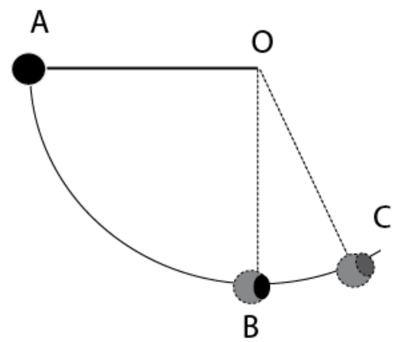
Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2016/2017, Septiembre

1. Una cuerda inextensible de longitud *L* está sujeta por un extremo (punto O de la figura). Sujetamos en el otro extremo de la cuerda una masa *M* y la colocamos en el punto A indicado en la figura (inicialmente en reposo, a la misma distancia *L* del suelo y del extremo fijo). Se deja que la masa *M* siga un movimiento circular en torno a O bajo la acción de la gravedad. Cuando *M* pasa por el punto mínimo de su trayectoria (punto B) colisiona con una masa *m* que está en reposo y ambas continúan unidas la trayectoria circular. Calcule la altura máxima (punto C) que alcanzan las masas *m* y *M*. **(1,5 puntos)**



Solución

La energía inicial del sistema, E_A, es únicamente la energía potencial de la masa M. Esta energía se conserva en el punto B, justo antes de la colisión, $E_B = E_A$, donde solo hay energía cinética de M. Justo después, llamémosle punto B', se produce una 'colisión' inelástica, ya que ambas masas continúan unidas, en la que se conserva la cantidad de movimiento, $p_B=p_{B'}$. La energía después de la colisión es únicamente cinética, y se convierte totalmente en energía potencial en el punto C, $E_{B'}=E_C$.

Pasando esto a ecuaciones:

$$E_A = U_A = E_B = K_B \qquad MgL = \frac{1}{2}Mv_B^2$$

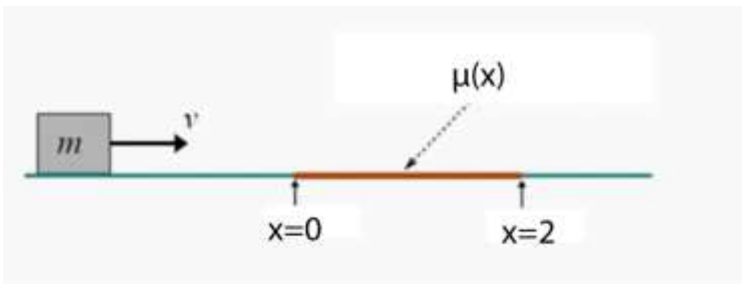
$$p_B = p_{B'} \qquad Mv_B = (M+m)v_{B'}$$

$$E_{B'} = K_A = E_C = U_C \qquad \frac{1}{2}(M+m)v_{B'}^2 = (M+m)gh$$

De ellas podemos despejar la altura, h, del punto máximo C:

$$h = \frac{L\,M^2}{(M+m)^2}$$

2. Un bloque de masa 1 kg está deslizándose en línea recta sobre la superficie helada de un lago. No hay ningún rozamiento a lo largo de su trayectoria excepto por una zona con arena entre *x = 0* y *x = 2 m*. La arena no está repartida por igual, con lo que el coeficiente de rozamiento no es constante y, para este bloque, sigue la función $\mu(x) = 0.1\,(1 + (x-1)^2)$. Encuentre la energía potencial asociada a esta fuerza de rozamiento y calcule la velocidad mínima que tiene que tener la masa antes de entrar en la zona de arena para conseguir cruzarla. **(2 puntos)** Tome g= 10 m/s^2



Solución

$$F_{roz} = -m\,g\,\mu(x) = -(1 + (x-1)^2)$$

El potencial asociado a esta fuerza cuando x está entre 0 y 2 es

$$U(x) = -\int F(x)\,dx$$

$$U(x) = \int 1 + (x-1)^2\,dx = x + \frac{(x-1)^3}{3}$$

La energía potencial en

x=0 es U(0)= -1/3

x=2 es U(2)= 2+1/3= 7/3.

El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es la variación de energía potencial

Para poder cruzar tiene que tener una energía cinética igual al cambio de energía potencial entre en x=2 y x=0. Formalmente es lo mismo que razonar que el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento es igual al

$$W = \int_0^2 F(x')\, dx' = \int_0^2 1 + (x'-1)^2\, dx' = \left[x' + \frac{(x'-1)^3}{3}\right]_{x'=0}^{x'=2} = \left(2 + \frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}$$

es decir

$$v = \sqrt{\frac{2\, \Delta U}{m}} = \sqrt{2\, \frac{8}{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}\ m/s$$

3. A distancias de la superficie de la Tierra muy pequeñas comparadas con el radio terrestre se suele considerar que la aceleración gravitatoria es constante y que tiene un valor $g_0 = GM_T / R_T^{\,2}$. Calcular el error que se comete al aproximar la aceleración real mediante g_0 a una altura h de la superficie terrestre sabiendo que $h = \lambda R_T$. Expresar este error únicamente en función de λ. **(1,5 puntos)**

Ayuda: el error se calcula como $\varepsilon = \frac{|g(h) - g_0|}{g(h)}$ donde $g(h)$ es la aceleración gravitatoria real a una altura *h*.

Solución

La aceleración gravitatoria a una altura *h* tiene la forma

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2} = \frac{g_0 R_T^{\,2}}{(R_T + h)^2}$$

El error viene dado por:

$$\varepsilon = \frac{|g(h) - g_0|}{g(h)} = \frac{\left|\frac{R_T^{\,2}}{(R_T + h)^2} - 1\right|}{\frac{R_T^{\,2}}{(R_T + h)^2}} = \frac{2R_T h + h^2}{R_T^{\,2}} = \lambda\left(2 + \lambda\right)$$

4. En una misma región del espacio coexisten un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E_0\ \mathbf{i}$ y un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B_0\ \mathbf{j}$. Calcular las condiciones que deben satisfacer <u>cada una</u> de las tres componentes del vector velocidad con el que una carga q debe penetrar en esa región para que la atraviese sin ser desviada. **(2 puntos)**

Solución

Cuando la carga penetra dentro de esta región se verá sometido a las fuerzas producidas por los dos campos. La fuerza total será

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

Si ahora consideramos $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ obtenemos

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) = q\left(E_0 - B_0 v_z,\ 0,\ B_0 v_x\right)$$

Para que esta fuerza total sea nula se debe cumplir que

$$v_x = 0$$

$$v_z = \frac{E_0}{B_0}$$

mientras que la componente Y, v_y, puede tomar un valor cualquiera.

5. Explicar razonadamente por qué el campo magnético no cambia la energía cinética de las cargas que se mueven dentro del mismo. **(1 punto)**

<u>Solución</u>

Porque la fuerza que el campo magnético ejerce sobre la carga es siempre perpendicular a la velocidad de la carga. De este modo, no hay aceleración tangencial y el módulo de la velocidad es siempre el mismo. También se puede decir de otro modo, y es que el campo magnético no realiza ningún trabajo sobre las cargas ya que la fuerza es siempre perpendicular al desplazamiento.

6. Un átomo radiactivo emite dos electrones en la misma dirección pero sentidos opuestos, cada uno con velocidad de 0,75*c* medida por un observador situado en reposo en el laboratorio. Calcular la velocidad de un electrón medida desde el otro:

- De acuerdo con la mecánica clásica.
- De acuerdo con la mecánica relativista.

Ayuda: Las transformaciones relativistas de velocidades son

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \qquad u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}$$

donde el sistema S' se aleja del sistema S a una velocidad relativa v. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

Desde el punto de vista de la mecánica clásica la velocidad relativa entre las dos electrones se obtiene a partir de la suma de velocidades, de modo que está velocidad será de 1,5*c.* Vemos que es mayor que la velocidad de la luz, lo cual es físicamente imposible. Desde el punto de vista de la mecánica relativista debemos emplear las transformaciones relativistas de velocidades. Podemos considerar que el electrón que se mueve a la izquierda es el sistema S', que se mueve con una velocidad $v = -0,75c$ con respecto a S. La velocidad el electrón que mueve hacia la derecha con respecto a S será $u_x = 0,75c$. Operando obtenemos:

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - \frac{v u_x}{c^2}} = \frac{0,75c + 0,75c}{1 + \frac{(0,75c)^2}{c^2}} = 0,96c$$