Sobre la tercera ley de Kepler

Resumen

Kepler descubrió empíricamente que existe una relación entre la longitud del semieje mayor de la órbita de un planeta, a y el periodo orbital P. Explícitamente:

$$\frac{a^3}{P^2} = k$$

donde k es una constante. Además, comprobó que para los satélites de Júpiter el cociente anterior también era constante. Sin embargo, la constante era distinta, y Kepler no pudo explicar este hecho. La ley de la gravitación de Newton sí permite dar una explicación de las leyes de Kepler.

Aquí tan sólo se pretende aclarar algunas posibles dudas que pueden surgir sobre la tercera ley de Kepler y la constante que aparece en la fórmula.

Consideramos sólo dos cuerpos de masas m_1 y m_2 y denotamos por $\mathcal{G}$ la constante de la gravitación obtenemos que

$$\mathcal{G}(m_1 + m_2) = 4\pi^2 \frac{a^3}{P^2}$$

Designemos $\mathcal{G}(m_1 + m_2)$ por μ. Podemos escribir entonces:

$$\mu = 4\pi^2 \frac{a^3}{P^2}$$

Supongamos que m_2 es la masa de un cuerpo que orbita alrededor de otro de masa m_1, siendo m_2 despreciable respecto de $m_1 = M$. Entonces tenemos que para ese sistema orbital $\mu = \mathcal{G}M$.

La anterior fórmula permite calcular la masa del cuerpo central conociendo el semieje y el periodo de un cuerpo que orbite alrededor de él.

$$M = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}} \frac{a^3}{P^2}$$

O bien, si conocemos μ y a podemos hallar el periodo del cuerpo que orbita:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$$

Supongamos ahora que $M = M_\odot$. Tenemos en este caso:

$$\frac{a^3}{P^2} = k = \frac{\mathcal{G} M_\odot}{4\pi^2}$$

y vamos a ver que tomando las unidades adecuadas, $k = 1$. Según los valores del libro de texto (páginas 161 y 240-241) se sabe que

$$\begin{aligned}
1 \text{ UA} &= 1.4959787 \times 10^{11} \text{ m} \\
1 \text{ año sidéreo} &= 86400 \times 365.2564 \text{ s} \\
M_\odot &= 1.9891 \times 10^{30} \text{ kg} \\
\mathcal{G} &= 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}
\end{aligned}$$

De las dos primeras igualdades obtenemos

$$\begin{aligned}
1 \text{ m}^3 &= \frac{1}{1.4959787^3 \times 10^{33}} \text{ UA}^3 \\
1 \text{ s}^2 &= \frac{1}{(86400 \times 365.2564)^2} \text{ año}^2
\end{aligned}$$

Por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{G} M_\odot}{4\pi^2} &= \frac{6.672 \times 10^{-11} \times (86400 \times 365.2564)^2 \times 1.9891 \times 10^{30}}{4 \times \pi^2 \times 1.4959787^3 \times 10^{33}} (\text{UA})^3 \text{ año}^{-2} \\
&= 0.9999996352 \approx 1.
\end{aligned}$$

Vemos que, pese a que los valores tomados son aproximados, la constante es prácticamente igual a 1, cuando expresamos a en UA y P en años.

En conclusión, en distintos problemas aparecerán distintos valores de k en esta fórmula, dependiendo de cuál sea el cuerpo central (Sol, un planeta concreto, etc.) y de las unidades que usemos en función de los datos conocidos.