Introducción a las Ecuaciones Diferenciales / Septiembre de 2018

Alumno...

Nota.- Simplificar al máximo la respuesta y remarcarla claramente (en un recuadro). Escribir también la solución (excepto las demostraciones) en los recuadros de esta hoja, que se debe entregar junto con el ejercicio.

1º) a) Integrar la ecuación diferencial

$(2xy^2 + y\cos x)dx + (3x^2y + 2senx)dy = 0$

mediante la determinación de un factor integrante. Se debe dar la respuesta en la forma $F(x,y) = k$, y decir cuál es el factor integrante que se considera. (Si no fuera posible, indicar por qué).

b) Determinar el valor de la constante $a > 0$ para que la parábola $y = 5x^2$ sea una trayectoria ortogonal a la familia de elipses $x^2 + ay^2 = r^2$ (siendo $r > 0$). (Si no fuera posible, indicar por qué).

2º) a) Resolver (expresando y como función de x) la ecuación diferencial $x(y')^2 - y = 1$. Se deben hallar todas las soluciones posibles, e indicar también cuál es el máximo intervalo abierto en que está definida cada solución.

b) Resolver (expresando y como función de x) la ecuación diferencial exacta $yy''' + 3y'y'' = e^x$.

3º) Hallar un intervalo abierto I y una función derivable $f : I \to R$ verificando que $0 \in I$, $f(0) = -1$; y en cada punto $P(x,y)$ de la gráfica de f, la normal a la gráfica corta al eje horizontal en un punto Q, que dista del eje vertical tres veces más que el punto P .

Hallar todas las soluciones posibles, expresando $y = f(x)$ como función de x, y exigiendo en cada caso que el intervalo abierto I sea el mayor posible.

Decir, en particular, si existe o no alguna solución del problema anterior que sea creciente en todo el intervalo I.

4º) Supongamos que $f : [0,4] \to R$ es una función continua. Demostrar que, si $0 \le f(x) \le 5 + 7\left|\int_2^x f(t)dt\right|$, para todo $x \in [0,4]$, entonces $f(x) \le 5e^{7|x-2|}$, para todo $x \in [0,4]$. (Caso particular del Lema de Gronwall).

Soluciones (no se incluyen las comprobaciones, que son inmediatas):

1º) a) $x^2y^3 + y^2 senx = k$, con el factor integrante $\mu = y$.

b) $a = 2$

2º) a) Las soluciones son:

$y = -1$, definida en $I = R$,

$y = x - 1$, definida en $I = R$,

$y = (A + \sqrt{x})^2 - 1$,. siendo $A \neq 0$, definida en $I =]0, \rightarrow[= \{x \in R/x > 0\}$,

$y = -(A + \sqrt{-x})^2 - 1$,. siendo $A \neq 0$, definida en $I =]\leftarrow, 0[= \{x \in R/x < 0\}$.

b) Las soluciones son de la forma

$y = \sqrt{2e^x + Ax^2 + Bx + C}$, o bien $y = -\sqrt{2e^x + Ax^2 + Bx + C}$,

siendo A, B y C constantes reales, definidas en
$I = \{x \in R/2e^x + Ax^2 + Bx + C > 0\}$.

Dos casos particulares de lo anterior son las soluciones $y = \sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$, $y = -\sqrt{2}\, e^{\frac{x}{2}}$, obtenidas haciendo $A = B = C = 0$, y definidas en $I = R$.

3º) Existen dos soluciones, que son

$y = -\sqrt{2x^2 + 1}$, definida en $I = R$,

$y = -\sqrt{1 - 4x^2}$, definida en $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Es fácil comprobar (hay que hacerlo) que ninguna de las dos soluciones es creciente en todo el intervalo I.

4º) Es un caso particular de la demostración que viene en el libro (páginas 384-386).

Distintos alumnos han desarrollado demostraciones alternativas, que en varios casos han sido correctas.

Como siempre, cualquier procedimiento correcto utiliza en el fondo las mismas claves.