Estudio asintótico del problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno homogéneas

El problema de Sturm-Liouville aparece en multitud de ecuaciones de la física matemática y es el punto de partida a partir del cual se definen la mayoría de las bases de espacios de Hilbert empleadas en los métodos espectrales.

En la primera parte del curso hemos realizado un análisis de la convergencia de desarrollos espectrales en términos de bases de Sturm-Liouville, de donde deducíamos la conveniencia de emplear bases espectrales formadas por autofunciones de problemas de Sturm-Liouville *singulares*, excepto en algunos casos particulares especialmente sencillos (p. ej. problemas con condiciones de contorno periódicas).

Para realizar dicho análisis considerábamos el siguiente problema de Sturm-Liouville con condiciones de contorno homogéneas:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d\varphi}{dx}\right] + \left[\lambda w(x) - q(x)\right]\varphi(x) = 0, \qquad a \le x \le b$$

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$

y mencionábamos que el comportamiento asintótico de los autovalores λ_n y autofunciones φ_n de dicho problema para n grande está dado por

$$\lambda_n \sim \left(n\pi \Bigg/ \int_a^b \sqrt{\frac{w(x)}{p(x)}}dx\right)^2, \qquad \varphi_n(x) \sim A_n \operatorname{sen}\left(\sqrt{\lambda_n}\int_a^x \sqrt{\frac{w(x)}{p(x)}}dx\right)$$

En este problema veremos que las aproximaciones anteriores son el término dominante de un desarrollo asintótico, de modo que el objetivo de este problema es justificar dicho resultado y analizar qué condiciones deben cumplirse para su validez.

PROBLEMA (2 puntos):

1. Justifique el resultado anterior por medio de un desarrollo perturbativo válido en el límite $n \to \infty$, sabiendo que según la teoría de Sturm-Liouville λ_n tiende a infinito en dicho límite.

   Considere para ello el cambio de variable

   $$x \to y = \int_a^x \sqrt{\lambda \frac{w(t)}{p(t)}}\, dt$$

   y realice un desarrollo perturbativo en serie de potencias del parámetro ϵ definido por

   $$\epsilon \equiv 1/\sqrt{\lambda} \ll 1.$$

   considerando sólo el término dominante ($\varphi_0(y)$) y la primera correción ($\varphi_1(y)$), es decir:

   $$\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \epsilon^k \varphi_k(y) = \varphi_0(y) + \epsilon\varphi_1(y) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

2. Calcule el término dominante del desarrollo ($\varphi_0(y)$) y la ecuación diferencial ordinaria que permite calcular el orden 1 (es decir, $\varphi_1(y)$) de este desarrollo asintótico.

   (Al resolver este problema verá que el orden dominante de este desarrollo asintótico puede calcularse fácilmente sin necesidad de especificar las funciones $w(x)$, $p(x)$ y $q(x)$, mientras que para calcular la primera corrección ya es necesario especificar algunas de estas funciones, por este motivo en esta parte del problema nos conformamos con calcular la ecuación que determina la primera corrección, pero no se pide resolver dicha ecuación).

3. Discuta brevemente las condiciones que deben cumplirse para que este desarrollo sea uniformemente válido en $[a, b]$.