Álgebra Lineal I

Problema 1

A) Estudiar si $H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y = z-t = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. (1 punto)

B) Sea $R[X]$ el espacio vectorial de los polinomios en la variable X con coeficientes reales,. Se considera en $R[X]$ los polinomios $f_1 = 1+X$, $f_2 = 1+X^2, f_3 = 1+X+X^2$. Estudiar si $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ forman una base del subespacio vectorial $R_2[X]$, de los polinomios reales de grado menor o igual a dos. (1,5 puntos)

Solución

A) Son los vectores de la forma $(x,-x,z,z) = x(1,-1,0,0)+y(0,0,1.1)$, como los dos vectores son independientes es un subespacio vectorial de dimensión 2.

B) Una base la forman $\{1,x,x^2\}$

$1 = f_1+f_2+f_3$

$x = f_3-f_2$

$x^2 = f_3-f_1$

Entonces $\{1,x,x^2\}$ es un sistema generador formado por tres vectores en un espacio vectorial de dimensíon tres, luego es una base.

Problema 2

A) Sea E un espacio vectorial de tipo finito y consideremos una base suya $B = \{u_1,\ldots,u_n\}$. Sea F un segundo espacio vectorial (no necesariamente de tipo finito) y $v_1,\ldots v_n \in F$. Entonces existe una única aplicación lineal $f : E \to F$ tal que $f(u_1) = v_1,\ldots,f(u_n) = v_n$. (2 puntos)

B) Sea A una matriz nxn. Demostrar que si n es impar, $A^t.A = I_n$ (I_n es la matriz identidad nxn) y $det(A) = 1$, entonces $det(A-I_n) = 0$. (2 puntos)

Solución

A) Pág 200 del libro

B) Problema prueba evaluación a distancia del año 2010

Problema 3

Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación líneal de espacios vectoriales de la que se conoce

$$f((1,1,0,0)) = (0,1,0,-1) \quad \text{y} \quad f((1,0,1,0)) = (1,1,1,0)$$

Hallar la matriz asociada, respecto de las bases canónicas, en los siguientes casos:

A) $Ker(f) = im(f)$ (1,5 puntos)

B) $f \circ f = f$ (2 puntos)

Solución

$f((1,1,0,0)) = (0,1,0,-1)$

$f((1,0,1,0)) = (1,1,1,0)$

$f((0,1,0,-1)) = (0,0,0,0)$

$f((1,1,1,0)) = (0,0,0,0)$

Por lo tanto

$f((1,0,0,0)) = (-1,2,1,-1)$

$f((0,1,0,0)) = (-1,-1,-1,0)$

$f((0,0,1,0)) = (0,-1,0,1)$

$f((0,0,0,1)) = (-1,-1,-1,0)$

Luego la matriz es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

En el caso f.f $=$f

$f((0,1,0,-1)) = f.f((0,1,0,-1)) = f((1,1,0,0)) \Rightarrow f((1,1,0,0) - (0,1,0,-1)) = f((1$

De forma análoga se obtiene que

$f(1,0,1,0) = (1,1,1,0)$

Por lo tanto

$f((1,0,0,0)) = (0,1,0,-1)$

$f((0,1,0,0)) = (0,0,0,0)$

$f((0,0,1,0)) = (1,0,1,1)$

$f((0,0,0,1)) = (0,-1,0,1)$

Luego la matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$