11 .- Sea f: $\Re^3 \to \Re^2$ definida por f(x, y, z) = (2x+y , x+z)
a) Encontrar la matriz asociada a la aplicación lineal respecto a las bases canónica de $\Re^3$ y $\Re^2$
b) Encontrar la matriz asociada a la aplicación lineal respecto a las bases
B$_{\Re^3}$ **=** $\{(1,1,-1)\ (0,1,0)\ (1,1,1)\}$ **y B**$_{\Re^2}$ **=** $\{(2,0)\ \ (1,-1)\}$

SOLUCIÓN

a) Sabemos que la ecuación de la aplicación lineal es $y^t = A\,x^t$ con f(x, y, z) = (2x+y , x+z)
Siendo A la matriz asociada a la aplicación lineal que tiene por columnas las imágenes de los vectores de la base canónica.
$f(e_1)$= f(1,0,0)=(2,1)
$f(e_2)$= f(0,1,0)=(1,0)
$f(e_3)$= f(0,0,1)=(0,1)
Por tanto la matriz es A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Sabemos que f(x, y, z) = (2x+y , x+z) con
B$_{\Re^3}$ **=** $\{(1,1,-1)\ (0,1,0)\ (1,1,1)\}$ **y B**$_{\Re^2}$ **=** $\{(2,0)\ \ (1,-1)\}$
f (1,1,-1) = <u>(3,0)</u> = a(2,0)+b(1,-1)=<u>(2a + b, -b)</u> a=3/2 b=0
f (0,1,0) = <u>(1,0)</u> = c(2,0)+d(1,-1)=<u>(2c + d, -d)</u> c=1/2 d=0
f (1,1,1) = <u>(3,2)</u> = m(2,0)+n(1,-1)=<u>(2m + n, -n)</u> m=5/2 n=-2
Por tanto la matriz es A´ = $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

<u>OTRA FORMA DE RESOLVERLO</u>

ESQUEMA

$$\begin{array}{ccc} \Re^3_{B_c} & \xrightarrow{A} & \Re^2_{B_c} \\ P\uparrow & & \uparrow Q \\ \Re^3_{B} & \xrightarrow[A']{} & \Re^2_{B'} \end{array}$$

A´ = Q^{-1} A P

Con A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **P =** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Q =** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ **y A´ =** $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$