Cálculo de Probabilidades II — Febrero 2018 — Primera semana

Cuestión (2 puntos). Noción de σ-álgebra; σ-álgebra engendrada por una familia de conjuntos; σ-álgebra de Borel. El Teorema de clases monótonas.

Ejercicio (8 puntos). Se elige un punto P al azar en el cuadrante positivo de un círculo de radio 1:

$$\Omega = \{(x, y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < 1\}.$$

(a) Hallar la distribución de las coordenadas polares de P: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\alpha = \operatorname{arc\,tg} y/x$. ¿Son ρ y α independientes?

(b) Se traza la cuerda del círculo que tiene en P su punto medio. Determinar la distribución del ángulo β entre los radios que terminan en los extremos de la cuerda. Hallar su media y su desviación típica.

(c) La cuerda se prolonga hasta intersecar a los ejes de coordenadas, siendo U y V las distancias al origen de dichas intersecciones. Determinar la distribución conjunta de (U, V). ¿Son U e V independientes?

(d) Si se ha observado que $U = 1/2$, determinar la distribución de V. ¿Existe, en este caso, el valor esperado de V?

Solución

Ejercicio 1

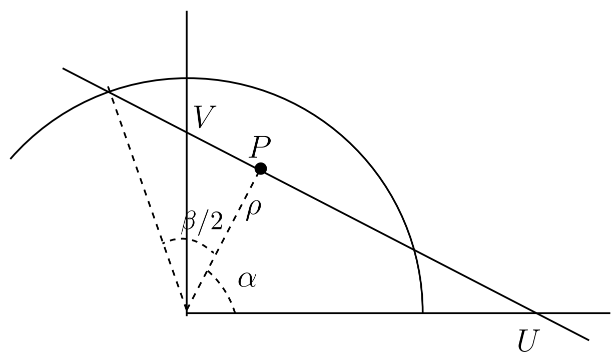
(a) Las coordenadas cartesianas, x e y, del punto P se eligen en Ω al azar, es decir con densidad constante $f(x,y) = 4/\pi$ (puesto que $\pi/4$ es el área de Ω). En términos de las coordenadas polares, se puede expresar

$$\begin{cases} x = \rho\cos\alpha \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \text{cuyo Jacobiano es} \qquad J = \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \rho\cos\alpha \end{vmatrix} = \rho.$$

Por tanto la densidad conjunta de (ρ,α) es

$$g(\rho,\alpha) = \frac{4\rho}{\pi} \quad \text{en la región} \quad (\rho,\alpha) \in (0,1) \times (0,\pi/2).$$

Como las marginales son $g_1(\rho) = 2\rho$ en $(0,1)$ y $g_2(\alpha) = 2/\pi$ en $(0,\pi/2)$, su producto es igual a la densidad conjunta; así que ρ y α son independientes, con α uniforme en $(0,\pi/2)$.



(b) La cuerda que tiene en P su punto medio es perpendicular al radio que pasa por P y el ángulo $\beta = 2\arccos\rho$ o bien $\rho = \cos\beta/2$. A partir de la densidad $g_1(\rho) = 2\rho$ en $(0,1)$ y, como $\rho' = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\beta/2$, la densidad de β resulta

$$h(\beta) = 2\cos\beta/2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\beta/2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\beta$$

en el intervalo transformado $\beta \in (0,\pi)$. Por consiguiente

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\beta] &= \frac{1}{2}\int_0^\pi x\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \frac{\pi}{2}, \\ \mathrm{E}[\beta^2] &= \frac{1}{2}\int_0^\pi x^2\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \frac{\pi^2}{2} - 2, \\ \sigma^2(\beta) &= \frac{\pi^2}{2} - 2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{4} - 2 \\ \sigma(\beta) &= \frac{\sqrt{\pi^2-8}}{2} \simeq 0'684. \end{aligned}$$

(c) Las distancias U y V tienen respectivamente los valores dados por la transformación:

$$\begin{cases} U = \rho / \cos\alpha \\ V = \rho / \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

que son ambos positivos. El Jacobiano de esta transformación vale

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\rho,\alpha)} = \begin{vmatrix} 1/\cos\alpha & \rho \operatorname{sen}\alpha / \cos^2\alpha \\ 1/\operatorname{sen}\alpha & -\rho\cos\alpha/\sin^2\alpha \end{vmatrix} = \frac{-\rho}{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{-\rho}{(\rho/v)^2(\rho/u)^2} = \frac{-(u^2+v^2)^{3/2}}{uv}$$

puesto que $\rho = u\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha = u/v$, con lo cual $\rho = uv/\sqrt{u^2+v^2}$.

En consecuencia, el valor de la densidad conjunta de (U, V) es

$$h(u,v) = \frac{4}{\pi}\, \frac{uv}{\sqrt{u^2+v^2}}\, \frac{uv}{(u^2+v^2)^{3/2}} = \frac{4u^2v^2}{\pi(u^2+v^2)^2}$$

en la región $\{u, v > 0, 0 < uv < \sqrt{u^2+v^2}\}$, limitada por la hipérbola $1/u^2 + 1/v^2 = 1$ de asíntotas $u = 1$ y $v = 1$. Por tanto, las variables U y V no son independientes.

(d) Como

$$\int \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\, dv = \frac{1}{2u} \operatorname{arc\,tg}(v/u) - \frac{v}{2(u^2+v^2)},$$

la densidad marginal de U resulta

$$h_1(u) = \begin{cases} \dfrac{4u^2}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\, dv = u & \text{si } 0 < u < 1, \\[2ex] \dfrac{4u^2}{\pi} \displaystyle\int_0^{1/\sqrt{1-1/u^2}} \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}\, dv = u - \frac{2u}{\pi} \operatorname{arc\,tg}\sqrt{u^2-1} - \frac{2}{\pi u}\sqrt{u^2-1} & \text{si } u > 1. \end{cases}$$

La densidad de V condicionada por $U = 1/2$ es

$$h(v \,|U = 1/2) = \frac{h(1/2, v)}{h_1(1/2)} = \frac{2v^2}{\pi(v^2+1/4)^2} \qquad \text{para } v > 0.$$

Consecuentemente

$$\mathrm{E}[V \,|U = 1/2] = \int_0^\infty \frac{2v^3}{\pi(v^2+1/4)^2}\, dv = \infty$$

puesto que el integrando es del orden de $1/v$ para v grande.

Puede observarse que cuando $U = 1/2$ es $V = 1/(2\operatorname{tg}\alpha)$. Ahora bien, condicionado por $U = 1/2$, la distribución de α ya no es uniforme en $(0, \pi/2)$.

Cálculo de Probabilidades II — Febrero 2018 — Segunda semana

Cuestión (2 puntos). Convergencia en media de orden p de variables aleatorias. Relación con otros tipos de convergencia. Relación con la convergencia de los momentos.

Ejercicio (8 puntos). Se elige al azar un punto P en el cuadrado $(0, 1)^2$ y se traza la recta r que lo une con el punto $(1, 1)$.

(a) Determinar directamente la función de distribución de la abscisa U del punto en que r corta al eje de abscisas. Hallar la mediana, la media y la moda de U.

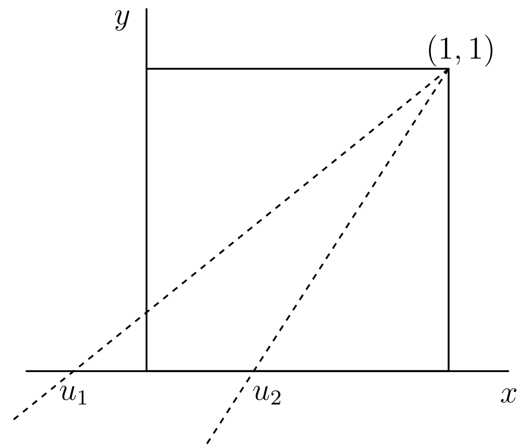
(b) Obtener, mediante cambio de variable, la función de densidad de U.

(c) Sea V la ordenada en el origen de la recta r. Indicar cómo es la distribución conjunta de (U, V).

(d) Sea W el perímetro del rectángulo de vértices opuestos P y el origen. Determinar la distribución condicionada de W por U y la curva de regresión de W sobre U.

Solución

Ejercicio.



(a) Si $u_1 < 0$, la probabilidad de que sea $U \leq u_1$ es la probabilidad de que el punto P caiga en el triángulo situado por encima de la recta que une $(1,1)$ con $(u_1, 0)$. Dicha recta, de ecuación $y - 1 = (x-1)/(1-u_1)$, corta al eje de ordenadas en el punto $(0, -u_1/(1-u_1))$; por tanto, calculando el área del triángulo indicado, resulta

$$\mathrm{P}\{U \leq u_1\} = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{-u_1}{1-u_1}\Big) = \frac{1}{2-2u_1}.$$

En cambio, si $0 < u_2 < 1$, la probabilidad de que sea $U \leq u_2$ es el área del trapecio situado por encima de la recta que une $(1,1)$ con $(u_2, 0)$. Así pues

$$\mathrm{P}\{U \leq u_2\} = \frac{1+u_2}{2}.$$

En definitiva, la función de distribución de U es

$$F(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-2u} & \text{si } u \leq 0 \\ \dfrac{1+u}{2} & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u \geq 1. \end{cases}$$

La función de densidad de U se obtiene derivando respecto a u:

$$f(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-u)^2} & \text{si } u \leq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{si } u \geq 1 \end{cases}$$

(el valor para $u = 0$ y $u = 1$ es arbitrario).
Como $F(0) = 1/2$, la mediana de U es $M = 0$. La media vale

$$\mathrm{E}[U] = \int_{-\infty}^{0} \frac{u}{2(1-u)^2}\, du + \int_0^1 \frac{u}{2}\, du = -\infty$$

puesto que, para $|u|$ grande, el primer integrando es del orden de $1/u$. En cuanto a la moda, la densidad $f(u)$ es máxima en cualquier valor del intervalo $[0, 1]$.

(b) Sean (a, b) las coordenadas del punto P, cuya densidad conjunta es $g(a, b) = 1$ en $(0, 1)^2$. La recta que pasa por P y $(1, 1)$ tiene por ecuación $(1-a)(y-1) = (1-b)(x-1)$ y corta al eje de abscisas en el punto $(U, 0)$ donde $U = (a-b)/(1-b)$. Si se hace el cambio de variables bidimensional

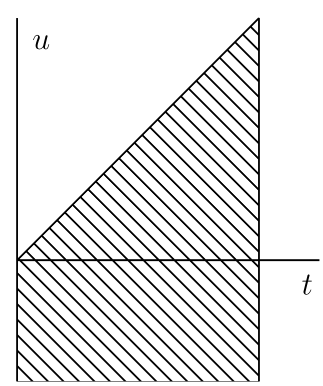
$$\begin{cases} t = a \\ u = \dfrac{a-b}{1-b} \end{cases} \qquad \text{cuyo inverso} \qquad \begin{cases} a = t \\ b = \dfrac{u-t}{u-1} \end{cases}$$

tiene Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1/(u-1) & (t-1)/(u-1)^2 \end{vmatrix} = \frac{t-1}{(u-1)^2} \qquad \text{y} \qquad |J| = \frac{1-t}{(u-1)^2}.$$

Por tanto, la densidad conjunta de (t, u) es

$$f(t, u) = \frac{1-t}{(u-1)^2}$$



en la región $t \in (0, 1)$ y $0 < (u-t)/(u-1) < 1$, lo cual equivale a $u < t$. Dicha región aparece representada en la figura.
La densidad marginal de U es por tanto

$$f_2(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{(u-1)^2} \displaystyle\int_0^1 (1-t)\, dt = \dfrac{1}{2(u-1)^2} & \text{si } u \le 0 \\ \dfrac{1}{(u-1)^2} \displaystyle\int_u^1 (1-t)\, dt = \dfrac{1}{2} & \text{si } 0 \le u \le 1. \end{cases}$$

Naturalmente el resultado coincide con el obtenido en (a). Son posibles otros cambios que dan el mismo resultado.

(c) Como se ha visto en (a), la ordenada de r en el origen está relacionada con el valor de U mediante la expresión $V = -U/(1-U)$. De hecho, en función de (a, b), la ordenada en el origen de la recta de ecuación $(1-a)(y-1) = (1-b)(x-1)$ es $V = (b-a)/(1-a)$, mientras que $U = (a-b)/(1-b)$; de modo que se cumple $V = -U/(1-U)$.

Por consiguiente, la distribución de (U, V) es singular: está concentrada sobre la rama inferior de la hipérbola $1/u + 1/v = 1$, sobre la cual se elige el punto (U, V) escogiendo U con la densidad determinada en (a) o (b). La distribución conjunta se puede expresar

$$F(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } v < -u/(1-u), \\ 1/(2-2u) & \text{si } u \leq 0 \text{ y } v \geq -u/(1-u) \\ (1+u)/2 & \text{si } u \in [0,1] \text{ y } v \geq -u/(1-u) \\ 1 & \text{si } u \geq 1. \end{cases}$$

(d) Si se sabe que $U = u \in (0,1)$, el punto (a, b) está uniformemente distribuido sobre el segmento que une $(u, 0)$ con $(1, 1)$; es decir que a es uniforme en $(u, 1)$ y $b = (a-u)/(1-u)$ (puesto que (a, b) cumple la ecuación de la recta: $y-1 = (x-1)/(1-u)$). Por consiguiente, W se obtiene mediante la trasformación:

$$w = 2\,\frac{a(2-u)-u}{1-u} \qquad \text{de inversa} \qquad a = \frac{2u + w(1-u)}{2(2-u)}$$

cuya derivada es

$$a' = \frac{1-u}{2(2-u)}$$

Como $f(a) = 1/(1-u)$ es la densidad de a en $(u, 1)$, la densidad de W condicionada por u resulta

$$h(w|u) = \frac{1}{2(2-u)} \qquad \text{en el intervalo } (2u, 4) \quad \text{para } u \in (0,1),$$

ya que $w = 2u$ para $a = u$ y $w = 4$ para $a = 1$.

Por otra parte, si $u < 0$, el punto (a, b) está uniformemente distribuido en el segmento que une $(0, v)$ con $(1, 1)$, donde $v = -u/(1-u)$. Así pues, a se distribuye uniformemente en el intervalo $(0, 1)$, pero la expresión para w sigue siendo la misma, al igual que la de su inversa y su derivada. En este caso la densidad de a es $f(a) = 1$ y queda

$$h(w|u) = \frac{1-u}{2(2-u)} \qquad \text{en el intervalo } \left(\frac{-2u}{1-u}, 4\right) \quad \text{para } u < 0.$$

Nótese que en ambos casos la distribución de W condicionada por U es uniforme, en intervalos distintos según que el valor de U sea positivo o negativo. En consecuencia, la curva de regresión de W sobre U es

$$\mathrm{E}[W\,|U = u] = \begin{cases} 2 + u & \text{si } u \in (0,1) \\ \dfrac{2-3u}{1-u} & \text{si } u < 0, \end{cases}$$

semisuma en ambos casos de los extremos del recorrido de W.

Cálculo de Probabilidades II — Septiembre 2018

Cuestión (2 puntos). Definir la convergencia en distribución de una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n\geq 1}$ a otra variable aleatoria X. Caracterizar dicha convergencia en términos de las funciones características.

Ejercicio (8 puntos).
La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en $[0,1]$. Se considera

$$Y_n = \min(nX, 1-X) \qquad \text{con } n \geq 1.$$

a) Obtener la distribución de Y_n, su valor esperado y su mediana.

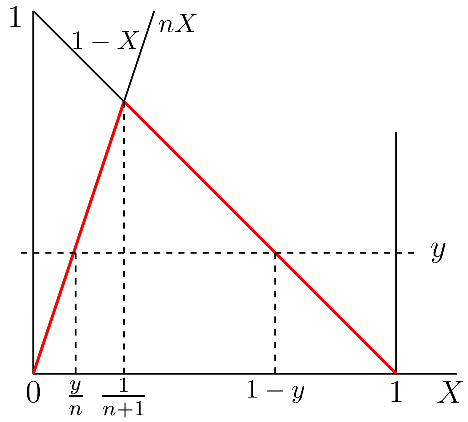
b) Cuando $n \to \infty$, estudiar si converge Y_n en distribución y, en caso afirmativo, especificar la distribución límite.

c) Estudiar si Y_n converge casi seguro y, en caso afirmativo, especificar su límite. Estudiar también si la convergencia se produce en $\mathcal{L}^1$.

d) Determinar la distribución de X condicionado por $Y_n = y$; así como el valor esperado de X condicionado por $Y_n = y$.

Solución

(a) La función Y_n, representada en rojo en la figura, toma valores entre 0 y $n/(n+1)$.



Fijado un valor $y \in (0, n/(n+1))$, el suceso $\{Y_n \le y\}$ es la unión de los intervalos $(0, y/n)$ y $(1-y, 1)$. Por consiguiente, la función de distribución de Y_n es

$$F_n(y) = \frac{y}{n} + y = \frac{n+1}{n}\, y \qquad \text{si } y \in (0, \frac{n}{n+1}).$$

Es una función absolutamente continua, con densidad uniforme

$$f_n(y) = \frac{n+1}{n} \qquad \text{en el intervalo } (0, \frac{n}{n+1}).$$

Por consiguiente

$$\mathrm{E}[Y_n] = \frac{n+1}{n} \int_0^{n/(n+1)} y\, dy = \frac{n}{2(n+1)}.$$

Además, F_n toma el valor $1/2$ en la mediana $M = \dfrac{n}{2(n+1)}$.

(b) Cuando $n \to \infty$, es $F_n(y) \longrightarrow y$ para cualquier $y \in (0,1)$. De manera que la distribución límite es $F(y) = y$ en $(0,1)$; es decir Y_n converge en distribución a una distribución uniforme en $(0,1)$.

(c) Al tender n a infinito, la propia función

$$Y_n = \begin{cases} nX & \text{si } X < 1/(n+1) \\ 1-X & \text{si } X > 1/(n+1) \end{cases} \qquad \text{converge a } 1-X$$

salvo para $X = 0$. Por tanto, $Y_n \longrightarrow Y = 1 - X$ casi seguro. Por supuesto, $1-X$ tiene distribución uniforme en $(0,1)$, lo cual confirma el resultado de (b).
A su vez, la diferencia

$$Y - Y_n = \begin{cases} 1-(n+1)X & \text{si } X < 1/(n+1) \\ 0 & \text{si } X > 1/(n+1) \end{cases}$$

es positiva, con lo cual

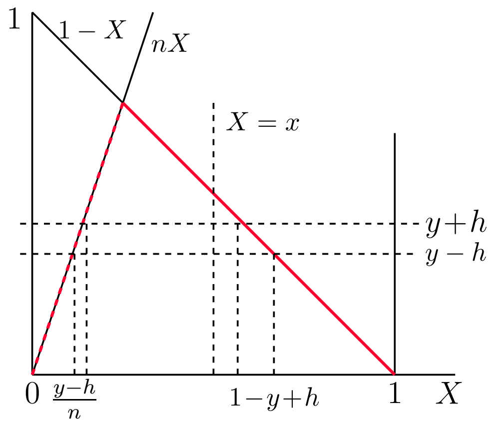
$$\mathrm{E}|Y - Y_n| = \int_0^{1/(n+1)} [1-(n+1)x]\, dx = \frac{1}{2(n+1)} \longrightarrow 0;$$

así que $Y_n \longrightarrow Y$ en $\mathcal{L}^1$.

(d) Como Y_n es función de X, la distribución conjunta de (X, Y_n) es singular, concentrada sobre los segmentos rojos de la figura inicial. Por tanto, la distribución condicionada de X por $Y_n = y$ solo puede tomar los valores y/n y $1 - y$, supuesto que $y \in (0, n/(n+1))$. La cuestión es averiguar la probabilidad con la que se dan cada uno de ellos. El procedimiento puede ser calcular el límite

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{\mathrm{P}\{Y_n \in (y-h, y+h), X \leq x\}}{\mathrm{P}\{Y_n \in (y-h, y+h)\}}$$

El denominador vale $2h(n+1)/n$ puesto que la densidad de Y_n es $f_n(y) = (n+1)/n$; corresponde a la probabilidad de los dos segmentos rojos incluidos entre las horizontales $y - h$ e $y + h$. Cuando la vertical $X = x$ ocupa una posición como la que muestra la figura, el numerador es solo la probabilidad del segmento incluido entre las rectas $X = (y-h)/n$ y $X = (y+h)/n$; es decir $2h/n$ (puesto que X es uniforme en $(0,1)$). Así pues, para $x \leq 1 - y - h$ resulta



$$\mathrm{P}\{X \leq x \,|\, Y_n = y\} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{2h/n}{2h(n+1)/n} = \frac{1}{n+1}.$$

En cambio, si la vertical $X = x$ está a la derecha de $1 - y + h$, el numerador coincide con el denominador y por tanto

$$\mathrm{P}\{X \leq x \,|\, Y_n = y\} = 1.$$

En definitiva, la función de distribución condicionada de X por $Y_n = y$ es

$$F_n(x|y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < y/n \\ 1/(n+1) & \text{si } y/n \leq x < 1 - y \\ 1 & \text{si } x \leq 1 - y. \end{cases}$$

Se trata de una distribución discreta, con saltos de magnitud $1/(n+1)$ en $x = y/n$ y $n/(n+1)$ en $x = 1 - y$. Es decir, cuando se sabe que $\min(nX, 1-X) = y$, hay probabilidad $1/n+1$ de que el mínimo sea nX y probabilidad $n/(n+1)$ de que sea $1 - X$.
En consecuencia

$$\mathrm{E}[X \,|\, Y_n = y] = \frac{y}{n}\,\frac{1}{n+1} + (1-y)\,\frac{n}{n+1} = -\frac{y(n-1)}{n} + \frac{n}{n+1}.$$