Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean tres subconjuntos cualesquiera A, B y C de un conjunto no vacío U tales que $A \cup B = A \cup C$ y $A \cap B = A \cap C$. Demuestre que $B = C$.

Solución: Demostremos que $B \subset C$ viendo que para todo $x \in U$ si $x \in B$ entonces $x \in C$. En efecto,

$$\begin{aligned} x \in B \implies & x \in A \cup B \text{ pues } \; B \subset A \cup B \\ \implies & x \in A \cup C \text{ pues } \; A \cup B = A \cup C \\ \implies & (x \in A) \vee (x \in C) \\ \implies & (x \in A \cap B) \vee (x \in C) \text{ pues } \; x \in B \\ \implies & (x \in A \cap C) \vee (x \in C) \text{ pues } \; A \cap B = A \cap C \\ \implies & x \in C \end{aligned}$$

Por la simetría de roles de B y C en las fórmulas $A \cup B = A \cup C$ y $A \cap B = A \cap C$, se deduce igualmente que $C \subset B$. Por tanto, $B = C$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Sean X e Y dos conjuntos no vacíos y $f\colon X \longrightarrow Y$ una aplicación. Sean los subconjuntos $A, A' \subset X$ y $B \subset Y$.

a) Demuestre que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$.

b) Determine razonadamente si se cumplen las inclusiones $f(A \Delta A') \subset f(A) \Delta f(A')$ y $f(A) \Delta f(A') \subset f(A \Delta A')$, siendo Δ la diferencia simétrica de conjuntos.

Solución: a) Veamos que $f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$. En efecto:

$$\begin{aligned} y \in f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) \iff & \exists x \in A \cap f^{-1}(B) \text{ tal que } \; y = f(x) \\ \iff & \exists x \text{ tal que } x \in A,\, x \in f^{-1}(B),\, y = f(x) \\ \iff & \exists x \text{ tal que } x \in A \text{ e } y = f(x) \in B \\ \iff & y \in f(A) \cap B \end{aligned}$$

b) La inclusión $f(A \Delta A') \subset f(A) \Delta f(A')$ no es siempre verdadera como lo prueba el siguiente contraejemplo: $X = Y = \mathbb{R}$ y $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación tal que $f(x) = x^2$. Se toma $A = \{1\}$ y $A' = \{-1\}$ y se obtiene $f(A) = f(A') = \{1\}$ y por tanto $f(A) \Delta f(A') = \emptyset$ mientras que $A \Delta A' = \{-1, 1\}$ y por tanto $f(A \Delta A') = \{1\}$.
La inclusión $f(A) \Delta f(A') \subset f(A \Delta A')$ es verdadera. En efecto:

$$\text{Si } y \in f(A) \Delta f(A') \Longrightarrow (y \in f(A) \setminus f(A')) \vee (y \in f(A') \setminus f(A))$$

$$\begin{aligned} \text{Si } y \in f(A) \setminus f(A') \implies & \exists x \in A \text{ tal que } y = f(x) \notin f(A') \\ \implies & \exists x \in A \setminus A' \subset A \Delta A' \text{ tal que } y = f(x) \\ \implies & y \in f(A \Delta A') \end{aligned}$$

Análogamente si $y \in f(A') \setminus f(A)$ se obtiene que $y \in f(A \Delta A')$

Comentarios

1. La expresión $f^{-1}(B)$ no implica necesariamente que f sea biyectiva. En efecto, toda aplicación $f\colon X \longrightarrow Y$ es una relación, $f \subset X \times Y$ y tiene por tanto sentido la relación inversa f^{-1}. Esta relación inversa no es una aplicación salvo que f sea biyectiva, véase el texto base p.98. Los conjuntos originales de $y \in Y$ y de B de la relación f son:
$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\} \;\text{ y }\; f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$
Cada uno de los dos subconjuntos puede ser el conjunto vacío, tener un elemento o tener más de un elemento.

2. Dados los conjuntos $A, C \subset X$ y $B \subset Y$, las propiedades $f(A\cap C) = f(A) \cap f(C)$ y $f\big(f^{-1}(B)\big) = B$ **no** son siempre verdaderas, por ejemplo, si $X = Y = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y $A = \{-1, -2, 2\}$, $C = \{1, 2\}$ y $B = \{-1, 4, 9\}$. Por tanto la demostración del apartado b) mediante

$$f\big(A \cap f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap f\big(f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$$

no es válida salvo que se justifiquen la igualdad $f(A\cap C) = f(A) \cap f(C)$ cuando $C = f^{-1}(B)$ y la igualdad $f(A) \cap f\big(f^{-1}(B)\big) = f(A) \cap B$ incluso si $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B$. Demostrar estas dos igualdades no es más sencillo que demostrar directamente la igualdad que se pide.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
En el conjunto de matrices cuadradas de orden 2 se consideran los subconjuntos

$$H = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ \det(A) = ad - bc \neq 0 \right\}$$

y

$$F = \left\{ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \ \text{ y } \ \det(B) = ad - bc = 1 \right\}.$$

a) Determine razonadamente si H es un grupo con el producto usual de matrices.

b) Determine razonadamente si F es un grupo con el producto usual de matrices.

Solución: a) H no es un grupo pues no toda matriz de H tiene elemento inverso en H.
Por ejemplo, la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es una matriz inversible **en H** ya que la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \notin H$.

b) F, sí es un grupo para el producto.

i) El producto es una operación interna en F pues si $A, B \in F$ entonces $\det(A) = \det(B) = 1$ y por tanto $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1$. En consecuencia $AB \in F$.

ii) El producto de matrices es asociativo, en particular, es asociativo cuando nos restringimos al conjunto F.

iii) El elemento neutro $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in F$ pues $\det(I) = 1$.

iv) Si $A \in F$ entonces $\det(A) = 1 \neq 0$ y por tanto, A es una matriz inversible. Veamos que $A^{-1} \in F$. Basta observar que si $\det(A) = 1$, entonces $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)} = 1$, o directamente, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F$ entonces $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ cuyo determinante es 1.

Pregunta 4 (2,5 puntos)
Dados los números $z, z' \in \mathbb{C}$, se pide:

a) Demuestre que $|zz'| = |z||z'|$.

b) Demuestre que $|z| + |z'| \leq |z + z'| + |z - z'|$ y determine una condición necesaria y suficiente para que la desigualdad sea una igualdad.

Solución: a) Veamos que $|zz'| = |z||z'|$. En efecto:

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (zz')\overline{zz'} = z\,z'\,\overline{z}\,\overline{z'} \\ &= \big(z\,\overline{z}\,\big)\big(z'\overline{z'}\big) = |z|^2|z'|^2 \end{aligned}$$

Observación: La fórmula $(re^{i\alpha})(r'e^{i\alpha'}) = (rr')(e^{i(\alpha+\alpha')})$ (en el texto base p. 253) no es más que una traducción a la notación exponencial de las propiedades $|zz'| = |z||z'|$ y $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ $[\text{ mód } 2\pi\ ]$. Por tanto, esta fórmula es un enunciado de esas propiedades, pero no una demostración de ellas. Una demostración de esas propiedades se encuentra en la p. 251 del texto base.
b) Aplicando la desigualdad triangular y teniendo en cuenta que $|z - z'| = |z' - z|$:

$$|z+z'| + |z-z'| \geq |z+z'+z-z'| = |2z|$$
$$|z+z'| + |z-z'| \geq |z+z'+z'-z| = |2z'|.$$

Por tanto, sumando ambas desigualdades se obtiene: $2|z+z'| + 2|z-z'| \geq |2z| + |2z'|$ o equivalentemente, $|z| + |z'| \leq |z+z'| + |z-z'|$.

Supongamos que se tiene la igualdad $|z| + |z'| = |z+z'| + |z-z'|$. Elevando al cuadrado,

$$\begin{aligned} (|z| + |z'|)^2 &= (|z+z'| + |z-z'|)^2 = |z+z'|^2 + |z-z'|^2 + 2|z+z'|\,|z-z'| \\ |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'| &= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + |z|^2 + |z'|^2 - 2\mathrm{Re}(z\overline{z'}) + 2|(z+z')(z-z')| \end{aligned}$$

Por lo que operando resulta que:

$$\begin{aligned} 0 &= |z|^2 + |z'|^2 - 2|z|\,|z'| + 2|(z+z')(z-z')| \\ &= (|z| - |z'|)^2 + 2|(z+z')(z-z')| \end{aligned}$$

Como ambos sumandos son positivos, la suma será cero cuando ambos sean cero. Por tanto, $|z| - |z'| = 0$ y $|(z+z')(z-z')| = 0$ y en consecuencia, $z = z'$ o $z = -z'$.

Recíprocamente si $z = z'$ o $z = -z'$ entonces $|z| + |z'| = 2|z'|$ y $|z+z'| + |z-z'| = 2|z'|$.

Por tanto, $z = z'$ o $z = -z'$, es una condición necesaria y suficiente para que se tenga la igualdad $|z| + |z'| = |z+z'| + |z-z'|$.