Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano de dimensión infinita. Justifique que la bola cerrada unidad
$$B = \{x \in \mathcal{H} \colon \|x\| \leq 1\}$$
no es compacta.

Pregunta 2 (3 puntos)
En el espacio $\mathcal{C}[-1,1]$ de las funciones $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continuas, con el producto interno definido por
$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)\overline{g(t)}dt$$
sean los subespacios
$$F = \left\{f \in \mathcal{C}[-1,1] \colon f(t) = 0 \text{ para todo } t \in [-1,0]\right\}$$
y
$$G = \left\{f \in \mathcal{C}[-1,1] \colon f(0) = 0\right\}.$$

a) Determine $F^{\perp}$.

b) Determine $G^{\perp}$ y determine si es cierta la igualdad $\mathcal{C}[-1,1] = G \oplus G^{\perp}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ una aplicación lineal tal que $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Demuestre que $T^*T = I_{\mathcal{H}}$ y que $\operatorname{Im}(T) = \ker(I_{\mathcal{H}} - TT^*)$.

Pregunta 4 (2 puntos)
Sabiendo que la transformada de Fourier de la función
$$f(t) = \mathrm{e}^{-at^2}\,,\ t \in \mathbb{R} \quad \text{es} \quad \widehat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2a}}\mathrm{e}^{-\frac{w^2}{4a}}\,,\ w \in \mathbb{R}\,.$$
calcule la siguiente convolución:
$$\frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} * \frac{1}{b\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2b^2}}\,.$$