Los siguientes ejercicios están extraídos de libros de texto de editoriales de Anaya, Santillana y SM de 1º y 2º de Bachillerato

Lanzamos un dado "chapucero" 1 000 veces. Obtenemos $f(1) = 117$, $f(2) = 302$, $f(3) = 38$, $f(4) = 234$, $f(5) = 196$, $f(6) = 113$. Estima las probabilidades de las distintas caras. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos PAR, MENOR QUE 6, $\{1, 2\}$?

Lanzamos un dado "chapucero" 1 000 veces. Obtenemos $f(1) = 117$, $f(2) = 302$, $f(3) = 38$, $f(4) = 234$, $f(5) = 196$, $f(6) = 113$. Estima las probabilidades de las distintas caras. ¿Cuáles son las probabilidades de los sucesos PAR, MENOR QUE 6, {1, 2}?

$P[1] = \frac{117}{1000} = 0{,}117$ $\quad P[2] = 0{,}302$ $\quad P[3] = 0{,}038$

$P[4] = 0{,}234$ $\quad P[5] = 0{,}196$ $\quad P[6] = 0{,}113$

$P[\text{PAR}] = 0{,}302 + 0{,}234 + 0{,}113 = 0{,}649$

$P[\text{MENOR QUE } 6] = 1 - P[6] = 1 - 0{,}113 = 0{,}887$

$P[\{1, 2\}] = 0{,}117 + 0{,}302 = 0{,}419$

¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos dados correctos la diferencia de sus resultados sea 3?

Hacemos una tabla para la diferencia de resultados:

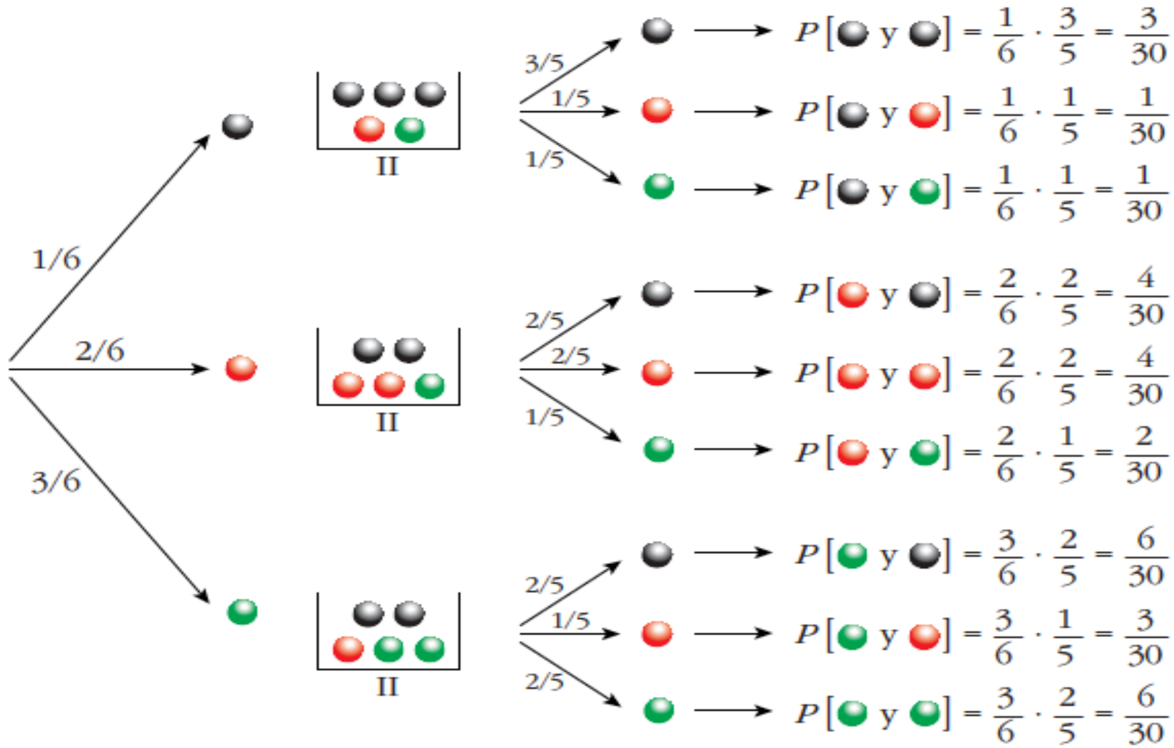
		1er DADO					
	–	1	2	3	4	5	6
2º DADO	1	0	1	2	3	4	5
	2	1	0	1	2	3	4
	3	2	1	0	1	2	3
	4	3	2	1	0	1	2
	5	4	3	2	1	0	1
	6	5	4	3	2	1	0

$$P[\text{DIFERENCIA } 3] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

Tenemos dos urnas. La experiencia consiste en extraer una bola de I, introducirla en II, remover y extraer, finalmente, una bola de II.

Calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea:

a) Roja. **b) Verde.** **c) Negra.**



a) $P[2^{a}$  $] = \frac{1}{30} + \frac{4}{30} + \frac{3}{30} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$

b) $P[2^{a}$  $] = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{6}{30} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$

c) $P[2^{a}$  $] = \frac{3}{30} + \frac{4}{30} + \frac{6}{30} = \frac{13}{30}$

Sea $U = \{a_1, a_2, a_3\}$ el espacio de sucesos elementales de un experimento aleatorio. ¿Cuáles de estas funciones definen una función de probabilidad? Justifica la respuesta.

a) $P[a_1] = 1/2$

$P[a_2] = 1/3$

$P[a_3] = 1/6$

b) $P[a_1] = 3/4$

$P[a_2] = 1/4$

$P[a_3] = 1/4$

c) $P[a_1] = 1/2$

$P[a_2] = 0$

$P[a_3] = 1/2$

d) $P[a_1] = 2/3$

$P[a_2] = 1/3$

$P[a_3] = 1/3$

De los sucesos A y B se sabe que:

$$P[A] = \frac{2}{5},\ P[B] = \frac{1}{3}\ \text{y}\ P[A' \cap B'] = \frac{1}{3}.$$

Halla $P[A \cup B]$ y $P[A \cap B]$.

- $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B]$

$$\frac{1}{3} = 1 - P[A \cup B] \Rightarrow P[A \cup B] = \frac{2}{3}$$

- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - P[A \cap B]$$

$$P[A \cap B] = \frac{1}{15}$$

Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad, de manera que:

$$P[A] = 0{,}4, \quad P[B] = 0{,}3 \ \text{ y } \ P[A \cap B] = 0{,}1$$

Calcula razonadamente:

a) $P[A \cup B]$

b) $P[A' \cup B']$

c) $P[A/B]$

d) $P[A' \cap B']$

a) $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B] = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6$

b) $P[A' \cup B'] = P[(A \cap B)'] = 1 - P[A \cap B] = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$

c) $P[A/B] = \dfrac{P[A \cap B]}{P[B]} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$

d) $P[A' \cap B'] = P[(A \cup B)'] = 1 - P[A \cup B] = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

A, B y C son tres sucesos de un mismo espacio muestral. Expresa en función de ellos los sucesos:

a) Se realiza alguno de los tres.

b) No se realiza ninguno de los tres.

c) Se realizan los tres.

d) Se realizan dos de los tres.

e) Se realizan, al menos, dos de los tres.

a) $A \cup B \cup C$

b) $A' \cap B' \cap C'$

c) $A \cap B \cap C$

d) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C)$

e) $(A \cap B \cap C') \cup (A \cap B' \cap C) \cup (A' \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C)$

En una comarca hay dos periódicos: *El Progresista* y *El Liberal*. Se sabe que el 55% de las personas de esa comarca lee *El Progresista* (P), el 40% lee *El Liberal* (L) y el 25% no lee ninguno de ellos.

Expresa en función de P y L estos sucesos:

a) Leer los dos periódicos.

b) Leer solo *El Liberal*.

c) Leer solo *El Progresista*.

d) Leer alguno de los dos periódicos.

e) No leer ninguno de los dos.

f) Leer solo uno de los dos.

g) Calcula las probabilidades de: P, L, $P \cap L$, $P \cup L$, $P - L$, $L - P$, $(L \cup P)'$, $(L \cap P)'$.

h) Sabemos que una persona lee *El Progresista*. ¿Qué probabilidad hay de que, además, lea *El Liberal*? ¿Y de que no lo lea?

Tenemos que:

$$P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P' \cap L'] = 0{,}25$$

a) $P[P' \cap L'] = P[(P \cup L)'] = 1 - P[P \cup L]$

$0{,}25 = 1 - P[P \cup L] \Rightarrow P[P \cup L] = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P[P \cup L] = P[P] + P[L] - P[P \cap L]$

$0{,}75 = 0{,}55 + 0{,}4 - P[P \cap L] \Rightarrow P[P \cap L] = 0{,}2$

$P[\text{leer los dos}] = P[P \cap L] = 0{,}2$

b) $P[L] - P[P \cap L] = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$

c) $P[P] - P[P \cap L] = 0{,}55 - 0{,}2 = 0{,}35$

d) $P[P \cup L] = 0{,}75$

e) $P[P' \cap L'] = 0{,}25$

f) $P[P \cap L'] + P[P' \cap L] = 0{,}35 + 0{,}2 = 0{,}55$

g) $P[P] = 0{,}55; \quad P[L] = 0{,}4; \quad P[P \cap L] = 0{,}2; \quad P[P \cup L] = 0{,}75$

$P[P - L] = P[P] - P[P \cap L] = 0{,}35$

¿Qué es más probable, obtener alguna vez un 6 lanzando un dado 4 veces o un doble 6 lanzando dos dados 24 veces?

$$P[\text{AL MENOS UN 6 EN 4 TIRADAS}] = 1 - P[\text{NINGÚN 6 EN 4 TIRADAS}] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}5177$$

$$P[\text{DOBLE 6 CON 2 DADOS EN 24 TIRADAS}] = 1 - P[\text{NINGÚN DOBLE 6}] \overset{(*)}{=} 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}4914$$

(*) $P[\text{DOBLE 6 EN UNA TIRADA}] = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36} \quad \rightarrow \quad P[\text{NO DOBLE 6}] = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

Por tanto, es más probable sacar al menos un 6 lanzando 4 veces un dado.

Los problemas del Caballero de Méré.

a) El Caballero de Méré, hombre ilustrado de la corte de Luis XIV, le propuso el siguiente problema al matemático Blaise Pascal.

   «¿Qué es más probable, obtener al menos un seis en cuatro lanzamientos de un dado, u obtener al menos un seis doble al lanzar dos dados veinticuatro veces?»

b) Méré se interesó también por el número mínimo de lanzamientos de dos dados que sería necesario realizar para obtener un seis doble con probabilidad favorable, es decir, mayor que 0,5. ¿Cuál habría sido la respuesta de Pascal?

a) En cuatro lanzamientos de un dado:

p(al menos un 6) = 1 − p(no obtener ningún 6) =

$$= 1 - \frac{5^4}{6^4} = 0{,}51774...$$

En veinticuatro lanzamientos de dos dados:

$$p(\text{al menos un 6 doble}) = \frac{36^{24} - 35^{24}}{36^{24}} = 0{,}49140...$$

b) $p = \dfrac{36^n - 35^n}{36^n} = 1 - \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \geqslant 0{,}5 \Rightarrow \left(\dfrac{35}{36}\right)^n \leqslant 0{,}5$

Como la función logaritmo es creciente:

$$L\left(\frac{35}{36}\right)^n \leqslant L(0{,}5) \Rightarrow n \geqslant \frac{L(0{,}5)}{L\left(\frac{35}{36}\right)} \Rightarrow n \geqslant 25$$

7. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio. ¿Es posible que la función p tal que $p(A) = \frac{2}{5}$, $p(B) = \frac{1}{5}$ y $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$ sea una función de probabilidad? Razona la respuesta.

8. Del conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ se escoge al azar un número a. Calcula $\lim_{n \to \infty} p_n$, siendo p_n la probabilidad de que $a^2 - 1$ sea múltiplo de 10.

7. $p(A \cup B) = 1 - p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(\overline{A} \cap \overline{B}) =$

$= 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10}$

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Rightarrow$

$\dfrac{7}{10} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} - p(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow\ p(A \cap B) = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{7}{10} = -\dfrac{1}{10}$

Por tanto, p no puede ser una función de probabilidad.

---

8. Si $a^2 - 1$ es múltiplo de 10, a^2 debe de acabar en 1 y, por tanto, a acaba en 1 o en 9; el total de números de estas características en $\{1, 2, ..., n\}$ depende del resto de la división de n entre 10:

- Si $n = 10k$, hay $2k$ valores posibles de $a \Rightarrow$
  $\Rightarrow\ p_n = \dfrac{2k}{10k} = \dfrac{1}{5}$
- Si $n = 10k + r$, con $r < 9$, hay $2k + 1$ valores posibles de $a \Rightarrow p_n = \dfrac{2k + 1}{10k + r}$
- Si $n = 10k + 9$, hay $2k + 2$ valores posibles de $a \Rightarrow p_n = \dfrac{2k + 2}{10k + 9}$

Por tanto: $\lim\limits_{x \to \infty} p_n = \dfrac{1}{5}$