Modelos estocásticos

Prueba de evaluación continua, modelo 11

Abril 2021

Dr. Víctor Hernández

Universidad Nacional de Educación a distancia
Departamento de Estadística e Investigación operativa

Modelos estocásticos. PEC 2021, modelo 11

Primer enunciado

Dos procesos P_1 y P_2 comienzan al mismo tiempo. El tiempo T_i que tarda en completarse el proceso i, $i = 1, 2$, se descompone en dos periodos. Primero un tiempo de inicialización, I_i, que tiene duración aleatoria uniforme en el intervalo $[0, T]$ y luego un tiempo de ejecución X_i que tiene duración aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\lambda_i > 0$, de suerte que $T_i = I_i + X_i$. Las variables I_1, I_2, X_1 y X_2 son independientes.

Cuestión 1. (0.5 puntos) Si el proceso P_1 comienza su ejecución antes que P_2, ¿cuál es la probabilidad de P_1 se complete antes que P_2?

Cuestión 2. (0.5 puntos) Hallar la distribución del tiempo que tardan los dos procesos en completarse.

Primera cuestión

Puede ser resuelta condicionando por $I_1 = y_1$, $I_2 = y_2$; lo haremos directamente. Se tiene

$$\begin{aligned} P(T_1 < T_2, I_1 < I_2) &= \int_0^T \frac{dy_2}{T} \int_0^{y_2} \frac{dy_1}{T} \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2}\, dx_2 \int_0^{x_2+y_2-y_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\, dx_1 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{T}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{1}{T^2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} - \frac{1}{T^2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-\lambda_1 T} \end{aligned}$$

Ahora, por simetría se tiene $P(I_1 < I_2) = 1/2$, luego

$$P(T_1 < T_2 \mid I_1 < I_2) = 1 - \frac{2}{T}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} + \frac{2}{T^2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} - \frac{2}{T^2}\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} e^{-\lambda_1 T}$$

Segunda cuestión

Sea T el tiempo que tardan los dos procesos en completarse. Se tiene $T = \max(T_1, T_2)$, luego

$$P(T \le t) = P(T_1 \le t)P(T_2 \le t)$$

Ahora, si $0 < t \le T$, resulta

$$\begin{aligned} P(T_1 \le t) &= \int_0^t \frac{dy_1}{T} \int_0^{t-y_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\, dx_1 \\ &= \frac{t}{T} - \frac{1}{\lambda_1 T} + \frac{1}{\lambda_1 T} e^{-\lambda_1 t} \end{aligned}$$

mientras que si $t > T$, se tiene

$$\begin{aligned} P(T_1 \le t) &= \int_0^T \frac{dy_1}{T} \int_0^{t-y_1} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\, dx_1 \\ &= 1 - \frac{1}{\lambda_1 T} e^{-\lambda_1 t}(e^{\lambda_1 T} - 1) \end{aligned}$$

De manera similar, se obtiene

$$P(T_2 \le t) = \begin{cases} \dfrac{t}{T} - \dfrac{1}{\lambda_2 T} + \dfrac{1}{\lambda_2 T} e^{-\lambda_2 t} & \text{si } 0 < t \le T \\ 1 - \dfrac{1}{\lambda_1 T} e^{-\lambda_1 t}(e^{\lambda_1 T} - 1) & \text{si } t > T \end{cases}$$

Segundo enunciado

Cierta masa de material radiactivo emite partículas alfa según un proceso de POISSON, $\{N(t), t \ge 0\}$, de parámetro $\lambda > 0$. Tras ser emitida, la partícula permanece en estado libre en el interior del recipiente que contiene a la masa hasta que es absorbida por las paredes. El tiempo que transcurre entre la emisión de una partícula y su absorción por la pared se denomina tiempo de vida libre de la partícula. Los tiempos de vida libre son variables aleatorias $\{Y_i\}$, independientes e igualmente distribuidas, e independientes del proceso $\{N(t), t \ge 0\}$, con función de densidad común $g(y)$, donde $g(y) = 0$ para $y \le 0$.

Consideremos el proceso $\{M(t), t \ge 0\}$, donde $M(t)$ es el número de partículas libres dentro del recipiente en el instante $t > 0$.

Cuestión 3. (1 punto) Hallar la distribución de $M(t)$ para $t > 0$ y la distribución de $N(t)$ condicionada por $M(t) = n$.

Tercera cuestión

La probabilidad de que una partícula emitida en el instante s permanezca libre en el instante $t > s$ es $P(Y > t - s)$, donde Y tiene la distribución común de las variables Y_i. Se sigue que si una partícula es emitida en un instante elegido al azar en el intervalo de tiempo $[0, t]$, la probabilidad de que permanezca libre en el instante t es

$$p(t) = \int_0^t P(Y > t - s)\, \frac{ds}{t} = \int_0^t P(Y > s)\, \frac{ds}{t}$$

Sabemos que, condicionado por $N(t) = k$, las k partículas emitidas lo son en instantes elegidos al azar en $[0, t]$, luego el número de partículas libres en el instante t es binomial de parámetros $p(t)$ y k, y se tiene

$$P(M(t) = n \mid N(t) = n) = \binom{k}{n} (p(t))^n (1 - p(t))^{k-n}, \qquad \text{si } k \ge n$$

siendo $P(M(t)=n \mid N(t)=n)=0$ si $k<n$. Se sigue

$$
\begin{aligned}
P(M(t)=n) &= \sum_{k=n}^{\infty} P(M(t)=n \mid N(t)=n) P(N(t)=n) \\
&= \sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} (p(t))^n (1-p(t))^{k-n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda t p(t))^n}{n!} e^{-\lambda t p(t)}
\end{aligned}
$$

luego $M(t)$ tiene una distribución de POISSON de parámetro $\lambda t p(t)$.

Por otra parte, se tiene

$$
P(N(t)=k, M(t)=n) = \binom{k}{n} (p(t))^n (1-p(t))^{k-n} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \qquad \text{para } k \geq n
$$

luego

$$
P(N(t)=k \mid M(t)=n) = \frac{P(N(t)=k, M(t)=n)}{P(M(t)=n)} = \frac{(\lambda t(1-p(t))^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda t(1-p(t))}
$$