Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (2,5 puntos) En el espacio $\mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,2]$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a dos, se define

$$\langle P, G\rangle = \int_0^2 (2-t)P(t)G(t)\,dt\,.$$

Se pide:
a) Demuestre que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $\mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,2]$.
b) Determine una base ortonormal, respecto de este producto interno, del subespacio $F \subset \mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,2]$ de los polinomios, con coeficientes reales y de grado menor o igual a uno.

Solución: a) $\langle P, P\rangle = \int_0^2 (2-t)P^2(t)\,dt \geq 0$ pues $P^2(t) \geq 0$ y $2-t \geq 0$ para todo $t \in [0,2]$.
Además si $\langle P, P\rangle = \int_0^2 (2-t)P^2(t)\,dt = 0$, teniendo en cuenta que el integrando es una función continua positiva en $[0,2]$, resulta que $(2-t)P^2(t) = 0$ para todo $t \in [0,2]$. Por tanto, $P(t) = 0$ para todo $t \in [0,2)$ y en consecuencia $P \equiv 0$.
Nota: Un polinomio de grado dos que se anula en más de dos valores distintos es necesariamente el polinomio cero.

Claramente $\langle P, G\rangle = \langle G, P\rangle$ pues $P(t)G(t) = G(t)P(t)$ para todo t.

Además para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y para todo $P, Q, G \in \mathcal{P}^2_{\mathbb{R}}[0,2]$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha P + \beta Q, G\rangle &= \int_0^2 (2-t)\big(\alpha P(t) + \beta Q(t)\big)G(t)\,dt \\
&= \alpha \int_0^2 (2-t)P(t)G(t)\,dt + \beta \int_0^2 (2-t)Q(t)G(t)\,dt \\
&= \alpha\langle P, G\rangle + \beta\langle Q, G\rangle
\end{aligned}$$

b) Ortonormalizamos, mediante Gram-Schmidt, la base $\{x_1, x_2\}$ de F tal que $x_1(t) = 1$ y $x_2(t) = t$ para todo $t \in [0,2]$.
De $\int_0^2 (2-t)1^2\,dt = \Big[2t - t^2/2\Big]_0^2 = 4 - 2 = 2$ se obtiene $e_1(t) = 1/\sqrt{2}$. A su vez,

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= x_2(t) - \langle x_2, e_1\rangle e_1(t) = t - \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^2 (2-t)t\frac{1}{\sqrt{2}}\,dt \\
&= t - \frac{1}{2}\Big[t^2 - t^3/3\Big]_0^2 = t - \frac{1}{2}\big(4 - \frac{8}{3}\big) = t - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle y_2, y_2\rangle &= \langle y_2, x_2\rangle - \langle x_2, e_1\rangle\,\langle y_2, e_1\rangle = \langle y_2, x_2\rangle = \int_0^2 (2-t)(t-2/3)t\,dt \\
&= \Big[-t^4/4 + 8t^3/9 - 2t^2/3\Big]_0^2 = -4 + \frac{8}{9}\cdot 8 - \frac{2}{3}\cdot 4 = \frac{4}{9}
\end{aligned}$$

en consecuencia, se obtiene el vector unitario $e_2(t) = \frac{3}{2}y_2(t) = \frac{3}{2}t - 1$.
Por tanto, una base ortonormal de F es $\{e_1, e_2\}$ siendo $e_1(t) = 1/\sqrt{2}$ y $e_2(t) = \frac{3}{2}t - 1$ para todo $t \in [0,2]$.

Pregunta 2 (2 puntos)
Sea F el subespacio vectorial de $\ell^2(\mathbb{N})$ definido mediante

$$F = \Big\{x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})\colon \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\Big\}\,.$$

Demuestre que F es denso en ℓ^2.

Solución: Como F es un subespacio vectorial del espacio de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$, el corolario 3.10 permite asegurar que F es denso si $F^\perp = \{0\}$.

Observemos que para todo entero $k \geq 2$, $y^k = \{y_n^k\} \in F$ siendo $y_n^k = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 1 \\ -1 \text{ si } k = n \\ 0 \text{ en los demás casos} \end{cases}$

En consecuencia, si $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in F^\perp$ se cumple que $\langle x, y^k \rangle = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$. Por tanto, $x_1 - x_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 2$. Luego $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \cdots$. Lo anterior unido a que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$ pues $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, nos lleva a que $x = 0$.

Pregunta 3 (3 puntos) Sea c_{00}, el subespacio vectorial de $\ell^2(\mathbb{N})$ de las sucesiones complejas que tienen sólo un número finito de términos no nulos, dotado de la norma y del producto interno de $\ell^2(\mathbb{N})$. Sea la aplicación $T\colon c_{00} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida para todo $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$ mediante $T(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (x_n/n)$

a) Demuestre que T es una forma lineal acotada tal que $\|T\| \leq \big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\big)^{1/2}$.

b) Demuestre que no existe $y \in c_{00}$ tal que $T(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in c_{00}$.

c) ¿Contradice el apartado anterior el teorema de representación de Riesz?

Solución: a) T es una forma lineal pues para todo $x, y \in c_{00}$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$T(\alpha x + \beta y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha x_n + \beta y_n}{n} = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} + \beta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{n} = \alpha T(x) + \beta T(y)\,.$$

T es acotado pues aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en $\ell^2(\mathbb{N})$ a x y a $z = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$ se obtiene:

$$|T(x)| = \Big| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n} \Big| = \langle x, z \rangle \leq \|x\| \|z\|$$

Además de la desigualdad anterior se deduce que $\|T\| \leq \|z\| = \big(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\big)^{1/2}$.

b) Veamos que no existe $y \in c_{00}$ tal que $T(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in c_{00}$. En efecto, para cualquier $y \in c_{00}$, sea $N_y \in \mathbb{N}$ tal que $y_n = 0$ para todo $n > N_y$. Sean $j \in \mathbb{N}$ tal que $j > N_y$ y $\mathbf{e}_j := \{\delta_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$. Se tiene que $T(\mathbf{e}_j) = \frac{1}{j}$ mientras que $\langle \mathbf{e}_j, y \rangle = 0$ y en consecuencia $T(\mathbf{e}_j) \neq \langle \mathbf{e}_j, y \rangle$.

c) El teorema de representación de Riesz asegura que si T es una forma lineal acotada en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ entonces existe un único $y \in \mathcal{H}$ tal que $T(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$. En este ejercicio, no se cumple la hipótesis de que c_{00} sea un espacio de Hilbert pues no es un espacio completo. Por tanto no hay contradicción.

Nota: Si en el ejercicio anterior consideramos la forma lineal acotada, $\mathbf{T}$, extensión de T a $\ell^2(\mathbb{N})$, que es un espacio de Hilbert, entonces sí existe un único $z \in \ell^2(\mathbb{N})$ tal que $\mathbf{T}(x) = \langle x, z \rangle$ para todo $x \in \ell^2(\mathbb{N})$, siendo precisamente $z = \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. No es sólo el hecho de que $z \notin c_{00}$ lo que permite asegurar la no existencia de un elemento $y \in c_{00}$ tal que $T(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in c_{00}$. Por ejemplo, si nos restringiéramos al espacio,

$$F := \big\{x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}) \colon x_n = 0 \text{ si } n > 5\big\}$$

se cumple que $z \notin F$ y sin embargo sí existe $y \in F$ tal que $T(x) = \langle x, y \rangle$ para todo $x \in F$.

Pregunta 4 (2,5 puntos) Sabiendo que

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1}$$

es el desarrollo en serie de Fourier de la función $g(x) = |\cos x|$ en $L^2[0, \pi]$, determine el valor de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2}\,.$$

Solución:
La sucesión
$$\left\{\sqrt{\frac{1}{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(2nx)\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\operatorname{sen}(2nx)\right\}_{n=1}^{\infty}$$
es una base ortonormal de $L^2[0,\pi]$. La serie de Fourier de g,

$$g = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(2nx) + b_n\operatorname{sen}(2nx)] \quad \text{en} \quad L^2(0,\pi)\,,$$

es la serie que nos dan,
$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos(2nx)}{4n^2-1}\,.$$
La igualdad de Parseval correspondiente al desarrollo es:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|g(x)|^2dx &= \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2+|b_n|^2)\\
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^2 x dx &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(4n^2-1)^2}\\
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}\\
\frac{1}{\pi}\left[\frac{x}{2}+\frac{\operatorname{sen}2x}{4}\right]_0^{\pi} &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}\\
\frac{1}{2} &= \frac{4}{\pi^2} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}
\end{aligned}$$

Despejando, se obtiene que
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2} = \left(\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\right)\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\,.$$