Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2017, 2ª Semana

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos: (2 puntos)
Importante: utilice una única cara para las cuatro definiciones. Si utiliza más espacio no se tendrá en cuenta.

(a) Subespacio vectorial invariante irreducible.
(b) Simetría ortogonal.
(c) Matriz de Gram de un producto escalar.
(d) Signatura de una forma cuadrática.

Ejercicio 1: (2 puntos)
Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestre que si $f : V \to V$ es una aplicación lineal que conserva la norma de los vectores, es decir $||v|| = ||f(v)||$ para todo $v \in V$, entonces f conserva el producto escalar:

$$< u, v >=< f(u), f(v) > \text{ para todo } u, v \in V.$$

Ejercicio 2: (3 puntos) Sea f un endomorfismo de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V cuya matriz respecto de una base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de V es

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinar una base $\mathcal{B}'$ tal que $\mathfrak{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ sea la forma canónica de Jordan de f.
(b) Respecto de la base $\mathcal{B}'$, determine los planos f-invariantes irreducibles.

Ejercicio 3: (3 puntos)
(a) Determine una base de $\mathbb{R}^3$ respecto de la cual la siguiente forma cuadrática tenga una matriz diagonal tal que los elementos de la diagonal principal sean iguales a 1, -1 o 0; e indique su signatura

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 6x_1x_3 - 2x_2^2 - 6x_2x_3 - 9x_3^2$$

(b) Encuentre, si es posible, un plano P de modo que la restricción de Φ a P sea una forma cuadrática definida negativa.