INSTRUCCIONES : Las hojas que se le han entregado corresponden a dos grupos distintos:

- **Enunciado del examen:** El examen se evaluará sobre un máximo de **10 puntos**; se valorará la correcta justificación de los pasos que conducen a la solución. Las gráficas, si las hubiera, se han de hacer en las cuadrículas que se proporcionan en el Material complementario.
- **Material complementario:** Contiene las fórmulas que no se consideran de memorización obligatoria y que pudieren ser necesarias para la resolución de algún problema, así como las cuadrículas necesarias para las representaciones gráficas que se pidan. Las cuadrículas deben ser entregadas junto con el examen.

MATERIAL PERMITIDO: Todo tipo de material didáctico. Calculadora **no programable**.

Enunciados de los problemas

1. (3 puntos) **Problema 1** Dado el siguiente sistema dinámico unidimensional,

$$\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$$

a) Obtener los puntos fijos y su estabilidad.

b) Tomando r como parámetro de control, localizar la bifurcación, obtener el valor crítico y clasificarla.

c) Dibujar cualitativamente el diagrama de bifurcación indicando claramente a qué punto fijo corresponde cada rama y si son estables o inestables.

2. (3 puntos) **Problema 2.-** Para el siguiente sistema dinámico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + y - x^3 \\ \dot{y} &= -y \end{aligned}$$

a) Obtener sus puntos fijos y clasificarlos.

b) Hallar sus nulclinas y encontrar el sentido del campo de vectores sobre ellas.

c) Representar los puntos fijos, las nulclinas y el campo de vectores sobre ellas en la cuadrícula proporcionada con los enunciados.

3. (4 puntos) **Problema 3.-** Dado el sistema dinámico

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^4 \dot{x} = 0$$

a) Obtener las ecuaciones promediadas.

b) Encontrar la solución para las ecuaciones promediadas para las condiciones iniciales $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$.

c) Hallar la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones.

MATERIAL COMPLEMENTARIO

Ecuaciones promediadas: Dada una función perturbación $h(x,\dot{x})$, las ecuaciones promediadas se obtienen a partir de:

$$
\begin{aligned}
r' &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r,\theta)\sin\theta d\theta \\
r\phi' &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(r,\theta)\cos\theta d\theta
\end{aligned}
$$

Algunas igualdades útiles: Si definimos

$$\langle f(\theta)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

se cumplen las siguientes igualdades (para $n = 0,1,2...$)

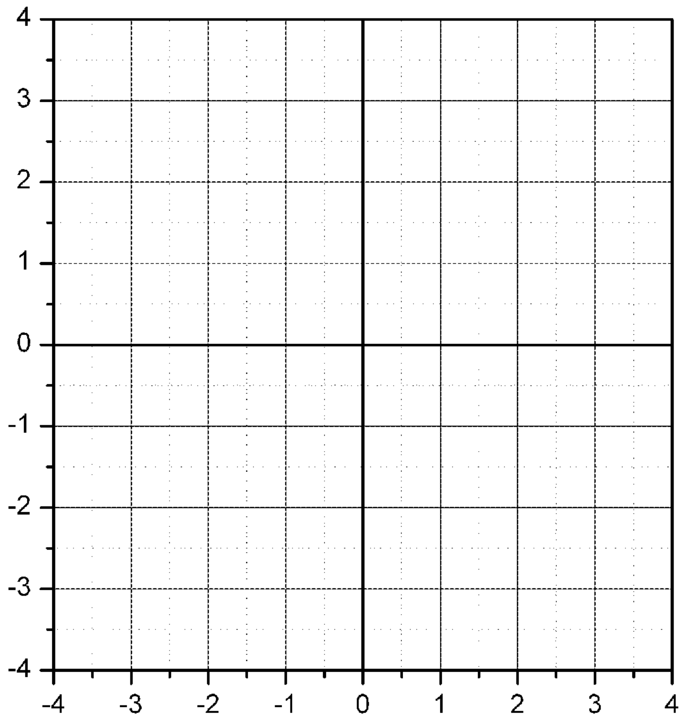
$$\langle sin^{2n+1}\theta\rangle = 0$$

$$\langle cos^{2n+1}\theta\rangle = 0$$

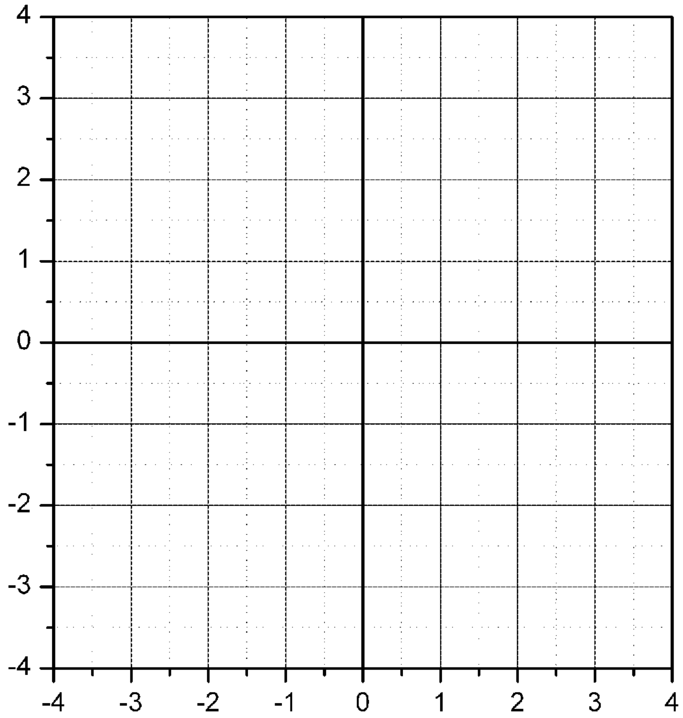
$$\langle sin^{2n}\theta\rangle = \frac{1\times 3\times 5\times ...\times 2n-1}{2\times 4\times 6\times ...\times 2n}$$

$$\langle cos^{2n}\theta\rangle = \frac{1\times 3\times 5\times ...\times 2n-1}{2\times 4\times 6\times ...\times 2n}$$

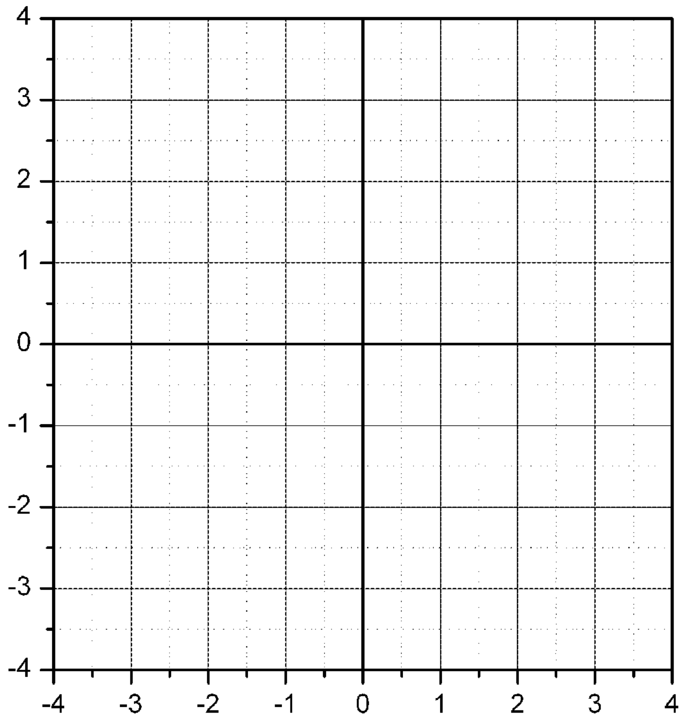
Problema 1.-



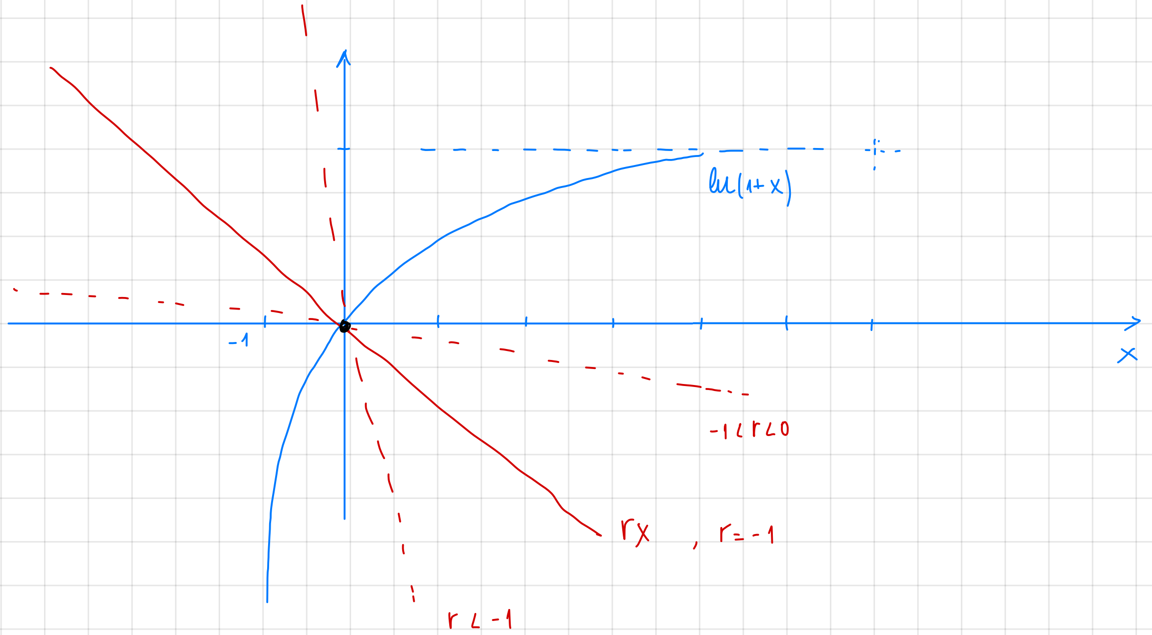
Problema 2.-



Problema 4.-



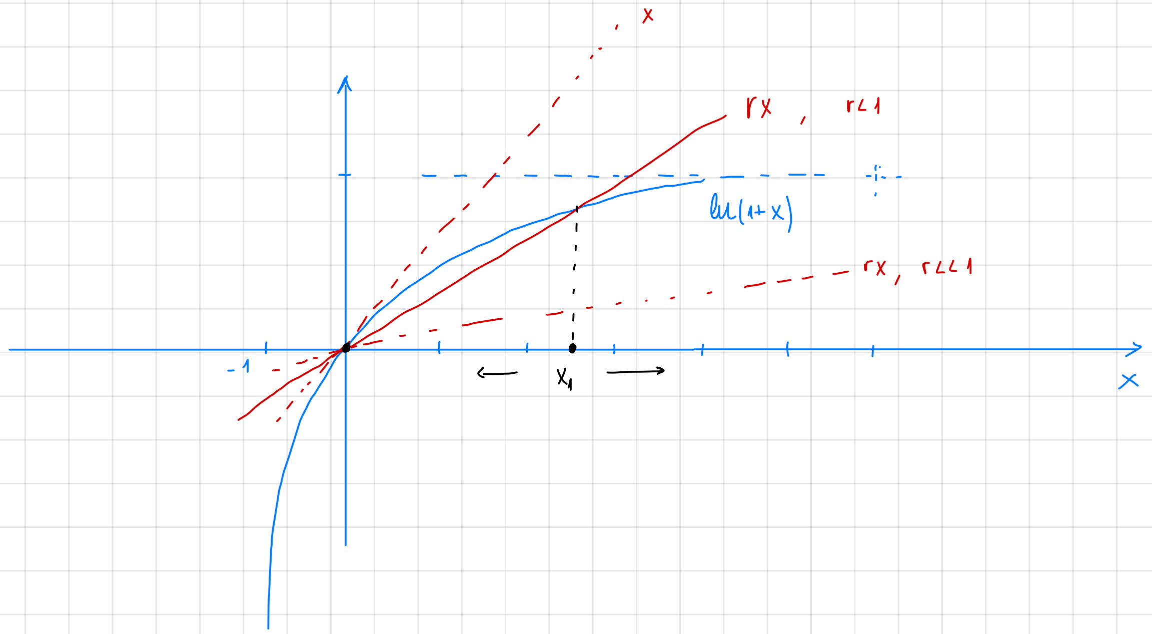
1) a)



Tenemos un punto fijo en $x=0$

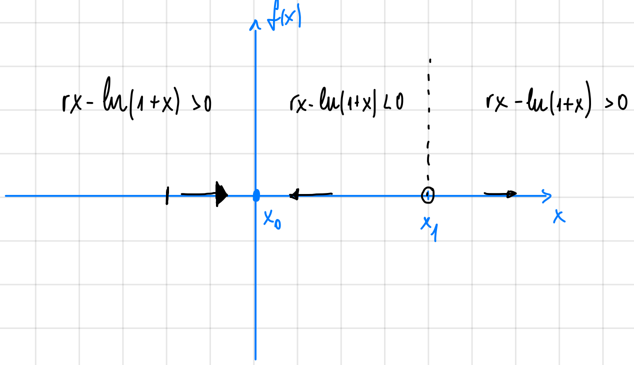
$f'(x) = r - \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = r-1 < 0 \Rightarrow$ punto estable

b)

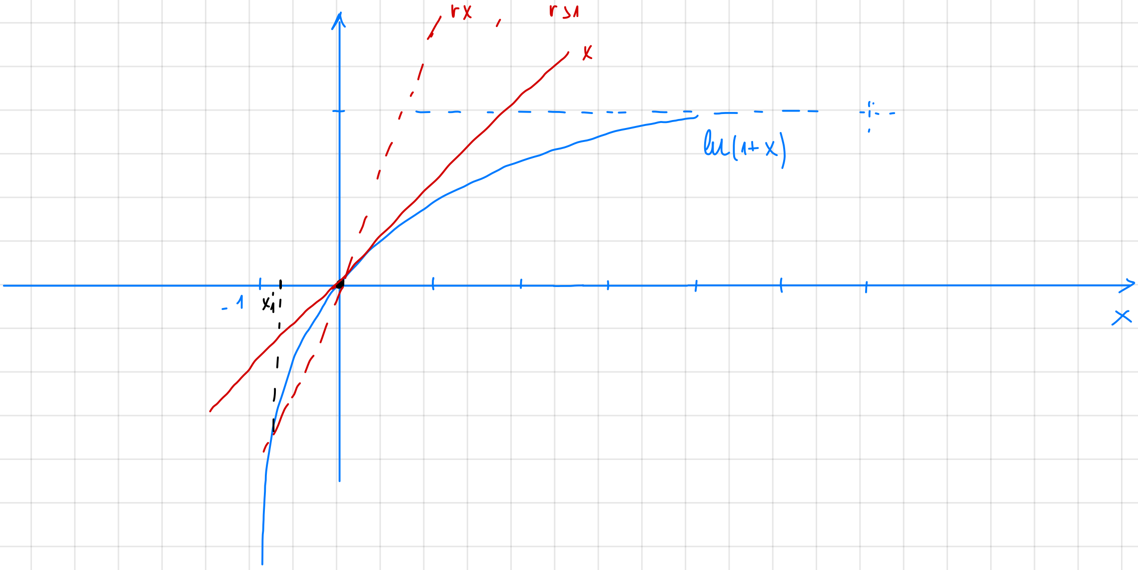


Tenemos dos puntos fijos en $x=0$ y $x=x_1$

Para analizar la estabilidad dibujamos el campo de vectores:

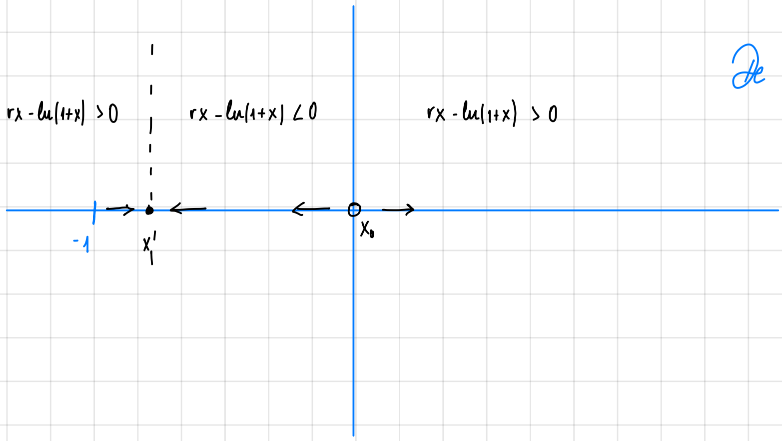


De modo que en $x=0$ nodo estable y en $x=x_1$ nodo inestable c)



Tenemos dos puntos fijos en $x=0$ y $x=x_1'$

Para analizar la estabilidad dibujamos el campo de vectores :



De modo que en $x=0$ nodo inestable y en $x=x_1'$ nodo estable

d) Tenemos una bifurcación transcrítica, donde $x=0$ es punto fijo $\forall\ r$ y $r=1$ cambia su estabilidad.

② a) $y^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = y^3/4$

$y^3 - y - 3x = 0$

$\Big\} \Rightarrow 4y^3 - 4y - 3y^3 = y(y^2-4) = 0 \longrightarrow y = 0$, $y = \pm 2$

Puntos fijos : $(0,0)$, $(2,2)$, $(-2,-2)$

b) $J = \begin{pmatrix} -4 & 3y^2 \\ -3 & 3y^2-1 \end{pmatrix}$

- $J\Big|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta = 4 > 0 \\ \tau = -5 < 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \tau^2 - 4\Delta = 25 - 16 = 9 > 0 \Rightarrow$ nodo estable

- $J\Big|_{(-2,-2)} = J\Big|_{(2,2)} = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ -3 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta = -8 < 0 \\ \tau = 7 > 0 \end{array}\right\} \longrightarrow \tau^2 - 4\Delta = 81 > 0 \Rightarrow$ nodos inestables

c) Tenemos que $\forall$ punto $\in x - y = 0$:

$\left.\begin{array}{l} \dot{x} = y^3 - 4y \\ \dot{y} = y^3 - 4y \end{array}\right\} \Rightarrow \dot{x} = \dot{y} \Rightarrow$ el vector velocidad de la trayectoria de un punto de la recta $x-y=0$, coincide con el vector director de dicha recta, por lo tanto la trayectoria del punto permanecerá en el subespacio de la recta.

d) Tenemos que

- $\dot{x}, \dot{y} > 0$

$|\dot{x}|/|\dot{y}| \Leftrightarrow y^3 - 4x > y^3 - y - 3x \Leftrightarrow y > x$

- $\dot{x} < 0$, $\dot{y} > 0$

$\dfrac{|\dot{x}|}{|\dot{y}|} > 1 \Leftrightarrow -y^3 + 4x > y^3 - y - 3x$; $7x > 2y^3 - y$

- $\dot{x} < 0$, $\dot{y} < 0$

$\dfrac{|\dot{x}|}{|\dot{y}|} > 1$ si $x > y$

- $\dot{x} > 0$, $\dot{y} < 0$

$\dfrac{|\dot{x}|}{|\dot{y}|} > 1$ si $7x < 2y^3 - y$

Si $y>0,\ x<0$

$\dot{x} = y^3 - 4x > 0$

$\dot{y} = y^3 - y - 3x > 0 \iff \begin{cases} y(y^2-1) > 0 \iff y>1 \\ \text{si } 0<y<1 \Rightarrow 3x < y(y^2-1) < -1 \iff x < -1/3 \end{cases}$

Tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x} > 0 \\ \text{si } y>1,\ \dot{y}>0 \\ \text{si } 0<y<1 \text{ y } x<-1/3,\ \dot{y}>0 \end{array}\right\} \quad \dot{x} > \dot{y}$$

- Si $y>0,\ x>0$

$\dot{x} = y^3 - 4x > 0 \iff y^3 > 4x$

$\dot{y} = y^3 - y - 3x > 0 \iff y^3 - y > 3x$

- Si $y<0,\ x<0$

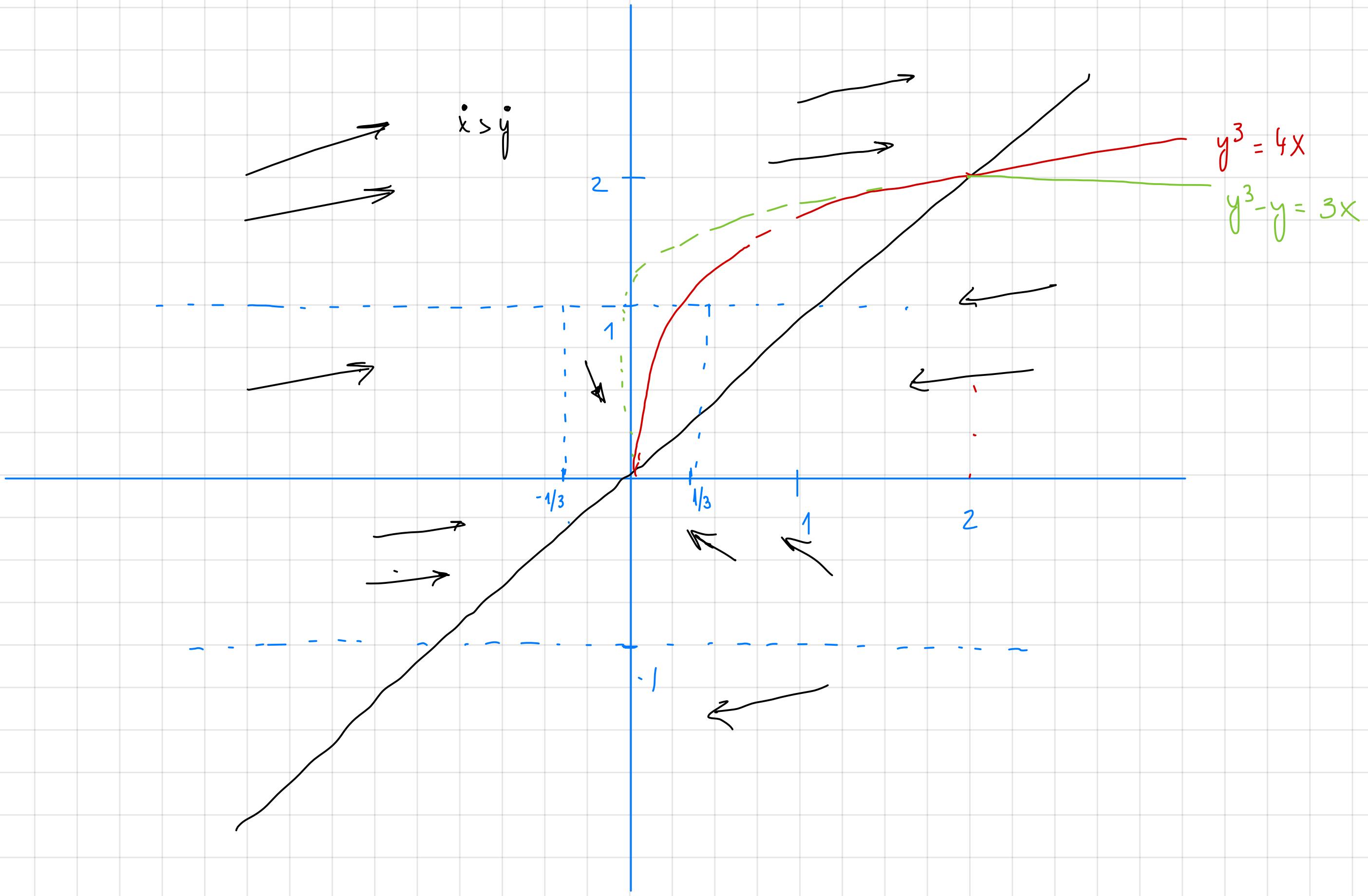
$\dot{x} = y^3 - 4x > 0 \iff y^3 > 4x$

$\dot{y} = y^3 - y - 3x > 0 \iff y^3 - y > 3x$

- Si $y<0,\ x>0$

$\dot{x} = y^3 - 4x < 0$

$\dot{y} = y^3 - y - 3x < 0 \iff \Big|\ y(y^2-1) < 0 \iff y < -1$



③ a) $h = |x| - 1$

$h(r,\theta) = |r\cos\theta| - 1$

$$r' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |r\cos\theta|\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cancel{\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta}^{\,0} = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta\right] = 0$$

$$r\phi' = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(|r\cos\theta| - 1\right)\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos^2\theta\,d\theta - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos^2\theta\,d\theta\right] = \frac{1}{2\pi}\cdot r\pi = \frac{r}{2}$$

b) $r(0) \approx \sqrt{x(0)^2 + \dot{x}(0)^2} = a \Rightarrow r = a$

$\phi' = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{1}{2}T + C$; $\phi(0) = \mathrm{atan}\left(\frac{\dot{x}(0)}{x(0)}\right) - \tau = 0 \Rightarrow C = 0$

$$x(t,\varepsilon) = a\cos\left(t + \tfrac{1}{2}\varepsilon t\right) + O(\varepsilon^2)$$

c) Amplitud $= a$, frecuencia $= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$