Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (3 puntos)
En el espacio $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1]$ de las funciones $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, con el producto interno definido por

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

sean los subespacios

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1]\colon f(t) = 0 \text{ para todo } t \in [-1,0] \right\}$$

y

$$G = \left\{ g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1]\colon g(t) = 0 \text{ para todo } t \in [0,1] \right\}.$$

a) Demuestre que $F^{\perp} = G$.
b) Determine si es cierta la igualdad $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1] = F \oplus F^{\perp}$.

Solución: a) Veamos que $F^{\perp} = \left\{ g \in \mathcal{C}[-1,1]\colon g(t) = 0 \text{ para todo } t \in [0,1] \right\}$.
En efecto si $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ es tal que $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$ entonces $\langle g, f\rangle = 0$ para todo $f \in F$ pues $g(t)f(t) = 0$ para todo $t \in [-1,1]$ y en consecuencia $\int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = 0$. Es decir, hemos demostrado que $G \subset F^{\perp}$.
Inversamente si $g \in \mathcal{C}[-1,1]$ es tal que no es cierto que $g(t) = 0$ para todo $t \in [0,1]$, de la continuidad de g se deduce la existencia de un intervalo $[a,b] \subset [0,1]$ tal que $g(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ o $g(t) < 0$ para todo $t \in [a,b]$.
Sea cualquier función f continua en $[-1,1]$ que se anula fuera de $[a,b]$ y tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in (a,b)$. Por ejemplo, se podría tomar

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a \\ t - a & \text{si } a \leq t \leq (a+b)/2 \\ \frac{-t+b}{\varepsilon'} & \text{si } (a+b)/2 \leq t < b \\ 0 & \text{si } t > b \end{cases}$$

Claramente $f \in F$ y $\int_{-1}^{1} g(t)f(t)dt = \int_{a}^{b} g(t)f(t)dt \neq 0$ pues $g(t)f(t) > 0$ para todo $t \in [a,b]$ o $g(t)f(t) < 0$ para todo $t \in [a,b]$.

b) La igualdad no es cierta. Por reducción al abdurdo, si suponemos que $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1] = F \oplus F^{\perp}$ entonces para todo $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}[-1,1]$ existen $g \in F$ y $h \in F^{\perp}$ tales que $f = g + h$. Y en particular $f(0) = g(0) + h(0) = 0$. Es una contradicción pues existen funciones continuas en $[-1,1]$ que no se anulan en $x = 0$

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Determine la proyección ortogonal de la función $h(t) = \chi_{[0,\pi/2]}(t)$ en el subespacio vectorial de $L^2[0,\pi]$ generado por $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$.

Solución: Sea $P(h)$ la proyección ortogonal de h en el subespacio vectorial de $L^2[0,\pi]$ generado por $\{\operatorname{sen} t, \cos t\}$.
Teniendo en cuenta que las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ son ortogonales en $L^2[0,\pi]$ ya que

$$\langle \operatorname{sen} t, \cos t\rangle = \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen} t \cos t \, dt = \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\right]_{0}^{\pi} = 0$$

se obtiene

$$P(h(t)) = \frac{\langle h(t), \operatorname{sen} t\rangle}{\langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t\rangle} \operatorname{sen} t + \frac{\langle h(t), \cos t\rangle}{\langle \cos t, \cos t\rangle} \cos t\,.$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t\rangle &= \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t\, dt = \int_0^\pi \left(\frac{1-cos2t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{2}\\
\langle \cos t, \cos t\rangle &= \int_0^\pi \cos^2 t\, dt = \int_0^\pi \left(\frac{1+cos2t}{2}\right) dt = \frac{\pi}{2}\\
\langle h(t), \operatorname{sen} t\rangle &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\, dt = 1\\
\langle h(t), \cos t\rangle &= \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 1
\end{aligned}$$

resulta que

$$P(h(t)) = \frac{2}{\pi}\operatorname{sen} t + \frac{2}{\pi}\cos t\,.$$

Pregunta 3 (2,5 puntos))(1,5+1)
Sean las aplicaciones lineales $T, S\colon \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ definidas mediante

$$\begin{aligned}
T(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) &= \{\,0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, \ldots\}\\
S(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) &= \{x_2, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}, \ldots\}
\end{aligned}$$

a) Demuestre que T y S son continuas, determine la norma de ambas y determine los correspondientes operadores adjuntos.
b) ¿Son T y S isometrías? ¿Son T y S operadores unitarios?

Solución: a) T y S son acotados y de norma 1. En efecto:

$$\|T(x)\|^2 = \left|0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right| = \|x\|^2$$

mientras que

$$\|S(x)\|^2 = \left| + \sum_{n=2}^{\infty} |x_n|^2\right| \leq \|x\|^2$$

de donde se deduce que T y S son acotados, $\|T| = 1$ y $\|S\| \leq 1$. Además, para $y = (\{0, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ tenemos que $\|S(y)\|^2 = \|y\|^2$ y en consecuencia $\|S\| = 1$.
El operador adjunto de T es el operador S. En efecto, si $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\} \in \ell^2$ entonces

$$\begin{aligned}
\langle x, Sz\rangle &= \langle \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, \{z_2, \ldots, z_n, \ldots\}\rangle\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{z_{n+1}}\\
&= \langle \{0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}, \{z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots\}\rangle\\
&= \langle Tx, z\rangle
\end{aligned}$$

Por tanto, el operador adjunto de S es T, pues $S^* = (T^*)^* = T$

b) Hemos visto en a) que T es una isometría. Sin embargo S no es una isometría pues, por ejemplo $\|S(\{1, 0, 0, \ldots, \})\| = 0 \neq \|\{1, 0, 0, \ldots, \}\|$.
T no es unitario pues T no es sobreyectivo ya que $T(\ell^2) \neq \ell^2$ pues $\{1, 0, 0, \ldots, \} \notin \ell^2$.
S no es unitario pues ni siquiera es una isometría.

Pregunta 4 (2 puntos)
Sabiendo que la transformada de Fourier de la función

$$f(t) = e^{-|t|}\,,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{es} \quad \widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{1+w^2}\right)\,,\ w \in \mathbb{R}\,.$$

demuestre que

$$\int_0^\infty \frac{dw}{(1+w^2)^2} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Solución: Aplicando la identidad de Plancherel-Parseval a la función f se tiene que $\|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2$. Como $\widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+w^2}$ resulta que

$$\|\widehat{f}\|_2^2 = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dw}{(1+w^2)^2} = \frac{4}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{dw}{(1+w^2)^2}\,.$$

Por otro lado,

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2|\mathrm{t}|}\mathrm{dt} = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\mathrm{dt} = -\mathrm{e}^{-2\mathrm{t}}\Big|_0^{+\infty} = 1\,.$$

En consecuencia,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dw}{(1+w^2)^2} = \frac{\pi}{4}\,.$$