Álgebra Lineal II, Grado en Matemáticas

Prueba de Evaluación Continua, curso 2011/12

Ejercicio 1:
En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ se considera el siguiente subespacio vectorial

$$U \equiv (x_1 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0)$$

(a) Halle una base ortogonal de U.
(b) Encuentre la proyección sobre U de los vectores $v \in \mathbb{R}^4$ que forman un ángulo de 60^o con $e_1 = (1,0,0,0)$ y de 90^o con $e_3 = (0,0,1,0)$.

Solución:
(a) En este caso por la forma tan sencilla de las ecuaciones de U podemos obtener una base ortogonal de forma directa

$$B = \{u_1 = (1,0,0,-1),\ u_2 = (0,1,-1,0)$$

Si las ecuaciones no hubiesen sido tan sencillas, tomaríamos una base cualquiera de U, $\{v_1, v_2\}$, y le aplicaríamos el método de Gram-Schmidt.

(b) Sea $v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ un vector cualquiera de $\mathbb{R}^4$. Si el ángulo entre v y e_3 es de 90^o, entonces

$$\cos 90^o = \frac{< v, e_3 >}{||v|| \cdot ||e_3||} = \frac{x_3}{||v||} = 0 \iff x_3 = 0$$

Así, $v = (x_1, x_2, 0, x_4)$. Ahora consideramos que el ángulo entre v y e_1 es de 60^o, entonces

$$\begin{aligned}
\cos 60^o &= \frac{< v, e_1 >}{||v|| \cdot ||e_1||} = \frac{x_1}{||v||} = \frac{1}{2}\ , \\
x_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\ , && (*) \\
3x_1^2 &= x_2^2 + x_3^2\ , \\
x_1 &= \sqrt{\frac{x_2^2 + x_3^2}{3}}\ .
\end{aligned}$$

Obsérvese que en el último paso nos hemos quedado sólo con la raíz positiva, lo que se deduce de (*). Así, los vectores v que cumplen las condiciones pedidas son de la forma

$$v = (\sqrt{\frac{x_2^2 + x_3^2}{3}},\ x_2,\ 0,\ x_4).$$

La forma más rápida de calcular la proyección sobre U, conocida la base ortogonal $\{u_1,\ u_2\}$, es mediante los coeficientes de Fourier (Proposición pág. 117).

$$\begin{aligned}
proy_U(v) &= \frac{< v, u_1 >}{||u_1||^2}\ u_1 + \frac{< v, u_2 >}{||u_2||^2}\ u_2 \\
&= \frac{\sqrt{\frac{x_2^2+x_3^2}{3}} - x_4}{2}\ u_1 + \frac{x_2}{2}\ u_2 \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{\frac{x_2^2 + x_3^2}{3}} - x_4,\ x_2,\ \ -x_2,\ -\sqrt{\frac{x_2^2 + x_3^2}{3}} + x_4)
\end{aligned}$$

Ejercicio 2:
Sean f y g dos endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión n, tales que $f \circ g = g \circ f$ (conmutan). Demuestre que los subespacios propios generalizados de f son invariantes por g, y viceversa, los subespacios propios generalizados de g son invariantes por f. (Nota: un subespacio vectorial $U \subset V$ es invariante por un endomorfismo f si para todo $u \in U$ se cumple que $f(u) \in U$).

Solución:
Por supuesto, basta demostrar que los subespacios propios generalizados de f son invariantes por g. Sea λ un autovalor de f y $E^i(\lambda) = Ker(f - \lambda id)^i$ los subespacios propios generalizados asociados a dicho autovalor. Tenemos que demostrar que cada $E^i(\lambda)$ es invariante por g:

$$u \in E^i(\lambda) \quad \Rightarrow \quad g(u) \in E^i(\lambda),$$

es decir

$$(f - \lambda id)^i(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad (f - \lambda id)^i(g(u)) = 0.$$

Sea $u \in E^i(\lambda)$, entonces

$$g \circ (f - \lambda id)^i(u) = g((f - \lambda id)^i(u)) = g(0) = 0. \tag{1}$$

Vamos a demostrar que

$$g \circ (f - \lambda id)^i = (f - \lambda id)^i \circ g \tag{2}$$

y así podremos deducir que

$$(f - \lambda id)^i \circ g(u) \overset{(2)}{=} g \circ (f - \lambda id)^i(u) \overset{(1)}{=} 0$$

como queríamos.

Entonces, vamos a demostrar (2)

$$\begin{aligned}
g \circ (f - \lambda id)^i &= g \circ (f - \lambda id) \circ (f - \lambda id)^{i-1} \\
&= (g \circ f - \lambda g) \circ (f - \lambda id)^{i-1} \\
&= (f \circ g - \lambda g) \circ (f - \lambda id)^{i-1} \qquad (f \text{ y } g \text{ conmutan}) \\
&= (f - \lambda id) \circ g \circ (f - \lambda id)^{i-1} \\
& \text{...procediendo de modo análogo} \\
&= (f - \lambda id)^2 \circ g \circ (f - \lambda id)^{i-2} \\
... &= (f - \lambda id)^i \circ g.
\end{aligned}$$