Exámenes de la asignatura *Ampliación de Topología*

Juan Luis Castaño Fernández

24 de mayo de 2018

Índice

0. Resultados importantes **3**

1. Mayo de 2014 **4**

2. Junio de 2014 **10**

3. Septiembre de 2014 – Convocatoria ordinaria **14**

4. Septiembre de 2014 – Convocatoria de reserva **17**

5. Mayo de 2015 **22**

6. Junio de 2015 **25**

7. Septiembre de 2015 – Convocatoria ordinaria **28**

8. Septiembre de 2015 – Convocatoria de reserva **30**

9. Mayo de 2016 **34**

10. Junio de 2016 **38**

11. Septiembre de 2016 – Convocatoria ordinaria **40**

12. Septiembre de 2016 – Convocatoria de reserva **46**

13. Mayo de 2017 **47**

14. Junio de 2017 **52**

15. Septiembre de 2017 – Convocatoria ordinaria **55**

16. Septiembre de 2017 – Convocatoria de reserva **57**

17. Junio de 2013 **59**

18. Septiembre de 2013 **62**

19. Junio de 2012 **65**

20. Septiembre de 2012 **68**

21. Referencias bibliográficas **72**

Resultados importantes

Resultado 1. Corolario 52.2 (Munkres, 2002: 377). Si X es conexo por caminos, y x_0 y x_1 son dos puntos de X, entonces $\pi_1(X, x_0)$ es isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.

Resultado 2. Corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380). Si $h : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ es un homeomorfismo entre X e Y, entonces h_* es un isomorfismo entre $\pi_1(X, x_0)$ y $\pi_1(Y, y_0)$.

Resultado 3. Teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410). Sea A un retracto de deformación de X y $x_0 \in A$. Entonces la aplicación inclusión

$$j : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$$

induce un isomorfismo de grupos fundamentales.

Resultado 4. Corolario 70.3 (Munkres, 2002: 490). Supongamos las hipótesis del teorema de Seifert-van Kampen ($X = U \cap V$, U y V abiertos, U, V y $U \cap V$ conexos por caminos, $x_0 \in U \cap V$). Si $U \cap V$ es simplemente conexo, existe un isomorfismo

$$k : \pi_1(U, x_0) * \pi_1(V, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0).$$

Resultado 5. Teorema 77.5 de clasificación (Munkres, 2002: 530). Sea X el espacio cociente que se obtiene de un polígono pegando sus aristas por pares. Entonces X es homeomorfo ya a $\mathbb{S}^2$, ya al n-toro T_n, ya al m-plano proyectivo P_m.

Mayo de 2014

Ejercicio 1.1. Ejercicio 4 (Fernández, 2018: 56). Sea Y un subespacio de $\mathbb{R}^n$ y sean $f, g : X \longrightarrow Y$ aplicaciones continuas de un espacio topológico X en Y. Pruebe que si, para cada $x \in X$, $f(x)$ y $g(x)$ pueden ser unidos por un segmento rectilíneo en Y, entonces $f \simeq g$.

Ejercicio 1.2. Ejercicio 5 (Fernández, 2018: 57). Sean $\mathbb{R}$ la recta real, $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad del plano euclídeo,

$$\mathbb{S}^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\},$$

$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora estándar, definida mediante

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1,$$

y $q : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación recubridora arbitraria. Pruebe que no existe una aplicación continua $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $p \circ g = q$.

Ejercicio 1.3. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido mediante $X = A \cup B$, siendo

$$A = \mathbb{S}^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\},$$

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leqslant (x - 3)^2 + y^2 \leqslant 4\big\},$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X, (1, 0)\big)$.

Ejercicio 1.4. Ejercicio 2 (Fernández, 2018: 121). Sea

$$X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \leqslant 0\big\},$$

subespacio de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 1.1. Definimos la aplicación F de la forma

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow F(x, t) = (1 - t) f(x) + t g(t) \in \big[f(x), g(x)\big] \subset Y \subset \mathbb{R}^n.$$

Evidentemente, F es continua y para todo $x \in X$ verifica

$$F(x, 0) = f(x), \quad F(x, 1) = g(x);$$

por lo que F es una homotopía entre f y g, y entonces se tiene que $f \simeq g$. □

Solución 1.2. Supongamos que existe una aplicación continua $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ g = q$. Consideramos entonces el diagrama conmutativo representado en la figura 1.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{R} \arrow[dl, "p"] \\
\mathbb{S}^1 &
\end{tikzcd}$$

Figura 1: Diagrama conmutativo para las aplicaciones p, q y g.

Sean $a \in \mathbb{S}^1$ cualquiera, y $b = g(a) \in \mathbb{S}^1$, $c = q(a) \in \mathbb{R}$. Entonces el diagrama de la figura 1 de aplicaciones continuas entre espacios topológicos induce un diagrama conmutativo similar de homomorfismos entre grupos en los puntos dados, que se representa en la figura 2.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1, a) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "q_*"'] & \pi_1(\mathbb{R}, b) \arrow[dl, "p_*"] \\
\pi_1(\mathbb{S}^1, c) &
\end{tikzcd}$$

Figura 2: Diagrama conmutativo para los homomorfismos p_*, q_* y g_*.

Por ser el diagrama anterior conmutativo, sabemos que $p_* \circ g_* = q_*$. Como además $\pi_1(\mathbb{R}, b) \cong \{0\}$, podemos asegurar que $g_* \equiv 0$ y $q_* = p_* \circ g_* \equiv 0$. Pero por ser q una aplicación recubridora,

$$q_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, a) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, c) \cong \mathbb{Z}$$

ha de ser un homomorfismo inyectivo entre grupos no triviales, lo que nos lleva a una contradicción.

Queda probado, por reducción al absurdo, que no existe una aplicación g como la descrita. $\square$

Solución 1.3. En la figura 3 se representa el subespacio topológico X estudiado y el punto $p = (1, 0)$.

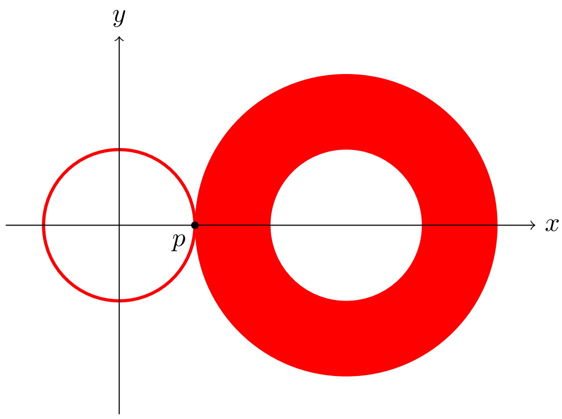

Figura 3: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

En primer lugar vamos a construir un retracto de deformación para el conjunto $X = A \cup B$. Dicho retracto es, por ejemplo, el conjunto $Y = A \cup C$, siendo

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-3)^2 + y^2 = 4\}.$$

En efecto, la aplicación $r : X \longrightarrow Y$ definida por

$$r(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si} \quad x \leqslant 1, \\ \dfrac{2(x-3, y)}{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}} + (3, 0) & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Así definida, r es continua y verifica $r \circ j = 1_Y$, y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo $j : Y \longrightarrow X$ la aplicación inclusión y $1_X : X \longrightarrow X$, $1_Y : Y \longrightarrow Y$ las aplicaciones identidad. Sea H definida por

$$X \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)(x,y) + tr(x,y) \in X,$$

que está bien definida, es continua, y verifica que para todo $(x,y) \in X$,

$$H\big((x,y),0\big) = (x,y), \quad H\big((x,y),1\big) = r(x,y) \in X,$$

y para todo $(x,y) \in Y$ y todo $t \in I$,

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Por tanto, la homotopía H es una retracción de deformación de X en Y (el retracto Y se representa en la figura 4). Como consecuencia de este resultado, y como $p \in Y$, aplicando el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) podemos garantizar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(Y,p).$$

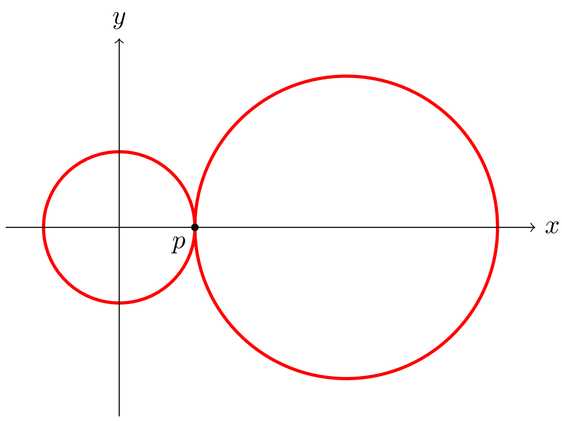

Figura 4: Retracto de deformación Y.

Consideramos ahora los conjuntos abiertos (respecto de la topología inducida en Y) U y V definidos por

$$U = \big\{(x,y) \in Y : \; x < 3\big\}, \quad V = \big\{(x,y) \in Y : \; x > 0\big\}.$$

Es inmediato ver que $Y = U \cup V$, $p \in U \cap V$, y que los conjuntos U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos. Comprobaremos también que $U \cap V$ es simplemente conexo. Sea la aplicación $f : U \cap V \longrightarrow W$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,|x|) & \text{si} \quad y > 0, \\ (1,0) & \text{si} \quad y = 0, \\ (x,-|x|) & \text{si} \quad y < 0; \end{cases}$$

siendo W el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, con su topología usual, representado en la figura 5 y definido de la forma

$$W = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = x, \; 0 < x < 3\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = -x, \; 0 < x < 3\big\}.$$

La aplicación f antes definida es un homeomorfismo puesto que es continua y tiene inversa también continua $f^{-1} : W \longrightarrow U \cap V$ dada por

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} \left(3 - \sqrt{4-y^2}, y\right) & \text{si} \quad x > 1, \\ (1,0) & \text{si} \quad x = 1, \\ \left(\sqrt{1-y^2}, y\right) & \text{si} \quad x < 1. \end{cases}$$

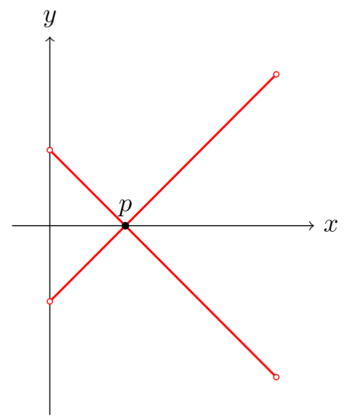

Figura 5: Subespacio topológico W.

Como además $f(p) = p$, y teniendo en cuenta que W es un polígono estrellado podemos afirmar entonces que

$$\pi_1(U \cap V, p) \cong \pi_1(W, p) \cong \{0\},$$

y que $U \cap V$ es simplemente conexo. Y según el corolario 70.3 (Munkres, 2002: 490) al teorema de Seifert-van Kampen, estamos en condiciones obtener

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(Y, p) \cong \pi_1(U, p) * \pi_1(V, p).$$

Daremos ahora, por separado, retractos de deformación de los conjuntos U y V.

- El conjunto $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de U. En efecto, sea la aplicación $r_1 : U \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

  $$r_1(x, y) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si} \quad x > 1, \\ (x, y) & \text{si} \quad x \leqslant 1. \end{cases}$$

  Así definida, r_1 es continua y verifica $r_1 \circ j_1 = 1_{\mathbb{S}^1}$, y $j_1 \circ r_1 \simeq 1_U$, siendo $j_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow U$ la aplicación inclusión y $1_U : U \longrightarrow U$, $1_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ las aplicaciones identidad. Sea H_1 definida por

  $$U \times I \ni \big((x, y), t\big) \longrightarrow H_1\big((x, y), t\big) = (1 - t)(x, y) + t r_1(x, y) \in U,$$

  que está bien definida, es continua, y verifica que para todo $(x, y) \in U$,

  $$H_1\big((x, y), 0\big) = (x, y), \quad H_1\big((x, y), 1\big) = r_1(x, y) \in \mathbb{S}^1,$$

  y para todo $(x, y) \in \mathbb{S}^1$ y todo $t \in I$,

  $$H_1\big((x, y), t\big) = (x, y).$$

  Por tanto, la homotopía H_1 es una retracción de deformación de U en $\mathbb{S}^1$.

- Análogamente, el conjunto V' definido por

  $$V' = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 3)^2 + y^2 = 4\big\},$$

  es un retracto de deformación de V. En efecto, sea la aplicación $r_2 : V \longrightarrow V'$ definida por

  $$r_2(x, y) = \begin{cases} (1, 0) & \text{si} \quad x < 1, \\ (x, y) & \text{si} \quad x \geqslant 1. \end{cases}$$

Así definida, r_2 es continua y verifica $r_2 \circ j_2 = 1_{V'}$, y $j_2 \circ r_2 \simeq 1_V$, siendo $j_2 : V' \longrightarrow V$ la aplicación inclusión y $1_V : V \longrightarrow V$, $1_{V'} : V' \longrightarrow V'$ las aplicaciones identidad. Sea H_2 definida por

$$V \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H_2\big((x,y),t\big) = (1-t)(x,y) + tr_2(x,y) \in V,$$

que está bien definida, es continua, y verifica que para todo $(x,y) \in V$,

$$H_2\big((x,y),0\big) = (x,y), \quad H_2\big((x,y),1\big) = r_2(x,y) \in V',$$

y para todo $(x,y) \in V'$ y todo $t \in I$,

$$H_2\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Por tanto, la homotopía H_2 es una retracción de deformación de V en V'.

Aplicando de nuevo el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) podemos escribir

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(Y,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,p) * \pi_1(V',p).$$

Por último, veamos que el conjunto V' es homeomorfo al espacio $\mathbb{S}^1$. Consideramos la aplicación f definida por

$$V' \ni (x,y) \longrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}(3-x,y) \in \mathbb{S}^1.$$

Así definida, f es una aplicación continua, que tiene inversa también continua dada por

$$\mathbb{S}^1 \ni (x,y) \longrightarrow f^{-1}(x,y) = (3-2x, 2y) \in V',$$

por lo que f es un homeomorfismo que verifica $f(p) = p$. En estas condiciones, ya podemos determinar el grupo fundamental pedido,

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(Y,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,p) * \pi_1(V',p) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,p) * \pi_1(\mathbb{S}^1,p) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Solución 1.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 6, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 7 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,A\rangle, \langle A,C,D\rangle\big\}.$$

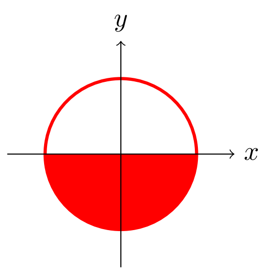

Figura 6: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

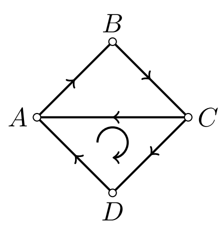

Figura 7: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por el único 2-símplice de K, $\langle A, C, D\rangle$. Entonces,

$$g_2 = \partial_2\big(\langle A, C, D\rangle\big) = -\langle C, A\rangle + \langle C, D\rangle + \langle D, A\rangle \Longrightarrow B_1(K) = (g_2) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_3\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle C, D\rangle + \lambda_5\langle D, A\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1\partial_2\big(\langle A, B\rangle\big) + \lambda_2\partial_2\big(\langle B, C\rangle\big) + \lambda_3\partial_2\big(\langle C, A\rangle\big) + \lambda_4\partial_2\big(\langle C, D\rangle\big) + \lambda_5\partial_2\big(\langle D, A\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B - A) + \lambda_2(C - B) + \lambda_3(A - C) + \lambda_4(D - C) + \lambda_5(A - D) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)C + (\lambda_4 - \lambda_5)D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_4 - \lambda_5 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \lambda_1 - \lambda_4 \\ \lambda_5 &= \lambda_4 \end{aligned}\right\} \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_1\langle B, C\rangle + (\lambda_1 - \lambda_4)\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle C, D\rangle + \lambda_4\langle D, A\rangle =$$

$$= \lambda_1\big(\underbrace{\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle C, A\rangle}_{g_1}\big) + \lambda_4\big(\underbrace{-\langle C, A\rangle + \langle C, D\rangle + \langle D, A\rangle}_{g_2}\big),$$

para todo $(\lambda_1, \lambda_4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Entonces

$$Z_1(K) = (g_1) \oplus (g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1) \oplus (g_2)}{(g_2)} \cong (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Junio de 2014

Ejercicio 2.1. Ejercicio 10 (Fernández, 2018: 67). Sea X un espacio topológico. Pruebe que toda aplicación continua no sobreyectiva

$$f : X \longrightarrow \mathbb{S}^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\big\}$$

es homotópicamente nula.

Ejercicio 2.2. Ejercicio 11 (Fernández, 2018: 69). Sean $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora definida mediante

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1.$$

Estudie si existe una aplicación continua $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ g$ es igual a la aplicación identidad de $\mathbb{S}^1$.

Ejercicio 2.3. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido mediante $X = A \cup B$, siendo

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\big\},$$

$$B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; (x - 3)^2 + y^2 = 1\big\}.$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X, (2, 0)\big)$.

Ejercicio 2.4. Sea

$$X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big(\{0\} \times [0, 1]\big),$$

considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 2.1. Por ser f no sobreyectiva, existe al menos un punto $a \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(X) \subset \mathbb{S}^1 \setminus \{a\}$. Por otra parte, sabemos que $\mathbb{S}^1 \setminus \{a\} \approx \mathbb{R}$, por lo que ha de existir un homeomorfismo $g : \mathbb{S}^1 \setminus \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Sea $b \in X$, y sea F la aplicación continua definida por

$$\mathbb{R} \times I \ni (x, t) \longrightarrow F(x, t) = (1 - t)g\big(f(x)\big) + tg\big(f(b)\big) \in \mathbb{R};$$

que verifica para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x, 0) = g\big(f(x)\big), \quad F(x, 1) = g\big(f(b)\big).$$

Sea también la aplicación $G = g^{-1} \circ F$, que es una homotopía, puesto que es continua y verifica para todo $x \in \mathbb{R}$

$$G(x, 0) = g^{-1}\big(F(x, 0)\big) = f(x), \quad G(x, 1) = g^{-1}\big(F(x, 1)\big) = f(b).$$

Si llamamos h a la aplicación constante definida por

$$X \ni x \longrightarrow h(x) = f(b) \in \mathbb{S}^1,$$

hemos probado que $f \simeq h$, por lo que f es homotópicamente nula. $\square$

Solución 2.2. Supongamos que existe una aplicación continua $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ g = 1_{\mathbb{S}^1}$. Consideramos entonces el diagrama conmutativo representado en la figura 8.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{S}^1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "1_{\mathbb{S}^1}"'] & \mathbb{R} \arrow[dl, "p"] \\
\mathbb{S}^1 &
\end{tikzcd}$$

Figura 8: Diagrama conmutativo para las aplicaciones p, $1_{\mathbb{S}^1}$ y g.

Sean $a \in \mathbb{S}^1$ cualquiera, y $b = g(a) \in \mathbb{R}$. Entonces el diagrama de la figura 8 de aplicaciones continuas entre espacios topológicos induce un diagrama conmutativo similar de homomorfismos entre grupos en los puntos dados, que se representa en la figura 9.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(\mathbb{S}^1, a) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "1_{\pi_1(\mathbb{S}^1,a)}"'] & \pi_1(\mathbb{R}, b) \arrow[dl, "p_*"] \\
\pi_1(\mathbb{S}^1, a) &
\end{tikzcd}$$

Figura 9: Diagrama conmutativo para los homomorfismos p_*, $1_{\pi_1(\mathbb{S}^1,a)}$ y g_*.

Por ser el diagrama anterior conmutativo, sabemos que $p_* \circ g_* = 1_{\pi_1(\mathbb{S}^1,a)}$. Como además $\pi_1(\mathbb{R}, b) \cong \{0\}$, podemos asegurar que $g_* \equiv 0$ y $1_{\pi_1(\mathbb{S}^1,a)} = p_* \circ g_* \equiv 0$. Pero como sabemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1, a) \cong \mathbb{Z}$, esto nos lleva a una contradicción.

Queda probado, por reducción al absurdo, que no existe una aplicación g como la descrita.

Solución 2.3. En la figura 10 se representa el subespacio topológico X estudiado y el punto $p = (1, 0)$.

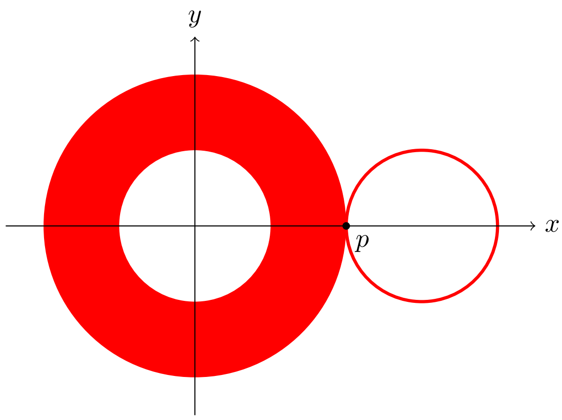

Figura 10: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

Definimos la simetría f de la forma

$$X \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) = (3 - x, y) \in X';$$

$$X' = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2=1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leqslant (x-3)^2+y^2 \leqslant 4\big\}.$$

Así definida, f es una aplicación continua con inversa también continua dada por

$$X' \ni (x,y) \longrightarrow f^{-1}(x,y) = (3-x,y) \in X.$$

Como también verifica que $f(p) = p'(2,0)$, el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) nos permite asegurar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(X',p') \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

donde la última equivalencia se justifica en el ejercicio 1.3 de la página 4. El subespacio topológico X' y el punto p' se representan en la figura 11.

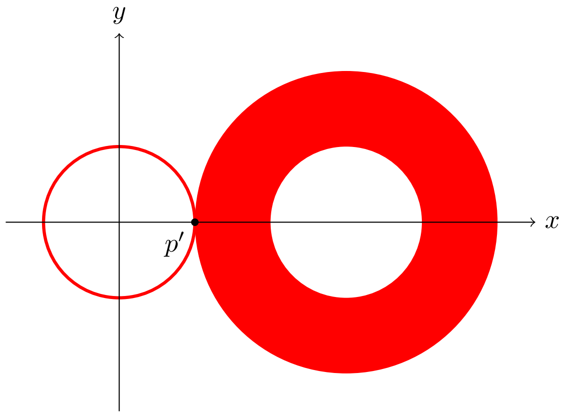

Figura 11: Subespacio topológico $X' \subset \mathbb{R}^2$.

Solución 2.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 12, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 13 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,B\rangle\big\}.$$

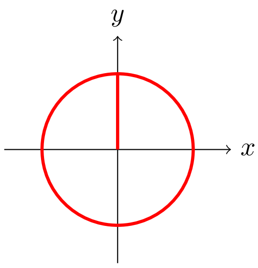

Figura 12: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

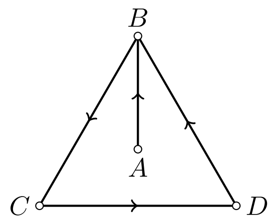

Figura 13: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Sabemos que

$$\dim(K) = 1 \Longrightarrow C_2(K) = \{0\} \Longrightarrow B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big) = \{0\}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_3\langle C, D\rangle + \lambda_4\langle D, B\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1\partial_2\big(\langle A, B\rangle\big) + \lambda_2\partial_2\big(\langle B, C\rangle\big) + \lambda_3\partial_2\big(\langle C, D\rangle\big) + \lambda_4\partial_2\big(\langle D, B\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B - A) + \lambda_2(C - B) + \lambda_3(D - C) + \lambda_4(B - D) =$$

$$= -\lambda_1 A + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4)B + (\lambda_2 - \lambda_3)C + (\lambda_3 - \lambda_4)D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_2 \\ \lambda_4 = \lambda_2 \end{array}\right\} \lambda_2 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_2\langle C, D\rangle + \lambda_2\langle D, B\rangle = \lambda_2\big(\underbrace{\langle B, C\rangle + \langle C, D\rangle + \langle D, B\rangle}_{g_1}\big),$$

para todo $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Entonces $Z_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}$, y retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1)}{\{0\}} \cong \mathbb{Z}.$$

Septiembre de 2014 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 3.1. Ejercicio 1 (Fernández, 2018: 55). ¿Existe un espacio topológico Y tal que $\mathbb{S}^1 \times Y$ sea homeomorfo a $\mathbb{R}^n$ con $n \geqslant 1$?

Ejercicio 3.2. Ejercicio 2 (Fernández, 2018: 55). Sea p la aplicación definida mediante

$$(0,1) \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1 \setminus \big\{(1,0)\big\}.$$

Pruebe que p está bien definida y es una aplicación recubridora.

Ejercicio 3.3. Ejercicio 3 (Fernández, 2018: 56). Sea X un espacio topológico compacto y conexo y sea a un punto de X tal que

$$\pi_1(X,a)/\big[\pi_1(X,a), \pi_1(X,a)\big] \cong \mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{(3)}.$$

Pruebe que X no es homeomorfo a una superficie.

Ejercicio 3.4. Sea

$$X = [-1,1] \times [-1,1].$$

Se considera X como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 3.1. No existe dicho espacio topológico Y, cosa que se probará por reducción al absurdo. Supongamos que existe un espacio topológico Y tal que $\mathbb{S}^1 \times Y$ fuese homeomorfo a $\mathbb{R}^n$. Entonces sabemos que

$$\mathbb{S}^1 \times Y \approx \mathbb{R}^n \Longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1) \times \pi_1(Y) \cong \pi_1(\mathbb{R}^n) \Longrightarrow \mathbb{Z} \times \pi_1(Y) \cong \{0\},$$

lo cual nos lleva a una contradicción.

Solución 3.2. Sea $x \in (0,1)$. Se tiene que

$$0 < x < 1 \Longrightarrow 0 < 2\pi x < 2\pi \Longrightarrow \begin{cases} -1 \leqslant \operatorname{sen} 2\pi x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant \cos 2\pi x < 1. \end{cases}$$

Entonces,

$$p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1 \setminus \big\{(1,0)\big\},$$

por lo que la aplicación p está bien definida. Además, p es un homeomorfismo, puesto que es una aplicación continua que tiene inversa también continua dada por

$$p^{-1}(a,b) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a} & \text{si} \quad 0 < a < 1,\ b > 0 \\[2ex] \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad a = 0,\ b = 1, \\[2ex] \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a} & \text{si} \quad -1 \leqslant a < 0, \\[2ex] \dfrac{3}{4} & \text{si} \quad a = 0,\ b = -1, \\[2ex] 1 + \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a} & \text{si} \quad 0 < a < 1,\ b < 0. \end{cases}$$

Por ser p un homeomorfismo satisface trivialmente la definición de aplicación recubridora (Munkres, 2002: 381). Evidentemente, si $(a,b) \in \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$, la imagen inversa por p de cualquier abierto U tal que

$$(a,b) \in U \subset \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$$

puede escribirse como la *unión disjunta* del único abierto de $(0,1)$ definido por $p^{-1}(U)$. $\square$

Solución 3.3. Según el teorema 77.5 de clasificación (Munkres, 2002: 530), si X es un espacio homeomorfo a una superficie compacta y conexa y $x_0 \in X$, entonces, el grupo

$$H_1(X) = \pi_1(X, x_0)/\big[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)\big]$$

es isomorfo a uno de los dos grupos siguientes

$$\underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n}; \quad \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_{n-1} \times \frac{\mathbb{Z}}{(2)}.$$

Como ninguno de estos grupos es a su vez isomorfo a

$$\mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{(3)},$$

se concluye que X no puede ser homeomorfo a una superficie compacta conexa.

Solución 3.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 14, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 15 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,A\rangle, \langle A,B,C\rangle, \langle A,C,D\rangle\big\}.$$

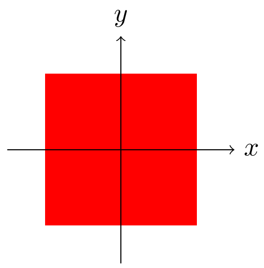

Figura 14: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

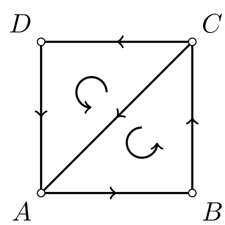

Figura 15: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por los 2-símplices de K,

$$B_1(K) = \partial_2\big(\langle A,B,C\rangle, \langle A,C,D\rangle\big) = \Big(\partial_2\big(\langle A,B,C\rangle\big), \partial_2\big(\langle A,C,D\rangle\big)\Big) =$$

$$= \big(\underbrace{\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle}_{g_1}, \underbrace{-\langle C,A\rangle + \langle C,D\rangle + \langle D,A\rangle}_{g_2} \big) = (g_1, g_2) = (g_1) \oplus (g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1 \langle A,B\rangle + \lambda_2 \langle B,C\rangle + \lambda_3 \langle C,A\rangle + \lambda_4 \langle C,D\rangle + \lambda_5 \langle D,A\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1 \partial_2\big(\langle A,B\rangle\big) + \lambda_2 \partial_2\big(\langle B,C\rangle\big) + \lambda_3 \partial_2\big(\langle C,A\rangle\big) + \lambda_4 \partial_2\big(\langle C,D\rangle\big) + \lambda_5 \partial_2\big(\langle D,A\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B-A) + \lambda_2(C-B) + \lambda_3(A-C) + \lambda_4(D-C) + \lambda_5(A-D) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)C + (\lambda_4 - \lambda_5)D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_4 - \lambda_5 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \lambda_1 - \lambda_4 \\ \lambda_5 &= \lambda_4 \end{aligned}\right\} \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1 \langle A,B\rangle + \lambda_1 \langle B,C\rangle + (\lambda_1 - \lambda_4) \langle C,A\rangle + \lambda_4 \langle C,D\rangle + \lambda_4 \langle D,A\rangle =$$

$$= \lambda_1 \big(\underbrace{\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle}_{g_1} \big) + \lambda_4 \big(\underbrace{-\langle C,A\rangle + \langle C,D\rangle + \langle D,A\rangle}_{g_2} \big),$$

para todo $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Entonces

$$Z_1(K) = (g_1) \oplus (g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1) \oplus (g_2)}{(g_1) \oplus (g_2)} \cong \{0\}.$$

El problema también se puede resolver de otra forma. En primer lugar podemos probar que el espacio X es contractible. En efecto, si consideramos la aplicación H definida por

$$X \times I \ni (x,t) \longrightarrow H(x,t) = (1-t)x \in X,$$

podemos ver que está bien definida, es continua y verifica para todo $x \in X$

$$H(x,0) = x, \quad H(x,1) = (0,0);$$

lo que demuestra que la aplicación identidad es homotópicamente nula. Sabiendo que $X \approx |K|$ podemos deducir que $|K|$ también es contractible, y por tanto $H_1(K) \cong \{0\}$.

Septiembre de 2014 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 4.1. Sea X un espacio topológico y sean $f, g : X \longrightarrow \mathbb{S}^n$ dos aplicaciones continuas tales que

$$f(x) \neq -g(x), \ \forall x \in X.$$

Pruebe que $f \simeq g$.

Ejercicio 4.2. Sean $\mathbb{R}$ la recta real, $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad del plano euclídeo,

$$\mathbb{S}^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\big\},$$

$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora definida por

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1,$$

$q : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora definida por

$$q\big((\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)\big) = (\cos 4\pi x, \operatorname{sen} 4\pi x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estudie si existe una aplicación continua $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ g = q$.

Ejercicio 4.3. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por $X = C_1 \cup C_2$, siendo

$$C_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\big\},$$

$$C_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\big\}.$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X, (0, 0)\big)$.

Ejercicio 4.4. Sea

$$X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 16\big\},$$

Se considera X como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 4.1. La aplicación F definida por

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow F(x, t) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{\|(1-t)f(x) + tg(x)\|} \in \mathbb{S}^n$$

está bien definida y es continua, puesto que el denominador no se anula en ningún punto $x \in X$. Para comprobar esta afirmación, supongamos que existe $x \in X$ tal que anula el denominador,

$$f(x), g(x) \in \mathbb{S}^n \Longrightarrow \|f(x)\| = \|g(x)\| = 1;$$

$$\|(1-t)f(x) + tg(x)\| = 0 \Longrightarrow (1-t)f(x) + tg(x) = 0.$$

En este caso ha de ser $t < 1$ puesto que de ser $t = 1$ se tiene que $g(x) = 0 \notin \mathbb{S}^n$. Entonces,

$$f(x) = -\frac{t}{1-t}g(x) \Longrightarrow \|f(x)\| = \left|-\frac{t}{1-t}\right| \|g(x)\| \Longrightarrow 1 = \left|-\frac{t}{1-t}\right| \Longrightarrow |1-t| = |t| \Longrightarrow t = \frac{1}{2}.$$

Pero entonces,

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) f(x) + \frac{1}{2} g(x) = 0 \Longrightarrow f(x) + g(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = -g(x),$$

lo cual nos lleva a una contradicción.

Por otra parte, la aplicación F verifica para todo $x \in X$,

$$F(x,0) = \frac{f(x)}{\|f(x)\|} = f(x), \quad F(x,1) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = g(x);$$

con lo que F es una homotopía, y entonces $f \simeq g$. $\square$

Solución 4.2. Similar al ejercicio 1.2 de la página 4.

Solución 4.3. El subespacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ y el punto $p = (0,0) \in X$ se representan en la figura 16.

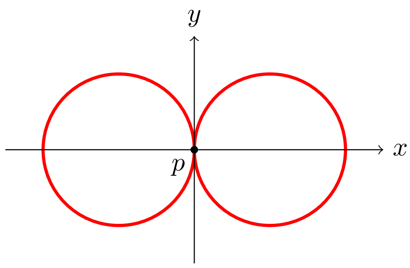

Figura 16: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

Los subconjuntos dados, $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^2$, son cerrados y verifican $C_1 \cap C_2 = \{p\}$. Consideramos además los conjuntos abiertos (respecto de la topología inducida en X) U y V representados en la figura 17 y la figura 18, y definidos por

$$U = \big\{(x,y) \in X : \ x < 1\big\}, \quad V = \big\{(x,y) \in X : \ x > -1\big\}.$$

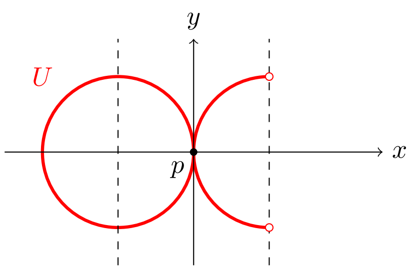

Figura 17: Subconjunto abierto U.

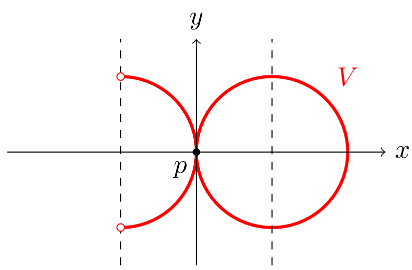

Figura 18: Subconjunto abierto V.

Es inmediato ver que $C_1 \subset U$, $C_2 \subset V$, $X = U \cup V$, $p \in U \cap V$, y que los conjuntos U y V son conexos por caminos. Además, vamos a comprobar que $U \cap V$ es simplemente conexo. Sea la aplicación $f : U \cap V \longrightarrow W$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,|x|) & \text{si} \quad y > 0, \\ (0,0) & \text{si} \quad y = 0, \\ (x,-|x|) & \text{si} \quad y < 0; \end{cases}$$

siendo W el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, con su topología usual, representado en la figura 19 y definido de la forma

$$W = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = x, \ -1 < x < 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = -x, \ -1 < x < 1\big\}.$$

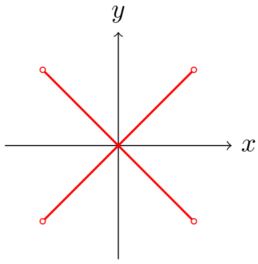

Figura 19: Subespacio topológico W.

La aplicación f antes definida es un homeomorfismo puesto que es continua y tiene inversa también continua $f^{-1} : W \longrightarrow U \cap V$ dada por

$$f^{-1}(x,y) = \begin{cases} \left(1 - \sqrt{1-y^2}, y\right) & \text{si} \quad x > 0, \\ (0,0) & \text{si} \quad x = 0, \\ \left(\sqrt{1-y^2} - 1, y\right) & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

Como además $f(p) = p$, y teniendo en cuenta que W es un polígono estrellado podemos afirmar entonces que

$$\pi_1(U \cap V, p) \cong \pi_1(W, p) \cong \{0\}.$$

Y hemos probado, como se pretendía, que $U \cap V$ es simplemente conexo.

Consideramos también la aplicación g, la simetría respecto del eje OY definida por

$$U \ni (x,y) \longrightarrow g(x,y) = (-x,y) \in V,$$

que nuevamente es un homeomorfismo puesto que es continua y tiene inversa continua definida por

$$V \ni (x,y) \longrightarrow g^{-1}(x,y) = (-x,y) \in U.$$

Como se verifica $g(p) = p$, podemos afirmar que

$$\pi_1(U,p) \cong \pi_1(V,p).$$

Con todo esto estamos en condiciones de aplicar el corolario 70.3 (Munkres, 2002: 490) al teorema de Seifert-van Kampen, y podemos asegurar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(U,p).$$

Para terminar, calcularemos $\pi_1(U,p)$. Sea la aplicación $r : U \longrightarrow C_1$ definida por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in C_1, \\ p & \text{si} \quad x \in U \setminus C_1. \end{cases}$$

Evidentemente r es una aplicación continua, por lo que es una retracción, puesto que verifica $r \circ j = 1_{C_1}$ y $j \circ r \simeq 1_U$, siendo $j : C_1 \longrightarrow U$ la aplicación inclusión y $1_{C_1} : C_1 \longrightarrow C_1$, $1_U : U \longrightarrow U$ las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación, sea la aplicación H definida por

$$U \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)(x,y) + tr(x,y) \in U.$$

Así, H es una aplicación bien definida y continua que verifica para todo $(x, y) \in U$,

$$H\big((x,y),0\big) = (x,y), \quad H\big((x,y),1\big) = r(x,y) \in C_1;$$

y para todo $(x, y) \in C_1$ y todo $t \in I$,

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Por tanto, la homotopía H es una retracción de deformación de U en C_1. Y por ser C_1 un retracto de deformación de U, en virtud del teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410), podemos concluir que

$$\pi_1(U,p) \cong \pi_1(C_1,p) \cong \pi_1\big(\mathbb{S}^1,(1,0)\big) \cong \mathbb{Z},$$

donde la última equivalencia se justifica sabiendo que $C_1 \approx \mathbb{S}^1$, y que ambos conjuntos son conexos por caminos, por lo que el grupo fundamental es independiente del punto base elegido.

Por último, agrupando todos los razonamientos expuestos hasta ahora,

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(U,p) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Solución 4.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 20, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 21 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle \langle A,B,C\rangle\big\}.$$

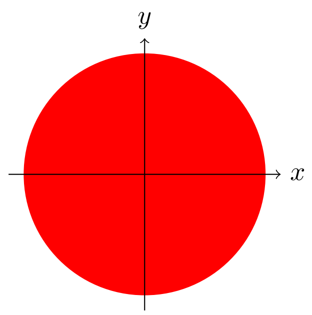

Figura 20: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

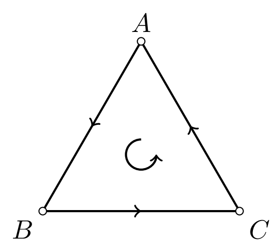

Figura 21: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por los 2-símplices de K,

$$B_1(K) = \partial_2\big(\langle A,B,C\rangle\big) = \big(\underbrace{\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle}_{g_1}\big) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A,B\rangle + \lambda_2\langle B,C\rangle + \lambda_3\langle C,A\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1 \partial_2\big(\langle A, B\rangle\big) + \lambda_2 \partial_2\big(\langle B, C\rangle\big) + \lambda_3 \partial_2\big(\langle C, A\rangle\big) = \lambda_1(B - A) + \lambda_2(C - B) + \lambda_3(A - C) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3)C \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \end{array}\right\} \lambda_1 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_1\langle B, C\rangle + \lambda_1\langle C, A\rangle = \lambda_1\big(\underbrace{\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle C, A\rangle}_{g_1}\big),$$

para todo $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$Z_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1)}{(g_1)} \cong \{0\}.$$

El problema también se puede resolver de otra forma. En primer lugar podemos probar que el espacio X es contractible. En efecto, si consideramos la aplicación H definida por

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow H(x, t) = (1 - t)x \in X,$$

podemos ver que está bien definida, es continua y verifica para todo $x \in X$

$$H(x, 0) = x, \quad H(x, 1) = (0, 0);$$

lo que demuestra que la aplicación identidad es homotópicamente nula. Sabiendo que $X \approx |K|$ podemos deducir que $|K|$ también es contractible, y por tanto $H_1(K) \cong \{0\}$.

Mayo de 2015

Ejercicio 5.1. Ejercicio 13 (Fernández, 2018: 72). Sea $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, y sea $A = \mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$. Pruebe que A es un retracto de deformación de X.

Ejercicio 5.2. Ejercicio 8 (Fernández, 2018: 64). Sea $p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación tal que

$$p\big((\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)\big) = (\cos 6\pi x, \operatorname{sen} 6\pi x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pruebe que p es una aplicación recubridora. Para cada punto $b_0 \in \mathbb{S}^1$, determine el cardinal de la fibra $p^{-1}(b_0)$.

Ejercicio 5.3. Sean A, B los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos mediante

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 0, \ (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 0, \ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1\},$$

y sean $X = A \cup B$, y $p_0 = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$. Determine el grupo fundamental $\pi_1(X, p_0)$.

Ejercicio 5.4. Sea

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$

considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 5.1. Consideramos la aplicación r definida por

$$X \ni x \longrightarrow r(x) = \frac{x}{\|x\|} \in A.$$

Evidentemente r está bien definida, es continua y verifica $r \circ j = 1_A$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y 1_A, 1_X las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación definimos la aplicación H de la forma

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow H(x, t) = (1-t)1_X(x) + t(j \circ r)(x) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} \in X.$$

Así definida, H verifica para todo $x \in X$

$$H(x, 0) = 1_X(x) = x, \quad H(x, 1) = (j \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|} \in A;$$

y para todo $x \in A$ y todo $t \in I$,

$$H(x, t) = x.$$

Por tanto, se ha visto que r es una retracción, H es una homotopía de retracción, y A es un retracto de deformación de X. $\square$

Solución 5.2. Todo punto del plano $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq (0, 0)$, considerado como número complejo $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ se puede representar en la forma módulo-argumento o polar $z = |z|e^{i\theta}$, siendo

$$|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \cos\theta = \frac{x_1}{|z|}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{x_2}{|z|}.$$

Cambiando el problema a la notación dada, podemos escribir

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \ \theta \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{S}^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow p(e^{i\theta}) = e^{3i\theta} \in \mathbb{S}^1.$$

Además, si $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$ necesariamente existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta = \alpha + 2k\pi$. Por otra parte, es inmediato que la aplicación p es continua, y es sobreyectiva puesto que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica

$$e^{i\alpha} = p\left(e^{\frac{i\alpha}{3}}\right).$$

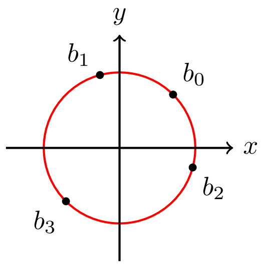

Figura 22: Puntos $b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{S}^1$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera. Sabemos que para el punto $a = e^{i\alpha} \in \mathbb{S}^1$ existe otro punto $b_0 = e^{i\beta} \in \mathbb{S}^1$ tal que $b_0 = p(a)$ y $0 \leqslant \beta < \frac{2\pi}{3}$. Sean también los puntos (véase la figura 22)

$$b_1 = e^{i\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)}, \quad b_2 = e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right)}, \quad b_3 = e^{i(\beta - \pi)};$$

que verifican

$$p(b_1) = p(b_2) = p(b_3) = -p(b_0) = -a.$$

Consideramos el conjunto $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{b_0 = e^{i\beta}\}$ abierto (respecto de la topología inducida en $\mathbb{S}^1$, espacio de Hausdorff). Entonces

$$p^{-1}(V) = \bigcup_{j=1}^{3} U_j$$

es una unión de abiertos disjunto y no vacíos de $\mathbb{S}^1$ definidos por

$$U_j = \left\{e^{i\theta} \in \mathbb{S}^1 : \ \beta + (2j-3)\frac{\pi}{3} < \theta < \beta + (2j-1)\frac{\pi}{3}\right\}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Para cada $j \in \{1, 2, 3\}$ se verifica que la restricción de p al conjunto U_j, $p|_{U_j}$, es un homeomorfismo, puesto que es biyectiva, y tanto dicha aplicación como su inversa son continuas.

En conclusión, se ha probado que para cualquier punto $a \in \mathbb{S}^1$ existe un abierto V que contiene a dicho punto a y que está regularmente cubierto por p, por lo que podemos afirmar que p es una aplicación recubridora. $\square$

Sea $b_0 \in \mathbb{S}^1$ cualquiera. La fibra $p^{-1}(b_0)$ tiene cardinal 3, puesto que con la notación dada podemos caracterizar la aplicación p como

$$\mathbb{S}^1 \ni z \longrightarrow p(z) = z^3 \in \mathbb{S}^1.$$

Entonces,

$$p^{-1}(b_0) = \{z \in \mathbb{S}^1 : \ z^3 = b_0\},$$

y como la ecuación $z^3 = b_0$ tiene exactamente tres raíces complejas distintas, todas ellas en $\mathbb{S}^1$, puesto que

$$b_0 \in \mathbb{S}^1 \Longrightarrow |b_0| = 1;$$

se concluye que $p^{-1}(b_0)$ tiene exactamente tres elementos.

Solución 5.3. En la figura 23 se representa el subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^3$ estudiado y el punto $p = (0, 1, 0)$.

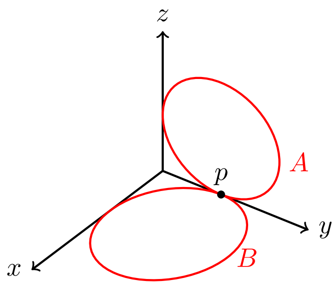

Figura 23: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^3$.

Consideramos la aplicación $f : X \longrightarrow Y$, definida por

$$f(x, y, z) = \begin{cases} (-z, y-1) & \text{si} \quad (x, y, z) \in A \setminus \{p\}, \\ (0, 0) & \text{si} \quad (x, y, z) = p, \\ (x, y-1) & \text{si} \quad (x, y, z) \in B \setminus \{p\}; \end{cases}$$

$$Y = C_1 \cup C_2 = \underbrace{\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\big\}}_{C_1} \cup \underbrace{\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\big\}}_{C_2}.$$

Así definida, la aplicación f es un homeomorfismo, puesto que es continua y tiene inversa también continua dada por

$$f^{-1}(x, y) = \begin{cases} (0, y+1, -x) & \text{si} \quad (x, y) \in C_1 \setminus \big\{(0, 0)\big\}, \\ p(0, 1, 0) & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0), \\ (x, y+1, 0) & \text{si} \quad (x, y) \in C_2 \setminus \big\{(0, 0)\big\}. \end{cases}$$

En consecuencia, $X = A \cup B \approx Y = C_1 \cup C_2$, y podemos aplicar el teorema 52.5 (Munkres, 2002: 380) obteniendo

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1\big(Y, f(p)\big) = \pi_1\big(Y, (0, 0)\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

La última equivalencia se demuestra en el ejercicio 4.3 de la página 17.

Solución 5.4. Similar al ejercicio 4.4 de la página 17.

JUNIO DE 2015

Ejercicio 6.1. Ejercicio 18 (Fernández, 2018: 77). Sea $X = [0,1] \times [0,1]$, y sea $A = [0,1] \times \{0\}$. Pruebe que A es un retracto de deformación de X.

Ejercicio 6.2. Ejercicio 19 (Fernández, 2018: 78). Sea $p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación tal que

$$p\big((\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)\big) = (\cos 4\pi x, \operatorname{sen} 4\pi x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pruebe que p es una aplicación recubridora. Para cada punto $b_0 \in \mathbb{S}^1$, determine el cardinal de la fibra $p^{-1}(b_0)$.

Ejercicio 6.3. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido mediante

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\},$$

siendo

$$p_1 = (0,0), \quad p_2 = (2,0).$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X, (1,0)\big)$.

Ejercicio 6.4. Sea

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big([1,2] \times \{0\}\big),$$

considerado como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 6.1. Consideramos la aplicación r definida por

$$X \ni (x,y) \longrightarrow r(x,y) = (x,0) \in A.$$

Evidentemente r está bien definida, es continua y verifica $r \circ j = 1_A$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y 1_A, 1_X las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación definimos la aplicación H de la forma

$$X \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)1_X(x,y) + t(j \circ r)(x,y) = (1-t)(x,y) + t(x,0) = \big(x,(1-t)y\big) \in X.$$

Así definida, H verifica para todo $x \in X$

$$H\big((x,y),0\big) = 1_X(x,y) = (x,y), \quad H\big((x,y),1\big) = (j \circ r)(x,y) = (x,0) \in A;$$

y para todo $x \in A$ y todo $t \in I$,

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Por tanto, se ha visto que r es una retracción, H es una homotopía de retracción, y A es un retracto de deformación de X. □

Solución 6.2. Todo punto del plano $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ con $x \neq (0,0)$, considerado como número complejo $z = x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}$ se puede representar en la forma módulo-argumento o polar $z = |z|e^{i\theta}$, siendo

$$|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \cos\theta = \frac{x_1}{|z|}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{x_2}{|z|}.$$

Cambiando el problema a la notación dada, podemos escribir

$$\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \ \theta \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathbb{S}^1 \ni e^{i\theta} \longrightarrow p(e^{i\theta}) = e^{2i\theta} \in \mathbb{S}^1.$$

Además, si $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$ necesariamente existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\beta = \alpha + 2k\pi$. Por otra parte, es inmediato que la aplicación p es continua, y es sobreyectiva puesto que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se verifica

$$e^{i\alpha} = p\left(e^{\frac{i\alpha}{2}}\right).$$

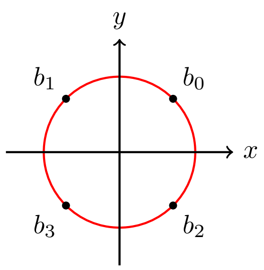

Figura 24: Puntos $b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{S}^1$.

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ cualquiera. Sabemos que para el punto $a = e^{i\alpha} \in \mathbb{S}^1$ existe otro punto $b_0 = e^{i\beta} \in \mathbb{S}^1$ tal que $b_0 = p(a)$ y $0 \leqslant \beta < \pi$. Sean también los puntos (véase la figura 24)

$$b_1 = e^{i\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}, \quad b_2 = e^{i\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad b_3 = e^{i(\beta - \pi)};$$

que verifican

$$p(b_1) = p(b_2) = p(b_3) = -p(b_0) = -a.$$

Consideramos el conjunto $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{b_0 = e^{i\beta}\}$ abierto (respecto de la topología inducida en $\mathbb{S}^1$, espacio de Hausdorff). Entonces

$$p^{-1}(V) = U_1 \cup U_2 = \underbrace{\left\{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \ \beta - \frac{\pi}{2} < \theta < \beta + \frac{\pi}{2}\right\}}_{U_1} \cup \underbrace{\left\{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \ \beta + \frac{\pi}{2} < \theta < \beta + \frac{3\pi}{2}\right\}}_{U_2}$$

es una unión de abiertos disjuntos y no vacíos de $\mathbb{S}^1$. Para cada $j \in \{1,2\}$ se verifica que la restricción de p al conjunto U_j, $p|_{U_j}$, es un homeomorfismo, puesto que es biyectiva, y tanto dicha aplicación como su inversa son continuas.

En conclusión, se ha probado que para cualquier punto $a \in \mathbb{S}^1$ existe un abierto V que contiene a dicho punto a y que está regularmente cubierto por p, por lo que podemos afirmar que p es una aplicación recubridora. $\square$

Sea $b_0 \in \mathbb{S}^1$ cualquiera. La fibra $p^{-1}(b_0)$ tiene cardinal 2, puesto que con la notación dada podemos caracterizar la aplicación p como

$$\mathbb{S}^1 \ni z \longrightarrow p(z) = z^2 \in \mathbb{S}^1.$$

Entonces,

$$p^{-1}(b_0) = \{z \in \mathbb{S}^1 : \ z^2 = b_0\},$$

y como la ecuación $z^2 = b_0$ tiene exactamente dos raíces complejas distintas, todas ellas en $\mathbb{S}^1$, puesto que

$$b_0 \in \mathbb{S}^1 \Longrightarrow |b_0| = 1;$$

se concluye que $p^{-1}(b_0)$ tiene exactamente dos elementos.

Solución 6.3. Similar al ejercicio 9.3 de la página 34.

Solución 6.4. Similar al ejercicio 2.4 de la página 10.

Septiembre de 2015 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 7.1. Ejercicio 28 (Fernández, 2018: 93). Sea $p_0 = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Determine una circunferencia C en $\mathbb{R}^2$ tal que C sea un retracto de deformación de $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$.

Ejercicio 7.2. Sea $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora tal que

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1,$$

y sea $q : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación recubridora tal que

$$q\big((\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)\big) = (\cos 6\pi x, \operatorname{sen} 6\pi x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Estudie si existe una aplicación continua $g : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $p \circ g = q$.

Ejercicio 7.3. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = D_1 \cup D_2,$$

siendo

$$D_1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1\big\},$$
$$D_2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + 1)^2 + y^2 \leqslant 1\big\}.$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X, (0, 0)\big)$.

Ejercicio 7.4. Sean $[A, B, C]$ y $[C, D, H]$ dos 2-símplices cerrados en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$[A, B, C] \cap [C, D, H] = \{C\}.$$

Se considera $X = [A, B] \cup [B, C] \cup [C, A] \cup [C, D]$ como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 7.1. Llamaremos $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{p_0\}$. Una posible solución es la circunferencia

$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1\big\}.$$

En efecto, sea r la aplicación definida por

$$X \ni x \longrightarrow r(x) = \frac{x - p_0}{\|x - p_0\|} \in C.$$

Evidentemente r está bien definida, es continua y verifica $r \circ j = 1_C$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y 1_C, 1_X las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación definimos la aplicación H de la forma

$$X \times I \ni (x, t) \longrightarrow H(x, t) = (1 - t)1_X(x) + t(j \circ r)(x) = (1 - t)x + t\frac{x - p_0}{\|x - p_0\|} \in X.$$

Así definida, H verifica para todo $x \in X$

$$H(x, 0) = 1_X(x) = x, \quad H(x, 1) = (j \circ r)(x) = \frac{x - p_0}{\|x - p_0\|} \in A;$$

y para todo $x \in A$ y todo $t \in I$,

$$H(x, t) = x.$$

Por tanto, se ha visto que r es una retracción, H es una homotopía de retracción, y A es un retracto de deformación de X. $\square$

Solución 7.2. Similar al ejercicio 1.2 de la página 4.

Solución 7.3. El subespacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ y el punto $p = (0,0) \in X$ se representan en la figura 25.

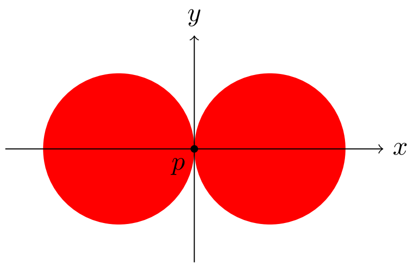

Figura 25: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

En primer lugar vamos a comprobar que X es un polígono estrellado. Sea $q_1(x,y) \in D_1$, y consideramos el segmento de $\mathbb{R}^2$

$$[p, q_1] = \big\{(1-t)(0,0) + t(x,y),\ t \in I\big\} = \big\{(tx, ty),\ t \in I\big\}.$$

Sea también $t_0 \in I$. Se tiene que

$$(t_0 x - 1)^2 + (t_0 y)^2 = t_0^2 x^2 - 2t_0 x + 1 + t_0^2 y^2 = t_0^2 x^2 - 2t_0 x + t_0^2 + t_0^2 y^2 + 1 - t_0^2 =$$

$$= t_0^2\big[(x-1)^2 + y^2\big] + 1 - t_0^2 \leqslant t_0^2 + 1 - t_0^2 = 1 \Longrightarrow (t_0 x, t_0 y) \in D_1 \Longrightarrow [p, q_1] \subset D_1.$$

Procediendo de la misma forma, si tomamos un punto $q_2 \in D_2$ cualquiera, se puede demostrar que el segmento $[p, q_2]$ está contenido en D_2.

Por tanto, se ha demostrado que X es un polígono estrellado, por lo que también es un espacio contractible y simplemente conexo. En consecuencia $\pi_1(X, p) \cong \{0\}$.

Solución 7.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 26, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 27 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle, \langle D,C\rangle\big\}.$$

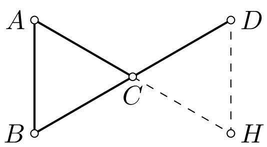

Figura 26: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

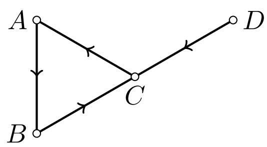

Figura 27: C.s.g.o. K.

Se puede ver que a partir de aquí el problema es similar al ejercicio 2.4 de la página 10.

Septiembre de 2015 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 8.1. Sea Y un espacio topológico tal que existe S, subespacio de Y, de modo que S es homeomorfo a la circunferencia $\mathbb{S}^1$ y S es un retracto de deformación de Y. Pruebe que Y es homotópicamente equivalente al cilindro $X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Ejercicio 8.2. Sea p la aplicación definida por

$$[0,+\infty) \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1.$$

Estudie si p es un homeomorfismo local. Estudie si p es una aplicación recubridora.

Ejercicio 8.3. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = C_1 \cup D_2,$$

siendo

$$C_1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\big\},$$

$$D_2 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 \leqslant 1\big\},$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X,(0,0)\big)$.

Ejercicio 8.4. Sean $[A,B,C]$ y $[C,D,H]$ dos 2-símplices cerrados en $\mathbb{R}^2$ tales que

$$[A,B,C] \cap [C,D,H] = \{C\}.$$

Se considera $X = [A,B,C] \cup [C,D]$ como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 8.1. En primer lugar demostraremos que $Z = \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ es un retracto de deformación de X. En efecto, sea r la retracción definida por

$$X = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \ni (p,x) \longrightarrow r(p,x) = (p,0) \in Z = \mathbb{S}^1 \times \{0\}.$$

Se verifica que $r \circ j = 1_Z$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y 1_X y 1_Z las aplicaciones identidad. La última afirmación se prueba mediante la aplicación H definida por

$$X \times I \ni \big((p,x),t\big) \longrightarrow H\big((p,x),t\big) = (1-t)1_X(p,x) + tr(p,x) = (1-t)(p,x) + t(p,0) = \big(p,(1-t)x\big) \in X,$$

puesto que verifica para todo $(p,x) \in X$

$$H\big((p,x),0\big) = 1_Y(p,x) = (p,x), \quad H\big((p,x),1\big) = (j \circ r)(p,x) = (p,0) \in Z;$$

y para todo $(p,0) \in Z$ y todo $t \in I$,

$$H\big((p,0),t\big) = (p,0).$$

Por otra parte, la aplicación f definida por

$$Z = \mathbb{S}^1 \times \{0\} \ni (p,0) \longrightarrow f(p,0) = p \in \mathbb{S}^1$$

es un homeomorfismo, puesto que está bien definida, es continua y tiene inversa también continua dada por

$$\mathbb{S}^1 \ni p \longrightarrow f^{-1}(p) = (p, 0) \in \mathbb{S}^1 \times \{0\} = Z.$$

Con los resultados anteriores y aplicando el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410), podemos escribir, para cualquier punto $(q, x) \in X$

$$\pi_1\big(X, (q, x)\big) \cong \pi_1\big(Z, (q, 0)\big) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, q) \cong \mathbb{Z}.$$

Por último, si S es un retracto de deformación de Y existe una deformación $s : Y \longrightarrow S$, y si $S \approx \mathbb{S}^1$ existe un homeomorfismo $g : S \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Aplicando de nuevo el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410), para cualquier punto $y \in Y$ se tiene que

$$\pi_1(Y, y) \cong \pi_1\big(S, r(y)\big) \cong \pi_1\Big(\mathbb{S}^1, g\big(r(y)\big)\Big) \cong \mathbb{Z}.$$

□

Solución 8.2. La aplicación p no es un homeomorfismo local, y por tanto tampoco es una aplicación recubridora. En efecto, consideramos el punto 0 del conjunto $[0, +\infty)$, y sea $U = [0, \varepsilon)$ cualquier entorno abierto respecto de la topología inducida en $[0, +\infty)$ de 0. Si $\varepsilon \geqslant 2\pi$ la aplicación $p|_U$ no es un homeomorfismo, puesto que no es sobreyectiva,

$$p(0) = p(2\pi) = (1, 0).$$

Supongamos que $\varepsilon < 2\pi$. En ese caso, que se representa en la figura 28, se tiene que

$$p(U) = p\big([0, \varepsilon)\big) = \big\{(\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1 : \ 0 \leqslant x < \varepsilon < 2\pi\big\},$$

y es evidente que $p(U)$ no es un conjunto abierto en $\mathbb{S}^1$, puesto que cualquier entorno abierto del punto $p(0) = (1, 0) \in p(U)$ contiene puntos de $\mathbb{S}^1$ que no están en $p(U)$. La aplicación $p|_U$ no es abierta si $\varepsilon < 2\pi$, por lo que tampoco es un homeomorfismo.

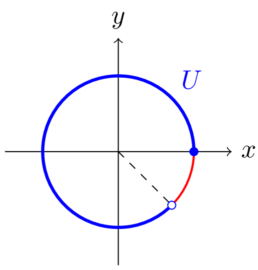

Figura 28: Subconjunto $p(U) \subset \mathbb{S}^1$ para $\varepsilon < 2\pi$.

Solución 8.3. El subespacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ y el punto $p = (0, 0) \in X$ se representan en la figura 29.

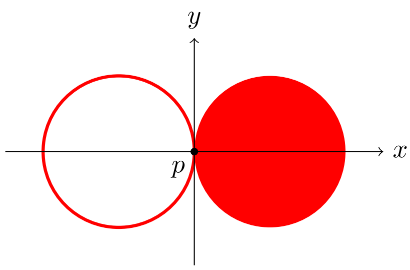

Figura 29: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

En primer lugar vamos a comprobar que el conjunto C_1 es un retracto de deformación del espacio X. consideramos la aplicación $r : X \longrightarrow C_1$ definida por

$$r(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in C_1, \\ p & \text{si} \quad x \in X \setminus C_1. \end{cases}$$

Evidentemente r está bien definida y es continua, lo que nos permite definir una nueva aplicación H de la forma

$$X \times I \ni (x,t) = (1-t)x + t(j \circ r)(x) \in X,$$

que también está bien definida, es continua y verifica para todo $x \in X$

$$H(x,0) = 1_X(x) = x, \quad H(x,1) = (j \circ r)(x) \in C_1,$$

y para todo $x \in X$ y todo $t \in I$

$$H(x,t) = x.$$

En resumen, se ha visto que $r \circ j = 1_{C_1}$, $j \circ r \simeq 1_X$, por lo que H es una homotopía de retracción de X en C_1, r una retracción, y C_1 un retracto de deformación de X (se entiende que $j : C_1 \longrightarrow X$ es la aplicación inclusión y $1_X : X \longrightarrow X$, $1_{C_1} : C_1 \longrightarrow C_1$ las aplicaciones identidad).

Sabiendo además que $C_1 \approx \mathbb{S}^1$ y que ambos conjuntos son conexos por caminos, por lo que el grupo fundamental no depende del punto base elegido, podemos aplicar el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) y obtener

$$\pi_1(X,p) \cong \pi(C_1,p) \cong \pi_1\big(\mathbb{S}^1,(1,0)\big) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 8.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 30, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 31 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle, \langle D,C\rangle, \langle A,B,C\rangle\big\}.$$

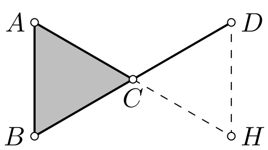

Figura 30: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

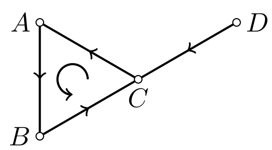

Figura 31: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por el único 2-símplice de K, $\langle A,B,C\rangle$. Entonces,

$$g_1 = \partial_2\big(\langle A,B,C\rangle\big) = \langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle \Longrightarrow B_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1 \langle A, B \rangle + \lambda_2 \langle B, C \rangle + \lambda_3 \langle C, A \rangle + \lambda_4 \langle D, C \rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1 \partial_2\big(\langle A, B \rangle\big) + \lambda_2 \partial_2\big(\langle B, C \rangle\big) + \lambda_3 \partial_2\big(\langle C, A \rangle\big) + \lambda_4 \partial_2\big(\langle D, C \rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B - A) + \lambda_2(C - B) + \lambda_3(A - C) + \lambda_4(C - D) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)C - \lambda_4 D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \\ -\lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_4 = 0 \end{array}\right\} \lambda_1 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1 \langle A, B \rangle + \lambda_1 \langle B, C \rangle + \lambda_1 \langle C, A \rangle = \lambda_1 \big(\underbrace{\langle A, B \rangle + \langle B, C \rangle + \langle C, A \rangle}_{g_1} \big),$$

para todo $\lambda_1 \in \mathbb{Z}$. Entonces

$$Z_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1)}{(g_1)} \cong \{0\}.$$

Mayo de 2016

Ejercicio 9.1. Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X,(1,0)\big)$, siendo

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < x^2 + y^2 < 4\}.$$

Ejercicio 9.2. Ejercicio 19 (Fernández, 2018: 78). Sean $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad del plano euclídeo,

$$\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\},$$

$p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación definida mediante

$$\mathbb{S}^1 \ni z \longrightarrow p(z) = z^2 \in \mathbb{S}^1,$$

donde hemos identificado $\mathbb{S}^1$ con

$$\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}.$$

Pruebe que p es una aplicación recubridora.

Ejercicio 9.3. Determine el grupo fundamental de cada uno de los siguientes espacios:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$, siendo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, $p_1 \neq p_2$.

(b) $X = C_1 \cup C_2$, $C_1 \approx \mathbb{S}^1 \approx C_2$, $C_1 \cap C_2 = \{p_0\}$, siendo X de Hausdorff, y C_1, C_2 subespacios de X.

Ejercicio 9.4. Sea

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1, \ y \geqslant 0\},$$

subespacio de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 9.1. El espacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ y el punto $p = (1,0)$ se representan en la figura 32.

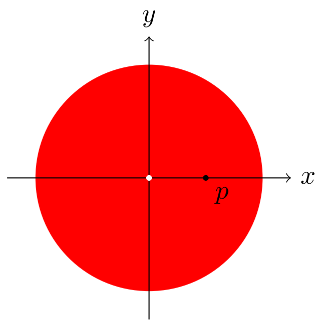

Figura 32: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

Demostraremos en primer lugar que $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de X. Consideramos la aplicación r definida por

$$X \ni x \longrightarrow r(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1.$$

Evidentemente r está bien definida, es continua y verifica $r \circ j = 1_{\mathbb{S}^1}$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y $1_{\mathbb{S}^1}$, 1_X las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación definimos la aplicación H de la forma

$$X \times I \ni (x,t) \longrightarrow H(x,t) = (1-t)1_X(x) + t(j \circ r)(x) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} \in X.$$

Así, H está bien definida, es continua, y verifica para todo $x \in X$

$$H(x,0) = 1_X(x) = x, \quad H(x,1) = (j \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1;$$

y para todo $x \in \mathbb{S}^1$ y todo $t \in I$,

$$H(x,t) = x.$$

Por tanto, se ha visto que r es una retracción, H es una homotopía de retracción, y $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de X.

Aplicando el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410), podemos afirmar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1\big(\mathbb{S}^1, r(p)\big) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 9.2. Similar al ejercicio 6.2 de la página 25.

Solución 9.3.

(a) Llamaremos $X = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{p_1(x_1,y_1), p_2(x_2,y_2)\big\}$ al espacio de Hausdorff estudiado. Definimos las siguientes aplicaciones (algunas de las cuales pueden ser la identidad), todas ellas homeomorfismos:

- Sea $p_3 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$, y la traslación f_1 definida por

  $$\mathbb{R}^2 \ni x \longrightarrow f_1(x) = x - p_3 \in \mathbb{R}^2;$$

  donde evidentemente f_1 es continua y tiene inversa también continua dada por

  $$\mathbb{R}^2 \ni x \longrightarrow f_1^{-1}(x) = x + p_3 \in \mathbb{R}^2.$$

- Sea θ el ángulo definido por

  $$\theta = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \text{si} \quad x_1 \neq x_2, \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad x_1 = x_2; \end{cases}$$

  y el giro f_2 definido por

  $$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow f_2(x,y) = (x\cos\theta + y \operatorname{sen}\theta, -x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \in \mathbb{R}^2;$$

  donde evidentemente f_2 es continua y tiene inversa también continua dada por

  $$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longrightarrow f_2^{-1}(x,y) = (x\cos\theta - y\operatorname{sen}\theta, x\operatorname{sen}\theta + y\cos\theta) \in \mathbb{R}^2.$$

- Sea $k = \frac{1}{2}\|p_1 - p_2\| > 0$, y la homotecia f_3 definida por

  $$\mathbb{R}^2 \ni x \longrightarrow f_3(x) = \frac{1}{k}x \in \mathbb{R}^2;$$

  donde evidentemente f_3 es continua y tiene inversa también continua dada por

  $$\mathbb{R}^2 \ni x \longrightarrow f_3^{-1}(x) = kx \in \mathbb{R}^2;$$

Entonces, la composición $g = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ es también un homeomorfismo que transforma el espacio dado en un nuevo espacio $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{q_1(-1,0), q_2(1,0)\big\}$, y por tanto, si $p \in X$,

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1\big(Y, g(p)\big) \cong \pi_1\big(Y,(0,0)\big),$$

donde la última equivalencia se deduce de que los espacios X e Y son conexos por caminos.

El conjunto Z representado en la figura 33 y definido por

$$Z = C_1' \cup C_2' = \underbrace{\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x+1)^2 + y^2 = 1\big\}}_{C_1'} \cup \underbrace{\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x-1)^2 + y^2 = 1\big\}}_{C_2'}$$

es un retracto de deformación del espacio Y. En efecto, si consideramos la aplicación $r : Y \longrightarrow Z$ dada por

$$r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1,y)}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} & \text{si} \quad (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \dfrac{(x+1,y)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} & \text{si} \quad (x+1)^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \Big(x, \sqrt{1-(x-1)^2}\Big) & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1,\ y > \sqrt{1-(x-1)^2}, \\ \Big(x, -\sqrt{1-(x-1)^2}\Big) & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1,\ y < -\sqrt{1-(x-1)^2}, \\ \Big(x, \sqrt{1-(x+1)^2}\Big) & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0,\ y > \sqrt{1-(x+1)^2}, \\ \Big(x, -\sqrt{1-(x+1)^2}\Big) & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0,\ y < -\sqrt{1-(x+1)^2}, \\ (0,0) & \text{si} \quad x = 0, \\ (1,0) & \text{si} \quad x > 1, \\ (-1,0) & \text{si} \quad x < -1. \end{cases}$$

La aplicación r está bien definida, es continua y verifica para todo punto $(x,y) \in Z$,

$$r(x,y) = (x,y).$$

Con más detalle, r verifica $r \circ j = 1_Z$ y $j \circ r \simeq 1_Y$, siendo $j : Z \longrightarrow Y$ la aplicación inclusión y $1_Y : Y \longrightarrow Y$, $1_Z : Z \longrightarrow Z$ las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación se puede definir una homotopía de retracción H de la forma

$$Y \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)(x,y) + tr(x,y) \in Y,$$

y que verifica para todo $(x,y) \in Y$

$$H\big((x,y),0\big) = (x,y), \quad H\big((x,y),1\big) = r(x,y) \in Z;$$

y para todo $(x,y) \in Z$ y todo $t \in I$

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

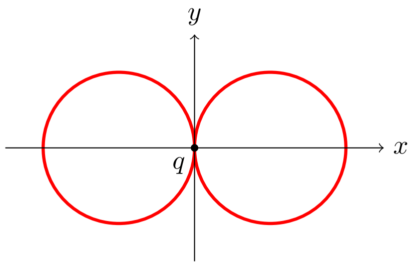

Figura 33: Retracto de deformación $Z \subset \mathbb{R}^2$.

Como además sabemos que $q(0,0) \in Z$ y que $r(q) = q$, podemos aplicar el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) para escribir

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(Y,q) \cong \pi_1(Z,q) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

La última equivalencia se demuestra en el ejercicio 4.3 de la página 17.

(b) Por hipótesis, han de existir dos homeomorfismos $f_1 : C_1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ y $f_2 : C_2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Definimos además los homoeomorfismos $\sigma_1 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, $\sigma_2 : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, que son las rotaciones que verifican

$$\sigma_1\big(f_1(p_0)\big) = (-1,0) \in \mathbb{S}^1,$$

$$\sigma_2\big(f_2(p_0)\big) = (1,0) \in \mathbb{S}^1.$$

Definimos también los homeomorfismos τ_1 y τ_2, que en este caso son las traslaciones

$$\mathbb{S}^1 \ni (x,y) \longrightarrow \tau_1(x,y) = (x+1,y) \in C_1' = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\big\},$$

$$\mathbb{S}^1 \ni (x,y) \longrightarrow \tau_2(x,y) = (x-1,y) \in C_2' = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\big\}.$$

Con todo esto podemos afirmar que la aplicación $g : X : C_1 \cup C_2 \longrightarrow Z = C_1' \cup C_2'$ definida por

$$g(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccl} \tau_1\Big(\sigma_1\big(f_1(x,y)\big)\Big) & \text{si} & (x,y) \in C_1 \setminus \{p_0\}, \\ (0,0) & \text{si} & (x,y) = p_0, \\ \tau_2\Big(\sigma_2\big(f_2(x,y)\big)\Big) & \text{si} & (x,y) \in C_2 \setminus \{p_0\}; \end{array} \right.$$

es también un homeomorfismo, puesto que está bien definida, es continua, y tiene inversa también continua dada por

$$g^{-1}(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccl} f_1^{-1}\Big(\sigma_1^{-1}\big(\tau_1^{-1}(x,y)\big)\Big) & \text{si} & (x,y) \in C_1' \setminus \big\{(0,0)\big\}, \\ p_0 & \text{si} & (x,y) = (0,0), \\ f_2^{-1}\Big(\sigma_2^{-1}\big(\tau_2^{-1}(x,y)\big)\Big) & \text{si} & (x,y) \in C_2' \setminus \big\{(0,0)\big\}. \end{array} \right.$$

En consecuencia, $X = C_1 \cup C_2 \approx Z = C_1' \cup C_2'$, y podemos aplicar el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) obteniendo

$$\pi_1(X,p_0) \cong \pi_1\big(Z, g(p_0)\big) = \pi_1\big(Z,(0,0)\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

La última equivalencia se demuestra en el ejercicio 4.3 de la página 17. Conviene aclarar también que como los conjuntos X y Z son conexos por caminos el grupo fundamental es el mismo con independencia del punto base elegido.

Solución 9.4. Similar al ejercicio 1.4 de la página 4.

Junio de 2016

Ejercicio 10.1. Ejercicio 3 (Fernández, 2018: 13). Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X,(1,0)\big)$, siendo

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}.$$

Ejercicio 10.2. Ejercicio 8 (Fernández, 2018: 64). Sean $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad del plano euclídeo,

$$\mathbb{S}^1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=1\big\},$$

$p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación definida mediante

$$\mathbb{S}^1 \ni z \longrightarrow p(z) = z^3 \in \mathbb{S}^1,$$

donde hemos identificado $\mathbb{S}^1$ con

$$\big\{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\big\}.$$

Pruebe que p es una aplicación recubridora.

Ejercicio 10.3. Determine el grupo fundamental de cada uno de los siguientes espacios:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1,p_2\}$, siendo $p_1,p_2 \in \mathbb{R}^2$, $p_1 \neq p_2$.

(b) $X = C_1 \cup C_2$, $C_1 \approx \mathbb{S}^1 \approx C_2$, $C_1 \cap C_2 = \{p_0\}$, siendo X de Hausdorff, y C_1, C_2 subespacios de X.

Ejercicio 10.4. Sea

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2=1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leqslant 1, \ y \leqslant 0\big\},$$

subespacio de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 10.1. Demostraremos en primer lugar que $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de X. Consideramos la aplicación r definida por

$$X \ni x \longrightarrow r(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1.$$

Evidentemente r está bien definida, es continua y verifica $r \circ j = 1_{\mathbb{S}^1}$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y $1_{\mathbb{S}^1}$, 1_X las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación definimos la aplicación H de la forma

$$X \times I \ni (x,t) \longrightarrow H(x,t) = (1-t)1_X(x) + t(j \circ r)(x) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} \in X.$$

Así, H está bien definida, es continua, y verifica para todo $x \in X$

$$H(x,0) = 1_X(x) = x, \quad H(x,1) = (j \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1;$$

y para todo $x \in \mathbb{S}^1$ y todo $t \in I$,

$$H(x,t) = x.$$

Por tanto, se ha visto que r es una retracción, H es una homotopía de retracción, y $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de X.

Llamando $p = (1,0) \in \mathbb{S}^1 \subset X$, y aplicando el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410), podemos afirmar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1\big(\mathbb{S}^1, r(p)\big) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,p) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 10.2. Similar al ejercicio 5.2 de la página 22.

Solución 10.3. Similar al ejercicio 9.3 de la página 34.

Solución 10.4. Similar al ejercicio 1.4 de la página 4.

Septiembre de 2016 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 11.1. Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X,(1,0)\big)$, siendo

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geqslant 1\big\}.$$

Ejercicio 11.2. Teorema 53.1 (Munkres, 2002: 383). Sean $\mathbb{S}^1$ la circunferencia unidad del plano euclídeo,

$$\mathbb{S}^1 = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\},$$

$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación definida mediante

$$\mathbb{R} \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1.$$

Pruebe que p es una aplicación recubridora.

Ejercicio 11.3. Determine el grupo fundamental de cada uno de los siguientes espacios:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$, siendo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, $p_1 \neq p_2$,

(b) $X = \mathbb{S}^1 \cup \big([-1,1] \times \{0\}\big)$, es decir, el *espacio theta*.

Ejercicio 11.4. Sea

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geqslant 1,\ x \geqslant 1\big\},$$

subespacio de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 11.1. Demostraremos en primer lugar que $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de X. Consideramos la aplicación r definida por

$$X \ni x \longrightarrow r(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1.$$

Evidentemente r está bien definida, es continua y verifica $r \circ j = 1_{\mathbb{S}^1}$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y $1_{\mathbb{S}^1}$, 1_X las aplicaciones identidad. Para comprobar la última afirmación definimos la aplicación H de la forma

$$X \times I \ni (x,t) \longrightarrow H(x,t) = (1-t)1_X(x) + t(j \circ r)(x) = (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} \in X.$$

Así, H está bien definida, es continua, y verifica para todo $x \in X$

$$H(x,0) = 1_X(x) = x, \quad H(x,1) = (j \circ r)(x) = \frac{x}{\|x\|} \in \mathbb{S}^1;$$

y para todo $x \in \mathbb{S}^1$ y todo $t \in I$,

$$H(x,t) = x.$$

Por tanto, se ha visto que r es una retracción, H es una homotopía de retracción, y $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de X.

Llamando $p = (1,0) \in \mathbb{S}^1 \subset X$, y aplicando el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410), podemos afirmar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1\big(\mathbb{S}^1, r(p)\big) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 11.2. En primer lugar, hemos de notar que p es una aplicación continua, puesto que es composición de aplicaciones continuas. Por otra parte, la aplicación p también es sobreyectiva, puesto que para todo $q \in \mathbb{S}^1$ existe (al menos) un valor $x \in \mathbb{R}$ tal que $p(x) = q$.

Consideremos ahora los subconjuntos abiertos $A, B \subset \mathbb{S}^1$, definidos por

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : \; x < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : \; x > -1\},$$

y que verifican $A \cup B = \mathbb{S}^1$. Calcularemos $p^{-1}(A)$ y $p^{-1}(B)$.

$$p^{-1}(A) = \big\{x \in \mathbb{R} : \; p(x) \in U\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : \; \cos 2\pi x < 1\big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{(k, k+1)}_{U_k} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U_k;$$

$$p^{-1}(B) = \big\{x \in \mathbb{R} : \; p(x) \in V\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} : \; \cos 2\pi x > -1\big\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \underbrace{\left(\frac{1}{2} - k, \frac{1}{2} + k\right)}_{V_k} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} V_k.$$

Sea $k \in \mathbb{Z}$. Las restricciones de p a los conjuntos U_k y V_k se pueden definir como

$$U_k \ni x \longrightarrow p|_{U_k}(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in A \subset \mathbb{S}^1,$$

$$V_k \ni x \longrightarrow p|_{V_k}(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in B \subset \mathbb{S}^1;$$

y ambas aplicaciones son continuas, biyectivas y con función inversa también continua, independientemente del valor de $k \in \mathbb{Z}$.

Se ha visto que ambos conjuntos abiertos A y B están regularmente cubiertos por p. Sea $q \in \mathbb{S}^1 = A \cup B$. Entonces q ha de estar contenido al menos en uno de los abiertos A o B, por lo que en cualquier caso tiene un entorno regularmente cubierto por p, lo que prueba que p es una aplicación recubirdora. $\square$

Solución 11.3.

(a) Similar al ejercicio 9.3 de la página 34.

(b) En la figura 34 se representa el subespacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ estudiado. Elegimos, por ejemplo, el punto $p(1, 0) \in X$, puesto que por ser X conexo por caminos el grupo fundamental es independiente del punto base elegido.

$$X = \mathbb{S}^1 \cup W = \mathbb{S}^1 \cup \underbrace{\big([-1, 1] \times \{0\}\big)}_{W} = \mathbb{S}^1 \cup \underbrace{\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; -1 \leqslant x \leqslant 1, \; y = 0\big\}}_{W}.$$

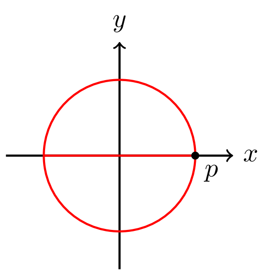

Figura 34: Subespacio topológico X.

Consideramos además los conjuntos abiertos (respecto de la topología inducida en X) U y V representados respectivamente en la figura 35 y la figura 36, y definidos por

$$U = \{(x,y) \in X : \ y < 1\}, \quad V = \{(x,y) \in X : \ y > -1\}.$$

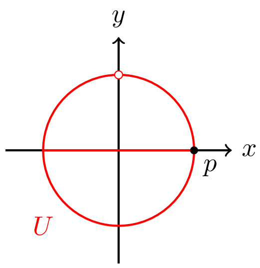

Figura 35: Subconjunto abierto U.

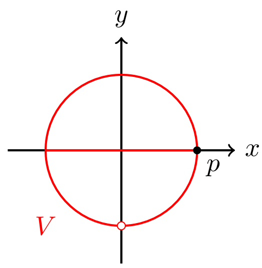

Figura 36: Subconjunto abierto V.

Es inmediato ver que $X = U \cup V$, $p \in U \cap V$, y que los conjuntos U, V y $U \cap V$ son conexos por caminos. Además, a continuación se comprobará que $U \cap V$, representado en la figura 37, es simplemente conexo.

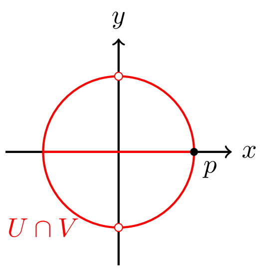

Figura 37: Subconjunto abierto $U \cap V$.

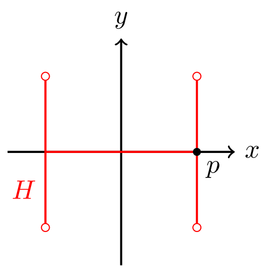

Figura 38: Conjunto $H \approx U \cap V$.

Consideramos la aplicación $f : U \cap V \longrightarrow H$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (1,y) & \text{si} \quad x > 0, \ y \neq 0, \\ (x,y) & \text{si} \quad y = 0, \\ (-1,y) & \text{si} \quad x < 0, \ y \neq 0; \end{cases}$$

y siendo H el conjunto representado en la figura 38 y definido por

$$H = \underbrace{\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leqslant x \leqslant 1, \ y = 0\big\}}_{W} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = 1, \ -1 < y < 1\big\}.$$

La aplicación f está bien definida, es continua, y tiene inversa también continua $f^{-1} : H \longrightarrow U \cap V$ dada por

$$f^{-1}(u,v) = \begin{cases} \big(\sqrt{1-v^2}, v\big) & \text{si} \quad x > 0, \ y \neq 0, \\ (u,v) & \text{si} \quad y = 0, \\ \big(-\sqrt{1-v^2}, v\big) & \text{si} \quad x < 0, \ y \neq 0. \end{cases}$$

Por tanto, f es un homeomorfismo, y $U \cap V \approx H$. Además, el conjunto W es un retracto de deformación de H. Si definimos la aplicación r por

$$H \ni (x,y) \longrightarrow r(x,y) = (x,0) \in W,$$

dicha aplicación está bien definida y es continua. Definimos una nueva aplicación F por

$$H \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow F\big((x,y),t\big) = (1-t)1_H(x,y) + t(j \circ r)(x,y) = \big(x,(1-t)y\big) \in H,$$

que también está bien definida, es continua, y verifica para todo $(x,y) \in H$

$$F\big((x,y),0\big) = 1_H(x,y) = (x,y), \quad F\big((x,y),1\big) = (j \circ r)(x,y) = (x,0) \in W,$$

y para todo $(x,y) \in W$ y todo $t \in I$

$$F\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

En consecuencia, F es una homotopía de retracción de H en W, y W es un retracto de deformación de H. Aplicando el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380) y el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) podemos escribir

$$\pi_1(U \cap V, p) \cong \pi_1(H,p) \cong \pi_1(W,p) \cong \{0\}.$$

La última equivalencia se deduce de que W es un conjunto convexo, contractible y simplemente conexo, y esto prueba, tal y como se pretendía, que $U \cap V$ también es simplemente conexo.

En estas condiciones, el corolario 70.3 (Munkres, 2002: 490) al teorema de Seifert-van Kampen nos permite dar un primer resultado sobre el grupo fundamental del espacio X.

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p).$$

Además, es fácil probar que $\pi_1(U,p) \cong \pi_1(V,p)$, puesto que la simetría σ definida por

$$U \ni (x,y) \longrightarrow \sigma(x,y) = (x,-y) \in V,$$

es un homeomorfismo puesto que es una aplicación continua con inversa también continua dada por

$$V \ni (u,v) \longrightarrow \sigma^{-1}(u,v) = (u,-v) \in U.$$

Esto prueba que $U \approx V$, y aplicando una vez más el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380) obtenemos el resultado buscado,

$$\pi_1(U,p) \cong \pi_1(V,p);$$

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(V,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(U,p).$$

Nos falta únicamente calcular el grupo fundamental $\pi_1(U,p)$. Lo obtendremos en tres pasos. En primer lugar definiremos un conjunto U_1 homeomorfo a U; después daremos un retracto de deformación de U_1, que llamaremos U_2; y por último veremos que el conjunto U_2 es homeomorfo a $\mathbb{S}^1$.

- Sea el conjunto U_1 representado en la figura 39 y definido por

  $$U_1 = W \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 = 1, \ y \leqslant 0\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| = 1, \ 0 < y < 1\big\}.$$

  Definimos la aplicación $g : U \longrightarrow U_1$ por

  $$g(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad y \leqslant 0, \\ (-1,y) & \text{si} \quad x < 0, \ y > 0, \\ (1,y) & \text{si} \quad x > 0, \ y > 0. \end{cases}$$

Entonces g es una aplicación bien definida, continua, y cuya inversa también es una aplicación continua $g^{-1} : U_1 \longrightarrow U$ dada por

$$g^{-1}(u,v) = \begin{cases} (u,v) & \text{si} \quad v \leqslant 0, \\ \big(-\sqrt{1-v^2}, v\big) & \text{si} \quad u < 0, \ v > 0, \\ \big(\sqrt{1-v^2}, v\big) & \text{si} \quad u > 0, \ v > 0. \end{cases}$$

Por tanto, g es un homeomorfisno, y $U \approx U_1$. El corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380) nos asegura que

$$\pi_1(U,p) \cong \pi_1(U_1,p).$$

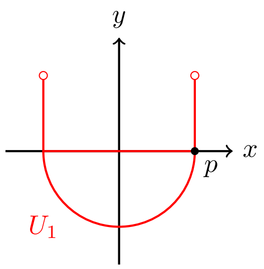

Figura 39: Conjunto $U_1 \approx U$.

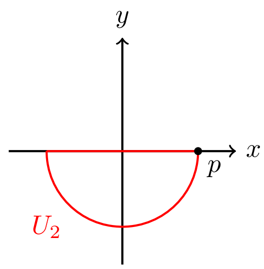

Figura 40: Retracto de deformación U_2.

- Sea el conjunto U_2 representado en la figura 40 y definido por

$$U_2 = W \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1, \ y \leqslant 0\big\}.$$

Definimos la aplicación $s : U_1 \longrightarrow U_2$ por

$$s(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad y \leqslant 0, \\ (x,0) & \text{si} \quad y > 0; \end{cases}$$

que está bien definida y que es continua. Definimos una nueva aplicación G de la forma

$$U_1 \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow G\big((x,y),t\big) = (1-t)1_{U_1}(x,y) + t(j \circ s)(x,y) \in U_2,$$

también bien definida y continua, y que verifica para todo $(x,y) \in U_1$

$$G\big((x,y),0\big) = 1_{U_1}(x,y) = (x,y), \quad G\big((x,y),1\big) = (j \circ s)(x,y) \in U_2,$$

y para todo $(x,y) \in U_2$ y todo $t \in I$

$$G\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Se ha visto que $s \circ j = 1_{U_2}$ y que $j \circ s \simeq 1_{U_1}$, donde $j : U_1 \longrightarrow U_2$ es la aplicación inclusión y $1_{U_1} : U_1 \longrightarrow U_1$, $1_{U_2} : U_2 \longrightarrow U_2$, son las aplicaciones identidad. Dicho se otra forma, se ha visto que G es una homotopía de retracción de U_1 en U_2 y que U_2 es un retracto de deformación de U_1. El teorema 58.3 (Munkres, 2002: 380) nos asegura que

$$\pi_1(U,p) \cong \pi_1(U_1,p) \cong \pi_1(U_2,p).$$

- Sea la aplicación $h : U_2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$h(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad y \leqslant 0, \\ \left(x, \sqrt{1-x^2}\right) & \text{si} \quad y > 0; \end{cases}$$

  Por tanto h es una aplicación bien definida, continua, y cuya inversa también es una aplicación continua $h^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow U_2$ dada por

$$h^{-1}(u,v) = \begin{cases} (u,v) & \text{si} \quad v \leqslant 0, \\ (u,0) & \text{si} \quad v > 0, \end{cases}$$

  Entonces, h es un homeomorfisno, y $U_2 \approx \mathbb{S}^1$. De nuevo, el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380) nos asegura que

$$\pi_1(U,p) \cong \pi_1(U_1,p) \cong \pi_1(U_2,p) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,p).$$

Agrupando todos los resultados obtenidos,

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(U,p) * \pi_1(U,p) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,p) * \pi_1(\mathbb{S}^1,p) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Solución 11.4. Similar al ejercicio 1.4 de la página 4.

Septiembre de 2016 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 12.1. Ejercicio 2 (Fernández, 2018: 55). Sea $p : (0,1) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \setminus \big\{(1,0)\big\}$ la aplicación definida mediante

$$(0,1) \ni x \longrightarrow p(x) = (\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x) \in \mathbb{S}^1.$$

Pruebe que p está bien definida y es una aplicación recubridora.

Ejercicio 12.2. Determine el grupo fundamental de cada uno de los siguientes espacios:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$, siendo $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$, $p_1 \neq p_2$,

(b) $X = \mathbb{S}^1 \cup \big([-1,1] \times \{0\}\big)$, es decir, el *espacio theta*.

Ejercicio 12.3. Ejercicio 3 (Fernández, 2018: 56). Sea X un espacio topológico compacto y conexo y sea a un punto de X tal que

$$\pi_1(X,a)/\big[\pi_1(X,a), \pi_1(X,a)\big] \cong \mathbb{Z} \times \frac{\mathbb{Z}}{(3)}.$$

Pruebe que X no es homeomorfo a una superficie.

Ejercicio 12.4. Sea

$$X = [-1,1] \times [-1,1].$$

Se considera X como subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$. Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 12.1. Similar al ejercicio 3.2 de la página 14.

Solución 12.2. Similar al ejercicio 11.3 de la página 40.

Solución 12.3. Similar al ejercicio 3.3 de la página 14.

Solución 12.4. Similar al ejercicio 3.4 de la página 14.

Mayo de 2017

Ejercicio 13.1. Ejercicio 15 (Fernández, 2018: 74), ejercicio 2 (Munkres, 2002: 401). Pruebe que toda aplicación continua $h : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, que sea homotópicamente nula, tiene un punto fijo (es decir, un punto $p \in \mathbb{S}^1$ tal que $h(p) = p$).

Ejercicio 13.2. Ejercicio 16 (Fernández, 2018: 74). Sea $p : E \longrightarrow \mathbb{S}^1$ una aplicación recubridora, siendo

$$\mathbb{S}^1 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\big\} \subset \mathbb{R}^2,$$

y sea $e_0 \in E$. Pruebe que $\pi_1(E, e_0) \cong \mathbb{Z}$ o bien $\pi_1(E, e_0) \cong \{0\}$.

Aquí, $\mathbb{Z}$ es el grupo aditivo de los números enteros.

Ejercicio 13.3. Ejercicio 17 (Fernández, 2018: 75). Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido mediante $X = \mathbb{R}^2 \setminus M$, siendo

$$M = A \cup \big\{(1, 0)\big\},$$
$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + 1)^2 + y^2 < 1\big\}.$$

Determine el grupo fundamental $\pi_1\big(X, (0, 0)\big)$.

Ejercicio 13.4. Sea

$$X = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x + 1)^2 + y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1\big\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Triangule X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(K)$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado obtenido al determinar la triangulación de X.

Solución 13.1. Según el lema 55.3 (Munkres, 2002: 396), por ser h homotópicamente nula en $\mathbb{S}^1$, se puede extender a una aplicación continua de la forma $f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^1$, con $f|_{\mathbb{S}^1} = h$, y siendo

$$\mathbb{B}^2 = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}.$$

Si llamamos $j : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{B}^2$ a la aplicación inclusión, sabemos que

$$j \circ f : \mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}^2$$

es también una aplicación continua. Aplicando el teorema 55.6 del punto fijo de Brouwer para el disco (Munkres, 2002: 398), sabemos que existe $p \in \mathbb{B}^2$ tal que

$$(j \circ f)(p) = p \Longrightarrow j\big(f(p)\big) = p \Longrightarrow f(p) = p \in \mathbb{S}^1 \Longrightarrow f|_{\mathbb{S}^1}(p) = p \Longrightarrow h(p) = p.$$

□

Probaremos el mismo resultado de una forma alternativa. Por hipótesis, h es homotópicamente nula, por lo que existen una homotopía $H : \mathbb{S}^1 \times I \longrightarrow \mathbb{S}^1$ y un punto $q \in \mathbb{S}^1$ verificando para todo $p \in \mathbb{S}^1$

$$H(p, 0) = h(p), \quad H(p, 1) = e(p) = q;$$

siendo e la aplicación constante definida por

$$\mathbb{S}^1 \ni p \longrightarrow e(p) = q \in \mathbb{S}^1.$$

Consideramos también las aplicaciones $(-h)$ y $(-H)$, definidas por

$$\mathbb{S}^1 \ni p \longrightarrow (-h)(p) = -h(p) \in \mathbb{S}^1;$$

$$\mathbb{S}^1 \times I \ni (p,t) \longrightarrow (-H)(p,t) = -H(p,t) \in \mathbb{S}^1.$$

Se puede ver que la aplicación $(-H)$ es continua por serlo H y verifica para todo $p \in \mathbb{S}^1$

$$(-H)(p,0) = -H(p,0) = -h(p) = (-h)(p), \quad (-H)(p,1) = -H(p,1) = -e(p) = -q = (-e)(p),$$

siendo $(-e)$ la aplicación constante definida por

$$\mathbb{S}^1 \ni p \longrightarrow (-e)(p) = -q \in \mathbb{S}^1;$$

por lo que la aplicación $(-h)$ también es homotópicamente nula.

Supongamos, contrariamente a lo que se pretende probar, que $h(p) \neq p$ para todo $p \in \mathbb{S}^1$. Veamos que en ese caso se tiene que para todo $t \in I$

$$(1-t)p + t(-h)(p) \neq 0.$$

Si existiese $p_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que para algún $t_0 \in I$ se verifique

$$(1-t_0)p_0 + t_0(-h)(p) = 0 \Longrightarrow (1-t_0)p_0 = -t_0(-h)(p) \Longrightarrow \big\|(1-t_0)p_0\big\| = \big\| -t_0(-h)(p)\big\| \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (1-t_0)\|p_0\| = t_0\big\|(-h)(p_0)\big\| \Longrightarrow 1-t_0 = t_0 \Longrightarrow t_0 = \frac{1}{2},$$

y entonces

$$\frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}(-h)(p_0) = 0 \Longrightarrow p_0 + (-h)(p_0) = 0 \Longrightarrow (-h)(p_0) = -p_0 \Longrightarrow -h(p_0) = -p_0 \Longrightarrow h(p_0) = p_0.$$

Definimos ahora una nueva aplicación, F, por

$$\mathbb{S}^1 \times I \ni (p,t) \longrightarrow F(p,t) = \frac{(1-t)p + t(-h)(p)}{\|(1-t)p + t(-h)(p)\|} \in \mathbb{S}^1.$$

Así, se ha visto que F está bien definida, y es una aplicación continua que verifica para todo $p \in \mathbb{S}^1$

$$F(p,0) = 1_{\mathbb{S}^1}(p) = p, \quad F(p,1) = (-h)(p).$$

Esto prueba que $(-h) \simeq 1_{\mathbb{S}^1}$, y como se ha visto que $(-h)$ es homotópicamente nula también lo ha de ser la aplicación identidad $1_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$. Pero entonces $\mathbb{S}^1$ sería un espacio contractible, lo cual nos lleva a una contradicción.

Queda probado, por reducción al absurdo, que ha de existir un punto $p \in \mathbb{S}^1$ tal que $h(p) = p$. □

Solución 13.2. Sea $p_0 = p(e_0) \in \mathbb{S}^1$. Por ser p una aplicación recubridora, el homomorfismo p_* inducido por p,

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}^1, p_0),$$

ha de ser una aplicación inyectiva. por otra parte, sabemos que $\pi_1(\mathbb{S}^1, p_0) \cong \mathbb{Z}$, por lo que $\pi_1(E, e_0)$ ha de ser isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Z}$. Como todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son a su vez isomorfos a $\mathbb{Z}$ excepto el grupo trivial $\{0\}$, hemos probado el resultado pedido. □

Solución 13.3. El conjunto Y definido por

$$Y = C_1 \cup C_2 = \underbrace{\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\big\}}_{C_1} \cup \underbrace{\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\big\}}_{C_2}$$

es un retracto de deformación de X. En efecto, consideramos la aplicación $r : X \longrightarrow Y$ definida por

$$r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1,y)}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}} & \text{si} \quad (x+1)^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \Big(x, \sqrt{1-(x-1)^2}\Big) & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1, \ y > \sqrt{1-(x-1)^2}, \\ \Big(x, -\sqrt{1-(x-1)^2}\Big) & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1, \ y < -\sqrt{1-(x-1)^2}, \\ \Big(x, \sqrt{1-(x+1)^2}\Big) & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0, \ y > \sqrt{1-(x+1)^2}, \\ \Big(x, -\sqrt{1-(x+1)^2}\Big) & \text{si} \quad -1 \leqslant x < 0, \ y < -\sqrt{1-(x+1)^2}, \\ (0,0) & \text{si} \quad x = 0, \\ (1,0) & \text{si} \quad x > 1, \\ (-1,0) & \text{si} \quad x < -1. \end{cases}$$

Se puede ver que r está bien definida y es continua. Si definimos una nueva aplicación H de la forma

$$X \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)1_X(x,y) + t(j \circ r)(x,y) \in X,$$

entonces H también está bien definida y es continua, y verifica para todo $(x,y) \in X$

$$H\big((x,y),0\big) = 1_X(x,y) = (x,y), \quad H\big((x,y),1\big) = (j \circ r)(x,y) \in Y,$$

y para todo $(x,y) \in Y$ y todo $t \in I$,

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

En resumen, hemos visto que $r \circ j = 1_Y$ y que $j \circ r \simeq 1_X$, siendo $j : Y \longrightarrow X$ la aplicación inclusión y $1_X : X \longrightarrow X$, $1_Y : Y \longrightarrow Y$ las aplicaciones identidad. Esto prueba que H es una homotopía de retracción de X en Y, y podemos aplicar el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) para obtener

$$\pi_1\big(X,(0,0)\big) \cong \pi_1\big(Y,(0,0)\big) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

La última equivalencia se obtiene del ejercicio 4.3 de la página 17.

Solución 13.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 41, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 42 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,E\rangle, \langle E,C\rangle, \langle C,D,E\rangle\big\}.$$

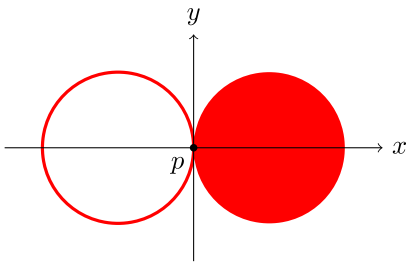

Figura 41: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

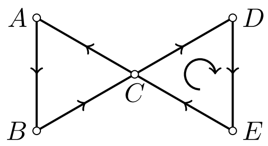

Figura 42: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por el único 2-símplice de K, $\langle C, D, E\rangle$. Entonces,

$$g_1 = \partial_2\big(\langle C, D, E\rangle\big) = \langle C, D\rangle + \langle D, E\rangle + \langle E, C\rangle \Longrightarrow B_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_3\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle C, D\rangle + \lambda_5\langle D, E\rangle + \lambda_6\langle E, C\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1\partial_2\big(\langle A, B\rangle\big) + \lambda_2\partial_2\big(\langle B, C\rangle\big) + \lambda_3\partial_2\big(\langle C, A\rangle\big) + \lambda_4\partial_2\big(\langle C, D\rangle\big) + \lambda_5\partial_2\big(\langle D, E\rangle\big) + \lambda_6\partial_2\big(\langle E, C\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B - A) + \lambda_2(C - B) + \lambda_3(A - C) + \lambda_4(D - C) + \lambda_5(E - D) + \lambda_6(C - E) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6)C + (\lambda_4 - \lambda_5)D + (\lambda_5 - \lambda_6)E \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6 = 0, \\ \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \\ \lambda_5 - \lambda_6 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \lambda_1 \\ \lambda_5 &= \lambda_4 \\ \lambda_6 &= \lambda_4 \end{aligned}\right\} \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_1\langle B, C\rangle + \lambda_1\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle C, D\rangle + \lambda_4\langle D, E\rangle + \lambda_4\langle E, C\rangle =$$

$$= \lambda_1\big(\underbrace{\langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle}_{g_2}\big) + \lambda_4\big(\underbrace{\langle C,D\rangle + \langle D,E\rangle + \langle E,C\rangle}_{g_1}\big),$$

para todo $(\lambda_1, \lambda_4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Entonces

$$Z_1(K) = (g_1) \oplus (g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1) \oplus (g_2)}{(g_1)} \cong (g_2) \cong \mathbb{Z}.$$

JUNIO DE 2017

Ejercicio 14.1. Ejercicio 24 (Fernández, 2018: 86). Se dice que un espacio topológico X *tiene la propiedad del punto fijo* si toda aplicación continua $f : X \longrightarrow X$ tiene al menos un punto fijo. Pruebe que si X *tiene la propiedad del punto fijo* e $Y \subset X$ es un retracto de X, entonces Y *tiene la propiedad del punto fijo*.

Ejercicio 14.2. Ejercicio 25 (Fernández, 2018: 87). Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, donde supondremos que los espacios topológicos E y B son conexos por caminos y localmente conexos por caminos. Pruebe que si B es simplemente conexo, entonces $p : E \longrightarrow B$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 14.3. Determine el grupo fundamental $\pi_1(X, p_0)$, siendo

$$X = A \cup B \cup C, \quad p_0 = (0,0),$$

$$A = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x+1)^2 + y^2 = 1\big\},$$

$$B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x-1)^2 + y^2 = 1\big\},$$

$$C = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0, \ -1 \leqslant y \leqslant 1\big\}.$$

Ejercicio 14.4. Sea

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle E\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle\big\} \cup \big\{\langle C,A\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,E\rangle, \langle E,C\rangle, \langle A,B,C\rangle\big\},$$

complejo simplicial geométrico orientado en $\mathbb{R}^2$, siendo

$$A = (-2,0), \ B = (-1,1), \ C = (0,0), \ D = (1,1), \ E = (2,0) \in \mathbb{R}^2.$$

Determine el grupo de homología simplicial $H_1(K)$

Solución 14.1. Por ser Y un retracto de X, ha de existir una retracción (aplicación continua) $r : X \longrightarrow Y$ verificando $r \circ j = 1_Y$, siendo $j : Y \longrightarrow X$ la aplicación inclusión y $1_Y : Y \longrightarrow Y$ la aplicación identidad. Definimos una nueva aplicación continua g de la forma

$$X \ni x \longrightarrow g(x) = (j \circ f \circ r)(x) \in X.$$

Sea $f : Y \longrightarrow Y$ una aplicación continua cualquiera. Sabemos que X *tiene la propiedad del punto fijo* por lo que existe $x_0 \in X$ tal que $g(x_0) = x_0$. Entonces,

$$g(x_0) = x_0 \Longrightarrow (j \circ f \circ r)(x_0) = x_0 \Longrightarrow j\big((f \circ r)(x_0)\big) = x_0 \Longrightarrow (f \circ r)(x_0) = x_0 \in Y \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f\big(r(x_0)\big) = x_0 \in Y \Longrightarrow f(x_0) = x_0.$$

Por tanto, f tiene un punto fijo, y podemos asegurar que Y *tiene la propiedad del punto fijo*. $\square$

Solución 14.2. Sean $e_0 \in E$ cualquiera, y $b_0 = p(e_0) \in B$. Por ser p una aplicación recubridora, el homomorfismo de grupos p_* que induce,

$$p_* : \pi_1(E, e_0) \longrightarrow \pi_1(B, b_0),$$

ha de ser inyectivo. Y como por hipótesis B es simplemente conexo sabemos que $\pi_1(B, b_0) \cong \{0\}$, por lo que también será $\pi_1(E, e_0) \cong \{0\}$. Aplicando el teorema 54.4 (Munkres, 2002: 392) sabemos que el levantamiento

$$\phi : \pi_1(B, b_0) \longrightarrow p^{-1}(b_0)$$

es una aplicación biyectiva. Pero $\pi_1(B, b_0)$ contiene un único elemento, por lo que también contiene un único elemento el conjunto $p^{-1}(b_0)$. Y como esto es cierto para cada $b_0 \in B$, hemos demostrado que p es inyectiva. Por ser una aplicación recubridora p es además continua, sobreyectiva y abierta, por lo que se ha probado que es un homeomorfismo. □

Solución 14.3. El subespacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ y el punto $p_0 \in X$ se representan en la figura 43.

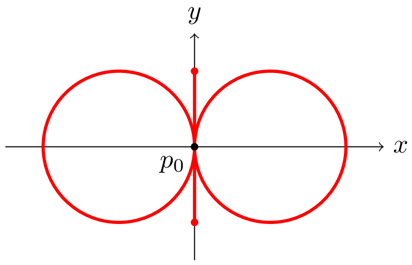

Figura 43: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

Comprobaremos que el conjunto $Y = A \cup B$ es un retracto de deformación de X. En efecto, consideramos la aplicación $r : X \longrightarrow Y$ dada por

$$r(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{si} \quad (x, y) \in A \cup B, \\ p_0 & \text{si} \quad (x, y) \in X \setminus (A \cup B). \end{cases}$$

Se puede ver que r está bien definida y es continua. Consideramos también la aplicación H definida por

$$X \times I \ni \big((x, y), t\big) \longrightarrow H\big((x, y).t\big) = (1 - t)(x, y) + t(j \circ r)(x, y) \in X,$$

que también está bien definida y es continua, y verifica para todo $(x, y) \in X$

$$H\big((x, y), 0\big) = (x, y), \quad H\big((x, y), 1\big) = (j \circ r)(x, y) \in Y;$$

y para todo $(x, y) \in Y$ y todo $t \in I$

$$H\big((x, y), t\big) = (x, y).$$

En resumen, $r \circ j = 1_Y$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo j la aplicación inclusión y 1_X y 1_Y las aplicaciones identidad. Por tanto, por tanto se puede afirmar que H es una homotopía de retracción de X en Y, y que Y es un retracto de deformación de X. Este resultado nos permite recurrir al teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) para obtener

$$\pi_1(X, p_0) \cong \pi_1(Y, p_0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

La última equivalencia se ha obtenido aplicando el resultado del ejercicio 3.3 de la página 14.

Solución 14.4. El complejo simplicial geométrico orientado K se representa en la figura 44.

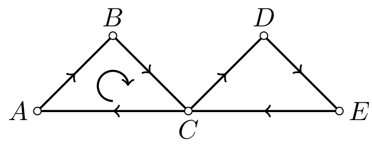

Figura 44: C.s.g.o. K.

Se puede ver que a partir de aquí el problema es similar al ejercicio 13.4 de la página 47.

Septiembre de 2017 – Convocatoria ordinaria

Ejercicio 15.1. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geqslant 4\}.$$

Determine $\pi_1(X, p_0)$ en cada uno de los casos:

(a) $p_0 = (0,0)$,

(b) $p_0 = (2,0)$.

Ejercicio 15.2. Ejercicio 8 (Fernández, 2018: 64). Sea $p : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ la aplicación tal que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$p\big((\cos 2\pi x, \operatorname{sen} 2\pi x)\big) = (\cos 6\pi x, \operatorname{sen} 6\pi x).$$

Pruebe que p es una aplicación recubridora.

Ejercicio 15.3. Ejercicio 9 (Fernández, 2018: 66). Determine el grupo fundamental $\pi_1(X, p_0)$, siendo X un espacio de Hausdorff que es una unión por un punto de dos circunferencias cuya intersección se reduce al punto p_0.

Ejercicio 15.4. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, definido por

$$X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 4\}.$$

Triangule X y determine el grupo de homología simplicial $H_1(K)$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado obtenido al determinar la triangulación de X.

Solución 15.1. Hemos de observar que el espacio X tiene exactamente dos componentes conexas por caminos, que llamaremos

$$X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\},$$
$$X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \geqslant 4\}.$$

(a) Como en este caso $p_0 \in X_1$,

$$\pi_1(X, p_0) \cong \pi(X_1, p_0) \cong \{0\}.$$

La última equivalencia se deduce de que X_1 es contractible, puesto que es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$.

(b) Y como en este caso $p_0 \in X_2$,

$$\pi_1(X, p_0) \cong \pi(X_2, p_0).$$

Además, el conjunto C_2 descrito a continuación es un retracto de deformación de X_2,

$$C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 4\}.$$

En efecto, consideremos la aplicación r definida por

$$X_2 \ni (x,y) \longrightarrow r(x,y) = \frac{2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \in C_2,$$

que está bien definida y es continua. Nos permite definir una nueva aplicación H de la forma

$$X_2 \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)1_{X_2}(x,y) + t(j\circ r)(x,y) = (1-t)(x,y) + \frac{2t(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \in X_2,$$

también bien definida y continua, y que verifica para todo $(x,y) \in X_2$

$$H\big((x,y),0\big) = 1_{X_2}(x,y) = (x,y), \quad H\big((x,y),0\big) = (j\circ r)(x,y) = \frac{2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \in C_2,$$

y para todo $(x,y) \in C_2$ y todo $t \in I$

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Hemos probado que $r\circ j = 1_{C_2}$ y $j\circ r \simeq 1_{X_2}$, siendo $j : C_2 \longrightarrow X_2$ la aplicación inclusión y $1_{X_2} : X_2 \longrightarrow X_2$, $1_{C_2} : C_2 \longrightarrow C_2$ las aplicaciones identidad. O sea, que H es una homotopía de retracción de X_2 en C_2, y que C_2 es un retracto de deformación de X_2.

Teniendo en cuenta además que $p_0 \in C_2$, y que $C_2 \approx \mathbb{S}^1$, el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) nos permite calcular el grupo fundamental pedido.

$$\pi_1(X,p_0) \cong \pi(X_2,p_0) \cong \pi_1(C_2,p_0) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,q) \cong \mathbb{Z}.$$

Hemos de tener en cuenta que como $\mathbb{S}^1$ es conexo por caminos su grupo fundamental es independiente del punto base elegido, por lo que q es cualquier punto de $\mathbb{S}^1$.

Solución 15.2. Similar al ejercicio 5.2 de la página 22.

Solución 15.3. Similar al ejercicio 9.3 de la página 34.

Solución 15.4. Similar al ejercicio 4.4 de la página 17.

Septiembre de 2017 – Convocatoria de reserva

Ejercicio 16.1. Sea X el subespacio de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(-1,2)\big\}.$$

Determine $\pi_1(X,p_0)$, con $p_0 \in X$.

Ejercicio 16.2. Ejercicio 3 (Munkres, 2002: 387). Sea $p : E \longrightarrow B$ una aplicación recubridora, y supongamos que B es conexo. Demuestre que si $p^{-1}(b_0)$ tiene k elementos para algún punto $b_0 \in B$, entonces $p^{-1}(b)$ tiene k elementos para todo punto $b \in B$.

Nota: Estamos suponiendo que k es un número entero mayor que 1.

Ejercicio 16.3. Determine el grupo fundamental $\pi_1(X,p_0)$, siendo

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 = 1\big\} \cup \big([-1,1] \times \{0\}\big),$$

y $p_0 = (1,0)$.

Ejercicio 16.4. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$, definido por

$$X = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 = 1\big\} \cup \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 \leqslant 1, \; x \geqslant 0, \; y \geqslant 0\big\}.$$

Triangule X y determine el grupo de homología simplicial $H_1(K)$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado obtenido al determinar la triangulación de X.

Solución 16.1. Sea $Y = \mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$, y consideramos la traslación τ definida por

$$X \ni (x,y) \longrightarrow \tau(x,y) = (x+1, y-2) \in Y.$$

La aplicación τ está bien definida, es continua y tiene inversa también continua dada por

$$Y \ni (x,y) \longrightarrow \tau^{-1}(x,y) = (x-1, y+2) \in X,$$

por lo que τ es un homeomorfismo. Entonces, aplicando el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380),

$$\pi_1(X,p_0) \cong \pi_1\big(Y, \tau(p_0)\big) \cong \mathbb{Z}.$$

La última equivalencia se obtiene en el ejercicio 9.1 de la página 34, y hay que tener en cuenta que los espacios X e Y son conexos por caminos, por lo que el grupo fundamental es el mismo independientemente del punto base elegido.

Solución 16.2. Por ser p una aplicación recubridora, sabemos que existe un recubrimiento abierto de B de la forma $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, formado por conjuntos abiertos regularmente cubiertos por p. O sea, que para cada $\lambda \in \Lambda$ se tiene que

$$p^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{\alpha \in A_\lambda} V_{\lambda,\alpha},$$

siendo los $V_{\lambda,\alpha}$ unívocamente determinados por ser B conexo, abiertos y disjuntos, y de forma que

$$p|_{V_{\lambda,\alpha}} : V_{\lambda,\alpha} \longrightarrow U_\lambda$$

es un homeomorfismo para cada $\alpha \in A_\lambda$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ consideramos el conjunto C_n definido por

$$C_n = \{b \in B : \ \mathrm{card}[p^{-1}(b)] = n\}.$$

En particular, C_k es un conjunto abierto y no vacío, puesto que por hipótesis $b_0 \in C_k$. Además,

$$B \setminus C_k = \bigcup_{i \in \mathbb{N}\setminus\{k\}} C_i$$

también es un conjunto abierto. En estas condiciones, por ser B conexo, si es unión de dos conjuntos abiertos y disjuntos

$$B = C_k \cup (B \setminus C_k),$$

necesariamente ha de ser uno de ellos el conjunto vacío. Entonces,

$$C_k \neq \varnothing \Longrightarrow B \setminus C_k = \varnothing \Longrightarrow B = C_k,$$

lo que prueba el resultado buscado. □

Solución 16.3. Similar al ejercicio 11.3 de la página 40.

Solución 16.4. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 45, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 46 y definido por

$$K = \{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,A\rangle, \langle A,C,D\rangle\}.$$

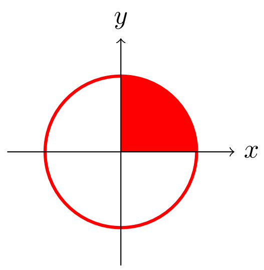

Figura 45: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

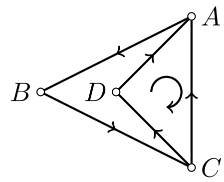

Figura 46: C.s.g.o. K.

Se puede ver que a partir de aquí el problema es similar al ejercicio 1.4 de la página 4.

Junio de 2013

Ejercicio 17.1. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x^2 + 2y^2 = 1\}$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Determinar el grupo fundamental de homotopía de X. Si (a, b) y (c, d) son dos puntos de X, ¿es $\pi_1\big(X, (a, b)\big)$ isomorfo a $\pi_1\big(X, (b, c)\big)$?

Ejercicio 17.2. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\} \cup \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [0, 2]\},$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Probar que X es del mismo tipo de homotopía que

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}.$$

¿Es X contractible?

Ejercicio 17.3. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [1, 2]\},$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Triangular X. Sea K un complejo simplicial geométrico orientado tal que el poliedro $|K|$ sea homeomorfo a X. Determinar el grupo de homología simplicial $H_1(K)$.

Solución 17.1. Se puede demostrar que $X \approx \mathbb{S}^1$. Si definimos la aplicación f por

$$X \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) = 2(x, y) \in \mathbb{S}^1,$$

se puede ver que f está bien definida, es continua y tiene inversa también continua dada por

$$\mathbb{S}^1 \ni (u, v) \longrightarrow f^{-1}(u, v) = \frac{1}{2}(u, v) \in X.$$

Como tanto X como $\mathbb{S}^1$ son conjuntos conexos por caminos, según el corolario 52.2 (Munkres, 2002: 377), su grupo fundamental es independiente del punto base elegido. Sea $p \in X$ cualquiera. Aplicando ahora el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380) tenemos que

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1\big(\mathbb{S}^1, f(p)\big) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 17.2. El espacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ se representa en la figura 47.

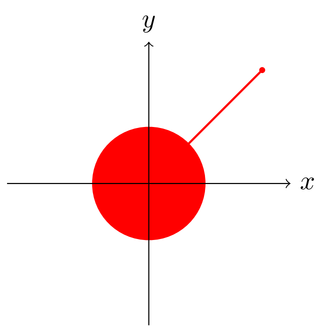

Figura 47: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

Comprobaremos que Y es un retracto de deformación de X. Para ello definimos la aplicación $r :\longrightarrow Y$ por

$$r(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad (x,y) \in Y, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \in X \setminus Y. \end{cases}$$

Dado que r está bien definida y es continua, definimos una nueva aplicación H por

$$X \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)1_X(x,y) + t(j \circ r)(x,y) \in X.$$

Se puede ver que H también está bien definida, es continua y verifica para todo $(x,y) \in X$

$$H\big((x,y),0\big) = 1_X(x,y) = (x,y), \quad H\big((x,y),1\big) = (j \circ r)(x,y) \in Y,$$

y para todo $(x,y) \in Y$ y todo $t \in I$,

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Por tanto podemos afirmar que $r \circ j = 1_Y$, y que $j \circ r \simeq 1_X$, siendo $j : Y \longrightarrow X$ la aplicación inclusión y $1_X : X \longrightarrow X$, $1_Y : Y \longrightarrow Y$ las aplicaciones identidad. Dicho de otra forma, podemos afirmar que H es una homotopía de retracción de X en Y y que Y es un retracto de deformación de X. Entonces, si $p \in X$ cualquiera y $q \in Y$, aplicando el corolario 52.2 (Munkres, 2002: 377) que establece la independencia del punto base en para conjuntos conexos por caminao, y el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410) podemos afirmar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(X,q) \cong \pi_1(Y,q).$$

□

Por otra parte, X es un conjunto contractible puesto que es un polígono estrellado. En efecto, si llamamos $p_0 = (0,0) \in X$, y si $p \in X$ es otro punto cualquiera, el segmento $[p_0,p]$ definido por

$$[p_0,p] = \big\{(1-t)p_0 + tp, \ t \in I\big\}$$

está contenido en X. Alternativamente, X es un conjunto contractible puesto que la aplicación identidad 1_X es homotópicamente nula. Esto se comprueba definiendo la aplicación F por

$$X \times I \ni (p,t) \longrightarrow F(p,t) = (1-t)e(p) + t1_X(p) = (1-t)p_0 + tp = tp \in X;$$

siendo e la aplicación constante

$$X \ni p \longrightarrow e(p) = p_0 = (0,0) \in X.$$

Así, F está bien definida, es continua y verifica para todo $p \in X$

$$F(p,0) = e(p) = p_0 = (0,0), \quad F(p,1) = 1_X(p) = p.$$

O sea, $1_X \simeq e$, tal y como queríamos demostrar.

Solución 17.3. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 48, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 49 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,D\rangle, \langle D,B\rangle\big\}.$$

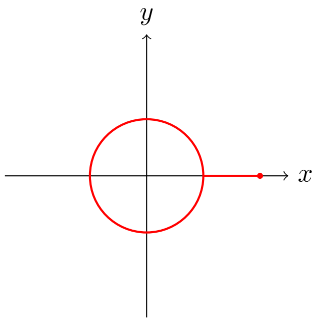

Figura 48: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

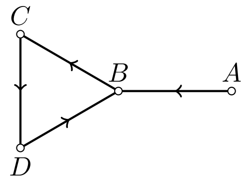

Figura 49: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Sabemos que

$$\dim(K) = 1 \Longrightarrow C_2(K) = \{0\} \Longrightarrow B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big) = \{0\}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_3\langle C, D\rangle + \lambda_4\langle D, B\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1\partial_2\big(\langle A, B\rangle\big) + \lambda_2\partial_2\big(\langle B, C\rangle\big) + \lambda_3\partial_2\big(\langle C, D\rangle\big) + \lambda_4\partial_2\big(\langle D, B\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B - A)\lambda_2(C - B) + \lambda_3(D - C) + \lambda_4(B - D) = -\lambda_1 A + (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4)B + (\lambda_2 - \lambda_3)C + (\lambda_3 - \lambda_4)D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_3 - \lambda_4 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = \lambda_2 \\ \lambda_4 = \lambda_2 \end{array}\right\} \lambda_2 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_2\langle C, D\rangle + \lambda_2\langle D, B\rangle = \lambda_2\big(\underbrace{\langle B, C\rangle + \langle C, D\rangle + \langle D, B\rangle}_{g_1}\big),$$

para todo $\lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Entonces $Z_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}$, y retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1)}{\{0\}} \cong \mathbb{Z}.$$

Septiembre de 2013

Ejercicio 18.1. Sea a un número real positivo, fijo en todo el problema. Se considera el subespacio topológico X de $\mathbb{R}^2$ definido mediante

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = a^2\}.$$

Determine el grupo fundamental de homotopía del espacio X, con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 18.2. Determine el grupo fundamental de homotopía del espacio topológico producto

$$(0, 1) \times \mathbb{S}^1,$$

siendo

$$(0, 1) = \{t \in \mathbb{R} : \ 0 < t < 1\},$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}$, y

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\},$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 18.3. Ejercicio 9.9 (Bujalance y Tarrés, 1991: 217). Dados los subconjuntos de $\mathbb{R}^3$

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x \leqslant 0\},$$

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \ x \geqslant 0, \ z = 0\},$$

sea $X = A \cup B$. Se considera X con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^3$. Triangule el espacio X y calcule el grupo de homología simplicial $H_1(X)$.

Solución 18.1. Probaremos que $X \approx \mathbb{S}^1$. Definimos para ello la aplicación f por

$$X \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) = \frac{1}{a}(x, y) \in \mathbb{S}^1,$$

que está bien definida, es continua y tiene inversa también continua dada por

$$\mathbb{S}^1 \ni (u, v) \longrightarrow f^{-1}(u, v) = a(u, v) \in X.$$

Sea $p \in X$. Aplicando el corolario 52.2 (Munkres, 2002: 377), sabemos que al ser X y $\mathbb{S}^1$ conexos por caminos su grupo fundamental es independiente del punto base elegido. Esto, junto con el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380), nos permite calcular el grupo fundamental pedido.

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, f(p)) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 18.2. Llamemos X e Y respectivamente a los conjuntos

$$X = (0, 1) \times \mathbb{S}^1, \quad Y = \left\{\frac{1}{2}\right\} \times \mathbb{S}^1.$$

Entonces, el conjunto Y es un retracto de deformación de X. Para comprobar esta afirmación, sea r la aplicación definida por

$$X \ni (t, p) \longrightarrow r(r, p) = \left(\frac{1}{2}, p\right) \in Y.$$

Así, r está bien definida y es continua, y nos permite definir una nueva aplicación H de la forma

$$X \times I \ni \big((t,p),s\big) \longrightarrow H\big((t,p),s\big) = (1-s)1_X(t,p) + s(j \circ r)(t,p) \in X,$$

que también está bien definida, es continua, y verifica para todo $(t,p) \in X$

$$H\big((t,p),0\big) = 1_X(t,p) = (t,p), \quad H\big((t,p),1\big) = (j \circ r)(t,p) = \left(\frac{1}{2}, p\right) \in Y,$$

y para todo $(t,p) \in Y$ y todo $s \in I$

$$H\big((t,p),s\big) = (t,p).$$

Por tanto, hemos probado que $r \circ j = 1_Y$ y que $j \circ r \simeq 1_Y$, siendo $j : Y \longrightarrow X$ la aplicación inclusión, y $1_X : X \longrightarrow X$, $1_Y : Y \longrightarrow Y$ las aplicaciones identidad. Dicho de otra forma, hemos probado que H es una homotopía de retracción de X en Y, y que Y es un retracto de deformación de X.

Consideramos también la aplicación f definida por

$$Y \ni \left(\frac{1}{2}, p\right) \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}, p\right) = p \in \mathbb{S}^1,$$

que está bien definida, es continua, y tiene inversa también continua dada por

$$\mathbb{S}^1 \ni q \longrightarrow f^{-1}(q) = \left(\frac{1}{2}, q\right) \in Y;$$

y que por tanto es un homeomorfismo que nos permite deducir que $Y \approx \mathbb{S}^1$.

Sea $(t,p) \in \mathbb{S}^1$ cualquiera. Como los conjuntos X, Y y $\mathbb{S}^1$ son conexos por caminos, el corolario 52.2 (Munkres, 2002: 377) nos garantiza que los grupos fundamentales de dichos conjuntos son independientes de los puntos bases elegidos. Además, aplicando también el torema 58.3 (Munkres, 2002: 410) y el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380), estamos en condiciones de dar el grupo fundamental pedido.

$$\pi_1\big(X,(t,p)\big) \cong \pi_1\left(Y, \left(\frac{1}{2}, p\right)\right) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 18.3. Una triangulación para el espacio X, representado en la figura 50, es el poliedro $|K|$, siendo K el complejo simplicial geométrico orientado representado en la figura 51 y definido por

$$K = \big\{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle A,B\rangle, \langle B,C\rangle, \langle C,A\rangle, \langle A,D\rangle, \langle D,C\rangle, \langle A,B,C\rangle\big\}.$$

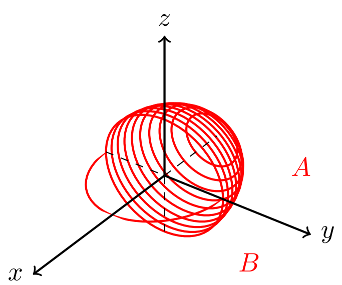

Figura 50: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^3$.

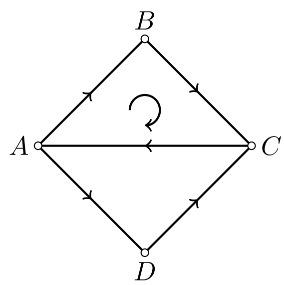

Figura 51: C.s.g.o. K.

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por el único 2-símplice de K, $\langle A, B, C\rangle$. Entonces,

$$g_1 = \partial_2\big(\langle A, B, C\rangle\big) = \langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle C, A\rangle \Longrightarrow B_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_3\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle A, D\rangle + \lambda_5\langle D, C\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1\partial_2\big(\langle A, B\rangle\big) + \lambda_2\partial_2\big(\langle B, C\rangle\big) + \lambda_3\partial_2\big(\langle C, A\rangle\big) + \lambda_4\partial_2\big(\langle A, D\rangle\big) + \lambda_5\partial_2\big(\langle D, C\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B - A) + \lambda_2(C - B) + \lambda_3(A - C) + \lambda_4(D - A) + \lambda_5(C - D) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_5)C + (\lambda_4 - \lambda_5)D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_5 = 0, \\ \lambda_4 - \lambda_5 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \lambda_1 + \lambda_4 \\ \lambda_5 &= \lambda_4 \end{aligned}\right\} \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_1\langle B, C\rangle + (\lambda_1 + \lambda_4)\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle A, D\rangle + \lambda_4\langle D, C\rangle =$$

$$= \lambda_1\big(\underbrace{\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle C, A\rangle}_{g_1}\big) + \lambda_4\big(\underbrace{\langle C, A\rangle + \langle A, D\rangle + \langle D, C\rangle}_{g_2}\big),$$

para todo $(\lambda_1, \lambda_4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Entonces,

$$Z_1(K) = (g_1) \oplus (g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1) \oplus (g_2)}{(g_1)} \cong (g_2) \cong \mathbb{Z}.$$

Junio de 2012

Ejercicio 19.1. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ xy=1\big\}\cup\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ xy=-1\big\},$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Estudiar si X es un espacio contractible a un punto. Determinar el grupo fundamental de homotopía $\pi_1\big(X,(1,1)\big)$.

Ejercicio 19.2. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X=\big\{(x,1-x^2):\ x\in[-1,1]\big\}\cup\big\{(x,0)\in\mathbb{R}^2:\ x\in[-1,1]\big\},$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Determinar el grupo fundamental de homotopía $\pi_1(X,p)$, siendo $p=(1,0)$.

Ejercicio 19.3. En el plano $\mathbb{R}^2$ se consideran los puntos

$$A=(1,0),\quad B=(0,1),\quad C=(-1,0),\quad D=(0,-1),$$

y sea K el complejo simplicial geométrico orientado definido por

$$K=\big\{\langle A\rangle,\langle B\rangle,\langle C\rangle,\langle D\rangle,\langle A,B\rangle,\langle B,C\rangle,\langle C,A\rangle,\langle C,D\rangle,\langle D,A\rangle,\langle A,C,D\rangle\big\}.$$

Calcular la característica de Euler-Poincaré de K. Determinar el grupo de homología simplicial $H_1(K)$.

Solución 19.1. El espacio de Hausdorff $X\subset\mathbb{R}^2$ y el punto $p(1,1)$ se representan en la figura 52.

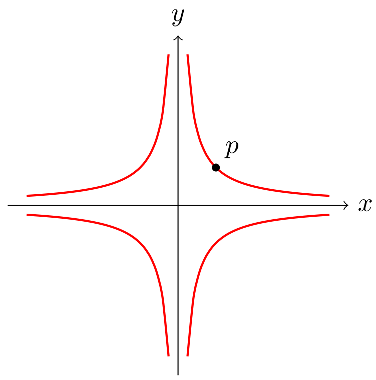

Figura 52: Subespacio topológico $X\subset\mathbb{R}^2$.

El espacio X tiene exactamente 4 componentes conexas, que a su vez también son conexas por caminos. Estas son

$$A_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y=\frac{1}{x}\right\};\quad A_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0,\ y=-\frac{1}{x}\right\};$$

$$A_3=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x<0,\ y=\frac{1}{x}\right\};\quad A_4=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y=-\frac{1}{x}\right\}.$$

Y como $p\in A_1$, entonces

$$\pi_1(X,p)\cong\pi_1(A_1,p).$$

Consideramos la aplicación f definida por

$$A_1 \ni (x, y) \longrightarrow f(x, y) = x \in \mathbb{R}_+ = (0, +\infty),$$

que está bien definida, es continua, y tiene inversa también continua dada por

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longrightarrow f^{-1}(t) = \left(t, \frac{1}{t}\right) \in A_1.$$

Por tanto, f es un homeomorfismo, y aplicando el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380) podemos escribir

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(A_1, p) \cong \pi_1\big(\mathbb{R}_+, f(p)\big) = \pi_1(\mathbb{R}_+, 1).$$

Ahora bien, $\mathbb{R}_+$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}$, y por tanto contractible. En conclusión

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1(\mathbb{R}_+, 1) \cong \{0\}.$$

Solución 19.2. El espacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ y el punto $p(1, 0)$ se representan en la figura 53.

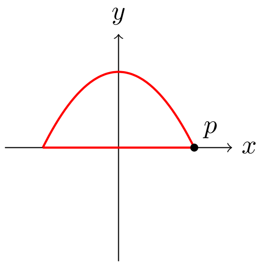

Figura 53: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

Consideramos la aplicación $f : X \longrightarrow \mathbb{S}^1$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \big(x, \sqrt{1 - x^2}\big) & \text{si} \quad y > 0, \\ \big(x, -\sqrt{1 - x^2}\big) & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

Así, f está bien definida, es continua, y tiene inversa también continua $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \longrightarrow X$, dada por

$$f^{-1}(u, v) = \begin{cases} (x, 1 - x^2) & \text{si} \quad v > 0, \\ (x, 0) & \text{si} \quad v \leqslant 0. \end{cases}$$

Por tanto, f es un homeomorfismo, y $X \approx \mathbb{S}^1$. Entonces, recurriendo al corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380), podemos dar el grupo fundamental pedido.

$$\pi_1(X, p) \cong \pi_1\big(\mathbb{S}^1, f(p)\big) = \pi_1(\mathbb{S}^1, p) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 19.3. El complejo simplicial geométrico orientado K se representa en la figura 54.

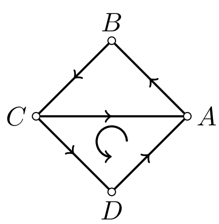

Figura 54: C.s.g.o. K.

La característica de Euler-Poincaré de K viene dada por

$$\chi(K) = v(K) - a(K) + c(K) = 4 - 5 + 1 = 0.$$

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_2(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por el único 2-símplice de K, $\langle A, C, D\rangle$. Entonces

$$g_1 = \partial_2\big(\langle A, C, D\rangle\big) = -\langle C, A\rangle + \langle C, D\rangle + \langle D, A\rangle \Longrightarrow B_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_2\langle B, C\rangle + \lambda_3\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle C, D\rangle + \lambda_5\langle D, A\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1\partial_2\big(\langle A, B\rangle\big) + \lambda_2\partial_2\big(\langle B, C\rangle\big) + \lambda_3\partial_2\big(\langle C, A\rangle\big) + \lambda_4\partial_2\big(\langle C, D\rangle\big) + \lambda_5\partial_2\big(\langle D, A\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B - A) + \lambda_2(C - B) + \lambda_3(A - C) + \lambda_4(D - C) + \lambda_5(A - D) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)C + (\lambda_4 - \lambda_5)D \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ \lambda_4 - \lambda_5 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_1 \\ \lambda_3 &= \lambda_1 - \lambda_4 \\ \lambda_5 &= \lambda_4 \end{aligned}\right\} \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_1\langle B, C\rangle + (\lambda_1 - \lambda_4)\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle C, D\rangle + \lambda_4\langle D, A\rangle =$$

$$= \lambda_1\big(\underbrace{\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle C, A\rangle}_{g_2}\big) + \lambda_4\big(\underbrace{-\langle C, A\rangle + \langle C, D\rangle + \langle D, A\rangle}_{g_1}\big),$$

Para todo $(\lambda_1, \lambda_4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Entonces,

$$Z_1(K) = (g_1) \oplus (g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1) \oplus (g_2)}{(g_1)} \cong (g_2) \cong \mathbb{Z}.$$

Septiembre de 2012

Ejercicio 20.1. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\},$$

con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Estudiar si X es un espacio contractible a un punto. Determinar el grupo fundamental de homotopía $\pi_1(X, (0, 0))$.

Ejercicio 20.2. Sea X el subespacio topológico de $\mathbb{R}^2$ definido por

$$X = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 = 1\} \cup \Big(B \setminus \{(3, 0)\}\Big),$$

siendo

$$B = \{(x, y) : \ (x - 2)^2 + y^2 = 1\}.$$

Se considera X con su topología relativa de la topología usual de $\mathbb{R}^2$. Determinar el grupo fundamental de homotopía $\pi_1(X, (1, 0))$.

Ejercicio 20.3. En el plano $\mathbb{R}^2$ se consideran los puntos

$$A = (0, 0), \quad B = (1, 0), \quad C = (0, 1), \quad D = (-1, 0), \quad E = (0, -1),$$

y sea K el complejo simplicial geométrico orientado definido por

$$K = \{\langle A\rangle, \langle B\rangle, \langle C\rangle, \langle D\rangle, \langle E\rangle, \langle A, B\rangle, \langle B, C\rangle, \langle C, A\rangle, \langle A, D\rangle, \langle D, E\rangle, \langle E, A\rangle, \langle A, B, C\rangle\}.$$

Calcular la característica de Euler-Poincaré de K. Determinar el grupo de homología simplicial $H_1(K)$.

Solución 20.1. Podemos describir el espacio X como

$$X = X_1 \cup X_2 = \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0\}}_{X_1} \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0\}}_{X_2}.$$

Sean $p_0 = (0, 0) \in X_1 \cap X_2$, y $p_1(0, y_1) \in X_1$, $p_2(x_2, 0) \in X_2$ cualesquiera. Consideramos los segmentos $[p_0, p_1]$ y $[p_0, p_2]$ definidos por

$$[p_0, p_1] = \{(1 - t)p_0 + tp_1, \ t \in I\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 0, \ 0 \leqslant y \leqslant y_1\};$$

$$[p_0, p_2] = \{(1 - t)p_0 + tp_2, \ t \in I\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = 0, \ 0 \leqslant x \leqslant x_2\}.$$

Es inmediato que

$$[p_0, p_1] \subset X_1 \subset X, \quad [p_0, p_2] \subset X_2 \subset X;$$

por lo que X es un polígono estrellado, y por tanto un espacio contractible. Y por ser X un espacio contractible podemos asegurar que

$$\pi_1(X, p_0) \cong \{0\}.$$

Solución 20.2. El espacio de Hausdorff $X \subset \mathbb{R}^2$ y el punto $p = (1, 0)$ se representan en la figura 55.

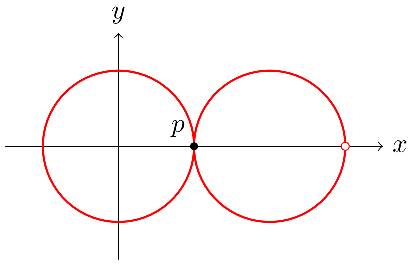

Figura 55: Subespacio topológico $X \subset \mathbb{R}^2$.

Sea $f : X \longrightarrow Y$ la aplicación definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad x \leqslant 1, \\ (x, x-1) & \text{si} \quad x > 1,\ y > 0, \\ (x, 1-x) & \text{si} \quad x > 1,\ y < 0; \end{cases}$$

siendo Y el subespacio de $\mathbb{R}^2$ representado en la figura 56 y definido por

$$Y = \mathbb{S}^1 \cup A \cup B = \mathbb{S}^1 \cup \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x < 2,\ y = x - 1\right\}}_{A} \cup \underbrace{\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 < x < 2,\ y = 1 - x\right\}}_{B}.$$

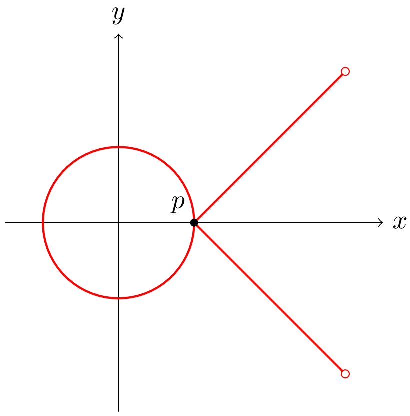

Figura 56: Subespacio topológico $Y \subset \mathbb{R}^2$.

Así, f está bien definida, es continua, y tiene inversa también continua $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ dada por

$$f^{-1}(u,v) = \begin{cases} (u,v) & \text{si} \quad u \leqslant 1, \\ \left(u, \sqrt{1-(u-2)^2}\right) & \text{si} \quad u > 1,\ v > 0, \\ \left(u, -\sqrt{1-(u-2)^2}\right) & \text{si} \quad u > 1,\ v < 0 \end{cases}$$

Hemos probado que $X \approx Y$, con lo que aplicando el corolario 52.5 (Munkres, 2002: 380) podemos asegurar que

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1\big(Y, f(p)\big) = \pi_1(Y,p).$$

Por otra parte, $\mathbb{S}^1$ es un retracto de deformación de Y. Para probar esta afirmación, sea la aplicación $r : Y \longrightarrow \mathbb{S}^1$ dada por

$$r(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{si} \quad x \in \mathbb{S}^1, \\ (1,0) & \text{si} \quad x \in A \cup B; \end{cases}$$

que está bien definida y es continua. Sea otra aplicación H dada por

$$Y \times I \ni \big((x,y),t\big) \longrightarrow H\big((x,y),t\big) = (1-t)1_Y(x,y) + t(j \circ r)(x,y),$$

también bien definida y continua, y que verifica para todo $(x,y) \in Y$

$$\big((x,y),0\big) = 1_Y(x,y) = (x,y), \quad H\big((x,y),1\big) = (j \circ r)(x,y),$$

y para todo $(x,y) \in \mathbb{S}^1$ y todo $t \in I$

$$H\big((x,y),t\big) = (x,y).$$

Entonces, se tiene que $r \circ j = 1_Y$ y $j \circ r \simeq 1_X$, siendo $j : Y \longrightarrow X$ la aplicación inclusión, y $1_X : X \longrightarrow X$, $1_Y : Y \longrightarrow Y$ las aplicaciones identidad. En otras palabras, H es una homotopía de retracción de X en Y e Y es un retracto de deformación de X. En estas condiciones, combinando los resultados anteriores con el teorema 58.3 (Munkres, 2002: 410), podemos dar el grupo fundamental pedido

$$\pi_1(X,p) \cong \pi_1(Y,p) \cong \pi_1(\mathbb{S}^1,p) \cong \mathbb{Z}.$$

Solución 20.3. El complejo simplicial geométrico orientado K se representa en la figura 57.

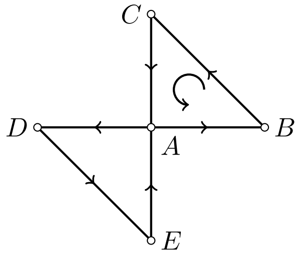

Figura 57: C.s.g.o. K.

La característica de Euler-Poincaré de K viene dada por

$$\chi(K) = v(K) - a(K) + c(K) = 5 - 6 + 1 = 0.$$

Para calcular el grupo de homología simplicial pedido recurrimos a la expresión

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)}.$$

Y sabemos que

$$B_1(K) = \partial_2\big(C_1(K)\big),$$

siendo $C_2(K)$ el grupo abeliano libre sobre la base formada por el único 2-símplice de K, $\langle A,B,C\rangle$. Entonces,

$$g_1 = \partial_2\big(\langle A,B,C\rangle\big) = \langle A,B\rangle + \langle B,C\rangle + \langle C,A\rangle \Longrightarrow B_1(K) = (g_1) \cong \mathbb{Z}.$$

Por otra parte, sea $c \in C_1(K)$ de la forma

$$c = \lambda_1\langle A,B\rangle + \lambda_2\langle B,C\rangle + \lambda_3\langle C,A\rangle + \lambda_4\langle A,D\rangle + \lambda_5\langle D,E\rangle + \lambda_6\langle E,A\rangle.$$

Si $c \in Z_1(K)$ ha de verificarse

$$0 = \partial_2(c) = \lambda_1\partial_2\big(\langle A,B\rangle\big) + \lambda_2\partial_2\big(\langle B,C\rangle\big) + \lambda_3\partial_2\big(\langle C,A\rangle\big) + \lambda_4\partial_2\big(\langle A,D\rangle\big) + \lambda_5\partial_2\big(\langle D,E\rangle\big) + \lambda_6\partial_2\big(\langle E,A\rangle\big) =$$

$$= \lambda_1(B-A) + \lambda_2(C-B) + \lambda_3(A-C) + \lambda_4(D-A) + \lambda_5(E-D) + \lambda_6(A-E) =$$

$$= (-\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6)A + (\lambda_1 - \lambda_2)B + (\lambda_2 - \lambda_3)C + (\lambda_4 - \lambda_5)D + (\lambda_5 - \lambda_6)E \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_4 - \lambda_5 = 0, \\ \lambda_5 - \lambda_6 = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales homogéneo obtenemos

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = \lambda_1 \\ \lambda_3 = \lambda_1 \\ \lambda_5 = \lambda_4 \\ \lambda_6 = \lambda_5 \end{array}\right\} \lambda_1, \lambda_4 \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, los elementos de $Z_1(K)$ son de la forma

$$c = \lambda_1\langle A, B\rangle + \lambda_1\langle B, C\rangle + \lambda_1\langle C, A\rangle + \lambda_4\langle A, D\rangle + \lambda_4\langle D, E\rangle + \lambda_4\langle E, A\rangle.$$

$$= \lambda_1\big(\underbrace{\langle A, B\rangle + \langle B, C\rangle + \langle C, A\rangle}_{g_1)}\big) + \lambda_4\big(\underbrace{\langle A, D\rangle + \langle D, E\rangle + \langle E, A\rangle}_{g_2}\big),$$

para todo $(\lambda_1, \lambda_4) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Entonces

$$Z_1(K) = (g_1) \oplus (g_2) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Retomando la expresión dada para $H_1(K)$,

$$H_1(K) = \frac{Z_1(K)}{B_1(K)} = \frac{(g_1) \oplus (g_2)}{(g_1)} \cong (g_2) \cong \mathbb{Z}.$$

Referencias bibliográficas

ARMSTRONG, Mark Anthony, *Basic Topology*, New York (US), Springer, 1983, ISBN 0-387-90839-0, 251 p.

ARREGUI FERNÁNDEZ, Joaquín, *Topología*, 2ª ed., Madrid (ES), Universidad Nacional de Educación a Distancia, 1988, ISBN 978-84-362-1674-5, 430 p.

BUJALANCE[GARCÍA], E[milio]; TARRÉS, J., *Problemas de Toplogía*, Madrid (ES), Universidad Nacional de Educación a Distancia, 1991, ISBN 84-362-2398-5, 242 p.

DOLD, Albercht, *Lectures on Algebraic Topology*, 2nd ed., Berlin (DE), Springer-Verlag, 1980, ISBN 0-387-10369-4, 377 p.

FERNÁNDEZ LAGUNA, Víctor, *Ampliación de Topología. Ejercicios de Topología Algebraica*, Madrid (ES), Sanz y Torres, 2018, ISBN 978-84-16466-69-6, 195 p.

GAMELIN, Theodore W.; GREENE, Robert Everist, *Introduction to Topology*, 2nd ed., Mineola (New York, US), Dover, 1999, ISBN 0-486-40680-6, 234 p.

HATCHER, Allen, *Algebraic Topology*, Cambridge (GB), Cambridge University Press, 2002, ISBN 978-0-521-79540-1, 273 p.

KOSNIOWSKI, Czes, *Topología Algebraica*, Barcelona (ES), Editorial Reverté, 1986, ISBN 84-291-5098-2, 288 p.

MASSEY, William S., *Algebraic Topology: An Introduction*, New York (US), Springer, 1967, ISBN 0-387-90271-6, 261 p.

MATVEEV, Sergey V., *Lectures on Algebraic Topology*, Zürich (CH), European Mathematical Society, 2006, ISBN 3-03719-023-X, 99 p.

MUNKRES, James R., *Topología*, 2ª ed., Madrid (ES), Pearson Educación, 2002, ISBN 84-205-3180-4, 607 p.

SATŌ, Hajime, *Algebraic Topology: An Intuitive Approach*, Providence (Rhode Island, US), American Mathematical Society, 1999, ISBN 0-0-8218-1046-4, 118 p.

SPANIER, Edwin H., *Algebraic Topology*, New York (US), McGraw-Hill, 1966, ISBN 978-0-07-059883-6, 528 p.