Introducción a los espacios de Hilbert

Resolución de los ejercicios recomendados. Capítulo 7

Ejercicio 1

Se tiene que

$$\chi_{[a,b]} * \chi_{[a,b]}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(t)\chi_{[a,b]}(u-t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big)\chi_{[0,1]}\Big(\frac{u-t-a}{b-a}\Big)dt$$

El cambio de variable $s = \dfrac{t-a}{b-a}$ en la última integral nos lleva a que

$$\chi_{[a,b]} * \chi_{[a,b]}(u) = (b-a)\int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,1]}(s)\chi_{[0,1]}\Big(\frac{u-2a}{b-a} - s\Big)ds = (b-a)\big(\chi_{[0,1]} * \chi_{[0,1]}\big)\Big(\frac{u-2a}{b-a}\Big)$$

Teniendo en cuenta el ejemplo 7.2 se obtiene explícitamente:

$$\chi_{[a,b]} * \chi_{[a,b]}(u) = (b-a)\begin{cases} 0 & \text{si } \frac{u-2a}{b-a} \leqslant 0 \\ \frac{u-2a}{b-a} & \text{si } 0 \leqslant \frac{u-2a}{b-a} \leqslant 1 \\ 2 - \frac{u-2a}{b-a} & \text{si } 1 \leqslant \frac{u-2a}{b-a} \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } \frac{u-2a}{b-a} \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqslant 2a \\ u-2a & \text{si } 2a \leqslant u \leqslant b+a \\ 2b-u & \text{si } b+a \leqslant u \leqslant 2b \\ 0 & \text{si } u \geqslant 2b\,. \end{cases}$$

Ejercicio 2

Sumando y restando $f_n * g$ y aplicando la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} \|f_n * g_n - f * g\|_1 &\leqslant \|f_n * g_n - f_n * g\|_1 + \|f_n * g - f * g\|_1 \\ &= \|f_n * (g_n - g)\|_1 + \|(f_n - f) * g\|_1 \\ &\leqslant \|f_n\|_1\|g_n - g\|_1 + \|f_n - f\|_1\|g\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\,. \end{aligned}$$

Nótese que la sucesión $\{\|f_n\|_1\}$ está acotada al ser una sucesión convergente.

Ejercicio 4

Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$; dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe una función $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ tal que $\|f - g_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon$ (teorema 7.11). Por otra parte, si $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión regularizante se tiene que

$$\|f * \rho_n - g_\varepsilon * \rho_n\|_1 = \|(f - g_\varepsilon) * \rho_n\ \|_1 \leqslant \|f - g_\varepsilon\|_1\|\rho_n\|_1 = \|f - g_\varepsilon\|_1\,.$$

De la prueba del teorema 7.11 se obtiene que, para el $\varepsilon > 0$ anterior, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|g_\varepsilon - g_\varepsilon * \rho_n\|_1 \leqslant \varepsilon \quad \text{para todo } n \geqslant n_0\,.$$

Finalmente, sumando y restando g_ε, $g_\varepsilon * \rho_n$ y aplicando la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned} \|f - f * \rho_n\|_1 &\leqslant \|f - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - g_\varepsilon * \rho_n\|_1 + \|g_\varepsilon * \rho_n - f * \rho_n\|_1 \\ &\leqslant 2\|f - g_\varepsilon\|_1 + \|g_\varepsilon - g_\varepsilon * \rho_n\|_1 \leqslant 3\varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geqslant n_0$, es decir, $\lim_{n\to\infty} \|f - f * \rho_n\|_1 = 0$.

Ejercicio 6

Se cumple que

$$\int_2^{\infty} |f(t)|dt = \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{1}{n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty\,,$$

por lo que $f \in L^1[2, +\infty)$. Además,

$$\int_2^{\infty} f(t)dt = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1\,.$$

Por otra parte, no existe $\lim_{t\to+\infty} f(t)$ ya que

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} n = +\infty \quad \text{mientras que} \quad \lim_{n\to\infty} f(n+\frac{1}{2}) = 0\,.$$

Ejercicio 9

Aplicando el teorema de Plancherel-Parseval a las funciones $f(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$ y $g(t) = \mathrm{e}^{-b|t|}$ se obtiene que

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-b|t|}dt = \langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{ab}{(a^2+w^2)(b^2+w^2)}dw = \frac{4ab}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{dw}{(a^2+w^2)(b^2+w^2)}\,.$$

Calculando la primera integral obtenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-b|t|}dt = 2\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+b)t}dt = 2\frac{\mathrm{e}^{-(a+b)t}}{-(a+b)}\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{a+b}\,,$$

de donde

$$\int_0^{\infty}\frac{dw}{(a^2+w^2)(b^2+w^2)} = \frac{\pi}{2ab(a+b)}\,.$$

Ejercicio 10

Sea $g(t) := \big(\chi_{[-\pi,\pi]} * \chi_{[-\pi,\pi]}\big)(t)$. Como $\widehat{\chi}_{[-\pi,\pi]}(w) = \sqrt{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\pi w}{\pi w}$, se obtiene que

$$\widehat{g}(w) = \big(\widehat{\chi_{[-\pi,\pi]} * \chi_{[-\pi,\pi]}}\big)(w) = \sqrt{2\pi}\Big(\sqrt{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\pi w}{\pi w}\Big)^2 = (2\pi)^{3/2}\Big(\frac{\operatorname{sen}\pi w}{\pi w}\Big)^2\,.$$

Por otra parte, por el ejercicio 1 sabemos que

$$\big(\chi_{[-\pi,\pi]} * \chi_{[-\pi,\pi]}\big)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \leqslant -2\pi \\ t+2\pi & \text{si } -2\pi \leqslant t \leqslant 0 \\ 2\pi - t & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ 0 & \text{si } t \geqslant 2\pi\,. \end{cases}$$

Aplicando la identidad de Plancherel-Parseval a la función g se tiene que $\|g\|_2^2 = \|\widehat{g}\|_2^2$. Como

$$\|g\|_2^2 = \int_{-2\pi}^{2\pi} g^2(t)dt = 2\int_0^{2\pi}(2\pi - t)^2 dt = \frac{2(2\pi)^3}{3}\,,$$

y

$$\|\widehat{g}\|_2^2 = (2\pi)^3\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{sen}\pi w}{\pi w}\Big)^4 dw = 2(2\pi)^3\int_0^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{sen}\pi w}{\pi w}\Big)^4 dw = \frac{2(2\pi)^3}{\pi}\int_0^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big)^4 dx\,,$$

donde se ha hecho el cambio de variable $x = \pi w$, igualando ambos resultados se deduce que el resultado pedido.

Ejercicio 13

La ecuación integral se escribe como la convolución $\big(f * \mathrm{e}^{-at^2}\big)(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$. Aplicando la transformada de Fourier (en $L^1(\mathbb{R})$) y teniendo en cuenta la transformada de Fourier de la función gaussiana se obtiene

$$\sqrt{2\pi}\,\widehat{f}(w)\frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-w^2/(4a)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-w^2/4} \;\Rightarrow\; \widehat{f}(w) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-w^2/(4b)} \quad \text{con } b = \frac{a}{a-1} > 0\,.$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa se obtiene que

$$f(t) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\sqrt{2b}\;\mathrm{e}^{-bt^2} = \frac{a}{\sqrt{\pi(a-1)}}\mathrm{e}^{-at^2/(a-1)}\,, \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Ejercicio 15

Como la función $\operatorname{senc} t$ es continua en $\mathbb{R}$, para probar que pertenece a $L^2(\mathbb{R})$ bastará probar que la integrales $\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 \pi t}{\pi^2 t^2} dt$ e $\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen}^2 \pi t}{\pi^2 t^2} dt$ son convergentes. En efecto,

$$\int_1^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 \pi t}{\pi^2 t^2} dt \leqslant \frac{1}{\pi^2} \int_1^\infty \frac{1}{t^2} dt < \infty .$$

La otra integral se haría igual. Para demostrar que la función $\operatorname{senc} t$ no pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, es suficiente ver que la función $\operatorname{sen} t/t \notin L^1(\mathbb{R})$. Se tiene que

$$F(x) := \int_1^x \frac{|\operatorname{sen} t|}{t} dt \geqslant \int_1^x \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} dt = \int_1^x \frac{1-\cos 2t}{2t} dt = \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{2} \int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt .$$

Por otra parte, la función $G(x) := \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt$ está acotada en $[1,+\infty)$. Esto último se comprueba mediante una integración por partes $\big(u(t) = t^{-1}$ y $dv(t) = \cos 2t\, dt\big)$ ya que

$$G(x) = \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\cos 2t}{t} dt = \frac{1}{2}\Big[\frac{\operatorname{sen} 2x}{x} - \operatorname{sen} 2 + \int_1^x \frac{\operatorname{sen} 2t}{t^2} dt\Big] .$$

Por tanto, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ y la función $\operatorname{sen} t/t$ no es integrable en un entorno de $+\infty$.

En el ejemplo 7.14 se prueba que la transformada de Fourier de la función $\chi_{[-\pi,\pi]}(t)$ es la función $\sqrt{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\pi w}{\pi w}$. Análogamente se probaría que la transformada de Fourier inversa de la función $\chi_{[-\pi,\pi]}(w)$ es la función $\sqrt{2\pi}\frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}$; por tanto la transformada de Fourier (en $L^2(\mathbb{R})$) de la función $\frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}$ es la función $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[-\pi,\pi]}(w)$.

Aplicando el teorema de Plancherel-Parseval a la función $f(t) = \frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}$ se obtiene

$$\|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^\infty \Big(\frac{\operatorname{sen}\pi t}{\pi t}\Big)^2 dt = \|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi dw = 1 .$$

Ejercicio 16

Utilizando la definición de convolución, el teorema de Plancherel-Parseval, la transformada de Fourier de una traslación y denotando $c = \min\{a,b\}$, se tiene que

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\operatorname{sen}\pi a t}{\pi t} * \frac{\operatorname{sen}\pi b t}{\pi t}\Big)(u) &= \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen}\pi a t}{\pi t}\frac{\operatorname{sen}\pi b(u-t)}{\pi(u-t)} dt = \int_{-\infty}^\infty \widehat{\frac{\operatorname{sen}\pi a t}{\pi t}}(w)\,\widehat{\frac{\operatorname{sen}\pi b(t-u)}{\pi(t-u)}}(w) dw \\ &= \Big\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[-\pi a,\pi a]}, \frac{\mathrm{e}^{-iuw}}{\sqrt{2\pi}}\chi_{[-\pi b,\pi b]}\Big\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi c}^{\pi c} \mathrm{e}^{iuw} dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}^{-1}\big(\chi_{[-\pi c,\pi c]}\big)(u) = \frac{\operatorname{sen}\pi c u}{\pi u} .\end{aligned}$$

Ejercicio 17

De la definición de transformada de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$ se deduce que la transformada de Fourier de $\widetilde{f}$ es $\widehat{\widetilde{f}}(w) = (-i \operatorname{sgn} w)\widehat{f}(w)\chi_{[-\pi,\pi]}(w)$, y por tanto se cumple la representación integral

$$\widetilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^\pi (-i\operatorname{sgn} w)\widehat{f}(w)\mathrm{e}^{itw} dw , \quad t \in \mathbb{R} .$$

Desarrollando $\widehat{f} \in L^2[-\pi,\pi]$ en la base ortonormal $\Big\{ i \operatorname{sgn} w \frac{\mathrm{e}^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}\Big\}_{n\in\mathbb{Z}}$ (véase el ejercicio 4.9) se obtiene, teniendo en cuenta la representación anterior

$$\widehat{f} = \sum_{n=-\infty}^\infty \langle \widehat{f}, i\operatorname{sgn} w \frac{\mathrm{e}^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}\rangle\, i\operatorname{sgn} w \frac{\mathrm{e}^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^\infty \widetilde{f}(n)\, i\operatorname{sgn} w \frac{\mathrm{e}^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi,\pi] .$$

Introduciendo el desarrollo anterior en la expresión $f(t) = \langle \widehat{f}, \frac{\mathrm{e}^{-itw}}{\sqrt{2\pi}}\rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$ se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) = \langle \widehat{f}, \frac{\mathrm{e}^{-itw}}{\sqrt{2\pi}}\rangle &= \langle \sum_{n=-\infty}^\infty \widetilde{f}(n)\, i\operatorname{sgn} w\frac{\mathrm{e}^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\mathrm{e}^{-itw}}{\sqrt{2\pi}}\rangle = \sum_{n=-\infty}^\infty \widetilde{f}(n)\langle i\operatorname{sgn} w\frac{\mathrm{e}^{-inw}}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\mathrm{e}^{-itw}}{\sqrt{2\pi}}\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^\infty \widetilde{f}(n)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^\pi \frac{i\operatorname{sgn} w}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{i(t-n)w} dw \\ &= -\sum_{n=-\infty}^\infty \widetilde{f}(n)\operatorname{senc}\frac{1}{2}(t-n)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}(t-n) , \quad t \in \mathbb{R} .\end{aligned}$$