16. Ejercicios resueltos sobre cálculo de residuos.

En esta sección se dan ejemplos de cálculo de integrales de funciones reales, propias e impropias, usando la Teoría de los Residuos. Complementa los ejemplos dados en la sección 9 y los dados en la subsección 15.4.

16.1. *Integrales de funciones racionales en la circunferencia.*

Ejercicio 16.1.1. Sea $R(x, y)$ una función racional de dos variables tal que no se anula el denominador en la circunferencia unitaria $\partial D : z = e^{it} \ \ 0 \leq t \leq 2\pi$.

a) Probar que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt = -i \int_{\partial D} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z}$$

b) Calcular

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{5 - 3\cos t}\, dt$$

Parte a) Aplicando la definición de integral de una función continua a lo largo de la circunferencia $\partial D : z(t) = e^{it} \ \ t \in [0, 2\pi]$ resulta:

$$I = -i \int_{\partial D} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{dz}{z} =$$

$$I = -i \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right), \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)\right) ie^{it}\, \frac{dt}{e^{it}}$$

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \operatorname{sen} t)\, dt \quad \square$$

Parte b) Primero veamos que la integral que se pide calcular es la mitad de la integral de la misma función en el intervalo $[-\pi, \pi]$. En efecto, la función en el integrando es $\cos 2t \,/\, (5 - 3\cos t)$; es una función par. Por lo tanto su integral en el intervalo $[-\pi, 0]$ es igual a su integral en el intervalo $[0, \pi]$. Luego, su integral en el intervalo $[-\pi, \pi]$, que es la suma de ambas, es el doble de cada una de ellas.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2t}{5 - 3\cos t}\, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2t}{5 - 3\cos t}\, dt$$

Con la misma demostración de la parte a), pero parametrizando la circunferencia ∂D con $z = e^{it}, \ \ -\pi \leq t \leq \pi$; usando que $e^{2it} = z^2$ para $z = e^{it}$, y que $\cos 2t = (1/2)(e^{2it} + e^{-2it})$, se obtiene:

$$I = \frac{-i}{2} \int_{\partial D} \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{5 - \frac{3}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{z} = \frac{i}{2} \int_{\partial D} \frac{z^4 + 1}{z^2(3z^2 - 10z + 3)}\, dz = \frac{i}{2} \int_{\partial D} \frac{z^4 + 1}{z^2(z - 3)(3z - 1)}\, dz$$

Los polos de la función $f = (z^4 + 1)/(z^2(z - 3)(3z - 1))$ en el integrando son las raíces del denominador. De las raíces del denominador solo $z = 0$ doble y $z = 1/3$ están en el disco D encerrado por la circunferencia ∂D. El índice de ∂D en ellas es 1, y en la otra raíz $z = 3$ del denominador el índice es 0. Luego, aplicando el teorema del índice:

$$I = \frac{i}{2}\, 2\pi i \left(Res_f(0) + Res_f(1/3)\right) \quad (1)$$

Calculemos ambos residuos, usando la proposición 15.1.4:

$$Res_f(0) = [z^2 f(z)]'|_{z=0} = \left(\frac{z^4+1}{(z-3)(3z-1)} \right)' \Bigg|_{z=0} = \frac{10}{9}$$

$$Res_f(1/3) = [(z-1/3)f(z)]'|_{z=1/3} = \left(\frac{z^4+1}{3z^2(z-3)} \right)' \Bigg|_{z=1/3} = \frac{-41}{36}$$

Sustituyendo en (1) resulta:

$$I = \frac{i}{2} 2\pi i \left(\frac{10}{9} - \frac{41}{36} \right) = \frac{\pi}{36}. \quad \square$$

16.2. *Integrales impropias mediante el cálculo de residuo en alguna raíz $n-$ésima.*

Ejercicio 16.2.1. -
Calcular para $n \geq 2$ natural fijo la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$$

(Sugerencia: integrar en el ángulo comprendido entre las semirrectas $arg(z) = 0$ y $arg(z) = 2\pi/n$.)

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{1+z^n}$$

Tiene polos en las n raíces $n-$ésimas de -1, es decir en los puntos z_k tales que $z_k^n = -1$. Escribiendo $-1 = e^{i\pi+2k\pi}$ $k = 0, 1, 2 \dots, n-1$, se obtiene $z_k = e^{i\pi/n} e^{i2k\pi/n}$.

Consideremos para $R > 1$ el arco S_R de circunferencia de centro en el origen y radio R siguiente: $S_R : z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi/n$; (hacer dibujo) y la curva cerrada:

$$\gamma_R = [0, R] + S_R + [Re^{2i\pi/k}, 0]$$

La curva γ_R da un vuelta sola en sentido antihorario alrededor del polo $z_0 = e^{\pi i/n}$ de la función f, y no da ninguna vuelta alrededor de los demás polos de f. Por lo tanto, aplicando el teorema de los residuos, se tiene:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) \quad (1)$$

Por otro lado:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{[0,R]+S_R-[0,Re^{2i\pi/k}]} f(z)\, dz$$

de donde, usando (1) se obtiene:

$$\int_{-[0,Re^{2i\pi/k}]+[0,R]} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \quad (2)$$

Parametrizando el segmento $[0, R]$ con $z = x$, $0 \leq x \leq R$ y el segmento $[0, Re^{2i\pi/k}]$ con $z = x\, e^{2\pi i/n}$ $0 \leq x \leq R$, se obtiene:

$$\int_{-[0,Re^{2i\pi/k}]+[0,R]} f(z)\, dz = e^{2\pi i/n} \int_R^0 \frac{1}{1+x^n}\, dx + \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\, dx = (1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\, dx$$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^R \frac{1}{1+x^n}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \quad (3)$$

Ahora tomaremos el límite cuando $R \to +\infty$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_R.

En efecto

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^n} = 0$$

Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1), se deduce que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = 0$$

Sustituyendo en (3) cuando $R \to +\infty$ resulta:

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) \quad (4)$$

Ahora solo resta calcular el residuo de f en el polo $e^{\pi i/n}$ que es un polo simple. Aplicando la última afirmación de la proposición 15.1.4, se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/n}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde } A = (1+z^n)'|_{z=e^{\pi i/n}}$$

$$Res_f(e^{\pi i/n}) = \frac{1}{nz^{n-1}|_{z=e^{\pi i/n}}} = \left.\frac{z}{nz^n}\right|_{z=e^{\pi i/n}} = \frac{1}{-n} \cdot e^{\pi i/n}$$

Sustituyendo en (4) se obtiene:

$$(1 - e^{2\pi i/n}) \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx = \frac{-2\pi i}{n} \cdot e^{\pi i/n}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx = \frac{-2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\pi i/n}}{1 - e^{2\pi i/n}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{2i}{e^{\pi i/n} - e^{-\pi i/n}} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/n)} \quad \square$$

Ejercicio 16.2.2. Calcular

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\, dx$$

Primero hacemos el cambio de variable $x = u^2$. La integral impropia dada queda

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}\, du$$

Procedemos de igual forma que para la integral del ejemplo anterior, integrando en el ángulo formado por las semirrectas $arg(z) = 0$ y $arg(z) = \pi/2$.

Sea

$$f(z) = \frac{2z^2}{1+z^4}$$

Tiene polos en las raíces cuartas de -1, es decir en los puntos $z_k = e^{i\pi/4}\, e^{ik\pi/2}$ con $k = 0, 1, 2, 3$.

Consideremos para $R > 1$ el arco S_R de circunferencia de centro en el origen y radio R siguiente: $S_R : z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq \pi/2$; (hacer dibujo) y la curva cerrada:

$$\gamma_R = [0, R] + S_R + [Ri, 0]$$

La curva γ_R da un vuelta sola en sentido antihorario alrededor del polo $z_0 = e^{\pi i/4}$ de la función f, y no da ninguna vuelta alrededor de los demás polos de f. Por lo tanto, aplicando el teorema de los residuos (teorema 15.1.5), se tiene:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) \quad (1)$$

Por otro lado:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, dz = \int_{[0,R]+S_R-[0,Ri]} f(z)\, dz$$

de donde, usando (1) se obtiene:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\, dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \quad (2)$$

Parametrizando el segmento $[0, R]$ con $z = x$, $0 \leq x \leq R$ y el segmento $[0, Ri]$ con $z = x\,i$, $0 \leq x \leq R$, se obtiene:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\, dz = -(i)^3 \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx + \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx = (1+i) \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx$$

Sustituyendo en (2) resulta:

$$(1+i) \int_0^R \frac{2x^2}{1+x^4}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) - \int_{S_R} f(z)\, dz \quad (3)$$

Ahora tomaremos el límite cuando $R \to +\infty$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_R.

En efecto

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{2z^3}{1+z^4} = 0$$

Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1), se deduce que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Sustituyendo en (3) cuando $R \to +\infty$ resulta:

$$(1+i)\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/4}) \qquad (4)$$

Ahora solo resta calcular el residuo de f en el polo $e^{\pi i/4}$ que es un polo simple. Aplicando la última afirmación de la proposición 15.1.4, se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde } A = \left(\frac{1+z^4}{2z^2}\right)'\Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} \qquad (5)$$

$$\left(\frac{1+z^4}{2z^2}\right)' = \frac{8z^5-4z-4z^5}{4z^4} = \frac{z(z^4-1)}{z^4}$$

$$A = \frac{z(z^4-1)}{z^4}\Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} = 2e^{\pi i/4}$$

Sustituyendo en (5) se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{e^{-\pi i/4}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-i)$$

Sustituyendo en (4) resulta:

$$(1+i)\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{1+x^4}\,dx = 2\pi i\,\frac{\sqrt{2}}{4}(1-i) = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}(1-i) = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}(1+i)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{2x^2}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}\pi}{2}$$

Luego, como demostramos al principio, la integral dada I es igual a la integral que calculamos. Se concluye:

$$I = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} \qquad \square$$

16.3. *Integrales impropias de potencias reales de z.*

Ejercicio 16.3.1. Sea p un número real fijo tal que $0 < p < 1$. Calcular

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{x^{-p}}{1+x}\,dx$$

Hacemos el cambio de variable $x^p = u$, o lo que es lo mismo $x = u^q$, donde $q = 1/p > 1$. Usando que $dx = qu^{q-1}du$, $x^{-p} = u^{-1}$ la integral I se transforma en

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{qu^{q-2}}{1+u^q}\,du \qquad \text{donde } q = \frac{1}{p}$$

Consideremos la función

$$f(z) = \frac{qz^{q-2}}{1+z^q} \qquad (1)$$

Aquí la potencia q-ésima, con q real , debe definirse, para z complejo como

$$z^q = e^{q\,Log(z)} \quad \text{donde } Log(z) = Log_{(-\pi,\pi]}(z) \quad \forall z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \quad (2)$$

Esta función z^q en el abierto Ω extiende la función x^q definida para x real positivo.

Usando la derivada de función compuesta en la primera igualdad de (2) se deduce que z^q es analítica en Ω y que su derivada para todo $z \in \Omega$ es $(z^q)' = qz^{q-1}$. Además, tomando el argumento de la primera igualdad en (2) se deduce que el argumento de z^q es $qArg_{(-\pi,\pi]}z$. Además, tomando módulo, se deduce que $|z^q| = e^{qL|z|} = |z|^q$

Luego, la igualdad $z^q = -1$ (que anula el denominador de la función $f(z)$ en la igualdad (1)) se verifica para todo z tal que $|z| = 1$ y $qArg_{(-\pi,\pi]}(z) = -\pi + 2k\pi$ con k entero. Es decir las raíces del denominador son los complejos z con módulo 1 y tales que $Arg_{(-\pi,\pi]}(z) = (\pi/q) + 2k\pi/q$ con k entero. (Obsérvese que esa igualdad solo la tiene que verificar el argumento de z comprendido en $(-\pi, \pi]$). Hay una cantidad finita de tales complejos. Son entonces polos simples de la función f dada en la igualdad (1). Entre estos polos $z_0 = e^{i\pi/q}$ es el único comprendido en el ángulo formado por las semirrectas $arg(z) = 0$ y $arg(z) = 2\pi/q$.

Entonces podemos proceder en forma similar a lo realizado en los dos ejercicios anteriores.

Consideremos para $r < 1$ y para $R > 1$ los arcos S_r y S_R de circunferencias de centro en el origen y radios r y R respectivamente, como sigue: $S_R : z = re^{it}$, $\quad S_R : z = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi/q$; (hacer dibujo) y la curva cerrada:

$$\gamma_{r,R} = [r, R] + S_R + [Re^{2i\pi/q}, re^{2i\pi/q}] - S_r$$

La curva γ_R está contenida en el abierto Ω donde f es meromorfa; da un vuelta sola en sentido antihorario alrededor del polo $z_0 = e^{\pi i/q}$ de la función f; y no da ninguna vuelta alrededor de los demás polos de f. Por lo tanto, aplicando el teorema de los residuos (ver teorema 15.1.5), se tiene:

$$\int_{\gamma_{r,R}} f(z)\,dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/q}) \quad (3)$$

Por otro lado:

$$\int_{\gamma_{r,R}} f(z)\,dz = \int_{[r,R]+S_R-[re^{2i\pi/q}, Re^{2i\pi/q}]-S_r} f(z)\,dz$$

de donde, usando (3) se obtiene:

$$\int_{[r,R]} f(z)\,dz - \int_{[re^{2i\pi/q}, Re^{2i\pi/q}]} f(z)\,dz = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/n}) - \int_{S_R} f(z)\,dz + \int_{S_r} f(z)\,dz \quad (4)$$

Parametrizando el segmento $[r,R]$ con $z = x$, $r \leq x \leq R$ y el segmento $[re^{2i\pi/q}, Re^{2i\pi/q}]$ con $z = x\, e^{2\pi i/q}$, $r \leq x \leq R$, se obtiene:

$$\int_{[r,R]} f(z)\, dz = \int_r^R \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx$$

$$\int_{[re^{2i\pi/q}, Re^{2i\pi/q}]} f(z)\, dz = e^{-2\pi i/q} \int_r^R \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx$$

(Hemos usado que $z^q = x^q e^{(2\pi i/q)q} = x^q$, $dz = e^{2\pi i/q} dx$, $z^{q-2} = x^{q-2}e^{-4\pi i/q}$.)
Luego, sustituyendo en (4) resulta:

$$(1 - e^{-2\pi i/n}) \int_r^R \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/q}) - \int_{S_R} f(z)\, dz + \int_{S_r} f(z)\, dz \quad (5)$$

Ahora tomaremos el límite cuando $R \to +\infty$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_R.

En efecto

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{qz^{q-1}}{1+z^q} = 0$$

Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.1), se deduce que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = 0$$

Ahora tomaremos el límite cuando $r \to 0^+$, aplicando el lema de deformación de curvas (lema 11.5.2) a la integral de f a lo largo del arco de circunferencia S_r.

En efecto

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} \frac{qz^{q-1}}{1+z^q} = 0$$

(Hemos usado que $|z^{q-1}| = |z|^{q-1}$ y que $q > 1$). Luego, por el lema de deformación de curvas (lema 11.5.2), se deduce que

$$\lim_{r\to 0^+} \int_{S_r} f(z)\, dz = 0$$

Sustituyendo en (5) cuando $R \to +\infty$ y $r \to 0^+$ resulta:

$$(1 - e^{2\pi i/q}) \int_0^{+\infty} \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx = 2\pi i Res_f(e^{\pi i/q}) \quad (6)$$

Ahora solo resta calcular el residuo de f en el polo $z_0 = e^{\pi i/q}$, que es un polo simple de f.

Primero veamos que z_0 es un polo simple de f. Para eso basta probar que $z_0 = e^{\pi i/q}$ es un cero simple de $1 + z^q$. Existe un desarrollo en serie de potencias centrado en z_0 de $g(z) = 1 + z^q$ porque esta función es analítica en Ω. Llamemos $a_n, n \geq 0$ a los coeficientes de ese desarrollo. El orden del cero z_0 es el primer $k \geq 1$ tal que $a_k \neq 0$. Para probar que el orden de z_0 es 1, basta ver que $a_1 \neq 0$. Pero $a_1 = g'(z_0) = qz_0^{q-1}$. Como $|z_0| = 1$ se tiene $|a_1| = q|z_0|^{q-1} = q > 1 > 0$. Hemos terminado de probar que el polo $z_0 = e^{\pi i/q}$ de f es simple.

Aplicando la última afirmación de la proposición 15.1.4, se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/q}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde } A = \left(\frac{1+z^q}{qz^{q-2}}\right)'\Big|_{z=e^{\pi i/q}}$$

$$A = \frac{1}{q} \ (z^{2-q} + z^2)'|_{z=e^{\pi i/q}} = (1/q)(2z + (2-q)z^{1-q})|_{z=e^{\pi i/q}} = e^{\pi i/q}$$

$$Res_f(e^{\pi i/q}) = e^{-\pi i/q}$$

Sustituyendo en (6) se obtiene:

$$(1 - e^{-2\pi i/q}) \int_0^{+\infty} \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx = 2\pi i \cdot e^{-\pi i/q}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{qx^{q-2}}{1+x^q}\, dx = \frac{2\pi i\ e^{-\pi i/q}}{1 - e^{-2\pi i/q}} = \pi \cdot \frac{2i}{e^{\pi i/q} - e^{-\pi i/q}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/q)} \quad \square$$

Finalmente recordando que $q = 1/p$ se concluye:

$$I = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(p\pi)} \quad \square$$

16.4. *Otros ejemplos.*

Ejercicio 16.4.1. a) Calcular

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\, dz$$

siendo $\gamma_R = [0, R] + S_R - [0, Ri]$, donde $S_R : z = Re^{it}, \ \ t \in [0, \pi/2]$, con $R > 1$.

b) Probar que $|e^{iz^2}| \leq 1$ para todo z en el primer cuadrante.

c) Deducir que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\, dz = 0$$

d) Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x^2 - \operatorname{sen} x^2}{1+x^4}\, dx$$

Parte a) La función

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$$

es meromorfa en el plano complejo con polos simples que son las raíces cuartas de -1, es decir los cuatro puntos $z_k = e^{\pi i/4} e^{k\pi i/2}, \ \ k = 0, 1, 2, 3$.

En la región encerrada por la curva γ_R (hacer dibujo) hay uno solo de estos polos, que es $z_0 = e^{\pi i/4}$. La curva γ_R da una vuelta sola en sentido antihorario alrededor de este polo.

Por lo tanto aplicando el teorema de los residuos (ver teorema 15.1.5), se obtiene:

$$I = \int_{\gamma_R} f(z)\, dz = 2\pi i \ Res_f(e^{i\pi/4}) \quad (1)$$

Para calcular este residuo aplicamos la última parte de la proposición 15.1.4, observando que el polo es simple:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{1}{A} \quad \text{donde } A = \left(\frac{1+z^4}{e^{iz^2}}\right)'\Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} \qquad (2)$$

$$\left(\frac{1+z^4}{e^{iz^2}}\right)' = \frac{e^{iz^2}(4z^3 - 2iz(1+z^4))}{e^{2iz^2}}$$

$$A = \frac{4z^3 - 2iz(1+z^4)}{e^{iz^2}}\Bigg|_{z=e^{\pi i/4}} = -4e \cdot e^{-i\pi/4}$$

(Hemos usado que $(e^{i\pi/4})^2 = i, \quad (e^{i\pi/4})^3 = (e^{i\pi/4})^4 e^{-i\pi/4} = -e^{-i\pi/4}$.)
Sustituyendo en (2) se obtiene:

$$Res_f(e^{\pi i/4}) = \frac{-e^{-1}}{4} e^{i\pi/4} = \frac{-\sqrt{2}e^{-1}}{8}(1+i)$$

(Hemos usado que $e^{i\pi/4} = (\sqrt{2}/2)(1+i)$.)
Sustituyendo en (1) resulta:

$$I = \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \frac{-\sqrt{2}e^{-1}}{8}(1+i) = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\pi}{4}(1-i). \quad \square$$

Parte b) Tomando $z = x + iy$ con x e y reales:

$$|e^{iz^2}| = |e^{i(x^2-y^2+2ixy)}| = |e^{-2xy}e^{i(x^2-y^2)}| = e^{-2xy} \leq e^0 = 1$$

porque $xy \geq 0$ al estar z en el primer cuadrante.

Parte c) Hay que probar que

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}\,dz = 0$$

No podemos aplicar el lema de deformación de curvas, con el enunciado tal como lo hemos dado en el lema 11.5.1), a la función

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1+z^4}$$

porque cuando $z \to \infty$ no existe el límite de $zf(z)$. (Ya que no existe el límite de e^{iz^2}.) Pero tomando z solamente en el primer cuadrante Q, obtenemos:

$$\lim_{z\to\infty,\ z\in Q} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{ze^{iz^2}}{1+z^4} = 0 \quad (3)$$

porque por un lado e^{iz^2} está acotada en módulo, ya que $|e^{iz^2}| \leq 1$ para todo $z \in Q$ (por lo probado en la parte b)); y por otro lado

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^4} = 0$$

Como el arco de circunferencia S_R está comprendido en el primer cuadrante Q y se cumple (3) , se deduce que para todo $\epsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$R > R_0 \;\; z \in S_R \;\Rightarrow\; |z| > R_0 \;\; z \in Q \;\Rightarrow\; |zf(z)| < \epsilon$$

Luego, integrando sobre S_R se obtiene:

$$R > R_0 \;\Rightarrow\; |\int_{S_r} f(z)\,dz| \leq \int_{S_R} |f(z)|\,|dz| =$$

$$= \int_{S_r} \frac{|zf(z)|}{|z|}|dz| = \int_{S_r} \frac{|zf(z)|}{R}|dz| < \epsilon\frac{\pi R}{R} = \epsilon \cdot \pi = \epsilon^* \quad (4)$$

donde, dado $\epsilon^* > 0$ se eligió $\epsilon = \epsilon^*/\pi$. Luego, (4) muestra que dado $\epsilon^* > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$R > R_0 \;\Rightarrow\; |\int_{S_R} f(z)\,dz| < \epsilon^*$$

Esto, por definición de límite, significa:

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0 \quad \square$$

Parte d)

Consideremos la curva $\gamma_R = [0, R] + S_R + [Ri, 0]$ dada en la parte a). Sea

$$f(z) = \frac{e^{iz^2}}{1 + z^4}$$

Por el resultado obtenido en la parte a) tenemos:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\pi}{4}(1 - i) \quad (5)$$

Además, por construcción de la curva γ_R se cumple:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[Ri,0]+[0,R]+S_R} f(z)\,dz$$

Luego, usando (5) se deduce que:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\,dz = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\pi}{4}(1 - i) - \int_{S_R} f(z)\,dz \quad (6)$$

Parametrizando el intervalo $[0, R]$ con $z = x, \;\; 0 \leq x \leq R$ y el intervalo $[0, Ri]$ con $z = ix, \;\; 0 \leq x \leq R$ se obtiene:

$$\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\,dz = -i\int_0^R \frac{e^{-ix^2}}{1 + x^4}\,dx + \int_0^R \frac{e^{ix^2}}{1 + x^4}\,dx \quad (7)$$

Sustituyendo $e^{-ix^2} = \cos(x^2) - i\,\mathrm{sen}(x^2)$, $\quad e^{ix^2} = \cos(x^2) + i\,\mathrm{sen}(x^2)$, y tomando parte real en (7), resulta :

$$Re\left(\int_{-[0,Ri]+[0,R]} f(z)\,dz\right) = \int_0^R \frac{\cos(x^2) - \mathrm{sen}(x^2)}{1+x^4}\,dx \quad (8)$$

Reuniendo (6) con (8) resulta:

$$\int_0^R \frac{\cos(x^2) - \mathrm{sen}(x^2)}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\pi}{4} - Re\left(\int_{S_R} f(z)\,dz\right) \quad (9)$$

Usando la parte c)

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Entonces, tomando límite en (9) cuando $R \to +\infty$ resulta:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2) - \mathrm{sen}(x^2)}{1+x^4}\,dx = \frac{\sqrt{2}e^{-1}\pi}{4} \quad \square$$