Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2,5 puntos))
Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo. Dado $x \in A$ se dice que

$$x \text{ es nihilpotente si } \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } x^n = 0.$$

Sean $x, y \in A$ tales que x e y son nihilpotentes. Demuestre que:

a) $x \cdot y$ es nihilpotente.

b) $x + y$ es nihilpotente.

c) $1 - x$ no es nihilpotente.
Indicación: Calcule previamente $(1-x)(1+x+\cdots+x^k)$ siendo $k \in \mathbb{N}^*$.

Solución: Sean $x, y \in A$ tales que x e y son nihilpotentes. Por tanto existen $n, m \in \mathbb{N}^*$ tales que

$$y^m = 0 \;\text{ y } x^n = 0\,.$$

a) $x \cdot y$ es nihilpotente pues teniendo en cuenta que el producto es asociativo y conmutativo se tiene

$$(x \cdot y)^n = \overbrace{(x \cdot y) \cdot \cdots \cdot (x \cdot y)}^{n \text{ veces}} = x^n \cdot y^n = 0 \cdot y^n = 0\,.$$

Obsérvese que no es necesario que ambos elementos x e y sean nihilpotentes. Basta con que lo sea uno de los dos.
b) $x + y$ es nihilpotente. En efecto, utilizando el binomio de Newton se tiene:

$$(x+y)^{n+m} = \sum_{p=0}^{n+m} \binom{n+m}{p} x^{n+m-p} y^p$$

Si $p \geq m$ entonces $y^p = y^m \cdot y^{p-m} = 0 \cdot y^{p-m} = 0$
Si $p < m$ multiplicando por -1 se obtiene $-m < -p$ y sumando $m+n$ resulta $n < m+n-p$. En consecuencia, $x^{n+m-p} = x^n \cdot x^{m-p} = 0 \cdot x^{m-p} = 0$.
c) En este caso se supone que el anillo es unitario. Veamos que $1-x$ es invertible. En efecto,

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^k) = 1+x+\cdots+x^k - x - x^2 - \cdots - x^{k+1} = 1 - x^{k+1}$$

Si $n = 1$, entonces $x = 0$ y por tanto $1 - x = 1$, que es invertible siendo 1 su inverso.
Para $k+1 = n$ obtenemos, $(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1}) = 1 - x^n = 1$. Por tanto, el inverso de $1-x$ es $1+x+\cdots+x^{n-1}$. En cualquiera de los dos casos existe $z \in A$ tal que $(1-x)z = 1$. Por tanto para todo $p \in \mathbb{N}^*$ se tiene que $(1-x)^p z^p = 1^p = 1$ de donde se deduce que $(1-x)^p \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{N}^*$.

Otra forma de ver que $1-x$ no es nihilpotente es por reducción al absurdo y utilizando el apartado b). En efecto, si suponemos que $1-x$ es nihilpotente, teniendo en cuenta que x es nihilpotente y el apartado b) resulta que $1-x+x = 1$ es nihilpotente. Por tanto exixte $q \in \mathbb{N}^*$ tal que $1^q = 0$, que es una contradicción con $1^q = 1 (\neq 0)$:

Pregunta 2 (2,5 puntos)
¿Cuántas aplicaciones sobreyectivas existen del conjunto $A = \{1, 2, 3, \cdots, n+1\}$ al conjunto $B = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$? Justifique la respuesta.

Solución:
A y B son dos conjuntos finitos tales que $\text{card}(A) = n+1$ y $\text{card}(B) = n$.
Para cada aplicación f de A a B sobreyectiva existen dos y sólo dos elementos $i \neq j$ de A y un elemento k de B tales que

i) $f(i) = f(j) = k \in B$ y

ii) la restricción g_{ijk} de f a $A_{ij} = A \setminus \{i, j\}$, $g_{ijk} \colon A_{ij} \longrightarrow B_k = B \setminus \{k\}$, es una aplicación biyectiva.

Inversamente, si tenemos una aplicación biyectiva g de un subconjunto A' de $n-1$ elementos de A en un subconjunto B' de $n-1$ elementos de B, existe una única aplicación sobreyectiva f de A en B tal que f es una extensión de g y $f(A \setminus A') = B \setminus B'$.

En consecuencia, como hay $(n-1)!$ biyecciones posibles de A' a B', $\binom{n+1}{n-1} = \binom{n+1}{2}$ subconjuntos de A de $n-1$ elementos y $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$ subconjuntos de B de $n-1$ elementos, se obtiene que el número de aplicaciones sobreyectivas de A a B es:

$$n\binom{n+1}{2}(n-1)! = \binom{n+1}{2}n! = \frac{n(n+1)!}{2}$$

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ se tiene que

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Solución: i) La igualdad es cierta para $n = 1$ pues $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2}$ y $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

ii) Supongamos que la igualdad es cierta para n, esto es,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Veamos que es cierta para $n+1$, esto es,

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&\quad \text{y por la hipótesis de inducción} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \left(\frac{n+2}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

Pregunta 4 (2,5 puntos) (1+1,5)

a) Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $z^2 - 6z + 12 = 0$.

b) Sea $\omega = 3 + i\sqrt{3}$. Calcule el módulo y el argumento de los números ω, $\omega - 4$, $\dfrac{\omega}{\omega - 4}$ y $\dfrac{\overline{\omega}}{\overline{\omega} - 4}$, siendo $\overline{\omega}$ el conjugado de ω.

Solución:

a) El discriminante de la ecuación es $\Delta = 36 - 48 = -12$ siendo $2\sqrt{3}i$ una raíz cuadrada de Δ. En consecuencia las raíces de la ecuación son

$$z_1 = \frac{6 + 2\sqrt{3}i}{2} = 3 + \sqrt{3}i \ \text{ y } z_2 = \frac{6 - 2\sqrt{3}i}{2} = 3 - \sqrt{3}i\,.$$

b) Una vez hallado el módulo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ del número complejo $z = a + bi$, escribimos $z = r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}i\right)$ y se recuerda que si $\arg(z) = \alpha$ módulo 2π entonces $\cos\alpha = \frac{a}{r}$ y $\text{sen}\alpha = \frac{b}{r}$.
i) Si $\omega = 3 + i\sqrt{3}$ entonces $|\omega| = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$. Por tanto,

$$\omega = 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}i\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\sqrt{3}_{\ \pi/6}$$

ii) $\omega - 4 = -1 + i\sqrt{3}$ y por tanto $|\omega - 4| = \sqrt{1+3} = 2$ y

$$\omega - 4 = 2(-1/2 + i\sqrt{3}/2) = 2_{\ 2\pi/3}$$

iii)

$$\frac{\omega}{\omega - 4} = \frac{2\sqrt{3}_{\ \pi/6}}{2_{\ 2\pi/3}} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)_{\pi/6 - 2\pi/3} = \sqrt{3}_{\ -\pi/2} = \sqrt{3}_{\ 3\pi/2}$$

iv)

$$\frac{\overline{\omega}}{\overline{\omega} - 4} = \overline{\left(\frac{\omega}{\omega - 4}\right)} = \overline{\left(\sqrt{3}_{\ 3\pi/2}\right)} = \sqrt{3}_{\ -3\pi/2} = \sqrt{3}_{\ \pi/2}$$