PROBLEMA Calcular $I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{\sqrt{tg(x)}} + \frac{1}{\sqrt{cotg(x)}} \right) dx$

SOLUCIÓN:

$$I = \int_0^{\pi/2} sen^{-1/2}(x) \cos^{1/2}(x)\, dx + \int_0^{\pi/2} sen^{1/2}(x) \cdot \cos^{-1/2}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \beta(1/4, 3/4) + \frac{1}{2} \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) = \beta(3/4, 1/4) = \Gamma(3/4)\Gamma(1/4)$$

$$= \frac{\pi}{sen \frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}.$$

PROBLEMA 5. Probar que $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt$ Ind:

SOLUCIÓN:

$\beta(p,q) = \int_0^1 (1-x)^{q-1} x^{p-1} dx$, hacemos el cambio

$$\left[\begin{array}{ll} x = \frac{t}{1+t} & dx = \frac{(1+t)-1}{(1+t)^2} dt = \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ x=0 \Rightarrow t=0 & x=1 \Rightarrow t=\infty \end{array} \right]$$

entonces

$$\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t)^{q-1}} \cdot \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p-1}} \frac{1}{(1+t)^2} dt = *$$

$$* = \int_0^\infty \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt.$$

4. Calcular $I = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

$$I = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

Ahora,

$$I_1 \int \frac{x^2\,dx}{(1+x^2)^2} = \left\{ \begin{array}{l} x = u \quad du = dx \\ \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = dv \to v = -\left[\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}\right] \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{-x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)$$

$$I = \frac{\operatorname{arctg}(x)}{2} + \frac{x}{2(1+x^2)} + C$$

EXAMEN.

1 Enunciar con todo rigor los Teoremas fundamentales del Cálculo. Probar uno de ellos.

2. Calcular $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.

SOLUCIÓN:

$I = \int_0^\infty e^{-x^2}dx$. Hagamos el cambio de variable

$$\begin{cases} t = x^2 \to x = t^{1/2} \quad dx = \frac{1}{2}t^{-1/2} \\ x = 0 \to t = 0 \\ x = \infty \to t = \infty \end{cases}$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{-1/2}\,dt = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$p - 1 = -1/2 \qquad p = 1/2$

3. Probar que la serie $\sum_{n=2}^\infty \frac{\log(n)}{n^2} x^n$ converge absolutamente para $|x|<1$ y diverge para $|x|>1$.

SOLUCIÓN:

Es una serie de potencias con $a_n = \frac{\log(n)}{n^2}$, $n \geq 2$.

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\log(n+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{\log(n)} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \frac{\log(n+1)}{\log(n)}$$

Obviamente $\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$.

También $\frac{\log(n+1)}{\log(n)} \to 1 \quad n \to \infty$

$\rho = \left(\lim\sup \frac{b_{n+1}}{b_n}\right)^{-1} = 1$. Por tanto, la serie converge absolutamente en $(-1, 1)$ y diverge en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

En $x = 1$ $\sum_2^\infty \frac{\log(n)}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\log(n)}{n^2}}{1/n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}\cdot\log(n)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{1/2}} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^{1/2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \lim \frac{2}{x^{1/2}} = 0 \text{. (Por L'Hôpital)}$$

Por tanto el ~~caracter~~ de la serie $\sum \frac{\log(n)}{n^2}$ es idéntico al de $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ luego es convergente.

En $x=-1$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log(n)}{n^2}(-1)^n$.

La función $f(x) = \frac{\log(x)}{x^2}$, $x \geq 2$ es decreciente pues

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x\log(x)}{x^4} = \frac{x\left[1-2\log(x)\right]}{x^4} =$$

$$= \frac{\left[1-2\log(x)\right]}{x^3} < 0 \text{, para } x \text{ suficientemente grande.}$$

Por el criterio de Dirichlet es convergente.

4. Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = I$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{-(x-4)^2+36}} = \frac{1}{6}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x-4}{6}\right)^2}} = \text{arco sen}\left(\frac{x-4}{6}\right)$$

PROBLEMA

a) Calcular $I = \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$.

SOLUCIÓN

Procedemos por partes

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2x\,dx}{2(1+x^2)^2} \Rightarrow -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-1}$$

$$I = -\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + K.$$

PROBLEMA

b) Dada la función $F(t) = \int_0^t \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos en $\mathbb{R}$

SOLUCIÓN

$$F'(t) = \frac{t^2}{(1+t^2)^2} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

por lo que $F(t)$ es creciente (el intervalo de crecimiento es pues $\mathbb{R}$) y no tiene máximos ni mínimos.

c) Tiene $F(t)$ máximos o mínimos en $[0,1]$

Al ser $F(t)$ creciente toma el máximo en $x=1$ y el mínimo en $x=0$.

Determinar la función f límite puntual de la sucesión de funciones (f_n) de $(-1,1)$ en $\mathbb{R}$ definida por

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \quad \text{para } n \in \mathbb{N} \text{ y } x \in (-1,1)$$

Estudiar si la convergencia es uniforme o no.

SOLUCIÓN:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \text{si } x \neq 0 & \lim_n \dfrac{x}{1+n^2x^2} = \lim_n \dfrac{x/n^2}{\frac{1}{n^2}+x^2} = 0. \end{cases}$$

Hallemos ahora

$$f_n'(x) = \frac{1+n^2x^2 - x\cdot 2x\,n^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$$

$$f_n'(x) = 0 \iff 1 - x^2n^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1/n$$

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \qquad f_n\left(\frac{-1}{n}\right) = -\frac{1}{2n}$$

luego

$$\lim_n \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in (-1,1)\} = 0$$

y la convergencia es uniforme.

EXAMEN

1. Probar que si una función es continua entonces es integrable. $f:[a,b] \to \mathbb{R}$.

2. Estudiar la convergencia de la integral $I = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}$

SOLUCIÓN:

La función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}$ tiende a infinito en

$x=3$ y $x=1$. Por tanto tomamos $\alpha \in (1,3)$ y

$$I = \underbrace{\int_1^\alpha \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}_{I_1} + \underbrace{\int_\alpha^3 \frac{dx}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}_{I_2}$$

I_1: Comparamos con $\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}$ cuya integral $[1,\alpha]$ es convergente

$$\lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{3-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y por tanto I_1 es convergente

I_2: Comparamos con $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$ cuya integral en $[\alpha,3]$ es convergente

$$\lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{\sqrt{(3-x)(x-1)}}}{\frac{1}{\sqrt{3-x}}} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{(x-1)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por tanto I_2 es convergente.

Por tanto I es convergente