2. Considere la superficie $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = xy\} \subset \mathbb{R}^3$ y la parábola $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = x^2\} \subset \mathbb{R}^2$.

a) Utilizando a caracterización de del espacio tangente de variedades definidas por sumersiones, determine una base $\mathcal{B}$ de $T_{(1,1,1)}\mathcal{M}$ y otra $\mathcal{B}'$ de $T_{(2,4)}\mathcal{P}$.

b) Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + z, x^2 + z^2 + 2xz)$ Determine la matriz de f_* referida a una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a $\mathcal{B}$ y a una base de $\mathbb{R}^2$ que contenga $\mathcal{B}'$.

Res:

a) Sea $h(x, y, z) = xy - z$ Entonces $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : h(x, y, z) = 0\}$
Analogamente, si

$k(x, y) = x^2 - y$ se tiene que $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : k(x, y) = 0\}$

Se verifica fàcilmente que las restricciones de h a $\mathcal{M}$ y de k a $\mathcal{P}$ son sumersiones (pág 29); ahora (pág 31) los espacios tangentes son descritos por:

$$T_{(1,1,1)}\mathcal{M} = Kerdh_{(1,1,1)} = Ker(y, x, -1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$$

Así una base $\mathcal{B}$ de $T_{(1,1,1)}\mathcal{M}$ puede ser

$\mathcal{B} = \langle(0, 1, 1), (1, 0, 1)\rangle$ De la misma forma, una base $\mathcal{B}'$ de $T_{(2,4)}\mathcal{P}$ puede ser

$\mathcal{B}' = \langle(1, 4)\rangle$

b) La matriz de f en el punto (1, 1, 1)es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2x + 2z & 0 & 2x + 2z \end{pmatrix}_{(1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ en la bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^2$

Ahora, solo hay que coger una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga a $\mathcal{B}$ y una base de $\mathbb{R}^2$ que contenga $\mathcal{B}'$.

Por ejemplo $V = \langle(1, 0,0)(0,1,1), (1, 0,1)\rangle$ y $\langle(1, 0)(1,4)\rangle$

Lo que falta se reduce a un ejercicio de algebra lineal: expresar la matriz que está en las bases canónicas en estas dos bases V y $\mathcal{B}'$

Una matriz que obtenemos para estas dos bases puede ser $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$