Prueba de evaluación continua de Geometrías Lineales

Curso 2020/21

Sea E un espacio euclidiano de dimensión 4 y $\mathcal{R}$ un sistema de referencia euclidiano de E.

Consideremos dos planos M y N en E cuyas ecuaciones respecto al sistema de referencia $\mathcal{R}$ son:

$$M: \left.\begin{array}{r} x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}, \; N: \begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{array}$$

1. Obtener una base para el subespacio vectorial de $\overrightarrow{E}$: $(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp}$.

2. Calcular $d(M, N)$.

3. Encontrar una matriz de una isometría $f : E \to E$ tal que $f(M) = N$ y $f(N) = M$. Indicación: usar

$$\overrightarrow{f}((\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp} + (\overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N})) = (\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp} + (\overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N})).$$

Solución.

1. Por un lado, $\overrightarrow{M}: \left.\begin{array}{r} x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$ con base $((1,0,0,0),(0,0,1,1))$ y entonces $\overrightarrow{M}^{\perp}$ tiene por base: $((0,1,0,0),(0,0,1,-1))$.

Para $\overrightarrow{N}: \left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$ con base $((1,1,0,0),(0,0,1,-1))$, entonces $\overrightarrow{N}^{\perp}$ tiene por base: $((1,-1,0,0),(0,0,1,-1))$.

Como $(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp} = \overrightarrow{M}^{\perp} \cap \overrightarrow{N}^{\perp}$ una base es $((0,0,1,-1))$.

Otro método: Las ecuaciones de $\overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N}$ son $\left.\begin{array}{r} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$, luego $\dim \overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N} = 1$. Por tanto $\dim \overrightarrow{M} + \overrightarrow{N} = \dim \overrightarrow{M} + \dim \overrightarrow{N} - \dim \overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N} = 3$, es decir un hiperplano. Una ecuación de $\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N}$ es $x_3 - x_4 = 0$ (pues es común a las ecuaciones de $\overrightarrow{M}$ y $\overrightarrow{N}$). Como $\dim(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp} = 4 - \dim \overrightarrow{M} + \overrightarrow{N} = 1$ y de la ecuación $x_3 - x_4 = 0$ se tiene $(0,0,1,-1) \in (\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp}$, luego $((0,0,1,-1))$ es una base.

2. Por la Proposición 9.3 del texto base, para calcular la distancia entre M y N hemos de encontrar $p \in M$ y $q \in N$ tal que $\overrightarrow{pq} \in (\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp}$.

Para ello tomamos un punto genérico de M: $p = (\alpha, 0, \beta, \beta)$ y ahora tenemos que exigir que p sea tal que $p + (\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp}$ corte a N. En nuestro caso hemos de exigir: $q = p + \lambda(0,0,1,-1) \in N$. Como

$$q = p + \lambda(0,0,1,-1) = (\alpha, 0, \beta + \lambda, \beta - \lambda)$$

Para que $q \in N$ debe ser: $\left.\begin{array}{c} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = -1 \end{array}\right\}$; luego: $\left.\begin{array}{c} \alpha = 0 \\ 2\lambda = -1 \end{array}\right\}$, por tanto $\lambda = -\frac{1}{2}$ y como $\overrightarrow{pq} = \lambda(0,0,1,-1) = -\frac{1}{2}(0,0,1,-1)$, tenemos que:

$$d(M,N) = d(p,q) = \|\overrightarrow{pq}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Por una parte $\overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N}$ tiene por ecuaciones: $\left.\begin{array}{c} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{array}\right\}$ y por otra $(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp}$ tiene por ecuaciones $\left.\begin{array}{c} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{array}\right\}$, de donde $(\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp} + (\overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N})$ es $x_1 = x_2 = 0$.

Por ser

$$\overrightarrow{f}((\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp} + (\overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N})) = (\overrightarrow{M} + \overrightarrow{N})^{\perp} + (\overrightarrow{M} \cap \overrightarrow{N})).$$

se tiene que $\overrightarrow{f}(0,0,x_3,x_4) = (0,0,x_3',x_4')$, con lo cual la matriz de $\overrightarrow{f}$ tiene la forma: $\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}$, y por ser matriz ortogonal: $\begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}$.

Sea la siguiente matriz la de una isometría como la buscada:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & a & b & 0 & 0 \\ y & c & d & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & a' & b' \\ t & 0 & 0 & c' & d' \end{bmatrix}$$

Por la condición $f(M) = N$, se tiene:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & a & b & 0 & 0 \\ y & c & d & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & a' & b' \\ t & 0 & 0 & c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} \in N$$

de donde tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} x + a\alpha - (y + c\alpha) = x - y + (a-c)\alpha = 0 \\ z + a'\beta + b'\beta - (t + c'\beta + d'\beta) = z - t + [a' + b' - (c' + d')]\beta = -1 \end{array}\right\}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Luego:

$$\begin{array}{c} x - y = 0,\ a - c = 0 \\ z - t = -1,\ a' + b' - (c' + d') = 0 \end{array}$$

Vamos ahora a imponer $f(N) = M$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & a & b & 0 & 0 \\ x & a & d & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & a' & b' \\ z+1 & 0 & 0 & c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha \\ \beta \\ \beta + 1 \end{bmatrix} \in M$$

Luego:

$$\left.\begin{array}{c} x + a\alpha + d\alpha = 0 \\ z + a'\beta + b'(\beta + 1) - (z + 1 + c'\beta + d'(\beta + 1)) = 0 \end{array}\right\}$$

para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$\begin{array}{c} x = 0, d = -a \\ b' - d' - 1 = 0,\ a' + b' - (c' + d') = 0 \end{array}$$

De donde tenemos que la matriz tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & a' & b' \\ z+1 & 0 & 0 & c' & b'-1 \end{bmatrix}$$

Como las columnas de la matriz de $\overrightarrow{f}$ son las coordenadas de una base ortonormal, se tiene que $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Además $(0, 0, b', b' - 1)$, tiene módulo 1, de donde $b' = 1$ o $b' = 0$. Si $b' = 1$, como $a' + b' - (c' + d') = 0$ y al ser (a', c') ortogonal a $(0, 1)$, $a' = 0$ y $c' = 1$. Finalmente si $b' = 0$, se tiene $a' = -1$, $c' = 0$.

Por tanto las (infinitas) soluciones posibles son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 1 \\ z+1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & -a & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & -1 & 0 \\ z+1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ y z es un número real.

Nota: No se pedían todas las soluciones, bastaba con obtener una.