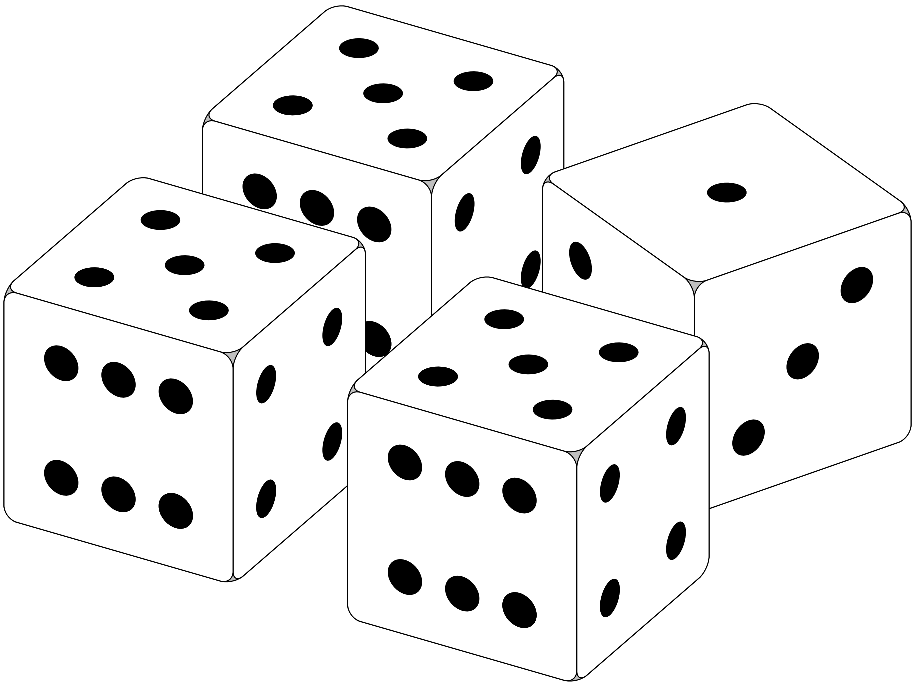
Exámenes de la asignatura *Teoría de juegos*

Juan Luis Castaño Fernández

15 de febrero de 2021



Índice general

Examen 1. Enero de 2014

Problema 1.1. Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver el siguiente juego:

(I) J_2 elige un número $p \in \{3, 4\}$.

(II) J_0 elige un número $q \in \{1, 2\}$ con $\mathcal{P}(1) = \frac{3}{4}, \mathcal{P}(2) = \frac{1}{4}$.

(III) J_1 elige un número $r \in \{0, 1\}$.

Si $p + q + r$ es par J_2 paga a J_1 dos unidades, en los demás casos J_1 paga a J_2 una unidad.

La información de J_1 en la etapa (III) es que sabe el valor de $p + q$ pero no el de p, q por separado.

Solución del problema 1.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 1.1.

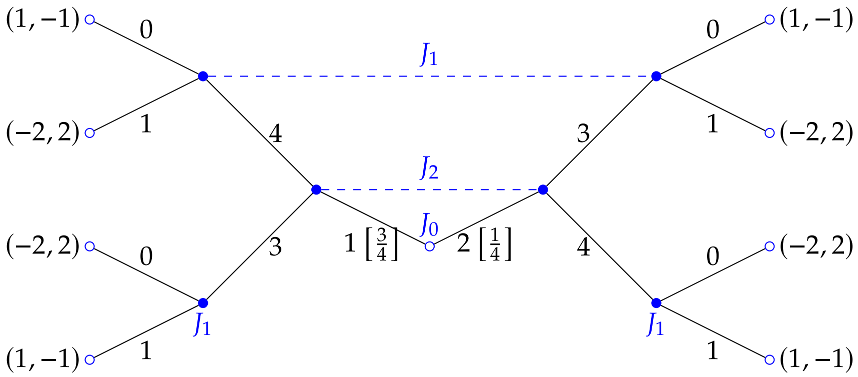


Figura 1.1: Forma extensiva del juego del problema 1.1.

Tras el movimiento del jugador J_0, que elige un número $q \in \{1, 2\}$, el jugador J_2 elige un número $p \in \{3, 4\}$ sin conocer el valor de q. Por último, tras el movimiento del jugador J_2, el jugador J_1 se encontrará ante tres posibles situaciones según el valor de la suma $p + q \in \{4, 5, 6\}$. Una estrategia para J_1 sería, por ejemplo, 001, que indica que si $p + q = 4$ o $p + q = 5$ entonces J_1 elige el número $r = 0$, mientras que si $p + q = 6$ entonces J_1 elige el número $r = 1$. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores J_2 y J_1 son

$$J_2 = \{3, 4\}, \quad J_1 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(3, 000) = \pi(3, 001) = \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{5}{4}; \quad \pi(3, 010) = \pi(3, 011) = \frac{3}{4} \cdot (-2) + \frac{1}{4} \cdot (-2) = -2;$$

$$\pi(3, 100) = \pi(3, 101) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1; \quad \pi(3, 110) = \pi(3, 110) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-2) = \frac{1}{4};$$

$$\pi(4,000) = \pi(4,100) = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot(-2) = \frac{1}{4}; \quad \pi(4,001) = \pi(4,101) = \frac{3}{4}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 1 = 1;$$
$$\pi(4,010) = \pi(4,110) = \frac{3}{4}\cdot(-2) + \frac{1}{4}\cdot(-2) = -2; \quad \pi(4,111) = \pi(4,111) = \frac{3}{4}\cdot(-2) + \frac{1}{4}\cdot 1 = -\frac{5}{4}.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 1.1.

M		J_1							
		000	001	010	011	100	101	110	111
J_2	3	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{5}{4}$	-2	-2	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
	4	$\frac{1}{4}$	1	-2	$-\frac{5}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	-2	$-\frac{5}{4}$

Cuadro 1.1: Forma normal del juego del problema 1.1.

Resolución:

- La matriz M tiene puntos de silla, que son tanto el $(3,010)$ como el $(4,010)$. En consecuencia el jugador J_2 puede jugar cualquier estrategia (pura o mixta) y el jugador J_1 debe elegir $r = 0$ si la suma es $p + q = 4$ o $p + q = 6$ (si $p + q$ es par), y debe elegir $r = 1$ si la suma es $p + q = 5$ (impar). El valor del juego es $v(M) = -2$.

Problema 1.2. Se considera una empresa monopolista (hasta ahora) y otra entrante potencial en su mercado. Se está discutiendo una ley de control de la contaminación y hay dos propuestas: la del Grupo Verde (GV), que aumentaría 6 millones los costes fijos de cada empresa que está en el mercado, y la de la Oposición (O), que aumentaría los costes de cada empresa que está en el mercado en 3 millones.

El monopolista tiene tal influencia política que una propuesta u otra solo se aprobarán si la apoya el monopolista, que debe decidir entre apoyar a GV, a O, o que no salga ley alguna. El entrante puede o no entrar en el mercado.

Se sabe que los beneficios de un monopolio son 12 millones y 0 para el entrante potencial si no entra, y 5 para cada empresa en un mercado duopolista.

Escribir la matriz del juego y encontrar los puntos de equilibrio.

Solución del problema 1.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. Llamaremos jugador J_1 a la empresa monopolista, y jugador J_2 a la empresa entrante. El jugador J_1 puede decidir apoyar al Grupo Verde (G), apoyar a la Oposición (O), o impedir que salga la ley (I). A su vez, el jugador J_2 puede entrar en el mercado (E) o no hacerlo (N). Así, las posibles estrategias para ambos jugadores son

$$J_1 = \{G, O, I\}, \quad J_2 = \{E, N\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 1.2.

M		J_2	
		E	N
J_1	G	$(-1,-1)$	$(6,0)$
	O	$(2,2)$	$(9,0)$
	I	$(5,5)$	$(12,0)$

Cuadro 1.2: Forma normal del juego del problema 1.2.

Para hallar los puntos de equilibrio utilizaremos el método IDSDS[1]:

- La estrategia I para el jugador J_1 domina estrictamente a las otras dos, por lo que J_1 siempre jugará I, y el jugador J_2 lo sabe. Se pueden eliminar, por tanto, las filas 1 (G) y 2 (O).

- En la fila restante

M		J_2	
		E	N
J_1	I	$(5,5)$	$(12,0)$

  la estrategia E para el jugador J_2 domina estrictamente a la estrategia N. Por tanto, se puede eliminar la columna 2 (N).

En conclusión, el único punto de equilibrio es el par de estrategias (I, E), para el cual los pagos son $(5,5)$.

Problema 1.3. Cuatro jugadores eligen simultáneamente un número $x \in \{1,2\}$. Si todos coinciden no hay pago y lo mismo si coinciden dos a dos. En el caso de que coincidan tres ganan 30 euros cada uno y el que eligió diferente paga los 90 euros.

Hallar la función característica y decir si es o no un juego esencial.

Solución del problema 1.3. Estamos ante un juego tetrapersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles.

Estudiamos cada posibilidad por separado.

- Se forman las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3, J_4\}$. La forma normal del juego se recoge en el cuadro 1.3.

M		$\{J_2, J_3, J_4\}$							
		111	112	121	122	211	212	221	222
$\{J_1\}$	1	0	3	3	0	3	0	0	−9
	2	−9	0	0	3	0	3	3	0

Cuadro 1.3: Forma normal del juego del problema 1.3 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3, J_4\}$.

  La matriz no tiene puntos de silla, pero la primera y la última columna dominan a todas las demás. Con esa información, una estrategia mixta para la coalición $\{J_1\}$ ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -9(1-p) = -9p \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$

$$v(\{1\}) = -9 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -9 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{2}.$$

  Y como es un juego de suma cero,

$$v(\{2,3,4\}) = \frac{9}{2}.$$

- Se forman las coaliciones $\{J_1, J_2\}$ y $\{J_3, J_4\}$. La forma normal del juego se recoge en el cuadro 1.4.

[1]Iterated deletion of strictly dominated strategies (Bonanno, 2018 : 35).

M		$\{J_3, J_4\}$			
		11	12	21	22
$\{J_1, J_2\}$	11	0	6	6	0
	12	−6	0	0	−6
	21	−6	0	0	−6
	22	0	6	6	0

Cuadro 1.4: Forma normal del juego del problema 1.3 para las coaliciones $\{J_1, J_2\}$ y $\{J_3, J_4\}$.

La matriz tiene cuatro puntos de silla, que son los elementos m_{11}, m_{14}, m_{41} y m_{44}. En consecuencia,

$$v\big(\{1,2\}\big) = m_{11} = m_{14} = m_{41} = m_{44} = 0.$$

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, tenemos suficiente información para dar la función característica.

$$v(\varnothing) = 0; \quad v\big(\{1\}\big) = v\big(\{2\}\big) = v\big(\{3\}\big) = v\big(\{4\}\big) = -\frac{9}{2};$$
$$v\big(\{1,2\}\big) = v\big(\{1,3\}\big) = v\big(\{1,4\}\big) = v\big(\{2,3\}\big) = v\big(\{2,4\}\big) = v\big(\{3,4\}\big) = 0;$$
$$v\big(\{1,2,3\}\big) = v\big(\{1,2,4\}\big) = v\big(\{1,3,4\}\big) = v\big(\{2,3,4\}\big) = \frac{9}{2}; \quad v\big(\{1,2,3,4\}\big) = 0.$$

Como se puede ver, es un juego esencial, puesto que se verifica la definición 6.2 de Morris (1994 : 154).

$$0 = v\big(\{1,2,3,4\}\big) \neq \sum_{n=1}^{4} v\big(\{n\}\big) = 4 \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -18.$$

Examen 2. Febrero de 2014

Problema 2.1. Se tienen dos cartas en una urna. Una está marcada con una H y la otra con una L. El jugador J_1 elige una de las cartas al azar y sin que la vea el jugador J_2, hace una apuesta o pasa.

Si pasa, directamente le paga una cantidad a al jugador J_2. Si apuesta, entonces hay dos opciones:

(a) Si J_2 no ve su apuesta, J_2 paga la cantidad a a J_1.

(b) Si J_2 ve la apuesta, entonces gana una cantidad b a J_1 ($b > a$), si este sacó la carta L mientras que le paga esa misma cantidad si sacó la carta H.

Hallar la forma extensiva y normal de este juego. Resolverlo.

Solución del problema 2.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 2.1.

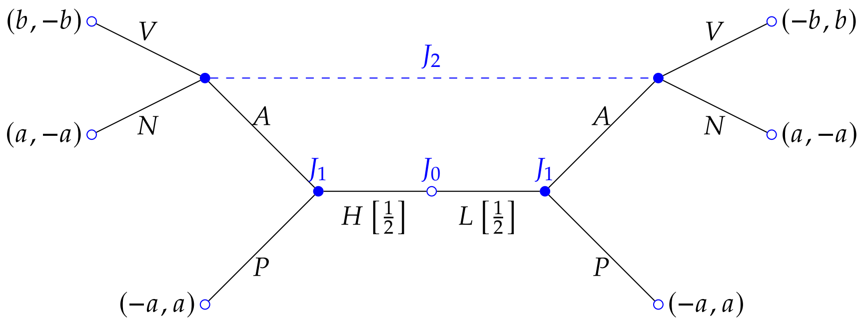


Figura 2.1: Forma extensiva del juego del problema 2.1.

Tras el movimiento del jugador J_0 (la extracción de la carta), el jugador J_1 se encontrará en dos posibles situaciones, que haya salido la carta H o que haya salido la carta L. Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es UD (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (carta H) apostará (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 2.1), y si se encuentra en la segunda situación (carta L) pasará (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador J_1, el jugador J_2 también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información de la carta extraída), que el jugador J_1 haya apostado o que haya pasado, en cuyo caso el juego ha terminado. Una estrategia para J_2 sería, por ejemplo, D (*down*), que indica que si J_1 apostó entonces J_2 no ve la apuesta. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores J_1 y J_2 son

$$\Sigma_1 = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad \Sigma_2 = \{U, D\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(UU, U) = \frac{1}{2} \cdot (-b) + \frac{1}{2} \cdot b = 0; \quad \pi(UU, D) = \frac{1}{2} \cdot a + \frac{1}{2} \cdot a = a;$$

$$\pi(UD,U) = \frac{1}{2}\cdot b + \frac{1}{2}\cdot(-a) = \frac{b-a}{2}; \quad \pi(UD,D) = \frac{1}{2}\cdot a + \frac{1}{2}\cdot(-a) = 0;$$
$$\pi(DU,U) = \frac{1}{2}\cdot(-a) + \frac{1}{2}\cdot(-b) = -\frac{b+a}{2}; \quad \pi(DU,D) = \frac{1}{2}\cdot(-a) + \frac{1}{2}\cdot a = 0;$$
$$\pi(DD,U) = \frac{1}{2}\cdot(-a) + \frac{1}{2}\cdot(-a) = -a; \quad \pi(DD,D) = \frac{1}{2}\cdot(-a) + \frac{1}{2}\cdot(-a) = -a.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 2.1.

M		J_2	
		U	D
J_1	UU	0	a
	UD	$\frac{b-a}{2}$	0
	DU	$-\frac{b+a}{2}$	0
	DD	$-a$	$-a$

Cuadro 2.1: Forma normal del juego del problema 2.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 3 y a la fila 4. Eliminamos las filas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & a \\ \frac{b-a}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$ y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow \frac{b-a}{2}(1-p) = ap \Longrightarrow (b-a)(1-p) = 2ap \Longrightarrow (b+a)p = b-a \Longrightarrow p = \frac{b-a}{b+a}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 ha de ser de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$ y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow a(1-q) = \frac{b-a}{2}\cdot q \Longrightarrow 2a(1-q) = (b-a)q \Longrightarrow (b+a)q = 2a \Longrightarrow q = \frac{2a}{b+a}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{b-a}{b+a}, \frac{2a}{b+a}, 0, 0\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{2a}{b+a}, \frac{b-a}{b+a}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= \frac{b-a}{2}\left(1-\frac{b-a}{b+a}\right) = a\cdot\frac{b-a}{b+a} = \frac{a(b-a)}{b+a} \\ v_2(M) &= a\left(1-\frac{2a}{b+a}\right) = \frac{b-a}{2}\cdot\frac{2a}{b+a} = \frac{a(b-a)}{b+a} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{a(b-a)}{b+a}.$$

Problema 2.2. Dos empresas diferentes venden el mismo producto en un mismo mercado compuesto por dos segmentos A y B.

Cada una puede realizar una campaña publicitaria, enfocada al segmento A o al B. En el segmento A solo se enterará el 35 % de los clientes potenciales y en el B el 65 %.

Si ambas firmas se anuncian en el mismo segmento, cada una venderá al 40 % de los que se enteraron. Si lo hacen en segmentos diferentes, cada una venderá al 60 % de los que se enteraron.

Escribir la matriz del juego. ¿Existen puntos de equilibrio?

Solución del problema 2.2. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores J_1 y J_2 a cada una de las empresas. Ambos jugadores pueden invertir en el segmento A o B, por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{A, B\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 2.2 (donde los pagos indican los clientes del segmento a los que cada empresa consigue vender, en tanto por ciento).

M		J_2	
		A	B
J_1	A	$(14, 14)$	$(21, 39)$
	B	$(39, 21)$	$(26, 26)$

Cuadro 2.2: Forma normal del juego del problema 2.2.

Para hallar los puntos de equilibrio utilizaremos el método IDSDS:

- La estrategia B para el jugador J_1 domina estrictamente a la estrategia A, por lo que J_1 siempre jugará B, y el jugador J_2 lo sabe. Se puede eliminar, por tanto, la fila 1 (A).
- En la fila restante

M		J_2	
		A	B
J_1	B	$(39, 21)$	$(26, 26)$

  la estrategia B para el jugador J_2 domina estrictamente a la estrategia A. Por tanto, se puede eliminar la columna 1 (A).

En conclusión, el único punto de equilibrio es el par de estrategias (B, B), para el cual los pagos son $(26, 26)$. O sea, ambas empresas deben enfocar sus campañas publicitarias al segmento B, y de esa forma ambas conseguirán un 26 % de los clientes potenciales.

Problema 2.3. La función característica de un juego tripersonal general viene dada por:

$$v(\emptyset) = 0, \quad v\big(\{1\}\big) = 1, \quad v\big(\{2\}\big) = 0, \quad v\big(\{3\}\big) = 2,$$

$$v\big(\{1,2\}\big) = 3, \quad v\big(\{1,3\}\big) = 5, \quad v\big(\{2,3\}\big) = 4, \quad v\big(\{1,2,3\}\big) = 6.$$

Calcular el valor de Shapley.

Solución del problema 2.3. Estudiamos cada jugador por separado.

- Jugador J_1.

$$\begin{aligned}
\delta\big(1,\{1\}\big) &= v\big(\{1\}\big) - v(\varnothing) = 1 - 0 = 1;\\
\delta\big(1,\{1,2\}\big) &= v\big(\{1,2\}\big) - v\big(\{2\}\big) = 3 - 0 = 3;\\
\delta\big(1,\{1,3\}\big) &= v\big(\{1,3\}\big) - v\big(\{3\}\big) = 5 - 2 = 3;\\
\delta\big(1,\{1,2,3\}\big) &= v\big(\{1,2,3\}\big) - v\big(\{2,3\}\big) = 6 - 4 = 2;\\
\phi_1 = \sum_{\mathcal{S}\ni 1} \frac{(3-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(1,\mathcal{S}) &= \frac{2!0!}{3!}\cdot 1 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 3 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 3 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 2 = 2.
\end{aligned}$$

- Jugador J_2.

$$\begin{aligned}
\delta\big(2,\{2\}\big) &= v\big(\{2\}\big) - v(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(2,\{1,2\}\big) &= v\big(\{1,2\}\big) - v\big(\{1\}\big) = 3 - 1 = 2;\\
\delta\big(2,\{2,3\}\big) &= v\big(\{2,3\}\big) - v\big(\{3\}\big) = 4 - 2 = 2;\\
\delta\big(2,\{1,2,3\}\big) &= v\big(\{1,2,3\}\big) - v\big(\{1,3\}\big) = 6 - 5 = 1;\\
\phi_2 = \sum_{\mathcal{S}\ni 2} \frac{(3-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(2,\mathcal{S}) &= \frac{2!0!}{3!}\cdot 0 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 2 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 2 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

- Jugador J_3.

$$\begin{aligned}
\delta\big(3,\{3\}\big) &= v\big(\{3\}\big) - v(\varnothing) = 2 - 0 = 2;\\
\delta\big(3,\{1,3\}\big) &= v\big(\{1,3\}\big) - v\big(\{1\}\big) = 5 - 1 = 4;\\
\delta\big(3,\{2,3\}\big) &= v\big(\{2,3\}\big) - v\big(\{2\}\big) = 4 - 0 = 4;\\
\delta\big(3,\{1,2,3\}\big) &= v\big(\{1,2,3\}\big) - v\big(\{1,2\}\big) = 6 - 3 = 3;\\
\phi_3 = \sum_{\mathcal{S}\ni 3} \frac{(3-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(3,\mathcal{S}) &= \frac{2!0!}{3!}\cdot 2 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 4 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 4 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 3 = 3.
\end{aligned}$$

Por tanto, el vector de Shapley es $\vec{\phi}(2,1,3)$.

Examen 3. Septiembre de 2014 – Convocatoria ordinaria

Problema 3.1. Se tiene una baraja con un número par de cartas, la mitad marcadas con la letra H y la otra mitad con la letra L.

Al comienzo del juego, dos jugadores P_1 y P_2 ponen cada uno un euro en un bote.

El jugador P_1 saca una carta, la mira, pero no se la enseña a P_2.

P_1 puede apostar 2 euros o 4 euros. Si P_1 apuesta 2 euros, P_2 debe ver. Si P_1 apuesta 4 euros, P_2 puede pasar o puede ver.

Si P_2 pasa, P_1 gana. Si P_2 ve, se enseña la carta. Si la carta es H, gana P_1; si es L, gana P_2.

Cuando P_2 ve debe igualar la apuesta de P_1.

El ganador en cada caso se lleva todo el bote.

Hallar la forma extensiva y normal de este juego. Resolverlo.

Solución del problema 3.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 3.1.

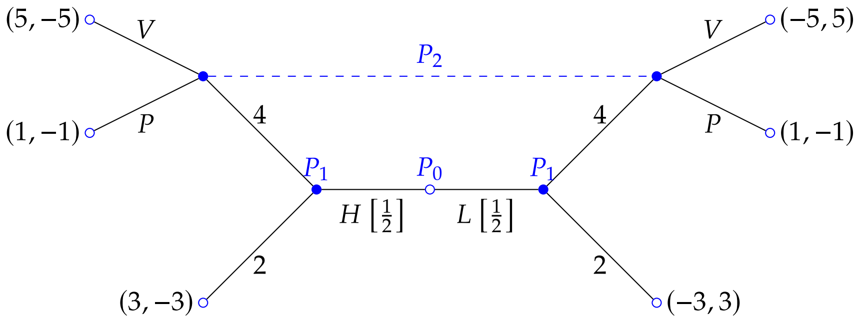


Figura 3.1: Forma extensiva del juego del problema 3.1.

Tras el movimiento del jugador P_0 (la extracción de la carta), el jugador P_1 se encontrará en dos posibles situaciones, que haya salido la carta H o que haya salido la carta L. Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es UD (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (carta H) apostará 4 € (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 3.1), y si se encuentra en la segunda situación (carta L) apostará 2 € (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador P_1, el jugador P_2 también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información de la extracción de la cartas), que el jugador P_1 haya apostado 4 € o que haya apostado 2 €, en cuyo caso el juego ha terminado. Una estrategia para P_2 sería, por ejemplo, D (*down*), que indica que si P_1 apostó 4 € entonces P_2 pasa. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores P_1 y P_2 son

$$P_1 = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad P_2 = \{U, D\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(UU,U)=\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot(-5)=0; \quad \pi(UU,D)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot 1=1;$$

$$\pi(UD,U)=\frac{1}{2}\cdot 5+\frac{1}{2}\cdot(-3)=1; \quad \pi(UD,D)=\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot(-3)=-1;$$

$$\pi(DU,U)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(-5)=-1; \quad \pi(DU,D)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=2;$$

$$\pi(DD,U)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(-3)=0; \quad \pi(DD,D)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(-3)=0.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 3.1.

M		P_2	
		U	D
P_1	UU	0	1
	UD	1	−1
	DU	−1	2
	DD	0	0

Cuadro 3.1: Forma normal del juego del problema 3.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 4. Eliminamos la fila dominada, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

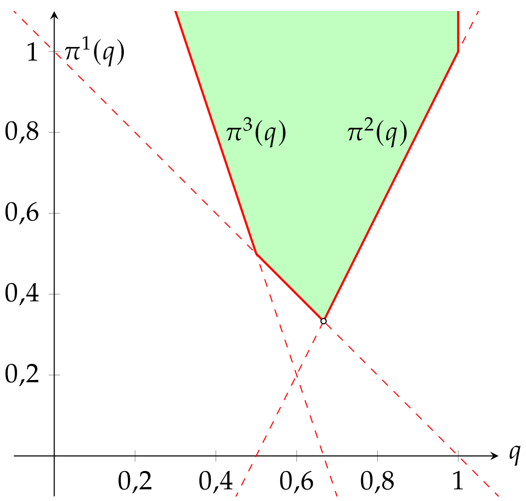


Figura 3.2: Mínimo del máximo para el jugador P_2.

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna P_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, con
$$\pi^1(q) = 1 - q; \quad \pi^2(q) = q - (1-q) = 2q - 1; \quad \pi^3(q) = -q + 2(1-q) = 2 - 3q.$$
Representamos en la figura 3.2 las funciones lineales $\pi^j(q)$, y comprobamos que el mínimo del máximo es el punto de intersección de $\pi^1(q)$ y $\pi^2(q)$. Dicho punto es
$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow 1 - q = 2q - 1 \Longrightarrow 3q = 2 \Longrightarrow q = \frac{2}{3}.$$
- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila P_1, podemos eliminar la fila 3, puesto que esta no es activa cuando se alcanza el mínimo de los valores $\pi^j(q)$. En ese caso obtenemos una segunda matriz reducida
$$M^{**} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, y ha de satisfacer
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 1 - p = p - (1-p) \Longrightarrow 3p = 2 \Longrightarrow p = \frac{2}{3}.$$
- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es
$$\vec{p} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right);$$
$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \\ v_2(M) &= 1 - \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{1}{3}.$$

Problema 3.2. Ejemplo 5.7 de Morris (1994 : 144). Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:
$$\begin{pmatrix} (5,1) & (7,4) & (1,10) \\ (1,1) & (9,-2) & (5,1) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 3.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 1 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 5p + (1-p) = p + 5(1-p) \Longrightarrow 4p = 4(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$
$$v_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3.$$
- La matriz de pagos del jugador J_2 es
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}.$$
Tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{12} y m_{32}, y por tanto $v_2 = m_{12} = m_{32} = 1$.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 3.3, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u,v) = (u-3)(v-1).$$

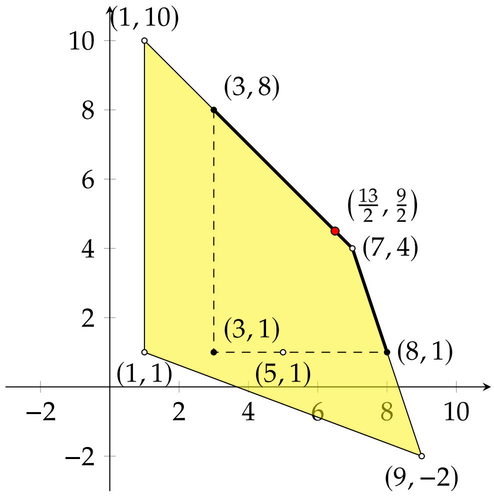


Figura 3.3: Región de pagos para el problema 3.2.

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto $(3,8)$ al punto $(7,4)$. La relación entre las variables es

$$v = -u + 11,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_1(u) = (u-3)(-u+11-1) = -u^2 + 13u - 30.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

$$g_1'(u) = -2u + 13;$$
$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -2u + 13 = 0 \Longrightarrow u = \frac{13}{2};$$
$$v = -\frac{13}{2} + 11 = \frac{9}{2}.$$

- Del punto $(7,4)$ al punto $(8,1)$. La relación entre las variables es

$$v = -3u + 25,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_2(u) = (u-3)(-3u+25-1) = -3u^2 + 33u - 72.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{11}{2}, \frac{17}{2}\right)$, que en este caso se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g_2'(u) = -6u + 33;$$
$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -6u + 33 = 0 \Longrightarrow u = \frac{11}{2};$$
$$v = -3 \cdot \frac{11}{2} + 25 = \frac{17}{2}.$$

Dado que la función g_2 decrece para valores de u mayores que 7, el par de arbitraje es el punto $\left(\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

Problema 3.3. El juego tripersonal de *parejas* es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si P_2 elige a P_3, y P_3 elige a P_2, entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de $\frac{1}{2}$, mientras la persona que no entra en la pareja recibe -1.

Si no se forma pareja, por ejemplo, si P_1 elige a P_2, P_2 elige a P_3, y P_3 elige a P_1, entonces cada uno recibe un pago de cero.

Probar que es de suma nula y esencial.

Solución del problema 3.3. Estamos ante un juego tripersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles.

El único caso no trivial es cuando se forma una coalición de dos jugadores (y otra de uno). Consideramos, por ejemplo, las coaliciones $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$, para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 3.2.

M		$\{P_2, P_3\}$			
		11	12	31	32
$\{P_1\}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
	3	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	-1

Cuadro 3.2: Forma normal del juego del problema 3.3 para las coaliciones $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$.

La matriz del juego tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{14} y m_{24}, por lo que una solución para este juego sería aquella en la que los jugadores P_2 y P_3 forman una pareja, independientemente de lo que haga el jugador P_1. El valor del juego es $v(M) = -1$.

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = -1; \quad \nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = \nu(\{2,3\}) = 1; \quad \nu(\{1,2,3\}) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es esencial, puesto que se verifica

$$\nu(\{1,2,3\}) = 0 \neq -3 = \sum_{n=1}^{3} \nu(\{n\}).$$

Además, también es de suma cero en su forma de función característica, puesto que

$$\nu(\varnothing) + \nu(\{1,2,3\}) = 0 + 0 = 0; \quad \nu(\{1\}) + \nu(\{2,3\}) = -1 + 1 = 0;$$

$$\nu(\{2\}) + \nu(\{1,3\}) = -1 + 1 = 0; \quad \nu(\{3\}) + \nu(\{1,2\}) = -1 + 1 = 0.$$

Evidentemente, como el juego es de suma cero en su forma normal, ha de ser también de suma cero en su forma de función característica.

Examen 4. Septiembre de 2014 – Convocatoria de reserva

Problema 4.1. El siguiente juego es jugado por dos jugadores, J_1 y J_2. Cada jugador tira un dado, de forma que solo ve su resultado pero no puede ver el número que ha obtenido el otro jugador.

A continuación el jugador J_1 apuesta 50 euros diciendo:

(I) El total de la suma obtenida por los dos dados es menor que ocho.

(II) El total obtenido es mayor que ocho.

Después el jugador J_2 puede:

(I) Aceptar la apuesta.

(II) Rechazarla.

Si la apuesta es rechazada, el pago a cada uno es cero. En otro caso, ambos dados son mostrados.

Si el total es exactamente ocho, entonces ambos pagos son cero. En otro caso, uno de los jugadores gana los 50 euros del otro.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 4.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 4.1. Dado que el diagrama de árbol en su totalidad es muy complejo, se ha dibujado una rama genérica correspondiente al primer movimiento, el lanzamiento del dado del jugador J_1, del que se supone que se obtiene un resultado $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Esta rama coincide con el conjunto de información del jugador J_2 que no conoce el valor i. Los pagos del jugador J_1 son siempre de +50 €, 0 € o −50 €, por lo que simplemente se indican por +, 0 y − respectivamente. Dichos pagos se recogen en función del valor i obtenido en el lanzamiento del primer dado.

A la vista de la forma extensiva del juego se puede ver que los jugadores J_1 y J_2 tienen un total de 2^6 y 2^{12} posibles estrategias, respectivamente. Por tanto, la forma normal del juego será una matriz M de $2^6 \times 2^{12} = 2^{18} = 262\,144$ elementos. Evidentemente, dicha forma normal es demasiado grande, y en consecuencia no se recoge. Se ha calculado con ayuda de un computador, y se puede comprobar que tiene exactamente tres puntos de silla, que son

$$m_{1,3855} = m_{1,3983} = m_{1,3999} = -\frac{25}{6};$$

y que se corresponden, respectivamente, con las estrategias:

- $(mmmmmM, RRRRAA\,AARRRR)$. El primer jugador ha de apostar a que sale menos de 8 excepto cuando en el lanzamiento de su dado obtiene un 6, y el segundo jugador acepta la apuesta si es a menos de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado al menos un 5 o si es a más de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado como mucho un 2.
- $(mmmmmM, RRRRRA\,AARRRR)$. El primer jugador ha de apostar a que sale menos de 8 excepto cuando en el lanzamiento de su dado obtiene un 6, y el segundo jugador acepta la apuesta si es a menos de 8 y

obtiene en el lanzamiento de su dado un 6 o si es a más de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado como mucho un 2.

- $(mmmmmM, RRRRRA\,ARRRRR)$. El primer jugador ha de apostar a que sale menos de 8 excepto cuando en el lanzamiento de su dado obtiene un 6, y el segundo jugador acepta la apuesta si es a menos de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado un 6 o si es a más de 8 y obtiene en el lanzamiento de su dado un 1.

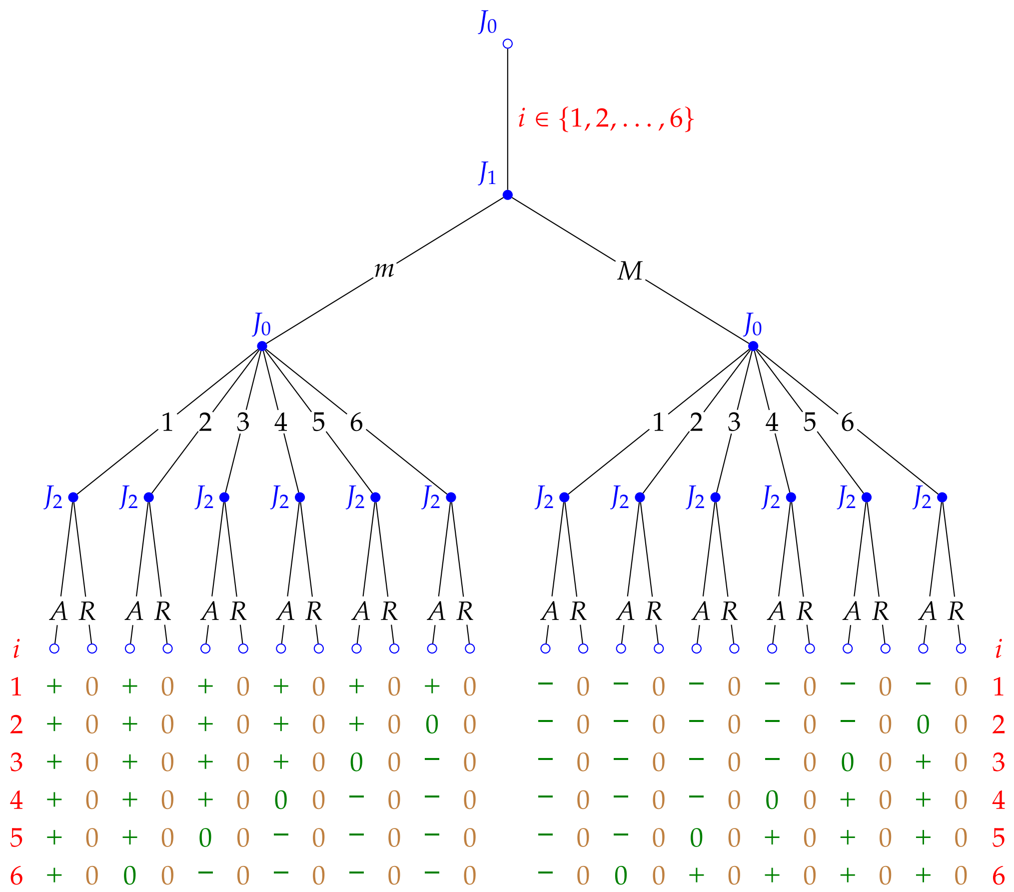


Figura 4.1: Forma extensiva del juego del problema 4.1.

Si bien sería difícil encontrar los puntos de silla sin la ayuda del computador, una vez encontrados sí es fácil comprobar que realmente se trata de puntos de silla, y calcular el pago o valor del juego. Consideramos, por ejemplo, el primer punto de silla dado, que se corresponde con el par de estrategias

$$(mmmmmM, RRRRAA\,AARRRR).$$

Como los movimientos aleatorios (los lanzamientos de ambos dados) son equiprobables, los datos del cuadro 4.1 nos permiten calcular el pago, que sería, tal y como ya se había anticipado,

$$v(M) = \frac{1}{36} \cdot (-150) = -\frac{25}{6}.$$

Si el jugador J_1 modifica mínimamente su estrategia, suponiendo que el jugador J_2 no lo haga, el pago esperado disminuye o permanece igual. Por ejemplo, en el cuadro 4.2 puede ver lo que ocurre si el primer jugador cambia su estrategia si el resultado del lanzamiento de su dado es un 2. Es fácil comprobar que ocurriría lo mismo (disminuye el pago esperado, aunque no necesariamente en la misma cantidad) si cambia otra cualquiera de sus estrategias individuales (qué hace si el resultado del lanzamiento de su dado es i). Evidentemente si cambia más de una de dichas estrategias individuales el pago esperado disminuiría todavía más.

Análogamente, si el jugador J_2 modifica mínimamente su estrategia, suponiendo que el jugador J_1 no lo haga, el pago esperado aumenta o permanece igual. Por ejemplo, en el cuadro 4.3 puede ver lo que ocurre si el segundo jugador cambia su estrategia si el primer jugador apuesta a que sale menos de 8 y el resultado del lanzamiento del dado del segundo jugador es un 1, y en el cuadro 4.4 puede ver lo que ocurre si el segundo jugador cambia su estrategia si el primer jugador apuesta a que sale más de 8 y el resultado del lanzamiento del dado del segundo jugador es un 5. Se puede comprobar que ocurriría lo mismo (aumenta el pago esperado, aunque no necesariamente en la misma cantidad) si cambia otra cualquiera de sus estrategias individuales, o si cambia varias de ellas.

		J_2				$RRRRAA\,AARRRR$		
		1	2	3	4	5	6	
J_1	$1m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$A(50)$	100
	$2m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$A(0)$	50
	$3m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(0)$	$A(-50)$	−50
	$4m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	−100
	$5m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	−100
	$6M$	$A(-50)$	$A(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	−50
		−50	0	0	0	0	−100	−150

Cuadro 4.1: Pago esperado para el par de estrategias $(mmmmmM, RRRRAA\,AARRRR)$.

		J_2				$RRRRAA\,AARRRR$		
		1	2	3	4	5	6	
J_1	$1m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$A(50)$	100
	$2M$	$A(-50)$	$A(-50)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	−100
	$3m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(0)$	$A(-50)$	−50
	$4m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	−100
	$5m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	−100
	$6M$	$A(-50)$	$A(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	−50
		−100	−50	0	0	−50	−100	−300

Cuadro 4.2: Pago esperado para el par de estrategias $(mMmmmM, RRRRAA\,AARRRR)$.

		J_2				$ARRRAA\,AARRRR$		
		1	2	3	4	5	6	
J_1	$1m$	$A(50)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$A(50)$	150
	$2m$	$A(50)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$A(0)$	100
	$3m$	$A(50)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(0)$	$A(-50)$	0
	$4m$	$A(50)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	−50
	$5m$	$A(50)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	−50
	$6M$	$A(-50)$	$A(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	−50
		200	0	0	0	0	−100	100

Cuadro 4.3: Pago esperado para el par de estrategias $(mmmmmM, ARRRAA\,AARRRR)$.

		J_2				$RRRRAA\,AARRAR$		
		1	2	3	4	5	6	
J_1	$1m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$A(50)$	100
	$2m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$A(0)$	50
	$3m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(0)$	$A(-50)$	-50
	$4m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	-100
	$5m$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(-50)$	$A(-50)$	-100
	$6M$	$A(-50)$	$A(0)$	$R(0)$	$R(0)$	$A(50)$	$R(0)$	0
		-50	0	0	0	50	-100	-100

Cuadro 4.4: Pago esperado para el par de estrategias $(mmmmmM, ARRRAA\,AARRAR)$.

Problema 4.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-1,1) & (0,0) \\ (1,-1) & (0,1) \\ (-1,-1) & (1,1) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 4.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la primera fila, que está dominada la segunda. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow p - (1-p) = 1 - p \Longrightarrow p = 2(1-p) \Longrightarrow 3p = 2 \Longrightarrow p = \frac{2}{3};$$
$$v_1 = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

- La matriz de pagos del jugador J_2 es
$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la tercera columna, que está dominada la segunda. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow p = -p + (1-p) \Longrightarrow 2p = 1 - p \Longrightarrow 3p = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{3};$$
$$v_2 = \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, pero como se aprecia en la figura 4.2 el único punto de la región de pagos que es óptimo Pareto es el punto $(1,1)$, por lo que dicho punto ha de ser el par de arbitraje.

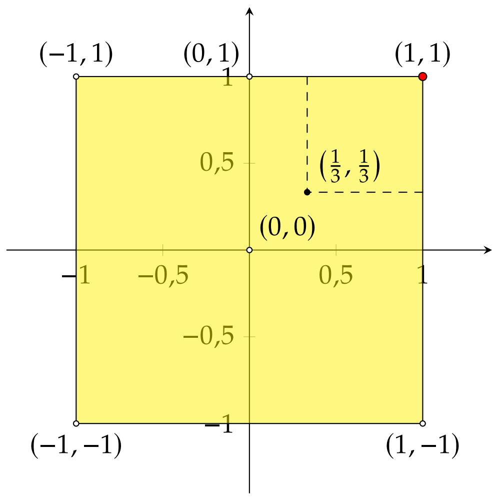


Figura 4.2: Región de pagos para el problema 4.2.

Alternativamente, y dado que la región de pagos es simétrica y que el punto de *statu quo* $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ verifica $u_0 = v_0 = \frac{1}{3}$, el axioma 6 de Nash (Morris, 1994 : 135) también nos permite asegurar que el par de arbitraje es el punto $(1, 1)$.

Problema 4.3. El juego tripersonal de *parejas* es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si P_1 elige a P_2, y P_2 elige a P_1, entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de $\frac{1}{2}$, mientras la persona que no entra en la pareja recibe -2.

Si no se forma pareja, por ejemplo, si P_1 elige a P_2, P_2 elige a P_3, y P_3 elige a P_1, entonces cada uno recibe un pago de cero.

Probar que es de suma no nula en su forma normal, pero es de suma cero en su forma de función característica.

Solución del problema 4.3. Estamos ante un juego tripersonal simétrico. Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles. Estudiamos por separado las distintas coaliciones que se pueden formar.

- Si se forma la gran coalición $\{P_1, P_2, P_3\}$, la estrategia óptima es evitar que se forme pareja con lo que en ese caso el pago es $v_{123} = 0$. En otro caso, si se forma una pareja, el pago sería
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1.$$
- Consideramos, por ejemplo, las coaliciones de uno y dos jugadores $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$, para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 4.5.

M		$\{P_2, P_3\}$			
		11	12	31	32
$\{P_1\}$	2	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$(0, 0)$	$(-2, 1)$
	3	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$(0, 0)$	$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$	$(-2, 1)$

Cuadro 4.5: Forma normal del juego del problema 4.3 para las coaliciones $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{P_1\}$ es

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

La matriz M_1 tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{14} y m_{24}, por lo que $v_1 = m_{14} = m_{24} = -2$.

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{P_2, P_3\}$ es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz M_{23} tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{41} y m_{42}, por lo que $v_{23} = m_{41} = m_{42} = 1$.

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu\big(\{1\}\big) = \nu\big(\{2\}\big) = \nu\big(\{3\}\big) = -2; \quad \nu\big(\{1,2\}\big) = \nu\big(\{1,3\}\big) = \nu\big(\{2,3\}\big) = 1; \quad \nu\big(\{1,2,3\}\big) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es esencial, puesto que se verifica

$$\nu\big(\{1,2,3\}\big) = 0 \neq -6 = \sum_{n=1}^{3} \nu\big(\{n\}\big).$$

Sin embargo, el juego no es de suma cero (ni siquiera de suma constante) en su forma de función característica, puesto que

$$\nu\big(\{1\}\big) + \nu\big(\{2,3\}\big) = -2 + 1 = -1 \neq 0 = \nu\big(\{1,2,3\}\big).$$

Examen 5. Enero de 2015

Problema 5.1. Consideramos el siguiente juego de cartas, con solo dos jugadores J_1 y J_2 y un mazo de cartas que consta de un 50 % de *Ases* y un 50 % de *Reyes*. Antes de repartir las cartas, cada jugador pone una cierta cantidad de dinero a, llamada la *apuesta inicial*, en el centro de la mesa, llamado el *bote*.

A cada jugador se le reparte una carta boca abajo, que ni el propio jugador ni su oponente ven. En este momento, un jugador puede apostar una cantidad b (que se deposita en el *bote*) o pasar. Los jugadores toman esta decisión simultáneamente. Una vez concluida la fase de apuestas, se acaba el juego.

Si un jugador apuesta y el otro pasa, el jugador que apuesta se lleva el *bote*. Si los dos jugadores apuestan o los dos pasan, ambos descubren sus cartas. El jugador con la carta más alta se lleva el *bote*, siendo el *As* superior al *Rey*. Si ambos jugadores tienen cartas iguales, se reparten el *bote*.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 5.1. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 5.1.

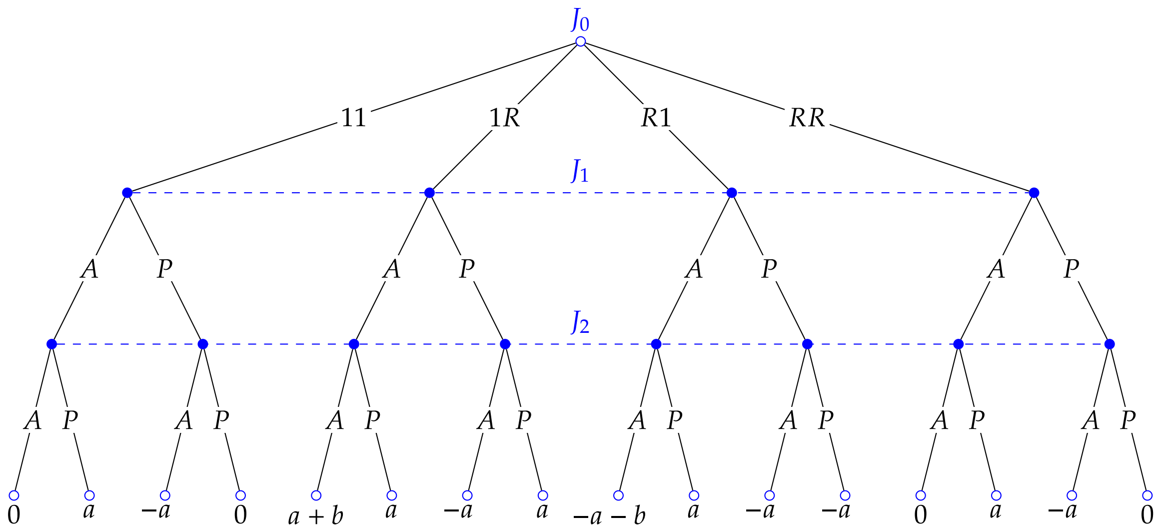


Figura 5.1: Forma extensiva del juego del problema 5.1.

Tras el movimiento del jugador J_0 (la extracción de ambas cartas, desconocidas para los jugadores J_1 y J_2), los jugadores J_1 y J_2 tienen solo dos estrategias posibles, pueden apostar (A) o pasar (P).

$$\Sigma_1 = \{A, P\}, \quad \Sigma_2 = \{A, P\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados[1]

$$\pi(A,A)=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot(a+b)+\frac{1}{4}\cdot(-a-b)+\frac{1}{4}\cdot 0=0;\quad \pi(A,P)=\frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{4}\cdot a=a;$$

$$\pi(P,A)=\frac{1}{4}\cdot(-a)+\frac{1}{4}\cdot(-a)+\frac{1}{4}\cdot(-a)+\frac{1}{4}\cdot(-a)=-a;\quad \pi(P,P)=\frac{1}{4}\cdot 0+\frac{1}{4}\cdot a+\frac{1}{4}\cdot(-a)+\frac{1}{4}\cdot 0=0.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 5.1.

M		J_2	
		A	P
J_1	A	0	a
	P	$-a$	0

Cuadro 5.1: Forma normal del juego del problema 5.1.

Resolución:

- El elemento $m_{11}=0$ es un punto de silla, por lo que la solución es inmediata. Ambos jugadores deben apostar siempre, y en ese caso $v(M)=m_{11}=0$.

Problema 5.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-\frac{1}{2},0) & (-\frac{1}{2},-4) \\ (1,2) & (-2,4) \\ (4,-4) & (-\frac{1}{2},0) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 5.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -2 \\ 4 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{12} y m_{32}, por lo que $v_1=m_{12}=m_{32}=-\frac{1}{2}$.

- La matriz de pagos del jugador J_2 es
$$M_2=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p)=\pi_2(p)\Longrightarrow -4(1-p)=-4p\Longrightarrow p=1-p\Longrightarrow p=\frac{1}{2};$$
$$v_2=-4\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)=-4\cdot\frac{1}{2}=-2.$$

[1]Estamos suponiendo que todas las posibles combinaciones de cartas extraídas son equiprobables, lo cual no tiene por qué ser cierto. Sería aproximadamente así si el mazo estuviese formado por un número muy elevado de cartas (la mitad de cada tipo). Pero sin conocer el número de cartas del mazo resulta imposible calcular las probabilidades necesarias.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 5.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(v + 2).$$

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ al punto $(1, 2)$. La relación entre las variables es

$$v = -\frac{2}{3}u + \frac{8}{3},$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_1(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}u + \frac{8}{3} + 2\right) = -\frac{2}{3}u^2 + \frac{13}{3}u + \frac{7}{3}.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{13}{4}, \frac{1}{2}\right)$, que se encuentra fuera del conjunto de negociación.

$$g_1'(u) = -\frac{4}{3}u + \frac{13}{3};$$

$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -\frac{4}{3}u + \frac{13}{3} = 0 \Longrightarrow u = \frac{13}{4};$$

$$v = -\frac{2}{3} \cdot \frac{13}{4} + \frac{8}{3} = \frac{1}{2}.$$

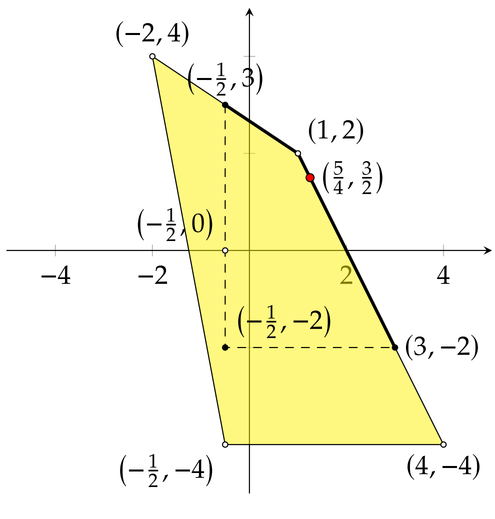


Figura 5.2: Región de pagos para el problema 5.2.

- Del punto $(1, 2)$ al punto $(3, -2)$. La relación entre las variables es

$$v = -2u + 4,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_2(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(-2u + 4 + 2) = -2u^2 + 5u + 3.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

$$g_2'(u) = -4u + 5;$$

$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -4u + 5 = 0 \Longrightarrow u = \frac{5}{4};$$
$$v = -2 \cdot \frac{5}{4} + 4 = \frac{3}{2}.$$

Dado que la función g_1 crece para valores de u menores 1, el par de arbitraje es el punto $\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

Problema 5.3. Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 350 000 euros. Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 700 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 775 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* de este juego.

Solución del problema 5.3. Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca P, la empresa que propone la utilización de la finca como polígono industrial I, y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca V. La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu(\{P\}) = 350; \quad \nu(\{I\})) = \nu(\{V\}) = 0;$$
$$\nu(\{P, I\}) = 700; \quad \nu(\{P, V\}) = 775; \quad \nu(\{I, V\}) = 0; \quad \nu(\{P, I, V\}) = 775.$$

Sea $\vec{x}(x_P, x_I, x_V)$ una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$x_P + x_I + x_V = \nu(\{P, I, V\}) = 775; \tag{5.1}$$
$$x_P \geqslant \nu(\{P\}) = 350; \tag{5.2}$$
$$x_I \geqslant \nu(\{I\}) = 0; \tag{5.3}$$
$$x_V \geqslant \nu(\{V\}) = 0; \tag{5.4}$$
$$x_P + x_I \geqslant \nu(\{P, I\}) = 700; \tag{5.5}$$
$$x_P + x_V \geqslant \nu(\{P, V\}) = 775; \tag{5.6}$$
$$x_I + x_V \geqslant \nu(\{I, V\}) = 0. \tag{5.7}$$

De la igualdad (5.1) y las desigualdades (5.3) y (5.6) se deduce

$$x_I = 0, \quad x_P + x_V = 775.$$

Imponiendo además la desigualdad (5.5),

$$x_P \geqslant 700.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas las condiciones anteriores, y que se representa en la figura 5.3.

$$\{(x_P, 0, 775 - x_P) : \ 700 \leqslant x_P \leqslant 775\}.$$

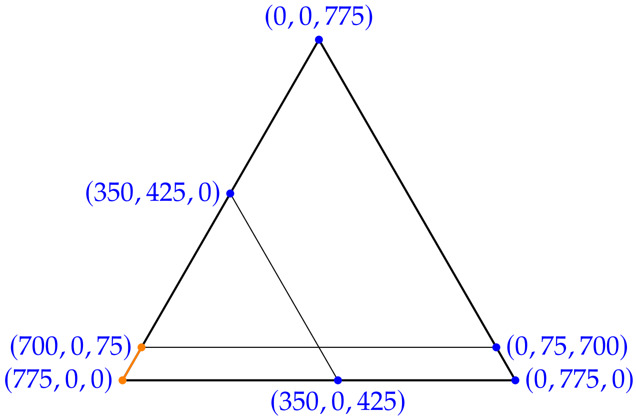


Figura 5.3: Obtención gráfica del *core* para el juego del problema problema 5.3.

Examen 6. Febrero de 2015

Problema 6.1. Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver el siguiente juego:

El jugador J_1, elige un valor $x \in \{1, 2\}$. A continuación, con probabilidad $\frac{3}{4}$ le comunica a J_2 su elección y, con probabilidad $\frac{1}{4}$ le comunica lo contrario de lo que eligió.

Por otra parte, J_2, que no sabe si la información que J_1 le ha dado es verdadera o falsa, elige otro valor $y \in \{1, 2\}$.

Si $x = y$ entonces J_1 recibe una unidad monetaria de J_2. En caso contrario, J_2 recibe una unidad monetaria de J_1.

Solución del problema 6.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. En la primera etapa J_1 elige un número $x \in \{1, 2\}$, siendo por tanto su conjunto de estrategias

$$\Sigma_1 = \{1, 2\}.$$

En la segunda etapa, el azar, que denominaremos J_0, elige un número $z \in \{1, 2\}$ con probabilidades

$$\mathcal{P}(z = x) = \frac{3}{4}, \quad \mathcal{P}(z = 3 - x) = \frac{1}{4}.$$

Por último, el jugador J_2, conociendo el número z pero no el número x, elige a su vez un número $y \in \{1, 2\}$. Así, el conjunto de estrategias para J_2 es

$$\Sigma_2 = \{11, 12, 21, 22\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia 21 indica que si $z = 1$ entonces J_2 elegirá $y = 2$, mientras que si $z = 2$ entonces J_2 elegirá $y = 1$.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 6.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{1, 2\}, \Sigma_2 = \{11, 12, 21, 22\}\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(1, 11) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = 1; \quad \pi(1, 12) = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{2};$$

$$\pi(1, 21) = \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot 1 = -\frac{1}{2}; \quad \pi(1, 22) = \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot (-1) = -1;$$

$$\pi(2, 11) = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -1; \quad \pi(2, 12) = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{1}{2};$$

$$\pi(2, 21) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = -\frac{1}{2}; \quad \pi(2, 22) = \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 1 = 1.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 6.1.

M		J_2			
		11	12	21	22
J_1	1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
	2	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1

Cuadro 6.1: Forma normal del juego del problema 6.1.

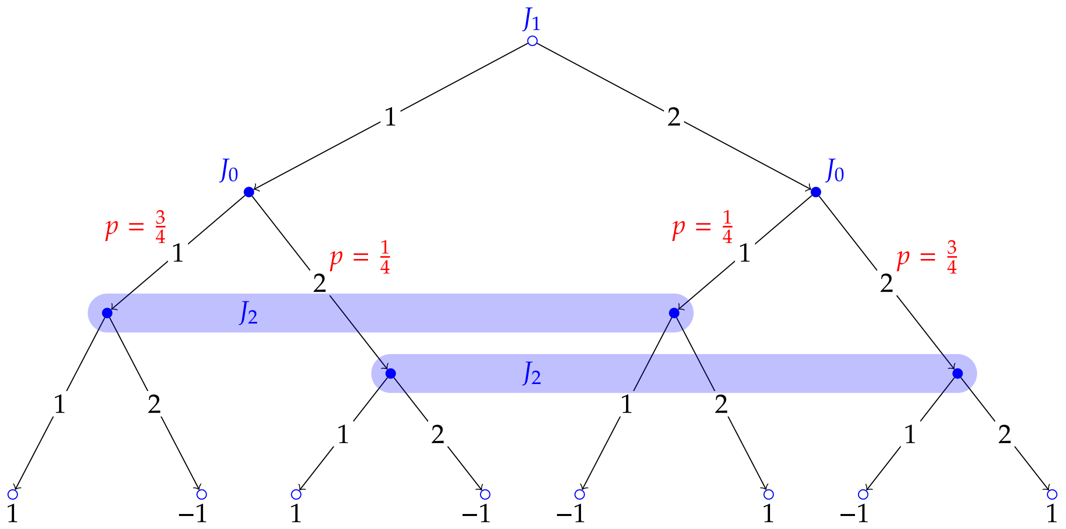


Figura 6.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 6.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.

- La columna 3 domina a la columna 2. Eliminamos la columna dominada, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, con

$$\pi_1(p) = p - (1-p) = 2p - 1; \quad \pi_2(p) = -\frac{1}{2}p - \frac{1}{2}(1-p) = -\frac{1}{2}; \quad \pi_3(p) = -p + (1-p) = 1 - 2p.$$

  Representamos en la figura 6.2 las funciones lineales $\pi_j(p)$, y comprobamos que son máximos del mínimo los puntos de intersección de $\pi_1(p)$ y $\pi_2(p)$, y de $\pi_2(p)$ y $\pi_3(p)$, así como cualquiera de los puntos intermedios. Dichos puntos de intersección son,

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 2p - 1 = -\frac{1}{2} \Longrightarrow p = \frac{1}{4};$$
$$\pi_2(p) = \pi_3(p) \Longrightarrow -\frac{1}{2} = -2p + 1 \Longrightarrow p = \frac{3}{4}.$$

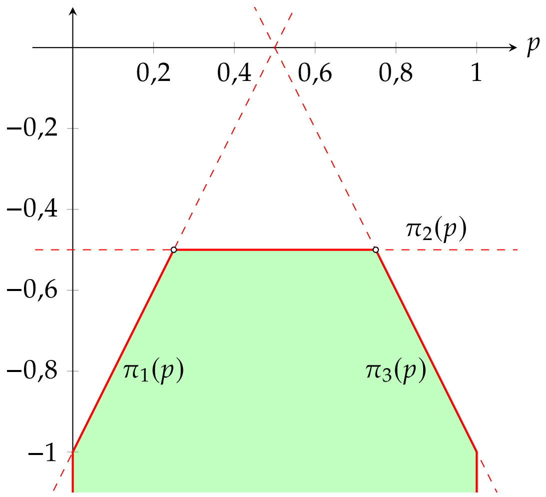


Figura 6.2: Máximo del mínimo para el jugador J_1.

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador columna J_2, según la estrategia elegida por el jugador J_1 al menos una de las columnas 1 o 3 no es activa, y se puede eliminar. En ambos casos obtenemos una solución equivalente. Si eliminamos la columna 1 la nueva matriz reducida es

$$M^{**} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

y para esta matriz una estrategia mixta será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, y ha de satisfacer

$$\pi^2(q) = \pi^3(q) \Longrightarrow -\frac{1}{2}q - (1-q) = -\frac{1}{2}q + (1-q) \Longrightarrow q = 1.$$

Y si eliminamos la fila 3 la matriz reducida es

$$M^{***} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y para esta matriz una estrategia mixta será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow q - \frac{1}{2}(1-q) = -q - \frac{1}{2}(1-q) \Longrightarrow q = 0.$$

- Trasladando los resultados obtenidos a la matriz M (en cualquiera de los dos casos obtenidos en el apartado anterior la estrategia mixta obtenida trasladada a la matriz M deja el mismo resultado), la solución hallada es

$$\vec{p} = (p, 1-p),\ \frac{1}{4} \leqslant p \leqslant \frac{3}{4}; \quad \vec{q} = (0, 0, 1, 0);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= -\frac{1}{2} \\ v_2(M) &= -\frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = -\frac{1}{2}.$$

Problema 6.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (5,2) & (8,6) & (2,9) \\ (2,2) & (10,-1) & (5,2) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 6.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 2 \\ 2 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 5p + 2(1-p) = 2p + 5(1-p) \Longrightarrow 3p = 3(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$
$$v_1 = 5 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}.$$

- La matriz de pagos del jugador J_2 es
$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$
Tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{12} y m_{32}, y por tanto $v_2 = m_{12} = m_{32} = 2$.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 6.3, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función
$$g(u, v) = \left(u - \frac{7}{2}\right)(v - 2).$$

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto $\left(\frac{7}{2}, \frac{33}{4}\right)$ al punto $(8, 6)$. La relación entre las variables es
$$v = -\frac{1}{2}u + 10,$$
y sustituida en la función g permite obtener
$$g_1(u) = \left(u - \frac{7}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}u + 10 - 2\right) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{39}{4}u - 28.$$
Y su máximo es el punto $\left(\frac{39}{4}, \frac{41}{8}\right)$, que en este caso se alcanza fuera del conjunto de negociación.
$$g_1'(u) = -u + \frac{39}{4};$$
$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -u + \frac{39}{4} = 0 \Longrightarrow u = \frac{39}{4};$$
$$v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{39}{4} + 10 = \frac{41}{8}.$$

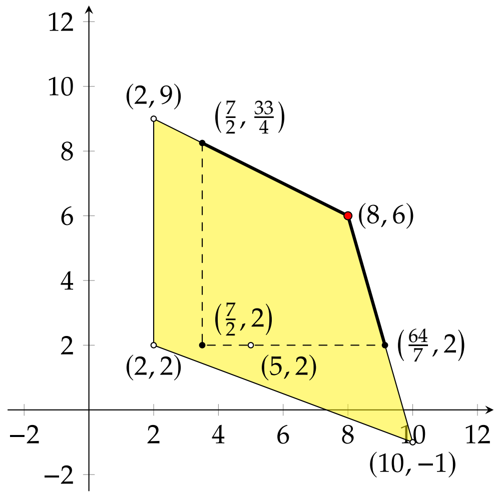


Figura 6.3: Región de pagos para el problema 6.2.

- Del punto $(8, 6)$ al punto $\left(\frac{64}{7}, 2\right)$. La relación entre las variables es

$$v = -\frac{7}{2}u + 34,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_2(u) = \left(u - \frac{7}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}u + 34 - 2\right) = -\frac{7}{2}u^2 + \frac{177}{4}u - 112.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{177}{28}, \frac{95}{8}\right)$, que también se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g_2'(u) = -7u + \frac{177}{4};$$

$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -7u + \frac{177}{4} = 0 \Longrightarrow u = \frac{177}{28};$$

$$v = -\frac{7}{2} \cdot \frac{177}{28} + 34 = \frac{95}{8}.$$

Dado que la función g_1 crece para valores de u menores que 8, y que la función g_2 decrece para valores de u mayores que 8, el par de arbitraje es el punto $(8, 6)$.

Problema 6.3. En un departamento universitario hay tres investigadores consolidados que trabajan en la misma línea de investigación. Se disponen a presentar solicitudes para optar a financiación de proyectos de investigación.

Si el doctor P_1 presenta de manera individual la solicitud, lo previsible es que le concedan 30 000 euros, el doctor P_2 no conseguirá nada si va solo, mientras que la doctora P_3 conseguiría individualmente 50 000 euros. Si los doctores P_1 y P_2 presentan un proyecto conjunto obtendrán una financiación de 50 000 euros, P_1 y P_3 obtendrían 80 000 euros, y P_2 y P_3 obtendrían también 80 000 euros. Si los tres investigadores solicitan el proyecto de manera conjunta, previsiblemente obtendrían 100 000 euros. Cada investigador solo puede figurar en una solicitud.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el valor de Shapley para este juego.

Solución del problema 6.3. Estamos ante un juego tripersonal, en el que los jugadores son los investigadores P_1, P_2 y P_3. La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$v(\varnothing) = 0; \quad v\big(\{1\}\big) = 30; \quad v\big(\{2\}\big) = 0; \quad v\big(\{3\}\big) = 50;$$

$$v\big(\{1,2\}\big) = 50; \quad v\big(\{1,3\}\big) = v\big(\{2,3\}\big) = 80; \quad v\big(\{1,2,3\}\big) = 110.$$

Obsérvese que en el caso de la gran coalición, aunque estén dispuestos a compartir las cantidades concedidas, no es interesante que presenten el proyecto de forma conjunta. Si lo hacen así obtendrían 100 000 €, mientras que si P_1 presenta su proyecto en solitario y P_2 y P_3 lo hacen conjuntamente recibirían un total de 30 000 €+80 000 €=110 000 €.

Para calcular el valor de Shapley, estudiamos cada jugador por separado.

- Jugador P_1.

$$\begin{aligned}
\delta\big(1,\{1\}\big) &= v\big(\{1\}\big) - v(\varnothing) = 30 - 0 = 30;\\
\delta\big(1,\{1,2\}\big) &= v\big(\{1,2\}\big) - v\big(\{2\}\big) = 50 - 0 = 50;\\
\delta\big(1,\{1,3\}\big) &= v\big(\{1,3\}\big) - v\big(\{3\}\big) = 80 - 50 = 30;\\
\delta\big(1,\{1,2,3\}\big) &= v\big(\{1,2,3\}\big) - v\big(\{2,3\}\big) = 110 - 80 = 30;
\end{aligned}$$

$$\phi_1 = \sum_{\mathcal{S}\ni 1} \frac{(3-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(1,\mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!}\cdot 30 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 50 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 30 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 30 = \frac{100}{3}.$$

- Jugador P_2.

$$\begin{aligned}
\delta\big(2,\{2\}\big) &= v\big(\{2\}\big) - v(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(2,\{1,2\}\big) &= v\big(\{1,2\}\big) - v\big(\{1\}\big) = 50 - 30 = 20;\\
\delta\big(2,\{2,3\}\big) &= v\big(\{2,3\}\big) - v\big(\{3\}\big) = 80 - 50 = 30;\\
\delta\big(2,\{1,2,3\}\big) &= v\big(\{1,2,3\}\big) - v\big(\{1,3\}\big) = 110 - 80 = 30;
\end{aligned}$$

$$\phi_2 = \sum_{\mathcal{S}\ni 2} \frac{(3-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(2,\mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!}\cdot 0 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 20 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 30 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 30 = \frac{55}{3}.$$

- Jugador P_3.

$$\begin{aligned}
\delta\big(3,\{3\}\big) &= v\big(\{3\}\big) - v(\varnothing) = 50 - 0 = 50;\\
\delta\big(3,\{1,3\}\big) &= v\big(\{1,3\}\big) - v\big(\{1\}\big) = 80 - 30 = 50;\\
\delta\big(3,\{2,3\}\big) &= v\big(\{2,3\}\big) - v\big(\{2\}\big) = 80 - 0 = 80;\\
\delta\big(3,\{1,2,3\}\big) &= v\big(\{1,2,3\}\big) - v\big(\{1,2\}\big) = 110 - 50 = 60;
\end{aligned}$$

$$\phi_3 = \sum_{\mathcal{S}\ni 3} \frac{(3-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(3,\mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!}\cdot 50 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 50 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 80 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 60 = \frac{175}{3}.$$

Por tanto, el vector de Shapley es $\vec{\phi}\,\left(\frac{100}{3}, \frac{55}{3}, \frac{175}{3}\right)$.

Examen 7. Septiembre de 2015 – Convocatoria ordinaria

Problema 7.1. Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver el siguiente juego:

El jugador J_1 puede elegir unirse a un grupo de trabajo (U) o seguir solo (S).

A continuación lanza una moneda con $\mathcal{P}(C) = \frac{1}{4}$ y $\mathcal{P}(X) = \frac{3}{4}$.

Después el jugador J_2 sin conocer la elección de J_1 pero viendo el resultado de la moneda, elige unirse al grupo (U) o seguir solo (S).

La función de pago es:

$$\begin{array}{rclrcl} M(U,C,U) & = & 4, & M(S,C,U) & = & 3, \\ M(U,C,S) & = & -2, & M(S,C,S) & = & -5, \\ M(U,X,U) & = & 0, & M(S,X,U) & = & 1, \\ M(U,X,S) & = & -1, & M(S,X,S) & = & 2. \end{array}$$

Solución del problema 7.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 7.1.

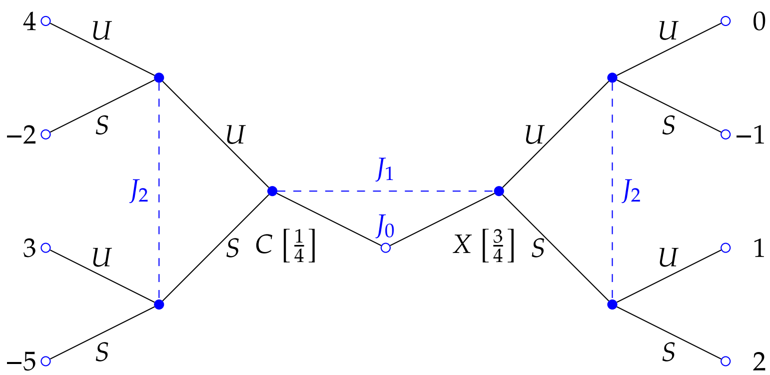


Figura 7.1: Forma extensiva del juego del problema 7.1.

Anteponemos el movimiento del jugador J_0, que lanza la moneda. Tras dicho movimiento el jugador J_1, sin conocer el resultado del lanzamiento, elige su movimiento en el conjunto $\{U, S\}$. Por último, tras el movimiento del jugador J_1, el jugador J_2 se encontrará ante dos posibles situaciones según el resultado del lanzamiento de la moneda, puesto que no conoce la elección de J_1. Una estrategia para J_2 sería, por ejemplo, US, que indica que si en la moneda se obtuvo cara C, el jugador J_2 elegirá U; mientras que si en la moneda se obtuvo cruz X, el jugador J_2 elegirá S. Así los conjuntos de estrategias para ambos jugadores serán

$$\Sigma_1 = \{U, S\}, \quad \Sigma_2 = \{UU, US, SU, SS\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(U, UU) = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot 0 = 1; \quad \pi(U, US) = \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{4};$$

$$\pi(U,SU) = \frac{1}{4}\cdot(-2) + \frac{3}{4}\cdot 0 = -\frac{1}{2}; \quad \pi(U,SS) = \frac{1}{4}\cdot(-2) + \frac{3}{4}\cdot(-1) = -\frac{5}{4};$$

$$\pi(S,UU) = \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{3}{4}\cdot 1 = \frac{3}{2}; \quad \pi(S,US) = \frac{1}{4}\cdot 3 + \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{9}{4};$$

$$\pi(S,SU) = \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{3}{4}\cdot 1 = -\frac{1}{2}; \quad \pi(S,SS) = \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{3}{4}\cdot 2 = \frac{1}{4};$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 7.1.

M		J_2			
		UU	US	SU	SS
J_1	U	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$
	S	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Cuadro 7.1: Forma normal del juego del problema 7.1.

Resolución:

- La matriz M tiene un punto de silla, que es el elemento (S, SU). En consecuencia el jugador J_1 debe elegir siempre S; y el jugador J_2 debe elegir S si en la moneda ha salid cara C, y U si en la moneda ha salido cruz X. En ese caso el valor del juego es
$$v(M) = -\frac{1}{2}.$$

Problema 7.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-2,2) & (0,0) \\ (2,-2) & (0,2) \\ (-2,-2) & (2,2) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 7.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la primera fila, que está dominada cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p) = 2p - 2(1-p) = 2(1-p) \Longrightarrow 2p = 4(1-p) \Longrightarrow p = \frac{2}{3};$$
$$v_1 = 2\cdot\frac{2}{3} - 2\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) = 2\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

- La matriz de pagos del jugador J_2 es
$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la tercera columna, que está dominada por la segunda. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 2p = -2p + 2(1-p) \Longrightarrow 4p = 2(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{3};$$

$$v_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} = -2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 7.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u,v) = \left(u - \frac{2}{3}\right)\left(v - \frac{2}{3}\right).$$

Dado que la región de pagos es simétrica y que el punto de *statu quo* $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ verifica $u_0 = v_0 = \frac{2}{3}$, el axioma 6 de Nash (Morris, 1994 : 135) nos permite asegurar que el par de arbitraje es el punto $(2,2)$. Otra forma de llegar a la misma conclusión sería viendo que el conjunto de negociación (de puntos óptimos Pareto) está formado únicamente por dicho punto $(2,2)$ por lo que necesariamente ese ha de ser el par de arbitraje.

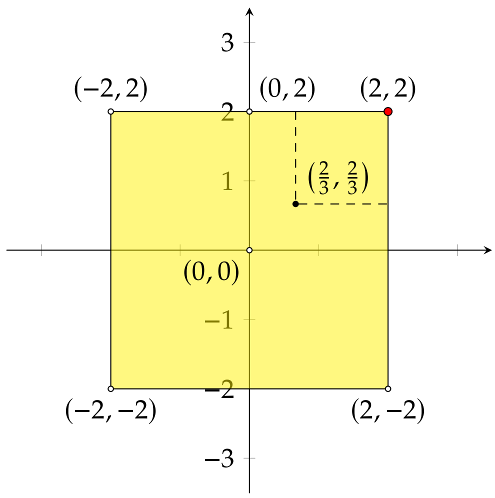


Figura 7.2: Región de pagos para el problema 7.2.

Problema 7.3. Tres jugadores pueden elegir uno de los colores: blanco, negro y rojo. Ninguno sabe lo que han elegido los demás. A continuación enseñan su elección y se establecen los pagos. Si los tres eligen lo mismo no se hace ningún pago, en caso contrario, se da la siguiente relación:

Rojo gana a blanco, blanco gana a negro, y negro gana a rojo 60 euros.

Calcular la función característica y comprobar si es o no un juego esencial.

M		$\{J_2, J_3\}$								
		BB	BN	BR	NB	NN	NR	RB	RN	RR
$\{J_1\}$	B	0	60	−60	60	120	0	−60	0	−120
	N	−120	−60	0	−60	0	60	0	60	120
	R	120	0	60	0	−120	−60	60	−60	0

Cuadro 7.2: Forma normal del juego del problema 7.3 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$.

Solución del problema 7.3. Estamos ante un juego tripersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles. Entonces, las únicas coaliciones relevantes son similares a $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$ (por ejemplo). Si se forman dichas coaliciones, la forma normal del juego se recoge en el cuadro 7.2.

La matriz M no tiene puntos de silla, pero la columna 2 domina a la columna 4, la columna 3 domina a la columna 7 y la columna 6 domina a la columna 8. Eliminando las columnas dominadas obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 & -60 & 120 & 0 & -120 \\ -120 & -60 & 0 & 0 & 60 & 120 \\ 120 & 0 & 60 & -120 & -60 & 0 \end{pmatrix}.$$

Una estrategia mixta para la coalición $\{J_1\}$ será de la forma $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$, y ha de maximizar v sujeta a las condiciones

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1; \tag{7.1}$$
$$-120p_2 + 120p_3 - v \geqslant 0; \tag{7.2}$$
$$60p_1 - 60p_2 - v \geqslant 0; \tag{7.3}$$
$$-60p_1 + 60p_3 - v \geqslant 0; \tag{7.4}$$
$$120p_1 - 120p_3 - v \geqslant 0; \tag{7.5}$$
$$60p_2 - 60p_3 - v \geqslant 0; \tag{7.6}$$
$$-120p_1 + 120p_2 - v \geqslant 0; \tag{7.7}$$
$$p_1, p_2, p_3 \geqslant 0. \tag{7.8}$$

Por ejemplo, si sumamos dos veces la inecuación (7.4) a la inecuación (7.5) obtenemos

$$-3v \geqslant 0 \Longrightarrow v \leqslant 0.$$

Como en la práctica queremos maximizar v, vamos a comprobar si $v = 0$ es una posible solución del problema, puesto que en ese caso sería la solución buscada. Supuesto $v = 0$, el problema anterior se transforma en encontrar $\vec{p}(p_1, p_2, p_3)$ verificando

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1; \\ -p_2 + p_3 &\geqslant 0; \\ p_1 - p_2 &\geqslant 0; \\ -p_1 + p_3 &\geqslant 0; \\ p_1 - p_3 &\geqslant 0; \\ p_2 - p_3 &\geqslant 0; \\ -p_1 + p_2 &\geqslant 0; \\ p_1, p_2, p_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Inmediatamente se comprueba que una solución del nuevo problema es

$$p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3},$$

por lo que el valor del juego es $v = 0$.

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, tenemos suficiente información para dar la función característica.

$$\nu(\varnothing) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = \nu(\{1,2\}) = \nu(\{1,3\}) = \nu(\{2,3\}) = \nu(\{1,2,3\}) = 0.$$

Por tanto, estamos ante un juego no esencial y de suma cero en su forma de función característica.

Examen 8. Septiembre de 2015 – Convocatoria de reserva

Problema 8.1. Resolver el siguiente juego:

Dos jugadores enseñan cada uno, uno o dos dedos, mientras que simultáneamente indican el número de dedos que el contrario va a sacar. Si solo uno de ellos acierta, gana una cantidad igual a la suma de los dedos enseñados por ambos. Si aciertan ambos o bien ninguno, hay empate.

Solución del problema 8.1. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma cero con información imperfecta. La forma extensiva se representa en la figura 8.1.

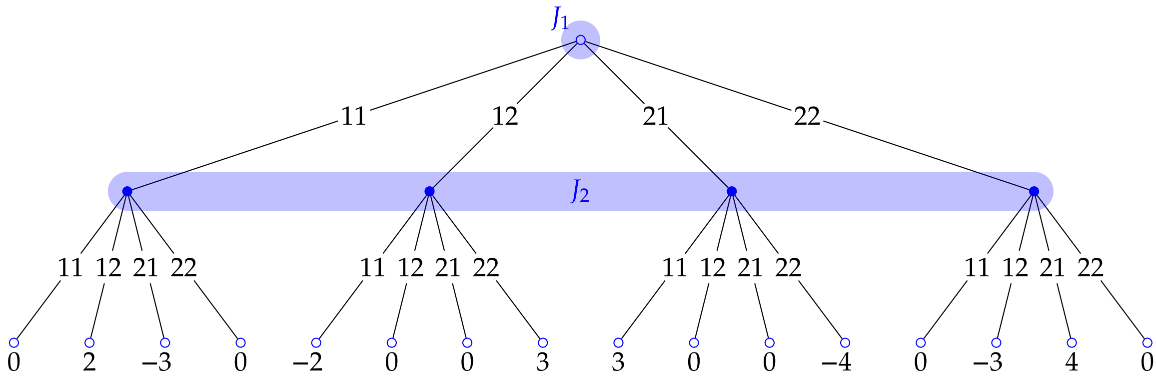


Figura 8.1: Forma extensiva del juego del problema 8.1.

M		J_2			
		11	12	21	22
J_1	11	0	2	−3	0
	12	−2	0	0	3
	21	3	0	0	−4
	22	0	−3	4	0

Cuadro 8.1: Forma normal del juego del problema 8.1.

Si cualquiera de los dos jugadores elige como estrategia ij esto indica que enseña $i \in \{1, 2\}$ dedos y que predice que su contrincante va a enseñar $j \in \{1, 2\}$ dedos. Ninguno de los dos jugadores conoce de antemano ni los dedos que va a enseñar su contrincante ni la predicción que este va a hacer. Por tanto, el conjunto de estrategias para ambos es

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{11, 12, 21, 22\}.$$

Como no hay movimientos aleatorios, dichas estrategias permiten obtener directamente los pagos en cada caso, por lo que tenemos los datos para escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 8.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La matriz M tampoco tiene filas ni columnas dominadas.
- Una estrategia para el jugador J_1 (y también para el jugador J_2, dado que el juego es simétrico) será de la forma $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$, y ha de satisfacer

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \\ -2p_2 + 3p_3 \geqslant 0, \\ 2p_1 - 3p_4 \geqslant 0, \\ -3p_1 + 4p_4 \geqslant 0, \\ 3p_2 - 4p_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Eliminamos, por ejemplo, la última inecuación, y convertimos las demás en ecuaciones, para obtener el sistema

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1, \\ -2p_2 + 3p_3 = 0, \\ 2p_1 - 3p_4 = 0, \\ -3p_1 + 4p_4 = 0. \end{cases}$$

La solución es

$$p_1 = 0, \quad p_2 = \frac{3}{5}, \quad p_3 = \frac{2}{5}, \quad p_4 = 0.$$

Y dado que satisface también la inecuación no utilizada, esta es la solución del juego. Por tanto,

$$\vec{p} = \vec{q} = \left(0, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 0\right), \quad v(M) = 0.$$

Problema 8.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (4,2) & (6,3) & (2,9) \\ (2,2) & (8,-3) & (4,2) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 8.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda columna, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 4p + 2(1-p) = 2p + 4(1-p) \Longrightarrow 2p = 2(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$

$$v_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 3.$$

- La matriz de pagos del jugador J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -3 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{12} y m_{32}, y por tanto $v_2 = m_{12} = m_{32} = 2$.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 8.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u,v) = (u-3)(v-2).$$

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto $\left(3, \frac{15}{2}\right)$ al punto $(6,3)$. La relación entre las variables es

$$v = -\frac{3}{2}u + 12,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_1(u) = (u-3)\left(-\frac{3}{2}u + 12 - 2\right) = -\frac{3}{2}u^2 + \frac{29}{2}u - 30.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{29}{6}, \frac{19}{4}\right)$.

$$g_1'(u) = -3u + \frac{29}{2};$$

$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -3u + \frac{29}{2} = 0 \Longrightarrow u = \frac{29}{6};$$

$$v = -\frac{3}{2} \cdot \frac{29}{2} + 12 = \frac{19}{4}.$$

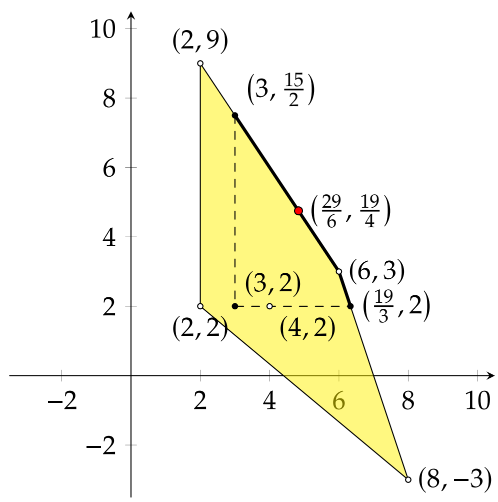


Figura 8.2: Región de pagos para el problema 8.2.

- Del punto $(6,3)$ al punto $\left(\frac{19}{3}, 2\right)$. La relación entre las variables es

$$v = -3u + 21,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_2(u) = (u-3)(-3u+21-2) = -3u^2 + 28u - 39.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{14}{3}, 7\right)$, que en este caso se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g_2'(u) = -6u + 28;$$

$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -6u + 28 = 0 \Longrightarrow u = \frac{14}{3};$$

$$v = -3 \cdot \frac{14}{3} + 21 = 7.$$

Dado que la función g_2 decrece para valores de u mayores que 6, el par de arbitraje es el punto $\left(\frac{29}{6}, \frac{19}{4}\right)$.

Problema 8.3. Un terreno está valorado por su actual propietario en 200 000 euros.

Un vecino le ofrece acondicionarlo para convertirlo en un campo de cultivo de lavanda, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 400 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar ese terreno para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor del terreno sería de 600 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* de este juego.

Solución del problema 8.3. Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca P, el vecino que le ofrece la utilización de la finca para el cultivo de lavanda V, y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca E. La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$v(\varnothing) = 0; \quad v(\{P\}) = 200; \quad v(\{V\}) = v(\{E\}) = 0;$$

$$v(\{P,V\}) = 400; \quad v(\{P,E\}) = 600; \quad v(\{V,E\}) = 0; \quad v(\{P,V,E\}) = 600.$$

Sea $\vec{x}(x_P, x_V, x_E)$ una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$x_P + x_V + x_E = v(\{P,V,E\}) = 600; \tag{8.1}$$
$$x_P \geqslant v(\{P\}) = 200; \tag{8.2}$$
$$x_V \geqslant v(\{V\}) = 0; \tag{8.3}$$
$$x_E \geqslant v(\{E\}) = 0; \tag{8.4}$$
$$x_P + x_V \geqslant v(\{P,V\}) = 400; \tag{8.5}$$
$$x_P + x_E \geqslant v(\{P,E\}) = 600; \tag{8.6}$$
$$x_V + x_E \geqslant v(\{V,E\}) = 0. \tag{8.7}$$

De la igualdad (8.1) y las desigualdades (8.3) y (8.6) se deduce

$$x_V = 0, \quad x_P + x_E = 600.$$

Imponiendo además, la desigualdad (8.5),

$$x_P \geqslant 400.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas la condiciones anteriores, y que se representa en la figura 8.3.

$$\left\{(x_P, 0, 600 - x_P) :\ 400 \leqslant x_P \leqslant 600\right\}.$$

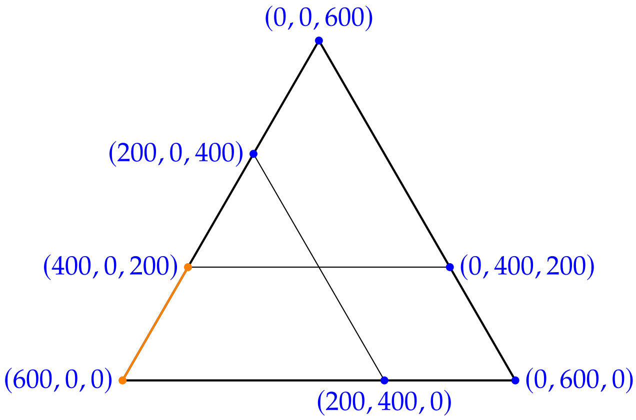


Figura 8.3: Obtención gráfica del *core* para el juego del problema problema 8.3.

Examen 9. Enero de 2016

Problema 9.1. Se tienen tres cajas similares, con dos bolas cada una, numeradas con los números positivos p y q, donde $p < q$.

Los jugadores J_1 y J_2 poseen cada uno una caja y el juego se desarrolla en las siguientes etapas:

(1) Se saca aleatoriamente una bola de la tercera caja, que es la que no tienen los jugadores.

(2) Los dos jugadores enseñan simultáneamente la bola que toman de su caja.

(3) El jugador que muestra la bola numerada más alta vence a su contrario, ganando el valor de la bola sacada en la etapa (1). Si coinciden, no hay pago alguno.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 9.1. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 9.1.

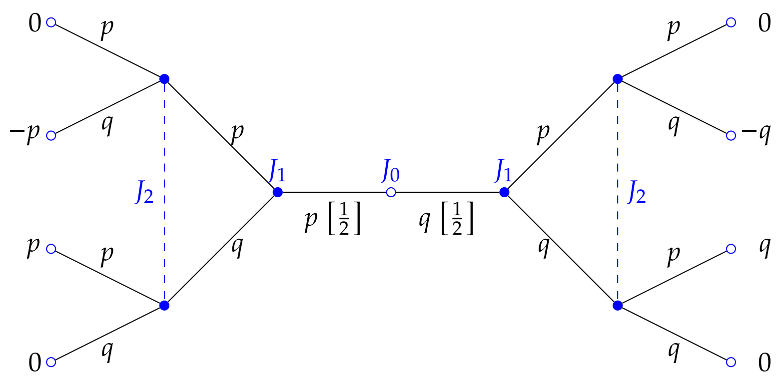


Figura 9.1: Forma extensiva del juego del problema 9.1.

El jugador J_0 saca una bola de la tercera caja, que los jugadores J_1 y J_2 ven. Después, el jugador J_1 sigue la estrategia ij, que indica que saca de su caja la bola $i \in \{p, q\}$ si la bola del jugador J_0 es la numerada con p, y saca de su caja la bola $j \in \{p, q\}$ si la bola del jugador J_0 es la numerada con q. El jugador J_2 tiene exactamente el mismo conjunto de estrategias que J_1, puesto que no conoce la bola sacada por el jugador J_1. Por tanto, el conjunto de estrategias para ambos es

$$J_1 = J_2 = \{pp, pq, qp, qq\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(pp, pp) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0; \quad \pi(pp, pq) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot (-q) = -\frac{q}{2};$$

$$\pi(pp,qp) = \frac{1}{2}\cdot(-p) + \frac{1}{2}\cdot 0 = -\frac{p}{2};\quad \pi(pp,qq) = \frac{1}{2}\cdot(-p) + \frac{1}{2}\cdot(-q) = -\frac{p+q}{2};$$
$$\pi(pq,pp) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot q = \frac{q}{2};\quad \pi(pq,pq) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0;$$
$$\pi(pq,qp) = \frac{1}{2}\cdot(-p) + \frac{1}{2}\cdot q = \frac{q-p}{2};\quad \pi(pq,qq) = \frac{1}{2}\cdot(-p) + \frac{1}{2}\cdot 0 = -\frac{p}{2};$$
$$\pi(qp,pp) = \frac{1}{2}\cdot p + \frac{1}{2}\cdot 0 = \frac{p}{2};\quad \pi(qp,pq) = \frac{1}{2}\cdot p + \frac{1}{2}\cdot(-q) = \frac{p-q}{2};$$
$$\pi(qp,qp) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0;\quad \pi(qp,qq) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot(-q) = -\frac{q}{2};$$
$$\pi(qq,pp) = \frac{1}{2}\cdot p + \frac{1}{2}\cdot q = \frac{p+q}{2};\quad \pi(qq,pq) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot p = \frac{p}{2};$$
$$\pi(qq,qp) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot q = \frac{q}{2};\quad \pi(qq,qq) = \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 9.1.

M		J_2			
		pp	pq	qp	qq
J_1	pp	0	$-\frac{q}{2}$	$-\frac{p}{2}$	$-\frac{p+q}{2}$
	pq	$\frac{q}{2}$	0	$\frac{q-p}{2}$	$-\frac{p}{2}$
	qp	$\frac{p}{2}$	$\frac{p-q}{2}$	0	$-\frac{q}{2}$
	qq	$\frac{p+q}{2}$	$\frac{p}{2}$	$\frac{q}{2}$	0

Cuadro 9.1: Forma normal del juego del problema 9.1.

Resolución:

- La matriz M tiene un punto de silla, que es el elemento $(4,4)$. En consecuencia ambos jugadores deben elegir siempre la bola numerada con q, y el valor del juego es $v(M) = 0$.

Problema 9.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (-2,4) & (3,0) \\ (2,-1) & (2,2) & (-3,2) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 9.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la primera columna, que está dominada por la segunda. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -2p + 2(1-p) = 3p - 3(1-p) \Longrightarrow 5p = 5(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$
$$v_1 = -2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = 3\cdot\frac{1}{2} - 3\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

- La matriz de pagos del jugador J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, que es el elemento m_{22}, y por tanto $v_2 = m_{22} = 2$.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 9.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = u(v - 2).$$

El conjunto de negociación es el segmento que va del punto $(1, 4)$ al punto $(2, 2)$. La relación entre las variables es la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos,

$$v = -2u + 6,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_2(u) = u(-2u + 6 - 2) = -2u^2 + 4u.$$

Y su máximo es el punto $(1, 4)$, que será el par de arbitraje buscado.

$$g_2'(u) = -4u + 4;$$

$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -4u + 4 = 0 \Longrightarrow u = 1;$$

$$v = -2 \cdot 1 + 6 = 4.$$

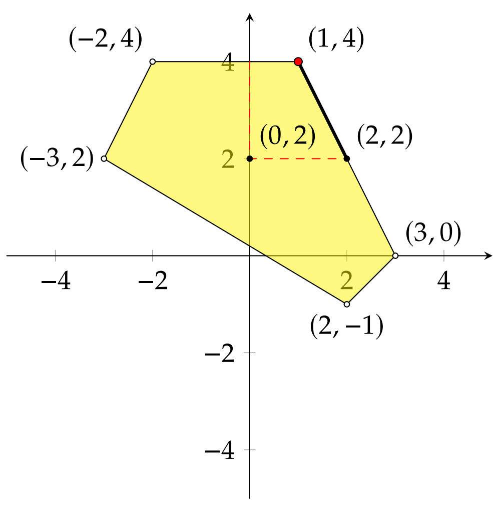


Figura 9.2: Región de pagos para el problema 9.2.

Problema 9.3. En el siguiente juego tripersonal, donde cada jugador tiene dos estrategias indicadas por 1 y 2.

Hay ocho combinaciones de estrategias y ocho correspondientes 3-tuplas de pagos:

Estrategias	Pagos
$(1,1,1)$	$(-2,1,3)$
$(1,1,2)$	$(2,2,-2)$
$(1,2,1)$	$(0,-2,4)$
$(1,2,2)$	$(1,-2,3)$
$(2,1,1)$	$(2,-2,2)$
$(2,1,2)$	$(0,2,0)$
$(2,2,1)$	$(2,0,0)$
$(2,2,2)$	$(-2,4,0)$

Calcular la función característica y decir si es un juego esencial.

Solución del problema 9.3. Estudiamos por separado las posibles coaliciones que se pueden formar.

- Coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 9.2.

M		$\{J_2, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_1\}$	1	$(-2,4)$	$(2,0)$	$(0,2)$	$(1,1)$
	2	$(2,0)$	$(0,2)$	$(2,0)$	$(-2,4)$

Cuadro 9.2: Forma normal del juego del problema 9.3 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{J_1\}$ es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

La columna 1 domina a la columna 3, y la columna 4 domina a la columna 2. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_4(p) \Longrightarrow -2p + 2(1-p) = p - 2(1-p) \Longrightarrow 3p = 4(1-p) \Longrightarrow p = \frac{4}{7};$$

$$\nu\big(\{1\}\big) = -2 \cdot \frac{4}{7} + 2 \cdot \left(1 - \frac{4}{7}\right) = \frac{4}{7} - 2 \cdot \left(1 - \frac{4}{7}\right) = -\frac{2}{7}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{J_2, J_3\}$ es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

En este caso la fila 1 domina a la fila 3 y la fila 4 domina a la fila 2. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 4p + (1-p) = 4(1-p) \Longrightarrow 4p = 3(1-p) \Longrightarrow p = \frac{3}{7};$$

$$\nu\big(\{2,3\}\big) = 4 \cdot \frac{3}{7} + \left(1 - \frac{3}{7}\right) = 4 \cdot \left(1 - \frac{3}{7}\right) = \frac{16}{7}.$$

- Coaliciones $\{J_2\}$ y $\{J_1, J_3\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 9.3.

M		$\{J_1, J_3\}$ 11	12	21	22
$\{J_2\}$	1	$(1,1)$	$(2,0)$	$(-2,4)$	$(2,0)$
	2	$(-2,4)$	$(-2,4)$	$(0,2)$	$(4,-2)$

Cuadro 9.3: Forma normal del juego del problema 9.3 para las coaliciones $\{J_2\}$ y $\{J_1, J_3\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{J_2\}$ es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

La columna 1 domina a las columnas 2 y 4. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_3(p) \Longrightarrow p - 2(1-p) = -2p \Longrightarrow 3p = 2(1-p) \Longrightarrow p = \frac{2}{5};$$

$$\nu(\{2\}) = \frac{2}{5} - 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = -2 \cdot \frac{2}{5} = -\frac{4}{5}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{J_1, J_3\}$ es

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

En este caso la fila 1 domina a las filas 2 y 4. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow p + 4(1-p) = 4p + 2(1-p) \Longrightarrow 3p = 2(1-p) \Longrightarrow p = \frac{2}{5};$$

$$\nu(\{1,3\}) = \frac{2}{5} + 4 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 4 \cdot \frac{2}{5} + 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{14}{5}.$$

- Coaliciones $\{J_3\}$ y $\{J_1, J_2\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 9.4.

M		$\{J_1, J_2\}$ 11	12	21	22
$\{J_3\}$	1	$(3,-1)$	$(4,-2)$	$(2,0)$	$(0,2)$
	2	$(-2,4)$	$(3,-1)$	$(0,2)$	$(0,2)$

Cuadro 9.4: Forma normal del juego del problema 9.3 para las coaliciones $\{J_3\}$ y $\{J_1, J_2\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{J_3\}$ es

$$M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz tiene un punto de silla, que es el elemento m_{14}. Por tanto,

$$\nu\big(\{3\}\big) = m_{14} = 0.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{J_1, J_2\}$ es

$$M_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

En este caso también hay un punto de silla, que es el elemento m_{41}. En consecuencia,

$$\nu\big(\{1,2\}\big) = m_{41} = 2.$$

- Gran coalición $\{J_1, J_2, J_3\}$. Se puede ver que el juego es de suma constante 2 en su forma normal, por lo que

$$\nu\big(\{1,2,3\}\big) = 2.$$

En resumen, la función característica del juego es

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu\big(\{1\}\big) = -\frac{2}{7}; \quad \nu\big(\{2\}\big) = -\frac{4}{5}; \quad \nu\big(\{3\}\big) = 0;$$

$$\nu\big(\{1,2\}\big) = 2; \quad \nu\big(\{1,3\}\big) = \frac{14}{5}; \quad \nu\big(\{2,3\}\big) = \frac{16}{7}; \quad \nu\big(\{1,2,3\}\big) = 2.$$

Es inmediato ver que es un juego esencial, puesto que

$$2 = \nu\big(\{1,2,3\}\big) \neq \sum_{n=1}^{3} \nu\big(\{n\}\big) = -\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + 0 = -\frac{38}{35}.$$

Examen 10. Febrero de 2016

Problema 10.1. El jugador A saca al azar una bola de una urna que contiene cinco bolas blancas y dos negras; la mira y apuesta diez euros o cincuenta euros.

El jugador B puede jugar o no jugar.

Si B no juega, entonces A le gana diez euros, y si B juega, entonces debe igualar la apuesta de A. En ese caso A ganará todo el dinero si toma una bola negra y si toma una blanca perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 10.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 10.1.

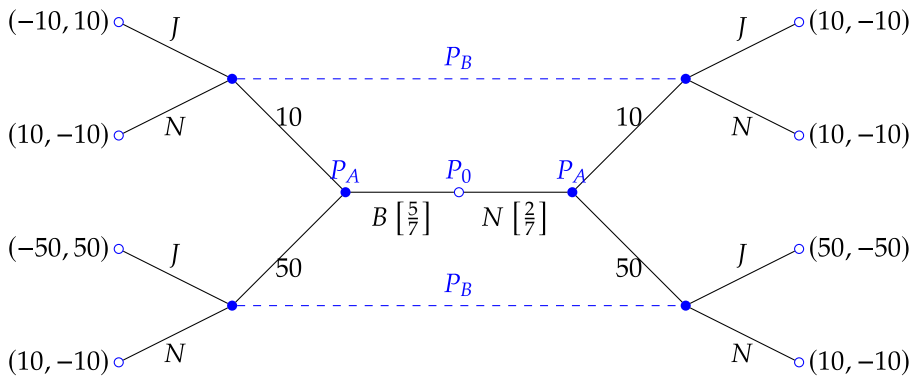


Figura 10.1: Forma extensiva del juego del problema 10.1.

Tras el movimiento del jugador P_0 (la extracción de la bola de la urna), el jugador P_A se encontrará en dos posibles situaciones, que la bola ha ya sido blanca o que haya sido negra. Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es UD (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (bola blanca) apostará 10 € (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 10.1), y si se encuentra en la segunda situación (bola negra) apostará 50 € (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador P_A, el jugador P_B también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información del color de la bola extraída), que el jugador P_A haya apostado 10 € o que haya apostado 50 €. Una estrategia para P_B sería, por ejemplo, DU (*down, up*), que indica que si P_A apostó 10 € entonces P_B no juega, y que si P_A apostó 50 € entonces P_B juega. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores P_A y P_B son

$$P_A = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad P_B = \{UU, UD, DU, DD\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(UU, UU) = \frac{5}{7} \cdot (-10) + \frac{2}{7} \cdot 10 = -\frac{30}{7}; \quad \pi(UU, UD) = \frac{5}{7} \cdot (-10) + \frac{2}{7} \cdot 10 = -\frac{30}{7};$$

$$\pi(UU,DU) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 10 = 10; \quad \pi(UU,DD) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 10 = 10$$
$$\pi(UD,UU) = \frac{5}{7}\cdot(-10) + \frac{2}{7}\cdot 50 = \frac{50}{7}; \quad \pi(UD,UD) = \frac{5}{7}\cdot(-10) + \frac{2}{7}\cdot 10 = -\frac{30}{7};$$
$$\pi(UD,DU) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 50 = \frac{150}{7}; \quad \pi(UD,DD) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 10 = 10;$$
$$\pi(DU,UU) = \frac{5}{7}\cdot(-50) + \frac{2}{7}\cdot 10 = -\frac{230}{7}; \quad \pi(DU,UD) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 10 = 10;$$
$$\pi(DU,DU) = \frac{5}{7}\cdot(-50) + \frac{2}{7}\cdot 10 = -\frac{230}{7}; \quad \pi(DU,DD) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 10 = 10;$$
$$\pi(DD,UU) = \frac{5}{7}\cdot(-50) + \frac{2}{7}\cdot 50 = -\frac{150}{7}; \quad \pi(DD,UD) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 10 = 10;$$
$$\pi(DD,DU) = \frac{5}{7}\cdot(-50) + \frac{2}{7}\cdot 50 = -\frac{150}{7}; \quad \pi(DD,DD) = \frac{5}{7}\cdot 10 + \frac{2}{7}\cdot 10 = 10.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 10.1.

M		P_B			
		UU	UD	DU	DD
P_A	UU	$-\frac{30}{7}$	$-\frac{30}{7}$	10	10
	UD	$\frac{50}{7}$	$-\frac{30}{7}$	$\frac{150}{7}$	10
	DU	$-\frac{230}{7}$	10	$-\frac{230}{7}$	10
	DD	$-\frac{150}{7}$	10	$-\frac{150}{7}$	10

Cuadro 10.1: Forma normal del juego del problema 10.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 2 domina a la fila 1, la fila 4 domina a la fila 3, la columna 1 domina a la columna 3, y la columna 2 domina a la columna 4. Eliminamos las filas y columnas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} \frac{50}{7} & -\frac{30}{7} \\ -\frac{150}{7} & 10 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila P_A será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$ y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow \frac{50}{7}p - \frac{150}{7}(1-p) = -\frac{30}{7}p + 10(1-p) \Longrightarrow 5p + 15(1-p) = -3p + 7(1-p) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 30p = 22 \Longrightarrow p = \frac{22}{30} = \frac{11}{15}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna P_B ha de ser de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$ y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow \frac{50}{7}q - \frac{30}{7}(1-q) = -\frac{150}{7}q + 10(1-q) \Longrightarrow 5q - 3(1-q) = -15q + 7(1-q) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow 30q = 10 \Longrightarrow q = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(0, \frac{11}{15}, 0, \frac{4}{15}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_A(M) &= \frac{50}{7} \cdot \frac{11}{15} - \frac{150}{7}\left(1 - \frac{11}{15}\right) = -\frac{30}{7} \cdot \frac{11}{15} + 10\left(1 - \frac{11}{15}\right) = -\frac{10}{21} \\ v_B(M) &= \frac{50}{7} \cdot \frac{1}{3} - \frac{30}{7}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{150}{7} \cdot \frac{1}{3} + 10\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\frac{10}{21} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = -\frac{10}{21}.$$

Problema 10.2. Dos compañías comparten el grueso del mercado de cierto tipo de producto. Cada una hace nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas de la otra compañía.

Cada una está considerando la posibilidad de una pequeña reducción de precio del producto. Ambas prefieren no bajarlo, pero cada una teme que la otra lo haga y, por tanto, venda más unidades del producto. Si ambas bajan el precio del producto, venden 350 unidades cada una; si ninguna lo hace venden 200 cada una, y si una lo baja y la otra no, la primera vende 500 y la segunda 150.

Calcular el punto de equilibrio si se considera el juego no cooperativo y si se considera cooperativo.

Solución del problema 10.2. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores J_1 y J_2 a cada una de las empresas. Ambos jugadores pueden bajar el precio (B) o no hacerlo (N), por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$J_1 = J_2 = \{B, N\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 10.2.

M		J_2	
		B	N
J_1	B	$(350, 350)$	$(500, 150)$
	N	$(150, 500)$	$(200, 200)$

Cuadro 10.2: Forma normal del juego del problema 10.2.

Para hallar los puntos de equilibrio del juego no cooperativo utilizaremos el método IDSDS:

- La estrategia B para el jugador J_1 domina estrictamente a la estrategia N, por lo que J_1 siempre jugará B, y el jugador J_2 lo sabe. Se puede eliminar, por tanto, la fila 2 (N).
- En la fila restante

M		J_2	
		B	N
J_1	B	$(350, 350)$	$(500, 150)$

  la estrategia B para el jugador J_2 domina estrictamente a la estrategia N. Por tanto, se puede eliminar la columna 2 (N).

En conclusión, el único punto de equilibrio del juego no cooperativo es el par de estrategias (B, B), para el cual los pagos son $(350, 350)$. O sea, ambas empresas deben bajar sus precios, y de esa forma ambas conseguirán unas ventas de 350 unidades.

Para el juego cooperativo, en la figura 10.2 se representa el conjunto de pagos. Dado que dicha región de pagos es simétrica, y que el punto de *statu quo* $(350, 350)$ verifica $u_0 = v_0 = 350$, podemos aplicar el axioma 6 de Nash (Morris, 1994 : 135), e inmediatamente se obtiene que el par de arbitraje también es el punto $(350, 350)$. Dicho de otra forma, en este caso el hecho de cooperar no mejora los beneficios que ambas empresas pueden obtener.

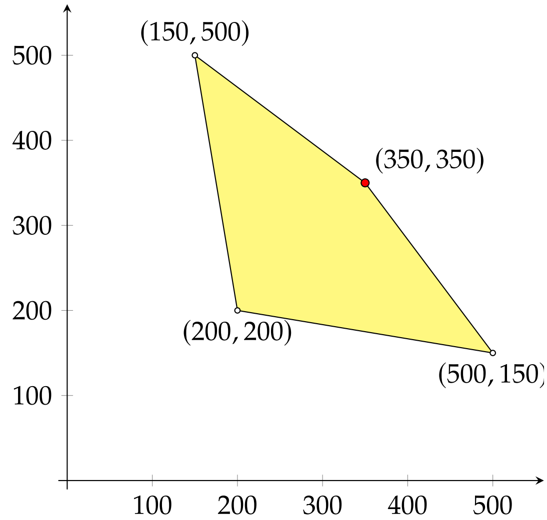


Figura 10.2: Región de pagos para el problema 10.2.

Problema 10.3. En los juegos N-personales cooperativos definir *imputaciones*, *dominancia de imputaciones*, *núcleo*, el teorema que dice cuándo una *imputación* está en el *núcleo* y *conjuntos estables de imputaciones*.

Solución del problema 10.3. Sea ν un juego N-personal en forma de función característica y cuyo conjunto de jugadores es

$$\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_N\}.$$

Una N-tupla $\vec{x}(x_1, \ldots, x_N)$ de números reales (que representan los pagos de cada jugador) se llama imputación para el juego ν (Morris, 1994 : 156) si se satisfacen las condiciones:

- Racionalidad individual. Para cada jugador $P_i \in \mathcal{P}$ se tiene que

$$x_i \geqslant \nu\big(\{P_i\}\big).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = \nu(\mathcal{P}).$$

Sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ una coalición, y sean $\vec{x}, \vec{y}$ dos imputaciones para el juego ν. Diremos que la imputación $\vec{x}$ domina a la imputación $\vec{y}$ para la coalición $\mathcal{S}$ (Morris, 1994 : 158), y escribiremos $\vec{x} >_{\mathcal{S}} \vec{y}$, si se verifican las condiciones:

- $\forall P_i \in \mathcal{S} : \ x_i > y_i$.
- $\displaystyle\sum_{P_i \in \mathcal{S}} x_i \leqslant \nu(\mathcal{S})$.

El núcleo o *core* del juego ν (Morris, 1994 : 159) es el conjunto de todas las imputaciones que no están dominadas por cualquier otra imputación para ninguna de las coaliciones posibles. Una imputación $\vec{x}$ está en el núcleo de v si y solo si

$$\forall \mathcal{S} \subset \mathcal{P} : \sum_{P_i \in \mathcal{S}} x_i \geqslant v(\mathcal{S}).$$

Una N-tupla $\vec{x}(x_1, \dots, x_N)$ es una imputación del núcleo si se satisfacen las condiciones:

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} x_i = v(\mathcal{P})$.
- $\forall \mathcal{S} \subset \mathcal{P} : \displaystyle\sum_{P_i \in \mathcal{S}} x_i \geqslant v(\mathcal{S})$.

Sea X un conjunto de imputaciones para el juego v. Diremos que X es un conjunto estable de imputaciones (Morris, 1994 : 174) si se verifican las condiciones:

- Estabilidad interna. Ninguna imputación de X domina a ninguna otra imputación de X para ninguna de las posibles coaliciones.
- Estabilidad externa. Si $\vec{y} \notin X$ es una imputación para v, entonces existen una imputación $\vec{x} \in X$ y una coalición $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ tales que $\vec{x} \succ_{\mathcal{S}} \vec{y}$.

Examen 11. Septiembre de 2016 – Convocatoria ordinaria

Problema 11.1. Hallar la forma normal del siguiente juego y calcular las estrategias óptimas de los dos jugadores y el valor del juego:

Dos jugadores J_1 y J_2 ponen cada uno 5 euros sobre la mesa y lanzan una moneda que tiene un 1 en una cara y un 2 en la otra. Ningún jugador sabe el resultado del lanzamiento del otro. Solo conocen el resultado de la suya.

J_1 juega primero. Puede pasar o apostar 3 euros adicionales.

Si pasa, se comparan los números sacados por los dos jugadores. El que consiga el mayor número toma de la mesa los 10 euros; si los números son iguales cada uno recupera sus 5 euros.

Si J_1 apuesta 3 euros, J_2 puede ir o no ir. Si no va, J_1 gana los 10 euros de la mesa, independientemente de los números sacados. Si J_2 va, añade 3 euros a los 13 de la mesa. Nuevamente se comparan los números, el mayor toma los 16 euros, y si los dos números son iguales, cada uno recupera su dinero.

Solución del problema 11.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 11.1.

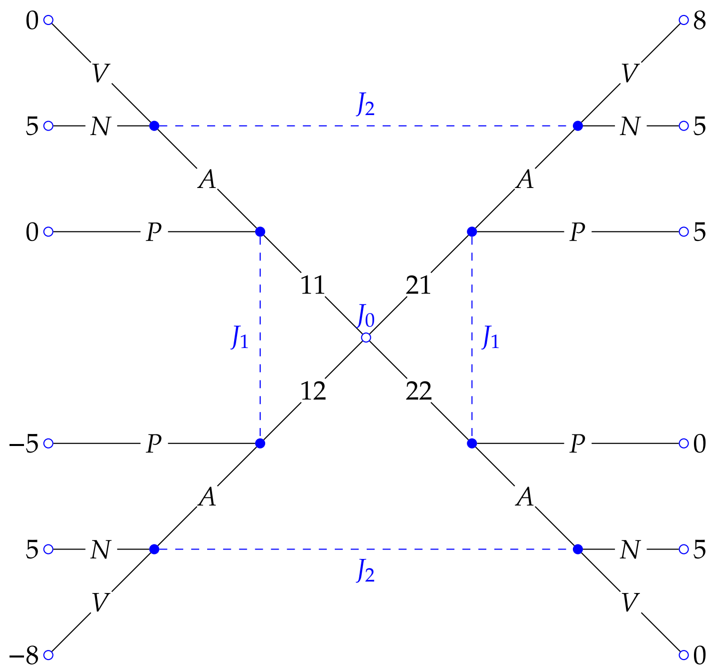


Figura 11.1: Forma extensiva del juego del problema 11.1.

El jugador J_0 lanza las dos monedas. El jugador J_1, que conoce el resultado de la primera moneda y no el de la segunda, ha de decidir si apuesta o pasa en función del resultado que conoce. Y si el jugador J_1 apuesta, el jugador J_2, que conoce el resultado de la segunda moneda y no el de la primera, ha de decidir si va o no va, en función del resultado que conoce. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores J_1 y J_2 son

$$J_1 = \{AA, AP, PA, PP\}, \quad J_2 = \{VV, VN, NV, NN\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(AA,VV) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-8) + \frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{1}{4}\cdot 0 = 0; \quad \pi(AA,VN) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{1}{4}\cdot 5 = \frac{9}{2};$$

$$\pi(AA,NV) = \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot(-8) + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{2}; \quad \pi(AA,NN) = \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5 = 5;$$

$$\pi(AP,VV) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-8) + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 0 = -\frac{3}{4}; \quad \pi(AP,VN) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{5}{2};$$

$$\pi(AP,NV) = \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot(-8) + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{1}{2}; \quad \pi(AP,NN) = \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{15}{4};$$

$$\pi(PA,VV) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{1}{4}\cdot 0 = \frac{3}{4}; \quad \pi(PA,VN) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{1}{4}\cdot 5 = 2;$$

$$\pi(PA,NV) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 0 = 0; \quad \pi(PA,NN) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 5 = \frac{5}{4};$$

$$\pi(PP,VV) = \pi(PP,VN) = \pi(PP,NV) = \pi(PP,NN) = \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}\cdot(-5) + \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{1}{4}\cdot 0 = 0.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 11.1.

M		J_2			
		VV	VN	NV	NN
J_1	AA	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	5
	AP	$-\frac{3}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{15}{4}$
	PA	$\frac{3}{4}$	2	0	$\frac{5}{4}$
	PP	0	0	0	0

Cuadro 11.1: Forma normal del juego del problema 11.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 2 y a la fila 4; y la columna 1 domina a la columna 2 y a la columna 4. Eliminamos las filas y columnas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$ y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow \frac{3}{4}(1-p) = \frac{1}{2}p \Longrightarrow 3(1-p) = 2p \Longrightarrow 5p = 3 \Longrightarrow p = \frac{3}{5}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 ha de ser de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$ y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow \frac{1}{2}(1-q) = \frac{3}{4}q \Longrightarrow 2(1-q) = 3q \Longrightarrow 5q = 2 \Longrightarrow q = \frac{2}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5}, 0\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{2}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= \frac{3}{4}\left(1 - \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10} \\ v_2(M) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{10} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{3}{10}.$$

Problema 11.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-3, 6) & (3, 4) \\ (-\frac{1}{2}, -1) & (3, 0) \\ (-2, -2) & (5, -3) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 11.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -\frac{1}{2} & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

  Tiene un punto de silla, que es el elemento m_{12}, por lo que $v_1 = m_{12} = -\frac{1}{2}$.

- La matriz de pagos del jugador J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

  También tiene un punto de silla, en este caso el elemento m_{13}, por lo que $v_2 = m_{13} = -2$.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 11.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = \left(u + \frac{1}{2}\right)(v + 2).$$

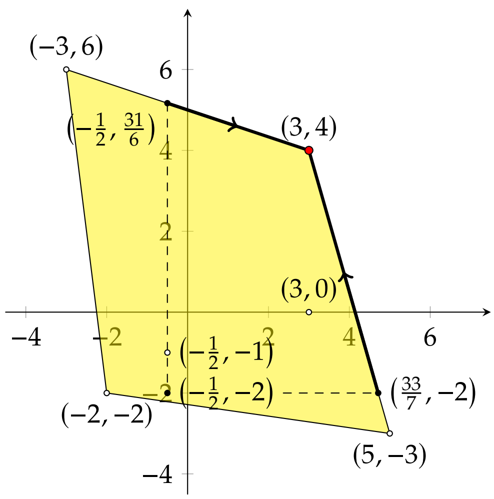


Figura 11.2: Región de pagos para el problema 11.2.

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{31}{6}\right)$ al punto $(3,4)$. La relación entre las variables es

$$v = -\frac{1}{3}u + 5,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_1(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}u + 5 + 2\right) = -\frac{1}{3}u^2 + \frac{41}{6}u + \frac{7}{2}.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{41}{4}, \frac{19}{12}\right)$, que se encuentra fuera del conjunto de negociación.

$$g_1'(u) = -\frac{2}{3}u + \frac{41}{6};$$

$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -\frac{2}{3}u + \frac{41}{6} = 0 \Longrightarrow u = \frac{41}{4} > 3;$$
$$v = -\frac{1}{3}\cdot\frac{41}{4} + 5 = \frac{19}{12} < 4.$$

- Del punto $(3,4)$ al punto $\left(\frac{33}{7}, -2\right)$. La relación entre las variables es

$$v = -\frac{7}{2}u + \frac{29}{2},$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_2(u) = \left(u + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}u + \frac{29}{2} + 2\right) = -\frac{7}{2}u^2 + \frac{59}{4}u + \frac{33}{4}.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{59}{28}, \frac{57}{8}\right)$, que también se encuentra fuera del conjunto de negociación.

$$g_2'(u) = -7u + \frac{59}{4};$$

$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -7u + \frac{59}{4} = 0 \Longrightarrow u = \frac{59}{28} < 3;$$
$$v = -\frac{7}{2}\cdot\frac{59}{28} + \frac{29}{2} = \frac{57}{8} > 4.$$

Dado que la función g_1 crece para valores de u mayores que $-\frac{1}{2}$ y que la función g_2 decrece para valores de u mayores que 3, el par de arbitraje es el punto $(3,4)$.

Problema 11.3. Se tienen tres cajas, cada una con tres bolas numeradas con el 1, 2 y 3, y tres jugadores. Cada jugador puede elegir solamente una bola de una urna. Ninguno conoce lo que han elegido los demás.

A continuación enseñan su elección y se establecen los pagos: si todos eligen lo mismo no se efectúa ningún pago, en caso contrario el jugador que muestre la bola numerada mayor paga cinco euros a cada uno de los restantes que la enseñe menor (no igual).

Calcular la función característica y decir si es un juego esencial.

Solución del problema 11.3. Estamos ante un juego tripersonal simétrico de suma cero (en su forma normal). Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles.

El único caso no trivial es cuando se forma una coalición de dos jugadores (y otra de uno). Consideramos, por ejemplo, las coaliciones $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$, para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 11.2.

M		$\{P_2, P_3\}$								
		11	12	13	21	22	23	31	32	33
$\{P_1\}$	1	0	5	5	5	10	5	5	5	10
	2	−10	−5	0	−5	0	5	0	5	10
	3	−10	−10	−5	−10	−10	−5	−5	−5	0

Cuadro 11.2: Forma normal del juego del problema 11.3 para las coaliciones $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$.

La matriz del juego tiene un punto de silla, que es el elemento m_{11}, por lo que una solución para este juego sería aquella en la que los todos los jugadores eligen la bola numerada con un 1. El valor del juego es $v(M) = m_{11} = 0$.

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\varnothing) = \nu\big(\{1\}\big) = \nu\big(\{2\}\big) = \nu\big(\{3\}\big) = \nu\big(\{1,2\}\big) = \nu\big(\{1,3\}\big) = \nu\big(\{2,3\}\big) = \nu\big(\{1,2,3\}\big) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es no esencial, puesto que se verifica

$$\nu\big(\{1,2,3\}\big) = 0 = \sum_{n=1}^{3} \nu\big(\{n\}\big).$$

Examen 12. Septiembre de 2016 – Convocatoria de reserva

Problema 12.1. El jugador P_1 lanza una moneda insesgada y la mira.

Puede, o bien pasar, en cuyo caso paga a P_2 60 euros, o puede apostar, en cuyo caso P_2 puede, o bien pasar y pagar a P_1 60 euros, o bien apostar. Si apuesta, entonces recibe de, o paga a P_1, 90 euros según que P_1 haya sacado cara o cruz.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 12.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 12.1.

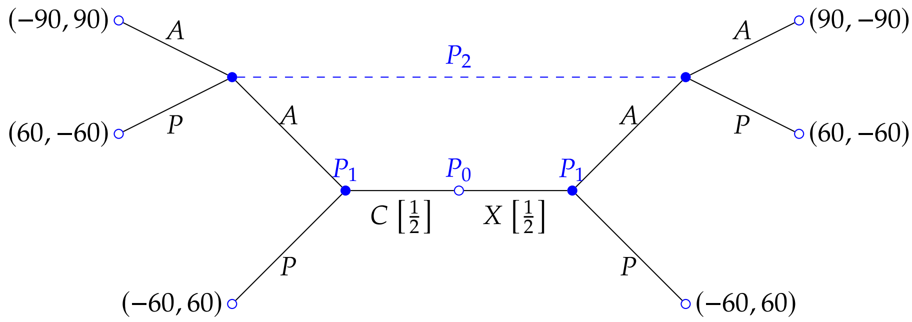


Figura 12.1: Forma extensiva del juego del problema 12.1.

Tras el movimiento del jugador P_0 (el lanzamiento de la moneda), el jugador P_1 se encontrará en dos posibles situaciones, que haya salido cara o que haya salido cruz. Cada estrategia posible debe decidir de antemano qué hará en cada una de esas dos situaciones. Por ejemplo, una posible estrategia es UD (*up, down*), que indica que si el jugador se encuentra en la primera situación (cara, C) apostará (se desplazará hacia arriba, *up*, en el árbol de la figura 12.1), y si se encuentra en la segunda situación (cruz, X) pasará (se desplazará hacia abajo, *down*). De la misma manera, tras el movimiento del jugador P_1, el jugador P_2 también se encontrará ante dos posibles situaciones (puesto que no tiene la información del resultado del lanzamiento de la moneda), que el jugador P_1 haya apostado o que haya pasado, en cuyo caso el juego ha terminado. Una estrategia para P_2 sería, por ejemplo, D (*down*), que indica que si P_1 apostó entonces P_2 pasa. Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores P_1 y P_2 son

$$P_1 = \{UU, UD, DU, DD\}, \quad P_2 = \{U, D\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(UU, U) = \frac{1}{2} \cdot (-90) + \frac{1}{2} \cdot 90 = 0; \quad \pi(UU, D) = \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot 60 = 60;$$

$$\pi(UD, U) = \frac{1}{2} \cdot (-90) + \frac{1}{2} \cdot (-60) = -75; \quad \pi(UD, D) = \frac{1}{2} \cdot 60 + \frac{1}{2} \cdot (-60) = 0;$$

$$\pi(DU,U) = \frac{1}{2}\cdot(-60) + \frac{1}{2}\cdot 90 = 15; \quad \pi(DU,D) = \frac{1}{2}\cdot(-60) + \frac{1}{2}\cdot 60 = 0;$$
$$\pi(DD,U) = \frac{1}{2}\cdot(-60) + \frac{1}{2}\cdot(-60) = -60; \quad \pi(DD,D) = \frac{1}{2}\cdot(-60) + \frac{1}{2}\cdot(-60) = -60.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 12.1.

M		P_2	
		U	D
P_1	UU	0	60
	UD	–75	0
	DU	15	0
	DD	–60	–60

Cuadro 12.1: Forma normal del juego del problema 12.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a la fila 2 y a la fila 4. Eliminamos las filas dominadas, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 60 \\ 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador fila P_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$ y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 15(1-p) = 60p \Longrightarrow 1-p = 4p \Longrightarrow 5p = 1 \Longrightarrow p = \frac{1}{5}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna P_2 ha de ser de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$ y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow 60(1-q) = 15q \Longrightarrow 4(1-q) = q \Longrightarrow 5q = 4 \Longrightarrow q = \frac{4}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1(M) = 15\left(1 - \dfrac{1}{5}\right) = 60\cdot\dfrac{1}{5} = 12 \\[2ex] v_2(M) = 60\left(1 - \dfrac{4}{5}\right) = 15\cdot\dfrac{4}{5} = 12 \end{array}\right\} \Longrightarrow v(M) = 12.$$

Problema 12.2. Dos empresas automovilísticas deciden lanzar al mercado al mismo tiempo un modelo de coche de gama intermedia. Cada una de ellas se está planteando si ofrecer o no financiación a los clientes, lo cual le supondría captar mayor cuota de mercado, pero llevaría consigo ciertos costes. Ambas empresas prefieren no ofertar dicha financiación, pero cada una teme que la otra la ofrezca y, por tanto, acapare mayor número de compradores. Supongamos que los beneficios esperados por las empresas son los siguientes. Si ambas ofrecen financiación, 40 millones para cada una; si ninguna lo hace, 60 para cada una, y si una la ofrece y la otra no, la primera gana 80 y la segunda 30.

Calcular el punto de equilibrio si el juego se considera no cooperativo y si se considera cooperativo.

Solución del problema 12.2. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores J_1 y J_2 a cada una de las empresas. Ambos jugadores pueden ofrecer financiación (F) o no hacerlo (N), por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$J_1 = J_2 = \{F, N\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 12.2.

M		J_2	
		F	N
J_1	F	$(40, 40)$	$(80, 30)$
	N	$(30, 80)$	$(60, 60)$

Cuadro 12.2: Forma normal del juego del problema 12.2.

Para hallar los puntos de equilibrio del juego no cooperativo empezamos estudiando la matriz de pagos de cada jugador, que son idénticas.

$$M = \begin{pmatrix} 40 & 80 \\ 30 & 60 \end{pmatrix}.$$

La matriz M tiene un punto de silla, que es el elemento $m_{11} = 40$. Por tanto, el único punto de equilibrio del juego no cooperativo es el par de estrategias (F, F), para el cual los pagos son $(40, 40)$. O sea, ambas empresas deben ofrecer financiación, y de esa forma ambas conseguirán unos beneficios de 40 millones.

Para el juego cooperativo, en la figura 12.2 se representa el conjunto de pagos. Dado que dicha región de pagos es simétrica, y que el punto de *statu quo* $(40, 40)$ verifica $u_0 = v_0 = 40$, podemos aplicar el axioma 6 de Nash (Morris, 1994 : 135), e inmediatamente se obtiene que el par de arbitraje es el punto $(60, 60)$.

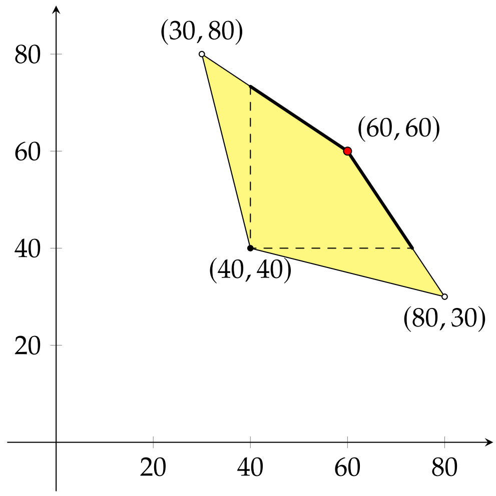


Figura 12.2: Región de pagos para el problema 12.2.

Problema 12.3. Ejercicio 1 de Morris (1994 : 183). La función característica de un juego tripersonal cooperativo viene dada por:

$$v(\varnothing) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0;$$

$$v(\{1, 2\}) = 500; \quad v(\{1, 3\}) = 700; \quad v(\{2, 3\}) = 0; \quad v(\{1, 2, 3\}) = 700.$$

Probar que el conjunto

$$\{(x, 0, 700 - x) : \ 0 \leqslant x \leqslant 700\}$$

es un conjunto estable de imputaciones para este juego.

Solución del problema 12.3. Comprobaremos en primer lugar que el conjunto dado

$$X = \{(x, 0, 700 - x) : \ 0 \leqslant x \leqslant 700\}$$

es un conjunto de imputaciones. Sea $\vec{x}(x_1, 0, 700 - x_1) \in X$ con $0 \leqslant x_1 \leqslant 700$. Se verifican:

- Racionalidad individual.

$$x_1 \geqslant v(\{1\}) = 0; \quad x_2 = 0 = v(\{2\}); \quad x_3 = 700 - x_1 \geqslant 0 = v(\{3\}).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + 0 + (700 - x_1) = 700 = v(\{1, 2, 3\}).$$

Y ahora veremos que el conjunto dado es un conjunto estable de imputaciones, tal y como se pedía. Se verifican:

- Estabilidad interna. Sean $\vec{x}, \vec{y} \in X$. Veamos que no existe ninguna coalición $\mathcal{S} \subset \{1, 2, 3\}$ para la cual la imputación $\vec{x}$ domine a la imputación $\vec{y}$. Para que esto fuese así, se tendrían que verificar las dos condiciones que definen la dominancia de imputaciones (Morris, 1994 : 158),

$$\forall i \in \mathcal{S} : \ x_i > y_i; \tag{12.1}$$

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} x_k \leqslant v(\mathcal{S}). \tag{12.2}$$

Como se tiene que $x_2 = y_2 = 0$, la condición (12.1) no se verifica para ninguna coalición $\mathcal{S}$ tal que $2 \in \mathcal{S}$. Además, a la vista de la definición del conjunto X, sabemos que para cualquier $i \in \{1, 2, 3\}$ se tiene que $x_i \geqslant 0$, e $y_i \geqslant 0$. Entonces, si $i \in \mathcal{S}$ y se verifican las condiciones (12.1) y (12.2),

$$0 \leqslant y_i < x_i \leqslant \sum_{k \in \mathcal{S}} x_k \leqslant v(\mathcal{S}),$$

lo que nos indica que podemos descartar cualquier coalición $\mathcal{S}$ que verifique $v(\mathcal{S}) = 0$. Esto nos deja únicamente la coalición $\{1, 3\}$, pero esta también se puede descartar, puesto que tampoco satisface la condición (12.1),

$$x_1 > y_1 \Longleftrightarrow 700 - x_1 < 700 - y_1 \Longleftrightarrow x_3 < y_3.$$

- Estabilidad externa. Sea $y \notin X$ una imputación. Por definición, se verifica

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} : \ y_i \geqslant v(\{i\}) = 0;$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = v(\{1, 2, 3\}) = 700.$$

Es evidente que si $y_2 = 0$ entonces $\vec{y} \in X$, por lo que necesariamente ha de ser $y_2 > 0$. Consideramos la imputación $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ definida por

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2}; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2}.$$

Es evidente que $\vec{x} \in X$, puesto que

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} \geqslant 0; \quad x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} \leqslant y_1 + y_2 + y_3 = 700; \quad x_2 = 0;$$

$$x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2} = (y_1 + y_2 + y_3) - \left(y_1 + \frac{y_2}{2}\right) = 700 - x_1.$$

Y, si consideramos la coalición $\mathcal{S} = \{P_1, P_3\}$, se puede ver que $\vec{x}$ domina a $\vec{y}$ para dicha coalición.

$$x_1 = y_1 + \frac{y_2}{2} > y_1; \quad x_3 = y_3 + \frac{y_2}{2} > y_3;$$

$$x_1 + x_3 = y_1 + y_2 + y_3 = v\big(\{1, 2, 3\}\big).$$

Examen 13. Enero de 2017

Problema 13.1. Se tiene una baraja donde la quinta parte de las cartas están marcadas con la letra L y el resto con la letra M.

Al comienzo del juego, dos jugadores J_1 y J_2 ponen cada uno 20 euros sobre una mesa.

El jugador J_2 saca una carta de la baraja, la mira pero no se la enseña a J_1.

J_2 puede apostar 5 euros o 10 euros. Si J_2 apuesta 5 euros, J_1 debe ver, y si J_2 apuesta 10 euros, J_1 puede pasar o puede ver.

Si J_1 pasa, J_2 gana. Si J_1 ve, se enseña la carta. Si la carta es L gana J_2; si es M, gana J_1.

Cuando J_1 ve debe igualar la apuesta de J_2.

El ganador en cada caso se lleva todo el bote.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 13.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 13.1.

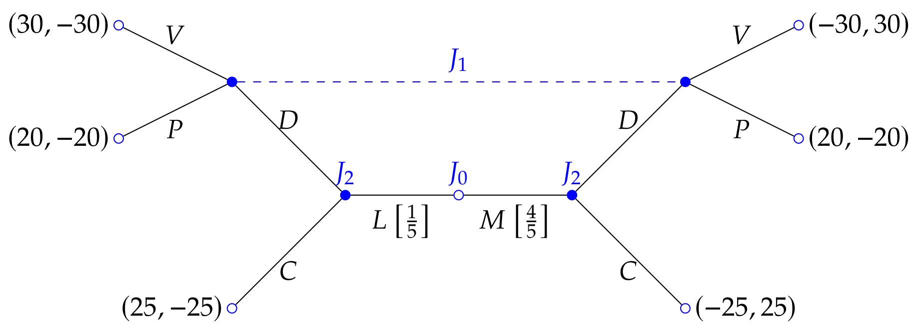


Figura 13.1: Forma extensiva del juego del problema 13.1.

El jugador J_0 extrae aleatoriamente una carta, que puede ser L con probabilidad $\frac{1}{5}$ o M con probabilidad $\frac{4}{5}$. El jugador J_2, que conoce el resultado de la extracción de la carta apuesta 5 o 10 euros (que representamos por C y D, respectivamente), en función de dicho resultado. Por último, si el jugador J_2 apostó 10 euros, el jugador J_1, sin conocer el resultado de la extracción, ha de decidir si ve la apuesta (V) o pasa (P). Así, los conjuntos de estrategias para los jugadores J_2 y J_1 son

$$\Sigma_2 = \{CC, CD, DC, DD\}, \quad \Sigma_1 = \{V, P\}.$$

En función de las estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(CC, V) = \pi(CC, P) = \frac{1}{5} \cdot 25 + \frac{4}{5} \cdot (-25) = -15;$$

$$\pi(CD, V) = \frac{1}{5} \cdot 25 + \frac{4}{5} \cdot (-30) = -19; \quad \pi(CD, P) = \frac{1}{5} \cdot 25 + \frac{4}{5} \cdot 20 = 21;$$

$$\pi(DC,V) = \frac{1}{5}\cdot 30 + \frac{4}{5}\cdot(-25) = -14; \quad \pi(DC,P) = \frac{1}{5}\cdot 20 + \frac{4}{5}\cdot(-25) = -16;$$

$$\pi(DD,V) = \frac{1}{5}\cdot 30 + \frac{4}{5}\cdot(-30) = -18; \quad \pi(DD,P) = \frac{1}{5}\cdot 20 + \frac{4}{5}\cdot 20 = 20.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 13.1.

M		J_1	
		V	P
J_2	CC	-15	-15
	CD	-19	21
	DC	-14	-16
	DD	-18	20

Cuadro 13.1: Forma normal del juego del problema 13.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- No hay filas ni columnas dominadas.
- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna J_1 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, con

$$\pi^1(q) = -15q - 15(1-q) = -15; \quad \pi^2(q) = -19q + 21(1-q) = 21 - 40q;$$

$$\pi^3(q) = -14q - 16(1-q) = 2q - 16; \quad \pi^4(q) = -18q + 20(1-q) = 20 - 38q.$$

Representamos en la figura 13.2 las funciones lineales $\pi^j(q)$, y comprobamos que el mínimo del máximo es el punto de intersección de $\pi^3(q)$ y $\pi^4(q)$. Dicho punto es

$$\pi^3(q) = \pi^4(q) \Longrightarrow 2q - 16 = 20 - 38q \Longrightarrow 40q = 36 \Longrightarrow q = \frac{36}{40} = \frac{9}{10}.$$

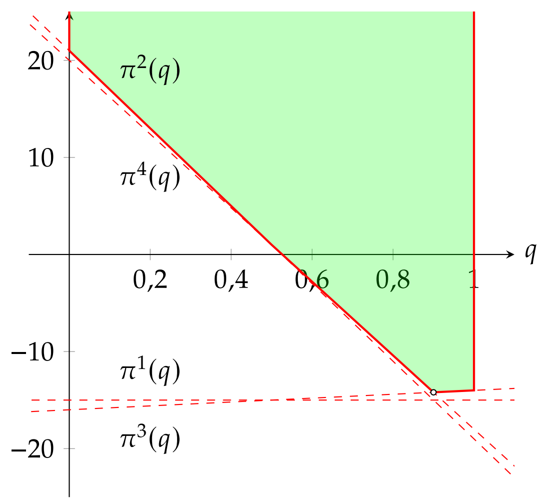


Figura 13.2: Mínimo del máximo para el jugador J_1.

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila J_2, podemos eliminar la filas 1 y 2, puesto que estas no son activas cuando se alcanza el mínimo de los valores $\pi^j(q)$. En ese caso obtenemos una matriz reducida
$$M^* = \begin{pmatrix} -14 & -16 \\ -18 & 20 \end{pmatrix}.$$
Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, y ha de satisfacer
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -14p - 18(1-p) = -16p + 20(1-p) \Longrightarrow 40p = 30 \Longrightarrow p = \frac{30}{40} = \frac{19}{20}.$$
- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es
$$\vec{p} = \left(0, 0, \frac{19}{20}, \frac{1}{20}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{9}{10}, \frac{1}{10}\right);$$
$$\left.\begin{aligned} v_2(M) = -14 \cdot \frac{19}{20} - 18\left(1 - \frac{19}{20}\right) = -16 \cdot \frac{19}{20} + 20 \cdot \left(1 - \frac{19}{20}\right) = \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{71}{5} \\ v_2(M) = 2 \cdot \frac{9}{10} - 16 = 20 - 38 \cdot \frac{9}{10} = -\frac{71}{5} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = -\frac{71}{5}.$$

Problema 13.2. Juegos cooperativos: definición, axiomas de Nash, teorema de Nash y pares de arbitraje.

Solución del problema 13.2. Un juego cooperativo (Morris, 1994 : 132) es aquel en el que los jugadores pueden hacer acuerdos vinculantes en cuanto a las estrategias que jugará cada uno de ellos.

Consideremos un juego bipersonal, con una región de pagos P y un punto de *statu quo* $(u_0, v_0) \in P$ (que usualmente será un par de valores máximos). El par de arbitraje correspondiente a la región de pagos P y al punto de *statu quo* (u_0, v_0), que denotaremos por $(u^*, v^*) = \Psi\big(P, (u_0, v_0)\big)$, es un punto que satisface los axiomas de negociación de Nash (Morris, 1994 : 135):

(1) Racionalidad individual. $u^* \geqslant u_0$ y $v^* \geqslant v_0$.

(2) Optimalidad Pareto. Si $(u', v') \in P$ es tal que $u' \geqslant u^*$ y $v' \geqslant v^*$, entonces $(u', v') = (u^*, v^*)$.

(3) Factibilidad. $(u^*, v^*) \in P$.

(4) Independencia de alternativas irrelevantes. Si $P' \subset P$ es otra región de pagos y $(u_0, v_0), (u^*, v^*) \in P'$ entonces
$$(u^*, v^*) = \Psi\big(P', (u_0, v_0)\big).$$

(5) Invarianza ante transformaciones lineales. Sea P' la región obtenida tras aplicarle a P la transformación lineal
$$\left.\begin{aligned} u' = au + b \\ v' = cv + d \end{aligned}\right\} \quad a, c > 0.$$
Entonces,
$$(au^* + b, cv^* + d) = \Psi\big(P', (au_0 + b, cv_0 + d)\big).$$

(6) Simetría. Si la región de pagos P es simétrica, esto es,
$$(u, v) \in P \Longleftrightarrow (v, u) \in P;$$
y si $u_0 = v_0$, entonces $u^* = v^*$.

Teorema de Nash (Morris, 1994 : 138). Existe un único procedimiento de arbitraje Ψ que satisface los axiomas de negociación de Nash.

Problema 13.3. Dos centros de investigación, que designaremos como jugadores 1 y 2 respectivamente, han obtenido independientemente fórmulas muy parecidas de un nuevo fármaco. El centro 1 ha patentado y homologado su fórmula para los países asiáticos y países de la Unión Europea. El centro 2 tiene homologada su patente para los países asiáticos y para Estados Unidos.

La comercialización de uno de los fármacos produciría unos beneficios de 7 billones de dólares en el mercado asiático, de 3 billones en el europeo y de 3 billones en Estados Unidos. Si se comercializan a la vez los dos fármacos en un mismo mercado, los beneficios se reparten a partes iguales.

Por otra parte, hay dos empresas 3 y 4, que tienen los factores y la tecnología necesarios para la fabricación de los fármacos, pero que cada una de ellas tiene una limitación en la producción ya que solo puede abastecer al mercado asiático y a uno de los otros mercados (europeo o americano).

Cualquiera de las dos empresas puede fabricar y comercializar cualquiera de los dos fármacos pero cada uno de los centros que posee una de las fórmulas solo puede conceder su licencia a una de las empresas, y cada empresa solo puede obtener una licencia.

Representar el juego en forma de función característica y hallar el *core* de este juego.

Solución del problema 13.3. Estamos ante un juego tetrapersonal. Los jugadores son los dos centros de investigación (P_1 y P_2) y las dos empresas (P_3 y P_4). La función característica del juego se da a continuación (los pagos se dan en billones de dólares).

$$v(\varnothing) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{4\}) = 0;$$

$$v(\{1,2\}) = 0; \quad v(\{1,3\}) = v(\{1,4\}) = v(\{2,3\}) = v(\{2,4\}) = \frac{13}{2}; \quad v(\{3,4\}) = 0;$$

$$v(\{1,2,3\}) = v(\{1,2,4\}) = v(\{1,3,4\}) = v(\{2,3,4\}) = 10; \quad v(\{1,2,3,4\}) = 13.$$

Sea $\vec{x}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= v(\{1,2,3,4\}) = 13;\\
x_i &\geqslant v(\{i\}) = 0, \ \forall i \in \{1,2,3,4\};\\
x_1 + x_2 &\geqslant v(\{1,2\}) = 0;\\
x_1 + x_3 &\geqslant v(\{1,3\}) = \frac{13}{2};\\
x_1 + x_4 &\geqslant v(\{1,4\}) = \frac{13}{2};\\
x_2 + x_3 &\geqslant v(\{2,3\}) = \frac{13}{2};\\
x_2 + x_4 &\geqslant v(\{2,4\}) = \frac{13}{2};\\
x_3 + x_4 &\geqslant v(\{3,4\}) = 0;\\
x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant v(\{1,2,3\}) = 10;\\
x_1 + x_2 + x_4 &\geqslant v(\{1,2,4\}) = 10;\\
x_1 + x_3 + x_4 &\geqslant v(\{1,3,4\}) = 10;\\
x_2 + x_3 + x_4 &\geqslant v(\{2,3,4\}) = 10.
\end{aligned}$$

Si sumamos las cuatro últimas inecuaciones se obtiene

$$3(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geqslant 40 \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant \frac{40}{3} > 13.$$

Como el resultado contradice la primera ecuación, no hay ninguna solución que satisfaga todas las condiciones expuestas. En consecuencia, el núcleo del juego es vacío.

Examen 14. Febrero de 2017

Problema 14.1. Una empresa tiene dos compañías C_1 y C_2 que tienen un promedio de facturas por impuestos, de 8 y 10 millones de euros respectivamente cada año.

Para cada compañía la empresa puede, o bien pagar su verdadero impuesto obligatorio o falsificar sus cuentas y mostrar un impuesto de cero euros.

La Agencia Tributaria solo tiene recursos para investigar una de las compañías cada año. Si investigan una compañía y comprueba que son falsos los resultados, descubren el fraude y esa compañía tendrá que pagar el impuesto requerido más una multa de la mitad.

Los pagos son el dinero que la Agencia Tributaria recibe.

Hallar la forma normal y la solución de este juego.

Solución del problema 14.1. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma cero con información imperfecta. La forma extensiva se representa en la figura 14.1.

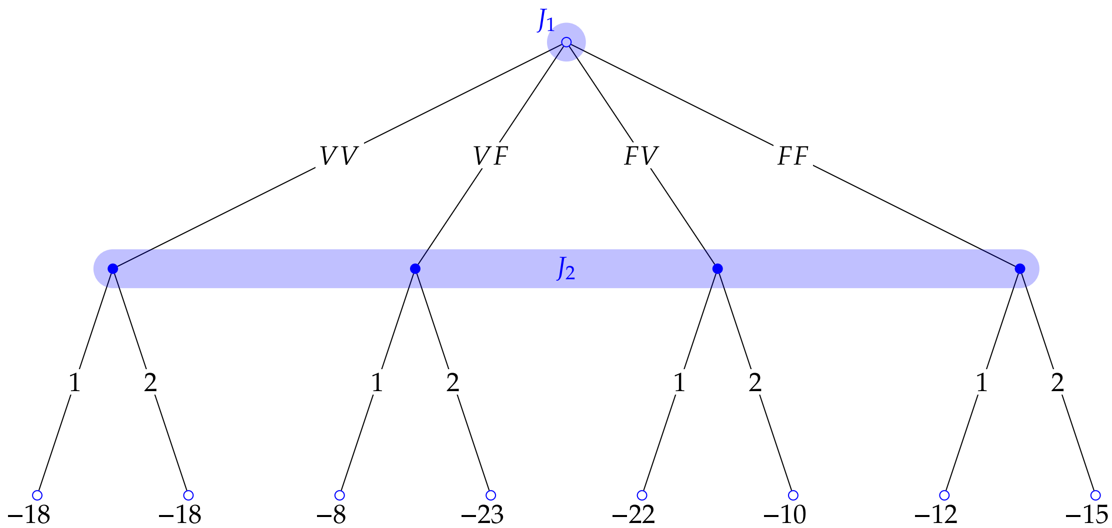


Figura 14.1: Forma extensiva del juego del problema 14.1.

El jugador J_1 (la empresa) puede elegir para cada una de sus empresas entre pagar el verdadero impuesto (V) o falsificar sus cuentas (F). A continuación, el jugador J_2 (la Agencia Tributaria), sin conocer la elección de J_1, elige entre investigar una de las dos compañías. Por tanto, el conjunto de estrategias para ambos jugadores es

$$\Sigma_1 = \{VV, VF, FV, FF\}, \quad \Sigma_2 = \{1, 2\}.$$

Como no hay movimientos aleatorios, dichas estrategias permiten obtener directamente los pagos en cada caso, por lo que tenemos los datos para escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 14.1.

M		J_2	
		1	2
J_1	VV	−18	−18
	VF	−8	−23
	FV	−22	−10
	FF	−12	−15

Cuadro 14.1: Forma normal del juego del problema 14.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 4 domina a la fila 1. Eliminamos la fila dominada, y obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -8 & -23 \\ -22 & -10 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, con

  $$\pi^1(q) = -8q - 23(1-q) = 15q - 23; \quad \pi^2(q) = -22q - 10(1-q) = -12q - 10; \quad \pi^3(q) = -12q - 15(1-q) = 3q - 15.$$

  Representamos en la figura 14.2 las funciones lineales $\pi^j(q)$, y comprobamos que el mínimo del máximo es el punto de intersección de $\pi^2(q)$ y $\pi^3(q)$. Dicho punto es

  $$\pi^2(q) = \pi^3(q) \Longrightarrow -12q - 10 = 3q - 15 \Longrightarrow 15q = 5 \Longrightarrow q = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}.$$

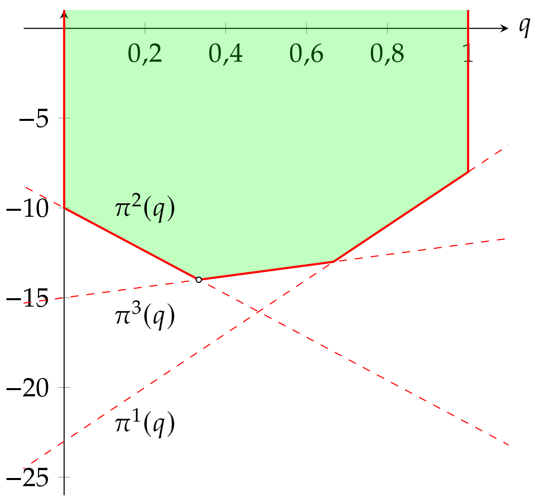


Figura 14.2: Mínimo del máximo para el jugador J_2.

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila J_1, podemos eliminar la fila 1, puesto que esta no es activa cuando se alcanza el mínimo de los valores $\pi^j(q)$. En ese caso obtenemos una segunda matriz reducida

$$M^{**} = \begin{pmatrix} -22 & -10 \\ -12 & -15 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -22p - 12(1-p) = -10p - 15(1-p) \Longrightarrow 1 - p = 4p \Longrightarrow p = \frac{1}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(0, 0, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) = -22 \cdot \frac{1}{5} - 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = -10 \cdot \frac{1}{5} - 15 \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) = -14 \\ v_2(M) = -12 \cdot \frac{1}{3} - 10 = 3 \cdot \frac{1}{3} - 15 = -14 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = -14.$$

Problema 14.2. Dos empresas automovilísticas deciden lanzar al mercado al mismo tiempo un modelo de coche de gama intermedia. Cada una de ellas se está planteando si ofrecer o no financiación a los clientes, lo cual le supondría captar mayor cuota de mercado, pero llevaría consigo ciertos costes. Ambas empresas prefieren no ofertar dicha financiación, pero cada una teme que la otra la ofrezca y, por tanto, acapare mayor número de compradores. Supongamos que los beneficios esperados por las empresas son los siguientes. Si ambas ofrecen financiación, 40 millones para cada una; si ninguna lo hace, 60 para cada una; y si una la ofrece y la otra no, la primera gana 80 y la segunda 30.

Calcular el punto de equilibrio si el juego se considera no cooperativo y si se considera cooperativo.

Solución del problema 14.2. Idéntico al problema 12.2 de la página 66.

Problema 14.3. La función característica de un juego tripersonal cooperativo viene dada por:

$$\nu(\varnothing) = \nu(\{1\}) = \nu(\{2\}) = \nu(\{3\}) = 0;$$

$$\nu(\{1,2\}) = 3; \quad \nu(\{1,3\}) = 5; \quad \nu(\{2,3\}) = 7; \quad \nu(\{1,2,3\}) = 10.$$

Calcular el valor de Shapley.

Solución del problema 14.3. Estudiamos cada jugador por separado.

- Jugador J_1.

$$\begin{aligned} \delta(1, \{1\}) &= \nu(\{1\}) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0; \\ \delta(1, \{1,2\}) &= \nu(\{1,2\}) - \nu(\{2\}) = 3 - 0 = 3; \\ \delta(1, \{1,3\}) &= \nu(\{1,3\}) - \nu(\{3\}) = 5 - 0 = 5; \\ \delta 11, 2, 3 &= \nu(\{1,2,3\}) - \nu(\{2,3\}) = 10 - 7 = 3; \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \sum_{\mathcal{S} \ni 1} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(1, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 3 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 5 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 3 = \frac{7}{3}.$$

- Jugador J_2.

$$\begin{aligned}
\delta\big(2,\{2\}\big) &= \nu\big(\{2\}\big) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(2,\{1,2\}\big) &= \nu\big(\{1,2\}\big) - \nu\big(\{1\}\big) = 3 - 0 = 3;\\
\delta\big(2,\{2,3\}\big) &= \nu\big(\{2,3\}\big) - \nu\big(\{3\}\big) = 7 - 0 = 7;\\
\delta\big(2,\{1,2,3\}\big) &= \nu\big(\{1,2,3\}\big) - \nu\big(\{1,3\}\big) = 10 - 5 = 5;
\end{aligned}$$

$$\phi_2 = \sum_{\mathcal{S}\ni 2} \frac{\big(3-|\mathcal{S}|\big)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(2,\mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!}\cdot 0 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 3 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 7 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 5 = \frac{10}{3}.$$

- Jugador J_3.

$$\begin{aligned}
\delta\big(3,\{3\}\big) &= \nu\big(\{3\}\big) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(3,\{1,3\}\big) &= \nu\big(\{1,3\}\big) - \nu\big(\{1\}\big) = 5 - 0 = 5;\\
\delta\big(3,\{2,3\}\big) &= \nu\big(\{2,3\}\big) - \nu\big(\{2\}\big) = 7 - 0 = 7;\\
\delta\big(3,\{1,2,3\}\big) &= \nu\big(\{1,2,3\}\big) - \nu\big(\{1,2\}\big) = 10 - 3 = 7;
\end{aligned}$$

$$\phi_3 = \sum_{\mathcal{S}\ni 3} \frac{\big(3-|\mathcal{S}|\big)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(3,\mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!}\cdot 0 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 5 + \frac{1!1!}{3!}\cdot 7 + \frac{0!2!}{3!}\cdot 7 = \frac{13}{3}.$$

Por tanto, el vector de Shapley es $\vec{\phi}\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{13}{3}\right)$.

Examen 15. Septiembre de 2017 – Convocatoria ordinaria

Problema 15.1. En una urna hay tres bolas rojas y cinco verdes.

El jugador J_1 extrae una bola aleatoriamente y sin mirarla, tira una moneda y elige cara (C) o cruz (X).

Después, al jugador J_2 se le comunica si J_1 ha elegido cara o cruz pero tampoco sabe el resultado de la bola extraída por J_1. Entonces J_2 elige cara o cruz.

La función de pago es:

$$\begin{array}{rclrcl} M(R,C,C) &=& 4, & M(V,C,C) &=& 2,\\ M(R,C,X) &=& -3, & M(V,C,X) &=& 1,\\ M(R,X,C) &=& 5, & M(V,X,C) &=& 0,\\ M(R,X,X) &=& -2, & M(V,X,X) &=& -3. \end{array}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 15.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 15.1.

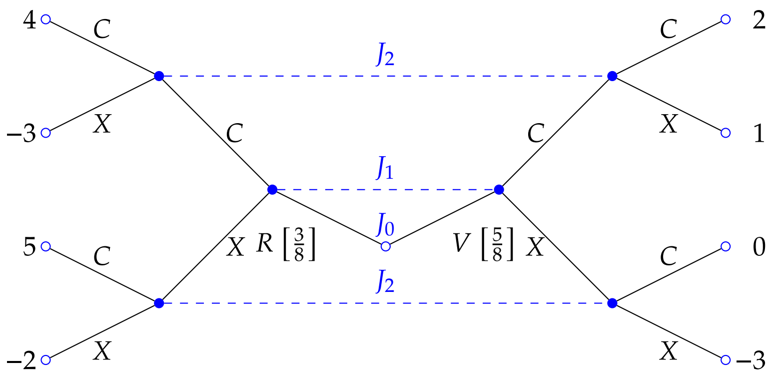


Figura 15.1: Forma extensiva del juego del problema 15.1.

El jugador J_0 elige aleatoriamente una bola, que puede ser roja (R) con probabilidad $\frac{3}{8}$ o verde (V) con probabilidad $\frac{5}{8}$. Después, el jugador J_1, sin conocer el color de la bola, elige cara (C) o cruz (X). Por último, el jugador J_2, sin conocer el color de la bola pero conociendo la elección de J_1, elige a su vez cara (C) o cruz (X). Así, el conjunto de estrategias posibles para ambos jugadores es

$$J_1 = \{C, X\}, \quad J_2 = \{CC, CX, XC, XX\}.$$

En función de dichas estrategias calculamos los pagos esperados.

$$\pi(C,CC) = \pi(C,CX) = \frac{3}{8}\cdot 4 + \frac{5}{8}\cdot 2 = \frac{11}{4}; \quad \pi(C,XC) = \pi(C,XX) = \frac{3}{8}\cdot(-3) + \frac{5}{8}\cdot 1 = -\frac{1}{2};$$

$$\pi(X,CC) = \frac{3}{8}\cdot 5 + \frac{5}{8}\cdot 0 = \frac{15}{8}; \quad \pi(X,CX) = \frac{3}{8}\cdot(-2) + \frac{5}{8}\cdot(-3) = -\frac{21}{8};$$

$$\pi(X, XC) = \frac{3}{8} \cdot 5 + \frac{5}{8} \cdot 0 = \frac{15}{8}; \quad \pi(X, XX) = \frac{3}{8} \cdot (-2) + \frac{5}{8} \cdot (-3) = -\frac{21}{8}.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 15.1.

M		J_2			
		CC	CX	XC	XX
J_1	C	$\frac{11}{4}$	$\frac{11}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	X	$\frac{15}{8}$	$-\frac{21}{8}$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{21}{8}$

Cuadro 15.1: Forma normal del juego del problema 15.1.

Resolución:

- La matriz M tiene un punto de silla, que es el elemento $(1, 4)$. En consecuencia, el jugador J_1 debe elegir siempre cara (C), y el jugador J_2 debe elegir siempre cruz (XX), independientemente de la elección J_1. El valor del juego es
$$v(M) = -\frac{1}{2}.$$

Problema 15.2. Hallar los valores maximín y el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-3, -6) & (1, 0) \\ (3, -6) & (0, 3) \\ (-3, 3) & (3, 3) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 15.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$
No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la primera fila, que está dominada por la tercera. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 3p - 3(1-p) = 3(1-p) \Longrightarrow 3p = 6(1-p) \Longrightarrow p = 2(1-p) \Longrightarrow p = \frac{2}{3};$$
$$v_1 = 3 \cdot \frac{2}{3} - 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 1.$$

- La matriz de pagos del jugador J_2 es
$$M_2 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$
Tiene un punto de silla, que es el elemento m_{21}, por lo que $v_2 = m_{21} = 0$.

En la figura 15.2 se representa la región de pagos. Dado que en ella solo hay un punto óptimo Pareto, el punto $(3, 3)$, dicho punto será el par de arbitraje buscado, que maximiza la función

$$g(u, v) = (u - 1)v.$$

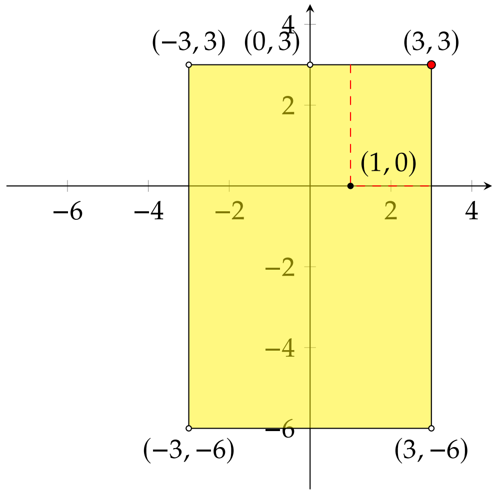


Figura 15.2: Región de pagos para el problema 15.2.

Problema 15.3. Una finca rústica está valorada por su actual propietario en 200 000 euros.

Un empresario le ofrece acondicionarla para su utilización como polígono industrial, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 500 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar la finca para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor de la finca sería de 600 000 euros.

Si los tres participantes llegan al acuerdo de dividir la finca en dos zonas, una comercial y otra residencial se alcanzaría un valor de mercado de 900 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* o núcleo de este juego y el valor de Shapley.

Solución del problema 15.3. Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca P, el empresario que propone la utilización de la finca como polígono industrial I, y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca V. La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$v(\varnothing) = 0; \quad v(\{P\}) = 200; \quad v(\{I\}) = v(\{V\}) = 0;$$

$$v(\{P, I\}) = 500; \quad v(\{P, V\}) = 600; \quad v(\{I, V\}) = 0; \quad v(\{P, I, V\}) = 900.$$

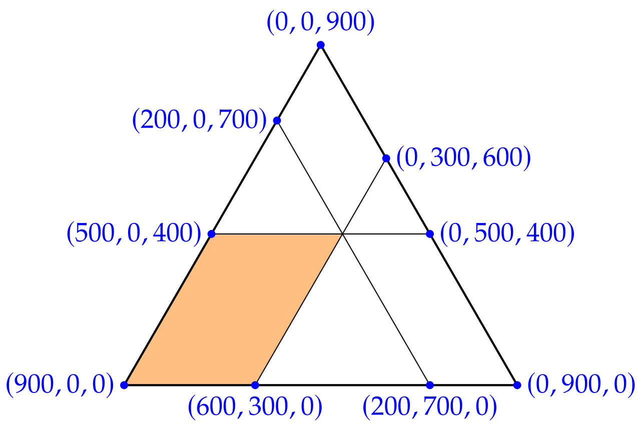


Figura 15.3: Obtención gráfica del *core* para el juego del problema problema 15.3.

Sea $\vec{x}(x_P, x_I, x_V)$ una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$x_P + x_I + x_V = v\big(\{P, I, V\}\big) = 900; \tag{15.1}$$
$$x_P \geqslant v\big(\{P\}\big) = 200; \tag{15.2}$$
$$x_I \geqslant v\big(\{I\}\big) = 0; \tag{15.3}$$
$$x_V \geqslant v\big(\{V\}\big) = 0; \tag{15.4}$$
$$x_P + x_I \geqslant v\big(\{P, I\}\big) = 500; \tag{15.5}$$
$$x_P + x_V \geqslant v\big(\{P, V\}\big) = 600; \tag{15.6}$$
$$x_I + x_V \geqslant v\big(\{I, V\}\big) = 0. \tag{15.7}$$

De las desigualdades (15.2) y (15.5) se deduce

$$x_I \leqslant 300.$$

Análogamente, de las desigualdades (15.2) y (15.6) se deduce

$$x_V \leqslant 400.$$

Imponiendo además la igualdad (15.1),

$$x_P = 900 - x_I - x_V.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas las condiciones anteriores, y que se representa en la figura 15.3.

$$\big\{(900 - x_I - x_V, x_I, x_V) : \ 0 \leqslant x_I \leqslant 300, \ 0 \leqslant x_V \leqslant 400\big\}.$$

Para calcular el valor de Shapley estudiamos cada jugador por separado.

- Jugador P.

$$\delta\big(P, \{P\}\big) = v\big(\{P\}\big) - v(\varnothing) = 200 - 0 = 200;$$

$$\delta\big(P, \{P, I\}\big) = v\big(\{P, I\}\big) - v\big(\{I\}\big) = 500 - 0 = 500;$$

$$\delta\big(P, \{P, V\}\big) = v\big(\{P, V\}\big) - v\big(\{V\}\big) = 600 - 0 = 600;$$

$$\delta\big(P, \{P, I, V\}\big) = v\big(\{P, I, V\}\big) - v\big(\{I, V\}\big) = 900 - 0 = 900;$$

$$\phi_P = \sum_{\mathcal{S} \ni P} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(P, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 200 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 500 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 600 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 900 = 550.$$

- Jugador I.

$$\delta\big(I, \{I\}\big) = v\big(\{I\}\big) - v(\varnothing) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta\big(I, \{P, I\}\big) = v\big(\{P, I\}\big) - v\big(\{P\}\big) = 500 - 200 = 300;$$

$$\delta\big(I, \{I, V\}\big) = v\big(\{I, V\}\big) - v\big(\{V\}\big) = 0 - 0 = 0;$$

$$\delta\big(I, \{P, I, V\}\big) = v\big(\{P, I, V\}\big) - v\big(\{P, V\}\big) = 900 - 600 = 300;$$

$$\phi_I = \sum_{\mathcal{S} \ni I} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(I, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 300 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 300 = 150.$$

- Jugador V.

$$\delta\big(V,\{V\}\big)=\nu\big(\{V\}\big)-\nu(\varnothing)=0-0=0;$$

$$\delta\big(V,\{P,V\}\big)=\nu\big(\{P,V\}\big)-\nu\big(\{P\}\big)=600-200=400;$$

$$\delta\big(V,\{I,V\}\big)=\nu\big(\{I,V\}\big)-\nu\big(\{I\}\big)=0-0=0;$$

$$\delta\big(V,\{P,I,V\}\big)=\nu\big(\{P,I,V\}\big)-\nu\big(\{P,I\}\big)=900-500=400;$$

$$\phi_V=\sum_{\mathcal{S}\ni V}\frac{(3-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(V,\mathcal{S})=\frac{2!0!}{3!}\cdot 0+\frac{1!1!}{3!}\cdot 400+\frac{1!1!}{3!}\cdot 0+\frac{0!2!}{3!}\cdot 400=200.$$

Por tanto, el vector de Shapley es $\vec{\phi}(550,150,200)$.

Examen 16. Septiembre de 2017 – Convocatoria de reserva

Problema 16.1. El jugador J_2 lanza un dado con seis caras numeradas del uno al seis y mira si el resultado es par (P) o impar (I). A continuación elige seguir un plan (S) o cambiarlo (C).

Después el jugador J_1 sin conocer la elección de J_2 pero sabiendo el resultado del dado, elige seguir (S) o cambiar (C).

La función de pago es:

$$\begin{array}{rcrrcr} M(P,S,S) & = & -3, & M(I,S,S) & = & -5, \\ M(P,S,C) & = & 4, & M(I,S,C) & = & 8, \\ M(P,C,S) & = & 2, & M(I,C,S) & = & -2, \\ M(P,C,C) & = & 1, & M(I,C,C) & = & 3. \end{array}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 16.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. La forma extensiva se representa en la figura 16.1. Dado que jugador J_2 juega en primer lugar, este será nuestro jugador fila, y los pagos que se recogen son los que recibe el jugador J_2.

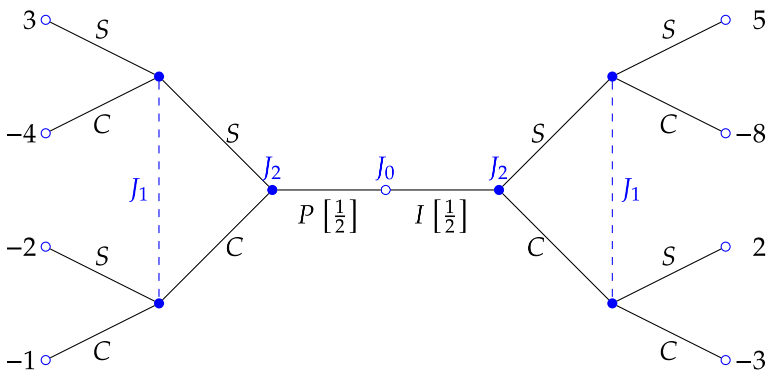


Figura 16.1: Forma extensiva del juego del problema 16.1.

El jugador J_0 lanza un dado, que dar un resultado par (P) o impar (I), ambos con probabilidad $\frac{1}{2}$. Después, el jugador J_1, que conoce el resultado del dado, elige seguir (S) o cambiar (C). Por último, el jugador J_2, que también conoce el resultado del dado pero no la elección de J_1, elige a su vez seguir (S) o cambiar (C). Así, el conjunto de estrategias posibles para ambos jugadores es

$$J_1 = J_2 = \{SS, SC, CS, CC\}.$$

En función de dichas estrategias calculamos los pagos esperados.

$$\pi(SS,SS) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 5 = 4; \quad \pi(SS,SC) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-8) = -\frac{5}{2};$$

$$\pi(SS,CS)=\frac{1}{2}\cdot(-4)+\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{1}{2};\quad \pi(SS,CC)=\frac{1}{2}\cdot(-4)+\frac{1}{2}\cdot(-8)=-6;$$
$$\pi(SC,SS)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{5}{2};\quad \pi(SC,SC)=\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot(-3)=0;$$
$$\pi(SC,CS)=\frac{1}{2}\cdot(-4)+\frac{1}{2}\cdot 2=-1;\quad \pi(SC,CC)=\frac{1}{2}\cdot(-4)+\frac{1}{2}\cdot(-3)=-\frac{7}{2};$$
$$\pi(CS,SS)=\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{3}{2};\quad \pi(CS,SC)=\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot(-8)=-5;$$
$$\pi(CS,CS)=\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 5=2;\quad \pi(CS,CC)=\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot(-8)=-\frac{9}{2};$$
$$\pi(CC,SS)=\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot 2=0;\quad \pi(CC,SC)=\frac{1}{2}\cdot(-2)+\frac{1}{2}\cdot(-3)=-\frac{5}{2};$$
$$\pi(CC,CS)=\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot 2=\frac{1}{2};\quad \pi(CC,CC)=\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot(-3)=-2.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 16.1.

M		J_1			
		SS	SC	CS	CC
J_2	SS	4	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-6
	SC	$\frac{5}{2}$	0	-1	$-\frac{7}{2}$
	CS	$\frac{3}{2}$	-5	2	$-\frac{9}{2}$
	CC	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	-2

Cuadro 16.1: Forma normal del juego del problema 16.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- En la matriz M la columna 4 domina a las columnas 1 y 3. Eliminamos las columnas dominadas, y obtenemos la matriz reducida
$$M^{*}=\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -6 \\ 0 & -\frac{7}{2} \\ -5 & -\frac{9}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$
- En la matriz M^{*} la fila 2 domina a las filas 1 y 3. Eliminamos las filas dominadas, y obtenemos una nueva matriz reducida
$$M^{**}=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{7}{2} \\ -\frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$
- Para la matriz reducida M^{**}, una estrategia mixta para el jugador fila J_2 será de la forma $\vec{p}=(p,1-p)$, y ha de satisfacer
$$\pi_1(p)=\pi_2(p)\Longrightarrow -\frac{5}{2}(1-p)=-\frac{7}{2}p-2(1-p)\Longrightarrow 5(1-p)=7p+4(1-p)\Longrightarrow p=\frac{1}{8}.$$
- Análogamente, para la matriz reducida M^{**}, una estrategia mixta para el jugador columna J_1 será de la forma $\vec{q}=(q,1-q)$, y tiene que verificar
$$\pi^1(q)=\pi^2(q)\Longrightarrow -\frac{7}{2}(1-q)=-\frac{5}{2}q-2(1-q)\Longrightarrow 7(1-q)=5q+4(1-q)\Longrightarrow q=\frac{3}{8}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(0, \frac{1}{8}, 0, \frac{7}{8}\right); \quad \vec{q} = \left(0, \frac{3}{8}, 0, \frac{5}{8}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} v_2(M) = -\frac{5}{2}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = -\frac{7}{2} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = -\frac{35}{16} \\ \\ v_1(M) = -\frac{7}{2} \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = -\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{8} - 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{8}\right) = -\frac{35}{16} \end{array}\right\} \Longrightarrow v(M) = -\frac{35}{16}.$$

Problema 16.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2}, 0\right) & \left(-\frac{1}{2}, -4\right) \\ (1, 2) & (-2, 4) \\ (4, -4) & \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 16.2. Idéntico al problema 5.2 de la página 26.

Problema 16.3. El juego tripersonal de *parejas* es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si P_2 elige a P_3, y P_3 elige a P_2, entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de $\frac{1}{2}$, mientras la persona que no entra en la pareja recibe -1.

Si no se forma pareja, por ejemplo, si P_1 elige a P_2, P_2 elige a P_3, y P_3 elige a P_1, entonces cada uno recibe un pago de cero.

Probar que es de suma nula y esencial.

Solución del problema 16.3. Idéntico al problema 3.3 de la página 17.

Examen 17. Enero de 2018

Problema 17.1. Se considera el siguiente juego de suma nula:

Dos jugadores J_1 y J_2 eligen a la vez el número de dedos que van a enseñar al contrario entre 1, 2 y 3.

Si la suma es par, J_1 paga a J_2 la diferencia de los dedos (en euros) sacados por ambos.

Si la suma es impar, J_2 paga a J_1 una cantidad igual al número de dedos (en euros) sacados por J_1.

Determinar el valor y las estrategias óptimas de los dos jugadores.

Solución del problema 17.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta. Las estrategias de cada jugador, que no conoce de antemano lo que jugará el otro, son precisamente el número de dedos que van a enseñar.

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{1, 2, 3\}.$$

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 17.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \big\{\Sigma_1 = \{1, 2, 3\}, \Sigma_2 = \{1, 2, 3\}\big\}\Big\}.$$

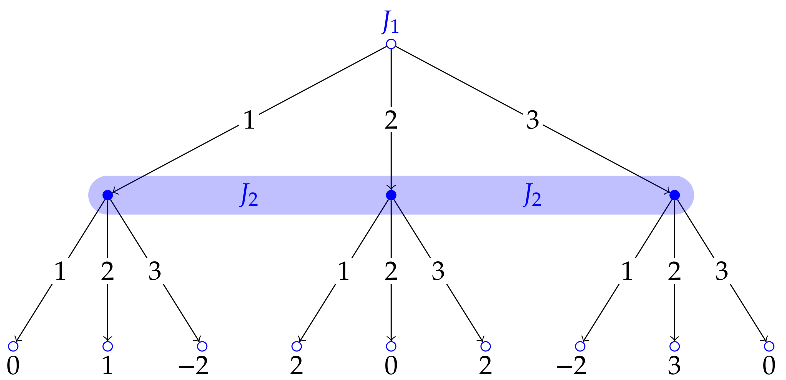


Figura 17.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 17.1.

La forma normal del juego Γ se recoge en la matriz M del cuadro 17.1.

M		J_2		
		1	2	3
J_1	1	0	1	−2
	2	2	0	2
	3	−2	3	0

Cuadro 17.1: Forma normal del juego Γ del problema 17.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.

- La fila 1 está dominada por la estrategia mixta[1] para J_1 dada por $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Si se elimina se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

- En la matriz M^* la columna 1 domina a la columna 3. Eliminamos también la columna dominada y obtenemos una nueva matriz reducida

$$M^{**} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida M^{**}, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 2p - 2(1-p) = 3(1-p) \Longrightarrow 2p = 5(1-p) \Longrightarrow p = \frac{5}{7}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida M^{**}, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, y tiene que verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow 2q = -2q + 3(1-q) \Longrightarrow 4q = 3(1-q) \Longrightarrow q = \frac{3}{7}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(0, \frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= 2\cdot\frac{5}{7} - 2\cdot\left(1-\frac{5}{7}\right) = 3\cdot\left(1-\frac{5}{7}\right) = \frac{6}{7} \\ v_2(M) &= 2\cdot\frac{3}{7} = -2\cdot\frac{3}{7} + 3\cdot\left(1-\frac{3}{7}\right) = \frac{6}{7} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{6}{7}.$$

Problema 17.2. Dos comerciantes en competencia, compran un producto a 10 euros la unidad y entre los dos venden 500 unidades por día. Cada uno ha estado vendiendo a 15 euros la unidad con lo que se dividían el mercado a partes iguales.

Uno de los comerciantes está pensando en vender a menor precio que el otro y se sabe que el comerciante que ponga el precio más bajo automáticamente se queda con todas las ventas del día. Si ambos fijan el mismo precio, se reparten a partes iguales el mercado.

Obligatoriamente el precio del producto debe ser un número entero entre 11 y 15 ambos inclusive.

(a) Escribir la matriz de pagos.

(b) ¿Cuál debería ser el precio definitivo para un día, utilizando el criterio de las estrategias dominadas?

[1]Para justificar la eliminación de una estrategia pura dominada por una estrategia mixta véanse el corolario 2.2 y el teorema 2.11 de Jones (2000 : 80).

Solución del problema 17.2. Hay una cierta ambigüedad en este problema. Si ambos comerciantes fijan precios distintos el que ofrece el precio más barato vende 500 unidades y obtiene beneficios. Pero el que ofrece el precio más caro podemos considerar que tiene pérdidas (beneficios negativos) puesto que tiene que comprar el producto, y podemos considerar que tiene beneficios nulos (compra el producto, pero podría venderlo otro día, por lo que no se consideraría una pérdida). Lo voy a resolver con la primera interpretación, aunque en este caso no afectaría demasiado al resultado, solo a los valores de la matriz de pagos.

(a) Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Si ambos jugadores venden a un precio p se reparten el mercado, por lo que cada uno obtendría unos beneficios de

$$\frac{500}{2}(p-10) = 250(p-10).$$

En otro caso, si un jugador vende a un precio p y otro a precio q con $p < q$, el que vende a precio más alto no tendría beneficios, y el que vende a precio más bajo tendría unos beneficios de

$$500(p-10).$$

Con esta información se puede dar la bimatriz M de la forma normal del juego, que se recoge en el cuadro 17.2.

M		J_2				
		11	12	13	14	15
J_1	11	(250, 250)	(500, 0)	(500, 0)	(500, 0)	(500, 0)
	12	(0, 500)	(500, 500)	(1 000, 0)	(1 000, 0)	(1 000, 0)
	13	(0, 500)	(0, 1 000)	(750, 750)	(1 500, 0)	(1 500, 0)
	14	(0, 500)	(0, 1 000)	(0, 1 500)	(1 000, 1 000)	(2 000, 0)
	15	(0, 500)	(0, 1 000)	(0, 1 500)	(0, 2 000)	(1 250, 1 250)

Cuadro 17.2: Forma normal del juego del problema 17.2.

(b) El juego es simétrico, por lo que basta con resolverlo para uno de los jugadores, dado que ambos tienen el mismo conjunto de estrategias y la misma matriz de pagos. La matriz de pagos para cualquiera de los jugadores se recoge en el cuadro 17.3.

	11	12	13	14	15
11	250	500	500	500	500
12	0	500	1 000	1 000	1 000
13	0	0	750	1 500	1 500
14	0	0	0	1 000	2 000
15	0	0	0	0	1 250

Cuadro 17.3: Matriz de pagos para ambos jugadores.

La matriz anterior tiene un punto de silla, $m_{11,11} = 250$, por lo que ambos jugadores deberían fijar un precio de 11 €, siendo en ese caso los beneficios para ambos de 250 €. Si se hace el mismo razonamiento únicamente por dominancia, es fácil ver que la primera columna domina a todas las demás. Y si nos quedamos únicamente con dicha columna, entonces la primera fila también domina a todas las demás.

Problema 17.3. Conceptos de solución de los juegos N-personales cooperativos.

Solución del problema 17.3. En el caso de los juegos N-personales cooperativos estudiamos dos conceptos de solución:

- **Conjunto estable de imputaciones**. Sea v un juego N-personal con jugadores $\mathcal{P} = \{J_1, \ldots, J_N\}$. Llamaremos imputación (Morris, 1994 : 156) a un vector de la forma $\vec{x}(x_1, \ldots, x_N)$, y tal que satisface:

  - Racionalidad individual:
  $$\forall i \in \{1, \ldots, N\} : \ x_i \geqslant v\big(\{J_i\}\big).$$
  - Racionalidad colectiva:
  $$\sum_{i=1}^{N} x_i = v(\mathcal{P}).$$

  Sean $\vec{x}, \vec{y}$ dos imputaciones, y sea $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ una coalición. Diremos que $\vec{x}$ domina a $\vec{y}$ para la coalición $\mathcal{S}$ (Morris, 1994 : 158), y lo denotaremos por $\vec{x} \succ_{\mathcal{S}} \vec{y}$, si se satisfacen:

  - $\forall J_i \in \mathcal{S} : \ x_i > y_i$.
  - $\displaystyle\sum_{J_i \in \mathcal{S}} x_i \leqslant v(\mathcal{S})$.

  Por último, diremos que X es un conjunto estable de imputaciones (Morris, 1994 : 174), si es un conjunto de imputaciones que satisface:

  - Estabilidad interna. No existen en X dos imputaciones $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tales que $\vec{x}$ domine a $\vec{y}$ para ninguna coalición.
  - Estabilidad externa. Si $\vec{y} \notin X$ es una imputación, existe otra imputación $\vec{x} \in X$ y una coalición $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ tales que $\vec{x}$ domina a $\vec{y}$ para la coalición $\mathcal{S}$.

  Según el teorema 6.21 de Morris (1994 : 177), si v es un juego simple,
  $$\forall \mathcal{T} \subset \mathcal{P} : \ v(\mathcal{T}) \in \{0, 1\},$$
  y si $\mathcal{S}$ es una coalición ganadora mínima,
  $$\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{S} \Longrightarrow 0 = v(\mathcal{T}) < v(\mathcal{S}) = 1,$$
  entonces el conjunto de todas las imputaciones $\vec{x}(x_1, \ldots, x_N)$ que verifiquen
  $$\forall J_i \notin \mathcal{S} : \ x_i = 0$$
  es un conjunto estable de imputaciones.

  Un conjunto estable de imputaciones X puede ser visto como la solución de un juego N-personal cooperativo. Si se da una imputación que no pertenece a X, es fácil que esta se abandone en favor de otra que sí pertenezca a X, sin embargo, no debería ocurrir el cambio a la inversa, es decir, que se abandone una imputación de X por otra que no es de X. Esto está garantizado por la estabilidad externa. Además, cualquiera de las imputaciones de X podrían ocurrir sin que una prevalezca sobre las otras, por la estabilidad interna.

- **Valor de Shapley**. Sea ν un juego N-personal con jugadores $\mathcal{P} = \{J_1, \dots, J_N\}$. Llamaremos vector de Shapley (Morris, 1994 : 180) del juego ν al vector $\vec{\phi}(\phi_1, \dots, \phi_N)$, donde cada ϕ_i será denominado valor de Shapley para el jugador J_i y es de la forma

$$\phi_i = \sum_{\mathcal{S} \ni J_i} \frac{\big(N - |\mathcal{S}|\big)!\big(|\mathcal{S}| - 1\big)!}{N!} \delta(J_i, \mathcal{S});$$

con

$$\delta(J_i, \mathcal{S}) = \nu(\mathcal{S}) - \nu\big(\mathcal{S} \setminus \{J_i\}\big). \tag{17.1}$$

Según el teorema 6.22 de Morris (1994 : 181), el vector de Shapley de un juego es una imputación para dicho juego.

El valor de Shapley es una solución para un juego cooperativo en el sentido en que es una imputación en la que se trata de asignar los pagos de cada jugador en función de *cuánto* contribuye dicho jugador en cada una de las posibles coaliciones en las que participa. En particular, el término (17.1), es una forma de medir precisamente cuánto contribuye el jugador J_i a los pagos de la coalición $\mathcal{S}$ (a la que pertenece).

Examen 18. Febrero de 2018

Problema 18.1. Se considera el siguiente juego de suma nula:

El jugador J_1 saca al azar una bola de una urna que contiene tres bolas negras y dos blancas; la mira y apuesta cinco euros o diez euros.

El jugador J_2 puede jugar o no jugar.

Si J_2 no juega, entonces J_1 le gana cinco euros, y si J_2 juega, entonces debe igualar la apuesta de J_1. En ese caso J_1 ganará todo el dinero si toma una bola blanca, y si toma una negra perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 18.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador J_0, elige una bola negra o blanca con probabilidades

$$\mathcal{P}(N) = \frac{3}{5}, \quad \mathcal{P}(B) = \frac{2}{5}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_1, tras ver la bola extraída, elige apostar cinco (C) o diez (D) euros. El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{CC, CD, DC, DD\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia CD indica que si la bola extraída es negra entonces J_1 apostará 5 €, mientras que si la bola elegida es blanca entonces J_1 apostará 10 €. Por último, en la tercera etapa, el jugador J_2 elige jugar o no jugar, conociendo la apuesta del jugador J_1, pero no la bola extraída[1]. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_2 será

$$\Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\};$$

donde, por ejemplo la estrategia JN indica que si J_1 apostó 5 € entonces J_2 jugará, mientras que si J_1 apostó 10 € entonces J_2 no jugará.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 18.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \big\{\Sigma_1 = \{CC, CD, DC, DD\}, \Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\}\big\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(CC, JJ) = \pi(CC, JN) = \frac{3}{5} \cdot (-5) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -1; \quad \pi(CC, NJ) = \pi(CC, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$

$$\pi(CD, JJ) = \frac{3}{5} \cdot (-5) + \frac{2}{5} \cdot 10 = 1; \quad \pi(CD, JN) = \frac{3}{5} \cdot (-5) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -1;$$

$$\pi(CD, NJ) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 10 = 7; \quad \pi(CD, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$

[1]No se especifica, pero entendemos que J_2 no conoce la bola extraída puesto que en otro caso el juego sería casi trivial.

$$\pi(DC, JJ) = \frac{3}{5} \cdot (-10) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -4; \quad \pi(DC, JN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$
$$\pi(DC, NJ) = \frac{3}{5} \cdot (-10) + \frac{2}{5} \cdot 5 = -4; \quad \pi(DC, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5;$$
$$\pi(DD, JJ) = \pi(DD, NJ) = \frac{3}{5} \cdot (-10) + \frac{2}{5} \cdot 10 = -2; \quad \pi(DD, JN) = \pi(DD, NN) = \frac{3}{5} \cdot 5 + \frac{2}{5} \cdot 5 = 5.$$

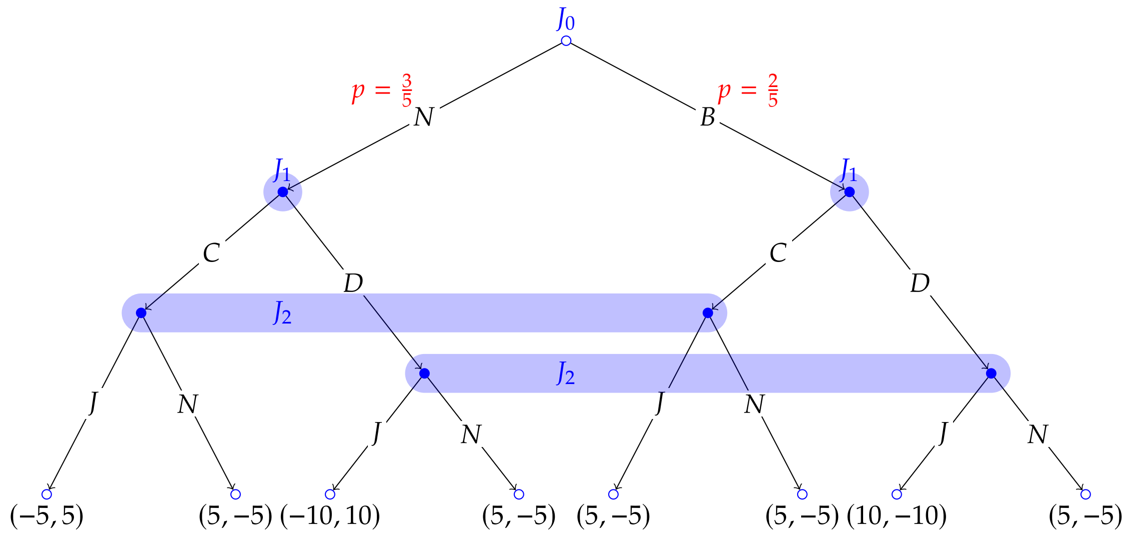


Figura 18.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 18.1.

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 18.1.

M		J_2			
		JJ	JN	NJ	NN
J_1	CC	-1	-1	5	5
	CD	1	-1	7	5
	DC	-4	5	-4	5
	DD	-2	5	-2	5

Cuadro 18.1: Forma normal del juego Γ del problema 18.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 2 dominada a la fila 1, y la fila 4 domina a la fila 3. Asimismo, la columna 1 domina a las columnas 3 y 4. Si se eliminan las filas y columnas dominadas se obtiene la matriz reducida
$$M^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
- Para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, y ha de satisfacer
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow p - 2(1-p) = -p + 5(1-p) \Longrightarrow 2p = 7(1-p) \Longrightarrow p = \frac{7}{9}.$$

- Análogamente, para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, y tiene que verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow q - (1-q) = -2q + 5(1-q) \Longrightarrow 3q = 6(1-q) \Longrightarrow q = \frac{2}{3}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(0, \frac{7}{9}, 0, \frac{2}{9}\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, 0\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= \frac{7}{9} - 2\cdot\left(1-\frac{7}{9}\right) = -\frac{7}{9} + 5\cdot\left(1-\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{3} \\ v_2(M) &= \frac{2}{3} - \left(1-\frac{2}{3}\right) = -2\cdot\frac{2}{3} + 5\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{1}{3}.$$

Problema 18.2.

$$\begin{pmatrix} (2,8) & (3,2) & (3,7) \\ (1,2) & (6,5) & (10,-1) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 18.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador.

- La matriz de pagos del jugador J_1 es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

  Tiene un punto de silla, que es el elemento m_{11}, y por tanto $v_1 = m_{11} = 2$.

- La matriz de pagos del jugador J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

  No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la tercera fila, que está dominada por la primera. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 8p + 2(1-p) = 2p + 5(1-p) \Longrightarrow 6p = 3(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{3};$$

$$v_2 = 8\cdot\frac{1}{3} + 2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\frac{1}{3} + 5\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = 4.$$

El par de valores maximín, que tomaremos como punto de *statu quo* para el cálculo del par de arbitraje, es $(2,4)$.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 18.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u,v) = (u-2)(v-4).$$

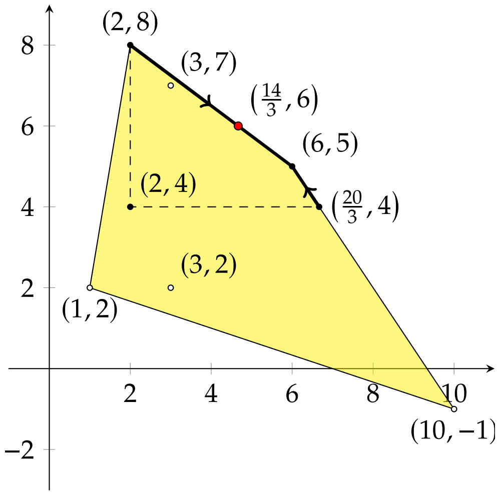


Figura 18.2: Región de pagos para el problema 18.2.

El conjunto de negociación (o conjunto de puntos óptimos Pareto) está formado por los segmentos que van del punto $(2,8)$ al punto $(6,5)$ y del punto $(6,5)$ al punto $\left(\frac{20}{3},4\right)$. Estudiaremos cada uno de los segmentos por separado.

- Del punto $(2,8)$ al punto $(6,5)$. La relación entre las variables es la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos,
$$v = -\frac{3}{4}u + \frac{19}{2},$$
y sustituida en la función g permite obtener
$$g_1(u) = (u-2)\left(-\frac{3}{4}u + \frac{19}{2} - 4\right) = -\frac{3}{4}u^2 + 7u - 11.$$
Y su máximo es el punto $\left(\frac{14}{3},6\right)$, que pertenece al segmento en estudio.
$$g_1'(u) = -\frac{3}{2}u + 7;$$
$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -\frac{3}{2}u + 7 = 0 \Longrightarrow u = \frac{14}{3} < 6;$$
$$v = -\frac{3}{4}\cdot\frac{14}{3} + \frac{19}{2} = 6 > 5.$$

- Del punto $(6,5)$ al punto $\left(\frac{20}{3},4\right)$. La relación entre las variables es
$$v = -\frac{3}{2}u + 14,$$
y sustituida en la función g permite obtener
$$g_2(u) = (u-2)\left(-\frac{3}{2}u + 14 - 4\right) = -\frac{3}{2}u^2 + 13u - 20.$$
Y su máximo es el punto $\left(\frac{13}{3},\frac{15}{2}\right)$, que también se encuentra fuera del conjunto de negociación. En este caso nos permite saber que el valor de g crece en el sentido que va del punto $(-1,10)$ al punto $(6,5)$.
$$g_2'(u) = -3u + 13;$$
$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -3u + 13 = 0 \Longrightarrow u = \frac{13}{3} < 6;$$
$$v = -\frac{3}{2}\cdot\frac{13}{3} + 14 = \frac{15}{2} > 5.$$

Con toda la información obtenida podemos asegurar que el par de arbitraje es el punto $\left(\frac{14}{3}, 6\right)$.

Problema 18.3. Un experto en programación ha desarrollado un *software* de Investigación Operativa pero no tiene recursos para lanzarlo al mercado. Puede vender sus derechos a la empresa del sector *Soft 1* o *Soft 2*.

La empresa seleccionada compartirá con el experto una ganancia de 1 000 000 de euros. Determinar:

(a) La función característica del juego.

(b) El núcleo (o *core*) del juego.

(c) El valor de Shapley del juego.

Solución del problema 18.3. Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el experto en programación, que llamaremos J_3, y cada una de las empresas *Soft 1* o *Soft 2*, que llamaremos J_1 y J_2 respectivamente.

(a) La función característica del juego se obtiene inmediatamente de los datos del enunciado. Los pagos se expresan en millones de euros.

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu\big(\{J_1\}\big) = \nu\big(\{J_2\}\big) = \nu\big(\{J_3\}\big) = 0;$$
$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 0; \quad \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 1; \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1.$$

(b) Sea $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ una imputación del núcleo. Según el corolario 6.8 de Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 1; \\ x_1 &\geqslant \nu\big(\{J_1\}\big) = 0; \\ x_2 &\geqslant \nu\big(\{J_2\}\big) = 0; \\ x_3 &\geqslant \nu\big(\{J_3\}\big) = 0; \\ x_1 + x_2 &\geqslant \nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 0; \\ x_1 + x_3 &\geqslant \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = 1; \\ x_2 + x_3 &\geqslant \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 1. \end{aligned}$$

Sumando las dos últimas inecuaciones se obtiene

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \geqslant 2,$$

lo que combinado con la primera ecuación nos da $x_3 \geqslant 1$. Y como todas las variables han de ser no negativas, otra vez la primera ecuación nos garantiza que $x_1 = x_2 = 0$ y $x_3 = 1$. Los valores obtenidos satisfacen todas las condiciones, por lo que el núcleo está constituido por una única imputación,

$$\big\{(0, 0, 1)\big\}.$$

(c) Para calcular el valor de Shapley estudiamos cada jugador por separado.

- Jugador J_1.

$$\begin{aligned} \delta\big(J_1, \{J_1\}\big) &= \nu\big(\{J_1\}\big) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0; \\ \delta\big(J_1, \{J_1, J_2\}\big) &= \nu\big(\{J_1, J_2\}\big) - \nu\big(\{J_2\}\big) = 0 - 0 = 0; \\ \delta\big(J_1, \{J_1, J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) - \nu\big(\{J_3\}\big) = 1 - 0 = 1; \\ \delta\big(J_1, \{J_1, J_2, J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) - \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 1 - 1 = 0; \end{aligned}$$

$$\phi_1 = \sum_{\mathcal{S} \ni J_1} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(J_1, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 1 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 0 = \frac{1}{6}.$$

- Jugador J_2.

$$\begin{aligned}\delta\big(J_2,\{J_2\}\big) &= \nu\big(\{J_2\}\big)-\nu(\varnothing)=0-0=0;\\ \delta\big(J_2,\{J_1,J_2\}\big) &= \nu\big(\{J_1,J_2\}\big)-\nu\big(\{J_1\}\big)=0-0=0;\\ \delta\big(J_2,\{J_2,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_2,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_3\}\big)=1-0=1;\\ \delta\big(J_2,\{J_1,J_2,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_1,J_2,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_1,J_3\}\big)=1-1=0;\end{aligned}$$

$$\phi_2=\sum_{\mathcal{S}\ni J_2}\frac{(3-|\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}|-1)!}{3!}\delta(J_2,\mathcal{S})=\frac{2!0!}{3!}\cdot 0+\frac{1!1!}{3!}\cdot 0+\frac{1!1!}{3!}\cdot 1+\frac{0!2!}{3!}\cdot 0=\frac{1}{6}.$$

- Jugador J_3.

$$\begin{aligned}\delta\big(J_3,\{J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_3\}\big)-\nu(\varnothing)=0-0=0;\\ \delta\big(J_3,\{J_1,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_1,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_1\}\big)=1-0=1;\\ \delta\big(J_3,\{J_2,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_2,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_2\}\big)=1-0=1;\\ \delta\big(J_3,\{J_1,J_2,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_1,J_2,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_1,J_2\}\big)=1-0=1;\end{aligned}$$

$$\phi_3=\sum_{\mathcal{S}\ni J_3}\frac{(3-|\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}|-1)!}{3!}\delta(J_3,\mathcal{S})=\frac{2!0!}{3!}\cdot 0+\frac{1!1!}{3!}\cdot 1+\frac{1!1!}{3!}\cdot 1+\frac{0!2!}{3!}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

Por tanto, el vector de Shapley es $\vec{\phi}\,\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)$.

Examen 19. Septiembre de 2018 – Convocatoria ordinaria

Problema 19.1. El jugador J_1 saca al azar una bola de una urna que contiene cuatro bolas rojas y tres azules. Sin mirarla apuesta 20 euros o 30 euros.

El jugador J_2 puede jugar o no jugar.

Si J_2 no juega, entonces J_1 le gana 20 euros, y si J_2 juega, entonces debe igualar la apuesta de J_1. En ese caso J_1 ganará todo el dinero si toma una bola azul y, si toma una roja perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 19.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador J_0, elige una bola roja o azul con probabilidades

$$\mathcal{P}(R) = \frac{4}{7}, \quad \mathcal{P}(A) = \frac{3}{7}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_1, sin conocer la bola extraída, elige apostar 20 € o 30 €. El conjunto de estrategias para el primer jugador será precisamente

$$\Sigma_1 = \{20, 30\}.$$

Por último, en la tercera etapa, entendemos que el jugador J_2 elige jugar o no jugar, conociendo la apuesta del jugador J_1, pero no la bola extraída. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_2 será

$$\Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\};$$

donde, por ejemplo la estrategia JN indica que si J_1 apostó 20 € entonces J_2 jugará, mientras que si J_1 apostó 30 € entonces J_2 no jugará.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 19.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{20, 30\}, \Sigma_2 = \{JJ, JN, NJ, NN\}\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(20, JJ) = \pi(20, JN) = \frac{4}{7} \cdot (-20) + \frac{3}{7} \cdot 2 = -\frac{20}{7}; \quad \pi(20, NJ) = \pi(20, NN) = \frac{4}{7} \cdot 20 + \frac{3}{7} \cdot 20 = 20;$$

$$\pi(30, JJ) = \pi(30, NJ) = \frac{4}{7} \cdot (-30) + \frac{3}{7} \cdot 30 = -\frac{30}{7}; \quad \pi(30, JN) = \pi(30, NN) = \frac{4}{7} \cdot 20 + \frac{3}{7} \cdot 20 = 20.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 19.1. Resolución:

- La matriz M tiene un punto de silla, que es el elemento $m_{11} = -\frac{20}{7}$. En consecuencia, una solución del juego es que el jugador J_1 apueste siempre 20 €, y que el jugador J_2 juegue siempre, siendo en ese caso el valor del juego $v(M) = m_{11} = -\frac{20}{7}$.

M		J_2			
		JJ	JN	NJ	NN
J_1	20	$-\frac{20}{7}$	$-\frac{20}{7}$	20	20
	30	$-\frac{30}{7}$	20	$-\frac{30}{7}$	20

Cuadro 19.1: Forma normal del juego Γ del problema 19.1.

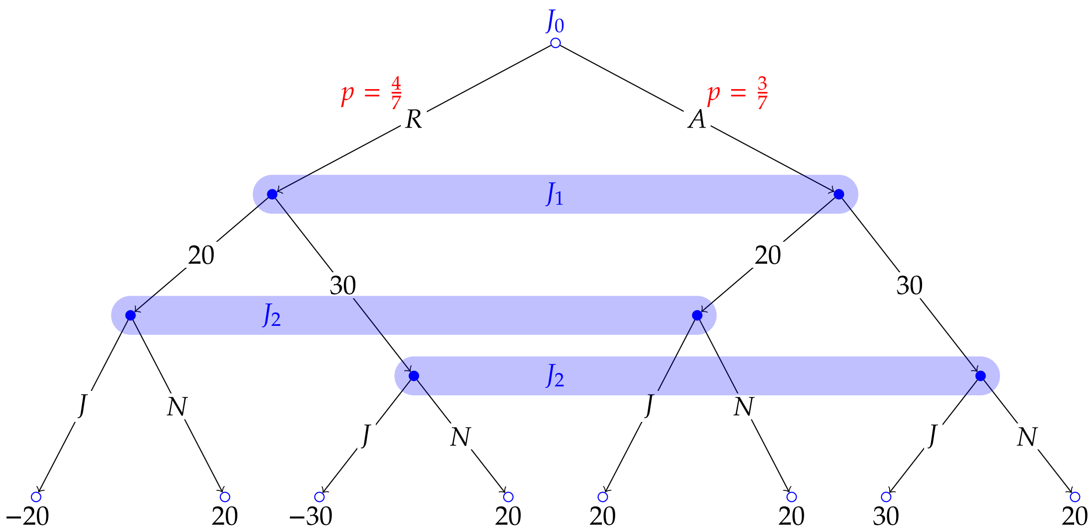


Figura 19.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 19.1.

Problema 19.2. Dos compañías comparten el grueso del mercado de cierto tipo de producto. Cada una hace nuevos planes de comercialización para el próximo año con la intención de arrebatar parte de las ventas de la otra compañía.

Cada una está considerando la posibilidad de una pequeña reducción de precio del producto. Ambas prefieren no bajarlo, pero cada una teme que la otra lo haga y, por tanto, venda más unidades del producto. Si ambas bajan el precio del producto, venden 500 unidades cada una; si ninguna lo hace venden 400 cada una, y si una lo baja y la otra no, la primera vende 600 y la segunda 200.

Calcular el punto de equilibrio si se considera el juego no cooperativo y si se considera cooperativo.

Solución del problema 19.2. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores J_1 y J_2 a cada una de las compañías. Ambos jugadores pueden bajar el precio (B) o no hacerlo (N), por lo que el conjunto de estrategias para los dos es $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{B, N\}$. La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 19.2.

M		J_2	
		B	N
J_1	B	$(500, 500)$	$(600, 200)$
	N	$(200, 600)$	$(400, 400)$

Cuadro 19.2: Forma normal del juego del problema 19.2.

Para hallar los puntos de equilibrio utilizaremos el método IDSDS.

- La estrategia B para el jugador J_1 domina estrictamente a la estrategia N. Se puede eliminar, por tanto, la fila 1 (H), puesto que sería irracional que el jugador J_1 siguiese la estrategia correspondiente (hecho conocido también por el jugador J_2).

M^1		J_2	
		B	N
J_1	B	$(500, 500)$	$(600, 200)$

Cuadro 19.3: Bimatriz M^1 obtenida tras la primera iteración del método IDSDS.

- En la fila restante (cuadro 19.3), la estrategia B para el jugador J_2 domina estrictamente a la estrategia N. Por tanto, se puede eliminar la columna 2 (N).

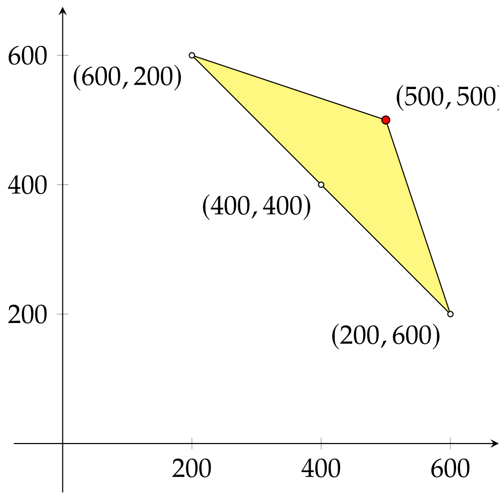


Figura 19.2: Región de pagos para el problema 19.2.

En conclusión, el único punto de equilibrio es el par de estrategias puras (B, B), para el cual los pagos son 500 unidades para cada jugador.

Para hallar los valores maximín del juego no cooperativo empezamos estudiando la matriz de pagos de cada jugador, que son idénticas.

$$M = \begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 200 & 400 \end{pmatrix}.$$

La matriz M tiene un punto de silla, que es el elemento $m_{11} = 500$. Por tanto, el único punto de equilibrio del juego no cooperativo es el par de estrategias (B, B), para el cual los pagos son $(500, 500)$. O sea, ambas compañías deben bajar el precio, y de esa forma ambas conseguirán unas ventas de 500 unidades.

Para el juego cooperativo, en la figura 19.2 se representa el conjunto de pagos. Dado que el conjunto de negociación (el conjunto de puntos óptimos Pareto) se reduce únicamente al punto de *statu quo*, el $(500, 500)$, necesariamente dicho punto será también el par de arbitraje.

Problema 19.3. Cuatro jugadores eligen simultáneamente uno de los colores: blanco, negro.

Si todos coinciden no hay pago y lo mismo si coinciden dos a dos.

En el caso de que coincidan tres ganan 20 euros cada uno y el que eligió diferente paga los 60 euros.

Hallar la función característica y decir si es o no un juego esencial.

Solución del problema 19.3. Estamos ante un juego tetrapersonal simétrico de suma cero en su forma normal. Por ser simétrico son indistinguibles todos los jugadores y todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores. Y por ser de suma cero en su forma normal también será de suma cero en su forma de función característica, según el teorema 6.9 de Morris (1994 : 164). Estudiamos las posibles coaliciones *distintas* por separado.

- Se forman las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3, J_4\}$. La forma normal del juego se recoge en el cuadro 19.4.

		$\{J_2, J_3, J_4\}$							
		BBB	BBN	BNB	BNN	NBB	NBN	NNB	NNN
$\{J_1\}$	B	0	20	20	0	20	0	0	−60
	N	−60	0	0	20	0	20	20	0

Cuadro 19.4: Forma normal del juego del problema 19.3 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3, J_4\}$.

En la matriz del juego la primera y la última columna dominan a todas las demás. Eliminando las columnas dominadas, sabemos que el pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_1(p) \Longrightarrow -60(1-p) = -60p \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$

$$\nu\big(\{J_1\}\big) = -60 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -60 \cdot \frac{1}{2} = -30.$$

Y como es un juego de suma cero,

$$\nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = 30.$$

- Se forman las coaliciones $\{J_1, J_2\}$ y $\{J_3, J_4\}$. La forma normal del juego se recoge en el cuadro 19.5.

		$\{J_3, J_4\}$			
		BB	BN	NB	NN
$\{J_1, J_2\}$	BB	0	40	40	0
	BN	−40	0	0	−40
	NB	−40	0	0	−40
	NN	0	40	40	0

Cuadro 19.5: Forma normal del juego del problema 19.3 para las coaliciones $\{J_1, J_2\}$ y $\{J_3, J_4\}$.

En este caso es evidente vista la forma de la matriz que el juego de dos jugadores es simétrico (ya se había razonado además que todas las coaliciones son indistinguibles), y el corolario 2.12 de Morris (1994 : 60) nos garantiza que el valor del juego ha de ser $v = 0$. Por tanto,

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 0.$$

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, y que el juego es de suma cero, tenemos suficiente información para dar la función característica. En este caso es

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu\big(\{J_1\}\big) = \nu\big(\{J_2\}\big) = \nu\big(\{J_3\}\big) = \nu\big(\{J_4\}\big) = -30;$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_3, J_4\}\big) = 0;$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_2, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_1, J_3, J_4\}\big) = \nu\big(\{J_2, J_3, J_4\}\big) = 30; \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 0.$$

Como se puede ver, es un juego esencial, según la definición 6.2 de Morris (1994 : 154)

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}\big) = 0 \neq -120 = \sum_{i=1}^{4} \nu\big(\{J_i\}\big).$$

Examen 20. Enero de 2019

Problema 20.1. En una urna hay nueve bolas: seis rojas (R) y tres verdes (V). Se extrae una bola aleatoriamente y, a continuación el jugador J_1 mira el resultado de esa extracción y elige un número del conjunto $\{3, 4\}$.

Después, al jugador J_2 se le comunica si J_1 ha elegido un número par o impar de su conjunto de elección y, elige un número del conjunto $\{1, 2\}$.

La función de pago es:

$$\begin{array}{rclrcl} M(R,3,1) & = & -3, & M(R,4,1) & = & 1, \\ M(V,3,1) & = & 3, & M(V,4,1) & = & 5, \\ M(R,3,2) & = & 4, & M(R,4,2) & = & -1, \\ M(V,3,2) & = & -2, & M(V,4,2) & = & 2. \end{array}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 20.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador J_0, elige una bola roja o verde con probabilidades

$$\mathcal{P}(R) = \frac{2}{3}, \quad \mathcal{P}(A) = \frac{1}{3}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_1, sabiendo la bola extraída, elige un número del conjunto $\{3, 4\}$. El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{33, 34, 43, 44\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia 34 indica que J_1 elige el número 3 si la bola extraída fue roja, y elige el número 4 si la bola extraída fue verde. Por último, en la tercera etapa, el jugador J_2 selecciona un número del conjunto $\{1, 2\}$, conociendo el número elegido por J_1, pero no la bola extraída. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_2 será

$$\Sigma_2 = \{11, 12, 21, 22\};$$

donde, en este caso la estrategia 12 indica que si J_1 eligió el número 3 entonces J_2 elegirá el número 1, mientras que si J_1 eligió el número 4 entonces J_2 elegirá el número 2.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 20.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \big\{\Sigma_1 = \{33, 34, 43, 44\}, \Sigma_2 = \{11, 12, 21, 22\}\big\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(33,11) = \pi(33,12) = \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 3 = -1; \quad \pi(33,21) = \pi(33,22) = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot (-2) = 2;$$

$$\pi(34,11) = \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 5 = -\frac{1}{3}; \quad \pi(34,12) = \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{4}{3};$$

$$\pi(34,21) = \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 5 = \frac{13}{3}; \quad \pi(34,22) = \frac{2}{3}\cdot 4 + \frac{1}{3}\cdot 2 = \frac{10}{3};$$
$$\pi(43,11) = \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{5}{3}; \quad \pi(43,12) = \frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 3 = \frac{1}{3};$$
$$\pi(43,21) = \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot(-2) = 0; \quad \pi(43,22) = \frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot(-2) = -\frac{4}{3};$$
$$\pi(44,11) = \pi(44,21) = \frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 5 = \frac{7}{3}; \quad \pi(44,12) = \pi(44,22) = \frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 2 = 0.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 20.1.

M		J_2			
		11	12	21	22
J_1	33	-1	-1	2	2
	34	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{13}{3}$	$\frac{10}{3}$
	43	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$
	44	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{7}{3}$	0

Cuadro 20.1: Forma normal del juego Γ del problema 20.1.

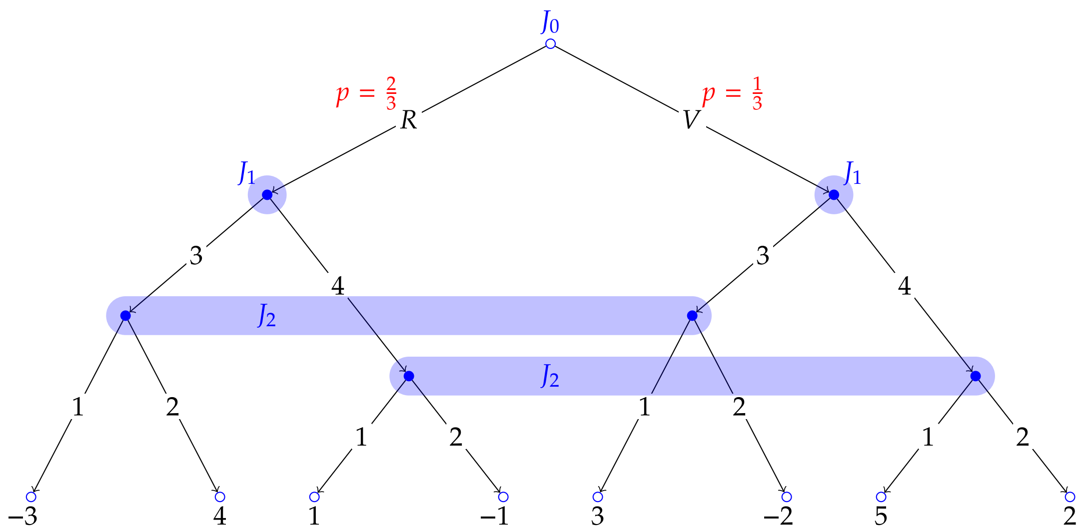


Figura 20.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 20.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La columna 2 domina a la columna 1 y la columna 4 domina a la columna 3. Eliminando las columnas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, con

$$\pi^1(q) = -q + 2(1-q) = -3q + 2; \quad \pi^2(q) = -\frac{4}{3}q + \frac{10}{3}(1-q) = -\frac{14}{3}q + \frac{10}{3};$$
$$\pi^3(q) = \frac{1}{3}q - \frac{4}{3}(1-q) = \frac{5}{3}q - \frac{4}{3}; \quad \pi^4(q) = 0.$$

Representamos en la figura 20.2 las funciones lineales $\pi^j(q)$, y comprobamos que son mínimos del máximo los puntos de intersección de $\pi^1(p)$ y $\pi^4(p)$, y de $\pi^3(p)$ y $\pi^4(p)$, así como cualquiera de los puntos intermedios. Dichos puntos de intersección son,

$$\pi^2(q) = \pi^4(q) \Longrightarrow -\frac{14}{3}q + \frac{10}{3} = 0 \Longrightarrow q = \frac{5}{7};$$
$$\pi^3(q) = \pi^4(q) \Longrightarrow -\frac{5}{3}q - \frac{4}{3} = 0 \Longrightarrow q = \frac{4}{5}.$$

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador fila J_1, según la estrategia elegida por el jugador J_2 la fila 1 no es activa y al menos una de las filas 2 o 3 no es activa. En ambos casos obtenemos una solución equivalente. Si eliminamos, por ejemplo, la fila 1 y la 2 la nueva matriz reducida es

$$M^{**} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para esta matriz, una estrategia mixta será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, y ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow \frac{1}{3}p = -\frac{4}{3}p \Longrightarrow p = 0.$$

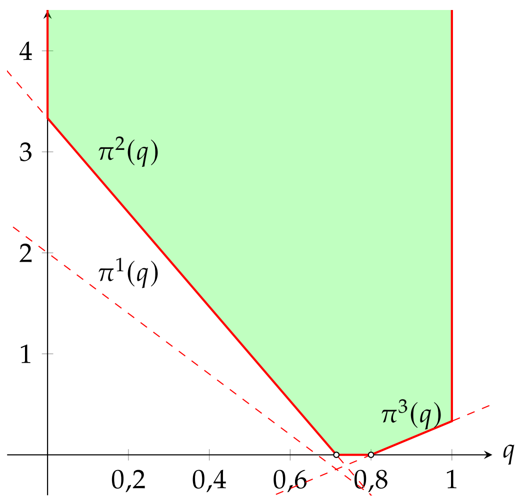


Figura 20.2: Mínimo del máximo para el jugador J_2.

- Trasladando los resultados obtenidos a la matriz M (en cualquiera de los dos casos obtenidos en el apartado anterior la estrategia mixta obtenida trasladada a la matriz M deja el mismo resultado), la solución hallada es

$$\vec{p} = (0,0,0,1); \quad \vec{q} = (0, q, 0, 1-q), \ \frac{5}{7} \leqslant q \leqslant \frac{4}{5};$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1(M) = 0 \\ v_2(M) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow v(M) = 0.$$

Problema 20.2. Ejercicio 7 de Morris (1994 : 124). Para el juego bimatricial

$$\begin{pmatrix} (2,-1) & (-1,1) \\ (0,2) & (1,-1) \end{pmatrix},$$

encontrar los valores maximín y los pares de equilibrio de estrategias mixtas.

Solución del problema 20.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. Para hallar los valores maximín del juego no cooperativo estudiamos la matriz de pagos de cada jugador por separado.

- La matriz de pagos del jugador fila J_1 es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como no tiene ni puntos de silla, ni filas ni columnas dominadas buscamos una solución por estrategias mixtas. Así, el pago máximo se obtiene con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 2p = -p + (1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{4};$$

$$v_1 = 2 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

- La matriz de pagos del jugador columna J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo no hay puntos de silla, ni filas ni columnas dominadas. Buscamos una solución por estrategias mixtas, que en este caso ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -p + (1-p) = 2p - (1-p) \Longrightarrow 2(1-p) = 3p \Longrightarrow p = \frac{2}{5};$$

$$v_2 = -\frac{2}{5} + \left(1 - \frac{2}{5}\right) = 2 \cdot \frac{2}{5} - \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}.$$

En consecuencia, el par de valores maximín pare el juego no cooperativo es $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}\right)$.

Sean $\vec{p}(p, 1-p)$ y $\vec{q}(1-q)$ un par de estrategias mixtas para los jugadores J_1 y J_2 respectivamente. Los pagos esperados de ambos jugadores serían

$$\begin{aligned}
\pi_1(p,q) &= 2pq - p(1-q) + (1-p)(1-q) = \\
&= 4pq - 2p - q + 1 = \\
&= (4q-2)p - q + 1; \\
\pi_2(p,q) &= -pq + p(1-q) + 2(1-p)q - (1-p)(1-q) = \\
&= -5pq + 3q + 2p - 1 = \\
&= (-5p+3)q + 2p - 1.
\end{aligned}$$

Se puede ver que el valor de p que maximiza π_1 para q fijo es $p = 0$ si $q < \frac{1}{2}$, cualquiera si $q = \frac{1}{2}$, y $p = 1$ si $q > \frac{1}{2}$. Análogamente, el valor de q que maximiza π_2 para p fijo es $q = 1$ si $p < \frac{3}{5}$, cualquiera si $p = \frac{3}{5}$, y $q = 0$ si $p > \frac{3}{5}$.

En la figura 20.3 se representan los valores de p que maximizan π_1 para q fijo (en azul) y los valores de q que maximizan π_2 para p fijo (en rojo), en aplicación del que Thomas (2003 : 59) denomina *método de la esvástica*. El único punto donde ambos conjuntos intersectan, que es en este caso el único punto de equilibrio, es el punto $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{2}\right)$.

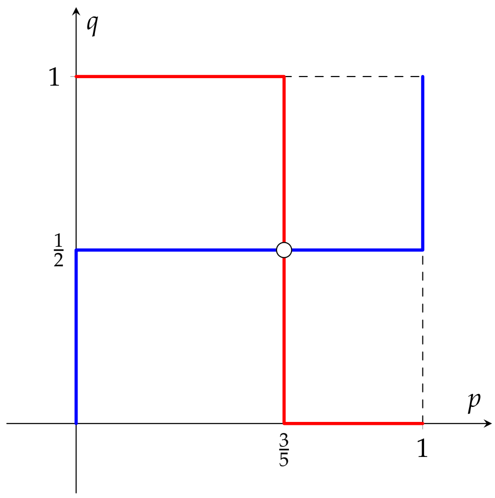


Figura 20.3: Método de la esvástica para el problema 20.2.

Problema 20.3. Un terreno está valorado por su actual propietario en 300 000 euros.

Un vecino le ofrece acondicionarlo para convertirlo en un campo de cultivo de olivos, con lo que su valor de mercado alcanzaría los 500 000 euros.

Una empresa constructora le ofrece urbanizar ese terreno para su posible subdivisión en parcelas destinadas a viviendas unifamiliares. Con esta urbanización el valor del terreno sería de 700 000 euros.

Si los tres participantes llegan al acuerdo de dividir el terreno en dos zonas, una comercial y otra residencial se alcanzaría un valor de mercado de 900 000 euros.

Representar el juego en forma de función característica y obtener el *core* o núcleo de este juego y el valor de Shapley.

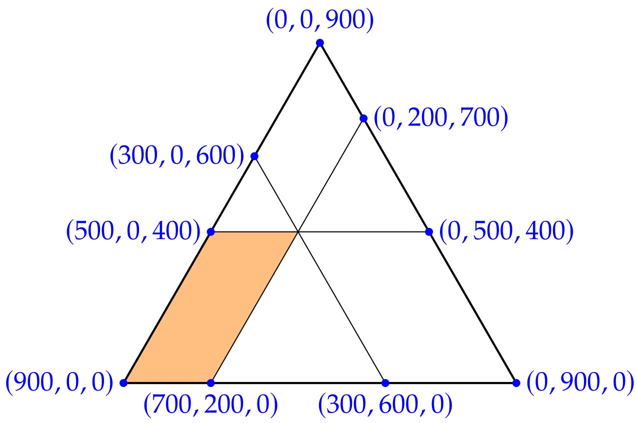


Figura 20.4: Obtención gráfica del *core* para el juego del problema problema 20.3.

Solución del problema 20.3. Estamos ante un juego tripersonal. Los jugadores son el propietario de la finca J_1, el vecino que le ofrece la utilización de la finca para el cultivo de olivos J_2, y la empresa que propone la construcción de viviendas en la finca J_3. La función característica del juego se da a continuación (los pagos se expresan en miles de euros).

$$v(\varnothing) = 0; \quad v(\{J_1\}) = 300; \quad v(\{J_2\}) = v(\{J_3\}) = 0;$$

$$v(\{J_1, J_2\}) = 500; \quad v(\{J_1, J_3\}) = 700; \quad v(\{J_2, J_3\}) = 0; \quad v(\{J_1, J_2, J_3\}) = 900.$$

Sea $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$x_1 + x_2 + x_3 = v(\{J_1, J_2, J_3\}) = 900; \tag{20.1}$$
$$x_1 \geqslant v(\{J_1\}) = 300; \tag{20.2}$$
$$x_2 \geqslant v(\{J_2\}) = 0; \tag{20.3}$$
$$x_3 \geqslant v(\{J_3\}) = 0; \tag{20.4}$$
$$x_1 + x_2 \geqslant v(\{J_1, J_2\}) = 500; \tag{20.5}$$
$$x_1 + x_3 \geqslant v(\{J_1, J_3\}) = 700; \tag{20.6}$$
$$x_2 + x_3 \geqslant v(\{J_2, J_3\}) = 0. \tag{20.7}$$

De la igualdad (20.1) y la desigualdad (20.6) se deduce

$$x_2 \leqslant 200.$$

Análogamente, de la igualdad (20.1) y la desigualdad (20.5) se deduce

$$x_3 \leqslant 400.$$

Por tanto, el núcleo del juego es el siguiente conjunto, que verifica todas la condiciones anteriores, y que se representa en la figura 20.4.

$$\{(900 - x_2 - x_3, x_2, x_3) : \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 200, \ 0 \leqslant x_3 \leqslant 400\}.$$

Para calcular el valor de Shapley estudiamos cada jugador por separado.

- Jugador J_1.

$$\delta(J_1, \{J_1\}) = v(\{J_1\}) - v(\varnothing) = 300 - 0 = 300;$$
$$\delta(J_1, \{J_1, J_2\}) = v(\{J_1, J_2\}) - v(\{J_2\}) = 500 - 0 = 500;$$
$$\delta(J_1, \{J_1, J_3\}) = v(\{J_1, J_3\}) - v(\{J_3\}) = 700 - 0 = 700;$$
$$\delta(J_1, \{J_1, J_2, J_3\}) = v(\{J_1, J_2, J_3\}) - v(\{J_2, J_3\}) = 900 - 0 = 900;$$
$$\phi_1 = \sum_{\mathcal{S} \ni J_1} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(J_1, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 300 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 500 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 700 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 900 = 600.$$

- Jugador J_2.

$$\delta(J_2, \{J_2\}) = v(\{J_2\}) - v(\varnothing) = 0 - 0 = 0;$$
$$\delta(J_2, \{J_1, J_2\}) = v(\{J_1, J_2\}) - v(\{J_1\}) = 500 - 300 = 200;$$
$$\delta(J_2, \{J_2, J_3\}) = v(\{J_2, J_3\}) - v(\{J_3\}) = 0 - 0 = 0;$$
$$\delta(J_2, \{J_1, J_2, J_3\}) = v(\{J_1, J_2, J_3\}) - v(\{J_1, J_3\}) = 900 - 700 = 200;$$
$$\phi_2 = \sum_{\mathcal{S} \ni J_2} \frac{(3 - |\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}| - 1)!}{3!} \delta(J_2, \mathcal{S}) = \frac{2!0!}{3!} \cdot 0 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 200 + \frac{1!1!}{3!} \cdot 0 + \frac{0!2!}{3!} \cdot 200 = 100.$$

- Jugador J_3.

$$\begin{aligned}
\delta\big(J_3,\{J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_3\}\big)-\nu(\varnothing)=0-0=0;\\
\delta\big(J_3,\{J_1,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_1,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_1\}\big)=700-300=400;\\
\delta\big(J_3,\{J_2,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_2,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_2\}\big)=0-0=0;\\
\delta\big(J_3,\{J_1,J_2,J_3\}\big) &= \nu\big(\{J_1,J_2,J_3\}\big)-\nu\big(\{J_1,J_2\}\big)=900-500=400;
\end{aligned}$$

$$\phi_3=\sum_{\mathcal{S}\ni J_3}\frac{\big(3-|\mathcal{S}|\big)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{3!}\delta(J_3,\mathcal{S})=\frac{2!0!}{3!}\cdot 0+\frac{1!1!}{3!}\cdot 400+\frac{1!1!}{3!}\cdot 0+\frac{0!2!}{3!}\cdot 400=200.$$

Por tanto, el vector de Shapley es $\vec{\phi}(600,100,200)$.

Examen 21. Febrero de 2019

Problema 21.1. En el juego bipersonal de suma nula:

Se tienen dos cartas, una mayor que otra, gana el jugador que tenga la carta más alta, de la siguiente manera: J_1 elige una de las dos cartas al azar, la mira sin que la vea J_2, y decide jugar o dejarlo. Si no juega, paga 3 unidades a J_2, y si juega le toca a J_2 elegir si juega o no.

Si J_2 no juega, paga 3 unidades a J_1, y si J_2 juega, se miran las cartas: si la carta de J_1 es la baja, paga 7 unidades a J_2, y si su carta es la alta, recibe 7 unidades de J_2.

Hallar la forma extensiva, la forma normal, el valor del juego y las estrategias óptimas de cada jugador.

Solución del problema 21.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador J_0, elige la carta alta A o la baja B con idénticas probabilidades

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = \frac{1}{2}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_1, sabiendo la carta elegida, decide si jugar o no. El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{JJ, JN, NJ, NN\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia JN indica que J_1 juega si la bola elegida es alta A, y no juega si la carta elegida es baja B. Por último, en la tercera etapa, si J_1 decidió jugar el jugador J_2 decide a su vez si jugar o no, sin conocer la carta elegida. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_2 será

$$\Sigma_2 = \{J, N\}.$$

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 21.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \big\{\Sigma_1 = \{JJ, JN, NJ, NN\}, \Sigma_2 = \{J, N\}\big\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(JJ, J) = \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot (-7) = 0; \quad \pi(JJ, N) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3 = 3;$$

$$\pi(JN, J) = \frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 2; \quad \pi(JN, N) = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot (-3) = 0;$$

$$\pi(NJ, J) = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-7) = -5; \quad \pi(NJ, N) = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 3 = 0;$$

$$\pi(NN, J) = \pi(NN, N) = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-3) = -3.$$

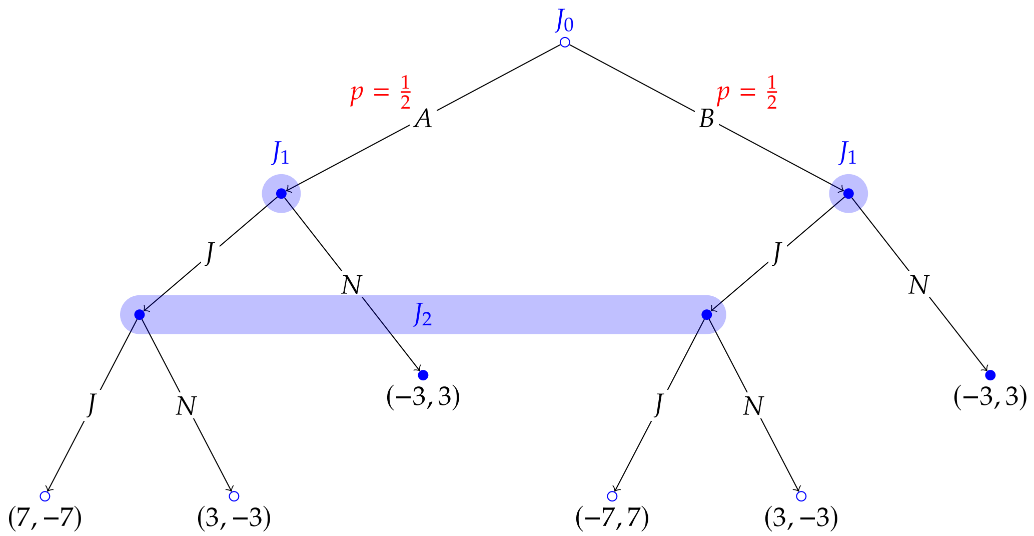


Figura 21.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 21.1.

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 21.1.

M		J_2	
		J	N
J_1	JJ	0	3
	JN	2	0
	NJ	−5	0
	NN	−3	−3

Cuadro 21.1: Forma normal del juego Γ del problema 21.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- Cualquiera de las dos primeras filas domina a cualquiera de las otras dos. Si se eliminan las filas dominadas se obtiene la matriz reducida
$$M^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
- Para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, y ha de satisfacer
$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 2(1-p) = 3p \Longrightarrow p = \frac{2}{5};$$
- Análogamente, para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, y tiene que verificar
$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow 3(1-q) = 2q \Longrightarrow q = \frac{3}{5}.$$

- Trasladando los resultados a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0\right); \quad \vec{q} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right);$$

$$\left.\begin{array}{l} v_1(M) = 2 \cdot \left(1 - \dfrac{2}{5}\right) = 3 \cdot \dfrac{2}{5} = \dfrac{6}{5} \\[2ex] v_2(M) = 3 \cdot \left(1 - \dfrac{3}{5}\right) = 2 \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{5} \end{array}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{6}{5}.$$

Problema 21.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (-3,1) & (0,3) & (2,1) \\ (-2,3) & (1,-1) & (3,-2) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 21.2. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Para hallar los valores maximín del juego no cooperativo estudiamos la matriz de pagos de cada jugador por separado.

- La matriz de pagos del jugador fila J_1 es

$$M_1 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

  Tiene un punto de silla, el elemento $m_{21} = -2$, por lo que $v_1 = m_{21} = -2$.

- La matriz de pagos del jugador columna J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

  En este caso no hay puntos de silla, pero cualquiera de las dos primeras filas domina a la tercera. Si eliminamos la fila dominada obtenemos la matriz reducida

$$M_2^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Y para la matriz reducida M_2^* buscamos una solución por estrategias mixtas, que en este caso ha de satisfacer

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow p + 3(1-p) = 3p - (1-p) \Longrightarrow 4(1-p) = 2p \Longrightarrow p = \frac{2}{3};$$

$$v_2 = \frac{2}{3} + 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{2}{3} - \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}.$$

En consecuencia, el par de valores maximín para el juego no cooperativo es $\left(-2, \frac{5}{3}\right)$, y tomaremos este punto como punto de *statu quo* para calcular el par de arbitraje.

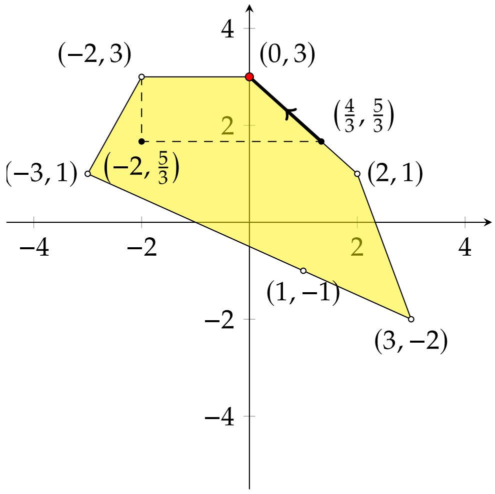


Figura 21.2: Región de pagos para el problema 21.2.

El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 21.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u, v) = (u + 2)\left(v - \frac{5}{3}\right).$$

Y el conjunto de negociación (o conjunto de puntos óptimos Pareto) es el segmento que va del punto $(0, 3)$ al punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$. Sobre dicho conjunto, la relación entre las variables es la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos,

$$v = -u + 3,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_1(u) = (u + 2)\left(-u + 3 - \frac{5}{3}\right) = -u^2 - \frac{2}{3}u + \frac{8}{3}.$$

Su máximo es el punto $\left(\frac{13}{2}, \frac{37}{8}\right)$, que se encuentra fuera del conjunto de negociación. No obstante nos permite saber que el valor de g crece en el sentido que va del punto $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ al punto $(0, 3)$.

$$g_1'(u) = -2u - \frac{2}{3};$$

$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -2u + \frac{2}{3} = 0 \Longrightarrow u = -\frac{1}{3} < 0;$$

$$v = -\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = \frac{10}{3} > 3.$$

En conclusión, el par de arbitraje ha de ser el punto $(0, 3)$.

Problema 21.3. El juego tripersonal de *parejas* es jugado de la siguiente manera:

Cada jugador elige uno de los otros dos jugadores; esas elecciones son hechas simultáneamente.

Si una pareja se forma, por ejemplo, si P_2 elige a P_3, y P_3 elige a P_2, entonces cada miembro de esa pareja recibe un pago de 1, mientras la persona que no entra en la pareja recibe -3.

Si no se forma pareja, por ejemplo, si P_1, elige a P_2, P_2 elige a P_3, y P_3 elige a P_1, entonces cada uno recibe un pago de cero.

Calcular la función característica de este juego y comprobar si es un juego esencial.

Solución del problema 21.3. Estamos ante un juego tripersonal simétrico. Por tanto, todas las posibles coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles. Estudiamos por separado las *distintas* coaliciones que se pueden formar.

- Si se forma la gran coalición $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$, la estrategia óptima es evitar que se forme pareja con lo que en ese caso el pago es $v_{123} = 0$. En otro caso, si se forma una pareja, el pago sería

$$1 + 1 - 3 = -1.$$

- Consideramos, por ejemplo, las coaliciones de uno y dos jugadores $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$, para las que se recoge la forma normal del juego en el cuadro 21.2.

M		$\{P_2, P_3\}$ 11	12	31	32
$\{P_1\}$	2	$(1, -2)$	$(1, -2)$	$(0, 0)$	$(-3, 2)$
	3	$(1, -2)$	$(0, 0)$	$(1, -2)$	$(-3, 2)$

Cuadro 21.2: Forma normal del juego del problema 21.3 para las coaliciones $\{P_1\}$ y $\{P_2, P_3\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{P_1\}$ es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

La matriz M_1 tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{14} y m_{24}, por lo que $v_1 = m_{14} = m_{24} = -3$. Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{P_2, P_3\}$ es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz M_{23} tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{41} y m_{42}, por lo que $v_{23} = m_{41} = m_{42} = 2$.

Tenemos suficiente información para dar la función característica del juego.

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu(\{P_1\}) = \nu(\{P_2\}) = \nu(\{P_3\}) = -3;$$

$$\nu(\{P_1, P_2\}) = \nu(\{P_1, P_3\}) = \nu(\{P_2, P_3\}) = 2; \quad \nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 0.$$

Como se puede ver, el juego es esencial, puesto que se verifica

$$\nu(\{P_1, P_2, P_3\}) = 0 \neq -9 = \sum_{i=1}^{3} \nu(\{P_i\}).$$

Examen 22. Septiembre de 2019 – Convocatoria ordinaria

Problema 22.1. El jugador J_2 lanza un dado con seis caras numeradas del uno al seis y, mira si el resultado es par (P) o impar (I). A continuación elige seguir un plan (S) o cambiarlo (C). Después el jugador J_1 sin conocer la elección de J_2 pero sabiendo el resultado del dado, elige seguir (S) o cambiar (C). La función de pago es:

$$\begin{array}{lclrlcr} M(P,S,S) & = & -3, & M(I,S,S) & = & -5, \\ M(P,S,C) & = & 4, & M(I,S,C) & = & 8, \\ M(P,C,S) & = & 2, & M(I,C,S) & = & -2, \\ M(P,C,C) & = & 1, & M(I,C,C) & = & 3. \end{array}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 22.1. Idéntico al problema 16.1 de la página 87.

Problema 22.2. Ejercicio 9 de Morris (1994 : 124). Para el juego bimatricial

$$\begin{pmatrix} (3,3) & (0,5) \\ (5,0) & (-10,-10) \end{pmatrix}$$

encontrar los valores maximín y los pares de equilibrio de estrategias mixtas.

Solución del problema 22.2. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Para hallar los valores maximín del juego no cooperativo estudiamos la matriz de pagos de cada jugador, que en este caso son idénticas. La matriz de pagos cualquiera de los dos jugadores es

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -10 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, el elemento $m_{12} = 0$, por lo que $v = m_{12} = 0$ y en consecuencia el par de valores maximín es $(0, 0)$.

Sean $\vec{p}(p, 1-p)$ y $\vec{q}(q, 1-q)$ un par de estrategias mixtas para los jugadores J_1 y J_2 respectivamente. Por ejemplo, los pagos esperados para el jugador J_1 serían

$$\begin{aligned} \pi_1(p,q) &= 3pq + 5(1-p)q - 10(1-p)(1-q) = \\ &= -12pq + 10p + 15q - 10 = \\ &= (-12q + 10)p + 15q - 10. \end{aligned}$$

En este caso se puede ver que el valor de p que maximiza π_1 para q fijo es $p = 1$ si $q < \frac{5}{6}$, cualquiera si $q = \frac{5}{6}$, y $p = 0$ si $q > \frac{5}{6}$. Análogamente y por simetría, el valor de q que maximiza π_2 para p fijo es $q = 1$ si $p < \frac{5}{6}$, cualquiera si $p = \frac{5}{6}$, y $q = 0$ si $p > \frac{5}{6}$.

En la figura 22.1 se representan los valores de p que maximizan π_1 para q fijo (en azul) y los valores de q que maximizan π_2 para p fijo (en rojo), en aplicación del que Thomas (2003 : 59) denomina *método de la esvástica*.

Existen tres pares de equilibrio, que son los pares de estrategias puras $((0,1),(1,0))$ y $((1,0),(0,1))$, y el par de estrategias mixtas $\left(\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right),\left(\frac{5}{6},\frac{1}{6}\right)\right)$.

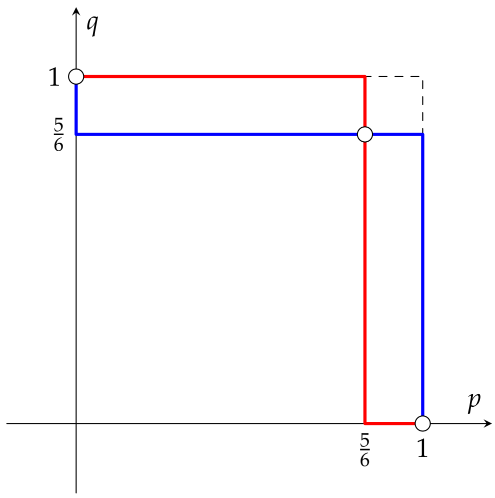


Figura 22.1: Método de la esvástica para el problema 22.2.

Problema 22.3. En el siguiente juego entre cuatro personas en forma coalicional:

$$v\big(\{i\}\big)=0,\ \forall i\in\{1,2,3,4\};\quad v\big(\{1,2\}\big)=v\big(\{1,3\}\big)=v\big(\{2,4\}\big)=v\big(\{3,4\}\big)=1;\quad v\big(\{1,4\}\big)=v\big(\{2,3\}\big)=0;$$

$$v\big(\{2,3,4\}\big)=v\big(\{1,3,4\}\big)=v\big(\{1,2,4\}\big)=1;\quad v\big(\{1,2,3\}\big)=v\big(\{1,2,3,4\}\big)=2.$$

(a) Mostrar que el núcleo de este juego consiste en un único vector de asignación.

(b) Calcular el valor de Shapley de este juego.

Solución del problema 22.3. Estamos ante un juego tetrapersonal.

(a) Sea $\vec{x}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$x_1+x_2+x_3+x_4=v\big(\{1,2,3,4\}\big)=2; \tag{22.1}$$
$$x_i\geqslant v\big(\{i\}\big)=0,\ \forall i\in\{1,2,3,4\}; \tag{22.2}$$
$$x_1+x_2\geqslant v\big(\{1,2\}\big)=1; \tag{22.3}$$
$$x_1+x_3\geqslant v\big(\{1,3\}\big)=1; \tag{22.4}$$
$$x_1+x_4\geqslant v\big(\{1,4\}\big)=0; \tag{22.5}$$
$$x_2+x_3\geqslant v\big(\{2,3\}\big)=0; \tag{22.6}$$
$$x_2+x_4\geqslant v\big(\{2,4\}\big)=1; \tag{22.7}$$
$$x_3+x_4\geqslant v\big(\{3,4\}\big)=1; \tag{22.8}$$
$$x_1+x_2+x_3\geqslant v\big(\{1,2,3\}\big)=2; \tag{22.9}$$
$$x_1+x_2+x_4\geqslant v\big(\{1,2,4\}\big)=1; \tag{22.10}$$
$$x_1+x_3+x_4\geqslant v\big(\{1,3,4\}\big)=1; \tag{22.11}$$
$$x_2+x_3+x_4\geqslant v\big(\{2,3,4\}\big)=1. \tag{22.12}$$

Sabiendo que los x_i son no negativos, de la ecuación (22.1) y de la inecuación (22.9) se obtienen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2, \quad x_4 = 0.$$

Aplicando además las desigualdades (22.7) y (22.8) se obtiene que

$$x_2 = x_3 = 1, \quad x_1 = 0.$$

Como la imputación $(0, 1, 1, 0)$ verifica todas las demás condiciones, necesariamente ha de ser una imputación del núcleo, y como es la única imputación que verifica todas las condiciones, el núcleo es el conjunto cuyo único elemento es dicha imputación.

(b) Para calcular el valor de Shapley, estudiamos cada jugador por separado:

- Jugador 1. Calculamos la medida en la que contribuye 1 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
\delta(1, \{1\}) &= v(\{1\}) - v(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta(1, \{1,2\}) &= v(\{1,2\}) - v(\{2\}) = 1 - 0 = 1;\\
\delta(1, \{1,3\}) &= v(\{1,3\}) - v(\{3\}) = 1 - 0 = 1;\\
\delta(1, \{1,4\}) &= v(\{1,4\}) - v(\{4\}) = 0 - 0 = 0;\\
\delta(1, \{1,2,3\}) &= v(\{1,2,3\}) - v(\{2,3\}) = 2 - 0 = 2;\\
\delta(1, \{1,2,4\}) &= v(\{1,2,4\}) - v(\{2,4\}) = 1 - 1 = 0;\\
\delta(1, \{1,3,4\}) &= v(\{1,3,4\}) - v(\{3,4\}) = 1 - 1 = 0;\\
\delta(1, \{1,2,3,4\}) &= v(\{1,2,3,4\}) - v(\{2,3,4\}) = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

  Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \sum_{\mathcal{S}\ni 1} \frac{(4-|\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}|-1)!}{4!}\delta(1,\mathcal{S}) =\\
&= \frac{3!0!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 0 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 2 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 0 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 0 + \frac{0!3!}{4!}\cdot 1 =\\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

- Jugador 2. Calculamos la medida en la que contribuye 2 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
\delta(2, \{2\}) &= v(\{2\}) - v(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta(2, \{1,2\}) &= v(\{1,2\}) - v(\{1\}) = 1 - 0 = 1;\\
\delta(2, \{2,3\}) &= v(\{2,3\}) - v(\{3\}) = 0 - 0 = 0;\\
\delta(2, \{2,4\}) &= v(\{2,4\}) - v(\{4\}) = 1 - 0 = 1;\\
\delta(2, \{1,2,3\}) &= v(\{1,2,3\}) - v(\{1,3\}) = 2 - 1 = 1;\\
\delta(2, \{1,2,4\}) &= v(\{1,2,4\}) - v(\{1,4\}) = 1 - 0 = 1;\\
\delta(2, \{2,3,4\}) &= v(\{2,3,4\}) - v(\{3,4\}) = 1 - 1 = 0;\\
\delta(2, \{1,2,3,4\}) &= v(\{1,2,3,4\}) - v(\{1,3,4\}) = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

  Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= \sum_{\mathcal{S}\ni 2} \frac{(4-|\mathcal{S}|)!(|\mathcal{S}|-1)!}{4!}\delta(2,\mathcal{S}) =\\
&= \frac{3!0!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 0 + \frac{0!3!}{4!}\cdot 1 =\\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

- Jugador 3. Calculamos la medida en la que contribuye 3 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
\delta\big(3, \{3\}\big) &= \nu\big(\{3\}\big) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(3, \{1,3\}\big) &= \nu\big(\{1,3\}\big) - \nu\big(\{1\}\big) = 1 - 0 = 1;\\
\delta\big(3, \{2,3\}\big) &= \nu\big(\{2,3\}\big) - \nu\big(\{2\}\big) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(3, \{3,4\}\big) &= \nu\big(\{3,4\}\big) - \nu\big(\{4\}\big) = 1 - 0 = 1;\\
\delta\big(3, \{1,2,3\}\big) &= \nu\big(\{1,2,3\}\big) - \nu\big(\{1,2\}\big) = 2 - 1 = 1;\\
\delta\big(3, \{1,3,4\}\big) &= \nu\big(\{1,3,4\}\big) - \nu\big(\{1,4\}\big) = 1 - 0 = 1;\\
\delta\big(3, \{2,3,4\}\big) &= \nu\big(\{2,3,4\}\big) - \nu\big(\{2,4\}\big) = 1 - 1 = 0;\\
\delta\big(3, \{1,2,3,4\}\big) &= \nu\big(\{1,2,3,4\}\big) - \nu\big(\{1,2,4\}\big) = 2 - 1 = 1.
\end{aligned}$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_3 &= \sum_{\mathcal{S}\ni 3} \frac{(4-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{4!}\delta(3,\mathcal{S}) =\\
&= \frac{3!0!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 0 + \frac{0!3!}{4!}\cdot 1 =\\
&= \frac{7}{12}.
\end{aligned}$$

- Jugador 4. Calculamos la medida en la que contribuye 4 a cada posible coalición en la que participa.

$$\begin{aligned}
\delta\big(4, \{4\}\big) &= \nu\big(\{4\}\big) - \nu(\varnothing) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(4, \{1,4\}\big) &= \nu\big(\{1,4\}\big) - \nu\big(\{1\}\big) = 0 - 0 = 0;\\
\delta\big(4, \{2,4\}\big) &= \nu\big(\{2,4\}\big) - \nu\big(\{2\}\big) = 1 - 0 = 1;\\
\delta\big(4, \{3,4\}\big) &= \nu\big(\{3,4\}\big) - \nu\big(\{3\}\big) = 1 - 0 = 1;\\
\delta\big(4, \{1,2,4\}\big) &= \nu\big(\{1,2,4\}\big) - \nu\big(\{1,2\}\big) = 1 - 1 = 0;\\
\delta\big(4, \{1,3,4\}\big) &= \nu\big(\{1,3,4\}\big) - \nu\big(\{1,3\}\big) = 1 - 1 = 0;\\
\delta\big(4, \{2,3,4\}\big) &= \nu\big(\{2,3,4\}\big) - \nu\big(\{2,3\}\big) = 1 - 0 = 1;\\
\delta\big(4, \{1,2,3,4\}\big) &= \nu\big(\{1,2,3,4\}\big) - \nu\big(\{1,2,3\}\big) = 2 - 2 = 0.
\end{aligned}$$

Y con los valores obtenidos,

$$\begin{aligned}
\phi_4 &= \sum_{\mathcal{S}\ni 4} \frac{(4-|\mathcal{S}|)!\big(|\mathcal{S}|-1\big)!}{4!}\delta(4,\mathcal{S}) =\\
&= \frac{3!0!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 0 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{2!1!}{4!}\cdot 1 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 0 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 0 + \frac{1!2!}{4!}\cdot 1 + \frac{0!3!}{4!}\cdot 0 =\\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el valor de Shapley es el vector

$$\vec{\phi}\left(\frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{1}{4}\right).$$

No se pide, pero para detectar posibles errores, se puede comprobar fácilmente que el valor de Shapley obtenido es una imputación. Verifica:

- Racionalidad individual.

$$\phi_1 = \frac{7}{12} > 0 = \nu\big(\{1\}\big), \quad \phi_2 = \frac{7}{12} > 0 = \nu\big(\{2\}\big), \quad \phi_3 = \frac{7}{12} > 0 = \nu\big(\{3\}\big), \quad \phi_4 = \frac{1}{4} > 0 = \nu\big(\{4\}\big).$$

- Racionalidad colectiva.

$$\sum_{i=1}^{4} \phi_i = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = \frac{7}{12} + \frac{7}{12} + \frac{7}{12} + \frac{1}{4} = 2 = v\big(\{1,2,3,4\}\big).$$

Examen 23. Septiembre de 2019 – Convocatoria de reserva

Problema 23.1. Se considera el siguiente juego de suma nula:

El jugador J_2 saca al azar una bola de una urna que contiene dos bolas negras y cuatro blancas. La mira y apuesta cinco mil o siete mil euros.

El jugador J_1 puede jugar o no jugar.

Si J_1 no juega, entonces J_2 le gana cinco mil euros, y si J_1 juega, entonces debe igualar la apuesta de J_2. En ese caso J_2 ganará todo el dinero si toma una bola blanca y si toma una negra perderá.

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 23.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios. Por comodidad expresaremos todos los pagos en miles de euros, o sea, una unidad monetaria equivale a mil euros.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador J_0, elige una bola negra o blanca con probabilidades

$$\mathcal{P}(N) = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{P}(B) = \frac{2}{3}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_2, sabiendo la bola extraída, elige un apostar 5 o 7 unidades. El conjunto de estrategias para el jugador J_2 será entonces

$$\Sigma_2 = \{55, 57, 75, 77\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia 57 indica que J_2 apuesta 5 unidades si la bola extraída fue negra, y apuesta 7 unidades si la bola extraída fue blanca. Por último, en la tercera etapa, el jugador J_1 decide si juega o no, conociendo la apuesta de J_2, pero no la bola extraída. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_1 será

$$\Sigma_1 = \{JJ, JN, NJ, NN\};$$

donde, en este caso la estrategia JN indica que si J_2 apostó 5 unidades entonces J_1 jugará, mientras que si J_2 apostó 7 unidades entonces J_1 no jugará.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 23.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \big\{\Sigma_1 = \{JJ, JN, NJ, NN\}, \Sigma_2 = \{55, 57, 75, 77\}, \big\}\Big\}.$$

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(JJ, 55) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -\frac{5}{3}; \quad \pi(JJ, 57) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (-7) = -3;$$

$$\pi(JJ, 75) = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -1; \quad \pi(JJ, 77) = \frac{1}{3} \cdot 7 + \frac{2}{3} \cdot (-7) = -\frac{7}{3};$$

$$\pi(JN, 55) = \pi(JN, 57) = \frac{1}{3} \cdot 5 + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -\frac{5}{3}; \quad \pi(JN, 75) = \pi(JN, 77) = \frac{1}{3} \cdot (-5) + \frac{2}{3} \cdot (-5) = -5;$$

$$\pi(NJ,55) = \frac{1}{3}\cdot(-5) + \frac{2}{3}\cdot 5 = -5; \quad \pi(NJ,57) = \frac{1}{3}\cdot(-5) + \frac{2}{3}\cdot(-7) = -\frac{19}{3};$$
$$\pi(NJ,75) = \frac{1}{3}\cdot 7 + \frac{2}{3}\cdot(-5) = -1; \quad \pi(NJ,77) = \frac{1}{3}\cdot 7 + \frac{2}{3}\cdot(-7) = -\frac{7}{3};$$
$$\pi(NN,55) = \pi(NN,57) = \pi(NN,75) = \pi(NN,77) = \frac{1}{3}\cdot(-5) + \frac{2}{3}\cdot(-5) = -5.$$

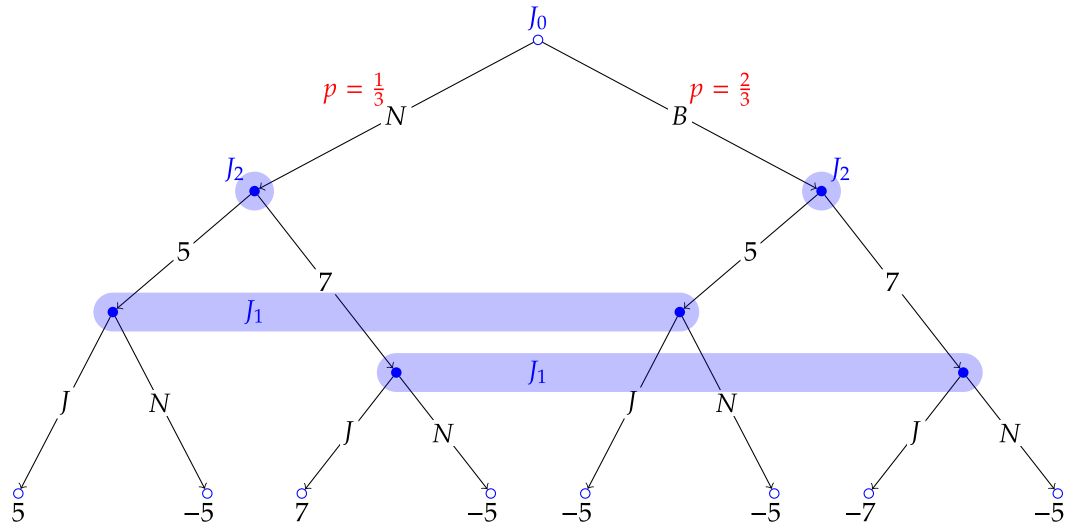


Figura 23.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 23.1.

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 23.1.

M		J_2			
		55	57	75	77
J_1	JJ	$-\frac{5}{3}$	-3	-1	$-\frac{7}{3}$
	JN	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	-5	-5
	NJ	-5	$-\frac{19}{3}$	-1	$-\frac{7}{3}$
	NN	-5	-5	-5	-5

Cuadro 23.1: Forma normal del juego Γ del problema 23.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- La fila 1 domina a las filas 3 y 4, la columna 2 domina a la columna 1 y la columna 4 domina a la columna 3. Eliminando las filas y columnas dominadas se obtiene la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} -3 & -\frac{7}{3} \\ -\frac{5}{3} & -5 \end{pmatrix}.$$

- Para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta óptima para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p}(p, 1-p)$, y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -3p - \frac{5}{3}(1-p) = -\frac{7}{3}p - 5(1-p) \Longrightarrow p = \frac{5}{6}.$$

- De la misma forma, para la matriz reducida M^*, una estrategia mixta óptima para el jugador columna J_2 será de la forma $\vec{q}(q, 1-q)$, y ha de verificar

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow -3q - \frac{7}{3}(1-q) = -\frac{5}{3}q - 5(1-q) \Longrightarrow q = \frac{2}{3}.$$

- Trasladando los resultados obtenidos a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}, 0, 0\right); \quad \vec{q} = \left(0, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= -3\cdot\frac{5}{6} - \frac{5}{3}\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right) = -\frac{7}{3}\cdot\frac{5}{6} - 5\cdot\left(1-\frac{5}{6}\right) = -\frac{25}{9} \\ v_2(M) &= -3\cdot\frac{2}{3} - \frac{7}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}\cdot\frac{2}{3} - 5\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right) = -\frac{25}{9} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = -\frac{25}{9}.$$

Problema 23.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (1,4) & (-2,4) & (3,0) \\ (2,-1) & (2,2) & (-3,2) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 23.2. Idéntico al problema 9.2 de la página 48.

Problema 23.3. En el siguiente juego tripersonal, cada jugador tiene dos estrategias indicadas por 1 y 2. Hay ocho combinaciones de estrategias y ocho correspondientes 3-tuplas de pagos:

Estrategias	Pagos
$(1,1,1)$	$(1,-1,1)$
$(1,1,2)$	$(0,0,0)$
$(1,2,1)$	$(-1,2,0)$
$(1,2,2)$	$(0,1,-1)$
$(2,1,1)$	$(1,1,-2)$
$(2,1,2)$	$(-2,1,0)$
$(2,2,1)$	$(1,0,1)$
$(2,2,2)$	$(0,0,1)$

Calcular la función característica y decir si es un juego esencial.

Solución del problema 23.3. Estudiamos por separado las posibles coaliciones que se pueden formar.

- Coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 23.2.

M		$\{J_2, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_1\}$	1	$(1,0)$	$(0,0)$	$(-1,2)$	$(0,0)$
	2	$(1,-1)$	$(-2,1)$	$(1,1)$	$(0,1)$

Cuadro 23.2: Forma normal del juego del problema 23.3 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{J_1\}$ es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La columna 2 domina a las columnas 1 y 4. Eliminadas las columnas dominadas, el pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -2(1-p) = -p + (1-p) \Longrightarrow p = 3(1-p) \Longrightarrow p = \frac{3}{4};$$

$$v\big(\{J_1\}\big) = -2 \cdot \left(1 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4} + \left(1 - \frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{J_2, J_3\}$ es

$$M_{23} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este hay un punto de silla, $m_{32} = 1$, por lo que

$$v\big(\{J_2, J_3\}\big) = 1.$$

- Coaliciones $\{J_2\}$ y $\{J_1, J_3\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 23.3.

M		$\{J_1, J_3\}$ 11	12	21	22
$\{J_2\}$	1	$(-1, 2)$	$(0, 0)$	$(1, -1)$	$(1, -2)$
	2	$(2, -1)$	$(1, -1)$	$(0, 2)$	$(0, 1)$

Cuadro 23.3: Forma normal del juego del problema 23.3 para las coaliciones $\{J_2\}$ y $\{J_1, J_3\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{J_2\}$ es

$$M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La columna 3 domina a la columna 4, y la estrategia mixta para el jugador columna $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$ domina a la columna 2. Eliminando las columnas dominadas, el pago máximo para $\{J_2\}$ se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -p + 2(1-p) = p \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$

$$v\big(\{J_2\}\big) = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{J_1, J_3\}$ es

$$M_{13} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En este caso la fila 1 domina a la fila 2, y la fila 3 domina a la fila 4. Eliminando las fila dominadas, el pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 2p - (1-p) = -p + 2(1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{2};$$

$$v\big(\{J_1, J_3\}\big) = 2 \cdot \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

- Coaliciones $\{J_3\}$ y $\{J_1, J_2\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 23.4.

M		$\{J_1, J_2\}$			
		11	12	21	22
$\{J_3\}$	1	$(1,0)$	$(0,1)$	$(-2,2)$	$(1,1)$
	2	$(0,0)$	$(-1,1)$	$(0,-1)$	$(1,0)$

Cuadro 23.4: Forma normal del juego del problema 23.3 para las coaliciones $\{J_3\}$ y $\{J_1, J_2\}$.

La matriz de pagos para la coalición $\{J_3\}$ es

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La estrategia mixta para el jugador columna de la forma $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ domina a las columnas 1 y 4. Eliminando las columnas dominadas, el pago máximo para $\{J_3\}$ se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -(1-p) = -2p \Longrightarrow p = \frac{1}{3};$$

$$v\big(\{J_3\}\big) = -\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Análogamente, la matriz de pagos para la coalición $\{J_1, J_2\}$ es

$$M_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso de nuevo hay un punto de silla, que es el elemento m_{22}. En consecuencia,

$$v\big(\{J_1, J_2\}\big) = m_{22} = 1.$$

- Gran coalición $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, J_3\}$. Se puede ver que la mejor estrategia para la gran coalición es $(2, 2, 1)$, y que en ese caso consigue un pago de

$$v\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 2.$$

En resumen, la función característica del juego es

$$v(\varnothing) = 0; \quad v\big(\{J_1\}\big) = -\frac{1}{2}; \quad v\big(\{J_2\}\big) = \frac{1}{2}; \quad v\big(\{J_3\}\big) = -\frac{2}{3};$$

$$v\big(\{J_1, J_2\}\big) = 2; \quad v\big(\{J_1, J_3\}\big) = \frac{1}{2}; \quad v\big(\{J_2, J_3\}\big) = 1; \quad v\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 2.$$

Es inmediato ver que es un juego esencial, puesto que

$$2 = v\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) \neq \sum_{i=1}^{3} v\big(\{J_i\}\big) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Examen 24. Enero de 2020

Problema 24.1. Juan elige entre invertir en la fabricación del producto A o invertir en la fabricación del producto B.

A continuación Francisco sin conocer en lo que ha invertido Juan y, antes de elegir él, tira una moneda y si sale cara (C) elige invertir en la fabricación del producto A o B, y si sale cruz (X) invertir en la fabricación del producto P o del producto Q.

La función de pago viene dada por:

$$\begin{array}{rcrrcr} M(A,C,A) & = & 4, & M(B,C,A) & = & -3, \\ M(A,C,B) & = & -1, & M(B,C,B) & = & 1, \\ M(A,X,P) & = & 2, & M(B,X,P) & = & -1, \\ M(A,X,Q) & = & 0, & M(B,X,Q) & = & 0. \end{array}$$

Hallar la forma extensiva, la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 24.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero[1] con información imperfecta y movimientos aleatorios.

En la primera etapa del juego Juan, que denominaremos jugador J_1, elige entre invertir en el producto A o B. Precisamente, su conjunto de estrategias será

$$\Sigma_1 = \{A, B\}.$$

En la segunda etapa el azar, que denominaremos jugador J_0, lanza una moneda en la que puede salir cara C o cruz X con la misma probabilidad

$$\mathcal{P}(C) = \mathcal{P}(X) = \frac{1}{2}.$$

Por último, en la tercera etapa Francisco, al que denominaremos jugador J_2, conociendo el resultado del lanzamiento de la moneda pero no la elección de J_1, elige a su vez entre los productos A y B si la moneda mostró una cara C y entre los productos P y Q si la moneda mostró una cruz. Por tanto, el conjunto de estrategias de J_2 será

$$\Sigma_2 = \{AP, AQ, BP, BQ\};$$

donde en este caso, por ejemplo, la estrategia AQ indica que si en el lanzamiento se obtuvo cara C entonces J_2 elegirá el producto A, mientras que si en el lanzamiento se obtuvo cruz X entonces J_2 elegirá el producto Q.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 24.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \big\{\Sigma_1 = \{A, B\}, \Sigma_2 = \{AP, AQ, BP, BQ\}\big\}\Big\}.$$

[1]Aunque *a priori* no hay motivos para pensar que se trate de un juego de suma cero, haremos esta suposición puesto que de no hacerla no hay datos para saber cuáles son los pagos de Francisco.

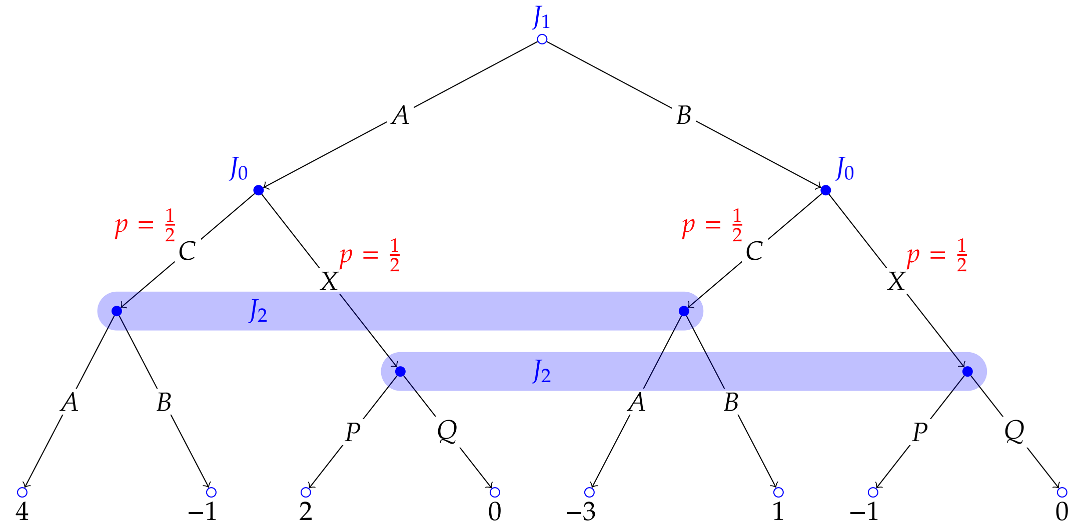


Figura 24.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 24.1.

En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(A, AP) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 3; \quad \pi(A, AQ) = \frac{1}{2} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 2;$$

$$\pi(A, BP) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{2}; \quad \pi(A, BQ) = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{1}{2};$$

$$\pi(B, AP) = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-1) = -2; \quad \pi(B, AQ) = \frac{1}{2} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 0 = -\frac{3}{2};$$

$$\pi(B, BP) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0; \quad \pi(B, BQ) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 24.1.

M		J_2			
		AP	AQ	BP	BQ
J_1	A	3	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	B	-2	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$

Cuadro 24.1: Forma normal del juego Γ del problema 24.1.

Resolución:

- La matriz M no tiene puntos de silla, por lo que habrá que utilizar estrategias mixtas.
- No hay filas ni columnas dominadas.
- Para la matriz M, una estrategia mixta para el jugador fila J_1 será de la forma $\vec{p} = (p, 1-p)$, con

$$\pi_1(p) = 3p - 2(1-p) = 5p - 2; \quad \pi_2(p) = 2p - \frac{3}{2}(1-p) = \frac{7}{2}p - \frac{3}{2};$$

$$\pi_3(p) = \frac{1}{2}p; \quad \pi_4(p) = -\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = -p + \frac{1}{2}.$$

Representamos en la figura 24.2 las funciones lineales $\pi_j(p)$, y comprobamos que el máximo del mínimo es el punto de intersección de $\pi_2(p)$ y $\pi_4(p)$,

$$\pi_2(p) = \pi_4(p) \Longrightarrow \frac{7}{2}p - \frac{3}{2} = -p + \frac{1}{2} \Longrightarrow 7p - 3 = -2p + 1 \Longrightarrow p = \frac{4}{9}.$$

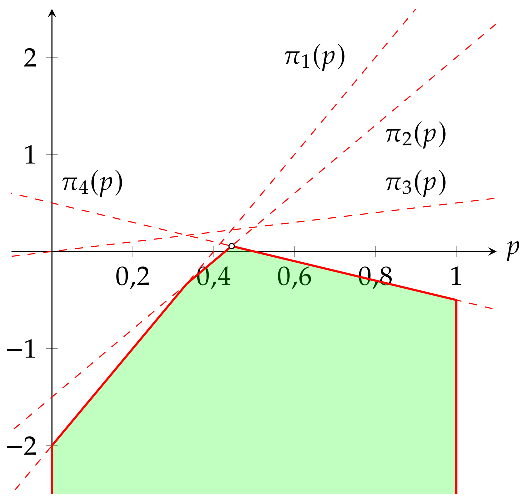


Figura 24.2: Máximo del mínimo para el jugador J_1.

- Para obtener una estrategia mixta para el jugador columna J_2, podemos eliminar las columnas 1 y 3, que no son activas cuando J_1 alcanza su máximo. Obtenemos la matriz reducida

$$M^* = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

y para esta matriz una estrategia mixta será de la forma $\vec{q} = (q, 1-q)$, y ha de satisfacer

$$\pi^1(q) = \pi^2(q) \Longrightarrow 2q - \frac{1}{2}(1-q) = -\frac{3}{2}q + \frac{1}{2}(1-q) \Longrightarrow 4q - (1-q) = -3q + (1-q) \Longrightarrow 7q = 2(1-q) \Longrightarrow q = \frac{2}{9}.$$

- Trasladando los resultados obtenidos a la matriz M, la solución hallada es

$$\vec{p} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9}\right), \quad \vec{q} = \left(0, \frac{2}{9}, 0, \frac{7}{9}\right);$$

$$\left.\begin{aligned} v_1(M) &= \frac{7}{2}\cdot\frac{4}{9} - \frac{3}{2} = -\frac{4}{9} + \frac{1}{2} = \frac{1}{18} \\ v_2(M) &= 2\cdot\frac{2}{9} - \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{9}\right) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{9} + \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{2}{9}\right) = \frac{1}{18} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow v(M) = \frac{1}{18}.$$

Problema 24.2. Para el juego bimatricial

$$\begin{pmatrix} (4,1) & (12,1) \\ (7,2) & (9,-1) \end{pmatrix},$$

hallar los pares de equilibrio en estrategias puras y en estrategias mixtas.

Solución del problema 24.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. Sean $\vec{p}(p, 1-p)$ y $\vec{q}(q, 1-q)$ un par de estrategias mixtas para los jugadores J_1 y J_2 respectivamente. Los pagos esperados para ambos jugadores serían,

$$\begin{aligned}
\pi_1(p,q) &= 4pq + 12p(1-q) + 7(1-p)q + 9(1-p)(1-q) = \\
&= -6pq + 3p - 2q + 9 = \\
&= 3p(1-2q) - 2q + 9; \\
\pi_2(p,q) &= pq + p(1-q) + 2(1-p)q - (1-p)(1-q) = \\
&= -3pq + 2p + 3q - 1 = \\
&= 3q(1-p) + 2p - 1.
\end{aligned}$$

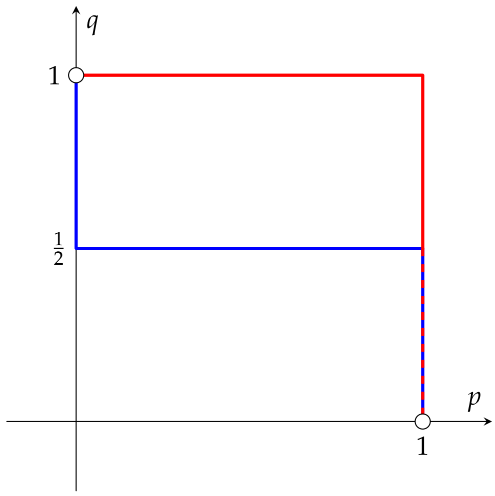


Figura 24.3: Método de la esvástica para el problema 24.2.

En este caso se puede ver que el valor de p que maximiza π_1 para q fijo es $p = 1$ si $q < \frac{1}{2}$, cualquiera si $q = \frac{1}{2}$, y $p = 0$ si $q > \frac{1}{2}$. Análogamente, el valor de q que maximiza π_2 para p fijo es $q = 1$ si $p < 1$, y cualquiera si $p = 1$.

En la figura 24.3 se representan los valores de p que maximizan π_1 para q fijo (en azul) y los valores de q que maximizan π_2 para p fijo (en rojo), en aplicación del que Thomas (2003 : 59) denomina *método de la esvástica*. Existen dos pares de equilibrio en estrategias puras, $((0,1),(1,0))$ y $((1,0),(0,1))$; e infinitos pares de equilibrio en estrategias mixtas, de la forma

$$\big((1,0),(q,1-q)\big), \quad 0 < q \leqslant \frac{1}{2}.$$

Problema 24.3. En el siguiente juego tripersonal, donde cada jugador tiene dos estrategias indicadas por 1 y 2, hay ocho combinaciones de estrategias y ocho correspondientes 3-tuplas de pagos:

Estrategias	Pagos
$(1,1,1)$	$(0,0,0)$
$(1,1,2)$	$(0,-1,1)$
$(1,2,1)$	$(1,0,-1)$
$(1,2,2)$	$(0,0,0)$
$(2,1,1)$	$(1,1,-2)$
$(2,1,2)$	$(2,0,-2)$
$(2,2,1)$	$(1,-1,0)$
$(2,2,2)$	$(-1,1,0)$

(a) Calcular la función característica.

(b) ¿El núcleo o *core* es vacío?

Solución del problema 24.3. Estamos ante un juego tripersonal de suma cero en su forma normal.

(a) Estudiamos por separado las posibles coaliciones que se pueden formar, teniendo en cuenta como ya se ha dicho que el juego es de suma cero en su forma normal.

- Coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 24.2.

M_1		$\{J_2, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_1\}$	1	0	0	1	0
	2	1	2	1	−1

Cuadro 24.2: Forma normal del juego del problema 24.3 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$.

La matriz tiene un punto de silla, $m_{1,4} = 0$, por lo que

$$v(\{J_1\}) = m_{14} = 0,$$

y al ser de suma cero,

$$v(\{J_2, J_3\}) = -m_{14} = 0.$$

- Coaliciones $\{J_2\}$ y $\{J_1, J_3\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 24.3.

M_2		$\{J_1, J_3\}$			
		11	12	21	22
$\{J_2\}$	1	0	−1	1	0
	2	0	0	−1	1

Cuadro 24.3: Forma normal del juego del problema 24.3 para las coaliciones $\{J_2\}$ y $\{J_1, J_3\}$.

En este caso la segunda columna domina a la primera y a la cuarta, y eliminadas la columnas dominadas una estrategia mixta para la coalición $\{J_2\}$ sería de la forma $\vec{p}(p, 1-p)$, y ha de verificar

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow -p = p - (1-p) \Longrightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Por tanto

$$v(\{J_2\}) = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

y al ser de suma cero,

$$v(\{J_1, J_3\}) = \frac{1}{3}.$$

- Coaliciones $\{J_3\}$ y $\{J_1, J_2\}$. La forma normal del juego se representa en el cuadro 24.4.

M_3		$\{J_1, J_2\}$			
		11	12	21	22
$\{J_3\}$	1	0	−1	−2	0
	2	1	0	−2	0

Cuadro 24.4: Forma normal del juego del problema 24.3 para las coaliciones $\{J_3\}$ y $\{J_1, J_2\}$.

Ahora la matriz tiene dos puntos de silla, $m_{13} = m_{23} = -2$, por lo que

$$\nu\big(\{J_3\}\big) = m_{13} = m_{23} = -2,$$

y al ser de suma cero,

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = -m_{13} = -m_{23} = 2.$$

- Gran coalición $\mathcal{P} = \{J_1, J_2, J_3\}$. Por ser un juego de suma cero

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 0.$$

En resumen, la función característica del juego es

$$\nu(\varnothing) = 0; \quad \nu\big(\{J_1\}\big) = 0; \quad \nu\big(\{J_2\}\big) = -\frac{1}{3}; \quad \nu\big(\{J_3\}\big) = -2;$$

$$\nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 2; \quad \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = \frac{1}{3}; \quad \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 0; \quad \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 0.$$

(b) El teorema 6.9 de Morris (1994 : 164) nos garantiza (como ya se ha visto) que el juego es de suma cero también en su forma de función característica. Además es esencial, puesto que se verifica

$$\nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 0 \neq 0 - \frac{1}{3} - 2 = \sum_{i=1}^{3} \nu\big(\{J_i\}\big).$$

Por tanto, el teorema 6.10 de Morris (1994 : 164) nos permita asegurar que el núcleo es vacío.

No obstante, y como comprobación, determinaremos el núcleo a partir de su definición. Sea $\vec{x}(x_1, x_2, x_3)$ una imputación del núcleo. Se han de verificar:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= \nu\big(\{J_1, J_2, J_3\}\big) = 0; \\ x_1 &\geqslant \nu\big(\{J_1\}\big) = 0; \\ x_2 &\geqslant \nu\big(\{J_2\}\big) = -\frac{1}{3}; \\ x_3 &\geqslant \nu\big(\{J_3\}\big) = -2; \\ x_1 + x_2 &\geqslant \nu\big(\{J_1, J_2\}\big) = 2; \\ x_1 + x_3 &\geqslant \nu\big(\{J_1, J_3\}\big) = \frac{1}{3}; \\ x_2 + x_3 &\geqslant \nu\big(\{J_2, J_3\}\big) = 0. \end{aligned}$$

Si sumamos las tres últimas desigualdades se obtiene

$$2(x_1 + x_2 + x_3) \geqslant 2 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{7}{3} \Longrightarrow x_1 + x_2 + x_3 \geqslant \frac{7}{6} > 0.$$

Como este resultado contradice la primera igualdad, no hay ninguna imputación en el núcleo, lo que confirma lo razonado anteriormente.

Examen 25. Febrero de 2020

Problema 25.1. Dos ejércitos constan cada uno de cuatro regimientos. Ambos ejércitos pretenden capturar dos posiciones y tienen el problema de decidir cuántos regimientos envían a cada posición.

Se supone que gana en una posición el que más regimientos tenga en ella y hay empate si envían el mismo número.

Los pagos son de la forma siguiente: si un ejército de r regimientos vence a otro de s regimientos, entonces el vencedor gana $s + 1$.

Hallar la forma normal y resolver este juego.

Solución del problema 25.1. Estamos ante un juego bipersonal simétrico (entendiendo que los dos ejércitos hacen sus movimientos simultáneamente) y de suma cero (entendiendo que si el ejército vencedor gana $s + 1$ entonces el vencido pierde $s + 1$).

Llamaremos Γ al juego, J_1 y J_2 a los dos ejércitos, y A y B a las dos posiciones que se pretenden capturar. Representamos por $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ el número de regimientos que los ejércitos J_1 y J_2 respectivamente envían a la posición A. La situación será la indicada en el cuadro 25.1.

	A	B
J_1	x	$4 - x$
J_2	y	$4 - y$

Cuadro 25.1: Posibles movimientos de los jugadores.

En función de los valores de x e y las posibles situaciones son:

- Si $x > y$ el ejército J_1 gana en la posición A y pierde en la B. El pago es

$$(y + 1) - (4 - x + 1) = x + y - 4.$$

- Si $x = y$ hay empate en ambas posiciones, y el pago es 0.

- Y si $x < y$ el ejército J_1 pierde en la posición A y gana en la B. En este caso el pago es

$$-(x + 1) + (4 - y + 1) = -x - y + 4.$$

Como no hay movimientos aleatorios, la información anterior permite obtener directamente todos los pagos y la forma normal del juego Γ, cuya matriz M se representa en el cuadro 25.2. Denotamos las estrategias de cada jugador por respectivamente por los valores de x e y.

M		J_2				
		0	1	2	3	4
J_1	0	0	3	2	1	0
	1	−3	0	1	0	−1
	2	−2	−1	0	−1	−2
	3	−1	0	1	0	−3
	4	0	1	2	3	0

Cuadro 25.2: Forma normal del juego Γ del problema 25.1.

Y aunque no se pide, la forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 25.1.

$$\Gamma = \left\{T, \{J_1, J_2\}, \left\{\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{0,1,2,3,4\}\right\}\right\}.$$

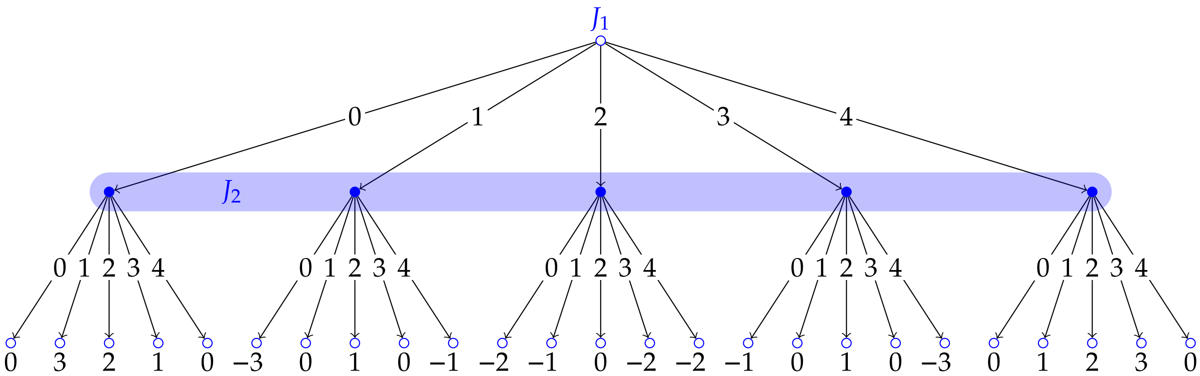


Figura 25.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 25.1.

Resolución:

- La matriz M tiene varios puntos de silla, $m_{00} = m_{04} = m_{40} = m_{44} = 0$. Por tanto el valor del juego es $v(M) = 0$, y las estrategias óptimas para cada jugador son aquellas en las que envía todos sus regimientos a una cualquiera de las posiciones a capturar.

Problema 25.2. Hallar el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (5,2) & (8,6) \\ (2,9) & (2,2) \\ (10,-1) & (5,2) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 25.2. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador (valores maximín).

- La matriz de pagos del jugador J_1 es

$$M_1 = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

No tiene puntos de silla, pero se puede eliminar la segunda fila, que está dominada por cualquiera de las otras dos. El pago máximo se consigue con la estrategia mixta que verifica

$$\pi_1(p) = \pi_2(p) \Longrightarrow 5p + 10(1-p) = 8p + 5(1-p) \Longrightarrow 3p = 5(1-p) \Longrightarrow p = \frac{5}{8};$$

$$v_1 = 5 \cdot \frac{5}{8} + 10 \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right) = 8 \cdot \frac{5}{8} + 5 \cdot \left(1 - \frac{5}{8}\right) = \frac{55}{8}.$$

- La matriz de pagos del jugador J_2 es

$$M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tiene un punto de silla, que es el elemento m_{23}, y por tanto $v_2 = m_{23} = 2$.

Por tanto, el par de valores maximín, que tomaremos como punto de *statu quo* para hallar el par de arbitraje, es $\left(\frac{55}{8}, 2\right)$. El par de arbitraje ha de estar en el conjunto de negociación, marcado con una línea más gruesa en la figura 25.2, y ha de ser el punto de dicho conjunto que maximice la función

$$g(u,v) = \left(u - \frac{55}{8}\right)(v-2).$$

Estudiaremos cada segmento por separado:

- Del punto $\left(\frac{55}{8}, \frac{105}{16}\right)$ al punto $(8,6)$. La relación entre las variables es

$$v = -\frac{1}{2}u + 10,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_1(u) = \left(u - \frac{55}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}u + 10 - 2\right) = -\frac{1}{2}u^2 + \frac{183}{16}u - 55.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{183}{16}, \frac{137}{32}\right)$, que en este caso se alcanza fuera del conjunto de negociación.

$$g_1'(u) = -u + \frac{183}{16};$$

$$g_1'(u) = 0 \Longrightarrow -u + \frac{183}{16} = 0 \Longrightarrow u = \frac{183}{16} > 8;$$

$$v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{183}{16} + 10 = \frac{137}{32} < 6.$$

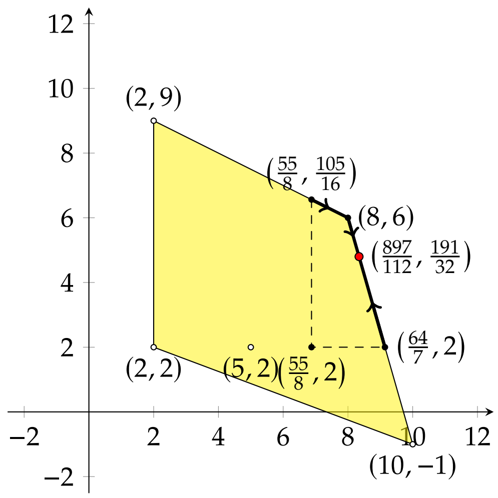


Figura 25.2: Región de pagos para el problema 25.2.

- Del punto $(8, 6)$ al punto $\left(\frac{64}{7}, 2\right)$. La relación entre las variables es

$$v = -\frac{7}{2}u + 34,$$

y sustituida en la función g permite obtener

$$g_2(u) = \left(u - \frac{55}{8}\right)\left(-\frac{7}{2}u + 34 - 2\right) = -\frac{7}{2}u^2 + \frac{897}{16}u - 220.$$

Y su máximo es el punto $\left(\frac{177}{28}, \frac{95}{8}\right)$, que en este caso está en el conjunto de negociación.

$$g_2'(u) = -7u + \frac{897}{16};$$

$$g_2'(u) = 0 \Longrightarrow -7u + \frac{897}{16} = 0 \Longrightarrow u = \frac{897}{112} > 8;$$

$$v = -\frac{7}{2} \cdot \frac{897}{112} + 34 = \frac{191}{32} < 6.$$

Dado que la función g_1 crece para valores de u menores que 8, el par de arbitraje es el punto $\left(\frac{897}{112}, \frac{191}{32}\right)$. Para mayor claridad se representa el sentido de crecimiento de la función g sobre el conjunto de negociación[1].

Problema 25.3. Se tienen tres cajas, cada una con tres bolas numeradas con el 1, 2 y 3, y tres jugadores. Cada jugador puede elegir solamente una bola de una urna. Ninguno conoce lo que han elegido los demás.

A continuación enseñan su elección y se establecen los pagos: si todos eligen lo mismo no se efectúa ningún pago, en caso contrario el jugador que muestre la bola numerada mayor paga cinco euros a cada uno de los restantes que la enseñe menor (no igual).

(a) Calcular la función característica.

(b) ¿Es un juego esencial?

Solución del problema 25.3. Idéntico al problema 11.3 de la página 62.

[1]El par de arbitraje $\left(\frac{897}{112}, \frac{191}{32}\right)$ está en el segmento donde se ha dibujado, pero con la escala indicada sería prácticamente indistinguible del punto $(8, 6)$. Con el objeto de hacer más visual la representación gráfica se lo ha colocado por debajo y a la izquierda de donde realmente debería estar.

Examen 26. Enero de 2021

Problema 26.1. Se tiene una baraja donde la tercera parte de las cartas están marcadas con la letra C y el resto con la letra D. Al comienzo del juego, el jugador fila J_1 y el jugador columna J_2 ponen cada uno 60 euros sobre una mesa. El jugador columna J_2 saca una carta de la baraja y sin mirarla apuesta 30 o 60 euros. El jugador fila J_1 puede ver o no ver. Si J_1 no ve, entonces J_2 gana lo que hay en la mesa. Si J_1 decide ver, entonces debe igualar la apuesta de J_2 y a continuación, se enseña la carta. En este caso, J_2 ganará el total de la mesa si ha tomado C, en otro caso J_1 gana el total de la mesa. Un jugador gana lo que pierde el otro, no lo que apuesta. Hallar la forma extensiva de este juego bipersonal de suma nula.

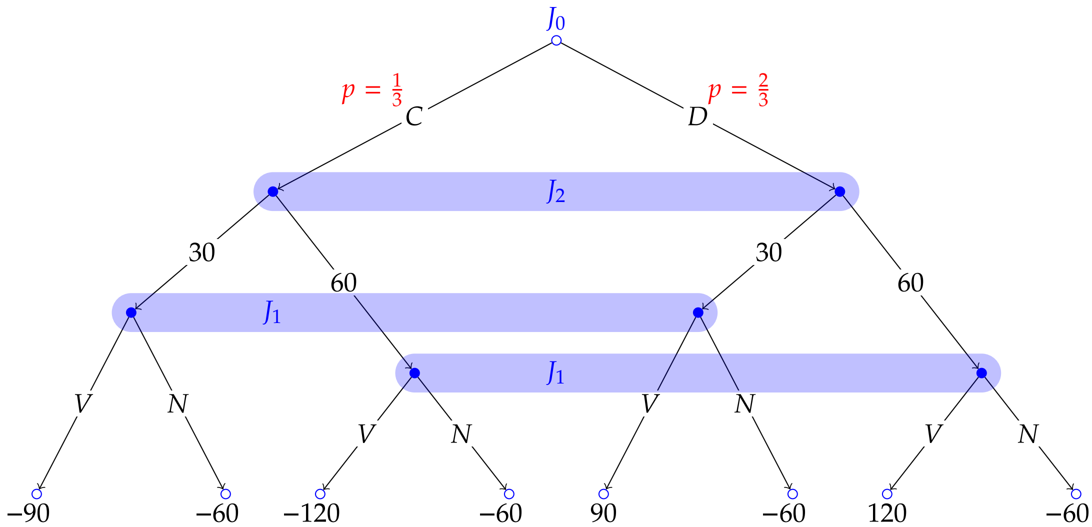


Figura 26.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 26.1.

Solución del problema 26.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador J_0, elige una carta C o D con probabilidades

$$\mathcal{P}(C) = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{P}(D) = \frac{2}{3}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_2, sin conocer la carta extraída, elige un apostar 30 o 60 unidades. El conjunto de estrategias para el jugador J_2 será entonces

$$\Sigma_2 = \{30, 60\}.$$

Por último, en la tercera etapa, el jugador J_1 decide si ve o no, conociendo la apuesta de J_2, pero no la carta extraída. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_1 será

$$\Sigma_1 = \{VV, VN, NV, NN\};$$

donde, en este caso la estrategia VN indica que si J_2 apostó 30 unidades entonces J_1 ve, mientras que si J_2 apostó 60 unidades entonces J_1 no ve.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 26.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{VV, VN, NV, NN\}, \Sigma_2 = \{30, 60\}, \}\Big\}.$$

Problema 26.2. En el problema 26.1, calcular la forma normal, el valor del juego y las estrategias óptimas.

Solución del problema 26.2. En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(VV, 30) = \frac{1}{3} \cdot (-90) + \frac{2}{3} \cdot 90 = 30; \quad \pi(VV, 60) = \frac{1}{3} \cdot (-120) + \frac{2}{3} \cdot 120 = 40;$$

$$\pi(VN, 30) = \frac{1}{3} \cdot (-90) + \frac{2}{3} \cdot 90 = 30; \quad \pi(VN, 60) = \frac{1}{3} \cdot (-60) + \frac{2}{3} \cdot (-60) = -60;$$

$$\pi(NV, 30) = \frac{1}{3} \cdot (-60) + \frac{2}{3} \cdot (-60) = -60; \quad \pi(NV, 60) = \frac{1}{3} \cdot (-120) + \frac{2}{3} \cdot 120 = 40;$$

$$\pi(NN, 30) = \pi(NN, 60) = \frac{1}{3} \cdot (-60) + \frac{2}{3} \cdot (-60) = -60.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 26.1.

M		J_2	
		30	60
J_1	VV	30	40
	VN	30	−60
	NV	−60	40
	NN	−60	−60

Cuadro 26.1: Forma normal del juego Γ del problema 26.1.

Resolución:

- La matriz M tiene un punto de silla, $m_{11} = 30$. Por tanto el valor del juego es $v(M) = 30$, la estrategia óptima para el jugador J_1 es ver siempre, y la estrategia óptima para el jugador J_2 es apostar 30 siempre. a capturar.

Problema 26.3. Calcular los valores maximín y el par de arbitraje del juego cooperativo dado por la bimatriz:

$$\begin{pmatrix} (0, 3) & (5, 5) \\ (-5, 5) & (2, -4) \\ (-5, -4) & (5, -4) \end{pmatrix}.$$

Solución del problema 26.3. Estamos ante un juego bipersonal de suma no nula. El primer paso es calcular por separado los pagos máximos para cada jugador (valores maximín).

- La matriz de pagos del jugador J_1 es
$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}.$$
Tiene un punto de silla, que es el elemento m_{11}, y por tanto $v_1 = m_{11} = 0$.

- La matriz de pagos del jugador J_2 es
$$M_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ 5 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$
Tiene dos puntos de silla, que son los elementos m_{13} y m_{23}, y por tanto $v_2 = m_{13} = m_{23} = -4$.

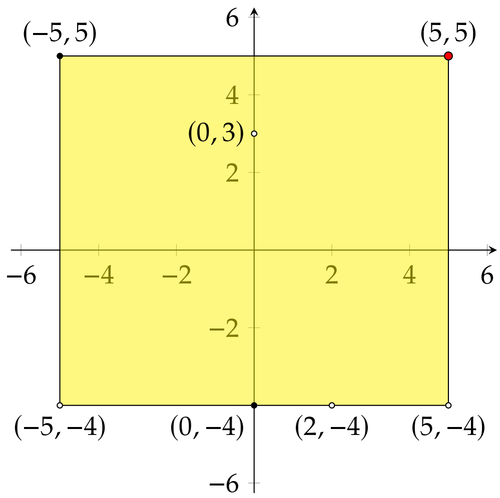


Figura 26.2: Región de pagos para el problema 26.3.

Por tanto, el par de valores maximín es $(0, -4)$. En este caso la región de pagos, representada en la figura 26.2, tiene un único óptimo de Pareto que es el punto $(5, 5)$ por lo que necesariamente dicho punto ha de ser también el par de arbitraje buscado (independientemente de cuál fuese el punto de *statu quo*).

Problema 26.4. En un juego tripersonal cada jugador puede elegir una de las letras: L, M y N. Ninguno conoce lo que han elegido los demás. A continuación enseñan su elección y se establecen los pagos. Si los tres eligen lo mismo no se efectúa ningún pago, en caso contrario, se da la siguiente relación: L gana a M, M gana a N y N gana a L. El jugador que pierda paga 10 euros a cada uno de los jugadores que le ganen. Escribir la función característica. Comprobar si es o no un juego esencial.

Solución del problema 26.4. Estamos ante un juego tripersonal simétrico de suma cero en su forma normal. Por ser simétrico son indistinguibles todos los jugadores y todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores. Y por ser de suma cero en su forma normal también será de suma cero en su forma de función característica, según el teorema 6.9 de Morris (1994 : 164).

Según lo ya razonado, las posibles coaliciones *distintas* a estudiar son, además de la trivial y de la gran coalición, las de uno y dos jugadores. Si se forman, por ejemplo, las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$, la forma normal del juego se recoge en el cuadro 26.2. En principio debería ser una matriz de dimensiones 3×9, pero directamente se han eliminado directamente las columnas dominadas que corresponden a la coalición $\{J_2, J_3\}$, para la cual es evidente que el orden de las estrategias de los distintos jugadores no es relevante. Por ejemplo, la columna correspondiente a la estrategia ML se suprime puesto que es idéntica a (y está dominada por) la correspondiente a la estrategia LM.

		$\{J_2, J_3\}$					
		LL	LM	LN	MM	MN	NN
$\{J_1\}$	L	0	10	−10	20	0	−20
	M	−20	−10	0	0	10	20
	N	20	0	10	−20	−10	0

Cuadro 26.2: Forma normal del juego del problema 26.4 para las coaliciones $\{J_1\}$ y $\{J_2, J_3\}$.

La matriz reducida obtenida no tiene puntos de silla y tampoco tiene filas ni columnas dominadas por estrategias puras. Sin embargo, para la coalición $\{J_2, J_3\}$, la estrategia mixta $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ domina a la estrategia pura LM, la estrategia mixta $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$ domina a la estrategia pura LN, y la estrategia mixta $\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ domina a la estrategia pura MN. Eliminadas las columnas dominadas, tenemos la siguiente matriz reducida, que corresponde a un juego simétrico, por lo que el valor del juego es cero.

		$\{J_2, J_3\}$		
		LL	MM	NN
$\{J_1\}$	L	0	20	−20
	M	−20	0	20
	N	20	−20	0

Como ya se ha justificado que todas las coaliciones que tengan el mismo número de jugadores son indistinguibles, y que el juego es de suma cero, tenemos suficiente información para dar la función característica. En este caso es idénticamente nula.

$$v(\varnothing) = v(\{J_1\}) = v(\{J_2\}) = v(\{J_3\}) = v(\{J_1, J_2\}) = v(\{J_1, J_3\}) = v(\{J_2, J_3\}) = v(\{J_1, J_2, J_3\}) = 0.$$

Como se puede ver, es un juego no esencial, puesto que se verifica la definición 6.2 de Morris (1994 : 154).

$$v(\{J_1, J_2, J_3\}) = \sum_{i=1}^{3} v(\{J_i\}) = 0.$$

Examen 27. Febrero de 2021

Problema 27.1. El juego bipersonal de suma nula se juega en las siguientes etapas:

(I) El azar J_0 elige un número $i \in \{0, 1\}$ con probabilidades: $\mathcal{P}(0) = \frac{1}{3}$, $\mathcal{P}(1) = \frac{2}{3}$.

(II) El jugador fila J_1 sabiendo la elección del azar elige un número $j \in \{2, 3\}$

(III) El jugador columna J_2 elige un número $k \in \{4, 5\}$. La información de J_2 en la etapa (III) es que conoce el valor de i pero no el de j.

Si $i + j + k$ es par J_1 paga a J_2 tres euros. En los demás casos J_2 paga a J_1 dos euros. Hallar la forma extensiva de este juego bipersonal de suma nula.

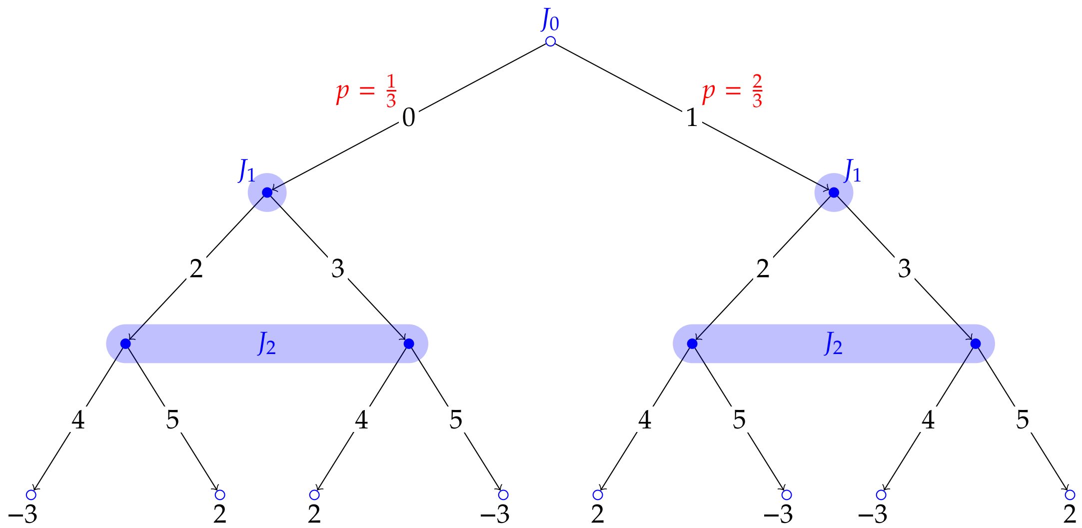


Figura 27.1: Árbol T del juego Γ, para el problema 27.1.

Solución del problema 27.1. Estamos ante un juego bipersonal de suma cero con información imperfecta y movimientos aleatorios.

La primera etapa del juego es un movimiento aleatorio en la que el azar, que denominaremos jugador J_0, elige un número $i \in \{0, 1\}$ con probabilidades

$$\mathcal{P}(0) = \frac{1}{3}, \quad \mathcal{P}(1) = \frac{2}{3}.$$

En la segunda etapa, el jugador J_1, conociendo el número i, elige a su vez un número $j \in \{2, 3\}$. El conjunto de estrategias para el primer jugador será entonces

$$\Sigma_1 = \{22, 23, 32, 33\},$$

donde, por ejemplo, la estrategia 23 indica que J_1 elige el número $j = 2$ si $i = 0$, y elige el número $j = 3$ si $i = 1$. Por último, en la tercera etapa, el jugador J_2 selecciona un número $k \in \{4, 5\}$, conociendo el número i, pero no j. Por tanto, el conjunto de estrategias para J_2 será

$$\Sigma_2 = \{44, 45, 54, 55\};$$

donde, en este caso la estrategia 45 indica que si $i = 0$ entonces J_2 elegirá el número $k = 4$, mientras que si $i = 1$ entonces J_2 elegirá el número $k = 5$.

La forma extensiva del juego Γ se da a continuación, siendo el árbol T el representado en la figura 27.1.

$$\Gamma = \Big\{T, \{J_1, J_2\}, \{\Sigma_1 = \{22, 23, 32, 33\}, \Sigma_2 = \{44, 45, 54, 55\}\}\Big\}.$$

Problema 27.2. En el problema 27.1, calcular la forma normal.

Solución del problema 27.2. En función de las distintas estrategias de cada jugador calculamos los pagos esperados.

$$\pi(22,44) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{1}{3}; \quad \pi(22,45) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -3;$$
$$\pi(22,54) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 2 = 2; \quad \pi(22,55) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -\frac{4}{3};$$
$$\pi(23,44) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -3; \quad \pi(23,45) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{1}{3};$$
$$\pi(23,54) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -\frac{4}{3}; \quad \pi(23,55) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 2 = 2;$$
$$\pi(32,44) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 2 = 2; \quad \pi(32,45) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -\frac{4}{3};$$
$$\pi(32,54) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{1}{3}; \quad \pi(32,55) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -3;$$
$$\pi(33,44) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -\frac{4}{3}; \quad \pi(33,45) = \frac{1}{3}\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot 2 = 2;$$
$$\pi(33,54) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot(-3) = -3; \quad \pi(33,55) = \frac{1}{3}\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot 2 = \frac{1}{3}.$$

Los resultados anteriores nos permiten escribir la forma normal del juego, cuya matriz M se recoge en el cuadro 27.1.

M		J_2			
		44	45	54	55
J_1	22	$\frac{1}{3}$	-3	2	$-\frac{4}{3}$
	23	-3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	2
	32	2	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	-3
	33	$-\frac{4}{3}$	2	-3	$\frac{1}{3}$

Cuadro 27.1: Forma normal del juego Γ del problema 27.1.

Problema 27.3. Dos empresas diferentes venden el mismo producto en un mismo mercado compuesto por dos zonas Z_1 y Z_2.

Cada una puede realizar una campaña publicitaria, enfocada a la zona Z_1 o a la Z_2. En la zona Z_1 solo se enterará el 40 % de los clientes potenciales y en la Z_2 el 60 %.

Si ambas firmas se anuncian en la misma zona, cada una venderá al 30 % de los que se enteraron. Si lo hacen en zonas diferentes, cada una venderá al 50 % de los que se enteraron.

Escribir la matriz del juego.

Solución del problema 27.3. Estamos ante un juego bipersonal simétrico de suma no nula. Llamaremos jugadores J_1 y J_2 a cada una de las empresas. Ambos jugadores pueden invertir en la zona Z_1 o Z_2, por lo que el conjunto de estrategias para los dos es

$$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \{1, 2\}.$$

La forma normal del juego se recoge en la bimatriz del cuadro 27.2 (donde los pagos indican los clientes de cada zona a los que las empresas consigue vender, en tanto por ciento).

M		J_2	
		1	2
J_1	1	$(12, 12)$	$(20, 30)$
	2	$(30, 20)$	$(18, 18)$

Cuadro 27.2: Forma normal del juego del problema 27.3.

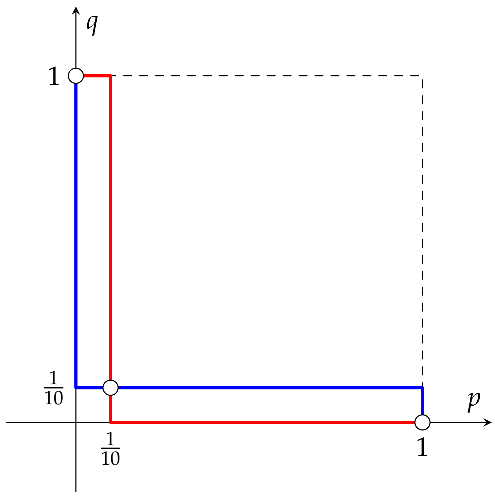


Figura 27.2: Método de la esvástica para el problema 27.3.

Problema 27.4. En el problema 27.3, calcular el par o punto de equilibrio en estrategias puras. ¿Tiene pares o puntos de equilibrio en estrategias mixtas?

Solución del problema 27.4. Para hallar los pares de equilibrio utilizaremos el método de la esvástica. Sean $\vec{p}(p, 1-p)$ y $\vec{q}(1-q)$ un par de estrategias mixtas para los jugadores J_1 y J_2 respectivamente. Los pagos esperados de ambos jugadores serían

$$\begin{aligned}\pi_1(p, q) &= 12pq + 20p(1-q) + 30(1-p)q + 18(1-p)(1-q) = \\ &= -20pq + 2p + 12q + 18 = \\ &= (-20q + 2)p + 12q + 18;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_2(p,q) &= 12pq + 30p(1-q) + 20(1-p)q + 18(1-p)(1-q) = \\ &= -20pq + 12p + 2q + 18 = \\ &= (-20p+2)q + 12p + 18.\end{aligned}$$

Se puede ver que el valor de p que maximiza π_1 para q fijo es $p = 1$ si $q < \frac{1}{10}$, cualquiera si $q = \frac{1}{10}$, y $p = 0$ si $q > \frac{1}{10}$. Análogamente, el valor de q que maximiza π_2 para p fijo es $q = 1$ si $p < \frac{1}{10}$, cualquiera si $p = \frac{1}{10}$, y $q = 0$ si $p > \frac{1}{10}$.

En la figura 27.2 se representan los valores de p que maximizan π_1 para q fijo (en azul) y los valores de q que maximizan π_2 para p fijo (en rojo). Se puede ver que existen dos pares de equilibrio en estrategias puras, que son los puntos $\big((0,1),(1,0)\big)$ y $\big((1,0),(0,1)\big)$, y que corresponden a los casos en que ambas empresas invierten en zonas diferentes. También hay un único par de equilibrio en estrategias mixtas, y es el punto $\left(\left(\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right),\left(\frac{1}{10},\frac{9}{10}\right)\right)$.

Problema 27.5. Considerar el siguiente juego entre cuatro personas en forma de función característica:

$$\begin{gathered} v\big(\{i\}\big) = 0,\ \forall i \in \{1,2,3,4\}; \\ v\big(\{1,2\}\big) = v\big(\{1,3\}\big) = v\big(\{2,4\}\big) = v\big(\{3,4\}\big) = 1; \\ v\big(\{1,4\}\big) = v\big(\{2,3\}\big) = 0; \\ v\big(\{1,2,4\}\big) = v\big(\{1,3,4\}\big) = v\big(\{2,3,4\}\big) = 1; \\ v\big(\{1,2,3\}\big) = v\big(\{1,2,3,4\}\big) = 2. \end{gathered}$$

Comprobar si el núcleo (*core*) de este juego es vacío o no es vacío.

Solución del problema 27.5. Estamos ante un juego tetrapersonal. Sea $\vec{x}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ una imputación del núcleo (o *core*) del juego. Según el corolario 6.8 de Morris (1994 : 160), se han de verificar

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = v\big(\{1,2,3,4\}\big) = 2; \tag{27.1}$$
$$x_i \geqslant v\big(\{i\}\big) = 0,\ \forall i \in \{1,2,3,4\}; \tag{27.2}$$
$$x_1 + x_2 \geqslant v\big(\{1,2\}\big) = 1; \tag{27.3}$$
$$x_1 + x_3 \geqslant v\big(\{1,3\}\big) = 1; \tag{27.4}$$
$$x_1 + x_4 \geqslant v\big(\{1,4\}\big) = 0; \tag{27.5}$$
$$x_2 + x_3 \geqslant v\big(\{2,3\}\big) = 0; \tag{27.6}$$
$$x_2 + x_4 \geqslant v\big(\{2,4\}\big) = 1; \tag{27.7}$$
$$x_3 + x_4 \geqslant v\big(\{3,4\}\big) = 1; \tag{27.8}$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant v\big(\{1,2,3\}\big) = 2; \tag{27.9}$$
$$x_1 + x_2 + x_4 \geqslant v\big(\{1,2,4\}\big) = 1; \tag{27.10}$$
$$x_1 + x_3 + x_4 \geqslant v\big(\{1,3,4\}\big) = 1; \tag{27.11}$$
$$x_2 + x_3 + x_4 \geqslant v\big(\{2,3,4\}\big) = 1. \tag{27.12}$$

De la ecuación (27.1) y la inecuación (27.9) inmediatamente se obtiene que $x_4 = 0$ y que

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2. \tag{27.13}$$

Llevando el valor $x_4 = 0$ a las inecuaciones (27.7) y (27.8) deducimos que $x_2 \geqslant 1$ y $x_3 \geqslant 1$. Pero entonces, la única posibilidad para se cumpla la ecuación (27.13) es $x_1 = 0$ y $x_2 = x_3 = 1$. Por tanto, hemos visto que la única posible imputación en el núcleo ha de ser $(x_1,x_2,x_3,x_4) = (0,1,1,0)$. Es fácil comprobar que dicha imputación satisface todas las condiciones anteriores, por lo que realmente esa será la única imputación en el núcleo o *core*, que por tanto no es vacío.

Referencias bibliográficas

BONANNO, Giacomo, *Game Theory*, 2nd ed., CreateSpace, 2018, 592 p.

JONES, Antonia J., *Game Theory*: *Mathematical Models of Conflict*, Cambridge (UK), Woodhead, 2000, ISBN 978-1-898563-14-3, 286 p.

MORRIS, Peter, *Introduction to Game Theory*, New York (US), Springer-Verlag, 1994, ISBN 978-1-4612-4316-8, 230 p.

OSBORNE, Martin J.; RUBINSTEIN, Ariel, *A Course in Game Theory*, Cambridge (Massachusetts, US), The MIT Press, 1994, ISBN 0-262-15041-7, 352 p.

OSBORNE, Martin J., *An Introduction to Game Theory*, Oxford (UK), Oxford University Press, 2004, ISBN 978-0-19-512895-6, 533 p.

PRISNER, Erich, *Game Theory Through Examples*, Washington, D.C. (US), The Mathematical Association of America, 2014, ISBN 978-1-61444-115-1, 287 p.

THOMAS, L. C., *Games, Theory and Applications*, Mineola (New York, US), Dover, 2003, ISBN 0-486-43237-8, 279 p.

WILLIAMS, John Davies, *The Compleat Strategyst*, New York (US), Dover, 1986, ISBN 0-486-25101-2.

Teoría que aparece en los exámenes

- Imputaciones y núcleo: problema 10.3.
- Juegos cooperativos y axiomas de Nash: problema 13.2.
- Conceptos de solución en juegos N-personales cooperativos: problema 17.3.