Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Prueba de Evaluación Continua 2018

Ejercicio 1: (4 puntos)
Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión 4 cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Demuestre que los subespacios $U = L(v_1, v_2)$ y $W = L(v_3, v_4)$ son f-invariantes.

(b) Sea $f|_U : U \to U$ la aplicación restricción de f a U. Determine la matriz de $f|_U$ respecto de la base $\mathcal{B}_U = \{v_1, v_2\}$ de U, la forma canónica de Jordan de $f|_U$ y la correspondiente base de Jordan.

(c) Sin hacer más cálculos, y teniendo en cuenta la estructura diagonal por bloques de la matriz de f, dé una base $\mathcal{B}'$ de V respecto de la cual $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan de f. (1,25 puntos)

(c′) Responda a este apartado sólo si no ha sabido responder (c). Obtenga la forma canónica de Jordan de f y la base de Jordan realizando los cálculos que considere necesarios. (1,25 puntos)

Solución: **(a)** $U = L(v_1, v_2)$ es $f-$invariante si y sólo si $f(v_1), f(v_2) \in U$
De la primera y segunda columna de la matriz de f se obtienen las coordenadas en $\mathcal{B}$ de las imágenes $f(v_1)$ y $f(v_2)$:

$$f(v_1) = (2, -1, 0, 0)_{\mathcal{B}} = 2v_1 - v_2 \in U, \;\; f(v_2) = (1, 0, 0, 0)_{\mathcal{B}} = v_1 \in U$$

luego U es $f-$invariante. Del mismo modo se prueba que $W = L(v_3, v_4)$ es $f-$invariante pues

$$f(v_3) = 2v_3 - v_4 \in W \quad \text{y} \quad f(v_4) = v_3 \in W$$

(b) La matriz de $f|_U : U \to U$ respecto de la base $\mathcal{B}_U = \{v_1, v_2\}$ de U es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y su polinomio característico

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

Tiene un único autovalor: 1 con multiplicidad algebraica $a = 2$. Estudiamos los subespacios generalizados:

$$\dim V_1 = 2 - \operatorname{rg}(A - I_2) = 2 - \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \;\Rightarrow\; g = 1$$

La multiplicidad geométrica es $g = 1$, y en particular habrá un único bloque de Jordan asociado al autovalor 1, luego la forma canónica de Jordan de $f|_U$ es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

además, el subespacio generalizado segundo será el subespacio máximo $M(1) = K^2(1) = U$ pues $K^(1) \subsetneq K^2(1) \subseteq U$.
Para calcular una base de Jordan $\mathcal{B}'_U = \{u_1, u_2\}$ de $f|_U$ consideramos la tabla de subespacios generalizados y determinamos sus ecuaciones

dimensiones:	1		2
subespacios:	$K^1(1)$	$\subset$	$K^2(1) = M(1)$
	u_2	$\leftarrow$	u_1

$u_1 \in K^2(1) - K^1(1), u_2 = (f|_U - \mathrm{Id})(u_1)$

$$\begin{aligned} V_1 = K^1(1) &= \mathrm{Ker}(f|_U - \mathrm{Id}) \equiv \{(A - I_2)X = 0\} \equiv \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \equiv \{x_1 + x_2 = 0\} \\ K^2(1) &= \mathrm{Ker}(f|_U - \mathrm{Id})^2 \equiv \{(A - I_2)^2 X = 0\} \equiv \{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \equiv U \end{aligned}$$

Tomamos $u_1 = v_1 \in K^2(1) - K^1(1)$ y por tanto $u_2 = (f|_U - \mathrm{Id})(u_1) = v_1 - v_2$. La base de Jordan pedida es

$$\mathcal{B}'_U = \{u_1 = v_1,\ u_2 = v_1 - v_2\}$$

y se cumple $J = PAP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz del cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'_U\,\mathcal{B}_U}$

(c) Método 1: La estructura diagonal bloques de la matriz de f en la base $\mathcal{B}$ es

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

permite deducir de forma directa forma canónica de Jordan de f pues

$$\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & P^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} PAP^{-1} & 0 \\ \hline 0 & PAP^{-1} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J & 0 \\ \hline 0 & J \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = J(f)$$

La base $\mathcal{B}'$ tal que $J(f) = M_{\mathcal{B}'}(f)$ viene dada por la matriz de paso $\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & P \end{array}\right)$ que indica que una base de Jordan para f es $\mathcal{B}' = \{v_1,\ v_1 - v_2,\ v_3,\ v_3 - v_4\}$. Así habríamos terminado este apartado y el ejercicio.

Método 2: Otro modo de razonar es observando que dado que la matriz de $f|_W$ en la base $\mathcal{B}_W = \{v_3, v_4\}$ es la misma que la de $f|_U$, procediendo de la misma forma se tiene que respecto de la base $\mathcal{B}'_W = \{v_3, v_3 - v_4\}$ la matriz de $f|_W$ es su forma canónica de Jordan (igual a la de $f|_U$)
$J = PAP^{-1}$ donde $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es la matriz del cambio de base $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'_W\,\mathcal{B}_W}$
Uniendo las bases de los dos subespacios $f-$invariantes que cumplen $V = U \oplus W$ se obtiene la base $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_U \cup \mathcal{B}'_W$ y

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = J(f)$$

(c') Este apartado estaba pensado para que no se hiciera.

Si llamamos $B = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f)$ a la matriz dada inicialmente

$$B = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$$

El polinomio cracterístico de B es

$$\det(B - \lambda I_4) = \det(A - \lambda I_2)^2 = (\lambda - 1)^4$$

por lo que se tiene un único autovalor: 1 con multiplicidad algebraica $a = 4$. Estudiamos los subespacios generalizados hasta dereminar el subespacio máximo que será el que tenga dimensión 4. El subespacio propio

$$\dim V_1 = 2 - \mathrm{rg}(B - I_4) = 4 - 2 = 2 \;\Rightarrow\; g = 2$$

La multiplicidad geométrica es $g = 2$ luego habrá dos bloques de Jordan asociados al autovalor 1. Vamos con el subespacio generalizado segundo

$$\dim K^2(1) = 4 - \mathrm{rg}(B - I_4)^2 = 4 - \mathrm{rg}(0) = 4 - 0 = 4 \;\Rightarrow\; M(1) = K^2(1) = V$$

La tabla de la base de Jordan $\mathcal{B}' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es

$$\boxed{\begin{array}{lccc} \text{dimensiones:} & 2 & & 4 \\ \text{subespacios:} & K^1(1) & \subset & K^2(1) = M(1) \\ & u_2 & \leftarrow & u_1 \\ & u_4 & \leftarrow & u_3 \end{array}} \;\Rightarrow\; \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = J(f)$$

donde $u_1, u_3 \in K^2(1) - K^1(1)$, $u_2 = (f - \mathrm{Id})(u_1)$, $u_4 = (f - \mathrm{Id})(u_3)$ y u_1, u_3 se escogen de modo que determinen un suplementario de $K^1(1)$ en $K^2(1)$. Es decir:

$$K^2(1) = K^1(1) \oplus L(u_1, u_3)$$

Buscamos una base de $K^1(1) = V_1$ determinado por las ecuaciones $(B - I_4)X = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; K^1(1) \equiv \{x_1 + x_2 = 0,\; x_3 + x_4 = 0\}$$

Una base de $K^1(1)$ es $\{v_1 - v_2,\, v_3 - v_4\}$, ampliamos esta base a una base de $K^2(1) = V$ con dos vectores u_1 y u_3, para garantizar la condición en rojo. Nos sirven $u_1 = v_1$ y $u_3 = v_3$. Ahora sólo falta calcular los dos vectores restantes:

$$u_2 = (f - \mathrm{Id})(u_1) = v_1 - v_2,\;\; u_4 = (f - \mathrm{Id})(u_3) = v_3 - v_4$$

Podemos comprobar que los cálculos con correctos haciendo el producto matricial $PB = J(f)P$, con $P = \mathfrak{M}_{\mathcal{B}'\,\mathcal{B}}$ la matriz de cambio de coorenadas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que se simplifica haciendo el producto por bloques.

Ejercicio 2: (1,5 puntos)
Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

halle su polinomio mínimo anulador y utilícelo para determinar (sin calcular las potencias de A) si se cumple la siguiente ecuación: $A^4 - 6A^3 + 9A^2 = 0$.

Solución: Como se trata de una matriz con los autovalores en la diagonal obtenemos directamente que el polinomio característico es $p_A(t) = -t^3(3-t)$ y el polinomio mínimo es exactamente el mismo

$$m_A(t) = t^3(t-3)$$

Esto es debido a que la multiplicidad de cada raíz en este caso 0 y 3 la marca el tamaño del bloque de Jordan mayor correspondiente a cada autovalor. En este caso hay un bloque 3×3 asociado al autovalor 0, y un bloque 1×1 asociado al autovalor 3.
La ecuación $A^4 - 6A^3 + 9A^2 = 0$ implica que $q(t) = t^4 - 6t^3 + 9t^2$ es un polinomio anulador de A, para lo cual es necesario que sea múltiplo del polinomio mínimo. Factorizamos $q(t)$:

$$q(t) = t^2(t^2 - 6t + 9) = t^2(t-3)^2$$

y vemos que no es múltiplo del polinomio mínimo, luego $q(t)$ no es un polinomio anulador de A, es decir la ecuación $A^4 - 6A^3 + 9A^2 = 0$ no se cumple.

Ejercicio 3: (3 puntos)
Dada la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión analítica es:

$$\Phi(x, y, z) = 4xy + 2xz - 2yz - z^2$$

(a) Obtenga una base de $\mathbb{R}^3$ de vectores conjugados respecto de Φ y determine su signatura. (2 puntos)

(b) Determine todos los vectores isótropos (o autoconjungados) contenidos en el subespacio $U = \{(\lambda + \mu,\ \lambda, \mu) :\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. (1 punto)

Solución:

(a) La matriz de Φ en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Escogemos el método de diagonalización por congruencia para determinar la base de vectores conjugados y la signatura (se puede hacer por cualquier otro método)

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_1 \leftrightarrow f_3,\ c_1 \leftrightarrow c_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[c_2 \to c_2 - c_1,\ c_3 \to c_3 + c_1]{f_2 \to f_2 - f_1,\ f_3 \to f_3 + f_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_3 \to f_3 - f_2,\ c_3 \to c_3 + c_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) = (D|P^t)$$

En las filas de P^t están las coordenadas del una base de vectores conjugados, y los elementos de la diagonal de D indican la signatura $(1,1)$.

(b) Los vectores isótropos contenidos en U son aquellos vectores de la forma $(\lambda+\mu,\,\lambda,\mu)$ tales que $\Phi(\lambda+\mu,\,\lambda,\mu)=0$. Sustituyendo en la ecuación de Φ se tiene

$$\Phi(\lambda+\mu,\,\lambda,\mu)=4(\lambda+\mu)\lambda+2(\lambda+\mu)\mu-2\lambda\mu-\mu^2=\cdots=(2\lambda+\mu)^2=0\;\Leftrightarrow\;\mu=-2\lambda$$

Luego los vectores isótropos de U son los de la forma $(-\lambda,\,\lambda,-2\lambda)=\lambda(-1,1,-2)$ con $\lambda\in\mathbb{R}$. Es decir, la recta generada por el vector $(-1,1,-2)$.

Ejercicio 4: (1,5 puntos)
Sean $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ y $<,>\colon\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})\times\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ el producto escalar definido por $<X,Y>=\operatorname{tr}(XAY^t)$ con $X,Y\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Determine una base del subespacio ortogonal del plano generado por las matrices

$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\text{ y }C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Solución: Si $P=L(B,C)$ el subespacio ortogonal es

$$\begin{aligned}P^\perp=&\;\{X\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}):<X,B>=<X,C>=0\}=\{X\in\mathfrak{M}_2(\mathbb{R}):\ \operatorname{tr}(XAB^t)=\operatorname{tr}(XAC^t)=0\}\\=&\;\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}:\ \operatorname{tr}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=0,\ \operatorname{tr}\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=0\right\}\\=&\;\left\{\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}:\ x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\ x_1+2x_2+x_3+x_4=0\right\}\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones implícitas de $P^\perp$ encontramos las ecuaciones paramétricas:

$$x_1=-\lambda-3\mu,\ x_2=\mu,\ x_3=\lambda,\ x_4=\mu\quad\text{con}\quad\lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

O lo que es lo mismo:

$$P^\perp=\left\{\begin{pmatrix}-\lambda-3\mu&\mu\\\lambda&\mu\end{pmatrix}:\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$$

dando valores a los parámetros encontramos dos matrices que determinan una base de $P^\perp$:

$$\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}\text{ y }\begin{pmatrix}-3&1\\0&1\end{pmatrix}$$