Ampliación de Topología
Massey
Ejercicios Tema 1

5.1 Sea P un polígono con un número finito de lados. Supongamos que los lados están identificados a pares según un cierto símbolo. Probar que el espacio cociente es una superficie compacta.

Indicación: Este ejercicio es un buen ejemplo para estudiar la topología cociente. En este caso tenemos una aplicación

$$\pi : P \longrightarrow P/\sim$$

en dónde $P/\sim$ es el espacio que resulta de la identificación de los puntos de las arístas. Este espacio tiene una topología cociente que se construye a partir de la topología de P. La topología que se considera en P es la que hereda como subespacio de $\mathbb{R}^2$.

7.1-7.5 Ver enunciado en el libro.

Indicación: Considerar tantas casillas como triples de números. Construir un grafo cuyos vértices son estas casillas y cada arista une dos casillas siempre y cuando las dos casillas compartan dos cifras. Obsérvese que de cada casilla parten a lo sumo tres aristas. El grafo construido puede llevarse al plano, quizá moviendo de lugar las casillas o suprimiendo alguna arista; es decir, las aristas no se intersecan, y de manera que sea conexo. Construir a partir de este grafo todas las identificaciones, teniendo en cuenta que cada vértice representa un triángulo y un eje es la instrucción de pegado de dos triángulos. Hay que tener en cuenta que el orden de la tripleta de cifras indica una orientación en cada triángulo. Cuando se identifican dos lados ha de hacerse con orientaciones distintas en cada uno de ellos y la elección de una orientación en una arista induce la orientación en las otras dos. Al hacer esta construcción se termina con un polígono con aristas orientadas como consecuencia de las identificaciones realizadas. Las identificaciones que hay que hacer ahora en las aristas del borde del polígono se corresponden con las que hemos suprimido antes para que el grafo fuese plano.

8.1 Existen únicamente cinco poliedros regulares: tetraedro, hexaedro o cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Demostrar este hecho.

Indicación: La característica de Euler de la esfera S^2 es

$$\chi(S^2) = 2 = v - e + f \tag{1}$$

en dónde v, e y f representan el número de vértices, aristas y caras de una subdivisión de la esfera en polígonos de un cierto número de lados, (Massey pg. 31). Sean además

$$\begin{aligned} p &= \text{número de lados de cada cara} \\ q &= \text{número de polígonos que concurren en cada vértice} \end{aligned}$$

Comprobar que se tiene

$$pf = 2e \qquad \text{y} \qquad qv = 2e$$

A partir de las igualdades anteriores y la ecuación (1) deducir el resultado.

8.2 Para toda triangulación de una superficie compacta, demostrar que

i) $3t = 2e$

ii) $e = 3(v - \chi)$

iii) $v \geq \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{49 - 24\chi}\right)$

dónde v, e y f denotan el número de vértices, aristas y caras de la triangulación. ¿Cuáles son los valores mínimos de estos números en los casos de la esfera, el toro y el plano proyectivo?

Indicación:

i) Considerar los triángulos de la triangulación como un conjunto de triángulos, sin identificar los lados.

ii) Aplicar el punto anterior a la fórmula de la característica.

iii) Comprobar que $e \geq \binom{v}{2}$.

8.3 ¿En cuántas piezas dividen una esfera, n círculos máximos tales que cualesquiera tres de ellos no tengan nunca un punto en común?

Indicación: Probar en primer lugar, que dados n círculos como en el enunciado el número total de puntos de intersección de estos círculos; eso es, el número de vértices de la subdivisión es

$$v = 2\binom{n}{2}$$

La igualdad anterior se puede probar por inducción en n teniendo en cuenta que

$$\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} = \binom{n}{2}$$

8.4 a) Se identifican dos a dos los lados de un octógono regular de manera que se obtenga una superficie compacta S. Probar que la característica de Euler de esta supreficie verifica $\chi(S) \geq -2$.

b) Probar que toda superficie S (orientable o no) cuya característica de Euler verifique $\chi(S) \geq -2$ puede obtenerse identificando a pares los lados de un octógono regular.

Indicación: Para la primera parte dividir el octógono en ocho triángulos iguales. Esto indice una triangulación en S. Como los lados del octógono se identifican dos a dos, ya tenemos el número de aristas de la triangulación de S y el número de caras.

8.5 Probar que no es posible subdividir la superficie de una esfera en regiones, cada una de las cuales tenga seis lados y tales que dos regiones distintas tengan a lo sumo un lado común.

Indicación: Con un razonamiento similar al del primer ejercicio relacionar el número de caras (hexágonos) con el número de aristas. Tratar en primer lugar el caso en el que el número de aristas que concurren en cada vértice es el mismo ($q = 3 + k$). El caso más general, en el que el número de aristas que concurren en cada vértice no es el mismo se deduce del caso anterior.

8.6 Sea S_1 la suma conexa de m toros, $m \geq 1$, y S_2 la suma conexa de n planos proyectivos, $n \geq 1$. Si recortamos dos agujeros en cada una de estas superficies y las pegamos a lo largo de los dos agujeros, ¿qué superficie se obtiene?

Indicación: Teniendo en cuenta la proposición 8,1:

$$\chi(S_1 \# S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$$

se tiene la característica de la suma conexa. Para determinar de qué superficie se trata hay que aplicar un resultado fundamental del capítulo 1.

8.7 ¿Cuál es la superficie representada por un decágono regular con las aristas identificadas a pares siguiendo el patrón $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$?

Indicación: Estudiar la identificación de los vértices.

8.8 ¿Cuál es la superficie representada por un polígono de $2n$ lados con las aristas identificadas siguiendo el patrón

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n?$$

Indicación: Similar al anterior.

8.9 ¿Cuál es la superficie representada por un polígono de $2n$ lados con las aristas identificadas siguiendo el patrón

$$a_1 a_2 \cdots a_n a_1^{-1} a_2^{-1} \cdots a_{n-1}^{-1} a_n^{-1}?$$

Indicación: Similar al anterior.