1. Probar que para todo número natural n, la expresión

$$n^7 - n$$

es divisible por 21.

2. Sea A un DIP con un único ideal maximal $m = (x)$. Probar que todos los elementos de la forma $1 + \lambda x$ con $\lambda \in A$ son invertibles.

3. Consideremos el polinomio $f(T) = T^4 - 10T^2 + 5$.

(a) Estudiar si f es un elemento irreducible de $\mathbb{Q}[T]$.

(b) Sea a una raíz en $\mathbb{R}$ de $f(T)$, escribir razonadamente el grado $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$. Si $b = a^2$ encontrar el polinomio mínimo de b y dedúzcase el valor de $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}]$. Establecer también razonadamente el grado $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}(b)]$.

(c) Racionalizar la expresión

$$\frac{1}{a-1}.$$

4. Sea $E/\mathbb{Q}$ una extensión simple transcendente; esto es $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ con α transcendente sobre $\mathbb{Q}$. Dado un automorfismo $\phi \in G(E : \mathbb{Q})$, probar que se cumple que

$$\phi(\alpha) = \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

con a, b, c, d son números racionales tales que $ad - cb \neq 0$.