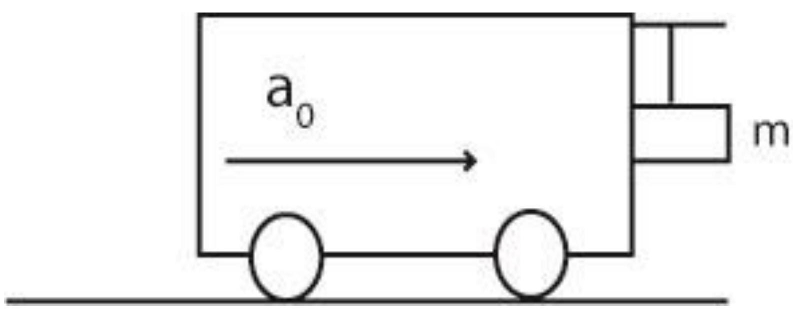
Solución examen Física (Grado en Matemáticas)
Curso 2014/2015, Junio, 1ª y 2ª semana

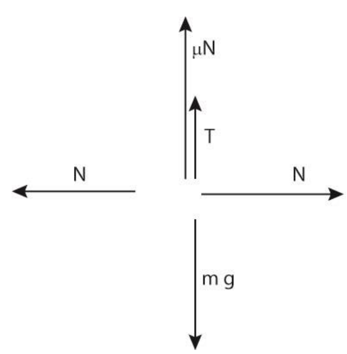
1ª Semana

1. Una vagoneta se desplaza hacia la derecha con una aceleración constante a_0. Como se muestra en la figura, en la parte frontal se encuentra una masa *m* que no está unida a la vagoneta (la vagoneta "empuja" a la masa) y con la que tiene un coeficiente de rozamiento estático μ. Esta masa se encuentra atada mediante un hilo a un soporte situado en el frente de la vagoneta. Supongamos que inicialmente el hilo no estaba tenso.
a) Dibuje el diagrama de las fuerzas que actúan sobre la masa. **(0,25 Puntos)**
b) ¿Cuál es el valor mínimo de la aceleración a_0 para que el hilo no llegue a tensarse? **(1 punto)**
c) ¿Cuánto vale la tensión del hilo si la aceleración es la mitad de ese valor mínimo? **(0,25 puntos)**



Solución

a) El diagrama de fuerzas es el siguiente:



Sobre la masa m actúan el peso, la fuerza de rozamiento y la fuerza normal de la vagoneta. También se incluye la tensión T, (aunque según el enunciado es nula) y la fuerza N (hacia la izquierda) de la masa m sobre la vagoneta.

b) La fuerza de rozamiento tiene que actuar en sentido vertical hacia arriba ya que es la única fuerza que se opone al peso y evita que caiga. De la segunda ley de Newton

$$\mu \cdot N + T - m \cdot g = 0$$
$$N = m \cdot a_0$$

Si el hilo no está tenso aún, T = 0, y la fuerza de rozamiento suficiente para compensar al peso:

$$\mu \cdot N > m \cdot g$$
$$\mu \geq \frac{g}{a_0}$$

por tanto sólo si

$$a_0 > {}^{g}/_{\mu}$$

el rozamiento estático será suficiente para mantener la masa en su posición y que no se llegue a tensar el hilo.

c) Si $a_0 = {}^{g}/_{2\mu}$, entonces

$$T = m \cdot g - \mu \cdot m \cdot a_0 = {}^{g \cdot m}/_{2}$$

2. Un disco homogéneo de masa M, radio R y momento de inercia $I = MR^2/2$, está girando sin rozamiento alrededor de su eje. En un momento dado una masa m=M/2 cae sobre su superficie quedando pegada en la posición r=R/2, de modo que el conjunto gira con una velocidad angular ω. Al cabo de un cierto tiempo la masa se despega y sale disparada con una energía cinética E_c. En función de estos datos, encuentre la posición en la que debería haberse quedado pegada para que saliera disparada con una energía cinética de $E_c/2$. **(2 puntos)**

Solución

Sean R' y w' el radio y la velocidad angular en la posición pedida.
Utilizamos la proporción entre las energías con las que se desprendería la masa:

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}mR'^2w'^2 = \frac{T}{2} = m\frac{R}{16}^2 w^2$$

De donde

$$R'^2w'^2 = \frac{R^2w^2}{8}$$
$$w' = \frac{R}{2\sqrt{2}R'}w$$

Los momentos angulares en esas posiciones son:

$$L = \frac{M}{2}R^2 w + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 w$$
$$L' = \frac{M}{2}R^2 w' + mR'^2 w'$$
Como en ningún momento actúan torques externos y el sistema inicial es el mismo, los momentos angulares son iguales $L = L'$:
$$(2MR^2 + mR^2)w = (2MR^2 + 4mR'^2)w'$$
Si substituimos el valor de w' y de m obtenemos
$$5MR^2 = (4MR^2 + 4MR'^2)\frac{R}{2\sqrt{2}R'}$$
$$R'^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}R\,R' + R^2 = 0$$
De donde
$$R' = R\frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{\frac{25}{2} - 8}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{2\sqrt{2}} = \{\,3.23R, 0.310\,R\}$$
Donde solo tiene sentido la solución dentro del disco, R' menor de R:
$$R' = 0.310R$$

3. Un proyectil se dispara hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial de $2\sqrt{\mathrm{GM_T/R_T}}$, siendo $\mathrm{M_T}$ y $\mathrm{R_T}$ la masa y radio terrestres, respectivamente, y G la constante de gravitación universal. Obtener la expresión de la velocidad del proyectil en función de la altura h sobre la superficie de la Tierra, y calcular la velocidad que se obtiene en el límite $h \to \infty$. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

Observamos que la velocidad inicial es mayor que la velocidad de escape, de modo que el proyectil escapará del campo gravitatorio terrestre. Aplicando la conservación de la energía tenemos
$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_T m}{R_T + h} = \frac{1}{2}mv_0{}^2 - G\frac{M_T m}{R_T}$$
Despejando tenemos
$$v(h) = \sqrt{v_0{}^2 - 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)}$$
$$= \sqrt{4\frac{GM_T}{R_T} - 2GM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h}\right)} = \sqrt{2GM_T\left(\frac{1}{R_T} + \frac{1}{R_T + h}\right)}$$
En el límite $h \to \infty$ obtenemos:

$$v_{\lim} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}}$$

4. Supongamos que tenemos dos hilos de grosor despreciable colocados de forma paralela en el plano XY. Uno de ellos puede considerarse infinito y tiene una distribución uniforme de carga positiva con densidad lineal λ. Su dirección viene dada por la recta x=0. El segundo hilo tiene una longitud finita L y también tiene la mima densidad lineal de carga. Su dirección coincide con la recta x = d. Calcular la fuerza eléctrica total ejercida por el hilo infinito sobre el hilo de longitud L. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

Aplicamos el teorema de Gauss para obtener el campo creado por la carga lineal infinita:

$$\phi = \oint_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dA = 4\pi k Q_{\text{interior}}\,.$$

Si tomamos una superficie cilíndrica de radio *r* y altura *l* con eje el hilo infinito, tenemos que

$$E(r)2\pi rl = 4\pi k\lambda l \quad \rightarrow \quad E(r) = \frac{2k\lambda}{r}$$

La dirección de este campo es perpendicular al eje del hilo.

Cada elemento de carga dq del hilo finito sentirá, por tanto, una fuerza eléctrica:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}(r)dq = \frac{2k\lambda}{d}dq\,\mathbf{i} = \frac{2k\lambda^2}{d}dl\,\mathbf{i}\,,$$

donde hemos empleado: $dq = \lambda dl$.

Ahora podemos integrar para obtener la fuerza total:

$$\mathbf{F} = \int_0^L \frac{2k\lambda^2}{d}dl\,\mathbf{i} = \frac{2k\lambda^2 L}{d}\mathbf{i}$$

5. Consideremos una bobina compuesta de *N* espiras por la que circula una corriente de intensidad *I*. Unimos los extremos de la bobina formando un toroide de radio interno *a* y radio externo *b* (fíjese que el radio de cada espira es (*b*-*a*)/2). Utilizar la ley de Ampère para calcular el campo magnético a una distancia *r* desde el centro del toroide y representar gráficamente la variación del módulo del campo con esa distancia radial. ¿Dónde se producen discontinuidades? **(2 puntos)**

<u>Solucion</u>

La ley de Ampére establece que

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_C$$

Si consideramos la curva cerrada de radio *r* centrada en el centro del toroide, y nos damos por cuenta que, por simetría, la dirección del campo magnético será tangente a este circunferencia en todo punto de ella y su módulo constante, tenemos que

$$B 2\pi r = \mu_0 I_C \quad \Rightarrow \quad B = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < a \\ \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r} & \text{si} \quad a < r < b \\ 0 & \text{si} \quad r > b \end{cases}$$

Las discontinuidades se producen en las caras interna y externa del toro.

6. En un sistema S se observan dos sucesos: el suceso A en un punto del eje *x*, y después de un tiempo Δt, se observa el suceso B a una distancia Δx del punto donde ocurrió el suceso A, también sobre el eje *x*. Calcular la velocidad a la que debe moverse un sistema S' con respecto a S en la dirección positiva del eje OX para que desde ese sistema los dos sucesos sean simultáneos. **(1,5 puntos)**
Recordamos que las transformaciones de Lorentz son:

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

<u>Solución</u>

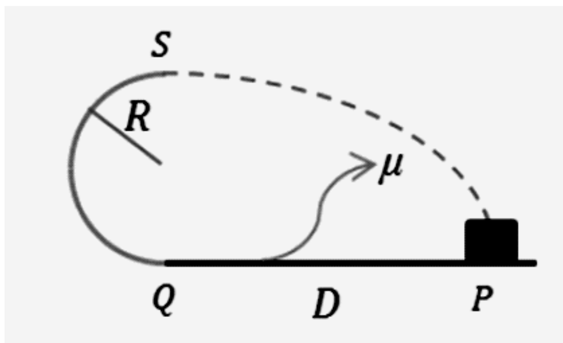
Aplicando la transformación inversa tenemos

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right).$$

Como los sucesos ocurren en el mismo instante con respecto al sistema S' tenemos que $\Delta t' = 0$, de modo que $v = c^2 \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$

2ª Semana

1. Una masa *m* situada en un punto *P* se mueve hacia la izquierda con una velocidad inicial v_0, como se ilustra en la figura. La masa recorre una distancia *D* sobre una superficie horizontal rugosa hasta que llega al punto *Q*, donde continua por un carril vertical sin rozamiento con forma de semicírculo de radio *R*. El coeficiente de rozamiento en el tramo horizontal *PQ* es μ. Calcule la velocidad inicial v_0 de *m* en el punto *P* para que cuando salga disparada del semicírculo (punto S) caiga sobre el punto de partida *P*. **(2 puntos)**



Solución

Calculemos primero la velocidad necesaria para que una vez que abandone el semicírculo recorra una distancia *D*. La velocidad de salida en *S* es horizontal por lo que describe una trayectoria parabólica desde su punto más alto, 2*R*

$$h = 2R = \frac{1}{2} g\, t^2 \text{ , } t_D = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$$

En este punto *S* deberá tener una velocidad

$$v_S = \frac{D}{t_D} = \frac{D}{2}\sqrt{\frac{g}{R}}$$

Si aplicamos la conservación de la energía entre los puntos de inicio y fin de la trayectoria circular, *Q* y *S* (tomamos la energía potencial igual a cero en la superficie horizontal)

$$E_Q = E_S$$
$$K_Q = K_S + U_S$$
$$\frac{1}{2} m v_Q^2 = \frac{1}{2} m v_S^2 + mg2R$$
$$v_Q^2 = \frac{gD^2}{4R} + 4gR$$

La velocidad inicial tendrá que ser superior a esta debido a las pérdidas por rozamiento. Aplicando el balance de energías que tenga en cuenta el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento:

$$E_Q + W_{roz} = E_P$$

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{gD^2}{4R}+4gR\right)+D\,\mu\,m\,g=\frac{1}{2}mv_P^2$$

De donde podemos despejar

$$v_P=\sqrt{\frac{gD^2}{4R}+4gR+2D\,\mu\,\,g}$$

2. Una fuerza conservativa *F*(*x*) actúa sobre una partícula de masa 1 kg que se mueve sobre el eje x. La energía potencial asociada con *F*(*x*) tiene la siguiente expresión:

$$U(x)=a\cdot(x-b)^2,$$

donde a y b son constantes tales que:

- en la posición x_1 =1 m, la velocidad de la partícula es máxima y su energía cinética es E_{c1} = 5 J.
- en la posición x_2 =2 m la velocidad de la partícula es v_2 = 2 m/s.

Calcule el valor de la fuerza en la posición x_3 = 3 m. **(1,5 puntos)**

Solución

En la posición x_1 la energía cinética es máxima por lo que la energía potencial es mínima.

$$\frac{dU(x)}{dx}=2a\,(x-b)=0$$

Esto implica que b=1 m. También puede deducirse geométricamente, U(x) es una parábola cuyo valor mínimo es 0. En este punto x_1=1 la energía potencial es nula y, por tanto, la energía total, constante, es igual a la energía cinética de este punto, E= 5 J.

En la posición x_2 la energía de la partícula es la suma de la cinética y la potencial:

$$T+U=a\cdot(2-1)^2+\frac{1}{2}\cdot1\cdot2^2=a+2=5$$

De donde se obtiene el valor de

$$a=3\;N/m$$

y la expresión completa del potencial

$$U(x)=3\cdot(x-1)^2$$

La fuerza ejercida por este potencial es:

$$F(x)=-\frac{dU(x)}{dx}=-6(x-1)$$

que para la posición x_3=3 toma el valor

$$F(x)=-12\;N$$

3. Consideremos el sistema binario (aislado) compuesto por dos estrellas cuyas masas suman 4 veces la masa del Sol M_S. Las estrellas se encuentran separadas por una distancia *d* que es constante. Ambas estrellas describen órbitas circulares alrededor del mismo punto fijo, que se encuentra en la línea imaginaria que las une, debido al campo gravitatorio entre ellas. Calcular, en función de los datos del enunciado, la distancia *d* que separa a las dos estrellas sabiendo que ambas órbitas tienen el mismo periodo *T*. Suponer que conocemos *G*. **(2 puntos)**

Solución

La ecuación para las estrellas es

$$M_1 \frac{v^2}{R} = M_1 \omega^2 R = G\frac{M_1 M_2}{d^2}$$

$$M_2 \frac{v^2}{d-R} = M_2 \omega^2 \left(d-R\right) = G\frac{M_1 M_2}{d^2}$$

Ahora podemos resolver este sistema de muchas formas, todas ellas dando lugar a la solución del problema:

Por ejemplo, igualando obtenemos que

$$M_1 R = M_2 \left(d-R\right)$$

Obsérvese que este resultado podría haber sido también obtenido si nos damos cuenta de que el punto fijo alrededor del cual orbitan las estrellas es el centro de masas del sistema, que debe ser fijo por tratarse de un sistema aislado en el que sólo intervienen fuerzas internas de acción-reacción. En efecto, si calculamos el centro de masas del sistema con respecto a la estrella de masa M_1 tenemos que

$$r_{CM} = \frac{M_2 d}{M_1 + M_2}$$

que es igual a la ecuación anterior teniendo en cuenta que $r_{CM} = R$, siendo *R* el radio de giro de la estrella de masa M_1.

Sabiendo que $M_1 + M_2 = 4M_S$, podemos despejar

$$M_1 R = (4M_S - M_1)\left(d-R\right) \quad \rightarrow \quad M_1 = \frac{4M_S\left(d-R\right)}{d}$$

Ahora podemos utilizar esta expresión en la segunda ecuación inicial

$$M_2 \omega^2 \left(d-R\right) = G\frac{M_1 M_2}{d^2}$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = G\frac{4M_S}{d^3} \quad \rightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{GM_S T^2}{\pi^2}}$$

Si en lugar de igualar hubiésemos sumado las dos ecuaciones de partida:

$$\omega^2 R = G\frac{M_2}{d^2}$$

$$\omega^2 \left(d-R\right) = G\frac{M_1}{d^2}$$

tendríamos

$$\omega^2 d = G\frac{M_1 + M_2}{d^2} = G\frac{4M_S}{d^2}$$

Y despejando *d* obtenemos la misma solución de más arriba.

4. En el centro de un cubo de arista *L* colocamos un carga *q*. Calcular el flujo eléctrico que atraviesa una cara ¿Cómo varía ese flujo si aumentamos *L*? **(1,5 puntos)**

Solución

Si aplicamos la ley de Gauss obtenemos que el flujo que atraviesa la superficie del cubo es:

$$\phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Como el cubo tiene seis caras iguales, el flujo que atravesará cada una de las caras será:

$$\phi_{cara} = \frac{q}{6\varepsilon_0}$$

y es independiente del tamaño del cubo.

5. Consideremos un segmento de un conductor rectilíneo que va desde el punto A=(1,1,1) m al punto B=(4,0,2) m del espacio. Por él circula una corriente de intensidad 3 A. Si se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = 1\,\mathbf{i} - 2\,\mathbf{k}$ T, calcular el vector fuerza magnética ejercida por el campo sobre el segmento de hilo. **(1,5 puntos)**

Solución

El vector que define el segmento conductor es el vector que une los puntos A y B: $\mathbf{L} = \overrightarrow{AB} = (4-1, 0-1, 2-1) = (3,-1,1)\,\mathrm{m}$. La fuerza magnética sobre éste es

$$\mathbf{F} = I(\mathbf{L} \times \mathbf{B})$$

Calculamos el producto vectorial:

$$\mathbf{L} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k} \;\; \mathrm{N/A}$$

Finalmente obtenemos:

$$\mathbf{F} = 6\mathbf{i} + 21\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \;\; \mathrm{N}$$

6. En un sistema S ocurren dos sucesos sobre el eje *x* separados por una distancia Δx y un tiempo Δt. El sistema S' se mueve con velocidad *v* con respecto a S en la dirección positiva del eje OX. Demostrar que esos sucesos pueden ser simultáneos en el sistema S' sólo si $\Delta x > c\Delta t$. **(1,5 puntos)**
Recordamos que las transformaciones de Lorentz son

$$x = \gamma\left(x' + vt'\right) \qquad t = \gamma\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right)$$

$$x' = \gamma\left(x - vt\right) \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right)$$

con $\gamma = 1\Big/\sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

<u>Solución</u>

Aplicando la transformación inversa tenemos

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}\right).$$

Para que los dos sucesos ocurran en el mismo instante con respecto al sistema S' tenemos que $\Delta t' = 0$, de modo que $v = c^2 \dfrac{\Delta t}{\Delta x}$. Por otro lado tenemos que debe cumplirse que $v < c$. Sustituyendo llegamos a la condición $\Delta x > c\Delta t$.