Geometría Básica. Mayo 2016.

Duración 2 horas. **No se permite ningún tipo de material**.

Justificar concisa y razonadamente todas las respuestas.

Ejercicio 1. (4 puntos)

a) Probar que las bisectrices de dos ángulos de un paralelogramo o bien se cortan formando un ángulo recto, o bien son paralelas.

b) Probar que si las bisectrices de un paralelogramo se cortan en cuatro puntos, entonces estos cuatro puntos son los vértices de un rectángulo.

Ejercicio 2. (3 puntos)

Sea $\triangle\{A, B, C\}$ un triángulo rectángulo de modo que $\angle A$ es el ángulo recto. Sea δ una semejanza del plano. Probar que:

$$d(B, C)\times d(\delta(B), \delta(C)) = d(A, B)\times d(\delta(A), \delta(B))+d(A, C)\times d(\delta(A), \delta(C))$$

donde $d(.,.)$ significa la distancia entre dos puntos.

Ejercicio 3. (3 puntos)

a) Enunciar una fórmula que relacione los números de vértices, caras y aristas de un poliedro convexo.

b) Dar un ejemplo de poliedro no convexo donde la fórmula del apartado anterior no se verifique.

c) ¿Existen poliedros no convexos que verifiquen la fórmula del apartado a)?

SOLUCIONES

Ejercicio 1.

a) Sea $\mathcal{P} = (A, B, C, D)$ un paralelogramo. Dado que $\mathcal{P}$ admite una simetría que es una media vuelta σ tenemos que $\sigma(A) = C$ y $\sigma(B) = D$ y por tanto $\measuredangle_{\mathcal{P}} A = \measuredangle_{\mathcal{P}} C$ y $\measuredangle_{\mathcal{P}} B = \measuredangle_{\mathcal{P}} D$. Como $\measuredangle_{\mathcal{P}} A + \measuredangle_{\mathcal{P}} B + \measuredangle_{\mathcal{P}} C + \measuredangle_{\mathcal{P}} D = 2\pi$, entonces $\measuredangle_{\mathcal{P}} A + \measuredangle_{\mathcal{P}} B = \pi$.

Supongamos que a es la bisectriz de $\angle_{\mathcal{P}} A$ y b es la bisectriz de $\angle_{\mathcal{P}} B$. Se tienen que cortar en un punto, pues si fueran paralelas tendríamos que $\angle_{\mathcal{P}} A$ y el suplementario de $\angle_{\mathcal{P}} B$, son alternos-internos, luego $\frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} A = \pi - \frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} B$, pero esto no es posible pues $\measuredangle_{\mathcal{P}} A + \measuredangle_{\mathcal{P}} B = \pi$.

Otro modo de justificar esto mismo es usar el axioma V de Euclides (Ejercicio 4.8), dado que el ángulo φ formado por la semirrecta $\overline{a}$ contenida en a con vértice en A y que corta a $[B, C]$ y la semirrecta con vértice A y que contiene a $[A, B]$ mide $\frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} A$, el ángulo ψ formado por la semirrecta $\overline{b}$ contenida en b con vértice en B y que corta a $[A, D]$ y la semirrecta con vértice B y que contiene a $[A, B]$ mide $\frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} B$, y $\frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} A + \frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} B = \pi/2 < \pi$, se tiene que $\overline{a}$ y $\overline{b}$ se cortan.

Sea $a \cap b = \{O\}$, como A, B y O forman un triángulo $\mathcal{T}$ cuyos ángulos miden: $\frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} A$, $\frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} B$ y $\measuredangle_{\mathcal{T}} O$. Como $\frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} A + \frac{1}{2}\measuredangle_{\mathcal{P}} B = \pi/2$ y $\measuredangle_{\mathcal{T}} A + \measuredangle_{\mathcal{T}} B + \measuredangle_{\mathcal{T}} O = \pi$, tenemos que $\measuredangle_{\mathcal{T}} O = \pi/2$, por tanto a y b son ortogonales.

Otro método: la bisectriz a corta a la recta r_{BC} en un punto P, esto es consecuencia de que r_{AD} y r_{BC} son paralelas y a corta a r_{AD}, por tanto a tiene que cortar a r_{BC}. Sea $\mathcal{I}$ el triángulo cuyos vértices son A, B y P. Por ser r_{AD} y r_{BC} paralelas los ángulos $\angle_{\mathcal{I}} P$ y $\angle\{\overline{a}, [A, D]\}$ son congruentes, pues son alternos internos. Como $\measuredangle_{\mathcal{I}} P = \measuredangle\{\overline{a}, [A, D]\} = \measuredangle_{\mathcal{I}} A$, el triángulo $\mathcal{I}$ es isósceles y la bisectriz b de $\angle_{\mathcal{I}} B = \angle_{\mathcal{P}} B$ es perpendicular al lado $[A, P] \subset a$, es decir a y b son perpendiculares.

Si ahora consideramos las bisectrices a de $\measuredangle_{\mathcal{P}} A$ y c de $\measuredangle_{\mathcal{P}} C$, tenemos que a y c son ambas ortogonales a b, luego son paralelas.

Otro modo de probar esto es simplemente observar que la media vuelta σ que es simetría de $\mathcal{P}$, lleva $\angle_{\mathcal{P}} A$ a $\angle_{\mathcal{P}} C$ y por tanto también a en c, como además las medias vueltas transforma cada recta en otra paralela tenemos que a y c son paralelas.

b) Sean O_i, $i = 1, 2, 3, 4$ los puntos de corte de las bisectrices. Como los lados del cuadrilátero (O_1, O_2, O_3, O_4) están contenidos en rectas ortogonales dos a dos, tenemos que dicho cuadrilátero tiene todos los ángulos rectos y por tanto es un rectángulo.

Ejercicio 2.

Es sabido que si δ una semejanza del plano de razón k se tiene que $d(\delta(X), \delta(Y)) = kd(X, Y)$, para cada par de puntos del plano X, Y.

Como $\triangle\{A, B, C\}$ un triángulo rectángulo, sabemos por el teorema de Pitágoras:

$$d(B, C)^2 = d(A, B)^2 + d(A, C)^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
d(B, C) \times d(B, C) &= d(A, B) \times d(A, B) + d(A, C) \times d(A, C) \\
d(B, C) \times \frac{d(\delta(B), \delta(C))}{k} &= d(A, B) \times \frac{d(\delta(A), \delta(B))}{k} + d(A, C) \times \frac{d(\delta(A), \delta(C))}{k} \\
d(B, C) \times d(\delta(B), \delta(C)) &= d(A, B) \times d(\delta(A), \delta(B)) + d(A, C) \times d(\delta(A), \delta(C))
\end{aligned}$$

Ejercicio 3.

a) Teorema de Descartes-Euler: Dado $\mathcal{P}$ un poliedro convexo, con c caras, l lados y v vértices, entonces:

$$c - l + v = 2$$

b) Ejemplo de la figura 13-9 del texto base.

c) Si existen, por ejemplo el poliedro de la figura 13-10 del texto base.