Examen de Topología

NOTA IMPORTANTE: El espacio máximo para escribir las respuestas es de dos folios por las dos caras. Si se envían más de dos folios, solamente se leerán los dos primeros.

1.- a) Sea un espacio topológico (X,T). Demostrar que un subconjunto M de X es denso en (X,T) si y sólo si para todo abierto no vacío U de X se tiene que $U \cap M \neq \emptyset$. (1,5 puntos)
b) Demostrar que en un espacio topológico (X,T), si A y B son dos subconjuntos de X, el interior de $(A \cap B)$ es igual a la intersección interior (A) e interior (B). (1 punto)

Solucción
a) Proposición 13 del libro de teoría.
b) Vamos a demostrar primero está implicación $\Leftarrow$)
Si $x \in int(A) \cap int(B)$, entonces $x \in int(A)$ y $x \in int(B)$, luego existen abiertos U y V tales que $x \in U \subset A$ y $x \in V \subset B$, por lo tanto, el abierto $W = U \cap V \subset A \cap B$ y $x \in W$, entonces $x \in int(A \cap B)$.
Ahora vamos a demostrar la otra implicación $\Rightarrow$)
Si $x \in int(A \cap B)$, se tiene que existe un abierto V tal que $x \in V \subset A \cap B$, luego $x \in V \subset A$ y $x \in V \subset B$, lo que implica que $x \in int(A)$ y $x \in int(B)$, por lo tanto, $x \in int(A) \cap int(B)$.

2.- En el conjunto N de los números naturales (se incluye el 0):
a) Probar que $T = \{A \subset N \mid \text{si } 2n+1 \notin A \text{ entonces } 2n, 2n+2 \notin A\}$ es una topología en N. (2 puntos)
b) Estudiar si (N,T) es T_2. (2 puntos)

Solucción
a) Problema 1.2 del libro de problemas.
b) Problema 2.34 del libro de problemas.

3.- a) Sean (X,T) un espacio topológico, $A \subset X$ y $r : X \to A$ una aplicación continua de (X,T) en (A,T_A) tal que $r/A = 1_A$ (la identidad en A). Probar que T_A es la topología final en A para la aplicación r, de la topología T. (2 puntos)
b) En el conjunto N de los números naturales (se incluye el 0), se considera la topología
$T = \{M \subset N \mid \text{si } n \in M \text{ entonces todo divisor de } n \text{ pertenece a } M\}$.

Estudiar si (X, T) es compacto. (1,5 puntos)

Solucción

a) Denotemos a la topología final por T_r, tendremos que probar que $T_A = T_r$.
$T_A \subset T_r$, puesto que la topología final es la más fina que hace f continua.
Ahora, demostraremos que $T_A \supset T_r$. Si $U \in T_r$, entonces $r^{-1}(U) = V$, donde $V \in T$, entonces $U \in T_A$, ya que al ser $r/A = 1_A$, se tiene $U = V \cap A$.
b) Consideremos $U_n = \{x \in N \mid x \leq n\}$, se tiene que $U_n \in T$. Además $N = \bigcup_{n \in N} U_n$, luego los U_n forman un recubrimiento por abiertos de N, y de él no se puede extraer ninguno finito, porque N es infinito. Luego (X, T) no es compacto.