Calcular la derivada de la función $F(x)=\int_x^{x^2}\frac{dt}{\sqrt{t^2+t^4+3}}$ justificando que existe.

SOLUCIÓN

La función $f(t)=\frac{1}{\sqrt{t^2+t^4+3}}$ es continua puesto que

el denominador no se anula en ningún punto. Por los teoremas fundamentales de cálculo

$$G:\alpha \longmapsto \int_0^\alpha f(t)\,dt$$

es derivable y $G'(\alpha)=f(\alpha)$.

Además

$$-G:\alpha \longrightarrow \int_\alpha^0 f(t)\,dt$$

Entonces

$$F(x)=G(x^2)-G(x)$$

$$F'(x)=2x\cdot G'(x^2)-G'(x)=$$

$$=2x\frac{1}{\sqrt{x^4+x^8+3}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+x^4+3}}$$

Demostrar que si $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ es integrable Riemann entonces

$$\lim_{n} \int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^3+n^3}\,dx = 0.$$

Solución:

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{f(x)}{x^3+n^3}\,dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(x)|}{|x^3+n^3|} \leq \int_0^{2\pi} \frac{|f(x)|}{|n^3|} \leq$$

$$\leq \frac{M}{n^3}\cdot 2\pi \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{donde } M = \sup\{|f(x)| : x\in[0,2\pi]\}$$

Determinar el radio de convergencia de la serie $\sum_1^\infty n^2 x^n$ y calcular su suma.

SOLUCIÓN

$$\frac{1}{\rho} = \overline{\lim_n} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_n \frac{n^2+2n+1}{n^2} = 1$$

$\rho = 1$. Luego la serie converge absolutamente en $(-1,1)$

En $x=1$ no converge pues $\lim n^2 \neq 0$

En $x=-1$ no converge pues $\lim (-1)^n n^2 \neq 0$.

Para sumar la serie

$$\sum_0^\infty x^n = \frac{1}{1-x}$$

en $x \in (-1,1)$ derivando

$$\sum_1^\infty n x^{n-1} = + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Derivando otra vez

$$\sum_2^\infty n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Entonces

$$\sum_1^\infty n^2 x^n = \sum_1^\infty (n(n-1)+n) x^n =$$

$$= \sum_1^\infty n(n-1) x^n + \sum_1^\infty n x^n =$$

$$= x^2 \sum_2^\infty n(n-1) x^n + x \sum_1^\infty n x^{n-1}$$

$$= \frac{2x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Dada la serie $\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1} \cdot n!}$. Calcular el intervalo de convergencia y sumar la serie.

Solución:

El radio de convergencia

$$\frac{1}{\rho} = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{1}{3^{n+2}(n+1)!}}{\frac{1}{3^{n+1} \cdot n!}} = \lim \frac{1}{3(n+1)} = 0$$

Luego $\rho = +\infty$

$$\sum_1^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1} \cdot n!} = \frac{1}{3} \sum_1^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n!} = \frac{1}{3}\left[\sum_0^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^n}{n!} - 1\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{(x/3)} - 1\right].$$

Calcular $I = \int \frac{dx}{x^3+1}$

Descomponemos en fracciones simples

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{Ax^2-Ax+A+Bx^2+Cx+Bx+C}{x^3+1}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \quad \text{con solución } A=\frac{1}{3},\ B=-\frac{1}{3},\ C=2/3$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3} I_2$$

$$I_2 = \int \frac{x-2}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1-3}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\left[\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \int \frac{3}{x^2-x+1}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| - \frac{1}{2}\int \frac{3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x-\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt \end{array} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| - \frac{3}{2}\int \frac{\sqrt{3}/2}{\frac{3}{4}t^2+\frac{3}{4}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| - \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{t^2+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| - \sqrt{3}\,\mathrm{arcotg}(t) =$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| - \sqrt{3}\,\mathrm{arcotg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2-x+1|$$

Finalmente

$$I = \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{6}\log|x^2-x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{arcotg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + K.$$

Sea f una función continua. Probar que la función $F(x) = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$ tiene derivada tercera en todo punto.

solución

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\int_0^x x^2 f(t)\,dt - 2\int_0^x xt\, f(t) + \int_0^x t^2 f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[x^2\int_0^x f(t)\,dt - 2x\int_0^x t\, f(t) + \int_0^x t^2 f(t)\,dt\right]$$

Por el teorema fundamental del cálculo las tres integrales indefinidas son derivables pues son continuos los integrandos, y,

$$2F'(x) = 2x\int_0^x f(t)\,dt + \cancel{x^2 f(x)} - 2\int_0^x t f(t) - \cancel{2x^2 f(x)}$$

$$+ \cancel{x^2 f(x)} = 2x\int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x t f(t)$$

$$2F''(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt + 2x f(x) - 2x f(x) = 2\int_0^x f(t)\,dt$$

$$2F'''(x) = 2f(x) \Rightarrow F'''(x) = f(x)$$