1. $\displaystyle\int_{z=0}^{2}\int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{2} 2^{x+y+z}\,dx.dy.dz = \int_0^2\int_0^2\int_0^2 2^x.2^y.2^z\,dx.dy.dz = I^3,$

, siendo $\displaystyle I = \int_0^2 2^x\,dx = \frac{1}{\ln 2}\cdot\left[2^x\right]_0^2 = \frac{1}{\ln 2}\left(2^2-2^0\right) = \frac{3}{\ln 2}$

Con lo que la integral pedida resulta:

$$I^3 = \boxed{\frac{27}{(\ln 2)^3}}$$

2. Un campo vectorial (V_x, V_y, V_z) es un campo gradiente si es el gradiente de una función escalar $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Según el enunciado se tiene:

$$V_x = x = \frac{\partial f}{\partial x} \qquad V_y = -y = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad V_z = 0 = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Según el teorema de las derivadas parciales cruzadas, si f es de Clase 2 sus derivadas parciales cruzadas son iguales. Este es el caso de nuestra función f:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0$$

~~Por lo tant~~

Y de hecho es fácil calcular f:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + C$$, siendo C una constante.

Por lo tanto se tiene que $V(x,y,z)$ es un campo gradiente

3. Llamemos $g(x,y) = x^2+y^2$. Entonces f está sujeta a la superficie de nivel $g(x,y)=2$.

Tanto f como g son de Clase 1, luego a priori podemos aplicar el Teorema de los multiplicadores de Lagrange, según el cual, si $f|_{g(x,y)=2}$ tiene ~~max~~ extremos locales en (x,y), entonces: $\nabla f(x,y) = \lambda . \nabla g(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, si $\nabla g(x,y) \neq 0$.

$$\left.\begin{array}{c} \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \\ g(x,y)=2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} m(x-y)^{m-1} = 2\lambda x \\ -m(x-y)^{m-1} = 2\lambda y \\ x^2+y^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda = \frac{m(x-y)^{m-1}}{2x} \\ x = \pm 1 \, , \, y = \mp 1 \end{array}$$

Es decir, tenemos los puntos críticos:

$(1,-1) \quad \lambda = \frac{1}{2} m . 2^{m-1}$

$(-1,1) \quad \lambda = -\frac{1}{2} . m . (-2)^{m-1}$

Veamos qué tipo de puntos extremos tenemos:

$\boxed{(1,-1)} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = 2x = 2 \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y = -2$

Sea $h = f - \lambda g = (x-y)^m - \frac{1}{2} m 2^{m-1} . (x^2+y^2)$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = m(x-y)^{m-1} - \frac{1}{2} m 2^{m-1} . 2 . x = m(x-y)^{m-1} - m . 2^{m-1} . x$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -m(m-1)(x-y)^{m-2} = -m(m-1) . 2^{m-2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = m(m-1)(x-y)^{m-2} - m . 2^{m-1} = \frac{1}{2} . m(m-3) 2^{m-1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -m(x-y)^{m-1} - m . 2^{m-1} . y$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{1}{2} m(m-3) . 2^{m-1}$$

La matriz orlada resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & \frac{1}{2} m(m-3) 2^{m-1} & -m(m-1) . 2^{m-2} \\ 2 & -m(m-1) . 2^{m-2} & \frac{1}{2} m(m-3) . 2^{m-1} \end{vmatrix} = 4m(m-1) 2^{m-1} - 4m(m-3) 2^{m-1} =$$

$$= 8 . m . 2^{m-1} > 0 \quad \forall m \geq 1$$

, luego corresponde a un ~~Mínimo local~~ Máximo local

Para este punto crítico, $f(x,y) = f(1,-1) = 2^m$

$\boxed{(-1,1)}$ $\quad h = f - \lambda g = (x-y)^m + \frac{1}{2} m (-2)^{m-1} \cdot (x^2+y^2)$

$\frac{\partial h}{\partial x} = m(x-y)^{m-1} + m(-2^{m-1})x \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = -m.(m-1).(-2)^{m-2}$

$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = m.(m-1)(-2)^{m-2} + m(-2)^{m-1} = -\frac{1}{2} m(m-3)(-2)^{m-1}$

$\frac{\partial h}{\partial y} = -m(x-y)^{m-1} + m(-2)^{m-1} \cdot y$

$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = m(m-1)(x-y)^{m-2} + m(-2)^{m-1} = -\frac{1}{2} m(m-3)(-2)^{m-1}$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x = -2 \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 2y = 2$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -\frac{1}{2} m(m-3)(-2)^{m-1} & -m(m-1)(-2)^{m-2} \\ -2 & -m(m-1)(-2)^{m-2} & -\frac{1}{2} m(m-3)(-2)^{m-1} \end{vmatrix} =$$

$$= 8m(m-1)(-2)^{m-2} + 4m(m-3)(-2)^{m-1} = 4m(-2)^m$$

$\boxed{m \text{ par}}$ Es $(-1,1)$ un Máximo local

Si $\boxed{m \text{ impar}}$ Es Mínimo local

$f(-1,1) = (-2)^m$