Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2018, 1ª. Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Endomorfismo diagonalizable.

(b) Forma cuadrática.

(c) Producto escalar.

(d) Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial.

Ejercicio 1: (2 puntos)

Sean V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $g : V \times V \to \mathbb{K}$ una forma bilineal y $\Phi(v) = g(v, v)$ una forma cuadrática. Demuestre que $f_\Phi : V \times V \to \mathbb{K}$ definida por $f_\Phi(u, v) = \frac{1}{2}[\Phi(u + v) - \Phi(u) - \Phi(v)]$ es una forma bilineal simétrica.

Ejercicio 2: (3 puntos)

(a) Demuestre que si A es una matriz de orden n tal que $A^2+A-2I_n = 0$, entonces A es diagonalizable. Hágalo utilizando un polinomio anulador.

(b) ¿Cuáles son las posibles matrices de Jordan semejantes a A?

Ejercicio 3: (3 puntos)

Sea f la isometría de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Clasifique la isometría determinando los elementos geométricos que la caracterizan (eje y ángulo de giro y/o base de simetría, según corresponda).

(b) Halle todos los planos $f-$invariantes que contengan exactamente dos rectas invariantes.