PROBLEMA 8: Pruébese que la sucesión

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x^2+(1-nx)^2} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

converge puntualmente a 0, pero no posee ninguna subsucesión uniformemente convergente.

SOLUCIÓN: Obvio que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$

Pero

$f_n(1/n) = 1 \quad \forall n$ luego $f_n \not\to 0$ uniformemente.

PROBLEMA 9.

Pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x^n+1}{n}\right)$ converge uniformemente sobre cada compacto $[a,b]\subset(-1,+1)$ pero no converge absolutamente en ningún punto $x$ de $(-1,1)$.

SOLUCIÓN; sea $S_m=\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{x^k+1}{k}=$

$$=\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{k}}_{A_m}+\underbrace{\sum_{k=1}^{m}(-1)^k\frac{x^k}{k}}_{B_m}.$$

$A_m$ es condicionalmente convergente:

$A_m=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{k}$ es convergente, pero

$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$ no lo es.

Veamos $B_m$. Sea $C$ un compacto en $(-1,1)$, $C=[a,b]$ y $R=\max\{|a|,|b|\}<1$, entonces

$$\sum_1^m\frac{|x|^k}{k}\leq\sum_1^m\frac{R^k}{k}$$

$\lim_k\sqrt[k]{\frac{R^k}{k}}=R<1$ luego la serie numérica converge, lo que implica por el criterio de comparación que $\sum B_m$ converge uniformemente en $[a,b]$, como $A_m$ es una serie numérica convergente $S_m=A_m+B_m$ converge uniformemente en $[a,b]$.

Pero no converge absolutamente pues $A_n^*=\sum_1^n\frac{1}{k}$ es divergente, y $B_n^*=\sum_1^n\left|\frac{x^{k}+1}{k}(-1)^k\right|$ es convergente, PROBLEMA 4. Calcular $I = \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{\sqrt{tg(x)}} + \frac{1}{\sqrt{cotg(x)}} \right) dx$

SOLUCIÓN:

$$I = \int_0^{\pi/2} sen^{-1/2}(x) \cos^{1/2}(x)\, dx + \int_0^{\pi/2} sen^{1/2}(x) \cdot \cos^{-1/2}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \beta(1/4, 3/4) + \frac{1}{2} \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \beta(3/4, 1/4) = \Gamma(3/4)\Gamma(1/4)$$

$$= \frac{\pi}{sen \frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}.$$

PROBLEMA 5. Probar que $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$ Ind:

SOLUCIÓN:

$\beta(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p-1} dx$, hacemos el cambio

$$\left[ \begin{array}{ll} x = \frac{t}{1+t} & dx = \frac{(1+t)-1}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 & x = 1 \Rightarrow t = \infty \end{array} \right]$$

entonces

$$\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^{q-1}} \cdot \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \frac{1}{(1+t)^2} dt = *$$

$$* = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt .$$

PROBLEMA 2. Calcular $I = \int \log(a^2+x^2)\,dx$

SOLUCIÓN: Integremos por partes

$$u = \log(a^2+x^2) \longrightarrow du = \frac{2x}{a^2+x^2}\,dx$$

$$dv = 1 \cdot dx \longrightarrow v = x$$

luego

$$I = x\log(a^2+x^2) - 2\underbrace{\int \frac{x^2}{a^2+x^2}\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \int \frac{x^2}{a^2+x^2}\,dx = \int\left(\frac{a^2+x^2}{a^2+x^2} - \frac{a^2}{a^2+x^2}\right)dx =$$

OJO dividimos para a
luego quitamos $a=0$

$$= \int\left(1 - \frac{a^2}{a^2+x^2}\right)dx = x - \int \frac{a^2}{a^2+x^2}\,dx =$$

$$= x - \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = x - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot a$$

$$I = x\log(a^2+x^2) - 2\left(x - \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\cdot a\right) + C$$

$$= x\log(a^2+x^2) - 2x + 2a \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right) + C. \qquad a \neq 0$$

Si $a = 0$

$$I = \int \log(x^2)\,dx = \int 2\log(x)\,dx = \text{por parte} =$$

$$= 2x\log(x) - 2x + C.$$

JUNIO - 2014.

PROBLEMA 1. Calcular $I = \int x \sec^2(ax)\,dx$

CASO $a \neq 0$ Aplicamos la integración por partes.

$$u = x \longrightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{1}{\cos^2(ax)}dx \longrightarrow v = \frac{1}{a}tg(ax)$$

entonces:

$$I = \frac{x}{a}tg(ax) - \frac{1}{a}\int tg(ax) =$$

$$= \frac{x}{a}tg(ax) - \frac{1}{a}\int \frac{sen(ax)}{\cos(ax)}dx =$$

$$= \frac{x}{a}tg(ax) + \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,sen(ax)}{\cos(ax)}dx =$$

$$= \frac{x}{a}tg(ax) + \frac{1}{a^2}\log(\cos(ax)) + C.$$

CASO $a = 0$ $I = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$