Examen de Álgebra Lineal I

Septiembre 2012

1.-A) Encontrar el valor del número real m para que exista alguna matriz cuadrada 2x2 no nula $B \in M_{2x2}(\mathbb{R})$, tal que $AB = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & m \end{pmatrix}$. (1 punto)

B) Para dicho valor de m se considera $H = \{B \in M_{2x2}(\mathbb{R}) : AB = 0\}$. Probar que H es un subespacio de la matrices 2x2 sobre $\mathbb{R}$, $M_{2x2}(\mathbb{R})$, y obtener una de sus bases y su dimensión (1,5 puntos).

Solución

A)

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow m = 6$$

B) Los elementos de H son las matrices de la forma $\begin{pmatrix} 3c & 3d \\ c & d \end{pmatrix}$

Una base es la formada por las matrices $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.- A) Sean V, W dos subespacios de un espacio vectorial E. Demostrar que $dim(V+W) = dim(V) + dim(W) - dim(V \cap W)$. (2 puntos)

B) Sean a y b números reales y consideremos los subespacios de $\mathbb{R}^4$ dados por las ecuaciones siguientes (respecto a la base estándar de $\mathbb{R}^4$

$$\text{V:}\begin{cases} x_1 - bx_2 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \qquad \text{w:}\begin{cases} (a-1)(2x_1 - x_2) - 2x_3 = 0 \\ 2bx_1 - (a+b)x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Encontrar para que valores de a y b se tiene que $V = W$. (2 puntos)

Solución

Paginas 177 y 182 del libro

3.- Sea V el espacio vectorial de los polinomios reales de grado menor o igual a 2, sean:

$$p(x) = 1 + x + x^2, \quad q(x) = 1 + 2x^2, \quad r(x) = x + x^2$$
$a = (2,0,1),\ b = (3,1,0),\ c = (1,-2,3)$ pertenecientes a $\mathbb{R}^3$.
Considérese la aplicación líneal $f : V \to \mathbb{R}^3$, definida por $f(p(x)) = a,\ f(q(x)) = b,\ f(r(x)) = c$.
A) Hallar la matriz de f respecto a las bases $(1, x, x^2)$ de V y la canónica de $\mathbb{R}^3$. (1,5 puntos)
B) Hallar una base B en V, tal que respecto a ella y la base canónica de $\mathbb{R}^3$, la matriz identidad I es la matriz asociada a f. (2 puntos)

Solución

A) $1 = p(x) - r(x) \Rightarrow f(1) = (1,2,-2)$
$x = \frac{1}{2}(p(x) - q(x) + r(x)) \Rightarrow f(x) = (0, -\frac{3}{2}, 2)$
$x^2 = r(x) - x \Rightarrow f(x^2) = (1, -\frac{1}{2}, 1)$
Luego la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{-3}{2} & \frac{-1}{2} \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

B) $(1,0,0) = c + 2b - 3a \Rightarrow f(-3p(x) + 2q(x) + r(x)) = f(-1 - 2x + 2x^2) = (1,0,0)$,
Procediendo de forma análoga se tiene

$f(4 + 6x - 4x^2) = (0,1,0)$
$f(3 + 5x - 3x^2) = (0,0,1)$

Luego la base es $\{-1 - 2x + 2x^2, 4 + 6x - 4x^2, 3 + 5x - 3x^2\}$.