Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2014/2015, Septiembre

1. Se lanza un proyectil de masa 9.0 kg desde el suelo con una velocidad inicial de 10 m/s y un ángulo de 60º con la horizontal. El proyectil explota en el punto más alto de la trayectoria rompiéndose en dos piezas, de masas 3.0 kg y 6.0 kg. Inmediatamente después de la explosión, la pieza más pequeña tiene una velocidad que es igual, tanto en magnitud como en dirección a la velocidad inicial del proyectil. Considerando que no hay resistencia del aire, calcule la distancia a la que toca el suelo la otra pieza del proyectil. (Considere que g=10 m/s^2) **(2 puntos)**

Solución

En el punto más alto de la trayectoria el proyectil tiene velocidad dada por:

$$V_x = 10\ cos60$$
$$V_y = 0$$

Por conservación del momento lineal podemos obtener las componentes de la velocidad del proyectil grande inmediatamente después de la explosión:

$$3 \cdot 10\ cos60 + 6 \cdot\ v_x = 9 \cdot 10\ cos60$$
$$3 \cdot 10\ sen60 + 6 \cdot\ v_y = 0$$

Es decir

$$v_x = 10\ cos60 = 5\ m/s$$
$$v_y = -5\ sen60 = 4.33\ m/s$$

Calculemos la distancia recorrida en el momento de la explosión. El tiempo empleado en llegar al punto más alto es

$$V_y = 0 = V_{0y} - g \cdot t$$
$$t = \frac{V_{0y}}{g} = \frac{10\ sen60}{g} = 0.866\ seg$$

En ese tiempo el proyectil ha recorrido la siguiente distancia:

$$S_x = V_{0x} \cdot t = \frac{100\ sen60\ cos60}{g}$$

Habiendo alcanzado la altura de:

$$H = V_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} g\ t^2 = \frac{100\ sen^2 60}{2g} = 3.75\ m$$

Desde ese punto, el proyectil más pesado emplea un tiempo para llegar al suelo dado por:

$$H = v_y t - \frac{1}{2} g\ t^2 = -5\ sen60\ t - \frac{1}{2} g\ t^2 = -\frac{100\ sen^2 60}{2g}$$

La ecuación de segundo grado resultante puede resolverse obteniendo:

$$t = \frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{4} = 0.535\ seg$$

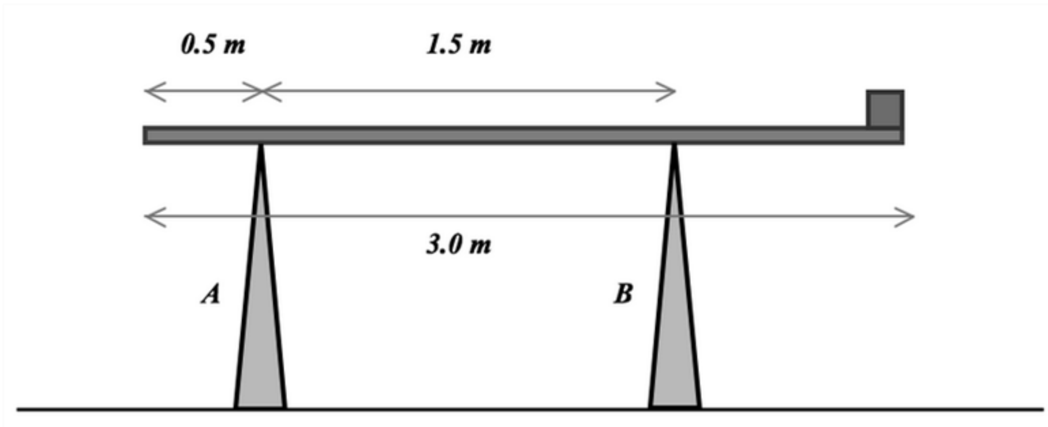
En este tiempo el proyectil habrá recorrido

$$s_x = v_x t = 10\ cos60\ t = \frac{5}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right) = 2.676\ m$$

Por tanto, la distancia total recorrida por el proyectil más pesado es de

$$S_T = \frac{100\ sen60\ cos60}{g} + \frac{5}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right) = 10\ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{5}{4}\left(\sqrt{15} - \sqrt{3}\right) = \frac{5}{4}\left(\sqrt{15} + \sqrt{3}\right) = 7.00\ m$$

2. Una varilla uniforme de masa 220 kg y longitud L = 3.0 m está en reposo sobre dos soportes, A y B, como se muestra en la figura.
a) Calcule las fuerzas normales F_A y F_B ejercidas por los soportes sobre la varilla si colocamos un bloque de masa 30 kg en el extremo derecho de la misma y la varilla sigue en reposo. **(1 punto)**
b) Calcule la masa mínima que habrá que colocar para que el sistema salga del reposo. **(1 punto)**



Solución

a) Tal y como están distribuidos los soportes y la masa, vemos que el sistema sólo puede pivotar sobre el soporte B para realizar un movimiento en el sentido de las agujas del reloj. Para que la varilla esté en reposo, tanto las fuerzas verticales como el torque neto respecto a B tienen que ser nulos.
La fuerza neta en el sentido vertical es

$$F_A + F_B - M\ g - mg = 0$$

Respecto a B, los torques en sentido de giro antihorario tienen que igualar el torque en el sentido horario:

$$1.5\ F_A + m\ g\ 1 = M\ g\ 0.5$$

De donde obtenemos que $F_A = \frac{(0.5\ M - m)g}{1.5} = 522.667$.
De la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales obtenemos que (g=9.8 m/s^2)

$$F_B = 1927.333$$

Por supuesto ambas en la dirección vertical y hacia arriba.
b) Los torques de la masa m y de la masa de la varilla, M, respecto al pivote B tienen sentidos opuestos. En el momento en el que el torque de la masa sea mayor que el del peso de la varilla, el pivote A, que tiene el torque en la misma dirección que la masa m, no podrá hacer nada para oponerse al giro. Por tanto, el sistema perderá el estado de equilibrio cuando $m\ g\ 1 > M\ g\ 0.5$, es decir

$$m\ \ > M\ \ 0.5 = 110\ kg$$

3. Un astronauta de 80 kg se encuentra en un globo espacial en reposo con respecto a la Tierra. Sabiendo que tiene un peso de 640 N, calcular la distancia del globo al centro del planeta. **(1 punto)**

Datos: $M_\mathrm{T} = 5{,}98\times 10^{24}$ kg. $G = 6{,}67\times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$

Solución

A partir del peso del astronauta calculamos la aceleración gravitatoria a esa distancia de la Tierra:

$$P = mg \quad \rightarrow \quad g = \frac{P}{m} = 8\ \mathrm{m/s^2}$$

La aceleración es la intensidad del campo gravitatorio, de modo que es fácil ahora calcular la distancia a la que se encuentra el globo:

$$g = G\frac{M_T}{R^2} \quad \Rightarrow \quad R = \sqrt{\frac{GM_T}{g}} = 7061\ \mathrm{km}$$

4. Un electrón de carga $-e$ se mueve en la dirección positiva del eje X con una energía cinética T_0. En un momento dado penetra en una región de anchura d en la que existe un campo eléctrico uniforme y constante. El electrón atraviesa esa región sin desviarse de su trayectoria rectilínea inicial y su velocidad a la salida es las dos terceras partes de la inicial. Determinar el vector intensidad del campo eléctrico dentro de esa región en función de los datos del problema. **(1,5 puntos)**

Solución

Como la velocidad del electrón disminuye sin cambiar su dirección, la fuerza eléctrica que experimenta debe tener la dirección del eje X sentido negativo

$$\mathbf{F} = -F\mathbf{i}$$

de donde tenemos que

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q} = \frac{F}{e}\mathbf{i}$$

Para calcular la fuerza, sabiendo que el campo es uniforme y constante, empleamos las ecuaciones del movimiento uniformemente acelerado:

$$v^2 = v_0^{\,2} - 2ad$$

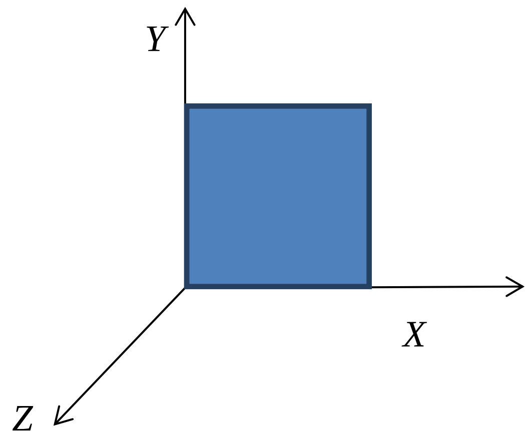
Despejamos la aceleración

$$2ad = v_0^{\,2} - v^2 = \frac{5}{9}v_0^{\,2} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{5}{9d}T_0$$

Finalmente tenemos

$$\mathbf{E} = \frac{F}{e}\mathbf{i} = \frac{5T_0}{9ed}\mathbf{i}$$

5. Supongamos que tenemos un campo magnético que tiene la expresión $\mathbf{B}(x,y,z)=(x^2+zy)\,\mathbf{i}+(\sin y)\,\mathbf{j}+(x+y+z)\,\mathbf{k}\ \ \mathrm{T}$. Calcular el flujo magnético que atraviesa el cuadrado de lado *L* (metros) representado en la figura. **(2 puntos)**



Solución:

El flujo magnético a través de una superficie tiene la forma

$$\phi=\int_S \mathbf{B}\cdot\hat{\mathbf{n}}\ dA.$$

En nuestro caso tenemos

$$\phi=\int_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{k}\ dxdy\ .$$

Sustituyendo el valor del campo y realizando el producto escalar obtenemos

$$\phi=\int_0^L\int_0^L (x+y)\ dxdy\ ,$$

donde además hemos tenido en cuenta que para ese cuadrado: $z=0$. Integrando

$$\phi=\int_0^L\int_0^L (x+y)\ dxdy = L^3\ \ \mathrm{Nm^2C^{-1}}$$

6. Un observador S' se mueve con respecto a otro observador a una velocidad relativa de 0,8*c*. Cuando se han cruzado han sincronizado sus relojes en $t=t'$=0. En el instante en el que el reloj de S marca 2 horas, éste emite un destello luminoso que llega a S'. Calcular la hora que marcarán sendos relojes cuando la luz alcanza a S'. **(1,5 puntos)**

Recordamos que las transformaciones de Lorentz son:

$$x=\gamma\left(x'+vt'\right)\qquad t=\gamma\left(t'+\frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x'=\gamma\left(x-vt\right)\qquad t'=\gamma\left(t-\frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma=1\big/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

Solución

Podemos resolver el problema de muchas formas, aunque la más sencilla es aplicando directamente las transformaciones de Lorentz. Supondremos que *c* está expresada en m/s.

Denominaremos suceso 1 (subíndice 1) a la emisión del rayo desde S y suceso 2 (subíndice 2) a la recepción del rayo en S'.

De los datos del enunciado tenemos que, para el suceso 1 en el sistema S:

Suceso 1 Sistema S:

$$x_1 = 0,$$

$$t_1 = 7200 \text{ s} = 2 \text{ h}.$$

Aplicando las transformaciones de Lorentz obtenemos las coordenadas del suceso 1 en el sistema S':

Suceso 1 Sistema S':

$$x_1' = -9600c \text{ m},$$

$$t_1' = 12000 \text{ s} = 3{,}33 \text{ h}.$$

Está claro que x_1' es la posición de S (punto donde ocurre el suceso 1) con respecto a S', mientras que el reloj de S' en el momento de la emisión del destello marcará las 3,33 h

Desde el punto de vista de S, el suceso 2 tendrá lugar en la posición de S' (punto de recepción del rayo), que vendrá dada por la distancia que ha recorrido S' en las dos horas que ha tardado en enviar el rayo, esto es vt_1, más lo que se aleja S' mientras el rayo viaja, esto es Δx. Tenemos por tanto

$$x_2 = vt_1 + \Delta x$$

Si definimos como Δt al tiempo que tarda el rayo en llegar desde S a S' (intervalo entre el suceso 1 y el 2) medido desde S, tenemos $\Delta x = v\Delta t$. Por otro lado tenemos $x_2 = c\Delta t$. Resolviendo el sistema obtenemos

$$\Delta t = \frac{vt_1}{c - v} = 28800 \text{ s} = 8 \text{ horas}$$

Y finalmente

Suceso 2 Sistema S:

$$x_2 = 28800c \text{ m},$$

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 36000 \text{ s} = 10 \text{ h}.$$

Aplicando de nuevo las transformaciones de Lorentz obtenemos para el sistema S':

Suceso 2 Sistema S':

$$x_2' = 0 \text{ m},$$

$$t_2' = 21600 \text{ s} = 6 \text{ h}.$$

Vemos que $x_2' = 0 \text{ m}$, lo cual es normal ya que el suceso 2 (recepción del rayo) tiene lugar en S'

Nota. Obsérvese que para el sistema S' el reloj situado en x_2 que marca el tiempo $t_2 = 10\ \mathrm{h}$ horas, adelanta al reloj de S situado en el punto $x_1 = 0$, que en el momento de la recepción del rayo también marca 10 h en el sistema S (ya que ambos relojes están sincronizados en S) en una cantidad dada por

$$\Delta t_S = L_P \frac{v}{c^2} = x_2 \frac{v}{c^2} = 6{,}4 \text{ horas}$$

de modo que para S', en el momento en el que detecta el rayo, el tiempo que marca el reloj de S situado en el punto $x_1 = 0$ será de 3,6 horas, por lo que para S' el tiempo que transcurre en el sistema S entre emisión y recepción es de 1,6 horas. Como es el tiempo medido por un mismo reloj, es el tiempo propio del sistema S, así que ahora bastará con aplicar la dilatación del tiempo para el sistema S'

$$\Delta t' = \gamma \Delta t_{\mathrm{P}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \Delta t_{\mathrm{P}} = 1{,}67 \times 1{,}6 = 2{,}67 \text{ horas}$$

De modo que recuperamos el resultado de más arriba: $t_2' - t_1' = 2{,}67\ \mathrm{h}$.

Una última forma de enfocar el problema es situándonos es el sistema S', que ahora suponemos fijo. Desde ese sistema el haz de luz es enviado desde S cuando el reloj en S' marcaba 3,33 h (calculado más arriba). En ese tiempo el sistema S se ha alejado una distancia 3,33 × v. Como la velocidad de la luz es independiente de la velocidad del emisor, el tiempo que tardará ese destello en llegar será $3{,}33 \times v / c = 2{,}67\ \mathrm{h}$, de modo que su reloj marcará las 3,33 + 2,67 = 6 horas, que es el resultado obtenido arriba.