Pregunta 1 (2 puntos)(0,75+0,75+0,5)
Se definen las aplicaciones f y g mediante:

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (n,m) & \longmapsto & f(n,m) = mn \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} g: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ & n & \longmapsto & g(n) = \big(n, (n+1)^2\big) \end{array}$$

a) Determine razonadamente si f es inyectiva o sobreyectiva.

b) Determine razonadamente si g es inyectiva o sobreyectiva.

c) Determine $f \circ g$ y $g \circ f$.

Pregunta 2 (3 puntos)
Se define en $\mathbb{N}^*$ la relación $\ll$ dada por:

$$a \ll b \quad \text{si y sólo si} \quad \text{existe } \; n \in \mathbb{N}^* \text{ tal que } b = a^n$$

a) Demuestre que $\ll$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{N}^*$.

b) Si $A = \{2, 4, 8\}$, estudie la existencia, y en su caso explicítelos, de cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo, máximo y mínimo, maximales y minimales del conjunto A .

Pregunta 3 (2 puntos)

Se define por recurrencia la sucesión u_n mediante: $u_0 = 0$ y $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Demuestre por inducción que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ se cumple:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le u_n \le 1$$

Pregunta 4 (3 puntos)
Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ la aplicación definida mediante $f(z) = z^3 - 2z^2 + 16$. Se pide:
a) Calcule $f(-2)$, deduzca una factorización de $f(z)$ y resuelva la ecuación $f(z) = 0$.
b) Sean los números complejos $z_0 = -2$, $z_1 = 2(1+i)$ y $z_2 = 2(1-i)$.

Calcule el módulo y el argumento de los números z_0, z_1, z_2 y $\omega = \dfrac{z_0\, z_1^2}{z_2^3}$.

c) Represente en el plano complejo los puntos M_0, M_1 y M_2 cuyos afijos son respectivamente z_0, z_1 y z_2. Demuestre que el triángulo de vértices M_0, M_1 y M_2 es isósceles pero no es equilátero.