Lenguaje matemático, conjuntos y números

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea A un conjunto y $f\colon A \longrightarrow A$ una aplicación. Se define f^n para todo $n \in \mathbb{N}$ mediante

$$\begin{cases} f^0 & = I_A \text{ (aplicación identidad en A)} \\ f^{n+1} & = f^n \circ f \end{cases}$$

Demuestre por inducción sobre n lo siguiente:

a) $f^{n+1} = f \circ f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

b) si f es biyectiva entonces $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Solución: a) i) La propiedad $f^{n+1} = f \circ f^n$ es cierta para $n = 0$ pues al substituir se obtiene por un lado $f^{0+1} = f^0 \circ f = I_A \circ f = f$ y por otro lado, $f \circ f^0 = f \circ I_A = f$. Por tanto, $f^{0+1} = f \circ f^0$.

ii) Supongamos que la propiedad $f^{n+1} = f \circ f^n$ es cierta para n. Veámosla para $n+1$, esto es, $f^{(n+1)+1} = f \circ f^{n+1}$. En efecto:

$$\begin{array}{rcll} f^{(n+1)+1} & = & f^{n+1} \circ f & \text{se ha aplicado la definición de la potencia,} \\ & = & (f \circ f^n) \circ f & \text{se ha aplicado la hipótesis de inducción,} \\ & = & f \circ (f^n \circ f) & \text{por la propiedad asociativa de la composición de funciones,} \\ & = & f \circ f^{n+1} & \text{se ha aplicado la definición de la potencia.} \end{array}$$

b) Sea f una aplicación biyectiva. Obviamente para $n = 0$, $f^0 = I_A$ es biyectiva y supuesto que f^n es biyectiva, entonces $f^{n+1} = f^n \circ f$ es biyectiva por ser composición de aplicaciones biyectivas. Por tanto, f^n es biyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$.
i) La propiedad $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ es cierta para $n = 0$ pues al substituir se obtiene por un lado $(f^{-1})^0 = I_A$ y por otro lado, $(f^0)^{-1} = (I_A)^{-1} = I_A$. Por tanto, $(f^{-1})^0 = (f^0)^{-1}$.

ii) Supongamos que la propiedad $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ es cierta para n. Veámosla para $n+1$, esto es, $(f^{-1})^{n+1} = (f^{n+1})^{-1}$. En efecto:

$$\begin{array}{rcll} (f^{-1})^{n+1} & = & (f^{-1})^n \circ f^{-1} & \text{se ha aplicado la definición de la potencia,} \\ & = & (f^n)^{-1} \circ f^{-1} & \text{se ha aplicado la hipótesis de inducción,} \\ & = & (f \circ f^n)^{-1} & \text{por la fórmula de la inversa de la composición de funciones,} \\ & = & (f^{n+1})^{-1} & \text{se ha aplicado el apartado a).} \end{array}$$

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Se dice que el orden de un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ es denso (o divisible) si para todo $a, b \in U$ tales que $a \prec b$ existe $c \in U$ tal que $a \prec c \prec b$. Sean $(U, \preceq)$ y $(V, \preccurlyeq)$ dos conjuntos ordenados tales que existe una aplicación biyectiva $f\colon U \to V$ cumpliendo que para todo $a, b \in U$, $a \preceq b$ si y sólo si $f(a) \preccurlyeq f(b)$.

a) Demuestre que el orden de U es denso si y sólo si es denso el orden de V.

b) Deduzca de lo anterior si existe una aplicación biyectiva $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ cumpliendo que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ si $a \leqslant b$ entonces $f(a) \leqslant f(b)$.

Solución: Observemos que si $f\colon U \to V$ es una aplicación biyectiva cumpliendo que para todo $a, b \in U$, $a \preceq b$ si y sólo si $f(a) \preccurlyeq f(b)$, entonces $f^{-1}\colon V \to U$ es una aplicación biyectiva cumpliendo que para todo $c, d \in V$, $c \preccurlyeq d$ si y sólo si $f^{-1}(c) \preceq f^{-1}(d)$. Basta aplicar lo anterior para $a = f^{-1}(c)$ y $b = f^{-1}(d)$ y tener en cuenta que $f(a) = c$ y $f(b) = d$.

a) Por la observación anterior basta demostrar que si el orden de U es denso entonces es denso el orden de V. Supongamos que el orden de U es denso. Sean $c, d \in V$ tales que $c \prec d$, es decir, $c \preccurlyeq d$ y $c \neq d$. En consecuencia, $f^{-1}(c) \preceq f^{-1}(d)$ y como f^{-1} es biyectiva, $f^{-1}(c) \neq f^{-1}(d)$. Por tanto, $f^{-1}(c) \prec f^{-1}(d)$, y por ser el orden de U denso, existe $h \in U$ tal que $f^{-1}(c) \prec h \prec f^{-1}(d)$. Tomando $g = f(h)$ se tiene que $c = f(f^{-1}(c)) \preccurlyeq g \preccurlyeq d = f(f^{-1}(d))$ pues f conserva el orden y además $g \neq c$ y $g \neq d$ pues f es biyectiva. Por tanto, $c \prec g \prec d$, y en consecuencia el orden de V es denso.

b) Sabemos que el orden de $\mathbb{Q}$ es denso, (veáse la proposición 6.6 del texto base o directamente, si $a, b \in \mathbb{Q}$ es tal que $a < b$ entonces existe c tal que $a < c < b$, por ejemplo, tomando $c = \frac{a+b}{2}$), mientras que el orden de $\mathbb{Z}$ no es denso, por ejemplo, $2 < 3$ (o $n < n+1$) y no existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que $2 < d < 3$ (o $n < d < n+1$). En consecuencia, aplicando el apartado a) se deduce que no existe una aplicación biyectiva $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ cumpliendo que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \leqslant b$ si y sólo si $f(a) \leqslant f(b)$. Por tanto, veáse la siguiente observación, no existe una aplicación biyectiva $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ cumpliendo que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ si $a \leqslant b$ entonces $f(a) \leqslant f(b)$.
Observación: si $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es una aplicación biyectiva cumpliendo que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ si $a \leqslant b$ entonces $f(a) \leqslant f(b)$, entonces también se cumple que $a \leqslant b$ si y sólo si $f(a) \leqslant f(b)$. En efecto, si esto no fuera cierto, existirían $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $f(a) \leqslant f(b)$ y sin embargo $a \nleqslant b$. Como el orden de $\mathbb{Z}$ es total, resulta que $b < a$, es decir, $b \leqslant a$ y $b \neq a$. Por tanto, $f(b) \leqslant f(a)$ y como f es biyectiva, $f(b) \neq f(a)$, o equivalentemente, $f(b) < f(a)$, que es absurdo pues $f(a) \leqslant f(b)$.

Pregunta 3 (2,5 puntos) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario. Dados H y P dos subconjuntos no vacíos de A, se considera la suma $H + P$ y el producto $H \cdot P$ definidos por:

$$H + P = \{a + b \mid a \in H \text{ y } b \in P\}$$

$$H \cdot P = \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in H,\ b_i \in P,\ i = 1, 2 \ldots, n \text{ y } n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Sean I y J dos ideales de A.

a) Demuestre: i) $I \cdot J \subset I \cap J$; ii) $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J)$.

b) Demuestre que si $A = I + J$ entonces $I \cdot J = I \cap J$.

Solución: a) i) Veamos que $I \cdot J \subset I \cap J$: en efecto, si $z \in I \cdot J$, entonces existen $i_k \in I$, $j_k \in J$, $k = 1, 2 \ldots, n$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tales que $z = i_1 j_1 + i_2 j_2 + \cdots + i_n j_n$. Pero si I y J son ideales de A entonces $i_k j_k \in I$ e $i_k j_k \in J$ para todo $k = 1, 2 \ldots, n$ y por tanto, $z = i_1 j_1 + i_2 j_2 + \cdots + i_n j_n \in I$ y $z = i_1 j_1 + i_2 j_2 + \cdots + i_n j_n \in J$ pues I y J son subgrupos aditivos de A. En consecuencia $z \in I \cap J$.
ii) Veamos que $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J)$: en efecto, si $z \in (I + J) \cdot (I \cap J)$, entonces existen $a_k \in I + J$, $b_k \in I \cap J$, $k = 1, 2 \ldots, n$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tales que $z = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$. Si $a_k \in I + J$ entonces para cada $k = 1, 2 \ldots, n$ existen $i_k \in I$ y $j_k \in J$ tales que $a_k = i_k + j_k$. En consecuencia, $z = (i_1 + j_1) b_1 + (i_2 + j_2) b_2 + \cdots + (i_n + j_n) b_n = i_1 b_1 + b_1 j_1 + i_2 b_2 + b_2 j_2 + \cdots + i_n b_n + b_n j_n$. Teniendo en cuenta que los elementos $i_k b_k$ cumplen $i_k \in I$ y $b_k \in J$ mientras que los elementos $b_k j_k$ cumplen que $b_k \in I$ y $j_k \in J$ se obtiene que $z \in I \cdot J$.

b) Aplicando el apartado a) i) sólo tenemos que ver que $I \cap J \subset I \cdot J$ si $A = I + J$. En efecto si $A = I + J$, entonces $1 \in I + J$ y por tanto existen $i \in I$ y $j \in J$ tales que $1 = i + j$. Si $z \in I \cap J$ entonces $z = 1.z = (i + j)z = iz + zj$. Como $i \in I$, $z \in J$ e $z \in I$, $j \in J$ se tiene que $z \in I \cdot J$.

Pregunta 4(2,5 puntos) Sea en $\mathbb{C}$ la ecuación $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ siendo $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demuestre que si $\omega \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación si y sólo si es solución de dicha ecuación el opuesto de ω, $-\omega$.

b) Resuelva la ecuación.

Solución: a) Si $\omega \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación entonces $(\omega-1)^n-(\omega+1)^n=0$. Comprobemos que $-\omega$ es solución de la ecuación. En efecto:

$$\begin{aligned}
(-\omega-1)^n-(-\omega+1)^n &= \big((-1)(\omega+1)\big)^n-\big((-1)(\omega-1)\big)^n\\
&= (-1)^n\Big((\omega+1)^n-(\omega-1)^n\Big)=(-1)^{n+1}\Big((\omega-1)^n-(\omega+1)^n\Big)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Aplicando lo anterior, si $-\omega$ es solución de la ecuación entonces $-(-\omega)=\omega$ es solución.

b) Observemos en primer lugar que la ecuación $(z-1)^n-(z+1)^n=0$ es en realidad una ecuación de grado $n-1$. Para $n=1$ se obtiene $-2=0$ que no tiene solución. Supondremos pues que $n>1$. Teniendo en cuenta que $z=1$ no es solución de la ecuación, dividimos por $(z-1)^n$ y se obtiene

$$1=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n .$$

Efectuando el cambio de variable $\omega=\frac{z+1}{z-1}$ se obtiene la ecuación $\omega^n=1$, que expresando en forma exponencial para $\omega=re^{i\beta}$, se obtiene

$$r^n e^{in\beta}=e^{i\cdot 0}$$

cuyas soluciones son $\begin{cases} r^n=1 \text{ (ecuación en } \mathbb{R}_+) \\ n\beta=0\ [\bmod 2\pi] \end{cases}$.

Obtenemos n soluciones distintas ω_0, ω_1, $\ldots$, ω_{n-1}:

$$\omega_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}} \quad \text{para } k=0,1,\ldots,n-1 \ .$$

Deshaciendo el cambio de variable, $\omega(z-1)=z+1$, esto es, $z(\omega-1)=\omega+1$. Y por tanto,

$$z=\frac{\omega+1}{\omega-1}$$

siempre que $\omega\neq 1$. En consecuencia como para $k=0$, se obtiene $\omega=1$, las soluciones de la ecuación propuesta son

$$z_k=\frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}+1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1} \quad \text{para } k=1,2,\ldots,n-1 \ .$$