Lenguaje matemático, conjuntos y números

Prueba Objetiva Calificable

Ejercicio 1

Sean A y B subconjuntos arbitrarios de un conjunto no vacío U. Consideramos las igualdades:

p; $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

q; $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

r; $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$.

Las igualdades que siempre son verdaderas son:

a) p y q.
b) q y r.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 2

Sea $U = \mathbb{N}$ el universo de las variables x e y.
Consideramos las proposiciones:

p; $\forall x \, \exists y$ tal que $x = 2y \ \vee \ x = 2y + 1$.
q; $\exists x \, \forall y$ tal que $x = 2y \ \vee \ x = 2y + 1$.
s; $\exists x \, \forall y$ tal que $x < y < x + 2$.
r; $\forall x \, \exists y$ tal que $x < y < x + 2$.

Se tiene:

a) p, q y s son falsas.
b) s y r son verdaderas.
c) p es verdadera y s es falsa.

Ejercicio 3

Sean E un conjunto no vacío y $\mathcal{S}$ una relación en E reflexiva y transitiva que no es ni simétrica ni antisimétrica. Se define la relación $\mathcal{R}$ en E mediante:

$$x \, \mathcal{R} \, y \quad \text{si y sólo si} \quad (x \, \mathcal{S} \, y) \wedge (y \, \mathcal{S} \, x)$$

Sobre la relación $\mathcal{R}$ se puede asegurar:

a) No es simétrica ni antisimétrica.
b) Es una relación de equivalencia.
c) Es una relación de orden.

Ejercicio 4

Sean $a, b \in \mathbb{N}^*$ primos entre sí y sean $u = 2a + 5b$ y $v = 5a + 13b$. El valor de $\mathrm{mcd}(u, v)$ es:
a) 1.
b) 5.
c) Ninguna de las otras dos opciones.

Ejercicio 5

Sea $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la aplicación definida por $f(x) = \left|2x + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$.
Se tiene:

a) f es sobreyectiva.

b) f no es inyectiva.

c) $f(\mathbb{Z}) = \mathbb{N}$.

Soluciones

Ejercicio 1

p no es verdadera. Por ejemplo si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4\}$ y tomamos $X = \{1,4\}$ se tiene que $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ y sin embargo $X \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ pues $X \notin \mathcal{P}(A)$ y $X \notin \mathcal{P}(B)$.
q es verdadera. En efecto,

$$\begin{aligned} X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) &\iff (X \in \mathcal{P}(A)) \wedge (X \in \mathcal{P}(B)) \iff (X \subset A) \wedge (X \subset B) \\ &\iff X \subset A \cap B \iff X \in \mathcal{P}(A \cap (B) \end{aligned}$$

r es falsa. Por ejemplo si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,4\}$ y tomamos $X = \{1,3\}$ se tiene que $A \setminus B = \{1,2\}$ y por tanto $X \notin \mathcal{P}(A \setminus B)$ sin embargo $X \in \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ pues $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \{\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$

Ejercicio 2

La proposición p es verdadera pues $\forall x \in \mathbb{N}$, x es un número par o x es un número impar. En el primer caso existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2y$, mientras que en el segundo caso existe $y \in \mathbb{N}$ tal que $x = 2y + 1$.
La proposición q es falsa pues no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in \mathbb{N}$ se tenga una de las dos igualdades $x = 2y$ o $x = 2y + 1$. No hay un x válido para todos los posibles $y \in \mathbb{N}$.
La proposición r es verdadera pues si x es cualquier número natural, existe $y \in \mathbb{N}$, basta tomar $y = x + 1$, tal que $x < y < x + 2$.
La proposición s es falsa pues no existe ningún número $x \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in \mathbb{N}$ se tengan las desigualdades tal que $x < y < x + 2$. Como en el caso de q, no hay un x válido para todos los posibles $y \in \mathbb{N}$.
La opción correcta es la c).

Ejercicio 3

La relación $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia en E.
Reflexiva: Para todo $a \in E$ $a\mathcal{R}a$ pues $a\mathcal{S}a$ al ser $\mathcal{S}$ una relación reflexiva.
Simétrica: Para todo $a, b \in E$, si $a\mathcal{R}b$ entonces $a\mathcal{S}b$ y $b\mathcal{S}a$ y en consecuencia $b\mathcal{R}a$.
Transitiva: Para todo $a, b, c \in E$, si $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}c$ entonces $a\mathcal{S}b$, $b\mathcal{S}a$, $b\mathcal{S}c$ y $c\mathcal{S}b$ y teniendo en cuenta que $\mathcal{S}$ es transitiva, se deduce que $a\mathcal{S}c$ y $c\mathcal{S}a$. Por tanto, $a\mathcal{R}c$.
Falta comprobar que la relación $\mathcal{R}$ no es antisimétrica. En efecto, como $\mathcal{S}$ no lo es, existen $a, b \in E$, $a \neq b$, tales que $a\mathcal{S}b$ y $b\mathcal{S}a$. Por tanto, $a\mathcal{R}b$ y $b\mathcal{R}a$ y $b \neq a$.

Ejercicio 4

Sea $d \in \mathbb{N}^*$ un divisor común de u y v. Entonces existen u' y $v' \in \mathbb{N}^*$ tales que $\begin{cases} u &= du' \\ v &= dv' \end{cases}$. Sustituyendo se obtiene $\begin{cases} 2a + 5b &= du' \\ 5a + 13b &= dv' \end{cases}$. Si multiplicamos la primera igualdad por 5 y restamos la segunda igualdad multiplicada por 2 se obtiene $-b = d(5u' - 2v')$ y en consecuencia d es un divisor de b. Análogamente si multiplicamos la primera igualdad por 13 y restamos la segunda igualdad multiplicada por 5 se obtiene $a = d(13u' - 5v')$ y en consecuencia d es también divisor de a. Como a y b son primos entre sí, resulta que $\operatorname{mcd}(u, v) = 1$.

Ejercicio 5

La aplicación f no es sobreyectiva. En efecto, teniendo en cuenta que el valor absoluto es siempre un número mayor o igual que cero resulta $\left|2x + \frac{1}{2}\right| \geq 0$ y por tanto $f(x) = \left|2x + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$. En consecuencia f no toma valores enteros negativos.

La aplicación f es inyectiva. En efecto sean x y $x' \in \mathbb{Z}$ tales que $f(x) = f(x')$, sustituyendo se obtiene

$$\left|2x + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2} = \left|2x' + \frac{1}{2}\right| - \frac{1}{2}$$

es decir, $2x+\frac{1}{2}=2x'+\frac{1}{2}$ o $2x+\frac{1}{2}=-(2x'+\frac{1}{2})$. De la primera ecuación se obtiene $x=x'$ mientras que de la segunda se debe cumplir $2(x+x')=-1$, que no tiene solución en $\mathbb{Z}$ pues $2(x+x')$ es un número par. Por tanto se cumple que $x=x'$.

$f(\mathbb{Z})=\mathbb{N}$. En efecto, $2x+\frac{1}{2}\geq 0$ si y sólo si $x\geq -\frac{1}{4}$ y teniendo en cuenta que $x\in\mathbb{Z}$ resulta que $2x+\frac{1}{2}\geq 0$ si y sólo si $x\in\mathbb{N}$. En consecuencia

$$f(x)=\begin{cases} 2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=2x & \text{si } x\in\mathbb{N} \\ -2x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-2x-1 & \text{si } x\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N} \end{cases}$$

Sea $y\in\mathbb{N}$.

Si y es par, existe $x\in\mathbb{N}$ tal que $y=2x$ y en consecuencia $f(x)=y$.

Si y es impar existe $n\in\mathbb{N}$ tal que $y=2n+1=-2(-n-1)-1$ y por tanto $y=f(-n-1)$.

Por tanto, $\mathbb{N}\subset f(\mathbb{Z})$.

Por un lado $2x$ y $-2x-1\in\mathbb{Z}$ si $x\in\mathbb{Z}$ y por otro lado, vimos que f no toma valores enteros negativos, por tanto $f(\mathbb{Z})\subset\mathbb{N}$.