Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2014, 2ª semana.

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)
(a) Producto escalar.
(b) Autovalor o valor propio.
(c) Ley de Inercia de Sylvester.
(d) Subespacio propio generalizado.

Ejercicio 1: (2 puntos)
Sean $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo, U un subespacio vectorial de V y $\{u_1, ..., u_r\}$ una base ortogonal de U. Demuestre que para todo $v \in V$ se cumple:

$$p_U(v) = \frac{< v, u_1 >}{||u_1||^2}\ u_1 + ... + \frac{< v, u_r >}{||u_r||^2}\ u_r\ .$$

Ejercicio 2: (3 puntos)
Dado el endomorfismo f de un espacio vectorial real de dimensión 4 cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre la forma canónica de Jordan J de f. El polinomio característico de f es $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$.
b) Sea B una base tal que $M_B(f) = J$. Determine los subespacios invariantes de f respecto de dicha base.

Ejercicio 3: (3 puntos)
a) Clasifique la familia de formas cuadráticas $\Phi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\Phi_a(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2xz + 4yz + (2 + a)z^2.$$

b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, determine un plano vectorial U_a tal que la restricción de Φ_a a dicho plano sea una forma cuadrática definida positiva.
c) Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la forma polar asociada a Φ_a define un producto escalar.

Soluciones

Definiciones:

Producto escalar Sea V un espacio vectorial real, un producto escalar es una aplicación $<,>: V \times V \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

(1) $< u, v >=< v, u >$,

(2) $< u + v, w >=< u, w > + < v, w >$,

(3) $< au, v >= a < u, v >$,

(4) $< u, u >\geq 0$ y $< u, u >= 0$ si y sólo si $u = 0$.

Autovalor o valor propio Dados $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y f un endomorfismo de V, se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un autovalor si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda v$.

Ley de inercia de Sylvester Dado un espacio vectorial real V y una forma cuadrática $\Phi : V \to \mathbb{R}$, si D_1 y D_2 son dos matrices diagonales de Φ, entonces tienen el mismo número de elementos positivos y negativos.

Subespacio propio generalizado Dados un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V , f un endomorfismo de V y λ un autovalor de f, se definen los subespecies propios generalizados asociados a λ como los subespecies determinados por los núcleos de los endomorfismos $(f - \lambda I)^i$, $i = 1, 2, ...$, siendo I el endomorfismo identidad. Se denotan por $E^i(\lambda) = \ker(f - \lambda I)^i$.

Ejercicio 1: Proposición página 117

Ejercicio 2: Dado el endomorfismo f de un espacio vectorial real de dimensión 4 cuya matriz es

$$\begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre la forma canónica de Jordan J de f. El polinomio característico de f es $p(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^2$.
b) Sea B una base tal que $M_B(f) = J$. Determine los subespacios invariantes de f respecto de dicha base.

Solución: Extrayendo las raíces del polinomio característico, encontramos los autovalores y sus multiplicidades algebraicas:

$$\lambda_0 = 0, \qquad \alpha_0 = 2, \tag{1}$$
$$\lambda_1 = 1, \qquad \alpha_1 = 2. \tag{2}$$

Para determinar la matriz de Jordan calculamos las multiplicidad geométricas

$$d_0 = \dim \ker(f) = 4 - rg(A) = 4 - 3 = 1, \tag{3}$$
$$d_1 = \dim \ker(f - I) = 4 - rg(A - I) = 4 - 3 = 1. \tag{4}$$

La dimensión geométrica determina el número de bloques de Jordan asociados a cada autovalor, por lo que tendremos un solo bloque de orden dos asociado a cada autovalor. Así, la matriz de Jordan resulta:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base respecto a la cual $M_B(f) = J$. Los subespacios invariantes son:

- Rectas invariantes: las contenidas en $E^1(0) = \ker(f)$ y $E^1(1) = \ker(f - I)$

$$\begin{aligned} R_1 &= L(v_1) \text{ de ecuaciones } x_2 = x_3 = x_4 = 0, \text{ y} \\ R_2 &= L(v_3) \text{ de ecuaciones } x_1 = x_2 = x_4 = 0. \end{aligned}$$

- Planos invariantes irreducibles: estarán contenidos en los subespacios máximos $M(0) = E^2(0)$ y $M(1) = E^2(1)$. Así tenemos los dos planos:

$$\begin{aligned} P_1 &= M(0) = L(v_1, v_2) \text{ de ecuaciones } x_3 = x_4 = 0, \text{ y} \\ P_2 &= M(1) = L(v_3, v_4) \text{ de ecuaciones } x_1 = x_2 = 0. \end{aligned}$$

- Planos invariantes reducibles: son suma de dos rectas invariantes, por lo que sólo hay uno

$$P_3 = R_1 + R_2 = L(v_1, v_3) \text{ de ecuaciones } x_2 = x_4 = 0.$$

- Hiperplanos invariantes: recordamos que el número de hiperplanos invariantes es igual al número de rectas invariantes, por lo que habrá exactamente 2. Irreducibles no puede haber, porque tendrían que estar contenidos en los subespacios máximos y estos son de dimensión 2, luego los dos son reducibles, es decir, suma de un plano y una recta invariantes.

Vamos a calcularlos por dos métodos:

1. Como sabemos que son sólo 2, y podemos construirlos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} H_1 &= P_1 + R_2 \quad \text{de ecuaciones} \quad x_4 = 0, \\ H_2 &= P_2 + R_1 \quad \text{de ecuaciones} \quad x_2 = 0; \end{aligned}$$

   habríamos acabado.

2. Calculamos los autovectores de J^t que son de la forma:

   - para el autovalor 0: $(0, a, 0, 0)_B \in L(v_2)$ de donde se obtienen las ecuaciones del hiperplano

$$0x_1 + ax_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \;\Rightarrow\; x_2 = 0.$$

   - para el autovalor 1: $(0, 0, 0, b)_B \in L(v_4)$ de donde se obtienen las ecuaciones del hiperplano

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + bx_4 = 0 \;\Rightarrow\; x_4 = 0.$$

Ejercicio 3: a) Clasifique la familia de formas cuadráticas $\Phi_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

$$\Phi_a(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xy + 2xz + 4yz + (2 + a)z^2.$$

b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, determine un plano vectorial U_a tal que la restricción de Φ_a a dicho plano sea una forma cuadrática definida positiva.
c) Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la forma polar asociada a Φ_a define un producto escalar.

Solución: La matriz de la forma cuadrática en la base canónica B es

$$M_B(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a+2 \end{pmatrix}$$

a) Si hacemos la diagonalización por congruencia, obtenemos la siguiente matriz diagonal

$$M_{B'}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ donde } B' = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, -1, 1)\}$$

Por tanto la signatura de Φ será:

1. $sg(\Phi) = (3, 0)$ si $a > 0 \;\Rightarrow\;$ Φ es definida positiva.
2. $sg(\Phi) = (2, 0)$ si $a = 0 \;\Rightarrow\;$ Φ es semidefinida positiva.
3. $sg(\Phi) = (2, 1)$ si $a < 0 \;\Rightarrow\;$ Φ es indefinida.

b) A la vista de la signatura de Φ vemos que en toda base de vectores conjugados existen dos, u y v , tales que $\Phi(u) > 0$ y $\Phi(v) > 0$. En particular podemos tomar los dos primeros vectores de la base B': $u = (1, 0, 0)$ y $v = (-1, 1, 0)$. El plano $P = L(u, v)$ cumple los requisitos pedidos: $\Phi_{|P}$ tiene signatura $(2, 0)$, es decir, es definida positiva.

c) La forma polar f_p asociada a Φ define un producto escalar si y solamente si la forma cuadrática es definida positiva, es decir siempre que $a > 0$.