Problemas examen junio 2021 - AvEx

2ª semana

1. En el espectro de una estrella de la Secuencia Principal, entre las líneas observadas se encuentra la línea H_γ del hidrógeno cuya longitud de onda medida en el laboratorio es 4340,1 Å y la que se observa en el espectro de la estrella es 4344,4 Å. También se mide el movimiento propio de la estrella y se encuentra que es $1{,}5 \times 10^{-13}$ rad/s. La estrella está a 195,6 años-luz de la Tierra. Con estos datos calcule:

   a) Velocidad espacial.

   b) El ángulo que hay entre la dirección del movimiento de la estrella y la línea de observación.

   c) El máximo de emisión de la estrella se produce a una longitud de onda 5 Å inferior a la longitud de onda de H_γ, calcule la temperatura efectiva de la estrella.

   d) Estime de qué tipo espectral es.

   e) Si su radio es $R = 1{,}25 R_\odot$ ¿Qué luminosidad tendrá?

   f) ¿Cuál será su tiempo de evolución en la Secuencia Principal?

Solución:

a) La velocidad espacial, V, es:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_t^2}$$

Donde V_r y V_t son las velocidades radial y tangencial respectivamente. Ambas velocidades se pueden calcular con los datos del enunciado.

$$V_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c = \frac{4344{,}4 - 4340{,}1}{4340{,}1} c \simeq 0{,}001 \times 3 \times 10^5 = 300 \text{ km/s}$$

$$V_t = 4{,}74 \times \mu(\text{"/año}) \times d(\text{pc})$$

En la expresión anterior el movimiento propio, μ, se sustituye en "/año y la distancia en pc.

$$\mu = 1{,}5 \times 10^{-13} \times 206265 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60 \simeq 1\text{"/año}$$

$$d = \frac{195{,}6}{3{,}26} = 60 \text{ pc}$$

Por lo que sustituyendo en la expresión de la velocidad tangencial queda:

$$V_t = 4{,}74 \times 1 \times 60 = 284{,}4 \text{ km/s}$$

Y por último la velocidad espacial es:

$$V_t = \sqrt{300^2 + 284{,}4^2} = \boxed{413{,}4 \text{ km/s}}$$

b) El ángulo entre la dirección del movimiento de la estrella y la línea de observación, θ, se puede calcular con:

$$\tan\theta = \frac{V_t}{V_r} = \frac{284{,}4}{300} = 0{,}948 \Rightarrow \boxed{\theta = 43{,}5^\circ}$$

c) En el enunciado de este apartado había una errata, no debía poner H_δ debía ser H_γ, ya que era la λ de H_γ la que se proporcionaba en el enunciado. Algunos de ustedes lo han hecho con H_γ y otros H_δ, se han considerado correctos lo dos.

Considerando H_γ, el máximo de emisión se produce a $\lambda_{max} = 4335{,}1$ Å, por lo que aplicando la ley de desplazamiento de Wein:

$$\lambda_{max} \times T_{ef} = 0{,}29 \text{ cm} \times \text{K} \Rightarrow T_{ef} = \frac{0{,}29}{4335{,}1 \times 10^{-8}} \simeq \boxed{6700 \text{ K}}$$

Con H_δ salía un resultado muy similar.

d) Según la teoría, la temperatura efectiva de las estrellas de tipo espectral F0 es aproximadamente 7600 K y la de las estrellas G0 es aproximadamente 6000, así que la estrella del problema será una estrella con tipo espectral F intermedio. Si se hace una interpolación se encuentra que puede ser una estrella F5.

e)

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4 =$$

$$= 4\pi(1{,}25 \times 6{,}96 \times 10^8)^2 \times 5{,}67 \times 10^{-8} \times 6700^4 = \boxed{1{,}087 \times 10^{27} \text{ W}}$$

$$L = \frac{1{,}087 \times 10^{27}}{3{,}846 \times 10^{26}} = \boxed{2{,}83 L_\odot}$$

f) El tiempo de evolución en la secuencia principal, t_{sp}, es el tiempo que tarda la estrella en quemar el 10 % de su hidrógeno y se calcula con la siguiente expresión:

$$t_{sp}(\text{años}) = 7{,}3 \times 10^9 \frac{\mathcal{M}/\mathcal{M}_\odot}{L/L_\odot}$$

En la Secuencia Principal $\frac{L}{L_\odot} \simeq \left(\frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\odot}\right)^{3,8} \Rightarrow \frac{\mathcal{M}}{\mathcal{M}_\odot} \simeq \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{1/3,8}$, por lo que la expresión del tiempo de evolución en la Secuencia Principal queda:

$$t_{sp} = 7{,}3 \times 10^9 \left(\frac{L}{L_\odot}\right)^{\frac{1}{3,8}-1} = 7{,}3 \times 10^9 (2{,}83)^{\frac{1}{3,8}-1} = \boxed{3{,}4 \times 10^9 \text{ años}}$$

2. Considere un sistema binario que consiste en dos estrellas de neutrones de $1{,}5\mathcal{M}_\odot$ cada una, con un periodo orbital de 8 h. Una de ellas es un pulsar cuyo periodo

de pulsación medio es exactamente 2 s. Si la órbita es circular y se encuentra en el plano de observación ¿Cuáles serán los periodos de pulsación máximo y mínimo observados.

Nota: El periodo de pulsación sigue las mismas expresiones de efecto Doppler que las longitudes de onda de la radiación.

Solución:

Para poder aplicar las expresiones del efecto Doppler hay que encontrar la velocidad orbital del pulsar. La velocidad orbital del sistema binario, V, se relaciona con el periodo orbital, P, y el semieje mayor de la órbita, a, según:

$$V = \frac{2\pi a}{P}$$

Por lo que:

$$V_1 = \frac{2\pi a_1}{P} \qquad \text{y} \qquad V_2 = \frac{2\pi a_2}{P}$$

$$V = V_1 + V_2$$

Según la definición de centro de masas:

$$\mathcal{M}_1 \times a_1 = \mathcal{M}_2 \times a_2 \Rightarrow \frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

Si se considera que la 1 es la estrella de neutrones y la 2 es el pulsar:

$$\frac{\mathcal{M}_1}{\mathcal{M}_2} = 1 \Rightarrow V_1 = V_2 = \frac{V}{2}$$

Aplicando la tercera ley de Kepler:

$$\frac{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_\odot} = \frac{(a[\text{UA}])^3}{(P(\text{años}))^2}$$

$$P = \frac{8}{365 \times 24} = 0{,}9 \times 10^{-3} \text{ años}$$

Despejando y operando en la expresión de la 3ª ley de Kepler queda:

$$a^3 = 3 \times (0{,}9 \times 10^{-3})^2 = 2{,}43 \times 10^{-6} \text{ UA}^3 \Rightarrow a = 0{,}013 \text{ UA}$$

$$a_2 = \frac{0{,}013}{2} \text{ UA} \Rightarrow V_2 = \frac{2\pi a_2}{P} = \frac{2\pi \times 0{,}0065 \times 1{,}496 \times 10^{11}}{8 \times 60 \times 60} \simeq 2 \times 10^5 \text{ m/s}$$

No es una velocidad muy alta, así que se puede aplicar la expresión Doppler no relativista.

$$\frac{\Delta \mathcal{P}}{\mathcal{P}} = \pm \frac{V_2}{c} = \pm \frac{2 \times 10^5}{3 \times 10^8} = \pm 6{,}7 \times 10^{-8} \Rightarrow \Delta \mathcal{P} = \pm 6{,}7 \times 10^{-8} \times 2 = \pm 10^{-3} \text{ s}$$

Periodo máximo: El pulsar se aleja $\boxed{\mathcal{P}_\uparrow = 2{,}001 \text{ s}}$

Periodo mínimo: El pulsar se acerca $\boxed{\mathcal{P}_\downarrow = 1{,}999 \text{ s}}$