Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2018, 2ª. Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)

Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Autovalor y autovector.

(b) Signatura.

(c) Matriz de un producto escalar.

(d) Subespacio máximo asociado a un autovalor.

Ejercicio 1: (2 puntos)

Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial euclídeo $(V, <,>)$. Demuestre que si f transforma una base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V en otra base ortonormal $\{f(v_1), \ldots, f(v_n)\}$ de V, entonces f es una isometría.

Ejercicio 2: (2 puntos)

Sean V un espacio vectorial real, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y f un endomorfismo de V que cumple las siguientes condiciones:

(a) Tiene dos autovalores distintos λ_1 y λ_2 con multiplicidades algebraicas $a_1 + a_2 = 4$.

(b) $\mathrm{Ker}(f) \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\ x_4 = 0\}$

(c) $f(v_3) = 2v_3$ y $v_1 - v_2$ es un autovector.

Determine si f es diagonalizable.

Ejercicio 3: (2 puntos)

Determine las ecuaciones de los planos invariantes irreducibles del endomorfismo f cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4: (2 puntos)

Sean $P_1 \equiv \{x + 2y - z = 0\}$ y $P_2 \equiv \{x + 2y + z = 0\}$ dos planos del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$. Considerando el producto escalar estándar, halle una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que el subespacio generado por los vectores u_1 y u_2 esté contenido en el plano P_1 y el subespacio generado por los vectores u_1 y u_3 no esté contenido en el plano P_2.

Soluciones

Ejercicio 1: Proposición 9.5, pág. 328.

Ejercicio 2: Sean V un espacio vectorial real, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V y f un endomorfismo de V que cumple las siguientes condiciones:
(a) Tiene dos autovalores distintos λ_1 y λ_2 con multiplicidades algebraicas $a_1 + a_2 = 4$.
(b) $\mathrm{Ker}(f) \equiv \{x_1 - x_2 = 0,\, x_4 = 0\}$
(c) $f(v_3) = 2v_3$ y $v_1 - v_2$ es un autovector.
Determine si f es diagonalizable.

Solución: Del apartado (a) se deduce que f admite una forma canónica de Jordan (Teorema de existencia, pág. 307).

Por otro lado, dado que $\mathrm{Ker}(f) = V_0$ es el subespacio propio asociado al autovalor 0, de (b) se deduce que $\lambda_1 = 0$ es un autovalor con multiplicidad geométrica $g_1 = \dim V_0 = 2$. Su multiplicidad algebraica cumple $4 \geq a_1 \geq g_1 = 2$.

De la condición (c) sabemos que v_3 es un autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 2$, luego sus multiplicidades algebraica y geométrica son $2 \geq a_2 \geq g_2 \geq 1$; y también que $v_1 - v_2$ es otro autovector. Para deducir a cuál de los dos autovalores está asociado dicho autovector primero comprobamos que $v_1 - v_2 \notin \mathrm{Ker}(f)$, es decir, no es autovector asociado a $\lambda_1 = 0$; luego será autovector asociado a $\lambda_2 = 2$. Como v_3 y $v_1 - v_2$ son linealmente independientes, entonces forman una base del subespacio propio V_2 cuya dimensión g_2 no pude ser mayor que 2. En resumen, se tiene

$$\lambda_1 = 0,\, a_1 = g_1 = 2 \;\text{ y }\; \lambda_2 = 2,\, a_2 = g_2 = 2$$

Como multiplicidades algebraicas y geométricas coinciden, entonces f es diagonalizable. Su forma canónica de Jordan es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3: Determine las ecuaciones de los planos invariantes irreducibles del endomorfismo f cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: Se corresponde con el caso 3.5 de la página 231. Y con otro enfoque aplicando la Proposición 6.11, está resulelto en el ejemplo 6.13, pág. 238. Reproducimos este segundo razonamiento.

Los planos irreducibles son subespacios 2-cíclicos de la forma

$$L(v, (f - \mathrm{Id})(v)) \;\text{ con }\; v \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 - \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$$

Deteminamos los subespacios generalizados: $K^1(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) = \{v : (f - \mathrm{Id})(v) = 0\}$ y sus ecuaciones son

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = 0$$

El subespacio generalizado segundo $K^2(1) = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})^2 = \{v : (f - \mathrm{Id})^2(v) = 0\}$ y sus ecuaciones son

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow K^2(1) = V$$

Así, los vectores v que pertenecen a $K^2(1) - K^1(1)$ tienen coordenadas en $\mathcal{B}$ (a, b, c) con $a \neq 0$ y su imagen por $f - \mathrm{Id}$ es $f(v) = (0, a, 0)$ pues

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces, los planos pedidos son de la forma $L((a, b, c)(0, a, 0))$ con $a \neq 0$. Para simplificar las ecuaciones de estos planos determinamos un sistema generador de vectores equivalente:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & e \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los planos son de la form $P_e = L((1, 0, e), (0, 1, 0)))$ con $e \in \mathbb{K}$ y unas ecuaciones implícitas son

$$P_e \equiv \{ex - z = 0\}, \quad e \in \mathbb{K}$$

Ejercicio 4: Sean $P_1 \equiv \{x + 2y - z = 0\}$ y $P_2 \equiv \{x + 2y + z = 0\}$ dos planos del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$. Considerando el producto escalar estándar, halle una base ortonormal $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ tal que el subespacio generado por los vectores u_1 y u_2 esté contenido en el plano P_1 y el subespacio generado por los vectores u_1 y u_3 no esté contenido en el plano P_2.

Solución:

Método 1: Basta tomar $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ tal que e_1, e_2 sean base de P_1 y $e_1 \notin P_2$, aplicarle el método de Gram-Schmidt, y después normalizarla. Por ejemplo:

$$e_1 = (1, 0, 1),\ e_2 = (0, 1, 2),\ e_3 = (0, 0, 1)$$

Método 2: Construir la base paso a paso:

1º) Tomamos $v_1 \in P_1$ ta que $v_1 \notin P_2$. Nos sirve $v_1 = (1, 0, 1)$

2º) Calculamos $v_2 \in P_1$ y ortogonal a v_1. Nos sirve $v_2 = (1, -1, -1)$

3º) Calculamos v_3 ortogonal a v_1 y v_2.: $v_1^\perp \cap v_2^\perp \equiv \{x + z = 0, x - y - z = 0\}$ por ejemplo $v_3 = (1, 2, -1)$.

Después normalizar los vectores:

$$\{u_1 = \frac{v_1}{||v_1||},\ u_2 = \frac{v_2}{||v_2||},\ u_3 = \frac{v_3}{||v_3||}\} = \{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}),\ (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}),\ (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}})\}$$