3.Pregunta. Sea la serie de potencias

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z - \frac{1}{2}\right)^n .$$

Determinar su radio de convergencia y estudiar si existe algún punto de la circunferencia correspondiente al círculo de convergencia, tal que exista una serie de potencias convergente en un círculo con centro en dicho punto y que sea prolongación analítica de la serie dada. En caso afirmativo, dar explícitamente dicha serie de potencias.

- Radio de convergencia:

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ converge en $B(0,1)$ uniformemente, por lo que define la función analítica $g_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$

Mediante un cambio de variable $w = z - 1/2$ se tiene

$$g_0(w) = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z - \frac{1}{2}\right)^n$$ que converge

$\forall w \in B(0,1)$ luego converge $\forall z \in B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

Su radio de convergencia es, por tanto, $r = 1$.

-) Punto en $B\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que admita una prolongación analítica,

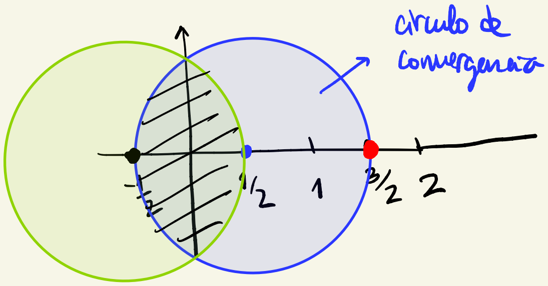
$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(z - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} w^n = g_0(w)$$

En los puntos en los que es convergente la suma coincide con $\frac{1}{1-w}$

$$g(w) = \frac{1}{1-w} \Rightarrow f_0(z) = \frac{1}{1-\left(z-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\frac{3}{2}-z}$$

Luego $\boxed{f_0(z) = \frac{2}{3-2z}}$ analítica en $\forall\, z \in \mathbb{C} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

$\rightarrow f_0(1) = \frac{2}{1} = 2$



tomamos $z_0 = -\frac{1}{2}$ y radio $r = 1$

se trata de desarrollar en serie de taylor la función $h(z) = \frac{2}{3-2z}$ con centro en $-\frac{1}{2}$

$$h\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2} \checkmark$$

$$h'(z) = \frac{4}{(3-2z)^2} \;;\; h'\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$h''(z) = \frac{-8(3-2z)(-2)}{(3-2z)^4} = \frac{16}{(3-2z)^3} \;;\; h''\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{4^2}{4^3} = \frac{1}{4}$$

$$h'''(z) = +\frac{96}{(3-2z)^4} \;;\; h'''\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{96}{4^4} = \frac{24}{4^3} = \frac{6}{4^2} = \frac{3}{8}$$

Luego sería

$$P(z) = \frac{1}{2} + \frac{1/4}{1}\left(z+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1/4}{2!}\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \frac{3/8}{3!}\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(z+\tfrac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(z+\tfrac{1}{2}\right)^3 + \dots$$

Ambos círculos se intersecan y $z=0$ pertenece a ambos $\rightarrow$

Compruebo si obtengo el mismo resultado en ambas series:

$$f_0(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(0 - \frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots - \dots$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3/2} = 2/3$$

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1/2)^n}{2^{n+1}}$$

$$P(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2n+1}} = \underset{2^1}{\frac{1}{2}} + \underset{2^3}{\frac{1}{8}} + \underset{2^5}{\frac{1}{32}} + \dots = \frac{1/2}{1-1/4} =$$

$$= \frac{1/2}{3/4} = 2/3$$

COINCIDEN !!!