GEOMETRÍA BÁSICA, Septiembre 2017

NO SE PERMITE NINGÚN TIPO DE MATERIAL.Todas las respuestas deben estar justificadas razonadamente.

Ejercicio 1. (3 puntos)
Definir rectas ortogonales del plano.
Demostrar que si g es una isometría y r es una recta ortogonal a otra recta s, entonces $g(r)$ es ortogonal a $g(s)$.

Ejercicio 2. (4 puntos)
Sea $\triangle\{A, B, C\}$ un triángulo. Probar que si $AB > AC$ entonces se tiene la siguiente desigualdad ente las longitudes de las medianas:

$$d(B, \mathrm{medio}[A, C]) > d(C, \mathrm{medio}[A, B])$$

Donde $\mathrm{medio}[X, Y]$ denota el punto medio del segmento $[X, Y]$.

Ejercicio 3. (3 puntos)
Sean π_1 y π_2 dos planos en el espacio que se cortan en una recta.
1. Encontrar una isometría par g tal que $g(\pi_1) = \pi_2$ y $g(\pi_2) = \pi_1$.
2. Encontrar dos isometrías impares (distintas) h_i, $i = 1, 2$, tales que $h_i(\pi_1) = \pi_2$ y $h_i(\pi_2) = \pi_1$.

SOLUCIONES

Ejercicio 1.

Definición 2.23:

Sean r, l dos rectas distintas del plano euclidiano que se cortan en un punto M. La recta l se dice que es ortogonal a la recta r si para todo $S \in l$ y todo par de puntos A y B de r, con $A \neq B$ y $M = \text{medio}[A, B]$ se tiene que $d(S, A) = d(S, B)$. Ver página 38 del texto base.

Sea g una isometría del plano y supongamos que r y l son dos rectas ortogonales y que se cortan en el punto M. Por ser g isometría se tiene que $g(r)$ y $g(l)$ son dos rectas y por ser g biyección dichas rectas se cortan en el punto $g(M)$. Sea ahora $S' \in g(l)$ y $A', B' \in g(r)$ de modo que $A' \neq B'$ y $g(M) = \text{medio}[A', B']$. Como $A', B' \in g(r)$, entonces tenemos $A, B \in r$ de modo que $g(A) = A'$ y $g(B) = B'$ y por ser g biyección $A \neq B$ pues $A' \neq B'$ y por ser g isometría y como $A'g(M) = B'g(M)$ tenemos que $AM = BM$, luego $M = \text{medio}[A, B]$. Ahora como $S' \in g(l)$, existe $S \in l$ de modo que $g(S) = S'$, por ser r y l ortogonales tenemos que $d(S, A) = d(S, B)$. Como g es isometría $d(S', A') = d(S, A)$ y $d(S', B') = d(S, B)$, con lo que $d(S', A') = d(S', B')$, por tanto r y l son ortogonales.

Ejercicio 2.

Sea $m_B = d(B, \text{medio}[A, C])$ y $m_C = d(C, \text{medio}[A, B])$.

Por la fórmula del coseno aplicada a $\triangle\{A, B, \text{medio}[A, C]\}$ se tiene:

$$m_B^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} - 2AB \times \frac{AC}{2} \times \cos \measuredangle A$$

y la fórmula del coseno aplicada a $\triangle\{A, C, \text{medio}[A, B]\}$ nos da:

$$m_C^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4} - 2AC \times \frac{AB}{2} \times \cos \measuredangle A$$

Restando:

$$m_B^2 - m_C^2 = AB^2 + \frac{AC^2}{4} - AC^2 - \frac{AB^2}{4} = \frac{3}{4}(AB^2 - AC^2)$$

y como $AB > AC$, se tiene que $m_B^2 - m_C^2 > 0$ y entonces $m_B > m_C$.

Ejercicio 3.

1. Sea π un plano perpendicular a la recta $r = \pi_1 \cap \pi_2$. Sean $r_1 = \pi \cap \pi_1$ y $r_2 = \pi \cap \pi_2$ y b_1, b_2 las bisectrices de los ángulos cuyos lados están contenidos en las rectas r_1 y r_2. Las medias vueltas ρ_{b_1} y ρ_{b_2} son soluciones a este apartado.

2. Sea π_i' un plano perpendicular a π y que pase por b_i, $i = 1, 2$. Entonces las reflexiones σ_{π_i} son soluciones a este apartado. Hay otras soluciones posibles, por ejemplo $\tau \circ \sigma_{\pi_i}$, donde τ es una traslación paralela cualquiera a la recta r.