Examen de Topología

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema
Sea $f : (X,T) \to (Y,S)$ una aplicación de espacios topológicos, y p un punto de X. Demostrar que la aplicación f es continua en p si y sólo si, para toda base de filtro B convergente al punto p, la base de filtro $f(B)$ es convergente a $f(p)$.
(3 puntos)

Solución
Proposición 18 del libro de teoría, página 67.

Problema
Sea X un conjunto e (Y,T) un espacio topológico tal que, si $x,y \in Y$, con $x \neq y$ existe un entorno U de x tal que $y \notin U$ o bien existe un entorno de W de y, tal que $x \notin W$. Demostrar que la topología inicial en X inducida por una aplicación $f : X \to (Y,T)$ es la topología trivial si y sólo si f es una aplicación constante.
(3 puntos)

Solución
Problema 4.3 del libro de problemas, página 94.

Problema
Dado el espacio topológico $(\mathbb{R},T)$, donde $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales y $T = \{A \subset \mathbb{R} \mid p \notin A\} \cup \{\mathbb{R}\}$ donde p es un elemento fijo de $\mathbb{R}$.
a) Estudiar si $(\mathbb{R},T)$ es compacto.
b) Estudiar si $(\mathbb{R},T)$ es conexo.
c) Calcular el interior y la adherencia de $(0,10]$ en $(\mathbb{R},T)$. (Observar que estas dependen de que $p \in (0,10]$ o no pertenezca)
(4 puntos)

Solución
a) Como $\mathbb{R}$ es el único abierto que contiene a p, se tiene que todo recubrimiento por abierto de $\mathbb{R}$, tiene a $\{\mathbb{R}\}$ como subrecubrimiento finito, luego $(\mathbb{R},T)$ es compacto.
b) No existen dos abiertos $U \neq \emptyset$ y $V \neq \emptyset$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $U \cup V = X$, puesto que el único abierto que contiene a p es $\mathbb{R}$, luego $(\mathbb{R},T)$ es conexo.

c) Si $p \in (0,10]$, el $int((0,10]) = (0,10] - \{p\}$ y la $\overline{(0,10]} = (0,10]$.
Si $p \notin (0,10]$, el $int((0,10]) = (0,10]$ y la $\overline{(0,10]} = (0,10] \cup \{p\}$.

Examen de Topología

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

Problema

Sea X un conjunto, y sean (Y_1, S_1), (Y_2, S_2) espacios topológicos y $f_1 : X \to (Y_1, S_1)$, $f_2 : X \to (Y_2, S_2)$ aplicaciones en ellos. Demostrar que la topología menos fina de X que hace continua las aplicaciones f_1 y f_2 es la topología que tiene por base la familia de subconjuntos de X de la forma $f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2)$, donde $U_1 \in S_1$ y $U_2 \in S_2$.

(3 puntos)

Solución

Proposición 5 del libro de teoría, página 85.

Problema

En el espacio topológico $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, T_u \times T_u)$, se considera el subespacio topológico $M = A \cup B$ con la topología relativa, donde $A = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ y $B = \{(x,y) \mid y = x\}$. Estudiar si A es entorno de $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ y de $(0,1)$ en el subespacio M.

(3,5 puntos)

Solución

Problema 4.22 del libro de problemas, página 111.

Problema

Sea $\mathbb{Z}^+$ el conjunto de los enteros positivos y definimos en él la topología $T = \left\{A \subset \mathbb{Z}^+ \mid \text{si } n \in A, \text{ entonces todos los divisores de } n \text{ pertenecen a } A\right\}$.

a) Estudiar si $(\mathbb{Z}^+, T)$ es compacto.

b) Calcular el interior y la adherencia, en $(\mathbb{Z}^+, T)$ del conjunto $B = \left\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ es par}\right\} \cup \{1\}$.

(3,5 puntos)

Solución

a) Para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ consideramos los conjuntos abiertos $U(n) = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x$ divide a $n\}$, entonces
$S_n = \bigcup_{x \leqslant n} U(x)$ es un recubrimiento por abiertos de $\mathbb{Z}^+$ que no contiene ningún subrecubrimiento finito, puesto que cualquier subrecubrimiento finito está acotado superiormente, luego $(\mathbb{Z}^+, T)$ no es compacto.
b) $int(B) = \{2^n$ con $n \in N\} \cup \{1\}$ y $\overline{B} = \{\mathbb{Z}^+\}$.