Cálculo de Probabilidades II — Febrero 2019 — Primera semana

Cuestión (2 puntos). Dar la definición de independencia de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Enunciar una caracterización de independencia de estas variables aleatorias en términos de funciones características.

Ejercicio 1 (4 puntos). Dados $n \geq 1$ y $\lambda > 0$, se dice que la variable aleatoria X tiene distribución exponencial $\exp(\lambda)$ cuando su función de densidad es $\lambda e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$; y distribución gamma $\gamma(n, \lambda)$ cuando su función de densidad es $\lambda^n e^{-\lambda x} x^{n-1}/(n-1)!$ para $x \geq 0$. Sean $\{X_i\}_{i\geq 1}$ variables aleatorias independientes con distribución $\exp(\lambda)$.

(a) Demostrar por inducción que, para todo $n \geq 1$, la variable $X_1 + \ldots + X_n$ tiene distribución $\gamma(n, \lambda)$.

(b) Sea N una variable aleatoria independiente de $\{X_i\}_{i\geq 1}$ y con distribución geométrica de parámetro p, con $0 < p < 1$, es decir,

$$P\{N = n\} = (1-p)^{n-1} p \quad \text{para } n = 1, 2, \ldots$$

Probar que $Y = X_1 + \ldots + X_N$ tiene distribución $\exp(\lambda p)$.

Ejercicio 2 (4 puntos). El número de personas N que acuden a lo largo de un día a una horchatería tiene distribución geométrica de parámetro p. La cantidad de horchata (en litros) que compra un cliente genérico tiene distribución $\exp(\lambda)$. Al principio del día, el dueño de la horchatería tiene en su cámara frigorífica un volumen $C > 0$ de horchata. Las variables aleatorias $\{X_i\}_{i\geq 1}$ y N son independientes.

(a) Calcular el valor esperado $E[Z]$ de la cantidad de horchata Z que se vende a lo largo de un día.

(b) El dueño del negocio tiene los siguientes gastos e ingresos:

- compra la horchata a un mayorista al precio de β € por litro;
- la horchata que sobra al final del día es retirada por un gestor de residuos, que cobra al dueño una cantidad de δ €/ℓ;
- el dueño vende la horchata a sus clientes a un precio de α €/ℓ.

Determinar el beneficio esperado del dueño del negocio a lo largo de un día y probar que el valor de C que maximiza este beneficio es

$$C^* = \frac{1}{\lambda p} \cdot \log \frac{\alpha + \delta}{\beta + \delta}.$$

Solución

Ejercicio 1. (a). El resultado es obvio para $n = 1$. Supongamos que es cierto para un $n \geq 1$. Se considera el vector aleatorio

$$(Y, Z) = (X_1 + \ldots + X_n, X_{n+1}),$$

cuya función de densidad es, por la hipótesis de inducción,

$$f(y, z) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda(y+z)} \quad \text{para } y \geq 0 \text{ y } z \geq 0.$$

La transformación $U = Y + Z$, $V = Z$ tiene como transformación inversa $Y = U - V$, $Z = V$. Por tanto, la función de densidad de (U, V) es

$$g(u, v) = \frac{\lambda^n}{(n-1)!}(u - v)^{n-1} e^{-\lambda u} \quad \text{para } 0 \leq v \leq u.$$

La función de densidad marginal de U en el punto $u \geq 0$ es

$$\int_0^u \frac{\lambda^n}{(n-1)!}(u-v)^{n-1} e^{-\lambda u} dv = \frac{\lambda^{n+1}}{n!} e^{-\lambda u} u^n,$$

lo que prueba que $U = X_1 + \ldots + X_{n+1}$ tiene efectivamente distribución $\gamma(n + 1, \lambda)$.
(b) Dado $y \geq 0$ se tiene, para $n \geq 1$,

$$P\{Y \leq y | N = n\} = P\{X_1 + \ldots + X_n \leq y\} = \int_0^y \frac{\lambda^n}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} dx$$

puesto que $X_1 + \ldots + X_n$ tiene distribución $\gamma(n, \lambda)$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
P\{Y \leq y\} &= \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} p P\{Y \leq y | N = n\} \\
&= \lambda p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \int_0^y \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} x^{n-1} dx \\
&= \lambda p \int_0^y e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda x(1-p))^{n-1}}{(n-1)!} \, dx \\
&= \lambda p \int_0^y e^{-\lambda p x} dx = 1 - e^{-\lambda p y}.
\end{aligned}$$

Esta función de distribución es precisamente la de una variable aleatoria $\exp(\lambda p)$.

Ejercicio 2. (a). La variable aleatoria Y definida en el Ejercicio 1 es la demanda total de horchata a lo largo de un día. Si $Y \leq C$ entonces la cantidad de horchata vendida es Y, mientras que si $Y > C$ entonces la cantidad vendida es C. Por tanto,

$$Z = Y \cdot \mathbf{I}_{\{Y \leq C\}} + C \cdot \mathbf{I}_{\{Y > C\}},$$

luego

$$E[Z] = E[Y \cdot \mathbf{I}_{\{Y \leq C\}}] + C \cdot P\{Y > C\}.$$

Por un lado se tiene $P\{Y > C\} = e^{-\lambda pC}$ y, por otra parte,

$$E[Y \cdot \mathbf{I}_{\{Y \leq C\}}] = \int_0^C y \cdot \lambda p e^{-\lambda p y} dy.$$

El valor de esta integral es

$$\int_0^C y \cdot \lambda p e^{-\lambda p y} dy = \frac{1}{\lambda p} \int_0^{\lambda p C} u e^{-u} du = \frac{1}{\lambda p}\Big(1 - (1 + \lambda p C) e^{-\lambda p C}\Big).$$

Operando se llega a

$$E[Z] = \frac{1}{\lambda p}\Big(1 - e^{-\lambda p C}\Big).$$

(b). Los costes e ingresos del dueño del negocio son:

- un gasto de βC por comprar la horchata;
- un gasto de $\delta(C - Z)$ por la retirada de la horchata sobrante;
- un ingreso de αZ por la horchata vendida.

El beneficio es $(\alpha + \delta)Z - (\beta + \delta)C$, luego el beneficio esperado es

$$\frac{\alpha + \delta}{\lambda p}\Big(1 - e^{-\lambda p C}\Big) - (\beta + \delta)C.$$

Derivando esta expresión con respecto a C e igualando a cero resulta que el máximo beneficio se alcanza en

$$C^* = \frac{1}{\lambda p} \cdot \log \frac{\alpha + \delta}{\beta + \delta}.$$

Cálculo de Probabilidades II — Febrero 2019 — Segunda semana

Cuestión (2 puntos). Definir la matriz de covarianzas $\mathbf{\Sigma}$ de un vector aleatorio (X, Y). Enunciar sus principales propiedades. Establecer una condición necesaria y suficiente para que sea $\det(\mathbf{\Sigma}) = 0$.

Ejercicio 1 (4 puntos). Las variables aleatorias $\{Z_i\}_{i\geq 1}$ son independientes y con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Se definen las variables aleatorias

$$X_n = \min_{1\leq i\leq n} Z_i, \quad Y_n = \max_{1\leq i\leq n} Z_i \quad \text{y} \quad R_n = Y_n - X_n,$$

que son, respectivamente, el mínimo, el máximo y el rango de la muestra de tamaño n.

(a) Determinar la función de distribución de R_n. Se sugiere hallar, en primer lugar, la función de densidad conjunta de (X_n, Y_n).

(b) Demostrar que la sucesión $n(1 - R_n)$ converge en distribución a una ley $\gamma(2, 1)$, con función de densidad $f(z) = ze^{-z}$ para $z \geq 0$.

Ejercicio 2 (4 puntos). Se escoge un punto P al azar y de manera uniforme en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Sea R la longitud del segmento OP (el segmento que forma el punto P con el origen), y sea Θ el ángulo que forma OP con el eje de las abscisas.

(a) Calcular la función de densidad conjunta de (R, Θ).

(b) Hallar, para cada $0 \leq \theta \leq \pi/2$, la esperanza condicionada $E[R|\Theta = \theta]$.

Solución

Cuestión. La matriz de covarianzas de un vector aleatorio (X, Y) es

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) & \mathrm{Var}(Y) \end{pmatrix}.$$

Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E\Big[\big(a(X-\mu_X) + b(Y-\mu_Y)\big)^2\Big],$$

siendo μ_X y μ_Y las medias de X e Y, respectivamente. Así, la matriz $\mathbf{\Sigma}$ es simétrica y semi-definida positiva.

La condición necesaria y suficiente para que sea $\det(\mathbf{\Sigma}) = 0$ es que existan $(a, b) \neq \mathbf{0}$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que $aX + bY = c$ con probabilidad uno. En efecto, si $\det(\mathbf{\Sigma}) = 0$ entonces existe $(a, b) \neq \mathbf{0}$ tal que $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$, luego debe ser $a(X - \mu_X) + b(Y - \mu_Y) = 0$ casi seguramente. Recíprocamente, si $aX + bY = c$ con probabilidad uno, debe ser $c = a\mu_X + b\mu_Y$, luego $a(X - \mu_X) + b(Y - \mu_Y) = 0$ casi seguramente, deduciéndose que $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \cdot \mathbf{\Sigma} = \mathbf{0}$, por lo que necesariamente $\det(\mathbf{\Sigma}) = 0$.

Ejercicio 1. (a). Se fijan $0 \leq x \leq y \leq 1$. Se tiene que

$$\begin{aligned} P\{X_n \leq x, Y_n \leq y\} &= P\{Y_n \leq y\} - P\{x < X_n \leq Y_n \leq y\} \\ &= y^n - (y-x)^n. \end{aligned}$$

Así, la función de densidad de (X_n, Y_n) viene dada por

$$f(x, y) = n(n-1)(y-x)^{n-2} \quad \text{para } 0 \leq x \leq y \leq 1.$$

Se considera ahora la transformación $(U_n, V_n) = (X_n, Y_n - X_n)$, de transformación inversa $(X_n, Y_n) = (U_n, U_n + V_n)$. La función de densidad de (U_n, V_n) es $g(u, v) = n(n-1)v^{n-2}$ en el recinto $u, v \geq 0$ y $u + v \leq 1$. La función de densidad marginal de V_n es

$$\int_0^{1-v} g(u, v)du = n(n-1)v^{n-2}(1-v) \quad \text{para } 0 \leq v \leq 1.$$

Se deduce finalmente que la función de distribución de R_n es

$$F_n(z) = \int_0^z n(n-1)v^{n-2}(1-v)dv = nz^{n-1} - (n-1)z^n = nz^{n-1}(1-z) + z^n \quad \text{para } 0 \leq z \leq 1.$$

(b) Sea $y \geq 0$ y sea $n > y$. Se tiene que

$$\begin{aligned} P\{n(1-R_n) \leq y\} &= P\Big\{R_n \geq 1 - \frac{y}{n}\Big\} \\ &= 1 - F_n\Big(1 - \frac{y}{n}\Big) \\ &= 1 - y\Big(1 - \frac{y}{n}\Big)^{n-1} - \Big(1 - \frac{y}{n}\Big)^n. \end{aligned}$$

Su límite cuando $n \to \infty$ es $1 - e^{-y}(1+y)$ para $y \geq 0$. Se trata precisamente de la función de distribución de una $\gamma(2,1)$ cuya función de densidad es ye^{-y} para $y \geq 0$. Por tanto, el rango R_n verifica que $n(1-R_n) \xrightarrow{d} \gamma(2,1)$.

Ejercicio 2. (a). Sea (X,Y) el vector aleatorio de las coordenadas del punto P. Su función de densidad es $f(x,y) = 1$ para $0 \leq x, y \leq 1$. Se considera la transformación a coordenadas polares, dada por el argumento y el módulo:

$$(\Theta, R) = \left(\arctan(Y/X), \sqrt{X^2+Y^2} \right)$$

de transformación inversa $(X,Y) = (R\cos\Theta, R\,\mathrm{sen}\,\Theta)$. Analizamos en primer lugar el soporte de (Θ, R).

- Para cada θ del intervalo $[0, \pi/4]$, los posibles valores de r son $0 \leq r \leq 1/\cos\theta$.
- Para cada θ del intervalo $[\pi/4, \pi/2]$, los posibles valores de r son $0 \leq r \leq 1/\,\mathrm{sen}\,\theta$.

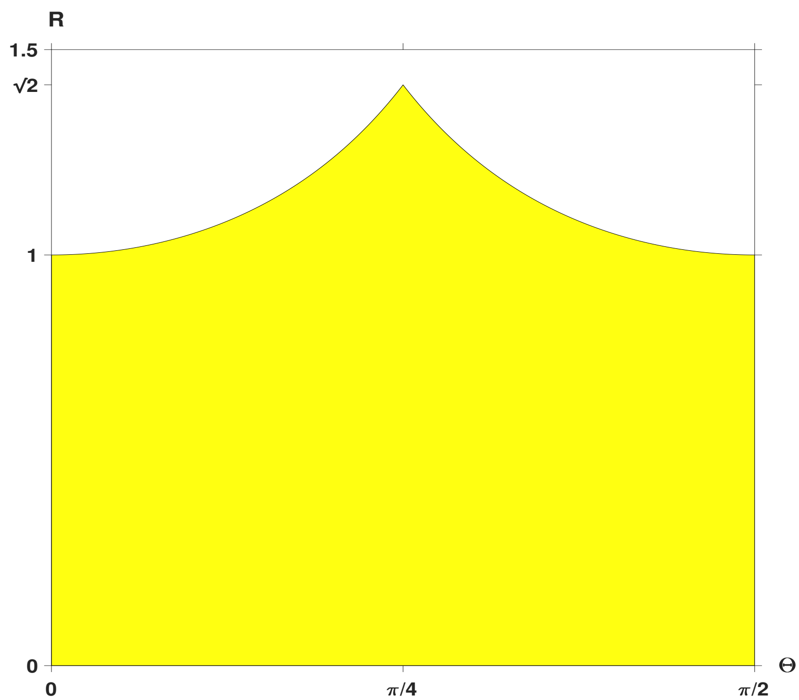

Figura 1: Recinto $\mathcal{U}$.

Por tanto, el recinto en el que toma valores (R, Θ) es $\mathcal{U} = C_1 \cup C_2$ con

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(\theta, r) : 0 \leq \theta \leq \pi/4,\ 0 \leq r \leq 1/\cos\theta\} \\ C_2 &= \{(\theta, r) : \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2,\ 0 \leq r \leq 1/\,\mathrm{sen}\,\theta\}. \end{aligned}$$

El jacobiano de la transformación es R. Por tanto, la función de densidad de (Θ, R) es $g(\theta, r) = r$ cuando $(\theta, r) \in \mathcal{U}$; véase Figura 1.

(b). Calculamos en primer lugar la función de densidad marginal de Θ.

- Si $0 \leq \theta \leq \pi/4$ entonces el conjunto $\{\Theta \leq \theta\}$ se corresponde, en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, con el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1, \tan\theta)$, cuya área es $\frac{1}{2}\tan\theta$.
- Si es $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ entonces el conjunto $\{\Theta \leq \theta\}$ se corresponde, en el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$, con el complementario del triángulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ y $(1/\tan\theta, 1)$. El área de este triángulo es $1/2\tan\theta$.

Así, la función de distribución de Θ es

$$F(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2}\tan\theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ 1 - \frac{1}{2\tan\theta} & \text{si } \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

(se define $F(\theta/2) = 1$ por continuidad) y su función de densidad es

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\cos^2\theta} & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/4 \\ \frac{1}{2\operatorname{sen}^2\theta} & \text{si } \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2. \end{cases}$$

El mismo resultado puede obtenerse por integración de $g(\theta, r)$. Así, la función de densidad de R condicionada por $\Theta = \theta$ es

$$g(r|\theta) = \begin{cases} 2r\cos^2\theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi/4 \text{ y } 0 \leq r \leq 1/\cos\theta \\ 2r\operatorname{sen}^2\theta & \text{si } \pi/4 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ y } 0 \leq r \leq 1/\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

y las esperanzas condicionadas son, cuando $0 \leq \theta \leq \pi/4$

$$E[R|\Theta = \theta] = \int_0^{1/\cos\theta} 2r^2\cos^2\theta\, dr = \frac{2}{3\cos\theta}$$

y cuando $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$

$$E[R|\Theta = \theta] = \int_0^{1/\operatorname{sen}\theta} 2r^2\operatorname{sen}^2\theta\, dr = \frac{2}{3\operatorname{sen}\theta}.$$

Cálculo de Probabilidades II — Septiembre 2019

Cuestión (2 puntos). Dar la definición de sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$ que converge en distribución a una variable aleatoria X. Encontrar un ejemplo en el que se cumpla $X_n \xrightarrow{d} X$ pero que no sea $E[X_n] \to E[X]$.

Ejercicio 1 (4 puntos). El vector aleatorio (X, Y) tiene función de densidad

$$f(x, y) = (y - x)e^{-y} \quad \text{si } 0 \leq x \leq y$$

y $f(x, y) = 0$ en otro caso.

(a) Determinar las funciones de densidad marginales de X e Y.

(b) Calcular $E[X|Y = y]$ y $E[Y|X = x]$ para cada valor $y > 0$ y $x > 0$. Deducir el valor del coeficiente de correlación entre X e Y.

Ejercicio 2 (4 puntos). *En todo este ejercicio, se supone fijado el valor de un entero* $k \geq 1$.

Las variables aleatorias $\{Z_i\}_{i\geq 1}$ son independientes con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$. Supuesto que $n \geq k$, se ordenan las observaciones $Z_1, \ldots, Z_n$ en orden creciente y se define X_n como el k-ésimo valor de esa ordenación.

(a) Demostrar que la función de distribución F_n de X_n es

$$F_n(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} x^i (1 - x)^{n-i} \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1.$$

Establecer que $\{X_n\}$ converge en probabilidad y casi seguramente a 0 cuando $n \to \infty$.

(b) Probar que la sucesión $\{nX_n\}$ converge en distribución, cuando $n \to \infty$, a una distribución $\gamma(k, 1)$ con función de densidad

$$f(z) = z^{k-1}e^{-z}/(k - 1)! \quad \text{para } z \geq 0.$$

Solución

Cuestión. Se dice que $X_n \xrightarrow{d} X$ cuando $\lim_n F_n(x) = F(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ que sea punto de continuidad de F, donde F_n y F son las funciones de distribución de X_n y X, respectivamente. Esta definición es equivalente a que sea $E[f(X_n)] \to E[f(X)]$ para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua.
Si X_n toma el valor 0 con probabilidad $1 - \frac{1}{n}$ y el valor n con probabilidad $\frac{1}{n}$, es claro que $X_n \xrightarrow{d} 0$. Sin embargo, $E[X_n] = 1$ y no se verifica que $E[X_n] \to 0$.
Nótese que para la función identidad f (dada por $f(x) = x$) no se cumple que sea $E[f(X_n)] \to E[f(X)]$. Esto no es contradictorio con la convergencia $X_n \xrightarrow{d} X$ puesto que la función f no es acotada.

Ejercicio 1. (a). Fijado $x \geq 0$, la función de densidad marginal de X en x vale

$$f_X(x) = \int_x^\infty (y-x)e^{-y}dy = e^{-x}\int_x^\infty (y-x)e^{-(y-x)}dy = e^{-x}\int_0^\infty ue^{-u}du = e^{-x}.$$

Por tanto, X tiene distribución exponencial de parámetro 1.
Ahora, fijado $y \geq 0$, la función de densidad marginal de Y en y vale

$$f_Y(y) = \int_0^y (y-x)e^{-y}dx = y^2e^{-y}/2.$$

Así, Y tiene distribución gamma $\gamma(3,1)$.
(b). La función de densidad de Y condicionada por $X = x$ es

$$f(y|x) = (y-x)e^{-(y-x)} \quad \text{para } y \geq x.$$

Es una distribución $\gamma(2,1)$ "desplazada x unidades". Por tanto, $E[Y|X=x] = 2 + x$.
La función de densidad de X condicionada por $Y = y$ es

$$f(x|y) = \frac{2}{y^2}(y-x) \quad \text{para } 0 \leq x \leq y.$$

Su esperanza es

$$E[X|Y=y] = \frac{y}{3}.$$

Las curvas de regresión son rectas, luego coinciden con las rectas de regresión. Puesto que $E[Y] = 3$ y $E[X] = 1$ las rectas de regresión se escriben

$$(y-3) = 1 \cdot (x-1) \quad \text{y} \quad (x-1) = \frac{1}{3}\cdot(y-3).$$

La pendiente de la recta de regresión de Y sobre X es $1 = \operatorname{Cov}(X,Y)/\operatorname{Var}(X)$ y la pendiente de la recta de regresión de X sobre Y es $1/3 = \operatorname{Cov}(X,Y)/\operatorname{Var}(Y)$. Su producto es

$$\rho^2 = \frac{(\operatorname{Cov}(X,Y))^2}{\operatorname{Var}(X)\operatorname{Var}(Y)} = \frac{1}{3},$$

luego $\rho = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Nótese que no puede ser $\rho = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ porque el signo de $\mathrm{Cov}(X, Y)$ es positivo (tiene el mismo signo que las pendientes de las rectas de regresión).

Ejercicio 2. (a). Dado $0 \le x < 1$, para que sea $X_n > x$, de los n valores de las Z_i, debe haber menos de k en el intervalo $[0, x]$. En efecto, si hubiese k o más de estos valores en $[0, x]$, se tendría $X_n \le x$. Por tanto,

$$P\{X_n > x\} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}.$$

Dado un valor $0 < \epsilon < 1$ se tiene que

$$P\{X_n > \epsilon\} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \epsilon^i (1-\epsilon)^{n-i}.$$

Haciendo $n \to \infty$, cada uno de estos sumandos tiende a cero; en efecto, se escriben

$$\frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{i!}(1-\epsilon)^n(\epsilon/(1-\epsilon))^i$$

que, como función de n, son un polinomio en n multiplicado por la n-ésima potencia de un número de $(0, 1)$. Como el número de sumandos no depende de n, resulta

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_n > \epsilon\} = 0,$$

por lo que $X_n \xrightarrow{p} 0$.

Podemos observar ahora que la sucesión X_n es monótona. En efecto, al hacer la $(n+1)$-ésima observación, si $Z_{n+1} \ge X_n$ entonces el k-ésimo valor más pequeño de la muestra $Z_1, \dots, Z_{n+1}$ sigue siendo X_n, es decir, $X_{n+1} = X_n$. En cambio, si $Z_{n+1} < X_n$ entonces el k-ésimo valor más pequeño de la muestra disminuye: $X_{n+1} \le X_n$. Se deduce de la monotonía de $\{X_n\}$ que también es $X_n \xrightarrow{c.s.} 0$.

(b). Sea $y \ge 0$ fijo y supongamos que $n > y$. Tenemos que

$$\begin{aligned} P\{nX_n \le y\} &= P\{X_n \le y/n\} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \Big(\frac{y}{n}\Big)^i \Big(1 - \frac{y}{n}\Big)^{n-i} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{y^i}{i!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-i+1)}{n^i} \Big(1 - \frac{y}{n}\Big)^n \Big/ \Big(1 - \frac{y}{n}\Big)^i. \end{aligned}$$

Cuando $n \to \infty$, la segunda fracción tiende a 1, el primer paréntesis tiende a e^{-y} y el paréntesis en el denominador tiende a 1. Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} P\{nX_n \le y\} = 1 - e^{-y}\Big(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots + \frac{y^{k-1}}{(k-1)!}\Big).$$

Esta función de la variable y vale 0 cuando $y = 0$, y tiende a 1 cuando $y \to \infty$. Además, su derivada es $e^{-y}y^{k-1}/(k-1)!$, luego $\{nX_n\}$ converge efectivamente a una distribución $\gamma(k, 1)$.