Demostrar que la serie $\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Si $f(x) = \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ probar que

$$\int_0^\pi f(x)dx = 2\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^3}.$$

SOLUCIÓN:

$\left|\frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$, entonces por el criterio de Weierstrass se tiene que $\sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$ converge puntualmente y (uniformemente) a la función $f(x)$. (o sea $f(x) = \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2}$).

Ahora bien, por la convergencia uniforme

$$\int_0^\pi \sum_1^\infty \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} \overset{\uparrow}{=} \sum_1^\infty \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^2} =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{n^2}\left(-\frac{1}{n}\cos(nx)\right)\Big|_0^\pi =$$

$$= \sum_1^\infty \frac{1}{n^3}\left(1-(-1)^n\right) = \sum_1^\infty \frac{2}{(2n-1)^3}$$

pues si n es par la expresión $\left(1-(-1)^n\right) = 0$.

Calcular: a) $I = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^q \, dx$ cuando $b > a$, y $p, q > -1$.

b) Apíquese el resultado anterior para calcular $\int_0^4 (4-x)^{5/2} x^{3/2} \, dx$.

SOLUCIÓN: Hagamos el cambio $b - x = t$ $\quad -dx = dt$

$$I = -\int_{b-a}^{0} (b-a-t)^p \, t^q \, dt =$$

$$= \int_0^{b-a} (b-a-t)^p \, t^q \, dt =$$

$$= (b-a)^p \int_0^{b-a} \left(1 - \frac{t}{b-a}\right)^p t^q \, dt =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{t}{b-a} \\ dy = \frac{dt}{(b-a)} \end{array} \right\} = (b-a)^p \int_0^1 (1-y)^p (b-a)^{q+1} y^q \, dy$$

$$= (b-a)^{p+q+1} \int_0^1 (1-y)^p y^q \, dy =$$

$$= (b-a)^{p+q+1} \beta(p+1, q+1) =$$

$$= (b-a)^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}.$$

b) $$\int_0^4 x^{3/2} (4-x)^{5/2} dx = 4^{3/2+5/2+1} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}$$

$$= \frac{4^5 \, \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(1/2) \cdot \frac{5}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{5!} = 12\pi$$

- Sea f una función integrable en $[a,b]$. Probar que existe $x \in [a,b]$ tal que $\int_a^x f = \int_x^b f$.

SOLUCIÓN:

Sea $F(x) = \int_a^x f - \int_x^b f$, esta función se anula en algún $x \in [a,b]$.

F es continua en $[a,b]$. Además $F(a) = -\int_a^b f$ y $F(b) = \int_a^b f$.

Luego si $\int_a^b f \neq 0$ la función continua F toma valores contrarios en los extremos del intervalo $[a,b]$, y por el teorema de Bolzano, F se anula en un $x \in (a,b)$.

Si $\int_a^b f(t)dt = 0$ entonces $F(a) = F(b) = 0$.

- Calcular $\int \frac{\log(\log(x))}{x} dx = I$

Solución

hacemos el cambio $t = \log(x)$ $dt = \frac{1}{x} dx$ y

$I = \int \log(t) dt$, por partes

$$\left.\begin{array}{l} u = \log t \Rightarrow u' = \frac{1}{t} \\ v' = 1 \Rightarrow v = t \end{array}\right| \Rightarrow I = t\log(t) - \int 1\,dt =$$

$$= t\log(t) - t$$

deshaciendo el cambio

$$I = \log(x)\cdot\log(\log(x)) - \log x =$$

$$\log(x)\left(\log(\log(x)) - 1\right) + K.$$