Ejercicio 1. Se dispone de n monedas, cada una con probabilidades de cara y cruz iguales a p y q, con $p+q=1$, respectivamente. En un primer lanzamiento se lanzan las n monedas. En el segundo lanzamiento se vuelven a lanzar las monedas cuyo resultado haya sido cruz, sin tocar las monedas que hayan resultado cara. Se repite iterativamente este procedimiento de tal forma que en el lanzamiento k se lanzan las monedas que hayan sido cruz en el lanzamiento $k-1$, sin tocar las monedas que hayan sido cara.

Sea X_k, para $k \geq 1$, la variable aleatoria que indica el número de caras entre las n monedas tras el lanzamiento k-ésimo, y sea T_n el lanzamiento en el que, por primera vez, las n monedas son cara.

(a) Probar que X_k tiene distribución binomial $B(n, 1-q^k)$.

(b) Hallar la función de probabilidad de X_{k+1} condicionado por $X_k = j$.

(c) Determinar la función de probabilidad de T_n (se sugiere establecer que $\{T_n > k\} = \{X_k < n\}$) y probar que

$$\mathrm{E}[T_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \left[1 - (1-q^k)^n\right] = \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} \frac{(-1)^{j-1}}{1-q^j}.$$

(a) Cada una de las n monedas es lanzada sucesivamente hasta que resulta cara. La probabilidad de que, en la k-ésima etapa del experimento, una moneda sea cruz es q^k, pues los k lanzamientos han debido ser cruz. La probabilidad de que sea cara es, por tanto, $1-q^k$. Puesto que los lanzamientos de las n monedas son independientes, se tiene que X_k tiene distribución binomial de parámetros $B(n, 1-q^k)$.

(b) Si $X_k = j$, para algún $0 \leq j \leq n$, entonces en el siguiente lanzamiento se lanzan $n-j$ monedas. Los posibles valores de X_{k+1} son $r = j, j+1, \ldots, n$, y será $X_{k+1} = r$ cuando de esas $n-j$ monedas $r-j$ hayan resultado cara. Por tanto,

$$\mathrm{P}\{X_{k+1} = r \mid X_k = j\} = \binom{n-j}{r-j} p^{r-j} q^{n-r}.$$

(c) Se cumple en efecto que $T_n > k$ precisamente cuando $X_k < n$ puesto que el instante T_n es posterior a k cuando en el k-ésimo lanzamiento aún no se han obtenido n caras. Así,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{T_n > k\} &= \mathrm{P}\{X_k < n\} \\ &= 1 - \mathrm{P}\{X_k = n\} \\ &= 1 - (1 - q^k)^n. \end{aligned}$$

Esta expresión es válida para $k \geq 0$. Se deduce que, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{T_n = k\} &= \mathrm{P}\{T_n > k-1\} - \mathrm{P}\{T_n > k\} \\ &= (1 - q^k)^n - (1 - q^{k-1})^n. \end{aligned}$$

El valor de $\mathrm{E}[T_n]$ se deduce directamente de la igualdad

$$\mathrm{E}[T_n] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}\{T_n > k\}.$$