Cálculo de Probabilidades I

Tema 7
Grado en Matemáticas

Tutor Online: Angel Joval Roquet. CA La Seu d'Urgell

Tema 7: Independencia de sucesos

7.1 Sucesos dependientes e independientes

En un fenómeno aleatorio, el suceso A se dice **independiente** *del suceso B (supuesto que B tiene probabilidad positiva) si*

$$\mathrm{P}(A|B) = \mathrm{P}(A)$$

Por definición, ello equivale a que sea

$$\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A) \quad \text{o bien} \quad \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

La simetría en esta última relación pone de relieve que *B* es independiente de *A* si *A* lo es de *B.*

Podemos expresar la definición en la forma:

Dos sucesos A y B de un espacio de probabilidad se dicen **independientes** *si*

$$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B)$$

Dicha definición tiene la ventaja de que sirve incluso si $\mathrm{P}(A) = 0$ ó $\mathrm{P}(B) = 0$.

Además, si *A* y *B* son independentes, también lo son *A* y B^c :

$$\mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A - A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B) =$$

$$= \mathrm{P}(A)[1 - \mathrm{P}(B)] = \mathrm{P}(A) \cdot \mathrm{P}(B^c)$$

Lo mismo sucede con A^c y *B*, o con A^c y B^c .

- *Ejemplo 1:*

  Se lanzan tres monedas y se consideran los sucesos:

  A = No aparece el mismo resultado en todos los lanzamientos.
  B = A lo sumo aparece una cara.
  C = A lo sumo aparecen dos caras.

  Analizar la independencia de los sucesos *A* y *B*, así como la independencia de los sucesos *A* y *C*.

  El espacio de probabilidad (Ω,P) para describir el lanzamiento de tres monedas es

  Ω = {*ccc, ccx, cxc, xcc, xxc, xcx, cxx, xxx*}

  con la misma probabilidad, 1/8, para cada uno de los sucesos simples.

  Es entonces

A = {*ccx, cxc, xcc, xxc, xcx, cxx*}
B = {*xxc, xcx, cxx, xxx*}
C = {*ccx, cxc, xcc, xxc, xcx, cxx, xxx*}

De manera que

$$P(A)=\frac{3}{4}, \quad P(B)=\frac{1}{2}, \quad P(C)=\frac{7}{8}$$

Por otra parte

$$A \cap B = \{xxc, xcx, cxx\}$$

$$A \cap C = A$$

Con lo cual

$$P(A \cap B)=\frac{3}{8}, \quad P(A \cap C)=\frac{3}{4}$$

Como $P(A \cap B)=P(A) \cdot P(B)$, A y B son sucesos independientes.
Como $P(A \cap C) \neq P(A) \cdot P(C)$, A y C no son sucesos independientes

- *Ejemplo 2:*

Se lanzan n monedas y se consideran los sucesos:

A = No aparece el mismo resultado en todos los lanzamientos.
B = A lo sumo aparece una cara.

Analizar la independencia de los sucesos *A* y *B.*

En este caso, el conjunto Ω tiene 2^n elementos, es decir, hay 2^n resultados posibles.

Todos los resultados posibles menos 2 pertenecen a *A,* de manera que

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2^n - 2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

Con una cara como máximo hay *n+1* resultados; luego

$$\mathrm{P}(B) = \frac{n+1}{2^n}$$

$A \cap B$ tiene los mismos elementos que B menos 1 (todos las monedas x), luego

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}$$

Como $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$, A y B no son sucesos independientes.

Por tanto, la independencia entre A y B es una característica casual, del caso $n = 3$.

7.2 Espacios producto

Dados dos espacios de probabilidad (Ω_1, P_1) *y* (Ω_2, P_2) *que no tienen relación, se define el* **espacio producto** *como* (Ω, P) *siendo*

$$\Omega=\Omega_1 x \Omega_2 \quad y \quad \mathrm{P}(A,B) = \mathrm{P}_1(A)\cdot \mathrm{P}_2(B)$$

para cualquiera sucesos $A \subset \Omega_1$ *y* $B \subset \Omega_2$ *.*

Esta definición se extiende a cualquier número finito de espacios e incluso a una cantidad numerable.

Los experimentos consistentes en la repetición de pruebas independientes se modelan según este espacio producto. Por ejemplo las extracciones con repetición.

- *Ejemplo 3:*

  De una urna que contiene 5 bolas blancas y 2 de azules, se extraen sucesivamente tres bolas, devolviendo en cada caso la bola extraída a la urna antes de hacer la extracción siguiente. ¿Cuál es la probabilidad de que alguna de las bolas obtenidas sea azul?

  Cada extracción puede describirse mediante el espacio de probabilidad

$$\Omega = \{b, a\} \qquad \mathrm{P}(\{b\}) = \frac{5}{7}, \quad \mathrm{P}(\{a\}) = \frac{2}{7}$$

  y como que las extracciones son independientes, consideramos el espacio producto

  $\Omega \times \Omega \times \Omega = \Omega^3 = \{ bbb, bba, bab, baa, abb, aba, aab, aaa\}$
  en que cada suceso simple tiene la probabilidad producto de sus componentes:

$$\mathrm{P}(\{bbb\}) = \left(\frac{5}{7}\right)^3, \ \mathrm{P}(\{bba\}) = \left(\frac{5}{7}\right)^2 \frac{2}{7}, \ \mathrm{P}(\{aba\}) = \frac{5}{7}\left(\frac{2}{7}\right)^2, \text{ etc.}$$

Luego

$$\mathrm{P}(\text{Alguna azul}) = 1 - \mathrm{P}(\{bbb\}) = 1 - \left(\frac{5}{7}\right)^3 \simeq 0.6356$$

- *Ejemplo 4:*

Tres bolas se introducen independientemente al azar en una de cinco urnas. Calcular la probabilidad de que

1. las tres bolas estén en la misma urna.
2. no haya ninguna urna que contenga dos bolas.

El resultado de la colocación de cada bola puede ser descrito mediante el espacio de probabilidad

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\} \qquad \mathrm{P}(\{i\}) = \frac{1}{5} \;\; para\; 1 \le i \le 5$$

y como que las extracciones son independientes, consideramos el espacio producto

$$\Omega x \Omega x \Omega = \Omega^3$$

en que cada suceso simple tiene la probabilidad producto de sus componentes:

$$\mathrm{P}(\{ijk\}) = \left(\frac{1}{5}\right)^3$$

1. $\mathrm{P}(\text{las tres bolas estén en la misma urna}) =$

$$= \mathrm{P}(\{111\}) + \mathrm{P}(\{222\}) + \mathrm{P}(\{333\}) + \mathrm{P}(\{444\}) + \mathrm{P}(\{555\}) = 5\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{25}$$

2. El número de ternas de números no repetidos es $5 \cdot 4 \cdot 3$, luego

$$\mathrm{P}(\text{no haya ninguna urna que contenga dos bolas}) = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{12}{25}.$$

Cuando la definición de producto se extiende a una cantidad numerable de espacios tenemos Ω^N que no es un conjunto numerable. Para definir una probabilidad de forma consistente con los axiomas, los sucesos no son el conjunto de las partes de Ω^N sino que sólo pueden formarse por una cantidad numerable de operaciones de uniones, intersecciones, complementarios, a partir de un base, formada por los llamados conjuntos cilíndricos, que son los que tienen restringidos componentes en número finito

$$(\Omega,\cdots,\underset{i}{A},\cdots,\underset{j}{B},\cdots,\Omega,\cdots)$$

para los cuales se define la probabilidad producto como en el caso finito

$$\mathrm{P}(\Omega,\cdots,\underset{i}{A},\cdots,\underset{j}{B},\cdots,\Omega,\cdots)=\mathrm{P}(A)\cdot\mathrm{P}(B)$$

7.3 Independencia de varios sucesos

En un espacio de probabilidad, tres sucesos A_1, A_2 y A_3 son **independientes** *si se cumplen las condiciones*

1. $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$
2. $P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$
3. $P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$
4. $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$

Las tres primeras condiciones definen la independencia dos a dos de los tres sucesos. Sin embargo no implican la cuarta; de forma que tres sucesos pueden ser independientes dos a dos, sin ser independientes. Esto es lo que nos pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

- *Ejemplo 5:*

En el espacio de probabilidad (Ω,P), con $\Omega=\{a,b,c,d\}$ y con un modelo uniforme, es decir, $\mathrm{P}(\{a\})=\mathrm{P}(\{b\})=\mathrm{P}(\{c\})=\mathrm{P}(\{d\})=\frac{1}{4}$, consideramos los sucesos:

$$A_1=\{a,b\},\quad A_2=\{b,c\},\quad A_3=\{a,c\}$$

cumplen

$$\mathrm{P}(A_1)=\mathrm{P}(A_2)=\mathrm{P}(A_3)=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{P}(A_1\cap A_2)=\mathrm{P}(A_1\cap A_3)=\mathrm{P}(A_2\cap A_3)=\frac{1}{4}$$

Por lo tanto los sucesos A_1, A_2 *y* A_3 son independientes dos a dos.

Sin embargo

$$\mathrm{P}(A_1\cap A_2\cap A_3)=0\neq\mathrm{P}(A_1)\cdot\mathrm{P}(A_2)\cdot\mathrm{P}(A_3)$$

y los tres sucesos no son independientes.

- *Ejemplo 6:*

Se lanzan dos dados consecutivamente y se consideran los sucesos

I_1= la primera puntuación es impar.
I_2= la segunda puntuación es impar.
I_s= la suma de las puntuaciones es impar.

¿Son I_1 e I_s independientes? ¿Son I_1 , I_2 e I_s independientes?

$$\mathrm{P}(I_1) = \frac{3 \cdot 6}{6 \cdot 6} = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{P}(I_2) = \frac{1}{2}$$

Como que $I_s = (I_1 \cap P_2) \cup (P_1 \cap I_2)$,

$$\mathrm{P}(I_s) = \mathrm{P}(I_1 \cap P_2) + \mathrm{P}(P_1 \cap I_2) = \frac{9}{36} + \frac{9}{36} = \frac{1}{2}$$

y $\quad \mathrm{P}(I_1 \cap I_S) = \dfrac{9}{36} = \mathrm{P}(I_1) \cdot \mathrm{P}(I_S)$, luego I_1 y I_S son independientes.

Análogamente

$$\mathrm{P}(I_1 \cap I_2) = \frac{9}{36} = \mathrm{P}(I_1) \cdot \mathrm{P}(I_2)$$
$$\mathrm{P}(I_2 \cap I_S) = \frac{9}{36} = \mathrm{P}(I_2) \cdot \mathrm{P}(I_S)$$

luego los tres sucesos son independientes dos a dos.

Sin embargo I_1 , I_2 e I_s no son independientes pues

$$I_1 \cap I_2 \cap I_S = \varnothing$$

$$\mathrm{P}(I_1 \cap I_2 \cap I_S) = 0 \neq \mathrm{P}(I_1) \cdot \mathrm{P}(I_2) \cdot \mathrm{P}(I_S)$$

El concepto de independencia puede extenderse a una familia cualquiera de sucesos imponiendo que la probabilidad de la intersección de cualquier número finito de ellos coincide con el producto de sus probabilidades.

En un espacio de probabilidades, los sucesos $\{A_i \mid i \in I\}$ *se dicen* **independientes** *si*

$$\mathrm{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \mathrm{P}(A_{i_1}) \cdot \mathrm{P}(A_{i_2}) \cdots \mathrm{P}(A_{i_k})$$

cualquiera que sea $k \in \mathbb{N}$ *y cualquiera que sean* $i_1, i_2, \ldots, i_k \in I$ *.*