TEMA 4 EJERCICIO 3

1. Enunciado:

Sea G un grupo abaliano que tiene 8 elementos de orden 3, 18 elementos de orden 9 y el elemento identidad. Encuentre la descomposición de G como producto de grupos cíclicos.

2. Solución:

$o(G) = 8 + 18 + 1 = 27 = 3^3$Por lo tanto sabemos que G tiene que ser isomorfo a alguno de los siguientes grupos:

- $G_1 = Z/3Z \times Z/3Z \times Z/3Z =< a, b, c >$tal que $a^3 = b^3 = c^3 = 1$. Es fácil ver que todos los elementos de este grupo tienen orden 3 ($\forall x \in G_1 x = a^i b^j c^k, i, j, k = 1, 2, 3$ y se puede comprobar que x tien orden 3).
- $G_2 = Z/27 =< a >$tal que $a^2 7 = 1$. Por lo tanto G_2 tiene un elemento de orden 27 y G no.
- $G_3 = Z/3 \times Z/9Z =< a, b >$tal que $a^3 = b^9 = 1$

Por lo tanto por descarte G es isomorfo a G_3.

3. Comprobación:

Vamos a ver cual es el orden de todos los elementos de G_3.
$G_3 = AB$ donde $A =< a > yB =< b >$. Si "troceamos" A y B en los siguientes conjuntos:

- $1 = 1$Cuyo elemento tiene orden 1
- $A_1 = a, a^2$Se puede comprobar que estos 2 elementos tienen orden 3
- $B_1 = b, b^2, b^4, b^5, b^7, b^8$. Se puede comprobar que estos 6 elementos tienen orden 9 $B_2 = b^3, b^6$. Se puede comprobar que estos 2 elementos tienen orden 3

Vamos a ver cuantos elementos cuales son los ŕodenes al multiplicar estos conjutnos.

- Los $2 * 2 + 1 * 2 + 1 * 2 = 8$ elementos que se forman al hacer $A_1 B_2 + 1A_1 + 1B_2$ tienen orden 3
- Los $2 * 6 + 1 * 6 = 18$ elementos que se forman al hacer $A_1 B_1$ tienen orden 9.
- El elemento que se forma al hacer 11 tiene orden 1.

Y con esto tenemos los 27 elementos de G, con sus órdenes correspondientes.