⁕ DURACIÓN DEL EXAMEN: DOS HORAS ⁕

⁕ NO SE PERMITE EL USO DE NINGÚN TIPO DE MATERIAL ⁕

EJERCICIO 1) **(3 puntos)** Sean $\mathbb{R}$ la recta real con su topología habitual, $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel, $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, y $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ la aplicación dada por

$$\mu(A) := \sum_{n \in \mathbb{N} \cap A} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Justificando la respuesta, decir si son ciertas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

(1) μ es una medida σ-aditiva, y es también una medida exterior.

(2) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{B}$ decreciente (es decir, $A_{n+1} \subseteq A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$) entonces $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \operatorname{ínf}_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

(3) La restricción $\mu \restriction \mathcal{B}$ de μ a $\mathcal{B}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue.

(4) La medida de Lebesgue es absolutamente continua con respecto a $\mu \restriction \mathcal{B}$.

⁕

EJERCICIO 2) **(3 puntos)** En la recta real $\mathbb{R}$, denotamos por $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de los Borelianos de $\mathbb{R}$ y por λ la medida de Lebesgue. Supongamos que $(f_n)_n$ es una sucesión de funciones reales medibles tal que $|f_n(x)| \leq x^4$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in \mathbb{R}$, y que converge puntualmente a una función f. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decir si es cierta (con justificación) o falsa (poniendo un contraejemplo).

(1) La función f es medible.

(2) La función f es integrable.

(3) Para cada conjunto medible $A \subseteq [-2, 2]$ se tiene que $\operatorname{lím}_n \int_A f_n d\lambda = \int_A f d\lambda$.

(4) Para cada conjunto medible $A \subseteq \mathbb{R}$ se tiene que $\operatorname{lím}_n \int_A f_n d\lambda = \int_A f d\lambda$.

⁕

EJERCICIO 3) **(4 puntos)**

(1) Dar las definiciones de medida *signada* y de conjunto *positivo* de una medida signada.

(2) Enunciar el Teorema de descomposición de Jordan.

(3) Sea λ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ la σ-álgebra de conjuntos λ-medibles, y sea $f \in L_1(\lambda)$. Definimos $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ por

$$\mu(A) := \int_A f d\lambda \text{ para todo } A \in \mathcal{A}.$$

Demostrar que μ es una medida signada y encontrar su descomposición de Jordan.