Pregunta 1 (Valor 2: 1.5 la resolución correcta y 0.5 la presentación ordenada)

Enuncie y demuestre el conocido criterio integral para series numéricas de términos positivos.

Solución: Ver Vol 2 p.61 del texto base.

Pregunta 2 (Valor 2.5: 1.5 la resolución correcta y 1 la presentación ordenada)

Sean las sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$f_n(x) = \frac{\text{sen } nx}{n^3} \quad \text{ y } \quad g_n(x) = \frac{n}{2^n(2n-1)}(x-1)^n.$$

Determine el conjunto de $\mathbb{R}$ para el cual existe la función $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \big(f_n(x) + g_n(x)\big)$.

Describir la función derivada F' allí donde exista.

Solución:

Estudiamos la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^3}$ en mayor subconjunto de $\mathbb{R}$.

Se tiene que

$$\left|\frac{\text{sen } nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y que la serie $A = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

Al aplicar el criterio de Weierstrass está asegurado que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } nx}{n^3}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Estudiamos la convergencia de la otra serie. Para ello la reescribimos como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(2n-1)}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}\Big(\frac{x-1}{2}\Big)^n.$$

Se trata de una serie de potencias de la forma $\sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n$ donde $c_n = \frac{n}{2n-1}$ y $y = \frac{x-1}{2}$.

Como $\lim_n \frac{c_{n+1}}{c_n} = \lim_n \frac{\frac{n+1}{2n+1}}{\frac{n}{2n-1}} = 1$, el radio de convergencia es 1.

Además $\lim_n c_n = \frac{1}{2} \neq 0$, la serie diverge para $|y| = 1$. Por tanto, la serie converge absolutamente si

$$|y| < 1 \iff -1 < \frac{x-1}{2} < 1 \iff -2 < x-1 < 2 \iff -1 < x < 3.$$

Es decir, la función F sólo existe en el intervalo $(-1, 3)$ y su función derivada es

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\cos nx}{n^2} + \frac{n^2}{2^n(2n-1)}(x-1)^{n-1}\Big)$$

en dicho intervalo.

Pregunta 3 (Valor 3: 2 la resolución correcta y 1 la presentación ordenada)

Dada la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$, estudie la convergencia de la integral impropia

$$\int_0^{\infty} f(x)dx$$

Calcule su valor en el caso de que sea una integral impropia convergente.

Solución:

Al realizar el cambio de variable $x = \operatorname{tg} y$ se tiene que ($x = 0 \iff y = 0$ y $x \to \infty \iff y \to \pi/2$)

$$\int_0^a \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx = \int_0^{\operatorname{arctg} a} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} y}}{(\operatorname{tg}^2 y+1)\cos^2 y}dy = \int_0^{\operatorname{arctg} a} \frac{\sqrt{\operatorname{tg} y}}{\sec x \cos^2 y}dy = \int_0^{\operatorname{arctg} a} \sqrt{\operatorname{tg} y}\ dy,$$

y pasando al límite cuando $a \to \infty$ ($x = 0 \iff y = 0$ y $x \to \infty \iff y \to \pi/2$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx = \int_0^{\pi/2-} \sqrt{\operatorname{tg} y}\ dy = \int_0^{\pi/2-} \operatorname{sen}^{\frac{1}{2}} y\ \cos^{-\frac{1}{2}} y\ dy.$$

Esta última integral es la mitad de una función beta $\beta(p,q)$ siendo $2p-1 = \dfrac{1}{2} \iff p = \dfrac{3}{4}$ y $2q-1 = -\dfrac{1}{2} \iff q = \dfrac{1}{4}$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Por tanto, la integral impropia es convergente.

Además,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\operatorname{sen}\ (\pi/4)} = \pi/\sqrt{2}\ ,$$

al aplicar la fórmula de los complementos (ver Tomo II p.32 dl texto base) y que $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} = 1$.

Pregunta 4 (Valor 2.5: 1.5 la resolución correcta y 1 la presentación ordenada)

Determine una función continua f definida en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ de la que se sabe que su función derivada es la función

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} & \text{si } -\dfrac{\pi}{4} \leq x \leq -\dfrac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}^2 x\ e^x & \text{si } -\dfrac{\pi}{6} < x \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Solución:

La expresión de g: la función en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{6}\right]$ se puede escribir de la forma

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2\dfrac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \frac{\cos\dfrac{x}{2}}{2\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}} + \frac{\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}}{2\cos\dfrac{x}{2}}\ .$$

g es una función continua en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{6}\right]$, al ser cociente de dos funciones continuas y no anularse la función denominador en ese intervalo.

La función g es una función continua en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$ por ser producto de dos funciones continuas en ese intervalo.

Así pues, la función g es una función integrable en $\left[-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$.

Luego, la función f puede ser expresada de la forma:

$$f(x) = \int_{-2}^{1} g(x)dx = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt & \text{si } x \in \Big[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\Big]. \\ \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{x} \operatorname{sen}^2 t \ e^t \ dt & \text{si } x \in \Big(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big]. \end{cases}$$

Por una parte se tiene

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt = \int \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} dt + \int \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} + \cos^2 \frac{t}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} dt = \log|\operatorname{sen} \frac{t}{2}| - \log|\cos \frac{t}{2}| = -\log|\operatorname{tg} \frac{t}{2}| = \sqrt{\log \frac{1-\cos t}{1+\cos t}}.$$

Por otra, si se opta por aplicar la integración por partes ($\int UdV = UV - \int VdU$) utilizando $U = \operatorname{sen} 2t$ y $dV = e^t dt$, se tiene:

$$V = e^t, \quad dU = 2 \operatorname{sen} t \cos t dt = 2 \operatorname{sen} 2t dt,$$

$$\int \operatorname{sen}^2 t \ e^t \ dt = e^t \operatorname{sen}^2 t - \int \operatorname{sen} 2t \ e^t dt = e^t \operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{5} e^t \operatorname{sen} 2t - \frac{2}{5} e^t \cos 2t.$$

puesto que al integral

$$\int \operatorname{sen} 2t \ e^t dt$$

es una integral por partes que se reproduce la integral de partida. Basta considerar $U = \operatorname{sen} 2t$ y $dV = e^t dt$

$$V = e^t, \quad dU = 2\cos 2t dt, \quad \int \operatorname{sen} 2t \ e^t \ dt = e^t \operatorname{sen} 2t - 2\int \cos 2t \ e^t dt,$$

y para esta última se toma $U = \cos 2t$ y $dV = e^t dt$

$$V = e^t, \quad dU = -2 \operatorname{sen} 2t dt, \quad \int \cos 2t \ e^t \ dt = e^t \cos 2t + 2\int \operatorname{sen} 2t \ e^t dt,$$

Luego,

$$\int \operatorname{sen} 2t \ e^t dt = e^t \operatorname{sen} 2t - 2(e^t \cos 2t + 2\int \operatorname{sen} 2t \ e^t dt) \iff 5\int \operatorname{sen} 2t \ e^t dt = e^t \operatorname{sen} 2t - 2e^t \cos 2t.$$

Además,

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt = \Big[\frac{1}{2}\log(1-cost) - \frac{1}{2}\log(1+cost)\Big]_{-2}^{1} = \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+2) - \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}+2) - \frac{1}{2}\log(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\log(2-\sqrt{3}).$$

Así pues

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\log \frac{1-\cos x}{1+\cos x}} & \text{si } x \in \Big[-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\Big]. \\ \frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+2) - \frac{1}{2}\log(\sqrt{3}+2) - \frac{1}{2}\log(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{2}\log(2-\sqrt{3}) + e^x \operatorname{sen}^2 x + \frac{1}{5} e^x \operatorname{sen} 2x - \frac{2}{5} e^x \cos 2x & \text{si } x \in \Big(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big]. \end{cases}$$