AMPLIACION DE VARIABLE COMPLEJA (GRADO)

ARTURO FERNANDEZ ARIAS

INDICE

1.	FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS	3
1.1	Introduction...	3
1.2	Productos infinitos...	3
1.3	Los factores elementales de Weierstrass................................	10
1.4	El Teorema del Producto de Weierstrass...............................	11
1.5	El Teorema de Mittag-Leffler..	13
1.6	Ejercicios...	15
2.	SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES ANALITICAS	17
2.1	Introducción..	17
2.2	Convergencia y compacidad en $C(A)$	17
2.3	El Teorema de Montel	25
2.4	Ejercicios..	27
3.	TRANSFORMACION CONFORME , TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES Y EL TEOREMA DE RIEMANN...	28
3.1	Introducción..	28
3.2	Funciones analíticas y Transformaciones conformes..............	28
3.3	Transformaciones fraccionarias lineales................................	29
3.4	Conjugación respecto de una circunferencia........................	32
3.5	El Teorema de Riemann de la transformación conforme.......	36
3.6	Ejercicios..	40
4.	FUNCIONES ELIPTICAS	41
4.1	Funciones meromorfas periódicas...	41
4.2	Funciones elípticas...	44
4.3	La función $\mathcal{P}(z)$ de Weierstrass...	48
4.4	Ejercicios..	50

5.	PROLONGACION ANALITICA Y SUPERFICIES............ DE RIEMANN..	52
5.1	Introducción...	52
5.2	Principio de Reflexión de Schwarz..	52
5.3	Prolongación directa de una serie de potencias........................	56
5.4	Prolongación analítica de una función a lo largo de un camino...	58
5.5	Superficies de Riemann...	62
5.6	Ejercicios..	68
	BIBLIOGRAFIA..	69

1 FUNCIONES ENTERAS Y MEROMORFAS EN EL PLANO COMPLEJO

1.1 INTRODUCTION

Se llaman funciones enteras aquellas funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, que son analíticas en todo el plano complejo $\mathbb{C}$ y llamaremos funciones meromorfas en $\mathbb{C}$ aquellas funciones $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, cuyas únicas singularidades posibles son polos.

El ejemplo más sencillo de funciones enteras lo proporcionan los polinomios complejos

$$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + .. + c_0 \ ,$$

que como se deduce del Teorema Fundamental del Algebra pueden ser expresados como productos

$$P(z) = c_n (z - \alpha_1) ... (z - \alpha_n) \ ,$$

donde $\alpha_1, .., \alpha_n$ son los ceros de P.

En este capítulo presentalmos el Teorema del Producto de Weierstrass que proporciona una representación en producto de las funciones enteras en términos de sus ceros, de forma análoga a lo que ocurre con los polinomios.

Presentaremos también otra descomposición de una función meromorfa en términos de sus ceros y sus polos, este es el llamado Teorema de Mittag-Leffler.

1.2 PRODUCTOS INFINITOS

Dada una sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, llamaremos producto infinito de estos números al límite z si existe

$$z = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} z_k \ ,$$

y lo representaremos como

$$z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n \ .$$

Supongamos en primer lugar que ninguno de los números z_n es cero y que existe $z = \prod_{n=1}^{\infty} z_n$ y que $z \neq 0$. Sea

$$Pn = \prod_{k=1}^{n} z_k$$

para $n \geq 1$, entonces también P_n es distinto de cero y

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = z_n \ .$$

Puesto que $P_n \to z$, se debe tener

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1 \ ,$$

así pues en el caso en que todos los $z_n \neq 0$, una condición necesaria para la convergencia es

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 1.$$

Por otra parte $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ puede ser cero siendo $z_n \neq 0$ para todo n, por ejemplo cuando $z_n = a$, para todo n con $|a| < 1$.

A continuación damos un criterio de convergencia de un producto infinito en términos de los logaritmos de los factores.

Proposición 1.2.1. *Sea* $\operatorname{Re} z_n > 0$, *para todo* $n \geq 1$. *Entonces* $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge a* $z \neq 0$, *si y solamente si la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$$

es convergente.

Demostración. En primer lugar tenemos que precisar un valor de $\log z_n$. La hipótesis $\operatorname{Re} z_n > 0$ nos permite elegir el $\arg z_n$, para todo n , de tal forma que

$$-\pi < \arg z_n < \pi \ ,$$

y esta elección del argumento determina una elección para $\log z_n$.

Sea ahora

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} z_k \ ,$$

y escribamos

$$z = re^{i\theta} \ , \ -\pi < \theta \leq \pi \ .$$

El logaritmo de P_n determinado por el argumento θ_n de P_n tal que

$$\theta - \pi < \theta_n < \theta + \pi \ ,$$

lo denotaremos por $l\left(P_n\right)$, es decir

$$l\left(P_n\right) = \log\left|P_n\right| + i\theta_n \ .$$

Sea

$$s_n = \log z_1 + ... + \log z_n \ ,$$

de tal manera que

$$\exp\left(s_n\right) = P_n \ ,$$

y

$$s_n = l\left(P_n\right) + 2\pi m_n i \ ,$$

para algún entero m_n.

Supongamos que $P_n \to z$, entonces

$$s_n - s_{n-1} = \log z_n \to 0 \ ,$$

y también

$$l\left(P_n\right) - l\left(P_{n-1}\right) \to 0 \ ,$$

por tanto

$$m_n - m_{n-1} \to 0 \ ,$$

cuando $n \to \infty$.

Puesto que m_n es un entero para todo n , concluimos qu existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ y un $m \in \mathbb{Z}$ tales que $m_n = m$ para $n \geq n_0$.

Por tanto

$$s_n \to l\left(z\right) + 2\pi m i \ ,$$

es decir la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n \ ,$$

es convergente.

Inversamente, si la serie anterior converge, es decir

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \log z_k \to s \ ,$$

entonces

$$\exp s_n \to \exp s \ ,$$

pero

$$\exp s_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n\right) \ .$$

q.e.d.

Diremos que el producto infinito $\prod\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente cuando la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \log z_n$ converge absolutamente.

Proposición 1.2.2. *Si* $\operatorname{Re} z_n > 0$, *entonces el producto* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente si y solamente si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(z_n - 1\right)$ *converge absolutamente.*

Demostración.

Por definición $\prod_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si y solo si $\sum_{n=1}^{\infty} \log z_n$ converge absolutamente. Nos resta probar que este hecho es equivalente a la convergencia absoluta de $\sum_{n=1}^{\infty} (z_n - 1)$.

En efecto si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - 1|$ converge, entonces $z_n - 1 \to 0$, luego para n suficientemente grande

$$|z_n - 1| < \frac{1}{2} .$$

Si probamos que en estas condiciones

$$|\log z_n| \leq \frac{3}{2} |z_n - 1| \ , \tag{1.1}$$

habremos concluido que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log z_n| \ ,$$

también es convergente.

Para probar (1.1) hacemos uso del desarrollo

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} = (z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + ...$$

que tiene radio de convergencia 1. Puesto que estamos suponiendo $|z_n - 1| < \frac{1}{2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{\log z}{z-1} \right| &= \left| \frac{z-1}{2} - \frac{(z-1)^2}{3} + ... \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(|z-1| + |z-1|^2 + ... \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{|z-1|}{1 - |z-1|} \ , \end{aligned}$$

si $|z-1| < \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\left| 1 - \frac{\log z}{z-1} \right| \leq \frac{1}{2} \ ,$$

de donde

$$\frac{1}{2} |z-1| \leq |\log z| \leq \frac{3}{2} |z-1| \ . \tag{1.2}$$

Por tanto de la convergencia absoluta de

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - 1| \ ,$$

concluimos la convergencia absoluta de

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log z_n| \ ,$$

y viceversa de la convergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\log z_n| \ ,$$

concluimos la de $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n - 1|$. q.e.d.

Ahora consideramos productos infinitos de funciones. Sea $\{g_n\}$ una sucesión de funciones complejas

$$g_n : A \to \mathbb{C} \ , \ A \subset \mathbb{C} \ , \text{abierto,}$$

diremos que el producto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} g_n \ ,$$

está definido cuando el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} g_n (z) \ ,$$

existe para todo $z \in A$, en este caso diremos que el producto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} g_n$ converge a la función

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} g_n (z) \ , \ z \in A \ .$$

Proposition 1.2.3. *Sea* $\{g_n\}$ *una sucesión de funciones continuas*

$$g_n : A \to \mathbb{C} \ , \ A \subset \mathbb{C} \ , \textit{abierto,}$$

tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n (z) \ ,$$

converge absoluta y uniformemente en todo compacto. Entonces la función

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 + g_n (z))$$

converge absoluta y uniformemente en todo compacto. *Además existe un entero* n_0 tal que $f(z) = 0$ *si solamente si* $g_n(z) = -1$, *para algún* n *tal que* $1 \leq n \leq n_0$.

Demostración. Puesto que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n(z)$ converge uniformemente para $z \in K$, $K \subset A$ compacto, existirá un entero n_0 , tal que $|g_n(z)| < \frac{1}{2}$ para todo $z \in K$ y $n > n_0$ y por tanto por (1.2)

$$|\log(1 + g_n(z))| \leq \frac{3}{2} |g_n(z)| \ ,$$

para todo $n > n_0$ y $z \in K$, luego la serie

$$h(z) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \log(1 + g_n(z)) \ ,$$

converge uniformemente para $z \in K$.

Puesto que h es continua estará acotada en K y en consecuencia existirá una constante $a > 0$ tal que

$$\operatorname{Re} h(z) < a \ , \tag{1.3}$$

para todo $z \in K$.

Finalmente mostramos que de la convergencia uniforme de la serie definiendo $h(z)$ y (1.3) se deduce la convergencia uniforme y absoluta de

$$\prod_{n=n_0+1}^{\infty} (1 + g_n(z))$$

hacia $\exp h(z)$ en K.

En efecto, dado $\epsilon > 0$, por la continuidad de e^z, existe $\delta > 0$ tal que para $|z| < \delta$, se tiene

$$|e^z - 1| < \epsilon e^{-a} \ ,$$

elegimos ahora $n_\delta \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n} \log(1 + g_k(z)) - h(z) \right| < \delta \ ,$$

para $n \geq n_\delta$ y $z \in K$.

Entonces se tiene

$$\begin{aligned} \epsilon e^{-a} &> \left| \exp\left[\left(\sum_{k=n_0+1}^{n} \log(1 + g_k(z)) \right) - h(z) \right] - 1 \right| \\ &= \left| \frac{\exp \sum\limits_{k=n_0+1}^{n} \log(1 + g_k(z))}{\exp h(z)} - 1 \right| \ , \end{aligned}$$

de donde se concluye por (1.3) que para cualquier $z \in K$ y $n \geq n_\delta$

$$\begin{aligned} & \left| \exp \sum_{k=n_0+1}^{n} \log\left(1+g_k\left(z\right)\right) - e^{h(z)} \right| \\ \leq \quad & \epsilon e^{-a} \left| e^{h(z)} \right| \leq \epsilon \ . \end{aligned}$$

Puesto que

$$\exp \sum_{k=n_0+1}^{n} \log\left(1+g_k\left(z\right)\right) = \prod_{k=n_0+1}^{n} \left(1+g_k\left(z\right)\right) \ ,$$

concluimos que

$$\prod_{k=n_{0+1}}^{\infty} \left(1+g_k\left(z\right)\right) = e^{h(z)}.$$

Finalmente

$$f\left(z\right) = \left(1+g_1\left(z\right)\right) ... \left(1+g_{n_0}\left(z\right)\right) e^{h(z)} \ ,$$

y $e^{h(z)} \neq 0$, para todo $z \in A$.

Así pues $f\left(z\right) = 0$ si y solo si $g_i\left(z\right) = -1$, para algún i , $1 \leq i \leq n_0$. q.e.d.

De la Proposición 1.2.3 para productos de funciones continuas se deduce inmediatamente el siguiente teorema para funciones analíticas.

Teorema 1.2.1 *Sea A una región en $\mathbb{C}$ y sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones analíticas*

$$f_n : A \to \mathbb{C} \ ,$$

tales que f_n no es idénticamente nula. Si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n\left(z\right) - 1\right) \ ,$$

converge absoluta y uniformemente sobre los compactos de A entonces el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} f_n\left(z\right) \ ,$$

converge uniformemente en A a una función analítica $f\left(z\right)$. Si a es un cero de $f\left(z\right)$ entonces a es un cero de de solamente una cantidad finita de de las funciones $f_n\left(z\right)$, y la multiplicidad del cero de $f\left(z\right)$ en a es la suma de las multiplicidades de los ceros de las funciones $f_n\left(z\right)$ en a.

1.3 LOS FACTORES ELEMENTALES DE WEIERSTRASS

Llamaremos factores elementales a las funciones $E_p(z)$ siguientes

$$\begin{aligned} E_0(z) &= 1 - z \ , \\ E_p(z) &= (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + ... + \frac{z^p}{p}\right) \ , \ p = 0, 1, .. \end{aligned}$$

De la definición se deduce que $E_p\left(\frac{z}{a}\right)$ tiene un cero simple en $z = a$ y ningún otro cero. También si b es un punto en $\mathbb{C}\backslash A$, la función

$$E_p\left(\frac{a-b}{z-b}\right) \ ,$$

tiene un cero simple en $z = a$ y es analítica en A.

El siguiente lema será de utilidad para el estudio de la convergencia de productos infinitos de factores elementales de Weierstrass.

Lema 1.3.1. *Si* $|z| \leq 1$ *y* $p \geq 0$ *entonces* $|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}$.

Demostración. El caso $p = 0$ es inmediato de tal manera que podemos restringirnos al caso $p \geq 1$. Para un p fijo desarrollaremos $E_p(z)$ en serie de potencias de z

$$E_p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \ ,$$

y derivando obtenemos

$$\begin{aligned} E_p'(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1} \\ &= -z^p \exp\left(z + ... + \frac{z^p}{p}\right) \ . \end{aligned}$$

De esta identidad deducimos inmediatamente

$$a_1 = a_2 = ... = a_p = 0 \ .$$

Por otra parte puesto que los coeficientes del desarrollo de

$$\exp\left(z + ... + \frac{z^p}{p}\right) \ ,$$

son todos positivos, deducimos que $a_k \leq 0$, para $k \geq p+1$. Así pues $|a_k| = -a_k$ para $k \geq p+1$, y de eso resulta

$$0 = E_p(1) = 1 + \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k \ ,$$

es decir

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = -\sum_{k=p+1}^{\infty} a_k = 1 \ .$$

Por tanto para $|z| \leq 1$ se tiene

$$\begin{aligned} |E_p(z) - 1| &= \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^k \right| \\ &= |z|^{p+1} \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k z^{k-p-1} \right| \\ &\leq |z|^{p+1} \sum_{k=p+1}^{\infty} |a_k| = |z|^{p+1} . \end{aligned}$$

q.e.d.

1.4 TEOREMA DEL PRODUCTO DE WEIERSTRASS

Ahora disponemos de las herramientas necesarias para probar el Teorema del Producto de Weierstrass.

Teorema 1.4.1. Teorema del Producto de Weierstrass. *Sea f una función entera y sean $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ los ceros no nulos de f repetidos según su multiplicidad. Supongamos que $f(z)$ tiene un cero en $z = 0$. Entonces existe una función entera g y una sucesión de enteros $\{p_n\}$ tales que*

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \ .$$

Demostración. En primer lugar vamos a construir una función de la forma

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \ ,$$

con los mismos ceros que f teniendo en cuenta multiplicidades. Para ello determinamos una sucesión de enteros $\{p_n\}$ de tal forma que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \ ,$$

converge para todo $r > 0$. La existencia de una tal sucesión $\{p_n\}$ en estas condiciones se sigue facilmente. En efecto, dado r arbitrario, existe un entero N tal que $|a_n| > 2r$, para todo $n \geq N$, de tal manera que

$$\frac{r}{|a_n|} < \frac{1}{2} \ ,$$

para todo $n \geq N$. Así pues poniendo $p_n = n - 1$ para todo n , la serie anterior está mayorada por una serie geométrica de razón $\frac{1}{2}$ a partir de un término en adelante y por tanto es convergente.

Ahora por el Lema 1.3.1

$$\left| 1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{a_n}\right|^{p_n+1} \leq \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \quad ,$$

para $|z| \leq r$, $r \leq |a_n|$. Pero fijado $r > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \geq r$ para todo $n \geq N$, de tal forma que la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left| 1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right| \ ,$$

está mayorada por la serie convergente

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} \quad ,$$

de donde se concluye que la serie

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)\right) \ ,$$

converge absoluta y uniformemente en $B(0, r)$ y por el Teorema 1.2.1, el producto

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \ ,$$

converge uniformemente sobre compactos y por tanto define una función y consecuentemente

$$h(z) = z^m \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right) \ ,$$

es asimismo una función analítica con los mismos ceros que f contando multiplicidades.

Luego la función f/h es también una función entera y sin ceros de tal forma que la función

$$g(z) = \log \frac{f(z)}{h(z)} \ ,$$

admite una rama uniforme entera, es decir

$$\frac{f(z)}{h(z)} = e^{g(z)} \ ,$$

luego

$$f(z) = h(z) e^{g(z)} = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right) \ .$$

q.e.d.

1.5 EL TEOREMA DE MITTAG-LEFFLER

Sea $\{a_k\}$ una sucesión de puntos distintos y aislados de $\mathbb{C}$. Para cada $k \geq 1$, consideramos la función racional

$$S_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{A_{jk}}{(z-a_k)^j} \ , \tag{1.4}$$

donde m_k es un entero positivo y $A_{1k}, .., A_{m_k k}$ son coeficientes complejos. El Teorema de Mittag-Leffler afirma la existencia de una función meromorfa en $\mathbb{C}$ cuyos polos son precisamente los $\{a_k\}$ y la parte principal en cada polo a_k es $S_k(z)$.

Teorema 1.5.1. (Teorema de Mittag-Leffler). *Sea $\{a_k\}$ una sucesión de puntos distintos y sea $\{S_k(z)\}$ una sucesión de funciones racionales como en* (1.4)*. Entonces existe una función meromorfa f en $\mathbb{C}$ cuyos polos son exactamente los puntos $\{a_k\}$ y tales que la parte principal es $S_k(z)$.*

Demostración.

Podemos suponer los a_k ordenados de tal forma que tengan módulo creciente con k.

En primer lugar construiremos una sucesión de polinomios $\{q_k(z)\}$ tales que la serie

$$\sum_{k\geq 0} [S_k(z) - q_k(z)] \ ,$$

converge uniformemente en todo compacto de $\mathbb{C}$, hacia una función meromorfa cuyos únicos polos son los a_k y sus partes principales las $S_k(z)$.

En primer lugar si $a_0 = 0$ tomamos como q_0 el polinomio nulo. Para $m > 0$ desarrollamos la función

$$S_k(z) = p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) \ ,$$

según las potencias positivas de z , es decir, desarrollamos $S_k(z)$ en serie de Taylor en el origen, sea

$$S_k(z) = p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = c_{k_0} + c_{k_1}z + .. + c_{k_n}z^n + ...$$

que converge en $\{z \mid \ |z| < |a_k|\}$ y es uniformemente convergente en particular en $\left\{z \,\middle|\, |z| < \frac{|a_k|}{2}\right\}$.

. Por tanto se puede determinar una suma parcial de la serie de potencias, que designaremos por $q_k(z)$ tal que

$$\left|p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) - q_k(z)\right| \leq \frac{1}{2^k} \ , \text{ para } z \in B\left(0, \frac{|a_k|}{2}\right) \ .$$

Veamos que la serie

$$\sum_{k\geq 0}\left[p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k\left(z\right)\right]\ ,$$

converge uniformemente sobre todo compacto $K\subset\mathbb{C}$. En efecto, puesto que K está acotado, sea $R>0$ tal que K está contenido en el círculo $B\left(0,R\right)$, y sea n_0 tal que

$$|a_{n_0}>2R\ ,|$$

entonces descomponemos la serie en dos partes

$$\sum_{k\leq n_0}\left[p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k\left(z\right)\right]\ ,\ \sum_{k>n_0}\left[p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k\left(z\right)\right]\ ,$$

la primera de las cuales es una suma finita de funciones racionales, por tanto es una función racional que aparece descompuesta en fracciones simples, por lo ques una función meromorfa con polos a_k , $k\leq n_0$ y partes principales los polinomios p_k . La segunda es una serie de funciones analíticas en $B\left(0,R\right)$ que converge uniformemente en este círculo pues se tiene

$$\sum_{k>n_0}\left[p_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)-q_k\left(z\right)\right]\leq\sum_{k>n_0}\frac{1}{2^k}\ ,$$

para todo $z\in B\left(0,R\right)\subset B\left(0,\frac{|a_{n_0}|}{2}\right)$ lo cual prueba que la segunda serie es analítica en K.

Se concluye que la suma total de la serie es una función meromorfa. Por otra parte para cada a_n existe una descomposición de la serie en una función racional con polo en a_n y parte principal

$$p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)\ ,$$

y una función analítica en un entorno de a_n , por tanto la función suma de la serie tiene un polo en a_n con la parte principal indicada.

Cualquier otro punto $z'\neq a_n$, no puede ser punto singular de la función, pues tomando $R>|z'|$, la función se descompone en una función meromorfa en $B\left(0,R\right)$ y una analítica, de tal manera que los únicos polos de la meromorfa son los a_n con $|a_n|<R$. q.e.d.

Partiendo ahora de una función meromorfa en el plano, el Teorema de Mittag-Leffler permite dar una representación de las funciones meromorfas.

Teorema 1.5.2. *Sea $f\left(z\right)$ una función meromorfa en el plano cuyos polos son los puntos de la sucesión $\{a_n\}$, ordenados segú módulos crecientes y cuyas partes principales respectivas son*

$$p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)\ ,$$

donde los p_n son polinomios sin término constante. Entonces existe una sucesión de polinomios y una función entera g , tales que,

$$f(z) = g(z) + \sum_{n\geq 0} \left[p_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) - q_n(z) \right] ,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, de tal forma que la serie del segundo miembro converge uniformemente sobre todo compacto.

Demostración. De acuerdo con el Teorema de Mittag-Leffler existe una sucesión de polinomios $\{q_n\}$ tales que la serie

$$f_1(z) = \sum_{n\geq 0} \left[p_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) - q_n(z) \right] ,$$

define una función meromorfa $f_1(z)$ con polos precisamente en los a_n y partes principales $p_n\left(\frac{1}{z-a_n}\right)$. Por tanto la función $f - f_1$ tendrá singularidades evitables en todos los puntos a_n, es decir, se puede considerar como una función analítica $g(z)$ en todo el plano, luego se concluye

$$\begin{aligned} f(z) &= g(z) + f_1(z) \\ &= g(z) + \sum_{n\geq 0} \left[p_n \left(\frac{1}{z-a_n} \right) - q_n(z) \right] . \end{aligned}$$

q.e.d.

1.6 EJERCICIOS

1.i) Utilizando la fórmula del seno del ángulo doble, probar por inducción la fórmula

$$2^m sen\frac{z}{2^m} \cdot \prod_{n=1}^{m} \cos\frac{z}{2^n} = senz .$$

ii) Utilizando la parte i) , concluir

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{z}{2^n} = \frac{senz}{z} .$$

2. Dado el producto infinito

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k} sen\frac{z}{k} \right) ,$$

se pide que dicho producto:

i) converge absoluta y uniformemente sobre compactos,

ii) representa una función entera, es decir, analítica en todo el plano.

3. i) Probar que la sucesión $\{f_n(z)\}$, donde

$$f_n(z) = nLog\left(1 + \frac{z}{n}\right) \ ,$$

converge uniformemente a la función $f(z) = z$ en todo compacto. Se toma la determinación del logaritmo tal que Log1=0.

ii) Probar también, como consecuencia, que la sucesión $\{g_n(z)\}$, donde

$$g_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \ ,$$

converge uniformemente a e^z en todo compacto.

4. Obtener el desarrollo en fracciones de Mittag-Leffler de la función

$$f(z) = \frac{senz}{(z-1)(z-2)^2} \ ,$$

determinando solamente los dos primeros términos del desarrollo de Taylor de la función entera $g(z)$.

2 SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES ANALITICAS

2.1 INTRODUCCION

El objetivo final de este capítulo es probar el Teorema de Montel que afirma que para familias normales $\mathcal{F}$ de funciones analíticas en un abierto A, cualquier sucesión $\{f_n\}$ de $\mathcal{F}$ tiene una subsucesión $\left\{f_{n_j}\right\}$ que converge uniformemente sobre los subconjuntos compactos de A. Las familias normales se definen en términos de acotación uniforme sobre compactos.

El Teorema de Montel se aplica en diferentes contextos de la teoría de las funciones analíticas, en particular en el Teorema de la tranformación conforme de Riemann que será probado en el siguiente capítulo.

En este capítulo se introducen las definiciones precisas y se desarrollan los resultados previos al teorema de Montel que en gran medida se pueden presentar en el marco más general de las funciones continuas en A , espacio qu denotaremos por $C(A)$.

2.2 CONVERGENCIA Y COMPACIDAD EN C(A)

En esta sección A será un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$ y $C(A)$ denotará el espacio de funciones continuas $f : A \to \mathbb{C}$.

Dada una sucesión $\{f_n\} \subset C(A)$, diremos que converge a $f \in C(A)$, si $f_n \to f$ uniformemente sobre todo compacto $K \subset A$. Es decir, si dado un compacto K y $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_{K,\epsilon} \in \mathbb{N}$, tal que

$$|f(z) - f_n(z)| < \epsilon \ ,$$

para todo $z \in K$ y $n \geq n_{K,\epsilon}$.

Este hecho se puede escribir en términos de normas. En efecto, dado un compacto K de A , definimos

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)| \ ,$$

entonces, es claro que nuestra definición es equivalente a decir que $f_n \to f$ en $C(A)$ cuando

$$\|f_n - f\|_K \to 0 \ ,$$

para todo compacto $K \subset A$.

A continuacion vamos a demostrar que el espacio $C(A)$ es un espacio métrico, es decir existe una métrica d_A en $C(A)$ de tal forma que

$$f_n \to f \ ,$$

en $C(A)$ si y solo si

$$d(f_n, f) \to 0 \ .$$

Lema 2.2.1. *Supongamos que A es un subconjunto abierto del plano. Existen conjuntos compactos K_j , $j = 1, 2, ...$* tales que

$$K_j \subset \overset{\diamond}{K}_{j+1},$$

y

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \ ,$$

donde $\overset{\diamond}{K}$ denota interior de K.

Demostración. Si $A = \mathbb{C}$ podemos tomar $K_j = \overline{D(0, j)}$. Supongamos pues $A \neq \mathbb{C}$. Para $z \in A$, denotamos por $\rho(z)$ la distancia de z al complemento de A,

$$\rho(z) = \inf_{w \in \mathbb{C}/A} |z - w| \ ,$$

entonces definimos

$$K_j = \left\{ z \in A \ \ ||z| \leq j \ \ , \rho(z) \geq \frac{1}{j} \right\} \ .$$

Es claro que K_j es un compacto de A y que

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \ .$$

Finalmente observamos que si $z \in K_j$ y $r = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$, entonces $D(z, r) \subset \overset{\diamond}{K}_{j+1}$. q.e.d.

Supongamos ahora que A es un abierto del plano, sea $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$, una sucesión como en el Lema 2.2.1 entonces definimos

$$d(f, g) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}} \ , \tag{2.2.1}$$

y a continuación probamos el siguiente teorema.

Teorema 2.2.1. *La función $d(f, g)$ definida por* (2.2.1) *es una distancia en el espacio $C(A)$ y se verifica que $f_n \to f$ en $C(A)$ si y solo si $d(f_n, f) \to 0$.*

Demostración. En primer lugar los términos de la serie definiendo $d(f, g)$ satisfacen

$$2^{-j} \frac{\|f - g\|_{K_j}}{1 + \|f - g\|_{K_j}} \leq 2^{-j} \ ,$$

y puesto que la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \ ,$$

es convergente, la serie en (2.2.1) es convergente y $d(f,g)$ está bien definido.

También se comprueba sin dificultad que $d(f,g)$ satisface las propiedades de una distancia

$$\begin{aligned}
1)\ d(f,g) &= 0 \text{ si y solo si } f=g\ , \\
2)\ d(f,g) &= d(g,f)\ , \\
3)\ d(f,g) &\leq d(f,h)+d(h,g)\ , \text{ Propiedad triangular.}
\end{aligned}$$

Nosotros solo probaremos la propiedad triangular. Puesto que la función

$$y(x)=\frac{x}{1+x}\ ,$$

es estrictamente creciente en $[0,\infty]$ y puesto que dadas dos funciones $\varphi,\psi\in C(A)$, se tiene

$$\|\varphi+\psi\|_{K_j}\leq\|\varphi\|_{K_j}+\|\psi\|_{K_j}\ ,$$

deducimos

$$\begin{aligned}
\frac{\|\varphi+\psi\|_{K_j}}{1+\|\varphi+\psi\|_{K_j}} &\leq \frac{\|\varphi\|_{K_j}+\|\psi\|_{K_j}}{1+\|\varphi\|_{K_j}+\|\psi\|_{K_j}} \\
&= \frac{\|\varphi\|_{K_j}}{1+\|\varphi\|_{K_j}+\|\psi\|_{K_j}}+\frac{\|\psi\|_{K_j}}{1+\|\varphi\|_{K_j}+\|\psi\|_{K_j}}\ ,
\end{aligned}$$

y por tanto también

$$\frac{\|\varphi+\psi\|_{K_j}}{1+\|\varphi+\psi\|_{K_j}}\leq\frac{\|\varphi\|_{K_j}}{1+\|\varphi\|_{K_j}}+\frac{\|\psi\|_{K_j}}{1+\|\psi\|_{K_j}}\ .$$

Poniendo $\varphi=f-g$, $\psi=g-h$, se obtiene la desigualdad

$$\frac{\|f-h\|_{K_j}}{1+\|f-h\|_{K_j}}\leq\frac{\|f-g\|_{K_j}}{1+\|f-g\|_{K_j}}+\frac{\|g-h\|_{K_j}}{1+\|g-h\|_{K_j}}\ ,$$

y de aquí la desigualdad triangular sumando sobre todos los K_j.

Supongamos ahora que $d(f_n,f)\to 0$, entonces $\|f_n-f\|_{K_j}\to 0$, para todo j . Dado K compacto, es fácil ver por las propiedades de la sucesión $\{K_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, que existe un j_0 tal que $K\subset K_{j_0}$, lo que implica

$$\|f_n-f\|_K\leq\|f_n-f\|_{K_{j_0}}\to 0\ .$$

Inversamente si

$$\|f_n-f\|_{K_j}\to 0\ ,$$

para todo j , es claro que $d(f_n,f)\to 0$.

Concluimos que $f_n\to f$ en $C(A)$ si y solo si $d(f_n,f)\to 0$. q.e.d.

Lema 2.2.2. *El espacio métrico $C(A)$ es completo.*

Demostración. Supongamos que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $C(A)$, es decir $d(f_n, f_m) \to 0$, cuando $n, m \longrightarrow \infty$. Esto implica $\|f_n - f_m\|_{K_j} \to 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por tanto para todo j existe una función continua F_j definida en K_j tal que $f_n \to F_j$, uniformemente sobre K_j . Claramente se ha de tener

$$F_j = F_k \text{ en } K_j \cap K_k \ ,$$

luego podemos definir una función $F : A \to \mathbb{C}$ mediante

$$F(z) = F_j(z) \ , \ z \in K_j \ ,$$

y puesto que $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overset{\circ}{K}_j$, se deduce que F es continua en A . el hecho que $f_n \to F_j$ uniformemente sobre K_j implica que

$$\|f_n - F\|_{K_j} \to 0 \ ,$$

para todo j , y esto a su vez que

$$d(f_n, F) \to 0 \ .$$

q.e.d.

Definición 2.2.1. *Supongamos que $S \subset C(A)$ y sea $z \in A$. Se dice que S es equicontinuo en z , si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|f(w) - f(z)| < \epsilon \ ,$$

para todo $f \in S$, cuando $|z - w| < \delta$.

Sea K un compacto de A , utilizaremos la notación

$$\begin{aligned} B_K(f, \epsilon) &= \{g \in C(A) \ | \|f - g\|_K < \epsilon\} \ , \\ B(f, \epsilon) &= \{g \in C(A) \ | d(f, g) < \epsilon\} \ . \end{aligned}$$

Diremos que un subconjunto $S \subset C(A)$ es totalmente acotado si dado $\epsilon > 0$ existe una cantidad finita de funciones $f_1, .., f_n \in S$ tales que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, \epsilon) \ .$$

Lema 2.2.3. *Un conjunto $S \subset C(A)$ es totalmente acotado si y solamente si para todo compacto $K \subset A$ y todo $\epsilon > 0$* , existen $f_1, .., f_n \in S$, tales que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_K(f_j, \epsilon) \ .$$

Demostración. Sea $\{K_j\}_{j=1}^{\infty}$, una familia exhaustiva de A , como en Lema 2.2.1. Supongamos que $S \subset C(A)$ es totalmente acotado. Sea K un compacto de A y $\epsilon > 0$. Entonces existe $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que $K \subset K_{j_0}$ y definimos $\epsilon' = \min(\epsilon, 1)$,
$\epsilon'' = \epsilon'/2^{j_0+1}$, puesto que S es totalmente acotado podemos encontrar $f_1 ... f_n$ tales que

$$S \subset \{g \mid d(f_l, g) < \epsilon'' \text{ para algún } l = 1, 2, ..n\} \ .$$

Por otra parte

$$d(f,g) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f-g\|_{K_j}}{1 + \|f-g\|_{K_j}} < \epsilon'' \ ,$$

implica

$$\frac{1}{2^{j_0}} \frac{\|f-g\|_{K_{j_0}}}{1 + \|f-g\|_{K_{j_0}}} < \epsilon'' \ ,$$

es decir

$$\|f-g\|_{K_{j_0}} < \epsilon'' 2^{j_0} \left(1 + \|f-g\|_{K_{j_0}}\right) \ ,$$

luego

$$\|f-g\|_{K_{j_0}} - \epsilon'' 2^{j_0} \|f-g\|_{K_{j_0}} \quad < \quad \epsilon'' 2^{j_0} \ ,$$

de donde

$$\begin{aligned} \|f-g\|_K \quad &\leq \quad \|f-g\|_{K_{j_0}} \leq \frac{\epsilon'' 2^{j_0}}{1 - \epsilon'' 2^{j_0}} \\ &\leq \quad \frac{\frac{\epsilon'}{2}}{1 - \frac{\epsilon'}{2}} < \epsilon' \leq \epsilon \ . \end{aligned}$$

Es decir

$$B\left(f_l, \epsilon^{''}\right) \subset B_K(f_l, \epsilon) \ ,$$

y por tanto

$$S \subset \bigcup_{l=1}^{n} B(f_l, \epsilon'') \subset \bigcup_{l=1}^{n} B_K(f_l, \epsilon) \ .$$

Inversamente, dado $\epsilon > 0$, consideramos $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$, supongamos que para todo K podemos encontrar $f_1,..,f_n \in S$, tales que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_K(f_j, \epsilon') \ .$$

Por otra parte sea $j_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \epsilon' \ ,$$

de tal forma que si $\|f-g\|_{K_{j_0}} < \epsilon'$, entonces

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} \frac{\|f-g\|_{K_j}}{1+\|f-g\|_{K_j}} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\|f-g\|_{K_j}}{1+\|f-g\|_{K_j}} \\ &\leq \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\|f-g\|_{K_j}}{2^j} + \epsilon' < \epsilon' \sum_{j=1}^{j_0} \frac{1}{2^j} + \epsilon' \leq 2\epsilon' = \epsilon \ , \end{aligned}$$

de donde tomando $K = K_{j_0}$

$$B_{K_{j_0}}(f_l, \epsilon') \subset B(f_l, \epsilon) \ ,$$

y por tanto

$$S \subset \bigcup_{l=1}^{n} B_K(f_l, \epsilon') \subset \bigcup_{l=1}^{n} B(f_l, \epsilon) \ ,$$

i.e. S es totalmente acotado. q.e.d.

A continuación presentamos el Teorema de Arzelá-Ascoli.

Teorema 2.2.2. (Teorema de Arzelá-Ascoli). *Un conjunto $S \subset C(A)$ es totalmente acotado si y solamente si es puntualmente acotado y equicontinuo en A.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que S es totalmente acotada. Sea $z \in A$, entonces aplicamos el Lema 2.2.3 con $K = \{z\}$ y $\epsilon = 1$, concluimos que existe una cantidad finita de funciones $f_1, .., f_n \in S$, tal que para cualquier $f \in S$, existe $j \in \{1, .., n\}$ tal que

$$|f(z) - f_j(z)| < 1 \ ,$$

de tal forma que

$$|f(z)| \leq M(z) = 1 + \max_{j=1,..,n} |f_j(z)| \ ,$$

para todo $f \in S$, luego S satisface la condición de acotación puntual del enunciado.

A continuación probamos la equicontinuidad de S . Sea $r > 0$ tal que

$$K = \overline{B(z,r)} \subset A \ ,$$

y sea $\epsilon > 0$, entonces por el Lema 2.2.3 existe una cantidad finita de funciones $f_1, .., f_n \in S$, tales que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_K\left(f_j, \frac{\epsilon}{3}\right) \ .$$

Para cada $j = 1, .., n$, podemos elegir $\delta_j > 0$ tal que $\delta_j < r$ y

$$|f_j(w) - f_j(z)| < \frac{\epsilon}{3} ,$$

cuando $|z - w| < \delta_j$, de tal forma que si

$$\delta = \min \{\delta_1, .., \delta_j\} ,$$

entonces

$$|f_j(w) - f_j(z)| < \frac{\epsilon}{3} ,$$

para $j = 1, ..., n$ si $|z - w| < \delta$.

Por otra parte para cualquier $f \in S$, podemos elegir j tal que

$$|f(z) - f_j(z)| < \frac{\epsilon}{3} ,$$

para $z \in K$, luego finalmente si $|z - w| < \delta$, se tiene

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq |f(z) - f_j(z)| \\ &\quad + |f_j(z) - f_j(w)| + |f_j(w) - f(w)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon . \end{aligned}$$

Inversamente, supongamos que S es acotado y equicontinuo en todo punto de A . Supongamos que $K \subset A$ es un compacto arbitrario de A y sea $\epsilon > 0$, por el Lemma 2.2.3, necesitamos solamente demostrar que existe una cantidad finita de funciones $f_1, .., f_n \in S$ tales que

$$S \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_K(f_j, \epsilon) .$$

Para cada $z \in A$ existe $\delta_z > 0$ tal que

$$|f(z) - f(w)| < \frac{\epsilon}{3} ,$$

para todo $f \in S$ si $|z - w| < \delta_z$ por la hipótesis de equicontinuidad. Por otra parte, por compacidad existe una cantidad finita de puntos $z_1, .., z_m \in K$, tales que

$$K \subset \bigcup_{l=1}^{m} B_l(z_l, \delta_{z_l}) = \bigcup_{l=1}^{m} B_l , \ B_l = B_l(z_l, \delta_{z_l}) .$$

También existe $M < \infty$, tal que para todo $f \in S$ tenemos $|f(z_l)| \leq M$ para $l = 1, .., m$.

Sean $Q_1 .., Q_N$, círculos de radio $\frac{\epsilon}{6}$, tales que

$$B(0, M) \subset \bigcup_{j=1}^{N} Q_j ,$$

los cuales existen por la compacidad de la clausura $\overline{B(0,M)}$. Sea Ω la familia de $m-$tuplas $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_m)$ tales que cada coordenada α_k es un entero positivo entre 1 y N . Para cada $\alpha \in \Omega$, si existe $f \in S$ tal que $f(z_l) \in Q_{\alpha_l}$ para $l = 1, .., m$, entonces elegimos una de estas f y la denotamos por f_α , si no existe tal f , entonces f_α lo elegimos en S.

Tenemos una familia finita $\{f_\alpha , \alpha \in \Omega\} \subset S$, tal que para cualquier $f \in S$ existe $\alpha \in \Omega$ tal que $|f(z_l) - f_\alpha(z_l)| < \frac{\epsilon}{3}$ para $l = 1, .., m$.

Ahora comprobamos que $|f(z) - f_\alpha(z)| < \epsilon$ para $z \in K$.

En efecto, sea z_l tal que $z \in B_l(z_l, \delta_{z_l})$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} |f(z) - f_\alpha(z)| &\leq |f(z) - f(z_l)| \\ &\quad + |f(z_l) - f_\alpha(z_l)| + |f_\alpha(z_l) - f_\alpha(z)| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \ , \end{aligned}$$

esto es $\|f - f_\alpha\|_K < \epsilon$, de tal forma que $f \in B_K(f_\alpha, \epsilon)$.

Hemos demostrado que para cualquier compacto $K \subset A$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe un conjunto finito $\{f_\alpha , \alpha \in \Omega\}$ tal que

$$S \subset \bigcup_{\alpha \in \Omega} B_K(f_\alpha, \epsilon) \ .$$

Esto demuestra que S es totalmente acotado. q.e.d.

A continuación recordamos el siguiente resultado sobre la topología de los espacios métricos para dar una nueva formulación del Teorema de Ascoli-Arzelá.

Teorema 2.2.3. *Dado un espacio métrico (X, d) entonces X es compacto si y solamente si X es totalmente acotado y completo.*

Demostración. Supongamos primero que X es compacto. El hecho que X es totalmente acotado se deduce inmediatamente de las definiciones. Para ver que X es completo supongamos que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy, por la compacidad en espacios métricos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ debe tener una subsucesión convergente a un límite $x \in X$. Es inmediato probar que la sucesión completa debe converger a X .

Inversamente si X es completo y totalmente acotado, probaremos que toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente lo cual en espacios métricos implica la compacidad.

Por la hipótesis de completitud, basta en efecto probar que dada una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X , existe una subsucesión de Cauchy.

Por la hipótesis de acotación total podemos recubrir X por una cantidad finita de bolas de radio uno. Es claro que una de estas bolas debe contener infinitos elementos x_n de la sucesión. Es decir existe un $y_1 \in X$, tal que el conjunto

$$S_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in B(y_1, 1)\} \ ,$$

es infinito.

A continuación recubrimos X por una cantidad finita de bolas de radio $1/2$. Puesto que S_1 es infinito, una de estas bolas debe contener infinitos x_n , donde $n \in S_1$, es decir existe un $y_2 \in X$, tal que el conjunto

$$S_2 = \{n \in S_1 \mid x_n \in B(y_2, 1/2)\} ,$$

es infinito.

Continuando este proceso obtendremos una sucesión $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de conjuntos infinitos de números naturales y una sucesión $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset X$, tal que $S_{k+1} \subset S_k$ y $x_n \in B(y_k, 1/k)$ para todo $n \in S_k$, de donde, en particular se obtiene

$$d(x_n, x_m) < \frac{2}{k} ,$$

para $n, m \in S_k$.

Sea ahora $n_1 \in S_1$, puesto que S_2 es infinito, existirá $n_2 \in S_2$ tal que $n_2 > n_1$ y análogamente puesto que todos los S_k son infinitos, obtendremos una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, con $n_k \in S_k$.

El hecho que los S_k están encajados, es decir $S_{k+1} \subset S_k$ implica que $n_j \in S_k$ siempre que $j \geq k$ y por tanto

$$d\left(x_{n_j}, x_{n_k}\right) < \frac{2}{N} ,$$

para $j, k \geq N$. De esta forma queda probado que la subsucesión $\{x_{n_k}\}$ es de Cauchy. q.e.d.

Recordando que por el Lema 2.2.2 el espacio $C(A)$ es completo, el Teorema 2.2.3 permite reformular el Teorema de Ascoli-Arzelá de la siguiente manera.

Teorema 2.2.4. (Segunda versión del Teorema de Ascoli-Arzelá). *Si $A \subset \mathbb{C}$ es un abierto del plano complejo y $S \subset C(A)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) *S es puntualmente acotado y equicontinuo,*

ii) *Cualquier sucesión en S tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de A.*

2.3 EL TEOREMA DE MONTEL

En la sección precedente hemos considerado el espacio $C(A)$, y no hemos supuesto la analiticidad de las funciones. En esta sección aplicamos los resultados obtenidos en la sección anterior al caso más restrictivo de las funciones analíticas. Denotaremos por $H(A)$ el espacio de las funciones analíticas o equivalentemente holomorfas en A , de tal forma que es claro que $H(A) \subset C(A)$ y definimos en $H(A)$ el mismo criterio de convergencia que en $C(A)$, es decir diremos que una sucesión $\{f_n\} \subset H(A)$ converge a $f \in H(A)$, es decir, $f_n \to f$ en $H(A)$ cuando f_n converge uniformemente a f sobre compactos.

De esta manera podemos considerar $H(A)$ como subespacio métrico de $C(A)$. Es fácil comprobar que $H(A)$ es un subespacio cerrado de $C(A)$ y por tanto un subconjunto de $H(A)$ es compacto si y solamente si es compacto cuando lo consideramos como subconjunto de $C(A)$.

Así pues el Teorema 2.2.4 de Ascoli-Arzelá da una caracterización de los subconjuntos compactos de $H(A)$.

Aquí probaremos el Teorema de Montel que caracteriza los subconjuntos compactos S en $H(A)$ en términos de la acotación uniforme sobre compactos en S. Esto se sigue del Teorema de Ascoli-Arzelá una vez que probemos que en el caso de funciones analíticas la acotación uniforme sobre compactos implica equicontinuidad.

Teorema 2.3.1. (Teorema de Montel). *Supongamos que $A \subset \mathbb{C}$ es un abierto y $S \subset H(A)$ es cerrado. Entonces S es compacto si y solamente si es uniformemente acotado sobre compactos, es decir, si para cada compacto $K \subset A$, existe M tal que $\|f\|_K \leq M$ para todo $f \in S$.*

Demostracion. Supongamos en primer lugar que S es compacto en $H(A)$ y por tanto también considerado como subconjunto de $C(A)$, por tanto por el Teorema de Ascoli-Arzelá S es puntualmente acotado y equicontinuo.

Sea $z \in A$, entonces por la acotación puntual de S, existe M_z tal que

$$|f(z)| \leq M_z \ ,$$

para todo $f \in S$, y por la equicontnuidad existe $\delta_z > 0$, tal que $B(z, \delta_z) \subset A$ y

$$|f(w) - f(z)| < 1 \ ,$$

para todo $w \in B(z, \delta_z)$ y todo $f \in S$. Se sigue que $|f(w)| < M_z + 1$ para todo $w \in B(z, \delta_z)$ y puesto que cualquier compacto $K \subset A$ está contenido en la unión de una cantidad finita de círculos $B(z, \delta_z)$ concluimos que existe M tal que

$$|f(z)| \leq M \ ,$$

para todo $z \in K$ y todo $f \in S$.

Supongamos ahora que $S \subset H(A)$ es cerrado y uniformemente acotado sobre los compactos de A, en particular puntualmente acotado. Si podemos probar que S es puntualmente equicontinuo, por el Teorema de Ascoli-Arzelá concluiremos que S es compacto.

Veamos que la equicontinuidad se deduce facilmente de las desigualdades de Cauchy.

Fijamos $z \in A$ y elegimos $r > 0$ tal que $K = \overline{B(z, 2r)} \subset A$. Sea M tal que $\|f\|_K \leq M$ para todo $f \in S$ y sea $w \in B(z, r)$. Es claro que

$$B(w, r) \subset B(z, 2r) \ ,$$

de tal forma que $|f| \leq M$ en $B(w, r)$ para todo $f \in S$. Por las desigualdades de Cauchy tenemos

$$|f'(w)| \leq \frac{M}{r} \ ,$$

para $f \in S$ y $w \in B(z, r)$. Esto demuestra que

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &= \left| \int_w^z f'(\zeta)\, d\zeta \right| \\ &\leq \frac{|z - w| M}{r} , \end{aligned}$$

donde la integral se realiza a lo largo del segmento uniendo z y w . La relación anterior implica la equicontinuidad pues ni M ni r dependen de f . q.e.d.

El enunciado original del Teorema de Montel no utiliza el concepto de conjunto compacto de funciones. Por otro lado, se llaman familias normales de funciones analíticas en un dominio A a aquellas familias uniformemente acotadas sobre compactos. Con esta terminología podemos reescribir el Teorema 2.3.1 en la forma original

Teorema 2.3.2. (Teorema de Montel).
Si $\mathcal{F} \subset H(A)$ es una familia normal y $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathcal{F}$, entonces existe una subsucesión $\left\{f_{n_j}\right\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $f_{n_j} \to f \in H(A)$ uniformemente sobre compactos.

2.4 EJERCICIOS

1. Probar que si $\mathcal{F}$ es una familia de funciones analíticas en un abierto $A \subset \mathbb{C}$, que no está acotada en $H(A)$, existe al menos algún punto $z_0 \in A$ tal que $\mathcal{F}$ no está acotado uniformemente en ningún entorno de z_0.

Consideraremos que un subconjunto de $H(A)$ es acotado en el sentido que es acotado uniformemente sobre compactos.

2. Sea $\mathcal{F}$ la clase de las funciones analíticas en $A \subset \mathbb{C}$, con A abierto conexo y acotado, para las que se verifica

$$\iint_A |f(z)|^2\, dxdy \leq M < \infty .$$

Probar que $\mathcal{F}$ está acotada en $H(A)$.

3 TRANSFORMACION CONFORME. TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES.TEOREMA DE RIEMANN.

3.1 INTRODUCCION.

La existencia de la derivada $f'(z_0)$ no nula en un punto $z_0 \in A$ de una función de variable compleja $f : A \to \mathbb{C}$, tiene la importante consecuencia geométrica que dos curvas γ_1, γ_2 que se cortan en z_0 con un cierto ángulo α, son transformadas por f en dos curvas $f \circ \gamma_1$, $f \circ \gamma_2$ que se cortan en $f(z_0)$ con el mismo ángulo α. Las aplicaciones con esta propiedad se llaman conformes.

La teoría de las transformaciones conformes tiene grandes aplicaciones en la Física y en la Técnica y por tanto la teoría de las funciones analíticas adquiere gran importancia en las ciencias aplicadas.

En este capítulo presentamos un estudio de las transformaciones fraccionarias o de Möbius que proporcionan los ejemplos más básicos de transformaciones conformes biyectivas. Finalmente presentamos el Teorema de Riemann de la Transformación conforme, uno de los teoremas centrales de la teoría de las funciones analíticas y con aplicaciones fundamentales a la Teoría del Calor, Teoría del Potencial, etc.

3.2 FUNCIONES ANALITICAS Y TRANSFORMACIONES CONFORMES

En la siguiente definición hacemos precisa la idea de transformación conforme descrita en la introducción.

Definición 3.2.1. *Una función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dice que es conforme en $z_0 \in A$, si existe $\theta \in [0, 2\pi]$, tal que cualquier curva $\gamma(t)$ diferenciable en $t = 0$, $\gamma(0) = z_0$, $\gamma'(0) \neq 0$, se transforma por f en una curva $\sigma(t) = f(\gamma(t))$ diferenciable en $t = 0$, tal que*

$$\arg \sigma'(0) = \arg \gamma'(0) + \theta \ , \ \pmod{2\pi} \ ,$$

f se dirá que es conforme en A si es conforme en todo punto de A.

Se tiene entonces,

Teorema 3.2.1. *Si $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es derivable en z_0 y $f'(z_0) \neq 0$, entonces f es conforme en z_0* y $\theta = \arg f'(z_0)$. *Si f es analítica en A entonces f es conforme en A .*

Demostración. La demostración es una consecuencia analítica inmediata de la regla de la cadena. En efecto tendremos

$$\sigma'(0) = f'(z_0)\gamma'(0) \ ,$$

de donde se sigue la relación

$$\arg \sigma'(0) = \arg f'(z_0) + \arg \gamma'(0) \quad , \ \mathrm{mod} \ (2\pi) \ .$$

q.e.d.

Bajo ciertas condiciones de regularidad se puede también probar que una transformación conforme del plano viene dada por una función analítica, si embargo este hecho no es tan sencillo como en la otra dirección y no lo probaremos hoy, ver Blaschke [] .

Una segunda consecuencia se deduce al considerar el módulo $|f'(z_0)|$. Se tiene

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)| \ .$$

Esto significa que cualquier segmento "infinitesimal" con extremo en z_0 es dilatado por un factor $|f'(z_0)|$.

3.3 TRANSFORMACIONES FRACCIONARIAS LINEALES

Las transformaciones fraccionarias lineales o de Möbius son las funciones analíticas que tienen la propiedad de aplicar la esfera de Riemann biyectivamente sobre sí misma. Estas transformaciones tienen una expresión analítica sencilla y tienen gran interés práctico.

Definición 3.3.1. *Se llaman transformaciones fraccionarias analíticas o de Möbius aquellas transformaciones* φ de la forma

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d} \ ,$$

donde a, b, c, d son números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.

Es claro que

$$\varphi\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \ ,$$

y

$$\varphi(\infty) = \frac{a}{c} \ ,$$

es decir φ es una aplicación del plano ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$ o esfera de Riemann sobre sí misma.

Es inmediato que es biyectiva pues tiene una función inversa que se obtiene despejando en

$$w = \varphi(z) \ ,$$

que resulta

$$z = \varphi^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \ .$$

Casos particulares de transformaciones fraccionarias lineales son:

a) $w = z + a$, que es una traslación del plano $\mathbb{C}$ en sí mismo.

b) $w = az$ con a real, que es una homotecia con centro en el origen.

c) $w = az$ donde $|a| = 1$ que es un giro.

La composición de las dos últimas proporciona una homotecia compleja $w = az$, donde a puede ser un número complejo cualquiera.

d) $w = \frac{1}{z}$, que es una inversión respecto de la circunferencia unidad, seguida de una simetría respecto del eje x .

Es sencillo comprobar que estas transformaciones fraccionarias elementales transforman rectas y circunferencias en rectas y circunferencias respectivamente, excepto en d) que transforman las rectas que no pasan por el origen en circunferencias que pasan por el origen y reciprocamente.

Comprobamos que toda transformación fraccionaria lineal se puede escribir como composición de estas transformaciones elementales.

En efecto

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{\lambda}{cz + d} \quad \text{donde } \lambda = \frac{bc - ad}{c} \ ,$$

y por tanto la aplicación $z \to w$ es la composición de las transformaciones elementales

$$\begin{aligned} z &\to cz = w_1 \ , \ w_1 \to w_1 + d = w_2 \ , \ w_2 \to \frac{\lambda}{w_2} = w_3 \ , \\ w_3 &\to \frac{a}{c} + w_3 = w \ . \end{aligned}$$

como consecuencia de este hecho obtenemos el

Teorem 3.3.1. *Toda transformación fraccionaria lineal transforma el conjunto de todas las rectas y circunferencias del plano en sí mismo.*

Este hecho se traslada a la esfera de Riemann donde las rectas del plano son también circunferencias.

Un hecho con gran importancia práctica es el siguiente.

Teorema 3.3.2. *Dada una terna z_1, z_2, z_3 de puntos distintos del plano ampliado $\widehat{\mathbb{C}}$ y otra terna w_1, w_2, w_3 también en $\widehat{\mathbb{C}}$, entonces existe una única transformación fraccionaria lineal $w = \varphi(z)$ tal que*

$$\varphi(z_i) = w_i \ , \ i = 1, 2, 3 \ ,$$

Además la transformación $w = \varphi(z)$ puede ser determinada por la relación

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \ .$$

El miembro de la derecha se conoce como la razón doble de los puntos z, z_1, z_2, z_3 la igualdad expresa la conservación de la razón doble, es decir, las imágenes w, w_1, w_2, w_3 tienen la misma razón doble que los puntos originales.

Demostración. En efecto la igualdad anterior define una transformación fraccionaria lineal $w = \varphi(z)$ tal que $\varphi(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.

Para probar que es única se considera la aplicación definida por

$$h(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} ,$$

que es una transformación fraccionaria lineal que aplica los puntos z_1, z_2, z_3 respectivamente en los puntos $0, \infty, 1$. Si existiera otra transformación de Möbius

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d} ,$$

que verificara las condiciones

$$g(z_1) = 0 , \; g(z_2) = \infty , \; g(z_3) = 1 ,$$

se debería tener

$$\begin{aligned} az_1 + b &= 0 , \\ cz_2 + d &= 0 , \end{aligned}$$

y

$$\frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = 1 . \tag{3.1}$$

De la primera y la segunda relación resulta

$$\begin{aligned} a &= -\frac{b}{z_1} , \\ c &= -\frac{d}{z_2} , \end{aligned}$$

que sustituidas en (3.1) nos da

$$\frac{b(z_1 - z_3)}{z_1} = \frac{d(z_2 - z_3)}{z_2} ,$$

i.e.

$$\frac{b}{d} = \left(\frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \right) \frac{z_1}{z_2}.$$

Sustituyendo estos valores en g se obtiene

$$g(z) = \frac{-b\frac{z}{z_1} + b}{-d\frac{z}{z_2} + d} = \frac{z_2 b}{z_1 d} \left(\frac{z - z_1}{z - z_2} \right) = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = h(z) ,$$

es decir, concluye la igualdad $g(z) = h(z)$ para todo $z \in \widehat{\mathbb{C}}$.

Sea $w = \varphi(z)$ la transformación fraccionaria lineal o de Möbius definida en el enunciado del teorema mediante la razón doble y sea ψ otra transformación de Möbius que verifique

$$w_i = \psi(z_i) \text{ con } i = 1, 2, 3.$$

La compuesta $h \circ \psi^{-1}$ es también una transformación de Möbius y verifica

$$\begin{aligned} h \circ \psi^{-1}(w_1) &= 0 , \\ h \circ \psi^{-1}(w_2) &= \infty , \\ h \circ \psi^{-1}(w_3) &= 1 . \end{aligned}$$

Puesto que $h \circ \psi^{-1}$ está univocamente determinada por lo probado anteriormente entonces también lo estará

$$\psi = \left(h \circ \psi^{-1}\right)^{-1} \circ h ,$$

que lleva z_i a w_i y por tanto esta transformación ha de ser igual a φ . q.e.d.

3.4 CONJUGACION RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA

Dada una circunferencia $C(z_0, R)$ en el plano complejo con centro z_0 y radio R , es decir

$$C(z_0, R) = \{z \mid |z - z_0| = R\} ,$$

y dados los puntos p, q , diremos que son conjugados respecto de $C(z_0, R)$ cuando p, q, z_0 están alineados, z_0 no separa a p y q y el producto de las distancias de p y q a z_0 es igual a R^2 . Esta definición se traduce analíticamente en

$$(p - z_0)(\overline{q} - \overline{z_0}) = R^2 .$$

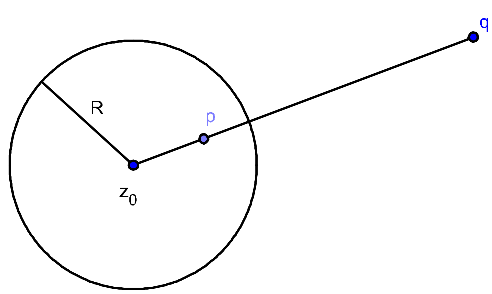

Figura 1

De acuerdo con esta definición los puntos de $C(z_0, R)$ son conjugados a sí mismos.

Diremos que ∞ y z_0 son conjugados respecto de C.

En el caso de una recta L , dos puntos $p, q \in \mathbb{C}$ se dirán conjugados respecto de una recta cuando son simétricos respecto de L.

Si desarrollamos la ecuación de la circunferencia

$$(z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0}) = R^2 \ ,$$

obtenemos una expresión de la forma

$$\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0 \ ,$$

donde

$$\alpha = 1 \ , \ \beta = -z_0 \ , \ \gamma = |z_0|^2 - R^2 \ ,$$

de tal forma que $\gamma < \beta\overline{\beta}$ y $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

La ecuación anterior es un caso particular de ecuación de la forma

$$\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0 \ ,$$

con $\alpha\gamma < \beta\overline{\beta}$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$.

En el caso $\alpha \neq 0$, dividiendo por α se obtiene la ecuación inicial y si $\alpha = 0$ se obtiene la ecuación de una recta. Así pues la ecuación general representa simultáneamente a las circunferencias y a las rectas.

Concluimos que dos puntos p, q tales que

$$\alpha p\overline{q} + \overline{\beta} p + \beta \overline{q} + \gamma = 0 \ ,$$

en el caso $\alpha \neq 0$, son conjugados respecto de la circunferencia

$$\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0 \ .$$

Cuando $\alpha = 0$, es decir si p y q verifican

$$\overline{\beta} p + \beta \overline{q} + \gamma = 0 \ ,$$

son conjugados respecto de la recta

$$\overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0 \ ,$$

en efecto, para que p y q sean simétricos respecto de la recta, el punto $p + q - z$ ha de estar en la recta para todo z de la recta y esto se sigue de

$$\begin{aligned} & \overline{\beta}(p + q - z) + \beta(\overline{p} + \overline{q} - \overline{z}) + \gamma \\ = \ & \left(\overline{\beta} p + \beta \overline{q} + \gamma\right) + \left(\beta \overline{p} + \overline{\beta} q + \gamma\right) - \left(\overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma\right) = 0 \ . \end{aligned}$$

Teorema 3.4.1. *Una transformación fraccionaria lineal o de Möbius transforma puntos conjugados p, q respecto de una circunferencia C , en puntos conjugados p^*, q^* respecto a la circunferencia imagen $C^* = T(C)$.*

Demostración. Otra vez utilizamos el hecho que T es composición de transformaciones de Möbius elementales. Bastará ver que los puntos conjugados se transforman en puntos conjugados para cada una de estas transformaciones elementales.

Este hecho es evidente en el caso de traslaciones y homotecias. A continuación lo comprobamos también para las inversiones.

Si p y q son conjugados, se tiene

$$\alpha p\overline{q} + \overline{\beta} p + \beta \overline{q} + \gamma = 0 \ ,$$

y dividiendo por $p\overline{q}$ obtenemos

$$\alpha + \overline{\beta}\frac{1}{\overline{q}} + \beta\frac{1}{p} + \gamma\frac{1}{p}\frac{1}{\overline{q}} = 0 \ ,$$

es decir $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$ son conjugados respecto de la circunferencia

$$\gamma w\overline{w} + \beta w + \overline{\beta}\overline{w} + \alpha = 0 \ ,$$

que es la circunferencia imagen de

$$\alpha z\overline{z} + \overline{\beta} z + \beta \overline{z} + \gamma = 0 \ ,$$

por la inversión $w = \frac{1}{z}$. q.e.d.

A continuación estudiamos algunas transformaciones fraccionarias particulares de interés, por ejemplo aquellas que transforman el semiplano superior $H^+ = \{z \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ sobre el círculo unidad $B(0,1) = \{w \mid |w| < 1\}$ o aquellos que transforman el círculo unidad sobre sí mismo.

Teorema 3.4.2. *Una transformación de Möbius transforma el semiplano H^+ en el círculo unidad $B(0,1)$ si y solo si es de la forma* ,

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \ ,$$

donde α es un número complejo con parte imaginaria positiva.

Demostración. Si la transformación

$$w = \frac{az+b}{cz+d} \ ,$$

transforma el semiplano H^+ sobre $B(0,1)$, entonces la imagen del eje real

$$\mathbb{R} = \{z = x + iy \ |y = 0\}$$

en el plano z , será una circunferencia o una recta en el plano w . Llamemos λ a esta curva, puesto que $\mathbb{R}$ separa el semiplano superior del semiplano inferior λ

ha de separar la imagen de H^+ es decir $B(0,1)$ del exterior de la circunferencia unidad $C(0,1)$ y se ha de tener $\lambda = C(0,1)$.

Sea α el punto de H^+ que se transforma en $w = 0$ mediante nuestra transformación, entonces el conjugado $\overline{\alpha}$ tendrá por imagen $w = \infty$, que es el conjugado de $w = 0$ respecto de λ. Como en la transformación considerada $w = 0$, es la imagen de $z = -\frac{b}{a}$ y $w = \infty$ es $w\left(-\frac{d}{c}\right)$, deducimos que la transformación ha de ser

$$w = \frac{a}{c}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \ .$$

Además como la imagen del punto $z = 0$ está en la circunferencia λ , se ha de tener

$$\left|\frac{a}{c}\right| = 1 \text{ , es decir } \frac{a}{c} = e^{i\theta} \ .$$

Inversamente dada una transformación

$$w = e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}} \ ,$$

ha de ocurrir que transforme el eje real en la circunferencia unidad $C(0,1)$ pues para z real se tiene

$$|z-\alpha| = |z-\overline{\alpha}| \ ,$$

luego $|w| = 1$.

Finalmente observemos que el semiplano H^+ se transforma en el interior de la circunferencia unidad, es decir el círculo unidad, pues para $z = \alpha$ se tiene $w = 0$. q.e.d.

Un caso particular de las transformaciones descritas en el Teorema 3.4.2 es la transformación

$$w = \frac{z-i}{z+i} \ ,$$

que se obtiene para $\theta = 0$, $\alpha = i$.

La transformación inversa que se obtiene despejando

$$z = -i\frac{w+1}{w-1} \ ,$$

o equivalentemente

$$iz = \frac{w+1}{w-1} \ ,$$

que transforma el círculo unidad sobre H^+ .

Llamando $z' = -iz$, entonces mediante la transformación

$$z' = -\frac{w+1}{w-1} \ ,$$

se transforma el círculo unidad en el semiplano de la derecha

$$H_d = \{z = x+iy \ \mid x > 0\} \ .$$

Teorema 3.4.3. *Una transformación fraccionaria lineal transforma el círculo unidad* $B(0,1) = \{z \mid |z| < 1\}$ *en sí mismo si y solo si es de la forma*

$$w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - 1} \ ,$$

donde $|\alpha| < 1$ *.*

Demostración. La circunferencia unidad $C(0,1) = \{z \mid |z| = 1\}$ ha de transformarse en sí misma y por tanto si α es el punto interior del círculo unidad que se transforma en $w = 0$ mediante la transformación dada, entonces $\frac{1}{\overline{\alpha}}$ que es el conjugado de α respecto de la circunferencia unidad se transformará en $w = \infty$, que es el conjugado de $w = 0$ en el plano w.

En el caso $\alpha = 0$, es inmediato ver que la transformación ha de ser de la forma

$$w = e^{i\theta} z \ ,$$

es decir $b = c = 0$, $|a/d| = 1$.

Supondremos por tanto $\alpha \neq 0$, en este caso se deduce de lo anterior

$$\alpha = -\frac{b}{a} \ , \ \frac{1}{\overline{\alpha}} = -\frac{d}{c} \ ,$$

es decir la transformación será de la forma

$$w = \frac{a\overline{\alpha}}{c} \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - 1} \ ,$$

y como la imagen del punto $z = 1$, está en la circunferencia $\{w \mid |w| = 1\}$, se ha de verificar

$$\left| \frac{a\overline{\alpha}}{c} \frac{1-\alpha}{\overline{\alpha} - 1} \right| = \left| \frac{a\overline{\alpha}}{c} \right| = 1 \ ,$$

lo que prueba que la transformación ha de ser de la forma indicada.

Inversamente, la transformación

$$w = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z - 1} \ ,$$

transforma la circunferencia unidad en sí misma. En efecto si $z = e^{it}$ se tiene

$$|w| = \left| \frac{e^{it} - \alpha}{\overline{\alpha}e^{it} - 1} \right| = \left| \frac{\alpha - e^{it}}{\overline{\alpha} - e^{-it}} \right| = 1 \ ,$$

luego la transformación envía la circunferencia unidad en sí misma y como $z = 0$ se transforma en $w = e^{i\theta}\alpha$ cuyo módulo es menor que 1 , la transformación envía el círculo unidad en el círculo unidad. q.e.d.

3.5 EL TEOREMA DE RIEMANN DE LA TRANSFORMACION CONFORME

El Teorema de Riemann de la transformación conforme es uno de los grandes teoremas de la teoría de funciones de variable compleja. El Teorema de Riemann fué enunciado por Riemann pero demostrado de forma incompleta, fué Dirichlet décadas más tarde quien proporcionó una demostración rigurosa.

En primer lugar enunciamos el teorema y a continucación procedemos a su demostración en varias etapas.

Teorema 3.5.1 (Teorema de Riemann). *Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$, entonces existe una función analítica biyectiva $f : A \to B(0,1)$ de A sobre el círculo unidad $B(0,1)$.*

Demostración. En primer lugar demostraremos que al menos existe alguna función analítica f que transforma inyectivamente A en $B(0,1)$, a continuación mostraremos que entre aquellas f que aplican inyectivamente A en $B(0,1)$, alguna tiene que ser sobreyectiva.

Como $A \neq \mathbb{C}$, sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $a \notin A$, de tal forma que la función $g(z) = z - a$, no se anula en A. Entonces se puede elegir una rama uniforme de la raiz de g , es decir una función analítica h tal que $h^2 = z - a$ en A.

Mostramos que esta función h ha de ser inyectiva, en efecto si fuera $h(z_1) = h(z_2)$, se tendría también

$$h^2(z_1) = h^2(z_2) \ ,$$

es decir

$$z_1 - a = z_2 - a \ ,$$

luego $z_1 = z_2$.

También podemos asegurar que no existen puntos distintos $z_1, z_2 \in A$ tales que $h(z_1) = -h(z_2)$ pues igualmente se tendría

$$h^2(z_1) = h^2(z_2) \ ,$$

y consecuentemente $z_1 = z_2$.

Puesto que h es analítica, también es una aplicación abierta de tal manera que existe un círculo $B(z_0, r) \subset h(A)$.

Se comprueba que $0 \notin B(z_0, r)$, pues si existiera $z' \in A$, tal que $h(z') = 0$, se tendría $h^2(z') = z' - a = 0$ y se concluiría $a = z' \in A$, en contra de la hipótesis.

El círculo $B(-z_0, r)$ simétrico del $B(z_0, r)$ respecto del origen no tiene puntos comunes con $h(A)$, es decir $h(A) \cap B(-z_0, r) = \phi$. Si existiera $w \in h(A) \cap B(-z_0, r)$, para un $z_1 \in A$ se tendría $h(z_1) = w$ y por otro lado como $w \in B(-z_0, r) \subset -h(A)$ debería existir $z_2 \in A$ tal que $h(z_2) = -w$, pero hemos visto que no puede ocurrir $h(z_1) = -h(z_2)$ con $z_1, z_2 \in A$.

El hecho que $h(A) \cap B(-z_0, r) = \phi$ se puede expresar mediante

$$|h(z) + z_0| \geq r \text{ para todo } z \in A \ .$$

Definimos entonces $f : A \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = \frac{kr}{h(z) + z_0} \quad \text{con} \quad 0 < |k| < 1 \ ,$$

y se comprueba inmediatamente que $f(z)$ cumple las propiedades requeridas, esto es, $f(z)$ es analítica, su imagen está en $B(0,1)$ y es inyectiva. q.e.d.

La función construida no es única. De entre todas las $f(z)$ analíticas inyectivas que aplican A en $B(0,1)$, elegimos una que tiene una propiedad extremal.

Sea $z_0 \in A$ un punto fijo y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de las funciones analíticas que aplican inyectivamente A en $B(0,1)$, este conjunto no es vacío por lo que acabamos de probar. Sea g_0 una de estas funciones , puesto que g_0 es inyectiva se ha de tener

$$b = |g_0'(z_0)| > 0 \ ,$$

y denotamos por $\mathcal{F}_b$ el subconjunto de $\mathcal{F}$ definido por

$$\mathcal{F}_b = \{g \in \mathcal{F} \ | \ |g'(z_0)| \geq b\} \ ,$$

este conjunto es compacto, luego existirá $f \in \mathcal{F}_b$ tal que

$$|f'(z_0)| \geq |g'(z_0)|$$

para toda $g \in \mathcal{F}_b$.

A continuación demostramos que esta función maximal aplica A sobreyectivamente en $B(0,1)$.

En efecto supongamos que f no aplica A sobre $B(0,1)$ entonces existirá un $a \notin f(A)$ con $|a| < 1$.

Definimos la función φ_a por

$$\varphi_a = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \ ,$$

que transforma el círculo unidad biyectivamente sobre sí mismo. La función inversa resulta ser

$$(\varphi_a)^{-1} = \varphi_{-a} \ .$$

La función φ_a se anula si y solo si $z = a$, luego resulta

$$(\varphi_a \circ f)(z) \neq 0 \text{ para todo } z \in A \ ,$$

y por tanto podemos concluir la existencia de una función h analítica en A tal que

$$h^2 = \varphi_a \circ f \ ,$$

y también ha de ser inyectiva pues

$$h(z_1) = h(z_2)$$

implicaría

$$\varphi_a(f((z_1))) = \varphi_a(f((z_2)))$$

de donde $f(z_1) = f(z_2)$ y por tanto también $z_1 = z_2$ pues se ha supuesto f inyectiva.

Como
$$\left(\varphi_a \circ f\right)(A) \subset B(0,1)$$
se tiene $h(A) \subset B(0,1)$ y por tanto $h \in \mathcal{F}$.

Sea $w_0 = h(z_0)$, de tal forma que $|w_0| < 1$, y por tanto φ_{w_0} aplica biyectivamente el círculo unidad sobre sí mismo. Se trata de probar que la función $g = \varphi_{w_0} \circ h$, que claramente está en $\mathcal{F}$, verifica

$$|f'(z_0)| < |g'(z_0)|.$$

En efecto se tendría

$$\begin{aligned} f &= \varphi_{-a} \circ h^2 = \varphi_{-a} \circ \left(\varphi_{-w_0} \circ g\right)^2 \\ &= \varphi_{-a} \circ s \circ \varphi_{-w_0} \circ g \ , \end{aligned}$$

donde s es la función
$$s(w) = w^2.$$

Se tendría por tanto

$$f = \psi \circ g \ \text{ donde } \psi = \varphi_{-a} \circ s \circ \varphi_{-w_0} \ ,$$

la función ψ es analítica en el círculo abierto $B(0,1)$, pero no es inyectiva pues la función s no lo es.

La función ψ aplica el círculo $B(0,1)$ en sí mismo y se tiene

$$\begin{aligned} \psi(0) &= \varphi_{-a}\left(s\left(\varphi_{-w_0}(0)\right)\right) = \varphi_{-a}\left(s(w_0)\right) \\ &= \varphi_{-a}\left(h^2(z_0)\right) = f(z_0) \ , \end{aligned}$$

por comodidad denotaremos $c = f(z_0)$. Por hipótesis se tiene $|c| < 1$.

El cálculo de la derivada de f en z_0 da

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \psi'(g(z_0))\, g'(z_0) = \psi'\left(\varphi_{w_0}(h(z_0))\right) g'(z_0) \\ &= \psi'(0)\, g'(z_0) \ . \end{aligned}$$

Para probar que $\left|\psi'(0)\right| < 1$, hacemos uso del Lema de Schwarz y obesrvamos que la función $\chi = \varphi_c \circ \psi$ verifca las hipótesis requeridas en dicho lema, en efecto
$$\chi(0) = \varphi_c(\psi(0)) = \varphi_c(c) = 0 \ ,$$
y además transforma $B(0,1)$ en sí mismo. Por el lema de Schwarz concluimos

$$|\chi'(0)| \leq 1 \ ,$$

pero no puede ser $|\chi'(0)| = 1$, pues entonces χ sería de la forma $\chi(z) = \lambda z$, lo cual no puede ocurrir porque $\chi(z)$ no es inyectiva.

De $\chi'(0) = \varphi_c'(c)\,\psi'(0)$ se deduce

$$\frac{1}{1-c\overline{c}}\left|\psi'(0)\right| < 1 \ ,$$

es decir

$$\left|\psi'(0)\right| < 1 - c\overline{c} \leq 1 \ ,$$

lo que demuestra que

$$\left|f'(z_0)\right| < \left|g'(z_0)\right| \ ,$$

lo cual contradice nuestra hipótesis sobre la maximalidad de f. Esta contradicción viene de suponer que f no es sobreyectiva.

Por tanto hemos construido una función anlítica inyectiva y sobreyectiva $f : A \to B(0,1)$ y el Teorema de Riemann queda probado. q.e.d.

La transformación conforme $f : A \to B(0,1)$ cuya existencia asegura el Teorema de Riemann no es única, sin embargo imponiendo alguna condición adicional obtenemos unicidad.

Teorema 3.5.2 *Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo distinto de $\mathbb{C}$ y sean f_1 , f_2 dos funciones analíticas en A que aplican inyectivamente A sobre el círculo abierto $B(0,1)$. Si en un punto $z_0 \in A$ se verifica $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ y $f_1'(z_0) = f_2'(z_0)$, entonces las dos funciones coinciden.*

Demostración. La función $f = f_1 \circ f_2^{-1}$ aplica $B(0,1)$ sobre $B(0,1)$ y además se anula en el punto $z = 0$. Su derivada en este punto es

$$f'(0) = f_1'(z_0)\left(f_2^{-1}\right)'(0) = \frac{f_1'(z_0)}{f_2'(z_0)} = 1 \ .$$

Por el Lema de Schwarz se tiene $f(z) = \alpha z$ con $|\alpha| = 1$ pero como $f'(0) = \alpha$, tenemos $\alpha = 1$, es decir $f(z) \equiv z$ y $f_1(z) \equiv f_2(z)$. q.e.d.

3.6 EJERCICIOS

1.Encontrar una transformación de Möbius que transforme el círculo unidad $B(0,1) = \{z \mid |z| \leq 1\}$ en el semiplano superior $H^+ = \{w \mid \operatorname{Im} w \geq 0\}$. Describir la familia de las curvas imágenes de los radios de las circunferencia $C = \{z \mid |z| = 1\}$.

2.Encontrar una transformación conforme del dominio

$$A = \left\{ z \;\middle|\; 0 < Arg z < \frac{\pi}{2} \right\} \ ,$$

sobre el disco unidad

$$D = \{w \mid |w| < 1\}.$$

3.Determinar una transformación fraccionaria lineal o de Möbius que transforme el círculo $D_2 = \{z \mid |z| < 2\}$ en el semiplano $H_d = \{w \mid \operatorname{Re} w > 0\}$ de manera que $w(0) = 1$ y $\arg w'(0) = \frac{\pi}{2}$.

4 FUNCIONES ELIPTICAS

4.1 FUNCIONES MEROMORFAS PERIODICAS

4.1.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Dada una función meromorfa $f : A \to \widehat{\mathbb{C}}$, $A \subset \mathbb{C}$ abierto, diremos que $\omega \in \mathbb{C}$ es un periodo de f si

1. Para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $z \in A$ entonces $z + \omega$ también pertenece a A y viceversa.
2. Si $z \in A$, entonces $f(z + \omega) = f(z)$.

Para una función constante todo número complejo es un periodo. Diremos que $f(z)$ es periódica si posee por lo menos un periodo diferente de cero. Se deduce inmediatamente de la definición que si ω es un periodo también lo es $m\omega$ donde m es un entero arbitrario.

Mas generalmente si $\omega_1, \omega_2, .., \omega_p$ son periodos de la función $f(z)$, entonces todo número de la forma

$$m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + ... + m_p\omega_p \ ,$$

es también un periodo de $f(z)$, donde $m_1, m_2, ..., m_p$ son números enteros arbitrarios.

Derivando la relación

$$f(z + \omega) = f(z) \ ,$$

se obtiene

$$f'(z + \omega) = f'(z) \ ,$$

luego la derivada de una función periódica es también una función periódica y todo periodo de $f(z)$ es también un periodo de $f'(z)$. Sin embargo una función primitiva de una función periódica no tiene que ser una función periódica. Por ejemplo, la función $f(z) = z$ no es periódica, sin embargo su derivada $f'(z) = 1$ es una función constante y por tanto periódica.

4.1.2 EL RETICULO DE PERIODOS

Sea $f(z)$ una función periódica y sea Ω el conjunto de sus periodos. En primer lugar observamos que Ω no puede tener puntos de acumulación a menos que $f(z)$ sea constante. En efecto, si Ω tuviera punto de acumulación existiría una sucesión de periodos distintos, convergente a un punto α. Los números $\nu_n = \omega_n - \omega_{n-1} \neq 0$, serían periodos con módulos arbitrariamente pequeños cuando $n \to \infty$. Puesto que $f(z + \nu_n) = f(z)$ para todo punto z , fijado z , tendríamos que z sería límite de puntos $z + \nu_n$ en los cuales la función toma el mismo valor y por tanto $f(z)$ sería una función constante.

A continuación distinguiremos dos casos:

i) Todos los periodos están alineados,
ii) El conjunto Ω no está contenido en una recta .

En el caso i) sea ω un periodo con módulo mínimo, es decir, ω es tal que no podemos encontrar ningún otro periodo más próximo a cero. Puesto que el conjunto Ω de periodos no posee ningún punto de acumulación y es simétrico respecto del origen, existirán exactamente dos números con esta propiedad y no distinguiéndose más que por el signo, entonces elegiremos uno se ellos y lo denotaremos por ω y demostraremos que todos los periodos, es decir todos los elementos de Ω son de la forma $n\omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ En efecto si existiera otro periodo ν que no fuera de esta forma, entonces puesto que se encuentra en la misma recta L pasando por el origen que contiene a ω, habría de ser de la forma

$$\nu = (m + \theta)\,\omega \text{ , donde } m \in \mathbb{Z} \text{ , } 0 < \theta < 1 \text{ .}$$

Pero entonces el número $\theta\omega = \nu - m\omega$, siendo la diferencia de dos periodos tendría que ser a su vez un periodo y tendría módulo estrictamente menor que ω , lo cual está en contradicción con la condición de módulo mínimo con la cual fué elegido ω. El número ω que queda definido de manera única salvo el signo lo llamaremoa periodo primitivo.

En el caso ii) , elegimos también un periodo $\omega \in \Omega$, $\omega \neq 0$, con módulo mínimo. Sea L la recta que pasa por por ω y por el origen. Por el argumento en i) , todos los periodos en Ω que se encuentran sobre L son de la forma $m\omega$ donde $m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ Consideramos ahora los puntos de Ω que no están sobre L y elegimos uno de ellos ω' con módulo míninmo. Es claro que $|\omega'| \geq |\omega|$. Vamos a demostrar que todos los periodos de Ω son de la forma $m\omega + n\omega'$, donde $m, n \in \mathbb{Z}$.

En primer lugar, ya sabemos que cualquiera de estos números es un periodo. Tenemos pues que demostrar que no existe otro periodo que no se pueda expresar de esta forma. Los números $m\omega + n\omega'$son los vértices de un retículo de paralelogramos que recubren el plano. Si existiera $\nu \in \Omega$, que no fuera de la forma $m\omega + n\omega'$, se encontraría en el interior o en uno de los lados de un paralelogramo de este retículo, pero no sería uno de los vértices. Por tanto se tendría

$$\nu = (m + \theta)\,\omega + \left(n + \theta'\right)\omega' \text{ ,}$$

donde los números θ, θ' no se anularían simultáneamente y se tendría

$$0 \leq \theta \leq 1 \text{ , } 0 \leq \theta' \leq 1 \text{ .}$$

El número

$$\nu' = \nu - (m\omega + n\omega') = \theta\omega + \theta'\omega' \text{ ,}$$

sería un periodo, como diferencia de dos periodos, y se encontraría en el interior o en uno de los lados del paralelogramo con vértices $0, \omega, \omega + \omega', \omega'$, y no sería ninguno de los vértices. Tampoco podría encontrarse en el interior ni sobre el borde del triángulo con vértices $0, \omega, \omega'$,pues de la desigualdad $|\omega| \leq |\omega'|$, debería pertenecer al círculo $B\,(0, |\omega'|)$ por tanto se tendría $|\nu'| < |\omega'|$, lo que contradice la definición de ω'. Tampoco puede encontrarse en el triángulo de vértices $\omega, \omega + \omega', \omega'$, pues entonces el número

$$\nu'' = \omega + \omega' - \nu' \ ,$$

que es también un periodo, se encontraría en el triángulo de vértices $0, \omega, \omega'$ y tendríamos de nuevo una contradicción como antes.

Un par de periodos ω, ω' tal que todo periodo sea de la forma $m\omega + n\omega'$ con m, n enteros, se llama un par primitivo de periodos. Dado un par primitivo de periodos ω, ω' y un entero k, entonces el par $\omega, k\omega + \omega'$ es también un par primitivo de periodos.

En el caso i) la función $f(z)$ se dice simplemente periódica y en el caso ii) doblemente periódica.

Supongamos que una función analítica tenga un periodo ω en un dominio Ω , entonces trazamos una familia de rectas paralelas L_n pasando por los puntos $n\omega$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$, de esta manera el plano entero queda dividido en una serie de bandas paralelas S_n contenidas respectivamente entre L_n y L_{n+1}. Supondremos que L_n pertenece a S_n . Estas bandas serán llamadas bandas de periodos. Si S es una de estas bandas se tendrá $\Omega \cap S \neq \phi$ y claramente será suficiente limitarse a este dominio $\Omega \cap S$ para el estudio de la función.

En el caso de las funciones doblemente periódicas con un par primitivo de periodos ω, ω' consideraremos el retículo de paralelogramos recubriendo el plano y teniendo por vértices los puntos $m\omega + n\omega'$, donde m y n son enteros.

Consideremos el paralelogramo de este retículo $P_{m,n}$ cuyos puntos son de la forma

$$(m + \theta)\,\omega + \left(n + \theta'\right)\omega' \ , \ 0 \leq \theta, \theta' < 1 \ .$$

Hemos excluido de este paralelogramo los puntos correspondientes a $\theta = 1$ y $\theta' = 1$, es decir consideramos solamente los puntos interiores, el vértice $m\omega + n\omega'$ y los dos lados que se encuentran en este vértice. Uno de estos conjuntos se llamará paralelogramos de periodos. Los paralelogramos de periodos no poseen puntos comunes y recubren todo el plano. El paralelogramo

$$P_0 \equiv P_{00} = \left\{ \theta\omega + \theta'\omega' \ , \ 0 \leq \theta, \theta' < 1 \right\} \ ,$$

de vértices $0, \omega, \omega + \omega', \omega'$ se llama paralelogramo fundamental.

Diremos que un número complejo z_2 es congruente a otro z_1 , módulo (ω, ω') y lo escribiremos

$$z_2 \equiv z_1 \bmod (\omega, \omega') \ ,$$

si la diferencia $z_2 - z_1$ es de la forma $m\omega + n\omega'$, donde m, n son números enteros.

Si una función meromorfa en un dominio Ω es doblemente periódica y P es uno de sus paralelogramos de periodos, entonces $P \cap \Omega \neq \phi$ y para estudiar la función en Ω , es suficiente limitarse al conjunto $P \cap \Omega$.

4.2 FUNCIONES ELIPTICAS

Especial interés merecen las funciones meromorfas doblemente periódicas en el plano complejo $\mathbb{C}$, que llamaremoss funciones elípticas.

Sea $f(z)$ una función elíptica y sean ω, ω' un par primitivo de periodos, podemos suponer sin pérdida de la generalidad

$$\mathrm{Im}\,\frac{\omega'}{\omega} > 0 \ ,$$

o equivalentemente

$$0 < Arg\frac{\omega'}{\omega} < \pi \ .$$

En primer lugar observamos que no existen funciones elípticas analíticas en todo el plano, es decir, funciones elípticas enteras.

Teorema 4.2.1 *Las únicas funciones elípticas enteras son las funciones constantes.*

Demostración. Una función elíptica entera $f(z)$ es acotada en el paralelogramo fundamental de periodos. Puesto que la función $f(z)$ toma los mismos valores en todos los paralelogramos de periodos que en el paralelogramo fundamental, deducimos que ha de ser acotada en todo el plano pues el conjunto de todos los paralelogramos recubre el plano.

La función ha de ser constante por el Teorema de Liouville. q.e.d.

Si excluimos el caso de las funciones constantes, entonces para una función elíptica meromorfa, el punto infinito es un punto singular esencial por ser punto de acumulación de puntos con el mismo valor pues en todo entorno de infinito existen infinitos paralelogramos de periodos.

La suma, diferencia, producto y cociente de dos funciones elípticas teniendo los mismos periodos, es también una función elíptica. También la derivada $f'(z)$ de una función elíptica $f(z)$ es elíptica y con los mismos periodos que $f(z)$.

Sea $f(z)$ una función elíptica y $\alpha_1\alpha_2, .., \alpha_n$ son todos los polos distintos de $f(z)$ en el paralelogramo fundamental con órdenes de multiplicidad $m_1, m_2, .., m_k$, recordamos que incluimos en el paralelogramo fundamental su interior y los lados $\overline{0\omega}$ y $\overline{0\omega'}$ excluyendo los números ω y ω' , entonces el número

$$m = m_1 + m_2 + ...m_k \ ,$$

se llama orden de la función elíptica. Es evidente que en esta defineción podríamos haber elegido cualquier otro paralelogramo de periodos.

Sea z_0 un punto cualquiera de $\mathbb{C}$ y consideremos el paralelogramo P_{z_0} con vértices $z_0, z_0+\omega, z_0+\omega', z_0+\omega+\omega'$, obtenido a partir del paralelogramo por la translación determinada por z_0 .

Teorema 4.2.2. *Si una función elíptica $f(z)$ es holomorfa sobre el perímetro del paralelogramo P_{z_0} , entonces la integral de $f(z)$ a lo largo de la frontera es cero.*

Demostración. En efecto la integral a lo largo de la frontera del paralelogramo es

$$\begin{aligned}\int_{\partial P_{z_0}} f(z)\,dz &= \int_{z_0}^{z_0+\omega} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0+\omega+\omega'} f(z)\,dz \\ &\quad \int_{z_0+\omega+\omega'}^{z_0+\omega'} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega'}^{z_0} f(z)\,dz \ ,\end{aligned}$$

donde las integrales son tomadas a lo largo de los segmentos uniendo los extremos de integración. La suma de la primera y tercera integral del miembro de la derecha es nula pues

$$\begin{aligned}&\int_{z_0}^{z_0+\omega} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega+\omega'}^{z_0+\omega'} f(z)\,dz \\ = \ &\int_{z_0}^{z_0+\omega} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0} f(z)\,dz = 0 \quad ,\end{aligned}$$

y análogamente la suma de la segunda y cuarta integral

$$\begin{aligned}&\int_{z_0+\omega}^{z_0+\omega+\omega'} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega'}^{z_0} f(z)\,dz \\ = \ &\int_{z_0}^{z_0+\omega'} f(z+\omega)\,dz + \int_{z_0+\omega'}^{z_0} f(z)\,dz \\ = \ &\int_{z_0}^{z_0+\omega'} f(z)\,dz + \int_{z_0+\omega'}^{z_0} f(z)\,dz = 0 \ .\end{aligned}$$

q.e.d.

Como consecuencia del Teorema 4.2.2 obtenemos

Teorema 4.2.3 *Si $f(z)$ es una función elíptica, la suma de los residuos correspondientes a todos sus polos en un paralelogramo P de periodos es cero.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que la función $f(z)$ es holomorfa sobre la frontera del paralelogramo considerado. Entonces la integral de $f(z)$ a lo largo de la frontera es igual a la suma de los residuos, multiplicada por $2\pi i$ y por tanto por el Teorema 4.2.2 dicha suma ha de ser nula.

Si $f(z)$ admite polos en la frontera de P , entonces consideramos un paralelogramo P' , obtenido de P por una traslación T_c , definida por

$$T_c(z) = z + c \ ,$$

donde c es un número complejo de módulo suficientemente pequeño. La función $f(z)$ posee una cantidad finita de polos en P , por tanto eligiendo c suficientemente pequeño, $f(z)$ tendrá el mismo número de polos en P que en P' y será holomorfa en la frontera de P'. Por el caso considerado inicialmente, la suma de los residuos de la función $f(z)$ correspondientes a los polos situados en P' es igual a cero y en consecuencia la suma de los residuos de la función $f(z)$ correspondientes a los polos situados en P es también cero. q.e.d.

Teorema 4.2.4. *El número de ceros de una función elíptica $f(z)$ en un paralelogramo de periodos cualesquiera es igual al número de sus polos en este paralelogramo.*

Demostración. Observamos que si $f(z)$ elíptica, entonces tambien lo es la derivada logarítmica $\frac{f'(z)}{f(z)}$ y posee los mismos periodos. Recordamos que la suma de sus residuos es la diferencia entre el número de ceros y el número de polos de $f(z)$. Entonces el Teorema 4.2.4 es una consecuencia inmediata del Teorema 4.2.3 aplicado a la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$. q.e.d.

Reemplazando $f(z)$ por $f(z) - w_0$ se deduce del Teorema 4.2.4 el siguiente corolario.

Corolario 4.2.1. *Una función elíptica de orden $r > 0$, toma todo valor $w_0 \in \mathbb{C}$, exactamente r veces en el paralelogramo de periodos.*

Teorema 4.2.5. *Sea $f(z)$ una función elíptica de orden $r > 0$ y sean $a_1, a_2, .., a_r$ y $b_1, b_2, .., b_r$, los ceros y los polos respectivamente, en el paralelogramo de periodos P , donde los ceros y los polos son contados tantas veces como indican sus multiplicidades, entonces*

$$(a_1 + a_2 + .. + a_r) - (b_1 + b_2 + .. + b_r) = m\omega + n\omega' \ ,$$

donde $m, n \in \mathbb{Z}$.

Demostración. Supongamos inicialmente que $f(z)$ no posee ni ceros ni polos sobre el borde del paralelogramo de periodos P considerado. Sean $z_0, z_0+\omega, z_0+\omega+\omega', z_0+\omega'$, los vértices de P. En primer lugar comprobamos que la diferencia que aparece en el miembro de la derecha es igual a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz \ .$$

Para ello determinamos los residuos en los polos en el interior de P. Sea b_i uno de estos polos con multiplicidad m_i , entonces en un entorno de b_i la función

$$\frac{f'(z)}{f(z)} \ ,$$

admite una expresión de la forma

$$\frac{-m_i}{z - b_i} + g(z) \ ,$$

donde $g(z)$ es analítica en dicho entorno y podemos escribir

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = ((z-b_i)+b_i)\left(\frac{-m_i}{z-b_i}+g(z)\right) = \frac{-m_ib_i}{z-b_i} - m_i + g(z)\,z\ ,$$

de donde el residuo de

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\ ,$$

en el polo b_i es $-m_ib_i$.

Análogamente el residuo de

$$z\frac{f'(z)}{f(z)}\ ,$$

en uno de los ceros a_j con multiplicidad l_j es de la forma l_ja_j y por tanto concluimos

$$\sum_j l_ja_j - \sum_i m_ib_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial P}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz\ ,$$

es decir la integral es el miembro de la izquierda en el enunciado del teorema. A continuación comprobamos que también coincide con el miembro de la derecha.

En efecto la integral es tomada a lo largo de la frontera ∂P de P es igual a

$$\int_{z_0}^{z_0+\omega}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0+\omega+\omega'}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{z_0+\omega+\omega'}^{z_0+\omega'}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{z_0+\omega'}^{z_0}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz\ . \tag{4.1}$$

La suma de la primera y tercera integral es

$$\begin{aligned} & \int_{z_0}^{z_0+\omega}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0}(z-\omega')\frac{f'(z-\omega')}{f(z-\omega')}dz \\ = & \int_{z_0}^{z_0+\omega}\frac{zf'(z)}{f(z)}dz + \int_{z_0+\omega}^{z_0}(z-\omega')\frac{f'(z)}{f(z)}dz \\ = & \ \omega'\int_{z_0}^{z_0+\omega}\frac{f'(z)}{f(z)}dz\ . \end{aligned}$$

Puesto que por hipótesis la función $f(z)$ es holomorfa y diferente de cero sobre el lado $[z_0, z_0+\omega]$, la integral de la función $\frac{f'(z)}{f(z)}$ a lo largo de este lado es igual a la variación de $\log f(z)$, que por la igualdad $f(z_0) = f(z_0+\omega)$ es igual a $2n\pi i$ donde $n \in \mathbb{Z}$.

Por tanto, la suma de la primera y tercera integral en (4.1) es $2n\pi\omega' i$. También la suma de la segunda y cuarta integral es igual a $2m\pi\omega i$, donde m es un entero.

Luego la diferencia

$$a_1 + a_2 + ... + a_r - (b_1 + b_2 + ... + b_r)\ ,$$

es por tanto igual a $m\omega+n\omega'$, en el caso en que en la frontera del paralelogramo no haya ceros ni polos.

En el caso en que en el paralelogramo haya ceros o polos de $f(z)$ sobre la frontera, entonces procedemos como en la demostración del Teorema 4.2.3. q.e.d.

4.3 LA FUNCION $\mathcal{P}(z)$ DE WEIERSTRASS

En esta sección definimos y estudiamos las propiedades de la función $\mathcal{P}(z)$ de Weierstrass que juega un papel central en la teoría de las funciones elípticas.

Sean ω, ω' un par de números complejos diferentes de cero y tales que $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega'}{\omega}\right) > 0$. Consideremos el conjunto Ω de puntos

$$w = m\omega + n\omega' \ , \ m, n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$$

y ordenemos estos puntos en una sucesión infinita

$$w_0 = 0 \ , \ w_1 \ , \ w_2 \ ,..,w_k \ ,..$$

entonces se define

$$\mathcal{P}(z, \omega, \omega') = \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z - w_k)^2} - \frac{1}{w_k^2} \right) \ . \tag{4.2}$$

La función $\mathcal{P}$ así definida es holomorfa en el plano $\mathbb{C}$ excepto en los puntos w_k , donde tiene polos dobles. En los puntos diferentes de los w_k , la serie (4.2) es absolutamente convergente y por tanto su suma no depende del orden de los términos. Además en todo círculo de radio finito la serie es uniformemente convergente una vez que se suprima una cantidad finita de términos. Podeos por tanto derivar término a término, obteniendo la fórmula

$$\mathcal{P}'(z) = -\frac{2}{z^3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(z - w_k)^3} = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z - w_k)^3} \ . \tag{4.3}$$

Si z no es un periodo entonces la serie (4.3) es absolutamente convergente pues la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|w_k|^3} \ ,$$

converge (Ver Ejercicio 2).

A continuación demostramos que la función $\mathcal{P}'(z)$ admite ω, ω' por periodos.

De la fórmula (4.3) se sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{P}'(z + \omega) &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[z - (w_k - \omega)]^3} \\ &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(z - w_k)^3} = \mathcal{P}'(z) \ , \end{aligned}$$

pues al igual que los w_k , los valores $w_k - \omega$ recorren también todos los valores del conjunto Ω . Por el papel simétrico desempeñado por ω y ω' , tenemos $\mathcal{P}'(z+\omega') = \mathcal{P}'(z)$. Integrando la ecuación $\mathcal{P}'(z+\omega) - \mathcal{P}'(z) = 0$, obtenemos la fórmula

$$\mathcal{P}(z+\omega) - \mathcal{P}(z) = C \ ,$$

donde C es una constante. Para determinar su valor, observemos que $\mathcal{P}(z)$ es una función par de la variable z , en efecto la fórmula (4.2) proporciona

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(-z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z+w_k)^2} - \frac{1}{w_k^2} \right) \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(z-(-w_k))^2} - \frac{1}{(-w_k)^2} \right) \ , \end{aligned}$$

y $-w_k$ toma como w_k todos los valores de tal forma que el miembro de la derecha es $\mathcal{P}(z)$.

Poniendo $z = -\frac{\omega}{2}$ en la ecuación definiendo la constante C , encontramos

$$C = \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \mathcal{P}\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{2}\right) - \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0 \ ,$$

En consecuencia $\mathcal{P}(z+\omega) = \mathcal{P}(z)$ y análogamente $\mathcal{P}(z+\omega') = \mathcal{P}(z)$. Así pues la función $\mathcal{P}(z)$ es doblemente periódica y meromorfa y por tanto elíptica.

Hemos mostrado que los números $w_k = m\omega + n\omega'$ son periodos de la función $\mathcal{P}(z)$, a continuación comprobamos que esta función no admite ningún otro periodo. En efecto, esto se deduce del hecho que $z = 0$ es un polo de $\mathcal{P}(z)$, luego si existieran periodos diferentes de los w_k , la función poseería polos en puntos diferentes de los w_k , lo que no es posible.

Concluimos que ω, ω' forman un par de primitivo de periodos para la función $\mathcal{P}(z, \omega, \omega')$. Puesto que esta función admite un polo doble en cada paralelogramo de periodos , deducimos que es una función elíptica de orden 2 . La derivada es una función elíptica de orden 3 y ω, ω' son también un par primitivo de periodos para $\mathcal{P}'(z)$.

Sabemos que como consecuencia del Teorema 4.2.3, el orden de una función elíptica no constante es por lo menos dos. Las funciones de orden 2 son por tanto las funciones elípticas más sencillas y juegan un papel fundamental en la teoría de las funciones doblemente periódicas. Consideremos la derivada $\mathcal{P}'(z)$, como se ve facilmente de la fórmula (4.3) , es una función impar. Si ω es un periodo, tenemos entonces las ecuaciones

$$\mathcal{P}'\left(-\frac{\omega}{2}\right) = -\mathcal{P}'\left(\frac{\omega}{2}\right) \ , \mathcal{P}'\left(-\frac{\omega}{2}\right) = \mathcal{P}'\left(\frac{\omega}{2}\right) \ . \tag{4.4}$$

La primera es una consecuencia del hecho que $\mathcal{P}'$ es impar y la segunda que $\mathcal{P}'$ es periódica. Por tanto concluimos

$$\mathcal{P}'\left(\frac{\omega}{2}\right) = 0 \ .$$

En nuestro razonamiento hemos supuesto que $\frac{\omega}{2}$ no es un periodo, puesto que en ese caso los dos miembros de la fórmula (4.4) serían infinito. Restringiéndonos al paralelogramo de fundamental, consideremos los puntos de este paralelogramo que son semiperiodos pero no periodos. Hay tres de estos puntos que son

$$\frac{1}{2}\omega \ , \frac{1}{2}\omega' \ , \ \frac{1}{2}(\omega + \omega') \ . \tag{4.5}$$

Por lo dicho anteriormente estos puntos son ceros de $\mathcal{P}'(z)$. Puesto que $\mathcal{P}'(z)$ es una función elíptica de orden 3 , tiene exactamente tres ceros en el paralelogramo fundamental.

De aquí resulta que con la excepción de $z = 0$, los únicos valores multiples tomados por la función $\mathcal{P}(z)$ son aquellos tomados en los puntos (4.5) . El resto de valores tomados por $\mathcal{P}(z)$ en los demás puntos del paralelogramo fundamental son puntos simples.

Pongamos

$$\mathcal{P}\left(\frac{\omega}{2}\right) = e_1 \ , \mathcal{P}\left(\frac{\omega'}{2}\right) = e_2 \ , \mathcal{P}\left(\frac{\omega}{2} + \frac{\omega'}{2}\right) = e_3 \ .$$

La función $\mathcal{P}(z)$ es de orden 2 , por tanto dado un valor $c \in \widehat{\mathbb{C}}$, la ecuación

$$\mathcal{P}(z) - c = 0 \ ,$$

tiene exactamente dos raíces en el paralelogramo fundamental, por tanto $\mathcal{P}(z)$ toma los valores e_1, e_2, e_3 en un solo punto cada uno de ellos pero con multiplicidad 2

Por tanto los números $e_1 e_2, e_3$ son distintos, de lo contrario, la función $\mathcal{P}(z)$ tomaría el mismo valor en el paralelogramo fundamental por lo menos cuatro veces. Si c es distinto de e_1, e_2, e_3 , la ecuación

$$\mathcal{P}(z) - c = 0 \ ,$$

tiene entonces dos raíces simples z_0 y z_1. Para encontrar una relación entre z_0 y z_1 observamos que $\mathcal{P}(z)$ es par y por tanto también $-z_0$ ha de ser una raíz de esta ecuación, luego z_1 ha de ser congruente con $-z_0$ mod(ω, ω') .

4.4 EJERCICIOS

1. Probar que si los términos de una sucesión de números complejos $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ son tales que las distancias entre cualesquiera dos términos w_i , w_j son siempre mayores que una cierta cantidad $\delta > 0$, es decir

$$|w_i - w_j| \geq \delta > 0 \ ,$$

entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w_k^3} < \infty \ .$$

2. Sean ω_1, ω_2 dos números complejos tales que $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ no es un número real. Sean

$$n\omega_1 + m\omega_2 \ , \ n, m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

los elementos del retículo generado por ω_1, ω_2 y supongamos que están ordenados en forma de sucesión

$$w_1, w_2, .., w_k, ...$$

entonces utilizar el Ejercicio 1 para probar

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w_k^3} < \infty \ .$$

3.Demostrar que toda función elíptica no constante es de orden superior o igual a dos.

4. Se define la función $\zeta(z)$ de Weierstrass mediante la serie

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum{}' \frac{z^2}{(z-\omega)\,\omega^2} \ ,$$

donde la suma se extiende sobre un retículo de puntos en el plano y donde $\sum{}'$ significa que se excluye de la suma el punto $\omega = 0$.

Justificar que $\zeta(z)$ representa una función elíptica en el plano complejo $\mathbb{C}$ y que está justificada la derivación término a término, obteniéndose la relación

$$\mathcal{P}(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right) \ .$$

5 PROLONGACION ANALITICA Y SUPERFICIES DE RIEMANN

5.1 INTRODUCCION

En este capítulo abordamos el estudio de la prolongación analítica que en el campo complejo puede conducir al fenómeno de las funciones multiformes que no se presenta en el campo real. Introduciremos el concepto abstracto de superficie de Riemann relacionado con esta cuestión, el concepto de superficie de Riemann ya apareció en el contexto de las funciones elementales, función raiz, función logaritmo, pero desde una perspectiva intuitiva y geométrica.

Sea $f(z)$ una función analítica en una región $A \subset \mathbb{C}$, si podemos encontrar una función $f_1(z)$ definida en un abierto A_1 tal que $A \subset A_1$ y $f_{1|A} \equiv f$, diremos que f_1 es una prolongación analítica de f a A_1 .

En primer lugar presentamos el Principio de Reflexión de Schwarz, un caso particular de prolongación analítica y de gran utilidad en la práctica.

5.2 EL PRINCIPIO DE REFLEXION DE SCHWARZ

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un abierto, designaremos por $A^* \subset \mathbb{C}$ el conjunto simétrico de A respecto del eje real, es decir el conjunto formado por los puntos conjugados de los de A

$$A^* = \{z \in \mathbb{C} \mid \overline{z} \in A\} \ .$$

Diremos que A es simétrico respecto al eje real si $A = A^*$.

Supongamos en lo que sigue que A es también conexo. Si A es simétrico denotaremos por A^+, A^-, A_0 , los subconjuntos de A definidos por

$$\begin{aligned} A^+ &= \{z \in A \mid \operatorname{Im} z > 0\} \\ A_0 &= \{z \in A \mid \operatorname{Im} z = 0\} \\ A^- &= \{z \in A \mid \operatorname{Im} z < 0\} \ . \end{aligned}$$

Designaremos por Π^+, Π^- , los semiplanos superior e inferior del plano complejo $\mathbb{C}$, en lugar de $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{C}^-$.

Teorema 5.2.1 (Principio de reflexión de Schwarz). *Sea A abierto conexo y simétrico y $f(z)$ una función analítica en A^+, continua en $A^+ \cup A_0$ que toma valores reales para todos los $z \in A_0$. Entonces existe una prolongación g de f que es analítica en todo A tal que*

$$g(z) = f(z) \ si \ z \in A^+ \cup A_0 \ ,$$

y

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} si \ z \in A^- \ .$$

Demostración. Si $z_0 \in A^-$, entonces z_0 es un punto interior y sea $U(z_0)$ un entorno de z_0 con $z \neq z_0$. Se tiene

$$\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0} = \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z-z_0} = \overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)} \ .$$

Como $\overline{z}, \overline{z_0}$ pertenecen a A^+ , y por la simetría se tiene $(U(z_0))^* = U(\overline{z_0}) \subset A^+$, resulta que cuando $z \to z_0$ el cociente del paréntesis tiende a $f'(\overline{z_0})$, luego

$$g'(z_0) = \overline{f'(\overline{z_0})} \ ,$$

lo que prueba que la función $g(z)$ es analítica en A^- y además que en puntos conjugados las derivadas son conjugadas.

Para demostrar que $g(z)$ es analítica también en todo $z_0 \in A_0$, no calculamos directamente la derivada, sino que haremos uso del Teorema de Morera. Dado $z_0 \in A_0$, puesto que $z_0 \in A$, existirá un círculo $B(z_0, r) \subset A$, y probaremos que $g(z)$ es analítica en este disco, probando que la integral de $g(z)$ a lo largo de cualquier triángulo contenido en este círculo es nula.

Para los triángulos totalmente contenidos en $A^+ \cap B(z_0, r)$ o en $A^- \cap B(z_0, r)$ las integrales correspondientes se anulan por la analiticidad de $g(z)$ en estos triángulos.

Se supondrá que de los tres vértices α, β, γ del triángulo $\gamma \in A^+$ y $\alpha, \beta \notin A^+$ de tal forma que los lados $\gamma\alpha$ y $\gamma\beta$ cortarán al eje real en los puntos p y q .

$$Fig() \ .$$

Una paralela próxima al eje real corta a los lados a los lados $\gamma\alpha$ y $\gamma\beta$ del triángulo en los puntos p' y q'.

Los puntos z del segmento $[p, q]$ se expresan por medio del parámetro t por la ecuación

$$z = p(1-t) + qt \ , \ 0 \leq t \leq 1 \ ,$$

y los puntos z' del segmento $[p', q']$ se expresan análogamente por

$$z' = p'(1-t) + q't \ , \ 0 \leq t \leq 1 \ ,$$

y para un mismo valor de t se tiene

$$|z - z'| = |p - p'|(1-t) + |q - q'| t \ .$$

Por la continuidad uniforme de $g(z)$ en el triángulo $\widehat{\alpha\beta\gamma}$, considerado como un dominio del plano, para cada $\epsilon > 0$ existirá un $\delta > 0$ tal que si

$$|z - z'| < \delta \ ,$$

entonces

$$|g(z) - g(z')| < \epsilon \ ,$$

de tal forma que si se considera $p'q'$ y se supone $|p-p'|<\delta$, $|q-q'|<\delta$, entonces

$$|g(p(1-t)+qt)-g(p'(1-t)+q't)|<\epsilon ,$$

para todo $t\epsilon[0,1]$.

Utilizando esta acotación se obtiene otra para la diferencia entre las integrales de g a lo largo de los segmentos $[p,q]$ y $[p',q']$

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{[p,q]} gdz-\int_{[p',q']} gdz\right| \\
= &\left|(q-p)\int_0^1 g(p(1-t)+qt)\,dt-(q'-p')\int_0^1 g(p'(1-t)+q't)\,dt\right| \\
\leq &|p-q|\left|\int_0^1 g(p(1-t)+qt)\,dt-\int_0^1 g(p'(1-t)+q't)\,dt\right| \\
&+|(p-q)-(p'-q')|\left|\int_0^1 g(p'(1-t)+q'(t))\,dt\right| \\
\leq &|p-q|\,\epsilon+2\delta M ,
\end{aligned}$$

donde M es una cota superior de $|g(z)|$ para z contenida en el triángulo $\widehat{\alpha\beta\gamma}$.

Por otra parte obtenemos las siguientes acotaciones inmediatas para las integrales de g a lo largo de los segmentos $[p,p']$ y $[q,q']$,

$$\left|\int_{[p,p']} gdt\right|\leq M|p-p'|\leq M\delta ,$$

y

$$\left|\int_{[q,q']} gdt\right|\leq M\delta .$$

De todas estas acotaciones se concluye

$$\left|\int_{\gamma pq\gamma} gdz-\int_{\gamma p'q'\gamma} gdz\right|\leq|p-q|\,\epsilon+4M\delta .$$

Puesto que ϵ y δ pueden ser arbitrariamente pequeños y la integral a lo largo de $\gamma p'q'\gamma$ es nula, por estar este camino contenido en A^+ , donde g es analítica, resulta

$$\int_{\gamma pq\gamma} gdz=0 . \tag{5.1}$$

Por un razonamiento análogo se obtiene

$$\int_{\alpha\beta qp\alpha} gdz=0 , \tag{5.2}$$

y de (5.1) y (5.2) se deduce que la integral a lo largo de $\alpha\beta\gamma\alpha$ debe ser también nula. Esto prueba la analiticidad de g en el círculo $B(z_0,r)$. q.e.d.

El principio de reflexión de Schwarz admite diversas extensiones. Las más útiles y sencillas son las que se refieren a simetrías respecto a rectas distintas del eje real y "simetrías" respecto de circunferencias, que presentamos a continuación.

Es posible también respecto de arcos analíticos pero no trataremos aquí esta cuestión.

Sea L una recta que corta al eje real en el punto z_0. Designemos por β el argumento de $z - z_0$, donde z es un punto arbitrario de L.

La aplicación $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(z) = (z - z_0)\, e^{-i\beta}$$

representa un giro alrededor de z_0 , que lleva L sobre el eje real.

Sea A un conjunto simétrico respecto de L , entonces el conjunto

$$A' = \left\{ z' \;\middle|\; z' = (z - z_0)\, e^{-i\beta} \ , \, z \in A \right\}$$

es simétrico respecto del eje real y designemos por A_1 y A_2 los puntos del conjunto A situados en cada uno de los semiplanos separados por L y por A_0 los puntos situados en L .

Mediante el giro, los puntos de A_0 se transforman en los de A'_0 que está contenido en el eje real y los puntos z, z_s simétricos respecto de L se transforman en puntos conjugados z' y $\overline{z'}$.

Entonces se tiene

Teorema 5.2.2. *Sea A un abierto simétrico respecto de una recta L_1 como ha sido descrito arriba y sea f una función continua en $A_0 \cup A_1$ y analítica en A_1 , que además toma valores sobre una recta L_2 para todos los $z \in A_0$. Entonces existe una prolongación analítica $g(z)$ de $f(z)$ en todo A que queda definida por*

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z)\, si\ z \in A_0 \cup A_1 \ , \\ g(z_{s_1}) &= f(z)_{s_2}\, si\ z_{s_1} \in A_2 \ , \end{aligned}$$

donde los subíndices s_1, s_2 representan los simétricos respecto de las rectas L_1, L_2 .

Demostración. Llamando φ_1, φ_2 , a las funciones de giro correspondientes a las rectas L_1 y L_2 se tiene que la función

$$F = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} : (A'_0 \cup A'_1) \to \mathbb{C} \ ,$$

transforma A'_0 en el eje real, siendo analítica en A'_1 y continua en A'_0 . Podemos, por tanto, aplicar el Principio de Reflexión de Schwarz, obteniendo una función G analítica en $A'_0 \cup A'_1 \cup A'_2$ que es una extensión de F a todo A'.

La función $g = \varphi_2^{-1} \circ G \circ \varphi_1$ coincide con f en $A_1 \cup A_0$ y es prolongación analítica de f a todo A. q.e.d.

Teorema 5.2.3. *Sea la función $f(z)$ analítica en el círculo unidad y sea real y continua a lo largo de un arco de la circunferencia unidad. Entonces la función $g(z)$ que coincide con $f(z)$ en su campo de definición y está definida por*

$$g(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

para z exterior al círculo unidad, es una prolongación analítica de $f(z)$.

Demostración. La función

$$z' = \varphi(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

transforma conformemente el círculo unitario en el semiplano superior, los puntos z y $\frac{1}{\overline{z}}$ en números complejos conjugados, entonces el Teorema 5.2.3 se sigue del Teorema 5.2.2. q.e.d.

5.3 PROLONGACION ANALITICA DIRECTA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

El Principio de Reflexion de Schwarz es un ejemplo en el que el dominio de definición de una función analítica queda ampliado. A continuación presentamos la situación de una serie de potencias en que su dominio de convergencia, es decir el dominio de definición de la función analítica definida por la suma, queda ampliado considerando desarrollos centrados en puntos distintos del inicial, de tal forma que los nuevos círculos de convergencia no están estrictamente incluidos en el círculo de la serie inicial.

Sea $f(z)$ la función analítica definida por una serie de potencias de $z-a$, con radio de convergencia $r_a > 0$, es decir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ , \ z \in B(a, r_a) \ ,$$

puesto que la función $f(z)$ es analítica en el círculo de centro b y radio $r_a - |b-a|$, admite un desarrollo en serie de potencias de $z-b$, con radio de convergencia r_b que ha de ser mayor o igual que $r_a - |b-a|$.

Definición 5.3.1 *Si el radio de convergencia r_b es estrictamente mayor que $r_a - |b-a|$ entonces la función $g(z)$ definida en $B(a, r_a) \cup B(b, r_b)$ mediante*

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n & \text{si} \quad z \in B(a, r_a) \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n & si \quad z \in B(b, r_b) \ , \end{cases}$$

se dice que es prolongación analítica directa de la función $f(z)$ definida por la primera serie de potencias.

Definición 5.3.2 *Sea la función definida por* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *analítica en el círculo de convergencia* $B(a, r_a)$ *. Sea* c *un punto interior de la circunferencia* $C(a, r_a)$ *, se dice que* c *es singular para la función* $f(z)$*, si para cualquier punto* b *del radio* (a, c)*, el radio de convergencia de* $f(z)$ *como serie de potencias de* $z-b$*, es decir* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$*, es precisamente* $r_b = r_a - |b-a|$.

Esta definición significa que no podemos obtener una prolongación analítica de $f(z)$ desarrollando $f(z)$ como serie de potencias de $z - b$.

También se dice que la función f no es prolongable a lo largo del radio que pasa por c.

Teorema 5.3.1. *En la frontera* $C(a, R)$ *del círculo de convergencia* $B(a, R)$ *de una serie de potencias*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \ ,$$

existe por lo menos un punto singular.

Demostración. Supongamos que no exista punto singular en $C(a, R)$ entonces probamos que el radio de convergencia ha de ser mayor que R. En efecto sea $c \in C(a, R)$, si c no es un punto singular existirá b en el segmento (a, c) tal que $B(b, r_b)$ contendrá al punto c y por tanto existirá un círculo $B(c, r_c)$ donde la función f se prolonga analíticamente.

Por tanto, para cada $z \in C(a, R)$ se le puede asociar el correspondiente círculo abierto $B(z, r_z)$ donde la función queda prolongada analíticamente. Consideremos el recubrimiento abierto de la circunferencia, que es un conjunto compacto, consistente en la familia $\left\{B\left(z, \frac{r_z}{2}\right)\right\}_{z \in C(a,R)}$, de tal manera que podemos encontrar una familia finita de puntos $z_i \in C(a, R)$ tal que

$$C(a, R) \subset \bigcup_{i=1}^{m} B\left(z_i, \frac{r_{z_i}}{2}\right) \ .$$

Sea

$$\rho = \min_{i=1,..,m} \left\{ \frac{r_{z_1}}{2}, .., \frac{r_{z_m}}{2} \right\} \ ,$$

entonces comprobamos que la corona circular

$$B(a, R+\rho) \backslash B(a, R) \ ,$$

está contenida en

$$\bigcup_{i=1}^{m} B(z_i, r_{z_i}) \ .$$

Sea z^* un punto de la corona, por lo que su distancia a la circunferencia $C(a, r_a)$ será menor que ρ. Por tanto existirá en esta circunferencia un punto z' tal que

$$|z^* - z'| < \rho \ .$$

Sea $B\left(z_k, \frac{r_k}{2}\right)$, el círculo al que pertenece z' , y se tiene

$$|z^* - z_k| \leq |z^* - z'| + |z' - z_k| < \rho + \frac{r_{z_k}}{2} < r_{z_k} \ ,$$

luego

$$z^* \in B(z_k, r_{z_k}) \ .$$

La función $f(z)$ es analítica en $B(a, R + \rho)$ luego su desarrollo en serie de potencias de $z - a$ tiene un radio de convergencia mayor que R, en contradicción con nuestra hipótesis. q.e.d.

Definición 5.3.2. *Se dice que la circunferencia del círculo de convergencia de la serie* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *es la frontera natural de* f *si todos sus puntos son singulares.*

5.4 PROLONGACION ANALITICA DE UNA FUNCION A LO LARGO DE UN CAMINO

En esta sección presentamos la noción de prolongación analítica a lo largo de caminos.

Definición 5.4.1 *Un elemento de función es un par* $\{f, A\}$ *donde* A *es un abierto conexo del plano complejo y* f *es una función analítica en* A.

Definición 5.4.2. *Sea* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *un camino. Una prolongación analítica a lo largo de* γ *es una familia de elementos de función* $\{f_t, A_t\}$, $t \in [0,1]$, *tal que satisface las siguientes condiciones*

i) $\gamma(t) \in A_t$, para $t \in [0,1]$,

ii) *Para cada* $t \in [0,1]$, *existe* $\delta > 0$ *tal que si* $|t - s| < \delta$, *entonces* $\gamma(s) \in A_t$ y *existe un entorno*

$$U(\gamma(s)) \subset A_t \cap A_s \ ,$$

donde

$$f_t(z) = f_s(z) \ , \text{ para todo } z \in U(\gamma(s)) \ .$$

Finalmente damos también la siguiente definición.

Definición 5.4.3. *Sea* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ *un camino, se dice que* $\{f_1, A_1\}$ *es prolongación analítica del elemento* $\{f_0, A_0\}$ *a lo largo de* γ , *si existe una* *prolongación analítica a lo largo de γ , en la que dichos elementos corresponden a los valores $t = 0$ y $t = 1$ del parámetro.*

A continuación presentamos la siguiente proposición, previa al Teorema general de Monodromía.

Proposición 5.4.1. (Teorema de Monodromía local).
Si $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ es un camino con extremos $\gamma(0) = \alpha$, $\gamma(1) = \beta$ y $\{f_t, A_t\}$, $t \in [0, 1]$, es una prolongación analítica a lo largo de γ , entonces existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo camino $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{C}$, con los mismos extremos $\alpha = \lambda(0)$, $\beta = \lambda(1)$ que verifique

$$|\gamma(t) - \lambda(t)| < \epsilon \text{ , } \textit{para todo } t \in [0, 1] \text{ ,}$$

y cualquiera que sea la prolongación analítica $\{g_t, B_t\}$, $t \in [0, 1]$, a lo largo de λ , tal que $f_0(z) = g_0(z)$ en un entorno de α , entonces también

$$f_1(z) = g_1(z) \text{ ,}$$

en un entorno de β.

Demostración. Podemos suponer, sin pérdida de la generalidad, que los abiertos A_t son círculos con centro $\gamma(t)$ y radio $r(t)$. Podemos también suponer que $r(t)$ es continua en $[0, 1]$, de tal forma que tiene un mínimo no nulo, sea pues

$$0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{r(t), 0 \leq t \leq 1\} .$$

Consideremos entonces un camino $\lambda : [0, 1] \to \mathbb{C}$ que verifique la condición

$$|\gamma(t) - \lambda(t)| < \epsilon \quad \text{para todo } t \in [0, 1] \text{ .}$$

Se comprueba que la prolongación analítica
$\{f_t, A_t\}$, $t \in [0, 1]$, a lo largo de γ , también lo es a lo largo de λ.

En efecto, por ser $\{f_t, A_t\}$, $t \in [0, 1]$ una prolongación analítica a lo largo de γ , para cada $t \in [0, 1]$, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo s con $|t - s| < \delta_1$ se tiene $\gamma(s) \in A_t$ y

$$f_t(z) = f_s(z) \quad \text{para todo } z \in A_t \cap A_s \text{ .}$$

Por otra parte, por la continuidad de λ se puede encontrar δ , $0 < \delta < \delta_1$, tal que para todo s con $|t - s| < \delta$, se tiene

$$|\lambda(t) - \lambda(s)| < \epsilon \text{ ,}$$

y por tanto

$$|\gamma(t) - \lambda(s)| < 2\epsilon \text{ luego } \lambda(s) \in A_t \text{ ,}$$

para todo s con $|t - s| < \delta$.

Puesto que f_t, f_s son iguales en $A_t \cap A_s$, concluimos que $\{f_t, A_t\}$, $t \in [0,1]$ también es prolongación analítica a lo largo de λ.

Finalmente se deja al lector comprobar que dadas dos prolongaciones analíticas $\{f_t, A_t\}$, $\{g_t, B_t\}$, $t \in [0,1]$, a lo largo de un mismo camino λ tales que $f_0(z) = g_0(z)$, entonces también

$$f_1(z) = g_1(z) \ ,$$

en un entorno de β. q.e.d.

Finalmente enunciamos y demostramos el teorema central de la prolongación analítica a lo largo de caminos.

Teorema 5.4.2. (Teorema de Monodromía). *Sean A_0 y A dos abiertos conexos de* $\mathbb{C}$, con *y sea $\{f_0, A_0\}$ un elemento de función que admite prolongación analítica sin restricción en A . Sean γ_0, γ_1 dos caminos en A . tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) \in A_0$ y $\beta = \gamma_0(1) = \gamma_1(1) \in A$, y sean $\{f_t, A_t\}, \{g_t, B_t\}$ dos prolongaciones analíticas a lo largo de los caminos γ_0, γ_1 respectivamente, cuyo primer elemento de función es $\{f_0, A_0\}$ en ambas. Entonces si γ_0 y γ_1 son A-homótopas se tiene que*

$$f_1(z) \equiv g_1(z) \ ,$$

en un entorno U de β .

Demostración. Sea

$$h : [0,1] \times [0,1] \to A$$

la aplicación que define la homotopía entre γ_0 y γ_1 de tal forma que se tiene

$$\begin{aligned} h(0,t) &= \gamma_0(t) \text{ y } h(1,t) = \gamma_1(t) \quad \text{para todo } t \in [0,1] \\ h(u,0) &= \alpha \text{ y } h(u,1) = \beta \text{ para todo } u \in [0,1] \ . \end{aligned}$$

Al fijar u en $h(u,t)$ se obtiene un camino γ_u contenido en A con extremos α y β , de tal manera que a lo largo de γ_u existe una prolongación analítica $\{f_{ut}, A_{ut}\}$, $t \in [0,1]$ que verifica

$$\begin{aligned} \{f_t, A_t\} &= \{f_{0t}, A_{0t}\}, t \in [0,1] \ , \text{ y} \\ \{g_t, B_t\} &= \{f_{1t}, A_{1t}\}, t \in [0,1] \ , \end{aligned}$$

En general se tiene

$$f_{u0}(z) = f_0(z) \text{ para todo } z \text{ en un entorno de } \alpha \text{ , para todo } u \in [0,1] \ ,$$

y se trata de probar que

$$g_1(z) = f_{u1}(z) = f_1(z) \text{ para todo } z \text{ en un entorno de } \beta \text{ , para todo } u \in [0,1] \ ,$$

pues en particular tendríamos

$$g_1(z) = f_{11}(z) = f_1(z) \text{ , para todo } z \text{ en un entorno de } \beta \text{ ,}$$

que es lo que afirma el teorema.

Se considera el conjunto

$$U = \{u \in [0,1] \mid f_{u1}(z) = f_1(z) \text{ en un entorno de } \beta\} \text{ ,}$$

por hipótesis $U \neq \varnothing$ pues $u = 0$ pertenece a U. El teorema quedará demostrado si probamos que U es abierto y cerrado a la vez, pues por conexión del intervalo se tendrá $U = [0,1]$.

Por el Teorema de Monodromía local, dado un valor fijo de $u \in U$ existirá $\epsilon > 0$ tal que si $|u - v| < \epsilon$, entonces

$$f_{u1}(z) = f_{v1}(z) \text{ , para todo } z \text{ en un entorno de } \beta \text{ ,}$$

En efecto, observemos que por la continuidad de la función que define la homotopía $h(u,t)$ en el cuadrado cerrado $[0,1] \times [0,1]$, será también uniformemente continua, luego dado ϵ_0 , existirá $\epsilon > 0$ tal que si
$|u - v| < \epsilon$, $|t - t'| < \epsilon$, entonces

$$|h(u,t) - h(v,t')| < \epsilon_0 \text{ ,}$$

y en particular haciendo $t = t'$ si $|u - v| < \epsilon$ se tiene

$$|h(u,t) - h(v,t')| = |\gamma_u(t) - \gamma_v(t)| < \epsilon_0 \text{ para todo } t \in [0,1] \text{ ,}$$

y como

$$f_{u0}(z) = f_{v0}(z) \text{ , para todo } z \text{ en un entorno de } \alpha \text{ ,}$$

del Teorema de Monodromía local se concluye que podemos elegir ϵ_0

$$f_{u1}(z) = f_{v1}(z) \text{ , para todo } z \text{ en un entorno de } \beta \text{ .}$$

Sea pues $u \in U$, por lo dicho anteriormente todo $v \in (u - \epsilon, u + \epsilon)$ verifica también $v \in U$, es decir $(u - \epsilon, u + \epsilon) \subset U$, es decir todo punto $u \in U$ es un punto interior a U , luego U ha de ser abierto . Por otra parte, supongamos que u es un punto de acumulación de U , otra vez por el Teorema de Monodromía local existe $\epsilon > 0$ tal que para $v \in (u - \epsilon, u + \epsilon)$ se tiene

$$f_{u1}(z) = f_{v1}(z) \text{ , para todo } z \text{ en un entorno de } \beta \text{ ,}$$

y por ser u punto de acumulación de U , en $(u - \epsilon, u + \epsilon)$ habrá valores $v \in U$, y para ellos se verificará

$$f_{v1}(z) = f_1(z) \text{ en un entorno de } \beta \text{ ,}$$

luego concluimos que también

$$f_{u1}(z) = f_1(z) \text{ en un entorno de } \beta \text{ ,}$$

es decir $u \in U$ y por tanto U ha de ser también un conjunto cerrado. q.e.d.

El hecho que $\{f_0, A_0\}$ admite prolongación analítica sin restricción en A quiere decir que para todo camino γ en A , *con* $\gamma(0) \in A_0$, existe una prolongación analítica a lo largo de γ , cuyo primer elemento es $\{f_0, A_0\}$.

Un caso relevante donde el Teorema de Monodromía encuentra aplicación es cuando el dominio A es simplemente conexo, es decir cuando dos caminos cualesquiera $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to A$ con los mismos extremos, es decir $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, es decir $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, son siempre A-homótopos. En este caso un elemento de función proporciona una función analítica global $f(z)$ en A en el sentido ordinario mediante prolongación analítica.

5.5 SUPERFICIES DE RIEMANN

5.5.1 SUPERFICIES DE RIEMANN DE LAS FUNCIONES ELEMENTALES

En el primer curso de funciones de variable compleja se consideran algunas funciones elementales multiformes, por ejemplo

$$w = \sqrt{z} \ , \ w = \sqrt[n]{z} \ , \ w = \ln z \ ,$$

que son funciones tales que para un valor determinado de z podemos obtener diferentes valores de la función w , entonces se introduce la noción de superfcie de Riemann asociada a una función multiforme como un dominio no necesariamente contenido en el plano complejo donde la función se puede estudiar como una función uniforme.

A continuación recordamos estas construcciones para estos ejemplos particulares y posteriormente introduciremos el concepto de superficie de Riemann abstracta como una variedad analítica, es decir como una superficie con una estructura analítica.

La superficie de Riemann de la función $w = \sqrt{z}$ consta de dos copias del plano complejo $\mathbb{C}$, donde se ha efectuado un corte a lo largo del semieje real positivo.

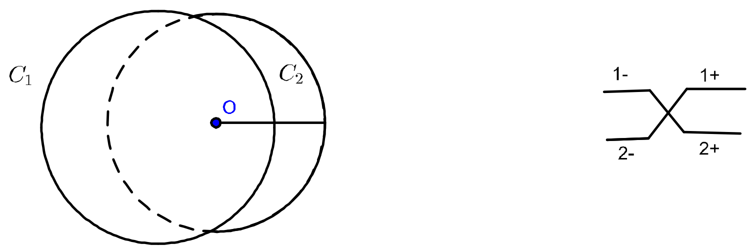

Figura 2. Superficie de Riemann de $\sqrt{z}$

Sean $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2$ dichas copias, entonces pegamos el borde superior del corte en $\mathbb{C}_1$ con el borde inferior del corte en $\mathbb{C}_2$ y a continuación pegamos también los otros dos bordes libres, es decir, el borde inferior de $\mathbb{C}_1$ con el borde superior de $\mathbb{C}_2$.

En $\mathbb{C}_1$ menos el corte efectuado podemos definir de forma uniforme una de las ramas $w_1 = f_1(z)$ de la raiz $\sqrt{z}$ mientras que en $\mathbb{C}_2$ menos el corte correspondiente definimos la otra rama $w_2 = f_2(z)$. Supongamos que $f_1(1) = 1$ y $f_2(1) = -1$. Es claro que $w_1 = f_1(z) = -f_2(z) = -w_2$.

Con las identificaciones indicadas arriba la función $w = f(z) = \sqrt{z}$ queda también bien definida en las semirrectas que se obtienen sobre el eje real positivo. Queda por tanto bien definida como función uniforme la función

$$w = f(z) = \sqrt{z} \ ,$$

considerada como una función

$$f : X \to \mathbb{C} \ ,$$

siendo

$$X = \mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2 / \sim \ ,$$

donde $\sim$ denota la relación de identificación de los puntos en los cortes como ha sido descrito arriba.

La superficie de Riemann de la función analítica

$$w = f(z) = \sqrt[n]{z} \ ,$$

presenta una estructura análoga. Tiene n hojas de tal forma que para cada $z \neq 0$, en cada punto de cada hoja que se proyecta sobre z está definido uno de los valores de $\sqrt[n]{z}$.

Como en el caso $n = 2$, las hojas sucesivas se conectan a lo largo del eje real positivo de tal forma que el borde superior de la $(k-1)-$hoja se identifica con el borde inferior de la $k-$hoja y el borde superior de la $n-$hoja se identifica con el borde inferior de la primera hoja. Se obtiene de esta forma una estructura

$$X = \mathbb{C}_1 \cup \mathbb{C}_2 \cup ... \cup \mathbb{C}_n \ / \sim \ ,$$

donde $\sim$ otra vez es la relación de equivalencia determinada por las identificaciones anteriores. Los puntos $0, \infty$ se llaman puntos de ramificación de X que es la superficie de Riemann de la función $w = \sqrt[n]{z}$.

La superficie de Riemann de la función logaritmo $w = \ln z$ puede construirse de una forma análoga de tal forma que se obtiene una superficie de infinitas hojas y $0, \infty$ son puntos de ramificación que diremos tienen orden infinito.

Ahora introduciremos el concepto de superficie de Riemann de una función analítica de una forma general, a partir del concepto de superficie de Riemann abstracta.

5.5.2 ESTRUCTURAS ANALITICAS. SUPERFICIE DE RIEMANN ABSTRACTA

Inicialmente consideraremos un espacio topológico separado X , no necesariamente conexo.

Supongamos que todo punto p de X tiene un entorno $U(p)$ conexo que es homeomorfo a un círculo $B(\alpha, r)$ del plano complejo $\mathbb{C}$, que se identifica de forma natural con $\mathbb{R}^2$. En este caso la aplicación homeomorfa

$$\begin{array}{cccccc} \varphi & : & U(p) & \rightarrow & B(\alpha, r) \\ & & p & \rightarrow & (\varphi_1(p), \varphi_2(p)) \end{array}$$

se llama coordenada local o se dice que define coordenadas locales o parámetros

locales en p.

En general las coordenadas locales en un punto no son únicas. Supongamos que

$$\begin{array}{cccccc} \psi & : & U(p) & \rightarrow & B(\beta, r_\beta) \\ & & p & \rightarrow & (\psi_1(p), \psi_2(p)) \end{array}$$

define unas nuevas coordenadas locales en p entonces la aplicación

$$\begin{array}{cccc} \varphi \circ \psi^{-1} & : & B(\beta, r_\beta) & \rightarrow & B(\alpha, r_\alpha) \\ & & (\psi_1(p), \psi_2(p)) & \rightarrow & (\varphi_1(p), \varphi_2(p)) \end{array}$$

es tambié un homeomorfismo.

Consideremos en el espacio X una familia $\mathcal{A}$ de pares $\{U(p), \varphi\}_{p \in X}$, donde $U(p)$ es un entorno del espacio X y φ es una aplicación definiendo coordenadas locales en $U(p)$. Si las aplicaciones $\varphi \circ \psi^{-1}$ descritas anteriormente definiendo los cambios de coordenadas son aplicaciones analíticas entonces diremos que $\mathcal{A}$

define una estructura analítica en X , o bien que el par $(X, \mathcal{A})$ es un espacio analítico.

En el caso en que X es un espacio topológico separado y conexo y $\mathcal{A}$ es una estructura analítica en X , entonces el par $(X, \mathcal{A})$ se llama superficie analítica o superficie abstracta de Riemann.

5.5.3 CONCEPTO DE FUNCION ANALITICA COMPLETA

Haciendo uso del concepto de prolongación analítica a lo largo de caminos, introducido en la sección precedente, presentamos ahora el concepto de función analítica completa que no se corresponde con el concepto habitual de función en el plano complejo $\mathbb{C}$ pues este nuevo concepto admite la posibilidad de la multivalencia, es decir, para un mismo valor z podemos tener diferentes valores de la función, dígamos $f_i(z)$, $i \in I$.

Definición 5.7.1. *Una función analítica completa es un conjunto $\mathcal{F}$ de elementos de función que se obtienen a partir de un elemento de función fijo inicial (f, A) mediante prolongación analítica a lo largo de todos los caminos posibles partiendo de un punto $a \in A$.*

Observamos que la función así definida puede obtenerse igualmente a partir de cualquier otro elemento de la misma función. Se sigue de esta observación que dos funciones analíticas completas $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1$ que poseen un elemento de función común son la misma función.

Definición 5.7.2. *Se dice que dos elementos de función $(f, A), (g, B)$, cuyos dominios de definición A, B contienen un punto común a , son equivalentes en a si existe un entorno de a donde $f \equiv g$. El conjunto de todos los elementos equivalentes en $a \in A$ de un elemento de función (f, A) se llama germen de f en a.*

Dos elementos de un mismo germen dan lugar a una misma función analítica.

Los gérmenes de funciones se pueden sumar, restar, multiplicar, dividir y también derivar de una forma natural. Estas operaciones entre gérmenes dan lugar a las correspondientes operaciones entre funciones analíticas completas.

5.5.4 SUPERFICIE DE RIEMANN DE UNA FUNCION ANALITICA

En esta sección consideraremos las funciones analíticas completas como subconjuntos de un espacio más amplio, que denotaremos por $\mathcal{R}$, donde definiremos una estructura analítica y cuyas componentes conexas serán las superficies de Riemann asociadas a las funciones analíticas completas.

Definimos este espacio $\mathcal{R}$ como el conjunto de todos los pares $(a, f_a(z))$ donde a es un punto arbitrario del plano complejo ampliado $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ó equivalentemente la esfera de Riemann $\mathbb{S}$ y $f_a(z)$ es una función holomorfa en un círculo $B(a, r_a)$ centrado en a, en el caso en que $a \in \mathbb{C}$, y en el caso $a = \infty$ la función $f_a(z)$ será holomorfa en el conjunto $\underline{B^c \cup \{\infty\}}$ donde B^c es el exterior a un círculo $B = B(0, r)$, es decir , $B_r^c = \widehat{\mathbb{C}} \backslash \overline{B(0, r)}$.

A continuación dotamos a $\mathcal{R}$ de una topología definiendo una base de entornos $U(A)$ de cada punto $A = (a, f_a(z)) \in \mathcal{R}$. Denotaremos por $U(A)$ a un subconjunto de $\mathcal{R}$

$$U(A) = \{(b, f_b(z))\} \ ,$$

tal que para cualquier punto $(b, f_b(z))$ se cumplen las siguientes dos condiciones:

1) b pertenece a un círculo centrado en a, dígamos $B(a, \epsilon) = \{z \,||z - a| < \epsilon\}$, si $a \in \mathbb{C}$, y a un conjunto $B^c \cup \{\infty\}$ donde B^c es el exterior a un círculo centrado en el origen, dígamos $B^c = \left\{z \,\middle||z| > \frac{1}{\epsilon}\right\}$, en el caso $a = \infty$.

2) $f_b(z)$ determina un elemento de función $(B(b, r_b), f_b(z))$ que es prolongación analítica directa del elemento $(B(a, \epsilon), f_a(z))$.

Es decir cada b correspondiente a un punto de $U(A)$ pertenece a un círculo contenido en el dominio de definición de $f_a(z)$ y ambas funciones $f_b(z)$ y $f_a(z)$ coinciden en la intersección de este círculo con el círculo de definición de $f_b(z)$.

Podemos imaginarnos $\mathcal{R}$ como un recubridor del plano complejo $\mathbb{C}$. El dato $f_a(z)$ en un punto $A = (a, f_a(z))$ indica la hoja del recubridor $\mathcal{R}$ donde se encuentra el punto A sobre el punto $a \in \mathbb{C}$.

Observamos que $\mathcal{R}$ como espacio topológico no es un espacio conexo en general.

Existe una proyección natural de $\mathcal{R}$ sobre $\mathbb{C}$ definida por

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & \mathcal{R} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ & & A = (a, f_a(z)) & \rightarrow & a \end{array}$$

que no es globalmente biyectiva pero sí lo es localmente.

En el espacio $\mathcal{R}$ se puede definir una estructura analítica compleja de forma natural.

En efecto, la proyección π transforma un entorno $U(A)$ de la base arriba definida en un círculo del plano, o bien en el exterior de un círculo, en ambos casos, mediante una transformación fraccionaria lineal o de Möbius, cualquiera de estos conjuntos puede ser transformado en el círculo unidad
$B(0, 1) = \{\zeta \,||\zeta| < 1\}$.

Sea por tanto

$$\varphi_U : U(A) \rightarrow B(0, 1) \ ,$$

el homeomorfismo resultante de componer la proyección con dicha transformación fraccionaria lineal. Entonces todo punto $B = (b, f_b(z)) \in U(A)$ queda unívocamente determinado por su proyección b y por tanto también por el punto $\zeta = \varphi_U(B)$ del círculo unidad, de tal manera que ζ puede sr tomado como coordenada o parámetro local en un entorno de A.

Dados dos entornos U, V contenidos en $\mathcal{R}$ tales que $U \cap V \neq \varnothing$, la aplicación

$$\varphi_{UV} : \varphi_U (U \cap V) \to \varphi_V (U \cap V) \ ,$$

definida por

$$\varphi_{UV} (\zeta) = \varphi_V \circ \varphi_U^{-1} (\zeta) ,$$

relacionando las coordenadas locales ζ, ζ'correspondientes a las diferentes aplicaciones φ_U, φ_V son claramente holomorfas.

Es decir mediante este sistema de coordenadas locales $\{\varphi_U\}$, el conjunto $\mathcal{R}$ se convierte en un espacio analítico. Como hemos observado anteriormente $\mathcal{R}$ no es un espacio conexo. Por otra parte, es fácil ver que una función analítica completa se puede identificar de forma natural con un subconjunto de $\mathcal{R}$ que resulta ser un conjunto conexo por arcos. En efecto, dados dos puntos $A = (a, f_a (z))$, $B = (b, f_b (z))$ que provienen de dos elementos $(U_a, f_a (z))$,$(U_b, f_b (z))$, $a \in U_a$, $b \in U_b$, de una misma función analítica completa $\mathcal{F}$, entonces por definición estos dos elementos de función se pueden obtener uno a partir del otro por prolongación analítica a lo largo de un camino $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ y a partir de esta prolongación analítica podemos construir un camino en $\mathcal{R}$ que será de la forma $(a_t, f_{a_t} (z))$ donde $a_t = \gamma (t)$, $f_{a_t} (z)$ holomorfa en un círculo centrado en a_t , y tal que $(a_0, f_{a_0} (z)) = (a, f_a (z))$ y $(a_1, f_{a_1} (z)) = (b, f_b (z))$, es decir este camino une en $\mathcal{R}$ los puntos A y B. Inversamente, se comprueba de forma análoga que dado un subconjunto abierto y conexo de $\mathcal{R}$, este subconjunto proviene de una función analítica completa $\mathcal{F}$. Es decir hemos establecido el siguiente teorema,

Teorema 5.8.1. *Las funciones analíticas completas y los dominios del espacio $\mathcal{R}$, es decir los subconjuntos abiertos y conexos del espacio $\mathcal{R}$, están en correspondencia biunívoca.*

Finalmente hacemos la siguiente definición.

Definición 5.8.1. *Un dominio $\mathcal{R}_0$ de $\mathcal{R}$ correspondiente a la función analítica $\mathcal{F}$ completa, considerada como variedad analítica o superficie de Riemann abstracta, se llama superficie de Riemann de la función $\mathcal{F}$.*

Podemos considerar una función analítica completa $\mathcal{F}$ como una función uniforme F sobre la superficie de Riemann correspondiente $\mathcal{R}_0$,

$$\begin{array}{ccccc} F & : & \mathcal{R}_0 & \to & \widehat{\mathbb{C}} \\ & & (a, f_a (z)) & \to & f_a (z) \ . \end{array}$$

5.6 EJERCICIOS

1. Demostrar que una función analítica f en

$$A = \left\{ z \in A \;\middle|\; |z - i| > \frac{1}{2} \right\} \ ,$$

que es acotada en A y real en

$$\{z = x + iy \mid -1 < x < 1 \ , \ y = 0\} \ ,$$

ha de ser una constante.

2. Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - z^{n+1}} - \frac{1}{1 - z^n} \right) \ ,$$

converge en los dominios

$$D_1 = \{z \mid |z| < 1\} \ , \ D_2 = \{z \mid |z| > 1\} \ ,$$

y representa funciones analíticas en D_1 y D_2 , pero que ambas funciones no pueden ser prolongación analítica una de otra.

3. Probar que la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n} \ ,$$

puede ser prolongada analíticamente a un dominio mayor que su círculo de convergencia por la serie

$$\log 2 - \frac{1 - z}{2} - \frac{(1 - z)^2}{2.2^2} - \frac{(1 - z)^3}{3.2^3} - ...$$

4. Se pide:

i) Justificar que la integral

$$f(z) = \int_0^{\infty} \left(e^{-t} + t - 1\right) e^{-zt} dt \ ,$$

converge para $\operatorname{Re} z > 0$.

References

[1] L.V.Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill Book Co. **1966.**

[2] J.B. Conway. *Functions of one complex variable.* Springer Verlag, Graduate Texts. **1973**.

[3] B.Chabat. *Introduction à l'analyse complexe.* **Tomes I,II.** Editions Mir Moscou. **1990.**

[4] A.I. Markushevich. *Theory of Functions of a Complex Variable.* **Volumes I,II,III.** Chelsea Publishing Co. New York, **1977.**

[5] R. Remmert. *Classical Topics in Complex Function Theory.* Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag. **1998.**

[6] W.Rudin. *Real and Complex Analysis. McGraw-Hill Book Co.* ***1987***

[7] D.C. Ullrich. *Complex made simple.* American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics. **Volume 97. 2008.**

[8] A.Zygmund et S.Saks. *Fonctions Analytiques.* Masson et Cie. **1970**.

LIBROS DE PROBLEMAS

References

[1] K.Knopp. *Problem Book. Volumes I,II. Dover Publications Inc. 1975.*

[2] L.I.Volkoviyskii, G.L.Lunts and I.G. Aramanovich. *A collection of problems in complex analysis. Dover Publications Inc. 1965.*