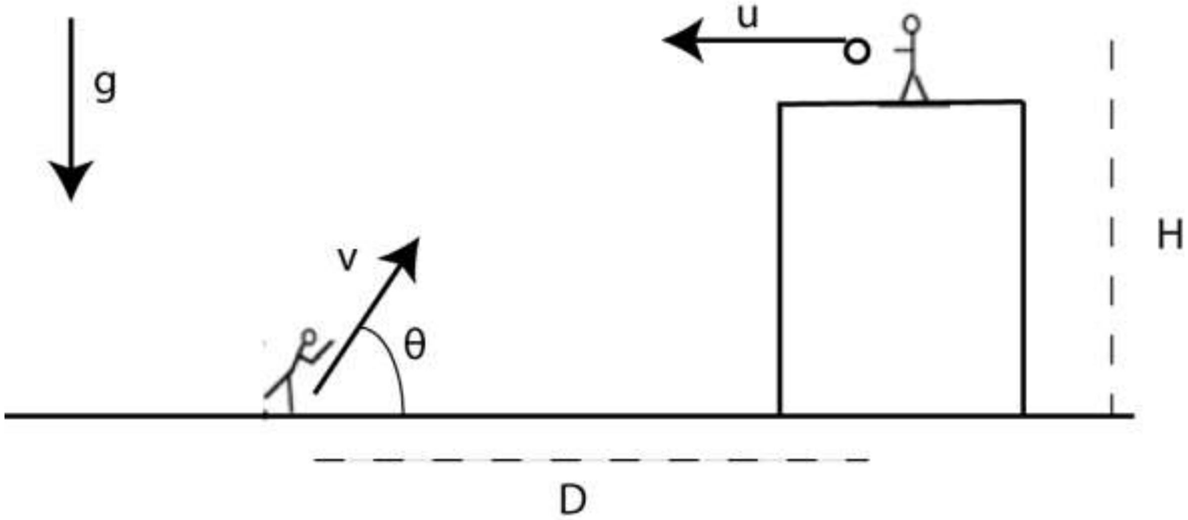
<u>Solución examen Física (Grado en Matemáticas)</u>
<u>Curso 2018/2019, Junio, 1ª y 2ª semana</u>

1ª Semana

1. Una acróbata de circo es lanzada por una catapulta con una velocidad v, formando un ángulo θ con la horizontal. Mientras, a una distancia D, su compañero está parado sobre una plataforma. En el instante en el que sale la acróbata, su compañero lanza una pelota en dirección horizontal, desde una altura H, a una velocidad de módulo u. Despreciando la resistencia del aire y tomando la gravedad como g calcule:

a) la altura H en función del resto de variables mencionadas en el problema para que la que acróbata y pelota se encuentren en el mismo punto, y la acróbata pueda coger la pelota. **(1.25 puntos)**

b) Encuentre el módulo de la velocidad de la pelota respecto al sistema de referencia de la acróbata en el instante previo a encontrarse. **(0.75 puntos)**



<u>Solución</u>

Tomando como origen de un sistema de coordenadas externo la posición de la acróbata antes del lanzamiento, escribimos las ecuaciones para las velocidades y las posiciones

	Acróbata	Pelota
Veloc horiz	$v_{ax} = v\cos\theta$	$v_{px} = -u$
Veloc vert	$v_{ay} = v\sin\theta - gt$	$v_{py} = -gt$
Dist horiz	$x_a = v\cos\theta\, t$	$x_p = D - ut$
Dist vert	$y_a = v\sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$	$y_p = H - \frac{1}{2}gt^2$

Para que se encuentren tiene que cumplirse que

$$x_a = x_p, \;\; y_a = y_p$$

De donde, siendo t' el tiempo en el que se encuentran:

$$v \cos\theta \, t' = D - ut'$$

$$v \sin\theta \, t' - \frac{1}{2} g t'^2 = H - \frac{1}{2} g t'^2$$

Despejando el tiempo en la primera ecuación

$$t' = \frac{D}{u + v\cos\theta}$$

Que sustituyendo en la segunda proporciona la expresión de la altura pedida:

$$H = \frac{D \; v \sin\theta}{u + v\cos\theta}$$

Las componentes de la velocidad de la pelota en el sistema de referencia de la acróbata, w, son

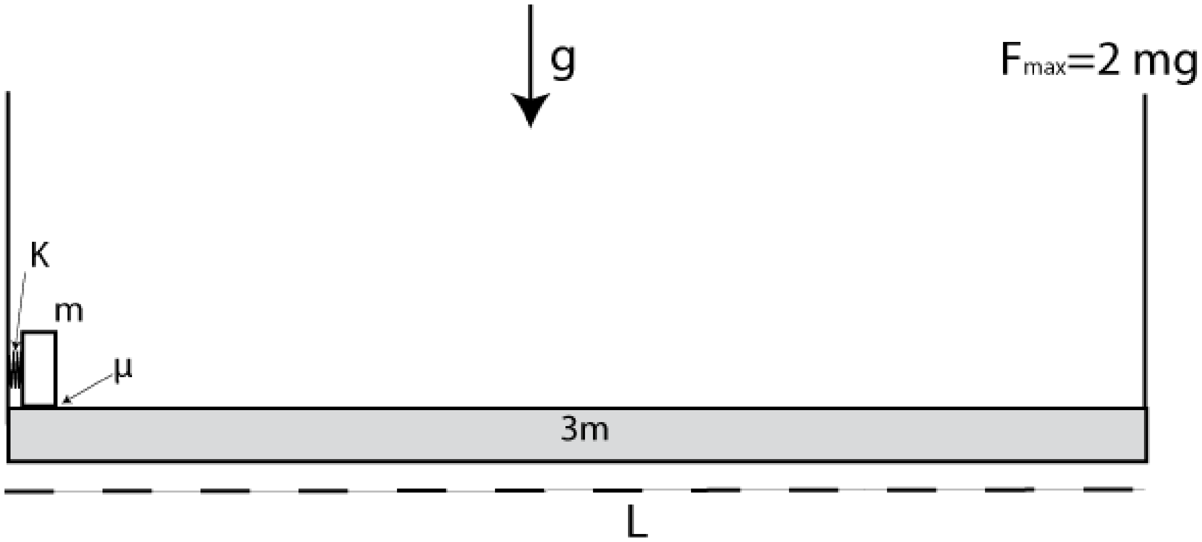
$$w_x = v_{px} - v_{ax} = -u - v\cos\theta$$

$$w_y = v_{py} - v_{ay} = -gt - v\sin\theta + gt = -v\sin\theta$$

Cuyo módulo es

$$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2\,u\,v\,cos\theta}$$

2. Una varilla uniforme de masa 3×m y longitud L está sujetada en sus extremos por sendos cables, de masa despreciable. El cable derecho puede soportar una tensión máxima de 2×m×g (cualquier fuerza superior lo rompería). Una masa m está colocada inicialmente junto al cable izquierdo, comprimiendo un muelle de constante K una distancia x respecto a su longitud natural (masa del muelle despreciable). Entre la masa m y la tabla hay un rozamiento de μ. Calcule el valor mínimo de μ, en función del resto de variables para que, después de que se libere la masa para que se mueva por efecto del muelle, el cable no se rompa. Considere que la distancia inicial entre la masa y el cable izquierdo es despreciable. **(2 puntos)**



Solución

Se calcula primero la distancia a la que estará m cuando se llegue a la condición de ruptura en el cable derecho, $T_2=2mg$. Las tensiones se ajustan para:

1) su suma anule las fuerzas debidas al peso de la masa y la tabla:

$$T_1 + 2mg = 3mg + mg \quad \rightarrow \quad T_1 = 2mg$$

2) sus torques anulen los torques de las fuerzas debidas a los pesos. Los torques respecto al extremo derecho, donde D' es la distancia de m respecto al extremo derecho:

$$\frac{L}{2}3mg + D'mg = LT_1$$

De donde

$$3 + \frac{2D'}{L} = 4 \qquad \rightarrow \quad D' = \frac{1}{2}L$$

Por tanto, m debe recorrer $D = \frac{1}{2}L$ para detenerse justo a tiempo y que no se rompa el cable derecho. En ese recorrido, toda la energía contenida en el muelle se habrá disipado por rozamiento.

$$E_{muelle} = \frac{K}{2}\,x^2 = F_{roz}\,D = \mu\,mg\,\frac{1}{2}L$$

De donde

$$\mu = \frac{Kx^2}{mg\,L}$$

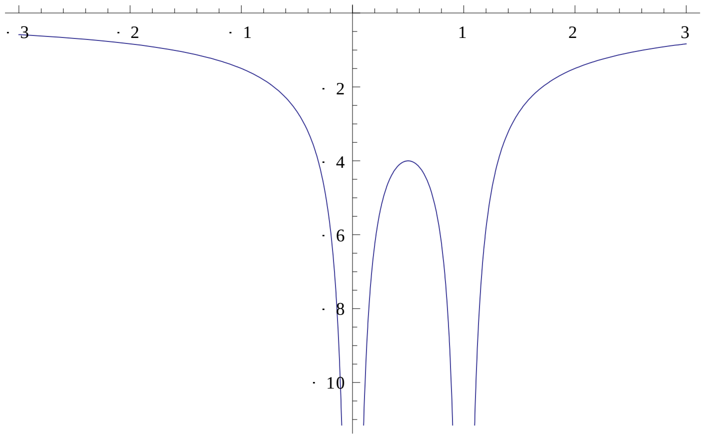
3. Supongamos una masa puntual M_1 que se encuentra fija en el origen de nuestro sistema de referencia. Otra masa puntual M_2 se encuentra fija a una distancia $d > 0$ del origen, sobre el eje X. Supongamos que colocamos una tercera masa m en un punto x del eje. Calcular la expresión de la energía potencia gravitatoria de esta tercera masa debida a los campos gravitatorios de las dos masas fijas, en función de x. Representar gráficamente, de forma cualitativa, el comportamiento de esta función con x. Considerar que el origen de la energía potencial corresponde a una separación infinita. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

La energía potencial será

$$E_P(x) = -G\frac{M_1 m}{|x|} - G\frac{M_2 m}{|x-d|}$$

La representación cualitativa tiene la forma



Donde hemos asumido que $G = M_1 = M_2 = m = d = 1$.

4. Un plano infinito uniformemente cargado con densidad superficial de carga positiva σ está situado en el plano XY. En $t = 0$ lanzamos una partícula de masa m con carga q en el punto $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 > 0$, y con velocidad $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$.

- Obtener la ecuación de la trayectoria de la carga en función del tiempo, $\mathbf{r}(t)$. **(1 punto)**
- Discutir <u>*todas*</u> las condiciones que posibilitarán que la carga acabe finalmente chocando con el plano. **(1 punto)**

<u>Solución</u>

El campo eléctrico creado por el plano en la región del espacio con $z > 0$ es

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{k}$$

La fuerza que experimentará a carga será

$$\mathbf{F} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{k}$$

Por lo tanto, el movimiento de la carga no se verá modificado en las direcciones X e Y, mientras que en la dirección Z tendremos un movimiento uniformemente acelerado. Esto resultará en el siguiente tiro parabólico:

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t$$

$$y(t) = y_0 + v_{y0}t$$

$$z(t) = z_0 + v_{z0}t + \frac{q\sigma}{4m\varepsilon_0}t^2$$

La carga colisionará con el plano si $z(t) = 0$ en algún momento. Para que esto se cumpla

$$z_0 + v_{z0}t + \frac{q\sigma}{4m\varepsilon_0}t^2 = 0$$

Cuya solución es

$$t = \frac{-v_{z0} \pm \sqrt{v_{z0}{}^2 - \frac{q\sigma}{m\varepsilon_0}z_0}}{\frac{q\sigma}{2m\varepsilon_0}}$$

Si $q < 0$ tendremos siempre una solución.
Si $q > 0$ tendremos solución cuando:

$$v_{z0}{}^2 \geq \frac{q\sigma}{m\varepsilon_0}z_0 \quad \text{y} \quad v_{z0} < 0$$

5. Una carga puntual q_1 se mueve en línea recta con velocidad constante $\mathbf{v}_1 = v_1\,\mathbf{i}$ a lo largo del eje X. Calcular la fuerza que el campo magnético creado por esa carga ejercerá sobre otra carga q_2 que se mueve paralelamente a la primera sobre la recta $y = d$ del plano XY con velocidad $\mathbf{v}_2 = v_2\,\mathbf{i}$, en el momento en el que ambas tienen el mismo valor de la coordenada x. **(1,5 puntos)**

<u>Solución</u>

El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

En nuestro caso tenemos que el campo creado por la primera carga en el punto en el que se encuentra la segunda carga es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{d^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{d^2}\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{d^2}\mathbf{k}$$

La fuerza que este campo ejercerá sobre la segunda carga será

$$\mathbf{F} = q_2\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{d^2}\mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{d^2}\mathbf{j}$$

6. Una nave se dirige a un planeta a una velocidad constante de 0,8*c*. Según el reloj del astronauta la duración del viaje has sido de 10 horas. Calcular la distancia propia entre la Tierra y el planeta. **(1 punto)**

<u>Solución</u>

Para el astronauta, la distancia de la Tierra al planeta es

$$L' = v\Delta t' = 0{,}8c \times 10 = 8 \text{ horas-luz}$$

Sin embargo, esa es la distancia contraída. La que nos interesa es la distancia medida por un observador situado en la Tierra, ya que el planeta está en reposo con respecto a la Tierra. Podemos obtener esta distancia propia aplicando la contracción de longitudes (utilizando $\gamma = 5/3$):

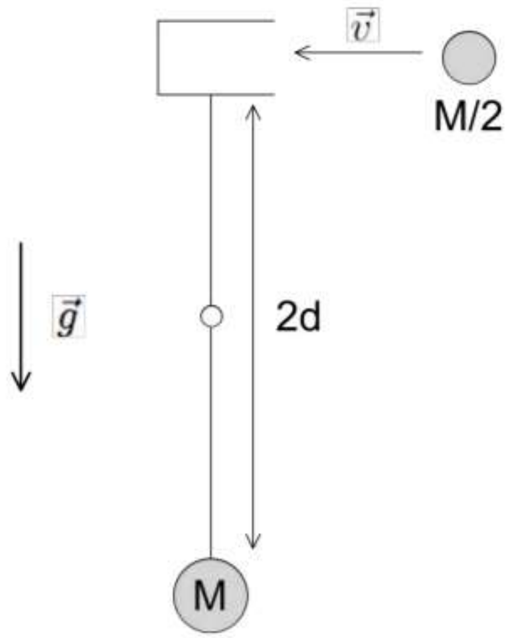
$$L' = \frac{1}{\gamma}L_P \quad \rightarrow \quad L_P = \gamma L' = 13.33 \text{ horas-luz} \approx 1.44\times 10^{13}\text{ m}$$

2ª Semana

1. Una barra de longitud 2d y masa despreciable puede pivotar sobre su punto medio, que está fijado a una pared. Uno de sus extremos tiene fijada una masa M. El otro extremo tiene forma de caja abierta (ver figura), con masa despreciable. Inicialmente la barra está vertical y en reposo, con la partícula M abajo y la caja arriba. Se lanza una masa M/2 para que llegue a la caja con velocidad horizontal v. Al llegar choca con la caja y se queda fijada en ella, de modo que la barra empieza a girar en torno a su pivote central. Calcule (recuerde que una vez lanzada la masa M/2 hacia la caja solo actúa la gravedad, g):

a) Calcule cuanta energía mecánica se pierde en el choque inelástico masa-caja, es decir, la diferencia entre las energías en el instante anterior y el posterior al mismo. **(1.5 puntos)**

b) Calcule la velocidad mínima que tiene que tener la masa M/2 para conseguir que la barra gire 180º, es decir, que llegue a estar vertical con la masa M en el extremo superior. **(1 punto)**



Solución

La Fuerza de la gravedad es vertical, y por tanto no ejerce un torque sobre el sistema. Por tanto, el momento angular se conserva antes y después del choque. Antes del choque el único momento angular es debido al movimiento de M/2:

$$L_0 = \frac{M}{2}\, d\, v$$

Después del choque la barra se mueve con velocidad angular w y ambas partículas contribuyen al momento angular

$$L_f = \frac{M}{2}\ d\ (dw) + M\ d\ (dw)$$

De $L_0 = L_f$ obtenemos que

$$w = \frac{v}{3d}$$

La partícula queda unida a la caja, por lo que hay un choque inelástico en el que se pierde energía mecánica.

La energía mecánica antes del choque es la energía cinética de la partícula M/2:

$$E_{m0} = \frac{1}{2}\frac{M}{2}\ v^2 = \frac{1}{4}M\ v^2$$

Después del choque, la energía mecánica es la energía de rotación:

$$E_{mf} = \frac{1}{2}I\ w^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}M\ d^2\right)\ w^2 = \frac{3}{4}M\ d^2\ \frac{v^2}{9\ d^2} = \frac{1}{12}Mv^2$$

Y podemos expresar la energía mecánica perdida:

$$E_{mf} = \frac{E_{m0}}{3} \qquad \text{ó} \qquad E_{mf} - E_{m0} = \frac{1}{6}M\ v^2$$

Como la gravedad es conservativa, podemos incorporar la energía potencial y utilizar la conservación de la energía total para resolver la segunda pregunta.

Si elegimos la posición de M como referencia de la energía potencial, la energía total del sistema tras el choque es la energía de rotación calculada más la energía potencial de M/2

$$E_{t0} = \frac{1}{12}Mv^2 + \frac{M}{2}g\ 2d$$

La energía mínima para se invierta el péndulo llevará a un estado final en el que el sistema tiene velocidad angular nula con M en la máxima altura. Por tanto, la energía total es la energía potencial de M:

$$E_{tf} = Mg\ 2d$$

De donde

$$E_{t0} = E_{tf}\ \ \rightarrow\ v = \sqrt{12\ g\ d}$$

2. Sobre una masa puntual de m=2 kg que se mueve a lo largo del eje X actúa la fuerza dada por el potencial $U(x)= 3x^4-4x^3-12x^2+32$. Sabemos que: 1) inicialmente, cuando la masa está sometida solo a la fuerza derivada de ese potencial, la masa está en reposo en x_0; 2) estando en esta posición x_0 se ejerce sobre ella otra fuerza cuyo único efecto es que adquiera una velocidad v_0=3 m/s; 3) poco después la partícula pasa por la posición x_1=0 con velocidad

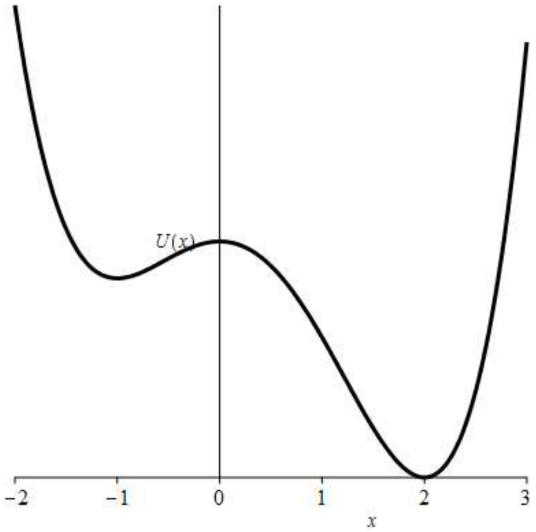
mayor que cero. Encuentre la posición inicial de la partícula y calcule la velocidad con la que pasa por la posición x_1=0. **(1.5 puntos)**

Solución

Calculamos la fuerza dada por ese potencial

$$F = -\frac{dU(x)}{dx} = -12\ (x+1)(x-2)x$$

Utilizando la segunda derivada deducimos que el potencial tiene dos mínimos locales, x=-1 y x=2, y un máximo local en x=0 (ver figura). En ellos el potencial toma los siguientes valores: U(0)=32, U(-1)=27, U(2)=0.



Si sabemos que la masa estaba en reposo inicialmente tiene que estar en uno de los mínimos, x=-1 o x=2.

Una vez que se ejerce la fuerza la masa tiene una energía cinética de $K = \frac{1}{2} 2\ 9 = 9\,J$

Si la masa estuviera inicialmente en x=2, esa energía es menor que la diferencia de energías potenciales entre x=0 y x=2 (32 J), por lo que la masa nunca llegaría a x=0.

Por tanto, x_0= -1 m.

Al pasar por x=0, la masa tiene una energía de 9-(32-27)=4 J. Por tanto, su velocidad es de v=2 m/s

3. Un satélite artificial de masa m realiza una órbita circular estable de radio R en torno a la Tierra, que tiene masa M_T. En un momento dado se produce un fallo en el sistema de propulsión, de modo que la energía total del satélite disminuye X julios por vuelta. Si suponemos que a lo largo de su descenso el satélite pasa por trayectorias circulares, de modo que después de cada vuelta su energía disminuye en esa cantidad X, ¿cuánto habrá disminuido el radio de la órbita después de n vueltas? **(1.25 puntos)**

Solución

La energía total final será igual a la inicial menos la perdida después de las n vueltas:

$$E_f = E_i - nX$$

$$-G\frac{M_T m}{2R_f} = -G\frac{M_T m}{2R} - nX$$

Y despejando llegamos a

$$R_f = \frac{R}{1+\dfrac{2nXR}{GM_T m}} = \frac{GM_T mR}{GM_T m + 2nXR}$$

4. Un plano infinito uniformemente cargado con densidad superficial de carga positiva σ está situado en el plano XY.

- Calcular el flujo del campo eléctrico (creado por el plano) a través de un círculo de radio R, con centro en el punto $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, con $z_0 > 0$, sabiendo que el vector $\mathbf{n} = (1,1,1)$ es ortogonal al círculo. **(1 punto)**
- Supongamos que situamos en reposo una carga q de masa m en el punto $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 > 0$. Calcular el trabajo realizado por el campo eléctrico si la carga recorre una distancia r debido a la acción del propio campo. ¿Dependerá este trabajo del signo de la carga? Razonar la respuesta. **(1 punto)**

Solución

El campo eléctrico creado por el plano en la región del espacio con $z > 0$ es

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{k}$$

Por otro lado, el flujo eléctrico se define como

$$\phi = \int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS$$

Sabiendo que $\hat{\mathbf{n}} = (1,1,1)/\sqrt{3}$ obtenemos

$$\phi = \int_S \mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,dS = \frac{\sigma\pi R^2}{2\sqrt{3}\varepsilon_0}$$

Si ahora situamos una carga q, esta experimentará una fuerza

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0}\mathbf{k}$$

El trabajo realizado por el campo tendrá la forma

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Tanto si la carga es positiva (el plano la repelerá) como si es negativa (el plano la atraerá), $d\mathbf{r}$ tendrá la misma dirección y sentido que $\mathbf{F}$, de modo que

$$dW = \frac{|q|\sigma}{2\varepsilon_0}dr \quad \Rightarrow \quad W(r) = \frac{|q|\sigma}{2\varepsilon_0}r$$

Este trabajo se verá reflejado en ambos casos en un incremento de la energía cinética de la carga.

5. Una carga puntual q_1 se mueve con velocidad constante $\mathbf{v}_1 = v_1\,\mathbf{i}$ a lo largo del eje X. Determinar la fuerza que ejerce el campo magnético creado por esa carga sobre otra carga q_2 que se mueve sobre el eje Y con velocidad $\mathbf{v}_2 = v_2\,\mathbf{j}$, en el momento en el que la primera carga pasa por el origen de coordenadas y la segunda carga pasa por el punto (0, d, 0). **(1.5 puntos)**

<u>Solución</u>

El campo magnético creado por una carga puntual q con velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

En nuestro caso tenemos que el campo creado por la primera carga en el punto en el que se encuentra la segunda carga es

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1\mathbf{v}\times\hat{\mathbf{r}}}{d^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{d^2}\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v_1}{d^2}\mathbf{k}$$

La fuerza que este campo ejercerá sobre la segunda carga será

$$\mathbf{F} = q_2\mathbf{v}_2\times\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{d^2}\mathbf{j}\times\mathbf{k} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v_1 v_2}{d^2}\mathbf{i}$$

6. Un astronauta realiza un viaje hasta un planeta situado a 5 años-luz de la Tierra. Si para el astronauta el viaje ha durado 1 año, ¿cuánto tiempo ha pasado para un observador situado en la Tierra? (**1.25 puntos**)

<u>Solución</u>

El tiempo que ha transcurrido para el astronauta es el tiempo propio del sistema, de modo que el tiempo que ha transcurrido en la Tierra es: $\Delta t_{Tierra} = \gamma\Delta t_{astronauta}$.

Por otro lado tenemos que la velocidad de la nave con respecto a la Tierra es

$$v_{nave} = \frac{d}{\Delta t_{Tierra}} = \frac{ct}{\Delta t_{Tierra}}$$

donde *t* son los 5 años que tarda la luz en llegar a la estrella. Sustituyendo en la expresión que relaciona los dos tiempos obtenemos

$$\Delta t_{Tierra} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_{nave}{}^2}{c^2}}}\Delta t_{astronauta} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t^2}{\Delta t_{Tierra}{}^2 c^2}}}\Delta t_{astronauta}$$

Y despejando llegamos a

$$\Delta t_{Tierra} = \sqrt{\Delta t_{astronauta}{}^2 + t^2} = \sqrt{26} = 5.099 \text{ años}$$

Aunque no lo pide el enunciado, ahora podemos calcular la velocidad de la nave

$$v_{nave} = \frac{ct}{\Delta t_{Tierra}} = \frac{5}{\sqrt{26}}c = 0.9806c$$