EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. JUNIO 2005. 1.SEMANA.

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema de Rouché.

2.Pregunta. Enunciar la fórmula de Schwarz-Christoffel, explicando el significado geométrico de los parámetros.

3.Pregunta. Encontrar una transformación conforme del dominio,

$$A = \left\{ z \middle| 0 < Arg z < \frac{\pi}{2} \right\},$$

sobre el disco unidad,

$$D = \{ w \, || w | < 1 \}.$$

4.Pregunta. Se pide:

a) Utilizando la fórmula del seno del ángulo doble, probar por inducción la fórmula,

$$2^m sen \frac{z}{2^m} . \prod_{n=1}^{m} \cos \frac{z}{2^n} = sen z.$$

b) Utilizando la parte a) concluir,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{z}{2^n} = \frac{sen z}{z}.$$

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2. P. P. JUNIO 2005. 1ª SEMANA

1. PROBLEMA. Encontrar una transformación conforme del dominio

$$A = \{ z \mid 0 < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2} \}$$

sobre el disco unidad

$$D = \{ w \mid |w| < 1 \}.$$

SOLUCION.

La transformación

$$s = z^2$$

transforma A sobre el semiplano superior.

La transformación

$$w = \frac{s-i}{s+i}$$

transforma el semiplano superior sobre el disco unidad D. Así pues

$$w = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$$

transforma conformemente A sobre D.

2. PROBLEMA. Se pide:

a) Utilizando la fórmula del seno del ángulo doble probar por inducción la fórmula

$$2^m \operatorname{sen}\frac{z}{2^m}\cdot\prod_{n=1}^{m}\cos\frac{z}{2^n}=\operatorname{sen} z$$

b) Utilizando la parte a) concluir

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{2^n}=\frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

SOLUCION

a) $m=1$, $\operatorname{sen} z = 2\operatorname{sen}\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2}$

Supuesto que la relación es cierta para m y teniendo en cuenta

$$\operatorname{sen}\frac{z}{2^m} = 2\operatorname{sen}\frac{z}{2^{m+1}}\cdot\cos\frac{z}{2^{m+1}}$$

concluimos

$$\operatorname{sen} z = 2^m\cdot\operatorname{sen}\frac{z}{2^m}\cdot\prod_{n=1}^{m}\cos\frac{z}{2^n} = 2^{m+1}\operatorname{sen}\frac{z}{2^{m+1}}\cdot\prod_{n=1}^{m+1}\cos\frac{z}{2^n}.$$

b) Utilizando a) se obtiene

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{z}{2^n} = \lim_{m\to\infty}\frac{\operatorname{sen} z}{2^{m+1}\operatorname{sen}\frac{z}{2^{m+1}}} = \lim_{t\to 0}\frac{(\operatorname{sen} z)\cdot t}{\operatorname{sen}(tz)}$$

$$= \operatorname{sen} z\cdot\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{t}{\operatorname{sen}(tz)}}_{=\,1/z} = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$$

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. JUNIO 2005. 2.SEMANA

1.Pregunta. Enunciar con detalle y demostrar la Proposición que relaciona los ceros y los polos de una función meromorfa f con los polos de f'/f.

2.Pregunta. Enunciar el Teorema de Monodromía.

3.Pregunta. Considerar el dominio,

$$A = \{z \in \mathbb{C} \,||z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Encontrar la imagen de A mediante la transformación

$$w = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$$

4.Pregunta. Determinar el número de raíces de la ecuación,

$$z^3 + 6z + 1 = 0,$$

en el conjunto $A = \{z \,|1 < |z| < 2\}$.

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2. P.P. JUNIO 2005. 2ª SEMANA

1. PROBLEMA. Considerar el dominio

$$A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1,\ \mathrm{Im} > 0 \}.$$

Encontrar la imagen de A mediante la transformación

$$w = \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2.$$

SOLUCION.

Consideramos la transformación dada como composición de las dos transformaciones siguientes:

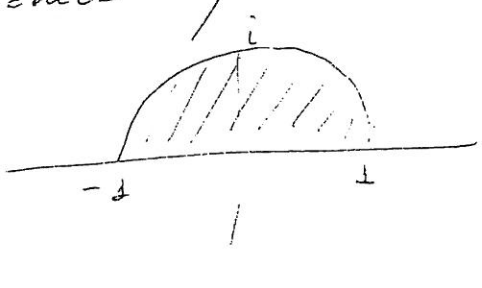
$$w = \lambda^2,$$

$$\lambda = \frac{z-1}{z+1}.$$

Estudiamos en primer lugar la transformación de A mediante la transformación

$$\lambda = \frac{z-1}{z+1}.$$

Observamos que A es el semicírculo



cuya frontera está formada por el segmento $-1 \leq x \leq 1$ y la semicircunferencia $e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq$

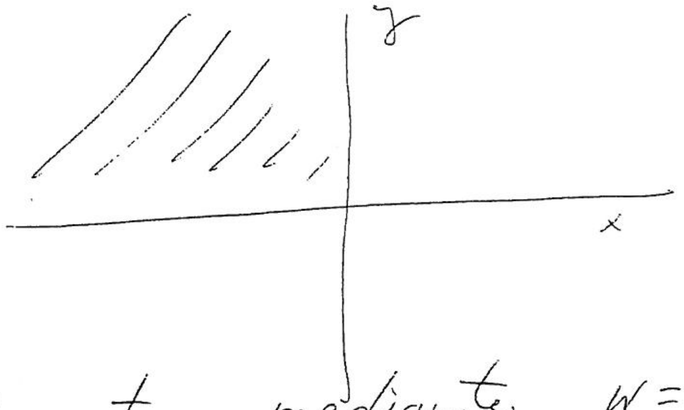
Mediante la transformación $\lambda = \frac{z-1}{z+1}$, el segmento se transforma en la semirrecta $-\infty \leq \lambda_1 \leq$ pues para x real, ~~[illegible]~~ $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ es real y cuando x crece de -1 a 1, $\lambda_1 =$ crece de $-\infty$ a cero.

La semicircunferencia se transforma en

$$\lambda = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\theta/2}-e^{i\theta/2}}{e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2i\operatorname{sen}\theta/2}{2\cos\theta/2}$$

que cuando θ varía de 0 a π, $\theta/2$ varía de 0 a $\pi/2$ y λ varía de 0 a ∞ recorriendo el semieje imaginario positivo.

Concluimos que A se transforma en el segundo cuadrante



Finalmente mediante $w = \lambda^2$, este cuadro se transforma en el semiplano inferior.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. JUNIO 2005. 2ª SEMANA (CONTINUACION)

2. PROBLEMA. Determinar el número de raíces de la ecuación

$$z^3+6z+1=0$$

en el conjunto $A=\{z \mid 1<|z|<2\}$.

SOLUCION.

En primer lugar estudiamos el número de raíces de la ecuación en $D_1=\{z \mid |z|<1\}$.

Llamemos $f(z)=z^3+6z+1$, $g(z)=6z$. para $|z|=1$, se tiene

$$|f(z)-g(z)|=|z^3+1|\leq 4<6=|6z|=|g(z)|$$

luego por el teorema de Rouché, f y g tienen el mismo número de raíces en D_1, es decir una.

A continuación estudiamos el número de raíces de la ecuación en $D_2=\{z \mid |z|<2\}$.

Otra vez consideramos $g(z) = 6z$, y obtenemos para $|z| = 2$

$$|f(z) - g(z)| = |z^3 + 2| \leq 9 < 12 = |g(z)|$$

Luego otra vez por el Teorema de Rouché en D_2, f, g tienen el mismo número de raíces que es una.

Luego en $A = D_2 \setminus D_1 \cup C$, donde $C = \{|z| = 1\}$, f no tendrá raíces.

EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV

2.P.P. SEPTIEMBRE 2005

1.Pregunta. Enunciar y demostrar el Teorema del desarrollo en serie de Laurent.

2.Pregunta. Describir todas las transformaciones fraccionarias lineales o transformaciones de Möbius que transformen el semiplano superior

$$H^+ = \{z \,|z = x + iy,\ y > 0\}\,,$$

en el círculo unidad

$$D = \{w \,||w| < 1\}\,.$$

3.Pregunta. Dada la ecuación

$$z^4 - 5z + 1 = 0,$$

se pide:

i) ¿Cuantas raíces están situadas dentro del círculo $D = \{z\,||z| < 1\}$?

ii) ¿Cuantas raíces están situadas en el anillo $A = \{z\,|1 < |z| < 2\}$?

4.Pregunta. Probar que la función

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}\,,$$

puede ser prolongada analíticamente a un dominio mayor que su círculo de convergencia por la serie

$$\log 2 - \frac{1-z}{2} - \frac{(1-z)^2}{2.2^2} - \frac{(1-z)^3}{3.2^3} - \ldots$$

Duración del Examen: 2 horas.

RESOLUCION DE LOS PROBLEMAS DEL EXAMEN DE ANALISIS MATEMATICO IV SEPTIEMBRE 2005. 2.P.P.

1. PROBLEMA. Dada la ecuación

$$z^4 - 5z + 1 = 0,$$

se pide:

i) ¿Cuantas raíces están situadas dentro del círculo $D_1 = \{z \,/\, |z| < 1\}$?

ii) ¿Cuantas raíces están situadas en el anillo

$$A = \{z \,/\, 1 < |z| < 2\}?$$

SOLUCION

i) Aplicamos el Teorema de Rouché

$$f(z) = z^4 - 5z + 1$$

$$g(z) = -5z$$

$$|f(z) - g(z)| = |z^4 - 5z + 1 + 5z| = |z^4 + 1| \leq 2, \text{ si } |z| = .$$

$$|g(z)| = 5, \text{ si } |z| = 1$$

luego

$$|f(z) - g(z)| < |g(z)|, \quad |z| = 1.$$

luego f y g tienen el mismo número de raíces en D_1, es decir una.

RESOLUCION DE ...

ANALISIS MATEMATICO IV

SEPTIEMBRE 2005. 2.P.P. (CONTINUACION).

2. PROBLEMA. Probar que la función

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$$

puede ser ~~cont~~ prolongada analíticamente a un dominio mayor por la serie

$$\log 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\dots$$

SOLUCION. En primer lugar observamos que

$$f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{1}{1+z}$$

Luego $f(z)=\ln(1+z)$.

Desarrollamos $f(z)=\ln(1+z)$ en $z=1$, y obtenemos

$$f(1)=\ln 2,\quad f'(1)=\left[\frac{1}{1+z}\right]_{z=1}=\frac{1}{2},\quad f''(1)=\left[\frac{-1}{(1+z)^2}\right]_{z=1}=-\frac{1}{2^2}$$

$$f'''(1)=\left[\frac{+2}{(1+z)^3}\right]_{z=1}=\frac{+2}{2^3}\quad ---$$

Luego el desarrollo en serie de Taylor es el expresado en el enunciado.