Examen de Topología

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- Determinar cuáles de las siguientes familias son base de alguna topología de $\mathbb{R}$.

$B = \left\{[a,b] \mid a < b; \quad a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}\right\}$

$B' = \left\{[a,b] \mid a < b; \quad a \text{ y } b \in \mathbb{Q}\right\}$

(3 puntos)

Solución

Problema 1.15 de libro de Problemas de Topología

2.- Sea $\mathbb{R}$ con la topología usual T_u, $Y = \{a,b,c,d\}$ un conjunto y $f : \mathbb{R} \to Y$ una aplicación dada por $f(x) = a$ si $x > 0$, $f(x) = c$ si $x < 0$ y $f(0) = b$.

a) Calcular la topología final en Y para la aplicación f, que denominaremos T^*. (1,5 puntos)

b) Estudiar si (Y, T^*) es un espacio conexo. (1 punto)

c) Estudiar si (Y, T^*) es un espacio de Hausdorff. (1 punto)

Solución

a) Ejemplo 10 página 124 del libro de Topología.

b) El espacio no es conexo, puesto que $\{a,d\}$ y $\{b,c\}$ son abiertos y $\{a,d\} \cap \{b,c\} = \varnothing$ y $\{a,d\} \cup \{b,c\} = Y$.

c) No es de Hausdorff ya que los elementos a y b no se pueden separar por abiertos disjuntos.

3.- Demostrar que en la recta $(\mathbb{R}, T_u)$ un subconjunto M es compacto si y sólo si es cerrado y acotado. (3,5 puntos)

Solución

Proposición 15 página 183 del libro de Topología