Estudio de la ecuación de Duffing

PROBLEMA (4 puntos):

Consideramos un oscilador de Duffing forzado con una determinada frecuencia ω y amortiguado, descrito por la ODE de segundo orden

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + x + \beta x^3 = \gamma\cos(\omega t)$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = 0$$

siendo δ el coeficiente del término de amortiguamiento, γ el coeficiente de la forzante (dada por $\cos(\omega t)$), y β el coeficiente del término no lineal.

1. Demuestre que en el caso $\delta = \gamma = 0$ las soluciones de esta ecuación están siempre acotadas.

2. Consideramos el límite en que tanto la forzante como el amortiguamiento y el término no lineal son pequeños:

   $$\beta \equiv \varepsilon, \qquad \delta \equiv \varepsilon d, \qquad \gamma \equiv \varepsilon g$$

   con $\varepsilon \ll 1$ y d, g de orden unidad.

   Demuestre que la solución aproximada dada por un desarrollo perturbativo regular en potencias de ε no es uniformemente válida y explique las fuentes de no uniformidad de este sistema.

3. Calcule la solución aproximada de este sistema en el límite $\varepsilon \ll 1$ por medio del método de Lindstedt-Poincare de primer orden (2 términos).

4. Resuelva el ejercicio anterior aplicando el método de escalas múltiples, considerando para ello dos escalas, una rápida y una lenta y un desarrollo perturbativo de primer orden (2 términos).