Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2013/2014, Junio, 1ª y 2ª semana

1ª Semana

1. En una pista de hielo, una patinadora de masa *M* sostiene una cuerda atada a un trineo de masa *m* situado a una distancia *D* de ella. Estando ambos en reposo, la patinadora empieza a tirar de la cuerda con una fuerza constante *F*. Calcule la distancia que ha recorrido la patinadora hasta alcanzar el trineo en función de los datos del problema. Suponga que no hay rozamiento ni entre la patinadora y el hielo, ni entre el trineo y el hielo. **(1,5 puntos)**

Solución

Las únicas fuerzas presentes en el sistema son internas, la fuerza que ejerce la patinadora sobre el trineo, F, y su reacción, -F, del trineo sobre la patinadora. Por tanto, cada uno de ellos tiene una aceleración con una magnitud dada por:

$$a_p = \frac{F}{M}$$

$$a_t = \frac{F}{m}$$

y las distancias recorridas son

$$d_p = \frac{1}{2}\frac{F}{M}t^2$$

$$d_t = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t^2$$

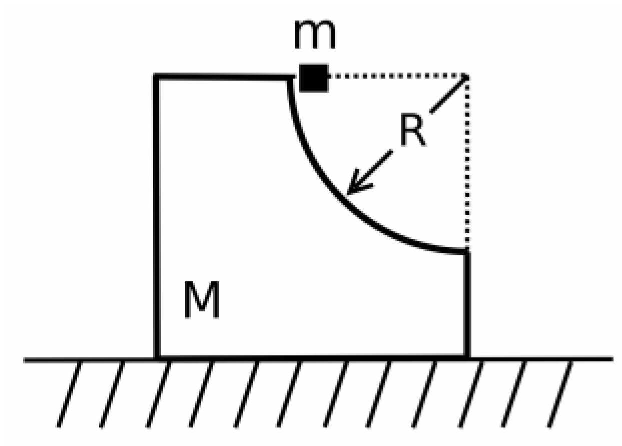
que deben ser igual a la distancia total, $D = d_p + d_t$. Despejando el tiempo de esta ecuación se obtiene

$$t = \sqrt{\frac{2D}{F}\frac{M \cdot m}{M + m}}$$

y, por tanto, la distancia recorrida por la patinadora es

$$d_p = \frac{D \cdot m}{m + M}$$

2. Una masa puntual m desliza sobre la superficie circular de radio R de un objeto de masa M como se muestra en la figura. El objeto puede deslizar sin rozamiento sobre la superficie sobre la que se apoya. En el instante inicial la masa m está en el punto más alto (como en la figura) y la velocidad inicial de las dos masas es cero. Calcule la velocidad final de las dos masas en el momento en que m se separa de M. **(2,5 puntos)**



Solución

Sea *v* la velocidad de la masa *m* y *V* la velocidad de la masa *M*. Como no hay rozamiento se conserva la energía total (suma de las energías cinética y potencial). Inicialmente sólo hay energía potencial, de modo que tenemos

$$E = m \cdot g \cdot R = T_M + T_m = \frac{1}{2} m \cdot V^2 + \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Cuando *m* abandona *M* las velocidades de *m* y *M* tienen dirección horizontal. La componente del momento en el sentido horizontal se conserva, ya que no hay ninguna fuerza en esa dirección:

$$m \cdot v + M \cdot V = 0$$

A partir de estas dos ecuaciones se pueden despejar las velocidades, obteniendo

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R}{1 + \frac{m}{M}}}$$

$$V = \frac{m}{M} \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot R}{1 + \frac{m}{M}}}$$

3. Supongamos que lanzamos verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra dirigido hacia la Luna. Despreciando la influencia del resto de astros, ¿en qué punto de su trayectoria la aceleración será nula? **(1,5 puntos)**

Datos: $M_{\mathrm{T}} / M_{\mathrm{Luna}} = 81{,}4$; $d_{\text{Tierra-Luna}} = 3{,}84 \times 10^8$ m.

Solución

La aceleración será nula cuando sobre el proyectil no actúe ninguna fuerza neta, o lo que es lo mismo, cuando la suma de las fuerzas que actúan sobre el mismo sea nula. En nuestro problema esto ocurrirá cuando la fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra se anule con la atracción gravitatoria de la Luna (ya que tienen sentidos opuestos):

$$G \frac{M_T m}{r^2} = G \frac{M_L m}{\left(d_{T-L} - r\right)^2} ,$$

donde *r* está medida con respecto a la Tierra. Esta ecuación tiene dos soluciones, pero sólo nos interesa aquella que proporciona el punto entre la Tierra y la Luna en el que los campos tienen sentidos opuestos, es decir $r < d_{T-L}$, que es:

$$r = 3{,}46\times 10^{8}\ \mathrm{m}\,.$$

4. Supongamos que tenemos un conductor rectilíneo de longitud infinita por el que circula una corriente I. Calcular el flujo magnético que atraviesa el cuadrado de lado L, colocado a una distancia *d* como se muestra en la figura. **(2,5 puntos)**
Ayuda: El módulo del campo magnético generado por una corriente rectilínea infinita a una distancia *r* de la misma es:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

<u>Solución</u>

El flujo magnético a través de una superficie tiene la forma

$$\phi = \int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dA$$

En nuestro caso sabemos que $\mathbf{B}$ es perpendicular al cuadrado, por lo que $\mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \pm B$ dependiendo del sentido que escojamos para el vector normal a la superficie (signo positivo si entra en el papel y negativo si sale). Escogemos el positivo.

$$\phi = \int_S B\ dA = \int_S \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\ dxdy = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_0^L\left[\int_d^{L+d}\frac{1}{x}\ dx\right]dy = \frac{\mu_0 I}{2\pi} L\ln\left(\frac{L+d}{d}\right).$$

5. Dos naves espaciales con una longitud en reposo de 200 m se cruzan siguiendo trayectorias paralelas. El tripulante de una nave mide el tiempo que tarda la otra en pasar a su altura y obtiene 5 µs. ¿Cuál es la velocidad relativa de relativa de las naves? **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

La velocidad que mide el tripulante será

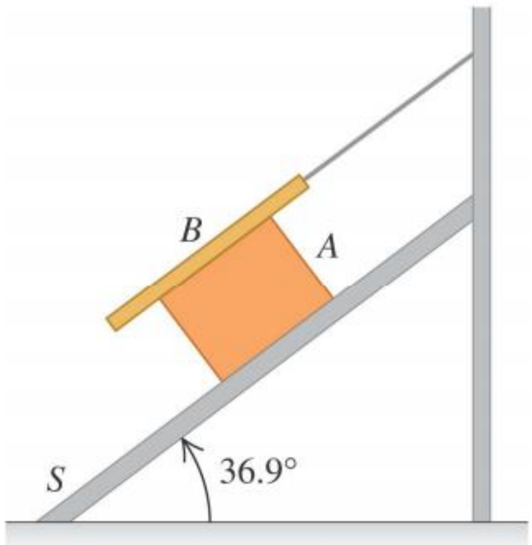
$$v = \frac{L}{t} = \frac{1}{\gamma}\frac{L_P}{t}$$

Ahora debemos sustituir $\gamma^{-1} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ y despejar la velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{{L_P}^2 c^2}{c^2 t^2 + {L_P}^2}} = 0{,}13c$$

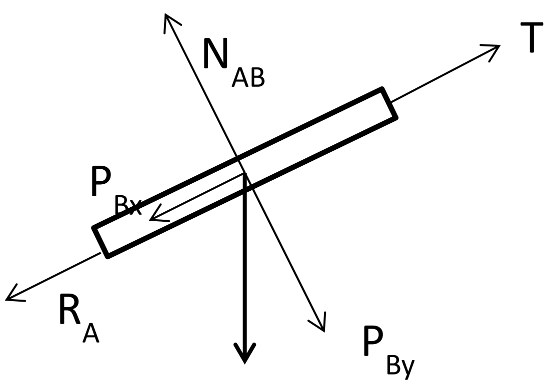
2ª Semana

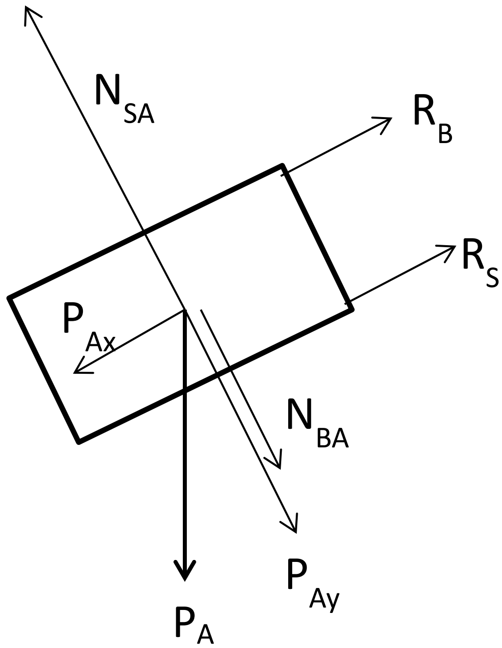
1. Como se ilustra en la figura, una tabla *B* de masa *m* sujeta por un extremo a una cuerda está apoyada sobre una bloque *A* de masa 3*m*, que a su vez se encuentra sobre un plano inclinado. El coeficiente de rozamiento entre *A* y el plano inclinado, y entre *B* y *A* es el mismo: μ. Determinar el valor del coeficiente de fricción para que el bloque *A* descienda por el plano inclinado con velocidad constante mientras tiene la tabla apoyada encima. **(2 puntos)**



Solución

Los diagramas de las fuerzas, en la dirección del plano y su perpendicular, para los Bloques B y A son:





El Bloque B está en reposo y el Bloque A se mueve en la dirección del plano con velocidad constante, es decir, para los dos bloques las fuerzas en las dos direcciones se anulan:

Bloque B:

$$P_{Bx} + R_A - T = 0$$
$$P_{By} - N_{AB} = 0$$

Bloque A:

$$P_{Ax} - R_S - R_B = 0$$
$$P_{Ay} + N_{BA} - N_{SA} = 0$$

donde T es la tensión de la cuerda, P_{Bx} y P_{Ax} son las componentes del peso de B y A en la dirección paralela al plano, P_{By} y P_{Ay} son las componentes del peso de B y A en la dirección perpendicular al plano, R_s y R_B son las fuerzas de rozamiento entre A y el plano inclinado, y entre A y B, N_{AB} es la fuerza normal que ejerce el bloque A sobre B y N_{BA} es la reacción a esa fuerza que ejerce B sobre A, que tienen igual módulo y direcciones opuestas.

Con estas ecuaciones tenemos que

$$N_{AB} = P_{By} = m \cdot g \cdot cos(\alpha)$$
$$N_{SA} = P_{Ay} + N_{AB} = 3 \cdot m \cdot g \cdot cos(\alpha) + m \cdot g \cdot cos(\alpha) = 4 \cdot m \cdot g \cdot cos(\alpha)$$
$$P_{Ax} - R_S - R_B = 3 \cdot m \cdot g \cdot sen(\alpha) - \mu \cdot N_{SA} - \mu \cdot N_{AB} =$$
$$3 \cdot m \cdot g \cdot sen(\alpha) - \mu \cdot g \cdot 5 \cdot m \cdot cos(\alpha) = 0$$
$$\mu = \frac{3}{5} tg(\alpha) = 0.45$$

2. Un disco de radio *R*, masa *M,* y momento de inercia $I = \frac{M}{2} \cdot R^2$ en reposo se hace girar alrededor de su eje aplicando una fuerza constante *F* en el borde, con dirección tangente al borde y sentido horario, durante un tiempo t_1. A partir de entonces la fuerza deja de actuar y el disco gira sin rozamiento. Se deposita entonces una bola de masa *m* en reposo en el borde del disco, donde queda fija girando con la ruleta. Calcular, en función de los datos del problema, la velocidad angular final del sistema. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

Durante el tiempo que se aplica la fuerza, la velocidad angular de la ruleta cambia de acuerdo con la fórmula:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

El momento de la fuerza aplicada durante ese tiempo inicial tiene dirección perpendicular a la ruleta y hacia abajo, y módulo:

$$\tau = R \cdot F$$

Sustituyendo y despejando obtenemos

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{dw}{dt} = R \cdot F$$

$$w_1 = \int_0^{t_1} \frac{2F}{R \cdot M} dt = \frac{2F}{R \cdot M} t_1$$

Esta es la velocidad angular que permanece constante hasta que se añade la bola. No actúan fuerzas externas por lo que se conserva el momento angular

$$L_M + L_m = L_{M+m}$$

$$\frac{M}{2} \cdot R^2 \cdot w_1 + 0 = \left(\frac{M}{2} + m\right) \cdot R^2 \cdot w_2$$

Despejando:

$$w_2 = \frac{M}{M + 2m} w_1 = \frac{2 \cdot F \cdot t_1}{(M + 2m) \cdot R}$$

Se obtendría este mismo resultado si la bola hubiera estado fija sobre la ruleta desde que esta empieza a acelerarse en la posición de reposo

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{M}{2} + m\right) \cdot R^2 \frac{dw}{dt} = R \cdot F$$

$$w_1 = \int_0^{t_1} \left(\frac{M}{2} + m\right) \cdot \frac{1}{R} \cdot F\, dt = \frac{2F}{R(M + 2m)} t_1$$

3. Supongamos que lanzamos verticalmente un proyectil desde la superficie de la Tierra dirigido hacia la Luna, y que despreciamos cualquier tipo de rozamiento y la influencia de otros astros. Sabemos que en un punto intermedio *r* la aceleración será nula porque la fuerza neta que los dos astros ejercen sobre el mismo se anula. Suponiendo que conocemos ese punto y las masas y los radios de los dos astros, y la distancia entre sus centros, obtener la velocidad inicial mínima con la que debemos lanzar el proyectil para que llegue a la Luna. **(2 puntos)**

<u>Solución</u>

Debemos calcular la velocidad inicial que hace que el proyectil llegue a ese punto *r* con velocidad 0, ya que después caerá a la Luna debido a su mayor atracción. Podemos aplicar el principio de conservación de la energía mecánica, suponiendo que llegará a este punto *r* con velocidad nula.

$$E_i = E_f$$

$$E_{c,i} + U_{T,i} + U_{L,i} = E_{c,f} + U_{T,f} + U_{L,f}$$

$$\frac{1}{2} m v_0^{\,2} - G\frac{M_T m}{R_T} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - R_T} = -G\frac{M_T m}{r} - G\frac{M_L m}{d_{T-L} - r}$$

donde hemos elegido el origen de energías potenciales en un punto infinitamente alejado: $U = 0$ en $r = \infty$ (aunque esto es irrelevante). Despejando obtenemos la velocidad buscada.

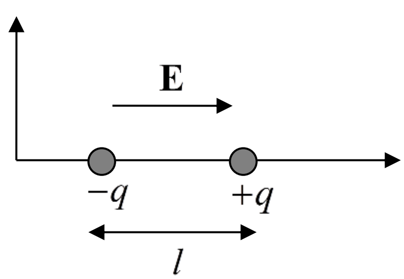
$$v_0 = \sqrt{2\left(G\frac{M_T}{R_T} + G\frac{M_L}{d_{T-L} - R_T}\right) - 2\left(G\frac{M_T}{r} + G\frac{M_L}{d_{T-L} - r}\right)}$$

Introduciendo los datos numéricos obtenemos:

v_0 = 11,08 km/s.

que obviamente es menor que la velocidad de escape de la Tierra (11,2 km/s).

4. Supongamos que tenemos el dipolo eléctrico representado en la figura, formado por dos cargas q iguales de distinto signo y separadas por una distancia fija l. Colocamos el dipolo alineado paralelamente a un campo eléctrico a lo largo del eje X como se ilustra en la figura. La dirección y sentido del campo eléctrico es constante (eje X positivo), pero su módulo no es uniforme y varía linealmente a lo largo del eje X de la forma $dE/dx = k$, siendo k una constante. Calcular la fuerza total que el campo ejerce sobre el dipolo. **(2 puntos)**



Solución

Integrando la ecuación anterior obtenemos que el campo eléctrico varía en la dirección del eje X del siguiente modo:

$$E = kx + C$$

donde *C* es una constante de integración,

La fuerza que experimenta la carga $-q$ será

$$\mathbf{F}_{-q} = -q\left(kx + C\right)\mathbf{i}$$

mientras que la que experimenta la carga q es

$$\mathbf{F}_q = q\left(k\left(x+l\right)+C\right)\mathbf{i}$$

La fuerza total sobre el dipolo será

$$\mathbf{F}_{-q} + \mathbf{F}_q = -q\left(kx+C\right)\mathbf{i} + q\left(k\left(x+l\right)+C\right)\mathbf{i} = qkl\mathbf{i}$$

5. Dos naves espaciales, de 150 m de longitud en reposo cada una, se alejan de la Tierra a la misma velocidad de 0,6*c* (con respecto a la Tierra) siguiendo la misma dirección X pero en sentidos contrarios, ¿qué longitud tiene cada nave medida desde la otra? **(2 puntos)**

Ayuda: Las transformaciones relativistas de velocidades son

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \qquad u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

donde el sistema S’ se aleja del sistema S a una velocidad relativa v.

<u>Solución</u>

La longitud que tendrá cada nave medida desde la otra será

$$L = \frac{1}{\gamma} L_P\,,$$

donde $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, siendo v la velocidad relativa entre las dos naves.

Para calcular esta velocidad aplicamos la transformación relativista de las velocidades (calcularemos la velocidad con la que la primera nave, la que se mueve hacia la derecha de la Tierra, ve a alejarse a la segunda nave)

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

donde u_x' es la velocidad de la segunda nave con respecto a la primera (sistema S’), $u_x = -0.6c$ (velocidad de la segunda nave con respecto a la Tierra, sistema S) y $v = 0{,}6c$ es la velocidad con la que se aleja la primera nave con respecto a la Tierra (velocidad de S’ con respecto a S):

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} = -0.882c$$

Sustituyendo más arriba

$$L = \frac{1}{\gamma} L_P = 0,471 \times L_P = 70,7 \text{ m}$$