Problemas examen junio 2021 - AvEx

1ª semana

1. Para una determinada estrella se conocen la temperatura efectiva, T_{ef}, la aceleración de la gravedad, g, la magnitud bolométrica relativa, m, y la paralaje, π''. Encuentre una expresión que permita calcular la masa de la estrella, $\mathcal{M}$, con esas magnitudes y con la luminosidad, $L_\odot$, y la magnitud bolométrica absoluta del Sol, $M_\odot$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} g = \dfrac{G\mathcal{M}}{R^2} \longrightarrow R^2 = \dfrac{G\mathcal{M}}{g} \\ \\ L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 \longrightarrow R^2 = \dfrac{L}{4\pi\sigma T_{ef}^4} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{G\mathcal{M}}{g} = \frac{L}{4\pi\sigma T_{ef}^4} \Rightarrow \mathcal{M} = \frac{g}{G\sigma 4\pi T_{ef}^4} L$$

L de la estrella no es una de las magnitudes que diga el enunciado que se conoce, por lo que hay que sustituirla.

Conocidos $L_\odot$ y $M_\odot$

$$M - M_\odot = -2{,}5 \log \frac{L}{L_\odot} \Rightarrow L = L_\odot 10^{\frac{M-M_\odot}{-2{,}5}} = L_\odot 10^{0{,}4(M_\odot - M)}$$

Pero M tampoco se conoce, también hay que sustituirla por datos conocidos:

$$M = m + 5 + 5 \log \pi''$$

Así que:

$$L = L_\odot 10^{0{,}4(M_\odot - m - 5 - 5\log \pi'')}$$

Y por último sustituyendo todo en la expresión de la masa:

$$\boxed{\mathcal{M} = \frac{g}{G\sigma 4\pi T_{ef}^4} L_\odot 10^{0{,}4(M_\odot - m - 5 - 5\log \pi'')}}$$

2. El quasar ULAS J1342+0928 es uno de los objetos más distantes del Universo visible. Cuando se mide una línea de Magnesio ionizado emitida por el quasar se obtiene una longitud de onda $\lambda = 23877{,}24$ Å, cuando se mide esa misma línea en el laboratorio el valor de la longitud de onda es $2795{,}93$ Å. Su magnitud bolométrica relativa es $m_b = 19{,}84$ mag y a la distancia que se encuentra la variación de la magnitud debida a la extinción es $A = 6$ mag.

   Con estos datos calcule:

   a) El desplazamiento espectral.

   b) La velocidad de recesión.

   c) La distancia a la que está en Mpc y en años-luz.

d) La edad que tenía el Universo cuando el quasar emitió la radiación.

e) La luminosidad bolométrica en unidades de $L_\odot$

Solución:

a) Por definición el desplazamiento espectral, Z, es:

$$Z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{23877{,}24 - 2795{,}93}{2795{,}93} = \boxed{7{,}54}$$

b) Se debe usar la expresión relativista para calcular la velocidad de recesión:

$$V = \frac{(Z+1)^2 - 1}{(Z+1)^2 + 1} c = \boxed{0{,}973c = 2{,}92 \times 10^5 \text{ km/s}}$$

c)

$$V = H_0 \times d \Rightarrow d = \frac{V}{H_0} = \frac{0{,}973 \times 3 \times 10^5}{70} = \boxed{4170 \text{ Mpc}}$$

1 pc = 3,26 años-luz

$$d = 4170 \times 10^6 \times 3{,}26 = \boxed{1{,}36 \times 10^{10} \text{ años-luz}}$$

d) Se considera que la edad del Universo actualmente es $t_0 = 1{,}4 \times 10^{10}$ años, así que la edad que tenía el Universo cuando el quasar emitió la radiación era, suponiendo expansión uniforme:

$$t = t_0 - 1{,}36 \times 10^{10} = 1{,}4 \times 10^{10} - 1{,}36 \times 10^{10} = \boxed{4 \times 10^8 \text{ años}}$$

Se puede llegar también a este resultado suponiendo $k = 0$ y aplicando la siguiente expresión:

$$\frac{R(t)}{R_0} = \left(\frac{3}{2} H_0 t\right)^{2/3} \Rightarrow t = \frac{2}{3} \left(\frac{R(t)}{R_0}\right)^{3/2} H_0^{-1}$$

$$\frac{R(t)}{R_0} = (1 + Z)^{-1} = 8{,}54^{-1} = 0{,}117$$

$$H_0^{-1} = \left(70 \frac{\text{km}}{\text{s} \times \text{Mpc}}\right)^{-1} = 1{,}4 \times 10^{10} \text{ años}$$

Por lo que sustituyendo en la expresión de t queda:

$$t = \frac{2}{3} 0{,}117^{3/2} \times 1{,}4 \times 10^{10} = \boxed{3{,}7 \times 10^8 \text{ años}}$$

Que como se ve es un resultado similar al obtenido con la otra aproximación. Al corregir se han considerado válidos los dos resultados.

e) Para calcular la luminosidad hay que obtener primero la magnitud bolométrica absoluta.

$M_b = m_b + 5 - 5\log d - A = 19{,}84 + 5 - 5\log(4170 \times 10^6) - 6 = -29{,}26$ mag

Comparándola con la del Sol:

$$M_b - M_{b\odot} = -2{,}5\log\frac{L}{L_\odot}$$

$$L = L_\odot 10^{\frac{M_b - M_{b\odot}}{-2{,}5}} = L_\odot 10^{\frac{-29{,}26-4{,}74}{-2{,}5}} = \boxed{4 \times 10^{13} L_\odot}$$