Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sea una función $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$.

a) Demuestre que $\left(\int_a^b f(t)\,dt\right)^2 \leq (b-a)\int_a^b f^2(t)\,dt\,.$

¿Para qué funciones se tiene la igualdad?

b) Demuestre que $\big(a-b\big)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,dt\right).$

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea la aplicación $T\colon \ell^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ definida mediante

$$T(\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}$$

a) Demuestre que T está bien definida y es lineal y continua.

b) Determina el elemento de ℓ^2 que representa a T (el elemento del teorema de representación de Riesz).

Pregunta 3 (2,5 puntos)
En el espacio $L^2[0, 1]$, determina los valores de a y b que minimizan la distancia de $g(x) = ax + b$ a $f(x) = e^x$.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

Se recuerda que la transformada de Fourier de la función $g_c(t) = e^{-c|t|}$ es $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{c}{c^2+\omega^2}$ si $c > 0$. Sea la ecuación integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{(t-x)^2 + a^2}dx = \frac{1}{t^2+b^2}, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

siendo las constantes $0 < a < b$ y $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se pide:

a) La transformada de Fourier de $h_c(t) = \dfrac{1}{c^2+t^2}\,.$

b) Exprese la ecuación integral como una convolución.

c) Determine la transformada de Fourier de f.

d) Determine f.