**Pregunta 1** (2,5 puntos)
Sea $A$ un conjunto y $f\colon A \longrightarrow A$ una aplicación. Se define $f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ mediante

$$\begin{cases} f^0 & = I_A \text{ (aplicación identidad en A)} \\ f^{n+1} & = f^n \circ f \end{cases}$$

Demuestre por inducción sobre $n$ lo siguiente:

a) $f^{n+1} = f \circ f^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$;

b) si $f$ es biyectiva entonces $(f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

**Pregunta 2** (2,5 puntos)
Se dice que el orden de un conjunto ordenado $(U, \preceq)$ es denso (o divisible) si para todo $a, b \in U$ tales que $a \prec b$ existe $c \in U$ tal que $a \prec c \prec b$. Sean $(U, \preceq)$ y $(V, \preccurlyeq)$ dos conjuntos ordenados tales que existe una aplicación biyectiva $f\colon U \to V$ cumpliendo que para todo $a, b \in U$, $a \preceq b$ si y sólo si $f(a) \preccurlyeq f(b)$.

a) Demuestre que el orden de $U$ es denso si y sólo si es denso el orden de $V$.

b) Deduzca de lo anterior si existe una aplicación biyectiva $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ cumpliendo que para todo $a, b \in \mathbb{Z}$ si $a \leqslant b$ entonces $f(a) \leqslant f(b)$.

**Pregunta 3** (2,5 puntos) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo unitario. Dados $H$ y $P$ dos subconjuntos no vacíos de $A$, se considera la suma $H + P$ y el producto $H \cdot P$ definidos por:

$$H + P = \{a + b \mid a \in H \text{ y } b \in P\}$$

$$H \cdot P = \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n \mid a_i \in H,\ b_i \in P,\ i = 1, 2 \ldots, n \text{ y } n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Sean $I$ y $J$ dos ideales de $A$.

a) Demuestre: i) $I \cdot J \subset I \cap J$; ii) $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset (I \cdot J)$.

b) Demuestre que si $A = I + J$ entonces $I \cdot J = I \cap J$.

**Pregunta 4**(2,5 puntos)
Sea en $\mathbb{C}$ la ecuación $(z - 1)^n - (z + 1)^n = 0$ siendo $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Demuestre que si $\omega \in \mathbb{C}$ es solución de la ecuación si y sólo si es solución de dicha ecuación el opuesto de $\omega$, $-\omega$

b) Resuelva la ecuación.