Ejercicios de cálculo de probabilidades

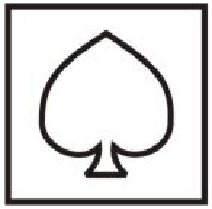
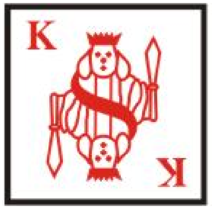
Ahora que ya sabemos contar los casos favorables y los posibles podremos calcular probabilidades en espacios finitos.

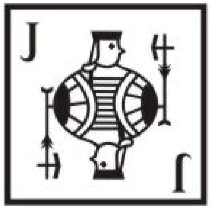
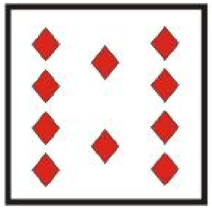
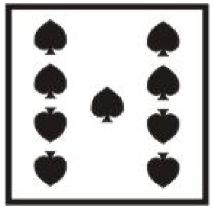
1. (Problema 3.7 del libro) Se lanzan cinco dados. Calcular la probabilidad de obtener

   1. Cinco puntuaciones iguales (*repóquer*)
   2. Cuatro puntuaciones iguales y una quinta distinta (*póquer*)
   3. Un trío y una pareja (*full*)
   4. Un *trío*
   5. *Doble pareja*
   6. Una *pareja*
   7. Cinco puntuaciones distintas

SOLUCIÓN:

Para los no familiarizados con el juego presentamos las caras de un dado real de póquer, aunque evidentemente podríamos jugar con un dado de parchís.

As K Q J Rojas(R) Negras(N)

En primer lugar, calculamos el “número de casos posibles” en el lanzamiento de cinco dados. Para que en el espacio muestral todos los elementos sean equiprobables debemos tener en cuenta el orden o, equivalentemente, considerar que los dados son distinguibles (recordemos el ejemplo del lanzamiento de dos dados, ya estudiado con detalle). De este modo habrá resultados que son equivalentes desde el punto de vista del juego pero que son distintos a la hora de contar. Por ejemplo, el (As,As,As,As,K) y el (K,As,As,As,As)

Un resultado (*suceso simple*) debemos pensarlo como (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) en donde cada x_i es la "puntuación" del dado i. Para el primer dado tenemos 6 posibilidades, para el segundo 6, … Con lo cual el número de resultados será $6x6x6x6x6=6^5$

1. *Repóquer*

Solo hay 6 resultados que dan lugar al repóquer (As,As,As,As,As), (K,K,K,K,K)….

Por tanto la probabilidad será $\frac{6}{6^5}=\frac{1}{6^4}$

2. *Póquer*

Expondremos varios procedimientos para contar los casos

Primer método

- Posibilidades de elegir la cara que se repite: 6
- Posiciones que puede ocupar $\binom{5}{4} = 5$
- Posibilidades de elegir la cara restante: 5. Es cara ya tiene determinada su posición.
- Total de casos favorables: 6x5x5
- Probabilidad: $\frac{6 \times 25}{6^5} = \frac{25}{6^4}$

Segundo método (muy similar)

Primero elegimos las caras que aparecen y después contamos cuantos resultados hay con esa composición

- Posibilidades de elegir la cara que se repite: 6
- Posibilidades de elegir la cara restante: 5
- Los resultados con esa composición quedan determinados con la posición de la cara que se repite (o de la otra): $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$
- Total de casos favorables: 6x5x5
- Probabilidad: $\frac{6 \times 25}{6^5} = \frac{25}{6^4}$

Tercer método

- Formas de elegir las dos caras que intervienen: $\binom{6}{2}=15$
- Una vez elegidas esas dos caras tenemos 2 maneras de elegir la que se repite. Con eso queda determinada la composición.
- Ahora, igual que antes, tenemos $\binom{5}{4}=\binom{5}{1}=5$ resultados con esa composición.
- Total de casos favorables: 15x2x5
- Probabilidad: $\dfrac{15\times 2\times 5}{6^5}=\dfrac{25}{6^4}$

3. *Full*

Primer método

- Cara que aparece 3 veces: 6 posibilidades
- Cara que aparece 2 veces: 5 posibilidades
- Ahora tenemos $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ maneras de colocar la cara que aparece 3 veces (o la que aparece 2 veces)
- Total de casos favorables: 6x5x10=300
- Probabilidad: $\frac{300}{6^5} = \frac{50}{6^4}$

Segundo método

- Formas de elegir las dos caras que intervienen: $\binom{6}{2}=15$
- Una vez elegidas esas dos caras tenemos 2 maneras de elegir la que se repite. Con eso queda determinada la composición.
- Ahora, igual que antes, tenemos $\binom{5}{3}=\binom{5}{2}=10$ resultados con esa composición.
- Total de casos favorables: 15x2x10=300
- Probabilidad: $\frac{300}{6^5}=\frac{50}{6^4}$

4. *Trío*

Primer método

- Cara que aparece 3 veces: 6 posibilidades
- Posiciones que puede ocupar: $\binom{5}{3}=10$. Con esto quedan determinadas las posiciones para las otras dos caras (distintas).
- Maneras de seleccionar las dos caras, fijando ya el orden: 5x4=20
- Total de casos favorables: 6x10x20=1200
- Probabilidad: $\frac{1200}{6^5}=\frac{200}{6^4}$

Segundo método

Dado que en un trío intervienen tres caras distintas razonaremos así:

- Formas de obtener las tres caras: $\binom{6}{3} = 20$
- Formas de elegir la que se repite: 3
- Con eso tenemos fijada la composición. Para calcular el número de resultados en que aparece debemos usar permutaciones con repetición, al tener 5 elementos de tres tipos distintos:
  $$\frac{5!}{3! \times 1! \times 1!} = 20$$
- Total de casos favorables: 20x3x20=1200
- Probabilidad: $\frac{1200}{6^5} = \frac{200}{6^4}$

Todavía podríamos considerar ligeras variantes de estos métodos, con el mismo resultado

5. *Doble pareja*

Primer método

- Posibilidades para las dos caras que constituyen las parejas: $\binom{6}{2} = 15$
- Posiciones para la primera: $\binom{5}{2} = 10$
- Posiciones para la segunda: $\binom{3}{2} = 3$
- La cara restante ya tiene determinada su posición y tenemos 4 posibilidades de elegirla
- Total de casos favorables: 15x10x3x4=1800
- Probabilidad: $\frac{1800}{6^5} = \frac{300}{6^4}$

Segundo método

- Selección de las tres caras que intervienen: $\binom{6}{3}=20$

- Entre ellas, selección de la que no se repite o de las dos que se repiten $\binom{3}{1}=\binom{3}{2}=3$

- Con eso tenemos fijada la composición. Para calcular el número de resultados en que aparece debemos usar permutaciones con repetición, al tener 5 elementos de tres tipos distintos: $\frac{5!}{2!\times 2!\times 1!}=30$
- Total de casos favorables: 20x3x30=1800

- Probabilidad: $\frac{1800}{6^5}=\frac{300}{6^4}$

Como en casos anteriores, podríamos considerar ligeras variantes de estos métodos, con el mismo resultado

6. Una *pareja (dos resultados iguales y el resto distintos)*

Primer método

- Cara que se repite: 6 posibilidades
- Posiciones que puede ocupar: $\binom{5}{2} = 10$
- Nos quedan otras tres caras, que seleccionamos dando ya a cada una su posición: *5x4x3=60*
- Número total de casos favorables: *6x10x60*
- Probabilidad: $\frac{3600}{6^5} = \frac{600}{6^4}$

Segundo método:

- Seleccionamos las cuatro caras que intervienen: $\binom{6}{4} = 15$
- Entre ellas seleccionamos la que se repite: 4 posibilidades. Con esto tenemos fijada la composición.
- Permutaciones de esas caras: $\dfrac{5!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!} = 60$
- Número total de casos favorables: *15x4x60=3600*, obteniendo la misma probabilidad que antes: $\dfrac{3600}{6^5} = \dfrac{600}{6^4}$

Tercer método:

- Seleccionamos la cara que se repite: 6 posibilidades
- Seleccionamos las tres restantes. $\binom{5}{3}=10$. Con esto está fijada la composición y ahora seguimos como antes
- Permutaciones de esas caras: $\dfrac{5!}{2!\times 1!\times 1!\times 1!}=60$
- Número total de casos favorables: *6x10x60=3600*, obteniendo la misma probabilidad que antes: $\dfrac{3600}{6^5}=\dfrac{600}{6^4}$

7. *Todos los resultados distintos*

Primer método *(lo más sencillo)*

- Elegimos las cinco caras fijando ya la posición: 6x5x4x3x2=720
- Probabilidad: $\frac{720}{6^5}=\frac{120}{6^4}$, que es menor que la de varios de los casos anteriores (pareja, doble pareja y trío)

Segundo método

Primero elegimos las caras y después las permutamos

- Modos de elegir cinco caras, sin fijar el orden: $\binom{6}{5}=6$
- Permutaciones de esas caras $\frac{5!}{1!\times 1!\times 1!\times 1!\times 1!}=5!$
- Total de casos: 6x5!=6!=720

Como era de esperar, obtenemos la misma probabilidad

2. (Problema 3.13 del libro) N tarjetas numeradas de 1 a N se barajan al azar y se examina el orden en que han quedado. Calcula la probabilidad de que:

a) La tarjeta 2 sea la primera.
b) La tarjeta 2 sea posterior a la 1.
c) La tarjeta 2 sea la siguiente a la 1.
d) Las tarjetas 1 y 2 no sean consecutivas.
e) Las tarjetas 1 y 2 estén separadas por r tarjetas.

SOLUCIÓN:

Consideremos el experimento aleatorio *"barajar al azar N tarjetas y examinar el orden en que han quedado"*. El espacio muestral es $\Omega = \{(x_1,\ldots,x_N)\}$. Además, Ω es finito y el número de resultados posibles es $\#\Omega = P_N = N!$. Tenemos también que $P(w) = \frac{1}{N!} \quad \forall w \in \Omega$

a) La tarjeta 2 sea la primera.

Fijando la tarjeta 2 en la primera posición, tenemos $P_{N-1}=(N-1)!$ posibles ordenaciones de las restantes. Por lo tanto,

$$P(tarjeta\ 2\ sea\ la\ \ primera) = \frac{casos\ \ favorables}{casos\ \ posibles} = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}$$

b)La tarjeta 2 sea posterior a la 1.

Por cada ordenación con la tarjeta 2 posterior a la 1 hay otra ordenación en que ocurre lo contrario, sin más que invertir los órdenes de las dos tarjetas dejando las demás igual. Por lo tanto, $P(tarjeta\ 2\ sea\ \ posterior\ a\ la\ 1) = \dfrac{1}{2}$.

c) *La tarjeta 2 sea la siguiente a la 1.*

Además del razonamiento del libro, podemos pensar así:

- El suceso *"la tarjeta 2 es la siguiente a la 1"* corresponde a la estructura siguiente: $\{12xx\ldots x\},\{x12x\ldots x\},\ldots,\{xx\ldots x12\}$, es decir, la tarjeta 1 puede estar en las posiciones $1,2,\ldots,N-1$. A su vez, en cada una de esas posiciones, las $N-2$ tarjetas restantes pueden adoptar $(N-2)!$ posiciones. En resumen, la probabilidad pedida es

$$P(la\ tarjeta\ 2\ sea\ la\ siguiente\ a\ la\ 1)=\frac{(N-1)\times(N-2)!}{N!}=\frac{(N-1)!}{N!}=\frac{1}{N}$$

- Otro razonamiento: al ser la tarjeta 2 exactamente la siguiente a la 1 podemos pensar en que están unidas, de modo que actuamos como si tuviésemos N-1 tarjetas para barajar. El número de casos favorables será (N-1)! y la probabilidad $\frac{(N-1)!}{N!}=\frac{1}{N}$

d) *Las tarjetas 1 y 2 no sean consecutivas.*

Sea el suceso A=*"las tarjetas 1 y 2 no son consecutivas"*. Utilizando el apartado anterior, tenemos que:

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(las\ tar.\ 1\ y\ 2\ son\ consecutivas) =$$

$$= 1 - \left[P(la\ tar.\ 1\ es\ la\ siguiente\ a\ la\ 2) + P(la\ tar.\ 2\ es\ la\ siguiente\ a\ la\ 1)\right] =$$

$$= 1 - 2 \times \frac{1}{N} == 1 - \frac{2}{N}$$

e) *Las tarjetas 1 y 2 estén separadas por r tarjetas.*

Las tarjetas 1 y 2 pueden estar separadas por *r* tarjetas si la primera está en una de las *N-r-1* primeras posiciones y la segunda *r+1* lugares más adelante. Lo vemos más claro en el siguiente esquema de las situaciones posibles (hacemos el esquema con la 1 antes de la 2 y tendríamos otros tantos casos con la 2 antes de la 1).

- Con la 1 en primera posición: *(1x...x2x....x)* (entre la 1 y la 2 hay *r* tarjetas)
- Con la 1 en segunda posición: *(x1x…x2x…x)*
- …..
- La última situación sería *(x….x1x…x2).* Al estar la 2 en la posición *N*, la 1 estará en la posición *N-r-1*

- Es decir, tenemos *N-r-1* estructuras de este tipo y en cada una, una vez colocadas ambas tarjetas, las *N-2* restantes pueden colocarse de *(N-2)!* formas diferentes.

-Casos favorables a que la tarjeta 1 esté antes que la 2: *(N-r-1)x(N-2)!*
-Casos favorables a que la tarjeta 2 esté antes que la 1: *(N-r-1)x(N-2)!*

Entonces, si *E=”las tarjetas 1 y 2 están separadas por r tarjetas”*, tenemos que

$$P(E)=\frac{2\times(N-r-1)\times(N-2)!}{N!}=\frac{2(N-r-1)}{N(N-1)}$$

3. *Una urna contiene 6 bolas numeradas del 1 al 6; se extraen las bolas, una a una sin reemplazamiento, hasta que todas las bolas han sido extraídas. Determínese:*

a) *La probabilidad de que la última bola lleve un número par.*
b) *La probabilidad de que todas las bolas con número par aparezcan antes que la primera con número impar.*

SOLUCIÓN:

El espacio muestral asociado a este experimento aleatorio es $\Omega = \{(x_1, \ldots, x_6) / x_i = 1, \ldots, 6\}$. Como todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, podemos asignar probabilidades mediante la regla de Laplace.

a) Sea *A="la última bola lleva número par"*. Calculemos cuantos *casos favorables* hay para este suceso. Para la última bola tenemos tres (3) posibilidades (las tres bolas pares). Para cada una de ellas tenemos 5! posibles ordenaciones de las demás bolas. Por lo tanto,

$$P(A) = \frac{3 \times 5!}{6!} = \frac{1}{2}$$

Un razonamiento más inmediato sería que, por simetría, debe haber la misma probabilidad de que la última sea par que impar y por tanto cada una debe ser 1/2

b) Sea *B="las bolas con número par aparecen antes que todas las bolas que tienen número impar"*

$$\underbrace{\_\ \_\ \_}_{\substack{\text{bolas con}\\ \text{nº par}}}\ \underbrace{\_\ \_\ \_}_{\substack{\text{bolas con}\\ \text{nº impar}}}$$

Para la primera bola tenemos 3 posibilidades, para la segunda 2, para la tercera 1, para la cuarta 3, para la segunda 2, para la tercera 1, es decir, 3x2x1x3x2x1. Resumiendo, 3!x3!, con lo cual

$$P(B)=\frac{3!\times 3!}{6!}=\frac{1}{20}$$

4. *En el ascensor de un edificio con bajo y diez plantas, entran en el bajo cuatro personas. Cada persona se baja con independencia de las demás y con igual probabilidad en cada planta. Calcula la probabilidad de que:*

a) *Las cuatro personas se bajen en la décima planta.*
b) *Las cuatro se bajen en la misma planta.*
c) *Las cuatro se bajen en distintas plantas.*

SOLUCIÓN:

Los sucesos simples son de la forma (x_1,x_2,x_3,x_4) siendo x_i el piso en el que se baja la persona i. El número de casos posibles es *10x10x10x10=*$RV_{10,4}=10^4=10000$. Podemos hacerlo de dos formas diferentes,

Método 1: mediante la regla de Laplace, $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$

Método 2: Aprovecharemos para ir utilizando conceptos de independencia (capítulo 7) ya adelantados en la clase de los temas 1 y 2.

a) Las cuatro personas se bajen en la décima planta

Método 1: El único caso favorable es (10,10,10,10). Por tanto, $P(\text{los 4 se bajan en la 10ª planta}) = \dfrac{1}{10000}$

Método 2: Sean los sucesos A_i=*"la persona 'i' se baja en la 10ª planta", i=1,2,3,4.* Como estos sucesos son independientes, tenemos que

$$P(\text{los 4 se bajan en la 10ª planta}) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{10000}$$

b) Las cuatro se bajen en la misma planta.

Método 1: Ahora los casos favorables serán 10: (1,1,1,1),….(10,10,10,10).

$$P(\text{los 4 se bajan en la misma planta}) = \frac{10}{10000} = \frac{1}{1000}$$

Método 2: la probabilidad de que las cuatro personas se bajen en la misma planta es la misma que la probabilidad de que, fijada una persona, las demás se bajen en la misma planta que se bajó ésta; por lo tanto:

$$P(\text{los 4 se bajan en la misma planta}) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{1000}$$

c)Las cuatro se bajen en distintas plantas.

Método 1: casos favorables: *10X9X8X7=*$V_{10,4}$

Por lo tanto,

$$P(\text{los 4 se bajen en distintas plantas}) = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{10000} = \frac{63}{125}$$

Método 2: fijada una persona, calcularemos la probabilidad de que las demás se bajen en plantas distintas a la que se bajó esta y que sean diferentes entre sí:

$$P(\text{los 4 se bajan distintas plantas}) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{63}{125}$$

(Aquí estamos adelantando resultados de probabilidad condicionada, que se verán formalmente en el capítulo 6, pero lo que se hace es bastante evidente)

5. (Problema 3.6 del libro) Se eligen al azar 6 cartas de una baraja española. Calcular la probabilidad de que se obtengan:

a) Cartas de un solo palo

b) Cartas de dos palos

c) Cartas de tres palos

d) Cartas de los cuatro palos

SOLUCIÓN:

Antes de empezar con cada apartado, calculemos el número de casos posibles. Dado que lo único que nos interesa es la *mano* obtenida y no el orden en que aparecen las cartas, será $C_{40,6} = \binom{40}{6}$.

Al igual que en problemas anteriores puede haber varias formas de contar los casos favorables. Para no ser reiterativos expondremos solo una *a) Cartas de un solo palo*

- Primero fijamos el palo: 4 posibilidades
- Posibilidades de que todas las cartas sean de ese palo: $\binom{10}{6}$
- Por tanto, casos favorables: $4 \times \binom{10}{6}$
- Probabilidad: $\dfrac{4 \times \binom{10}{6}}{\binom{40}{6}}$

b) Cartas de dos palos

- Fijamos los dos palos: $\binom{4}{2} = 6$ posibilidades

- Ahora vemos cuantos casos tenemos, una vez fijados los palos:

Para entender mejor este paso, supongamos que los dos palos son *oros* y *copas*. Tenemos las siguientes posibilidades

- 1 oro-5 copas: $\binom{10}{1} \times \binom{10}{5}$, 2 oros-4 copas: $\binom{10}{2} \times \binom{10}{4}$

- 3 oros-3 copas: $\binom{10}{3} \times \binom{10}{3}$, 4 oros-2 copas: $\binom{10}{4} \times \binom{10}{2}$

- 5 oros-1 copa: $\binom{10}{5} \times \binom{10}{1}$

Es decir: $2 \times \left[\binom{10}{1} \times \binom{10}{5} + \binom{10}{2} \times \binom{10}{4} \right] + \binom{10}{3} \times \binom{10}{3}$

- Eso lo hacemos para cada uno de los 6 pares de palos. Por tanto el total de casos favorables es

$$12\times\left[\binom{10}{1}\times\binom{10}{5}+\binom{10}{2}\times\binom{10}{4}\right]+6\times\binom{10}{3}\times\binom{10}{3}$$

- La probabilidad será $\dfrac{12\times\left[\binom{10}{1}\times\binom{10}{5}+\binom{10}{2}\times\binom{10}{4}\right]+6\times\binom{10}{3}\times\binom{10}{3}}{\binom{40}{6}}$

c) Cartas de tres palos

- Maneras de fijar los tres palos*:* $\binom{4}{3} = 4$
- Ahora las 6 cartas pueden distribuirse así:
  - 4 de un palo, 1 de otro y 1 del restante. Eso daría lugar a $\binom{10}{4} \times \binom{10}{1} \times \binom{10}{1}$ casos pero observemos que, fijados los tres palos, esto puede ocurrir de 3 formas. Por ejemplo, si los palos son oros-copas-espadas, pueden ser (4 oros, 1 copa, 1 espada), (1 oro, 4 copas, 1 espada) y (1 oro, 1 copa, 4 espadas). Por tanto el total de casos con la distribución 4-1-1 una vez fijados los palos será $3 \times \binom{10}{4} \times \binom{10}{1} \times \binom{10}{1}$

- 3 de un palo, 2 de otro y 1 del restante: Tendríamos $\binom{10}{3}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}$, pero en este caso hay 3! formas de ordenar los tres palos para obtener la distribución 3-2-1. Por ejemplo: (3 oros, 2 copas, 1 espada), (3 oros, 1 copa, 2 espadas),…

  Es decir, el total de casos para 3-2-1 una vez fijados los palos es $6\times\binom{10}{3}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}$

- 2 de cada palo (2-2-2): $\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}$ y en este caso no hay ninguna reordenación posible: Ejemplo: 2 oros,2 copas,2 espadas

- Por tanto, una vez fijados los palos tenemos

$3\times\binom{10}{4}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}+6\times\binom{10}{3}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}+\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}$ y el total de casos favorables es esa expresión multiplicada por 4 que eran las maneras de seleccionar los tres palos, con lo cual

- la probabilidad será

$$\frac{12\times\binom{10}{4}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}+24\times\binom{10}{3}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}+4\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}}{\binom{40}{6}}$$

d) Cartas de los cuatro palos

- Solo hay una posibilidad de elegir los cuatro palos pues deben estar todos
- Ahora, las seis cartas pueden distribuirse de las siguientes formas:
  - **3-1-1-1**. Esto daría $\binom{10}{3}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}$ casos pero a su vez esta distribución puede ocurrir de **4** formas, según cuál sea el palo que se repite (3 oros, 1 copa, 1 espada, 1 basto), (1 oro, 3 copas, 1 espada, 1 basto), (1 oro, 1 copa, 3 espadas, 1 basto)y (1 oro, 1 copa, 1 espada, 3 bastos). En total,

    $$4\times\binom{10}{3}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}=4\times\binom{10}{3}\times 10^3$$

- **2-2-1-1.** Tendríamos $\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}$ casos pero esta distribución de palos aparece de $\binom{4}{2}=6$ formas: (2 oros, 2 copas, 1 espada, 1 basto), (2 oros, 1 copa, 2 espadas, 1 basto), …

  En total $6\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{2}\times\binom{10}{1}\times\binom{10}{1}=6\times\binom{10}{2}^2\times10^2$

- Con todo ello la probabilidad sería

$$\frac{4\times\binom{10}{3}\times10^3+6\times\binom{10}{2}^2\times10^2}{\binom{40}{6}}$$