Álgebra lineal II, Grado en Matemáticas

Junio 2011, 2^a semana.

No se permite el uso de material impreso (libros, apuntes) ni ningún tipo de calculadora.
Todas las soluciones tendrán que darse suficientemente razonadas.

Defina los siguientes conceptos:
(a) Complemento ortogonal de un subespacio vectorial.
(b) El problema de la diagonalización de endomorfismos.
(c) Forma bilineal.
(d) Forma polar.

Ejercicio 1: (2 puntos)
Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Demuestre que si $||u|| = ||v||$ entonces los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales.

Ejercicio 2: (3 puntos)
Sea f el endomorfismo de un espacio vectorial real de dimensión 3 cuya matriz respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 14+3a & a & 3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es f diagonalizable? Para $a = 2$ obtenga la matriz de Jordan, J, y una matriz P tal que $P^{-1}AP = J$.

Ejercicio: (3 puntos)
Determine si las siguientes matrices pueden corresponder a una misma forma cuadrática en distintas bases

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Soluciones

Ejercicio 1:
Sea $(V, <, >)$ un espacio vectorial euclídeo y $u, v \in V$. Demuestre que si $||u|| = ||v||$ entonces los vectores $u + v$ y $u - v$ son ortogonales.

Demostración: Sean $u, v \in V$ tales que $||u|| = ||v||$. Los vectores $u+v$ y $u-v$ son ortogonales si y sólo si $< u + v, u - v >= 0$. Desarrollamos el producto escalar

$$\begin{aligned} < & \ u + v, u - v >=< u, u > - < u, v > + < v, u > - < v, v > \\ = & \ ||u||^2 - < u, v > + < v, u > - ||v||^2. \end{aligned}$$

Por la propiedad de simetría del producto escalar se tiene que $< u, v >=< v, u >$, de donde

$$< u + v, u - v >= ||u||^2 - ||v||^2$$

Finalmente, como por hipótesis $||u|| = ||v||$, entonces

$$< u + v, u - v >= 0.$$

Ejercicio 2:
Sea f el endomorfismo de un espacio vectorial real de dimensión 3 cuya matriz respecto a la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 14 + 3a & a & 3 \end{pmatrix}$$

¿Para qué valores de a es diagonalizable?. Para $a = 2$ obtenga la matriz de Jordan, J, y una matriz P tal que $A = P^{-1}JP$.

Solución: Como la matriz A es triangular, entonces sus autovalores son los elementos de la diagonal . Se tienen el autovalor simple $\lambda_1 = 1$ y el autovalor doble $\lambda_2 = 3$. Entonces A es diagonalizable si y sólo las muliplicidades algebraicas α_i y las geométricas d_i coinciden, y esto basta comprobarlo sólo en el caso de los autovalores múltiples. Así, A es diagonalizable si y sólo si $d_2 = \dim E^1(2) = 2$ si y sólo si $rango(A - 3I) = 1$.

$$rango(A - 3I) = rango \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \\ 14 + 3a & a & 0 \end{pmatrix} = 1 \quad \text{si y sólo si} \quad a = 0.$$

Luego el único valor de a para el cual el endomorfismo es diagonalizable es $a = 0$.

Si $a = 2$, entonces A no es diagonalizable y la matriz de Jordan es

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ya que el número de bloques de Jordan asociados a $\lambda_2 = 3$ es $d_2 = 1$.

Para encontrar la base se calculan los subespacios propios generalizados:

$$\begin{aligned}
E^1(1) &= M(1) = Ker(f - I) \equiv (3x + y = 0,\ 10x + y + z = 0) \\
E^1(3) &= Ker(f - 3I) \equiv (x = 0,\ y = 0) \\
E^2(3) &= Ker(f - 3I)^2 \equiv (x = 0) \\
\dim E^2(3) &= 2 = \alpha_2 \ \Rightarrow\ E^2(3) = M(3).
\end{aligned}$$

y se sigue el esquema

$$\begin{array}{ccc}
\overset{1}{E^1(3)} & \subset & \overset{2}{E^2(3)} = M(3) \\
v_2 & \longleftarrow & v_3
\end{array}$$

La base $B' = \{v_1,\ v_2,\ v_3\}$ respecto a la cual se obtiene la matriz de Jordan tiene que cumplir

$$v_1 \in E^1(1),\ v_3 \in E^2(3) - E^1(3)\ \text{ y }\ v_2 = (f - 3I)v_3.$$

Entonces, podemos tomar

$$v_1 = (1, -3, -7),\ v_3 = (0, 1, 0)\ \text{ y }\ v_2 = (f - 3I)v_3 = (0, 0, 2)$$

Las coordenadas en B (base canónica) de los vectores de B' son las columnas de la matriz P^{-1}. Comprobamos que se cumple $A = P^{-1}JP$ o equivalentemente $AP^{-1} = P^{-1}J$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ 20 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ -7 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3:
Determine si las siguientes matrices pueden corresponder a una misma forma cuadrática en distintas bases

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución: Si A es la matriz de una forma cuadrática Φ respecto a una base B, entonces todas las matrices de Φ en distintas bases son de la forma P^tAP, siendo P la matriz del cambio de base (véase, pág. 272). Entonces, las matrices A y B del problema son matrices de la misma forma cuadrática si y sólo si son congruentes. De la Ley de inercia de Sylvester se deduce que la signatura de una forma cuadrática es un invariante por cambios de base, es decir que dos matrices simétricas son congruentes si y sólo si tienen la misma signatura. Así, lo que tenemos que hacer es calcular la signatura de las formas cuadráticas asociadas a las matrices A y B, y comprobar si coinciden o no.

Hay distintas formas de resolver el problema:

1- Calcular los autovalores de las matrices y ver que tienen la misma cantidad de autovalores positivos y negativos contados con su multiplicidad (aunque no coincidan).

2- Hacer la diagonalización por congruencia hasta obtener una matriz diagonal y comprobar que coincidan el múmero de elementos positivos y negativos.de la diagonal (aunque sean distintos).

3- Hacer la diagonalización por congruencia hasta obtener una matriz en cuya diagonal haya sólo los valores 0, 1 y -1; y comprobar que se obtienen las mismas matrices en cada caso (salvo permutación de filas y columnas).

Vamos a hacerlo por el primer método:

Calculamos los polinomios catacterísticos de las matrices y sus raíces:

$$\begin{aligned} p_\lambda(A) &= \lambda\left(-9\lambda+\lambda^2+16\right) \to \text{raíces: } 0,\ \frac{9+\sqrt{17}}{2}>0,\ \frac{9-\sqrt{17}}{2}>0. \\ p_\lambda(B) &= \lambda\left(-10\lambda+\lambda^2-8\right) \to \text{raíces: } 0,\ 5+\sqrt{33}>0,\ 5-\sqrt{33}<0. \end{aligned}$$

La matriz A tiene dos autovalores positivos y uno 0, entonces la forma cradrática cuya matriz es A tiene signatura $(2,0)$.

La matriz B tiene un autovalor positivo, uno nigativo y uno 0, entonces la forma cradrática cuya matriz es B tiene signatura $(1,1)$.

Por lo tanto, no son matrices de la misma forma cuadrática en distintas bases.

Errores más frecuentes:

1. Los errores más frecuentes se dan en las definiciones: falta de precisión o desconocimiento.

2. Definir el complemento ortogonal en $\mathbb{K}$-espacios vectoriales generales, sin exigir que el espacio vectorial sea euclídeo.

3. Definir las formas lineales de $V \times V \to V$, o de $V \times V \to \mathbb{R}$ cuando el cuerpo no se restringe al de los números reales.

4. Ejercicio 1: Demostrar la implicación en el sentido contrario: suponiendo $u+v$ y $u-v$ ortogonales y deduciendo de ahí $||u|| = ||v||$.

5. Ejercicio 1: Demostrarlo en casos particulares.

6. Ejercicio 3: Deducir que A y B no son matrices de la misma forma cuadrática porque tienen distintos autovalores.

   Contraejemplo: Dos matrices simétricas de orden 3 con autovalores 2, $-\sqrt{3}$ y $\frac{1}{2}$; y -7 y 2 (doble), respectivamente, sí son matrices de la misma forma cuadrática en distintas bases, porque ambas se corresponden con formas cuadráticas de signatura $(2,1)$.

7. Ejercicio 3: Deducir que A y B no son matrices de la misma forma cuadrática porque no son semejantes.

8. Ejercicio 3: Deducir que A y B no son matrices de la misma forma cuadrática porque mediante la diagonalización por congruencia se han obtenido matrices diagonales distintas.

   Contraejemplo: las matrices

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \text{ sí son congruentes.}$$