ANÁLISIS NUMÉRICO, MATRICIAL E INTERPOLACIÓN

(Grado en Matemáticas)

Junio 2023

INSTRUCCIONES:

`MATERIAL PERMITIDO:`

- Una **calculadora no programable**. Se entiende por calculadoras programables todas aquellas que tengan posibilidad de transmitir datos, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos, o en general pueden ejecutar de forma automática una secuencia de instrucciones previamente introducidas por el usuario.
- El **libro de texto** de la asignatura (o una copia impresa del ebook) *Introducción al Cálculo Numérico* de Carlos Moreno González.

`DURACIÓN:` 120 minutos.

Identifique todas las hojas del examen mediante su nombre y fecha.

P 1. (3.5 puntos) Se considera el siguiente sistema lineal de ecuaciones $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1.2 \\ 1.2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y su versión perturbada $A_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{b}_\varepsilon$ en términos de un parámetro $0 < \varepsilon < 10^{-3}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1.2+\varepsilon \\ 1.2 & 1+\varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon \\ 1 \end{bmatrix}$$

Estime teóricamente en términos de ε, el error relativo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon\|_2 / \|\mathbf{x}\|_2$ (en la norma euclídea) que se cometerá al resolver el sistema perturbado.

P 2. (3.5 puntos) Consideremos el problema de computar la mejor aproximación uniforme de $f(x) = x^2$ para $x \in [0,1]$ en $\mathcal{P}_1$ con el algoritmo de Remez partiendo de los puntos $\{0, 1/2, 1\}$. Compruebe que al aplicar una sola etapa del algoritmo, se obtiene directamente el polinomio de mejor aproximación.

P 3. (3 puntos) De un polinomio p con grado menor o igual que 5 se sabe que toma los siguientes valores:

x	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	-15	-1	3	3	5	15

Determine el grado del polinomio p.

Solución del Problema 1. Podemos usar la fórmula de error que aparece en el texto base y que es válida si $\mathrm{cond}_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} < 1$:

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \leq \frac{\mathrm{cond}_2(A)}{1 - \mathrm{cond}_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2}} \left(\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} + \frac{\|\delta \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} \right) . \tag{1}$$

Comenzamos calculando el número de condición de la matriz A. Como es simétrica y definida positiva (los menores son $\Delta_1 = 2 > 0, \Delta_2 = 2 - 1.44 > 0$), sabemos que

$$\|A\|_2 = \lambda_{max} \quad , \quad \mathrm{cond}_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

donde $\lambda_{max} > 0$ y $\lambda_{min} > 0$ son el máximo y el mínimo valor propio de A, respectivamente. Calculamos el polinomio característico

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1.2 \\ 1.2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1.44 = \lambda^2 - 3\lambda + 0.56\,,$$

lo que conduce a

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 2.24}}{2} = \frac{3 \pm 2.6}{2}.$$

Por tanto, $\lambda_{max} = 2.8$, $\lambda_{min} = 0.2$ y deducimos que $\mathrm{cond}(A) = 2.8/0.2 = 14$. Finalmente, tenemos que calcular $\|\Delta A\|_2$ siendo

$$\Delta A = A_\varepsilon - A = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

Recordemos que $\|\Delta A\|_2 = \sqrt{\rho(\Delta A^t \Delta A)}$ donde

$$\Delta A^t \Delta A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon^2 \end{bmatrix} \qquad \text{y por tanto} \quad \|\Delta A\|_2 = \sqrt{2}\varepsilon\,.$$

El error relativo será entonces

$$\frac{\|\Delta A\|_2}{\|A\|_2} = \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{2.8} = \frac{5\sqrt{2}\varepsilon}{14}\,.$$

Observemos que la condición $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ implica que

$$\mathrm{cond}_2(A)\frac{\|\delta A\|_2}{\|A\|_2} = 5\sqrt{2}\varepsilon < 1\,,$$

de modo que podemos usar la fórmula (1). Por otro lado

$$\frac{\|\delta \mathbf{b}\|_2}{\|\mathbf{b}\|_2} = \frac{\|(0,\varepsilon)\|_2}{\|(1,1)\|_2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\,.$$

Por tanto, sustituyendo en la ecuación obtenemos que

$$\frac{\|\delta \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \frac{14}{1 - 5\sqrt{2}\varepsilon} \left(\frac{5\sqrt{2}\varepsilon}{14} + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right) .$$

NOTA: Aunque el objetivo era resolver el problema usando la fórmula de error anterior, es cierto que el enunciado daba pie a resolver los dos sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y su perturbado y estimar el error relativo $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon\|_2/\|\mathbf{x}\|_2$ directamente. Esta vía se ha dado por buena si los cálculos se hacían correctamente.

En este caso las soluciones de los sistemas eran

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -5/14 \\ 10/7 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_\varepsilon = \frac{1}{0.56 + 0.8\varepsilon} \begin{bmatrix} \varepsilon^2 + \varepsilon - 0.2 \\ -1.2\varepsilon + 0.8 \end{bmatrix} ,$$

y se podía estimar la diferencia

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_\varepsilon = \frac{1}{7(0.56 + 0.8\varepsilon)} \begin{bmatrix} 0.4\varepsilon \\ 7\varepsilon^2 + 9\varepsilon \end{bmatrix} .$$

A partir de aquí, se pueden computar las normas y escribir una fórmula para el error relativo en términos de ε.

□

Solución del Problema 2. Recordemos las etapas del algoritmo:

1. Seleccionamos los puntos que nos dice el enunciado $x_0 = 0$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = 1$.

2. Calculamos el polinomio $p \in \mathcal{P}_1$ y el parámetro d tales que

$$f(x_i) - p(x_i) = (-1)^{i+1} d$$

para $i = 0, 1, 2$. En nuestro caso, $p(x) = a_0 + a_1 x$, de modo que obtenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} 0^2 - a_0 - a_1 0 &= (-1)^1 d \\ (\tfrac{1}{2})^2 - a_0 - a_1 \tfrac{1}{2} &= (-1)^2 d \\ 1^2 - a_0 - a_1 1 &= (-1)^3 d \end{aligned}$$

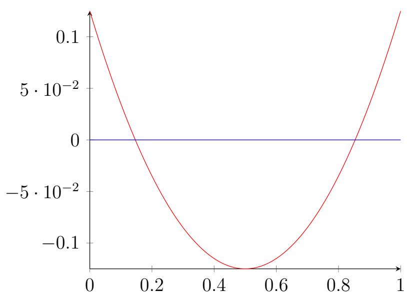
De la primera ecuación obtenemos $a_0 = d$, y sustituyendo en la última ecuación obtenemos que $a_1 = 1$. Finalmente sustituyendo en la segunda ecuación tenemos $\frac{1}{4} - a_0 - \frac{1}{2} = d$, de modo que $2a_0 = -\frac{1}{4}$, es decir, $a_0 = d = -\frac{1}{8}$. En resumen, obtenemos el polinomio

$$p(x) = x - \frac{1}{8} .$$

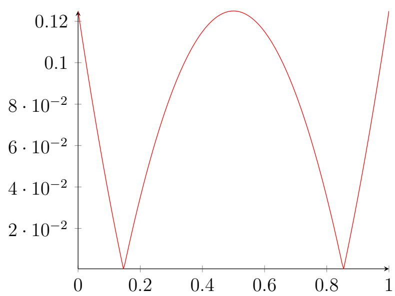
Veamos que es el polinomio de mejor aproximación. Para ello tenemos que ver que $p(x) = x - 1/8$ satisface las condiciones del criterio de Chebyshev o el de Kolmogorov. Comenzamos determinando los puntos $x \in [0, 1]$ en los que $|f(x) - p(x)|$ alcanza su supremo. Para ello comencemos observando que $f(x) - p(x) = x^2 - x + \frac{1}{8}$ es una parábola. Su mínimo se alcanza en el punto $2x - 1 = f'(x) - p'(x) = 0$, es decir, $x = 1/2$ con valor $f(1/2) - p(1/2) = -1/8$. Veamos en qué puntos corta al eje x. Resolvemos

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}}}{2} = \frac{1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Vemos que ambos puntos pertenecen al intervalo $[0, 1]$, luego un esbozo de $|f(x) - p(x)|$ será:



Gráfica de $x^2 - x + \frac{1}{8}$



Gráfica de $|x^2 - x + \frac{1}{8}|$

Gráficamente, observamos que el máximo de $|f(x) - p(x)| = |x^2 - x + \frac{1}{8}|$ se alcanzará en uno de los puntos $0, 1/2$ o 1. Una forma más teórica de argumentarlo, es observar que como $f(x) - p(x)$ es creciente en $x > 1/2$ entonces para los valores $x \in [1/2, 1]$ se tendrá que $-1/8 = f(1/2) - p(1/2) \leq f(x) - p(x) \leq f(0) - p(0) = 1/8$, por lo que $|f(x) - p(x)| \leq 1/8$ si $x \in [1/2, 1]$. Análogamente se razona que $|f(x) - p(x)| \leq 1/8$ si $x \in [0, 1/2]$.

De hecho, en los tres casos hemos visto que $f(x_i) - p(x_i) = (-1)^i \frac{1}{8}$. Por tanto, $\|f - p\|_\infty = \frac{1}{8}$, y por el criterio de de la alternancia de Chebyshev concluimos que p es la mejor aproximación.

$\square$

Solución del Problema 3. Observemos que se han fijado 6 nodos distintos. Por tanto, sabemos que existe un único polinomio de grado menor o igual que cinco que interpola en dichos puntos. Sus coeficientes se pueden obtener usando el algoritmo de diferencias divididas:

$$
\begin{array}{c|cccccc}
-2 & -15 & & & & & \\
 & & 14 & & & & \\
-1 & -1 & & -5 & & & \\
 & & 4 & & 1 & & \\
0 & 3 & & -2 & & 0 & \\
 & & 0 & & 1 & & 0 \\
1 & 3 & & 1 & & 0 & \\
 & & 2 & & 1 & & \\
2 & 5 & & 4 & & & \\
 & & 10 & & & & \\
3 & 15 & & & & &
\end{array}
$$

Por tanto, el polinomio buscado es

$$p(x) = -15 + 14(x+2) - 5(x+2)(x+1) + (x+2)(x+1)x$$

que tiene grado 3. $\square$