Introducción a los espacios de Hilbert

Pregunta 1 (2 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert real y $x, y \in \mathcal{H}$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$.

a) Demuestre que $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq 1$ para todo $0 \leq \alpha \leq 1$.

b) Demuestre que si en la desigualdad de a) se tiene la igualdad, $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| = 1$, entonces $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o $x = y$.

Solución: a) $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| \leq \|\alpha x\| + \|(1-\alpha)y\| = \alpha + 1 - \alpha = 1$.

b) Si $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| = 1$, elevando al cuadrado se obtiene,

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\langle x, y\rangle \\ 1 &= \alpha^2 + 1 + \alpha^2 - 2\alpha + 2\alpha(1-\alpha)\langle x, y\rangle \\ 0 &= 2\alpha(\alpha-1)\Big(1 - \langle x, y\rangle\Big) \end{aligned}$$

Por tanto $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ o $\langle x, y\rangle = 1$.
Si $\langle x, y\rangle = 1$, entonces $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|$ y en consecuencia $x = \lambda y$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Sustituyendo en $\langle x, y\rangle = 1$, se obtiene $\langle \lambda y, y\rangle = 1$, de donde resulta $\lambda = 1$. Por tanto, $x = y$.

Pregunta 2 (2,5 puntos) (1+1,5)
Considere en el espacio de Hilbert $L^2(0, 2\pi)$ el conjunto,

$$V = \left\{ f \in L^2(0, 2\pi) \ : \ \textstyle\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0 \right\}.$$

a) Demuestre que V es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(0, 2\pi)$.
b) Determine la función f de V que está a distancia mínima de g siendo $g(t) = 3\cos^2(5t)$ si $t \in (0, 2\pi)$.

Solución: a) Sea e la función constante 1 que es una función de $L^2(0, 2\pi)$. Observemos que $V = \{e\}^\perp$. Por tanto, V es un subespacio vectorial cerrado de $L^2(0, 2\pi)$.

b) La función f que piden no es más que la proyección ortogonal de g sobre V. Escribimos la descomposición ortogonal de g, $g = f + h$ siendo $h \in V^\perp = \{e\}^{\perp\perp} = \text{span}(e)$. Por tanto, $g = f + \lambda$, esto es, $f = g - \lambda$. De $f \in V$ resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} (g(t) - \lambda)dt \\ \lambda &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 3\cos^2(5t)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 3\frac{(1+\cos 10t)}{2}\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{3}{2}t + \frac{3\,\text{sen}\, 10t}{20}\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, $f = 3\cos^2(5t) - \frac{3}{2}$.

Pregunta 3 (2,5 puntos)
Sean $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y $T \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal acotado. Demuestre que

a) $\text{Ker}(T^*) = \text{Im}(T)^\perp$.

b) $\text{Im}(T^*) \subset \text{Ker}(T)^\perp$.

Solución: a) Sea $y \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{Ker}(T^*) &\iff T^*(y) = 0 \iff \langle x, T^*(y)\rangle = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{H} \\ &\iff \langle T(x), y\rangle = 0 \text{ para todo } x \in \mathcal{H} \\ &\iff y \in (\operatorname{Im}(T))^{\perp} \end{aligned}$$

b) Sea $y \in \mathcal{H}$, si $y \in \operatorname{Im}(T^*)$ entonces existe $x \in \mathcal{H}$ tal que $y = T^*(x)$.
Para todo $z \in \operatorname{Ker}(T)$ se cumple:

$$\langle z, y\rangle = \langle z, T^*(x)\rangle = \langle T(z), x\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$$

En consecuencia, $y \in (\operatorname{Ker}(T))^{\perp}$

Pregunta 4 (3 puntos) (1+0,5+ 1,5)
Sea la función 2π periódica g tal que $g(x) = \dfrac{x}{2}$ para todo $-\pi < x \leq \pi$.

a) Determine su serie de Fourier en términos de senos y cosenos.

b) Justifique la igualdad $\dfrac{x}{2} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} nx$ para todo $-\pi < x < \pi$.

c) Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solución: a) La función g es impar luego su serie de Fourier es de la forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx$$

siendo

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{2} \operatorname{sen} nx dx = \frac{1}{2\pi} \Big[-\frac{1}{n} x \cos nx + \frac{1}{n^2} \operatorname{sen} nx \Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

b) Utilizando el apartado a), sabemos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} nx$ es la serie de Fourier de la función $g(x) = \dfrac{x}{2}$ en $L^2[-\pi, \pi]$. Además g es continua y derivable en $(-\pi, \pi)$ y por tanto aplicando el teorema de Dirichlet, deducimos que su serie de Fourier converge puntualmente a g en $(-\pi, \pi)$ y por tanto se tiene la igualdad en cada punto de $(-\pi, \pi)$.

c) Particularizamos el apartado b) a $x = \dfrac{\pi}{2}$ y se obtiene $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} \Big(n\frac{\pi}{2}\Big)$.
Para n par se tiene $\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = 0$ y en consecuencia,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \operatorname{sen} \Big((2j+1)\frac{\pi}{2}\Big)$$

Ahora bien si j es par $\operatorname{sen}\big((2j+1)\frac{\pi}{2}\big) = 1$ mientras que si n es impar $\operatorname{sen}\big((2j+1)\frac{\pi}{2}\big) = -1$. Por tanto, cambiando el índice j por n se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}\,.$$

Para la segunda serie utilizamos la fórmula de Parseval,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,.$$

Como $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^2}{4} dx = \frac{\pi^3}{6}$ sustituyendo se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$