

No se permite el uso de ningún tipo de material

Todas las respuestas deben estar justificadas

Ejercicio 1. (2 puntos) Sea $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto no vacío de números reales.

- a) Definir los conceptos de *conjunto acotado superiormente*, *cota superior* de A y *supremo* de A .

Supongamos que A está acotado superiormente y sea (s_n) una sucesión convergente de cotas superiores de A .

- b) Probar que el límite de esta sucesión es también una cota superior de A .

Ejercicio 2. (2 puntos) Calcular

$$\lim_n \frac{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n}{\log n}$$

donde “log” significa logaritmo neperiano.

Ejercicio 3. (2 puntos) Calcular justificadamente el número de raíces reales de la ecuación

$$x = \cos x \sin x.$$

Ejercicio 4. (2 puntos) Sea \mathcal{C} el arco de la curva $y = \cos x$ determinado por los puntos $x = -\pi/2$ y $x = \pi$. Calcular los puntos de \mathcal{C} más cercanos y los más lejanos al origen de coordenadas.

Ejercicio 5. (2 puntos)

- a) Definir *punto de aglomeración* de una sucesión de números reales.
- b) Calcular todos los puntos de aglomeración de la sucesión (a_n) definida por

$$a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Tiempo: 2 horas