Ejercicio 1 (1.5 pt)

Sea (E) la ecuación $(y+1)u_y + xu_x = 2xyu$

a) Resolver (E) con el dato $u(1, y) = 1$. ¿Es única la solución?

b) Imponer un dato de Cauchy para el que (E) tenga infinitas soluciones y escribir 2 de ellas.

c) ¿En qué puntos es tangente la curva $y = x^2$ a las características de (E)?

Solución. **a)**: Las características son las soluciones a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x}$$

y por tanto son las curvas $(y+1)/x = K$. El cambio más eficiente es

$$\begin{cases} \xi = \frac{y+1}{x} \\ \eta = x \end{cases}$$

que convierte la ecuación inicial en $u_\eta = 2yu = 2u(\xi\eta - 1)$. Las soluciones son $u(\xi, \eta) = F(\xi)e^{\xi\eta^2 - 2\eta}$ y deshaciendo el cambio, $u(x, y) = F((y+1)/x)e^{yx-x}$. Como $1 = u(1, y) = F(y+1)e^{y-1}$, se tiene que $F(t) = e^{2-t}$. Por tanto la solución es

$$\boxed{u(x, y) = e^{2-\frac{y+1}{x}+(y-1)x}.}$$

Y es única: la curva en el plano XY es $(g(s), h(s)) = (1, s)$; como $A(x, y) = y + 1$, $B(x, y) = x$, se tiene que $A(g(s), h(s)) = s + 1$ y $B(g(s), h(s)) = 1$. Por tanto,

$$g'(s)A(g(s), h(s)) - h'(s)B(g(s), h(s)) = 0 - 1 \neq 0.$$

b): Consideremos la curva en XY $(g(s), h(s)) = (s, -1)$ y la condición $u(g(s), h(s)) = 0$. La curva está tomada para que $g'(s)A(g(s), h(s)) - h'(s)B(g(s), h(s)) = (s+1)0 - 0 = 0$. Las soluciones generales sabemos que son $u(x, y) = F((y+1)/x)e^{yx-x}$; si imponemos $0 = u(s, -1) = F(0)e^{-2s}$, así que $F(0) = 0$ es suficiente para ser solución. Por ejemplo $F(t) = ct$ lo cumple, así que

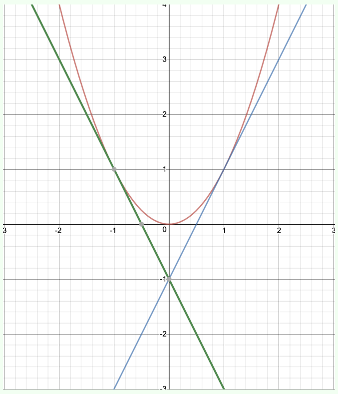
$$\boxed{u(x, y) = c\frac{y+1}{x}e^{yx-x}}$$

son soluciones para cualquier $c \in \mathbb{R}$.

c): la curva $y = x^2$ parametrizada es $(g(s), h(s)) = (s, s^2)$; entonces $g'(s) = 1$, $h'(s) = 2s$, $A(g(s), h(s)) = s^2 + 1$, $B(g(s), h(s)) = s$. Por tanto tenemos que hallar s tales que

$$0 = s^2 + 1 - 2ss = 1 - s^2$$

O sea $s = \pm 1$ y los puntos correspondientes son $P = (1, 1)$, $Q = (-1, 1)$. Hallemos a qué caracteristicas $(y+1)/x = K$ son tangentes: Para P se tiene que $K = 2$ y para Q, $K = -2$. Resumiendo, en P la curva $y = x^2$ es tangente a la característica $y = 2x - 1$ y en Q a la característica $y = -2x - 1$.


3
2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
1
2
3

Ejercicio 2 (1.5 pt)

Reducir a forma canónica y, si es posible, encontrar la solución general:

a) $u_{yy} + e^{x+y} u_{xy} - u_y = 0$.

b) $u_{yy} + 2u_{xy} + u_{xx} + u = 0$.

Solución. **a)**: Se tiene que $A = 1$, $B = e^{x+y}$ y $C = 0$, así que el discriminante es $\Delta = B^2 - 4AC = e^{2(x+y)} > 0$, así se que trata de una ecuación hiperbólica. las dos ecuaciones características son

$$\begin{aligned} \tfrac{dx}{dy} &= \tfrac{1}{2A}(B - \sqrt{\Delta}) = 0 \\ \tfrac{dx}{dy} &= \tfrac{1}{2A}(B + \sqrt{\Delta}) = e^{x+y}. \end{aligned}$$

Las curvas características asociadas a la primera ecuación son $x = K$, y a la segunda, $e^{-x} + e^y = K$, de donde hacemos el cambio.

$$\begin{aligned} \xi &= e^{-x} + e^y \\ \eta &= x, \end{aligned}$$

y se llega a

$$e^{2y+x} u_{\eta\xi} = 0,$$

o sea

$$u_{\eta\xi} = 0,$$

cuya solución es

$$u(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

y por tanto,

$$\boxed{u(x, y) = f(e^{-x} + e^y) + g(x).}$$

b): $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$ y el discriminante es $\Delta = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 1 = 0$, así que se trata de una ecuación parabóbica; como se trata de coeficientes constantes utilizamos el siguiente cambio

$$\begin{aligned} \xi &= x - \tfrac{B}{2A} y = x - y \\ \eta &= y \end{aligned}$$

Y se llega a la ecuación $u_{\eta\eta} + u = 0$. El polinomio característico $\mu^2 + \mu$ tiene por raíces $\pm i$ y por tanto las soluciones son $c_1(\xi)\cos\eta + c_2(\xi)\sin\eta$. Deshaciendo el cambio,

$$\boxed{u(x, y) = c_1(x - y)\cos y + c_2(x - y)\sin y.}$$

Nota 1. *Un poco de teoría sobre las soluciones a un problema de Sturm-Liouville no-homogéneo*

$$\begin{cases} y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+\lambda c(x)y(x)=f(x), & x\in(\alpha,\beta) \\ a_1y(\alpha)+a_2y'(\alpha)=0 \\ b_1y(\beta)+b_2y'(\beta)=0 \end{cases} \tag{$\star(\lambda,f)$}$$

Primero lo ponemos en forma autoadjunta multiplicado todo por la función $e^{\int a(x)dx}$*:*

$$\begin{cases} (e^{\int a}y')'+be^{\int a}y+\lambda ce^{\int a}y=e^{\int a}y''+ae^{\int a}y'+be^{\int a}y+\lambda ce^{\int a}y=e^{\int a}f & \text{en } (\alpha,\beta) \\ a_1y(\alpha)+a_2y'(\alpha)=0 \\ b_1y(\beta)+b_2y'(\beta)=0 \end{cases} \tag{$\star(\lambda,f)$}$$

Poniendo $p(x)=e^{\int a(x)dx}$, $q(x)=-b(x)e^{\int a(x)dx}$, $r(x)=c(x)e^{\int a(x)dx}$, $g(x)=e^{\int a(x)dx}f(x)$ *se tiene*

$$\begin{cases} (p(x)y(x)')'-q(x)y(x)+\lambda r(x)y(x)=g(x), & x\in(\alpha,\beta) \\ a_1y(\alpha)+a_2y'(\alpha)=0 \\ b_1y(\beta)+b_2y'(\beta)=0 \end{cases} \tag{$\star(\lambda,f)$}$$

Pongamos

$$\mathcal{L}(y):=-\frac{1}{r}((p(x)y')'-q(x)y).$$

Entonces $\star(\lambda,f)$ *se escribe*

$$\begin{cases} -\mathcal{L}(y)+\lambda y=G:=\frac{g}{r}, & x\in(\alpha,\beta) \\ a_1y(\alpha)+a_2y'(\alpha)=0 \\ b_1y(\beta)+b_2y'(\beta)=0 \end{cases} \tag{$\star(\lambda,f)$}$$

Sean $(\lambda_n)_n$ *los autovalores de problema homogéneo* ($\star(\lambda,0)$)*, con autofunciones correspondientes* $(y_n)_n$*. O sea,* $\mathcal{L}(y_n)=\lambda_ny_n$ *para todo* n*. Sabemos entonces que* $(y_n)_n$ *son base ortogonal del espacio* $L_2([\alpha,\beta],r)$*, donde el producto escalar es*

$$\langle v,w\rangle=:\int_\alpha^\beta r(x)v(x)w(x)dx=\int_\alpha^\beta c(x)e^{\int a(x)dx}v(x)w(x)dx.$$

Supongamos que $y=\sum_n a_ny_n$ *es solución de* ($\star(\lambda,f)$)*, y supongamos que* $G=\sum_n b_ny_n$*, donde* $b_n=\langle G,y_n\rangle/\langle y_n,y_n\rangle$*. Entonces,*

$$\sum_n b_ny_n=-\mathcal{L}(y)+\lambda y=\sum_n a_n(\lambda-\lambda_n)y_n,$$

Por unicidad de coeficientes, para cada n*,*

$$\frac{\langle G,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle}=b_n=a_n(\lambda-\lambda_n) \tag{1}$$

Por tanto,

- *si* λ *no es autovalor, despejando en* (1)*, la solución única a* $\star(\lambda,f)$ *es*

$$\boxed{y=\sum_n\frac{\langle G,y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle(\lambda-\lambda_n)}y_n=\sum_n\frac{\langle\frac{g}{r},y_n\rangle}{\langle y_n,y_n\rangle(\lambda-\lambda_n)}y_n=\sum_n\frac{\int_\alpha^\beta e^{\int a(x)dx}f(x)y_n(x)dx}{(\lambda-\lambda_n)\int_\alpha^\beta e^{\int a(x)dx}c(x)y_n^2(x)dx}y_n} \tag{2}$$

- *Supongamos que* $\lambda=\lambda_{n_0}$.

- *Supongamos que* $\int_\alpha^\beta e^{\int a(x)dx} f(x) y_{n_0}(x)dx = \int_\alpha^\beta g y_{n_0} = \langle G, y_{n_0}\rangle = 0$*; entonces se comprueba fácilmente que para cualquier* $\xi \in \mathbb{R}$

$$\boxed{y_\xi = \xi y_{n_0} + \sum_{n \neq n_0} \frac{\int_\alpha^\beta g(x) y_n(x)dx}{\langle y_n, y_n\rangle(\lambda - \lambda_n)} y_n = \xi y_{n_0} + \sum_{n \neq n_0} \frac{\int_\alpha^\beta e^{\int a(x)dx} f(x) y_n(x)dx}{\langle y_n, y_n\rangle(\lambda - \lambda_n)} y_n \qquad (3)}$$

son todas las (infinitas) soluciones a $\star(\lambda_{m_0}, f)$.

- *Supongamos que* $\int_\alpha^\beta e^{\int a(x)dx} f(x) y_{n_0}(x)dx = \int_a^b g y_{n_0} = \langle F, y_{n_0}\rangle \neq 0$*. Entonces, si existe solución* $y = \sum_n a_n y_n$*, se cumple*

$$0 \neq \langle G, y_{n_0}\rangle = \langle -\mathcal{L}(y) + \lambda_{n_0} y, y_{n_0}\rangle = a_{n_0}(\lambda_{n_0} - \lambda_{n_0})\langle y_{n_0}, y_{n_0}\rangle = 0$$

lo que es imposible; o sea que no hay solución en este caso.

Ejercicio 3 (3 pt)

a) Sea

$$\begin{cases} y'' - 6y' + \lambda y = 0 \text{ en } (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases} \tag{E}$$

a.1) Hallar los autovalores y autofunciones $\{\lambda_n\}_n$, $\{y_n\}_n$, la forma autoadjunta de la ecuación, y calcular los productos escalares correspondientes $\langle y_n, y_n \rangle$.

a.2) Calcular el número de soluciones de

$$\begin{cases} y'' - 6y' - 7y = 7 \text{ en } (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

b) Sea

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y + \lambda y = 0 \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{E}$$

b.1) Hallar los autovalores $\{\lambda_n\}_n$ y autofunciones correspondientes $\{y_n\}_n$ de (E).

b.2) Hallar el desarrollo de $f(x) = e^{2x}$ en las autofunciones $\{y_n\}_n$ de (E).

b.3) Calcular el número de soluciones de cada uno de los siguientes problemas:

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \pi \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 4y' + 5y = e \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' - 4y' + 8y = \cos(2x) \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Solución. **a.1)**: $y'' - 6y' + \lambda y = 0$ es una edo lineal de segundo orden con coeficientes constantes; el polinomio característico $\mu^2 - 6\mu + \lambda$ tiene como raíces $3 \pm \sqrt{9-\lambda}$. Distinguimos casos:

1. $\lambda < 9$: Las raíces son reales y por tanto las soluciones son $y(x) = c_1 e^{3-\sqrt{9-\lambda}x} + c_2 e^{3+\sqrt{9-\lambda}x}$; imponiendo que $0 = y(0) = c_1 + c_2$, $0 = c_1 e^{3-\sqrt{9-\lambda}} + c_2 e^{3+\sqrt{9-\lambda}}$, se tiene que $c_1 = c_2 = 0$, así que para estos λ no hay autofunciones asociadas.
2. $\lambda = 9$. Hay una sola raíz 3, así que las soluciones son $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{3x}$; por tanto, $0 = y(0) = c_1$ y $0 = y(1) = c_2 e^3$, así que $c_2 = 0$ y tampoco hay autofunciones asociadas.
3. $\lambda > 9$. Las raíces al polinomio característico son $3 \pm i\sqrt{\lambda - 9}$ y las soluciones son

$$y(x) = (c_1 \cos((3 \pm \sqrt{\lambda-9})x) + c_2 \sin((3 \pm \sqrt{\lambda-9})x))e^{3x}.$$

Por tanto, $0 = y(0) = c_1$ y $0 = y(1) = c_2 \sin(3 \pm \sqrt{\lambda-9})e^3$, así que $\sqrt{\lambda-9} = n\pi$, con $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$. Por tanto los autovalores y autofunciones asociadas son

$$\lambda_n = 9 + n^2\pi^2, \qquad y_n(x) = e^{3x}\sin(n\pi x) \text{ para } n \in \mathbb{N},\ n > 0.$$

Para calcular $\langle y_n, y_n \rangle$ primero ponemos la ecuación en forma autoadjunta: $(py')' - qy + \lambda r y = 0$: Sea $a := -6$ entonces

$$e^{\int a(x)dx}(y'' - 6y' + \lambda y) = (e^{-6x}y')' + \lambda e^{-6x}y = 0.$$

Por tanto el peso de integral es e^{-6x} y el correspondiente producto escalar

$$\boxed{\langle f,g\rangle = \int_0^1 e^{-6x} f(x)g(x)dx.}$$

Sabemos que las autofunciones son ortogonales dos a dos, así que $\langle y_m, y_n\rangle = 0$ si $m \neq n$ y así,

$$\boxed{\langle y_n, y_m\rangle = \int_0^1 e^{-6x}(e^{3x}\sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = \frac{1}{2}\delta_{n,m}.}$$

a.2): Calculemos el número de soluciones de

$$\begin{cases} y'' - 6y' - 7y = 7 \text{ en } (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Como $\lambda = -7$ no es autovalor,

hay solución única.

Esta solución viene explicada en (3), a partir del problema en forma autoadjunta: $e^{\int a(x)dx}(y'' - 6y' + \lambda y) =$

$$\begin{cases} (e^{-6x}y')' - 7e^{-6x}y = e^{-6x}(y'' - 6y' - 7y) = 7e^{-6x} \text{ en } (0,1) \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

Así que

$$\boxed{\begin{aligned} y &= \sum_n \frac{\int_0^1 f y_n}{\langle y_n, y_n\rangle(-16 - n^2\pi^2)} y_n = 14\sum_n \frac{\int_0^1 e^{-3x}\sin(n\pi x)dx}{(-16 - n^2\pi^2)} y_n = \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{-14n\pi(1 - e^{-3}\cos(n\pi))}{(9 + n^2\pi^2)(16 + n^2\pi^2)} e^{3x}\sin(n\pi x) \end{aligned}}$$

b.1) Hallemos autovalores y autofunciones de

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y + \lambda y = 0 \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases} \tag{E}$$

El polinomio característico es $\mu^2 - 4\mu + (4+\lambda)\mu$ con raíces $2 \pm \sqrt{-\lambda}$.

- $\lambda < 0$. 2 raíces reales y las soluciones son $y(x) = c_1 e^{2-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{2+\sqrt{-\lambda}x}$ y por tanto

$$\begin{cases} 0 = y(0) = c_1 + c_2 \\ 0 = y(\pi) = c_1 e^{2-\sqrt{-\lambda}\pi} + c_2 e^{2+\sqrt{-\lambda}\pi}. \end{cases}$$

  Por tanto, $c_1 = c_2 = 0$ y no hay autofunciones.
- $\lambda = 0$. Una única raíz 2 y las soluciones son $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$, lo que implica que $0 = y(0) = c_1$; $0 = y(\pi) = c_2\pi e^{2\pi}$ y por tanto no hay autofunciones.
- $\lambda > 0$. Dos raíces complejas $2 \pm i\sqrt{\lambda}$ y soluciones $y(x) = (c_1\cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}x))e^{2x}$. Utilizando las condiciones de contorno, se tiene que $c_1 = 0$ y $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, así que los autovalores y autofunciones son

$$\lambda_n = n^2,\ y_n = e^{2x}\sin(nx) \text{ para } n \in \mathbb{N},\ n > 0.$$

b.2): Encontremos primero el peso que define el producto escalar. Para ello buscamos la forma autoadjunta:

$$e^{-4x}y'' - 4e^{-4x}y' + 4e^{-4x}y + \lambda e^{-4x}y = (e^{-4x}y')' + 4e^{-4x}y + \lambda e^{-4x}y.$$

Por tanto, el producto escalar es $\langle g, h\rangle = \int_0^\pi e^{-4x}g(x)h(x)dx$. Así que cualquier función $F \in L_2([0,\pi], e^{-4x}dx)$ se puede escribir

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle F, y_n\rangle}{\langle y_n, y_n\rangle} y_n = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^\pi e^{-4x}F(x)y_n(x)dx\right) y_n,$$

ya que $\langle y_n, y_n\rangle = \int_0^\pi \sin^2(nx)dx = \pi/2$. Por otro lado,

$$\int_0^\pi e^{-4x}e^{2x}e^{2x}\sin(nx)dx = \int_0^\pi \sin(nx)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{2}{n} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Concluyendo,

$$e^{2x} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{2x}\sin((2k+1)x).$$

b.3): El problema

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = \pi \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

tiene una única solución

ya que $\lambda = 0$ no es autovalor de (E). Estudiemos el número de soluciones de

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = e \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Tenemos que $\lambda = \lambda_1 = 1$ es autovalor de (E), así que o hay infinitas soluciones o no hay solución, dependiendo de si valor de $\int_0^\pi e^{-4x}ee^{2x}\sin x dx$ es cero o no. Como

$$\int_0^\pi e^{-4x}ee^{2x}\sin x dx = \frac{e}{5}(\frac{1}{e^{2\pi}} + 1) \neq 0,$$

así que

no hay soluciones.

Finalmente analicemos el número de soluciones de

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 8y = \cos(2x) \text{ en } (0,\pi) \\ y(0) = y(\pi) = 0. \end{cases}$$

Otra vez, $\lambda = 4 = \lambda_2$ es autovalor, así que hay que analizar

$$\int_0^\pi e^{-4x}\cos(2x)e^{2x}\sin(2x)dx = \frac{1}{10}\left(-\frac{1}{e^{2\pi}} + 1\right) \neq 0,$$

así que

no hay soluciones.

Ejercicio 4 (2 pt)

a) Dada la ecuación de un problema regular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\phi}{dx}\right] + q(x)\phi + \lambda\sigma(x)\phi = 0$$

probar que cada autovalor está relacionado con su autofunción correspondiente mediante la *fórmula de Rayleigh*:

$$\lambda = \frac{-p\phi\frac{d\phi}{dx}\Big|_a^b + \int_a^b \left[p\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - q\phi^2\right]dx}{\int_a^b \phi^2\sigma dx}$$

b) Consideremos el problema de autovalores

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + \lambda y = 0 \text{ en } (1, b) \\ y(1) = y(b) = 0 \end{cases}$$

b.1) Convertirlo en uno de Sturm-Liouville.

b.2) Utilizando la fórmula de Rayleigh probar que $\lambda > 0$.

b.3) Calcular sus autovalores y autofunciones.

b.4) Estudiar la ortogonalidad de sus autofunciones.

Solución. **a)**: Multiplicando la igualdad dada por ϕ e integrando, se tiene

$$\int_a^b \left[\phi\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi}{dx}\right) + q\phi^2\right]dx + \lambda\int_a^b \phi^2\sigma dx.$$

Como $\int_a^b \phi^2\sigma dx > 0$, podemos despejar λ

$$\lambda = \frac{-\int_a^b \left[\phi\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi}{dx}\right) + q\phi^2\right]dx}{\int_a^b \phi^2\sigma dx}.$$

Si en la integral $\int_a^b \phi\frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi}{dx}\right)dx$ tomamos partes $u = \phi$, $dv = \frac{d}{dx}\left(p\frac{d\phi}{dx}\right)dx$, obtenemos

$$\lambda = \frac{-p\phi\frac{d\phi}{dx}\Big|_a^b + \int_a^b \left[p\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - q\phi^2\right]dx}{\int_a^b \phi^2\sigma dx}.$$

b.1): Dividiendo por x^2 se tiene

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{\lambda}{x^2}y = 0.$$

Multiplicando por el factor integrante

$$e^{\int\frac{1}{x}dx} = e^{\ln x} = x$$

se tiene

$$xy'' + y' + \frac{\lambda}{x}y = (xy')' + \frac{\lambda}{x}y = 0.$$

b.2): Puesto que $y(1)=0$, $y(b)=0$, se tiene

$$\lambda = \frac{-p\phi\frac{d\phi}{dx}\Big|_1^b + \int_a^b \left[p\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 - q\phi^2\right]dx}{\int_a^b \phi^2\sigma dx} = \frac{\int_1^b \left[x\left(y'\right)^2\right]dx}{\int_1^b y^2\frac{1}{x}dx} \geq 0$$

ya que $\int_1^b y^2\frac{1}{x}dx > 0$. Si $\lambda = 0$ entonces $y' = 0$ con lo que $y = k$ y como $y(1) = 0$ ha de ser la solución trivial $y = 0$.

b.3): Como la ecuación $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0$ es de Cauchy-Euler, buscamos soluciones de la forma $y(x) = x^p$. Como $y'(x) = px^{p-1}$ y $y''(x) = p(p-1)x^{p-2}$ entonces

$$p(p-1)x^{p-2+2} + px^{p-1+1} + \lambda x^p = 0$$

lo que supone $p^2 + \lambda = 0$ y $p = \pm i\sqrt{\lambda}$, y las soluciones son

$$x^{\pm i\sqrt{\lambda}} = \left(e^{\ln x}\right)^{\pm i\sqrt{\lambda}} = e^{\pm i\sqrt{\lambda}\ln x}. \tag{a}$$

Para construir soluciones reales, tomamos parte real e imaginaria en (a) y tenemos

$$y = A\cos(\sqrt{\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\ln x)$$

Como $y(1) = 0 = A$ y $y(b) = B\sin(\sqrt{\lambda}\ln b) = 0$ con lo que $\sqrt{\lambda}\ln b = n\pi$, esto es

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ln b}\right)^2, \qquad y_n(x) = \sin\left(n\pi\frac{\ln x}{\ln b}\right) \quad n\in\mathbb{N},\ n\geq 1.$$

b.4): Se tiene

$$\langle y_n, y_m\rangle = \int_1^b \sin\left(n\pi\frac{\ln x}{\ln b}\right)\sin\left(m\pi\frac{\ln x}{\ln b}\right)\frac{1}{x}dx.$$

Con el cambio $u = \frac{\ln x}{\ln b}$, $du = \frac{1}{x\ln b}dx$, se tiene

$$\langle y_n, y_m\rangle = \ln b\int_0^1 \sin\left(n\pi u\right)\sin\left(m\pi u\right)du = \ln b\frac{\delta_{nm}}{2}.$$

Ejercicio 5 (2 pt)

Consideremos el siguiente problema con parámetro λ

$$\begin{cases} xy'' + 2y' + \lambda xy = f(x) \text{ en } (1,2) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases} \tag{E(λ, f)}$$

a) Hallar los autovalores y autofunciones del problema homogéneo asociado.
b) Encontrar los $n \in \mathbb{N}$ tales que $(\mathrm{E}(\pi^2, \sin(n\pi x)))$ tiene soluciones y calcularlas.
c) Utilizando la función de Green, hallar las soluciones de $\mathrm{E}(0, \chi_{[1,2]})$, donde para un conjunto A, χ_A es la función que vale 1 en A y cero fuera de A.

Solución. Seguimos las mismas ideas que en **Ejemplo 9.** de la página 20 de los apuntes.

a): Primeramente ponemos la ecuación $\mathrm{E}(\lambda, f)$ en forma autoadjunta:

$$\begin{cases} (x^2y')' + \lambda x^2 y = xf(x) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases} \tag{$\star$}$$

Hacemos el cambio de variable $u = x \cdot y$. Se tiene entonces que

$$y' = \frac{xu' - u}{x^2}$$

y por tanto, $(x^2y')' + \lambda x^2 y = xf(x)$ se convierte en

$$xf(x) = (xu' - u)' + \lambda xu = xu'' + x\lambda u.$$

O sea, la forma autoadjunta en u es

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = f(x) \text{ en } (1,2) \\ u(1) = u(2) = 0 \end{cases} \tag{E(λ, f)}$$

Estudiamos ahora la homogénea

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0 \text{ en } (1,2) \\ u(1) = u(2) = 0 \end{cases} \tag{H}$$

Se trata de una edo lineal de orden 2 con coeficientes constantes. El polinomio característico es $\mu^2 + \lambda\mu$.

- $\lambda < 0$; entonces las raíces del polinomio son $\pm\sqrt{-\lambda}$ y las soluciones a (H) son $u = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}$. Como $u(1) = u(2) = 0$, se tiene que

$$\begin{cases} 0 = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}} \\ 0 = c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}2} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}2} \end{cases} \tag{H}$$

  de lo que se sigue que $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto para $\lambda < 0$ no hay autofunciones asociadas.
- $\lambda = 0$. Las raíces del polinomio característico son $\mu = 0$ y a la ecuación homogénea, $u = c - 1 + c_2 x$; Como $u(1) = u(2) = 0$, se tiene que $c_1 = c_2 = 0$ y por tanto $\lambda = 0$ no tiene autofunción asociada.

- $\lambda > 0$. Las raíces del característico son $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$ y a la ecuación $u = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$. Por tanto, poniendo $\alpha := \sqrt{\lambda})$,

$$\begin{cases} 0 & = c_1 \cos(\alpha) + c_2 \sin(\alpha); \\ 0 & = c_1 \cos(2\alpha) + c_2 \sin(2\alpha) = c_1(\cos^2\alpha) - c_1 \sin^2\alpha + 2c_2 \sin\alpha\cos\alpha = \\ & = (c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha)\cos\alpha - c_1\sin^2\alpha + c_2\sin\alpha\cos\alpha = \\ & = \sin\alpha(-c_1\sin\alpha + c_2\cos\alpha) \end{cases}$$

Supongamos primero que $\sin\alpha \neq 0$. Entonces se tiene

$$\begin{cases} 0 & = c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha; \\ 0 & = -c_1\sin\alpha + c_2\cos\alpha \end{cases}$$

De aquí se sigue fácilmente que $c_1 = c_2 = 0$ Así que $\sin(\sqrt{\lambda}) = 0$. O sea, tenemos autovalor $\lambda_n = n^2\pi^2$ y autofunción $u_n = \sin(n\pi x)$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Deshaciendo el cambio $u = xy$, tenemos que el problema homogéneo asociado a $(\star)$ tiene autovalores y autofunciones

$$\boxed{\lambda_n = n^2\pi^2, \qquad y_n = \frac{\sin(n\pi x)}{x}.}$$

b): Estudiemos en función de n el problema

$$\begin{cases} xy'' + 2y' + \pi^2 xy = \sin(n\pi x) \text{ en } (1,2) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases}$$

O en forma autoadjunta

$$\begin{cases} (x^2y')' + \pi^2x^2y = x\sin(n\pi x) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases} \tag{$\diamond(n)$}$$

Lo hacemos utilizando la Nota 1. Como π^2 es autovalor del homogéneo asociado a $(\star)$, con autofunción $y_1(x) = \sin(\pi x)/x$, tenemos que $(\diamond(n))$ o no tiene solución o tiene infinitas soluciones, dependiendo de si $\int_0^1 (\sin(\pi x)/x)x\sin(n\pi x)dx$ es diferente o igual a cero. Como $\int_0^1 \sin(\pi x)\sin(n\pi x)dx = (1/2)\delta_{1,n}$, se tiene que $(\diamond(1))$ no tiene solución, mientras que para $n \neq 1$, $(\diamond(n))$ tiene infinitas soluciones, que vamos a hallar a continuación. Por tanto, las soluciones a

$$\begin{cases} (x^2y')' + \pi^2x^2y = x\sin(n\pi x) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases} \tag{$\diamond(n)$}$$

para $n > 1$ son, a partir de (3) para cada $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{y_\xi = \xi\frac{\sin(\pi x)}{x} + \sum_{m>1} \frac{\int_1^2 t\sin(n\pi t)\frac{\sin(m\pi t)}{t}dt}{\langle\sin(m\pi x),\sin(m\pi x)\rangle(\pi^2 - \pi^2m^2)}\frac{\sin(m\pi x)}{x} = a\frac{\sin(\pi x)}{x} + \frac{\sin(n\pi x)}{\pi^2(1-n^2)x}}$$

c): Consideremos ahora el problema

$$\begin{cases} xy'' + 2y' = 1 \text{ en } (1,2) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases} \tag{E(0,1)}$$

Como $\lambda = 0$ no es autovalor, existe solución única. En forma regular,

$$\begin{cases} (x^2y')' = x \text{ en } (1,2) \\ y(1) = y(2) = 0 \end{cases} \tag{E(0,1)}$$

Utilizando (2), la solución es

$$y(x) = \sum_n \frac{\int_1^2 t\frac{\sin(n\pi t)}{t}dt}{\langle y_n, y_n\rangle(-\pi^2n^2)}\frac{\sin(n\pi x)}{x} = \sum_{n \text{ impar}} \frac{-\frac{2}{n\pi}}{\frac{1}{2}(-\pi^2n^2)}\frac{\sin(n\pi x)}{x} = \sum_{n \text{ impar}} \frac{4}{\pi^3n^3}\frac{\sin(n\pi x)}{x} \tag{4}$$

Hallemos la solución utilizando la función de Green. Tenemos que encontrar dos funciones independientes (Wronskiano no nulo) y_1 y_2 tales que $(x^2y_1')' = x^2y_2')' = 0$ y $y_1(1) = 0$, $y_2(2) = 0$. Las soluciones a $(x^2y')' = 0$ son $y = K/x + C$. Con las condiciones de contorno, podemos escoger $y_1(x) = 1/x - 1$ y $y_2 = 2/x - 1$. El Wronskiano es

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} - 1 & \frac{2}{x} - 1 \\ -\frac{1}{x^2} & -\frac{2}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2} \neq 0$$

La función de Green es

$$G(x,s) := \begin{cases} \frac{y_1(s)y_2(x)}{p(x)W(y_1(x),y_2(x))} & \text{para } 1 \leq s \leq x \\ \frac{y_2(s)y_1(x)}{p(x)W(y_1(x),y_2(x))} & \text{para } x \leq s \leq 2 \end{cases}$$

donde en nuestro caso $p(x) = x^2$. Por tanto,

$$G(x,s) := \begin{cases} \left(\frac{1}{s} - 1\right)\left(\frac{2}{x} - 1\right) & \text{para } 1 \leq s \leq x \\ \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{2}{s} - 1\right) & \text{para } x \leq s \leq 2 \end{cases}$$

La solución a (E(0,1)) es entonces

$$\boxed{y(x) = \int_1^2 sG(x,s)ds = \int_1^x \left(\frac{1}{s} - 1\right)\left(\frac{2}{x} - 1\right) sds + \int_x^2 \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{2}{s} - 1\right) sds = -\frac{3}{2} + \frac{1}{x} + \frac{x}{2}}$$