$$\text{❋}\quad \textsc{Junio 2018} \quad \text{❋}$$
$$\text{❋}\quad \textsc{Semana 2} \quad \text{❋}$$

Ejercicio 1) **(2.5 puntos)** Resolver el siguiente problema de Cauchy

$$\begin{cases} yu_y - (x+1)u_x = u + 2x \\ u(1,y) = y. \end{cases}$$

Solución. *La ecuación diferencial de las curvas características es*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+1}y$$

cuyas soluciones son

$$y = ce^{-\int \frac{1}{x+1}dx} = \frac{c}{x+1},$$

con lo que la ecuación de las características es

$$(x+1)y = c.$$

*(***0,5pt** *por hallar las características). Hacemos el cambio de variables*

$$\begin{cases} \xi = (x+1)y \\ \eta = y. \end{cases}$$

El cambio inverso es

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) = \frac{\xi}{\eta} - 1 \\ y = y(\xi,\eta) = \eta. \end{cases}$$

Vamos a escribir detalladamente los pasos: Sea $U(\xi,\eta) := u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} u_x &= U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = \eta U_\eta \\ u_y &= U_\xi \xi_y + U_\eta \eta_y = \frac{\xi}{\eta} U_\xi + U_\eta. \end{aligned}$$

Esto es

$$U_\eta - \frac{U}{\eta} = \frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta}.$$

Una solución U_h de la homogénea $U_\eta - \frac{U}{\eta} = 0$ es

$$U_h = p(\xi)e^{\int \frac{1}{\eta}d\eta} = p(\xi)\eta.$$

*(***0,5pt** *por hallar las soluciones generales en las nuevas variables).*

Supongamos que U_p es una solución particular; entonces siempre se tiene que

$$\left(\frac{U_p}{U_h}\right)_\eta = \frac{U_h(U_p)_\eta - (U_h)_\eta U_p}{(U_h)^2} = \frac{(U_p)_\eta - U_p/\eta}{U_h} = \frac{1}{U_h}\left(\frac{2\xi}{\eta^2} - \frac{2}{\eta}\right).$$

Así que, tomando $U_h = \eta$,

$$U_p = \eta \int \left(\frac{2\xi}{\eta^3} - \frac{2}{\eta^2} \right) d\eta = -\frac{\xi}{\eta} + 2.$$

En conclusión

$$U(\xi, \eta) = p(\xi)\eta - \frac{\xi}{\eta} + 2. \tag{1}$$

La condición $u(1, y) = y$ para todo y se convierte en

$$U(2\eta, \eta) = \eta \text{ para todo } \eta \tag{2}$$

ya que $x = 1$ es la curva $x = 2\eta$. Por tanto,

$$\eta = U(2\eta, \eta) = p(2\eta)\eta - \frac{2\eta}{\eta} + 2 = p(2\eta)\eta, \tag{3}$$

así que $p(t) = 1$ para todo t (utilizando continuidad de p en $t = 0$). Utilizando esto en (1),

$$U(\xi, \eta) = \eta - \frac{\xi}{\eta} + 2.$$

Utilizando el cambio inverso,

$$\boxed{u(x, y) = y - (x + 1) + 2 = y - x + 1.} \tag{4}$$

*(**1pt** por hallar la solución). Para la unicidad de la solución (4): La curva $\Gamma := \{x = 1\}$ nunca es tangente a ninguna característica $\kappa_C := \{(x+1)y = C\}$ ya que en un punto arbitrario $(x_0, y_0) \in \Gamma$ (i.e. $x_0 = 1$) un vector tangente a Γ es $(0, 1)$ y un vector tangente a κ_C es $(-x_0 - 1, y_0) = (-2, y_0)$, que no son proporcionales (otra manera: $(0, 1)$ es proporcional a $(-2, y_0)$ si y solo si $(0, 1)$ es perpendicular a $(y_0, 2)$ si y solo si $\langle (0, 1), (y_0, 2) \rangle = 0$, lo que no es cierto). (**0,5pt** por unicidad).*

Ejercicio 2) **(3.5 puntos)** utilizando el método de variables separadas, hallar las soluciones del siguiente problema

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} + u = 0, \quad (x, y) \in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u_y(x, 0) = u_y(x, \pi) = 0 \\ u(0, y) = 0 \\ u(\pi, y) = \cos(2y) \end{cases}$$

Solución. *Pongamos una posible solución como $u(x, y) = F(x)G(y)$. La edp se transforma en*

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) + F(x)G(y) = 0$$

y por tanto

$$\frac{F''(x) + F(x)}{F(x)} = -\frac{G''(y)}{G(y)} = \lambda \in \mathbb{R} \tag{5}$$

*ya que la primera parte depende exclusivamente de x y la segunda de y. (**0,5pt** por llegar a la expresión anterior). Las restricciones se transforman como*

$$\begin{cases} 0 = u_y(x, 0) = F(x)G'(0) & \text{y como } F \text{ no es constante igual a 0 se tiene que } G'(0) = 0 \\ 0 = u_y(x, \pi) = F(x)G'(\pi) & \text{y como } F \text{ no es constante igual a 0 se tiene que } G'(\pi) = 0. \end{cases}$$

De (5) y de lo anterior tenemos

$$\begin{cases} G'' + \lambda G = 0 \\ G'(0) = G'(\pi) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Los autovalores y autofunciones son $\lambda_n = n^2$ y $G_n(y) = \cos(ny)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. (**1pt** por hallar estas funciones). Sabemos que cualquier solución al problema inicial será

$$\sum_{n\geq 0} F_n(x)\cos(ny)$$

Similarmente, de (5), para cada $n \in \mathbb{N}$ (y sin contar la condición $u(\pi, y) = \cos(2y)$) tenemos los siguientes problemas en F

$$(P_n) \qquad \begin{cases} F'' + (1-\lambda_n)F = 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$

Para $n = 0$ el problema (P_0) tiee como solución $F_0(x) = c_0 \sin x$, $c_0 \in \mathbb{R}$; para $n > 0$, $F'' + (1 - \lambda_n)F = 0$ tiene como solución general

$$d_1 e^{\sqrt{n^2-1}x} + d_2 e^{\sqrt{n^2-1}x}$$

y utilzando que $F(0) = 0$, se llega a $c_1 = -c_2$, por tanto la solución a $(P_n)_n$ es

$$F_n(x) = c_n \sinh((\sqrt{n^2-1})x).$$

(**1pt** por hallar estas funciones). Así que para cada n, la solución (sin la condición $u(\pi, y) = \cos(2y)$) es

$$F_n(x)G_n(y) = \begin{cases} c_0 \sin(x) & \text{si } n = 0 \\ c_n \sinh((\sqrt{n^2-1})x)\cos(ny) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

y la solución al problema original, sin la condición $u(\pi, y) = \cos(2y)$ es

$$F(x, y) = c_0 \sin x + \sum_{n\geq 1} c_n \sinh((\sqrt{n^2-1})x)\cos(ny).$$

Utilizando $u(\pi, y) = \cos(2y)$,

$$\cos(2y) = u(\pi, y) = \sum_{n\geq 1} c_n \sinh((\sqrt{n^2-1})\pi)\cos(ny).$$

Como $\sinh((\sqrt{n^2-1})\pi) \neq 0$ para todo $n \geq 1$ y como hay unicidad en los coeficientes de Fourier, se tiene que

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 2 \\ \frac{1}{\sinh(\sqrt{3}\pi)} & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

y las soluciones son

$$\boxed{u(x, y) = c \sin x + \frac{1}{\sinh(\sqrt{3}\pi)} \sinh((\sqrt{3})x)\cos(2y)}$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. (**1pt** por hallar las soluciones).

Ejercicio 3) **(4 puntos)** Dada una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, denotemos por $\widehat{g}$ su transformada de Fourier.

(3.1) (**1pt**). Sea f una función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y de clase C^2. Demostrar que la transformada de Fourier $\widehat{f''}(\xi)$ de f'' es la función $-\xi^2 \widehat{f}(\xi)$.

(3.2) (**1pt**) Utilizando que la transformada de Fourier de la función $f(x) := e^{-ax^2}$ es $\widehat{f}(\xi) = (1/\sqrt{2a})e^{-\xi^2/4a}$, calcular la transformada de Fourier de la función $(x^2-1)e^{-x^2/2}$.

(3.3) Aplicando la transformada de Fourier, hallar la solución del siguiente problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \quad u \text{ acotada.} \end{cases}$$

Solución. (3.1)*: Tenemos, integrando por partes*

$$\widehat{f'}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(x)e^{i\xi x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\xi\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\xi x}dx = -i\xi\widehat{f}(\xi),$$

donde hemos utilizado que como $\int_{\mathbb{R}}|f| < \infty$, se tiene que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, y también que $|e^{i\theta}| = 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Por tanto,

$$\widehat{f''}(\xi) = -i\xi\widehat{f'}(\xi) = -\xi^2\widehat{f}(\xi).$$

(3.2)*: Notemos que si $f(x) = e^{-x^2/2}$, entonces se tiene que*

$$f''(x) = (-xe^{-\frac{x^2}{2}})' = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2e^{-\frac{x^2}{2}} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Pongamos $g(x) = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Entonces, por lo anterior, $f'' = g$ y por tanto,

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f''}(\xi) = -\xi^2\widehat{f}(\xi) = -\xi^2e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(3.3)*: Supongamos que $u(x,t)$ es solución de*

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = (x^2-1)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

sea $\widehat{u}(\xi)$ la transformada de Fourier de $u(x,t)$ con respecto a x. Aplicando esta transformada, el problema (7) se transforma en

$$\begin{cases} \widehat{u}_t + \xi^2\widehat{u} = -\xi^2e^{-\frac{\xi^2}{2}}, \quad \xi \in \mathbb{R},\, t > 0 \\ \widehat{u}(\xi,0) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

*(**0,5pt** por hallar el nuevo problema en $\widehat{u}$). Una ecuación lineal $y'(x) + ay(x) + b = 0$ a coeficientes constantes (con $a \neq 0$) es sencilla de resolver. Se considera la homogénea $y' + ay = 0$, que tiene por solución $y_0(x) = ce^{-ax}$ y la solución general será $y = y_0 + d$ para cierto $c \in \mathbb{R}$, que pasamos a calcular:*

$$0 = (y_0 + d)'a(y_0 + d) + b = ad + b$$

o sea $d = -b/a$; aplicando esto a (8), se tiene que

$$\widehat{u}(\xi,t) = ce^{-\xi^2 t} - e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

Utilizando $\widehat{u}(\xi,0) = 0$, se tiene que $c = e^{\frac{-\xi^2}{2}}$. O sea,

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-\xi^2(t+\frac{1}{2})} - e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

(**0,5pt** *por hallar* $\widehat{u}(\xi,t)$*). Sabemos que* $\widehat{f}(\xi) = (1/\sqrt{2a})e^{-\xi^2/2}$*, para* $f(x) = e^{-ax^2}$*; por tanto,*

$$\widehat{g}(\xi) = e^{-\xi^2(\frac{1}{2}+t)} \text{ para } g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2+4t}}$$
$$\widehat{h}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}} \text{ para } g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

y la solución es

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{1+2t}} e^{-\frac{x^2}{2+4t}} - e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

(**1pt** *por hallar* $u(x,t)$*).*