Tema 5

Extensiones del modelo matemático

Situación

- Fenómenos aleatorios con un “nº finito” de resultados posibles (espacio muestral).

Situación

- Fenómenos aleatorios con un “nº finito” de resultados posibles (espacio muestral).
- Sobre cada uno de los subconjuntos del espacio muestral (sucesos) hemos definido una aplicación que cumple determinadas condiciones y la llamamos probabilidad.

Situación. Formalización

Sobre un espacio muestral finito Ω, *una* probabilidad *es una aplicación*

$$\mathrm{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

que verifique

(a) *Si* $A, B \subset \Omega$ *y* $A \cap B = \emptyset$, *entonces*

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$$

(b) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Propiedades Probabilidad

- 1.- Si $A \subset B \subset \Omega$, entonces $\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
- 2.- Si $A \subset B \subset \Omega$, entonces $\mathrm{P}(B - A) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A)$
- 3.- Para cualquier $A \subset \Omega$, $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- 4.- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0$
- 5.- $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B \cap A) + \mathrm{P}(B - A)$
- 6.- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

Propiedades Probabilidad (2)

- 7.- $A_i \cap A_j = \emptyset$ entonces

$$\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \cdots + \mathrm{P}(A_n)$$

- 8.- Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ y

$A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ entonces

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(\{\omega_{i_1}\}) + \mathrm{P}(\{\omega_{i_2}\}) + \cdots + \mathrm{P}(\{\omega_{i_k}\})$$

Objetivos del Tema

- Plantear la generalización de la probabilidad a espacios muestrales numerables

Objetivos del Tema

- Plantear la generalización de la probabilidad a espacios muestrales numerables
- Plantear la extensión al modelo continuo

Espacios muestrales numerables

- Definición de espacio muestral numerable (discreto), que seamos capaces de establecer una biyección con los números naturales.
- Discreto será la denominación que seguiremos para los espacios muestrales numerables. Aunque dicho calificativo lo extenderemos a otras situaciones.

Ejemplos. Espacios muestrales numerables

Análisis previos de la probabilidad

- Las partes de Ω no es numerable
- Sea una sucesión de sucesos

  $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$

  tienen sentido $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

  y $\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$ $\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$

Condiciones de la probabilidad

Sobre un espacio muestral numerable Ω, *una* probabilidad *es una aplicación*

$$\mathrm{P} : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,1]$$

que verifique

(a) *Si* A_n *es una sucesión de sucesos tales que* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *para* $i \neq j$, *entonces*

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_n)$$

(b) $\mathrm{P}(\Omega) = 1$.

Si se cumplen ambas condiciones, (Ω, P) *constituye un espacio de probabilidad numerable.*

Propiedades adicionales de la probabilidad

9. *En un espacio de probabilidad numerable* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots\}$, *cualquier suceso* $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k}, \ldots\}$ *tiene probabilidad*

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{P}(\{\omega_{i_k}\}) \tag{5.3}$$

10. *Si* A_n *es una sucesión creciente de sucesos (es decir* $A_n \subset A_{n+1}$*), se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{5.5}$$

Análogamente, si A_n *es una sucesión decreciente de sucesos (con* $A_{n+1} \subset A_n$*), se cumple*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \tag{5.6}$$

Ejemplo 5.8

Tres jugadores A, B y C lanzan, por turnos, dos dados y gana el primero que consiga obtener 9 como suma de las dos puntuaciones. ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno?

Al lanzar dos dados, de los 36 resultados posibles hay 4 cuya suma es 9; concretamente 3:6, 4:5, 5:4 y 6:3. Luego, en cada tirada, la probabilidad de conseguir un 9 es $4/36 = 1/9$.

Ejercicios

5.1 Una urna contiene r bolas numeradas de 1 a r. Se realizan extracciones con reposición hasta que aparece dos veces consecutivas la misma bola. Calcular la probabilidad de que haya que realizar exactamente n extracciones.

Ejercicios

5.2 De una urna que contiene a bolas blancas y b negras, dos jugadores A y B hacen alternativamente extracciones con reposición. Gana el primero que consiga extraer bola blanca. ¿Cuáles son las probabilidades de ganar de cada uno? ¿Y en el caso de que el jugador A gane si extrae una bola blanca antes de que B extraiga una bola negra?

Examen Febrero 2008 2ª semana

- Una urna contiene a bolas blancas y b bolas negras. Dos jugadores A y B extraen sucesivamente y con reemplazamiento una bola de la urna. El juego se detiene cuando A extrae una bola blanca (siendo A el ganador del juego) o cuando B extrae una bola negra (siendo B el ganador del juego). Se supone que el primer jugador en extraer bola es A.
- a) Calcular la probabilidad de que A gane la partida, y la probabilidad de que B gane la partida.
- b) Determinar la duración media de la partida.

Modelos continuos