TUTORIA INTERCAMPUS

MÉTODOS DE FOURIER Y ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

RESOLUCIÓN EXÁMENES 2019

Ramón Miralles Rafart

Examen 1ª semana de junio

1.-
a) Calculamos

$$\Delta = 0.(e^{-0}y + 1) - 1.e^{-0} = -1 \neq 0$$

y, por tanto, el problema de Cauchy tiene solución única.

b)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{-x}y + 1}{e^{-x}} = y + e^x \rightarrow y' - y = e^x \text{ (1)}$$

y resolvemos la edo. Primero resolvemos la ecuación homogénea $y' - y = 0$. La solución es $y = Ce^x$ Seguidamente, aplicando el método de selección hallamos una solución particular que debe ser del tipo, $y_p = Axe^x$. Derivando será $y_p' = A(x+1)e^x$ y sustituyendo en (1),

$$A(x+1)e^x - Axe^x = e^x \rightarrow A = 1.$$

La solución general es

$$y = (C + x)e^x \rightarrow e^{-x}y - x = C.$$

Planteamos el cambio de variables:

$$\begin{cases} \xi = e^{-x}y - x \\ \eta = x \end{cases}$$

y la EDP con las nuevas variables (ξ, η) es

$$e^{-\eta}u_\eta = \eta \rightarrow u_\eta = \eta e^\eta.$$

Resolviendo esta ecuación:

$$u(\xi,\eta) = p(\xi) + \int \eta e^\eta d\eta = p(\xi) + (\eta - 1)e^\eta$$

$$u(x,y) = p(e^{-x}y - x) + (x-1)e^x.$$

Imponiendo la condición:

$$u(0,y) = p(y) - 1 = y^2 \rightarrow p(y) = y^2 + 1 \rightarrow p(e^{-x}y - x) = (e^{-x}y - x)^2 + 1.$$

La solución final será

$$u(x,y) = (e^{-x}y - x)^2 + (x-1)e^x + 1.$$

2.-
Planteamos una solución en la forma:

$$u(R,\Theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

y sustituyendo en la EDO

$$\frac{R''}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + 1 = 0 \rightarrow \frac{\Theta''}{\Theta} = -\left(\frac{R''}{R} + 1\right) = -\lambda.$$

Resulta el siguiente problema de EDO con valores iniciales:

$$\begin{cases} \Theta'' + \lambda\Theta = 0 \\ \Theta(\frac{\pi}{2}) = \Theta(\frac{3\pi}{2}) = 0. \end{cases}$$

La ecuación característica de esta ecuación diferencial, con $\lambda > 0$ es

$$r^2 + \lambda = 0$$

y sus soluciones

$$r = \pm\sqrt{\lambda}\, i.$$

La solución general de esta EDO homogénea viene expresada por

$$\Theta(\theta) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,\theta\right).$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{3\pi}{2}\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

y para que este sistema tenga soluciones distintas de la trivial se ha de cumplir que

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{\pi}{2}\right) \\ \cos\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{3\pi}{2}\right) & \sin\left(\sqrt{\lambda}\,\frac{3\pi}{2}\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$\cos\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\lambda}\right)\sin\left(\frac{3}{2}\pi\sqrt{\lambda}\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\pi\sqrt{\lambda}\right)\sin\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\lambda}\right) = \sin\left(\pi\sqrt{\lambda}\right) = 0.$$

Los autovalores son $\lambda_n = n^2$, con $n \geq 1$ y un sistema fundamental de soluciones es $\{\cos(nx), \sin(nx)\}_{n\geq 1}$.
Para $\lambda_n = n^2$ resulta la EDO

$$-\left(\frac{R''}{R} + 1\right) = -n^2 \to R'' - (n^2 - 1)R = 0,$$

cuyo sistema fundamental de soluciones es $\{e^{-\left(\sqrt{n^2-1}\right)r}\}$, ya que u debe ser acotada.
La solución general presenta la forma siguiente

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{n^2-1}\right)r}(a_n\cos(n\theta) + b_n\sin(n\theta))$$

y aplicando la condición inicial $u(0,\theta) = \sin(2\theta)$

$$u(0,\theta) = a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos(2\theta) + b_2\sin(2\theta) + a_3\cos(3\theta) + b_3\sin(3\theta) + \ldots$$

Identificando coeficientes debe ser

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \ldots = 0$$

$$b_1 = b_3 = \ldots = b_n = \ldots = 0 \text{ y } b_2 = 1.$$

La solucion pedida es

$$u(r,\theta) = e^{-\sqrt{3}r}\sin(2\theta).$$

3.-
a)

$$a_n = \frac{2}{1}\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin(n\pi x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-x)\sin(n\pi x)dx = 4\int_0^{\frac{1}{2}} x\sin(n\pi x)dx$$
$$= 4\left[\frac{\sin(n\pi x) - n\pi x\cos(n\pi x)}{n^2\pi^2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = 4\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$$

Resulta

$$S(x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin[(2n+1)\pi x].$$

$$S(\frac{1}{2}) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin[(2n+1)\frac{\pi}{2}] = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}(-1)^n$$
$$= \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n+1)^2} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

y

$$S(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \to \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{4}{\pi^2}} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = (1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots) + (\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots)$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\ldots)$$
$$= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{2^2}\frac{\pi^2}{8}+\ldots\right) = \frac{\pi^2}{8}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^8}+\ldots\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{8}.\frac{1}{1-\frac{1}{2^2}} = \frac{\pi^2}{8}.\frac{2^2}{2^2-1} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) En todos los puntos del intervalo cerrado $[0,1]$ ya que la función es continua y, además, $f(0) = f(1) = 0$. Por el teorema 2 de la página 23 del texto base.

c) Si extendemos la función $f(x)$ de forma impar a todo $\mathbb{R}$, de la forma:

$$\text{Si } x \geq 0, f(x) = (-1)^n\begin{cases} x-n, \text{ si } n \leq x \leq n+\frac{1}{2} \\ -x+n+1, \text{ si } n+\frac{1}{2} < x \leq n+1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Si } x < 0, f(x) = (-1)^n\begin{cases} x+n+1, \text{ si } -(n+1) \leq x \leq -(n+\frac{1}{2}) \\ -x-n, \text{ si -}\left(n+\frac{1}{2}\right) < x \leq -n. \end{cases} \quad (2)$$

El conjunto de convergencia de la serie es $C = \mathbb{R}$.

d) Por el teorema 2 de la página 23 del texto base, la serie $S(x)$ converge uniformemente en todos los intervalos cerrados. Así, en los intervalos cerrados de los números enteros:

$$x \geq 0, [n, n+1], n \geq 0$$
$$x < 0, [-(n+1), -n], n > 0$$

se cumple que la función es continua y, además,

$$f(n) = f(n+1) = f(-n) = f(-(n+1)) = 0.$$

e) Tenemos que

$$S(x) = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin[(2n+1)\pi x]$$

vinculada a las funciones (1) y (2).

El número $\pi \in [3,4]$ y la función asociada a este intervalo es $f(x) = -\begin{cases} x-3, \text{ si } 3 \leq x \leq \frac{7}{2} \\ -x+4, \text{ si } \frac{7}{2} < x \leq 4 \end{cases}$. Por la continuidad de $f(x)$ en todo $\mathbb{R}$,

$$S(\pi) = f(\pi) = -(\pi - 3) = 3 - \pi.$$

Examen 2ª semana de junio

1.-

a)

$$u_{tt} - x^2 u_{xx} - u_t = 0$$

Calculamos

$$B^2 - 4AC = 0^2 - 4.1.(-x^2) = 4x^2 > 0.$$

Se trata de una EDP de tipo hiperbólico. Las curvas características las obtenemos de

$$\frac{dx}{dt} = \pm x \to \begin{cases} xe^{-t} = K \\ xe^{t} = K. \end{cases}$$

Hacemos el cambio de variables

$$\xi = xe^{-t}$$
$$\eta = xe^{t}$$

y

$$\begin{aligned} \xi_t &= -xe^{-t} \\ \xi_{tt} &= xe^{-t} \\ \xi_x &= e^{-t} \\ \xi_{xx} &= 0 \\ \eta_t &= xe^{t} \\ \eta_{tt} &= xe^{t} \\ \eta_x &= 0 \\ \eta_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

$$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = u_\xi(-xe^{-t}) + u_\eta xe^t = -xe^{-t}u_\xi + xe^t u_\eta$$

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_t\eta_t + u_{\eta\eta}\eta_t^2 + u_\xi \xi_{tt} + u_\eta \eta_{tt} \\ &= u_{\xi\xi}(x^2e^{-2t}) + 2u_{\xi\eta}((-xe^{-t})xe^t + u_{\eta\eta}x^2e^{2t} + u_\xi xe^{-t} + u_\eta xe^t \\ &= u_{\xi\xi}x^2e^{-2t} - 2u_{\xi\eta}x^2 + u_{\eta\eta}x^2e^{2t} + u_\xi xe^{-t} + u_\eta xe^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_t^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx} \\ &= u_{\xi\xi}e^{-2t} + 2u_{\xi\eta}e^{-t}e^t + u_{\eta\eta}e^{2t} + u_\xi .0 + u_\eta .0 \\ &= u_{\xi\xi}e^{-2t} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}e^{2t}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la EDO se obtiene la nueva ecuación

$$-4u_{\xi\eta}x^2+2u_\xi xe^{-t}=0$$

y teniendo en cuenta que

$$\xi\eta=xe^{-t}xe^t=x^2$$
$$\xi=xe^{-t}$$

resulta

$$-4u_{\xi\eta}\xi\eta+2u_\xi\xi=0\to 2u_{\xi\eta}\eta-u_\xi=0.$$

Resolviendo la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{u_{\xi\eta}}{u_\xi}=\frac{\eta}{2}\to u_\xi=p_1(\xi)\eta^{\frac{1}{2}}\to u(\xi,\eta)=p(\xi)\eta^{\frac{1}{2}}+q(\eta)$$

$$u(x,t)=p(xe^{-t})x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}}+q(xe^t)$$

$$u_t(x,t)=p'(e^tx)e^{-t}(-1)x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}}+p(xe^{-t})x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}}\frac{1}{2}+q'(xe^t)e^t$$
$$=-p'(e^tx)x^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{t}{2}}+p(xe^{-t})x^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}}\frac{1}{2}+q'(xe^t)x.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales se obtiene

$$u(x,0)=p(x)x^{\frac{1}{2}}+q(x)=2x\quad(3)$$
$$u_t(x,0)=-p'(x)x^{\frac{3}{2}}+p(x)x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+q'(x)x=x\quad(4)$$

y derivando (3) y sustituyendo en (4)

$$p'(x)x^{\frac{1}{2}}+p(x)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+q'(x)=2\to q'(x)=2-p'(x)x^{\frac{1}{2}}-p(x)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$-p'(x)x^{\frac{3}{2}}+p(x)x^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}+\left(2-p'(x)x^{\frac{1}{2}}-p(x)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)x=x$$

$$-p'(x)x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}p(x)x^{\frac{1}{2}}+2x-p'(x)x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}p(x)x^{\frac{1}{2}}=x$$

$$-2p'(x)x^{\frac{3}{2}}=-x\to p'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\to p(x)=x^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{x}+C.$$

De la ecuación (3) obtenemos sustituyendo $p(x)$ la siguiente expresión para $q(x)$

$$q(x)=2x-p(x)x^{\frac{1}{2}}=2x-\left(x^{\frac{1}{2}}+C\right)x^{\frac{1}{2}}=x-Cx^{\frac{1}{2}}=x-C\sqrt{x}.$$

Calculamos

$$p(xe^t)=\sqrt{xe^{-t}}+C$$
$$q(xe^t)=xe^t-C\sqrt{xe^t}.$$

La solución pedida es

$$u(x,t)=\left(\sqrt{xe^{-t}}+C\right)\sqrt{xe^t}+xe^t-C\sqrt{xe^t}=x+C\sqrt{xe^t}+xe^t-C\sqrt{xe^t}=x(1+e^t).$$

2.-

Suponemos una solución en la forma

$$u(x,y)=X(x)Y(y)$$

y sustituyendo en la EDP

$$\frac{X''}{X}+\frac{Y''}{Y}=0\to\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda.$$

Resulta el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(1) = 0 \end{cases}$$

y la solución es

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}\, x.$$

Aplicamos las condiciones de contorno y

$$X(0) = 0 \to C_1 = 0$$

$$X(1) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} = 0 \to \lambda_n = n^2\pi^2, n \geq 1.$$

Las autofunciones asociadas serán

$$\{\sin(n\pi x)\}_{n\geq 1}$$

De $-\frac{Y''}{Y} = -\lambda$, resulta el problema a resolver

$$\begin{cases} Y'' - n^2\pi^2 Y = 0 \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

y la solución general es

$$Y(y) = C_1 e^{n\pi y} + C_2 e^{-n\pi y}.$$

Imponiendo la condición de contorno

$$Y(0) = C_1 + C_2 = 0 \to C_2 = -C_1$$

y

$$Y(y) = C_1 e^{n\pi y} - C_1 e^{-n\pi y} = C\left(\frac{e^{n\pi y} - e^{-n\pi y}}{2}\right) = CSh(n\pi y).$$

Un sistema fundamental de soluciones para Y(y) es

$$\{Sh(n\pi y)\}_{n\geq 1}.$$

Tenemos la solución general de la EDO expresada por

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) Sh(n\pi y).$$

Aplicando la condición $u(x,2) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x)$ es

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x) Sh(2n\pi) = \sin(\pi x) + \sin(3\pi x) \\ &= a_1 \sin(\pi x) Sh(2\pi) + a_2 \sin(2\pi x) Sh(4\pi) + a_3 \sin(3\pi x) Sh(6\pi) + \ldots \end{aligned}$$

y

$$\begin{cases} a_1 Sh(2\pi) = 1 \\ a_2 = 0 \\ a_3 = Sh(6\pi) = 1 \\ a_4 = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

Finalmente, la solución dela EDO es

$$u(x,y) = \frac{\sin(\pi x)Sh(\pi y)}{Sh(2\pi)} + \frac{\sin(3\pi x)Sh(3\pi y)}{Sh(6\pi)}.$$

3.-

a) Se cumple

$$\Delta = 1.1 - 0.2 = 1 \neq 0$$

y el problema tiene solución única.

Resolviendo el problema por el método de las curvas características:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t} \to 2tdt = dx \to t^2 - x = K.$$

Introduciendo el cambio de variables

$$\begin{cases} \xi = t^2 - x \\ t = \eta \end{cases}$$

obtenemos la EDO en las variables (ξ, η)

$$u_\eta = 4\eta u.$$

Resolviendo esta ecuación

$$\frac{u_\eta}{u} = 4\eta \to u(\xi,\eta) = p(\xi)e^{2\eta^2}$$

y deshaciendo el cambio de variables

$$u(x,y) = p(t^2 - x)e^{2t^2}.$$

Aplicando la condición inicial

$$u(x,1) = p(1-x)e^2 = f(x) \to p(1-x) = e^{-2}f(x)$$

y

$$p(\upsilon) = e^{-2}f(1-\upsilon) \Rightarrow p(t^2 - x) = e^{-2}f(1 + x - t^2).$$

Finalmente obtenemos la solución

$$u(x,t) = e^{-2}f(1 + x - t^2)e^{2t^2} = e^{2(t^2-1)}f(1 + x - t^2).$$

b) Aplicamos transformadas a la variable x

$$\begin{cases} \hat{u}_t - 2itk\hat{u} = 4t\hat{u} \\ \hat{u}(k,1) = \hat{f}(k) \end{cases} \to \frac{\hat{u}_t}{\hat{u}} = 2t(2 + ik) \to \hat{u} = p(k)e^{(2+ik)t^2}$$

y por la condición inicial

$$\hat{u}(k,1) = p(k)e^{2+ik} = \hat{f}(k) \to p(k) = \hat{f}(k)e^{-(2+ik)}.$$

Resulta

$$\hat{u}(k,t) = \hat{f}(k)e^{-(2+ik)}e^{(2+ik)t^2} = \hat{f}(k)e^{2(t^2-1)}e^{i(t^2-1)k}$$

y

$$\begin{aligned} u(x,t) &= F^{-1}(\hat{f}(k)e^{2(t^2-1)}e^{i(t^2-1)k}) = e^{2(t^2-1)}F^{-1}\left(\hat{f}(k)e^{i(t^2-1)k}\right) \\ &= e^{2(t^2-1)}f(x - (t^2 - 1) = e^{2(t^2-1)}f(1 + x - t^2). \end{aligned}$$

Examen septiembre

1.-
a) Calculamos

$$\Delta = 1.1 - 0.x = 1 \neq 0$$

y deducimos que el problema tiene solución única.
b)
Hallamos las curvas características

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \to y = Kx.$$

Hacemos el cambio de variables:

$$\begin{cases} \xi = \frac{y}{x} \\ \eta = x \end{cases}$$

y resulta la ecuación en las variables (ξ, η)

$$\eta u_\eta = \eta + \xi\eta \to u_\eta = 1 + \xi.$$

La solución de la EDO en las variables (ξ, η) es

$$u(\xi, \eta) = p(\xi) + (1 + \xi)\eta.$$

Deshaciendo el cambio de variables

$$u(x,y) = p\left(\frac{y}{x}\right) + \left(1 + \frac{y}{x}\right)x = p\left(\frac{y}{x}\right) + x + y.$$

Por la condición inicial

$$u(x,1) = p(\frac{1}{x}) + x + 1 = x + 1 + \frac{1}{x^2} \to p(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x^2}$$

y considerando $\upsilon = \frac{1}{x}$

$$p(\upsilon) = \upsilon^2 \to p\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y^2}{x^2}.$$

Finalmente, la solución buscada será

$$u(x,y) = x + y + \frac{y^2}{x^2}.$$

2.-
a) Segun el teorema 1 de la página 17 del texto base ha de ser $\lambda \geq 0$.Hay que discutir los autovalores $\lambda < 1, \lambda = 1, \lambda > 1$. Llamamos $p = \sqrt{1-\lambda}$ y $w = \sqrt{\lambda - 1}$.
La ecuación característica de la ecuación difrencial es

$$r^2 + 2r + \lambda = 0$$

cuyas soluciones son

$$r_1 = -1 + \sqrt{1-\lambda} \text{ y } r_2 = -1 - \sqrt{1-\lambda}.$$

- Para $\lambda < 1$,

$$X = C_1 e^{(-1+p)x} + C_2 e^{(-1-p)x}$$

$$X' = C_1(-1+p)e^{(-1+p)x} + C_2(-1-p)e^{(-1-p)x}$$

$$
\begin{aligned}
X(0) &= C_1 + C_2 = 0 \to C_2 = -C_1 \\
X(1) + X'(1) &= C_1 e^{(-1+p)} + C_2 e^{(-1-p)} + C_1(-1+p)e^{(-1+p)} + C_2(-1-p)e^{(-1-p)} \\
&= C_1 p e^{(-1+p)} - C_2 p e^{(-1-p)} = e^{-1} C_1 p(e^p + e^{-p}) = 0 \to C_1 = 0 \text{ y } C_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Resulta $X \cong 0$, no tiene autovalor.

- Para $\lambda = 1$,

$$X = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

$$X' = -C_1 e^{-x} + C_2(1-x)e^{-x}$$

$$
\begin{aligned}
X(0) &= C_1 = 0 \\
X(1) + X'(1) &= -C_1 e^{-1} + C_2 e^{-1} + C_1 e^{-1} = C_2 e^{-1} = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.
\end{aligned}
$$

Resulta $X \cong 0$, no tiene autovalor.

- Para $\lambda > 1$,

$$X = C_1 e^{-x}\cos(wx) + C_2 e^{-x}\sin(wx) = e^{-x}(\cos(wx) + \sin(wx))$$

$$X(0) = C_1 = 0 \Rightarrow X = C_2 e^{-x}\sin(wx)$$

$$X' = C_2(-e^{-x}\sin(wx) + we^{-x}\cos(wx)) \;\; = C_2 e^{-x}(-\sin(wx) + w\cos(wx))$$

$$X(1) + X'(1) = C_2 e^{-1}\sin w + C_2 e^{-1}(-\sin w + w\cos w) = C_2 e^{-1} w\cos w = 0$$

$$\cos w = 0 \to w_n = -\frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{(2n-1)\pi}{2}, n = 1, 2, \ldots$$

En este caso, $\lambda_n = 1 + w_n$ y $X_n = \{e^{-x}\sin(w_n x)\}$.

b) Para hallar la forma autoadjunta de (P) hemos de calcular

$$p(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

La forma autoadjunta es

$$
\begin{cases}
(e^{2x}X')' + \lambda e^{2x} X = 0 \\
X(0) = 0 \\
X(1) + X'(1) = 0.
\end{cases}
$$

Segun el teorema 1 de la página 17 del texto base si $\langle X_n, X_m\rangle = 0$, si $n \neq m$. Para el caso $n = m$ tenemos:

$$
\begin{aligned}
\langle X_n, X_n\rangle &= \int_0^1 r X_n^2 dx = \int_0^1 e^{2x}e^{-2x}\sin^2(w_n x)dx = \int_0^1 \sin^2(w_n x)dx = \int_0^1 \frac{1-\cos(2w_n x)}{2}dx \\
&= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin(2w_n x)}{2w_n}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sin(2w_n)}{2w_n}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sin[(2n-1)\pi]}{(2n-1)\pi}\right] = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

c)

$$\langle e^{-x}, X\rangle = \int_0^1 e^{2x}e^{-x}[e^{-x}\sin(w_n x)]dx = \int_0^1 \sin(w_n x)dx = \left[-\frac{\cos(w_n x)}{w_n}\right]_0^1 = -\frac{\cos(w_n)+1}{w_n}$$
$$= \frac{2}{(2n-1)\pi} - \frac{2\cos\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n-1)\pi} = \frac{2}{(2n-1)\pi}.$$

3.-

a) Aplicando la transformada respecto a la variable x:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} - ik\hat{u}_t + +2k^2 = 0 \\ \hat{u}(k,0) = 0 \\ \hat{u}_t(k,0) = -ik\hat{f}(k). \end{cases}$$

La ecuación característica de le EDO respecto a la variable t es

$$r^2 - ikr + 2k^2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r_1 = 2ik, r_2 = -ik.$$

La solución $\hat{u}(k,t)$ será

$$\hat{u}(k,t) = p(k)e^{2ikt} + q(k)e^{-ikt}$$

y su derivada respecto a la variable t

$$\hat{u}_t(k,t) = 2ikp(k) - ikq(k)e^{-ikt}.$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$\hat{u}(k,0) = p(k) + q(k) = 0$$
$$\hat{u}_t(k,0) = 2ikp(k) - ikq(k) = -ik\hat{f}(k) \to 2p(k) - q(k) = -\hat{f}(k)$$

$$\begin{cases} p(k) + q(k) = 0 \\ 2p(k) - q(k) = -\hat{f}(k). \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones

$$3p(k) = -\hat{f}(k) \to p(k) = -\frac{\hat{f}(k)}{3}, q(k) = \frac{\hat{f}(k)}{3}$$

y la solución que obtenemos es

$$\hat{u}(k,t) = -\frac{\hat{f}(k)}{3}e^{2ikt} + \frac{\hat{f}(k)}{3}e^{-ikt}.$$

Calculando la transformada inversa

$$u(x,t) = \frac{1}{3}\left[-F^{-1}\left(\hat{f}(k)e^{i(2t)k}\right) + F^{-1}\left(\hat{f}(k)e^{i(-t)k}\right)\right] = \frac{1}{3}[-f(x-2t) + f(x-(-t))]$$
$$= \frac{1}{3}[f(x+t) - f(x-2t)].$$

b) Para $f(x) = x^2$ tenemos que

$$u(x,t) = \frac{1}{3}[(x+t)^2 - (x-2t)^2] = \frac{1}{3}[x^2 + 2tx + t^2 - x^2 + 4tx - 4t^2] = t(2x-t).$$