Soluciones de la Prueba de Evaluación Continua
Álgebra Lineal II, Grado en Matemáticas, curso 2010/11

Ejercicio 1:
Sea $(V, <,>)$ un espacio vectorial euclídeo. Demuestre que si $f : V \to V$ es una aplicación que preserva el producto escalar, entonces f es una aplicación lineal. Ayuda: demuestre que los vectores $f(x+y) - f(x) - f(y)$ y $f(ax) - af(x)$ tienen norma cero.

Solución:
Vamos a demostrar que para todo $x, y \in V$ los vectores $f(x+y) - f(x) - f(y)$ y $f(ax) - af(x)$ tienen norma cero; de lo cual deduciremos que ambos vectores son el vector cero de V, de donde

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{y} \quad f(ax) = af(x).$$

Así, f es una aplicación lineal.

Supongamos que f es una aplicación que preserva el producto escalar, es decir

$$< f(x), f(y) >=< x, y > \text{ para todo } x, y \in V \tag{1}$$

Sean $x, y \in V$ vectores cualesquiera, entonces

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)||^2 =< f(x+y) - f(x) - f(y),\ f(x+y) - f(x) - f(y) >$$

Desarrollamos aplicando las propiedades 2 y 4 el producto escalar y obtenemos:

$$\begin{aligned} = \quad & < f(x+y), f(x+y) > + < f(x+y), -f(x) > + < f(x+y), -f(y) > + \\ & + < -f(x), f(x+y) > + < -f(x), -f(x) > + < -f(x), -f(y) > + \\ & + < -f(y), f(x+y) > + < -f(y), -f(x) > + < -f(y), -f(y) > \end{aligned}$$

Después aplicamos las propiedades 3 y 4

$$\begin{aligned} = \quad & < f(x+y), f(x+y) > -2 < f(x+y), f(x) > -2 < f(x+y), f(y) > +2 < f(x), f(y) > \\ & + < f(x), f(x) > + < f(y), f(y) > \end{aligned}$$

Ahora usamos que f preserva el producto escalar

$$=< x+y, x+y > -2 < x+y, x > -2 < x+y, y > +2 < x, y > + < x, x > + < y, y >$$

y seguiríamos desarrollando hasta obtener

$$\begin{aligned} = \quad & < x, x > + < y, y > +2 < x, y > -2 < x, x > -2 < x, y > -2 < x, y > -2 < y, y > \\ & +2 < x, y > + < x, x > + < y, y >= 0 \end{aligned}$$

Análogamente se demuestra que $||f(ax) - af(x)||^2 = 0$.Vamos a hacerlo, para ilustrar otro método ligeramente distinto aunque totalmente equivalente, usando también normas. Si f preserva el producto escalar, también preserva la norma, es decir

$$||x|| = ||f(x)|| \text{ para todo } x \in V. \tag{2}$$

También usaremos que

$$< x \pm y, x \pm y >= ||x \pm y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \pm 2 < x, y > \tag{3}$$

$$\begin{array}{rcll} ||f(ax)-af(x)||^2 & = & ||f(ax)||^2+||af(x))||^2-2<f(ax),af(x)> & (3)\\ \overset{(2) \text{ y propiedades del p. e. y norma}}{\longrightarrow} & = & ||ax||^2+a^2||f(x)||^2-2a<f(ax),f(x)> & \\ \overset{\text{por (1) y (2)}}{\longrightarrow} & = & a^2||x||^2+a^2||x||^2-2a<ax,x> & \\ & = & 2a^2||x||^2-2a^2<x,x> & \\ & = & 2a^2||x||^2-2a^2||x||^2=0. & \end{array}$$

Observación: Se puede demostrar que f es lineal con la única condición $||f(ax+by)-(af(x)+bf(y))||=0$.

Ejercicio 2: Sea f el endomorfismo de $\mathbb{R}^4$ cuya matriz en la base canónica es

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine sus autovalores y subespacios propios asociados (dimensiones y ecuaciones). Encuentre la forma canónica de Jordan de f y la base en la que se obtiene.

Solución: Calculamos el polinomio característico

$$p(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\lambda^4-4\lambda^3+6\lambda^2-4\lambda+1=(\lambda-1)^4$$

de donde deducimos que f tiene un único autovalor de multiplicidad algebraica 4

$$\lambda_1=1,\ \alpha_1=4.$$

Calculamos los subespacios propios generalizados hasta obtener el subespacio máximo $M(1)$ que será el que tenga dimensión igual a $\alpha_1=4$.

$$rango(A-I)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=2\Rightarrow\ \dim E^1(1)=\dim Ker(A-I)=4-2$$

Unas ecuaciones implícitas del subespacio $E^1(1)$ son

$$E^1(1)=\left\{\begin{array}{l} x_1-x_2=0\\ x_3-x_4=0\end{array}\right.$$

La multiplicidad geométrica del autovalor es $d_1=\dim E^1(1)=2$. Esto ya nos dice que en la matriz de Jordan habrá dos bloques. Las posibilidades son: dos bloques de dimensión 2 o un bloque de dimensión 3 y otro de dimensión 1. Seguimos con los subespacios generalizados:

$$rango(A-I)^2=rango\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=0\Rightarrow\ \dim E^2(1)=\dim Ker(A-I)^2=4$$

Entonces, el subespacio máximo es $E^2(1)=M(1)$ y obtenemos el siguiente esquema de subespacios:

$$\begin{array}{lcl} \overset{[2]}{E^1(1)} & \subset & \overset{[4]}{E^2(1)}=M(1)=\mathbb{R}^4\\ v_1 & \leftarrow & v_2\\ v_3 & \leftarrow & v_4 \end{array} \qquad (4)$$

Los tamaños de los bloques de la matriz de Jordan los determinan las líneas horizontales en el esquema anterior. Es decir, v_1 y v_2 determinan un bloque de dimensión 2; y v_3 y v_4 determinan otro bloque de dimensión 2. Entonces la matriz de Jordan es

$$M_B(f) = J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La base $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ se calcula siguiendo por orden las lineas del esquema (4):

- Primera línea:

  $$v_2 \in E^2(1) - E^1(1), \ v_1 = (f - I)(v_2),$$

  podemos tomar

  $$v_2 = (1,0,0,0) \ \Rightarrow \ v_1 = (f - I)v_2 = (1,1,0,0).$$

- Segunda línea:

  $$v_4 \in E^2(1) - E^1(1), \quad v_4 \notin L(v_1, \ v_2); \quad v_3 = (f - I)(v_4),$$

  podemos tomar

  $$v_4 = (0,0,1,0) \ \Rightarrow \ v_3 = (f - I)v_4 = (1,1,1,1).$$

Finalmente podemos comprobar que se cumple $P^{-1}AP = J$ (o lo que es más sencillo $AP = PJ$), siendo P la matriz de cambio de coordenadas de la base B a la canónica

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Errores más frecuentes:

A continuación se destacan tres errores importantes cometidos en la resolución del ejercicio 1.

1. Usar de forma incorrecta la **Desigualdad Triangular**.

   La propiedad conocida como Desigualdad Triangular (pag. 109) afirma que: para todo $x, y \in V$ se cumple

   $$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

   En algunas de las PEC se enuncia y utiliza incorrectamente afirmando que

   $$||x - y|| \leq ||x|| - ||y|| \qquad \longleftarrow \quad \text{falso} \tag{5}$$

   Es fácil ver que se cumple justo lo contrario

   $$||x - y|| \geq ||x|| - ||y|| \qquad \longleftarrow \quad \text{correcto} \tag{6}$$

   En efecto, si aplicamos la desigualdad triangular a la suma de los vectores $x - y$ e y tenemos

   $$||x|| = ||(x - y) + y|| \leq ||x - y|| + ||y||$$

   de donde se deduce (6).

   La falsa desigualdad (5) se aplicaba para afirmar erróneamente que

   $$||f(x + y) - (f(x) + f(y))|| = ||f(x + y)|| - ||f(x) + f(y)||$$

   o bien

   $$||f(ax) - af(x)|| = ||f(ax)|| - ||af(x)||$$

   y todavía peor

   $$||f(x + y) - (f(x) + f(y))|| = ||f(x + y)|| - ||f(x)|| - ||f(y)||$$

   Hay que recordar cómo se comporta la norma respecto a producto por escalares $a, b \in \mathbb{R}$:

   $$||ax|| = |a| \cdot ||x|| \ \text{ de donde } \ ||-x|| = ||x||$$

   o de modo equivalente el producto escalar

   $$< ax, by >= ab < x, y > \ \text{ de donde } \ < -x, -x >=< x, x >$$

2. Utilizar de forma incorrecta la propiedad: preservar el producto escalar. La única propiedad que se le supone a f es

   $$< f(x), f(y) >=< x, y > \quad \text{para todo } x, y \in V \tag{7}$$

   de donde se puede deducir que

   $$< f(x + y), f(z) >=< x + y, z >$$

   pero no se puede deducir directamente que

   $$< f(x) + f(y), f(z) >=< x + y, z > \tag{8}$$

   En realidad estamos suponiendo la linealidad de f.

3. No usar en ningún momento de la demostración la única condición conocida de f (7).