Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Septiembre 2018

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Isometría vectorial.

(b) Polinomio anulador y polinomio mínimo.

(c) Forma cuadrática y forma polar.

(d) Proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio vectorial.

Ejercicio 1: (2 puntos)

Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}-$espacio vectorial V. Demuestre que si $v_1, \dots, v_k$ son autovectores no nulos de f asociados a autovalores distintos $\lambda_1, , \dots, \lambda_k$, repectivamente; entonces $v_1, \dots, v_k$ son linealmente independientes.

Ejercicio 2: (3 puntos)

Sean V un espacio vectorial real de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y f un endomorfismo de V tal que:

- $f(e_1 + 2e_2 + e_3) = e_1 + 2e_2 + e_3$.
- El plano de ecuación $x + 2y + z = 0$ es un subespacio propio de f.

(a) Determine si f es diagonalizable.

(b) Encuentre las ecuaciones implícitas de un plano f-invariante que contenga sólo dos rectas invariantes.

Ejercicio 3: (3 puntos)

Dada la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión analítica es:

$$\Phi(x, y, z) = 4xy + 2xz - 2yz - z^2$$

(a) Calcule su signatura y diga de qué tipo es.

(b) Determine todos los vectores isótropos (o autoconjungados) contenidos en el subespacio vectorial

$$U = \{(\lambda + \mu,\ \lambda, \mu) :\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

y estudie si forman un subespacio vectorial.

Soluciones

Ejercicio 1: Proposición 5.9 (1), página 287.

Ejercicio 2: Sean V un espacio vectorial real de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de V y f un endomorfismo de V tal que:
- $f(e_1 + 2e_2 + e_3) = e_1 + 2e_2 + e_3$.
- El plano de ecuación $x + 2y + z = 0$ es un subespacio propio de f.

(a) Determine si f es diagonalizable.
(b) Encuentre las ecuaciones implícitas de un plano f-invariante que contenga sólo dos rectas invariantes.

Solución:
(a) El vector $v = e_1 + 2e_2 + e_3$ cumple $f(v) = v$ luego es un autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 1$ que tendrá multiplicidades $1 \leq d_1 \leq a_1$.

Por otro lado, como v no pertenece al plano $x + 2y + z = 0$, que es un subespacio propio, entonces dicho plano es el subespacio propio asociado a un autovalor distinto $\lambda_2 \neq 1$:

$$V_{\lambda_2} \equiv \{x + 2y + z = 0\} \Rightarrow d_2 = \dim V_{\lambda_2} = 2 \leq a_2$$

Tomando dos vectores linealmente independientes de V_{λ_2}, por ejemplo:

$$u = (1, 0, -1),\ w = (0, 1, -2)$$

se cumple que el conjunto $\{v, u, w\}$ es una base de autovectores de V. Entonces, f es diagonalizable. Y así quedaría demostrado este apartado.

Las multiplicidad algebraicas y geométricas cumplen las condiciones del Teorema 5.13 de caracterización de los endomorfismos diagonalizables

$$a_1 = d_1 = 1;\ a_2 = d_2 = 2 \ \text{ y } \ a_1 + a_2 = 3 = \dim V$$

La matriz de f en la base $\mathcal{B}' = \{v, u, w\}$ es la matriz

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

(b) Un plano invariante que contiene sólo dos rectas invariantes R y S tiene que estar generado por dos autovectores correspondientes a dos autovalores distintos. Así $R = L(v) = V_{\lambda_1}$ y $S = L(s)$ con $s \in V_{\lambda_2}$. Tomando $s = u = (1, 0, -1)$ tenemos un plano en las condiciones pedidas:

$$P = L(v) \oplus L(u) = L((1, 2, 1), (1, 0, -1))$$

la ecuación de P en la base $\mathcal{B}'$ es $z = 0$, mientras que su ecuación en la base original se obtiene de la condición

$$\text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y \\ -1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2z - 2y + 2x = 0$$

Observación: Existen infinitas posibilidades de planos en las condiciones pedidas

$$P_s = L(v, s) \quad \text{con} \quad s \in V_{\lambda_2}, \ s \neq 0$$

en todos los casos la matriz del endomorfismo restricción de f a P en la base $\{v, s\}$ es

$$\mathfrak{M}(f|_P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

que se corresponde con el caso 2.1 de la página 228.

Ejercicio 3: Dada la forma cuadrática $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cuya expresión analítica es:

$$\Phi(x, y, z) = 4xy + 2xz - 2yz - z^2$$

(a) Calcule su signatura y diga de qué tipo es.

(b) Determine todos los vectores isótropos (o autoconjungados) contenidos en el subespacio vectorial

$$U = \{(\lambda + \mu, \ \lambda, \mu) : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

y estudie si forman un subespacio vectorial.

Solución: Este ejercicio es el mismo que se realizó en la PEC del mes de abril.

(a) Se puede hacer el método de dicgonalización por congruencia, que está descrito en las soluciones de la PEC, para determinar la signatura. Si bien, como en este caso no se pide un base de vectores conjugados, lo más secillo es aplicar la Regla de Descartes (Teorema 8.39).

Determinamos el polinomio característico de una matriz cualquiera de Φ y aplicamos la regla de Descartes para saber cuántas raíces positivas y negativas tiene. Si llamamos A a la matriz en la base canónica, entonces

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} 0 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 6\lambda$$

El polinomio es múltiplo de λ y no de λ^2 por lo que $\lambda = 0$ es una raíz simple. Hay un único cambio de signo en la secuencia de coeficientes del polinomio, por lo que sólo tiene una raíz positiva, y por consiguiente la tercera raíz es negativa. la signatura es $(1, 1)$ y la forma cuadrática es degenerada e indefinida.

(b) Los vectores isótropos contenidos en U son aquellos vectores de la forma $(\lambda + \mu, \ \lambda, \mu)$ tales que $\Phi(\lambda + \mu, \ \lambda, \mu) = 0$. Sustituyendo en la ecuación de Φ se tiene

$$\Phi(\lambda + \mu, \ \lambda, \mu) = 4(\lambda + \mu)\lambda + 2(\lambda + \mu)\mu - 2\lambda\mu - \mu^2 = \cdots = (2\lambda + \mu)^2 = 0 \ \Leftrightarrow \ \mu = -2\lambda$$

Luego los vectores isótropos de U son los de la forma $(-\lambda, \lambda, -2\lambda) = \lambda(-1, 1, -2)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Es decir, la recta generada por el vector $(-1, 1, -2)$. Por lo que, el conjunto de vectores pedido sí forma un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.