Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio prehilbertiano real y $x, y \in \mathcal{H}$. Demuestre que x e y son ortogonales si y sólo si $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Solución: Observemos que

$$\begin{aligned}
\|x+\alpha y\| \geq \|x\| \quad &\Longleftrightarrow \quad \|x+\alpha y\|^2 \geq \|x\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \|x\|^2 + \alpha^2\|y\|^2 + 2\langle x, \alpha y\rangle \geq \|x\|^2 \\
&\Longleftrightarrow \quad \alpha^2\|y\|^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle \geq 0
\end{aligned}$$

La desigualdad $\alpha^2\|y\|^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle \geq 0$ se cumple para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ si y sólo si el discriminante de la ecuación en α, $\alpha^2\|y\|^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle = 0$, es menor o igual que cero, es decir,

$$\begin{aligned}
\alpha^2\|y\|^2 + 2\alpha\langle x, y\rangle \geq 0 \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{R} \quad &\Longleftrightarrow \quad 4\langle x, y\rangle^2 \leq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \langle x, y\rangle = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \text{ e } y \text{ son ortogonales}
\end{aligned}$$

Por tanto, x e y son ortogonales si y sólo si $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

Pregunta 2 (2,5 puntos)
Sea F el subespacio de $\mathcal{H} = \ell^2$, definido mediante

$$F = \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2 \colon x_1 = x_2\}\,.$$

Demuestre que F es cerrado en $\mathcal{H}$ y calcule la distancia mínima de $\mathbf{f}$ a F, siendo $\mathbf{f} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

Solución: F es cerrado: Sea $\mathbf{g} = \{1, -1, 0, 0, 0 \ldots,\} \in \ell^2$. Observemos que $F = \{\mathbf{g}\}^{\perp}$ pues $\forall \mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2$ se tiene

$$\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \{\mathbf{g}\}^{\perp} \iff \langle \mathbf{x}, g\rangle = 0 \iff x_1 - x_2 = 0 \iff \mathbf{x} \in F\,.$$

Por tanto, F es un subespacio vectorial cerrado de ℓ^2.

Sea $\mathbf{h}$ la proyección ortogonal de $\mathbf{f}$ sobre F. La distancia mínima de $\mathbf{f}$ a F es $\|\mathbf{f} - \mathbf{h}\|$
Escribimos la descomposición ortogonal de $\mathbf{f}$, $\mathbf{f} = \mathbf{h} + k$ siendo $k \in F^{\perp} = \{\mathbf{g}\}^{\perp\perp} = \operatorname{span}(\mathbf{g})$. Por tanto, $\mathbf{f} = \mathbf{h} + \lambda\mathbf{g}$, esto es,

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} - \lambda\mathbf{g} = \left\{1-\lambda, \frac{1}{2}+\lambda, \quad \frac{1}{n}\right\}_{n=3}^{\infty}.$$

De $\mathbf{h} \in F$ resulta que $1 - \lambda = \dfrac{1}{2} + \lambda$, es decir, $\lambda = \dfrac{1}{4}$. La distancia mínima de $\mathbf{f}$ a F es $\|\mathbf{f} - \mathbf{h}\| = \lambda\|\mathbf{g}\| = \dfrac{1}{4}\sqrt{2}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$ y $\mathcal{A} = \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Sean $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ y $T\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}$ el operador lineal tal que $T(x_n) = \alpha_n x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Demuestre que T es acotado si y sólo si $\alpha \in \ell^{\infty}$.

b) ¿Bajo qué condiciones se puede asegurar que T se extiende a una proyección ortogonal $\overline{T}\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$?

Solución: a) Tenemos que $\|T(x_n)\| = |\alpha_n|\|x_n\|$. Si T es acotado entonces existe una constante $C \geq 0$ tal que

$$|\alpha_n| = \frac{\|T(x_n)\|}{\|x_n\|} \leq C \quad \text{para todo } n.$$

Por tanto $\alpha \in \ell^\infty$ siendo $\|\alpha\|_\infty \leq C$.

Recíprocamente supongamos que $\alpha \in \ell^\infty$. Para cualquier $x \in \mathcal{A} = \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^\infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ y $\{\lambda_i\}_{i=1}^n \in \mathbb{C}^n$ tal que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Teniendo en cuenta que $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ es una base ortonormal se obtiene

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \Big\|T\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\big)\Big\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i T(x_i)\Big\|^2 = \Big\|\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i x_i\Big\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 |\alpha_i|^2 \|x_i\|^2 \\ &\leq \|\alpha\|_\infty^2 \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = \|\alpha\|_\infty^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\|T(x)\| \leq \|\alpha\|_\infty \|x\| \quad \text{para todo } x \in \mathcal{A}$$

y T es acotado.

b) Recordamos que una proyección ortogonal es un operador lineal autoadjunto tal que $P^2 = P$. Por tanto, si existe una extensión $\overline{T}$ que es una proyección, necesariamente se tiene que cumplir que $T^2(x_n) = T(x_n)$ para todo n. En consecuencia, $\alpha_n^2 x_n = \alpha_n x_n$ y por tanto $\alpha_n = 0$ o $\alpha_n = 1$. Es decir, si $\overline{T}$ es una proyección necesariamente

$$\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Veamos que esta condición es suficiente para que T se extienda a una proyección ortogonal $\overline{T}$. En efecto si $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ entonces $\alpha \in \ell^\infty$ y teniendo en cuenta el apartado anterior $T\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{H}$ es un operador lineal acotado. Como $\mathcal{A}$ es denso en $\mathcal{H}$, existe un único operador lineal acotado $\overline{T}\colon \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ que extiende a T (teorema 6.3 del texto base). En particular resulta que para cualquier $x \in \mathcal{H}$, desarrollando x en la base ortonormal, $x = \sum_{i=1}^\infty \beta_i x_i$ con $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^2$, se obtiene

$$\overline{T}(x) = \overline{T}\big(\sum_{i=1}^\infty \beta_i x_i\big) = \overline{T}\Big(\lim_n \sum_{i=1}^n \beta_i x_i\Big) = \lim_n T\big(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i\big) = \lim_n \sum_{i=1}^n \beta_i T(x_i) = \lim_n \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^\infty \beta_i \alpha_i x_i$$

Obsérvese que $\{\beta_i \alpha_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^2$. Así pues

$$\overline{T}^2(x) = \overline{T}\Big(\sum_{i=1}^\infty \beta_i \alpha_i x_i\Big) = \overline{T}\Big(\sum_{i=1}^\infty \beta_i \alpha_i x_i\Big) \sum_{i=1}^\infty \beta_i \alpha_i^2 x_i = \sum_{i=1}^\infty \beta_i \alpha_i x_i = \overline{T}(x)$$

Además para todo $x, x' \in \mathcal{H}$ siendo $x = \sum_{i=1}^\infty \beta_i x_i$ con $\{\beta_i\}_{i=1}^\infty \in \ell^2$ y $x' = \sum_{i=1}^\infty \beta_i' x_i$ con $\{\beta_i'\}_{i=1}^\infty \in \ell^2$ se tiene

$$\langle \overline{T}(x), x' \rangle = \big\langle \sum_{i=1}^\infty \beta_i \alpha_i x_i, \sum_{i=1}^\infty \beta_i' x_i \big\rangle = \sum_{i=1}^\infty \beta_i \alpha_i \overline{\beta_i'}$$

mientras que

$$\langle x, \overline{T}(x') \rangle = \big\langle \sum_{i=1}^\infty \beta_i x_i, \sum_{i=1}^\infty \beta_i' \alpha_i x_i \big\rangle = \sum_{i=1}^\infty \beta_i \overline{\alpha_i} \overline{\beta_i'}$$

Teniendo en cuenta que $\overline{\alpha_i} = \alpha_i$ pues $\alpha_i \in \{0,1\}$ resulta que $\langle \overline{T}(x), x' \rangle = \langle x, \overline{T}(x') \rangle$ y en consecuencia, $\overline{T}$ es autoadjunto.

Pregunta 4 (2,5 puntos)

a) Demuestre, usando la transformada de Fourier, que no existe ninguna función h en $L^1(\mathbb{R})$ tal que $f * h = f$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$.

b) Resuelva en $L^1(\mathbb{R})$ la ecuación $f * f = f$.

Nota: El símbolo $*$ indica el operador de convolución.

Solución: a) Supongamos que existe una función h en $L^1(\mathbb{R})$ tal que $f * h = f$ para todo $f \in L^1(\mathbb{R})$. Aplicando la transformada de Fourier se obtiene

$$\widehat{f * h}(\omega) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\omega)\widehat{h}(\omega) = \widehat{f}(\omega)$$

para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Por tanto, la transformada de Fourier de h es constante, con más precisión,

$$\widehat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R}\,.$$

Por el lema de Riemann-Lebesgue sabemos que si $h \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\lim_{|\omega|\to\infty} \widehat{h}(\omega) = 0$ que contradice el hecho de que $\widehat{h}$ sea una función constante (distinta de cero).

b) Aplicando la transformada de Fourier a la ecuación se obtiene,

$$\widehat{f * f}(\omega) = \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\omega)\widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(\omega)\,,$$

es decir,

$$\widehat{f}(\omega)\Big(1 - \sqrt{2\pi}\widehat{f}(\omega)\Big) = 0\,.$$

Por tanto, $\widehat{f}(\omega) = 0$ o $\widehat{f}(\omega) = 1$ Teniendo en cuenta que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ entonces $\widehat{f}$ es una función continua necesariamente $\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$ o $\widehat{f}(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. El lema de Riemann-Lebesgue nos permite asegurar que $\widehat{f}(\omega) = 0$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. Por tanto $f = 0$ en casi todo punto de $\mathbb{R}$.