FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES I

(Grado en Matemáticas)

Junio de 2019

NO SE PERMITE NINGÚN TIPO DE MATERIAL

Todas las respuestas **deben** estar **justificadas** razonadamente.

Se aconseja utilizar borrador en los ejercicios de más cálculos y pasar luego a limpio intentando no ocupar más de una página en cada ejercicio.

1. (2 puntos) En $\mathbb{R}^3$, con coordenadas esféricas, ¿qué curva es $C = \{(\rho, \theta, \phi) \in \mathbb{R}^3 : \rho = 2, \phi = \pi/4, \theta \in [0, 2\pi]\}$? Explíquelo con palabras, no solamente con fórmulas.

2. (2,5 puntos) a) ¿En qué dirección es igual a cero la variación de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{\frac{x+y}{2}} \cos(y-x)$, en el punto $(1,1)$?

b) Calcule la derivada direccional de f en $(1,1)$ en la dirección de máximo crecimiento de f en ese punto.

3. (3 puntos) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Estudiar si f es continua en el origen.

b) Hallar, si es posible, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Estudiar si f es diferenciable en el origen.

4. (2,5 puntos) Hallar el valor máximo global de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 3$, en el disco $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

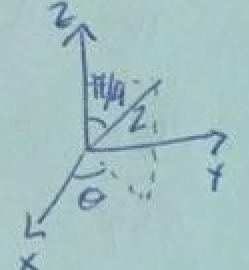
① $\rho=2 \rightarrow$ distancia al origen constante $\rightarrow$ puntos de $\mathcal{C}$ sobre la esfera centrada en O y de radio 2

$\phi=\frac{\pi}{4} \rightarrow$ colatitud constante igual a $\frac{\pi}{4}$

$\theta\in[0,2\pi] \rightarrow$ cualquier longitud

Es un paralelo de la esfera de centro O y radio 2.

$z=\rho\cos\phi = 2\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow$ curva plana



$r = 2\,\text{sen}\,\frac{\pi}{4} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Circunferencia de centro $(0,0,\sqrt{2})$ y radio $\sqrt{2}$

$$\boxed{\mathcal{C} \equiv x^2+y^2+(z-\sqrt{2})^2=2}$$

② $\vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{x+y}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cos(y-x) + e^{\frac{x+y}{2}}\left[-\text{sen}(y-x)\right](-1) =$$

$$= e^{\frac{x+y}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos(y-x) + \text{sen}(y-x)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{x+y}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cos(y-x) + e^{\frac{x+y}{2}}\left[-\text{sen}(y-x)\right] =$$

$$= e^{\frac{x+y}{2}}\left[\frac{1}{2}\cos(y-x) - \text{sen}(y-x)\right]$$

$$\vec{\nabla} f(1,1) = \left(\frac{e}{2}, \frac{e}{2}\right) = \frac{e}{2}(1,1)$$

La variación es nula en una dirección ortogonal a $\vec{\nabla} f$ por tanto $\vec{v}=(1,-1)$. La derivada direccional máxima será $\vec{\nabla} f(1,1)\cdot\frac{\vec{\nabla} f(1,1)}{\|\vec{\nabla} f(1,1)\|} = \frac{e}{2}(1,1)\cdot\frac{\frac{e}{2}(1,1)}{\frac{e\sqrt{2}}{2}} = \frac{e}{\sqrt{2}}$

③ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^3}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{4\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0} 4\rho\underbrace{\cos^3\theta}_{\text{acotado}} = 0$

$4\rho \to 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) \Rightarrow f$ es continua en $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{4h^3}{h^2+0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4h^3}{h^3} = 4$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{4\cdot 0}{0+k^2} - 0}{k} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{k^3} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{12x^2(x^2+y^2) - 4x^3\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{12x^4+12x^2y^2-8x^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^4+12x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4x^4+12x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \underset{x=y}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4x^4+12x^4}{(x^2+x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{16x^4}{4x^4} = 4 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

no garantiza continuidad de la parcial

Además las parciales pueden no ser continuas y la función ser diferenciable

$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}h-\frac{\partial f}{\partial y}k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{4h^3}{h^2+k^2} - 0 - 4h - 0k}{\sqrt{h^2+k^2}} =$

$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{4h^3-4h(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-4hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} \underset{k=mh}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-4hm^2h^2}{(h^2+m^2h^2)^{3/2}} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-4h^3m^2}{h^3(1+m^2)^{3/2}} = \frac{-4m^2}{(1+m^2)^{3/2}}$ depende de $m \Rightarrow$ este límite no existe $\Rightarrow$ no puede ser $0 \Rightarrow$ no es diferenciable

④ Buscamos máximos en interior y en frontera

$x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2$ → parametriza borde $x^2+y^2=1 \Rightarrow$ $x=\cos t$, $y=\operatorname{sen} t$

$f(x,y)=x^3+xy^2+3$ $\qquad c(t)=(\cos t, \operatorname{sen} t)$

$f(x)=x^3+x(1-x^2)+3=x^3+x-x^3+3=x+3$

$f'(x)=1>0 \Rightarrow$ creciente $\Rightarrow$ su máximo en $\boxed{x=1} \Rightarrow y=0$

$\boxed{x=-1} \Rightarrow y=0$

$\boxed{f(1,0)=1^3+1\cdot 0^2+3=4}$

$f(-1,0)=(-1)^3+(-1)\cdot 0^2+3=2$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+y^2=0$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2xy=0 \Rightarrow$ $x=0 \rightarrow y^2=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow P_1(0,0)$

ó $y=0 \rightarrow 3x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow P_2(0,0)$

El único punto crítico es el $(0,0)$. Calculamos el valor de $f(x,y)$ en $(0,0)$ y comparamos, no hace falta el Hessiano porque nos da igual clasificar.

$\boxed{f(0,0)=0^3+0\cdot 0^2+3=3}$

máximo global en $(1,0)$ y vale 4.

f sobre el borde $(f\circ c)(t)=\cos^3 t+\cos t \operatorname{sen}^2 t+3=\cos t(\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t)+3=$

$=\cos t+3=F(t)$

$F'(t)=-\operatorname{sen} t=0 \Rightarrow \boxed{t=k\pi}$

$F(k\pi)=\cos(k\pi)+3=\pm 1+3=\begin{cases}4 \rightarrow k \text{ par} \Rightarrow \boxed{k=0} \\ 2\end{cases}$ } no recorremos la curva más que una vez