

   Además,

   $< A, A >= 0$ si y sólo si $a = b = c = d = 0$ si y sólo si A es la matriz nula.

Ejercicio 2: Resuelto en la pág. 193

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación que respecto a la base canónica viene dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{3}(-x + 2y + 2z,\ 2x - y + 2z,\ 2x + 2y - z)$$

Probar que se trata de una isometría y describirla geométricamente.

Solución alternativa a la del libro (para ilustrar otros métodos):

Una forma de demostrar que el endomorfismo lineal f es una isometría es comprobando que conserva la norma:

$$||v|| = ||f(v)|| \text{ para todo } v \in \mathbb{R}^3.$$

Sea $v = (x, y, z)$ un vector genérico de $\mathbb{R}^3$, su norma es $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Por otro lado, calculamos la norma de $f(v)$

$$||f(v)|| = \sqrt{(\frac{1}{3}(-x + 2y + 2z))^2 + (\frac{1}{3}(2x - y + 2z))^2 + (\frac{1}{3}(2x + 2y - z))^2}.$$

Desarrollando el radicando de la expresión anterior obtenemos:

$$||f(v)|| = \sqrt{\frac{1}{9}(9x^2 + 9y^2 + 9z^2)} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = ||v||,$$

de donde deducimos que f es una isometría.

Para clasificar f de otro modo calculamos sus autovalores, a saber:

$$\lambda_1 = 1 \text{ (simple)}, \lambda_2 = -1 \text{ (doble)}$$

Así la matriz de Jordan de f será

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y vemos que se corresponde con la matriz de un giro de ángulo $\alpha = \pi$. Para dar respuesta completa al ejercicio hay que obtener el eje de giro, que es el subespacio vectorial formado por el conjunto de vectores fijos $V_f = Ker(A - I)$, donde A es la matriz de f en la base canónica. Las ecuaciones de este subespacio ya están calculadas en el libro:

$$V_f : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Ejercicio 3: (pág. 294, ej. 166)

Clasifique la siguiente familia de formas cuadráticas en $\mathbb{R}^3$ según los valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2bx_2x_3$$

Solución: La matriz de la forma cuadrática en la base canónica es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & b \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix}$$

Procedemos a realizar con ella la diagonalización por congruencia para así determinar con facilidad su signatura.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & b \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_{2,1}(1)]{E_{2,1}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & b & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_{3,2}(-b)]{E_{3,2}(-b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - b^2 \end{pmatrix}$$

Una vez diagonalizada la matriz de g por congruencia, el número de elementos positivos y negativos en la diagonal nos dan la signatura. Obtenemos que:

signatura	valores de b	Tipo de forma cuadrática
$(3, 0)$	$b \in (-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$	Definida positiva
$(2, 0)$	$b \in \{-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\}$	Semidefinida positiva
$(2, 1)$	$b \in (-\infty,\ -\sqrt{2}) \cup b \in (\sqrt{2}, \infty)$	Indefinida