

ANTONIO VERA LÓPEZ
Catedrático de Álgebra
de la Universidad del País Vasco

PEDRO ALEGRÍA EZQUERRA
Profesor Titular de Análisis
de la Universidad del País Vasco

UN CURSO DE ANÁLISIS FUNCIONAL

TEORÍA Y PROBLEMAS

ESPACIOS NORMADOS Y DE BANACH.
PRODUCTO INTERIOR Y ESPACIOS DE HILBERT.
TEORÍA ESPECTRAL EN ESPACIOS NORMADOS.
TEORÍA ESPECTRAL EN ESPACIOS DE HILBERT.

AVL

INTRODUCCIÓN

1. CONCEPTO.

El Análisis Funcional es una rama de las Matemáticas que utiliza el lenguaje de la Geometría en el estudio de ciertas estructuras topológico-algebraicas y de los métodos que pueden aplicarse a problemas analíticos mediante el conocimiento de estas estructuras. Así, muchos problemas en Análisis se refieren no sólo a objetos aislados, como funciones, medidas u operadores, sino a clases o conjuntos de tales objetos. La mayoría de estas clases (en el caso que nos ocupa) son *espacios vectoriales*, tanto reales como complejos. Como los procesos de límite juegan su papel en todo problema analítico -concepto que permite hablar de diferenciación e integración y en general de procesos infinitos, que pueden incluso reducirse a la consideración de ciertos procesos finitos,- no debe sorprender que esos espacios estén dotados de *métricas*, o al menos de *topologías*, para poder establecer relaciones naturales entre los objetos de esos espacios y generalizar conceptos familiares, como el de límite de sucesiones, sucesiones de Cauchy, funciones continuas, etc. Una forma simple, pero que será fundamental en el desarrollo de este curso, consiste en introducir una *norma*, obteniéndose una estructura de *espacio normado*.

La idea crucial en el estudio del espacio vectorial clásico \mathbb{R}^n de las n -tuplas de números reales es la expresada por R. Descartes y consiste en asociar a cada elemento (x_1, \dots, x_n) del espacio un punto en un sistema de coordenadas ortogonales. De esta forma todo punto representa un vector y tiene sentido geométrico la suma de vectores y el producto por un escalar, los planos tienen

una expresión analítica y la distancia entre dos puntos se puede expresar como $d(x, y) = \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \cdots + |x_n - y_n|^2}$. La distancia de un punto x al origen de coordenadas, llamada norma de x , es $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$. Además, se dice que dos vectores x e y son ortogonales cuando $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0$; de aquí se define el producto interior de x e y como $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$. Es fácil observar que la norma se puede definir a partir del producto escalar como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ y que la distancia se define a partir de la norma mediante la fórmula $d(x, y) = \|x - y\|$. Todo lo anterior puede generalizarse sin dificultad al espacio \mathbb{C}^n si se define el producto interior $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \cdots + x_n \overline{y_n}$. Este tratamiento algebraico para resolver problemas geométricos ha dominado el pensamiento matemático por más de un siglo.

Por otra parte, identificando cada punto o vector $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ con la función $x : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $x(1) = x_1, \dots, x(n) = x_n$, puede tratarse a \mathbb{C}^n como el espacio de las funciones complejas con dominio el conjunto $\{1, \dots, n\}$. Era natural, llegados a este punto, extender estas ideas a otros objetos matemáticos con estructura similar. Fueron D. Hilbert y su alumno E. Schmidt quienes consideraron el espacio de las sucesiones o funciones con dominio el conjunto \mathbb{N} , donde tiene sentido el producto interior $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ en el caso de que la serie converja; pero esto ocurre cuando las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tienen cuadrado sumable, es decir si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n|^2 < \infty$. Esto originó el espacio ℓ^2 de dichas sucesiones, que es la generalización inmediata del espacio euclídeo \mathbb{C}^n .

Nuevas extensiones corresponden por ejemplo al caso en que las funciones estén definidas en un intervalo $[a, b]$: identificando ahora funciones que sean iguales en casi todo punto, se define el producto interior de dos funciones f y g como $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$. Se obtiene así el espacio $L^2[a, b]$ de las funciones complejas $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de cuadrado integrable en $[a, b]$ con respecto a la medida de Lebesgue.

Sin embargo, al pasar a espacios de dimensión infinita, se presentan diferencias fundamentales en algunas propiedades, como son:

- Mientras que en el caso finito toda aplicación lineal es continua, en el caso infinito existen aplicaciones lineales que no son continuas.
- En el caso finito toda sucesión de Cauchy es convergente pero en el caso infinito no siempre es cierto. Donde esta propiedad es cierta tenemos los llamados espacios completos; donde no es cierta, todavía puede completarse el espacio para que valga la propiedad.
- En el caso finito toda bola cerrada es compacta (teorema de Bolzano-

Weierstrass) pero en el caso infinito nunca es cierto. Por esta razón es importante el estudio de los operadores compactos que son la generalización directa de los operadores en espacios de dimensión finita.

La necesidad de considerar espacios de dimensión infinita, originada por su relación con las teorías clásicas de momentos, de las ecuaciones integrales, etc., permitió dar un gran impulso al desarrollo del Análisis Funcional, impulso que ya no ha cesado al sumarse con la influencia que parte de sus aplicaciones e interrelación con otras ramas del Análisis, como la Mecánica Cuántica, Análisis Armónico y Teoría de Aproximación e Interpolación, entre otras.

2. EVOLUCIÓN.

El análisis funcional nace en la resolución de ecuaciones donde las incógnitas son funciones. A las ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales estudiadas en el siglo XVIII se unen las ecuaciones integrales a partir del siglo XIX; luego las ecuaciones integro-diferenciales y demás ecuaciones funcionales.

A lo largo de los siglos XVIII y XIX se daban soluciones formales de ecuaciones diferenciales resolviendo sistemas infinitos de ecuaciones por el método de coeficientes indeterminados. Por supuesto en esa época no importaba demasiado la convergencia de las series asociadas a tales problemas.

Hacia 1800 comienza el estudio de tres tipos de ecuaciones fundamentales en la Física Matemática:

$$\begin{aligned}\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0 & : & \text{ecuación de Laplace} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u &= 0 & : & \text{ecuación de ondas} \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= 0 & : & \text{ecuación del calor}\end{aligned}$$

que dan lugar al Análisis Lineal, a la teoría de series e integrales de Fourier, a la teoría de Sturm-Liouville y a finales de siglo aparecieron los primeros ejemplos de espacios de Hilbert y algunos resultados de la teoría espectral de operadores en tales espacios. También hacia el final del siglo XIX se impone la distinción entre diversos tipos de convergencia de sucesiones de funciones lo que conducirá a la idea general de topología sobre un conjunto de funciones.

A principios del presente siglo se empezó a desarrollar la teoría abstracta gracias a los trabajos de muchos investigadores, entre los que podemos citar a V. Volterra, I. Fredholm, D. Hilbert, M. Fréchet, F. y M. Riesz, E. Schmidt, H. Weyl, H. Hahn, T. Carleman, J. von Neumann, E. Hellinger, S. Banach, M. Stone, etc., quienes estudiaron las ecuaciones integrales, problemas de valores propios, descomposiciones espectrales de operadores lineales, etc., y fueron descubriendo el correcto encuadre conceptual de los resultados. Ya no se trata de reducir cuestiones referentes a espacios infinito-dimensionales a la geometría del espacio finito-dimensional sino de desarrollar la geometría de los objetos a analizar desde un punto de vista intrínseco, sin estar sujeto a la elección de coordenadas ni a la adopción de bases específicas, y usando la geometría euclídea sólo como analogía.

Los avances experimentados durante esa época fueron presentados de forma sistemática en los famosos libros “Théorie des Opérations Linéaires”, de Banach y “Linear Transformations in Hilbert Spaces” de Stone, ambos publicados en 1932. Ambos tratados ejercieron una gran influencia posterior y todavía sirven de base para un tratamiento básico del Análisis Funcional y la Teoría de Operadores. La axiomática de los espacios de Hilbert fue dada por von Neumann en un artículo de 1930, fundamental en la teoría de operadores no acotados pues establece para ellos el teorema espectral, generalizando lo hecho por Hilbert veinte años antes para operadores acotados. El interés de von Neumann en la teoría de operadores, que arrancó de la Mecánica Cuántica, le condujo a un estudio sistemático de las álgebras de operadores; estudio profundizado por I. Gelfand (1941) al descubrir el importante papel que representan los ideales maximales de un álgebra conmutativa y construir así la hoy llamada transformada de Gelfand. La axiomatización y discusión de estos espacios es la que permite un tratamiento unificado de los elementos de análisis, geometría y matemática aplicada ya citados además de la teoría de operadores, series de Fourier abstractas, geometría de subespacios, topología débil, fuerte y uniforme, teoría de espectros y muchos otros.

A partir de los años 40 se desplazó el interés en los espacios normados por el de los espacios localmente convexos motivado por la construcción de L. Schwartz de la teoría de distribuciones, la cual ha resultado tener muchas aplicaciones, en particular a las ecuaciones en derivadas parciales. El desarrollo de la teoría de distribuciones también ha originado la aparición de la teoría de operadores pseudo-diferenciales y el Análisis sobre variedades diferenciales.

3. CONTENIDO DEL CURSO.

Con respecto al orden de presentación de los temas, el curso se desarrolla partiendo de los conceptos generales de espacio métrico y de aplicación entre espacios métricos para, consecutivamente, ir añadiendo restricciones que motiven por un lado la idea de norma y de producto escalar definidas en clases adecuadas de espacios métricos, y por otro la introducción de los operadores lineales que actúen sobre dichos espacios.

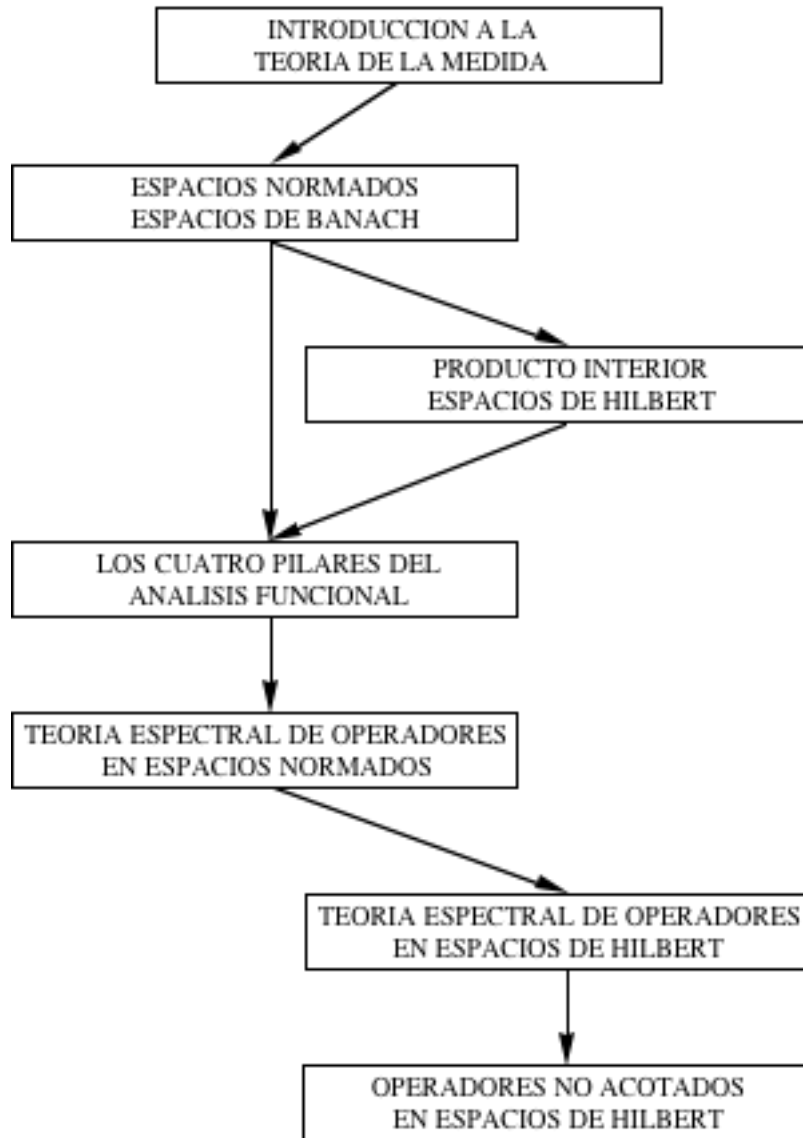
Con este esquema se consigue, en primer lugar, presentar al principio la notación y terminología a seguir a lo largo del curso y conseguir una paulatina toma de contacto con los recursos típicos en los que se incidirá posteriormente. En segundo lugar, se aprovechan las propiedades y ejemplos más generales y se refinan para proporcionar modelos simples y ejemplos concretos. De particular interés son los espacios clásicos de sucesiones y de funciones los cuales, introducidos desde un principio, permitirán comprobar sobre ellos las propiedades que caracterizarán los nuevos espacios que se irán definiendo a lo largo del curso. El círculo se cierra cuando se muestra que los espacios de Hilbert separables son la generalización inmediata de los espacios euclídeos y que los operadores lineales y acotados juegan el papel de matrices asociadas a homomorfismos (especialmente ilustrativo en este aspecto es el texto de I. Gohberg y S. Goldberg [GG]).

El esquema de la página siguiente muestra la dependencia entre los capítulos que componen el programa propuesto.

Al final de cada capítulo se presenta una colección de problemas resueltos en su totalidad, completando así la información básica desarrollada a lo largo del capítulo. Se proponen también una serie de temas complementarios con referencia a los textos en donde pueden consultarse.

Una extensa, aunque no exhaustiva, lista de publicaciones relativas al tema se proporciona en la bibliografía final, lista que incluye tanto tratados generales, como textos introductorios, así como textos que aportan información suplementaria a los objetivos de este curso básico.

INTERDEPENDENCIA LOGICA



I. NOCIONES GENERALES SOBRE ESPACIOS MÉTRICOS

En este primer capítulo se recuerdan los conceptos topológicos básicos y se adopta la terminología y notación que se manejarán a lo largo del curso; se introducen además los ejemplos que servirán de modelo para las aplicaciones esenciales de la teoría a desarrollar.

SECCIONES

1. Definiciones previas y primeros ejemplos.
2. Nociones topológicas en espacios métricos.
3. Aplicaciones entre espacios métricos.
4. Completitud en espacios métricos.
5. Compacidad en espacios métricos.
6. Ejercicios.

1. DEFINICIONES PREVIAS Y PRIMEROS EJEMPLOS.

La estructura más importante del análisis funcional es el espacio vectorial. Un conjunto $X \neq \emptyset$ se llama *espacio vectorial* (y sus elementos se llamarán *vectores*) respecto al cuerpo E (a cuyos elementos llamaremos *escalares*) si en X se definen dos operaciones, suma y multiplicación por escalar, con las propiedades algebraicas siguientes:

(a) X es un grupo abeliano respecto a la suma, es decir:

a.1) $\forall x, y \in X : x + y = y + x.$

a.2) $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z).$

a.3) Existe un único $0 \in X$ tal que $x + 0 = 0 + x, \forall x \in X$ (no confundirlo con el neutro de E).

a.4) $\forall x \in X, \exists -x \in X : x + (-x) = 0.$

(b) La multiplicación por escalar verifica:

b.1) $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in E : \alpha(\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x.$

b.2) $\forall x \in X, 1 \cdot x = x$ (1 es la identidad en E).

b.3) $\forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in E : (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x.$

b.4) $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in E : \alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y.$

Un espacio vectorial real es aquél donde $E = \mathbb{R}$ y un espacio vectorial complejo es aquél donde $E = \mathbb{C}$. Siempre que no se especifique el cuerpo E , entenderemos que se trata de \mathbb{R} ó \mathbb{C} .

Notación: Si X es un espacio vectorial, $A \subset X, B \subset X, \lambda \in E$, escribiremos

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\},$$

$$A - B = \{x - y : x \in A, y \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x : x \in A, x \notin B\} \text{ (en particular } A^c = X \setminus A),$$

$$\lambda A = \{\lambda x : x \in A\} \text{ (obsérvese que } 2A \neq A + A),$$

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}.$$

Una familia finita de vectores $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ se dice *linealmente independiente* cuando

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Análogamente, una colección arbitraria de vectores es *linealmente independiente* si cualquier subconjunto finito de ella es linealmente independiente.

Se dice que un conjunto $A \subset X$ linealmente independiente es *base de Hamel* de X si todo vector $x \in X$ puede expresarse como combinación lineal de elementos de A , es decir si existen escalares $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ y vectores $x_1, \dots, x_n \in A$ tales que $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n$. Entenderemos siempre las combinaciones lineales finitas, aunque haya un número infinito de elementos en la base. Se puede probar (como una aplicación del lema de Zorn) que todo espacio vectorial posee una base de Hamel. Además todas las bases tienen el mismo número de elementos, llamado *dimensión (algebraica)* del espacio.

Un conjunto $Y \subset X$ es *subespacio* de X si Y es también espacio vectorial (con las mismas operaciones, por supuesto). Esto ocurre si y sólo si $0 \in Y$ y $\alpha Y + \beta Y \subset Y$, $\forall \alpha, \beta \in E$. Dada una familia $U \subset X$, el menor subespacio de X que contiene a U se llama *subespacio generado* por U , y lo denotaremos por $\langle U \rangle$.

Se dice que X es *suma directa* de los subconjuntos M_1, \dots, M_n , lo cual denotaremos por $X = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$, si

$$X = M_1 + \dots + M_n \text{ y } M_i \cap \sum_{j \neq i} M_j = \{0\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Si esto es cierto, todo vector en X se puede escribir en forma única como suma $x = m_1 + \dots + m_n$ con $m_i \in M_i$, $i = 1, \dots, n$. A diferencia de lo anterior, se define la *suma directa externa* de dos espacios X e Y al producto $X \times Y$ con las operaciones usuales.

En un conjunto arbitrario (no necesariamente con estructura algebraica) se puede definir el concepto de métrica. Si además posee estructura de espacio vectorial, ciertas métricas darán lugar a la noción de norma, como veremos en el capítulo II.

1.1.- Definición. Un *espacio métrico* es un par (X, d) , donde X es un conjunto arbitrario no vacío y $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación, llamada *distancia o métrica*, tal que, para cualesquiera $x, y, z \in X$, se verifica:

- (1) $d(x, y) \geq 0$.
- (2) $d(x, y) = 0 \iff x = y$.
- (3) $d(x, y) = d(y, x)$.
- (4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

De la definición son evidentes las siguientes propiedades:

- i) $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in X.$
- ii) $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \forall x, y, z \in X.$
- iii) Si Y es un subconjunto del espacio métrico (X, d) y se define $d'(y_1, y_2) = d(y_1, y_2), \forall y_1, y_2 \in Y$, entonces (Y, d') es también un espacio métrico y d' se llama *métrica inducida* por d a Y .

1.2.- Ejemplos. 1) Sea X un conjunto cualquiera. La aplicación d definida

$$\text{por } d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases} \text{ es la llamada } \textit{métrica trivial o discreta}.$$

2) Si $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ es la distancia usual (euclídea).

3) Para $X = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ es también la distancia euclídea.

Las aplicaciones $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ y $d(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ son también métricas en X .

4) En $X = \mathbb{R}^n$ son distancias

$$\begin{aligned} d_p(x, y) &= \left(\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad (p \geq 1), \text{ y} \\ d_\infty(x, y) &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|. \end{aligned}$$

Un hecho interesante es que todas ellas van a dar topologías equivalentes (ver teorema 5.9, capítulo II)..

5) Sean $X = \mathbb{Q}$, $c \in \mathbb{R}$ ($0 < c < 1$), p primo. Todo $x \in \mathbb{Q}$ se puede escribir como $x = p^\alpha \frac{a}{b}$ donde p no divide a a ni a b . Así definimos el valor p -ádico de x como $|x|_p = c^\alpha$ si $x \neq 0$ y $|0|_p = 0$.

De este modo, $d(x, y) = |x - y|_p$ es una métrica (ver [BN]).

6) En el espacio $X = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sucesión acotada}\}$ definimos $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n|$. Así (X, d) es un espacio métrico y se denota por ℓ^∞ .

7) En general, si llamamos $\ell^p = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^p < \infty\}$, ($p \geq 1$), las aplicaciones $d_p(x, y) = \left(\sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^p \right)^{1/p}$ son también distancias.

El espacio correspondiente a $p = 2$ fue estudiado por Hilbert (1912) en su estudio sobre las ecuaciones integrales y constituyó el primer ejemplo de los que posteriormente definiremos como espacios de Hilbert.

Para comprobar los axiomas (concretamente la desigualdad triangular) son necesarias las desigualdades de Hölder y Minkowski que veremos posteriormente (capítulo II, sección 2). Como la desigualdad triangular falla precisamente cuando $p < 1$, no tiene sentido definir el espacio ℓ^p con $p < 1$.

8) Los espacios

$$\begin{aligned} c &= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergente}\} \text{ y} \\ c_0 &= \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0\}, \end{aligned}$$

al ser subespacios de ℓ^∞ , son espacios métricos con la métrica inducida por ℓ^∞ .

9) Si llamamos $C[a, b]$ al espacio de las funciones continuas en $[a, b]$, la aplicación $d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$ define también una distancia en el conjunto.

10) Más generalmente, si $B(A)$ es el espacio de las funciones acotadas en A , $d(f, g) = \sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|$ es también una distancia.

Dejamos como ejercicio la comprobación de los axiomas de espacio métrico en los ejemplos anteriores.

2. NOCIONES TOPOLÓGICAS EN ESPACIOS MÉTRICOS.

Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x \in X$, $r > 0$, la *bola abierta* de centro x y radio r es el conjunto $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$. Análogamente se definen las correspondientes *bolas cerradas* $\bar{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ y las *esferas* $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$. En general, se llama *diámetro* de un conjunto A a $\text{diám } A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$.

Ejemplos. 1) Si d es la métrica trivial en X , $B(x, r) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } r \leq 1, \\ X & \text{si } r > 1. \end{cases}$

2) En $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, las bolas abiertas son $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\}$.

2.1.- Definición. Sea $A \subset X$. Se dice que $x \in A$ es *punto interior* de A si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Se llama *interior* de A al conjunto

$$\text{int } A = \{x \in A : x \text{ es punto interior de } A\}.$$

Si $\text{int } A = A$, A se llama *abierto*. Si llamamos \mathcal{A} a la colección de todos los conjuntos abiertos de X , tenemos las siguientes propiedades:

P1) $A_\alpha \in \mathcal{A}, \alpha \in I \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{A}$ (I es cualquier conjunto de índices).

P2) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

P3) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

Observación. Recordemos que un *espacio topológico* es aquél en el que existe una familia \mathcal{A} de subconjuntos de X que verifican los axiomas (P1), (P2), (P3). De aquí se deduce que todo espacio métrico es a su vez un espacio topológico.

2.2.- Definición. Dado $A \subset X$, un punto $x \in X$ es de *adherencia* de A si

$$\forall r > 0 : B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

El conjunto $\overline{A} = \{x \in X : x \text{ es punto de adherencia de } A\}$ se llama *clausura* de A . Un conjunto A se dice *cerrado* cuando $\overline{A} = A$. Las siguientes propiedades son elementales: (1) $A \subset \overline{A}$; (2) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$; (3) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

2.3.- Proposición. A es abierto si y sólo si A^c es cerrado.

Demostración. Supongamos que A es abierto. Entonces

$$\begin{aligned} x \in \overline{A^c} &\implies \forall r > 0 : B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset \implies B(x, r) \not\subset A \implies x \notin \text{int } A \\ &\implies (\text{como } A \text{ es abierto}) x \notin A \implies x \in A^c. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que A^c es cerrado.

El recíproco también es directo. \diamond

De esta proposición y de las propiedades análogas para los abiertos, se deducen las siguientes:

P1) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia arbitraria de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap_{i \in I} A_i$ es cerrado.

P2) Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ son cerrados, $\bigcup_{i=1}^n A_i$ es cerrado.

P3) \emptyset, X son cerrados.

2.4.- Definición. Un punto $x \in X$ es *punto límite* (o de *acumulación*) de $A \subset X$ cuando $\forall r > 0, B(x, r) \cap A$ contiene infinitos puntos de A (lo que es equivalente a decir que contiene algún punto de A distinto de x). Se llama *conjunto derivado* de A ,

$$A' = \{x \in X : x \text{ es punto límite de } A\}.$$

Es fácil comprobar que A es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.

2.5.- Definición. Dada una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X , se dice que converge al punto x , y se escribe $x_n \rightarrow x$, cuando

$$\forall r > 0, \exists N : x_n \in B(x, r), \forall n > N.$$

La condición anterior equivale a que la sucesión de números reales $\{d(x_n, x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cero.

Análogamente, una sucesión de subconjuntos $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de X converge a un punto $x \in X$ si para toda bola B centrada en x , existe un índice m tal que $A_n \subset B$ para todo $n > m$. Es inmediato que:

2.6.- Proposición. Dada una sucesión arbitraria $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X , si llamamos $A_k = \{x_n : n > k\}$, entonces $x_n \rightarrow x$ si y sólo si A_k converge a x .

Ejemplos. 1) Sea X un conjunto arbitrario con la métrica trivial. Si $x_n \rightarrow x$, entonces $x_n = x, \forall n > N$.

2) Sea \mathbb{Q} con la distancia p-ádica. Dada la sucesión $\{p^n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $d(0, p^n) = |p|_p^n = c^n$ y como $c < 1$, $p^n \rightarrow 0$.

2.7.- Definición. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X es *acotada* cuando

$$\sup\{d(x_n, x_m) : n, m \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

En general, un subconjunto $M \subset X$ es *acotado* cuando $M \subset B(x_0, r)$ con x_0 arbitrario y r suficientemente grande.

Un concepto más general, y que relacionaremos posteriormente con el de compacidad, es el siguiente:

2.8.- Definición. Un conjunto A de un espacio métrico X se dice *totalmente acotado* o *precompacto* si, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número finito de conjuntos A_1, \dots, A_p tales que $A = A_1 \cup \dots \cup A_p$ y $\text{diám } A_i \leq \varepsilon, i = 1, \dots, p$.

2.9.- Proposición. Si A es *totalmente acotado*, entonces es *acotado*.

Demostración. Tomemos $\varepsilon = 1$; por hipótesis $A = A_1 \cup \dots \cup A_p$ con $\text{diám } A_i \leq 1$. Para cada $i \in \{1, \dots, p\}$, elegimos $x_i \in A_i$ y llamamos

$$\delta = \max\{d(x_i, x_j), i, j = 1, \dots, p\}.$$

Dados $x, y \in A$, existirán i, j tales que $x \in A_i, y \in A_j$; luego

$$d(x, y) \leq d(x, x_i) + d(x_i, x_j) + d(x_j, y) \leq 1 + \delta + 1 = 2 + \delta,$$

lo que prueba la acotación de A . ◇

El recíproco no es cierto: basta considerar un conjunto infinito A con la métrica discreta pues toda esfera de radio $\varepsilon < 1$ sólo posee un punto y A no

puede cubrirse con un número finito de esferas de radio $\varepsilon < 1$. Sin embargo, es evidente que se trata de un conjunto acotado.

2.10.- Lema. Sea (X, d) un espacio métrico.

a) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, entonces está acotada y su límite es único.

b) Si $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, entonces $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

Demostración. a) Haciendo $\varepsilon > 1$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) < 1$, $\forall n > N$. Por otra parte, para los valores $n \leq N$, existe $a = \max\{d(x_1, x), \dots, d(x_N, x)\}$. Entonces $d(x_n, x) \leq 1 + a$, $\forall n$ y $d(x_n, x_m) \leq 2(1 + a)$, $\forall n, m$.

Si $x_n \rightarrow x$, $x_n \rightarrow y$, entonces $0 \leq d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \rightarrow 0$.

b) Por la desigualdad triangular, $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$. Entonces

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq d(x_n, x) + d(y, y_n) \rightarrow 0. \quad \diamond$$

Observación. En \mathbb{R} con la métrica euclídea se verifica además que toda sucesión monótona y acotada es convergente. Otro resultado importante es el teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma que toda sucesión acotada en \mathbb{R} tiene alguna sub-sucesión convergente.

Muy útiles en lo sucesivo serán las siguientes caracterizaciones de la clausura de un conjunto.

2.11.- Proposición. $x \in \overline{A} \iff \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Demostración. Si $x \in \overline{A}$, por definición, $\forall n \in \mathbb{N}$, $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$. Elegimos un punto $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$. Está claro que $x_n \rightarrow x$ porque $d(x_n, x) < 1/n$.

Recíprocamente, si $x_n \rightarrow x$ con $x_n \in A$, dado cualquier $r > 0$, existe $N(r)$ tal que $x_n \in B(x, r)$, $\forall n > N(r)$, de donde $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$. \diamond

2.12.- Corolario. A es cerrado si y sólo si dada cualquier sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en A y $x_n \rightarrow x$, entonces $x \in A$.

2.13.- Definición. Un subconjunto M de un espacio métrico X es *denso* en X si $\overline{M} = X$. El espacio X se dice *separable* si posee algún subconjunto numerable que es denso en X . En la práctica se prefieren los espacios separables, más simples que los otros. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos. 1) Si X es un espacio con la métrica discreta, es separable si y sólo si es numerable, pues ningún subespacio propio puede ser denso.

2) \mathbb{R} es separable pues $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es numerable y denso en \mathbb{R} .

3) \mathbb{C} es separable pues $\{x + iy : x, y \in \mathbb{Q}\}$ es numerable y denso en \mathbb{C} .

4) Veamos que ℓ^∞ no es separable:

Sea $M = \{y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sucesión formada por ceros y unos}\}$. Asociamos a cada y otro número $\hat{y} \in [0, 1]$ cuya representación binaria es $y_1/2 + y_2/2^2 + \dots + y_n/2^n + \dots$.

Así, como $[0, 1]$ no es numerable y dos puntos distintos $\hat{y}, \hat{z} \in [0, 1]$ tienen distintas representaciones binarias, el conjunto de las sucesiones M formadas por ceros y unos es también no numerable. (Otra forma de ver que M es no numerable es aplicar el procedimiento diagonal de Cantor.)

Además, dos de ellas verifican $d(y, z) = 1$. Por tanto, $\{B(y, 1/3) : y \in M\}$ es una familia no numerable de conjuntos disjuntos.

Si un conjunto arbitrario D fuera denso en ℓ^∞ , cada una de esas bolas tendría algún punto de D ; como hay un conjunto no numerable de bolas, debe haber un conjunto no numerable de elementos de D . De esto se deduce que ℓ^∞ no es separable.

5) Los espacios ℓ^p , con $1 \leq p < \infty$, son separables:

En efecto, si $M = \{y = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots) : y_k \in \mathbb{Q}, \forall k\}$, M es numerable.

Además, $\forall x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p$, dado cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists n = n(x) : \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^p < \varepsilon^p/2$ (por ser el resto de una serie convergente).

Como \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} , $\exists y_k \in \mathbb{Q} : \sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p < \varepsilon^p/2$. Si definimos el elemento $y = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots)$, entonces

$$d(x, y)^p = \sum_{j=1}^n |x_j - y_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p < \varepsilon^p \implies d(x, y) < \varepsilon.$$

Esto demuestra que M es denso en ℓ^p .

3. APLICACIONES ENTRE ESPACIOS MÉTRICOS.

3.1.- Definición. Sean (X, d) , (Y, d') espacios métricos. Se dice que una aplicación $f : X \rightarrow Y$ es *continua en* $x_0 \in X$ cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

Si f es continua en todo $x \in X$, se llama *aplicación continua*. (Es evidente que esta definición extiende el concepto de continuidad de funciones reales.)

3.2.- Proposición. $f : X \rightarrow Y$ es continua en x_0 si y sólo si toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a x_0 verifica $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Demostración. a) Sea f continua en x_0 . Entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

Si $x_n \rightarrow x_0$, dado tal δ , existe N tal que $x_n \in B(x_0, \delta)$, $\forall n > N$. Entonces $f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

En definitiva, $\forall \varepsilon > 0, \exists N : f(x_n) \in B(f(x_0), \varepsilon)$, $\forall n > N$ lo que significa que $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

b) Si f no es continua en x_0 , entonces

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \exists y \in B(x_0, \delta) : f(y) \notin B(f(x_0), \varepsilon).$$

Si elegimos $\delta_n = 1/n$, encontramos una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \in B(x_0, \delta_n)$ y $f(y_n) \notin B(f(x_0), \varepsilon)$. Entonces $y_n \rightarrow x_0$ pero $f(y_n) \not\rightarrow f(x_0)$.

◇

3.3.- Proposición. Sean X e Y dos espacios métricos y $f : X \rightarrow Y$. Son equivalentes:

i) f es continua.

ii) $x_n \rightarrow x \implies f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X$.

iii) $F \subset Y$ es cerrado $\implies f^{-1}(F) \subset X$ es cerrado.

iv) $A \subset Y$ es abierto $\implies f^{-1}(A) \subset X$ es abierto.

Demostración.

i) \implies ii). Ya probado en la proposición anterior.

ii) \implies iii). Supongamos que f verifica ii); sea F cerrado en Y y $A = f^{-1}(F)$. Veamos que $\overline{A} \subset A$.

Si $x \in \overline{A}$, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in A$ tal que $x_n \rightarrow x$ (por la proposición 2.11). Por hipótesis, $f(x_n) \rightarrow f(x)$, pero $f(x_n) \in F \implies f(x) \in \overline{F}$. Como F es cerrado, $f(x) \in F \implies x \in f^{-1}(F) = A$.

iii) \implies iv). Sea $A \subset Y$ abierto. Entonces $Y \setminus A$ es cerrado y, por hipótesis, $f^{-1}(Y \setminus A)$ es cerrado. Como $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto.

iv) \implies i). Sea $x \in X$ y elegimos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Es claro que $B(f(x), \varepsilon)$ es abierto. Esto implica por hipótesis que $f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$ es abierto. Como

$x \in f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$, debe existir $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. De aquí se deduce que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$, como queríamos demostrar.

◇

4. COMPLETITUD EN ESPACIOS MÉTRICOS.

Cuando un conjunto tiene ciertas propiedades, es interesante saber qué tipo de aplicaciones conservan dichas propiedades. Así, un isomorfismo preserva la linealidad de los vectores de un espacio e incluso permite identificar los dos espacios y tratarlos como uno solo. Veremos aquí un concepto similar para los espacios métricos.

4.1.- Definición. Dados dos espacios métricos (X, d) , (Y, d') , sea $f : X \rightarrow Y$. Si f es biyectiva y bicontinua (es decir, tanto f como f^{-1} son continuas), f se llama *homeomorfismo*.

Los homeomorfismos preservan las propiedades topológicas esenciales: así aplican abiertos de X en abiertos de Y y si $x \in A'$, $f(x) \in f(A)'$.

4.2.- Definición. a) Si una aplicación $f : X \rightarrow Y$ entre dos espacios métricos verifica que

$$\forall x_1, x_2 \in X : d(x_1, x_2) = d'(f(x_1), f(x_2)),$$

entonces f se llama *isometría*.

b) Si existe una isometría biyectiva $f : X \rightarrow Y$, diremos que los espacios métricos X e Y son *isométricos*.

Dos espacios isométricos son indistinguibles respecto a la métrica aunque difieran en la naturaleza de sus puntos.

4.3.- Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Una aplicación $T : X \rightarrow X$ se llama *contracción* si $\forall x, y \in X$, existe algún $r \in (0, 1)$ tal que $d(Tx, Ty) \leq r \cdot d(x, y)$.

4.4.- Proposición. Toda contracción T en un espacio métrico (X, d) es continua.

Demostración. Para probar que T es continua en $x_0 \in X$, debemos ver que

$$\forall B(Tx_0, \varepsilon), \exists B(x_0, \delta) : T(B(x_0, \delta)) \subset B(Tx_0, \varepsilon).$$

Sea pues $x \in B(x_0, \delta)$ un punto arbitrario; debe cumplirse que $Tx \in B(Tx_0, \varepsilon)$, es decir $d(Tx, Tx_0) < \varepsilon$. Como T es contracción, existe $r \in (0, 1)$ tal

que $d(Tx, Tx_0) \leq r \cdot d(x, x_0) < r \cdot \delta$. Tomando $\delta = \varepsilon/r$, se verifica que $d(Tx, Tx_0) < \varepsilon$, como queríamos probar. \diamond

4.5.- Definición. Sea (X, d) un espacio métrico. Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy cuando $\forall \varepsilon > 0, \exists N : d(x_n, x_m) < \varepsilon, \forall n, m > N$.

Es fácil comprobar que toda sucesión convergente es de Cauchy. Además, en \mathbb{R} ó \mathbb{C} toda sucesión de Cauchy converge, pero en general esto no es cierto.

4.6.- Definición (Fréchet, 1906). Un espacio métrico es completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

4.7.- Ejemplos. 1) Cualquier conjunto X con la métrica trivial es completo.

2) \mathbb{R}^n con cualquier distancia de las ya definidas es completo.

3) El intervalo $X = (0, 1)$, con $d(x, y) = |x - y|$, no es completo, porque la sucesión $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy pero su límite es cero.

4) El conjunto $X = \mathbb{Q}$ con la métrica euclídea $d(x, y) = |x - y|$ no es completo (hay sucesiones de racionales cuyo límite es irracional).

5) $X = \mathbb{Q}$, con $d(x, y) = |x - y|_p$, no es completo como muestra el siguiente ejemplo:

Eligiendo $p = 5$, la sucesión $x_n = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{1/2}{k} 5^k$ es de Cauchy y converge a $\sqrt{-1}$ que no es racional.

6) Veamos que el espacio ℓ^∞ es completo:

Sea $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots)\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^∞ . Entonces, $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ tal que, para $n, m > N$,

$$d(x^{(m)}, x^{(n)}) < \varepsilon \implies |x_i^{(m)} - x_i^{(n)}| < \varepsilon, \forall i \implies \exists x_i : d(x_i^{(m)}, x_i) < \varepsilon.$$

Si llamamos $x = (x_1, x_2, \dots)$, entonces $d(x^{(m)}, x) \leq \varepsilon$, es decir $x^{(m)} \rightarrow x$.

Por otra parte, como la sucesión $(x_i^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge a x_i , está acotada, es decir $\exists k > 0 : |x_i^{(m)}| < k, \forall m$. Aplicando la desigualdad triangular,

$$|x_i| \leq |x_i - x_i^{(m)}| + |x_i^{(m)}| < \varepsilon + k,$$

lo que significa que $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ está acotada. Esto prueba que $x \in \ell^\infty$.

7) También son completos los espacios ℓ^p , para $1 \leq p < \infty$.

Para comprobarlo, sea $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en ℓ^p . Entonces $\exists N$ tal que, para $n, m > N$:

$$d(x^{(n)}, x^{(m)}) = \left(\sum_i |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p \right)^{1/p} < \varepsilon \implies |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}| < \varepsilon, \forall i.$$

Esto implica que $\{x_i^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo que $x_i^{(n)} \rightarrow x_i \in \mathbb{C}$.

Si llamamos $x = (x_1, \dots, x_i, \dots)$, veamos que $x^{(n)} \rightarrow x$ y $x \in \ell^p$:

Como $\sum_{i=1}^k |x_i^{(n)} - x_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p$, $\forall k$, entonces, haciendo $m \rightarrow \infty$,

$$\sum_{i=1}^k |x_i^{(n)} - x_i|^p \leq \varepsilon^p \implies \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^p \leq \varepsilon^p \implies x^{(n)} - x \in \ell^p.$$

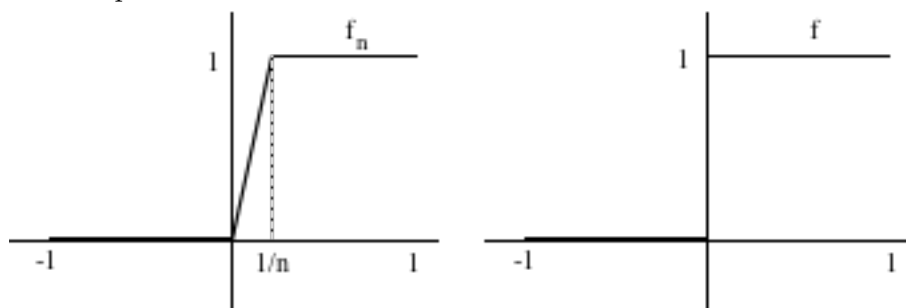
Por la desigualdad de Minkowski (capítulo II, sección 2), $x = x^{(n)} + (x - x^{(n)}) \in \ell^p$.

Además, $d(x^{(n)}, x)^p = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i^{(n)} - x_i|^p \leq \varepsilon^p \implies x^{(n)} \rightarrow x$.

8) Si $X = C[a, b]$ y $d(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$, entonces X es completo:

Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, $\max_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, para $n, m > N$. Entonces $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in [a, b]$. Por tanto, por el criterio de convergencia de Cauchy, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $[a, b]$ y, como f_n son continuas, la función límite también lo será. Así, X es completo.

9) $X = C[a, b]$ con la métrica $d(f, g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$, $\forall f, g \in X$ no es completo.



Si hacemos por ejemplo $a = -1$, $b = 1$, la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ nx & \text{si } 0 < x \leq 1/n, \\ 1 & \text{si } 1/n < x \leq 1 \end{cases}$$

es de Cauchy pero el límite $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \end{cases}$ no es continua en $x = 0$.

10) $X = \{p : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : p \text{ polinomio}\}$ con $d(p, q) = \max_{x \in [a, b]} |p(x) - q(x)|$ no es completo.

Para demostrarlo, basta tomar una sucesión de polinomios que converja uniformemente a una función continua (por ejemplo, $e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$).

Otros ejemplos de espacios completos se obtienen gracias a la siguiente caracterización.

4.8.- Proposición. *Un subconjunto M de un espacio métrico completo X es completo si y sólo si M es cerrado en X .*

Demostración. Sea M completo. Entonces, $\forall x \in \overline{M}$, $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $x_n \in M$, $\forall n$ tal que $x_n \rightarrow x$. Pero como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, es de Cauchy; por tanto converge en M , lo que prueba que $x \in M$.

Recíprocamente, sea M cerrado y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en M . Por ser X completo, $x_n \rightarrow x \in X \implies x \in \overline{M} \implies x \in M$. \diamond

Ejemplo. El espacio $c = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty : (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge en } \mathbb{C}\}$ es completo con la métrica inducida por ℓ^∞ .

En efecto, sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \overline{c}$. Entonces

$$\exists y_k = (y_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \in c : y_k \rightarrow x \implies |y_n^k - x_n| \leq d(y_k, x) < \varepsilon/3, \forall k \geq N.$$

Como $\{y_n^N\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente, es de Cauchy y $|y_p^N - y_q^N| < \varepsilon/3$, $\forall p, q \geq N_1$. Entonces

$$|x_p - x_q| \leq |x_p - y_p^N| + |y_p^N - y_q^N| + |y_q^N - x_q| < \varepsilon.$$

Esto implica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y, en consecuencia, $x \in c$.

Un hecho importante de la completitud es que todo espacio métrico puede verse como subespacio de un espacio métrico completo.

4.9.- Definición. Dado un espacio métrico (X, d) , un espacio (X^*, d^*) se llama *compleción* de (X, d) si existe X_0 subespacio denso de X^* tal que (X, d) es isométrico a (X_0, d^*) .

4.10.- Teorema. *Todo espacio métrico tiene una compleción y dos compleciones de un mismo espacio métrico son isométricas.*

Demostración (esquema):

Sea X^* el conjunto de las clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en X , mediante la relación:

$$\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \sim \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \iff \lim_n d(x_n, y_n) = 0.$$

Se define $d^* : X^* \times X^* \rightarrow \mathbb{R}$ como $d^*(x^*, y^*) = \lim_n d(x_n, y_n)$ siendo $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$.

Se debe probar:

- a) Dicho límite existe (para ello basta que $\{d(x_n, y_n)\}$ sea de Cauchy en \mathbb{R}).
- b) La definición no depende de los representantes elegidos.
- c) d^* es una métrica.
- d) X^* contiene un subespacio X_0 isométrico a X . Para ello definimos

$$X_0 = \{x^* \in X^* : (x, x, \dots) \in x^*\}$$

y $f : X \rightarrow X_0$ como $f(x) = x^*$.

- e) $\overline{X_0} = X^*$.
- f) X^* es completo.
- g) Si (X^{**}, d^{**}) es completación de X , $\exists f : X^* \rightarrow X^{**}$ isometría.

Otra caracterización importante de los espacios completos, que sólo enunciaremos, viene dada en términos de sucesiones decrecientes de conjuntos o encajes.

4.11.- Definición. Diremos que una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subconjuntos de X es un *encaje* cuando $A_1 \supset \dots \supset A_n \supset \dots$ y $\text{diám } A_n \rightarrow 0$.

4.12.- Proposición. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un encaje de conjuntos no vacíos. Entonces A_n converge a x si y sólo si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$.

4.13.- Teorema (Principio de encaje de Hausdorff). Sea X un espacio métrico. Son equivalentes:

- i) X es completo.
- ii) Todo encaje $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos cerrados no vacíos tiene intersección no vacía.
- iii) Todo encaje $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos no vacíos converge a un punto $x \in X$.

5. COMPACIDAD EN ESPACIOS MÉTRICOS.

5.1.- Definición. Una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos se llama *cubrimiento* de un conjunto A cuando $A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$. Dado un cubrimiento $\{A_i\}_{i \in I}$ de A , se llama *subcubrimiento* a todo cubrimiento $\{A_i\}_{i \in J}$ tal que $J \subset I$.

5.2.- Definición. Un subconjunto M de un espacio métrico X es *compacto* si todo cubrimiento por abiertos de M posee algún subcubrimiento finito (llamada propiedad de Borel-Lebesgue).

Así, por ejemplo, en \mathbb{R} con la métrica usual, el intervalo abierto $(0, 1)$ no es compacto pues del cubrimiento $\{(1/n, 1), n \in \mathbb{N}\}$ no se puede extraer ningún subcubrimiento finito.

Por otra parte, si un conjunto X posee la métrica discreta, ningún subconjunto infinito M puede ser compacto; para comprobarlo basta considerar la familia de bolas abiertas $\{B(x, 1/2)\}_{x \in M}$ que es un cubrimiento de M pero que no posee ningún subcubrimiento finito.

5.3.- Definición. Una familia $\{X_i\}_{i \in I}$ de conjuntos es un *sistema centrado* o tiene la *propiedad de intersección finita* si toda subfamilia finita tiene intersección no vacía.

Un conjunto $A \subset X$ tiene la *propiedad de Riesz* si para todo sistema centrado $\{F_i\}_{i \in I}$ de cerrados tal que $F_i \subset A, \forall i \in I$, se tiene que $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.

5.4.- Proposición. *Un conjunto A en un espacio métrico X es compacto si y sólo si es cerrado y tiene la propiedad de Riesz.*

(Ver la demostración en [CC], [KF].)

5.5.- Proposición. *Todo subconjunto cerrado contenido en un compacto es a su vez compacto.*

La siguiente caracterización de los conjuntos compactos será útil en lo sucesivo.

5.6.- Teorema. *Sea X un espacio métrico y $A \subset X$. Son equivalentes:*

- i) A es totalmente acotado y completo.*
- ii) A es compacto.*
- iii) Toda sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en A posee alguna subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente en A (propiedad de Bolzano-Weierstrass).*

Demostración. i) \implies ii): Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de A y supongamos que ningún subconjunto finito cubre a A . Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existen K_1, \dots, K_p tales que $A = K_1 \cup \dots \cup K_p$ y $\text{diám } K_i \leq \varepsilon$. Además al menos uno de los K_i no puede cubrirse con ningún sistema finito

de conjuntos de $\{A_i\}_{i \in I}$; digamos que es K_1 . Por ser $K_1 \subset A$, es también totalmente acotado. Repitiendo el argumento anterior, existirá $K_2 \subset K_1$ con $\text{diám } K_2 \leq \varepsilon/2$ que no puede cubrirse con un número finito de conjuntos de $\{A_i\}_{i \in I}$. Formamos así un encaje $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos contenidos en A que es completo. Por el teorema 4.13 existe $x \in A$ tal que K_n converge a x . Como $x \in A \subset \bigcup_{i \in I} A_i$, existe $A_0 \in \{A_i\}_{i \in I}$ con $x \in A_0$; luego para n grande será $K_n \subset A_0$ lo que contradice que K_n no se puede cubrir con un número finito de conjuntos de $\{A_i\}_{i \in I}$.

ii) \implies iii): Sea A compacto y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de elementos de A . Definimos $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$. Es evidente que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia con la propiedad de intersección finita. Por ser A compacto, existe $x \in A$ tal que $x \in \overline{X_n}$ para todo n . Podemos suponer que para algún m es $x \notin X_m$ (en caso contrario la tesis es evidente). Como $x \in \overline{X_m} \setminus X_m$, por la proposición 2.11, x es el límite de alguna subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

iii) \implies i): Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A ; por hipótesis existe una subsucesión convergente en A lo que implica que la propia sucesión converge en A . Luego A es completo.

Si A no fuese totalmente acotado, existiría $\varepsilon > 0$ tal que A no puede cubrirse con un número finito de bolas de radio $\varepsilon/2$. Elegimos $x_1 \in A$ y llamamos $B_1 = B(x_1, \varepsilon/2)$. Como B_1 no cubre a A , existe $x_2 \notin B_1$; sea $B_2 = B(x_2, \varepsilon/2)$. Razonando en la misma forma, encontramos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de A tal que $x_n \notin B_1 \cup \dots \cup B_{n-1}$, es decir $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon/2$ con lo que ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ puede ser convergente. \diamond

5.7.- Lema. *Un subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado.*

Demostración. Sea M un conjunto compacto y $x \in \overline{M}$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ que converge a x . Como M es compacto, $x \in M$ (pues las subsucesiones deben tener el mismo límite que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$).

Si M no fuera acotado, dado $b \in M$, $\exists \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en M no acotada tal que $d(y_n, b) > n$. Como $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotada, no puede tener ninguna sub-sucesión convergente. \diamond

El recíproco es falso, como muestra el siguiente ejemplo:

La sucesión $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell^2$, donde $e_n = (\delta_{nj})_{j=1}^\infty$, está acotada y es cerrada pues se trata de un conjunto formado por puntos aislados para los que $d(x_n, x_m) = \sqrt{2}$. Sin embargo, no es compacto por la misma razón.

En el caso de espacios normados de dimensión finita el recíproco también es cierto como probaremos más adelante (capítulo II, teorema 5.7).

Hemos probado así que si un conjunto no es cerrado no puede ser compacto.

Sin embargo su clausura sí puede serlo. Esto origina la siguiente definición.

5.8.- Definición. Un conjunto A de un espacio métrico X es *relativamente compacto* si su clausura \overline{A} es compacta.

Las siguientes caracterizaciones (cuya demostración omitiremos) serán útiles.

5.9.- Proposición. *La condición necesaria y suficiente para que un conjunto A de un espacio métrico completo X sea relativamente compacto, es que sea totalmente acotado.*

5.10.- Proposición. *La condición necesaria y suficiente para que un conjunto A de un espacio métrico X sea relativamente compacto es que sea secuencialmente compacto, es decir que toda sucesión de elementos de A posea alguna subsucesión convergente (pero no necesariamente a un punto de A).*

En el análisis, uno de los espacios métricos más importantes es $C[a, b]$ y un criterio importante para el estudio de la compacidad en estos espacios (que aplicaremos posteriormente en el estudio de ciertos operadores integrales) es el teorema de Arzelá-Ascoli que enunciaremos tras definir los conceptos necesarios.

5.11.- Definición. Una familia $F = \{\varphi\}$ de funciones definidas en $[a, b]$ se llama *equiacotada* cuando existe una constante $k > 0$ tal que $|\varphi(x)| < k$, $\forall x \in [a, b]$, $\forall \varphi \in F$. La familia F se dice *equicontinua* cuando para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall \varphi \in F$,

$$d(x_1, x_2) < \delta \implies |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon.$$

5.12.- Teorema (Arzelá-Ascoli). *Una familia $F \subset C[a, b]$ es relativamente compacta en $C[a, b]$ si y sólo si es equiacotada y equicontinua.*

5.13.- Teorema (Arzelá-Ascoli generalizado). *Dados dos espacios métricos compactos X e Y , llamamos $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y : f \text{ es continua}\}$, que es espacio métrico con la distancia $d(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$. Una condición necesaria y suficiente para que un conjunto $A \subset C(X, Y)$ sea relativamente compacto es que*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x_1, x_2) < \delta \implies d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon,$$

para cualesquiera $f \in A$, $x_1, x_2 \in X$.

Los conjuntos compactos tienen propiedades interesantes que los hacen comportarse como conjuntos finitos. Así por ejemplo la imagen continua de un compacto es un compacto.

5.14.- Teorema. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua y X, Y espacios métricos. Si M es compacto en X , $f(M)$ es compacto en Y .

La prueba es directa.

5.15.- Corolario. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y M es compacto en X , entonces f alcanza el máximo (y el mínimo) en algún punto de M .

Demostración. $f(M) \subset \mathbb{R}$ es compacto, con lo que $f(M)$ es cerrado y acotado. Esto implica que $\inf f(M) \in f(M)$ y $\sup f(M) \in f(M)$ y las imágenes inversas de esos puntos están en M . \diamond

6. EJERCICIOS.

1. Sea d una métrica en X . Determinar todas las constantes k para las que

i) kd ,

ii) $d + k$

es una métrica sobre X .

Resp.: i) Sea $d' = kd$. Para que $d'(x, y) > 0$, debe ser $k > 0$.

Para que $d'(x, y) = 0 \iff x = y$, debe ser $k \neq 0$.

Como las otras dos propiedades son siempre ciertas, toda constante $k > 0$ hace de d' una métrica.

ii) Sea $d'' = d + k$. Para que $d''(x, y) = 0 \iff x = y$, hace falta que $k = 0$ porque $x = y \implies d(x, y) = 0 \implies d''(x, y) = d(x, y) + k = k$.

Así pues, sólo para $k = 0$ es d'' una métrica.

_____ $\diamond\diamond$ _____

2. Si A es el subespacio de ℓ^∞ formado por las sucesiones de ceros y unos, ¿cuál es la métrica inducida sobre A ?

Resp.: Como $d(x, y) = \sup_n |x_n - y_n| = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$ se trata de la métrica discreta.

_____ $\diamond\diamond$ _____

3. Sea X el conjunto de las ternas ordenadas de ceros y unos. Mostrar que X tiene 8 elementos y que $d(x, y) =$ “número de lugares en que x e y tienen valores diferentes.” es una métrica sobre X . (Esta es la llamada distancia de Hamming y es útil en teoría de autómatas y códigos.)

Resp.: $\text{card } X = 2^3 = 8$.

i) Es evidente que $d(x, y) \geq 0$.

ii) $d(x, y) = 0 \implies x$ e y no tienen ningún valor diferente $\implies x = y$.

El recíproco es similar.

iii) Por la simetría de la definición, $d(x, y) = d(y, x)$.

iv) Sean $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, $z = (z_1, z_2, z_3)$; debido a que $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$, por la desigualdad triangular en \mathbb{R} se deduce que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i=1}^3 |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^3 |x_i - z_i + z_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^3 (|x_i - z_i| + |z_i - y_i|) \\ &= \sum_{i=1}^3 |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^3 |z_i - y_i| = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

4. Determinar si la aplicación $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(x, y) = |x^2 - y^2|$ es una distancia. Si no lo es, decir si existe un subconjunto de la recta en que sí lo sea. Dar el mayor de los conjuntos que lo cumplen.

Resp.: Si $x = y$, es claro que $d(x, y) = 0$.

Sin embargo, si $d(x, y) = 0 \implies x^2 = y^2$, pero puede ser $x = -y$ lo que implica que d no es distancia. Si d está definida en $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ó $\mathbb{R}^- \cup \{0\}$, $x^2 = y^2 \implies x = y$.

En cualquier caso, $d(x, y) = d(y, x)$ y

$$d(x, y) = |x^2 - y^2| \leq |x^2 - z^2| + |z^2 - y^2| = d(x, z) + d(y, z),$$

de modo que d es distancia en dichos subconjuntos de \mathbb{R} .

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

5. a) Encontrar una sucesión que converja a cero, pero no esté en ningún ℓ^p , con $1 \leq p < \infty$.
- b) Encontrar una sucesión que esté en ℓ^p con $p > 1$, pero no en ℓ^1 .

Resp.: a) La sucesión $(1/\ln n)_{n \geq 2}$ evidentemente converge a cero pero, debido a que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(\ln n)^p}{1/n} = \infty$, $\forall p \geq 1$, la serie $\sum |1/(\ln n)^p|$ es divergente.

b) La sucesión $(1/n)_{n \geq 1}$ no está en ℓ^1 , pues la serie $\sum 1/n$ es divergente, pero está en ℓ^p con $p > 1$ pues $\sum 1/n^p < \infty$, $\forall p > 1$.



6. Sea (X, d) un espacio métrico cualquiera. Demostrar que la aplicación $D : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ es también una distancia sobre X .

Resp.: Es evidente que $D(x, x) = 0$ y, si $D(x, y) = 0 \implies d(x, y) = 0 \implies x = y$.

Por ser d distancia, también $D(x, y) = D(y, x)$.

Por último, teniendo en cuenta que la función $y = \frac{x}{1+x}$ es creciente, resulta:

$$\begin{aligned} D(x, y) &= \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \leq \frac{d(x, z) + d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &= \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, z) + d(y, z)} \\ &\leq \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = D(x, z) + D(y, z). \end{aligned}$$



7. Sea (X, d) un espacio métrico y $P(X)$ el conjunto de partes de X . Se define la aplicación $D : P(X) \times P(X) \rightarrow \mathbb{R}$ por $D(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

a) Probar que D no es una métrica en $P(X)$.

b) Si $A \cap B \neq \emptyset$, probar que $D(A, B) = 0$. ¿Qué se puede decir del recíproco?

c) Si $x \in X$, $B \subset X$, se define $\delta(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b)$. Probar que

$$\forall x, y \in X, |\delta(x, B) - \delta(y, B)| \leq d(x, y).$$

Resp.: a) Si $A \cap B \neq \emptyset$, $\exists x \in A \cap B \implies D(A, B) = d(x, x) = 0$. Sin embargo $A \neq B$.

b) Si $D(A, B) = 0 \implies \exists a_n \in A, b_n \in B : d(a_n, b_n) \rightarrow 0$, pero puede ser $A \cap B \neq \emptyset$ (ver por ejemplo las bolas $B(0, 1)$ y $B(2, 1)$ en la distancia euclídea de \mathbb{R}).

c) Sean $b, b' \in B$; por la desigualdad triangular,

$$d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b) \leq d(x, y) + d(y, b') + d(b', b).$$

Esto implica que

$$\inf_{b \in B} d(x, b) \leq d(x, y) + \inf_{b' \in B} d(y, b') + \inf_{b, b' \in B} d(b', b) = d(x, y) + \inf_{b' \in B} d(y, b'),$$

o bien $\delta(x, B) \leq d(x, y) + \delta(y, B)$.

Análogamente se prueba que $\delta(y, B) \leq \delta(x, B) + d(x, y)$.



8. Si (X_1, d_1) y (X_2, d_2) son espacios métricos, probar que en el espacio producto $X = X_1 \times X_2$ se pueden definir las métricas siguientes:

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2), \\ \bar{d}(x, y) &= \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}, \end{aligned}$$

donde $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$.

Resp.:

i) Es evidente que $d(x, y) \geq 0$ y $\bar{d}(x, y) \geq 0$.

ii) De la definición se deduce también que:

$$\begin{aligned} d(x, y) = 0 &\iff d_1(x_1, y_1) = d_2(x_2, y_2) = 0 \\ &\iff x_1 = y_1, x_2 = y_2 \iff x = y; \\ \bar{d}(x, y) = 0 &\iff d_1(x_1, y_1) = d_2(x_2, y_2) = 0 \\ &\iff x_1 = y_1, x_2 = y_2 \iff x = y. \end{aligned}$$

iii) Es claro también que $d(x, y) = d(y, x)$, $\bar{d}(x, y) = \bar{d}(y, x)$.

iv) En el caso de d , se prueba fácilmente que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \\ &\leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2) = d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Para probar la desigualdad triangular en el otro caso, supongamos, sin pérdida de generalidad, que $d_1(x_1, y_1) \geq d_2(x_2, y_2)$; así, $\bar{d}(x, y) = d_1(x_1, y_1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \bar{d}(x, y) &= d_1(x_1, y_1) \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) \\ &\leq \max\{d_1(x_1, z_1), d_2(x_2, z_2)\} + \max\{d_1(z_1, y_1), d_2(z_2, y_2)\} \\ &= \bar{d}(x, z) + \bar{d}(z, y). \end{aligned}$$



9. En \mathbb{R} definimos la distancia $d(a, b) = \frac{|a-b|}{1+|a-b|}$ (ver ejercicio 6).

a) Determinar las bolas abiertas.

b) Hallar $\delta(2, A)$ donde $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.

c) Hallar $D(A, B)$ donde $B = \{x \in \mathbb{R} : -2 < x < -1\}$.

(Las aplicaciones δ y D están definidas en el ejercicio 7.)

Resp.: a) Sea $x \in B(a, r)$; entonces

$$\frac{|x-a|}{1+|x-a|} < r \implies |x-a| < r + r|x-a| \implies (1-r) \cdot |x-a| < r.$$

- Si $r < 1$: $|x-a| < \frac{r}{1-r} \implies B(a, r) = \left(a - \frac{r}{1-r}, a + \frac{r}{1-r}\right)$.

- Si $r = 1$: $B(a, r) = \mathbb{R}$.

- Si $r > 1$ se obtiene también que $B(a, r) = \mathbb{R}$.

b) Por definición,

$$\delta(2, A) = \inf_{0 \leq x \leq 1} d(2, x) = \inf_{0 \leq x \leq 1} \frac{|2-x|}{1+|2-x|} = \inf_{0 \leq x \leq 1} \frac{2-x}{3-x} = \frac{1}{2},$$

pues $y = \frac{2-x}{3-x}$ es una función decreciente en $[0, 1]$.

c) $D(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in [0, 1], y \in (-2, -1)\}$.

Si $x \in [0, 1]$, $y \in (-2, -1)$, $d(x, y) = \frac{x-y}{1+x-y}$.

Como la derivada parcial $\frac{\partial d}{\partial x} = \frac{1}{(1+x-y)^2} > 0$, d es creciente si y es constante.

Análogamente, como $\frac{\partial d}{\partial y} = \frac{-1}{(1+x-y)^2} < 0$, entonces d es decreciente si x es constante.

En el cuadrado $[0, 1] \times [-2, -1]$, el mínimo se alcanza en $(0, -1)$ y vale $1/2$.



10. Probar que la clausura $\overline{B(x_0, r)}$ de una bola abierta $B(x_0, r)$ en un espacio métrico puede ser distinta de la bola cerrada $\overline{B}(x_0, r)$.

Resp.: Sea X un conjunto cualquiera con la métrica discreta, y $x_0 \in X$ arbitrario. Entonces $B(x_0, 1) = \{x \in X : d(x, x_0) < 1\} = \{x_0\} \implies \overline{B(x_0, 1)} = \{x_0\}$; sin embargo, $\overline{B}(x_0, 1) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq 1\} = X$.



11. Demostrar que si X es un espacio métrico, $A \subset X$ y $r \in \mathbb{R}^+$, entonces $V_r(A) = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$ es cerrado.

Resp.: Veamos en primer lugar que la aplicación $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$ es continua:

Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$ arbitrarios. Por la desigualdad triangular, para cualesquiera $a, b \in A$, $d(x, a) \leq d(x, x_0) + d(x_0, b) + d(b, a)$. Entonces

$$\inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, x_0) + \inf_{b \in A} d(x_0, b) + \inf_{a, b \in A} d(b, a) \implies f(x) \leq d(x, x_0) + f(x_0).$$

Análogamente se prueba que $f(x_0) \leq d(x, x_0) + f(x)$.

En definitiva $|f(x) - f(x_0)| \leq d(x, x_0)$.

Si elegimos $\delta = \varepsilon$, entonces $d(x, x_0) < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Como $[0, r]$ es cerrado en \mathbb{R}^+ , entonces $f^{-1}[0, r]$ también es cerrado en X . Además

$$f^{-1}[0, r] = \{x \in E : f(x) \leq r\} = \{x \in E : d(x, A) \leq r\} = V_r(A).$$

Otra forma consiste en probar que el complementario $V_r^c(A)$ es abierto:

Sea para ello $x \in V_r^c(A) \implies d(x, A) > r$. Si llamamos $s = d(x, A)$, veamos que $B(x, (s - r)/2) \subset V_r^c(A)$.

$\forall y \in B(x, (s - r)/2)$, $d(x, y) < (s - r)/2$. Como $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$, entonces $d(y, A) \geq d(x, A) - d(x, y) > s - \frac{s-r}{2} = \frac{s+r}{2} > r$.



12. Probar que un espacio métrico X es separable si y sólo si existe $Y \subset X$ numerable tal que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$, $\exists y \in Y : d(x, y) < \varepsilon$.

Resp.: Si X es separable, existe por definición $M \subset X$ numerable tal que $\forall x \in X, \exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M : x_n \rightarrow x$. Entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists N : d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > N$.

Recíprocamente, si $\forall x \in X, \exists y \in Y : d(x, y) < \varepsilon$, entonces $x \in \overline{Y}$. Esto implica que $X = \overline{Y}$ con Y numerable, es decir X es separable.



13. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico X . Probar:

- a) Si $x_n \rightarrow x$, entonces toda sub-sucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x .
- b) Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene alguna sub-sucesión convergente, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge al mismo límite que dicha sub-sucesión.

Resp.: a) Basta tener en cuenta que, si $d(x_n, x) < \varepsilon, \forall n > N$, entonces $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, con $n_k > N$.

b) Por hipótesis,

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \quad & \exists N_1 : d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2 \text{ si } n_k \geq N_1 \\ & \exists N_2 : d(x_n, x_m) < \varepsilon/2 \text{ si } n, m \geq N_2. \end{aligned}$$

Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$, si $n > N$.



14. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en un espacio métrico y consideramos las subsucesiones $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}, \{x_{3n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ que suponemos convergentes. Demostrar que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Poner un ejemplo de una sucesión no convergente y que $\forall k \geq 2, \{x_{kn}\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea convergente.

Resp.: Supongamos que $\lim x_{2n} = a, \lim x_{3n} = b, \lim x_{2n+1} = c$.

Por ser $\{x_{6n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{x_{2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{x_{3n}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim x_{6n} = a = b$.

Por ser $\{x_{6n+3}\}_{n \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{x_{3n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{x_{2n+1}\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lim x_{6n+3} = b = c$.

Así pues, $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1} = a$. Veamos que $\lim x_n = a$:

$$\begin{aligned}\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_1 : |x_{2n} - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_1, \\ \exists n_2 : |x_{2n+1} - a| < \varepsilon, \quad \forall n > n_2.\end{aligned}$$

Si $p = \max\{n_1, n_2\}$, $|x_n - a| < \varepsilon$, $\forall n > p$.

En cuanto a la segunda parte, si definimos $x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ no es primo} \\ n & \text{si } n \text{ es primo,} \end{cases}$
entonces $x_{kn} = 1$, $\forall n$, pero $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no converge.



15. Sea $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $u_n \in \mathbb{R}$, $u_n \geq 0$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$. Demostrar que existe una infinidad de índices n tales que para cada $m > n$, $u_n \geq u_m$.

Resp.: Por hipótesis, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N : u_N, u_{N+1}, \dots < \varepsilon$.

Por ser convergente, $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada superiormente, con lo que tiene supremo. Dicho supremo está en el conjunto porque, en caso contrario, sería un punto de acumulación no nulo y la sucesión no podría ser convergente a 0.

Si u_{ν_0} es dicho máximo, $u_m \leq u_{\nu_0}$, $\forall m > \nu_0$.

Tomamos ahora la sucesión $\{u_{\nu_0+1}, \dots\}$ y aplicamos el mismo razonamiento anterior : $\exists \nu_1 > \nu_0$ tal que $u_{\nu_1} \geq u_m, \forall m > \nu_1$, y así sucesivamente.

Es evidente que la sucesión $\{u_{\nu_0}, u_{\nu_1}, \dots\}$ es decreciente.

Otra forma (por reducción al absurdo):

Si sólo existiera un conjunto finito de índices $\{n_0, \dots, n_k\}$ para el que $u_m \leq u_{n_i}, \forall m > n_i$ ($i = 0, \dots, k$), entonces

$$\begin{aligned}\exists m_1 : u_{m_1} > u_{n_k+1}, \\ \exists m_2 > m_1 : u_{m_2} > u_{m_1}, \\ \vdots\end{aligned}$$

Esto indica que la subsucesión $\{u_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es creciente y no tiene límite cero, lo que contradice la hipótesis.



16. Si d_1, d_2 son métricas equivalentes sobre X , probar que las sucesiones de Cauchy en (X, d_1) y (X, d_2) son las mismas.

Resp.: Por hipótesis, $\exists a, b > 0 : a \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b \cdot d_1(x, y)$.

Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en (X, d_1) , $d_1(x_n, x_m) < \varepsilon/b$, $\forall n, m > N_\varepsilon$. Entonces $d_2(x_n, x_m) \leq b \cdot d_1(x_n, x_m) < \varepsilon$. Esto implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy respecto a d_2 .

Análogamente se prueba la segunda parte.

_____ $\diamond \diamond$ _____

17. Si A y B son cerrados y disjuntos en un espacio métrico X , demostrar que existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(x) = 0$, $\forall x \in A$ y $f(x) = 1$, $\forall x \in B$.

Resp.: Basta definir $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$. El denominador nunca se anula por lo que f está definida en todo X .

_____ $\diamond \diamond$ _____

18. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación continua y periódica tal que el conjunto $\{T : T \text{ es período de } f\}$ es denso en \mathbb{R} . Demostrar que f es constante.

Resp.: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists (T_n)_{n \in \mathbb{N}} : T_n \rightarrow x$ y $f(a + T_n) = f(a)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. En particular $f(T_n) = f(0 + T_n) = f(0)$.

Como $T_n \rightarrow x$ y f es continua, $f(T_n) \rightarrow f(x)$. Por tanto, $f(x) = f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

_____ $\diamond \diamond$ _____

19. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación tal que $f|_A : A \rightarrow f(A)$ es continua, con $A \subset X$. ¿Es f continua en A ?

Resp.: No, pues la función de Dirichlet $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ no lo satisface. La restricción $f|_{\mathbb{Q}}$ es continua y constante pero $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ con $a \in \mathbb{Q}$.

_____ $\diamond \diamond$ _____

20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función aditiva y continua en x_0 . Demostrar que f es continua en \mathbb{R} y que $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$ con a fijo.

Resp.: a) Veamos que f es continua en \mathbb{R} .

Por hipótesis, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Debemos probar que f es continua en x , es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |y - x| < \delta \implies |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Pero si $|y - x| < \delta$, entonces

$$\begin{aligned} |y - x + x_0 - x_0| < \delta &\implies |f(y - x + x_0) - f(x_0)| < \varepsilon \\ &\implies |f(y) - f(x) + f(x_0) - f(x_0)| = |f(y) - f(x)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, es claro que $f(n) = nf(1)$. Llamamos $a = f(1)$.

Por una parte, $f(x) = f(0 + x) = f(0) + f(x) \implies f(0) = 0$.

Además, $0 = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1)$. Esto implica que $f(-1) = -a$ y $f(-m) = mf(-1) = -am$.

Por otra parte, $a = f(1) = f(q/q) = qf(1/q) \implies f(1/q) = a \cdot (1/q)$. Entonces $f(p/q) = pf(1/q) = p \cdot a \cdot (1/q) = a \cdot (p/q)$.

Por último, $\forall x \in \mathbb{R}, \exists x_n \in \mathbb{Q} : x_n \rightarrow x$. Por ser f continua, $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Como $f(x_n) = ax_n$, $f(x_n) \rightarrow ax$, de modo que $ax = f(x)$.



21. Sean las aplicaciones $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$, donde f es continua y sobre, g es continua y $g \circ f$ es homeomorfismo. Demostrar que f y g son homeomorfismos.

Resp.: Como $g \circ f$ es biyectiva, g es sobre y f es inyectiva. Entonces f es biyectiva.

Dado A abierto en E , $(g \circ f)(A)$ es abierto en G . Como g es continua, $f(A)$ es abierto en F . Esto implica que f^{-1} es continua y f es homeomorfismo.

$\forall x, y \in F$, si $g(x) = g(y)$, entonces

$$(g \circ f)^{-1}(g(x)) = (g \circ f)^{-1}(g(y)) \implies f^{-1}(x) = f^{-1}(y) \implies x = y.$$

Esto prueba que g es inyectiva con lo que g es biyectiva.

Dado B abierto en F , $f^{-1}(B)$ es abierto en E . Entonces $(g \circ f)f^{-1}(B) = g(B)$ es abierto en $G \implies g^{-1}$ continua $\implies g$ homeomorfismo.

Otra forma: $g = g \circ f \circ f^{-1}$ con $g \circ f$ biyectiva y f^{-1} biyectiva $\implies g$ biyectiva.

$g^{-1} = f \circ f^{-1} \circ g^{-1}$ con f continua y $f^{-1} \circ g^{-1}$ continua $\implies g^{-1}$ continua.

$f^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g$ con g continua y $f^{-1} \circ g^{-1}$ continua $\implies f^{-1}$ continua.



22. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una aplicación estrictamente creciente. Probar que la función $D(x, y) = |f(x) - f(y)|$ es una distancia sobre \mathbb{R} pero D no es equivalente a $|\cdot|$.

Resp.: a) $D(x, y) = 0 \iff f(x) = f(y) \iff x = y$ (f es inyectiva por ser estrictamente creciente).

$$D(x, y) = |f(x) - f(y)| = |f(x) - f(z) + f(z) - f(y)| \leq D(x, z) + D(z, y).$$

El resto es evidente.

b) Si f no es continua en x_0 , $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, |x - x_0| < \delta$ pero $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

Si fuera D equivalente a $|\cdot|$, $\exists a, b > 0 : a \cdot |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq b \cdot |x - y|$.

Elegiendo $\delta = \varepsilon/b$, $\varepsilon \leq |f(x) - f(x_0)| \leq b \cdot |x - x_0| < b \cdot \varepsilon/b = \varepsilon$, lo cual es absurdo.



23. Sea $M \subset \ell^\infty$ el subespacio de las sucesiones con un número finito de términos no nulos. Probar que M no es completo.

Resp.: Construimos la sucesión $\{x^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ siguiente:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (1, 0, \dots) \\ x^{(2)} &= (1, 1/4, 0, \dots) \\ &\vdots \\ x^{(n)} &= (1, 1/4, \dots, 1/n^2, 0, \dots). \end{aligned}$$

Si $m > n$, $d(x^{(n)}, x^{(m)}) = \sup |x_j^{(n)} - x_j^{(m)}| = \frac{1}{(n+1)^2} \rightarrow 0$.

Así definida, $x^{(n)} \in M$, $\forall n$, pero $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x = (1, 1/4, \dots, 1/n^2, \dots) \notin M$.



24. Consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ la sucesión $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$. Demostrar que $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{Q} y deducir de ello que \mathbb{Q} no es completo.

Resp.: Para probar que es de Cauchy, veamos que $|s_n - s_m| \rightarrow 0$.

En efecto, si suponemos que $n > m$,

$$|s_n - s_m| = \frac{1}{(m+1)!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \rightarrow 0$$

por ser el resto de una serie convergente (como es sabido, $e = \sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$).

Ahora bien, como $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = e \notin \mathbb{Q}$, se deduce que \mathbb{Q} no es completo.



25. Probar que todo espacio con la métrica discreta es completo.

Resp.: Si X posee la métrica discreta, y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X , entonces $\forall n, m > N$, $x_n = x_m$. Esto implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente.



26. Si (X_1, d_1) , (X_2, d_2) son espacios métricos isométricos y X_1 es completo, probar que X_2 es completo.

Resp.: Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X_2 . Como X_1 y X_2 son isométricos, $\exists f : X_1 \rightarrow X_2$ isometría biyectiva. Por tanto, $\exists x_n \in X_1 : f(x_n) = y_n$.

Además, $d_2(y_n, y_m) = d_2(f(x_n), f(x_m)) = d_1(x_n, x_m)$. Por tanto, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X_1 . Al ser X_1 completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \rightarrow x$, de donde $d_2(y_n, f(x)) = d_1(x_n, x) \rightarrow 0 \implies \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $f(x)$.



27. Demostrar que toda isometría $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cumple que $f(x) = a + x$ ó $f(x) = a - x$.

Resp.: Por ser f isometría, $|f(x) - f(y)| = |x - y|$.

En particular, $|f(x) - f(0)| = |x|$, es decir $f(x) - f(0) = x$ ó $f(x) - f(0) = -x$. Ahora bien, si existieran $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$ tales que $f(x_1) - f(0) = x_1$ y $f(x_2) - f(0) = -x_2$, entonces $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + x_2 \implies |f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 + x_2| \neq |x_1 - x_2|$ si $x_1, x_2 \neq 0$.

Llamando $f(0) = a$, se obtiene el resultado.

————— $\diamond\diamond\diamond$ —————

28. Un espacio métrico se dice localmente compacto si todo punto tiene un entorno compacto. Probar que \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n son espacios localmente compactos pero no compactos.

Resp.: Dado un punto arbitrario x en \mathbb{R}^n ó \mathbb{C}^n , cualquier bola cerrada centrada en x es un compacto (por ser un conjunto cerrado y acotado contenido en un espacio de dimensión finita). Sin embargo, los espacios \mathbb{R}^n y \mathbb{C}^n no son compactos pues no son acotados.

————— $\diamond\diamond\diamond$ —————

29. Sea X un conjunto no vacío. Una aplicación $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama pseudométrica si se verifica lo siguiente:

- i) $d(x, y) \geq 0$, $\forall x, y \in X$.
- ii) $d(x, x) = 0$, $\forall x \in X$.
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$.
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$.

¿La función $d(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$ define una métrica o pseudométrica en $C[a, b]$? ¿Y en las funciones $R[a, b]$ integrables Riemann en $[a, b]$?

Resp.: Los apartados i), ii) y iii) son evidentes.

Por otra parte, como

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|, \quad \forall t \in [a, b],$$

entonces

$$\int_a^b |x(t) - y(t)| dt \leq \int_a^b |x(t) - z(t)| dt + \int_a^b |z(t) - y(t)| dt.$$

Además, si $x, y \in C[a, b]$ y $\int_a^b |x(t) - y(t)| dt = 0$, entonces $x = y$.

Sin embargo si x e y se diferencian en su valor en un punto $c \in (a, b)$ y son integrables, $\int_a^b |x - y| = 0$ pero $x \neq y$. Esto indica que la aplicación, definida en $R[a, b]$, es una pseudométrica.



30. a) Si tenemos una pseudométrica d sobre X , vamos a establecer una relación binaria $x \sim y \iff d(x, y) = 0$. Demostrar que \sim es de equivalencia y que el conjunto cociente se puede estructurar en espacio métrico mediante una distancia que se puede definir de forma natural a partir de d .

b) Demostrar que $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$d(a, b) = |a_1 - b_1|, \text{ si } a = (a_1, a_2), \text{ } b = (b_1, b_2),$$

es pseudométrica sobre \mathbb{R}^2 . Determinar el conjunto cociente y la distancia definida sobre él.

Resp.: a) Sea $x^* = \{y \in X : y \sim x\} = \{y \in X : d(x, y) = 0\}$. Definimos $d^*: X/\sim \times X/\sim \rightarrow \mathbb{R}$ por $d^*(x^*, y^*) = d(x, y)$, donde $x \in x^*, y \in y^*$.

- d^* está bien definida: $\forall x, x' \in x^*, y, y' \in y^*$:

$$\left. \begin{aligned} d(x, y) &\leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) = d(x', y') \\ d(x', y') &\leq d(x', x) + d(x, y') + d(y, y') = d(x, y) \end{aligned} \right\} \implies d(x, y) = d(x', y').$$

- d^* es una métrica: $d^*(x^*, y^*) = 0 \iff d(x, y) = 0 \iff x \sim y \iff x^* = y^*$.

$$d^*(x^*, y^*) = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = d^*(x^*, z^*) + d^*(z^*, y^*).$$

b) Es fácil comprobar que d es pseudométrica. Debido a que

$$a \sim b \iff |a_1 - b_1| = 0 \iff a_1 = b_1,$$

podemos caracterizar $a^* = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = a_1\}$. De este modo, $\mathbb{R}^2/\sim = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y la distancia en el espacio cociente es $d^*(a^*, b^*) = |a_1 - b_1|$.



31. Sea d una distancia en un conjunto X . Diremos que d es ultramétrica si $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$, $\forall x, y, z \in X$.

Supongamos que d es ultramétrica.

- a) Demostrar que si $d(a, b) \neq d(b, c)$, $d(a, c) = \max\{d(a, b), d(b, c)\}$.
- b) Probar que cada $B(a, r)$ es, a la vez, un conjunto abierto y cerrado y que $\forall b \in B(a, r)$, $B(b, r) = B(a, r)$.
- c) Demostrar que cada $\overline{B}(a, r)$ es, a la vez, un conjunto abierto y cerrado y que $\forall b \in \overline{B}(a, r)$, $\overline{B}(b, r) = \overline{B}(a, r)$.
- d) Probar que, si dos bolas tienen un punto en común, una de ellas está contenida en la otra.
- e) Probar que la distancia de dos bolas abiertas distintas de radio r contenidas en una bola cerrada de radio r es igual a r .

Resp.: a) Supongamos que $d(a, b) < d(b, c)$. Entonces

$$\begin{aligned} d(a, c) &\leq \max\{d(a, b), d(b, c)\} = d(b, c) \leq \max\{d(b, a), d(a, c)\} = d(a, c) \\ \implies d(a, c) &= d(b, c) = \max\{d(a, b), d(b, c)\}. \end{aligned}$$

Si $d(a, b) > d(b, c)$, entonces

$$\begin{aligned} d(a, c) &\leq \max\{d(a, b), d(b, c)\} = d(a, b) \leq \max\{d(a, c), d(c, b)\} = d(a, c) \\ \implies d(a, c) &= d(a, b) = \max\{d(a, b), d(b, c)\}. \end{aligned}$$

b) Sea $x \in \overline{B}(a, r)$. Entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in B(a, r) : d(x, y) < \varepsilon$.

Elegiendo $\varepsilon < r$, $d(a, x) \leq \max\{d(a, y), d(y, x)\} < r \implies x \in B(a, r)$.

Probemos la igualdad $B(b, r) = B(a, r)$ por doble inclusión:

$$\begin{aligned} c \in B(b, r) &\implies d(a, c) \leq \max\{d(a, b), d(b, c)\} < r \implies c \in B(a, r), \\ c \in B(a, r) &\implies d(c, b) \leq \max\{d(c, a), d(a, b)\} < r \implies c \in B(b, r). \end{aligned}$$

c) La bola $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto abierto si y sólo si

$$\forall y \in \overline{B}(a, r), \exists \varepsilon > 0 : B(y, \varepsilon) \subset \overline{B}(a, r).$$

Si elegimos $\varepsilon < r$, todo $z \in B(y, \varepsilon)$ verifica $d(y, z) < \varepsilon$ y

$$d(a, z) \leq \max\{d(a, y), d(y, z)\} \leq r.$$

La igualdad $\overline{B}(b, r) = \overline{B}(a, r)$ se prueba de forma análoga al apartado b).

d) Sea $x \in B(a, r) \cap B(b, s)$ y supongamos que $r < s$. Entonces $d(x, a) < r$ y $d(x, b) < s$, de donde $d(a, b) \leq \max\{d(a, x), d(x, b)\} < s$.

Además $\forall y \in B(a, r), d(y, b) \leq \max\{d(y, a), d(a, b)\} < s \implies y \in B(b, s)$.

Si $r = s$, $B(a, r) = B(b, r)$ pues, como $d(a, b) < r$, $a \in B(b, r)$ y por b), $B(a, r) = B(b, r)$.

e) Por d), si las bolas son distintas, son disjuntas: $B(a, r) \cap B(b, r) = \emptyset$.

Si $A = B(a, r)$, $B = B(b, r)$, $C = \overline{B}(c, r)$, $A \subset C$, $B \subset C \implies d(A, B) = r$.

Si $x \in A$, $y \in B$, $d(x, y) \leq \max\{d(x, c), d(c, y)\} \leq r \implies d(A, B) \leq r$.
Como $d(A, B) \geq r$, deducimos en definitiva que $d(A, B) = r$.



32. Sea X un conjunto arbitrario y E el conjunto de las sucesiones infinitas de elementos de X , $E = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in X\}$. Para cada par de elementos de E definimos $K(x, y) = k$ si $x_n = y_n, \forall n < k$ y $x_k \neq y_k$, es decir, k es el menor índice que cumple que $x_n \neq y_n$. Si definimos ahora $d(x, y) = \begin{cases} 1/K(x, y) & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y, \end{cases}$ demostrar que d es distancia ultramétrica sobre E .

Resp.: Evidentemente, $d(x, x) = 0$ y si $d(x, y) = 0$, entonces $x = y$.

También es claro que $d(x, y) = d(y, x)$.

Dados $x, y, z \in E$, llamamos $K(x, y) = n_1$ y $K(y, z) = n_2$. Si $n_1 = n_2$, es evidente que $K(x, z) = n_1$. Si $n_1 < n_2$, entonces

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = y_1, \dots, x_{n_1-1} = y_{n_1-1}, x_{n_1} \neq y_{n_1} \\ y_1 = z_1, \dots, y_{n_1} = z_{n_1}, \dots, y_{n_2-1} = z_{n_2-1}, y_{n_2} \neq z_{n_2} \end{array} \right\} \implies K(x, z) = n_1.$$

En ambos casos, $d(x, z) = 1/n_1 \leq 1/n_1 + 1/n_2 = d(x, y) + d(y, z)$.

Además $\max\{d(x, y), d(y, z)\} = 1/n_1 = d(x, z)$.



33. a) Si X es un espacio métrico, demostrar que la condición necesaria para que una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sea de Cauchy es que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon \text{ si } n > n_0.$$

Demostrar el recíproco con un contraejemplo.

- b) Sea X un espacio ultramétrico. Probar que la condición necesaria y suficiente para que una sucesión de elementos de X sea de Cauchy es que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

Resp.: a) La primera parte es evidente.

Para el recíproco, consideramos la sucesión $x_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$.

Resulta entonces que $d(x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ si $n > 1/\varepsilon$.

Sin embargo, si tomamos $\varepsilon = 1/2$,

$$d(x_N, x_{2N}) = \left| \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} \right| > \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es de Cauchy.

- b) Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$, es decir $d(x_n, x_{n+1}) < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. Sean $p > q > n_0$; entonces $d(x_p, x_q) \leq \max\{d(x_q, x_{q+1}), d(x_{q+1}, x_p)\}$.

A su vez, $d(x_{q+1}, x_p) \leq \max\{d(x_{q+1}, x_{q+2}), d(x_{q+2}, x_p)\}$.

Repitiendo el proceso, obtenemos que

$$d(x_{p-2}, x_p) \leq \max\{d(x_{p-2}, x_{p-1}), d(x_{p-1}, x_p)\} < \varepsilon.$$

En definitiva, $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

II. ESPACIOS NORMADOS Y ESPACIOS DE BANACH

Se pretende en este capítulo establecer los resultados generales relacionados con el concepto de norma en un espacio vectorial así como mostrar las distintas técnicas que se aplican en las demostraciones de estos hechos. Será fundamental entender el concepto de acotación de un operador lineal así como su relación con el de continuidad.

SECCIONES

1. Espacios normados. Definición y ejemplos.
2. Desigualdades de Hölder y Minkowski.
3. Espacios L^p .
4. Propiedades de los espacios normados.
5. Espacios normados de dimensión finita.
6. Operadores lineales acotados.
7. Funcionales lineales. Espacio dual.
8. Ejercicios.

1. ESPACIOS NORMADOS. DEFINICIÓN Y EJEMPLOS.

En este capítulo consideraremos métricas definidas en espacios dotados de alguna estructura algebraica, más concretamente en espacios vectoriales, tal como se presenta en las aplicaciones que se presentan en esta teoría.

En un espacio vectorial X son de particular importancia las métricas que verifican

- i) $d(x + a, y + a) = d(x, y)$, es decir, d es invariante por traslaciones,
- ii) $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \cdot d(x, y)$, es decir, d aumenta proporcionalmente a la dilatación,

pues basta conocer $d(x, 0)$, $\forall x \in X$ para determinar completamente la distancia entre dos elementos cualesquiera, ya que $d(x, y) = d(x - y, 0)$. Definimos entonces la longitud o norma de un vector x por $\|x\| = d(x, 0)$. Esto sugiere, en un contexto abstracto, la siguiente definición axiomática.

1.1.- Definición. Un *espacio normado* es un par $(X, \|\cdot\|)$ formado por un espacio vectorial X y una aplicación $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$, llamada *norma*, con las siguientes propiedades:

- (i) $\|x\| \geq 0$.
- (ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.
- (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.
- (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Si no se exige la condición (ii), la aplicación $\|\cdot\|$ se llama *seminorma*.

Observaciones. 1) Todo espacio normado es a su vez un espacio métrico, pues basta, dado $(X, \|\cdot\|)$, definir $d(x, y) = \|x - y\|$. Así todas las nociones de espacios métricos están definidas también para los espacios normados. En particular, los conjuntos $B(0, 1) = \{x \in X : \|x\| < 1\}$, $\overline{B}(0, 1) = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ son las *bolas unitarias* abierta y cerrada de X , respectivamente.

2) El recíproco de lo anterior no es cierto, es decir, no todo espacio métrico es normado. Por ejemplo, $X = \{(a_1, \dots, a_n, \dots) : a_n \in \mathbb{C}\}$ sobre el cuerpo \mathbb{C} es espacio vectorial; si definimos $d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{|a_i - b_i|}{1 + |a_i - b_i|}$, se puede ver que es espacio métrico, pero para $\lambda \in \mathbb{C}$, $d(\lambda x, \lambda y) \neq |\lambda| d(x, y)$ con lo que, si definiéramos la “norma”^a partir de la distancia, obtendríamos $\|\lambda x - \lambda y\| \neq |\lambda| \cdot \|x - y\|$ y X no sería espacio normado de esa forma. Otro ejemplo sencillo

es la métrica discreta pues $\|2x\| = d(2x, 0) = 1$ pero $|2| \cdot \|x\| = 2 \cdot d(x, 0) = 2$.

Sin embargo, la motivación dada al principio permite probar lo siguiente.

1.2.- Proposición. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, la aplicación $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$ verifica

i) $d(x + z, y + z) = d(x, y)$;

ii) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \cdot d(x, y)$.

Recíprocamente, si X es un espacio vectorial y (X, d) es un espacio métrico en el que se verifican i) y ii), entonces $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, donde $\|x\| = d(x, 0)$.

La demostración es evidente.

1.3.- Definición. Sea X un espacio vectorial normado, en el que se define la métrica $d(x, y) = \|x - y\|$. Si (X, d) es completo, X se dice *espacio de Banach*.

1.4.- Ejemplos. 1) $X = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C} con la norma del valor absoluto son espacios de Banach.

2) $X = \mathbb{R}^n$ ó \mathbb{C}^n con la norma $\|x\| = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ ($p \geq 1$) es de Banach. Los axiomas i), ii) y iii) de norma son evidentes y la desigualdad triangular se deduce de la desigualdad de Minkowski. Veamos que es completo:

Sea $\{x_k = (x_{k1}, \dots, x_{kn}), k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de Cauchy en \mathbb{R}^n . Entonces

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon, \forall p, q > N \implies |x_{pi} - x_{qi}| < \varepsilon, \forall p, q > N, 1 \leq i \leq n.$$

Esto implica que $\exists x_i \in \mathbb{R} : |x_{ki} - x_i| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n$.

Si llamamos $x = (x_1, \dots, x_n)$, resulta que $\|x_k - x\|^p = \sum_{i=1}^n |x_{ki} - x_i|^p < n\varepsilon^p$.

3) Sea $\ell^p = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$ ($p \geq 1$), y definimos $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$.

Al igual que en el ejemplo 2, la desigualdad de Minkowski (para sumas infinitas) permite probar que es una norma. La completitud fue probada en el capítulo I; veremos además que se puede deducir de un caso más general (ver sección siguiente).

4) Sea $\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{C}, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ acotada}\}$, y definimos $\|x\| = \sup_n |x_n|$. Así (X, d) es un espacio de Banach, como vimos en el capítulo I.

5) $X = C[a, b]$ (funciones continuas en $[a, b]$), con la norma $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ es de Banach, como ya vimos en el capítulo anterior.

6) El mismo espacio anterior $C[a, b]$ con la norma $\|f\| = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ no es completo. Sin embargo, este espacio puede completarse como veremos después y su completación es precisamente el espacio $L^2[a, b]$ (ver sección 3).

7) Si $X = B(A)$ es el espacio de las funciones acotadas en A , la norma $\|f\| = \sup_{x \in A} |f(x)|$ también da lugar a un espacio de Banach.

8) Sea $VA[a, b]$ la clase de funciones de variación acotada en $[a, b]$. Es un espacio vectorial con las operaciones usuales y se define la norma $\|f\| = |f(a)| + V(f)$ donde $V(f)$ representa la variación total de f que convierte al espacio $VA[a, b]$ en un espacio de Banach.

2. DESIGUALDADES DE HÖLDER Y MINKOWSKI.

En algunos ejemplos de espacios normados la desigualdad triangular se deduce de la desigualdad de Minkowski que probaremos en este apartado como consecuencia de la desigualdad de Hölder. En el siguiente apartado utilizaremos estas desigualdades para definir normas en otros ejemplos de espacios de funciones, que han sido fundamentales en el desarrollo del Análisis Funcional.

2.1.- Lema. Sean $\alpha, \beta > 0$, $0 < \lambda < 1$. Entonces $\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \leq \lambda \alpha + (1 - \lambda) \beta$. Además la igualdad es cierta si y sólo si $\alpha = \beta$.

Demostración. Se define $\varphi(t) = (1 - \lambda) + \lambda t - t^\lambda$ para $t \geq 0$.

Así $\varphi'(t) = \lambda - \lambda t^{\lambda-1}$ que será negativo si $t < 1$ y positivo si $t > 1$. Por tanto, el punto $t = 1$ corresponde a un mínimo.

Como $\varphi(t) \geq \varphi(1) = 0$, entonces $1 - \lambda + \lambda t \geq t^\lambda$.

Haciendo $t = \alpha/\beta$ se deduce el resultado (para $\beta \neq 0$).

Si $\beta = 0$, el resultado es trivial. ◇

Observaciones. 1) El lema anterior expresa que la media geométrica es menor o igual a la media aritmética, porque si hacemos $\lambda = k/n$, $1 - \lambda =$

$(n - k)/n$, tenemos $\alpha^{k/n} \cdot \beta^{n-k/n} \leq k\alpha/n + (n - k)\beta/n$ de donde

$$\sqrt[n]{\alpha \binom{k}{n} \cdot \beta \binom{n-k}{n}} \leq \frac{\alpha + \binom{k}{n} + \alpha + \beta + \binom{n-k}{n} + \beta}{n}.$$

2) Si $\alpha = e^{x_1}$, $\beta = e^{x_2}$, el lema indica que

$$e^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} = e^{\lambda x_1} e^{(1-\lambda)x_2} \leq \lambda e^{x_1} + (1 - \lambda)e^{x_2},$$

es decir que la función exponencial es convexa.

2.2.- Teorema. Sean (X, S, μ) un espacio medible, $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funciones medibles, $1 < p < \infty$ y $1/p + 1/q = 1$. Entonces:

a) (desigualdad de Hölder)

$$\int_X (fg) d\mu \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} \cdot \left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q}.$$

b) (desigualdad de Minkowski)

$$\left(\int_X (f + g)^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Demostración. a) Llamamos $A = \left(\int_X f^p d\mu \right)^{1/p}$, $B = \left(\int_X g^q d\mu \right)^{1/q}$ y distinguimos tres casos:

- $A = 0$ (ó $B = 0$). Como $f \geq 0$, $f^p = 0$ c.s. $\implies f = 0$ c.s. $\implies f \cdot g = 0$ c.s. Así pues $\int_X fg d\mu = 0$.
- $A = \infty$ (ó $B = \infty$). Es evidente que $\int_X fg d\mu \leq \infty$.
- $0 < A, B < \infty$. Debemos probar que $\int_X fg d\mu \leq A \cdot B$, o bien $\int_X \frac{f}{A} \cdot \frac{g}{B} d\mu \leq 1$.
Si aplicamos el lema anterior a $\alpha = f^p/A^p$, $\beta = g^q/B^q$, $\lambda = 1/p$, $1 - \lambda = 1/q$, resulta:

$$\frac{f}{A} \cdot \frac{g}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{f^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{g^q}{B^q},$$

desigualdad válida $\forall x \in X$. Integrando miembro a miembro,

$$\int_X \frac{f}{A} \cdot \frac{g}{B} d\mu \leq \frac{1}{p \cdot A^p} \cdot A^p + \frac{1}{q \cdot B^q} \cdot B^q = 1, \text{ c.q.d.}$$

b) Debido a que $(f + g)^p = (f + g)(f + g)^{p-1} = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$, aplicando la desigualdad de Hölder a cada uno de los sumandos,

tenemos:

$$\begin{aligned}\int_X f(f+g)^{p-1}d\mu &\leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q}, \\ \int_X g(f+g)^{p-1}d\mu &\leq \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X (f+g)^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q}, \\ \implies \int_X (f+g)^p d\mu &\leq \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\right] \cdot \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/q},\end{aligned}$$

debido a que $q(p-1) = p$. Si llamamos ahora $C = \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/q}$, caben los siguientes casos:

- $C = 0 \implies \int_X (f+g)^p d\mu = 0$ y la desigualdad es evidente.
- $C = \infty \implies \int_X (f+g)^p d\mu = \infty$. Como la función $y = x^p$ es convexa, $(f(x)/2 + g(x)/2)^p \leq f(x)^p/2 + g(x)^p/2$, de donde:

$$\frac{1}{2^p}(f+g)^p \leq \frac{1}{2}(f^p+g^p) \implies \frac{1}{2^p} \int_X (f+g)^p d\mu \leq \frac{1}{2} \left[\int_X f^p d\mu + \int_X g^p d\mu \right].$$

Como $\int_X (f+g)^p d\mu = \infty$, debe ser $\int_X f^p d\mu = \infty$ ó $\int_X g^p d\mu = \infty$.

- $0 < C < \infty \implies \left[\int_X (f+g)^p d\mu\right]^{1-1/q} \leq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}$, lo que da lugar al resultado deseado. \diamond

El teorema anterior tiene las siguientes consecuencias.

2.3.- Corolario. Si $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ son medibles y $0 < p < 1$, $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$a) \int_X fg d\mu \geq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}.$$

$$b) \left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \geq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p},$$

donde suponemos que las integrales involucradas son finitas y $\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q} \neq 0$.

Demostración. a) Sea $p' = 1/p$ y llamamos $\psi = (fg)^p = (fg)^{1/p'}$, $\varphi = g^{-p} = g^{-1/p'}$. De este modo, $1 < p' < \infty$, $f^p = \psi\varphi$ y ψ, φ son medibles. Entonces

$$\int_X f^p d\mu = \int_X \psi\varphi d\mu \leq \left(\int_X \psi^{p'} d\mu\right)^{1/p'} \left(\int_X \varphi^{q'} d\mu\right)^{1/q'},$$

donde $1/p' + 1/q' = 1$. Debido a que $\varphi^{q'} = g^q$ y $\psi^{p'} = fg$, obtenemos:

$$\int_X f^p d\mu \leq \left(\int_X fg d\mu\right)^{1/p'} \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/pq'}.$$

De las relaciones anteriores se deduce que $pp' = 1$, $pq' = -q$, con lo que:

$$\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q} \leq \left(\int_X fg d\mu\right), \text{ c.q.d.}$$

b) De la igualdad $(f + g)^p = f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1}$, se deduce:

$$\begin{aligned} \int_X (f + g)^p d\mu &= \int_X f(f + g)^{p-1} d\mu + \int_X g(f + g)^{p-1} d\mu \\ &\geq \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X (f + g)^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p} \cdot \left(\int_X (f + g)^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q} \\ &= \left[\left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}\right] \cdot \left(\int_X (f + g)^{q(p-1)} d\mu\right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Suponiendo que $\int_X (f + g)^p d\mu < \infty$, se deduce el resultado. \diamond

2.4.- Corolario. En las condiciones del teorema 2,2, la desigualdad de Hölder se convierte en igualdad si y sólo si existen λ_1, λ_2 constantes no nulas a la vez tales que $\lambda_1 f^p = \lambda_2 g^q$ c.s.

Demostración. Al igual que en el lema 2.1, la igualdad es cierta si y sólo si

$$\frac{f^p}{\int_X f^p d\mu} = \frac{g^q}{\int_X g^q d\mu}, \text{ es decir } f^p \cdot \int_X g^q d\mu = g^q \cdot \int_X f^p d\mu,$$

con $\lambda_1 = \int_X g^q d\mu$ y $\lambda_2 = \int_X f^p d\mu$ no nulas ambas.

Podemos suponer además $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ pues entonces $0 = \lambda_2 g^q$ c.s. $\implies g^q = 0$ c.s. $\implies g = 0$ c.s. y se verifica la igualdad. \diamond

Observaciones. 1) Si X es un conjunto numerable, digamos por comodidad $X = \mathbb{N}$, $P(\mathbb{N})$ la σ -álgebra formada por los subconjuntos de \mathbb{N} , $\mu : P(\mathbb{N}) \rightarrow [0, \infty]$ la medida de contar, definida por $\mu(A) = \text{card } A$, toda aplicación $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ es medible pues $\forall V$ abierto, $f^{-1}(V) \subset \mathbb{N} \implies f^{-1}(V) \in P(\mathbb{N})$. Así pues, si $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ es medible, $f(n) = |x_n|$,

$$\int_{\mathbb{N}} f^p d\mu = \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}} f^p d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\{n\}} f^p d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n)^p = \sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n|^p.$$

Esto permite escribir las desigualdades de Hölder y Minkowski para sumas finitas o series numéricas. Estas serían:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^q\right)^{1/q},$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i + y_i|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^p \right)^{1/p}.$$

2) En el caso de $p = 1$ ó $p = \infty$ se prueban también desigualdades análogas que quedan de la forma

$$\begin{aligned} \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i y_i| &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i| \cdot \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i|, \\ \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i + y_i| &\leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| + \sup_{i \in \mathbb{N}} |y_i|. \end{aligned}$$

3) En el caso particular de que $p = q = 2$, la desigualdad de Hölder se llama *desigualdad de Cauchy-Schwarz*, de importancia en espacios dotados de una estructura geométrica (considerados en el capítulo III).

3. ESPACIOS L^p .

Los ejemplos más útiles de espacios normados corresponden a los llamados espacios L^p . Fueron además los que dieron impulso al desarrollo de la teoría de espacios de Hilbert y espacios normados.

Supondremos en esta sección que X es un espacio de medida y μ una medida positiva. Es conocido el espacio de funciones de módulo integrable, representado por

$$L^1(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ medible y } \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

Si ahora hacemos $1 \leq p < \infty$, definimos análogamente el espacio de funciones de potencia p -ésima integrable, como

$$L^p(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ medible y } \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Si definimos la aplicación $\|\cdot\|_p : L^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$, es evidente que $L^p(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ medible y } \|f\|_p < \infty\}$.

En el caso de $p = \infty$ procedemos de una forma algo diferente:

Si $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ es una función medible, también es medible $|g|$; sabemos que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $|g|^{-1}(\alpha, \infty]$ es medible y podemos definir el conjunto

$$S = \{\alpha \in \mathbb{R} : \mu(|g|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0\}.$$

Llamamos *supremo esencial* de $|g|$ a $\|g\|_\infty = \inf S$, cuando $S \neq \emptyset$, y $\|g\|_\infty = \infty$, cuando $S = \emptyset$. Probemos en primer lugar la existencia de dicho ínfimo; para ello basta probar que 0 es una cota inferior de S :

En efecto, si existiera $\alpha \in S$ tal que $\alpha < 0$, entonces de la inclusión $[0, \infty] \subset (\alpha, \infty]$ se deduce que

$$\begin{aligned} |g|^{-1}[0, \infty] \subset |g|^{-1}(\alpha, \infty] &\implies \mu(X) = \mu(|g|^{-1}[0, \infty]) \leq \mu(|g|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0 \\ &\implies \mu(X) = 0, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo.

Lo anterior permite definir el espacio

$$L^\infty(\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ medible y } \|f\|_\infty < \infty\}$$

que llamaremos espacio de las *funciones medibles esencialmente acotadas*.

Una caracterización del supremo esencial la proporciona el siguiente lema:

3.1.- Lema. *Dada $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ medible, se tiene*

$$|f(x)| \leq \lambda \text{ para casi todo } x \iff \|f\|_\infty \leq \lambda.$$

En consecuencia, $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ para casi todo x (haciendo $\lambda = \|f\|_\infty$) y $\|f\|_\infty$ es la mínima cota superior (c.s.) de $|f|$.

Demostración. Supongamos que $|f| \leq \lambda$ c.s., es decir $|f(x)| \leq \lambda$, $\forall x \in A^c$ con $\mu(A) = 0$. Entonces, si $|f(x)| > \lambda$, es $x \in A$ y

$$|f|^{-1}(\lambda, \infty] \subset A \implies \mu(|f|^{-1}(\lambda, \infty]) \leq \mu(A) = 0 \implies \lambda \in S \text{ y } \|f\|_\infty \leq \lambda.$$

Recíprocamente, suponiendo que $\|f\|_\infty \leq \lambda$, veamos que $|f| \leq \lambda$ c.s., lo que equivale a probar que $\mu(A) = 0$, siendo $A = \{x : |f(x)| > \lambda\}$.

Por hipótesis, existe $\alpha \in S$ tal que $\alpha \leq \lambda$ pues si fuese $\alpha > \lambda$, $\forall \alpha \in S$, λ sería cota inferior de S y $\lambda < \|f\|_\infty$, lo que es absurdo. Entonces

$$A = |f|^{-1}(\lambda, \infty] \subset |f|^{-1}(\alpha, \infty] \implies \mu(A) \leq \mu(|f|^{-1}(\alpha, \infty]) = 0. \quad \diamond$$

Aplicando las desigualdades de Hölder y Minkowski, se prueban los siguientes resultados.

3.2.- Proposición. *Sean p, q exponentes conjugados, es decir $1/p + 1/q = 1$, con $1 \leq p \leq \infty$. Si $f \in L^p(\mu)$ y $g \in L^q(\mu)$, entonces $fg \in L^1(\mu)$ y $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.*

Demostración. Si $1 < p < \infty$, por la desigualdad de Hölder, tenemos:

$$\int_X |fg|d\mu = \int_X |f| \cdot |g|d\mu \leq \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_X |g|^q d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q < \infty.$$

Si $p = \infty$, $q = 1$, entonces $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ c.s., con lo que existe A de medida nula tal que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, $\forall x \in A^c$. De este modo,

$$\begin{aligned} \int_X |fg|d\mu &= \int_X |f| \cdot |g|d\mu = \int_{A^c} |f| \cdot |g|d\mu \leq \int_{A^c} \|f\|_\infty |g|d\mu \\ &= \|f\|_\infty \int_{A^c} |g|d\mu \leq \|f\|_\infty \int_X |g|d\mu = \|f\|_\infty \|g\|_1 < \infty. \diamond \end{aligned}$$

3.3.- Proposición. Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $L^p(\mu)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} y $\|\cdot\|_p$ es una seminorma.

Demostración. Estudiaremos por separado los siguientes casos:

a) Si $1 \leq p < \infty$ y $f, g \in L^p(\mu)$, de la desigualdad de Minkowski deducimos que $f + g \in L^p(\mu)$ y $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Además

$$\|\alpha f\|_p = \left(\int_X |\alpha f|^p d\mu \right)^{1/p} = \left(\int_X |\alpha|^p |f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\alpha| \cdot \|f\|_p \implies \alpha f \in L^p(\mu).$$

b) Si $p = \infty$, debido a que $|f| \leq \|f\|_\infty$ y $|g| \leq \|g\|_\infty$ c.s., entonces también $|f + g| \leq |f| + |g| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ c.s. Esto implica que $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ es cota superior esencial de $|f + g|$. Al ser $\|f + g\|_\infty$ la mínima, se deduce que $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Por otro lado, si suponemos $\alpha \neq 0$:

$$\|\alpha f\|_\infty = \inf\{\beta \in \mathbb{R} : \mu(|\alpha f|^{-1}(\beta, \infty]) = 0\} = \inf S_1$$

supuesto $S_1 \neq \emptyset$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} x \in |\alpha f|^{-1}(\beta, \infty] &\iff |\alpha f|(x) > \beta \iff |\alpha f(x)| > \beta \iff |\alpha| \cdot |f(x)| > \beta \\ &\iff |f(x)| > \beta/|\alpha| \iff x \in |f|^{-1}(\beta/|\alpha|, \infty] \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} \inf S_1 &= \inf\{\beta \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{-1}(\beta/|\alpha|, \infty]) = 0\} \\ &= \inf\{|\alpha|\beta/|\alpha| \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{-1}(\beta/|\alpha|, \infty]) = 0\} \\ &= \inf\{|\alpha|\beta_1 \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{-1}(\beta_1, \infty]) = 0\} \\ &= |\alpha| \inf\{\beta_1 \in \mathbb{R} : \mu(|f|^{-1}(\beta_1, \infty]) = 0\} = |\alpha| \inf S_2 = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

De este modo, si $f \in L^\infty(\mu)$, $\|\alpha f\|_\infty = \inf S_1 = |\alpha| \cdot \|f\|_\infty$. \diamond

Observación. En general, $\|\cdot\|_p$ no es norma pues no se verifica la implicación $\|f\|_p = 0 \implies f(x) = 0, \forall x \in X$. Sin embargo, en el caso de las funciones reales continuas en un intervalo $[a, b]$, $X = C[a, b]$, $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx = 0 \implies f = 0$. También, en los espacios ℓ^p , $\|\cdot\|_p$ es una norma.

Para obtener espacios normados de las seminormas anteriores, definimos la relación de equivalencia

$$\forall f, g \in L^p(\mu), f \sim g \iff f = g \text{ c.s.}, \text{ o bien } \|f - g\|_p = 0.$$

El espacio cociente, que seguiremos denotando por $L^p(\mu)$, es ahora un espacio normado si definimos $\|\tilde{f}\|_p = \|f\|_p$, donde f es un representante de la clase de equivalencia \tilde{f} .

Probaremos por último la completitud de los espacios recién definidos, resultado obtenido de forma simultánea e independiente por F. Riesz y E. Fischer en 1907.

3.4.- Teorema (Riesz-Fischer). Si $1 \leq p \leq \infty$, entonces $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ es de Banach.

Demostración. a) Veamos primero el caso $1 \leq p < \infty$.

Sea pues $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^p(\mu)$. Tomando $\varepsilon = 1/2^i$, sabemos que $\exists n_i$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < 1/2^i, \forall n, m \geq n_i$. Esto permite extraer una subsucesión $(f_{n_i})_{i \geq 1}$ tal que $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < 1/2^i, \forall i$.

Llamamos ahora $g_k = \sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$ y $g = \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. Debido a que $|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \in L^p(\mu)$, se deduce que $g_k \in L^p(\mu)$. Así pues,

$$\begin{aligned} \|g_k\|_p &= \left(\int_X |g_k|^p d\mu \right)^{1/p} = \left[\int_X \left(\sum_{i=1}^k |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \right)^p d\mu \right]^{1/p} \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left[\int_X |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|^p d\mu \right]^{1/p} = \sum_{i=1}^k \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p < \sum_{i=1}^k \frac{1}{2^i} < 1. \end{aligned}$$

Como además $\lim_k g_k = g$, también $\lim_k |g_k|^p = |g|^p$ y deducimos que

$$\int_X |g|^p d\mu = \int_X \lim_k |g_k|^p d\mu \leq \liminf_k \int_X |g_k|^p d\mu \leq 1 \implies \|g\|_p \leq 1,$$

por lo que $|g|^p$ es finita c.s. y también $g(x) < \infty$ c.s.

Lo anterior indica que la serie $\sum_{i \geq 1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ es absolutamente convergente c.s., así como también lo es la serie $f_{n_1} + \sum_{i \geq 1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$. Definimos

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{i \geq 1} (f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)) & \text{si } x \in A^c \\ 0 & \text{si } x \in A, \end{cases} \text{ donde } \mu(A) = 0.$$

Debido a que $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$, resulta que $f(x) = \lim_i f_{n_i}(x)$ c.s. Veamos que $f_n \rightarrow f$ y que $f \in L^p(\mu)$.

Dado $\varepsilon > 0$, sabemos que $\exists N$ tal que $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$, $\forall n, m \geq N$. Tomando $m \geq N$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_p^p &= \int_X |f - f_m|^p d\mu = \int_X |\lim_i f_{n_i} - f_m|^p d\mu = \int_X \lim_i |f_{n_i} - f_m|^p d\mu \\ &\leq \liminf_i \int_X |f_{n_i} - f_m|^p d\mu = \liminf_i \|f_{n_i} - f_m\|_p^p \leq \varepsilon^p, \end{aligned}$$

tomando $n_i \geq N$. Esto implica que $f - f_m \in L^p(\mu)$ y en consecuencia $f \in L^p(\mu)$ debido a que $f = (f - f_m) + f_m$. Por otra parte, al ser $\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$, $\forall m \geq N$, la sucesión original converge a f .

b) Si $p = \infty$, tomamos nuevamente una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $L^\infty(\mu)$. De este modo, $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, $\forall n, m > N(\varepsilon)$.

Si $A_{m,n} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \|f_n - f_m\|_\infty + \varepsilon\}$, resulta que $\mu(A_{m,n}) = 0$, con lo que, si $A = \bigcup_{m,n} A_{m,n}$, entonces $\mu(A) = 0$. Esto prueba que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente en $E \setminus A$.

Si definimos $f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x) & \text{si } x \in E \setminus A \\ 0 & \text{si } x \in A \end{cases}$, se ve inmediatamente que $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$, pues

$$\begin{aligned} |f(x) - f_m(x)| &= |\lim_n f_n(x) - f_m(x)| \\ &= \lim_n |f_n(x) - f_m(x)| \stackrel{\text{c.s.}}{\leq} \lim_n \|f_n - f_m\|_\infty + \varepsilon < 2\varepsilon, \quad \forall m, n \geq N. \end{aligned}$$

Entonces 2ε es cota superior esencial de $f - f_m$, de modo que $\|f - f_m\|_\infty < 2\varepsilon$, $\forall m \geq N \implies f - f_m \in L^\infty(\mu) \implies f \in L^\infty(\mu)$ y $f_m \rightarrow f$ en $L^\infty(\mu)$. \diamond

Observaciones. 1) A partir de la definición son inmediatas las inclusiones $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^q \subset \ell^\infty$, $1 < p < q < \infty$.

2) Análogamente, en el espacio (X, S, μ) , si $\mu(X) < \infty$, entonces $L^\infty \subset L^q \subset L^p \subset L^1$, para $1 < p < q < \infty$.

En efecto, si llamamos $r = q/p > 1$,

$$\int_X |f|^p d\mu \leq \| |f|^p \|_r \cdot \|1\|_{r'} = \left(\int_X |f|^q d\mu \right)^{1/r} \cdot \mu(X)^{1/r'}.$$

Esto implica que $\|f\|_p \leq \|f\|_q \cdot \mu(X)^{1/p-1/q}$.

De la misma forma, $\|f\|_q \leq \mu(X)^{1/q} \cdot \|f\|_\infty$.

3) En general, $L^p \not\subset L^q$ y $L^q \not\subset L^p$, pero si $f \in L^p \cap L^q$, entonces $f \in L^r$ con $p < r < q$:

$$\begin{aligned} \int_X |f|^r d\mu &= \int_{|f| \leq 1} |f|^r d\mu + \int_{|f| > 1} |f|^r d\mu \\ &\leq \int_{|f| \leq 1} |f|^p d\mu + \int_{|f| > 1} |f|^q d\mu \leq \|f\|_p^p + \|f\|_q^q < \infty. \end{aligned}$$

Se verifica también la desigualdad de interpolación

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \cdot \|f\|_q^{1-\alpha}, \text{ donde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

4. PROPIEDADES DE LOS ESPACIOS NORMADOS.

Probaremos en esta sección las propiedades fundamentales de los espacios normados.

4.1.- Teorema. Sea X un espacio vectorial normado. Entonces:

- a) $|||x| - |y|| \leq \|x - y\|, \forall x, y \in X.$
- b) $B(x_0, r) = x_0 + B(0, r), \forall x_0 \in X, r > 0.$

Demostración. a) Por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned} \|x\| = \|x - y + y\| &\leq \|x - y\| + \|y\| \implies \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|; \\ \|y\| = \|y - x + x\| &\leq \|y - x\| + \|x\| \implies -\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|. \end{aligned}$$

b) Debido a las propiedades de la norma,

$$\begin{aligned} x \in B(x_0, r) &\iff \|x - x_0\| < r \\ &\iff x - x_0 \in B(0, r) \iff x \in x_0 + B(0, r). \quad \diamond \end{aligned}$$

4.2.- Teorema. Sea X un espacio vectorial normado. Son equivalentes:

- i) X es de Banach.
- ii) Si $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| < \infty \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ converge en X .

Esto indica que en los espacios de Banach la convergencia absoluta implica la convergencia.

Demostración. i) \implies ii). Sea $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Si $m > n$,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^m a_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|a_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|a_k\| < \varepsilon.$$

Esto implica que $\{S_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X y por tanto converge.

ii) \implies i). Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en X . Hacemos $a_{n_0} = 0$ y elegimos

$$\begin{aligned} n_1 \in \mathbb{N} & : \|a_{n_1} - a_m\| < 1/2, \quad \forall m > n_1, \\ n_2 > n_1 & : \|a_{n_2} - a_m\| < 1/2^2, \quad \forall m > n_2, \\ & \vdots \\ n_k > n_{k-1} & : \|a_{n_k} - a_m\| < 1/2^k, \quad \forall m > n_k. \end{aligned}$$

Así $\sum_{k=1}^{\infty} \|a_{n_k} - a_{n_{k-1}}\| \leq \|a_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} 1/2^k < \infty$.

Por hipótesis, $\sum_{k \in \mathbb{N}} (a_{n_k} - a_{n_{k-1}})$ es convergente. Entonces

$$a = \sum_{k=1}^{\infty} (a_{n_k} - a_{n_{k-1}}) = \lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^h (a_{n_k} - a_{n_{k-1}}) = \lim_{h \rightarrow \infty} a_{n_h},$$

y esto implica que $\{a_{n_h}\}_{h \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Como $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, ella misma es convergente y X es completo. \diamond

4.3.- Proposición. Sea X un espacio vectorial normado sobre el cuerpo E . Si definimos en $X \times X$ ó $E \times X$ la métrica producto $\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|$, entonces las aplicaciones $(x, y) \mapsto x + y$ y $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, definidas en $X \times X$ y $E \times X$, respectivamente, son continuas. Además, la norma $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente continua.

Demostración. Es fácil comprobar que la métrica producto verifica los axiomas de norma. De este modo:

Como $\|x + y - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\|$, la primera es continua.

Para demostrar que la aplicación $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$ es continua en (α_0, x_0) , elegimos α, x tales que $|\alpha - \alpha_0| < \min\{1, \frac{\varepsilon}{2(1 + \|x_0\|)}\}$ y $\|x - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha_0|)}$. Entonces

$$|\alpha| - |\alpha_0| \leq |\alpha - \alpha_0| < 1 \implies |\alpha| < 1 + |\alpha_0|.$$

Además,

$$\begin{aligned} \|\alpha x - \alpha_0 x_0\| & \leq |\alpha| \cdot \|x - x_0\| + \|x_0\| \cdot |\alpha - \alpha_0| \\ & < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + |\alpha_0|)} + \|x_0\| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1 + 1 + \|x_0\|)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Por último, para probar que la norma es uniformemente continua, dado $\varepsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $|\|x\| - \|x_0\|| < \varepsilon$ si $\|x - x_0\| < \delta$. Ahora bien, como $|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|$, basta elegir $\delta = \varepsilon$. \diamond

4.4.- Corolario. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado, $x_0 \in X$, $\lambda_0 \in E$, $\lambda_0 \neq 0$, entonces las aplicaciones $x \mapsto x + x_0$ (traslación de vector x_0) y $x \mapsto \lambda_0 x$ (homotecia de razón λ_0) son homeomorfismos.

Demostración. Basta probar que son bicontinuas. La primera de ellas es composición de $f : X \rightarrow X \times X$, dada por $f(x) = (x, x_0)$, y $g : X \times X \rightarrow X$, dada por $g(x, x_0) = x + x_0$. Por el teorema anterior, g es continua; es fácil probar que f es también continua, de modo que $g \circ f$ es continua. Además, el mismo argumento prueba que la inversa $x \mapsto x - x_0$ es continua.

Análogamente se prueba que la segunda es continua. \diamond

4.5.- Proposición. Un subespacio Y de un espacio de Banach X es completo si y sólo si Y es cerrado en X .

Demostración. Se deduce de la propiedad análoga para espacios métricos. \diamond

4.6.- Teorema (compleción). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Existe un espacio de Banach X^* y una isometría $A : X \rightarrow W$ donde W es un subespacio denso de X^* . Dicho espacio X^* es único salvo isometrías.

Demostración. Por el teorema análogo en espacios métricos, existe (X^*, d) y $A : X \rightarrow W$ isometría con $W \subset X^*$ denso. Falta probar que podemos dotar a X^* de una estructura de espacio vectorial normado.

Recordando que x^* e y^* son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en X , elegimos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in x^*$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in y^*$. Hacemos $z_n = x_n + y_n$. Así, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X pues $\|z_n - z_m\| \leq \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\|$. Por tanto, definimos $z^* = x^* + y^*$ como la clase de equivalencia que contiene a $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (esta definición no depende de la elección de los representantes).

También definimos $\alpha x^* \in X^*$ como la clase que contiene a $\{\alpha x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ (de nuevo esta definición no depende de los representantes).

Así obtenemos un espacio vectorial. En W las operaciones inducidas por X^* coinciden con las inducidas por X a través de A .

Además A induce en W una norma $\|\cdot\|_1$ así: si $y^* = Ax \in W$, $\|y^*\|_1 = \|x\|$.

Como la métrica en W es la restricción de d^* a W (ya que A es isométrico), podemos extender la norma $\|\cdot\|_1$ a X^* así :

$$\|x^*\|_2 = d^*(0^*, x^*), \forall x^* \in X^*.$$

Para comprobar los axiomas, basta aplicar a $\|\cdot\|_1$ un proceso de límite.

◇

El concepto de base en un espacio vectorial se extiende en el caso de espacios normados en el siguiente sentido:

4.7.- Definición. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una *base de Schauder* de X cuando $\forall x \in X$, existe una sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$.

Por ejemplo, la sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donde $e_n = (\delta_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$, es una base de Schauder de ℓ^p , para todo $p \geq 1$.

Observación. No necesariamente un espacio de Banach separable tiene una base de Schauder, como probó P. Enflo en 1973 (ver el artículo de P. Halmos titulado *Has progress in Mathematics slowed down?* y publicado en Amer. Math. Montly, volumen 97 (1990), pág. 561–588, para comprender la relevancia de este resultado).

4.8.- Proposición. Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ con base de Schauder $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, si definimos $\|x\|^* = \sup_{N \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n \right\|$, entonces $(X, \|\cdot\|^*)$ es un espacio de Banach y, en consecuencia, $(X, \|\cdot\|)$ también es de Banach.

Demostración. Es fácil comprobar que $\|\cdot\|^*$ es norma. Veamos que $(X, \|\cdot\|^*)$ es completo:

Si $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n x_n \in X$, entonces $\beta_n x_n = \sum_{k=1}^n \beta_k x_k - \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k x_k$, de donde $\|\beta_n x_n\| \leq 2\|y\|^*$, con lo que $|\beta_n| \leq \frac{2\|y\|^*}{\|x_n\|}$.

Sea $(a^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(X, \|\cdot\|^*)$. Si $a^{(k)} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n^{(k)} x_n$,

entonces $(\alpha_n^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el cuerpo de escalares; llamamos $\alpha_n = \lim_k \alpha_n^{(k)}$. Probaremos ahora que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$ converge en $\|\cdot\|$ a algún $a \in X$ y que $\lim_k \|a^{(k)} - a\|^* = 0$:

- Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^{(n)} - a^{(m)}\|^* < \varepsilon/4$, si $n, m \geq n_0$. Para cualesquiera $i, j \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\sum_{k=i}^{i+j} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) x_k = \sum_{k=1}^{i+j} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) x_k - \sum_{k=1}^{i-1} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) x_k.$$

De aquí,

$$\left\| \sum_{k=i}^{i+j} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) x_k \right\| \leq 2\|a^{(n)} - a^{(m)}\|^* < \varepsilon/2.$$

Fijando n y haciendo $m \rightarrow \infty$, tenemos que $\left\| \sum_{k=i}^{i+j} (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k) x_k \right\| < \varepsilon/2$, si $n \geq n_0$.

Debido a que $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(n_0)} x_k$ es convergente, existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall j \in \mathbb{N}$, $\left\| \sum_{k=i_0}^{i_0+j} \alpha_k^{(n_0)} x_k \right\| < \varepsilon/2$. Luego,

$$\left\| \sum_{k=i_0}^{i_0+j} \alpha_k x_k \right\| \leq \left\| \sum_{k=i_0}^{i_0+j} (\alpha_k - \alpha_k^{(n_0)}) x_k \right\| + \left\| \sum_{k=i_0}^{i_0+j} \alpha_k^{(n_0)} x_k \right\| < \varepsilon.$$

Esto indica que la serie $\sum \alpha_k x_k$ converge a algún $a \in X$.

- Por ser $(a^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|a^{(n)} - a^{(m)}\|^* < \varepsilon/2$, si $n, m \geq n_0$. Así, $\left\| \sum_{k=1}^j (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}) x_k \right\| < \varepsilon$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Haciendo $m \rightarrow \infty$, tenemos que $\left\| \sum_{k=1}^j (\alpha_k^{(n)} - \alpha_k) x_k \right\| < \varepsilon$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Esto quiere decir que $\|a^{(n)} - a\|^* \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$ y $(X, \|\cdot\|^*)$ es completo.

Debido a que $\|x\| \leq \|x\|^*$, para todo $x \in X$, también $(X, \|\cdot\|)$ es completo.

◇

5. ESPACIOS NORMADOS DE DIMENSIÓN FINITA.

El hecho de que la dimensión del espacio sea finita da lugar a algunas características especiales. Por ejemplo, el teorema de Bolzano-Weierstrass demuestra que, en un espacio de dimensión finita, cualquier bola cerrada $\overline{B}(z, r)$ es compacta. Veremos a continuación que, en el caso infinito, $\overline{B}(z, r)$ nunca es compacta.

5.1.- Lema (F. Riesz). *Sea X un espacio normado, Y, Z subespacios de X con Y subconjunto cerrado propio de Z . Entonces $\forall \vartheta \in (0, 1)$, $\exists z \in Z$ de norma uno tal que $\|z - y\| \geq \vartheta$, $\forall y \in Y$.*

Demostración. Sea $v \in Z \setminus Y$ y llamamos

$$a = d(v, Y) = \inf_{y \in Y} d(v, y) = \inf_{y \in Y} \|v - y\|.$$

Como Y es cerrado, $a > 0$. Por definición de ínfimo, existe un elemento $y_0 \in Y$ tal que $a \leq \|v - y_0\| \leq a/\vartheta$ para todo $\vartheta \in (0, 1)$. Sea $z = c(v - y_0)$ con $c = \|v - y_0\|^{-1}$. Así, $\|z\| = 1$ y

$$\|z - y\| = \|c(v - y_0) - y\| = c\|v - y_0 - \frac{y}{c}\| = c\|v - y_1\|,$$

con $y_1 = y_0 + y/c$.

Como $y_1 \in Y$, $\|v - y_1\| \geq a \implies \|z - y\| \geq \|v - y_0\|^{-1}a \geq \vartheta$. \diamond

5.2.- Corolario. Si X es un espacio normado y M un subespacio cerrado propio de X , entonces existe un elemento $z \in X$ de norma 1 tal que $d(z, M) = 1$.

Demostración. Por el lema anterior, $\exists z \in X : \|z\| = 1$ y $d(z, M) \geq 1$. Como M es subespacio, $0 \in M$ y $d(z, M) \leq d(z, 0) = \|z\| = 1$. \diamond

El lema 5.1 permite demostrar la siguiente caracterización de los espacios de dimensión finita.

5.3.- Teorema (F. Riesz). En un espacio normado X , las siguientes condiciones son equivalentes:

i) La bola unidad $\overline{B}(0, 1)$ es compacta.

ii) X tiene dimensión finita.

Demostración. i) \implies ii). Si $\dim X = \infty$, sea $x_1 \in X$, $\|x_1\| = 1$, y construimos $X_1 = \langle \{x_1\} \rangle$ que es subespacio propio y cerrado de X . Por el lema anterior,

$$\exists x_2 \in X \setminus X_1 : \|x_2\| = 1, \|x_2 - x_1\| \geq 1/2.$$

Ahora llamamos $X_2 = \langle \{x_1, x_2\} \rangle$, y también ahora

$$\exists x_3 \in X \setminus X_2 : \|x_3\| = 1, \|x_3 - x_1\| \geq 1/2, \|x_3 - x_2\| \geq 1/2.$$

Llegamos así a una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \overline{B}(0, 1)$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq 1/2$, $\forall n, m$. De esta forma, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no puede tener ninguna sub-sucesión convergente lo que contradice su compacidad.

El recíproco corresponde al teorema de Bolzano-Weierstrass. \diamond

Otro resultado destacable es el de la completitud, que probaremos después del siguiente lema.

5.4.- Lema. Dados un espacio normado X (de cualquier dimensión) y una familia $\{x_1, \dots, x_n\}$ linealmente independiente, existe $c > 0 : \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in E : \|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|)$.

Demostración. Sea $s = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$.

Si $s = 0$, $\alpha_i = 0$, $\forall i \implies$ la desigualdad es cierta $\forall c$.

Si $s > 0$, llamamos $\beta_i = \alpha_i/s$, y la desigualdad a probar es

$$\|\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n\| \geq c, \text{ donde } \sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1.$$

Si suponemos que la acotación anterior no es cierta, existe una sucesión $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tal que $\|y_m\| \rightarrow 0$ y

$$y_m = \sum_{i=1}^n \beta_i^{(m)} x_i, \text{ con } \sum_{i=1}^n |\beta_i^{(m)}| = 1.$$

Fijado $i \in \{1, \dots, n\}$, la sucesión $\{\beta_i^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada (pues $\sum |\beta_i^{(m)}| = 1$).

Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, $\{\beta_1^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ tiene una sub-sucesión convergente, digamos a β_1 . A esta sub-sucesión le corresponde $\{y_{1m}\}_{m \in \mathbb{N}}$. Aplicando el mismo argumento se prueba que existe $\{y_{2m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ sub-sucesión $\{y_{1m}\}_{m \in \mathbb{N}}$, tal que $\{\beta_2^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge a β_2 . Después de n pasos, obtenemos una sub-sucesión $\{y_{nm}\}_{m \in \mathbb{N}}$ de $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de la forma $y_{nm} = \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(m)} x_j$ con $\sum_{j=1}^n |\gamma_j^{(m)}| = 1$, cuyos escalares $\gamma_j^{(m)}$ verifican $\gamma_i^{(m)} \rightarrow \beta_i$. De este modo, $y_{nm} \rightarrow y = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i$ donde $\sum_{i=1}^n |\beta_i| = 1$. Esto implica que no todos los β_i son cero, con lo cual $y \neq 0$ (por ser el conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ linealmente independiente).

Por otro lado, $y_{nm} \rightarrow y \implies \|y_{nm}\| \rightarrow \|y\|$. Como por hipótesis, $\|y_m\| \rightarrow 0$ e $\{y_{nm}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es sub-sucesión, entonces $\|y\| = 0$, de donde $y = 0$, lo que lleva a una contradicción. \diamond

5.5.- Teorema (completitud). *Todo subespacio Y de dimensión finita de un espacio normado X es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.*

Demostración. Sea $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y . Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de Y , $y_m = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(m)} e_i$. Entonces, por el lema anterior,

$$\varepsilon > \|y_m - y_k\| = \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)}) e_i \right\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i^{(k)}|, \quad \forall m, k > N(\varepsilon).$$

Entonces $\{\alpha_i^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en E , y por lo tanto, converge a α_i . Llamamos $y = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Evidentemente, $y \in Y$ y

$$\|y_m - y\| = \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i^{(m)} - \alpha_i) e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(m)} - \alpha_i| \cdot \|e_i\|,$$

que tiende a cero. \diamond

5.6.- Corolario. *Todo subespacio Y de dimensión finita de un espacio normado X es cerrado.*

La prueba es evidente.

La siguiente caracterización es usada a veces como definición de compacidad en dimensión finita.

5.7.- Teorema. Si X es un espacio normado de dimensión finita, todo subconjunto M de X es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Demostración. Ya probamos en el capítulo I, lema 5.7, que todo compacto es cerrado y acotado.

Sea M cerrado y acotado y $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en M .

Así, $x_m = \alpha_1^{(m)} e_1 + \cdots + \alpha_n^{(m)} e_n$, donde $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de X .

Como M es acotado, $\|x_m\| \leq k$, $\forall m$. Por el lema 5.4, $k \geq \|x_m\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(m)}|$. Tenemos, para cada i , una sucesión escalar $\{\alpha_i^{(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, posee un punto de acumulación ξ_i .

Repitiendo el argumento del lema 5.4, se deduce que $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tiene una sub-sucesión que converge a $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$. Como M es cerrado, $x \in M$.

◇

Contraejemplo. Si X es el conjunto de las sucesiones de soporte finito y $\|x\| = (\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2)^{1/2}$, entonces $(X, \|\cdot\|)$ es normado y $(e^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ es una base de X , si definimos $e^{(k)} = (\delta_{nk})_{n \in \mathbb{N}}$.

La bola unidad $\overline{B}(0, 1)$ es cerrada y acotada, claramente, pero no es compacta. Para ello basta ver que existe una sucesión que no tiene ninguna subsucesión convergente.

Como $(e^{(k)})_{k \in \mathbb{N}} \subset \overline{B}(0, 1)$, si existiera $(e^{(k_j)})_{j \in \mathbb{N}}$ subsucesión convergente a $e \in \overline{B}(0, 1)$,

$$\|e^{(k_j)} - e^{(k_m)}\| = \sqrt{2} \implies \lim_{j \rightarrow \infty} \|e^{(k_j)} - e^{(k_m)}\| = \lim_{j \rightarrow \infty} \|e^{(k_j)} - e^{(k_m)}\| = \|e - e^{(k_m)}\|$$

lo que es absurdo.

Otra característica de los espacios de dimensión finita es que todas las normas son equivalentes (dan la misma topología).

5.8.- Definición. Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en X se dicen *equivalentes* cuando $\exists a, b > 0 : a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1, \forall x \in X$.

Es fácil probar que la relación es efectivamente de equivalencia y que dos normas equivalentes dan lugar a la misma topología.

5.9.- Teorema (normas equivalentes). *En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes.*

Demostración. Sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas cualesquiera en X . Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de X , todo $x \in X$ tiene una representación $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$. Aplicando el lema 5.4, existe c tal que $\|x\|_1 \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$. Por otro lado,

$$\|x\|_2 \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|e_i\|_2 \leq k \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$$

si $k = \max \|e_i\|_2$. Esto implica que $\frac{c}{k} \|x\|_2 \leq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \leq \|x\|_1$.

Intercambiando los papeles de $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ se obtiene la otra desigualdad.

◇

Observar la importancia de este resultado que prueba la independencia de la convergencia de sucesiones respecto de la norma que se elija.

6. OPERADORES LINEALES ACOTADOS.

La estructura algebraica que posee todo espacio normado hace plantearnos el estudio de las aplicaciones lineales entre ellos. Debido a su importancia en el desarrollo del Análisis Funcional, el curso se concentra a partir de aquí en el estudio de dichas aplicaciones, que reciben el nombre de *operadores*. Además, salvo en algunas situaciones concretas, y en especial en el capítulo VII, dichos operadores se supondrán acotados, de ahí que precisemos dicho concepto a continuación.

6.1.- Definición. Sean X, Y espacios normados y $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Decimos que A es *acotado* si existe $k > 0 : \|Ax\| \leq k\|x\|, \forall x \in X$.

Observación. En Cálculo elemental, una función es acotada cuando su imagen es un conjunto acotado. Sin embargo, no hay funciones no nulas que sean lineales y acotadas pues, debido a la linealidad, si $\|Ax\| \leq k, \forall x \implies A = 0$, de ahí que para definir un operador lineal acotado exijamos simplemente que su restricción a la bola unidad tenga imagen acotada.

De la definición se deduce que $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq k, \forall x \neq 0$. Entonces el menor valor de k para el que se verifica la desigualdad es precisamente $\sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Esto motiva la siguiente definición.

6.2.- Definición. Dado un operador $A : X \rightarrow Y$ lineal y acotado, se llama *norma* de A , a $\|A\| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

6.3.- Definición. Llamamos $L(X, Y) = \{A : X \rightarrow Y : A \text{ es lineal y acotado}\}$ (en particular $L(X) = \{A : X \rightarrow X : A \text{ lineal y acotado}\}$), que es un espacio vectorial con las operaciones usuales y es normado si definimos $\|A\|$ como arriba. Para ver bajo qué condiciones es de Banach, nos basta el siguiente resultado.

6.4.- Teorema. Si Y es de Banach, entonces $L(X, Y)$ es de Banach.

Demostración. Debemos ver que toda sucesión de Cauchy en $L(X, Y)$ converge en el mismo espacio.

Consideramos para ello una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $L(X, Y)$, es decir, tal que $\|A_n - A_m\| < \varepsilon$, si $n, m > N(\varepsilon)$. Entonces

$$\forall x \in X, \|A_n x - A_m x\| \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|.$$

Esto implica que $\{A_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y , de donde $\exists y \in Y : A_n x \rightarrow y$, porque Y es completo.

Definimos $A : X \rightarrow Y$ como $Ax = y$. Entonces

(*) A es lineal (evidente).

(*) A es acotado: Si $n > N$,

$$\|A_n x - Ax\| = \|A_n x - \lim_m A_m x\| = \lim_m \|A_n x - A_m x\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|.$$

Entonces $A_n - A$ es acotado para $n > N$. Como A_n también es acotado, $A = A_n - (A_n - A)$ es acotado.

(*) $A_n \rightarrow A$: Como $\|A_n x - Ax\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$, entonces $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$. \diamond

6.5.- Lema. Otras definiciones equivalentes de norma de un operador son:

(a) $\|A\| = \inf K$, donde $K = \{k \in \mathbb{R} : \|Ax\| \leq k\|x\|, \forall x \in X\}$.

(b) $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

(c) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Demostración. a) Como $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \forall x \in X$. Esto implica que $\|A\| \geq \inf K$.

Recíprocamente, $\forall k \in K, k \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \forall x \neq 0$. Por tanto,

$$k \geq \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \implies k \geq \|A\| \implies \inf\{k\} \geq \|A\|.$$

b) Sea $\|x\| \leq 1$. Entonces $\|A\| \geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \|Ax\| \implies \|A\| \geq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

Recíprocamente, si $x \neq 0$,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A(x/\|x\|)\| \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ay\| \implies \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{\|y\| \leq 1} \|Ay\|.$$

Por tanto, $\|A\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$.

c) Es análoga a b) con las modificaciones obvias. \diamond

6.6.- Ejemplos. 1) Si $I : X \rightarrow X$ es el operador identidad, $\|I\| = 1$ y si $0 : X \rightarrow Y$ es el operador cero, $\|0\| = 0$.

2) Si $\mathcal{P}[0, 1]$ es el espacio de los polinomios sobre $[0, 1]$ con norma $\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|$, entonces el operador derivada $D : \mathcal{P}[0, 1] \rightarrow \mathcal{P}[0, 1]$ definido como $Df(x) = f'(x)$ es lineal pero no acotado, porque tomando $f_n(x) = x^n$, entonces $\|f_n\| = 1$, $Df_n(x) = nx^{n-1}$ y $\|Df_n\| = n > c$, $\forall c$.

Este ejemplo básico hace que tenga gran importancia el estudio de los operadores no acotados.

3) Sea $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ el operador definido por $Tf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)dy$, donde k es una función continua en $[0, 1] \times [0, 1]$, llamada *núcleo del operador*.

T es acotado pues

$$\|Tf\| = \max_{x \in I} \left| \int_0^1 k(x, y)f(y)dy \right| \leq \max_{x \in I} \int_0^1 |k(x, y)| \cdot |f(y)|dy \leq k_0 \|f\|,$$

donde k_0 es una cota superior de $|k(x, y)|$.

En dimensión finita todos los operadores lineales son acotados como probamos a continuación.

6.7.- Teorema. Si $A : X \rightarrow Y$ es lineal y X es de dimensión finita, entonces A es acotado.

Demostración. Sean $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de X y $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$ un elemento arbitrario de X . Entonces

$$Ax = \sum_{i=1}^n \alpha_i Ae_i \implies \|Ax\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i| \cdot \|Ae_i\| \leq \max_i \|Ae_i\| \cdot \sum_{i=1}^n |\alpha_i|.$$

El lema 5.4 establece que $\|x\| \geq c \sum_{i=1}^n |\alpha_i|$, de donde

$$\|Ax\| \leq \frac{1}{c} \max_i \|Ae_i\| \cdot \|x\| = k \|x\|.$$

Esto implica que A es acotado. \diamond

Veremos a continuación una relación directa entre operadores acotados y continuos cuando estos son lineales y una simplificación importante del concepto de continuidad.

6.8.- Teorema. Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal entre espacios normados. Son equivalentes:

- i) A es uniformemente continuo.
- ii) A es continuo.

iii) A es continuo en algún $x_0 \in X$.

iv) A es continuo en 0.

v) A es acotado.

vi) $M \subset X$ acotado $\implies A(M) \subset Y$ acotado.

Demostración. i) \implies ii) \implies iii) \implies iv) son evidentes.

iv) \implies v). Supongamos que A es continuo y no acotado. Entonces $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists x_k \in X : \|Ax_k\| > k\|x_k\|$. Si llamamos $y_k = \frac{x_k}{k\|x_k\|}$, como $\|y_k\| = 1/k$, resulta que $y_k \rightarrow 0$. Por la continuidad de A , $Ay_k \rightarrow A(0) = 0$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : k > N \implies \|Ay_k\| < \varepsilon.$$

Si tomamos $\varepsilon < 1$, $\|Ay_k\| = \frac{\|Ax_k\|}{k\|x_k\|} > 1$, lo que es absurdo.

v) \implies vi). Sea $M \subset X$ acotado. Entonces existe $K : \|x\| \leq k, \forall x \in M$.

Por ser A acotado, $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\| \leq \|A\| \cdot k, \forall x \in M$. Esto implica que $A(M)$ es acotado.

vi) \implies i). Sea M la bola unitaria cerrada en X . Como M es acotado, $A(M)$ es acotado en Y , es decir $\|Ax\| \leq k, \forall x \in M$.

Dado cualquier $\varepsilon > 0$, hacemos $\delta = \varepsilon/k$, con lo que, si $\|x - y\| < \delta$, entonces

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| = \|x - y\| \cdot \left\| A\left(\frac{x - y}{\|x - y\|}\right) \right\| < \delta \cdot k = \varepsilon,$$

pues $(x - y)/\|x - y\| \in M$. \diamond

6.9.- Corolario. Si $A : X \rightarrow Y$ es un operador lineal acotado, entonces $x_n \rightarrow x \implies Ax_n \rightarrow Ax$.

Demostración. $\|Ax_n - Ax\| \leq \|A\| \|x_n - x\| \rightarrow 0$. \diamond

Probamos a continuación la siguiente caracterización de la existencia de operador inverso acotado.

6.10.- Teorema (operador inverso). Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal. La condición necesaria y suficiente para que exista $A^{-1} : A(X) \rightarrow X$ y esté acotado es que $\exists k > 0 : k\|x\| \leq \|Ax\|, \forall x \in X$.

Demostración. a) Para que exista A^{-1} , debe ser A inyectiva. En efecto, de $Ax = 0$ se deduce que $\|Ax\| = 0 \implies k\|x\| = 0 \implies x = 0$.

La comprobación de que A^{-1} es lineal es directa. Veamos que es acotado:

$\forall y \in A(X), \exists x \in X : Ax = y$, es decir $x = A^{-1}y$. Por hipótesis,

$$\exists k > 0 : k\|A^{-1}y\| \leq \|y\|.$$

Entonces $\|A^{-1}y\| \leq (1/k)\|y\|$ de modo que A^{-1} está acotado.

b) Como A^{-1} está acotado, $\exists k > 0 : \|A^{-1}y\| \leq k\|y\|$.

Para todo $x \in X$, hacemos $y = Ax$; entonces $\|A^{-1}Ax\| \leq k\|Ax\|$. Por tanto, $(1/k)\|x\| \leq \|Ax\|$. \diamond

6.11.- Definición (restricción, extensión). a) Dado un operador $A : X \rightarrow Y$ y un subconjunto $X_0 \subset X$, al operador $A|_{X_0} : X_0 \rightarrow Y$ definido por $A|_{X_0}x = Ax, \forall x \in X_0$, se le llama *restricción* de A a X_0 .

b) De la misma manera, dado $A : X \rightarrow Y$ y un conjunto \tilde{X} tal que $X \subset \tilde{X}$, un operador \tilde{A} definido en \tilde{X} cuya restricción a X coincide con A se llama *extensión* de A a \tilde{X} .

Entre las extensiones de un mismo operador, son importantes las que conservan las propiedades básicas del operador de partida, como la linealidad y acotación.

6.12.- Teorema. Sea $A : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado, donde Y es de Banach. Entonces A tiene una extensión $\tilde{A} : \bar{X} \rightarrow Y$ tal que \tilde{A} es lineal, acotado y $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

Demostración. Sea $x \in \bar{X}$. Entonces existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X : x_n \rightarrow x$.

Como

$$\|Ax_n - Ax_m\| = \|A(x_n - x_m)\| \leq \|A\| \cdot \|x_n - x_m\| \rightarrow 0,$$

entonces $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y y, por lo tanto, converge a $y \in Y$ (porque Y es de Banach).

Definimos $\tilde{A}x = y$. Así definido, se puede probar lo siguiente:

* La definición no depende de la elección de la sucesión que tiende a x :

Si $x_n \rightarrow x$ y $z_n \rightarrow x$, entonces $\{x_1, z_1, x_2, z_2, \dots\}$ también converge a x y, como A es acotado, la sucesión de sus imágenes también converge.

Por tanto, las dos sub-sucesiones $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{Az_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen al mismo límite.

* \tilde{A} es lineal (evidente).

* $\tilde{A}x = Ax, \forall x \in X$.

* Como $\|Ax_n\| \leq \|A\| \cdot \|x_n\|$ y $Ax_n \rightarrow y = \tilde{A}x$, si $x_n \rightarrow x$, entonces $\|\tilde{A}x\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$. Por tanto, $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. Pero, al ser \tilde{A} extensión de A , $\|\tilde{A}\| \geq \|A\|$, entonces $\|A\| = \|\tilde{A}\|$. \diamond

Diversas generalizaciones y variaciones de este resultado son objeto de numerosos estudios, importantes tanto en la teoría de operadores como en otras áreas afines.

7. FUNCIONALES LINEALES. ESPACIO DUAL.

Entre los operadores lineales en espacios normados, una clase importante, e históricamente precursora de los mismos, la constituyen los funcionales lineales que estudiamos en esta sección.

7.1.- Definición. Un *funcional* es un operador cuyo rango está en el conjunto \mathbb{R} ó \mathbb{C} . Un *funcional lineal* es un operador lineal $f : X \rightarrow E$ donde X es un espacio vectorial y E su cuerpo de escalares. Un *funcional lineal acotado* es un operador lineal acotado cuyo rango está en E , cuerpo de escalares del espacio normado X , es decir, si existe $k > 0 : |f(x)| \leq k\|x\|$, $\forall x \in X$.

Se define la *norma* de f del mismo modo que en el caso de operadores lineales, y se verifican las mismas propiedades obtenidas en el caso general.

7.2.- Ejemplos. 1) $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional no lineal.

2) Para cada $a \in \mathbb{R}^n$, $f_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f_a(x) = a \cdot x = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ (producto escalar por un vector fijo) es un funcional lineal y acotado:

$$|f_a(x)| = |x \cdot a| \leq \|x\| \cdot \|a\| \implies \|f\| \leq \|a\|.$$

Pero además, si hacemos $x = a$, resulta $\|f_a\| \geq \frac{|f_a(x)|}{\|x\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} \implies \|f_a\| \geq \|a\|$. De lo que se deduce que $\|f_a\| = \|a\|$.

3) La aplicación $f : \ell^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i x_i$ donde $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^2$ es fijo, es también un funcional lineal y acotado pues, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, $|f(x)| \leq \|x\|_2 \cdot \|a\|_2$. Del mismo modo, el operador $f : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = a \cdot x$, con $a \in \ell^q$ fijo, es también lineal y acotado.

4) El operador $f : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = \int_a^b x(t)dt$ (integral definida) es lineal y acotado:

$$|f(x)| = \left| \int_a^b x(t)dt \right| \leq (b-a) \cdot \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| = (b-a) \cdot \|x\| \implies \|f\| \leq b-a.$$

Si elegimos en particular $x_0 = 1$, $\|f\| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\int_a^b dt}{1} = b-a$. De aquí se deduce que $\|f\| = b-a$.

7.3.- Proposición. Sea X un espacio normado y f un funcional lineal en X . Entonces f es continuo si y sólo si su núcleo $N(f)$ es cerrado.

Demostración. a) La prueba de que $N(f)$ es cerrado es directa.

b) Supongamos que $N = N(f)$ es cerrado. Si $N = X$, entonces $f = 0$ y es continuo.

Si $N \neq X$, existe $x_1 \in X : f(x_1) \neq 0$. Sea $x_0 = x_1/f(x_1)$. Como $f(x_0) = 1$ y N es cerrado, $d(x_0, N) = d > 0$.

Por otra parte, $\forall x \in X$, $x = x - f(x) \cdot x_0 + f(x) \cdot x_0$, donde $x - f(x) \cdot x_0 \in N$. Esto indica que $X = N \oplus \{\lambda x_0 : \lambda \in E\}$. Si escribimos entonces $x = n + \lambda x_0$, con $n \in N$, $\lambda \in E$, resulta:

$$\|x\| = |\lambda| \cdot \|x_0 + n/\lambda\| \geq |\lambda| \cdot d = |f(\lambda x_0 + n)| \cdot d = |f(x)| \cdot d.$$

Esto implica que $|f(x)| \leq (1/d) \cdot \|x\|$ y f es continuo. \diamond

En espacios vectoriales de dimensión finita es conocido el hecho de que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de X , entonces el espacio X^* , llamado *dual algebraico* de X , definido por $X^* = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ lineal}\}$, tiene dimensión n y el conjunto $\{f_1, \dots, f_n\}$, donde $f_i(e_k) = \delta_{ik}$, es una base de X^* . En dimensión infinita, tenemos el siguiente resultado análogo:

7.4.- Proposición. Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una base de Schauder, el funcional lineal f_k definido por $f_k(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n) = \alpha_k$ es continuo.

Demostración. Dado $a = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n \in X$ y teniendo en cuenta la demostración de la proposición 4.8, resulta:

$$\begin{aligned} |f_k(a)| &= |\alpha_k| = \frac{1}{\|x_k\|} \|\alpha_k x_k\| = \frac{1}{\|x_k\|} \left\| \sum_{n=1}^k \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{k-1} \alpha_n x_n \right\| \\ &\leq \frac{1}{\|x_k\|} \cdot 2\|a\|^* \leq \frac{M}{\|x_k\|} \|a\|. \quad \diamond \end{aligned}$$

Este hecho es el punto de partida para definir el concepto de espacio dual en espacios normados arbitrarios.

7.5.- Definición. Sea X un espacio normado; llamamos *espacio dual* de X a $X' = \{f : X \rightarrow E : f \text{ lineal y acotado}\}$. Si $\dim X < \infty$, este concepto coincide con el de dual algebraico (por el teorema 6.7).

El espacio X' será siempre completo por serlo el cuerpo de escalares de X .

Es a menudo conveniente estudiar el espacio dual de un espacio normado para obtener propiedades del mismo espacio, por lo que estudiaremos

su estructura en algunos ejemplos clásicos. Veremos posteriormente, como consecuencia del teorema de Hahn-Banach (capítulo IV), que el dual de un espacio normado no trivial es no trivial.

7.6.- Ejemplos. 1) El dual de \mathbb{R}^n con la norma euclídea es \mathbb{R}^n (en realidad es un espacio isométrico a \mathbb{R}^n):

Como $\dim \mathbb{R}^n = n$, todo f lineal es acotado.

Si $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f(e_i)$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i f(e_i)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|x\| \cdot \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

de donde $\|f\| \leq \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{1/2}$.

Tomando en particular $x = (f(e_1), \dots, f(e_n))$, se obtiene la igualdad. Así, $\|f\| = \left(\sum_{i=1}^n |f(e_i)|^2 \right)^{1/2}$ coincide con la norma euclídea y la aplicación definida por $f \mapsto (f(e_1), \dots, f(e_n))$ es un isomorfismo isométrico de $(\mathbb{R}^n)'$ en \mathbb{R}^n .

2) El dual de ℓ^1 es ℓ^∞ .

$\forall x \in \ell^1$, podemos escribir $x = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k e_k$, donde $e_k = (\delta_{kj})_{j=1}^\infty$ forma una base de Schauder de ℓ^1 , porque $x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k = (0, \dots, 0, \alpha_{n+1}, \dots)$ y

$$\left\| x - \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\| = \left\| \sum_{k=n+1}^\infty \alpha_k e_k \right\| \rightarrow 0$$

por ser el resto de una serie convergente.

Definimos la aplicación $Tf = (f(e_k))_{k \in \mathbb{N}}$, $\forall f \in (\ell^1)'$. Como $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f(e_k)$,

entonces $|f(e_k)| \leq \|f\| \cdot \|e_k\| = \|f\|$, pues $\|e_k\| = 1$. En consecuencia, $\sup_k |f(e_k)| \leq \|f\|$ de donde $(f(e_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

- T es sobre: $\forall b = (\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty$, definimos $g : \ell^1 \rightarrow E$ como $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k \beta_k$ si $x = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^1$.

El funcional g es lineal y acotado, pues

$$|g(x)| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k \beta_k| \leq \sup_k |\beta_k| \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k| = \|x\|_1 \cdot \sup_k |\beta_k| \implies g \in (\ell^1)'.$$

Además, como $g(e_k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \delta_{kj} \beta_j = \beta_k$, $Tg = (g(e_k))_{k \in \mathbb{N}} = (\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} = b$.

- T es inyectiva: Si $Tf_1 = Tf_2$, entonces $f_1(e_k) = f_2(e_k)$, $\forall k$. Como $f_1(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k f_1(e_k)$ y $f_2(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} x_k f_2(e_k)$, entonces $f_1 = f_2$.

- T es isometría:

Por una parte, $\|Tf\|_\infty = \sup_k |f(e_k)| \leq \|f\|$ y de

$$|f(x)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f(e_k) \right| \leq \sup_k |f(e_k)| \cdot \sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k| = \|x\| \cdot \sup_k |f(e_k)|$$

(para probar la desigualdad se toman sumas parciales y, debido a la convergencia de la serie, calcular el límite), tenemos que $\|f\| \leq \sup_k |f(e_k)| = \|Tf\|$.

Así los espacios $(\ell^1)'$ y ℓ^∞ son isométricos.

3) El dual de ℓ^p es ℓ^q si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $(1 < p < \infty)$:

Una base de Schauder de ℓ^p es $e_k = (\delta_{kj})_{j=1}^\infty$.

$\forall x \in \ell^p$, $x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k e_k$. Si $f \in (\ell^p)'$, $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f(e_k)$. Definimos como antes $Tf = (f(e_k))_{k \in \mathbb{N}}$.

Para probar que la imagen de T está en ℓ^q , definimos para cada n , la sucesión

$$x^{(n)} = (\xi_k^{(n)})_{k=1}^\infty \text{ con } \xi_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|f(e_k)|^q}{f(e_k)} & \text{si } k \leq n \text{ y } f(e_k) \neq 0, \\ 0 & \text{si } k > n \text{ ó } f(e_k) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Entonces } f(x^{(n)}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \xi_k^{(n)} f(e_k) = \sum_{k=1}^n |f(e_k)|^q.$$

Como además,

$$\begin{aligned} f(x^{(n)}) &\leq \|f\| \cdot \|x^{(n)}\|_p = \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |\xi_k^{(n)}|^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^{pq-p} \right)^{1/p} = \|f\| \left(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^q \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

$$\text{resulta que } \left(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^q \right)^{1-\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^n |f(e_k)|^q \right)^{1/q} \leq \|f\|.$$

$$\text{Haciendo } n \rightarrow \infty, \left(\sum_{k=1}^\infty |f(e_k)|^q \right)^{1/q} \leq \|f\| \text{ de donde } (f(e_k))_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q.$$

T es sobre: Dado $b = (\beta_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^q$, podemos asociarle un funcional lineal y acotado g en ℓ^p , mediante $g(x) = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \beta_k$ con $x = (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^p$ (la acotación se deduce de la desigualdad de Hölder 2.2.a). Entonces $g \in (\ell^p)'$.

Se ve fácilmente que T es también inyectiva.

Por último veamos que la norma de f es la norma en ℓ^q de Tf :

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{N}} \alpha_k f(e_k) \right| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |\alpha_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)|^q \right)^{1/q} \\ &= \|x\| \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)|^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Tomando el supremo sobre los x de norma 1, sale que $\|f\| \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)|^q \right)^{1/q}$.

Como la otra desigualdad también es cierta, se deduce la igualdad $\|f\| = \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} |f(e_k)|^q \right)^{1/q}$, con lo que se establece el isomorfismo $f \mapsto (f(e_k))_{k \in \mathbb{N}}$ deseado.

Observación. Otros ejemplos se pueden obtener debido al hecho de que si X_0 es subespacio denso de X e Y es completo, entonces $L(X_0, Y) = L(X, Y)$, se deduce en particular que $X'_0 = X'$.

EJERCICIOS.

1. Sea $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Probar que si $f \in L^p$, $g \in L^q$, entonces $f \cdot g \in L^r$ y $\|f \cdot g\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$.

Resp.: Basta aplicar la desigualdad de Hölder a las funciones f^r y g^r , sabiendo que $1 = \frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r}$.

_____ $\diamond\diamond\diamond$ _____

2. Sea $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$. Probar que $g(x) = \frac{f(x)}{1+|x|} \in L^1(\mathbb{R})$ y que $\|g\|_1 \leq \left(\frac{2}{q-1}\right)^{1/q} \cdot \|f\|_p$.

Resp.: Aplicando la desigualdad de Hölder y resolviendo las integrales involucradas, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \cdot \frac{1}{1+|x|} dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1+|x|} \right)^q dx \right)^{1/q} \\ &= \|f\|_p \cdot \left[\int_{-\infty}^0 \frac{1}{(1-x)^q} dx + \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x)^q} dx \right]^{1/q} = \|f\|_p \cdot \left(\frac{2}{q-1} \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

_____ $\diamond\diamond\diamond$ _____

3. Probar que, en todo espacio normado, $\overline{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

Resp.: Como $B(x, r) \subset \overline{B}(x, r)$, entonces $\overline{B(x, r)} \subset \overline{\overline{B}(x, r)} = \overline{B}(x, r)$.

Recíprocamente, sabiendo que $\overline{B}(x, r) = B(x, r) \cup S(x, r)$, para probar que $\overline{B}(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$ basta ver que $S(x, r) \subset \overline{B(x, r)}$, es decir que si $y \in S(x, r)$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists z \in B(x, r) : d(y, z) < \varepsilon$.

Para ello consideramos un elemento $z = x + \lambda(y - x)$ y calculemos λ para que se verifique la tesis.

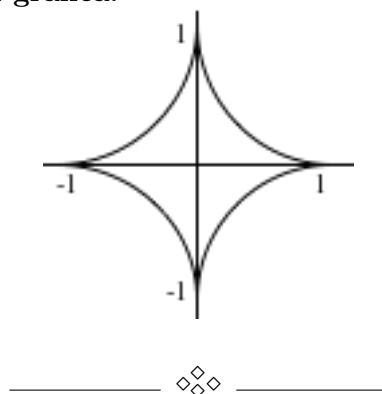
$$\begin{aligned} \|z - x\| &= \|\lambda(y - x)\| = |\lambda| \cdot \|y - x\| = |\lambda| \cdot r < r \iff |\lambda| < 1, \\ \|y - z\| &= \|y - x - \lambda y + \lambda x\| = |1 - \lambda| \cdot \|y - x\| = |1 - \lambda| \cdot r < \varepsilon \iff |1 - \lambda| < \varepsilon/r. \end{aligned}$$

De este modo, si suponemos $\varepsilon < r$, $0 < \varepsilon/r < 1$, tomando $1 - \lambda = \varepsilon/2r$, es $|1 - \lambda|r = \frac{\varepsilon}{2r} \cdot r = \varepsilon/2 < \varepsilon$. Además, como $\lambda = 1 - \frac{\varepsilon}{2r}$ y $\frac{\varepsilon}{2r} < 1$, entonces $|\lambda| < 1$.

Si fuera $\varepsilon \geq r$, tomamos $z = y + \frac{1}{2}(x - y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\|z - x\| &= \|y + \frac{1}{2}(x - y) - x\| = \frac{1}{2}\|y - x\| = r/2 < r \\ \|y - z\| &= \|\frac{1}{2}(x - y)\| = \frac{1}{2}\|(x - y)\| = r/2 < r \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Interpretación gráfica:



4. i) Caracterizar todas las normas sobre \mathbb{R} considerado como espacio vectorial real.
- ii) Idem sobre \mathbb{C} como espacio complejo.
- iii) Probar que \mathbb{C} puede tener otras normas considerado como espacio real.

Resp.: i) Sea $\|\cdot\|$ una norma. Si llamamos $\alpha = \|1\|$, entonces $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda\| = |\lambda| \cdot \|1\| = |\lambda| \cdot \alpha$.

Recíprocamente, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$, podemos definir $\|\lambda\|_\alpha = |\lambda| \cdot \alpha$ y es fácil comprobar que se trata de una norma.

ii) Análogo al anterior.

ii) Si definimos $\|z\| = |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$, es una norma en \mathbb{C} como espacio real, pero no coincide con las anteriores pues, como $\|1\| = 1$, entonces $\|1 + i\| = 2$ pero $\|1 + i\|_1 = 1 \cdot |1 + i| = \sqrt{2}$.



5. a) Probar que la métrica discreta en un espacio vectorial no trivial X no puede obtenerse de una norma.

b) Sea d una métrica sobre un espacio vectorial $X \neq \{0\}$ obtenida a partir de una norma. Si se define la aplicación d' como $d'(x, x) = 0$, $d'(x, y) = d(x, y) + 1$, probar que d' no puede obtenerse de una norma.

Resp.: a) Para que una métrica pueda obtenerse de una norma hace falta que $d(x + \alpha, y + \alpha) = d(x, y)$ y $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \cdot d(x, y)$.

Pero si elegimos $|\alpha| \neq 1$, $x \neq y$, entonces $d(x, y) = 1 = d(\alpha x, \alpha y)$ y no se cumple la segunda condición.

b) Si $|\alpha| \neq 1$,

$$\begin{aligned} d'(\alpha x, \alpha y) &= d(\alpha x, \alpha y) + 1 = |\alpha| \cdot d(x, y) + 1 \\ &= |\alpha|[d(x, y) + 1] + 1 - |\alpha| = |\alpha| \cdot d'(x, y) + 1 - |\alpha| \neq |\alpha| \cdot d'(x, y). \end{aligned}$$



6. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S_r = \{x \in X : \|x\| = r\}$ con $r > 0$. Probar que X es de Banach si y sólo si $\exists r$ tal que S_r es completo.

Resp.: a) Supongamos que X es de Banach y sea $r > 0$ arbitrario; entonces $\forall x \in \overline{S_r}$, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S_r : x_n \rightarrow x$.

Como $\|x_n\| = r$ y la norma es continua, $\lim_n \|x_n\| = \|\lim_n x_n\| = \|x\| = r$. Esto implica que S_r es cerrado y, en consecuencia, completo.

b) Sea $r_0 > 0$ tal que S_{r_0} es completo y sea $r > 0$ arbitrario.

Dada la sucesión de Cauchy $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S_r , sea $y_n = (r_0/r)x_n$; entonces $y_n \in S_{r_0}$ y además $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo que $\exists y \in S_{r_0}$ tal que $y = \lim_n y_n$.

Definimos $x = (r/r_0)y$; entonces $x \in S_r$ y $\|x_n - x\| = (r/r_0)\|y_n - y\| \rightarrow 0$. Por tanto, S_r es completo, $\forall r$.

Falta demostrar que toda sucesión de Cauchy en X es convergente.

Sea pues $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en X . Entonces, si $\lambda_n = \|x_n\|$, la sucesión $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy pues $|\lambda_n - \lambda_m| \leq \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$. Como en E toda sucesión de Cauchy es convergente, tenemos dos opciones:

Si $\lim_n \lambda_n = 0 \implies \lim_n \|x_n\| = 0 \implies \lim_n x_n = 0$.

Si $\lim_n \lambda_n \neq 0$, $\lambda_n \neq 0$, excepto para un número finito de índices. Si llamamos $y_n = rx_n/\lambda_n$, la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que está contenida en S_r , es de Cauchy, pues:

$$\|y_n - y_m\| = r \left\| \frac{x_n}{\lambda_n} - \frac{x_m}{\lambda_m} \right\| = r \frac{\|\lambda_m x_n - \lambda_n x_m\|}{|\lambda_n \lambda_m|}$$

y $\|\lambda_m x_n - \lambda_n x_m\| \leq |\lambda_m| \cdot \|x_n - x_m\| + |\lambda_m - \lambda_n| \cdot \|x_m\| \rightarrow 0$ (recordamos que toda sucesión de Cauchy está acotada). Por ser S_r completo, $\exists y \in S_r : y_n \rightarrow y$, de donde $x_n \rightarrow (\lambda/r)y$.



7. Se considera el conjunto

$$C_0(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua y } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$$

con la norma $\|f\| = \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)|$. Probar que es de Banach.

Resp.: La norma está bien definida pues, si $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x| > \delta \implies |f(x)| < \varepsilon \implies \max_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| = \max_{|x| \leq \delta} |f(x)|,$$

que existe por el teorema de Weierstrass.

Los axiomas de norma son evidentes.

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C_0(\mathbb{R}^n)$, converge uniformemente a una función continua f (como en el caso general). Veamos que $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \left\{ \begin{array}{ll} |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon/2 & \text{para } n > N(\varepsilon) \\ |f_n(x)| < \varepsilon/2 & \text{para } |x| > \delta(\varepsilon) \end{array} \right\} \implies |f(x)| < \varepsilon, \text{ para } |x| > \delta(\varepsilon).$$



8. Sea ϕ el conjunto formado por las sucesiones escalares de soporte finito. Probar que $(\phi, \|\cdot\|_p)$ con $p \geq 1$ es un espacio normado no completo.

Resp.: Al ser ϕ subespacio de l^p , es normado.

Para $p > 1$, consideramos la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \phi$ dada por:

$$\begin{aligned} y_1 &= (1, 0, \dots) \\ y_2 &= (1, 1/2, 0, \dots) \\ &\vdots \\ y_n &= (1, 1/2, \dots, 1/n, 0, \dots). \end{aligned}$$

Así,

$$\|y_{n+k} - y_n\|_p^p = \left\| (0, \dots, 0, \frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+k}, 0, \dots) \right\|_p^p = \sum_{i=1}^k \frac{1}{(n+i)^p} < \varepsilon$$

por ser el resto de una serie convergente.

Sin embargo, la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es convergente, pues

$$y_n \rightarrow (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots) \notin \phi.$$

En efecto, si llamamos $y = (\lambda_1, \dots, \lambda_N, 0, \dots)$ al límite de la sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y hacemos $n \geq N$:

$$\|y_n - y\|_p^p = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{k} - \lambda_k \right|^p + \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k|^p = \sum_{k=1}^n \left| \frac{1}{k} - \lambda_k \right|^p + 0.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} - \lambda_k \right|^p = 0 \implies \left| \frac{1}{k} - \lambda_k \right| = 0, \forall k \implies \lambda_k = \frac{1}{k}, \forall k,$$

y no puede ser que $y \in \phi$.

Si $p = 1$, basta elegir la sucesión $y_n = (1, 1/2^2, \dots, 1/n^2, 0, \dots)$, que converge a $y = (1, 1/2^2, \dots, 1/n^2, \dots)$, pero $y \notin \phi$.



9. En el espacio $C^1[0, 1]$ definimos $\|f\| = \sup_{x \in [0, 1]} (|f(x)| + |f'(x)|)$. Pro-

bar que $(C^1[0, 1], \|\cdot\|)$ es normado. ¿La norma anterior es equivalente a la norma $N(f) = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0, 1]} |f'(x)|$?

Resp.: Es inmediata la comprobación de los axiomas de norma en ambos casos.

Como $|f(x)| + |f'(x)| \leq \sup_x |f(x)| + \sup_x |f'(x)|$, entonces $\|f\| \leq N(f)$.

Además, de

$$|f(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq \|f\| \text{ y } |f'(x)| \leq |f(x)| + |f'(x)| \leq \|f\|,$$

se deduce que $|f(x)| + |f'(x)| \leq 2\|f\|$ lo que implica que $N(f) \leq 2\|f\|$.

Esto prueba que ambas normas son equivalentes.



10. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y S un subespacio de X . Probar:

- a) \overline{S} es subespacio de X .
- b) Si X es completo, \overline{S} es también completo.
- c) Si $S \neq X$, $\text{int } S = \emptyset$.

Resp.: a) Sean $x, y \in \overline{S}$, $\alpha, \beta \in E$. Entonces existen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S : x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, de donde $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ y $\alpha x_n + \beta y_n \rightarrow \alpha x + \beta y \in \overline{S}$.

b) Como \overline{S} es cerrado y X es completo, \overline{S} es completo.

c) Si fuera $\text{int } S \neq \emptyset$, $\exists a \in \text{int } S$. Por tanto, $\exists r > 0 : B(a, r) \subset S$.

Sea $x \in X$ arbitrario, $x \neq 0$, y elegimos $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 < t < r/\|x\|$.

Así elegido, es evidente que $z = a + tx \in B(a, r)$, de donde $z \in S$. Como $x = t^{-1}(z - a)$, entonces $x \in S$. Al ser x arbitrario, $X \subset S$, es decir $S = X$, lo que contradice la hipótesis.

Observación: Dicho conjunto se llama *conjunto fronterizo* (todos sus puntos son aislados). El último apartado prueba que S no es abierto. Además, si fuera cerrado, debe ser un conjunto nunca denso.



11. Sea $K \subset \mathbb{R}$ un compacto y $C(K) = \{f : K \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ continua}\}$.

- a) Probar que $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.
- b) Probar que $(C(K), \|\cdot\|_p)$ con $1 \leq p < \infty$ no es completo.

Resp.: a) Al ser f continua, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)| = \max_{x \in K} |f(x)|$.

Los axiomas de norma se comprueban de forma directa.

Para ver que el espacio es completo, consideremos una sucesión de Cauchy $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $C(K)$. Entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \|f_m - f_n\|_\infty < \varepsilon, \forall m, n > n_0.$$

Por tanto, $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon, \forall m, n > n_0, \forall x \in K$ y la sucesión $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en \mathbb{C} , con lo que existe $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ y la convergencia es uniforme. Esto indica además que f es continua en K .

Veamos que $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$:

Como

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \forall m, n > n_0,$$

es evidente que $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

b) Los axiomas de norma se deducen de los correspondientes en $L^p(K)$ con la medida de Lebesgue.

Para ver que no es completo, consideramos la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definida por:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 - 1/n \\ nx - n/2 + 1 & \text{si } 1/2 - 1/n \leq x \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } x \geq 1/2. \end{cases}$$

Es evidente que $\|f_n\|_p < \infty$. Además:

$$\|f_n - f_m\|_p^p = \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|^p dx \leq \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} |f_n(x)|^p dx \leq \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Sin embargo, $f_n \rightarrow \chi_{[1/2, 1]}$ que no es continua en $x = 1/2$.

Observación. Aunque $K \neq [0, 1]$, el proceso sería el siguiente: Por ser K compacto, $\exists [a, b] \subset K$; mediante un cambio de variable $x \mapsto \frac{x-a}{b-a}$, pasamos de $[a, b]$ a $[0, 1]$. La sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se define como antes y la prolongamos a todo K de modo que sea constante fuera de $[0, 1]$.



12. Probar que

$$C_c(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua con soporte compacto} \}$$

es un espacio vectorial normado con la norma del supremo, pero no es de Banach.

Resp.: El espacio es normado pues es un subconjunto de L^∞ . Para ver que no es completo, basta considerar la sucesión

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } x \in [-n, n] \\ e^{-n}(x + n + 1) & \text{si } x \in [-n - 1, -n] \\ -e^{-n}(x - n - 1) & \text{si } x \in [n, n + 1] \\ 0 & \text{en el resto,} \end{cases}$$

que es de Cauchy pero su límite $f(x) = e^{-|x|}$ no pertenece al espacio.



13. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ un isomorfismo algebraico. Si definimos $N : X \rightarrow E$ por $N(x) = \|Tx\|$, probar:

a) N es una norma.

b) N es equivalente a $\|\cdot\|$ si y sólo si T es homeomorfismo.

Resp.: a) $N(x) \geq 0$ pues $\|Tx\| \geq 0, \forall x \in X$.

$N(x) = 0 \iff \|Tx\| = 0 \iff Tx = 0 \iff x = 0$ (pues T es, en particular, inyectiva).

$$N(\lambda x) = \|T(\lambda x)\| = \|\lambda Tx\| = |\lambda| \cdot \|Tx\| = |\lambda| \cdot N(x).$$

$$N(x + y) = \|T(x + y)\| \leq \|Tx + Ty\| \leq \|Tx\| + \|Ty\| = N(x) + N(y).$$

b) N es equivalente a $\|\cdot\| \iff \exists m, M > 0 : m\|x\| \leq N(x) \leq M\|x\|$. Esto equivale a $\|x\| \leq \frac{1}{m}\|Tx\|$ y $\|Tx\| \leq M\|x\|$, condiciones que equivalen a la existencia y continuidad de T^{-1} y T , respectivamente, es decir, a que T es homeomorfismo.



14. Un subconjunto A de un espacio vectorial X es convexo si para cualesquiera $x, y \in A$, $\alpha \in (0, 1)$, se tiene que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in A$.

a) Probar que la bola unitaria cerrada $\overline{B}(0, 1)$ en un espacio normado es convexo.

b) Aplicando lo anterior, probar que $\varphi(x) = \left(\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|}\right)^2$ no define una norma en \mathbb{R}^2 .

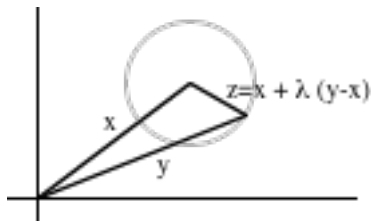
Resp.: a) Sean $x, y \in \overline{B}(0, 1)$. Entonces $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$. Si $\alpha \in (0, 1)$,

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y\| \leq |\alpha| \cdot \|x\| + |1 - \alpha| \cdot \|y\| \leq \alpha + (1 - \alpha) = 1.$$

Esto implica que $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \overline{B}(0, 1)$.

b) Veamos que $\overline{B}(0, 1)$ no es convexa en dicho espacio. Para ello observamos la gráfica de dicha bola, es decir el conjunto $\{(x_1, x_2) : (\sqrt{|x_1|} + \sqrt{|x_2|})^2 \leq 1\}$.

Haciendo $x = (1, 0)$, $y = (0, 1)$, $\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) = 1$. Sin embargo $x/2 + y/2 = (1/2, 1/2) \notin \overline{B}(0, 1)$ porque $\varphi(1/2, 1/2) = (\sqrt{1/2} + \sqrt{1/2})^2 = 2 > 1$.



15. Si X es un espacio vectorial, una aplicación $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ se llama seminorma si verifica

i) $p(x) \geq 0$, ii) $p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$, iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.

a) Probar que $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$.

b) Probar que p es una norma si verifica $p(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$.

c) Probar que $N = \{x \in X : p(x) = 0\}$ es un subespacio de X y la aplicación $\|\cdot\| : X/N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\|\hat{x}\| = p(x)$, donde $x \in \hat{x}$, es una norma.

Resp.: a) Haciendo $\alpha = 0$ en ii), resulta que $p(0) = 0$.

Como $x = x - y + y$, $p(x) \leq p(x - y) + p(y) \implies p(x) - p(y) \leq p(x - y)$.

Como $y = y - x + x$, $p(y) \leq p(y - x) + p(x) \implies p(y) - p(x) \leq p(y - x)$.

Además, $p(y - x) = p(-(x - y)) = |-1| \cdot p(x - y) = p(x - y)$. En definitiva, $-p(x - y) \leq p(x) - p(y) \leq p(x - y)$.

b) Es evidente.

c) Si $x, y \in N$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces

$$p(x) = p(y) = 0 \implies p(\alpha x + \beta y) \leq p(\alpha x) + p(\beta y) = |\alpha| \cdot p(x) + |\beta| \cdot p(y) = 0,$$

es decir $\alpha x + \beta y \in N$.

Veamos que $\|\hat{x}\| = p(x)$ es una norma.

- $\|\hat{x}\| \geq 0$ por i).

- $\|\hat{x}\| = 0 \implies p(x) = 0 \implies x \in N \implies \hat{x} = 0$.

Recíprocamente, si $\hat{x} = 0 \implies p(x) = 0 \implies \|\hat{x}\| = 0$.

- Como $\alpha \cdot \hat{x} = \widehat{\alpha x}$, $\|\alpha \hat{x}\| = p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x) = |\alpha| \cdot \|\hat{x}\|$.

- $\|\hat{x} + \hat{y}\| = \|\widehat{x + y}\| = p(x + y) \leq p(x) + p(y) = \|\hat{x}\| + \|\hat{y}\|$.

- $\|\cdot\|$ está bien definida:

Si $x, y \in \hat{x}$, $x - y \in N \implies p(x - y) = 0 \implies |p(x) - p(y)| \leq p(x - y) = 0$. Por tanto, $p(x) = p(y)$.



16. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y M un subespacio cerrado de X . En el espacio cociente X/M definimos

$$|||\hat{x}||| = \inf_{y \in M} \|x + y\|, \quad \forall \hat{x} \in X/M.$$

a) Probar que $|||\cdot|||$ define una norma en X/M .

b) Si X es de Banach, probar que $(X/M, |||\cdot|||)$ es de Banach.

c) Si M y X/M son de Banach, probar que X es de Banach.

d) Si X es separable, probar que X/M es separable.

Resp.: a) Observemos en primer lugar que $|||\hat{x}||| = d(x, M)$.

- De la observación anterior es claro que $|||\hat{x}||| \geq 0, \forall x \in X$.

- $|||\widehat{x}||| = 0 \iff d(x, M) = 0 \iff x \in \overline{M} \iff x \in M \iff \widehat{x} = \widehat{0}$.
- Debido a que $\|\alpha(x+y)\| = |\alpha| \cdot \|x+y\|$, $\forall y \in M$, tomando ínfimos y recordando que $\widehat{\alpha x} = \alpha \widehat{x}$, resulta:

$$|||\widehat{\alpha x}||| = |||\alpha \widehat{x}||| = \inf_{y \in M} \|\alpha(x+y)\| = \inf_{y \in M} |\alpha| \cdot \|x+y\| |\alpha| \cdot |||\widehat{x}|||.$$

- Debido a que

$$\|x + m_1 + y + m_2\| \leq \|x + m_1\| + \|y + m_2\|, \quad \forall m_1, m_2 \in M,$$

tomando ínfimos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \inf_{m_1, m_2 \in M} \|x + y + m_1 + m_2\| &\leq \inf_{m_1 \in M} \|x + m_1\| + \inf_{m_2 \in M} \|y + m_2\| \\ \implies |||\widehat{x+y}||| &\leq |||\widehat{x}||| + |||\widehat{y}|||. \end{aligned}$$

b) Sea $\{\widehat{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X/M . Entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|||\widehat{x_m} - \widehat{x_n}||| < \varepsilon$, $\forall m, n > n_0$. Por la definición de $|||\cdot|||$, $\exists y_k \in \widehat{x_k}$: $\|y_m - y_n\| < 2\varepsilon$ lo que implica que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X . Así pues, $\exists y \in X : y_n \rightarrow y$. Si llamamos \widehat{x} a la clase de equivalencia que contiene a y , como $|||\widehat{x_n} - \widehat{x}||| \leq \|y_n - y\|$, se deduce que $\widehat{x_n} \rightarrow \widehat{x}$.

c) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Como

$$|||\widehat{x_m} - \widehat{x_n}||| = |||\widehat{(x_m - x_n)}||| = d(x_m - x_n, M) \leq d(x_m - x_n, 0) = \|x_m - x_n\|,$$

también la sucesión $\{\widehat{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X/M . Por hipótesis, existe $\widehat{x} \in X/M$ tal que $\widehat{x_n} \rightarrow \widehat{x}$. Entonces,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : d(x_n - x, M) < \varepsilon/2, \quad \forall n > n_0,$$

de donde $\exists y \in M : d(x_n - x, y) < \varepsilon$, $\forall n > n_0$. En definitiva,

$$\|x_n - x - y\| < \varepsilon, \quad \forall n > n_0, \text{ es decir } x_n \rightarrow x + y.$$

d) Sea Y un subconjunto numerable y denso en X y llamamos \widehat{Y} al conjunto formado por las clases de equivalencia de los elementos de Y . Es evidente que \widehat{Y} es numerable. Además, si $\widehat{x} \in X/M$ es arbitrario, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in Y : \|x - y\| < \varepsilon$. Por ser M cerrado, $|||\widehat{x} - \widehat{y}||| \leq \|x - y\|$. Como $\widehat{y} \in \widehat{Y}$, deducimos que \widehat{Y} es denso en X/M .



17. Sea X un espacio normado.

a) Si $M \subset X$ es subespacio completo, probar que la aplicación canónica $\varphi : X \rightarrow X/M$ es continua y $\|\varphi\| = 1$.

b) Si $M \subset X$ es subespacio cerrado e $Y \subset X$ un subespacio de dimensión finita, probar que $M + Y$ es cerrado en X . **Resp.:** a)

Por definición, $\varphi(x) = \hat{x}$, de donde

$$\|\varphi(x)\| = \inf_{m \in M} \|x + m\| \leq \inf_{m \in M} (\|x\| + \|m\|) = \|x\|.$$

Esto implica que φ es continua y $\|\varphi\| \leq 1$.

Por otra parte, de la definición de ínfimo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists y \in \hat{x} : \|y\| < (1 + \varepsilon)\|\hat{x}\|$. Como $\varphi(y) = \hat{x}$,

$$\|y\| < (1 + \varepsilon)\|\varphi(y)\| \leq (1 + \varepsilon)\|\varphi\| \cdot \|y\| \implies \frac{1}{1 + \varepsilon} < \|\varphi\|, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

De lo anterior se deduce que $\|\varphi\| \geq 1$.

b) Supondremos que $M \cap Y = \{0\}$ pues, si $M \cap Y = M_1 \neq \{0\}$, basta definir $Y' = Y \setminus M_1$ de modo que $M + Y = M + Y'$ y $M \cap Y' = \{0\}$ (Y' también tiene dimensión finita).

(1) Probemos en primer lugar que $m_k + y_k \rightarrow 0 \implies m_k \rightarrow 0, y_k \rightarrow 0$:

Si fuera $y_k \not\rightarrow 0$, $\exists \{y_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}} \subset M : \|y_{k_j}\| = 1, m_{k_j} + y_{k_j} \rightarrow 0$.

Como la esfera unidad en Y es compacta, se puede extraer otra subsecuencia convergente $y_{k_j} \rightarrow y \in Y$ con $\|y\| = 1$. Esto implica que $m_{k_j} \rightarrow -y \in M \cap Y$ con lo que $y = 0$, lo que contradice la suposición inicial.

Así pues, $y_k \rightarrow 0$ y, por hipótesis, $m_k + y_k \rightarrow 0$, de donde $m_k \rightarrow 0$.

(2) Veamos ahora que $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está acotada si $\{m_k + y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge:

Si $\|y_k\| \rightarrow \infty$, como $\|m_k + y_k\| \leq c$, haciendo $m'_k = m_k/\|y_k\|$, $y'_k = y_k/\|y_k\|$, entonces

$$\|m'_k + y'_k\| = \frac{\|m_k + y_k\|}{\|y_k\|} \leq \frac{c}{\|y_k\|} \rightarrow 0, \quad \text{con } \|y'_k\| = 1$$

lo que contradice (1).

(3) Por último, si $\{m_k + y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a x , probemos que $x \in M + Y$:

Por ser Y compacto y la sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ acotada, existe una subsecuencia $\{y_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $y_{k_j} \rightarrow y \in Y$. Esto implica que $m_{k_j} \rightarrow x - y \in M$

(por ser M cerrado). Entonces $x \in M + Y$ pues $x = (x - y) + y$ y $x - y \in M$.



18. Sean $(X_1, \|\cdot\|_1), \dots, (X_n, \|\cdot\|_n)$ espacios normados arbitrarios y $X = X_1 \times \dots \times X_n$ el espacio producto.

a) Probar que X es normado si definimos $\|x\| = \left[\sum_{k=1}^n \|x_k\|_k^p \right]^{1/p}$, $1 \leq p < \infty$, o bien $\|x\| = \max_{1 \leq k \leq n} \|x_k\|_k$.

b) Si $\dim X_i = k_i < \infty$, $1 \leq i \leq n$, probar que $\dim X = \sum_{i=1}^n k_i$.

c) Probar que X_i son de Banach para todo i si y sólo si X es de Banach.

Resp.: a) De los axiomas de norma para los espacios X_i ($1 \leq i \leq n$) y la desigualdad de Minkowski se deducen los correspondientes axiomas para X .

b) Si $\{x_1^i, \dots, x_{k_i}^i\}$ es una base de X_i , para $i = 1, \dots, n$, es fácil comprobar que

$$\{(x_1^1, 0, \dots, 0), \dots, (x_{k_1}^1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, x_1^n), \dots, (0, \dots, 0, x_{k_n}^n)\}$$

es una base de X .

c) Supongamos que X_i son espacios de Banach, $\forall i = 1, \dots, n$, y sea $\{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Entonces, $\forall \varepsilon > 0$,

$$\|x^{(k)} - x^{(j)}\|^p = \sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i^{(k)} - x_i^{(j)}\|_i^p < \varepsilon^p \implies \|x_i^{(k)} - x_i^{(j)}\|_i < \varepsilon.$$

Esto implica que $\exists x_i : \|x_i^{(k)} - x_i\|_i < \varepsilon$, $\forall i$. (Análogamente se procede con la norma del máximo.)

Se define así un elemento $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ tal que

$$\|x^{(k)} - x\| = \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \|x_i^{(k)} - x_i\|_i^p \right)^{1/p} < \varepsilon \cdot n^{1/p}$$

lo que significa que $x^{(k)} \rightarrow x$ y X es de Banach.

Recíprocamente, si X es de Banach, sean $\{x_m^{(i)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ sucesiones de Cauchy en X_i , para $1 \leq i \leq n$. Es fácil comprobar entonces que

$\{(x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)})\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X en cada una de las normas. Por hipótesis, existe $(x_1, \dots, x_n) \in X$ tal que $\lim_m (x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)}) = (x_1, \dots, x_n)$. De aquí se deduce que $\lim_m x_m^{(i)} = x_i, \forall i = 1, \dots, n$.



19. Sean $(X_1, \|\cdot\|_1), (X_2, \|\cdot\|_2)$ espacios normados. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_1$ es una sucesión que converge a x en $(X_1, \|\cdot\|_1)$ y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L(X_1, X_2)$ una sucesión que converge a T en $(L(X_1, X_2), \|\cdot\|)$, probar que $T_n x_n \rightarrow Tx$ en $(X_2, \|\cdot\|_2)$.

Resp.: Por hipótesis, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \|x_n - x\|_1 < \varepsilon/\|T\|$ y $\|x_n\|_1 < M, \forall n > n_0$.

Por otra parte, $\exists n_1 : \|T_n - T\| < \varepsilon/M, \forall n > n_1$.

Entonces, $\forall n > \max\{n_0, n_1\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \|T_n x_n - Tx\|_2 &\leq \|T_n x_n - T x_n\|_2 + \|T x_n - Tx\|_2 \\ &= \|(T_n - T)x_n\|_2 + \|T(x_n - x)\|_2 \\ &\leq \|T_n - T\| \cdot \|x_n\|_1 + \|T\| \cdot \|x_n - x\|_1 < \varepsilon. \end{aligned}$$



20. Llamamos V al espacio de las funciones continuas en $[a, b]$ con valores complejos y consideramos los espacios normados $X_1 = (V, \|\cdot\|_\infty)$ y $X_2 = (V, \|\cdot\|_2)$. Probar que la aplicación identidad $I : X_1 \rightarrow X_2$ es continua, pero no es homeomorfismo.

Resp.: Debemos probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x - y\|_\infty < \delta \implies \|x - y\|_2 < \varepsilon$. Pero, de $\|x - y\|_\infty < \delta$, deducimos

$$|x(t) - y(t)| < \delta, \forall t \in [a, b] \implies \int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt < \delta^2 \cdot (b - a).$$

Basta pues hacer $\delta^2 \cdot (b - a) = \varepsilon^2$ para obtener $\|x - y\|_2 < \varepsilon$.

Para ver que la inversa no es continua, elegimos

$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1 - 1/n) \\ nt - n + 1 & \text{si } t \in [1 - 1/n, 1) \\ 1 & \text{si } t \in [1, 2] \end{cases}, \quad y_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [0, 1) \\ nt - n & \text{si } t \in [1, 1 + 1/n) \\ 1 & \text{si } t \in [1 + 1/n, 2] \end{cases}.$$

De este modo, $\max_{t \in [0,2]} |x_n(t) - y_n(t)| = 1$ pero $\int_0^2 |x_n(t) - y_n(t)|^2 dt = 2/3n$.

Si hacemos $\varepsilon < 1$ y elegimos n para que $2/3n < \delta$, para cualquier $\delta > 0$ resulta $\int_0^2 |x_n(t) - y_n(t)|^2 dt < \delta$ pero $\max_{t \in [0,2]} |x_n(t) - y_n(t)| > \varepsilon$.



21. Si $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal y acotado, probar que el núcleo $N(T)$ es cerrado pero la imagen $R(T)$ no es necesariamente cerrado.

Resp.: a) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset N(T)$ una sucesión convergente a x . Como T es continua, $Tx_n \rightarrow Tx$.

Pero $Tx_n = 0, \forall n \implies Tx = 0 \implies x \in N(T)$. Por tanto, $N(T)$ es cerrado.

b) Definimos el operador $T : \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ por

$$T(x_1, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n, \dots).$$

En este caso, $R(T) = \{y \in \ell^\infty : (y_1, 2y_2, \dots, ny_n, \dots) \in \ell^\infty\}$.

Elegimos la sucesión $y^{(k)} = (1, 1/\sqrt{2}, \dots, 1/\sqrt{k}, 0, \dots)$. Es claro que $y^{(k)} \in R(T), \forall k$. Sin embargo, $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{(k)} = (1, \dots, 1/\sqrt{k}, \dots) \notin R(T)$ porque la sucesión $(1, 2/\sqrt{2}, \dots, k/\sqrt{k}, \dots)$ no está acotada. Esto prueba que $R(T)$ no es cerrado.



22. Sean X e Y dos espacios normados sobre \mathbb{R} y $f : X \rightarrow Y$ una aplicación aditiva en X y acotada en la bola unidad de X . Probar que f es lineal y continua.

Resp.: Por la aditividad de f deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f(x+0) &= f(x) = f(x) + f(0) \implies f(0) = 0; \\ f(x + \overset{(n)}{.} x) &= f(nx) = f(x) + \overset{(n)}{.} f(x) = nf(x), \forall n \in \mathbb{N}; \\ 0 &= f(x-x) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x); \\ f(nx) &= nf(x), \forall n \in \mathbb{Z}; \\ q \cdot f\left(\frac{p}{q}x\right) &= f(px) = pf(x) \implies f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x), \forall p/q \in \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

Veamos que f es continua:

Por hipótesis, si $\|z\| \leq 1 \implies \|f(z)\| \leq k$.

Dados $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in X$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, si $\|x - x_0\| < \delta$.

Sabemos que,

$$\|x - x_0\| < 1/p \implies \|p(x - x_0)\| < 1 \implies \|f(p(x - x_0))\| < k,$$

es decir $\|f(x) - f(x_0)\| < k/p$. Por tanto, basta hacer $p > k/\varepsilon$, $p \in \mathbb{N}$, para que

$$\|x - x_0\| < 1/p \implies \|f(x) - f(x_0)\| < k/p < \varepsilon.$$

Por último veamos la linealidad de f :

Si $r \in \mathbb{R}$, sea $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de racionales tal que $q_n \rightarrow r$.

Por la continuidad de f ,

$$f(rx) = \lim_n f(q_n x) = \lim_n q_n f(x) = r f(x).$$



23. Sea $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en \mathbb{C} y $T : \ell^1 \rightarrow \ell^1$ el operador definido por $T(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Probar que $T \in L(\ell^1)$ y $\|T\| = \sup\{|\alpha_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

b) Probar que $N(T) = \{0\} \iff \alpha_n \neq 0, \forall n$.

c) Probar que si $N(T) = \{0\}$, entonces $R(T)$ es denso en ℓ^1 .

Resp.: a) Es evidente que T es lineal.

Para ver que T es acotada, supongamos que $|\alpha_n| \leq M, \forall n$. Entonces

$$\|Tx\| = \sum |\alpha_n x_n| \leq M \sum |x_n| = M\|x\| \implies \|T\| \leq \sup |\alpha_n|.$$

Si elegimos la sucesión $x^{(n)} = \{0, \overset{(n-1)}{\dots}, 0, 1, 0, \dots\}$, entonces

$$\|Tx^{(n)}\| = |\alpha_n| \implies \|T\| \geq |\alpha_n|, \forall n \implies \|T\| \geq \sup |\alpha_n|.$$

b) Si $N(T) = \{0\}$, $Tx^{(n)} = \alpha_n \neq 0, \forall n$.

Recíprocamente, si $\alpha_n \neq 0, \forall n$ y $x \in N(T)$, entonces $Tx = (\alpha_n x_n) = 0 \implies \alpha_n x_n = 0, \forall n \implies x_n = 0, \forall n \implies x = 0$.

c) Sea $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ y llamamos $x^{(n)} = (y_1/\alpha_1, 0, \dots, y_n/\alpha_n, 0, \dots)$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces $Tx^{(n)} = (y_1, \dots, y_n, 0, \dots)$ y $Tx^{(n)} \rightarrow y$.



24. Si $X = C[0, 1]$, se definen los operadores $S, T : X \rightarrow X$ como $Sx(s) = s \int_0^1 x(t) dt$, $Tx(s) = sx(s)$, respectivamente. ¿Conmutan S y T ? Encontrar $\|S\|, \|T\|, \|TS\|$ y $\|ST\|$.

Resp.: a) Por definición,

$$\begin{aligned}(STx)(s) &= S(Tx)(s) = S(sx(s)) = s \int_0^1 t \cdot x(t) dt, \\ (TSx)(s) &= T(Sx(s)) = T(s \int_0^1 x(t) dt) = s^2 \int_0^1 x(t) dt.\end{aligned}$$

Es evidente entonces que no conmutan.

b) Como $\|Sx\| = \max_{s \in [0, 1]} |s \int_0^1 x(t) dt| \leq |\int_0^1 x(t) dt| \leq \int_0^1 |x(t)| dt \leq \|x\|$, entonces $\|S\| \leq 1$.

Si elegimos en particular $x_0(s) = 1$, $(Sx_0)(s) = s$ y $\|Sx_0\| = 1$. En definitiva, $\|S\| = 1$.

Por otra parte, como $\|Tx\| = \max_{s \in [0, 1]} |sx(s)| \leq \max_{s \in [0, 1]} |x(s)| = \|x\|$, también $\|T\| \leq 1$.

Nuevamente, para $x_0(s) = 1$, $\|x_0\| = 1$ y $(Tx_0)(s) = s$, de donde $\|Tx_0\| = 1$. Así pues, $\|T\| = 1$.

c) Debido a que $\|TSx\| \leq \|T\| \cdot \|Sx\| \leq \|T\| \cdot \|S\| \cdot \|x\| = \|x\|$, entonces $\|TS\| \leq 1$.

Tomando $x_0(s) = 1$, $(TSx_0)(s) = s^2 \implies \|TSx_0\| = 1 \implies \|TS\| \geq 1$, lo que implica que $\|TS\| = 1$.

Por otra parte, si $\|x\| = 1$, entonces $|x(s)| \leq 1, \forall s \implies \int_0^1 tx(t) dt \leq \int_0^1 t dt = 1/2$, de donde $s \int_0^1 tx(t) dt \leq s/2$. Así pues $\|STx\| \leq 1/2$.

Ahora bien, si elegimos la función $x_0(s) = 1$, $(STx_0)(s) = s \int_0^1 tx_0(t) dt = s/2$ de modo que $\|STx_0\| = 1/2$.



25. Sea $X = C[0, 1]$ con la norma uniforme.

a) Si $T \in L(X)$ se define como $T(f)(t) = \frac{tf(t)}{1+t^2}, t \in [0, 1], f \in X$, encontrar $\|T\|$.

b) Si $S \in L(X)$ se define como $S(f)(t) = \int_0^1 K(t, s)f(s)ds$, donde K es continua, probar que S es acotado.

c) Fijado $t_0 \in [0, 1]$, se define $x^* \in X'$ por $x^*(f) = f(t_0)$. Encontrar $\|x^*\|$.

Resp.: a) Por definición,

$$\|Tf\| = \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{tf(t)}{1+t^2} \right| \leq \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \cdot \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{t}{1+t^2} \right| = \frac{1}{2} \cdot \|f\|,$$

porque la función $y = \frac{t}{1+t^2}$ es creciente en $[0, 1]$.

Para $f \equiv 1$ se verifica la igualdad. Por tanto, $\|T\| = 1/2$.

b) Nuevamente,

$$\begin{aligned} \|Sf\| &= \sup_{t \in [0,1]} \left| \int_0^1 K(t, s)f(s)ds \right| \\ &\leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 |K(t, s)| \cdot |f(s)|ds \leq \|f\| \cdot \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 |K(t, s)|ds. \end{aligned}$$

Esto implica que $\|S\| \leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^1 |K(t, s)|ds$.

c) $\|x^*\| = \sup_{\|f\|=1} |x^*(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(t_0)| = 1$.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

26. Se define el operador de Volterra $V : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ por $(Vf)(t) = \int_0^t f(s)ds$. Probar que V es lineal y acotado y que $\|V\| \leq 1/\sqrt{2}$.

Resp.: Por la linealidad de la integral, es evidente que V es lineal.

Además V es acotado. En efecto:

$$\begin{aligned} \|Vf\|^2 &= \int_0^1 |Vf(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^t f(s)ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^t |f(s)|ds \right)^2 dt \stackrel{(\text{desig. de Hölder})}{\leq} \int_0^1 \left[\int_0^t |f(s)|^2 ds \cdot \int_0^t 1^2 ds \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^t t \cdot |f(s)|^2 ds \right] dt = \int_0^1 \left(\int_s^1 t \cdot |f(s)|^2 dt \right) ds \\ &= \int_0^1 |f(s)|^2 \cdot (1/2 - s^2/2) ds \leq \frac{1}{2} \|f\|^2 \\ \implies \|Vf\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \|f\| \implies \|V\| \leq 1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$



27. Se define $\Phi : L^2[a, b] \rightarrow L^2[a, b]$ por $\Phi(f)(x) = xf(x)$, $\forall x \in [a, b]$.
Probar que Φ es lineal y acotado con $\|\Phi\| = \max\{|b|, |a|\}$.

Resp.: Que Φ es lineal es trivial. Además

$$\|\Phi(f)\|_2^2 = \int_a^b |xf(x)|^2 dx \leq (\max\{|b|, |a|\})^2 \cdot \|f\|_2^2 \implies \|\Phi\| \leq \max\{|b|, |a|\}.$$

Por otra parte, suponiendo que $|b| \geq |a|$ y llamando $f_n = \chi_{[b-\frac{b-a}{n}, b]}$,

$$\begin{aligned} \|\Phi(f_n)\|_2^2 &= \int_a^b |xf_n(x)|^2 dx = \int_a^b |x|^2 \cdot |f_n(x)|^2 dx = \int_{b-\frac{b-a}{n}}^b |x|^2 dx \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_{b-\frac{b-a}{n}}^b = \frac{b^3}{3} - \frac{(b-\frac{b-a}{n})^3}{3} = \left[b^2 - b \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{3n^2} \right] \cdot \frac{b-a}{n}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \|f_n\|_2^2 &= \int_a^b |f_n(x)|^2 dx = b - b + \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} \\ \implies \frac{\|\Phi(f_n)\|_2}{\|f_n\|_2} &= \sqrt{b^2 - b \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{(b-a)^2}{3n^2}} \rightarrow |b| \end{aligned}$$

si $n \rightarrow \infty$, de donde $\|\Phi\| \geq |b|$. En definitiva, $\|\Phi\| = |b| = \max\{|a|, |b|\}$.



28. Sean $(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ dos espacios normados sobre el mismo cuerpo y $T \in L(X, Y)$ una aplicación biyectiva, tal que $T^{-1} \in L(Y, X)$.

a) Probar que $\|T^{-1}\| \geq \|T\|^{-1}$. ¿Es cierta la igualdad?

b) Probar que X es de Banach si y sólo si Y es de Banach.

Resp.: a) En general, dados dos operadores $A \in L(X, Y)$ y $B \in L(Y, Z)$, debido a que

$$\|BAx\| \leq \|B\| \cdot \|Ax\| \leq \|B\| \cdot \|A\| \cdot \|x\|,$$

se deduce que $\|BA\| \leq \|B\| \cdot \|A\|$. En particular, $1 \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$, de lo que deducimos que $\|T\|^{-1} \leq \|T^{-1}\|$.

La igualdad no es cierta en general. Incluso en el caso finito-dimensional, si consideramos por ejemplo el operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $T(x_1, x_2) = (2x_1, x_2)$, entonces T es lineal, biyectiva y acotada. Además $T^{-1}(x_1, x_2) = (x_1/2, x_2)$. Por tanto, $\|T\| = 2$ y $\|T^{-1}\| = 1$, de modo que, en general, no es cierta la igualdad entre $\|T\|^{-1}$ y $\|T^{-1}\|$.

b) Supongamos que X es de Banach (análogamente se procede con la implicación recíproca). Si $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y , existe $x_n \in X$ tal que $Tx_n = y_n$, $\forall n$. Como

$$\|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\|,$$

entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X .

Por hipótesis, $\exists x \in X : x_n \rightarrow x$. Si llamamos $y = Tx$, es fácil probar que $y_n \rightarrow y$, con lo que Y es de Banach.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

29. Sea $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ definido por $y(t) = \int_0^t x(s)ds$. Encontrar el rango $R(T)$ y $T^{-1} : R(T) \rightarrow C[0, 1]$. ¿Es T^{-1} lineal y acotado?

Resp.: Por definición,

$$\begin{aligned} R(T) &= \{y \in C[0, 1] : \exists x \in C[0, 1], y(t) = \int_0^t x(s)ds\} \\ &= \{y \in C[0, 1] : y'(t) = x(t) \in C[0, 1], y(0) = 0\} = \{y \in C^1[0, 1] : y(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Si $y \in R(T)$, será $T^{-1}y = x$ cuando $Tx = y$, es decir cuando $y(t) = \int_0^t x(s)ds$ lo que implica que $y'(t) = x(t)$; en definitiva, $T^{-1}y = y'$.

Es claro que T^{-1} es lineal. Sin embargo no está acotado porque, si elegimos $f_n(x) = x^n$, entonces $\|f_n\| = \max_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = 1$ pero

$$\|T^{-1}f_n\| = \max_{x \in [0, 1]} |nx^{n-1}| = n \text{ y no existe ninguna constante } k \text{ para la que } \|T^{-1}f_n\| \leq k\|f_n\|.$$

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

30. En $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ sea M el subespacio de las funciones $f \in C[a, b]$ que tienen dos derivadas continuas y tales que $f(a) = f(b) = 0$. Se define el operador $T : M \rightarrow C[a, b]$ por $Tf = f''$. Probar que existe T^{-1} y que $R(T) = C[a, b]$.

Resp.: T es inyectiva, pues si

$$f'' = g'' \implies f'(x) = g'(x) + C \implies f(x) = g(x) + Cx + D.$$

Ahora bien, de $f(a) = g(a) = 0$ y $f(b) = g(b) = 0$, se deduce que $f = g$.

T es además sobre, pues si $g(x) = f''(x)$ con $f(a) = f(b) = 0$, entonces $f'(x) = \int_a^x g(t)dt + k_1$, de donde

$$f(x) = \int_a^x \left[\int_a^s g(t)dt \right] ds + k_1(x - a) + k_2;$$

eligiendo $k_1 = \frac{-1}{b-a} \int_a^b \left[\int_a^s g(t)dt \right] ds$ y $k_2 = 0$, deducimos que $f \in M$.



31. Sea $X = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$ provisto de la norma de la convergencia uniforme y sea $T : X \rightarrow X$ definido por $Tf(x) = \int_0^x f(s)ds$.

a) Probar que $T^n f(x) = \int_0^x K_n(x, s)f(s)ds$, donde $K_n(x, s)$ es una función continua en $[0, 1] \times [0, 1]$.

b) Calcular $\|T^n\|$ y la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} T^n$.

c) Resolver la ecuación $(I - T)f = g$ con $f \in X$.

Resp.: a) Si aplicamos el método de inducción, para $n = 1$, $K_1(t, u) = 1$, que es evidentemente continua.

Si suponemos la propiedad cierta para n , entonces

$$T^{n+1}x(t) = T(T^n x)(t) = \int_0^t T^n x(v)dv = \int_0^t \left[\int_0^v K_n(v, u)x(u)du \right] dv.$$

Intercambiando el orden de integración, obtenemos:

$$T^{n+1}x(t) = \int_0^t \left[\int_u^t K_n(v, u)x(u)dv \right] du = \int_0^t K_{n+1}(t, u)x(u)du,$$

donde definimos $K_{n+1}(t, u) = \int_u^t K_n(v, u)dv$. Para ver que es continua, calcularemos explícitamente K_n :

Claramente, $K_1(t, u) = 1$ y $K_2(t, u) = \int_u^t dv = t - u$; si suponemos que $K_n(t, u) = \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}$, veamos que $K_{n+1}(t, u) = \frac{(t-u)^n}{n!}$:

$$K_{n+1}(t, u) = \int_u^t \frac{(v-u)^{n-1}}{(n-1)!} dv = \frac{(t-u)^n}{n!}$$

la cual es evidentemente continua.

b) Como

$$|T^n x(t)| \leq \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} |x(u)| du \leq \|x\|_\infty \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} du \leq \frac{\|x\|_\infty}{n!},$$

entonces $\|T^n x\| \leq \|x\|_\infty / n!$ con lo que $\|T^n\| \leq (1/n!)$.

Por otra parte, como $T^n 1 = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} du = \frac{t^n}{n!}$, entonces $\|T^n 1\| = (1/n!)$. En definitiva, $\|T^n\| = (1/n!)$.

Esto indica además que la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|$ es convergente. Por ser $L(X)$ completo, es convergente también $\sum_{n \in \mathbb{N}} T^n$. Para calcular su suma, debido a que

$$\sum_{n=1}^p T^n x(t) = \int_0^t \left(1 + \frac{t-u}{1!} + \cdots + \frac{(t-u)^{p-1}}{(p-1)!}\right) x(u) du,$$

definimos $H : X \rightarrow X$ por $Hx(t) = \int_0^t e^{t-u} \cdot x(u) du$. Así definido, H es lineal y acotado pues

$$|Hx(t)| \leq e^t \int_0^t e^{-u} |x(u)| du \leq k \cdot \|x\|_\infty \text{ donde } k = e \int_0^1 e^{-u} du.$$

Además

$$\begin{aligned} \left| Hx(t) - \sum_{n=1}^p T^n x(t) \right| &\leq \int_0^t \left| e^{t-u} - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(t-u)^n}{n!} \right| \cdot |x(u)| du \\ &\leq \|x\|_\infty \cdot \sup_{u \in [0, t]} \left| e^{t-u} - \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(t-u)^n}{n!} \right|, \end{aligned}$$

de donde

$$\left\| Hx - \sum_{n=1}^p T^n x \right\|_\infty \leq \|x\|_\infty \cdot \sup_{\vartheta \in [0, 1]} \left| e^\vartheta - \sum_{n=0}^{p-1} \vartheta^n / n! \right|.$$

Ahora bien, como la serie $\sum_{n \geq 0} \vartheta^n / n!$ converge uniformemente a e^ϑ sobre cualquier compacto de \mathbb{R} , el supremo anterior tiende a cero cuando $p \rightarrow \infty$. Esto prueba que $\sum_{n \geq 1} T^n = H$.

c) Dado $g \in X$, como la serie $I + T + \cdots + T^n + \cdots$ converge en $L(X)$ a $I + H$ y, debido a que

$$(I - T)(I + T + \cdots + T^n) = (I + T + \cdots + T^n)(I - T) = I - T^{n+1} \rightarrow I,$$

se deduce que existe $(I - T)^{-1} = I + T + \cdots + T^n + \cdots = I + H$.

La ecuación dada tiene pues solución $x = (I - T)^{-1}g = (I + H)g$, de donde

$$x(t) = g(t) + e^t \cdot \int_0^t e^{-u} g(u) du.$$

_____ $\diamond\diamond$ _____

32. Probar que $f_1(x) = \max_{t \in [a,b]} x(t)$ y $f_2(x) = \min_{t \in [a,b]} x(t)$ definen funcionales en $C[a, b]$. ¿Son lineales? ¿Acotados?

Resp.: Por ser $x \in C[a, b]$, alcanza los valores máximo y mínimo, con lo que ambos funcionales están definidos. Ninguno de ellos es lineal: si hacemos por ejemplo $x_1(t) = t$ y $x_2(t) = 1 - t$ en $[0, 1]$, $f_1(x_1 + x_2) = \max(x_1(t) + x_2(t)) = 1$ pero $f_1(x_1) + f_1(x_2) = \max x_1(t) + \max x_2(t) = 1 + 1 = 2$.

Análogamente se comprueba con el mínimo.

_____ $\diamond\diamond$ _____

33. Sea X un espacio normado complejo y f un funcional lineal sobre X . Si llamamos $f_1(x) = \operatorname{Re} f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im} f(x)$, $\forall x \in X$, probar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

i) $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ es acotado.

ii) $f_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y acotado.

iii) $f_2 : X \rightarrow \mathbb{R}$ es lineal y acotado.

Resp.: Dado $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$, como

$$\left. \begin{aligned} f(ix) &= f_1(ix) + if_2(ix) \\ if(x) &= if_1(x) - f_2(x) \end{aligned} \right\} \implies f_1(ix) = -f_2(x), \quad f_2(ix) = f_1(x),$$

podemos escribir $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$, $\forall x \in X$.

i) \implies ii): Supongamos que f es acotado. Veamos que f_1 es lineal y acotado.

$$\begin{aligned} f_1(x+y) + if_2(x+y) &= f(x+y) = f(x) + f(y) \\ &= f_1(x) + if_2(x) + f_1(y) + if_2(y) \\ &= f_1(x) + f_1(y) + i[f_2(x) + f_2(y)]. \end{aligned}$$

Igualando la parte real se deduce que $f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y)$.

Análogamente se prueba que $f_1(\alpha x) = \alpha f_1(x)$.

$$|f_1(x)| \leq |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| \implies \|f_1\| \leq \|f\|.$$

ii) \implies iii): Como $f_2(x) = -f_1(ix)$, entonces

$$\begin{aligned} f_2(x+y) &= -f_1(ix+iy) = -f_1(ix) - f_1(iy) = f_2(x) + f_2(y), \quad \forall x, y \in X; \\ f_2(\alpha x) &= -f_1(i\alpha x) = -\alpha f_1(ix) = \alpha f_2(x); \\ |f_2(x)| &= |f_1(ix)| \leq \|f_1\| \cdot \|ix\| = \|f_1\| \cdot \|x\| \implies \|f_2\| \leq \|f_1\|. \end{aligned}$$

iii) \implies i): Si escribimos f de la forma $f(x) = f_2(ix) + if_2(x)$, resulta:

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f_2(ix) + if_2(x)| \leq |f_2(ix)| + |if_2(x)| \\ &\leq \|f_2\| \cdot \|x\| + \|f_2\| \cdot \|x\| \implies \|f\| \leq 2\|f_2\|. \end{aligned}$$



34. Sea $Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$ y $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $f(x) = \frac{x_1 - x_3}{2}$. Encontrar una extensión lineal \bar{f} de f a todo \mathbb{R}^3 tal que $\bar{f}(x_0) = k$ (k constante dada), con $x_0 = (1, 1, 1)$. ¿Es única tal \bar{f} ?

Resp.: Por hipótesis, $f(1, 0, 0) = 1/2$ y $f(0, 0, 1) = -1/2$.

Para que $\bar{f}(1, 1, 1) = k$, debe ser

$$\bar{f}(1, 1, 1) = \frac{1}{2} + \bar{f}(0, 1, 0) - \frac{1}{2} = \bar{f}(0, 1, 0) = k.$$

La extensión es única porque queda determinada la imagen de la base canónica.



35. En el espacio métrico $(\mathbb{R}^3, \|\cdot\|_1)$ consideramos el subespacio lineal $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 = x_3 = 0\}$ y definimos $f \in M'$ por $f(x) = x_1$. Encontrar dos extensiones diferentes de f a todo \mathbb{R}^3 con la misma norma de f .

Resp.: Por definición, M es el espacio generado por $u = (1, -1/2, 0)$.

Como $\|u\|_1 = 3/2$ y $f(u) = 1$, entonces, $\forall x \in M$ de la forma $x = \alpha \cdot u$,

$$f(x) = \alpha \text{ y } \|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \frac{|\alpha|}{(3/2)|\alpha|} = \frac{2}{3}.$$

Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de \mathbb{R}^3 y \tilde{f} una extensión de f .

Como $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 2/3$, en particular debe ser

$$|\tilde{f}(e_i)| \leq 2/3, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Como además $\tilde{f}(u) = f(u)$, tenemos que

$$1 = \tilde{f}(e_1 - e_2/2) = \tilde{f}(e_1) - (1/2)\tilde{f}(e_2). \quad (2)$$

De (1) y (2) se deduce que necesariamente $\tilde{f}(e_1) = 2/3$ y $\tilde{f}(e_2) = -2/3$.

Basta elegir arbitrariamente $\tilde{f}(e_3)$ tal que $|\tilde{f}(e_3)| \leq 2/3$ para que, dado cualquier $x \in \mathbb{R}^3$, con $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \tilde{f}(e_3)x_3; \\ |\tilde{f}(x)| &\leq \frac{2}{3}|x_1| + \frac{2}{3}|x_2| + |\tilde{f}(e_3)| \cdot |x_3| \leq \frac{2}{3}(|x_1| + |x_2| + |x_3|) = \frac{2}{3}\|x\|_1, \end{aligned}$$

de donde $\|\tilde{f}\| \leq 2/3$. Por ser extensión de f , $\|\tilde{f}\| \geq \|f\| = 2/3$. Esto implica que $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.



36. Sean $X, Y \neq \{0\}$ espacios normados con $\dim X = \infty$.

a) Probar que existe al menos un operador lineal no acotado $T : X \rightarrow Y$.

b) Probar que el espacio dual X' no coincide con el dual algebraico X^* .

Resp.: a) Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base de Hamel de X . Si definimos $Te_n = ne_n$, T es lineal. Además, como $\|Te_n\| = n\|e_n\|$, entonces $\|Te_n\|/\|e_n\| = n$ y $\exists n : \|Te_n\|/\|e_n\| > k, \forall k$ lo que implica que T no es acotado.

b) El operador definido por $Te_n = ne_n$ está en X^* por ser lineal, pero no está en X' por no ser acotado.



37. Sea X un espacio normado y M un subespacio cerrado de X . Si denotamos por $M^\perp = \{f \in X' : f(y) = 0, \forall y \in M\}$ al llamado conjunto anulador o polar de M , demostrar:

a) M^\perp es subespacio cerrado de X' .

b) M^\perp es isomorfo a $(X/M)'$.

Resp.: a) Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en M^\perp . Entonces para cualquier $x \in X$,

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| \rightarrow 0$$

con lo que $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $E(= \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$, lo que implica que $\exists \lambda \in E : f_n(x) \rightarrow \lambda$. Esto permite definir el funcional $f : X \rightarrow E$ por $f(x) = \lambda$. Es evidente que f es lineal. Además

- f es acotado pues $|f(x)| = |\lambda| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\| \cdot \|x\|$.
- $f_n \rightarrow f$ porque $\|f_n - f\| = \sup_{\|x\|=1} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.
- $f \in M^\perp$ porque $f(y) = \lim_n f_n(y) = 0, \forall y \in M$.

b) Definimos $T : (X/M)' \rightarrow M^\perp$ por $(Tf)(x) = f(\varphi(x))$, donde φ es la aplicación canónica (que envía a todo elemento la clase de equivalencia que lo contiene). Así definido, es evidente que T es lineal. Veamos que T es acotado:

$$|(Tf)(x)| = |f(\varphi(x))| \leq \|f\| \cdot \|\varphi(x)\| \leq \|f\| \cdot \|\varphi\| \cdot \|x\|.$$

Como $\|\varphi\| \leq 1$, entonces $\|Tf\| \leq \|f\|$, de donde $\|T\| \leq 1$.

Además, si $y \in M$, $(Tf)(y) = f(\varphi(y)) = f([0]) = 0$, es decir $Tf \in M^\perp$.

Falta comprobar que T es sobre. Para ello, a cada $g \in M^\perp$, le asociamos el funcional $f : X/M \rightarrow E$ definido por $f(\xi) = g(x)$, si $x \in \xi$. Debemos probar:

- f está bien definido pues si $x, x' \in \xi$, entonces

$$x - x' \in M \implies g(x - x') = 0 \implies g(x) = g(x').$$

- f es lineal (evidente).
- f es acotado:

$$|f(\xi)| = |g(x)| \leq \|g\| \cdot \|x\| \implies |f(\xi)| \leq \|g\| \cdot \inf_{x \in \xi} \|x\| = \|g\| \cdot \|\xi\| \implies \|f\| \leq \|g\|.$$

- $Tf = g$ (evidente).
- $\|T\| = 1$:

$$\|f\|_{(X/M)'} = \sup_{\xi \in X/M} |f(\xi)| \leq \sup_{x \in X} |f(\varphi(x))| = \sup_{x \in X} |(Tf)(x)| = \|Tf\|.$$



38. Sea $c_0 = \{a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{C}, a_n \rightarrow 0\}$.

a) Probar que c_0 es un espacio de Banach con la norma inducida por ℓ^∞ .

b) Demostrar que el dual de c_0 es ℓ^1 .

Resp.: a) c_0 es normado por ser subespacio de ℓ^∞ . Veamos que es cerrado:

Si $a \in \overline{c_0}$, $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset c_0 : a_n \rightarrow a$. Entonces

$$\|a_n - a\|_\infty = \sup_k |a_n^k - a^k| < \varepsilon, \forall n > N(\varepsilon) \implies |a_n^k - a^k| < \varepsilon, \forall k, \forall n > N(\varepsilon).$$

De este modo, $|a^k| \leq |a^k - a_n^k| + |a_n^k| < \varepsilon + \varepsilon$ porque $a_n \in c_0$, es decir $\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k = 0$. Esto prueba que $a \in c_0$.

b) Definimos $F : \ell^1 \rightarrow (c_0)'$ por $Ff = \tilde{f}$, donde $\tilde{f}(x) = \sum_{n \geq 1} f_n x_n$,

$\forall x \in c_0$.

- Eligiendo $x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$,

$$|\tilde{f}(x)| \leq \sum_{n=1}^N |f_n x_n| \leq \max |x_n| \cdot \sum_{n=1}^N |f_n|.$$

Haciendo $N \rightarrow \infty$, $|\tilde{f}(x)| \leq \|x\|_\infty \cdot \|f\|_1 \implies \|\tilde{f}\| \leq \|f\|_1 \implies \|F\| \leq 1$.

- F es isometría: Dado $\tilde{f} \in (c_0)'$, llamamos $f_n = \tilde{f}(e_n)$. Así, si $x = (x_1, \dots, x_N, 0, \dots)$, $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^N f_n x_n$. Como $f_n = e^{i\varphi_n} \cdot |f_n|$, definimos $g^{(N)} = (g_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$, donde $g_n^{(N)} = \begin{cases} e^{-i\varphi_n} & \text{si } 0 < n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N. \end{cases}$

Entonces:

$$|\tilde{f}(g^{(N)})| = \sum_{n=1}^N |f_n| \leq \|\tilde{f}\| \cdot \|g^{(N)}\|_\infty = \|\tilde{f}\| < \infty.$$

Esto implica que $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$ y $\|f\|_1 \leq \|\tilde{f}\| \implies \|F\| = 1$.

- F es sobre: Dado $\tilde{f} \in (c_0)'$, $\forall x \in c_0$, escribimos $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n$ con lo que $\tilde{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n \tilde{f}(e_n)$. Basta probar que $(\tilde{f}(e_n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1$,

es decir $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\tilde{f}(e_n)| < \infty$. Para ello tomamos: $x^{(N)} = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{f}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|} \cdot \tilde{f}(e_n) = \tilde{f}(x^{(N)}) \leq \|\tilde{f}\|$.

$$\sum_{n=1}^N |\tilde{f}(e_n)| = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{f}(e_n)}{|\tilde{f}(e_n)|} \cdot \tilde{f}(e_n) = \tilde{f}(x^{(N)}) \leq \|\tilde{f}\|.$$

Si hacemos $N \rightarrow \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\tilde{f}(e_n)| < \infty$.

TEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Construcción de espacios normados: espacio producto y espacio cociente ([CC], [So]).
2. Espacios de funciones continuas. Base de Schauder para $C[0, 1]$. Espacio dual de $C[a, b]$ ([KF]).
3. Espacio dual de $L^p(X, \mu)$ ([Ro]).
4. Ecuaciones integrales lineales ([Da], [KF]).
5. Cálculo diferencial en espacios normados: derivadas de Fréchet y Gâteaux ([KF], [LS]).

III. PRODUCTO INTERIOR Y ESPACIOS DE HILBERT

A fin de dotar a los espacios normados de una geometría, debemos definir un producto interior o escalar. Nos proponemos que el estudiante se familiarice con los espacios dotados de producto interior, conozca sus propiedades básicas y pueda aprovecharlas para poderlas aplicar tanto al estudio de las series de Fourier, los polinomios ortogonales y la teoría básica de operadores.

SECCIONES

1. Introducción histórica.
2. Definición y primeros ejemplos.
3. Propiedades del producto interior.
4. Conjuntos ortonormales.
5. Ortogonalización de polinomios.
6. Representación de funcionales en espacios de Hilbert.
7. Operador adjunto. Operadores autoadjuntos y unitarios.
8. Ejercicios.

1. INTRODUCCIÓN HISTÓRICA.

Ilustramos en esta primera sección cómo el estudio de las siguientes ecuaciones en derivadas parciales ha sido fundamental en el desarrollo de los espacios de Hilbert:

1) Ecuación del calor: $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (su solución corresponde a la temperatura $u(x, t)$ de un alambre en el instante t y en el punto x).

2) Ecuación de ondas: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (la solución $u(x, t)$ es ahora la altura de una onda en propagación para el instante t en un punto cuya proyección sobre el eje es x).

3) Ecuación de Laplace: $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho$ (ahora u es la energía potencial de un cuerpo y ρ es la densidad de masas).

Nos limitaremos a estudiar la ecuación del calor (análogamente se podría hacer con las otras ecuaciones). Para buscar sus soluciones, suponemos que u es de variables separadas, es decir de la forma $u(t, x) = \varphi(t)\xi(x)$. Entonces $u_t = \varphi'(t)\xi(x)$ y $u_{xx} = \varphi(t)\xi''(x)$, luego $\varphi'(t)\xi(x) = \varphi(t)\xi''(x)$, o bien $\varphi'(t)/\varphi(t) = \xi''(x)/\xi(x)$.

Como el primer miembro no depende de x y el segundo miembro no depende de t , deben ser constantes. Debemos resolver entonces las siguientes ecuaciones:

$$\varphi'(t)/\varphi(t) = k; \quad \xi''(x)/\xi(x) = p,$$

con k y p constantes.

La solución general de la primera ecuación es $\varphi(t) = ce^{kt}$ y de la segunda $\xi(x) = c_1 \cos(\delta x) + c_2 \sin(\delta x)$, donde $p = -\delta^2$ (si $p > 0$, δ es complejo).

Supongamos por simplificar que el alambre es circular y tiene longitud 2π . Esto hace que ξ sea periódica de período 2π , y que δ deba ser entero; resulta $\xi(x) = c_1 \cos(nx) + c_2 \sin(nx)$, con $n \in \mathbb{Z}$.

Como las soluciones de la ecuación del calor se obtienen haciendo $k = -n^2$, tenemos la siguiente familia de soluciones:

$$u_n(t, x) = e^{-n^2 t} \cos(nx), \quad v_n(t, x) = e^{-n^2 t} \sin(nx).$$

Además, cualquier combinación lineal finita de ellas

$$u(t, x) = \sum_{n=n_0}^{n_1} [a_n e^{-n^2 t} \cos(nx) + b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)]$$

es solución.

Fourier pensaba que toda solución puede escribirse como suma infinita de senos y cosenos (lo que lleva involucrado un problema de convergencia).

Por otra parte, cuando $t = 0$, obtenemos una función de una variable

$$u(0, x) = f(x) = \sum_{n=n_0}^{n_1} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)].$$

De acuerdo con esto, Fourier suponía también que toda función periódica se puede escribir como suma infinita de senos y cosenos, lo cual no es cierto puntualmente.

Otra forma de escribir las series anteriores se obtiene con las fórmulas $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$. Así

$$u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-n^2 t} \left[\left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{inx} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-inx} \right] = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{-n^2 t} e^{inx},$$

donde, para $t = 0$, tenemos $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx}$.

Aquí se plantean las siguientes preguntas:

1) ¿Las exponenciales trigonométricas serán base de algún espacio?

Esto permitiría obtener la función f cuando se conocen sus coeficientes respecto a dicha base.

2) ¿Cómo obtener los coeficientes c_n cuando la función f es conocida?

Para responder a esta pregunta, aplicamos las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{inx} dx &= \frac{1}{2\pi in} (e^{in2\pi} - 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{si } n \neq 0, \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-inx} dx &= \frac{1}{2\pi in} (e^{i(m-n)2\pi} - 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n \\ 0 & \text{si } m \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Con lo anterior tenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_0^{2\pi} e^{inx} dx \\ &= 2\pi c_0 \implies c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx; \\ \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} e^{-imx} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= 2\pi c_m \implies c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx. \end{aligned}$$

(Aquí se debe precisar en qué sentido converge la serie y cómo justificar el intercambio de la serie con la integral.)

2. DEFINICIÓN Y PRIMEROS EJEMPLOS.

Una clase importante de espacios normados permite generalizar muchas propiedades de la geometría del espacio ordinario que dependen de la noción de ángulo, especialmente las que se refieren a la perpendicularidad. Recordamos que, si $x, y \in \mathbb{R}^n$ y α es el ángulo que forman, se define el producto escalar por $\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \alpha$. Queremos obtener una noción abstracta de producto escalar en espacios normados generales que permita extender la fórmula anterior. Como es lógico pensar, los espacios con producto escalar son históricamente anteriores a los espacios normados generales y mantienen todavía muchas propiedades de los espacios euclídeos. La teoría fue iniciada por Hilbert (1912) en sus trabajos sobre ecuaciones integrales y todavía hoy en día estos espacios son básicos en numerosas aplicaciones del Análisis Funcional.

2.1.- Definición. Un *espacio con producto interior o pre-Hilbert* es un espacio vectorial X en el que se define una aplicación $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow E$ con las siguientes propiedades:

- (1) (aditiva) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;
- (2) (homogénea) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
- (3) (hermítica) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (4) (definida positiva) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

Toda aplicación que verifique (1), (2) y (3) se llama forma sesquilineal hermítica (ver definición 6.4).

Nota. Los axiomas anteriores fueron primero establecidos por von Neumann en 1930 en sus trabajos sobre fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica. En su definición se incluía también la separabilidad del espacio, axioma posteriormente eliminado cuando Löwing, Rellig y F. Riesz mostraron que en la práctica era innecesaria dicha restricción.

De los axiomas se deducen inmediatamente las siguientes propiedades:

- a) $\langle x, 0 \rangle = 0, \forall x \in X$.
- b) $\langle x, y \rangle = 0, \forall x \in X \implies y = 0$.

$$c) \langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y_1 \rangle + \bar{\beta} \langle x, y_2 \rangle.$$

Todo espacio pre-Hilbert es en particular normado, donde la norma asociada se define como $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, y por tanto es también métrico, con la distancia $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$. Esto motiva la siguiente definición:

Un *espacio de Hilbert* es un espacio pre-Hilbert completo (respecto a la métrica asociada). Por tanto, todo espacio de Hilbert es un espacio de Banach en el que se ha definido un producto interior.

Observación. El recíproco de la afirmación anterior no es cierto, es decir no todos los espacios normados son espacios pre-Hilbert. Daremos a continuación una caracterización de los espacios normados para los que se puede definir un producto escalar cuya norma asociada sea la dada. Dicha caracterización se basa en los siguientes hechos cuya demostración es inmediata.

2.2.- Proposición (identidad del paralelogramo). *Si $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio pre-Hilbert, la norma asociada verifica $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$.*

El siguiente resultado muestra cómo la norma asociada permite a su vez definir el producto interior.

2.3.- Proposición (identidad de polarización). *Sea $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio pre-Hilbert arbitrario.*

$$a) \text{ Si } X \text{ es real, } \langle x, y \rangle = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2].$$

$$b) \text{ Si } X \text{ es complejo,}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2], \\ \operatorname{Im} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4}[\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2]. \end{aligned}$$

Esta propiedad sugiere una forma de definir un producto interior a partir de una norma. Sin embargo, será necesaria la identidad del paralelogramo. El siguiente resultado proporciona una especie de recíproco de la proposición 2.2.

2.4.- Proposición. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Si se verifica la ley del paralelogramo 2.2, entonces existe un producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en X tal que $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$.*

Demostración. a) Caso real. Definimos $\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}[\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2]$.

Lo único que presenta dificultad es la linealidad del producto interior. Esta se demuestra en los siguientes pasos:

* $\langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x + z, 2y \rangle$. En particular, si $z = 0$, entonces $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x, 2y \rangle$, de donde $\langle u + v, y \rangle = \frac{1}{2} \langle u + v, 2y \rangle = \langle u, y \rangle + \langle v, y \rangle$.

* Como $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, también es aditiva en la segunda componente.

* Como $\langle nx, y \rangle = n \langle x, y \rangle$ si $n \in \mathbb{Z}$, se deduce que $\langle x/n, y \rangle = \frac{1}{n} \langle x, y \rangle$ y $\langle rx, y \rangle = r \langle x, y \rangle$ con $r \in \mathbb{Q}$. De la continuidad del producto interior (probado posteriormente en 3.3), se prueba que, para todo $a \in \mathbb{R}$, si $a = \lim_k r_k$ con $r_k \in \mathbb{Q}$, $\langle ax, y \rangle = \lim_k \langle r_k x, y \rangle = \lim_k r_k \langle x, y \rangle = a \langle x, y \rangle$.

b) Caso complejo. Definimos ahora $\langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle_R + i \langle x, iy \rangle_R$ donde

$$\langle x, y \rangle_R = \frac{1}{4} [\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2].$$

De lo anterior se deduce fácilmente la identidad de polarización 2.3 (b).

* Por cálculo directo se comprueba que $\langle x, ix \rangle_R = 0$ y $\langle ix, iy \rangle_R = \langle x, y \rangle_R$. La primera de las igualdades muestra que $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$ y que $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$.

La segunda identidad permite probar que $\langle ix, y \rangle = i \langle x, y \rangle$ y de aquí se deduce que $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$.

* La aditividad de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ en sus dos argumentos se deduce de la aditividad de $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$.

* Sólo queda probar que $\langle ax, y \rangle = a \langle x, y \rangle$, con $a \in \mathbb{C}$. Para ello, basta tener en cuenta la linealidad de $\langle \cdot, \cdot \rangle_R$ y que $\langle ix, y \rangle = i \langle x, y \rangle$. \diamond

2.5.- Ejemplos. 1) \mathbb{R}^n es un espacio de Hilbert si definimos el producto interior $\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$. Como la métrica asociada

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

es la euclídea, es ya sabido que el espacio es completo.

2) \mathbb{C}^n es un espacio de Hilbert con el producto $\langle x, y \rangle = x_1 \overline{y_1} + \dots + x_n \overline{y_n}$ porque nuevamente $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}$ da lugar a una norma.

3) $\ell^2 = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty\}$ es un espacio de Hilbert separable con el producto $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$.

La convergencia de la serie se deduce de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Este fue el primer ejemplo de espacio de Hilbert, estudiado por él mismo en 1912 y punto de partida para la definición axiomática dada por von Neumann.

4) $\ell^p = \{x = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$, con $p \neq 2$, no es un espacio pre-Hilbert pues, si tomamos $x = (1, 1, 0, \dots)$, $y = (1, -1, 0, \dots)$,

entonces $\|x\| = \|y\| = 2^{1/p}$, $\|x + y\| = \|x - y\| = 2$. Por tanto, no se verifica la ley del paralelogramo.

5) Si $L^2[a, b]$ es la completación del conjunto $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty\}$, es un espacio de Hilbert con el producto interior $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ como se prueba análogamente al ejemplo 3.

Otra forma de introducir el espacio $L^2[a, b]$ es a partir de ℓ^2 y corresponde al estudio de las series de Fourier:

Sea f una función con derivada continua en $[0, 2\pi]$ tal que $f(2\pi) = f(0)$. Entonces

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{n \geq 1} a_n \cos nx + \sum_{n \geq 1} b_n \operatorname{sen} nx,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx,$$

y la convergencia de la serie es uniforme (resultado clásico sobre series de Fourier).

Si escribimos

$$\phi_{2k}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \quad \phi_{2k+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} kx, \quad \phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},$$

las fórmulas anteriores quedan de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \phi_n(x), \quad \text{con } \alpha_n = \int_0^{2\pi} f(x) \phi_n(x) dx.$$

Una propiedad importante es que $\int_0^{2\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm}$ (la familia es ortonormal); además, la sucesión $\{\alpha_n\}_{n \geq 0}$ está en ℓ^2 .

En efecto, para cualquier $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=0}^N |\alpha_n|^2 = \sum_{n=0}^N \alpha_n \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \phi_n(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) f_N(x) dx,$$

donde definimos $f_N(x) = \sum_{n=0}^N \alpha_n \phi_n(x)$.

Como la serie de Fourier converge uniformemente a f , $f_N(x) \rightarrow f(x)$, resulta que $\sum_{n=0}^N |\alpha_n|^2 \rightarrow \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$ y podemos escribir además $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$.

Sin embargo el recíproco no es cierto, es decir dada una sucesión $\{\alpha_n\}_{n \geq 0} \in \ell^2$, no tiene por qué existir $f \in C^1[0, 2\pi]$ tal que $\sum_{n \geq 0} \alpha_n \phi_n(x) = f(x)$. La

f_n f

razón es que, como ℓ^2 es completo, toda sucesión de Cauchy converge a algún $\alpha \in \ell^2$. Sin embargo, existen sucesiones $\{f_n\}_{n \geq 0}$ de funciones contenidas en $C^1[0, 2\pi]$ tales que $\int_0^{2\pi} |f_i(x) - f_k(x)|^2 dx \rightarrow 0$, pero que no convergen a ninguna función en $C^1[0, 2\pi]$ como muestra el siguiente ejemplo:

Lo que se puede probar es que el límite f verifica $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$, es decir $f \in L^2[0, 2\pi]$.

6) En general, si E es un espacio de medida y μ una medida positiva sobre E , $L^2(E, \mu)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior $\langle f, g \rangle = \int_E f \bar{g} d\mu$.

7) El espacio $C[a, b]$ de las funciones continuas en $[a, b]$, con el producto $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \bar{g}(x) dx$, es un espacio pre-Hilbert pero no de Hilbert. Sin embargo la norma $\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ no proviene de ningún producto interior porque si tomamos $f(x) = 1, g(x) = \frac{x-a}{b-a}$, no se verifica la ley del paralelogramo.

3. PROPIEDADES DEL PRODUCTO INTERIOR.

En esta sección desarrollamos las propiedades básicas del producto interior. Además de los resultados en sí mismos, que serán útiles en la evolución posterior del curso, permitirán dar a conocer las técnicas más usuales de demostración.

3.1.- Proposición (desigualdad de Cauchy-Schwarz-Buniakowski). *Para cualesquiera $x, y \in X$, $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ y la igualdad se cumple si y sólo si x, y son linealmente dependientes.*

Demostración. Si $y = 0$, es evidente pues $\langle x, 0 \rangle = 0$.

Si $y \neq 0$,

$$0 \leq \|x - \alpha y\|^2 = \langle x - \alpha y, x - \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle - \bar{\alpha} \langle x, y \rangle - \alpha [\langle y, x \rangle - \bar{\alpha} \langle y, y \rangle].$$

Eligiendo $\bar{\alpha} = \frac{\langle y, x \rangle}{\langle y, y \rangle}$, queda

$$0 \leq \langle x, x \rangle - \frac{\langle y, x \rangle \langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle} = \|x\|^2 - \frac{|\langle x, y \rangle|^2}{\|y\|^2}.$$

La igualdad se cumple cuando $0 = \|x - \alpha y\|^2$, es decir si $x = \alpha y$. \diamond

Consecuencias de la propiedad anterior son las siguientes.

3.2.- Proposición (desigualdad triangular). Para cualesquiera $x, y \in X$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ y la igualdad se cumple si y sólo si $y = 0$ ó $x = cy$ ($c \geq 0$).

Demostración. Por definición, es evidente que

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.\end{aligned}$$

La igualdad es cierta si y sólo si $2 \operatorname{Re} \langle x, y \rangle = 2\|x\| \cdot \|y\|$. En particular, $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\|$ lo que implica dependencia lineal $x = cy$. Además $\operatorname{Im} \langle x, y \rangle = 0$ y $\operatorname{Re} \langle x, y \rangle \geq 0 \implies 0 \leq \langle x, y \rangle = \langle cy, y \rangle = c\|y\|^2 \implies c \geq 0$.

◇

3.3.- Proposición (continuidad del producto interior). Si $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, entonces $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$. Análogamente, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son sucesiones de Cauchy en X , entonces $(\langle x_n, y_n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en E .

Demostración. En la diferencia $|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle|$ sumamos y restamos $\langle x_n, y \rangle$. Así:

$$|\langle x_n, y_n \rangle - \langle x, y \rangle| \leq |\langle x_n, y_n - y \rangle| + |\langle x - x_n, y \rangle| \leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x - x_n\| \cdot \|y\| \rightarrow 0.$$

Basta aplicar la hipótesis para deducir que $\langle x_n, y_n \rangle \rightarrow \langle x, y \rangle$. ◇

Sugerido por la noción de perpendicularidad en espacios euclídeos se puede definir el siguiente concepto.

3.4.- Definición. Dos elementos x, y de $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ son *ortogonales*, y escribimos $x \perp y$, cuando $\langle x, y \rangle = 0$. También, dos conjuntos $A, B \subset X$ son *ortogonales* si $x \perp y$, $\forall x \in A, y \in B$. Dado un subconjunto $A \subset X$, el *complemento ortogonal* de A es el conjunto

$$A^\perp = \{x \in X : x \perp A\}.$$

3.5.- Proposición (teorema de Pitágoras). Si $x \perp y$, $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

La demostración es directa.

3.6.- Corolario. Si A es cualquier subconjunto de X , A^\perp es subespacio cerrado de X .

Aplicación. Veremos a continuación que todo espacio pre-Hilbert puede ser completado y la completación será única salvo isomorfismos, donde un *isomorfismo entre espacios pre-Hilbert* es una aplicación lineal $U : X \rightarrow Y$

biyectiva y tal que $\langle Ux_1, Ux_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$, $\forall x_1, x_2 \in X$ (en particular U es una isometría pues preserva las distancias).

El siguiente teorema motiva el nombre de espacios pre-Hilbert a los que tienen definido un producto interior y no son completos.

3.7.- Teorema (compleción). *Dado un espacio pre-Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, existe un espacio de Hilbert H y un isomorfismo $A : X \rightarrow W$ donde W es denso en H . Además el espacio H es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Por la teoría de espacios de Banach (capítulo II, teorema 4.6), existe un espacio H de Banach y una isometría $A : X \rightarrow W$ con W denso en H . Por la continuidad de A , A es también isomorfismo de X sobre W , pensados como espacios normados. Por la proposición 3.3, se puede definir en H un producto interior $\langle x, y \rangle = \lim \langle x_n, y_n \rangle$ donde $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in x$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in y$ (recordemos que x e y son clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy en W tales que $\|x_n - x'_n\| \rightarrow 0$). La norma asociada a este producto es $\|x\|_N = \langle x, x \rangle^{1/2}$, $\forall x \in H$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in x$, podemos poner $\|x\|_N = \lim_n \langle x_n, x_n \rangle^{1/2} = \lim_n \|x_n\| = \|x\|$ y coinciden ambas normas, por lo que H es un espacio de Hilbert. Teniendo en cuenta la identidad de polarización, vemos que A es isomorfismo de X en W pensados como espacios pre-Hilbert.

El mismo teorema 4.6 también garantiza que H es único salvo isometrías.

◇

El siguiente resultado también es consecuencia de su análogo en espacios normados.

3.8.- Teorema. *Sea H un espacio de Hilbert e Y un subespacio de H .*

- a) Y es completo si y sólo si Y es cerrado en H .*
- b) Si Y es de dimensión finita, entonces Y es completo.*
- c) Si H es separable, Y también. Más general, todo subconjunto de un espacio pre-Hilbert separable es separable.*

Destacaremos sobre los demás el siguiente teorema de proyección, que será el punto de partida en el problema de la descomposición espectral de un espacio de Hilbert, problema que estudiaremos posteriormente con toda generalidad.

3.9.- Teorema (proyección). *Sea X un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de X . Dado cualquier elemento $x \in X$, si llamamos d a la distancia de x a M , $d = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$, existe un único elemento $y \in M$ tal que $\|y - x\| = d$. Además $(x - y) \perp M$.*

Demostración. Como $d = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$, existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en M tal que $\|y_n - x\| \rightarrow d$. Si aplicamos la regla del paralelogramo a

$y_n - x$, $y_m - x$, resulta:

$$\|y_n + y_m - 2x\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2.$$

Como $\|y_n + y_m - 2x\|^2 = 4\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\|^2$ y $\frac{y_n + y_m}{2} \in M$, entonces $\|\frac{y_n + y_m}{2} - x\| \geq d$.

La igualdad anterior queda ahora $\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\|y_n - x\|^2 + 2\|y_m - x\|^2 - 4d^2$.

Tomando el límite cuando $n, m \rightarrow \infty$, se obtiene que $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$.

Así se prueba que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en M por lo que existe $y \in M$ tal que $y_n \rightarrow y$. Entonces $d = \lim_n \|y_n - x\| = \|\lim_n y_n - x\| = \|y - x\|$.

Dicho elemento es además único, porque si $y, y_0 \in M$ verifican $\|y - x\| = \|y_0 - x\| = d$, entonces por la ley del paralelogramo:

$$\begin{aligned} \|y - y_0\|^2 &= \|(y - x) - (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2\|y - x\|^2 + 2\|y_0 - x\|^2 - \|(y - x) + (y_0 - x)\|^2 \\ &= 2d^2 + 2d^2 - 4\|1/2(y + y_0) - x\|^2 \leq 4d^2 - 4d^2 = 0 \implies y = y_0. \end{aligned}$$

El elemento $z = x - y$ es ortogonal a M porque, en caso contrario, existiría $y_1 \in M$, $y_1 \neq 0$, tal que $\langle z, y_1 \rangle = \beta \neq 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \|z - \alpha y_1\|^2 &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, y_1 \rangle - \alpha [\langle y_1, z \rangle - \bar{\alpha} \langle y_1, y_1 \rangle] \\ &= \langle z, z \rangle - \bar{\alpha} \langle z, y_1 \rangle = \|z\|^2 - \frac{|\beta|^2}{\|y_1\|^2} < d^2 \end{aligned}$$

si $\bar{\alpha} = \frac{\langle y_1, z \rangle}{\langle y_1, y_1 \rangle}$ pues $\|z\| = d$.

Pero esto es imposible porque $z - \alpha y_1 = x - (y + \alpha y_1)$; de aquí concluimos que $\|z - \alpha y_1\| \geq d$. \diamond

El teorema anterior también es cierto si M es un subconjunto de X no vacío, convexo y completo.

El problema de existencia puede no tener solución si M no es completo (basta considerar un intervalo abierto M de \mathbb{R} y un punto cualquiera $x \in \mathbb{R}^2$, $x \notin M$). La unicidad puede fallar en el caso de no convexidad como se ve en el siguiente ejemplo: $X = \mathbb{R}^2$, $M = \{(a, 0) : a \in [1, 2] \cup [3, 4]\}$, $x = (3/2, 1)$.

Las primeras consecuencias ya proporcionan resultados interesantes, como los siguientes.

3.10.- Corolario. Sean X un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de X . Entonces $X = M \oplus M^\perp$.

Demostración. $\forall x \in X, \exists y \in M : \|y - x\| = d$. Además si $z = x - y$, entonces $z \in M^\perp$, con lo que $x = y + z$.

Si fuera $x = y + z = y_1 + z_1$, entonces $y - y_1 = z_1 - z$, pero $y - y_1 \in M$ y $z_1 - z \in M^\perp$.

Sabiendo que M^\perp es subespacio de X , resulta que $y - y_1 = z - z_1 = 0$.
 \diamond

Un contraejemplo de lo anterior cuando X no es de Hilbert se puede encontrar en el ejercicio 10 al final del capítulo.

3.11.- Corolario. Si M es subespacio cerrado de X , entonces $M = M^{\perp\perp}$.

Demostración. Es evidente que $M \subset M^{\perp\perp}$.

Recíprocamente, si $x \in M^{\perp\perp}$, existen dos elementos $y \in M \subset M^{\perp\perp}$, $z \in M^\perp$ tales que $x = y + z$. Entonces $z = x - y \in M^{\perp\perp} \cap M^\perp = \{0\}$. Esto implica que $x = y \in M$.
 \diamond

Otra consecuencia del teorema de proyección, que veremos posteriormente, será el teorema de representación de Riesz, el cual permite identificar un espacio de Hilbert con su dual. El nombre dado al teorema viene motivado por la siguiente definición.

3.12.- Definición. Si $X = M \oplus M^\perp$, la aplicación $P : X \rightarrow X$ definida por $Px = y$ si $x = y + z$, $z \in M^\perp$, se llama *proyección ortogonal* de X sobre M . Así definida, P es lineal y acotado, idempotente ($P^2 = P$), siendo $M = P(X)$ y $M^\perp = N(P)$.

Análogamente, se puede definir $P' : X \rightarrow M^\perp$ como la proyección ortogonal sobre M^\perp con las mismas propiedades que la anterior (recordamos que $M^{\perp\perp} = M$). Además $P' = I - P$.

Esta definición generaliza el concepto de proyección en espacios vectoriales (donde se sabe que toda aplicación idempotente $E : X \rightarrow X$ determina una descomposición en suma directa $X = M \oplus N$ donde $M = \{x \in X : Ex = x\}$ y $N = \{x \in X : Ex = 0\}$ y, recíprocamente, dada la descomposición $x = M \oplus N$, la aplicación $Ex = y$, si $x = y + z$, con $y \in M$, $z \in N$ es idempotente) y será el punto de partida para la representación espectral de operadores en espacios de Hilbert (ver algunas propiedades de las proyecciones en los problemas al final del capítulo).

4. CONJUNTOS ORTONORMALES.

En esta sección vamos a representar todo elemento de un espacio de Hilbert como combinación lineal (que incluso puede ser no numerable) de elementos de un conjunto ortonormal completo, concepto que definiremos posteriormente. Los coeficientes de dicha combinación lineal se llamarán coeficientes de Fourier del elemento dado. Deduiremos el lema de Riemann-Lebesgue, que establece las condiciones para que exista una función en $L^2[0, 2\pi]$ cuyos coeficientes de Fourier respecto al conjunto ortonormal $\{(1/\sqrt{2\pi})e^{int} : n \in \mathbb{Z}\}$ sean dados, mediante el teorema de Riesz-Fischer.

4.1.- Definición. Dado un espacio X pre-Hilbert, un *conjunto ortogonal* M de X es un subconjunto $M \subset X$, tal que $\forall x, y \in M, x \neq y, \langle x, y \rangle = 0$. M es un *conjunto ortonormal* si además de lo anterior, $\langle x, x \rangle = 1, \forall x \in M$.

El teorema de Pitágoras se puede generalizar a conjuntos ortogonales, así: si $\{x_1, \dots, x_n\}$ es ortogonal, entonces $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$. Además, si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es un conjunto ortonormal, $\|\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$.

4.2.- Ejemplos. 1) En \mathbb{R}^n , la base canónica $\{e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^n : i = 1, \dots, n\}$ es ortonormal.

2) En ℓ^2 , la familia $\{e_i = (\delta_{ij})_{j=1}^\infty : i = 1, \dots, n\}$ es ortonormal.

3) En $C[0, 2\pi]$ sobre \mathbb{R} , con $\langle x, y \rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt$, la sucesión $u_n(t) = \cos nt$ ($n \geq 0$) es ortogonal y la sucesión $e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, e_n(t) = \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}$ ($n \geq 1$) es ortonormal.

4) La familia $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \right\}_{n=-\infty}^\infty$ es un sistema ortonormal en $L^2[-\pi, \pi]$.

Es fácil probar que todo conjunto ortogonal es linealmente independiente y, aunque el recíproco no es cierto, el método de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir un conjunto ortonormal a partir de uno linealmente independiente de manera que generen el mismo subespacio. La importancia de dicho proceso estriba en que los conjuntos ortonormales permiten de forma más fácil la determinación de los coeficientes en cualquier combinación lineal que los conjuntos que son simplemente linealmente independientes.

Un primer resultado relacionado con el cardinal de los conjuntos ortonormales es el siguiente:

4.3.- Teorema. Si X es un espacio pre-Hilbert separable, todo conjunto ortonormal A es finito o numerable.

Demostración. Si $x, y \in A$, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \|y\|^2 = 2$ de donde $\|x - y\| = \sqrt{2}$.

Por ser X separable, existe $M \subset X$ numerable tal que $\overline{M} = X$. Para cualesquiera $x, y \in A$, existen $b, b' \in M$ tales que $b \in B(x, \sqrt{2}/2), b' \in B(y, \sqrt{2}/2)$ y por lo tanto, $b \neq b'$.

Si A no fuera numerable, podríamos encontrar una colección no numerable de elementos de M , cada uno de ellos en una bola $B(x, \sqrt{2}/2)$ con $x \in A$ (y por tanto distintos entre sí), lo cual contradice el hecho de que M es numerable. \diamond

Para establecer los resultados generales de esta sección, definiremos el siguiente concepto.

4.4.- Definición. Dada una familia arbitraria I de índices y un conjunto $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ en un espacio normado X , se dice que $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$ cuando $x = \sup\{\sum_{\alpha \in J} x_\alpha : J \subset I, J \text{ finito}\}$ o bien, cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists J_0 \subset I \text{ finito} : \left\| x - \sum_{\alpha \in J} x_\alpha \right\| < \varepsilon, \forall J \supset J_0 \text{ finito}.$$

Esta noción es similar a la de convergencia incondicional de números reales pues la convergencia es bastante fuerte para garantizar que ningún reagrupamiento de los términos tendrá efecto sobre la misma.

De la definición se deducen las siguientes propiedades:

4.5.- Proposición. a) Si $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$ y $\beta \in E$, entonces $\sum_{\alpha \in I} \beta x_\alpha = \beta x$.

b) Si $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$ y $\sum_{\alpha \in I} y_\alpha = y$, entonces $\sum_{\alpha \in I} (x_\alpha + y_\alpha) = x + y$.

c) Si $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha = x$, entonces $x_\alpha = 0$ excepto para un conjunto numerable.

Demostración. Los apartados a) y b) son evidentes.

Para probar c), sea $\varepsilon_n = 1/n$; existe H_n tal que $\forall J \supset H_n, J \text{ finito}$, se tiene que $\|\sum_{\alpha \in J} x_\alpha - x\| < \varepsilon_n/2$. Consideramos un conjunto J_0 finito tal que $J_0 \cap H_n = \emptyset$, para todo n ; resulta así que

$$\left\| \sum_{\alpha \in J_0} x_\alpha \right\| = \left\| \sum_{\alpha \in J_0 \cup H_n} x_\alpha - \sum_{\alpha \in H_n} x_\alpha \right\| \leq \left\| x - \sum_{\alpha \in J_0 \cup H_n} x_\alpha \right\| + \left\| x - \sum_{\alpha \in H_n} x_\alpha \right\| < 1/n.$$

Si tomamos el conjunto numerable $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$ y cualquier índice α no contenido en el conjunto, de lo anterior se deduce que $\|x_\alpha\| < 1/n, \forall n$, es decir $x_\alpha = 0$, para cualquier $\alpha \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$. \diamond

Con esta notación probamos ahora la desigualdad de Bessel.

4.6.- Teorema. Sea X un espacio pre-Hilbert, A un conjunto ortonormal de X , $y \in X$ arbitrario. Entonces:

a) (Desigualdad de Bessel)

$$\forall x_1, \dots, x_n \in A : \sum_{i=1}^n |\langle y, x_i \rangle|^2 \leq \|y\|^2.$$

Los elementos $\langle y, x_i \rangle$ se llaman *coeficientes de Fourier* de y respecto del conjunto ortonormal $\{x_i\}_{i=1}^n$.

b) El conjunto $J = \{x \in A : \langle y, x \rangle \neq 0\}$ es numerable.

c) $\forall z \in X : \sum_{x \in A} |\langle y, x \rangle \overline{\langle z, x \rangle}| \leq \|y\| \cdot \|z\|$.

Demostración. a) Llamamos $\alpha_i = \langle y, x_i \rangle$. De este modo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle y - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, y - \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \rangle \\ &= \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, y \rangle - \sum_{i=1}^n \overline{\alpha_i} \langle y, x_i \rangle + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha_j} \langle x_i, x_j \rangle = \|y\|^2 - \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

Esto implica que $\|y\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\langle y, x_i \rangle|^2$.

De lo anterior se deduce que la igualdad es también válida si n es infinito.

b) Llamamos $J_n = \{x \in A : |\langle y, x \rangle| \geq 1/n\}$ y elegimos $x_1, \dots, x_m \in J_n$. Por a),

$$\|y\|^2 \geq \sum_{i=1}^m |\langle y, x_i \rangle|^2 \geq m \cdot \frac{1}{n^2} \implies m \leq n^2 \|y\|^2 < \infty,$$

es decir J_n es finito.

Como $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ es unión numerable de conjuntos finitos, es numerable.

c) Por las desigualdades de Hölder y de Bessel, para cualesquiera $x_1, \dots, x_n \in A$ tenemos

$$\sum_{i=1}^n |\langle y, x_i \rangle \overline{\langle z, x_i \rangle}| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\langle y, x_i \rangle|^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{i=1}^n |\langle z, x_i \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|y\| \cdot \|z\|.$$

Como $\langle y, x_i \rangle$ y $\langle z, x_i \rangle$ son cero excepto para un conjunto numerable $\{x_i\} \subset A$, entonces es absolutamente convergente la serie $\sum_{x \in A} |\langle y, x \rangle \overline{\langle z, x \rangle}|$. \diamond

También se deducen de forma directa los siguientes resultados sobre convergencia de la serie de Fourier asociada a un elemento arbitrario.

4.7.- Teorema. Sea X un espacio de Hilbert y $A = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en X . Entonces, dada la sucesión $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset E$,

a) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$ converge si y sólo si $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2$ converge (es decir, $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$).

b) Si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$ converge a x , entonces $\alpha_n = \langle x, x_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$, es decir

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

c) Para todo $x \in X$, la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, x_n \rangle x_n$ converge (en la norma de X).

Demostración. a) Si llamamos $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, entonces $\|S_n - S_m\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |\alpha_k|^2$ ($n > m$). El resto es evidente (recordemos que X es completo).

b) Sea $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$. Si $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, entonces $\langle S_n, x_k \rangle = \alpha_k$, $\forall k \leq n$. Esto implica que $\lim_n \langle S_n, x_k \rangle = \alpha_k$, $\forall k$, de donde $\langle x, x_k \rangle = \alpha_k$, $\forall k$.

c) Por la desigualdad de Bessel, la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2$ converge. Aplicando a) se obtiene lo deseado. \diamond

Si aplicamos los resultados anteriores al espacio real $L^2[0, 2\pi]$, obtenemos lo siguiente.

4.8.- Proposición. a) (Lema de Riemann-Lebesgue). Si $f \in L^2[0, 2\pi]$ y llamamos

$$\begin{aligned} a_0 &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(t) dt, \\ a_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt/2) dt, \text{ si } n \text{ es par,} \\ b_n &= (1/\pi) \int_0^{2\pi} f(t) \sin[(n+1)t/2] dt, \text{ si } n \text{ es impar,} \end{aligned}$$

entonces $\lim_n a_n = 0$, $\lim_n b_n = 0$.

b) (Teorema de Riesz-Fischer). Recíprocamente, dada una sucesión de números reales $\{c_0, d_1, c_2, d_3, \dots\}$ tal que

$$c_0^2 + \sum_{n \text{ par}} c_n^2 + \sum_{n \text{ impar}} d_n^2 < \infty,$$

entonces existe una función $f \in L^2[0, 2\pi]$ cuyos coeficientes de Fourier son la sucesión dada.

Demostración. a) Sabemos que la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$, donde $x_0 = 1/\sqrt{2\pi}$, $x_{2n-1} = (1/\sqrt{\pi}) \sin nt$, $x_{2n} = (1/\sqrt{\pi}) \cos nt$, para $n \geq 1$, es un conjunto ortonormal. Si definimos para cada $f \in L^2[0, 2\pi]$ los coeficientes de Fourier $\alpha_n = \langle f, x_n \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)x_n(t)dt$, $n \geq 0$, por la desigualdad de Bessel, $\sum_{n \geq 0} |\alpha_n|^2 \leq \|f\|^2$.

A partir de esta desigualdad, y llamando

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt/2)dt, \text{ si } n \text{ es par}, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin[(n+1)t/2]dt, \text{ si } n \text{ es impar}, \end{aligned}$$

a los coeficientes ordinarios de Fourier, obtenemos

$$(\pi/2)a_0^2 + \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \right) \leq \int_0^{2\pi} f^2(t)dt$$

lo que implica que $\lim_n a_n = 0$, $\lim_n b_n = 0$.

b) Al aplicar el teorema 4.7(a) a la sucesión $\{x_n\}_{n \geq 0}$ definida antes, obtenemos

$$\frac{c_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\sum_{n \text{ par}} c_n \cos nt + \sum_{n \text{ impar}} d_n \sin nt \right)$$

converge a alguna función $f \in L^2[0, 2\pi]$ y $f/\sqrt{\pi}$ tiene a la sucesión dada por coeficientes de Fourier. \diamond

El siguiente concepto generaliza el de base ortonormal en un espacio euclídeo.

4.9.- Definición. Sea X un espacio pre-Hilbert y A un conjunto ortonormal. Entonces A es *completo* cuando se cumple cualquiera de las condiciones siguientes:

(a) No existe ningún conjunto ortonormal que contenga propiamente a A .

(b) $\forall x \in X$, si $x \perp A$, entonces $x = 0$.

Es claro que (a) implica (b) porque si existiera $x \perp A$, $x \neq 0$, entonces $A \cup \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\}$ sería ortonormal conteniendo propiamente a A .

También (b) implica (a), porque si existiera B ortonormal tal que $A \subset B$, $A \neq B$, podríamos tomar $x \in B \setminus A$, y sería $x \perp A$ y $\|x\| = 1$.

Observación. A los conjuntos ortonormales completos se les llama *bases ortonormales*. Sin embargo, nunca un conjunto ortonormal completo infinito puede ser base de Hamel en un espacio de Hilbert.

En efecto, si A es un conjunto ortonormal completo infinito de H , construimos la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-2} x_k$ con $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset A$. Como la serie $\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-4}$ converge, existe $x \in H$ tal que $\sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-2} x_k = x$. Si A fuera base de H , $\exists \gamma_\alpha, \dots, \gamma_\nu$ tales que $x = \gamma_\alpha x_\alpha + \dots \gamma_\nu x_\nu$. Eligiendo $j \neq \alpha, \dots, \nu$,

$$\langle x_j, \sum_{k \geq 1} k^{-2} x_k \rangle = j^{-2} = \langle x_j, \gamma_\alpha x_\alpha + \dots \gamma_\nu x_\nu \rangle = 0$$

lo que es absurdo.

4.10.- Teorema. *En un espacio pre-Hilbert $X \neq \{0\}$ existe un conjunto ortonormal completo y todo conjunto ortonormal puede extenderse a un conjunto ortonormal completo.*

Demostración. Basta probar la segunda parte porque se deduce inmediatamente de ahí la primera.

Sea B un conjunto ortonormal fijo, $\mathcal{S} = \{A : A \text{ es conjunto ortonormal, } B \subset A\}$. El conjunto \mathcal{S} está parcialmente ordenado con la relación de inclusión. Veamos que toda familia totalmente ordenada de \mathcal{S} tiene cota superior:

Sea $T = \{A_\alpha : \alpha \in I\}$ un subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{S} . Como $A_\alpha \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, entonces $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ es cota superior de T . Además $B \subset \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Si $x, y \in \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$, $\exists \alpha, \beta \in I : x \in A_\alpha, y \in A_\beta$ (y suponemos $A_\alpha \subset A_\beta$ por ser T totalmente ordenado). Entonces $x, y \in A_\beta$ de donde $x \perp y$, $\|x\| = \|y\| = 1 \implies \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \mathcal{S}$.

Se dice entonces que \mathcal{S} es un conjunto inductivo. Se puede aplicar el lema de Zorn¹, por el que debe existir un elemento maximal en \mathcal{S} . Este elemento es un conjunto ortonormal completo, pues por definición de maximal, no puede haber otro conjunto ortonormal que lo contenga. \diamond

4.11.- Teorema. *a) Sea X un espacio pre-Hilbert y A un conjunto ortonormal tal que $\overline{\langle A \rangle} = X$. Entonces A es completo.*

b) Si X es de Hilbert y $A = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un conjunto ortonormal completo, entonces $\overline{\langle A \rangle} = X$.

Demostración. a) Si A no fuera completo, existiría $x \in X$ ortogonal al conjunto. Además $x \perp \langle A \rangle$ e incluso $x \perp \overline{\langle A \rangle}$ lo que es absurdo.

¹**Lema de Zorn:** Todo conjunto ordenado, inductivo y no vacío tiene un elemento maximal.

b) Si $\overline{\langle A \rangle} \neq X$, existe $x \in X \setminus \overline{\langle A \rangle}$. Por el teorema de proyección, existe $y \in \overline{\langle A \rangle}$ tal que $(x - y) \perp \overline{\langle A \rangle}$. Por tanto, $(x - y) \perp A$, pero $x \neq y$. Resulta entonces que A no es completo. \diamond

Otra caracterización de los conjuntos ortonormales completos la da la identidad de Parseval.

4.12.- Teorema. a) Sea X un espacio pre-Hilbert y $A = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un conjunto ortonormal. Si $\forall x \in X, \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, x_\alpha \rangle|^2$, entonces A es completo.

b) (Identidad de Parseval) Si X es de Hilbert y A es un conjunto ortonormal completo, se verifica que $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, x_\alpha \rangle|^2$, $\forall x \in X$.

Observación. Por el teorema 4.6(b) sólo hay como máximo un conjunto numerable de productos $\langle x, x_\alpha \rangle$ no nulos.

Demostración. a) Si A no fuera completo, existiría $x \in X$ tal que $x \perp A$. Por la identidad de Parseval, $\|x\| = 0$, lo que es absurdo.

b) Sea $x \in X$. Como la serie $\sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha$ converge (teorema 4.7(c)), llamamos $y = \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha$. Entonces $(x - y) \perp A$:

$$\begin{aligned} \langle x - y, x_\beta \rangle &= \langle x, x_\beta \rangle - \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle \langle x_\alpha, x_\beta \rangle = \langle x, x_\beta \rangle - \langle x, x_\beta \rangle = 0; \\ \langle x - y, v \rangle &= \langle x, v \rangle - \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle \langle x_\alpha, v \rangle = 0 - 0 = 0, \end{aligned}$$

$\forall v \in A$, v distinto de los x_α de la serie (que son precisamente aquellos para los que $\langle x, v \rangle = 0$).

Por definición, como $(x - y) \perp A \implies x - y = 0 \implies x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha \implies \|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle \overline{\langle x, x_\alpha \rangle}$. \diamond

Nota. La parte (a) del teorema también es cierta si la identidad de Parseval se supone cierta sólo en un conjunto denso en X (ver la prueba en [BN]). La ventaja que ello supone es evidente y en las aplicaciones prácticas es fácil obtener subconjuntos densos donde se verifique la igualdad. Por ejemplo, para probar que la sucesión $\{1/\sqrt{2\pi}, \cos t/\sqrt{\pi}, \sin t/\sqrt{\pi}, \dots\}$ es un conjunto ortonormal completo en $L^2[0, 2\pi]$ sobre \mathbb{R} basta ver que la identidad de Parseval es cierta en la clase de polinomios trigonométricos de $L^2[0, 2\pi]$ (que es denso en L^2 por el teorema de Stone-Weierstrass).

Podemos resumir todos los resultados anteriores en el siguiente esquema.

4.13.- Teorema. Sea $A = \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un conjunto ortonormal en un espacio de Hilbert X . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es completo.

ii) $x \perp A \implies x = 0$.

iii) $x \in X \implies x = \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle x_\alpha$.

iv) $\overline{\langle A \rangle} = X$.

v) $\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, x_\alpha \rangle|^2$.

vi) $\forall x, y \in X, \langle x, y \rangle = \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_\alpha \rangle \langle x_\alpha, y \rangle$.

(Es claro que en algunas equivalencias no es necesario que X sea de Hilbert.)

Ejemplo. En $L^2[0, 2\pi]$ un conjunto ortonormal completo es $A = \left\{ \frac{e^{int}}{\sqrt{2\pi}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

En efecto, sea $f \in L^2[0, 2\pi]$, tal que $f \perp A$, es decir, $\int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$. Definimos $G(t) = \int_0^t f(x) dx - C$, donde $G(2\pi) = -C = G(0)$. Como $\int_0^t f(x) dx$ es una función absolutamente continua, $G'(t) = f(t)$ en casi todo punto. Esto implica que $\int_0^{2\pi} G'(t) e^{-int} dt = 0$. Integrando por partes, tenemos

$$0 = e^{-int} G(t) \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} G(t) (-in) e^{-int} dt = G(2\pi) - G(0) + in \int_0^{2\pi} G(t) e^{-int} dt.$$

Si llamamos $F(t) = \int_0^t f(x) dx$, tenemos que $0 = \int_0^{2\pi} (F(t) - C) e^{-int} dt, n \neq 0$. Elegimos C de modo que $\int_0^{2\pi} F(t) dt = 2\pi C$.

Por el teorema de aproximación de Weierstrass, podemos aproximar uniformemente $G(t)$ por el polinomio trigonométrico $T(t) = \sum_{k=-m}^m a_k e^{ikt}$, de modo que $|G(t) - T(t)| < \varepsilon, \forall t \in [0, 2\pi]$. Resulta así:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \overline{G(t)} T(t) dt &= \sum_{k=-m}^m a_k \int_0^{2\pi} \overline{G(t)} e^{ikt} dt = 0 \implies \int_0^{2\pi} |G(t)|^2 dt \\ &= \int_0^{2\pi} \overline{G(t)} G(t) dt = \int_0^{2\pi} \overline{G(t)} (G(t) - T(t)) dt \\ &\leq \varepsilon \int_0^{2\pi} |G(t)| \cdot 1 dt \leq \varepsilon \sqrt{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |G(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Si suponemos $\int_0^{2\pi} |G(t)|^2 dt \neq 0$, resulta $\left(\int_0^{2\pi} |G(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \varepsilon \sqrt{2\pi}$.

Como ε es arbitrario,

$$\int_0^{2\pi} |G(t)|^2 dt = 0 \implies G(t) = 0 \implies \int_0^t f(x) dx = C \implies f(t) = 0$$

en casi todo punto.

Justificamos a continuación el nombre de dimensión de Hilbert dado al cardinal de un conjunto ortonormal completo.

4.14.- Teorema (cardinal de los conjuntos ortonormales completos). *En un espacio pre-Hilbert X , cualesquiera dos conjuntos ortonormales completos $A = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$, $B = \{y_\beta : \beta \in J\}$ tienen el mismo cardinal (llamado dimensión de Hilbert o dimensión ortogonal de X).*

Demostración. Es trivial si A y B son finitos, porque serían bases del mismo espacio vectorial X .

En el caso general, si $x_\alpha \in A$, definimos $B_{x_\alpha} = \{y_\beta \in B : \langle x_\alpha, y_\beta \rangle \neq 0\}$ que es numerable (teorema 4.6(b)). Veamos ahora que para todo $y_\beta \in B$ existe $x_\alpha \in A$ tal que $y_\beta \in B_{x_\alpha}$:

Si no fuera así, $\langle x_\alpha, y_\beta \rangle = 0$, $\forall x_\alpha \in A \implies y_\beta \perp A$. Pero, al ser A completo, $y_\beta = 0$, lo que es absurdo pues $\|y_\beta\| = 1$. Entonces

$$B = \bigcup_{\alpha \in I} B_{x_\alpha} \implies \text{card } B \leq \text{card } A \cdot \text{card } B_{x_\alpha} = \text{card } A$$

ya que B_{x_α} es numerable.

Análogamente se procede para demostrar que $\text{card } A \leq \text{card } B$. \diamond

Para concluir probaremos las siguientes equivalencias, que generalizan lo que ocurre con los espacios euclídeos, pues se proporcionan muestras concretas de espacios mediante los cuales todos los demás sólo se diferencian en la dimensión.

4.15.- Teorema. *Si X es un espacio pre-Hilbert de dimensión n , entonces X es congruente con \mathbb{C}^n , es decir existe un isomorfismo isométrico entre X y \mathbb{C}^n .*

Demostración. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base ortonormal de X .

$\forall x \in X$, $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C} : x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. Definimos $A : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ como $Ax = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Es evidente que A es isomorfismo isométrico. \diamond

4.16.- Teorema. *Si X es un espacio de Hilbert separable, complejo y de dimensión infinita, entonces X es congruente con ℓ^2 .*

Demostración. Por ser X separable, contiene un conjunto ortonormal completo numerable, digamos $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Para cada $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ definimos $\alpha_n = \langle x, x_n \rangle$. Por la identidad de Parseval,

$$\|x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\langle x, x_n \rangle|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < \infty.$$

Esto implica que $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$. Así pues, el operador $A : X \rightarrow \ell^2$ dado por

$$Ax = (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \forall x \in X$$

está bien definido y es lineal. Veamos que A es un isomorfismo isométrico.

(*) A es inyectiva: $Ax = 0 \implies \langle x, x_n \rangle = 0, \forall n \implies x = 0$ porque $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es completo.

(*) A es sobre: Si $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, $\sum_{n \in \mathbb{N}} |\beta_n|^2 < \infty$ lo que implica que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \beta_n x_n$ converge a algún $x \in X$ de donde $\beta_n = \langle x, x_n \rangle$, es decir $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}} = Ax$.

(*) A es isometría, pues $\|Ax\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 = \|x\|^2$. \diamond

5. ORTOGONALIZACIÓN DE POLINOMIOS.

En esta sección se aplican los resultados anteriores para obtener familias de polinomios ortonormales en algunos casos prácticos de especial importancia. Empezaremos recordando el teorema de ortogonalización de Gram-Schmidt.

5.1.- Teorema (ortogonalización de Gram-Schmidt). *Si $\{y_1, \dots, y_n, \dots\}$ es un conjunto linealmente independiente en un espacio pre-Hilbert X , entonces existe un conjunto ortonormal $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ tal que $\langle \{x_1, \dots, x_k\} \rangle = \langle \{y_1, \dots, y_k\} \rangle, \forall k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Aplicaremos el método de inducción sobre n .

Para $n = 1$, hacemos $x_1 = y_1/\|y_1\|$. Esto hace que $\|x_1\| = 1$ y $\langle \{x_1\} \rangle = \langle \{y_1\} \rangle$.

Si fuera cierto para $n - 1$, veámoslo para n :

Llamamos $w = y_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, x_i \rangle x_i$. Entonces

$$\langle w, x_k \rangle = \langle y_n, x_k \rangle - \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, x_i \rangle \langle x_i, x_k \rangle = \langle y_n, x_k \rangle - \langle y_n, x_k \rangle = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Si fuera $w = 0$, tendríamos $y_n = \sum_{i=1}^{n-1} \langle y_n, x_i \rangle x_i$, con lo que $y_n \in \langle \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \rangle = \langle \{y_1, \dots, y_{n-1}\} \rangle$, lo que contradice la hipótesis.

Si llamamos $x_n = w/\|w\|$, es trivial que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es un conjunto ortonormal y que $\langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle = \langle \{y_1, \dots, y_n\} \rangle$. \diamond

Veamos como aplicación de lo anterior cómo generar los polinomios ortonormales de mayor importancia práctica.

A. Polinomios de Legendre. El espacio $C[-1, 1]$ con el producto escalar $\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt$ puede completarse y dar lugar al espacio $L^2[-1, 1]$.

Una base ortonormal de este espacio se puede obtener aplicando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt a la familia linealmente independiente de polinomios $\{x_n(t) = t^n, n = 0, 1, \dots\}$.

5.2.- Teorema. Si llamamos $P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n$, entonces la familia $e_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t)$, $n = 0, 1, \dots$, es un conjunto ortonormal completo en $L^2[-1, 1]$.

Demostración. Veamos en primer lugar que $\langle P_m, P_n \rangle = 0$ si $0 \leq m < n$. Como P_m es un polinomio, basta probar que $\langle x_m, P_n \rangle = 0$ para $m < n$. Si integramos por partes (donde escribimos por comodidad $u = t^2 - 1$), teniendo en cuenta que las derivadas $D^k(u^n)(t)$ se anulan para $k < n$ en $t = \pm 1$:

$$\begin{aligned} 2^n n! \langle x_m, P_n \rangle &= \int_{-1}^1 t^m D^n(u^n)(t) dt \\ &= -m \int_{-1}^1 t^{m-1} D^{n-1}(u^n)(t) dt = \dots \\ &= (-1)^m m! \int_{-1}^1 D^{n-m}(u^n)(t) dt = (-1)^m m! D^{n-m-1}(u^n)(t) \Big|_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

A continuación probaremos que $\|e_n\| = 1$, $\forall n$, para lo cual integramos nuevamente por partes y tenemos en cuenta que $D^{2n}(u^n)(t) = (2n)!$:

$$\begin{aligned} (2^n n!)^2 \|P_n\|^2 &= \int_{-1}^1 D^n(u^n)(t) D^n(u^n)(t) dt \\ &= - \int_{-1}^1 D^{n-1}(u^n)(t) D^{n+1}(u^n)(t) dt = \dots \\ &= (-1)^n (2n)! \int_{-1}^1 u^n(t) dt = 2(2n)! \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= 2(2n)! \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} s ds = \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{2n+1}. \quad \diamond \end{aligned}$$

Observación. Los polinomios de Legendre $\{P_n\}_{n \geq 0}$ son solución de la llamada ecuación de Legendre:

$$(1-t^2)P_n'' - 2tP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

B. Polinomios de Hermite. En el espacio $L^2(\mathbb{R})$, las funciones $\{x^n e^{-x^2/2}\}$ forman un conjunto linealmente independiente para $n \geq 0$. Aplicando el proceso de Gram-Schmidt, obtenemos las funciones de Hermite

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{(n! \cdot 2^n \cdot \sqrt{\pi})^{1/2}} \cdot e^{-x^2/2} \cdot H_n(x)$$

donde $\{H_n\}_{n \geq 0}$ son los polinomios de Hermite

$$H_n(x) = (-1)^n \cdot e^{x^2} \cdot \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}.$$

Se puede probar que las funciones de Hermite forman una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ y que los polinomios de Hermite verifican la ecuación diferencial

$$H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n = 0.$$

C. Polinomios de Laguerre. En $X = L^2[0, \infty)$, la sucesión $\{e^{-x/2}x^n\}_{n \geq 0}$ es linealmente independiente. La familia ortonormal que se obtiene es $\Psi_n(x) = e^{-x/2}L_n(x)$, donde

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot e^x \cdot \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n), \text{ es decir } L_n(x) = \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!} \binom{n}{j} x^j,$$

son los polinomios de Laguerre.

Estos polinomios verifican la ecuación $xL_n'' + (1-x)L_n' + nL_n = 0$.

6. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONALES EN ESPACIOS DE HILBERT.

En los espacios de Hilbert, la forma general que tienen los funcionales lineales y acotados es sorprendentemente simple y de gran importancia práctica. Es muy sencillo comprobar que todo espacio euclídeo puede identificarse con su dual.

6.1.- Teorema (Riesz para dimensión finita). *Si X es un espacio pre-Hilbert de dimensión finita y $f : X \rightarrow E$ un funcional lineal, entonces existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$, $\forall x \in X$.*

Demostración. Sea $\{x_1, \dots, x_n\}$ una base ortonormal de X . Si $y = \sum_{i=1}^n \overline{f(x_i)}x_i$, definimos la aplicación $f_y : X \rightarrow E$ como $f_y(x) = \langle x, y \rangle$. En particular,

$f_y(x_j) = f(x_j)$, $\forall j = 1, \dots, n$. De aquí se deduce que $f_y(x) = f(x)$, $\forall x \in X$.

Si existiera otro $z \in X$ tal que $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$, $\forall x \in X$, entonces $\langle x, y - z \rangle = 0$, $\forall x \implies y = z$. \diamond

Probaremos a continuación el teorema de representación de Riesz que prueba que este hecho es también cierto en espacios de Hilbert arbitrarios.

6.2.- Teorema (Riesz para cualquier dimensión). *Un funcional $f : X \rightarrow E$ de un espacio de Hilbert es lineal y acotado si y sólo si existe un único $y \in X$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$, $\forall x \in X$. Además $\|f\| = \|y\|$.*

Demostración. La unicidad de y es clara como hicimos en el teorema anterior.

a) Dado $y \in X$, consideramos el funcional $f(x) = \langle x, y \rangle$. Claramente, f es lineal. Además $|f(x)| = |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Por tanto, f está acotado y $\|f\| \leq \|y\|$. Pero si hacemos $x = y$, $|f(y)| = \|y\| \cdot \|y\| \implies \|f\| \geq \|y\|$ y en definitiva, $\|f\| = \|y\|$.

b) Sea f un funcional lineal y acotado en X y definimos $M = \{x \in X : f(x) = 0\}$ que es subespacio cerrado de X por la continuidad de f . Si $M = X$, $f \equiv 0$ y $f(x) = \langle x, 0 \rangle$, es decir, existe $y = 0$ tal que $f(x) = \langle x, 0 \rangle$.

Si $M \neq X$, existe $w \neq 0$ tal que $w \in M^\perp$. Vamos a probar que existe $\alpha \in E$ tal que $y = \alpha w$ satisface las condiciones del teorema.

Si $x \in M$, $f(x) = 0$ y $\langle x, \alpha w \rangle = \overline{\alpha} \langle x, w \rangle = 0$, y cualquier α sirve.

Si $x = \beta w$ con $\beta \neq 0$, $f(x) = \beta f(w)$ y $\langle x, \alpha w \rangle = \beta \overline{\alpha} \langle w, w \rangle$ con lo que $f(x) = \langle x, \alpha w \rangle$ cuando $\alpha = \overline{f(w)} / \|w\|^2$.

Si $x \in X$ es arbitrario, $x = x - \beta w + \beta w$ y elegimos β para que $x - \beta w \in M$, es decir, $\beta = f(x) / f(w)$. De este modo,

$$f(x) = f(x - \beta w) + f(\beta w) = \langle x - \beta w, \alpha w \rangle + \langle \beta w, \alpha w \rangle = \langle x, \alpha w \rangle = \langle x, y \rangle. \quad \diamond$$

De este teorema también se deduce el análogo a la proposición 7.3 del capítulo II. Concretamente, en un espacio de Hilbert un funcional lineal es continuo si y sólo si su núcleo es un subespacio cerrado. Este hecho muestra que la existencia de funcionales lineales no continuos va íntimamente ligada con la existencia de subespacios lineales no cerrados. Así pues, el núcleo de un funcional lineal no continuo es un subespacio denso en X . En efecto, si por el contrario $\dim M^\perp > 0$, $\exists e \perp M$ tal que $f(e) = 1$; esto implica que $\forall y \in X$, $y = f(y)e + (y - f(y)e)$ con $f(y)e \in \langle e \rangle$ y $f(y - f(y)e) = 0 \implies y - f(y)e \in M$, y la suma es ortogonal. Esto indica que $X = \langle e \rangle \oplus M$, de donde M es cerrado, con lo que f es continuo, en contradicción con la hipótesis. En definitiva, $\dim M^\perp = 0 \implies \overline{M} = X$.

El teorema 6.2 permite también obtener una representación general de formas sesquilineales en espacios de Hilbert.

6.3.- Definición. Dados dos espacios vectoriales X, Y , una *forma sesquilineal* sobre $X \times Y$ es una aplicación $h : X \times Y \rightarrow E$ tal que h es lineal en la primera variable y antilineal en la segunda.

Si X e Y son normados, h es *acotada* si existe $c \geq 0$ tal que $|h(x, y)| \leq c \cdot \|x\| \cdot \|y\|$ y se define $\|h\| = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|h(x, y)|}{\|x\| \cdot \|y\|}$ como la *norma* de h .

Ejemplo. Si $S \in L(X, Y)$ entonces $h(x, y) = \langle Sx, y \rangle$ es una forma sesquilineal acotada. El recíproco corresponde al siguiente resultado.

6.4.- Teorema (representación de Riesz para formas sesquilineales). Sean H_1, H_2 espacios de Hilbert y $h : H_1 \times H_2 \rightarrow E$ una forma sesquilineal acotada. Entonces existe un único operador lineal $S : H_1 \rightarrow H_2$ acotado tal que $h(x, y) = \langle Sx, y \rangle$ y $\|S\| = \|h\|$.

Demostración. Fijado $x \in H_1$, el operador $\overline{h(x, \cdot)} : H_2 \rightarrow E$ es un funcional lineal y acotado. Entonces existe un único $z \in H_2$ tal que $\overline{h(x, y)} = \langle y, z \rangle$. Por tanto, $h(x, y) = \langle z, y \rangle$. Como z depende de x y es único, queda definido un operador $S : H_1 \rightarrow H_2$ dado por $Sx = z$. Así definido, se prueba que

$\rightarrow S$ es lineal:

$$\begin{aligned} \langle S(\alpha x_1 + \beta x_2), y \rangle &= h(\alpha x_1 + \beta x_2, y) \\ &= \alpha h(x_1, y) + \beta h(x_2, y) = \alpha \langle Sx_1, y \rangle + \beta \langle Sx_2, y \rangle \\ &= \langle \alpha Sx_1 + \beta Sx_2, y \rangle, \forall y \implies S(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Sx_1 + \beta Sx_2. \end{aligned}$$

$\rightarrow S$ es acotado:

$$\|h\| = \sup_{x, y \neq 0} \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \geq \sup_{x \neq 0, Sx \neq 0} \frac{|\langle Sx, Sx \rangle|}{\|x\| \cdot \|Sx\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \|S\|.$$

$\rightarrow \|S\| = \|h\|$: Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|h\| = \sup \frac{|\langle Sx, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \sup \frac{\|Sx\| \cdot \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \|S\|.$$

$\rightarrow S$ es único: Si $\exists T : H_1 \rightarrow H_2$ tal que $h(x, y) = \langle Sx, y \rangle = \langle Tx, y \rangle$, entonces $Sx = Tx$ de donde $S = T$. \diamond

El concepto de forma sesquilineal es una generalización del producto interior. Demostraremos a continuación diversos resultados que extienden a los ya obtenidos para el producto interior, donde el papel de norma corresponde ahora al de la forma cuadrática asociada a una forma sesquilineal.

6.5.- Definición. Una forma sesquilineal $f : X \rightarrow X$ se dice *simétrica* cuando $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$, $\forall x, y \in X$. Por otra parte, si $f(x, x) \geq 0$, $\forall x \in X$,

f se dice forma sesquilineal *definida no negativa*. Por ejemplo, $f(x, y) = \langle x, y \rangle$ es una forma sesquilineal simétrica y definida no negativa, y $f(x, x)$ representa la norma.

Dada una forma sesquilineal $f : X \times X \rightarrow E$, el conjunto $\{f(x, x) : x \in X\}$ se llama *forma cuadrática asociada*. Así, si llamamos $\widehat{f}(x) = f(x, x)$, se puede recuperar la forma sesquilineal por la identidad de polarización

$$f(x, y) = \frac{1}{4}\widehat{f}(x+y) - \frac{1}{4}\widehat{f}(x-y) + \frac{i}{4}\widehat{f}(x+iy) - \frac{i}{4}\widehat{f}(x-iy).$$

En consecuencia, si f_1 y f_2 son formas sesquilineales y $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2$, entonces $f_1 = f_2$.

6.6.- Proposición. *Dada una forma sesquilineal $f : X \times X \rightarrow E$, f es simétrica si y sólo si \widehat{f} es real.*

Demostración. a) Si suponemos que $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$, entonces

$$\widehat{f}(x) = f(x, x) = \overline{f(x, x)} = \overline{\widehat{f}(x)}, \quad \forall x \in X$$

lo que implica que \widehat{f} es real.

b) Recíprocamente, si \widehat{f} es real, de la identidad de polarización y las igualdades $\widehat{f}(z) = \widehat{f}(-z)$, $\widehat{f}(iz) = \widehat{f}(z)$, $\forall z \in X$, se deduce que

$$\begin{aligned} \overline{f(x, y)} &= \frac{1}{4}\overline{\widehat{f}(x+y)} - \frac{1}{4}\overline{\widehat{f}(x-y)} - \frac{i}{4}\overline{\widehat{f}(x+iy)} + \frac{i}{4}\overline{\widehat{f}(x-iy)} \\ &= \frac{1}{4}\widehat{f}(y+x) - \frac{1}{4}\widehat{f}(y-x) - \frac{i}{4}\widehat{f}(y-ix) + \frac{i}{4}\widehat{f}(y+ix) = f(y, x). \quad \diamond \end{aligned}$$

6.7.- Corolario. *Si $A : X \rightarrow X$ es un operador lineal acotado, entonces son equivalentes:*

i) *La forma sesquilineal $f : X \times X \rightarrow E$ definida por $f(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ es simétrica.*

ii) *$\langle Ax, x \rangle$ es real para todo $x \in X$.*

Para la prueba, basta observar que $\langle Ax, x \rangle$ es la forma cuadrática asociada a f .

6.8.- Proposición. *Dada una forma sesquilineal $f : X \times X \rightarrow E$, f es acotada si y sólo si \widehat{f} es acotada. Además $\|\widehat{f}\| \leq \|f\| \leq 2\|\widehat{f}\|$.*

Demostración. Utilizaremos las igualdades

$$\|f\| = \sup_{\|x\|, \|y\|=1} |f(x, y)|, \quad \|\widehat{f}\| = \sup_{\|x\|=1} |\widehat{f}(x)|,$$

las cuales se pueden probar de forma similar a las obtenidas en el caso de operadores lineales.

Si suponemos f acotada, entonces

$$|\widehat{f}(x)| = |f(x, x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|^2 \implies \|\widehat{f}\| \leq \|f\|.$$

Recíprocamente, si suponemos \widehat{f} acotada, aplicando la desigualdad triangular en la identidad de polarización, obtenemos

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{4} \|\widehat{f}\| \cdot (\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 + \|x + iy\|^2 + \|x - iy\|^2).$$

Aplicando en el segundo miembro la identidad del paralelogramo, resulta:

$$|f(x, y)| \leq \frac{1}{4} \|\widehat{f}\| \cdot [2(\|x\|^2 + \|y\|^2) + 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)] = \|\widehat{f}\| \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Tomando el supremo para valores x, y , con $\|x\| = \|y\| = 1$, llegamos en definitiva a que $\|f\| \leq 2\|\widehat{f}\|$. \diamond

6.9.- Proposición. Si f es una forma sesquilineal simétrica acotada, entonces $\|f\| = \|\widehat{f}\|$.

Demostración. Por ser \widehat{f} real, de la identidad de polarización obtenemos en particular

$$\operatorname{Re} f(x, y) = \frac{1}{4} \widehat{f}(x+y) - \frac{1}{4} \widehat{f}(x-y) \implies |\operatorname{Re} f(x, y)| \leq \frac{1}{4} \|\widehat{f}\| \cdot (2\|x\|^2 + 2\|y\|^2).$$

Si suponemos $\|x\| = \|y\| = 1$, resulta $|\operatorname{Re} f(x, y)| \leq \|\widehat{f}\|$.

Escribiendo en forma polar $f(x, y) = r \cdot e^{i\vartheta}$, para $\alpha = e^{-i\vartheta}$, tenemos $\alpha f(x, y) = r = |f(x, y)|$, de donde

$$|f(x, y)| = |\operatorname{Re} \alpha f(x, y)| = |\operatorname{Re} f(\alpha x, y)| \leq \|\widehat{f}\|,$$

para cualesquiera $x, y \in X$ tales que $\|x\| = \|y\| = 1$. En consecuencia, $\|f\| = \sup_{\|x\|=\|y\|=1} |f(x, y)| \leq \|\widehat{f}\|$ lo que, junto al resultado del teorema anterior, conduce a la tesis. \diamond

6.10.- Proposición (Desigualdad de Cauchy-Schwarz generalizada). Si f es una forma sesquilineal no negativa, entonces $|f(x, y)|^2 \leq \widehat{f}(x) \cdot \widehat{f}(y)$, $\forall x, y \in X$.

La prueba es similar a la realizada en la proposición 3.1, y se deja como ejercicio.

7. OPERADOR ADJUNTO. OPERADORES AUTOADJUNTOS Y UNITARIOS.

El teorema de representación de Riesz permite de forma natural asociar a todo operador $T \in L(H_1, H_2)$ el llamado operador adjunto $T^* \in L(H_2, H_1)$ definido por la condición $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$, $\forall x \in H_1, y \in H_2$, y cuyas propiedades estudiaremos en esta sección. Nos limitaremos en esta sección a estudiar el caso de operadores $T : H \rightarrow H$ y dejamos al lector la posibilidad de desarrollar el caso general. Queremos indicar también que en el caso de espacios normados se puede definir un concepto análogo pero algunas demostraciones precisan aplicar el teorema de Hahn-Banach que estudiaremos en el próximo capítulo (en los ejercicios del capítulo IV se dan dichas nociones).

Aseguramos en primer lugar la existencia del operador adjunto y mostramos algunas propiedades básicas de los mismos.

7.1.- Teorema. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$. Entonces existe un único operador $T^* \in L(H)$ tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$. Además $\|T\| = \|T^*\|$.

Demostración. Para cada $y \in H$ definimos el funcional $f_y(x) = \langle Tx, y \rangle$. Debido a que

$$|\langle Tx, y \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|,$$

se deduce que f_y es un funcional lineal acotado. Por el teorema de representación de Riesz, existe un único $z \in H$ tal que $f_y(x) = \langle x, z \rangle$. Definimos pues el operador $T^*y = z$.

Dicho operador es lineal pues, $\forall y_1, y_2 \in H, \alpha \in E, x \in H$:

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y_1 + y_2) \rangle &= \langle Tx, \alpha y_1 + y_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle Tx, y_1 \rangle + \langle Tx, y_2 \rangle \\ &= \overline{\alpha} \langle x, T^*y_1 \rangle + \langle x, T^*y_2 \rangle = \langle x, \alpha T^*y_1 + T^*y_2 \rangle. \end{aligned}$$

Además T^* está acotado pues, $\forall x, y \in H$,

$$|\langle x, T^*y \rangle| = |\langle Tx, y \rangle| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

En particular, para $x = T^*y$ tenemos que $\|T^*y\|^2 \leq \|T\| \cdot \|T^*y\| \cdot \|y\|$, de donde $\|T^*y\| \leq \|T\| \cdot \|y\|$ y $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Por otra parte, como $T^{**} = T$, resulta que $\|T\| = \|T^{**}\| \leq \|T^*\|$. \diamond

7.2.- Proposición. Dados $S, T \in L(H)$ y $\alpha \in E$, entonces:

a) $(S + T)^* = S^* + T^*$.

$$b) (\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*.$$

$$c) (ST)^* = T^* S^*.$$

$$d) T^{**} = T.$$

$$e) \|T^* T\| = \|T\|^2.$$

Demostración. Queda como ejercicio, pues se trata de simples comprobaciones.

7.3.- Proposición. Si llamamos $N(T)$ al núcleo del operador T y $R(T)$ al rango, entonces

$$a) N(T^*) = R(T)^\perp.$$

$$b) N(T) = R(T^*)^\perp.$$

Demostración. Para cualesquiera $x \in N(T^*)$, $y \in H$, $\langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle = 0$, de donde $x \in R(T)^\perp$.

Recíprocamente, si $x \in R(T)^\perp$, entonces $\langle T^* x, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = 0$, para todo $y \in H$, de donde $T^* x = 0$.

Para la parte b) basta aplicar a) al operador T^* . ◇

7.4.- Definición. El operador T^* así construido se llama *adjunto* de T . Un operador T es *autoadjunto* cuando $T = T^*$.

Observaciones. 1) El concepto de operador adjunto generaliza el de matriz adjunta pues en los espacios euclídeos la matriz asociada al operador adjunto es la traspuesta de la conjugada de la matriz asociada al operador de partida. Un ejemplo clásico en dimensión infinita lo constituyen los operadores integrales. Así, si $A : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ es el operador definido por $Ax(t) = \int_0^1 K(t, s)x(s)ds$, donde K es una función continua, entonces $A^*x(t) = \int_0^1 \overline{K(s, t)}x(s)ds$.

2) Los operadores autoadjuntos juegan en $L(H)$ el papel que los números reales juegan en \mathbb{C} . Por tanto, todo operador $T \in L(H)$ se podrá escribir en la forma $T = A + iB$, con A, B autoadjuntos. Esta clase de operadores, cuya estructura está ya perfectamente delimitada, aparece en multitud de aplicaciones.

Recordamos que en espacios métricos una aplicación que conserva las distancias se llama isometría. Cuando se trata de espacios normados esta propiedad se traduce en que una isometría $A : X \rightarrow Y$ es un operador que conserva las normas, es decir $\|Ax\| = \|x\|$, $\forall x \in X$. Si X e Y son además espacios pre-Hilbert, es sencillo comprobar (aplicando la identidad de polarización) que un operador $A \in L(X, Y)$ es una isometría si y sólo si

$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in X$. En lo sucesivo aplicaremos esta caracterización como definición de isometrías en espacios pre-Hilbert.

7.5.- Definición. Toda isometría sobreyectiva recibirá el nombre de *operador unitario*. Estos operadores se corresponden con las rotaciones y simetrías respecto del origen en los espacios euclídeos y, al igual que allí, estos operadores son los más simples en cuanto no cambia la longitud ni el ángulo entre vectores.

Veamos a continuación algunas caracterizaciones de estos operadores.

7.6.- Proposición. Sea $T \in L(H)$.

a) T es isometría si y sólo si $T^*T = I$.

b) T es unitario si y sólo si $T^*T = TT^* = I$.

Demostración. El apartado a) se deduce de las siguientes equivalencias:

$$\begin{aligned} T \text{ isometría} &\iff \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H \\ &\iff \langle x, T^*Ty \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in H \iff T^*T = I. \end{aligned}$$

b) Por el apartado anterior, si T es unitario, $T^*T = I$. Además, por ser T sobre, $\forall x, y \in H$,

$$\langle TT^*x, y \rangle = \langle TT^*x, Tz \rangle = \langle T^*x, z \rangle = \langle x, Tz \rangle = \langle x, y \rangle \implies TT^* = I.$$

Recíprocamente, si $T^*T = TT^* = I$, entonces, por una parte, T es isometría; por otra parte, para cualquier $y \in H$, si llamamos $x = T^*y$; entonces $Tx = TT^*y = y$, es decir T es sobre. \diamond

Otra clase de operadores relacionada con las anteriores es la de los *operadores normales*, los que por definición verifican la igualdad $TT^* = T^*T$. Esta clase de operadores tiene gran interés en el desarrollo de la teoría espectral y estudiaremos sus propiedades en el capítulo VI.

EJERCICIOS.

1. Si X es un espacio vectorial de dimensión finita y $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de X , probar que cualquier producto interior sobre X está completamente determinado por los valores $\gamma_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$, $(i, j = 1, \dots, n)$. ¿Es posible elegir arbitrariamente dichos escalares?

Resp.: Sean $x, y \in X$ arbitrarios, $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n \beta_j e_j$. Entonces

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \gamma_{ij}.$$

Sin embargo, la elección de la matriz $(\gamma_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ no puede ser arbitraria, pues para dar lugar a un producto interior debe cumplir $\gamma_{ij} = \overline{\gamma_{ji}}$, $\forall i, j$ y además $\gamma_{ii} > 0$, $\forall i$.



2. Sea X un espacio pre-Hilbert real. Probar que si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, entonces $x \perp y$. Probar que lo anterior no es cierto si X es complejo.

Resp.: De los axiomas del producto escalar obtenemos:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \|y\|^2.$$

Aplicando la hipótesis se deduce que $2\operatorname{Re}\langle x, y \rangle = 0 \implies \langle x, y \rangle = 0 \implies x \perp y$.

Si X es complejo, basta elegir $x, y \in X$ tales que $\langle x, y \rangle = ib$, con $b \neq 0$.

Así, $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ pero x no es ortogonal a y .



3. Probar que en un espacio pre-Hilbert, para cualquier escalar α , $x \perp y \iff \|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$.

Resp.: Las siguientes igualdades son válidas en general:

$$\begin{aligned} \|x + \alpha y\|^2 &= \langle x, x \rangle + \alpha \langle y, x \rangle + \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \overline{\alpha} \langle y, y \rangle, \\ \|x - \alpha y\|^2 &= \langle x, x \rangle - \alpha \langle y, x \rangle - \overline{\alpha} \langle x, y \rangle + \alpha \overline{\alpha} \langle y, y \rangle. \end{aligned}$$

Así pues, si $x \perp y$, entonces $\|x + \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + \alpha \bar{\alpha} \|y\|^2 = \|x - \alpha y\|^2$.

Recíprocamente, si $\|x + \alpha y\| = \|x - \alpha y\|$, entonces $2\alpha \langle y, x \rangle = -2\bar{\alpha} \langle x, y \rangle$.

Si hacemos $\alpha = 1$, resulta:

$$\langle y, x \rangle + \overline{\langle y, x \rangle} = 0 \implies \operatorname{Re} \langle y, x \rangle = 0.$$

Haciendo ahora $\alpha = i$:

$$i \langle y, x \rangle - i \overline{\langle y, x \rangle} = 0 \implies \operatorname{Im} \langle y, x \rangle = 0.$$

En definitiva, tenemos que $\langle y, x \rangle = 0 \implies x \perp y$.



4. Sea X un espacio pre-Hilbert. Probar que

$$\|\lambda x + (1 - \lambda)y\| = \|x\|, \quad \forall \lambda \in [0, 1] \implies x = y.$$

¿Es cierto lo anterior si X es un espacio normado?

Resp.: Por hipótesis, si $\lambda = 0$, $\|y\| = \|x\|$ y, si $\lambda = 1/2$, $(1/2)\|x + y\| = \|x\|$.

Por la identidad del paralelogramo, $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$, lo que implica, teniendo en cuenta lo anterior, que $4\|x\|^2 + \|x - y\|^2 = 4\|x\|^2$. Entonces $\|x - y\| = 0$, es decir $x = y$.

Si X es simplemente normado, puede no verificarse la identidad del paralelogramo. Por ejemplo, en ℓ^∞ , los vectores $x = (1, 0, \dots)$, $y = (1, 1, 0, \dots)$, verifican $\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$, $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|_\infty = 1$, pero $x \neq y$.



5. Se dice que un espacio de Banach es uniformemente convexo si, dadas dos sucesiones arbitrarias $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ y $\|(1/2)(x_n + y_n)\| \rightarrow 1$, entonces $\|x_n - y_n\| \rightarrow 0$.

a) Probar que todo espacio de Hilbert es uniformemente convexo.

b) Sabiendo que, $\forall f, g \in L^p[a, b]$,

$$\begin{aligned} \|f + g\|^q + \|f - g\|^q &\leq 2(\|f\|^p + \|g\|^p)^{q-1}, \quad \text{si } 1 < p \leq 2, \\ \|f + g\|^p + \|f - g\|^p &\leq 2^{p-1}(\|f\|^p + \|g\|^p), \quad \text{si } 2 \leq p < \infty, \end{aligned}$$

donde $(1/p) + (1/q) = 1$, probar que $L^p[a, b]$ ($1 < p < \infty$) es uniformemente convexo.

c) Dar un ejemplo de un espacio de Banach de dimensión 2 que no sea uniformemente convexo.

Resp.: a) Sea H un espacio de Hilbert; consideramos dos sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tales que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ y $\|(1/2)(x_n + y_n)\| \rightarrow 1$. De la identidad del paralelogramo

$$\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 = 2\|x_n\|^2 + 2\|y_n\|^2,$$

resulta que $\|x_n - y_n\|^2 = 4 - \|x_n + y_n\|^2$. Tomando límites, se concluye que $\|x_n - y_n\|^2 \rightarrow 0$, o bien $x_n - y_n \rightarrow 0$.

b) Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en $L^p[a, b]$ tales que $\|f_n\| = \|g_n\| = 1$ y $\|(1/2)(f_n + g_n)\| \rightarrow 1$.

Si $1 < p \leq 2$, $\|f_n + g_n\|^q + \|f_n - g_n\|^q \leq 2 \cdot 2^{q-1} = 2^q$, de donde, tomando límites, $\|f_n - g_n\|^q \rightarrow 0$, o bien $f_n - g_n \rightarrow 0$.

Si $2 \leq p < \infty$, de la desigualdad análoga se deduce también que $f_n - g_n \rightarrow 0$.

c) Consideramos el espacio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ y las sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dadas por $x_n = (0, 1)$, $y_n = (1, 0)$, $\forall n$. Es evidente que $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$ y $\|x_n + y_n\| = \|x_n - y_n\| = 2$, lo que prueba que el espacio no es uniformemente convexo.



6. Probar que el espacio $X = C[0, 1]$ con el producto escalar $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt$ es pre-Hilbert pero no es completo.

Resp.: Los axiomas de producto escalar son de fácil comprobación.

Para ver que no es completo, consideramos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x_n(t) = \inf\{n, t^{-1/3}\}$, es decir $x_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t \leq 1/n^3 \\ t^{-1/3} & \text{si } t \geq 1/n^3. \end{cases}$

La sucesión es de Cauchy pues

$$\|x_n - x_{n+p}\|^2 = \int_0^1 |x_n(t) - x_{n+p}(t)|^2 dt \leq \int_0^{1/n^3} t^{-1/3} dt$$

que tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Sin embargo, no es convergente pues $\forall x \in X$,

$$\|x - x_n\|^2 \geq \int_{1/n^3}^1 |x(t) - t^{-1/3}|^2 dt \implies \liminf \|x - x_n\|^2 \geq \int_0^1 |x(t) - t^{-1/3}|^2 dt.$$

Como $t^{-1/3}$ no está acotada en $[0, 1]$, existe un intervalo compacto en el cual $|x(t) - t^{-1/3}| > 0$, luego la integral es positiva y la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene límite.



7. Probar que en todo espacio de Hilbert complejo se verifica:

a) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|x + e^{2\pi i k/N} y\|^2 e^{2\pi i k/N}$, para $N \geq 3$.

b) $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|x + e^{i\theta} y\|^2 e^{i\theta} d\theta$.

Resp.: a) Por la linealidad del producto escalar:

$$\|x + e^{i\theta} y\|^2 e^{i\theta} = \|x\|^2 e^{i\theta} + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle e^{2i\theta} + \|y\|^2 e^{i\theta}. \quad (*)$$

Por otra parte, si $N \geq 3$:

$$\sum_{k=1}^N e^{2\pi i k/N} = \frac{e^{2\pi i (N+1)/N} - e^{2\pi i /N}}{e^{2\pi i /N} - 1} = \frac{e^{2\pi i /N} (e^{2\pi i} - 1)}{e^{2\pi i /N} - 1} = 0,$$

y, análogamente, $\sum_{k=1}^N e^{4\pi i k/N} = 0$.

Aplicando estas igualdades, es evidente el resultado propuesto.

b) Teniendo en cuenta nuevamente (*) y que $\int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{2i\theta} d\theta = 0$, se obtiene el resultado.



8. Sea H un espacio de Hilbert y M un subconjunto de H cerrado, convexo y no vacío. Probar que M tiene un único elemento de norma mínima (es decir de distancia mínima al origen).

Resp.: Sea $\delta = \inf_{x \in M} \|x\|$ y consideramos la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $\|x_n\| \rightarrow \delta$.

Por la identidad del paralelogramo,

$$\left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 = \frac{\|x_n\|^2}{2} + \frac{\|x_m\|^2}{2}.$$

Como M es convexo, $\|(x_n + x_m)/2\| \geq \delta$, luego

$$\left\| \frac{x_n - x_m}{2} \right\|^2 \leq \frac{\|x_n\|^2}{2} + \frac{\|x_m\|^2}{2} - \delta^2 \rightarrow 0.$$

Esto implica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Por ser M cerrado, $\exists x_0 \in M : x_n \rightarrow x_0$. Además $\|x_0\| = \delta$.

Si existiera $y \in M$ también de norma mínima, la sucesión (x_0, y, x_0, y, \dots) sería de Cauchy y por tanto $x_0 = y$.



9. a) Probar que el espacio $C[-1, 1]$ es suma directa ortogonal de los conjuntos de las funciones pares e impares en $[-1, 1]$.

b) Dar ejemplos de descomposición de \mathbb{R}^3 como suma directa de un subespacio y su complemento ortogonal o un par de subespacios complementarios.

Resp.: a) Basta escribir $f(x) = (f(x) + f(-x))/2 + (f(x) - f(-x))/2$, donde el primer sumando es una función par y el segundo impar.

Además, si $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = g_1(x) + g_2(x)$ con f_1, g_1 pares y f_2, g_2 impares, entonces $f_1(x) - g_1(x) = g_2(x) - f_2(x)$, con $f_1 - g_1$ par y $g_2 - f_2$ impar. Esto implica que $f_1 - g_1 = 0 = g_2 - f_2$.

Además, la suma es ortogonal pues si f es par y g impar, $f \cdot g$ es impar y $\int_{-1}^1 f \cdot g = \langle f, g \rangle = 0$.

b) Un ejemplo trivial es $\mathbb{R}^3 = \langle \{(1, 0, 0)\} \rangle \oplus \langle \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\} \rangle$.



10. Probar que la descomposición $X = M \oplus M^\perp$ no es cierta si M es subespacio cerrado de X pero X es pre-Hilbert.

Resp.: Sea X el espacio de las sucesiones con soporte finito, el cual es pre-Hilbert considerado como subespacio de ℓ^2 .

Si $x^0 = (1/n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, llamamos $M = \{y \in X : y \perp x^0 \text{ en } \ell^2\}$.

Veamos que X no es completo: para ello consideramos la sucesión $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $x^n = (1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, 0, \dots)$, $n \geq 1$. Entonces, para $m < n$:

$$\|x^n - x^m\|_2^2 = \sum_{k=m+1}^n (1/2^k)^2 = \sum_{k=m+1}^n 1/4^k \leq \frac{1/4^{m+1}}{3/4} = \frac{1}{3 \cdot 4^m}$$

que tiende a cero si $m \rightarrow \infty$. Esto prueba que $\{x^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X pero $\lim x^n = x = (1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, \dots) \notin X$.

Calcularemos a continuación M^\perp . Para ello, sea $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \perp M$. Como los elementos $v^n = (0, \dots, 0, n, -(n+1), 0, \dots)$ están en M , en particular $x \perp v^n$, $\forall n$. Tenemos así:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, v^1 \rangle = x_1 - 2x_2 \implies x_2 = x_1/2, \\ 0 &= \langle x, v^2 \rangle = 2x_2 - 3x_3 = 0 \implies x_3 = 2x_2/3 = x_1/3, \\ &\vdots \\ 0 &= \langle x, v^n \rangle = nx_n - (n+1)x_{n+1} = 0 \implies x_{n+1} = nx_n/(n+1) = x_1/(n+1). \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $x \notin X$ pues x no tiene soporte finito; entonces $M^\perp = \{0\}$.



11. Probar que $Y = \{x = (\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \xi_{2n} = 0, n \in \mathbb{N}\}$ es subespacio cerrado de ℓ^2 y encontrar Y^\perp . ¿Quién es Y^\perp si $Y = \langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle \subset \ell^2$, con $e_k = (\delta_{kj})_{j \in \mathbb{N}}$?

Resp.: a) Es fácil ver que Y es subespacio.

Para probar que es cerrado, sea $x \in \overline{Y}$. Por definición, $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset Y : x_n \rightarrow x$.

Si $x \notin Y$, $\exists k \in \mathbb{N} : \xi_{2k} \neq 0$. Entonces $\|x_n - x\| \geq |\xi_{2k}|$. Esto prueba que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall N > 0$, $\|x_n - x\| \geq \varepsilon$, $\forall n > N$, con lo que $x_n \not\rightarrow x$, en contradicción con la suposición inicial.

Para determinar Y^\perp , sea $y \in Y^\perp \implies \langle x, y \rangle = 0$, $\forall x \in Y \implies \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n \overline{\eta_n} = 0$.

En particular, eligiendo los elementos $e_{2k+1} \in Y$, $\langle e_{2k+1}, y \rangle = \overline{\eta_{2k+1}} = 0$. Esto implica que

$$Y^\perp = \{y = (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \eta_{2n+1} = 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

b) Si $Y = \langle \{e_1, \dots, e_n\} \rangle$, todo elemento $y = (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in Y^\perp$, verifica $\eta_k = \langle y, e_k \rangle = 0, \forall k = 1, \dots, n$. Esto implica que

$$Y^\perp = \langle \{e_{n+1}, \dots\} \rangle = \{y = (\eta_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 : \eta_k = 0, k = 1, \dots, n\}.$$



12. Sea X un espacio de Hilbert y $f \in X', f \neq 0$. Si llamamos M al núcleo de f , probar que $\dim M^\perp = 1$.

Resp.: Como M es subespacio cerrado de $X, X = M \oplus M^\perp$ y $M^\perp \neq \{0\}$. Sea $m_0 \in M^\perp$ tal que $f(m_0) = 1$.

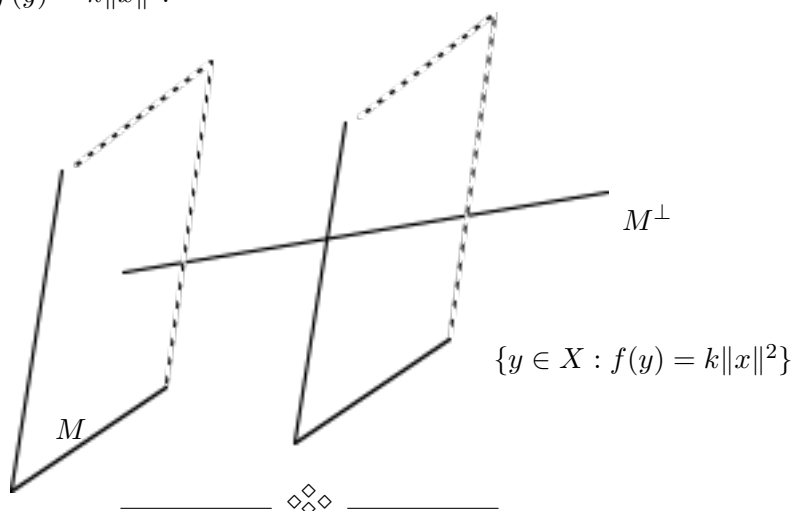
Dado cualquier $x \in M^\perp$, si llamamos $a = f(x)$, tenemos

$$f(x) = a = a \cdot f(m_0) = f(am_0) \implies f(x - am_0) = 0 \implies x - am_0 \in M.$$

Como $x = 0 + x = (x - am_0) + am_0$ y la descomposición es única, se deduce que $x = am_0$.

Esto proporciona la siguiente interpretación geométrica de cualquier $f \in X'$:

Existe un subespacio M de codimensión 1 en X (es decir, un hiperplano) sobre cuyos elementos f toma el valor cero. Existe además un vector x ortogonal a dicho hiperplano (es decir que genera el subespacio unidimensional M^\perp); el valor de f sobre un elemento y se obtiene mediante la proyección ortogonal de y sobre M^\perp ; así, si la proyección es kx , $f(y) = k\|x\|^2$.



13. En el espacio ϕ de las sucesiones con soporte finito se considera el conjunto

$$S = \{(\lambda_n) \in \phi : \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k/k = 0\}.$$

Probar que $S^\perp = \{0\}$.

Resp.: Consideremos el conjunto $S_1 = \{x_2, x_3, \dots\}$, donde, para cada $n \geq 2$, $x_n = (1, 0, \dots, 0, -n, 0, \dots)$ (donde $-n$ ocupa el lugar n -ésimo).

Entonces $S_1 \subset S$ pues si $x \in S_1$, $\sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k/k = 1 + -n/n = 0 \implies x \in S$.

Como $S^\perp \subset S_1^\perp$, basta probar que $S_1^\perp = \{0\}$.

Sea pues $y \in S_1^\perp$; entonces $\langle y, x_n \rangle = 0$, de donde $y_1 - ny_n = 0$, $\forall n$. Como el soporte de y es finito, $y_k = 0$, $\forall k > N$; en particular $0 = \langle y, x_{N+1} \rangle = y_1 \implies y_1 = 0$ lo que implica a su vez que $y_n = 0$, $\forall n$.



14. Encontrar los complementos ortogonales en $L^2(0,1)$ de los siguientes conjuntos:

- a) Los polinomios en x .
- b) Los polinomios en x^2 .
- c) Los polinomios con término independiente cero.
- d) Los polinomios cuya suma de coeficientes es cero.

Resp.: El complemento ortogonal es $\{0\}$ en todos los casos.

* Es sabido que el espacio de los polinomios es denso en L^2 . Basta probar pues que todos los polinomios están en la clausura de los conjuntos dados.

* Para el apartado b), basta observar que

$$x = \sqrt{1 - (1 - x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} (1 - x^2)^n$$

si $0 < x < \sqrt{2}$, y x está en la clausura del espacio generado por los polinomios en x^2 .

* Para el apartado c), basta observar que

$$1 = x \cdot \frac{1}{1 + (x-1)} = x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (x-1)^n$$

si $0 < x < 2$, de modo que 1 es límite de una sucesión de polinomios en x .

* Para el apartado d), observar que

$$x^k = \sum_{n=0}^{\infty} (x^{k+n} - x^{k+n+1}), \quad \forall k.$$

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

15. En el espacio $C[-1, 1]$ con el producto $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$, se pide encontrar los complementos ortogonales de los siguientes conjuntos:

a) Las funciones que se anulan para $x \leq 0$.

b) Las funciones que se anulan en $x = 0$.

Resp.: a) Claramente, $M^\perp = \{f \in C[-1, 1] : f(x) = 0, \forall x \geq 0\}$.

b) Veamos que $M^\perp = \{0\}$.

En efecto, por definición, $f \in M^\perp \iff \langle f, g \rangle = 0, \forall g \in M$. Si fuera f no nula, $\exists x_0 \in [-1, 1] : f(x_0) \neq 0$. Entonces $\exists \delta > 0 : f(x) \neq 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

En caso de que $f(0) = 0$, haciendo $g(x) = f(x), \forall x \in [-1, 1]$, tendríamos

$$0 = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 |f(x)|^2 dx \implies f = 0.$$

Así pues, debe ser $f(0) \neq 0$; entonces $\exists \delta > 0 : f(x) \neq 0, \forall x \in (-\delta, \delta)$.

Haciendo $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |x| > \delta \\ \frac{|x|f(x)}{\delta} & \text{si } |x| < \delta, \end{cases}$ resulta

$$0 = \langle f, g \rangle \geq \int_{|x| > \delta} |f(x)|^2 dx \geq 0.$$

Esto implica que $f(x) = 0$ si $|x| > \delta, \forall \delta$, de modo que $f = 0$.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

16. Si X es un espacio pre-Hilbert y $S \subset X$, probar:

- a) S^\perp es subespacio cerrado de X .
- b) $S \subset S^{\perp\perp}$.
- c) $S_1 \subset S_2 \implies S_1^\perp \supset S_2^\perp$.
- d) Si X es de Hilbert, M, N subespacios cerrados de X y $M \perp N$, entonces $M + N$ es subespacio cerrado.
- e) Si X es de Hilbert, entonces $\langle S \rangle$ es denso en X si y sólo si $S^\perp = \{0\}$.

Resp.: a) Es evidente que S^\perp es subespacio. Para ver que es cerrado, sea $y \in \overline{S^\perp}$; entonces $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S^\perp : x_n \rightarrow y$. Sea $z \in S$ arbitrario:

$$|\langle y, z \rangle| = |\langle y - x_n, z \rangle + \langle x_n, z \rangle| = |\langle y - x_n, z \rangle| \leq \|y - x_n\| \cdot \|z\| \rightarrow 0.$$

Esto implica que $y \in S^\perp$.

b) $y \in S \implies \langle y, z \rangle = 0, \forall z \in S^\perp \implies y \in S^{\perp\perp}$.

c) $y \in S_2^\perp \implies \langle y, z \rangle = 0, \forall z \in S_2 \implies \langle y, z \rangle = 0, \forall z \in S_1 \implies y \in S_1^\perp$.

d) Sea $x \in \overline{M + N}$; entonces $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M + N : x_n \rightarrow x$. Como $x_n = y_n + z_n$, con $y_n \in M, z_n \in N$, por el teorema de Pitágoras,

$$\|x_n - x_m\|^2 = \|y_n - y_m\|^2 + \|z_n - z_m\|^2$$

y como $\|x_n - x_m\| \rightarrow 0$, entonces $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$ y $\|z_n - z_m\| \rightarrow 0$. Por ser M y N cerrados, $\exists y \in M, z \in N : y_n \rightarrow y, z_n \rightarrow z \implies x_n \rightarrow y + z = x \implies x \in M + N$.

e) Supongamos que $\langle S \rangle$ es denso en X y sea $y \in S^\perp$. Entonces

$$\langle y, x \rangle = 0, \forall x \in S \implies \langle y, z \rangle = 0, \forall z \in \langle S \rangle \implies \langle y, u \rangle = 0, \forall u \in \overline{\langle S \rangle} = X.$$

Por tanto, $y = 0$.

Recíprocamente, de la descomposición $X = S^\perp \oplus S^{\perp\perp}$, deducimos que todo $x \in X$ se escribe como $x = y + z$, con $y \in S^\perp, z \in S^{\perp\perp}$, de donde $x = z$.

Como $S^{\perp\perp} \supset S$, entonces $S^{\perp\perp} \supset \overline{\langle S \rangle}$. Ahora bien, como $S \subset \overline{\langle S \rangle}$, entonces $S^\perp \supset \overline{\langle S \rangle}^\perp$ y $S^{\perp\perp} \subset \overline{\langle S \rangle}$. Esto prueba que $\overline{\langle S \rangle} = S^{\perp\perp}$ y, en consecuencia, $x \in \overline{\langle S \rangle}$.



17. Sea H un espacio de Hilbert complejo.

- a) Probar que toda proyección ortogonal E es idempotente (es decir, $E^2 = E$) y autoadjunta (es decir, $\langle Ex_1, x_2 \rangle = \langle x_1, Ex_2 \rangle$).
- b) Probar el recíproco de lo anterior, es decir que todo operador autoadjunto e idempotente en H es una proyección ortogonal.

Resp.: a) Dado cualquier $x \in X$, $\exists y \in M$, $z \in M^\perp : x = y + z$, de donde $Ex = y$, $E^2x = Ey = y = Ex$ lo que implica que $E^2 = E$.

Además, si hacemos $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, con $y_1, y_2 \in M$, $z_1, z_2 \in M^\perp$:

$$\langle Ex_1, x_2 \rangle = \langle y_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle + \langle y_1, z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle x_1, y_2 \rangle = \langle x_1, Ex_2 \rangle.$$

b) Sea $E : X \rightarrow X$ autoadjunto e idempotente. Veamos en primer lugar que E es acotado:

$$\begin{aligned} x_n \rightarrow x &\implies \|E(x_n - x)\|^2 = \langle E(x_n - x), E(x_n - x) \rangle \\ &= \langle x_n - x, E^2(x_n - x) \rangle = \langle x_n - x, E(x_n - x) \rangle \rightarrow 0 \implies Ex_n \rightarrow Ex. \end{aligned}$$

Si definimos $M = \{x \in X : Ex = x\}$, veamos que M es cerrado:

Si $x \in \overline{M}$, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M : x_n \rightarrow x$, de donde $Ex_n \rightarrow Ex$. Ahora bien, como $Ex_n = x_n$, $x_n \rightarrow Ex$ y, por la unicidad del límite, $Ex = x \implies x \in M$.

Sean ahora $x \in X$, $y \in M$; entonces

$$\langle x - Ex, y \rangle = \langle x, y \rangle - \langle Ex, y \rangle = \langle x, Ey \rangle - \langle x, Ey \rangle = 0,$$

lo que implica que $x - Ex \perp M$.

Por último, si $z = x - Ex$, $x = Ex + z$, con $Ex \in M$, $z \in M^\perp$. Además $Ez = Ex - E^2x = Ex - Ex = 0$.



18. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que si $P \in L(H)$ es una proyección ortogonal, entonces $H = R(P) \oplus R(I - P)$, suma directa ortogonal.

Resp.: Si P es proyección ortogonal, por definición existe un subespacio cerrado M de H tal que, si $x \in H$ se descompone en $x = y + z$ con $y \in M$, $z \in M^\perp$, entonces $Px = y$.

Es evidente entonces que $R(P) = M$ y $R(I - P) = M^\perp$; por tanto $H = R(P) \oplus R(I - P)$ y además $R(P) \perp R(I - P)$.



19. Probar que las siguientes proposiciones son equivalentes en un espacio de Hilbert H :

- i) $P \in L(H)$ es una proyección ortogonal.
- ii) $P \in L(H)$ es tal que $P^2 = P$ y $R(P) \perp R(I - P)$.
- iii) $P \in L(H)$ es tal que $P^2 = P$ y $R(P)^\perp = \{x \in H : P(x) = 0\}$.

Resp.: i) \implies ii). Es evidente (ver el ejercicio anterior).

ii) \implies iii). Como $\forall x \in H$, $x = Px + (I - P)x$, entonces $H = R(P) + R(I - P)$. Además, por hipótesis, $R(P) \perp R(I - P)$ lo que prueba que $H = R(P) \oplus R(I - P)$, es decir, $R(P)^\perp = R(I - P)$.

Basta pues probar que $R(I - P) = N(P)$. En efecto,

$$\begin{aligned} y \in R(I - P) &\implies \exists x \in H : y = x - Px \\ &\implies Py = Px - P^2x = Px - Px = 0 \implies y \in N(P), \\ x \in N(P) &\implies Px = 0 \implies x - Px = x \implies x \in R(I - P). \end{aligned}$$

iii) \implies i). Sea $M = R(P)$. Así, M es subespacio de H . Además, M es cerrado, pues $M = N(I - P)$ (lo que se prueba análogamente al apartado anterior). Por hipótesis, $M^\perp = N(P)$. Entonces, dados $y \in M$, $z \in M^\perp$:

$$P(y + z) = Py + Pz = Py = y \implies P \text{ es la proyección sobre } M.$$



20. En ℓ^2 se considera la sucesión $\{e_n\}_{n \geq 1}$ definida por $e_n = (\delta_{nk})_{k \geq 1}$ y el conjunto $M = \{e_{2n-1} + e_{2n} : n \geq 1\}$.

- a) Identificar los subespacios cerrados M^\perp y $M^{\perp\perp}$ en ℓ^2 .
- b) Sean P y Q las proyecciones ortogonales tales que $R(P) = M^\perp$ y $R(Q) = M^{\perp\perp}$. Si $a = (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \ell^2$, probar que $P(a) = (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$, donde $b_{2k-1} = -b_{2k} = (a_{2k-1} - a_{2k})/2$, $k \geq 1$; y que $Q(a) = (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$, donde $c_{2k-1} = c_{2k} = (a_{2k-1} + a_{2k})/2$, $k \geq 1$.

Resp.: a) Por definición,

$$y \in M^\perp \iff \langle y, e_{2n-1} + e_{2n} \rangle = 0 \iff y_{2n-1} + y_{2n} = 0.$$

Por tanto, $M^\perp = \{y \in \ell^2 : y_{2n-1} + y_{2n} = 0, n \geq 1\} = \overline{\langle \{e_{2n-1} - e_{2n} : n \geq 1\} \rangle}$.

Por otra parte,

$$y \in M^{\perp\perp} \iff \langle y, e_{2n-1} - e_{2n} \rangle = 0 \iff y_{2n-1} - y_{2n} = 0.$$

Así pues, $M^{\perp\perp} = \{y \in \ell^2 : y_{2n-1} - y_{2n} = 0\} = \overline{\langle M \rangle}$.

b) Si $a \in \ell^2$,

$$a = (\dots, a_{2k-1}, a_{2k}, \dots) = \sum_k \lambda_k (e_{2k-1} - e_{2k}) + \sum_k \mu_k (e_{2k-1} + e_{2k}).$$

Entonces

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_k + \mu_k = a_{2k-1} \\ -\lambda_k + \mu_k = a_{2k} \end{array} \right\} \implies \lambda_k = \frac{a_{2k-1} - a_{2k}}{2}, \mu_k = \frac{a_{2k-1} + a_{2k}}{2}.$$

Como $Pa = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k (e_{2k-1} - e_{2k})$, $Qa = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k (e_{2k-1} + e_{2k})$, deducimos que

$$\begin{aligned} Pa &= (\lambda_1, -\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_2, \dots), \text{ con } \lambda_k = (a_{2k-1} - a_{2k})/2, \\ Qa &= (\mu_1, \mu_1, \mu_2, \mu_2, \dots), \text{ con } \mu_k = (a_{2k-1} + a_{2k})/2. \end{aligned}$$



21. Sean H un espacio de Hilbert, M un subespacio cerrado de H y $T \in L(H)$. Se dice que M es *invariante* bajo T si $Tx \in M$, $\forall x \in M$, y que M *reduce* a T si M y M^\perp son invariantes bajo T . Sea $P \in L(H)$ la proyección ortogonal tal que $R(P) = M$.

a) Probar que M es invariante bajo T si y sólo si $PTP = TP$.

b) Probar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

i) M reduce a T .

ii) $PT = TP$.

iii) M es invariante bajo T y T^* .

Resp.: a) \implies : $\forall x \in H$, $x = y + z$, con $y \in M$, $z \in M^\perp$. Entonces $(PTP)x = P(Ty) = Ty$ pues $Ty \in M$. Como $y = Px$, $(PTP)x = TPx$.

\Leftarrow : Si $x \in M$, $Tx = TPx = P(TP)x$ que, por definición, está en M .

b) i) \implies ii): $\forall x \in H$, escribimos $x = y + z$, con $y \in M$, $z \in M^\perp$. Por hipótesis, $Ty \in M$, $Tz \in M^\perp$. Entonces

$$PTx = PTy + PTz = Ty = TPx.$$

ii) \implies iii): Como P es la proyección sobre M , $\forall x \in M$,

$$Px = x \implies TPx = Tx \implies P(Tx) = Tx \implies Tx \in M.$$

Por otra parte, para cualquier $y \in M^\perp$,

$$\begin{aligned} \langle T^*x, y \rangle &= \langle x, Ty \rangle = \langle Px, Ty \rangle = \langle x, PTy \rangle \\ &= \langle x, TPy \rangle = \langle x, T0 \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0 \implies T^*x \perp M^\perp \implies T^*x \in M. \end{aligned}$$

iii) \implies i): Sólo falta ver que $\forall x \in M^\perp$, $Tx \in M^\perp$. Pero si $x \in M^\perp$, entonces $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = 0$, $\forall y \in M$, pues M es invariante bajo T^* . Esto muestra que $Tx \in M^\perp$.



22. En $C^1[a, b]$ definimos $\langle f, g \rangle = \int_a^b (f(x) \overline{g(x)} + f'(x) \overline{g'(x)}) dx$.

a) Probar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es un producto escalar en $C^1[a, b]$.

b) Probar que $\forall f \in C^1[-\pi, \pi]$,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) \cos x - f'(x) \sin x) dx \right| \leq \sqrt{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} (|f(x)|^2 + |f'(x)|^2) dx \right]^{1/2}.$$

c) Probar que la familia $(g_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, donde $g_n(x) = \frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi(1+n^2)}}$, es un sistema ortonormal en $C^1[-\pi, \pi]$.

d) Si $W = \{f \in C^1[-\pi, \pi] : f(-\pi) = f(\pi)\}$, probar que la función $f(x) = \operatorname{sh} x$ es ortogonal a W . Deducir que la familia $\{g_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en c) no es base ortonormal de $C^1[-\pi, \pi]$.

Resp.: a) Como $\langle f, f \rangle = \int_a^b |f(x)|^2 dx + \int_a^b |f'(x)|^2 dx$, entonces $\langle f, f \rangle \geq 0$.

Ahora bien, si $\langle f, f \rangle = 0$, como f es continua, $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$.

El resto de axiomas se deduce de la linealidad de la integral.

b) Basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a las funciones $f \in C^1[-\pi, \pi]$ y $g(x) = \cos x$ y tener en cuenta que $\|g\|^2 = 2\pi$.

c) Por la definición,

$$\begin{aligned}\langle g_n, g_m \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{e^{inx}}{\sqrt{2\pi(1+n^2)}} \cdot \frac{e^{-imx}}{\sqrt{2\pi(1+m^2)}} + \frac{ine^{inx}}{\sqrt{2\pi(1+n^2)}} \cdot \frac{-ime^{-imx}}{\sqrt{2\pi(1+m^2)}} \right] dx \\ &= \frac{1+nm}{2\pi\sqrt{(1+n^2)(1+m^2)}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ 1 & \text{si } n = m. \end{cases}\end{aligned}$$

d) Sea $g \in W$ arbitrario. Integrando por partes,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \overline{g'(x)} dx = f'(x) \overline{g(x)} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \overline{g(x)} dx.$$

Como $g(\pi) = g(-\pi) = 0$ y $f''(x) = f(x)$, resulta:

$$\begin{aligned}\langle f, g \rangle &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \overline{g'(x)} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \overline{g(x)} dx = 0.\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $W^\perp \neq \{0\}$ y, como las funciones g_n de la familia ortonormal están en W , no forman una base ortonormal.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

23. Sea $f \in C^{(m)}[-1, 1]$. Probar que los coeficientes de Legendre de f son $a_k = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \int_{-1}^1 f^{(k)}(t)(1-t^2)^k dt$, $k \leq m$.

Resp.: Teniendo en cuenta que $p_k(x) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k$, obtenemos integrando por partes:

$$\begin{aligned}a_k &= \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \int_{-1}^1 f(x) \cdot \frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k dx \\ &= \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \cdot (-1)^k \int_{-1}^1 f^{(k)}(x) \cdot (x^2-1)^k dx \\ &= \sqrt{\frac{2k+1}{2}} \cdot \frac{1}{2^k \cdot k!} \int_{-1}^1 f^{(k)}(x) \cdot (1-x^2)^k dx.\end{aligned}$$

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

24. Encontrar $\min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$.

Resp.: Si $D^2 = \min_{a,b,c \in \mathbb{C}} \int_{-1}^1 |x^3 - a - bx - cx^2|^2 dx$, D es la distancia en $L^2[-1, 1]$ de x^3 al plano generado por $\{1, x, x^2\}$, es decir, la distancia de x^3 al plano generado por $\{1/\sqrt{2}, \sqrt{3/2} \cdot x, \sqrt{5/2} \cdot (1/2) \cdot (3x^2 - 1)\}$.

Si $\alpha p_0 + \beta p_1 + \gamma p_2$ es la proyección de x^3 sobre dicho plano, entonces:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-1}^1 (x^3 - \alpha p_0 - \beta p_1 - \gamma p_2) p_0 dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 (x^3 - \alpha) dx \implies \alpha = 0, \\ 0 &= \int_{-1}^1 (x^3 - \alpha p_0 - \beta p_1 - \gamma p_2) p_1 dx = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 (x^4 - \beta) dx \implies \beta = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{5}, \\ 0 &= \int_{-1}^1 (x^3 - \alpha p_0 - \beta p_1 - \gamma p_2) p_2 dx = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot \frac{1}{2} \int_{-1}^1 ((3x^2 - 1)x^3 - \gamma) dx \implies \gamma = 0. \end{aligned}$$

Deducimos entonces que $D^2 = \int_{-1}^1 |x^3 - (3/5)x|^2 dx = (2/7) - (6/25)$, de donde $D = \sqrt{8/175}$.



25. Encontrar las series de Fourier de las siguientes funciones definidas en $L^2[-\pi, \pi]$ y utilizar la identidad de Parseval para deducir cada una de las fórmulas enunciadas:

a) $f(x) = x$, $\sum_{n \geq 1} 1/n^2 = \pi^2/6$.

b) $f(x) = x^2$, $\sum_{n \geq 1} 1/n^4 = \pi^4/90$.

Resp.: Utilizaremos el conjunto $\{\frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} : k \in \mathbb{Z}\}$ como base ortonormal de $L^2(-\pi, \pi)$.

a) Como $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \cdot \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, donde $a_k = \langle f, e^{ikx}/\sqrt{2\pi} \rangle$, obtenemos $a_0 = 0$ y, para $k \neq 0$:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} x \cdot \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{x}{-ik} \cdot \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik\sqrt{2\pi}} dx \\ &= \frac{-\pi}{ik} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{2\pi}} - \frac{\pi(-1)^k}{ik\sqrt{2\pi}} = \frac{-\pi}{ik} \cdot \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (-1)^k. \end{aligned}$$

Entonces

$$x = \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} (-1)^{k+1} \frac{e^{ikx}}{ik}.$$

Teniendo en cuenta que $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3}\pi^3$ y

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k \neq 0} \frac{\pi^2}{k^2} \cdot \frac{4}{2\pi} = \sum_{k \neq 0} \frac{2\pi}{k^2},$$

aplicando la identidad de Parseval $\|x\|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2$, resulta que

$$\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

b) Análogamente al caso anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{4\pi}{k^2} (-1)^k, \quad k \neq 0; \\ a_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{3} \pi^3. \end{aligned}$$

Nuevamente, de la identidad de Parseval,

$$\left. \begin{aligned} \|f(x)\|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{2\pi^5}{5} \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 &= \frac{2}{9}\pi^5 + \sum_{k \neq 0} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{16\pi^2}{k^4} \end{aligned} \right\} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$



26. Sea X un espacio pre-Hilbert y $A = (x_{\alpha})_{\alpha \in I}$ un conjunto ortonormal completo. Encontrar el elemento de mejor aproximación a $x \in X$ en el subespacio $M = \overline{\langle A \rangle}$.

Resp.: Como $X = M \oplus M^{\perp}$, todo $x \in X$ se descompone de forma única como $x = y + z$, con $y \in M$, $z \in M^{\perp}$. Pero, por hipótesis,

$$y = \sum_{\alpha \in I} \langle y, x_{\alpha} \rangle x_{\alpha} = \sum_{\alpha \in I} \langle x - z, x_{\alpha} \rangle x_{\alpha} = \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_{\alpha} \rangle x_{\alpha}.$$

Por tanto, $\|x - \sum_{\alpha \in I} \langle x, x_{\alpha} \rangle x_{\alpha}\| \leq \|x - \sum_{\alpha \in I} \lambda_{\alpha} x_{\alpha}\|$, $\forall \lambda_{\alpha} \in E$, lo que prueba que la proyección de x sobre M produce la mejor aproximación en M .



27. Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_1, \dots, e_n\}$ un conjunto linealmente independiente. Dado $x \in H$, calcular la distancia de x al subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$. Deducir de lo anterior la desigualdad de Bessel.

Resp.: Llamamos M al subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Si escribimos $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$, sabemos que $\|x - x_1\| = d(x, M)$.

El problema se reduce pues a calcular x_1 , la proyección ortogonal de x en M .

Llamamos $\{v_1, \dots, v_n\}$ a la base ortonormal obtenida de $\{e_1, \dots, e_n\}$ por el proceso de Gram-Schmidt. Como $x_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$ y $x - x_1 \perp v_k$, $\forall k$, entonces $\alpha_i = \langle x, v_i \rangle$, de donde $x_1 = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i$.

Además

$$\begin{aligned} d(x, M)^2 &= \|x - \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i\|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle \langle v_i, x \rangle - \sum_{i=1}^n \overline{\langle x, v_i \rangle} \langle x, v_i \rangle + \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\langle x, v_i \rangle|^2. \end{aligned}$$

De aquí se deduce inmediatamente la desigualdad de Bessel.



28. Sea H un espacio de Hilbert y $M \subset H$ un subespacio vectorial. Si $\overline{M} \neq H$, probar que existe $y \in H$, $y \neq 0$, tal que $y \perp \overline{M}$. Concluir que M es denso si y sólo si el único elemento ortogonal a M es $y = 0$.

Resp.: a) Es claro que $(\overline{M}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es de Hilbert. Por tanto, existe un conjunto ortonormal completo de \overline{M} , que denotaremos por $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$.

Dado $z \in H \setminus \overline{M}$, $z \neq 0$, definimos $y = z - \sum_{\alpha \in I} \langle z, x_\alpha \rangle x_\alpha$. Así definido, $\langle y, x_\alpha \rangle = 0$, lo que implica que $y \perp \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ y también $y \perp \overline{M}$.

b) Es evidente que si M es denso en H , e $y \perp M$, entonces $y \perp \overline{M}$, de donde $y = 0$.

Recíprocamente, si M no fuera denso, por a) existiría $y \in H$, $y \neq 0$ tal que $y \perp \overline{M}$ y en particular $y \perp M$ lo que contradice la hipótesis.



29. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio pre-Hilbert X e Y_k el espacio generado por $\{e_1, \dots, e_k\}$.

a) Si $x \in X$, $y = \sum_{n=1}^k \langle x, e_n \rangle e_n$, probar que $x - y \perp Y_k$.

b) Si $x \in X$, $y = \sum_{n=1}^k \beta_n e_n$, probar que $\|x - y\|$ es mínimo en Y_k si $\beta_n = \langle x, e_n \rangle$, $n = 1, \dots, k$.

Resp.: a) Sea $z = \sum_{n=1}^k \gamma_n e_n$ un elemento arbitrario de Y_k . Entonces

$$\langle x - y, z \rangle = \langle x, z \rangle - \langle y, z \rangle = \sum_{n=1}^k \overline{\gamma_n} \langle x, e_n \rangle - \sum_{n=1}^k \alpha_n \langle e_n, z \rangle = 0.$$

b) Teniendo en cuenta que $x - y \in Y_k^\perp$, $y - z \in Y_k$, resulta:

$$\|x - z\|^2 = \|x - y + y - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2 \geq \|x - y\|^2, \quad \forall z \in Y_k.$$



30. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en X y $x \in X$. Probar que el número m_k de coeficientes de Fourier $\langle x, e_n \rangle$ de x tales que $|\langle x, e_n \rangle| > 1/k$ verifica $m_k < k^2 \|x\|^2$ (esto quiere decir que x no tiene demasiados coeficientes de Fourier “grandes”).

Resp.: Si llamamos $E_k = \{\langle x, e_n \rangle : |\langle x, e_n \rangle| > 1/k\}$ y elegimos los elementos $\{e_1, \dots, e_{m_k}\}$ tales que $\{\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_{m_k} \rangle\} \subset E_k$, entonces por la desigualdad de Bessel,

$$\sum_{n=1}^{m_k} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \implies m_k \cdot \frac{1}{k^2} < \|x\|^2 \implies m_k < k^2 \cdot \|x\|^2.$$



31. Sea μ la medida en \mathbb{R} definida por $\mu(A) = \text{card}(A)$, $\forall A \subset \mathbb{R}$. Probar que $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ es no separable e isomorfo al espacio de los polinomios trigonométricos (combinaciones lineales de $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$).

Resp.: Sea $f_\lambda(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = \lambda \\ 0 & \text{si } x \neq \lambda. \end{cases}$ Entonces $\{f_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.

Como no es numerable, el espacio no es separable.

Por otra parte, la aplicación $f_\lambda \mapsto e^{i\lambda x}$ es un isomorfismo entre ambos espacios. Además es isometría pues:

$$\langle f_{\lambda_1}, f_{\lambda_2} \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_{\lambda_1}(x) \overline{f_{\lambda_2}(x)} d\mu(x) = \int_{\bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}} |f_{\lambda_1}(x)|^2 d\mu(x) = 1.$$

————— $\diamond \diamond$ —————

32. Sea X un espacio de Hilbert. Probar que si X contiene una sucesión ortonormal completa, entonces X es separable.

Resp.: Si X no fuera separable, todo subconjunto denso en X sería no numerable.

Sin embargo si $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión ortonormal completa, $M = \langle \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$ y todo $x \in X$ sería de la forma $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$, es decir $x \in \overline{M}$.

————— $\diamond \diamond$ —————

33. Sea $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal en un espacio de Hilbert H y $M_1 = \langle \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$.

a) Probar que $\forall x \in H, x \in \overline{M_1} \iff x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n$, con $\alpha_n = \langle x, e_n \rangle$.

b) Si $\{\tilde{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es otra sucesión ortonormal en H y definimos $M_2 = \langle \{\tilde{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$, probar que $\overline{M_1} = \overline{M_2} \iff e_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha_{nm} \tilde{e}_m, \tilde{e}_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \bar{\alpha}_{mn} e_m$, con $\alpha_{nm} = \langle e_n, \tilde{e}_m \rangle$.

Resp.: a) “ \implies ” Llamamos $y = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ (ya se probó que la serie es convergente). Entonces:

$$\langle x - y, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle - \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, e_k \rangle = 0 \implies x - y \perp M_1 \implies x - y \perp \overline{M_1}.$$

Mediante la descomposición $H = \overline{M_1} \oplus \overline{M_1}^\perp$, sabemos que $x = y + z$, con $y \in \overline{M_1}, z \in \overline{M_1}^\perp$. Como, por hipótesis, $x \in \overline{M_1}$, deducimos que $y = x$.

“ \Leftarrow ” Como la serie $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, e_n \rangle e_n$ es convergente, $\lim_n S_k = x$, donde $S_k = \sum_{n=1}^k \alpha_n e_n$. Esto implica que $x \in \overline{M_1}$ porque la sucesión $\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset M_1$ converge a x .

b) “ \Rightarrow ”. Aplicando el apartado a), obtenemos:

$$\begin{aligned} e_n \in M_1 &\Rightarrow e_n \in \overline{M_2} \Rightarrow e_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha_{nm} \tilde{e}_m, \text{ con } \alpha_{nm} = \langle e_n, \tilde{e}_m \rangle \\ \tilde{e}_n \in M_2 &\Rightarrow \tilde{e}_n \in \overline{M_1} \Rightarrow \tilde{e}_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha_{mn} e_m, \text{ con } \alpha_{mn} = \overline{\langle \tilde{e}_n, e_m \rangle} = \langle e_m, \tilde{e}_n \rangle. \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ” Nuevamente del apartado a), resulta:

$$\begin{aligned} x \in \overline{M_1} &\Leftrightarrow x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n e_n, \text{ con } \alpha_n = \langle x, e_n \rangle = \sum_{m \in \mathbb{N}} \overline{\alpha_{nm}} \langle x, \tilde{e}_m \rangle \\ &\Leftrightarrow x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \overline{\alpha_{nm}} \langle x, \tilde{e}_m \rangle e_n = \sum_{m \in \mathbb{N}} \langle x, \tilde{e}_m \rangle \tilde{e}_m \Leftrightarrow x \in \overline{M_2}. \end{aligned}$$



34. Sea $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal en un espacio de Hilbert H y $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada de números complejos, con $M = \sup\{|\mu_k|, k \in \mathbb{N}\}$.

- a) Probar que existe un único $T \in L(H)$ tal que $Te_k = \mu_k e_k$.
- b) Probar que $\|T\| = M$.
- c) Encontrar T^* y calcular su norma.
- d) Probar que T es normal, es decir $TT^* = T^*T$.
- e) ¿Qué propiedad debe cumplir la sucesión $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ para que T sea autoadjunto?
- f) Probar que, si $|\mu_k| > 1$, para todo k , entonces existe $T^{-1} \in L(H)$.

Resp.: a) Basta definir $Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle x, e_k \rangle e_k$ pues $\forall x \in H, x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_k \rangle e_k$.

La unicidad es evidente.

T es claramente lineal y, por la identidad de Parseval,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2 |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq M^2 \cdot \|x\|^2$$

lo que implica que T es acotado y $\|T\| \leq M$.

b) En particular,

$$\|Te_k\| = \|\mu_k e_k\| = |\mu_k| \implies \|T\| \geq |\mu_k|, \forall k \implies \|T\| \geq M.$$

De aquí se deduce que $\|T\| = M$.

c) Como $\langle Te_k, e_k \rangle = \langle \mu_k e_k, e_k \rangle = \mu_k$, entonces $\langle e_k, T^* e_k \rangle = \mu_k$ y deducimos que $T^* e_k = \bar{\mu}_k e_k$.

Así definido, T^* es lineal y acotado con $\|T^*\| = \|T\|$.

d) Veamos que $TT^* = T^*T$:

$$\begin{aligned} T^* T e_k &= T^*(\mu_k e_k) = \bar{\mu}_k \mu_k e_k = |\mu_k|^2 e_k, \\ TT^* e_k &= T(\bar{\mu}_k e_k) = \mu_k \bar{\mu}_k e_k = |\mu_k|^2 e_k. \end{aligned}$$

e) Evidentemente, $T = T^*$ si $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

f) Si $|\mu_k| > 1$, $1 = \|e_k\| < |\mu_k| = \|Te_k\| \implies \exists T^{-1} \in L(H)$.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

35. Sea X un espacio normado e Y un espacio pre-Hilbert. Si un operador $T : X \rightarrow Y$ es lineal y acotado, probar que $\|T\| = \sup A$, donde

$$A = \left\{ \frac{|\langle Tx, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \right\}.$$

Resp.: Por la desigualdad de Cauchy- Schwarz,

$$\frac{|\langle Tx, y \rangle|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{\|Tx\| \cdot \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{\|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|}{\|x\| \cdot \|y\|} = \|T\| \implies \sup A \leq \|T\|.$$

Por otra parte, como $x/\|x\|$ y $Tx/\|Tx\|$ tienen norma 1, entonces $|\langle T(x/\|x\|), Tx/\|Tx\| \rangle| \in A$. Por tanto:

$$\left| \left\langle T\left(\frac{x}{\|x\|}\right), \frac{Tx}{\|Tx\|} \right\rangle \right| = \frac{1}{\|x\| \cdot \|Tx\|} |\langle Tx, Tx \rangle| = \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \sup A.$$

De aquí se deduce que $\sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|/\|x\| \leq \sup A$ con lo que $\|T\| \leq \sup A$.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

36. Averiguar si la implicación $\langle Tx, x \rangle = 0, \forall x \in X \implies T = 0$ es cierta en los siguientes casos:

a) H espacio de Hilbert real y $T \in L(H)$.

b) H espacio de Hilbert complejo y $T \in L(H)$.

c) H espacio de Hilbert y $T = T^*$.

Resp.: a) La implicación anterior no es cierta como se muestra con el siguiente ejemplo:

En el espacio $H = \mathbb{R}^2$ definimos $T(1, 0) = (0, 1)$, $T(0, 1) = (-1, 0)$; es evidente que $T \neq 0$ pero $\langle Tx, x \rangle = 0, \forall x \in H$, pues $T(a, b) = (-b, a)$.

b) Sean $x, y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{C}$ arbitrarios. Entonces:

$$\begin{aligned} 0 = \langle T(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle &= \langle Tx, x \rangle + \alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle + \langle T(\alpha y), \alpha y \rangle \\ &= \alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

En particular, si $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 = \langle Ty, x \rangle + \langle Tx, y \rangle$ y, si $\alpha = i$, $0 = \langle Ty, x \rangle - \langle Tx, y \rangle$. Al resolver el sistema obtenemos $\langle Tx, y \rangle = 0, \forall x, y \in H$ de lo que se deduce que $T = 0$ y la implicación es cierta.

c) En el capítulo VII se prueba (teorema de Hellinger-Toeplitz) que todo operador lineal autoadjunto es acotado; esto indica que, si H es complejo, la implicación es cierta, como se deduce de b). Ahora bien, si H es real, entonces, para cualesquiera $x, y \in H$, tenemos:

$$0 = \langle T(x + y), x + y \rangle = \langle Ty, x \rangle + \langle Tx, y \rangle = \langle y, Tx \rangle + \langle Tx, y \rangle = 2\langle Tx, y \rangle$$

y la implicación también es cierta.



37. Probar que el teorema de representación de Riesz permite definir un producto escalar en el dual de un espacio de Hilbert. Probar que la norma asociada a dicho producto escalar coincide con la norma usual de operadores.

Resp.: Sean $f_1, f_2 \in X'$. Por el teorema de representación de Riesz, existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $f_1(y) = \langle y, x_1 \rangle$, $f_2(y) = \langle y, x_2 \rangle$, $\forall y \in X$.

Definimos en X' el producto $\langle f_1, f_2 \rangle = \langle x_2, x_1 \rangle$.

• Como $(f_1 + f_2)(y) = f_1(y) + f_2(y) = \langle y, x_1 \rangle + \langle y, x_2 \rangle = \langle y, x_1 + x_2 \rangle$, entonces

$$\langle f_1 + f_2, f_3 \rangle = \langle x_3, x_1 + x_2 \rangle = \langle x_3, x_1 \rangle + \langle x_3, x_2 \rangle = \langle f_1, f_3 \rangle + \langle f_2, f_3 \rangle.$$

• Como $(\lambda f_1)(y) = \lambda f_1(y) = \lambda \langle y, x_1 \rangle = \langle y, \bar{\lambda} x_1 \rangle$, entonces

$$\langle \lambda f_1, f_2 \rangle = \langle x_2, \bar{\lambda} x_1 \rangle = \lambda \langle x_2, x_1 \rangle = \lambda \langle f_1, f_2 \rangle.$$

• $\langle f_1, f_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle = \|x_1\|^2 \geq 0$.

La norma asociada es $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle x, x \rangle$, es decir $\|f\| = \|x\|$ y coincide con la norma usual.



38. a) Si X es un espacio pre-Hilbert y $z \in X$, probar que $f_z(x) = \langle x, z \rangle$ define un funcional lineal acotado f sobre X de norma $\|z\|$.

b) Si la aplicación $X \rightarrow X'$ dada por $z \mapsto f_z$ es sobre, probar que X es de Hilbert.

Resp.: a) Es evidente que f_z es lineal.

Como $|f_z(x)| = |\langle x, z \rangle| \leq \|x\| \cdot \|z\|$, entonces $\|f_z\| \leq \|z\|$.

Por otra parte, de $|f_z(z)| = |\langle z, z \rangle| = \|z\|^2$, se deduce que $\|f_z\| \geq \|z\|$.

b) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X . Debido a que

$$f_{x_n - x_m}(y) = \langle y, x_n \rangle - \langle y, x_m \rangle = f_{x_n}(y) - f_{x_m}(y) = (f_{x_n} - f_{x_m})(y),$$

la sucesión $\{f_{x_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en X' porque $\|f_{x_n} - f_{x_m}\| = \|x_n - x_m\| \rightarrow 0$. Esto implica que $\exists f \in X' : f_{x_n} \rightarrow f$. Por tanto, $\exists x \in X : f = f_x$. Así pues, $\|f_{x_n} - f_x\| = \|x_n - x\| \rightarrow 0$.



39. Probar que todo espacio de Hilbert H es isomorfo a su segundo dual $H'' = (H')'$.

Resp.: Si probamos que H es isométrico a H' , como H' es también de Hilbert, entonces $H' \simeq H''$ y por la transitividad, $H \simeq H''$.

Por el teorema de representación de Riesz,

$$\forall f \in H', \exists z \in H : f(x) = \langle x, z \rangle, \forall x \in H$$

y $\|f\| = \|z\|$.

Definimos $T : H' \rightarrow H$ por $Tf = z$ y probemos que T es un isomorfismo isométrico.

- T es lineal: Si $f_1(x) = \langle x, z_1 \rangle$ y $f_2(x) = \langle x, z_2 \rangle$, entonces:

$$\begin{aligned}\langle x, Tf_1 + Tf_2 \rangle &= \langle x, Tf_1 \rangle + \langle x, Tf_2 \rangle = \langle x, z_1 \rangle + \langle x, z_2 \rangle \\ &= \langle x, z_1 + z_2 \rangle = \langle x, T(f_1 + f_2) \rangle \implies Tf_1 + Tf_2 = T(f_1 + f_2).\end{aligned}$$

Idem con αf .

- T es biyectiva: $Tf_1 = Tf_2 \implies z_1 = z_2 \implies \langle x, z_1 \rangle = \langle x, z_2 \rangle, \forall x \implies f_1 = f_2. \forall z \in H, \exists f_z \in H'$ definido por $f_z(x) = \langle x, z \rangle$. Además $Tf_z = z$.
- T es isometría: $\|Tf\| = \|z\| = \|f\|, \forall f \implies \|T\| = 1$.

Otra forma de obtener el isomorfismo es utilizar directamente la aplicación $T : H \rightarrow H''$ definida por $T(y)(f) = f(y) = \langle y, z \rangle, \forall y \in H, f \in H'$.



40. Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo E . Una *forma sesquilineal hermítica* h sobre $X \times X$ es una aplicación $h : X \times X \rightarrow E$ que verifica $h(x + y, z) = h(x, z) + h(y, z)$, $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$, $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$.

a) ¿Qué condición hay que imponer a h para que sea un producto interior sobre X ?

b) Si h es semidefinida positiva, es decir $h(x, x) \geq 0, \forall x \in X$, probar que se verifica la desigualdad de Schwarz $|h(x, y)|^2 \leq h(x, x)h(y, y)$.

c) Si h es una forma sesquilineal semidefinida positiva, probar que la aplicación $p(x) = \sqrt{h(x, x)}$ define una seminorma en X .

Resp.: a) Para que h sea un producto interior, sólo es necesario imponer las condiciones $h(x, x) \geq 0$ y $h(x, x) = 0 \implies x = 0$.

b) Si $h(x, y) = 0$, es evidente.

Si $h(x, y) \neq 0$, como

$$h(\alpha x \beta y, \alpha x + \beta y) = \alpha \bar{\alpha} h(x, x) + \alpha \bar{\beta} h(x, y) + \bar{\alpha} \beta \overline{h(x, y)} + \beta \bar{\beta} h(y, y) \geq 0,$$

haciendo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = \frac{h(x,y)}{|h(x,y)|}$, resulta :

$$\alpha^2 h(x, x) + \alpha |h(x, y)| + \alpha |h(x, y)| + h(y, y) \geq 0,$$

ecuación de segundo grado en α que es siempre no negativa, de modo que su discriminante debe ser negativo, $|h(x, y)|^2 - h(x, x)h(y, y) \leq 0$.

c) Evidente.



41. Sea $K : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ el operador integral definido por

$$(Kf)(t) = \int_0^t (t-s)f(s)ds.$$

a) Probar que $\|K\| < 1$ y que $K^n f(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(s)ds$, $n \geq 1$.

b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación integral

$$f(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)f(s)ds, \quad g \in L^2[0, 1].$$

Resp.: a) Veamos que K es acotado:

$$\begin{aligned} \|Kf\|^2 &= \int_0^1 |Kf(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^t (t-s)f(s)ds \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left[\int_0^t |t-s| \cdot |f(s)|ds \right]^2 dt \leq \int_0^1 \left[\int_0^t |t-s|^2 ds \cdot \int_0^t |f(s)|^2 ds \right] dt \\ &= \int_0^1 \left[\frac{(s-t)^3}{3} \Big|_0^t \int_0^t |f(s)|^2 ds \right] dt = \int_0^1 \left[\int_0^t \frac{t^3}{3} \cdot |f(s)|^2 ds \right] dt \\ &\leq \frac{1}{3} \cdot \|f\|^2 \implies \|Kf\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \|f\| \implies \|K\| \leq \frac{1}{\sqrt{3}} < 1. \end{aligned}$$

Veamos lo siguiente por inducción:

Para $n = 1$ es evidente.

Si es cierto para n , entonces

$$\begin{aligned} K^{n+1}f(t) &= K[K^n f](t) = \int_0^t (t-s)K^n f(s)ds \\ &= \int_0^t (t-s) \left[\int_0^s \frac{(s-u)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(u)du \right] ds \\ &= \int_0^t du \int_u^t (t-s) \frac{(s-u)^{2n-1}}{(2n-1)!} f(u)ds \\ &= \int_0^t du \frac{f(u)}{(2n-1)!} \int_u^t (t-s) \cdot (s-u)^{2n-1} ds = \int_0^t \frac{f(u)(t-u)^{2n+1}}{(2n+1)!} du. \end{aligned}$$

b) Queremos resolver la ecuación $f(t) = g(t) + Kf(t)$, que se puede escribir también como $g(t) = (I - K)f(t)$. Entonces, al ser $\|K\| < 1$,

$$\begin{aligned} f(t) &= (I - K)^{-1}g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g(t) \\ &= \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-s)^{2n-1}}{(2n-1)!} g(s) ds = \int_0^t \operatorname{sh}(t-s) g(s) ds. \end{aligned}$$

TEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Polinomios de Legendre, Hermite, Laguerre ([Kr], [Fo]).
2. Determinante de Gram ([GG]).

IV. LOS CUATRO PILARES DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

El sugestivo título que proponemos para este capítulo, y utilizado por varios autores, quiere indicar que toda la estructura del Análisis Funcional está basada en cuatro poderosos pilares: los teoremas de Hahn-Banach, de Banach-Steinhaus, de la aplicación abierta y del gráfico cerrado. Tanto en este capítulo como en los siguientes se ofrece una amplia gama de aplicaciones y consecuencias que han permitido un desarrollo significativo en la teoría que nos ocupa.

SECCIONES

1. Teorema de Hahn-Banach.
2. Consecuencias del teorema de Hahn-Banach. Espacio doble dual.
3. Teorema de categoría de Baire.
4. Principio de acotación uniforme y teorema de Banach-Steinhaus.
5. Convergencia de sucesiones en espacios normados.
6. Teorema de la aplicación abierta.
7. Teorema del gráfico cerrado.
8. Clausura de un operador.
9. Ejercicios.

1. TEOREMA DE HAHN-BANACH.

El teorema de Hahn-Banach es un teorema de extensión de funcionales lineales (entendemos por un teorema de extensión aquel en donde, definido un objeto matemático sobre un subconjunto $Y \subset X$, se quiere definir dicho objeto sobre todo el conjunto X de manera que se mantengan las propiedades básicas del objeto en el conjunto donde se extendió).

En Análisis son frecuentes los casos en que un funcional lineal es dominado por un funcional sublineal convexo. Por ejemplo, la integral de Riemann de una función $x = x(t)$ es un funcional lineal $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$; en cambio, la integral superior $p(x)$ es sub-lineal y se tiene que $f(x) \leq p(x)$. Queremos extender también aquí un funcional lineal que verifique una propiedad de acotación similar. Por el teorema de representación de Riesz, sabemos que todo funcional lineal en un espacio de Hilbert es un producto escalar. Queremos saber ahora bajo qué condiciones existen funcionales lineales acotados en un espacio de Banach arbitrario y la respuesta a esto la da el teorema de Hahn-Banach.

Se probará primero el caso donde el espacio normado es real (resultado debido a Hahn en 1927 y Banach en 1929) y luego veremos cómo ciertas modificaciones permiten demostrar el caso complejo (que fue hecho por Bohnenblust y Sobczyk en 1938).

1.1.- Definición. Sean X un espacio vectorial sobre E y $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Diremos que

- (1) p es *sub-aditiva* cuando $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$;
- (2) p es *homogénea positiva* cuando $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall x \in X$, $\alpha \geq 0$;
- (3) p es *simétrica* cuando $p(\alpha x) = |\alpha|p(x)$, $\forall x \in X$, $\alpha \in E$;
- (4) p es *convexa* cuando $p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y)$, $\forall x, y \in X$, $\alpha \in [0, 1]$.

Así diremos que p es *funcional sublineal* si es sub-aditiva y homogénea positiva y p es *seminorma* si es sub-aditiva y simétrica.

En particular, la norma es un funcional sublineal e incluso una seminorma.

Una primera relación entre dichos conceptos viene dada en el siguiente resultado, cuya demostración omitimos.

1.2.- Lema. *Un funcional $p : X \rightarrow E$ en un espacio vectorial es una seminorma si y sólo si es una aplicación simétrica y convexa.*

1.3.- Lema. Sea X un espacio vectorial real, M un subespacio propio de X , $x_0 \in X \setminus M$. Sea $N = \langle M \cup \{x_0\} \rangle$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal, $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional sub-lineal tal que $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in M$. Entonces existe $F : N \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal tal que $F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in N$, y $f(x) = F(x)$, $\forall x \in M$ (F es entonces una extensión de f).

Demostración. Si $y_1, y_2 \in M$, entonces

$$f(y_1) - f(y_2) = f(y_1 - y_2) \leq p(y_1 - y_2) = p(y_1 + x_0 - x_0 - y_2) \leq p(y_1 + x_0) + p(-y_2 - x_0),$$

de donde $-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) \leq p(y_1 + x_0) - f(y_1)$.

Como el primer miembro no depende de y_1 y el segundo no depende de y_2 , entonces, llamando

$$\begin{aligned} a &= \sup\{-p(-y_2 - x_0) - f(y_2) : y_2 \in M\}, \\ b &= \inf\{p(y_1 + x_0) - f(y_1) : y_1 \in M\}, \end{aligned}$$

es claro que $a \leq b$.

Llamamos $c \in \mathbb{R}$ a un número que verifica $a \leq c \leq b$. Por tanto, $\forall y \in M$,

$$(*) \quad -p(-y - x_0) - f(y) \leq c \leq p(y + x_0) - f(y).$$

Definimos $F : N \rightarrow \mathbb{R}$ como $F(y + \alpha x_0) = f(y) + \alpha c$, con $y \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$, que es un funcional lineal en N y evidentemente extiende a f .

Falta comprobar que F está acotado por p :

(a) Si $\alpha = 0$, $F(y + \alpha x_0) = f(y) \leq p(y) \implies F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in M$.

(b) Si $\alpha > 0$, aplicamos la segunda desigualdad de (*) al elemento y/α :

$$\begin{aligned} c \leq p(y/\alpha + x_0) - f(y/\alpha) &\implies \frac{1}{\alpha} f(y) + c \leq p(y/\alpha + x_0) \\ &\implies f(y) + \alpha c \leq p(y + \alpha x_0) \\ &\implies F(y + \alpha x_0) \leq p(y + \alpha x_0). \end{aligned}$$

(c) Si $\alpha < 0$, aplicamos la primera desigualdad de (*) al elemento y/α :

$$\begin{aligned} -p(-y/\alpha - x_0) - f(y/\alpha) \leq c &\implies -\frac{1}{\alpha} f(y) - c \leq p(-y/\alpha - x_0) \\ &\implies f(y) + \alpha c \leq p(y + \alpha x_0) \\ &\implies F(y + \alpha x_0) \leq p(y + \alpha x_0). \quad \diamond \end{aligned}$$

1.4.- Teorema (Hahn-Banach real). Sea X un espacio vectorial real, M un subespacio de X , p un funcional sub-lineal sobre X , f un funcional lineal

sobre M tal que $\forall x \in M, f(x) \leq p(x)$. Entonces existe $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ funcional lineal que extiende a f y tal que $F(x) \leq p(x), \forall x \in X$.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{S} = \{g : D(g) \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ lineal}, g|_M = f \text{ y } g(x) \leq p(x), \forall x \in D(g)\}.$$

El conjunto \mathcal{S} es no vacío porque $f \in \mathcal{S}$; definimos un orden parcial en \mathcal{S} así:

$$g_1 \leq g_2 \text{ si } g_2 \text{ es extensión de } g_1, \text{ es decir, si } D(g_1) \subset D(g_2) \text{ y } g_2|_{D(g_1)} = g_1.$$

Veamos que \mathcal{S} es inductivo, es decir que toda cadena (subconjunto totalmente ordenado) en \mathcal{S} posee una cota superior en \mathcal{S} :

Sea pues $C = \{g_\alpha : \alpha \in I\}$ un subconjunto de \mathcal{S} totalmente ordenado, y definimos $\hat{g} : D(\hat{g}) \rightarrow \mathbb{R}$ como $\hat{g}(x) = g_\alpha(x)$, si $x \in D(g_\alpha)$. Así, $D(\hat{g}) = \bigcup_{\alpha \in I} D(g_\alpha)$.

- $D(\hat{g})$ es un subespacio de X :
Si $x, y \in D(\hat{g})$, y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces $\exists \alpha, \beta \in I : x \in D(g_\alpha), y \in D(g_\beta)$ e incluso $\lambda x \in D(g_\alpha), \mu y \in D(g_\beta)$. Si suponemos que $D(g_\alpha) \subset D(g_\beta)$, entonces $\lambda x, \mu y \in D(g_\beta)$ y $\lambda x + \mu y \in D(g_\beta)$. De aquí resulta que $\lambda x + \mu y \in D(\hat{g})$.
- \hat{g} está bien definido:
Si $x \in D(g_\alpha)$ y $x \in D(g_\beta)$, entonces $g(x) = g_\alpha(x), g(x) = g_\beta(x)$. Como C está totalmente ordenado, si $D(g_\alpha) \subset D(g_\beta)$, g_β extiende a g_α , de modo que $g_\beta(x) = g_\alpha(x)$.

Es fácil comprobar que \hat{g} es lineal, que extiende a f , que $\hat{g}(x) \leq p(x), \forall x \in D(\hat{g})$ y que $g_\alpha \leq \hat{g}, \forall \alpha \in I$. Podemos así aplicar el lema de Zorn, que asegura la existencia de $F \in \mathcal{S}$ elemento maximal de \mathcal{S} .

Sólo falta probar que $D(F) = X$. Si suponemos lo contrario, debería existir algún $x_0 \in X \setminus D(F)$. Por el lema anterior, $\exists F'$ definido en $\langle D(F) \cup \{x_0\} \rangle$, que extiende a F y tal que $F'(x) \leq p(x), \forall x \in D(F')$. Esto quiere decir que $F' \in \mathcal{S}$ y F no puede ser maximal, lo que lleva a una contradicción. \diamond

Observación. Si queremos evitar el uso del lema de Zorn (que hace que la prueba no sea constructiva) podríamos aplicar el método indicado en el lema previo. Se construye así una sucesión de espacios N_1, N_2, \dots tales que $M \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$ y una sucesión de funcionales lineales F_1, F_2, \dots definidos en N_1, N_2, \dots cada uno extensión del anterior y todos acotados por p . La demostración estaría completa si pudiéramos escribir $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, lo cual no siempre es cierto. Sin embargo la mayoría de los espacios que se encuentran en Análisis verifican lo anterior. Además en los espacios de Hilbert también se simplifica mucho la demostración como mostraremos en breve.

1.5.- Teorema (Hahn-Banach complejo). Sea X un espacio vectorial complejo, M un subespacio de X , p una seminorma en X . Sea f un funcional lineal sobre M tal que $\forall x \in M, |f(x)| \leq p(x)$. Entonces existe $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ funcional lineal que extiende a f y tal que $|F(x)| \leq p(x), \forall x \in X$.

Demostración. Si escribimos $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ con $f_1 = \operatorname{Re} f, f_2 = \operatorname{Im} f$, probaremos en primer lugar que f_1 y f_2 son funcionales lineales reales, es decir, $\forall x \in M, \forall \alpha \in \mathbb{R} : f_i(\alpha x) = \alpha f_i(x), i = 1, 2$:

Sea pues $\alpha \in \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= f_1(\alpha x) + if_2(\alpha x), \\ \alpha f(x) &= \alpha f_1(x) + i\alpha f_2(x). \end{aligned}$$

Igualando las partes real e imaginaria, obtenemos lo deseado.

Por otra parte, como $if(x) = if_1(x) - f_2(x) = f_1(ix) + if_2(ix)$, resulta que $f_1(ix) = -f_2(x)$.

Por hipótesis, como $|f(x)| \leq p(x)$, resulta en particular que $f_1(x) \leq p(x)$.

Aplicamos el teorema de Hahn-Banach real a f_1 y probamos la existencia de $F_1 : X \rightarrow \mathbb{R}$ que extiende a f_1 y tal que $F_1(x) \leq p(x), \forall x \in X$.

Definimos ahora $F(x) = F_1(x) - iF_1(ix)$ y probaremos lo siguiente.

- F extiende a f : Si $x \in M$, $F_1(x) = f_1(x)$ y $F_1(ix) = f_1(ix) = -f_2(x)$ de donde $F(x) = f_1(x) + if_2(x) = f(x)$.
- F es un funcional lineal real (evidente porque F_1 lo es).
- F es un funcional lineal complejo: Como

$$F(ix) = F_1(ix) - iF_1(-x) = F_1(ix) + iF_1(x)$$

y además $iF(x) = iF_1(x) + F_1(ix)$, entonces $F(ix) = iF(x)$ y por tanto, $F(\alpha x) = \alpha F(x)$.

- $|F(x)| \leq p(x)$: Supongamos que $F(x) \neq 0$, y escribimos $F(x) = re^{i\vartheta}$. Así, $F(e^{-i\vartheta}x) = r = |F(x)|$. Por tanto, la parte imaginaria de $F(e^{-i\vartheta}x)$ es cero, $-F_1(ie^{-i\vartheta}x) = 0$, con lo que $F(e^{-i\vartheta}x) = F_1(e^{-i\vartheta}x)$. Como $F_1(x) \leq p(x)$,

$$|F(x)| = F(e^{-i\vartheta}x) = F_1(e^{-i\vartheta}x) \leq p(e^{-i\vartheta}x) = p(x). \quad \diamond$$

Como aplicación estudiaremos la situación de los funcionales lineales acotados en espacios normados, tal como nos preguntábamos al principio de la sección.

1.6.- Teorema (Hahn-Banach en espacios normados). Sea f un funcional lineal y acotado sobre un subespacio M de un espacio normado X . Entonces

existe un funcional lineal y acotado F sobre X que extiende a f y conserva la norma.

[Esto asegura que existe alguna extensión de f que tiene norma mínima.]

Demostración. Si $M = \{0\}$, $f = 0$ y su extensión es $F = 0$.

Si $M \neq \{0\}$, definimos el funcional $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $p(x) = \|f\|_M \cdot \|x\|$. Así definido, se verifica que $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ y $p(\alpha x) = |\alpha| \cdot p(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$.

Efectivamente, $p(x+y) = \|f\| \cdot \|x+y\| \leq \|f\| \cdot \|x\| + \|f\| \cdot \|y\| = p(x) + p(y)$ y $p(\alpha x) = \|f\| \cdot \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|f\| \cdot \|x\| = |\alpha| \cdot p(x)$.

Además, como f está acotado, $|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\| = p(x)$.

Se cumplen así las condiciones del teorema de Hahn-Banach, lo que asegura la existencia de un funcional lineal $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(x) = f(x)$, $\forall x \in M$, y $|F(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

Como $|F(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, entonces $\|F\|_X \leq \|f\|_M$. Pero al ser F extensión de f , $\|F\|_X \geq \|f\|_M$, con lo que se deduce la igualdad de las normas. \diamond

Como anunciábamos antes, el caso especial de espacios de Hilbert es extremadamente simple, debido al teorema de representación de Riesz. Como todo funcional sobre M tiene la forma $f(x) = \langle x, y \rangle$, $y \in M$, y el producto interior se puede definir en todo X , existe $F(x) = \langle x, y \rangle$, $\forall x \in X$ extensión de f y $\|F\| = \|y\| = \|f\|$.

2. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE HAHN-BANACH. ESPACIO DOBLE DUAL.

Ilustramos en esta sección algunas consecuencias del teorema de Hahn-Banach y proponemos en los ejercicios al final del capítulo más aplicaciones del mismo. Una versión geométrica del teorema se sugiere como tema complementario y puede ser consultado en las obras de referencia.

2.1.- Teorema. Sea M un subespacio de un espacio vectorial normado X y $x_0 \in X$ un elemento que verifica $d = d(x_0, M) > 0$. Entonces existe $F : X \rightarrow E$ lineal y acotado tal que $\|F\| = 1$, $F(x_0) = d$, $F(x) = 0$, $\forall x \in M$.

Demostración. Sea $M_1 = \{z \in X : z = \alpha x_0 + x, \alpha \in E, x \in M\}$. Definimos $f : M_1 \rightarrow E$ por $f(z) = \alpha d$. Observamos en primer lugar que la representación $z = \alpha x_0 + x$ es única: en caso contrario, si además $z = \alpha' x_0 + x'$,

entonces $(\alpha' - \alpha)x_0 = x - x' \in M$, de donde $\alpha' - \alpha = 0$ y $x - x' = 0$. Esto quiere decir que f está bien definido. Además f es lineal en M_1 y se anula sobre M . Por otra parte, como

$$|f(\alpha x_0 + x)| = |\alpha|d \leq |\alpha| \cdot \left\|x_0 + \frac{x}{\alpha}\right\| = \|\alpha x_0 + x\|,$$

f está acotado en M_1 y $\|f\| \leq 1$. Como además, dado cualquier $\varepsilon > 0$, $\exists x_1 \in M : \|x_0 - x_1\| < d + \varepsilon$, entonces $f(x_0 - x_1) = d$ y

$$\frac{|f(x_0 - x_1)|}{\|x_0 - x_1\|} > \frac{d}{d + \varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{d + \varepsilon},$$

resulta que $\|f\| = 1$.

Por el teorema de Hahn-Banach, existe un operador $F : X \rightarrow E$ lineal y acotado tal que $\|F\| = 1$ y $F = f$ en M_1 . \diamond

2.2.- Corolario. Sea X un espacio vectorial normado y $x_0 \neq 0$ un elemento de X . Entonces existe un funcional F lineal y acotado sobre X tal que $\|F\| = 1$ y $F(x_0) = \|x_0\|$.

Demostración. Basta hacer $M = \{0\}$ en el teorema anterior. \diamond

Este resultado prueba que el dual de un espacio no trivial es también no trivial. Además en un espacio normado X existen funcionales que separan puntos distintos de X , es decir si $x \neq y$, existe $f \in X'$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

2.3.- Corolario. Si $x_1 \in X$ es tal que $f(x_1) = 0$ para todo funcional lineal y acotado f de X , entonces $x_1 = 0$.

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, a cada $x \in X$ le hacemos corresponder el funcional $\hat{x} : X' \rightarrow E$ definido por $\hat{x}(f) = f(x)$. Así definido, se prueba que \hat{x} está en el doble dual de X .

2.4.- Proposición. Para cada $x \in X$,

- a) \hat{x} es lineal.
- b) $|\hat{x}(f)| \leq \|x\| \cdot \|f\|$, para todo $f \in X'$.
- c) $\hat{x} \in X''$ y $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$.

La demostración es evidente.

2.5.- Proposición. Para cada $x \in X$, $\|\hat{x}\| = \|x\|$.

Demostración. Por el teorema de Hahn-Banach, para cada $x \in X$, existe $f \in X'$ tal que $\|f\| = 1$ y $f(x) = \|x\|$. Para esta f tenemos que

$$|\hat{x}(f)| = |f(x)| = \|x\| = \|x\| \cdot \|f\|.$$

Luego $\|\hat{x}\| = \sup_{\|f\|=1} |\hat{x}(f)| \geq \|x\|$. \diamond

La proposición anterior indica que la aplicación $\Phi : X \rightarrow X''$ definida por $\Phi(x) = \hat{x}$ es una isometría lineal. Esta aplicación es la llamada *inmersión natural* y origina el siguiente concepto.

2.6.- Definición. Un espacio normado X es *reflexivo* cuando la aplicación Φ es sobre. En este caso X y X'' son isométricos.

Ejemplo. Si $1 < p < \infty$, ℓ^p es reflexivo. En primer lugar, $(\ell^p)''$ es isomorfo a ℓ^p ; falta pues verificar que la composición del isomorfismo natural de ℓ^p en $(\ell^p)'$ con el isomorfismo natural de $(\ell^p)'$ en $(\ell^p)''$, da lugar a la inmersión de ℓ^p en $(\ell^p)''$.

Los siguientes resultados muestran que los espacios reflexivos forman una clase comprendida entre las de los espacios de Hilbert y los de Banach.

2.7.- Proposición. Si X es reflexivo, entonces X es de Banach.

La demostración es evidente porque, al ser X'' de Banach y X isométrico a X'' , X debe ser también de Banach.

2.8.- Proposición. Todo espacio normado de dimensión finita es reflexivo.

También la prueba es directa pues si $\dim X = n$, entonces $\dim X' = n$, de donde $\dim X'' = n$. Esto prueba la reflexividad de X .

2.9.- Proposición. Todo espacio de Hilbert es reflexivo.

Demostración. Basta probar que la aplicación $\Phi : X \rightarrow X''$ definida por $\Phi(x) = \hat{x}$ es sobre.

Para ello sea $g \in X''$ y definimos $f : X \rightarrow E$ por $f(x) = \overline{g(Tx)}$, donde $T : X \rightarrow X'$ viene dada por $(Tx)(y) = \langle y, x \rangle$.

El operador T es antilineal y $\|T\| = 1$, lo que permite deducir que $f \in X'$. Por el teorema de representación de Riesz, existe $z \in X$ tal que $f(x) = \langle x, z \rangle$. Por tanto $g(Tx) = \langle z, x \rangle = (Tx)(z) = \Phi(z)(Tx)$. Como además T es sobre (lo que se puede comprobar también mediante el teorema de representación de Riesz), $\Phi(z) = g$, como queríamos demostrar. \diamond

3. TEOREMA DE CATEGORIA DE BAIRE.

La completitud de ciertos espacios suele ser fundamental en muchos teoremas del Análisis. En el caso de espacios métricos, un instrumento de mucha utilidad es el teorema de categoría que exponemos en esta sección.

3.1.- Definición. Sea X un espacio métrico y $M \subset X$.

(a) M es raro o nunca denso de X si \overline{M} tiene interior vacío (lo que equivale a que \overline{M}^c es denso en X).

(b) M es de primera categoría si es unión numerable de conjuntos nunca densos.

(c) M es de segunda categoría si no es de primera categoría.

3.2.- Ejemplos. 1) Si d es la métrica trivial, el único conjunto nunca denso es el vacío.

2) El conjunto vacío es de primera categoría. Por lo tanto, no puede ser de segunda categoría.

3) En \mathbb{R} con la métrica usual, \mathbb{Q} es de primera categoría pues, por ser numerable, $\mathbb{Q} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{x_i\}$ y $\overline{\{x_i\}} = \{x_i\}$, $\text{int}\{x_i\} = \emptyset$.

4) Si $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ son de primera categoría, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ también lo será.

5) Si A es de primera categoría y C de segunda, con $C = A \cup B$, entonces B es de segunda categoría. Por tanto, en el ejemplo 3), como $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ y \mathbb{R} es de segunda categoría, \mathbb{I} también lo será.

3.3.- Lema (teorema de intersección de Cantor). Sea (X, d) un espacio métrico completo y $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos no vacíos y cerrados de X tales que $\delta(F_n) \rightarrow 0$ (donde se define $\delta(M) = \sup\{d(x, y) : x, y \in M\}$). Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ contiene exactamente un punto.

Demostración. Sea $x_n \in F_n$. Por ser $\delta(F_n) \rightarrow 0$, la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo que existe $x = \lim x_n$. Fijado $n_0 \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_{n_0}$, $\forall n \geq n_0$. Como F_{n_0} es cerrado, $x \in F_{n_0} \Rightarrow x \in \bigcap_{n \geq 1} F_n$.

Además, como $\delta(\bigcap_{n \geq 1} F_n) \leq \delta(F_n) \rightarrow 0$, $\delta(\bigcap_{n \geq 1} F_n) = 0 \Rightarrow \bigcap_{n \geq 1} F_n = \{x\}$.

◇

3.4.- Lema. Sean X un espacio métrico completo, $A \subset X$ un subconjunto nunca denso y $B \subset X$ una bola abierta. Entonces existe $B_1 \subset B$ bola cerrada tal que $B_1 \cap A = \emptyset$. Además se puede elegir B_1 para que $\delta(B_1) < k$, $\forall k > 0$.

Demostración. Como $\text{int}(\overline{A}) = \emptyset$, debe ser $B \not\subset \overline{A}$, de modo que $\exists x \in B \setminus \overline{A}$. Por ser B abierto y \overline{A} cerrado, existe $r > 0 : B(x, r) \cap \overline{A} = \emptyset$. Podemos elegir r de modo que $\overline{B(x, r)} \subset B$ y $\overline{B(x, r)} \cap A = \emptyset$. Además, dado $k > 0$, tomando $r < k/2$, $\delta(\overline{B(x, r)}) < k$. \diamond

3.5.- Teorema (categoría de Baire). *Si un espacio métrico $X \neq \emptyset$ es completo, es de segunda categoría.*

Demostración. Dada cualquier sucesión $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos nunca densos en X , probaremos que existe $x \in X : x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

Por el lema 3.4, existe F_1 bola cerrada con $\delta(F_1) < 1$, $F_1 \cap A_1 = \emptyset$.

Además, existe $F_2 \subset \text{int}(F_1)$ bola cerrada con $\delta(F_2) < 1/2 : F_2 \cap A_2 = \emptyset$.

Aplicando el mismo procedimiento, obtenemos una sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de bolas cerradas tales que $F_n \subset \text{int}(F_{n-1})$, $\delta(F_n) < 1/n$, $F_n \cap A_n = \emptyset$.

Por el lema 3.3, existe $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$, de modo que $x \notin A_n$, $\forall n$, lo que implica que $x \notin \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. \diamond

Observaciones. 1) El recíproco de este teorema no es cierto (véase en [Bou1] un ejemplo de un espacio normado incompleto que es de segunda categoría).

2) Una aplicación curiosa del teorema consiste en probar la existencia de funciones continuas en todo $[0, 1]$ y no derivables en ningún punto del intervalo (se puede ver en [BN]).

4. PRINCIPIO DE ACOTACIÓN UNIFORME Y TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS.

Las ideas de la sección anterior las aplicaremos a continuación para demostrar otro de los teoremas fundamentales del capítulo, como es el *principio de acotación uniforme*. Dicho teorema proporciona un criterio para determinar cuándo una familia de operadores lineales y acotados está acotada uniformemente. Más precisamente, veremos cuándo la acotación puntual implica la acotación uniforme.

4.1.- Definición. Dados dos espacios normados X e Y , una familia de operadores $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset L(X, Y)$ se dice *equicontinua* cuando $\sup_{\alpha \in I} \|A_\alpha\| < \infty$.

4.2.- Teorema (Principio de acotación uniforme). Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de elementos de $L(X, Y)$, donde X es de Banach. Si $\{\|A_\alpha x\|\}_{\alpha \in I}$ está acotada para todo $x \in X$, entonces la familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es equicontinua. En otras palabras, si $\forall x \in X, \exists c_x > 0 : \|A_\alpha x\| \leq c_x \implies \exists c > 0 : \|A_\alpha\| \leq c$.

Demostración. (a) Supongamos que I es numerable. Así $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión. Sea $M_k = \{x \in X : \|A_n x\| \leq k, \forall n\}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Cada M_k es cerrado, porque si $x \in \overline{M_k}$, entonces existe $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ en M_k tal que $x_i \rightarrow x$. Como A_n es continua, $A_n x_i \rightarrow A_n x$, de donde $\|A_n x_i\| \rightarrow \|A_n x\|$. Además, como $x_i \in M_k, \|A_n x_i\| \leq k$. Por lo tanto, $\|A_n x\| \leq k$ con lo que $x \in M_k$.

Por construcción, $X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$. Así, como X es completo, según el teorema de categoría de Baire, existe $k_0 : B_0 = B(x_0, r) \subset M_{k_0}, \exists x_0 \in M_{k_0}$ (no todos los M_k pueden ser nunca densos).

Sea $x \in X$ y definimos $z = x_0 + \gamma x$, con $\gamma = r/2\|x\|$. Entonces $\|z - x_0\| \leq r/2$, de donde $z \in M_{k_0}$ y $\|A_n z\| \leq k_0, \forall n$. Además, $\|A_n x_0\| \leq k_0, \forall n$. De aquí,

$$\|A_n x\| = \gamma^{-1} \|A_n(z - x_0)\| \leq 2k_0/\gamma.$$

Esto implica que $\|A_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|A_n x\| \leq 4k_0/r$.

(b) Si I no es numerable, supongamos que $\sup \|A_\alpha\| = \infty$. Entonces existe una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|A_1\| > 1, \|A_2\| > 2, \dots$. Aplicando la parte (a) a la sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, probamos que $\sup_n \|A_n\| < \infty$, lo que contradice la construcción anterior. \diamond

Es interesante remarcar que la hipótesis de categoría es esencial como muestra el ejemplo dado en [La].

A continuación veremos algunas consecuencias y aplicaciones del teorema.

4.3.- Corolario (Teorema de Banach-Steinhaus, 1927). Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$. Si $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente para todo $x \in X$, entonces $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinuo. Además, si $\lim_n T_n x = Tx, \forall x \in X$, entonces $T \in L(X, Y)$ y $\|T\| \leq \liminf \|T_n\|$.

Demostración. Por ser convergente, la sucesión $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. Por el principio de acotación uniforme, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es equicontinuo.

Como $\|T_n\| \leq M$ para todo $n, \|Tx\| \leq M\|x\|$ para todo $x \in X$. Claramente, T es lineal y $\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq \liminf \|T_n\| \cdot \|x\|$ (la sucesión $(\|T_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada por lo que tiene límite inferior). \diamond

Si X no es de Banach, este resultado es falso, como muestra el siguiente ejemplo.

Hagamos $X = C[0, 1]$ con $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ y $T_n : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definidos por $T_n(f) = n \int_0^{1/n} f(t)dt$.

Cada T_n es lineal y continuo:

$$|T_n(f)| \leq n \int_0^{1/n} |f(t)|dt \leq n \cdot \|f\|_1 \implies \|T_n\| \leq n.$$

Además,

$$\forall f \in C[0, 1], \lim_n T_n(f) = \lim_n \frac{\int_0^{1/n} f(t)dt}{1/n} = f(0).$$

Por tanto, $\exists \lim_n T_n(f) = f(0)$, pero el funcional $F : f \mapsto f(0)$ no está acotado pues si consideramos la sucesión

$$g_n(t) = \begin{cases} -n^3(t - 1/n^2) & \text{si } x \in [0, 1/n^2] \\ 0 & \text{si } x \geq 1/n^2, \end{cases}$$

entonces $\|g_n\| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$ pero $F(g_n) = g_n(0) = n \rightarrow \infty$.

4.4.- Corolario. Sea X un espacio de Banach y $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$ una sucesión tal que $\exists \lim_n f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in X$. Entonces $f \in X'$.

Demostración. Es consecuencia directa del anterior.

Este resultado indica que, en un espacio de Banach, la convergencia puntual de funcionales lineales continuas implica la continuidad de la función límite.

4.5.- Ejemplo. En el espacio de las funciones integrables es sabido que, si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ es tal que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n| < \infty$, entonces $\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}} |f_n g| < \infty$, $\forall g \in C_0(\mathbb{R})$. El teorema de acotación uniforme garantiza el recíproco, pues podemos interpretar los elementos de $L^1(\mathbb{R})$ como funcionales lineales continuos, $L^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})'$.

Sin embargo, el resultado es falso en el espacio $C_c(\mathbb{R})$ de las funciones continuas con soporte compacto, que no es de Banach: $\forall g \in C_c(\mathbb{R})$, $\sup_n \int |f_n g| < \infty$ pero $\sup_n \int_{\mathbb{R}} |f_n| = \infty$ para alguna sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R})$ pues, tomando $f_n = \chi_{[0, n]}$,

$$\sup_n \int |f_n g| = \sup_n \int_0^n |g| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |g| < \infty \text{ y } \sup_n \int |f_n| = \sup_n n = \infty.$$

4.6.- Corolario. El espacio normado X de los polinomios $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i$, con norma $\|x\| = \max_i |a_i|$, no es completo.

Demostración. Construimos la sucesión de funcionales $A_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ por $A_n 0 = 0$, $A_n x = a_0 + \dots + a_{n-1}$. Así definidos, A_n son lineales y acotados

pues, como $|a_i| \leq \|x\|$, entonces $|A_n x| \leq n\|x\|$. Como todo polinomio x de grado N_x tiene como máximo $N_x + 1$ coeficientes no nulos, tenemos $|A_n x| \leq (N_x + 1)\|x\| = c_x$, $\forall n$, la cual es una de las hipótesis del teorema de acotación uniforme. Ahora bien, si elegimos $x(t) = 1 + t + \cdots + t^n$, resulta que $\|x\| = 1$ y $A_n x = n = n\|x\|$. Como $\|A_n\| \geq |A_n x|/\|x\|$, entonces $\|A_n\| \geq n$ y $\{\|A_n\|\}$ no está acotada. Al ser falsa la tesis del teorema, debe ser porque X no es completo. \diamond

Hacemos por último la siguiente observación: es sabido que la continuidad no es condición necesaria para la convergencia (sirva como contraejemplo la función $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \end{cases}$, $x(t + 2\pi) = x(t)$). Pero además el principio de acotación uniforme permite probar que ni siquiera es condición suficiente, es decir, que existen funciones continuas cuya serie de Fourier diverge en un punto (ver [Kr]).

5. CONVERGENCIA DE SUCESIONES EN ESPACIOS NORMADOS.

Además de los conceptos de convergencia puntual y convergencia uniforme de sucesiones de funciones continuas, podemos estudiar en el contexto de los espacios normados otros tipos de convergencia lo que dará lugar a topologías diferentes a la inducida por la norma. La teoría de convergencia débil que mostramos a continuación hace uso del teorema de acotación uniforme y es, de hecho, una de la mayores aplicaciones del mismo.

5.1.- Definición. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio normado X es *convergente en sentido fuerte* o *convergente en norma* si existe $x \in X$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0.$$

Se dice que x es límite fuerte de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y se escribe $x_n \rightarrow x$. Este es el concepto usual de convergencia.

5.2.- Definición. Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio normado X es *convergente en sentido débil* si existe $x \in X$ tal que $f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\forall f \in X'$. Se dice entonces que x es límite débil de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y se escribe $x_n \xrightarrow{d} x$.

5.3.- Lema. Sea $x_n \xrightarrow{d} x$. Entonces:

(a) El límite débil es único.

(b) Toda subsucesión de $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente a x .

(c) La sucesión $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.

Demostración. a) Supongamos que $x_n \xrightarrow{d} x$, $x_n \xrightarrow{d} y$; entonces $f(x_n) \rightarrow f(x)$ y $f(x_n) \rightarrow f(y)$, $\forall f \in X'$. Por tanto $f(x) = f(y)$ y $f(x - y) = 0$. Como lo anterior es cierto para toda $f \in X'$, $x = y$.

b) Se deduce de que $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión numérica convergente y toda subsucesión de ella converge al mismo límite $f(x)$.

c) Por hipótesis, $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, digamos $|f(x_n)| \leq c_f$, $\forall n$. Definimos $g_n \in X''$ como $g_n(f) = f(x_n)$, $\forall f \in X'$. Entonces $|g_n(f)| = |f(x_n)| \leq c_f$, $\forall n$.

Como X' es completo, por el teorema de acotación uniforme, $\{\|g_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. Pero $\|g_n\| = \|x_n\|$ debido a la proposición 2.5. Así queda probada la tesis. \diamond

Veamos a continuación la relación entre los dos tipos de convergencia definidos.

5.4.- Teorema. Sea X un espacio normado.

(a) Si $x_n \rightarrow x$, entonces $x_n \xrightarrow{d} x$.

(b) El recíproco de (a) no siempre es cierto.

(c) Si $\dim X < \infty$, la convergencia débil implica la convergencia fuerte.

Demostración. a) Supongamos que $x_n \rightarrow x$, es decir, $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Entonces $|f(x_n) - f(x)| = |f(x_n - x)| \leq \|f\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0$, $\forall f \in X'$.

b) Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión ortonormal. Por el teorema de representación de Riesz, $\forall f \in H'$, $\exists z \in H : f(x) = \langle x, z \rangle$. Aplicando la desigualdad de Bessel, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, z \rangle|^2 \leq \|z\|^2$, con lo que la serie de la izquierda converge y entonces $\langle e_n, z \rangle \rightarrow 0$.

Como $f(e_n) = \langle e_n, z \rangle$, lo anterior implica que $e_n \xrightarrow{d} 0$. Sin embargo, $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es fuertemente convergente pues $\|e_n - e_m\|^2 = \langle e_n - e_m, e_n - e_m \rangle = 2$, si $n \neq m$.

c) Sea $\{e_1, \dots, e_k\}$ una base de X y $x_n \xrightarrow{d} x$. Escribimos

$$x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i^{(n)} e_i, \quad x = \sum_{i=1}^k \alpha_i e_i.$$

Por hipótesis, $f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\forall f \in X'$. Definiendo $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, $i, j =$

$1, \dots, k$, tenemos $\alpha_j^{(n)} \rightarrow \alpha_j$, $j = 1, \dots, k$. De este modo,

$$\|x_n - x\| \leq \sum_{i=1}^k |\alpha_i^{(n)} - \alpha_i| \cdot \|e_i\| \rightarrow 0$$

y $x_n \rightarrow x$. ◇

Observaciones. 1) Existen también espacios de dimensión infinita donde la convergencia fuerte y débil son equivalentes. Fue probado por Schur que el espacio ℓ^1 es un ejemplo de ellos.

2) Es evidente, gracias al teorema de Riesz, que, en un espacio de Hilbert H , $x_n \xrightarrow{d} x$ si y sólo si $\langle x_n, z \rangle \rightarrow \langle x, z \rangle$, $\forall z \in H$.

3) Una especie de recíproco de (a) es el siguiente resultado.

Si $x_n \xrightarrow{d} x$ en X , entonces existe $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que y_n es combinación lineal de x_n y $\|x - y_n\| \rightarrow 0$ (ver [CC]). Esto equivale a decir que x pertenece al espacio generado por la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) Como los elementos de X pueden pensarse como funcionales lineales sobre X' , podemos decir también que $x_n \xrightarrow{d} x$ si $x_n(f) \rightarrow x(f)$, $\forall f \in X'$; es decir, la convergencia débil en X no es más que la convergencia puntual considerando X como espacio de funciones sobre X' .

5.5.- Lema. Sea X un espacio normado y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en X . Entonces $x_n \xrightarrow{d} x$ si y sólo si la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y $\exists M \subset X'$ subconjunto completo, (es decir, $\overline{\langle M \rangle} = X'$) tal que $f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\forall f \in M$.

Demostración. a) Si $x_n \xrightarrow{d} x$, por el lema 5.3, la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. El resto es evidente.

b) Por hipótesis, $\|x_n\| \leq c$, $\forall n$, y elegimos c para que $\|x\| \leq c$.

Sea $f \in X'$. Entonces existe $g \in \langle M \rangle$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon/3c$. Escribimos $g(x) = \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k f_k(x)$, con $f_k \in M$. De este modo, $\exists N \in \mathbb{N}$:

$$|g(x_n) - g(x)| \leq \sum_{k=1}^{n_0} |\alpha_k| \cdot |f_k(x_n) - f_k(x)| < \varepsilon/3, \quad \forall n > N$$

teniendo en cuenta que $f_k(x_n) \rightarrow f_k(x)$, $\forall k = 1, \dots, n_0$.

Aplicando ahora la desigualdad triangular, tenemos que para todo $n > N$:

$$\begin{aligned} |f(x_n) - f(x)| &\leq |f(x_n) - g(x_n)| + |g(x_n) - g(x)| + |g(x) - f(x)| \\ &< \|f - g\| \cdot \|x_n\| + \varepsilon/3 + \|g - f\| \cdot \|x\| \\ &< \varepsilon/3c \cdot c + \varepsilon/3 + \varepsilon/3c \cdot c = \varepsilon. \quad \diamond \end{aligned}$$

Un ejemplo donde se aplica lo anterior es el espacio ℓ^p , con $1 < p < \infty$, donde $x_n \xrightarrow{d} x$ si y sólo si la sucesión $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y $\xi_j^{(n)} \rightarrow \xi_j$, $\forall j$, siendo $x_n = (\xi_j^{(n)})_{j \in \mathbb{N}}$, $x = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$.

En efecto, como el dual de ℓ^p es ℓ^q y una base de Schauder de ℓ^q es $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $e_n = (\delta_{nj})_{j \in \mathbb{N}}$, basta aplicar el lema con $M = \{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

ANEXO. Veamos cómo el concepto de convergencia débil viene sugerido por el de topología débil. Para ello recordamos los siguientes conceptos:

Definición. Sea τ una topología en X . Se dice que una familia β es una *base* de τ si $\forall A \in \tau$, $x \in A$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset A$.

Definición. Un *espacio vectorial topológico* es un espacio vectorial X sobre un cuerpo E con una topología τ tal que las funciones suma y producto por escalar son continuas. Así, por ejemplo, todo espacio vectorial topológico de dimensión finita n es isomorfo a E^n , y todo espacio normado es un espacio vectorial topológico. En este caso la topología inducida por la norma se llama *topología fuerte*.

Definición. Si X es un espacio vectorial y F una familia de funcionales lineales definida en X , se define la *topología débil* generada por F a la topología más débil (la menor) en X que hace a cada $f \in F$ un funcional continuo. Claramente, la topología débil generada por F es la topología generada por los subconjuntos de X de la forma $f^{-1}(U)$ con $f \in F$, U abierto en E . Una base de la topología débil generada por F es la formada por los conjuntos de la forma

$$N(x_0, f_1, \dots, f_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \{x \in X : |f_k(x) - f_k(x_0)| < \varepsilon_k, k = 1, \dots, m\},$$

donde $x_0 \in X$, $m \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_m \in F$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m > 0$.

Debido a que $N(x_0, f, \varepsilon) = f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon))$, se deduce que

$$N(x_0, f_1, \dots, f_m, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) = \bigcap_{k=1}^m N(x_0, f_k, \varepsilon_k).$$

Con estas ideas, si X es un espacio normado, a la topología débil generada por X' se le llama *topología débil en X* y se pueden probar sin dificultad los siguientes resultados:

Proposición. a) La topología débil es más débil que la topología fuerte (la inducida por la norma).

b) Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x en la topología débil si y sólo si $f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\forall f \in X'$.

De este modo los conceptos y propiedades de la convergencia débil son consecuencia de los más generales aquí expuestos.

Vamos a estudiar ahora el caso de sucesiones de operadores entre espacios normados donde distinguiremos entre tres tipos de convergencia (las definiciones y terminología fueron introducidas por von Neumann en 1929).

5.6.- Definición. Sean X, Y espacios normados. Una sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de operadores en $L(X, Y)$ se dice

(1) *uniformemente convergente* si $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en la norma de $L(X, Y)$, es decir, si existe $T \in L(X, Y)$ tal que $\|T_n - T\| \rightarrow 0$;

(2) *fuertemente convergente* si $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente en Y , para todo $x \in X$, es decir, $\|T_n x - T x\| \rightarrow 0$;

(3) *débilmente convergente* si $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente en Y , para todo $x \in X$, es decir, $|f(T_n x) - f(T x)| \rightarrow 0, \forall f \in Y'$.

No es difícil probar que $(1) \implies (2) \implies (3)$, y los recíprocos no son necesariamente ciertos.

5.7.- Ejemplos. 1) En ℓ^2 consideramos la sucesión $T_n : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ de operadores lineales y acotados definidos por $T_n x = (0, \dots, 0, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$ donde $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \dots)$. Es evidente que $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente a 0; sin embargo no converge uniformemente porque $\|T_n - 0\| = \|T_n\| = 1$.

2) Si definimos ahora $T_n : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ como

$$T_n(\xi_1, \dots, \xi_n, \dots) = (0, \dots, 0, \xi_1, \xi_2, \dots),$$

T_n es también lineal y acotado, débilmente convergente a cero pero no fuertemente.

En efecto, $\forall f \in (\ell^2)'$, $\exists z = (\eta_j)_{j \in \mathbb{N}} : f(x) = \langle x, z \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \bar{\eta}_j$, donde $x = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, debido al teorema de representación de Riesz. Así pues,

$$f(T_n x) = \langle T_n x, z \rangle = \sum_{j=n+1}^{\infty} \xi_{n-j} \bar{\eta}_j = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \bar{\eta}_{n+k}.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|f(T_n x)|^2 = |\langle T_n x, z \rangle|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \cdot \sum_{m=n+1}^{\infty} |\eta_m|^2.$$

Como la última suma es el resto de una serie convergente, $|f(T_n x)| \rightarrow 0 = f(0x)$.

Sin embargo, para $x = (1, 0, 0, \dots)$, $\|T_m x - T_n x\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, para $m \neq n$, por lo que la sucesión no converge fuertemente.

Estudiamos ahora el límite de una sucesión de operadores según el tipo de convergencia.

Si la convergencia $T_n \rightarrow T$ es uniforme, $T \in L(X, Y)$. Sin embargo, si la convergencia es fuerte o débil, T es lineal pero no acotado, como se ve en el siguiente ejemplo.

Sea $X = \{x \in \ell^2 : x \text{ tiene un número finito de componentes no nulas}\}$. Se define $T_n(\xi_j) = (\xi_1, 2\xi_2, 3\xi_3, \dots, n\xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots)$. Esta sucesión converge fuertemente a $T(\xi_j) = (j\xi_j)$ que es un operador lineal no acotado.

Sin embargo, si X es completo, tenemos el siguiente resultado.

5.8.- Lema. Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L(X, Y)$, donde X es un espacio de Banach e Y un espacio normado. Si $T_n \rightarrow T$ en sentido fuerte, entonces $T \in L(X, Y)$.

Demostración. La linealidad de T se deduce de la de T_n . Además, de la convergencia $T_n x \rightarrow Tx$, $\forall x \in X$, se deduce que la sucesión $\{\|T_n x\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada para todo x . Por el teorema de acotación uniforme, como X es completo, $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. Por tanto,

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq k\|x\| \implies \|Tx\| \leq k\|x\|. \quad \diamond$$

5.9.- Teorema. Dados dos espacios de Banach X, Y una sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de operadores en $L(X, Y)$ converge en sentido fuerte si y sólo si $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y , para todo x de un subconjunto completo M de X .

Demostración. Si $T_n x \rightarrow Tx$, $\forall x \in X$, por el teorema de acotación uniforme, $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada. El resto es trivial.

Recíprocamente, si $\|T_n\| \leq c$, $\forall n$, sean $x \in X$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Como $\langle M \rangle$ es denso en X , existe $y \in \langle M \rangle$ tal que $\|x - y\| < \varepsilon/3c$. Además

$$\|T_n y - T_m y\| < \varepsilon/3, \quad \forall m, n > N.$$

De aquí, por la desigualdad triangular, es fácil probar que $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y :

$$\begin{aligned} \|T_n x - T_m x\| &\leq \|T_n x - T_n y\| + \|T_n y - T_m y\| + \|T_m y - T_m x\| \\ &\leq \|T_n\| \cdot \|x - y\| + \varepsilon/3 + \|T_m\| \cdot \|x - y\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Como Y es completo, $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en Y . \diamond

5.10.- Definición. Una sucesión $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L(X, Y)$ se dice de Cauchy en sentido fuerte cuando $\{A_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, $\forall x \in X$.

5.11.- Teorema. Si X, Y son espacios de Banach, $L(X, Y)$ es completo en sentido fuerte, es decir, toda sucesión de Cauchy fuerte converge fuertemente.

Demostración. Por hipótesis, sea $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy, $\forall x \in X$. Como Y es de Banach, $T_n x \rightarrow Tx$. Así definido, T es lineal y $T_n \xrightarrow{f} T$. Falta probar que $T \in L(X, Y)$.

Por el teorema anterior, $\|T_n\| < M$, $\forall n$. Entonces $\|T_n x\| < M\|x\|$, de donde $\lim \|T_n x\| \leq M\|x\|$ y, por la continuidad de la norma, $\|\lim T_n x\| \leq M\|x\|$ o sea $\|Tx\| \leq M\|x\|$. Así, T es acotado. \diamond

Los funcionales lineales son también operadores lineales pero el hecho de que su imagen esté en \mathbb{R} ó \mathbb{C} hace que la convergencia fuerte y débil sean equivalentes (pues $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ está en un espacio de dimensión 1). Los conceptos que se aplican aquí son los siguientes.

5.12.- Definición. Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funcionales lineales acotados en un espacio normado X .

(a) Decimos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en sentido fuerte a $f \in X'$ si $\|f_n - f\| \rightarrow 0$.

(b) Por otra parte, decimos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en sentido débil-* a $f \in X'$ si $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X$.

Si X es un espacio normado, entonces $X \subset X''$ y $\forall x \in X$, $\exists l \in X'' : l(f) = f(x)$. Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$ converge débilmente si $l(f_n) \rightarrow l(f)$, $\forall l \in X''$, es decir, $f_n(x) \rightarrow f(x)$, $\forall x \in X$.

El recíproco no es cierto cuando $X \neq X''$ pues pueden existir $l \in X'' \setminus X$ con lo que no se debe confundir la topología débil con la topología débil-* en X' . Como un simple corolario del teorema 5.9, se demuestra lo siguiente.

5.13.- Teorema. Una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funcionales lineales acotados en un espacio de Banach X es convergente débil-* y el límite es lineal y acotado si y sólo si $\{\|f_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada y $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy, para todo $x \in M$ donde $\langle M \rangle = X$.

Tabla de los distintos tipos de convergencia			
Espacio	Tipo	Notación	Definición
X	Fuerte	$x_n \rightarrow x$	$\ x_n - x\ \rightarrow 0$
X	Débil	$x_n \xrightarrow{d} x$	$f(x_n) \rightarrow f(x)$, $\forall f \in X'$
$L(X, Y)$	Uniforme	$T_n \rightarrow T$	$\ T_n - T\ \rightarrow 0$
$L(X, Y)$	Fuerte	$T_n \xrightarrow{f} T$	$\ T_n x - T x\ \rightarrow 0$, $\forall x \in X$
$L(X, Y)$	Débil	$T_n \xrightarrow{d} T$	$T_n x \xrightarrow{d} T x$, $\forall x \in X$
$L(X, E)$	Fuerte	$f_n \rightarrow f$	$\ f_n - f\ \rightarrow 0$
$L(X, E)$	Débil-*	$f_n \xrightarrow{d*} f$	$\ f_n x - f x\ \rightarrow 0$, $\forall x \in X$

En el estudio de espacios normados tiene importancia el teorema de Bourbaki-Alaoglu. Su enunciado es el siguiente:

La esfera unitaria cerrada $S^* = \{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ en el espacio X' dual del espacio normado X es compacta en la topología débil-* de X' .

Por el teorema de Riesz (capítulo 2, teorema 5.3) sabemos que la esfera S^* no puede ser compacta en la topología de la norma métrica de X' si $\dim X = \infty$. El teorema anterior muestra que la topología débil-* no puede darse por una norma.

6. TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA.

A continuación vamos a establecer condiciones para que un operador acotado sea una aplicación abierta y para que tenga inverso acotado. Nuevamente el marco natural son los espacios de Banach y la herramienta básica el teorema de categoría de Baire.

6.1.- Definición. Sean X, Y espacios métricos. Una aplicación $T : D(T) \rightarrow Y$ con $D(T) \subset X$ es *abierta* si para todo abierto A en $D(T)$, $T(A)$ es abierto en Y .

Observación. Si T no es sobre, hay que distinguir entre los conceptos de aplicación abierta de $D(T)$ en Y o sobre su rango. Este segundo concepto es más débil que el primero, porque si $X \subset Y$, la aplicación identidad de X en Y es abierta si y sólo si X es subconjunto abierto de Y , mientras que la identidad de X sobre su rango es siempre abierta.

El teorema de la aplicación abierta da condiciones para que un operador lineal sea abierto y para que tenga inverso acotado. Usaremos para su demostración el siguiente lema previo.

6.2.- Lema (bola unidad abierta). Sean X, Y de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado sobre. Si llamamos $B_0 = B(0, 1) \subset X$, entonces $T(B_0)$ contiene una bola abierta de centro $0 \in Y$.

Demostración. Lo demostraremos en varios pasos:

(a) Si $B_1 = B(0, 2^{-1})$, $\overline{T(B_1)}$ contiene alguna bola B^* :

$\forall x \in X, \exists k > 2\|x\| : x \in kB_1$. Esto implica que $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kB_1$. Como T es sobre y lineal, $Y = T(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} kT(B_1) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{kT(B_1)}$.

Por el teorema de categoría de Baire, Y es de segunda categoría. Por tanto, algún $\overline{kT(B_1)}$ debe contener una bola abierta y también $\overline{T(B_1)}$ contiene una bola abierta, digamos $B^* = B(y_0, \varepsilon)$.

En consecuencia, $B^* - y_0 = B(0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0$.

(b) $B^* - y_0 \subset \overline{T(B_0)}$:

$$B^* - y_0 = B(0, \varepsilon) \subset \overline{T(B_1)} - y_0 \subset \overline{T(B_1)} - \overline{T(B_1)} = 2\overline{T(B_1)} = \overline{T(B_0)}.$$

(c) Si $B_n = B(0, 2^{-n}) \subset X$, entonces $\overline{T(B_n)}$ contiene alguna bola V_n alrededor de $0 \in Y$:

Como T es lineal, $\overline{T(B_n)} = 2^{-n} \overline{T(B_0)}$. De aquí se deduce que

$$V_n = B(0, \varepsilon/2^n) \subset \overline{T(B_n)}.$$

(d) Por último, $T(B_0)$ contiene alguna bola abierta alrededor de $0 \in Y$. Más precisamente, veremos que $V_1 = B(0, \varepsilon/2) \subset T(B_0)$:

Sea $y \in V_1$. Entonces $y \in \overline{T(B_1)} \implies \exists v \in T(B_1) : \|y - v\| < \varepsilon/4$. Pero $v = Tx_1$ con $x_1 \in B_1$; entonces

$$\|y - Tx_1\| < \varepsilon/4 \implies y - Tx_1 \in V_2 \subset \overline{T(B_2)}.$$

Esto implica a su vez que

$$\exists x_2 \in B_2 : \|(y - Tx_1) - Tx_2\| < \varepsilon/8 \implies y - Tx_1 - Tx_2 \in V_3 \subset \overline{T(B_3)}$$

y así sucesivamente. Existe entonces $x_n \in B_n$ tal que

$$\left\| y - \sum_{i=1}^n Tx_i \right\| < \varepsilon/2^{n+1}, \quad n \geq 1.$$

Sea $z_n = x_1 + \cdots + x_n$. Como $x_i \in B_i$, $\|x_i\| < 2^{-i}$.

Para $n > m$,

$$\|z_n - z_m\| \leq \sum_{k=m+1}^n \|x_k\| < \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \rightarrow 0$$

si $m \rightarrow \infty$. Por tanto, $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por ser X completo, existe $x \in X$ tal que $z_n \rightarrow x$. Además, $x \in B_0$ pues $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$.

Como T es continua, $Tz_n \rightarrow Tx$. Como además $Tz_n \rightarrow y$, $Tx = y$ lo que implica que $y \in T(B_0)$. \diamond

6.3.- Teorema (aplicación abierta o inversa acotada). Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado.

a) Si T es sobre, entonces T es abierto.

b) Si T es biyectiva, entonces T^{-1} es continua (y por tanto acotada).

Demostración. Debemos probar que si $A \subset X$ es abierto, entonces $T(A)$ es abierto. Para ello, si $y = Tx \in T(A)$, debe existir una bola abierta centrada en y y contenida en $T(A)$.

Sea pues $y = Tx \in T(A)$. Por ser A abierto, contiene una bola abierta de centro x . Entonces $A - x \supset B(0, r)$. Si $k = 1/r$, $k(A - x) \supset B(0, 1)$. Por el lema 6.2, $T(k(A - x)) = k(T(A) - Tx)$ contiene una bola de centro 0, como también $T(A) - Tx$. Entonces $T(A)$ contiene una bola abierta alrededor de $Tx = y$.

Si además T es inyectiva, como T^{-1} es lineal, T es acotada. \diamond

En el teorema anterior las hipótesis de completitud son esenciales como se muestra en los ejercicios al final del capítulo. Una consecuencia elemental es la siguiente.

6.4.- Corolario. *Sea X un espacio vectorial que es de Banach con respecto a las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$. Si existe $c > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq c\|x\|_1$, $\forall x \in X$, entonces las normas son equivalentes.*

Basta tener en cuenta que la identidad es un operador acotado.

7. TEOREMA DEL GRÁFICO CERRADO.

En las aplicaciones prácticas, no todos los operadores son acotados (estos son particularmente importantes en Mecánica Cuántica). Sin embargo, prácticamente todos son cerrados (cuya definición veremos a continuación), o al menos clausurables. El teorema del gráfico cerrado, objeto de esta sección, da condiciones para que un operador cerrado sea acotado.

7.1.- Definición. Dados dos espacios normados X, Y y un operador lineal $T : D(T) \rightarrow Y$ con dominio $D(T) \subset X$. Se dice que T es un *operador cerrado* si su gráfico $G(T) = \{(x, y) : x \in D(T), y = Tx\}$ es cerrado en el espacio normado $X \times Y$, definido mediante las operaciones

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y),$$

y la norma $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Observación. Si X e Y son de Banach, entonces $X \times Y$ también lo es. Sea, en efecto, una sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{(x_n, y_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy en $X \times Y$. Entonces

$$\|z_n - z_m\| = \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| < \varepsilon, \quad \forall n, m > N.$$

Esto implica que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son de Cauchy en X e Y , respectivamente; por tanto convergen. Si $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, entonces $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$, trivialmente.

Ejemplos. 1) El adjunto de un operador es siempre cerrado (capítulo VII, corolario 1.9).

2) Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces $G(f)$ es cerrado.

Probaremos que, bajo ciertas condiciones, si el gráfico es cerrado, la función es continua.

Probaremos en primer lugar una propiedad que es usada a veces como definición de operador cerrado.

7.2.- Teorema. *Sea $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal, donde X e Y son normados. Entonces T es cerrado si y sólo si cada vez que $x_n \rightarrow x$ con $x_n \in D(T)$ y $Tx_n \rightarrow y$, entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$.*

Demostración. a) Supongamos que T es cerrado y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n \rightarrow y$. Entonces:

$$\|(x_n, Tx_n) - (x, y)\| = \|x_n - x\|_X + \|Tx_n - y\|_Y \rightarrow 0.$$

Como el gráfico es cerrado, $(x, y) \in G(T)$, de modo que $x \in D(T)$ y $Tx = y$.

b) Recíprocamente, para probar que $G(T)$ es cerrado, consideramos en $G(T)$ la sucesión $((x_n, Tx_n))_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $(x_n, Tx_n) \rightarrow (x, y)$. Entonces

$$\|x_n - x\| + \|Tx_n - y\| \rightarrow 0,$$

con lo que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$ y $\|Tx_n - y\| \rightarrow 0$. Por hipótesis, $x \in D(T)$ y $Tx = y$, lo que quiere decir que $(x, y) \in G(T)$. \diamond

7.3.- Teorema (gráfico cerrado). *Sea $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal entre dos espacios de Banach X e Y . Si $D(T)$ es cerrado en X , entonces T es cerrado si y sólo si T es acotado.*

Demostración. a) Si T es acotado, es continuo. Por el teorema anterior, es evidente que T es cerrado.

b) Supongamos ahora que $G(T)$ es cerrado en $X \times Y$, donde $D(T)$ es cerrado en X ; en consecuencia, $G(T)$ y $D(T)$ son completos. Consideramos la aplicación $P : G(T) \rightarrow D(T)$ definida como $P(x, Tx) = x$ que es lineal y acotada pues

$$\|P(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|.$$

Además P es biyectiva porque su inversa $P^{-1} : D(T) \rightarrow G(T)$ es $P^{-1}x = (x, Tx)$. Podemos aplicar el teorema de la aplicación abierta; así P^{-1} es

acotada y existe $k : \|(x, Tx)\| \leq k\|x\|$, $\forall x \in D(T)$. Entonces T está acotado porque

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| \leq k\|x\|, \quad \forall x \in D(T). \quad \diamond$$

7.4.- Ejemplo (operador diferencial). Sea $X = C[0, 1]$ y $T : D(T) \rightarrow X$ definida por $Tx = x'$, donde x' representa la derivada y $D(T)$ es el conjunto de funciones con derivada continua en $[0, 1]$. Entonces T es cerrado pero no acotado.

Demostración. Si consideramos la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ definida por $x_n(t) = t^n$, $t \in [0, 1]$, entonces $Tx_n(t) = nt^{n-1}$ y $\|x_n\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n(t)| = 1$, con lo que $\|Tx_n\| = n$; por lo tanto no existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\|Tx_n\| \leq k$. Entonces T no está acotado.

Sea la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n = x'_n \rightarrow y$. Como la convergencia en norma de $C[0, 1]$ es la convergencia uniforme, tenemos

$$\int_0^t y(s)ds = \int_0^t \lim_n x'_n(s)ds = \lim_n \int_0^t x'_n(s)ds = x(t) - x(0).$$

Esto implica que $x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds$ y, por tanto, $x \in D(T)$ y $x' = y$.

Por el teorema anterior, T es cerrado.

Esto a su vez implica que $D(T)$ no es cerrado en X porque, en caso contrario, T sería acotado. \diamond

Veamos a continuación que también existen operadores acotados pero no cerrados. Si $T : D(T) \rightarrow D(T) \subset X$ es el operador identidad, donde $D(T)$ es un subespacio denso propio de X , es trivial que T es lineal y acotado, pero no es cerrado porque si $x \in X \setminus D(T)$, existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Sin embargo, existe una relación como se expresa a continuación.

7.5.- Lema. Sea $T : D(T) \rightarrow Y$ un operador lineal acotado con dominio $D(T) \subset X$ y X, Y espacios normados. Entonces:

(a) Si $D(T)$ es cerrado en X , entonces T es cerrado.

(b) Si T es cerrado e Y es completo, entonces $D(T)$ es cerrado en X .

Demostración. (a) Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n \rightarrow y$. Entonces $x \in \overline{D(T)} = D(T)$ y $Tx_n \rightarrow Tx$ porque T es continuo.

(b) Sea $x \in \overline{D(T)}$. Entonces existe $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$. Como T es acotado, $\|Tx_n - Tx_m\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|$. Por tanto, $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es

de Cauchy, con lo que converge a $y \in Y$ por ser Y completo. Como T es cerrado, $x \in D(T)$ (y $Tx = y$), lo que prueba que $D(T)$ es cerrado. \diamond

8. CLAUSURA DE UN OPERADOR.

En el apartado anterior se consideran operadores cerrados. Estudiaremos ahora la manera de construir operadores cerrados como extensión de ciertos operadores.

Consideremos un operador lineal $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ entre dos espacios normados X e Y . Como sabemos, T es cerrado si y sólo si su grafo $G(T)$ es cerrado en $X \times Y$. Supongamos ahora que T no es cerrado.

8.1.- Definición. Se dice que T es *clausurable* si existe una extensión cerrada de T , es decir $\exists T_1$ operador cerrado tal que $T_1|_{D(T)} = T$.

8.2.- Proposición. Si T es clausurable, admite una extensión cerrada minimal, llamada clausura de T y que representaremos por \bar{T} . Además $G(\bar{T}) = \overline{G(T)}$.

Demostración. Sea T_1 una extensión cerrada de T . Entonces $G(T_1)$ es cerrado y $G(T) \subset G(T_1)$ así como $\overline{G(T)} \subset G(T_1)$. Por tanto $\overline{G(T)}$ no contiene puntos de la forma $(0, y)$ con $y \neq 0$. Esto a su vez implica que $\overline{G(T)}$ es el gráfico de un operador, que llamaremos \bar{T} , el cual es evidentemente cerrado. Cualquier otro operador cerrado T' que sea extensión de T deberá verificar que $G(T) \subset G(T')$ de donde $G(\bar{T}) = \overline{G(T)} \subset G(T')$, es decir será también extensión de \bar{T} . \diamond

De lo anterior se deduce que $x \in D(\bar{T})$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ contenida en $D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $Tx_n \rightarrow \bar{T}x$, con lo que $D(T) \subset D(\bar{T}) \subset \overline{D(T)}$.

Damos a continuación algunas caracterizaciones de los operadores clausurables.

8.3.- Proposición. Dado un operador lineal $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$, son equivalentes:

- i) T es clausurable.
- ii) $\overline{G(T)}$ no contiene puntos de la forma $(0, y)$ con $y \neq 0$.
- iii) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ es tal que $x_n \rightarrow 0$, $Tx_n \rightarrow y$, entonces $y = 0$.

Para la demostración basta tener en cuenta el resultado anterior y el hecho de que, si $(0, y) \in \overline{G(T)}$, existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ tal que $x_n \rightarrow 0$, $Tx_n \rightarrow y$, de modo que iii) \implies ii).

8.4.- Ejemplo. Consideramos el operador derivación $Tx = x'$ en el espacio $L^2[0, 1]$. En este caso $D(T) = \{x \in L^2[0, 1] : \exists x' \in L^2[0, 1]\}$. Este operador ya no es cerrado como lo era en el caso de las funciones continuas. Veamos sin embargo que es clausurable. Sea para ello $z \in C_0^1[0, 1]$ una función de clase C^1 que se anula en los extremos 0 y 1. Si $x \in D(T)$, entonces $\int_0^1 x'(t)z(t)dt = -\int_0^1 z'(t)x(t)dt$.

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ una sucesión tal que $x_n \rightarrow 0$ y $Tx_n = x'_n \rightarrow y$. Como

$$\begin{aligned} \forall z \in C_0^1[0, 1], \langle y, z \rangle &= \lim \langle x'_n, z \rangle = \lim \int_0^1 x'_n(t)z(t)dt \\ &= -\lim \int_0^1 x_n(t)z'(t)dt = -\lim \langle x_n, z' \rangle = 0, \end{aligned}$$

al ser C_0^1 denso en $L^2[0, 1]$, será $y = 0$. Por la proposición anterior se deduce que T es clausurable.

Así pues, $D(\overline{T})$ es el espacio de las funciones $x \in L^2[0, 1]$ para las cuales $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^1[0, 1]$, con $\|x_n - x\|_2 \rightarrow 0$ y $\exists y \in L^2[0, 1]$, con $\|x'_n - y\|_2 \rightarrow 0$. Aunque un elemento de $D(\overline{T})$ puede no ser derivable, la función y se llama *derivada generalizada de x* en sentido de Sobolev. El espacio $D(\overline{T})$ se suele designar por W_2' y llamarse *espacio de Sobolev*.

Mostramos por último una clase particular de operadores clausurables, para los que $D(\overline{T}) = \overline{D(T)}$ y obtenidos mediante el principio de extensión por continuidad. Para ello supondremos que $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ es un operador lineal acotado e Y es de Banach.

8.6.- Lema. *Bajo las condiciones anteriores, existe un único operador lineal acotado \widehat{T} definido en $\overline{D(T)}$, que extiende a T y tal que $\|T\| = \|\widehat{T}\|$. Dicho operador es precisamente la clausura de T .*

Para probar este resultado basta definir \widehat{T} como $\widehat{T}x = \lim Tx_n$, donde $x_n \in D(T)$ y $x_n \rightarrow x$.

CONSIDERACIONES FINALES. Un contexto más abstracto donde se pueden enunciar versiones más generales de los resultados del capítulo corresponde a los *espacios de Fréchet*, que son espacios vectoriales topológicos cuya topología está inducida por una métrica invariante por traslaciones y completa (ver [Ru]). Se deja al lector el análisis comparativo de los resultados en uno y otro contexto.

EJERCICIOS.

1. Si un funcional sub-aditivo p sobre un espacio normado X es continuo en 0 y $p(0) = 0$, probar que p es continuo para todo x .

Resp.: Por hipótesis, si $x_n \rightarrow 0$, $p(x_n) \rightarrow p(0) = 0$.

Sea ahora una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $y_n \rightarrow y$. Entonces

$$\begin{aligned} y_n - y \rightarrow 0 &\implies p(y_n - y) \rightarrow 0 \\ y - y_n \rightarrow 0 &\implies p(y - y_n) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$|p(y_n) - p(y)| = \begin{cases} p(y_n) - p(y) \leq p(y_n - y) \rightarrow 0 \\ \text{ó} \\ p(y) - p(y_n) \leq p(y - y_n) \rightarrow 0 \end{cases} \implies p(y_n) \rightarrow p(y).$$

————— $\diamond\diamond$ —————

2. Probar que un funcional $p : X \rightarrow E$ sobre un espacio vectorial X es una seminorma si y sólo si es simétrica y convexa.

Resp.: \implies) Si p es seminorma, debemos ver que es convexa:

$$\forall x \in X, \alpha \in [0, 1] : p(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq p(\alpha x) + p((1 - \alpha)y) = \alpha p(x) + (1 - \alpha)p(y).$$

\Leftarrow) Veamos ahora que p es subaditiva:

$$p(x + y) = 2p(x/2 + y/2) \leq 2 \cdot \left(\frac{1}{2}p(x) + \frac{1}{2}p(y) \right) = p(x) + p(y).$$

————— $\diamond\diamond$ —————

3. Sea p un funcional sub-lineal sobre un espacio vectorial real X . Si x_0 es un elemento fijo de X , llamamos

$$Z = \{x \in X : x = \alpha x_0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

y definimos $f(x) = \alpha p(x_0)$, para todo $x \in Z$. Probar que existe $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $F(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

Resp.: Basta probar que f es lineal sobre Z y verifica $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in Z$. El resto se deduce del teorema de Hahn-Banach.

- Si $x = x_0$, $f(x_0) = p(x_0)$.
- Si $x = \alpha x_0$, $\alpha > 0$: $f(x) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0) = p(x)$.
- Si $x = \alpha x_0$, $\alpha < 0$: $f(x) = \alpha p(x_0) = -(-\alpha p(x_0)) = -p(-\alpha x_0) = -p(-x)$. Como p es sub-lineal, $p(0) \leq p(x) + p(-x)$, pero $p(0) \geq 0$, lo que implica que $-p(-x) \leq p(x)$ y así $f(x) \leq p(x)$.



4. Sean X e Y dos espacios de Banach y $T \in L(X, Y)$. Se define el adjunto de T como el operador $T^* : Y' \rightarrow X'$ definido por

$$(T^*g)(x) = g(Tx), \quad \forall g \in Y', \quad x \in X.$$

Probar que $T^* \in L(Y', X')$ y $\|T^*\| = \|T\|$.

Resp.: Veamos en primer lugar que T^* es lineal y acotado.

- T^* es lineal pues, $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} T^*(\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x) &= (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(Tx) = \lambda_1 g_1(Tx) + \lambda_2 g_2(Tx) \\ &= \lambda_1 (T^*g_1)(x) + \lambda_2 (T^*g_2)(x) = (\lambda_1 T^*g_1 + \lambda_2 T^*g_2)(x). \end{aligned}$$

- T^* acotado: Por definición,

$$\|T^*\| = \sup_{\|g\|=1} \|T^*g\| \text{ con } \|T^*g\| = \sup_{\|x\|=1} |(T^*g)(x)| = \sup_{\|x\|=1} |g(Tx)|.$$

Ahora bien, como $|g(Tx)| \leq \|g\| \cdot \|Tx\| \leq \|g\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$, $\forall x$, se deduce que $\|T^*g\| \leq \|g\| \cdot \|T\|$. Por tanto, $\|T^*\| \leq \|T\|$.

- Para probar que $\|T^*\| = \|T\|$, usaremos el siguiente resultado (corolario 2.2 del teorema de Hahn-Banach):

$$\forall x \in X, \quad \exists g \in Y' : \|g\| = 1, \quad g(Tx) = \|Tx\|.$$

Por tanto,

$$\|Tx\| = g(Tx) = (T^*g)(x) \leq \|T^*g\| \cdot \|x\| \leq \|T^*\| \cdot \|g\| \cdot \|x\| = \|T^*\| \cdot \|x\|,$$

lo cual implica que $\|T\| \leq \|T^*\|$.



5. Sea X un espacio de Banach. Dados dos subespacios $M \subset X$, $N \subset X'$, se definen los anuladores de M y N como

$$\begin{aligned} M^\perp &= \{f \in X' : f(x) = 0, \forall x \in M\}, \\ {}^\perp N &= \{x \in X : g(x) = 0, \forall g \in N\}, \end{aligned}$$

respectivamente.

a) Probar que M^\perp y ${}^\perp N$ son subespacios cerrados de X' y X , respectivamente, y que ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.

b) Si M es un subespacio cerrado de X , probar que existe un isomorfismo isométrico entre M' y X'/M^\perp .

c) Probar que $N(T^*) = R(T)^\perp$ y $N(T) = {}^\perp R(T^*)$.

Resp.: a) Es fácil comprobar que M^\perp y ${}^\perp N$ son subespacios. Veamos que son cerrados:

- Si $f \in \overline{M^\perp}$, $\exists \{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M^\perp : f_n \rightarrow f$, es decir $\|f_n - f\| \rightarrow 0$. Como $f_n \in M^\perp$, $f_n(x) = 0, \forall x \in M$. Además,

$$|f_n(x) - f(x)| = \|(f_n - f)(x)\| \leq \|f_n - f\| \cdot \|x\| \rightarrow 0,$$

de modo que $f(x) = 0, \forall x \in M$, es decir $f \in M^\perp$.

- Sea $x \in \overline{{}^\perp N}$. Entonces $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset {}^\perp N$ tal que $\|x_n - x\| \rightarrow 0$. Por definición, $g(x_n) = 0, \forall g \in N$. Además $|g(x_n) - g(x)| = |g(x_n - x)| \leq \|g\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0$, de modo que $g(x) = 0, \forall g \in N$, es decir $x \in {}^\perp N$.

Veamos ahora que ${}^\perp(M^\perp) = \overline{M}$.

- Si $x \in M$, $f(x) = 0$ cuando $f \in M^\perp$. Por tanto, $x \in {}^\perp(M^\perp)$. Como ${}^\perp(M^\perp)$ es cerrado, $\overline{M} \subset {}^\perp(M^\perp)$.
 - Supongamos por reducción al absurdo que $\exists y \in {}^\perp(M^\perp)$ pero $y \notin \overline{M}$. Entonces $d(y, M) = d > 0$. Por el teorema de Hahn-Banach, $\exists f \in X'$, con $\|f\| = 1$, tal que $f(x) = 0, \forall x \in M$ (es decir $f \in M^\perp$) y $f(y) \neq 0$. Por otro lado, como $y \in {}^\perp(M^\perp)$, $f(y) = 0, \forall f \in M^\perp$ lo que es absurdo.
- b) Dado $m' \in M'$, por el teorema de Hahn-Banach, existe $x' \in X'$ extensión lineal de m' con $\|x'\| = \|m'\|$. Definimos así $\sigma : M' \rightarrow X'/M^\perp$ por $\sigma(m') = x' + M^\perp$.
- σ está bien definida:
Si x', y' son extensiones de m' , $x' - y' \in M^\perp$, de donde $x' + M^\perp = y' + M^\perp$.

- σ es lineal:

Si $z' + M^\perp = \sigma(m' + n')$, $x' + M^\perp = \sigma(m')$, $y' + M^\perp = \sigma(n')$, entonces $x'|_M = m'$, $y'|_M = n'$ y $z'|_M = m' + n'$, de donde

$$(x' + y' - z')(m) = m'(m) + n'(m) - (m' + n')(m) = 0, \forall m \in M$$

por lo que $x' + y' - z' \in M^\perp$ y $\sigma(m' + n') = \sigma(m') + \sigma(n')$.

Análogamente se prueba la homogeneidad de σ .

- σ es sobre:

Dado $x' + M^\perp \in X'/M^\perp$, llamamos $m' = x'|_M$. Entonces $m' \in M'$ y $\sigma(m') = x' + M^\perp$.

- σ es isometría:

Si $m' \in M'$ y $x' \in X'$ es una extensión de m' , entonces $\|m'\| \leq \|x'\|$. Como $\|x' + M^\perp\| = \inf\{\|x' + m'_1\| : m'_1 \in M^\perp\} \leq \|x'\|$, entonces $\|m'\| \leq \|\sigma(m')\| \leq \|x'\|$. Por el teorema de Hahn-Banach, existe x' extensión de m' con $\|x'\| = \|m'\|$. Entonces $\|m'\| = \|\sigma(m')\|$.

c) Aplicando las definiciones, se deduce fácilmente que:

$$\begin{aligned} \in N(T^*) &\iff T^*g = 0 \iff (T^*g)(x) = 0, \forall x \in X \\ &\iff g(Tx) = 0, \forall x \in X \iff g \in R(T)^\perp. \\ x \in N(T) &\iff Tx = 0 \iff g(Tx) = 0, \forall g \in Y' \iff (T^*g)(x) = 0, \forall g \in Y' \\ &\iff f(x) = 0, \forall f \in R(T^*) \iff x \in {}^\perp R(T^*). \end{aligned}$$



6. a) Sea X un espacio normado y $M \subset X$ un subespacio. Probar la equivalencia:

$$\overline{M} = X \iff M^\perp = 0.$$

- b) Sean X e Y dos espacios normados y $T \in L(X, Y)$. Probar que T^* es inyectiva si y sólo si $R(T)$ es denso en Y .

Resp.: a) \implies : Dado $x \in X$, por hipótesis $\exists \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x$. Si $f \in X'$ es tal que $f(x) = 0$, $\forall x \in M$, entonces $f(x_n) = 0$. Por la continuidad de f se deduce que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ de modo que $f(x) = 0$.

\impliedby : Sea ahora $x \in X$ y llamamos $d = d(x, M)$. Si $x \notin \overline{M}$, entonces $d > 0$ y existe $F \in X'$ tal que $\|F\| = 1$, $F(x) = d$ y $F(z) = 0$, $\forall z \in M$. Por hipótesis, como $F(z) = 0$, $\forall z \in M$, entonces $F(x) = 0$, de modo que $d = 0$, lo que es absurdo.

b) \implies : Supongamos que T^* es inyectiva. Si $\overline{R(T)} \neq Y$, por el apartado a), existe un funcional $g \in Y'$ no nulo tal que $g(y) = 0, \forall y \in R(T)$. Esto implica que $g(Tx) = 0, \forall x \in X$ y, por definición del adjunto, $(T^*g)(x) = 0, \forall x \in X$, es decir, $T^*g = 0$. Esto implica que $g \in N(T^*)$, lo que contradice la hipótesis.

\Leftarrow : Recíprocamente, si $\overline{R(T)} = Y$, por el apartado a), todo funcional $g \in Y'$ tal que $g(y) = 0, \forall y \in R(T)$, es nulo. Pero $g(y) = 0, \forall y \in R(T)$ implica que $g(Tx) = 0, \forall x \in X$, es decir $(T^*g)(x) = 0, \forall x \in X$. De la afirmación anterior se deduce que $N(T^*) = 0$, es decir T^* es inyectiva.



7. Sea X un espacio normado. Probar que $\forall x \in X, \exists f \in X'$ tal que $\|f\| = \|x\|$ y $f(x) = \|x\|^2$. Concluir que

$$\forall x \in X, \|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| \leq 1\}.$$

Resp.: Fijado $x \in X$, definimos $M = \{\lambda x : \lambda \in E\}$ y $f_0(\lambda x) = \lambda \|x\|^2$.

Así definido, $f_0 : M \rightarrow E$ es lineal y acotado y $\|f_0\| = \|x\|$.

Por el teorema de Hahn-Banach, $\exists f : X \rightarrow E : f(x) = \|x\|^2$ y $\|f\| = \|x\|$.

Para probar la segunda parte, por un lado, como $\forall f \in X', |f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|$, entonces

$$\sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| \leq 1\} \leq \|x\|.$$

Por otra parte, si aplicamos el apartado anterior, dado $x, \exists f \in X'$ tal que $\|f\| = \|x\|$ y $f(x) = \|x\|^2$. Si definimos $f_1(x) = \frac{f(x)}{\|x\|}$, entonces $\|f_1\| = 1$ y $f_1(x) = \|x\|$ lo que implica que $\|x\| \leq \sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| \leq 1\}$.



8. Sean X, Y espacios normados y $x_0 \in X, x_0 \neq 0$. Dado $y_0 \in Y$, probar que existe $T : X \rightarrow Y$ lineal y continua tal que $T(x_0) = y_0$, de forma que $\|T\| \cdot \|x_0\| = \|y_0\|$.

Resp.: Si definimos $f_0 : \langle \{x_0\} \rangle \rightarrow E$ por $f_0(\lambda x_0) = \lambda$, entonces f_0 es lineal y continua. Además $\|f_0\| = \sup_{\lambda \neq 0} |f_0(\lambda x_0)| / \|\lambda x_0\| = 1/\|x_0\|$.

Por el teorema de Hahn-Banach, $\exists f \in X' : f|_{\langle \{x_0\} \rangle} = f_0$ y $\|f\| = \|f_0\| = \frac{1}{\|x_0\|}$.

Dado $y_0 \in Y$, definimos $g : E \rightarrow Y$ por $g(\lambda) = \lambda y_0$. Entonces g es lineal y continua, por lo que $T = g \circ f$ es lineal y continua. Además $T(x_0) = (g \circ f)(x_0) = y_0$ y $\|(g \circ f)(x)\| = \|f(x)y_0\| = |f(x)| \cdot \|y_0\|$ lo que implica que

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|(g \circ f)(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)| \cdot \|y_0\|}{\|x\|} = \|f\| \cdot \|y_0\| = \frac{\|y_0\|}{\|x_0\|}.$$



9. Sean X, Y espacios normados con $X \neq \{0\}$. Probar que Y es de Banach si $L(X, Y)$ es de Banach.

Resp.: Sea $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en Y .

Como $X \neq \{0\}$, $\exists x_0 \in X$ con $\|x_0\| = 1$. Por un corolario del teorema de Hahn-Banach, $\exists f \in X'$ tal que $f(x_0) = 1$ y $\|f\| = 1$.

Definimos la sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de operadores $T_n : X \rightarrow Y$ por $T_n(x) = f(x)y_n$, que es evidentemente lineal.

Como f es continua, $\exists M > 0 : |f(x)| \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$; entonces

$$\|T_n(x)\| = \|f(x)y_n\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| \leq M\|y_n\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in X,$$

lo que implica que cada T_n es continua.

Como $\|f\| = 1$, $\frac{|f(x)|}{\|x\|} \leq 1, \forall x \neq 0$, es decir $|f(x)| \leq \|x\|$; entonces

$$\|T_n(x)\| = |f(x)| \cdot \|y_n\| \leq \|x\| \cdot \|y_n\| \implies \|T_n\| \leq \|y_n\|.$$

Además, como $\|T_n(x_0)\| = |f(x_0)| \cdot \|y_n\| = \|y_n\| \implies \|y_n\| \leq \|T_n\|$. Los resultados anteriores muestran pues que $\|T_n\| = \|y_n\|$. Así pues, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también de Cauchy y, por ser $L(X, Y)$ de Banach, $\exists T \in L(X, Y)$ tal que $T_n \rightarrow T$. Probaremos que $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $T(x_0)$. En efecto, como

$$\begin{aligned} \|y_n - T(x_0)\| &= \|T_n(x_0) - T(x_0)\| \\ &= \|(T_n - T)(x_0)\| \leq \|T_n - T\| \cdot \|x_0\| = \|T_n - T\|, \end{aligned}$$

dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 : \|T_n - T\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$ y también $\|y_n - T(x_0)\| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$.



10. Sea X un espacio normado y $x \in X$ un elemento de norma 1. Probar que existe un subespacio cerrado M de X tal que $X = M \oplus \langle \{x\} \rangle$ y $d(x, M) = 1$.

Resp.: Definimos $f : \langle \{x\} \rangle \rightarrow E$ por $f(\alpha x) = \alpha$. Como $|f(\alpha x)| = |\alpha| = |\alpha| \cdot \|x\|$, es claro que $\|f\| = 1$.

Por el teorema de Hahn-Banach, $\exists F : X \rightarrow E$ lineal y acotado tal que $\|F\| = 1$ y $F(x) = 1$.

Sea $M = N(F)$, que es un subespacio cerrado de X .

Para todo $y \in X$, si llamamos $\alpha = F(y)$, $F(y - \alpha x) = F(y) - \alpha F(x) = 0$, es decir, $y - \alpha x \in M$. De este modo, $y = \alpha x + m$, con $m \in M$.

Además, como $\|F\| = 1$, entonces $|F(y)| \leq \|y\|$, $\forall y \in X$. En particular, si $y = x - m$, $|F(y)| = 1$ y $1 \leq \|x - m\|$, lo que implica que $d(x, M) \geq 1$.

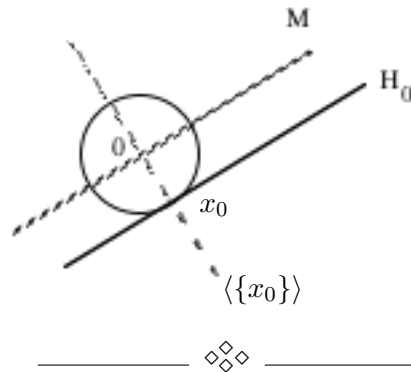
Ahora bien, como $\|x\| = \|x - 0\| = 1$, $d(x, M) = 1$.



11. Sea $S(0, r)$ una esfera arbitraria en un espacio normado X y $x_0 \in S(0, r)$ un punto cualquiera. Probar que existe un hiperplano H_0 que contiene a x_0 y tal que la bola cerrada $\overline{B}(0, r)$ está contenida en uno de los dos semiespacios determinados por H_0 .

Resp.: Es consecuencia del anterior. Obtenemos $M = N(F)$ y definimos $H_0 = x_0 + M$, $H_0 = \{x \in X : F(x) = r\}$.

Gráficamente, la idea es la siguiente:



12. Sea $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ el operador definido por

$$S(x_1, x_2, \dots) = (x_3, x_4, \dots)$$

y llamamos $T_n = S^n$. Encontrar una cota para $\|T_n x\|$ y calcular $\lim_n \|T_n x\|$, $\|T_n\|$, $\lim_n \|T_n\|$.

Resp.: Es fácil comprobar que

$$T_n(x_1, x_2, \dots) = S^n(x_1, x_2, \dots) = (x_{2n+1}, x_{2n+2}, \dots).$$

Entonces, $\|T_n x\|_2 = (\sum_{k \geq 2n+1} |x_k|^2)^{1/2} \leq \|x\|_2$, de donde $\lim_n \|T_n x\| = 0$ por ser el resto de una serie convergente.

Además, como $\|T_n x\| \leq \|x\|$, $\|T_n\| \leq 1$. Por otra parte, para $e_1 = (1, 0, 0, \dots)$, $\|T_n e_1\| = \|e_{2n+1}\| = \|e_1\|$, lo que implica que $\|T_n\| = 1$, de donde $\lim_n \|T_n\| = 1$.

Obsérvese que $\lim_n \|T_n x\| \neq \lim_n \|T_n\| \cdot \|x\|$.



13. Sean $(X_1, \|\cdot\|_1)$ un espacio normado y $(X_2, \|\cdot\|_2)$ un espacio de Banach. Consideramos la familia $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset L(X_1, X_2)$ tal que $\limsup_\alpha \|T_\alpha\| < \infty$. Sea $L = \{x \in X_1 : \exists \lim_\alpha T_\alpha(x)\}$. Probar que L es un subespacio cerrado de X_1 . Concluir que si $\{T_\alpha(x)\}_\alpha$ converge para todo $x \in M$, para algún M denso en X_1 , entonces $\{T_\alpha(x)\}_\alpha$ converge para todo $x \in X_1$.

Resp.: a) La prueba de que L es subespacio es directa. Veamos que es cerrado:

Sea $x \in \bar{L}$; entonces $\exists x_n \in L : x_n \rightarrow x$.

Como $x_n \in L$, $\exists \lim_\alpha T_\alpha x_n = y_n$.

Así, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en X_2 tal que

$$\|T_\alpha x_n - T_\alpha x_m\| \leq \|T_\alpha\| \cdot \|x_n - x_m\| \rightarrow 0,$$

de donde $\|y_n - y_m\| \rightarrow 0$. Como X_2 es completo, $\exists y \in X_2 : y_n \rightarrow y$.

Veamos que $\lim_\alpha T_\alpha x = y$:

$$\begin{aligned} \|T_\alpha x - y\| &\leq \|T_\alpha x - T_\alpha x_n\| + \|T_\alpha x_n - y_n\| + \|y_n - y\| \\ &\leq \|T_\alpha\| \cdot \|x - x_n\| + \|T_\alpha x_n - y_n\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $x \in L$ y L es cerrado.

b) Supongamos por el contrario que $\exists x \in X_1 : \{T_\alpha x\}_\alpha$ no converge; entonces $x \notin L$.

Como $\overline{M} = X_1$, $\exists x_n \in M : x_n \rightarrow x$. Entonces $\{T_\alpha x_n\}_\alpha$ converge, $\forall n$, de donde $x_n \in L$, $\forall n$.

De aquí, $x \in \overline{L} = L$, lo que contradice lo anterior.



14. Probar que la completitud de un espacio X es esencial en el teorema de acotación uniforme.

Resp.: Consideramos el conjunto

$$X = \{x \in \ell^\infty : \exists N = N(x), x_n = 0, \forall n > N\}$$

y definimos la sucesión de funcionales $T_n : X \rightarrow E$ por $T_n(x) = nx_n$.

Está claro que X no es completo pues $x^{(n)} = (1, \overset{(n)}{.}, 1/n, 0, \dots) \in X$ pero $\lim_n x^{(n)} = (1, 1/2, \dots) \notin X$.

Como $\forall x \in X$, $\exists N : x_n = 0, \forall n > N$, entonces $T_n x = \begin{cases} 0 & \text{si } n > N \\ nx_n & \text{si } n \leq N. \end{cases}$

Así pues, $|T_n x| = 0$ si $n > N$ y $|T_n x| \leq N \cdot \|x\|$ si $n \leq N$.

Como $\|T_n\| \geq \frac{|T_n x|}{\|x\|}$, $\forall x \neq 0$, tomando $x = (1, \overset{(n)}{.}, 1, 0, \dots)$, entonces $T_n x = n$ y $\|x\| = 1$, de donde $\|T_n\| \geq n$ y $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ no está acotado.



15. Sea $c_0 \subset \ell^\infty$ el subespacio de las sucesiones complejas que convergen a cero, y sea $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n$ converge para todo $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$. Probar que $\sum_{n \in \mathbb{N}} |y_n| < \infty$.

Resp.: Definimos $T_n : c_0 \rightarrow \mathbb{C}$ por $T_n x = \sum_{k=1}^n x_k y_k$, $\forall y \in M$, donde

$$M = \{y = (y_n)_n : \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n y_n \text{ converge}, \forall x \in c_0\}.$$

Como $|T_n x| = \left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|$ está acotado por ser $\{\sum_{k=1}^n x_k y_k\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente (sucesión de sumas parciales de una serie convergente), podemos aplicar el teorema de acotación uniforme.

De lo anterior se deduce que $\|T_n\| \leq c$, $\forall n$. Como

$$\|T_n\| \geq \frac{|T_n x|}{\|x\|} = \frac{\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right|}{\|x\|},$$

$$\text{elegimos } x = \begin{cases} \overline{y}_k/|y_k| & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n, \end{cases} \text{ y resulta } \|T_n\| \geq \frac{|\sum |y_k||}{1} = \sum_{k=1}^n |y_k|.$$

Tenemos así una sucesión $\{\sum_{k=1}^n |y_k|\}_{n \in \mathbb{N}}$ acotada superiormente y creciente (todos sus términos son positivos). Entonces $\{\sum_{k=1}^n |y_k|\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge y la serie correspondiente $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$ es convergente.

————— $\diamond \diamond$ —————

16. Si X e Y son espacios de Banach y $T_n \in L(X, Y)$, $n \geq 1$, probar la equivalencia de las siguientes proposiciones:

i) $\{\|T_n\|\}_n$ es acotada.

ii) $\{\|T_n x\|\}_n$ es acotada para todo $x \in X$.

iii) $\{g(T_n x)\}_n$ es acotada para todo $x \in X$ y todo $g \in Y'$.

Resp.: i) \implies ii) \implies iii) son evidentes.

iii) \implies i). Para cada $x \in X$, definimos la sucesión de funcionales $y_n : Y' \rightarrow \mathbb{C}$ por $y_n(g) = g(T_n x)$. Por hipótesis, $\{|y_n(g)|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada lo que implica que $\{\|y_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Pero, como $\|y_n\| = \|T_n x\|$, por el teorema de acotación uniforme, $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.

————— $\diamond \diamond$ —————

17. Si $x_n \xrightarrow{d} x_0$ en un espacio normado X , probar que $x_0 \in \overline{M}$, donde $M = \langle \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rangle$.

Resp.: Si, por el contrario, $x_0 \notin \overline{M}$, por un corolario del teorema de Hahn-Banach, llamando $d = d(x_0, \overline{M}) > 0$, existe $f \in X' : \|f\| = 1$, $f(y) = 0$, $\forall y \in \overline{M}$ y $f(x_0) = d$.

Ahora bien, como $x_n \in M$, $f(x_n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y de la convergencia $x_n \xrightarrow{d} x_0$, se deduce que $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. Por lo tanto, $f(x_0) = 0$, lo que contradice la suposición anterior.

————— $\diamond \diamond$ —————

18. Sea H un espacio de Hilbert y $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal. Dada una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en H , probar que

$$x_n \xrightarrow{d} x \iff \langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle x, e_k \rangle, \quad \forall k.$$

Resp.: \Rightarrow : Para cada e_k existe, por el teorema de representación de Riesz, un funcional $f_k \in H'$ tal que $\langle x, e_k \rangle = f_k(x)$, $\forall x \in H$. Como, por hipótesis, $f_k(x_n) \rightarrow f_k(x)$, deducimos que $\langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle x, e_k \rangle$.

\Leftarrow : Sea $f \in H'$ arbitrario. Nuevamente por el teorema de representación de Riesz, existe un único elemento $y \in H$ tal que $f(x) = \langle x, y \rangle$, $\forall x \in H$. Al ser $\{e_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de H , $y = \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle y, e_k \rangle e_k$, de modo que

$$f(x) = \langle x, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\langle y, e_k \rangle} \langle x, e_k \rangle \text{ y } f(x_n) = \langle x_n, y \rangle = \sum_{k \in \mathbb{N}} \overline{\langle y, e_k \rangle} \langle x_n, e_k \rangle.$$

De estas igualdades y de la hipótesis $\langle x_n, e_k \rangle \rightarrow \langle x, e_k \rangle$ se deduce la convergencia $f(x_n) \rightarrow f(x)$, es decir $x_n \xrightarrow{d} x$.



19. En el espacio $C[0, 1]$ con la norma $\|f\| = \int_0^1 |f(t)| dt$, encontrar una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente en norma a $g \in C[0, 1]$ pero no convergente puntualmente.

Resp.: Definimos $f_n(t) = t^n$. Así $\|f_n\| = \int_0^1 t^n dt = 1/(n+1)$ de modo que $f_n \rightarrow 0$ en la norma $\|\cdot\|_1$.

Por otra parte, $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t = 1, \end{cases}$ que no es continua en $[0, 1]$.



20. a) Se define la sucesión $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{x^3} e^{-n/2x^2} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Estudiar la convergencia puntual, en L^1 y en L^∞ .

- b) Idem para la sucesión $f_n(x) = \sin^2 \frac{\pi}{x} \cdot \chi_{[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]}(x)$, $f_n(0) = 0$.

Resp.: a) Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x^3} e^{-n/2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/x^3}{e^{n/2x^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/x^3}{(1/2x^2)e^{n/2x^2}} = 0$$

si $x \neq 0$, entonces $f_n \rightarrow 0$ puntualmente pues $|f_n(x)| \rightarrow 0, \forall x \in [0, \infty]$.

Por otra parte,

$$\|f_n\|_1 = \int_0^\infty \frac{n}{x^3} e^{-n/2x^2} dx = \lim_{B \rightarrow \infty} e^{-n/2x^2} \Big|_0^B = 1$$

lo que implica que $f_n \not\rightarrow 0$ en L^1 .

Para estudiar la convergencia en L^∞ , calculemos $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in [0, \infty]} \frac{n}{x^3} e^{-n/2x^2}$.

Debido a que

$$f'_n(x) = \left(\frac{n^2}{x^6} - \frac{3n}{x^4} \right) e^{-n/2x^2} = \frac{n}{x^4} \left(\frac{n-3x^2}{x^2} \right) e^{-n/2x^2},$$

se deduce que f_n alcanza el máximo en $x = \sqrt{n/3}$. De aquí,

$$\|f_n\|_\infty = f_n(\sqrt{n/3}) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{n}} e^{3/2} \rightarrow 0$$

cuando $n \rightarrow \infty$; por tanto, $f_n \rightarrow 0$ en la norma uniforme.

b) Para los valores $x \notin [0, 1]$, $f_n(x) = 0$, con lo que $f_n(x) \rightarrow 0$.

Si $x \in (0, 1]$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} : x > 1/n_0$, es decir $x \notin \left[\frac{1}{n_0+1}, \frac{1}{n_0} \right]$; entonces $f_n(x) = 0, \forall n > n_0$, y nuevamente $f_n(x) \rightarrow 0$.

La convergencia no es uniforme porque, tomando $x_n = \frac{2}{2n+1}$, es claro que $x_n \rightarrow 0$ pero $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = 1 \neq f(0) = 0$.

Para cualquier $p \geq 1$ tenemos:

$$\|f_n\|_p^p = \int_{-\infty}^\infty |f_n(x)|^p dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \left(\sin^2 \frac{\pi}{x} \right)^p dx \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} \rightarrow 0.$$

De aquí se deduce que $f_n \rightarrow 0$ en $L^p, \forall p \geq 1$.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

21. Sean X un espacio de Banach, Y normado y $T_n \in L(X, Y)$. Si $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fuertemente, probar que $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado. O bien: si $T_n x \rightarrow T x, \forall x \in X \implies T \in L(X, Y)$.

Resp.: Por hipótesis, la sucesión $\{T_n x\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $\forall x \in X$. Esto implica que $\{\|T_n x\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado.

Por el teorema de acotación uniforme, $\{\|T_n\|\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado.

————— $\diamond \diamond \diamond$ —————

22. Probar que el operador $T : L^1[1, \infty) \rightarrow L^1[1, \infty)$ definido por $(Tf)(t) = t^{-1}f(t)$ es acotado pero no abierto.

Resp.: Debido a la acotación

$$\|Tf\|_1 = \int_1^\infty |Tf(t)|dt = \int_1^\infty \left| \frac{f(t)}{t} \right| dt \leq \int_1^\infty |f(t)|dt = \|f\|_1,$$

resulta que $\|T\| \leq 1$.

Para ver que no es abierto, basta encontrar una sucesión de funciones $g_n \in R(T)$, con $g_n \rightarrow 0$ pero $\|T^{-1}g_n\| > 1$.

En efecto, si definimos $g_n(t) = \begin{cases} 2/n^2, & t \in (1, n+1) \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$, entonces:

$$\begin{aligned} \|Tg_n(t)\| &= \int_1^{n+1} t \cdot \frac{2}{n^2} dt = \frac{(n+1)^2 - 1}{n^2} > 1, \\ \|g_n\| &= \int_1^{n+1} \frac{2}{n^2} dt = \frac{2[(n+1) - 1]}{n^2} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Además, $g_n \in R(T)$ pues $t \cdot g_n(t) \in L^1$.

————— $\diamond\diamond\diamond$ —————

23. Sea X el subespacio de ℓ^∞ formado por las sucesiones que tienen como máximo un número finito de términos no nulos y sea $T : X \rightarrow X$ el operador definido por $y = Tx = (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$. Probar que T es lineal y acotado pero T^{-1} no está acotado. ¿Contradice esto el teorema de la aplicación abierta?

Resp.: Es evidente que T es lineal. Para ver que es acotado, basta observar que $\|Tx\|_\infty = \|(\frac{x_n}{n})\|_\infty \leq \|x\|_\infty$, de donde $\|T\| \leq 1$.

T es sobre pues $\forall x \in X, \exists y = (nx_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X : Ty = x$.

T es inyectiva: $x \neq y \implies \exists n \in \mathbb{N} : x_n \neq y_n \implies \frac{x_n}{n} \neq \frac{y_n}{n} \implies Tx \neq Ty$.

Sin embargo T^{-1} no es acotado pues, debido a que $\|T^{-1}y\| = \|ny_n\|$, si elegimos $y_n = (\delta_{nk})_{k=1}^\infty$, entonces $T^{-1}(y_n) = (n\delta_{nk})_{k=1}^\infty$, de donde $\|T^{-1}y_n\| = n \rightarrow \infty$.

Al no ser X de Banach, no es aplicable el teorema de la aplicación abierta.

————— $\diamond\diamond\diamond$ —————

24. En el espacio X de las funciones reales continuas en $[0, 1]$ se define el operador $T : X \rightarrow X$ por $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)ds$, $\forall t \in [0, 1]$. Encontrar $Y = R(T)$. Probar que $T : X \rightarrow Y$ es un operador lineal acotado y biyectivo pero $T^{-1} : Y \rightarrow X$ no es acotado como podría esperarse del teorema de la aplicación abierta. ¿Por qué?

Resp.: Si $g \in R(T)$, $\exists f \in X : g(t) = \int_0^t f(s)ds \implies g'(x) = f(x)$, $g(0) = 0$. Por tanto, $R(T) = \{g \in C^1[0, 1] : g(0) = 0\}$.

Veamos que T es acotado:

$$|(Tf)(t)| \leq \int_0^t |f(s)|ds \leq \|f\|_\infty \cdot t \implies \|Tf\| \leq \|f\|_\infty.$$

Además, T es inyectiva pues, si $Tf = 0$, entonces $\int_0^t f(s)ds = 0$, $\forall t \implies f(t) = 0$, $\forall t \implies f = 0$.

Sin embargo, T^{-1} no es acotado pues $T^{-1}g = g'$ (operador derivada).

No se puede aplicar el teorema de la aplicación abierta porque el espacio X no es completo.



25. Sean X e Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal acotado e inyectivo. Probar que $T^{-1} : R(T) \rightarrow X$ es acotado si y sólo si $R(T)$ es cerrado en Y .

Resp.: a) Si $R(T)$ es cerrado, es completo. Por el teorema de la aplicación abierta, como $T : X \rightarrow R(T)$ es biyectivo, $\exists T^{-1} : R(T) \rightarrow X$ acotado.

b) Sea $y \in \overline{R(T)}$; entonces $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset R(T) : y_n \rightarrow y$ y $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X : Tx_n = y_n$. Como

$$\|x_n - x_m\| = \|T^{-1}(y_n - y_m)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\| \rightarrow 0,$$

y X es de Banach, $\exists x = \lim_n x_n$.

Por último, teniendo en cuenta que

$$\|y_n - Tx\| = \|Tx_n - Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x_n - x\| \rightarrow 0,$$

deducimos que $Tx = y$, es decir $y \in R(T)$.



26. Sea T un operador lineal cerrado. Si dos sucesiones $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $D(T)$ convergen al mismo límite x y si $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{Ty_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ convergen, probar que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{Ty_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tienen el mismo límite.

Resp.: Si $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow x$, entonces $x_n - y_n \rightarrow 0$.

Por otra parte, si $Tx_n \rightarrow u$, $Ty_n \rightarrow v$, entonces $T(x_n - y_n) \rightarrow u - v$.
Por el teorema del gráfico cerrado, $T(0) = 0 = u - v \implies u = v$.



27. Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas en X tales que $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ son de Banach. Probar que las dos normas son equivalentes si y sólo si $\exists M > 0 : \|x\|_1 \leq M\|x\|_2, \forall x \in X$.

Resp.: Probemos que la aplicación identidad $I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ es lineal y continua. Para ello, supongamos que $\|x_n - x\|_1 \rightarrow 0$ y $\|I(x_n) - y\|_2 \rightarrow 0$. Entonces

$$\|I(x) - y\|_1 = \|x - y\|_1 \leq \|x - x_n\|_1 + \|x_n - y\|_1 \leq \|x - x_n\|_1 + M\|I(x_n) - y\|_2 \rightarrow 0,$$

lo que implica que $I(x) = y$.

Esto prueba que I es un operador cerrado. Por el teorema del gráfico cerrado, I es continua. Entonces $\|I(x)\|_2 \leq b\|x\|_1$ y de la hipótesis se deduce que las normas son equivalentes.



28. Supongamos que X es un espacio de Banach respecto a dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, y que si una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge a los límites y y z en ambos espacios, entonces $y = z$. Probar que las dos normas son equivalentes.

Resp.: De la hipótesis, al igual que el ejercicio anterior, se obtiene inmediatamente que la aplicación identidad $I : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$ es biyectiva y cerrada. El teorema del gráfico cerrado asegura que I es continua, es decir $\|Ix\|_2 \leq M\|x\|_1$, lo que prueba que las normas son equivalentes.



29. Sea X un espacio de Banach y M, N subespacios cerrados de X . Supongamos que cada $x \in X$ tiene una representación única de la forma $x = y + z$ con $y \in M$, $z \in N$. Probar que existe k tal que $\|y\| \leq k\|x\|$, $x \in X$.

Resp.: Se define $T : X \rightarrow X$ como la proyección $Tx = y$, si $x = y + z$, con $y \in M$, $z \in N$.

Veamos que T cumple las condiciones del teorema del gráfico cerrado:

Supongamos que $x_n \rightarrow x$, $Tx_n \rightarrow y$. Como $Tx_n \in M$ y M es cerrado, $y \in M$, de donde $y = Ty$.

Por otra parte, como $x_n - Tx_n \in N$ y N es cerrado, entonces $x - y \in N$, de donde $T(x - y) = 0$, es decir $Tx = Ty$.

De lo anterior deducimos que $y = Tx$. El teorema del gráfico cerrado prueba entonces que T es continuo, lo que da lugar a la tesis.



30. Sea $T : C^1[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$ el operador definido por $(Tf)(x) = f(x) + f'(x)$. Probar que T es lineal y cerrado pero no acotado (se supone definida la norma infinito en ambos espacios). Deducir de lo anterior que $C^1[0, 2\pi]$ no es de Banach.

Resp.: Para ver que T es cerrado, consideramos una sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones en $C^1[0, 2\pi]$ tal que $f_n \rightarrow f$, $Tf_n \rightarrow g$.

Por la convergencia uniforme en $[0, 2\pi]$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^t g(x)dx &= \lim_n \int_0^t (Tf_n)(x)dx = \lim_n \int_0^t [f_n(x) + f'_n(x)]dx \\ &= \lim_n [f_n(t) - f_n(0) + \int_0^t f_n(x)dx] = f(t) - f(0) + \int_0^t f(x)dx \\ \implies f(t) &= f(0) + \int_0^t g(x)dx - \int_0^t f(x)dx \implies f'(t) = g(t) - f(t). \end{aligned}$$

De este modo, $f \in D(T)$ y $Tf = g$.

Para ver que T no es acotado, basta tomar la sucesión $f_n(x) = \sin nx$, que verifica $\|f_n\|_\infty = 1$, pero $\|Tf_n\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |n \cos nx + \sin nx| \geq n$.



31. Sea T un operador lineal cerrado con dominio $D(T)$ en un espacio de Banach X y rango $R(T)$ en un espacio normado Y . Si T^{-1} existe y es acotado, probar que $R(T)$ es cerrado.¹

Resp.: Probemos que T^{-1} es cerrado:

Si $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de elementos en $D(T^{-1})$ tal que $y_n \rightarrow y$, $T^{-1}y_n \rightarrow x$, entonces $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T) : Tx_n = y_n \rightarrow y$, de donde $T^{-1}y_n = x_n \rightarrow x$. Como T es cerrado, entonces $x \in D(T)$ y $Tx = y$, es decir $y \in D(T^{-1})$, $T^{-1}y = x$.

Pero si T^{-1} es cerrado, entonces $D(T^{-1}) = R(T)$ es cerrado.

Otra forma de probarlo es ver que $G(T^{-1}) = \{(Tx, x) : x \in D(T)\} \subset Y \times X$ es cerrado, pero como la aplicación $f : X \times Y \rightarrow Y \times X$, definida por $f(x, y) = (y, x)$, es isometría y $G(T)$ es cerrado, entonces $G(T^{-1})$ es cerrado.



32. Sea $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ un operador lineal con grafo $G(T)$, donde X e Y son espacios de Banach. Probar que T tiene una extensión \tilde{T} que es un operador lineal cerrado con grafo $\overline{G(T)}$ si y sólo si $\overline{G(T)}$ no contiene ningún elemento de la forma $(0, y)$, con $y \neq 0$.

Resp.: a) Supongamos que $\exists \tilde{T}$ extensión lineal cerrada de T con grafo $G(\tilde{T}) = \overline{G(T)}$. Por ser \tilde{T} lineal, $\tilde{T}(0) = 0$, de modo que $(0, y) \notin G(\tilde{T})$ con $y \neq 0$, es decir $(0, y) \notin \overline{G(T)}$.

b) Supongamos ahora que $\overline{G(T)}$ no contiene ningún elemento de la forma $(0, y)$, con $y \neq 0$. Si existieran $(x_1, y_1), (x_1, y_2) \in \overline{G(T)}$, entonces $(0, y_1 - y_2) \in \overline{G(T)} \implies y_1 - y_2 = 0$.

Esto asegura que el operador $\tilde{T}x = y_1 = y_2$ está bien definido y es una extensión de T . Además, \tilde{T} es lineal pues $\overline{G(T)}$ es espacio vectorial y \tilde{T} es cerrado pues $\overline{G(T)}$ es cerrado.



33. Demostrar que un operador $T : D(T) \subset X \rightarrow Y$ es clausurable si y sólo si

$$\left. \begin{array}{l} x_n \in D(T), \quad x_n \rightarrow x, \quad Tx_n \rightarrow y \\ x'_n \in D(T), \quad x'_n \rightarrow x, \quad Tx'_n \rightarrow y' \end{array} \right\} \implies y = y'.$$

Resp.: Se deduce inmediatamente de la proposición 8.3.

De esta propiedad es claro también que

$$D(\overline{T}) = \{x \in X : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T), x_n \rightarrow x, \exists \lim_n Tx_n\}.$$

TEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Versión geométrica del teorema de Hanh-Banach ([La], [CC]).
2. Integración numérica y convergencia débil-* ([Kr]).
3. Sucesiones de Cauchy débiles ([Sc]).

V. TEORÍA ESPECTRAL EN ESPACIOS NORMADOS

Damos comienzo en este capítulo a la llamada teoría espectral de operadores en espacios normados. Toda la información acumulada hasta el momento se irá aplicando sucesivamente al estudio de las propiedades espectrales de los operadores lineales y acotados. Con la mirada puesta en la situación finito-dimensional, trataremos de generalizar los conceptos de resolvente y espectro y de obtener descomposiciones de los operadores compactos mediante proyecciones sobre ciertos subespacios invariantes.

SECCIONES

1. Introducción. Definiciones previas.
2. Propiedades espectrales de los operadores lineales acotados. Funciones de un operador.
3. Operadores compactos.
4. Descomposición espectral de los operadores compactos.
5. Ecuaciones lineales de operadores compactos. Ecuaciones integrales de Fredholm.
6. Ejercicios.

1. INTRODUCCIÓN. DEFINICIONES PREVIAS.

Mucha información sobre el comportamiento de un operador lineal A se puede obtener estudiando la familia de operadores $A - \lambda I$, con λ real o complejo (obsérvese que todo subespacio invariante bajo A es también invariante bajo $A - \lambda I$ y que todos los operadores de la forma $A - \lambda I$ conmutan entre sí). Por otra parte, a menudo el inverso de un operador es más importante que el propio operador. En particular, la teoría espectral trata de las propiedades del operador $(A - \lambda I)^{-1}$, donde $A \in L(X)$ con X espacio normado y λ un escalar fijado (esto permitirá descomponer el operador A en el mayor número de componentes y, paralelamente, una descomposición del espacio X en suma de subespacios invariantes bajo A). En las aplicaciones prácticas esto permitirá resolver sistemas de ecuaciones lineales, ecuaciones diferenciales y ecuaciones integrales.

En el caso de dimensión finita la situación es particularmente simple: dado un operador lineal $A : X \rightarrow X$ en un espacio normado de dimensión finita, $\dim X = n$, fijado un escalar λ , o existe $(A - \lambda I)^{-1}$ o no existe; si no existe, en cuyo caso λ recibe el nombre de *autovalor* de A , se prueba fácilmente que existen como máximo n autovalores y son precisamente las raíces de la *ecuación característica* $\det(A - \lambda I) = 0$ (donde identificamos el operador A con su matriz asociada respecto a cualquier base de X). En particular se deduce que todo tal operador tiene al menos un autovalor. Además todas las matrices que representan al mismo operador $A \in L(X)$ con respecto a distintas bases de X tienen los mismos autovalores.

Las cosas no son tan simples en dimensión infinita: aparte de que puede haber infinitos valores de λ para los que $(A - \lambda I)^{-1}$ no existe, en los casos de existencia debemos precisar los resultados, tanto el que $(A - \lambda I)^{-1}$ sea lineal y acotado como el que el rango de $(A - \lambda I)$ sea denso en X . Nada de esto tiene significado en dimensión finita.

El estudio de estas cuestiones nos conduce al análisis espectral y pretendemos obtener los resultados que generalizan los conocidos en el caso de dimensión finita. Un resultado fundamental en álgebra lineal es el siguiente:

Teorema. *Si X es un espacio euclídeo de dimensión n y $A \in L(X)$ es un operador autoadjunto, entonces existe una base ortonormal $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ de X y unos números reales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tales que $A\varphi_i = \lambda_i\varphi_i$, $i = 1, \dots, n$. Además, si llamamos E_i a la proyección ortogonal sobre $N(A - \lambda_i I)$, $i = 1, \dots, n$, entonces $E_i \neq 0$, $\forall i$, $E_i E_j = 0$ si $i \neq j$, $\sum_{i=1}^n E_i = I$ y se tiene la descomposición $A = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$. Como consecuencia, la matriz de A asociada a dicha base es la matriz diagonal $(\langle A\varphi_i, \varphi_j \rangle)_{i,j=1,\dots,n} =$*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Veamos un ejemplo de lo que puede pasar en dimensión infinita.

Ejemplo. Sea h una función real continua y 2π -periódica. Entonces el operador $K : L^2[-\pi, \pi] \rightarrow L^2[-\pi, \pi]$, definido por $(Kf)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t-s)f(s)ds$, es lineal y acotado. Si elegimos la base ortonormal $\varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$, resulta

$$(K\varphi_n)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} h(t-s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ins}ds = \int_{t-\pi}^{t+\pi} h(s)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{in(t-s)}ds = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{int}\lambda_n,$$

donde $\lambda_n = \int_{-\pi}^{\pi} h(s)e^{-ins}ds$, $n \in \mathbb{Z}$, es decir, $K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$.

La matriz asociada al operador K respecto a la base $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es la matriz diagonal doblemente infinita

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & \lambda_{-1} & & 0 & \\ & & \lambda_0 & & \\ & 0 & & \lambda_1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue, mientras no se especifique lo contrario, supondremos que X es un espacio normado complejo no trivial y $A : X \rightarrow X$ un operador lineal.

1.1.- Definición. Diremos que $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *punto regular* de A si existe $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ y es un operador acotado definido en un subconjunto denso de X . El *conjunto resolvente* de A es $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es punto regular de } A\}$.

El término resolvente se refiere a que la ecuación $(A - \lambda I)x = y$ tiene solución $x = (A - \lambda I)^{-1}y$. Además el estudio de las propiedades de $(A - \lambda I)^{-1}$ permite obtener información sobre el propio A .

Llamaremos *espectro* de A al conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$, es decir al conjunto de puntos no regulares de A , que llamaremos *puntos espectrales* de A . En particular los autovalores de A son puntos espectrales. El siguiente ejemplo muestra que, en general, no todos los puntos espectrales son autovalores (a diferencia de los espacios de dimensión finita donde la teoría espectral se estudia a partir de los autovalores al ser estos los únicos puntos espectrales).

Ejemplo. En el espacio $H = L^2(\mathbb{R})$ con la medida de Lebesgue se define el operador $(Mf)(x) = e^{ix} \cdot f(x)$. Como $\|Mf\| = \|f\|$ y $(M^{-1}f)(x) = e^{-ix} \cdot f(x)$, deducimos que M es unitario. Encontremos los autovalores de M :

Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, existe $f_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $Mf_\lambda = \lambda f_\lambda$ si y sólo si $e^{ix}f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$ c.s. Esto implica que $f_\lambda(x) = 0$ c.s. de modo que $\|f_\lambda\| = 0$ y M no tiene autovalores.

Sea ahora $\rho \in \mathbb{C}$ tal que $(M - \rho I)f = g$, es decir $(e^{ix} - \rho)f(x) = g(x)$ c.s. o bien $f(x) = (e^{ix} - \rho)^{-1}g(x)$ c.s. y se define un operador lineal

$$[(M - \rho I)^{-1}g](x) = (e^{ix} - \rho)^{-1}g(x).$$

El operador $(M - \rho I)^{-1}$ está acotado si y sólo si $|\rho| \neq 1$; esto quiere decir que $\sigma(M) = \{\rho \in \mathbb{C} : |\rho| = 1\} = \mathbb{T}$, lo que prueba que el espectro es no vacío aunque el operador no posea autovalores.

Clasificaremos el espectro en tres grupos:

- Un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ es *autovalor* de A o pertenece al *espectro puntual* de A , $\lambda \in \sigma_p(A)$, si no existe $(A - \lambda I)^{-1}$. Cada vector $x \in X$ tal que $(A - \lambda I)x = 0$, con $\lambda \in \sigma_p(A)$ se llama *autovector* de A correspondiente a λ y el subespacio de X que contiene al cero y a los autovectores correspondientes a un mismo λ se llama *autoespacio* correspondiente a λ .
- Un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ pertenece al *espectro continuo* de A , $\lambda \in \sigma_c(A)$, si $R(A - \lambda I)$ es denso en X y existe $(A - \lambda I)^{-1}$ pero no está acotado.
- Un punto $\lambda \in \mathbb{C}$ pertenece al *espectro residual* de A , $\lambda \in \sigma_r(A)$, si existe $(A - \lambda I)^{-1}$ pero está definido en un subconjunto no denso de X .

De las definiciones anteriores se deduce que

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

y que la unión es disjunta, obteniéndose así una partición de \mathbb{C} .

La siguiente tabla resume las características de los distintos conjuntos:

λ	$(A - \lambda I)^{-1}$	$(A - \lambda I)^{-1}$	$R(A - \lambda I)$
$\rho(A)$	existe	acotada	denso en X
$\sigma_c(A)$	existe	no acotada	denso en X
$\sigma_r(A)$	existe	—	no denso en X
$\sigma_p(A)$	no existe	—	—

Una propiedad básica de los autovectores es la siguiente:

1.2.- Proposición. Autovectores x_1, \dots, x_n correspondientes a autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ distintos de un operador lineal A sobre un espacio normado complejo X son linealmente independientes.

Demostración. Si $\{x_1, \dots, x_n\}$ fueran linealmente dependientes, denotamos por x_m el primero de ellos que es combinación lineal de los anteriores, es decir $x_m = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{m-1} x_{m-1}$.

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= (A - \lambda_m I)x_m = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (A - \lambda_m I)x_j = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m)x_j \\ &\implies \alpha_j (\lambda_j - \lambda_m) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m-1 \\ &\implies \alpha_j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m-1 \implies x_m = 0, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. \diamond

Es sabido que si X tiene dimensión finita y existe $(A - \lambda I)^{-1}$, entonces debe ser acotado. Además $R(A - \lambda I) = X$, con lo que se deduce que $\sigma_c(A) = \sigma_r(A) = \emptyset$; de ahí que los puntos del espectro puntual se llamen también autovalores de A .

Sin embargo en el caso de dimensión infinita tenemos puntos espectrales que no son autovalores, como muestran los siguientes ejemplos.

1.3.- Ejemplos. 1) Sea $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ el operador traslación a la derecha, definido por $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Este operador es acotado y tiene norma uno. El operador inverso $T^{-1} : T(X) \rightarrow X$ es la traslación hacia la izquierda $T^{-1}(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Como $T(X)$ no es denso en X , el punto $\lambda = 0$ es un valor espectral de T pero no es autovalor ya que $Tx = 0 \implies x = 0$ y el vector cero no puede ser autovector.

2) Sea X un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base ortonormal de X . Si hacemos para cada $x \in X$, $x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n x_n$, y definimos el operador $Ax = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \lambda_n x_n$, donde $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de escalares distintos de uno pero con $\lambda_n \rightarrow 1$, se prueba que

$$\begin{aligned} \lambda_n &\in \sigma_p(A), \quad \forall n; \\ 1 &\in \sigma_c(A); \\ \text{Si } \lambda &\neq \lambda_n, \quad \forall n \text{ y } \lambda \neq 1 \implies \lambda \in \rho(A); \\ \sigma_r(A) &= \emptyset. \end{aligned}$$

3) Bajo las mismas condiciones del ejemplo anterior, definimos el operador destrucción

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n+1} x_{n+1}, \quad \text{para } x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n.$$

Se comprueba aquí que $0 \in \sigma_r(A)$ y $\lambda \in \rho(A)$, $\forall \lambda \neq 0$.

En el caso de dimensión infinita, los operadores cuyo comportamiento es el más parecido al caso de dimensión finita son los operadores completamente continuos o compactos pues, como veremos en el apartado 4, el conjunto de autovalores es a lo sumo numerable y el cero es su único posible punto de acumulación.

2. PROPIEDADES ESPECTRALES DE LOS OPERADORES LINEALES ACOTADOS. FUNCIONES DE UN OPERADOR.

Supondremos en esta sección que X es un espacio de Banach complejo y no vacío y $T : X \rightarrow X$ un operador lineal y estudiaremos las principales características del espectro y de la resolvente. Utilizaremos la notación $R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}$ para indicar la resolvente de T (cuando no haya confusión escribiremos simplemente R_λ).

Nota. Las propiedades que enunciamos en este apartado relativas a $L(X)$ se pueden fácilmente extender a cualquier álgebra de Banach con identidad; pero el contexto en el que aquí se plantean es el que aplicaremos posteriormente en la teoría espectral (puede consultarse en [Ru] para el estudio de estos conceptos).

2.1.- Lema. Sea X de Banach, $T : X \rightarrow X$ lineal y $\lambda \in \rho(T)$. Si T es cerrado o acotado, entonces $R_\lambda(T)$ está definido en todo X y es acotado.

Demostración. Si T es cerrado, también lo es $T - \lambda I$. Por tanto, también lo es $(T - \lambda I)^{-1}$. Entonces, por el teorema del gráfico cerrado, su dominio $D(R_\lambda)$ es cerrado, de modo que $D(R_\lambda) = \overline{D(R_\lambda)} = X$, pues $\lambda \in \rho(T)$.

Si T fuera acotado, como $D(T) = X$ es cerrado, T es cerrado y se aplica el razonamiento anterior. \diamond

2.2.- Teorema. Sean $T \in L(X)$ y $\lambda, \mu \in \rho(T)$. Entonces:

- (a) (Ecuación de la resolvente) $R_\mu - R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda$.
- (b) $R_\lambda S = S R_\lambda$, $\forall S \in L(X)$ tal que $ST = TS$.
- (c) $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$.

Demostración. (a) Teniendo en cuenta que R_λ y R_μ están definidas en todo

X , resulta:

$$\begin{aligned} R_\mu - R_\lambda &= R_\mu(T - \lambda I)R_\lambda - R_\mu(T - \mu I)R_\lambda \\ &= R_\mu(T - \lambda I - T + \mu I)R_\lambda = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda. \end{aligned}$$

(b) Si $ST = TS$, $S(T - \lambda I) = (T - \lambda I)S$. Entonces

$$R_\lambda S = R_\lambda S(T - \lambda I)R_\lambda = R_\lambda(T - \lambda I)SR_\lambda = SR_\lambda.$$

(c) Como R_λ conmuta con T , R_λ conmuta con R_μ , por (b). \diamond

2.3.- Lema. Si $T \in L(X)$, $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ y $R_\lambda(T^*) = R_\lambda(T)^*$ si $\lambda \in \rho(T^*) = \rho(T)$.

Demostración. Ver ejercicio 2 al final del capítulo.

A continuación enunciamos el teorema de la aplicación espectral que generaliza el resultado en dimensión finita de que si λ es autovalor de una matriz A , entonces $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$ es autovalor de la matriz $p(A) = a_nA^n + \dots + a_1A + a_0I$. Utilizaremos la notación $p(\sigma(T)) = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = p(\lambda), \lambda \in \sigma(T)\}$ y la notación análoga $p(\rho(T))$ para la resolvente.

2.4.- Teorema (aplicación espectral para polinomios). Si $T \in L(X)$ y $p(\lambda) = a_n\lambda^n + \dots + a_1\lambda + a_0$, $a_n \neq 0$, entonces $p(\sigma(T)) = \sigma(p(T))$.

Demostración. Supondremos que $\sigma(T) \neq \emptyset$ (ver teorema 2.10).

Si $n = 0$, $p(\sigma(T)) = \{a_0\} = \sigma(p(T))$. Sea pues $n > 0$.

• Llamaremos $S = p(T)$ y $S_\mu = p(T) - \mu I$, $\mu \in \mathbb{C}$. Veamos que $\sigma(S) \subset p(\sigma(T))$.

Fijado $\mu \in \mathbb{C}$, el polinomio $S_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$ se factoriza como

$$S_\mu(\lambda) = \alpha_n(\lambda - \gamma_1) \dots (\lambda - \gamma_n)$$

lo que corresponde a

$$S_\mu = p(T) - \mu I = \alpha_n(T - \gamma_1 I) \dots (T - \gamma_n I).$$

Si cada γ_j está en $\rho(T)$, entonces existe $S_\mu^{-1} = (\alpha_n)^{-1}(T - \gamma_n I)^{-1} \dots (T - \gamma_1 I)^{-1}$ por lo que $\mu \in \rho(p(T))$. Lo anterior prueba también que si $\mu \in \sigma(p(T))$, entonces $\gamma_j \in \sigma(T)$ para algún j . Por lo tanto, $S_\mu(\gamma_j) = p(\gamma_j) - \mu = 0$, de donde $\mu = p(\gamma_j) \in p(\sigma(T))$.

• Sea ahora $\mu \in p(\sigma(T))$. Por definición $\mu = p(\beta)$ para algún $\beta \in \sigma(T)$. Aquí se presentan dos posibilidades:

(*) $T - \beta I$ no tiene inversa.

Como β es un cero del polinomio $S_\mu(\lambda) = p(\lambda) - \mu$, entonces $S_\mu(\lambda) =$

$(\lambda - \beta)g(\lambda)$ y también $S_\mu = p(T) - \mu I = (T - \beta I)g(T)$. Ahora bien, como todos los factores de $g(T)$ conmutan con $T - \beta I$, es cierto también que $S_\mu = g(T)(T - \beta I)$.

Si S_μ tuviera inversa, podríamos poner

$$I = (T - \beta I)g(T)S_\mu^{-1} = S_\mu^{-1}g(T)(T - \beta I),$$

pero esto indica que $T - \beta I$ tiene inverso, lo cual contradice nuestro supuesto. Por tanto S_μ no tiene inverso, es decir $\mu \in \sigma(p(T))$.

(*) $T - \beta I$ tiene inverso. Esto indica que $R(T - \beta I) \neq X$ pues, en caso contrario, $\beta \in \rho(T)$ por el teorema de la aplicación abierta.

Como $S_\mu = p(T) - \mu I = (T - \beta I)g(T)$, entonces $R(S_\mu) \neq X$, de donde $\mu \in \sigma(p(T))$. \diamond

El teorema de la aplicación espectral es también cierto en espacios más generales que los polinomios. Así, si definimos el espacio

$$F(T) = \{f : f \text{ es función analítica en algún entorno de } \sigma(T)\},$$

entonces se puede demostrar que $f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))$, $\forall f \in F(T)$ (ver [DS]).

El lema siguiente es un resultado básico que permitirá deducir las propiedades topológicas del espectro, así como fórmulas de representación para la resolvente.

2.5.- Lema. Sea X un espacio de Banach y $T \in L(X)$. Si $\|T\| < 1$, entonces existe $(I - T)^{-1} \in L(X)$ e $(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$, donde la serie converge en la norma de $L(X)$.

Demostración. Como $\|T^j\| \leq \|T\|^j$ y la serie geométrica $\sum_{j=0}^{\infty} \|T\|^j$ converge

para $\|T\| < 1$, la serie $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$ converge absolutamente para $\|T\| < 1$.

Como X es de Banach, también lo es $L(X)$ y la convergencia absoluta implica la convergencia de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} T^j$.

Llamemos $S = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$. Como

$$(I - T)(I + T + \cdots + T^n) = (I + T + \cdots + T^n)(I - T) = I - T^{n+1}, \quad \forall n,$$

y $T^{n+1} \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, pues $\|T\| < 1$, entonces $(I - T)S = S(I - T) = I$ de donde $S = (I - T)^{-1}$. \diamond

2.6.- Teorema. El espectro $\sigma(T)$ de un operador $T \in L(X)$, donde X es de Banach complejo, es un conjunto cerrado.

Demostración. Si $\rho(T) = \emptyset$, es abierto. Sea pues $\rho(T) \neq \emptyset$ y $\lambda_0 \in \rho(T)$.

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $T - \lambda I = (T - \lambda_0 I) - (\lambda - \lambda_0)I = (T - \lambda_0 I)[I - (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}]$.

Por el lema 2.1, $(T - \lambda_0 I)^{-1} \in L(X)$ y por el lema 2.5, si llamamos $V = (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}$, existe $(I - V)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j (T - \lambda_0 I)^{-j}$, $\forall \lambda$ tal que $\|V\| < 1$, es decir cuando

$$(*) \quad |\lambda - \lambda_0| < \frac{1}{\|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|}.$$

Esta desigualdad muestra que $(T - \lambda I)^{-1} \in L(X)$; por tanto, si λ verifica $(*)$, existe $(T - \lambda I)^{-1} = [(T - \lambda_0 I)(I - V)]^{-1} = (I - V)^{-1}(T - \lambda_0 I)^{-1}$.

Así pues, la desigualdad $(*)$ representa un entorno de λ_0 formado por puntos regulares de T . Esto quiere decir que $\rho(T)$ es abierto, de modo que $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ es cerrado. \diamond

De la demostración del resultado anterior se obtiene inmediatamente el siguiente teorema de representación.

2.7.- Teorema. *En las condiciones anteriores, si $\lambda_0 \in \rho(T)$, se tiene la representación para la resolvente*

$$(**) \quad R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^j R_{\lambda_0}^{j+1},$$

donde la serie converge absolutamente en la bola $|\lambda - \lambda_0| < \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}$, la cual está contenida en $\rho(T)$.

2.8.- Corolario. *Dado $T \in L(X)$, la resolvente $R_\lambda(T)$, considerada como función de λ con valores en $L(X)$, es localmente holomorfa en $\rho(T)$ ¹.*

Demostración. Para cualesquiera $x \in X$, $f \in X'$, definimos $h(\lambda) = f(R_\lambda(T)x)$. A partir de $(**)$ obtenemos el desarrollo en serie

$$h(\lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (\lambda - \lambda_0)^j \text{ con } c_j = f(R_{\lambda_0}(T)^{j+1}x)$$

que converge absolutamente en el disco $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}\|^{-1}$. \diamond

Además $\rho(T)$ es el mayor conjunto en el cual $R_\lambda(T)$ es localmente holomorfa por lo que podemos decir que es el dominio natural de analiticidad de $R_\lambda(T)$.

¹Dado un conjunto Ω abierto en \mathbb{C} , si $S : \Omega \rightarrow L(X)$ es una función que toma valores operadores en X (donde escribiremos $S(\lambda) = S_\lambda$), decimos que S es *localmente holomorfa* en Ω si $\forall x \in X$, $f \in X'$, la función $h(\lambda) = f(S_\lambda x)$ es holomorfa en Ω .

2.9.- Teorema. Si $T \in L(X)$, dado $\lambda \in \rho(T)$, entonces $\|R_\lambda(T)\| \geq 1/\delta(\lambda)$ siendo $\delta(\lambda) = \inf_{s \in \sigma(T)} |\lambda - s| = d(\lambda, \sigma(T))$. En consecuencia, $\|R_\lambda(T)\| \rightarrow \infty$ cuando $\delta(\lambda) \rightarrow 0$.

Demostración. Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces $\{\mu : |\mu - \lambda| < \|R_\lambda\|^{-1}\} \subset \rho(T)$ de donde $d(\lambda, \sigma(T)) \geq 1/\|R_\lambda\|$ si suponemos que $\sigma(T) \neq \emptyset$. \diamond

2.10.- Teorema. Si $T \in L(X)$, $\sigma(T) \neq \emptyset$.

Demostración. Si $T = 0$, evidentemente $\sigma(T) = \{0\} \neq \emptyset$.

Sea pues $T \neq 0$ y supongamos que $\sigma(T) = \emptyset$. Entonces, $\rho(T) = \mathbb{C}$ y existe $(T - \lambda I)^{-1} \in L(X)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Por el corolario 2,8, la función $h(\lambda) = f(R_\lambda x)$ es holomorfa en \mathbb{C} , $\forall x \in X$, $f \in X'$.

Probemos a continuación que h es acotada en todo el plano complejo.

a) En el círculo $|\lambda| \leq 2\|T\|$, h es continua y por tanto acotada.

b) Si $|\lambda| > 2\|T\|$, la serie

$$(T - \lambda I)^{-1} = -\frac{1}{\lambda}(I - \frac{1}{\lambda}T)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda^n} T^n$$

converge absolutamente, pues $\|(1/\lambda)T\| < 1$.

Además

$$\|(T - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{1}{|\lambda|^n} \cdot \|T\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{|\lambda|}\|T\|} = \frac{1}{|\lambda| - \|T\|} < \frac{1}{\|T\|}.$$

Se prueba así que h está acotada también en esta región pues

$$|h(\lambda)| \leq \|f\| \cdot \|R_\lambda\| \cdot \|x\| < \frac{\|f\| \cdot \|x\|}{\|T\|}.$$

En definitiva, h es holomorfa y acotada en \mathbb{C} y, por el teorema de Liouville, h es constante. Esto implica que R_λ es independiente de λ , así como también lo es $R_\lambda^{-1} = T - \lambda I$, lo cual es absurdo. \diamond

El teorema anterior puede ser falso si se consideran espacios de Hilbert reales. Así por ejemplo, si consideramos el operador $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, entonces $T - \lambda I$ no es inyectiva si y sólo si λ es raíz de la ecuación $\det(A - \lambda I) = 0$. Como \mathbb{R}^2 tiene dimensión finita sobre \mathbb{R} , $\sigma(T) = \emptyset$.

2.11.- Teorema. El espectro $\sigma(T)$ de $T \in L(X)$ es compacto y está contenido en la bola cerrada $\overline{B}(0, \|T\|)$.

Demostración. Procediendo como en el teorema anterior, se tiene que

$$(***) \quad R_\lambda = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda^n} \cdot T^n,$$

donde la serie converge cuando $|\lambda| > \|T\|$. Esto implica que $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > \|T\|\}$ está contenido en $\rho(T)$, con lo que el espectro $\sigma(T)$ debe estar en el disco $\overline{B}(0, \|T\|)$. Como $\sigma(T)$ es además cerrado, es compacto. \diamond

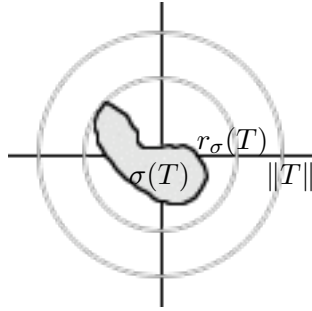
De este teorema se deduce en particular que $\rho(T) \neq \emptyset$. El resultado motiva además el siguiente concepto:

2.12.- Definición. Si $T \in L(X)$, se llama *radio espectral* de T a

$$r_\sigma(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\},$$

es decir al radio del menor disco centrado en el origen que contiene a $\sigma(T)$.

Del teorema 2.11 es claro que $r_\sigma(T) \leq \|T\|$ (la figura adjunta ilustra lo dicho). El siguiente resultado permite refinar esta acotación.



2.13.- Teorema (fórmula de Gelfand). Sea $T \in L(X)$. Entonces

$$r_\sigma(T) = \lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}.$$

Demostración. a) Probaremos en primer lugar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \geq 1} \|T^n\|^{1/n}$.

Fijado un entero positivo m , $\forall n \in \mathbb{N}$, $n = m \cdot q_n + r_n$ con $0 \leq r_n < m$. Esto implica que

$$\|T^n\|^{1/n} = \|T^{m \cdot q_n + r_n}\|^{1/n} \leq \|T^m\|^{q_n/n} \cdot \|T\|^{r_n/n}.$$

Como $q_n/n \rightarrow 1/m$ y $r_n/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, resulta que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \|T^m\|^{1/m},$$

de donde

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} \leq \inf_{m \geq 1} \|T^m\|^{1/m} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

b) Por el teorema de la aplicación espectral, $\sigma(T^n) = [\sigma(T)]^n$; es evidente entonces que $r_\sigma(T^n) = [r_\sigma(T)]^n$. Ahora bien, como $r_\sigma(T^n) \leq \|T^n\|$, entonces

$$r_\sigma(T) = [r_\sigma(T^n)]^{1/n} \leq \|T^n\|^{1/n}, \quad \forall n.$$

Por tanto, $r_\sigma(T) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ y la demostración estará concluida si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} = r_\sigma(T)$.

Recordando de nuevo la fórmula (**), tenemos que $R_\lambda = -\kappa \sum_{n \geq 0} \kappa^n T^n$, donde llamamos $\kappa = 1/\lambda$.

Por la fórmula de Hadamard, la serie anterior converge absolutamente cuando $|\kappa| < r$, donde $1/r = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$.

Como R_λ es localmente holomorfa en el conjunto resolvente $\rho(T)$, si llamamos M al conjunto del plano que corresponde a $\rho(T)$ por la transformación $\kappa = 1/\lambda$, sabemos que el radio de convergencia r es el radio del mayor disco abierto alrededor de $\kappa = 0$ que está incluido completamente en M . Por tanto, $1/r$ es el radio del menor círculo alrededor de $\lambda = 0$ cuyo exterior está completamente incluido en $\rho(T)$. Como esta es precisamente la definición de radio espectral de T , resulta en definitiva que $r_\sigma(T) = 1/r = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$, lo que prueba el enunciado. \diamond

3. OPERADORES COMPACTOS.

Los operadores compactos son aquellos cuyas propiedades más se asemejan a las de los operadores lineales en espacios de dimensión finita de modo que su teoría espectral será una extensión directa de aquellos y una forma sencilla de introducirse en este estudio. Además muchos de los operadores que aparecen en el estudio de ecuaciones integrales son compactos. Así, una aplicación de dicha teoría espectral conduce a la teoría de Fredholm para ecuaciones integrales.

Es sabido que un operador acotado transforma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Si además dicho operador tiene rango finito, es decir la imagen tiene dimensión finita, transforma conjuntos acotados en relativamente compactos. Esta propiedad nos lleva a introducir la siguiente clase de operadores.

3.1.- Definición. Sean X e Y espacios normados. Un operador $T : X \rightarrow Y$ es *compacto* o *completamente continuo* si es lineal y la imagen de todo subconjunto acotado en X es relativamente compacto (es decir, tiene clausura

compacta).

De la definición se deduce que un operador lineal $T : X \rightarrow Y$ es compacto si y sólo si $\overline{T(B_1)}$ es compacto, siendo $B_1 = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ la bola unidad en X .

3.2.- Ejemplo. Una clase importante de operadores compactos la forman ciertos operadores integrales. Así, si $X = L^2([0, 1], dt)$, el operador $T : X \rightarrow X$ definido por $(Tf)(s) = \int_0^1 k(s, t)f(t)dt$, donde $k \in C([0, 1] \times [0, 1])$, es compacto. Para comprobarlo, veamos que $\overline{T(B_1)}$ es compacto.

Es claro que si $f \in B_1$, $Tf \in C[0, 1]$ y

$$\|Tf\|_\infty \leq \|k\|_\infty \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|k\|_\infty \cdot \|f\|_2 \leq \|k\|_\infty$$

de modo que $T(B_1)$ es un conjunto acotado de $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$. Además $T(B_1)$ es un conjunto equicontinuo. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por ser k uniformemente continuo en $[0, 1] \times [0, 1]$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|k(s_1, t) - k(s_2, t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, 1], \quad |s_1 - s_2| < \delta.$$

Por tanto, para todo $f \in B_1$,

$$|(Tf)(s_1) - (Tf)(s_2)| \leq \int_0^1 |k(s_1, t) - k(s_2, t)| \cdot |f(t)|dt < \varepsilon \int_0^1 |f(t)|dt \leq \varepsilon \|f\|_2 \leq \varepsilon.$$

Por el teorema de Arzelá-Ascoli, $\overline{T(B_1)}$ es compacto en $(C[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$. Entonces, si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B_1$, existe una subsucesión $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ y una función $f \in C[0, 1]$ tales que $\|Tf_{n_k} - f\|_\infty \rightarrow 0$, de donde $\|Tf_{n_k} - f\|_2 \rightarrow 0$ lo que prueba la compacidad de T .

Incluso si $k \in L^2([0, 1] \times [0, 1], dsdt)$, el operador integral arriba definido es compacto (ver los ejercicios al final del capítulo). Tales operadores se llaman *operadores de Hilbert-Schmidt* y juegan un papel importante en el estudio de ecuaciones diferenciales e integrales. Así por ejemplo, el operador T origina la ecuación integral $(T - \lambda I)x(s) = y(s)$, donde $\lambda \in \mathbb{C}$, es un parámetro, y, k son funciones dadas y x es la función incógnita. Hilbert probó que la solubilidad de la ecuación no depende de la existencia de la representación integral de T sino de que T es un operador compacto.

Es fácil verificar que todo operador lineal acotado aplica conjuntos relativamente compactos en conjuntos relativamente compactos, de modo que la propiedad de compacidad es más fuerte que la de continuidad. El término de operador completamente continuo viene sugerido por el siguiente resultado, en donde se prueba además que no todo operador acotado es compacto.

3.3.- Lema. a) *Todo operador compacto $T : X \rightarrow Y$ es acotado y, por tanto, continuo.*

b) *Si $\dim X = \infty$, el operador identidad $I : X \rightarrow X$ no es compacto.*

Demostración. a) Como $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ es acotado, $\overline{T(S)}$ es compacto y por tanto acotado. Así pues $\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| < \infty$, de donde T es acotado.

b) La bola unitaria cerrada $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ es acotada. Si $\dim X = \infty$, B no puede ser compacto (teorema 5.3, capítulo II). De ahí que $I(B) = B = \overline{B}$ no sea relativamente compacto. \diamond

Las siguientes caracterizaciones son a veces usadas como definición de operador compacto.

3.4.- Teorema. *Sea $T : X \rightarrow Y$ lineal. Son equivalentes:*

i) *T es compacto.*

ii) *Dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ acotada en X , su imagen $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene alguna sub-sucesión convergente.*

iii) *Dada cualquier sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B(0, 1)$, $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene alguna sub-sucesión convergente.*

Demostración. i) \implies ii): Si T es compacto y $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada, la clausura del conjunto $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es compacto. De aquí se deduce que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contiene alguna subsucesión convergente.

ii) \implies iii): es trivial.

iii) \implies i): Sea $M \subset X$ un conjunto acotado e $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión arbitraria en $T(M)$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en M tal que $Tx_n = y_n, \forall n$. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, existe $r > 0$ tal que $\|x_n\| < r, \forall n$. Por hipótesis, la sucesión $\{T(r^{-1}x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{T(r^{-1}x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$. Como $Tx_{n_k} = rT(r^{-1}x_{n_k})$, la sucesión $\{Tx_{n_k}\} = \{y_{n_k}\}$ también converge, lo que quiere decir que $\overline{T(M)}$ es compacto. \diamond

Un operador $T : X \rightarrow Y$ se dice de *rango finito* cuando $\dim T(X) < \infty$. El siguiente resultado prueba que todo operador acotado de rango finito es compacto. (En particular los operadores de \mathbb{C}^n en \mathbb{C}^n , objeto del Algebra Lineal, son siempre compactos.)

3.5.- Teorema. *Sea $T : X \rightarrow Y$ lineal. Entonces*

a) *Si T es acotado y de rango finito, entonces T es compacto.*

b) *Si $\dim X < \infty$, T es compacto.*

Demostración. a) Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X . De la desigualdad $\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\|$, se deduce que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Como $\dim T(X) < \infty$, $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es relativamente compacto, de modo que tiene una subsucesión convergente.

El apartado b) es consecuencia de a), pues T es acotado si $\dim X < \infty$, y $\dim T(X) \leq \dim X < \infty$. \diamond

Observación. Todo operador compacto se puede descomponer en suma de dos operadores donde uno tiene rango finito y el otro tiene norma menor que cualquier número positivo (ver [LS]). Por eso, aunque el recíproco de 3.5(a) no es cierto, los operadores compactos son casi de rango finito.

3.6.- Teorema. *El conjunto $\{T : X \rightarrow X : T \text{ lineal y compacto}\}$ es subespacio de $L(X)$.*

Demostración. Dados S, T compactos y $\alpha, \beta \in E$, consideramos una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ acotada en X . Por hipótesis, $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión, que llamaremos $\{Tx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, convergente. Aplicando ahora S , también existe una subsucesión de $\{Sx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, $\{Sx_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$, convergente. Como ambas sucesiones, $\{Tx_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ y $\{Sx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$, son convergentes, es claro que $\{\alpha Tx_{n_{k_j}} + \beta Sx_{n_{k_j}}\}_{j \in \mathbb{N}}$ es convergente. \diamond

3.7.- Teorema. *Sean $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $S : X \rightarrow X$ un operador lineal acotado. Entonces TS y ST son compactos.*

Demostración. Sea $B \subset X$ acotado; entonces $S(B)$ es acotado y $T(S(B)) = TS(B)$ es relativamente compacto. Esto implica que TS es compacto.

Sea ahora $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X ; entonces $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{Tx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ y, por ser S continuo, $\{STx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ también converge. Esto prueba que ST es compacto. \diamond

Los dos últimos teoremas prueban que la clase de operadores compactos es un ideal bilátero del anillo $L(X)$.

Como consecuencia de lo anterior y del lema 3.3(b) se prueba que, en un espacio de dimensión infinita, un operador compacto no admite inverso acotado.

El siguiente resultado prueba que la clase de los operadores compactos forma un subconjunto cerrado de $L(X, Y)$.

3.8.- Teorema. *Sea $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de operadores lineales y compactos de X en Y , donde Y es de Banach. Si $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente, es decir, $\exists T : \|T_n - T\| \rightarrow 0$, entonces T es compacto.*

Demostración. Usaremos el llamado método diagonal, para lo cual sea $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X . Como T_1 es compacto, existe una subsucesión

$\{x_{1m}\}$ tal que $\{T_1 x_{1m}\}$ es de Cauchy. A su vez existe $\{x_{2m}\}$ subsucesión de $\{x_{1m}\}$ tal que $\{T_2 x_{2m}\}$ es de Cauchy. En general, existe una sub-sucesión $\{x_{nm}\}$ tal que $\{T_n x_{nm}\}$ es de Cauchy.

Si elegimos ahora la sub-sucesión diagonal $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ con $y_m = x_{mm}$, $\forall m$, entonces $\{T_n y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy para cada n fijo. Como $\{y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es también acotada, $\exists c > 0 : \|y_m\| \leq c$, $\forall m$. De la convergencia uniforme de la sucesión $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ se deduce que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \|T - T_p\| < \varepsilon/3c, \forall p \geq n_0,$$

y, como $\{T_p y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy,

$$\exists n_1 : \|T_p y_j - T_p y_k\| < \varepsilon/3, \forall j, k \geq n_1.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|T y_j - T y_k\| &\leq \|T y_j - T_p y_j\| + \|T_p y_j - T_p y_k\| + \|T_p y_k - T y_k\| \\ &\leq \|T - T_p\| \cdot \|y_j\| + \varepsilon/3 + \|T_p - T\| \cdot \|y_k\| \\ &< (\varepsilon/3c) \cdot c + \varepsilon/3 + (\varepsilon/3c) \cdot c = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como Y es completo, $\{T y_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge, lo que prueba que T es compacto.

◇

Observación. El teorema es falso si sustituimos convergencia uniforme por convergencia fuerte, como lo muestra el ejemplo de $T_n : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definido por $T_n x = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots)$. Como T_n es lineal y acotado y $\dim T_n(\ell^2) < \infty$, es compacto para todo n . Además $T_n x \rightarrow x = Ix$ pero el operador identidad no es compacto pues $\dim \ell^2 = \infty$.

Ejemplo. Para probar que el operador $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definido por $Tx = (x_n/n)_{n \geq 1}$ es compacto, definimos $T_n : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ del siguiente modo:

$$T_n x = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \dots, \frac{x_n}{n}, 0, \dots \right).$$

Así T_n es lineal y acotado y como $\dim T_n(\ell^2) < \infty$, es también compacto. Además

$$\|(T - T_n)x\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |x_j|^2 \leq \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^2 \leq \frac{\|x\|^2}{(n+1)^2}.$$

Tomando el supremo sobre todos los x de norma 1, vemos que $\|T - T_n\| \leq \frac{1}{n+1}$ y el teorema anterior prueba que T es compacto.

Probaremos a continuación que los operadores compactos aplican sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes.

3.9.- Teorema. Sea $T : X \rightarrow Y$ un operador compacto. Si $x_n \xrightarrow{d} x$ en X , entonces $Tx_n \xrightarrow{f} Tx$.

Demostración. Llamamos $y_n = Tx_n$ e $y = Tx$.

Sea $g \in Y'$ y definimos $f : X \rightarrow E$ por $f(z) = g(Tz)$, $\forall z \in X$. Como T es acotado, $f \in X'$ y

$$|f(z)| = |g(Tz)| \leq \|g\| \cdot \|Tz\| \leq \|g\| \cdot \|T\| \cdot \|z\|.$$

Por definición, si $x_n \xrightarrow{d} x$, entonces $f(x_n) \rightarrow f(x)$, es decir, $g(Tx_n) \rightarrow g(Tx)$, o bien $g(y_n) \rightarrow g(y)$. Como g es arbitrario, $y_n \xrightarrow{d} y$.

Si no fuera cierto que $y_n \xrightarrow{f} y$, existiría $\{y_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ subsucesión de $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|y_{n_k} - y\| \geq \eta$, para algún $\eta > 0$. Como $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge débilmente, está acotada y también lo estará $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Como T es compacto, $\{Tx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $\{\tilde{y}_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ y escribimos $\tilde{y}_j \rightarrow \tilde{y}$. Como también $\tilde{y}_j \xrightarrow{d} y$, entonces $\tilde{y} = y$. En consecuencia $\|\tilde{y}_j - y\| \rightarrow 0$ pero $\|\tilde{y}_j - y\| \geq \eta > 0$ lo cual es absurdo. \diamond

Otra propiedad interesante es que los operadores compactos admiten clausura compacta.

3.10.- Teorema. Sean X un espacio normado, Y un espacio de Banach y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal compacto. Entonces existe $\tilde{T} : \bar{X} \rightarrow Y$ extensión lineal compacta.

Demostración. Como T es acotado (lema 3.3.a), tiene una extensión lineal acotada $\tilde{T} : \bar{X} \rightarrow Y$. Veamos que \tilde{T} es compacto:

Sea $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en \bar{X} . Por ser X denso en \bar{X} , existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $\tilde{x}_n - x_n \rightarrow 0$, $\forall n$. Evidentemente $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, de modo que $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una sub-sucesión convergente, $Tx_{n_k} \rightarrow y \in Y$. Como, en particular, $\tilde{x}_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow 0$, entonces

$$\tilde{T}\tilde{x}_{n_k} - \tilde{T}x_{n_k} = \tilde{T}\tilde{x}_{n_k} - Tx_{n_k} \rightarrow 0,$$

de donde $\tilde{T}\tilde{x}_{n_k} \rightarrow y$, lo que prueba la compacidad de \tilde{T} . \diamond

Un hecho fundamental en la resolución de ecuaciones que involucran operadores compactos es el de que el adjunto de un operador compacto es también compacto.

3.11.- Teorema (Schauder). Si $T : X \rightarrow Y$ es compacto, entonces T^* es también compacto.

Demostración. Basta ver que la imagen $T^*(B')$ de la bola unidad B' de Y' es relativamente compacto.

Sea $B = B(0, 1)$ en X . Como T es compacto, $T(\overline{B})$ es relativamente compacto. Dado $f \in B'$, para cualquier $y \in T(\overline{B})$, tenemos

$$|f(y)| \leq \|f\| \cdot \|y\| = \|f\| \cdot \|Tx\| \leq \|f\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| \leq \|T\|,$$

pues $\|f\| < 1$ y $\|x\| \leq 1$. Esto indica que los funcionales de B' están uniformemente acotados sobre $T(\overline{B})$. Por otra parte, dichos funcionales son equicontinuos sobre $T(\overline{B})$ pues, si $y_1, y_2 \in T(\overline{B})$ y $f \in B'$, $|f(y_1) - f(y_2)| = |f(y_1 - y_2)| \leq \|y_1 - y_2\|$.

Una generalización del teorema de Arzelá-Ascoli (capítulo I, teorema 5.12) prueba que B' es relativamente compacto para la convergencia uniforme sobre $T(\overline{B})$.

Sea ahora una sucesión arbitraria $(T^*f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T^*(B')$. Como B' es relativamente compacto, existe una subsucesión $(f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de (f_n) , que converge uniformemente sobre $T(\overline{B})$, es decir

$$\sup_{x \in \overline{B}} |f_{n_i}(Tx) - f_{n_j}(Tx)| = \sup_{x \in \overline{B}} |T^*(f_{n_i} - f_{n_j})(x)| = \|T^*(f_{n_i} - f_{n_j})\| \rightarrow 0.$$

Esto implica que la sucesión $(T^*f_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ converge en norma, de modo que $T^*(B')$ es relativamente compacto. \diamond

4. DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL DE LOS OPERADORES COMPACTOS.

Obtenemos en esta sección la descomposición espectral de los operadores compactos en espacios normados. Es notable el hecho de que las propiedades espectrales de los operadores compactos son simples generalizaciones de la teoría de autovalores de matrices finitas. Se deben a F. Riesz y J. Schauder los resultados fundamentales de la teoría que desarrollamos a continuación.

En primer lugar veremos que si un operador compacto tiene infinitos autovalores, estos pueden disponerse en una sucesión que converge a cero (más adelante se probará que el espectro de un operador compacto, a excepción del cero, está formado únicamente por autovalores).

4.1.- Teorema. *El conjunto de autovalores de un operador compacto T sobre un espacio normado X es finito o numerable y su único posible punto de acumulación es $\lambda = 0$.*

Demostración. Basta probar que para todo real $k > 0$, el conjunto

$$A_k = \{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| \geq k\}$$

es finito pues $\sigma_p(T) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$. Supongamos por el contrario que $\exists k_0 > 0$ tal que A_{k_0} es infinito. Existe entonces una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de autovalores distintos tal que $|\lambda_n| \geq k_0$. Para cada λ_n , existe $x_n \neq 0$ tal que $Tx_n = \lambda_n x_n$ y el conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ es linealmente independiente (proposición 1.2). Llamamos $M_n = \langle \{x_1, \dots, x_n\} \rangle$.

Como los M_n tienen dimensión finita, son cerrados; por el lema de Riesz (capítulo II, lema 5.1), existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$y_n \in M_n, \|y_n\| = 1, \|y_n - x\| \geq 1/2, \forall x \in M_{n-1}.$$

Podemos pues escribir $Ty_n - Ty_m = \lambda_n y_n - \tilde{x}$, donde $\tilde{x} = \lambda_n y_n - Ty_n + Ty_m$. Supongamos $m < n$ y probemos que $\tilde{x} \in M_{n-1}$:

$$y_m \in M_m \subset M_{n-1} = \langle \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \rangle \implies Ty_m \in M_{n-1} \text{ pues } Tx_j = \lambda_j x_j.$$

Además, si $y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, entonces

$$\lambda_n y_n - Ty_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_n x_i - Tx_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_n - \lambda_i) x_i \in M_{n-1}.$$

Ambos resultados conducen a que $\tilde{x} \in M_{n-1}$; por tanto, $x = \lambda_n^{-1} \tilde{x} \in M_{n-1}$ así que

$$\|\lambda_n y_n - \tilde{x}\| = |\lambda_n| \cdot \|y_n - x\| \geq \frac{1}{2} |\lambda_n| \geq \frac{1}{2} k_0 \implies \|Ty_n - Ty_m\| \geq \frac{1}{2} k_0.$$

Esto implica que $\{Ty_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión convergente lo que contradice la compacidad de T pues $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado. \diamond

Ejemplo. El conjunto de autovalores puede ser también vacío como muestra el operador $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definido por $T(x) = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$.

El siguiente teorema prueba que un operador compacto sólo tiene un número finito de vectores propios linealmente independientes asociados a un mismo autovalor no nulo, es decir el autoespacio correspondiente a cualquier autovalor no nulo tiene dimensión finita (utilizaremos la notación $T_\lambda = T - \lambda I$, para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$).

4.2.- Teorema. Sea $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Entonces $N(T_\lambda)$ es cerrado y tiene dimensión finita para todo $\lambda \neq 0$.

Demostración. La primera parte es evidente pues T es continuo y $N(T_\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}(\{0\})$ es la imagen inversa de un cerrado.

Por otra parte, debido al teorema 5.3 del capítulo II, la dimensión de $N(T_\lambda)$ es finita si la bola unitaria cerrada M en $N(T_\lambda)$ es compacta. Para ello sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en M . Entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada y $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente $\{Tx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$. Pero $T_\lambda x_n = Tx_n - \lambda x_n = 0$, de modo que $x_n = \lambda^{-1}Tx_n$. Entonces la sucesión $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} = \{\lambda^{-1}Tx_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ también converge y su límite está en M . Esto prueba que M es compacto.

◇

Observación. La hipótesis de compacidad es esencial pues, si T es el operador identidad y $\lambda = 1$, basta tomar el espacio X de dimensión infinita para que $N(T_\lambda) = N(0) = X$ no tenga dimensión finita.

Por otra parte, en el caso $\lambda = 0$ tampoco se puede asegurar nada pues basta tomar $T = 0$ para que $\dim N(T_0) = \dim N(T) = \dim X$ que puede no ser finita.

4.3.- Corolario. En las condiciones del teorema anterior, $\dim N(T_\lambda^n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \neq 0$.

Demostración. Del desarrollo

$$T_\lambda^n = (T - \lambda I)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T^k (-\lambda)^{n-k} = (-\lambda)^n I + T \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k},$$

se deduce que podemos escribir $T_\lambda^n = W - \mu I$, donde llamamos $\mu = -(-\lambda)^n$ y $W = ST = TS$, donde $S = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} T^{k-1} (-\lambda)^{n-k}$, que es acotado por serlo T .

Como T es compacto, W también es compacto (teorema 3.7) y del teorema anterior se deduce la tesis. ◇

Sabemos que el rango de un operador acotado no es necesariamente cerrado, pero en el caso de operadores compactos tenemos lo siguiente.

4.4.- Teorema. Si $T : X \rightarrow X$ es compacto, el rango de T_λ es cerrado, $\forall \lambda \neq 0$.

Demostración. Supongamos que $T_\lambda(X)$ no es cerrado. Entonces existe algún elemento $y \in \overline{T_\lambda(X)}$, $y \notin T_\lambda(X)$ y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en X tales que $y_n = T_\lambda x_n \rightarrow y$.

Como $y \neq 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $y_n \neq 0$, $\forall n > N$, con lo que $x_n \notin N(T_\lambda)$. Supondremos sin pérdida de generalidad que esto es cierto para todo n . Como $N(T_\lambda)$ es cerrado, $\delta_n = \inf_{z \in N(T_\lambda)} \|x_n - z\| > 0$. Por definición de ínfimo, existe alguna sucesión $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $N(T_\lambda)$ tal que $a_n = \|x_n - z_n\| < 2\delta_n$.

Ahora veamos que $a_n = \|x_n - z_n\| \rightarrow \infty$ por reducción al absurdo.

Si lo anterior no es cierto, $\{x_n - z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene alguna subsucesión acotada. Como T es compacto, $\{T(x_n - z_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. De la igualdad $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$ y usando que $T_\lambda z_n = 0$, tenemos

$$x_n - z_n = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)(x_n - z_n) = \lambda^{-1}[T(x_n - z_n) - T_\lambda x_n].$$

Como $\{T_\lambda x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge, $\{x_n - z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, digamos $x_{n_k} - z_{n_k} \rightarrow v$. Como T es compacto, es continuo y así también T_λ . Entonces

$$T_\lambda(x_{n_k} - z_{n_k}) = T_\lambda x_{n_k} \rightarrow T_\lambda v,$$

de modo que $T_\lambda v = y$. Esto contradice el hecho de que $y \notin T_\lambda(X)$.

Por último, si llamamos $w_n = a_n^{-1}(x_n - z_n)$, tenemos $\|w_n\| = 1$. Debido a que $a_n \rightarrow \infty$, $T_\lambda z_n = 0$ y $\{T_\lambda x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $y \neq 0$, entonces

$$T_\lambda w_n = a_n^{-1} T_\lambda x_n \rightarrow 0.$$

Nuevamente, de $I = \lambda^{-1}(T - T_\lambda)$, deducimos que $w_n = \lambda^{-1}(T w_n - T_\lambda w_n)$. Como T es compacto y $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ acotada, $\{T w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente. Además, como hemos visto, $\{T_\lambda w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge. Por tanto $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente, $w_{n_k} \rightarrow w$. Esto implica que $T_\lambda w = 0$, es decir $w \in N(T_\lambda)$. Como también $z_n \in N(T_\lambda)$, $u_n = z_n + a_n w \in N(T_\lambda)$. Entonces

$$\begin{aligned} \|x_n - u_n\| \geq \delta_n &\implies \delta_n \leq \|x_n - z_n - a_n w\| \\ &= \|a_n w_n - a_n w\| = a_n \|w_n - w\| < 2\delta_n \|w_n - w\| \\ &\implies 1/2 < \|w_n - w\|, \end{aligned}$$

lo que es absurdo. \diamond

4.5.- Corolario. *En las condiciones del teorema anterior, el rango de T_λ^n es cerrado, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\lambda \neq 0$.*

Demostración. Basta observar que el operador W definido en la demostración del corolario 4.3 es compacto. \diamond

Es evidente comprobar que

$$\begin{aligned} N(T_\lambda^0) &\subset N(T_\lambda) \subset \dots \subset N(T_\lambda^n) \subset \dots \\ \text{y } T_\lambda^0(X) &\supset T_\lambda(X) \supset \dots \supset T_\lambda^n(X) \supset \dots \end{aligned}$$

En el caso de operadores compactos, estas inclusiones pueden refinarse del siguiente modo.

4.6.- Lema. *Sea $T : X \rightarrow X$ compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un entero positivo r tal que*

$$N(T_\lambda^0) \subset N(T_\lambda) \subset \dots \subset N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = \dots$$

y las inclusiones son estrictas.

Demostración. Escribiremos por comodidad $N_n = N(T_\lambda^n)$.

*) Es evidente que $N_m \subset N_{m+1}$. Supongamos que no hay ningún m para el que $N_m = N_{m+1}$. Como N_n es cerrado para todo n , por el lema de Riesz (capítulo II, lema 5.1), existe una sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$y_n \in N_n, \|y_n\| = 1, \|y_n - x\| \geq 1/2, \forall x \in N_{n-1}.$$

De $T_\lambda = T - \lambda I$, tenemos que $T = T_\lambda + \lambda I$ y $Ty_n - Ty_m = \lambda y_n - \tilde{x}$ donde $\tilde{x} = T_\lambda y_m + \lambda y_m - T_\lambda y_n$.

Si $m < n$, claramente $\lambda y_m \in N_m \subset N_{n-1}$. Además,

$$0 = T_\lambda^m y_m = T_\lambda^{m-1}(T_\lambda y_m),$$

de donde $T_\lambda y_m \in N_{m-1} \subset N_{n-1}$.

Análogamente, de $y_n \in N_n$ obtenemos $T_\lambda y_n \in N_{n-1}$. Lo anterior indica que $\tilde{x} \in N_{n-1}$ y también $x = \lambda^{-1}\tilde{x} \in N_{n-1}$. Entonces

$$\|Ty_n - Ty_m\| = \|\lambda y_n - \tilde{x}\| = |\lambda| \cdot \|y_n - x\| \geq |\lambda|/2$$

y $\{Ty_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene ninguna subsucesión convergente pero T es compacto. Esto quiere decir que existe m tal que $N_m = N_{m+1}$.

*) Veamos ahora que $N_m = N_{m+1} \implies N_n = N_{n+1}, \forall n > m$.

Si $x \in N_{n+1}$, entonces $T_\lambda^{n+1}x = 0$. Si llamamos $z = T_\lambda^{n-m}x$, entonces $z \in N_{m+1}$. Por hipótesis $z \in N_m$, de modo que $x \in N_n$. \diamond

Para los rangos el resultado análogo es el siguiente.

4.7.- Lema. Sea $T : X \rightarrow X$ compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces existe un entero positivo q tal que

$$T_\lambda^0(X) \supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^q(X) = T_\lambda^{q+1}(X) = \dots$$

y las inclusiones son estrictas.

Demostración. La prueba es paralela a la anterior y escribiremos $R_n = T_\lambda^n(X)$.

*) Supongamos que para todo s , $R_s \neq R_{s+1}$, es decir R_{n+1} es subespacio propio de R_n , para todo n . Por el lema de Riesz, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$x_n \in R_n, \|x_n\| = 1, \|x_n - x\| \geq 1/2, \forall x \in R_{n+1}.$$

Como $T = T_\lambda + \lambda I$, $Tx_m - Tx_n = \lambda x_m - (-T_\lambda x_m + T_\lambda x_n + \lambda x_n)$. Por un lado, $\lambda x_m \in R_m$ y como $x_m \in R_m$, $T_\lambda x_m \in R_{m+1}$.

Además, si $n > m$, $T_\lambda x_n + \lambda x_n \in R_n \subset R_{m+1}$; entonces existe $x \in R_{m+1}$ tal que $Tx_m - Tx_n = \lambda(x_m - x)$, de donde

$$\|Tx_m - Tx_n\| = |\lambda| \cdot \|x_m - x\| \geq |\lambda|/2 > 0.$$

Como T es compacto, $\{Tx_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ debe tener alguna subsucesión convergente, lo que contradice la desigualdad anterior. Esto prueba que existe $s \in \mathbb{Z}^+$ tal que $R_s = R_{s+1}$.

*) Además $R_{q+1} = R_q$ significa que T_λ aplica R_q sobre sí mismo. Sucesivas aplicaciones de T_λ dan lugar a $R_{n+1} = R_n$, $\forall n > q$. \diamond

Combinando los dos lemas anteriores llegamos al siguiente resultado.

4.8.- Teorema. Sea $T : X \rightarrow X$ un operador compacto y $\lambda \neq 0$. Entonces existe $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} N(T_\lambda^0) &\subset N(T_\lambda) \subset \cdots \subset N(T_\lambda^r) = N(T_\lambda^{r+1}) = \cdots \\ T_\lambda^0(X) &\supset T_\lambda(X) \supset \cdots \supset T_\lambda^r(X) = T_\lambda^{r+1}(X) = \cdots \end{aligned}$$

y las inclusiones son propias.

Demostración. Debido a los dos lemas anteriores, sólo falta probar que $q = r$.

a) Probemos que $q \geq r$. Por el lema 4.7, $R_{q+1} = R_q$. Así, si $y \in R_q$, $\exists x \in R_q : y = T_\lambda x$.

Veamos en primer lugar que

$$(*) \quad T_\lambda x = 0, x \in R_q \implies x = 0.$$

Si no fuera cierto, existiría $x_1 \in R_q$, $x_1 \neq 0$, tal que $T_\lambda x_1 = 0$.

En esta situación debe existir $x_2 \in R_q$ tal que $x_1 = T_\lambda x_2$. Sucesivamente, tenemos para todo n

$$0 \neq x_1 = T_\lambda x_2 = \cdots = T_\lambda^{n-1} x_n, \text{ pero } 0 = T_\lambda x_1 = \cdots = T_\lambda^n x_n.$$

Esto implica que $x_n \in N_n \setminus N_{n-1}$, de donde $N_{n-1} \subset N_n$, $N_{n-1} \neq N_n$, $\forall n$, lo que contradice el lema 4.6.

Veamos ahora que $N_{q+1} = N_q$ (esto implicará que $q \geq r$ pues r es el menor entero que da la igualdad). Teniendo en cuenta (*),

$$x \in N_{q+1} \implies T_\lambda^{q+1} x = 0 \implies T_\lambda(T_\lambda^q x) = 0 \implies T_\lambda^q x = 0 \implies x \in N_q.$$

Como siempre $N_q \subset N_{q+1}$, se deduce la igualdad.

Queda probado entonces que $q \geq r$.

b) Veamos ahora que $q \leq r$. Para ello, basta ver que N_{q-1} es subespacio propio de N_q , pues r es el menor entero n para el que $N_n = N_{n+1}$.

Por la definición de q , la inclusión $R_q \subset R_{q-1}$ es propia.

Sea $y \in R_{q-1} \setminus R_q$. Entonces $\exists x \in X : y = T_\lambda^{q-1}x$. Como $T_\lambda y \in R_q = R_{q+1}$, existe $z \in X : T_\lambda y = T_\lambda^{q+1}z$. Veamos que $x - T_\lambda z \in N_q \setminus N_{q-1}$:

$$\begin{aligned} T_\lambda^{q-1}(x - T_\lambda z) &= y - T_\lambda^q z \neq 0 \text{ pues } y \notin R_q \text{ y } T_\lambda^q z \in R_q \implies x - T_\lambda z \notin N_{q-1}; \\ T_\lambda^q(x - T_\lambda z) &= T_\lambda y - T_\lambda y = 0 \implies x - T_\lambda z \in N_q. \end{aligned}$$

Resulta entonces que N_{q-1} es subespacio propio de N_q . \diamond

El siguiente teorema, aplicación del resultado anterior, es análogo al conocido en el caso de dimensión finita y representa la principal herramienta en el estudio de los operadores compactos.

4.9.- Teorema (descomposición espectral). *Sean X, T, λ, r como en los teoremas previos. Entonces X tiene la descomposición*

$$X = N(T_\lambda^r) \oplus T_\lambda^r(X).$$

Demostración. Dado $x \in X$, debemos encontrar una descomposición $x = y + z$, con $y \in N(T_\lambda^r)$, $z \in T_\lambda^r(X)$.

Si llamamos $z = T_\lambda^r x$, por el teorema 4.8, como $z \in R_r$, $z \in R_{2r}$ y existe $x_1 \in X$ tal que $z = T_\lambda^{2r} x_1$.

Llamamos ahora $x_0 = T_\lambda^r x_1$; entonces $T_\lambda^r x_0 = T_\lambda^{2r} x_1 = z = T_\lambda^r x$, de donde $x - x_0 \in N_r$ y $x = (x - x_0) + x_0$ con $x - x_0 \in N_r$, $x_0 \in R_r$.

Para comprobar que la descomposición es única, llamemos $v_0 \in N_r \cap R_r$. Entonces existe $v \in X : v_0 = T_\lambda^r v$ y además $T_\lambda^r v_0 = 0$, de donde $T_\lambda^{2r} v = T_\lambda^r v_0 = 0$. Esto quiere decir que $v \in N_{2r} = N_r$. Así $T_\lambda^r v = v_0 = 0$. \diamond

Ejemplo. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el operador definido por $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Para $\lambda = 2$, se obtiene $r = 1$ y la descomposición $\mathbb{R}^2 = N(T_2) \oplus T_2(\mathbb{R}^2)$, donde $N(T_2) = \langle (1, -1) \rangle$ y $T_2(\mathbb{R}^2) = \langle (1, 1) \rangle$.

Para $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 2$, la descomposición es trivial $\mathbb{R}^2 = \{0\} \oplus \mathbb{R}^2$.

Probaremos por último las siguientes sencillas propiedades espectrales.

4.10.- Teorema. *Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita y $T \in L(X)$ un operador compacto, entonces $0 \in \sigma(T)$.*

Demostración. Si $0 \in \rho(T)$, existiría $T^{-1} = T_0^{-1} \in L(X)$. Como T es compacto, $I = T^{-1}T$ es compacto, lo que no es posible pues $\dim X = \infty$. \diamond

4.11.- Teorema (caracterización del espectro). *Sea X un espacio de Banach y $T : X \rightarrow X$ compacto. Todo punto espectral $\lambda \neq 0$ de T (si existe) es autovalor.*

Nota. El teorema también es cierto en espacios normados generales (ver ejercicio 13).

Demostración. Si $N(T_\lambda) \neq \{0\}$, λ es autovalor de T .

Si $N(T_\lambda) = \{0\}$, entonces existe $T_\lambda^{-1} : T_\lambda(X) \rightarrow X$. Como $\{0\} = N(I) = N(T_\lambda^0) = N(T_\lambda)$, se obtiene el valor $r = 0$ en el teorema 4.8. Entonces $X = T_\lambda^0(X) = T_\lambda^1(X) \implies T_\lambda$ es biyectiva y T_λ^{-1} es acotado por el teorema de la aplicación abierta, ya que X es completo. En definitiva $\lambda \in \rho(T)$.

◇

5. ECUACIONES LINEALES DE OPERADORES COMPACTOS. ECUACIONES INTEGRALES DE FREDHOLM.

La teoría espectral de operadores compactos fue desarrollada por Riesz para estudiar las ecuaciones integrales lineales. Aquí la aplicaremos para probar el teorema de alternativa de Fredholm, que relaciona el comportamiento de los operadores compactos con la solubilidad de ciertas ecuaciones. Los resultados que obtendremos extienden los resultados análogos de Álgebra Lineal.

Sean X un espacio normado y $A : X \rightarrow X$ un operador compacto y definimos $T = A - I$. Damos a continuación una cadena de proposiciones que muestran la estrecha relación que existe entre las soluciones de las ecuaciones

$$Tx = y \quad (1)$$

$$T^*f = g \quad (2)$$

y sus correspondientes ecuaciones homogéneas asociadas.

5.1.- Teorema. *Dado $y \in X$, la ecuación (1) tiene solución si y sólo si $f(y) = 0$, para todo funcional lineal f solución de la ecuación homogénea $T^*f = 0$.*

Demostración. Si $Tx = y$ tiene solución $x_0 \in X$ y f es un funcional lineal tal que $T^*f = 0$, entonces

$$f(y) = f(Ax_0 - x_0) = f(Ax_0) - f(x_0) = (A^*f)(x_0) - f(x_0) = (T^*f)(x_0) = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $f(y) = 0$, para todo funcional lineal f tal que $T^*f = 0$. Si $y \notin T(X)$, entonces $d(y, T(X)) = d > 0$ pues, al ser A compacto, $T(X)$ es cerrado. Por el teorema de Hahn-Banach, existe f_0 funcional lineal tal que $f_0(y) = 1$ y $f_0(z) = 0$, $\forall z \in T(X)$. De esta igualdad se deduce que

$$0 = f_0(Ax - x) = (A^*f_0 - f_0)(x) = (T^*f_0)(x), \quad \forall x \in X \implies T^*f_0 = 0.$$

Por hipótesis $f_0(y) = 0$ lo que contradice la construcción anterior. \diamond

5.2.- Corolario. *Si la ecuación homogénea adjunta $A^*f - f = 0$ sólo tiene la solución trivial $f = 0$, la ecuación $Ax - x = y$ tiene solución para todo $y \in X$.*

Enunciamos a continuación un lema auxiliar que utilizaremos en la proposición siguiente (su demostración se propone en el ejercicio 7 al final del capítulo).

5.3.- Lema. *Si X es un espacio normado y $A : X \rightarrow X$ un operador lineal compacto, entonces existe $\alpha > 0$ tal que, para todo valor de y para el que (1) tiene solución, al menos una de esas soluciones \tilde{x} satisface la acotación $\|\tilde{x}\| \leq \alpha\|y\|$.*

5.4.- Teorema. *Para que la ecuación (2) con $g \in X'$ dado tenga solución, es necesario y suficiente que $g(x) = 0$ para todo $x \in X$ solución de la ecuación homogénea $Tx = 0$.*

Demostración. La necesidad se deduce inmediatamente de la igualdad

$$g(x) = (T^*f)(x) = f(Tx) = f(0) = 0.$$

Para la suficiencia, definimos en $L = T(X)$ un funcional f_0 como $f_0(y) = g(x)$, donde $y = Tx$. Dicho funcional está bien definido pues, si $Tx = Tu$, entonces

$$A(x - u) - (x - u) = 0 \implies g(x - u) = 0 \implies g(x) = g(u).$$

Es fácil ver que f_0 es lineal; para ver que está acotado, utilizamos el lema anterior, es decir que $\|x\| < \alpha\|y\|$ para algún x tal que $Tx = y$, y algún $\alpha > 0$. Entonces

$$|f_0(y)| = |g(x)| \leq \|g\| \cdot \|x\| \leq \|g\| \cdot \alpha \cdot \|y\|.$$

Por el teorema de Hahn-Banach, f_0 se puede extender a f definido en X de modo que

$$f(Tx) = f(y) = f_0(y) = g(x) \implies (T^*f)(x) = g(x)$$

lo que produce una solución de (2). \diamond

5.5.- Corolario. Si $Tx = 0$ sólo admite la solución trivial $x = 0$, la ecuación $T^*f = g$ admite solución para todo g .

Además de lo anterior existe una estrecha relación entre la solubilidad de la ecuación homogénea y la de la ecuación no homogénea asociada.

5.6.- Teorema. Si A es un operador compacto en un espacio normado X , la ecuación (1) tiene solución para todo $y \in X$ si y sólo si la ecuación homogénea asociada $Tx = 0$ sólo tiene la solución trivial. En este caso la solución de (1) es única y el operador $T = A - I$ tiene inverso acotado.

Demostración. a) Por hipótesis, para cada $y \in X$, existe $x \in X$ tal que $Tx = y$. Supongamos sin embargo que existe $x_1 \neq 0$ tal que $Tx_1 = 0$.

Aplicando la hipótesis a x_1 , existe $x_2 \in X$ tal que $Tx_2 = x_1$.

Procediendo por recurrencia, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_n = Tx_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos así:

$$0 \neq x_1 = Tx_2 = \dots = T^{n-1}x_n \text{ y } 0 = Tx_1 = T^2x_2 = \dots = T^n x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que $x_n \in N(T^n) \setminus N(T^{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ lo que contradice el lema 4.6 (recordemos que $T = A - I = A_1$).

b) Supongamos ahora que $x = 0$ es la única solución de la ecuación homogénea $Tx = 0$. Por el corolario 5.5, $\forall g \in X'$ la ecuación $T^*f = g$ tiene solución.

Como A^* también es compacto, podemos aplicar la implicación probada en a) para concluir que $T^*f = 0$ sólo tiene la solución trivial.

Por el corolario 5.2, la ecuación $Tx = y$ tiene solución, $\forall y \in X$.

c) Para ver que la solución de (1) es única, supongamos que existen $x_1, x_2 \in X$ tales que $Tx_1 = Tx_2 = y$. Entonces $T(x_1 - x_2) = 0$. Ahora bien, como $Tx = 0$ sólo tiene la solución trivial, debe ser $x_1 = x_2$.

d) Por último, como $Tx = y$ tiene solución única, se puede definir $T^{-1}y = x$, $\forall y \in X$. Además T^{-1} está acotado pues, por el lema 5.3, existe $\alpha > 0$ tal que $\|x\| = \|T^{-1}y\| \leq \alpha\|y\|$. \diamond

5.7.- Corolario. La ecuación $T^*f = g$ tiene solución para todo $g \in X'$ si y sólo si $f = 0$ es la única solución de la ecuación homogénea $T^*f = 0$. En este caso, la ecuación $T^*f = g$ tiene solución única.

Nuestro siguiente resultado se basa en el lema que enunciamos a continuación, y cuya demostración puede hacerse por inducción.

5.8.- Lema. Si X es un espacio normado y $\{f_1, \dots, f_m\}$ un conjunto linealmente independiente en X' , existe un conjunto $\{z_1, \dots, z_m\} \subset X$ tal que $f_j(z_k) = \delta_{jk}$ ($j, k = 1, \dots, m$).

Un par de conjuntos como los que verifican el lema recibe el nombre de *sistema biortogonal*.

5.9.- Teorema. *Las ecuaciones $Tx = 0$ y $T^*f = 0$ tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes.*

Demostración. Debemos probar que $\dim N(T) = \dim N(T^*)$. Al ser A y A^* compactos, $n = \dim N(T) < \infty$ y $m = \dim N(T^*) < \infty$.

a) Si suponemos $n = 0$, la ecuación $Tx = 0$ sólo tiene la solución trivial $x = 0$. Por el corolario 5.5, la ecuación $T^*f = g$ tiene solución $\forall g \in X'$. Por el corolario 5.7, $f = 0$ es la única solución de $T^*f = 0$, con lo que $m = 0$.

b) Sean ahora $n > 0$, $m > 0$ y consideremos una base de $N(T)$, $\{x_1, \dots, x_n\}$. Para cada $k \in \{1, \dots, n\}$, consideramos el subespacio M_k generado por el conjunto $\{x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n\}$. Como $x_k \notin M_k$, $d(x_k, M_k) = \delta_k > 0$.

Por una consecuencia del teorema de Hahn-Banach,

$$\exists g_k \in X' : \|g_k\| = 1, \quad g_k(x_k) = 1, \quad g_k(x_i) = 0 \quad (i \neq k).$$

Si consideramos también una base $\{f_1, \dots, f_m\}$ de $N(T^*)$, el lema anterior afirma que existe un conjunto $\{z_1, \dots, z_m\} \subset X$ tal que $f_j(z_k) = \delta_{jk}$ ($j, k = 1, \dots, m$).

c) Supongamos que $n < m$ y definamos el operador $S : X \rightarrow X$ por $Sx = Ax + \sum_{j=1}^n g_j(x)z_j$. Es fácil comprobar que S es lineal y compacto. Veamos también que la ecuación homogénea $Sx - x = 0$ sólo tiene la solución trivial.

En efecto, si suponemos que $Sx_0 - x_0 = 0$, entonces $f_k(Sx_0 - x_0) = f_k(0) = 0$ ($k = 1, \dots, m$), de donde

$$\begin{aligned} 0 &= f_k(Sx_0 - x_0) = f_k(Tx_0 + \sum_{j=1}^n g_j(x_0)z_j) = f_k(Tx_0) + \sum_{j=1}^n g_j(x_0)f_k(z_j) \\ &= f_k(Tx_0) + g_k(x_0) = (T^*f_k)(x_0) + g_k(x_0) = g_k(x_0), \quad k = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Entonces $Sx_0 - x_0 = Tx_0 + \sum_{j=1}^n g_j(x_0)z_j = Tx_0$. Como $Sx_0 - x_0 = 0$ por hipótesis, resulta que $x_0 \in N(T)$; por tanto, $x_0 = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j$. Entonces

$$0 = g_k(x_0) = \sum_{j=1}^n \alpha_j g_k(x_j) = \alpha_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

lo que implica que $x_0 = 0$.

Aplicando el teorema 5.6, la ecuación $Sx - x = y$ tiene solución $\forall y \in X$. En particular, para $y = z_{n+1}$ (recordamos que $n < m$), existe $x = v$ tal que $Sv - v = z_{n+1}$. De aquí obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 &= f_{n+1}(z_{n+1}) = f_{n+1}(Sv - v) = f_{n+1}\left(Tv + \sum_{j=1}^n g_j(v)z_j\right) \\ &= f_{n+1}(Tv) + \sum_{j=1}^n g_j(v)f_{n+1}(z_j) = (T^*f_{n+1})(v). \end{aligned}$$

Por otro lado, $f_{n+1} \in N(T^*)$ lo que lleva a una contradicción; deducimos pues que $n < m$ es imposible.

d) Supongamos ahora que $n > m$. Definimos análogamente $\tilde{S} : X' \rightarrow X'$ por $\tilde{S}f = A^*f + \sum_{j=1}^m f(z_j)g_j$.

Nuevamente, \tilde{S} es lineal y compacto. Además $f_0 = 0$ es la única solución de $\tilde{S}f - f = 0$ lo que se prueba de forma análoga al obtenido en c). Aplicando nuevamente el teorema 5.6, deducimos que $\tilde{S}f - f = g$ tiene solución para cualquier $g \in X'$. En particular, para $g = g_{m+1}$ existe $f = h$ tal que $\tilde{S}h - h = g_{m+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} 1 &= g_{m+1}(x_{m+1}) = (\tilde{S}h - h)(x_{m+1}) \\ &= (T^*h)(x_{m+1}) + \sum_{j=1}^m h(z_j)g_j(x_{m+1}) = (T^*h)(x_{m+1}) = h(Tx_{m+1}). \end{aligned}$$

Ahora bien, como $x_{m+1} \in N(T)$, $T(x_{m+1}) = 0$, de modo que $h(Tx_{m+1}) = 0$ lo que es absurdo.

De c) y d) se deduce que $n = m$. ◇

Observación. Debido a que la ecuación

$$(1') \quad Ax - \lambda x = y, \quad \lambda \neq 0$$

se puede escribir como $\lambda^{-1}Ax - x = \lambda^{-1}y$ y a que $\lambda^{-1}A$ es compacto a la vez que A , los teoremas anteriores son válidos para las ecuaciones (1') y

$$(2') \quad A^*f - \lambda f = g, \quad \lambda \neq 0$$

en lugar de (1) y (2).

Las relaciones obtenidas en las proposiciones anteriores motivan la adopción del concepto de alternativa.

5.10.- Definición. Un operador $A \in L(X)$ sobre un espacio normado X satisface la *alternativa de Fredholm* si cumple alguna de las siguientes condiciones:

(I) Las ecuaciones no homogéneas $Ax = y$, $A^*f = g$ (donde A^* representa el adjunto de A) tienen soluciones x, f para cualesquiera $y \in X$, $g \in X'$, respectivamente, y dichas soluciones son únicas. En este caso las ecuaciones homogéneas asociadas sólo tienen las soluciones triviales.

(II) Las ecuaciones homogéneas $Ax = 0$, $A^*f = 0$, tienen el mismo número finito de soluciones linealmente independientes $\{x_1, \dots, x_n\}$, $\{f_1, \dots, f_n\}$, $n \geq 1$, respectivamente. En particular las ecuaciones no homogéneas $Ax = y$, $A^*f = g$ tienen soluciones si y sólo si $f_k(y) = 0$, $g(x_k) = 0$, $k = 1, \dots, n$, respectivamente.

Con esta noción, todo lo anterior se puede agrupar enunciando el siguiente resultado general de alternativa.

5.11.- Teorema (alternativa de Fredholm). *Sea $A : X \rightarrow X$ un operador lineal compacto sobre un espacio normado X y $\lambda \neq 0$. Entonces $A_\lambda = A - \lambda I$ verifica la alternativa de Fredholm. Las soluciones generales de las ecuaciones (1') y (2') son respectivamente de la forma $x = x_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k$, $f = f_0 + \sum_{k=1}^n \lambda_k f_k$, donde x_0 , f_0 son soluciones particulares y α_k , λ_k constantes arbitrarias.*

Este resultado generaliza el obtenido por Fredholm sobre existencia de soluciones de ecuaciones integrales del tipo

$$g(s) + \mu \int_a^b k(s, t) f(t) dt = f(s),$$

donde ahora $X = C[a, b]$, el núcleo k es una función continua y $g \in C[a, b]$ es dado. La ecuación anterior puede escribirse como $g = (I - \mu A)f$, donde el operador $(Af)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt$ es compacto. Aplicando el teorema de alternativa, se deduce fácilmente el siguiente resultado:

5.12.- Teorema (Fredholm). *Sea $D = \{(s, t) : a \leq s, t \leq b\}$ y $k : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si μ es un número complejo no nulo, una de las siguientes alternativas es cierta:*

a) o bien cada una de las ecuaciones

$$f(s) = g(s) + \mu \int_a^b k(s, t) f(t) dt, \quad a \leq s \leq b, \quad (3)$$

$$f(s) = g(s) + \mu \int_a^b k(t, s) f(t) dt, \quad a \leq s \leq b, \quad (4)$$

tiene solución única $f \in C[a, b]$ para cada $g \in C[a, b]$,

b) o bien las dos ecuaciones homogéneas

$$f(s) = \mu \int_a^b k(s, t) f(t) dt, \quad a \leq s \leq b, \quad (5)$$

$$f(s) = \mu \int_a^b k(t, s) f(t) dt, \quad a \leq s \leq b, \quad (6)$$

tienen soluciones no nulas $f \in C[a, b]$.

Si se cumple (b), las ecuaciones (5) y (6) tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes en $C[a, b]$; la ecuación (3) tiene soluciones $f \in C[a, b]$ si y sólo si $\int_a^b g(s) h(s) ds = 0$, $\forall h \in C[a, b]$ solución de (6); y la ecuación (4) tiene soluciones $f \in C[a, b]$ si y sólo si $\int_a^b g(s) h(s) ds = 0$, $\forall h \in C[a, b]$ solución de (5).

Por último, el conjunto $\{\mu \in \mathbb{C} : \text{se cumple (b)}\}$ es numerable y no tiene puntos de acumulación.

Demostración. Definimos los operadores integrales $K, K' : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ por

$$(Kf)(s) = \int_a^b k(s, t) f(t) dt, \quad (K'f)(s) = \int_a^b k(t, s) f(t) dt, \quad \forall s \in [a, b].$$

Así definidos, K y K' son compactos. Las ecuaciones (3) a (6) se pueden escribir en la forma

$$\begin{aligned} (I - \mu K)f &= g, & (I - \mu K')f &= g, \\ (I - \mu K)f &= 0, & (I - \mu K')f &= 0. \end{aligned}$$

Debido a que K' no es el adjunto de K no se puede aplicar el teorema de alternativa 5.11. Sin embargo, veremos que K' y K^* están estrechamente ligados.

Definimos para cada $g \in C[a, b]$ el funcional $J_g : C[a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$J_g(f) = \int_a^b g(s) f(s) ds.$$

Es fácil comprobar que $J_g \in C[a, b]'$ y que la aplicación $J : C[a, b] \rightarrow C[a, b]'$ definida por $Jg = J_g$ es inyectiva.

Probaremos ahora que $K^* \circ J = J \circ K'$. En efecto, $\forall f, g \in C[a, b]$,

$$\begin{aligned} (K^* J_g)(f) &= J_g(Kf) = \int_a^b g(s) (Kf)(s) ds \\ &= \int_a^b g(s) \left(\int_a^b k(s, t) f(t) dt \right) ds = \int_a^b f(t) \left(\int_a^b k(s, t) g(s) ds \right) dt \\ &= \int_a^b f(t) (K'g)(t) dt = J_{K'g}(f). \end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que $(I^* - \mu K^*) \circ J = J \circ (I - \mu K')$ y, como J es inyectiva, $J[N(I - \mu K')] = N(I^* - \mu K^*) \cap J(C[a, b])$, de donde

$$\begin{aligned} \dim N(I - \mu K') &= \dim J[N(I - \mu K')] = \dim[N(I^* - \mu K^*) \cap J(C[a, b])] \\ &\leq \dim N(I^* - \mu K^*) = \dim N(I - \mu K). \end{aligned}$$

Como la relación entre K y K' es simétrica, podemos intercambiar K con K' y obtener la desigualdad contraria, con lo que

$$(*) \quad \dim N(I - \mu K') = \dim N(I - \mu K) = \dim N(I^* - \mu K^*).$$

Como μK y $\mu K'$ son compactos, se obtiene la tesis aplicando el teorema de alternativa de Fredholm. En efecto:

- Supongamos que $(I - \mu K)f = 0$ sólo tiene la solución trivial. Debido a (*), la ecuación $(I - \mu K')f = 0$ sólo tiene la solución trivial. Por el teorema 5.6, las ecuaciones $(I - \mu K)f = g$, $(I - \mu K')f = g$ tienen soluciones únicas, con lo que queda probado (a).

- Supongamos ahora que $(I - \mu K)f = 0$ tiene alguna solución $f_0 \neq 0$. Otra vez, por (*), la ecuación $(I - \mu K')f = 0$ tiene alguna solución no nula, lo que prueba el apartado (b).

- La misma condición (*) muestra que (5) y (6) tienen el mismo número de soluciones linealmente independientes.

- Veamos ahora que $(I - \mu K)f = g$ tiene solución si y sólo si $\int_a^b g(s)h(s) = 0$ para cualquier h solución de $(I - \mu K')h = 0$.

Sean pues f y h tales que $(I - \mu K)f = g$ y $(I - \mu K')h = 0$. Entonces, como

$$g(s) = f(s) - \mu \int_a^b k(s, t)f(t)dt,$$

resulta

$$\begin{aligned} \int_a^b g(s)h(s)ds &= \int_a^b h(s)f(s)ds - \mu \int_a^b \left[\int_a^b k(s, t)f(t)dt \right] h(s)ds \\ &= \int_a^b h(s)f(s)ds - \mu \int_a^b \left[\int_a^b k(s, t)h(s)ds \right] f(t)dt \\ &= \int_a^b h(s)f(s)ds - \int_a^b h(t)f(t)dt = 0. \end{aligned}$$

Recíprocamente, si h es solución de $(I - \mu K')h = 0$, entonces $J(I - \mu K')h = 0$, de donde $(I^* - \mu K^*)(Jh) = 0$, es decir Jh es solución de $(I^* - \mu K^*)f = 0$. Como, por hipótesis, $(Jh)g = 0$, por el teorema 5.1, $(I - \mu K)f = g$ tiene solución.

Análogamente se procede con el caso dual. ◇

(Ver [BN] y [RN] para desarrollos similares y aplicaciones del mismo tema.)

EJERCICIOS.

1. Sea $T \in L(X)$.

a) Probar que el conjunto $\Delta = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es biyectiva pero } (T - \lambda I)^{-1} \text{ no es continua}\}$ es vacío.

b) Probar que $\sigma(T) \setminus \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es inyectivo pero no sobre}\}$.

Resp.: a) Es consecuencia directa del teorema de la aplicación abierta.

b) Teniendo en cuenta que

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ es no inyectiva}\}$$

resulta que $\sigma(T) \setminus \sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \text{ inyectiva no sobre}\} \cup \Delta$ y el resultado es consecuencia del apartado a).

Observación. Este hecho sugiere la distinción hecha en la teoría entre espectro puntual y espectro no puntual.



2. Sea $T \in L(X)$. Probar que $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ y $R_\lambda(T^*) = R_\lambda(T)^*$, $\forall \lambda \in \rho(T^*) = \rho(T)$ (lema 2.3).

Resp.: Utilizaremos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} (T - \lambda I)^* &= T^* - \lambda I \\ \exists T^{-1} \in L(X) &\iff \exists (T^*)^{-1} \in L(X') \text{ y } (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}. \end{aligned}$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \lambda \in \rho(T) &\iff (T - \lambda I)^{-1} \in L(X) \iff ((T - \lambda I)^{-1})^* \in L(X') \\ &\iff (T^* - \lambda I) \in L(X') \iff \lambda \in \rho(T^*). \end{aligned}$$

Como $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$, se deduce que $\sigma(T) = \sigma(T^*)$.

Por otra parte, $\forall \lambda \in \rho(T) = \rho(T^*)$,

$$R_\lambda(T^*) = (T^* - \lambda I)^{-1} = ((T - \lambda I)^*)^{-1} = ((T - \lambda I)^{-1})^* = (R_\lambda(T))^*.$$



3. Sea X normado. Probar que el conjunto de operadores invertibles es abierto en $L(X)$.

Resp.: Sea $T \in L(X)$ invertible. Probemos que $\exists r > 0$ tal que la bola $B(T, r)$ está formada por operadores invertibles. Para ello elegimos $r = \|T^{-1}\|^{-1}$; si $S \in B(T, r)$, entonces $\|S - T\| < \|T^{-1}\|^{-1}$. Veamos que S es invertible:

$$\begin{aligned}\|T^{-1}S - I\| &= \|T^{-1}(S - T)\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|S - T\| < 1 \\ \implies \exists (I - (T^{-1}S - I))^{-1} &\in L(X) \\ \implies \exists (T^{-1}S)^{-1} &\in L(X) \implies \exists S^{-1} \in L(X).\end{aligned}$$



4. Sea X de Banach y $T \in L(X)$. Probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} < 1 \implies (I - T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} T^n$$

y converge en la norma de $L(X)$.

Resp.: Sea $\alpha < 1$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n} < \alpha$. Entonces $\|T^n\| < \alpha^n$, $\forall n > N$. De este modo, la serie $\sum_{n \geq 0} \|T^n\|$ es convergente y, por ser $L(X)$ de Banach, también $\sum_{n \geq 0} T^n$ converge.

Llamamos $S = \sum_{n \geq 0} T^n$ y $S_m = \sum_{n=0}^m T^n$; entonces $S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m$ y

$$(I - T)S_n = S_n(I - T) = I - T^{n+1}.$$

Como $\|T^n\| < \alpha^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\| = 0$, de donde $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = (I - T)^{-1}$.

De este resultado se obtiene la *fórmula de Neumann*: si $T \in L(X)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ son tales que $|\lambda|^{-1} > \lim_n \|T^n\|^{1/n}$, entonces $\lim_n \|(\lambda T)^n\|^{1/n} < 1$, de modo que $I - \lambda T$ es invertible y

$$(I - \lambda T)^{-1} = \sum_{n \geq 0} \lambda^n T^n,$$

donde la serie converge en la norma de $L(X)$.



5. Sea X un espacio de dimensión infinita y $A : X \rightarrow X$ un operador compacto. Probar que A^{-1} , si existe, no es acotado.

Resp.: Supongamos que $A^{-1} \in L(X)$. Por ser A compacto y la clase de operadores compactos un ideal bilátero de $L(X)$, se deduce que $I = AA^{-1}$ es compacto. Pero, como la dimensión del espacio es infinita, el operador identidad no puede ser compacto.



6. Sea X un espacio normado, $z \in X$, $f \in X'$ elementos fijos. Definimos $A : X \rightarrow X$ por $Ax = f(x)z$. Probar que A es compacto.

Resp.: Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X , $\|x_n\| \leq M$, $\forall n$. Veamos que $\{Ax_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ posee alguna subsucesión convergente.

Como f es acotado, $|f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_n\| \leq \|f\| \cdot M$, lo que prueba que $\{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión uniformemente acotada. Por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene una subsucesión, $\{f(x_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$, convergente, digamos a λ . Como $Ax_{n_k} = f(x_{n_k})z$, resulta que $Ax_{n_k} \rightarrow \lambda z$, lo que prueba el enunciado.



7. Sea $T : X \rightarrow X$ un operador compacto. Probar que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\forall y \in R(T_\lambda), \quad \|T_\lambda^{-1}y\| \leq M\|y\|.$$

Resp.: Sea $y \neq 0$ un elemento de $R(T_\lambda)$ y $x_0 \in X$ tal que $(T - \lambda I)x_0 = y$. Como $\dim N(T_\lambda) < \infty$, $N(T_\lambda)$ es cerrado. Entonces existe $w \in N(T_\lambda)$ tal que $d(x_0, N(T_\lambda)) = \|x_0 - w\| > 0$. Si llamamos $x = x_0 - w$, entonces $T_\lambda x = y$ y, si probamos que existe $M > 0$ tal que $d(x_0, N(T_\lambda)) \leq M\|T_\lambda x_0\|$, entonces

$$\|x\| = \|x_0 - w\| \leq M\|T_\lambda x_0\| = M\|y\|.$$

Supongamos por el contrario que no existe tal M , es decir que

$$(*) \quad \forall n > 0, \quad \exists y_n \in R(T_\lambda) : \|T_\lambda^{-1}y_n\| > n\|y_n\|.$$

Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ tal que $T_\lambda x_n = y_n$, $\forall n$ y, como $y_n \neq 0$, $x_n \notin N(T_\lambda)$, $\forall n$.

Como $N(T_\lambda)$ es cerrado, si llamamos $d_n = d(x_n, N(T_\lambda))$, entonces $d_n > 0, \forall n$. Por tanto, $\exists w_n \in N(T_\lambda)$ tal que $d_n \leq \|x_n - w_n\| < 2d_n$. Sea ahora $v_n = \|x_n - w_n\|^{-1}(x_n - w_n)$; así, $\|v_n\| = 1$ y, por ser T compacto, existe una subsucesión $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $(Tv_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ es convergente.

Por otra parte, de la igualdad

$$y_n = T_\lambda x_n = T_\lambda(x_n - w_n) = T_\lambda(\|x_n - w_n\| \cdot v_n)$$

y teniendo en cuenta (*), se deduce que $\|x_n - w_n\| \cdot \|v_n\| > n\|y_n\|$, de donde

$$\|T_\lambda v_n\| = \|x_n - w_n\|^{-1} \cdot \|y_n\| < 1/n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Esto implica que $T_\lambda v_n \rightarrow 0$. Como además $v_n = -\lambda^{-1}(T_\lambda v_n - Tv_n)$, deducimos que $(v_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ también converge, en contradicción con la definición de v_n (ver prueba del teorema 4.4).



8. Dado un espacio vectorial X y un subespacio M de X , se llama *codimensión* de M a $\text{codim } M = \dim X/M$, cuando esta cantidad es finita.

a) Probar que M tiene codimensión finita si y sólo si existe N subespacio de X con dimensión finita tal que $X = M \oplus N$.

b) Si X es un espacio normado y $T : X \rightarrow X$ es un operador compacto, probar que $R(T - \lambda I)$ tiene codimensión finita y $\text{codim } R(T - \lambda I) = \dim N(T - \lambda I)$.

Resp.: a) Supongamos que $\{x_1 + M, \dots, x_n + M\}$ es una base de X/M . Es evidente que $\{x_1, \dots, x_n\}$ es linealmente independiente. Llamamos N al espacio generado por dicho conjunto. Así, $\forall x \in X$, $x + M = \sum_{k=1}^n \alpha_k(x_k + M)$, es decir $x = y + z$, con $y \in M$, $z \in N$, y la descomposición es única.

Recíprocamente, si $\{y_1, \dots, y_n\}$ es una base de N , definimos $\varphi : N \rightarrow X/M$ por $\varphi(y_k) = y_k + M$ (restricción a N de la aplicación canónica). Como, por hipótesis, $X = M \oplus N$, φ es biyectiva. Esto implica que $\dim X/M = \text{codim } M = n$.

b) Por el teorema espectral de operadores compactos,

$$(*) \quad X = N(T_\lambda^r) \oplus R(T_\lambda^r).$$

Por tanto, debido que $T_\lambda(R(T_\lambda^r)) = R(T_\lambda^r)$, deducimos que

$$(**) \quad R(T_\lambda) = T_\lambda(X) = T_\lambda(N(T_\lambda^r)) \oplus T_\lambda(R(T_\lambda^r)) = T_\lambda(N(T_\lambda^r)) \oplus R(T_\lambda^r).$$

Por otra parte, es fácil probar que $T_\lambda(N(T_\lambda^r)) \subset N(T_\lambda^r)$, lo que permite definir $S = T_\lambda|_{N(T_\lambda^r)} : N(T_\lambda^r) \rightarrow N(T_\lambda^r)$.

Como $N(T_\lambda^r)$ tiene dimensión finita, $\dim N(T_\lambda^r) = \dim N(S) + \dim R(S)$, de donde $\dim N(S) = \text{codim } R(S)$.

Por el apartado a), existe $N \subset N(T_\lambda^r)$ tal que $N(T_\lambda^r) = R(S) \oplus N$, con $\dim N = \text{codim } R(S)$. Sustituyendo esta descomposición en (*) y aplicando (**), resulta:

$$X = R(S) \oplus N \oplus R(T_\lambda^r) = N \oplus R(T_\lambda),$$

de modo que $\text{codim } R(T_\lambda) = \dim N = \dim N(S) = \dim N(T_\lambda)$ pues $N(T_\lambda) = N(S)$.



9. Sea k un núcleo continuo en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Probar que el operador integral $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, definido por $Tx(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t)dt$, es compacto.

Resp.: Sea $M \subset C[0, 1]$ un conjunto acotado. Probemos que $T(M)$ es relativamente compacto en la métrica de $C[0, 1]$.

Por hipótesis, existe $K > 0$ tal que $\|x\|_\infty \leq K, \forall x \in M$.

- Veamos que Tx es una función uniformemente acotada, $\forall x \in M$:

Si $\lambda = \max_{0 \leq s, t \leq 1} |k(s, t)|$, entonces $|Tx(s)| \leq \lambda \cdot K$.

- Veamos además que Tx es equicontinua, $\forall x \in M$:

Sea para ello $\varepsilon > 0$ arbitrario. Como k es uniformemente continuo, existe $\delta > 0$ tal que

$$|k(s_1, t) - k(s_2, t)| < \varepsilon/K, \text{ si } |s_1 - s_2| < \delta, \forall t \in [0, 1].$$

Entonces

$$|Tx(s_1) - Tx(s_2)| \leq \int_0^1 |k(s_1, t) - k(s_2, t)| \cdot |x(t)| dt < \varepsilon$$

si $|s_1 - s_2| < \delta$.

Aplicando ahora el teorema de Arzela-Ascoli, deducimos que el conjunto $T(M)$ es relativamente compacto.



10. Probar que el operador integral $T : L^2[0, 1] \rightarrow L^2[0, 1]$ definido por $Ax(s) = \int_0^1 k(s, t)x(t)dt$, donde $\int_0^1 \int_0^1 k^2(s, t)dsdt < \infty$, es compacto.

Resp.: Supongamos en primer lugar que k es continua en $[0, 1] \times [0, 1]$ y llamemos $\lambda = \max_{0 \leq s, t \leq 1} |k(s, t)|$. Para ver que T es compacto, sea M un conjunto acotado en $L^2[0, 1]$ y $\|x\|_2 \leq K, \forall x \in M$.

Por la desigualdad de Hölder, $\forall x \in M$,

$$|Tx(s)| \leq \int_0^1 |k(s, t)x(t)|dt \leq \left(\int_0^1 |k(s, t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \lambda \cdot K,$$

de lo que se deduce que $T(M)$ es uniformemente acotado.

Además, $T(M)$ es equicontinua pues, si elegimos $\varepsilon > 0$ arbitrariamente, existe $\delta > 0$ tal que

$$|k(s_1, t) - k(s_2, t)| < \varepsilon/K, \text{ si } |s_1 - s_2| < \delta, t \in [0, 1].$$

Entonces

$$|Tx(s_1) - Tx(s_2)| \leq \left(\int_0^1 |k(s_1, t) - k(s_2, t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right)^{1/2} < \varepsilon.$$

Del teorema de Arzela-Ascoli se deduce que T es compacto.

Supongamos ahora que k es un núcleo arbitrario en $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Consideramos una sucesión $\{k_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de núcleos continuos convergente a k en $L^2([0, 1] \times [0, 1])$. Si definimos $T_n x(s) = \int_0^1 k_n(s, t)x(t)dt$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|Tx - T_n x\|^2 &= \int_0^1 \left| \int_0^1 [k(s, t) - k_n(s, t)]x(t)dt \right|^2 ds \\ &\leq \int_0^1 \left| \left(\int_0^1 |k(s, t) - k_n(s, t)|^2 dt \right) \cdot \left(\int_0^1 |x(t)|^2 dt \right) \right| ds \\ &= \|x\|_2^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 |k(s, t) - k_n(s, t)|^2 dt ds. \end{aligned}$$

Esto implica que $\|T - T_n\| \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |k(s, t) - k_n(s, t)|^2 dsdt \right)^{1/2}$ y, en consecuencia, que $T_n \rightarrow T$. Por el teorema 3.8 se deduce que T es compacto.



11. Sea $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definido por $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_2, 0, x_4, \dots)$. Calcular $N(T_\lambda^n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Deducir que T no es compacto.

Resp.: Por definición, $T_\lambda(x_1, x_2, \dots) = (-\lambda x_1, (1-\lambda)x_2, -\lambda x_3, (1-\lambda)x_4, \dots)$.

Procediendo por recurrencia, obtenemos que

$$T_\lambda^n(x_1, x_2, \dots) = ((-\lambda)^n x_1, (1-\lambda)^n x_2, (-\lambda)^n x_3, (1-\lambda)^n x_4, \dots).$$

De este modo, $x \in N(T_\lambda^n) \iff (-\lambda)^n x_{2k-1} = 0, (1-\lambda)^n x_{2k} = 0, \forall k \in \mathbb{N}$.

En el caso $\lambda = 0$, resulta $N(T_\lambda^n) = \{(x_1, 0, x_3, 0, \dots) : x_k \in \mathbb{C}\}$.

Si $\lambda = 1$, $N(T_\lambda^n) = \{(0, x_2, 0, x_4, 0, \dots) : x_k \in \mathbb{C}\}$. Este espacio tiene dimensión infinita, lo que implica que T no es compacto.



12. En el espacio ℓ^2 definimos los operadores compactos

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, \dots) &= (x_2, x_3/2, x_4/3, \dots), \\ B(x_1, x_2, \dots) &= (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \dots), \\ C(x_1, x_2, \dots) &= (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots). \end{aligned}$$

Probar que $0 \in \sigma_p(A)$, $0 \in \sigma_r(B)$, $0 \in \sigma_c(C)$.

Resp.: a) Por definición, $\lambda \in \sigma_p(A) \iff N(A_\lambda) \neq \{0\}$. Ahora bien, como

$$A_\lambda(x_1, x_2, \dots) = (x_2 - \lambda x_1, x_3/2 - \lambda x_2, x_4/3 - \lambda x_3, \dots),$$

resulta que

$$\begin{aligned} x \in N(A_\lambda) &\iff x_{n+1}/n - \lambda x_n = 0, \forall n \in \mathbb{N} \\ &\iff x_{n+1} = n\lambda x_n = \dots = n!\lambda^n x_1, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

En particular, el elemento $(1, \lambda, 2\lambda^2, \dots, n!\lambda^n, \dots) \in N(A_\lambda)$. Haciendo $\lambda = 0$, $e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in N(A_0)$ lo que indica que $0 \in \sigma_p(A)$.

b) Por definición, $\lambda \in \sigma_r(B) \iff (B - \lambda I)^{-1}$ está definido en un conjunto no denso de ℓ^2 , es decir $\overline{R(B_\lambda)} \neq \ell^2$.

En este caso,

$$y \in R(B_\lambda) \iff \exists x \in \ell^2 : -\lambda x_1 = y_1, x_n/n - \lambda x_{n+1} = y_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para $\lambda = 0$, $B_0x = y \iff 0 = y_1$, $x_n/n = y_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de modo que el espacio generado por $e_1 = (1, 0, \dots) \notin R(B_0)$. Esto implica que $\overline{R(B_0)} \neq \ell^2$ y $0 \in \sigma_r(B)$.

c) Si llamamos $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a la base canónica de ℓ^2 , es evidente que $R(C) = \ell^2$, pues $Ce_n = (1/n)e_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así pues, existe el inverso C^{-1} y está definido en todo el espacio; sin embargo, C^{-1} no está acotado pues

$$C^{-1}e_n = ne_n \implies \|C^{-1}e_n\|_2 = |n| \cdot \|e_n\|_2 = |n|.$$

Por definición, $0 \in \sigma_c(C)$.



13. Sean X un espacio normado y $T \in L(X)$ un operador compacto. Probar que todo punto espectral no nulo de T es autovalor.

Resp.: Sea $\lambda \in \sigma(T)$, $\lambda \neq 0$ y supongamos que existe T_λ^{-1} . Probemos que $\lambda \in \rho(T)$:

Por hipótesis, la ecuación homogénea $T_\lambda x = 0$ sólo tiene la solución trivial $x = 0$. Por el teorema 5.6, la ecuación $T_\lambda x = y$ tiene solución para cualquier $y \in X$. El mismo teorema prueba que el operador T_λ^{-1} está definido en todo X y está acotado, lo que significa que $\lambda \in \rho(T)$.



14. Resolver la ecuación integral $x(s) - \mu \int_0^1 x(t)dt = 1$, en el espacio $L^2[0, 1]$.

Resp.: Consideramos en primer lugar la ecuación homogénea

$$x(s) - \mu \int_0^1 x(t)dt = 0.$$

De la igualdad $x(s) = \mu \int_0^1 x(t)dt$, deducimos que

$$x(s) = \mu \int_0^1 \left[\mu \int_0^1 x(r)dr \right] dt = \mu^2 \int_0^1 x(r)dr = \mu x(s),$$

de donde $(1 - \mu)x(s) = 0$. Descomponemos pues el problema en dos casos:

- a) Si $\mu \neq 1$, la única solución de la ecuación homogénea es la trivial. Así pues, la ecuación propuesta tiene solución única. Debido a que el operador asociado $Tx(s) = \int_0^1 x(t)dt$ tiene norma uno, pues

$$\|Tx\|_2^2 = \int_0^1 \left| \int_0^1 x(t)dt \right|^2 ds = \|x\|_2^2,$$

en el caso $|\mu| < \|T\|^{-1} = 1$ la solución puede expresarse mediante la fórmula de Neumann

$$x = 1 + \mu T(1) + \mu^2 T^2(1) + \cdots = \frac{1}{1 - \mu},$$

solución que también es válida cuando $|\mu| > 1$.

- b) Si $\mu = 1$, cualquier función constante es solución de la ecuación homogénea. Sabemos por el teorema 5.12 que la ecuación dada tiene solución si y sólo si $\int_0^1 1 \cdot h(s)ds = 0$, para cualquier h solución de la homogénea asociada (observar que $T = T^*$). Ahora bien, como la última igualdad no es cierta para las funciones constantes, deducimos que la ecuación dada no tiene solución.

TEMAS COMPLEMENTARIOS

1. Propiedades espectrales de las álgebras de Banach ([Kr]).
2. Algebras- C^* ([Ru]).
3. Principio del punto fijo de Schauder y sus aplicaciones ([LS]).
4. Aplicaciones de las ecuaciones integrales a la teoría del potencial ([RN]).

VI. TEORÍA ESPECTRAL EN ESPACIOS DE HILBERT

La teoría espectral de cierta clase de operadores en espacios de Hilbert fue iniciada por el propio Hilbert en 1904; tiene importantes aplicaciones a problemas de análisis clásico, especialmente en ecuaciones diferenciales. También es una herramienta indispensable en el estudio de álgebras de operadores en espacios de Hilbert, que son los que forman la base matemática de la Mecánica Cuántica. Probaremos en este capítulo el teorema espectral de operadores autoadjuntos y normales sobre espacios de Hilbert. Dicho teorema será una generalización del teorema de diagonalización de las matrices hermíticas y representa la introducción más natural a la teoría espectral de operadores arbitrarios en espacios de Hilbert.

SECCIONES

1. Introducción.
2. Propiedades espectrales de operadores normales y autoadjuntos.
3. Teorema espectral de operadores normales compactos.
4. Teorema espectral de operadores autoadjuntos compactos.
5. Operadores positivos.
6. Operadores proyección.
7. Funciones de operadores acotados autoadjuntos.
8. Teorema espectral de operadores autoadjuntos.
9. Teorema espectral de operadores autoadjuntos: segunda versión.
10. Ejercicios.

1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo ilustraremos el desarrollo de la teoría espectral en espacios de Hilbert probando el teorema espectral de operadores autoadjuntos y normales. Recordamos que, dado un operador lineal acotado $T \in L(H_1, H_2)$ entre dos espacios de Hilbert complejos H_1 y H_2 , se define el *adjunto* de T como el operador $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ tal que $\forall x \in H_1, y \in H_2 : \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$ y se prueba que $T^* \in L(H_2, H_1)$ y $\|T^*\| = \|T\|$. Un operador $T \in L(H)$ es *autoadjunto* cuando $T^* = T$.

Los operadores autoadjuntos son una generalización directa de las matrices hermíticas, pues si $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un operador autoadjunto y (a_{ij}) la matriz asociada a T respecto de una base ortonormal de \mathbb{C}^n , sabemos que $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $i, j = 1, \dots, n$, es decir la matriz es hermítica. Recordaremos en primer lugar el teorema de factorización de matrices hermíticas que se generalizará posteriormente con el teorema espectral de operadores autoadjuntos.

Teorema. *Sea H el espacio euclídeo n -dimensional y $T : H \rightarrow H$ un operador autoadjunto. Existe entonces una base ortonormal $\{u_1, \dots, u_n\}$ de H formada por vectores propios de T , es decir $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C} : Tu_j = \lambda_j u_j$, $j = 1, \dots, n$.*

Para motivar los conceptos que se aplicarán a lo largo del capítulo, damos otros enunciados equivalentes y consecuencias inmediatas del teorema anterior.

1.- Si llamamos $H_i = \langle \{u_i\} \rangle$, $i = 1, \dots, n$, entonces $TH_i \subset H_i$; por tanto,

$$H = H_1 \oplus \dots \oplus H_n \text{ suma directa ortogonal.}$$

Todo espacio de dimensión finita se puede descomponer como suma directa ortogonal de subespacios de dimensión 1 cada uno de ellos T -invariante.

2.- Si llamamos ahora $T_i = T|_{H_i}$, $i = 1, \dots, n$, entonces

$$T = T_1 + \dots + T_n.$$

3.- El teorema también se puede enunciar así:

Existe una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de H respecto de la cual la matriz asociada es

$$\text{diagonal } \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

4.- Dada una base $\{u_1, \dots, u_n\}$ de H , si definimos la transformada de Fourier de un elemento $x = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n \in H$ como $\hat{x} = (\hat{x}(1), \dots, \hat{x}(n)) =$

(c_1, \dots, c_n) , se tiene:

$$\begin{aligned} x &= \hat{x}(1)u_1 + \dots + \hat{x}(n)u_n \\ \langle x, y \rangle &= \hat{x}(1)\overline{\hat{y}(1)} + \dots + \hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)} \\ Tx &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \hat{x}(i)u_i. \end{aligned}$$

Si definimos la función $\hat{a} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$ por $\hat{a}(i) = \lambda_i$, entonces

$$y = Tx \iff \hat{y}(i) = \hat{a}(i)\hat{x}(i),$$

es decir, aplicar el operador T a un elemento x equivale a multiplicar por \hat{a} la transformada de Fourier \hat{x} de x .

5.- Como toda función \hat{x} definida en $\{1, \dots, n\}$ es la transformada de Fourier de algún $x \in H$ y $|\hat{x}(1)|^2 + \dots + |\hat{x}(n)|^2 < \infty$, llamando μ a la medida discreta definida en \mathbb{R} y concentrada en los puntos $\{1, \dots, n\}$, se puede pensar \hat{x} como un elemento de $L^2(\mu)$ siendo la correspondencia $x \mapsto \hat{x}$ un isomorfismo entre H y $L^2(\mu)$. El resultado de 3.- se puede expresar ahora como:

Existe un isomorfismo $x \mapsto \hat{x}$ de H en $L^2(\mu)$ en el que el operador T se transforma en la multiplicación por \hat{a} .

6.- Si llamamos S al espacio de los n primeros números naturales $S = \{1, \dots, n\}$ con la topología discreta, se puede pensar la función real \hat{a} como un elemento de $C_r(S) = \{f : S \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$.

Si $B = c_0I + c_1T + \dots + c_kT^k$ y definimos $\hat{b}(i) = c_0 + c_1\hat{a}(i) + \dots + c_k\hat{a}(i)^k$, entonces

$$y = Bx \iff \hat{y}(i) = \hat{b}(i) \cdot \hat{x}(i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Más generalmente, $\forall \hat{b} \in C_r(S)$, se puede definir un operador B por la fórmula anterior. Como la base $\{u_1, \dots, u_n\}$ es ortogonal,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \sum |\hat{x}(i)|^2, \quad \|Bx\|^2 = \sum |\hat{b}(i)|^2 \cdot |\hat{x}(i)|^2 \\ \implies \|B\| &= \sup_{i \in S} |\hat{b}(i)| = \|\hat{b}\|_\infty. \end{aligned}$$

En particular, si $\hat{b}_n(i) \rightarrow \hat{b}(i)$, entonces $B_n \rightarrow B$ en norma.

7.- Supongamos ahora que $\hat{a}(i) \neq 0, \forall i \in S$ y $\hat{a}(i) \neq \hat{a}(j)$ si $i \neq j$. El conjunto de los operadores B correspondientes a los posibles $\hat{b} \in C_r(S)$ coincide con el álgebra $a = a(T)$ generada por T , es decir el álgebra de operadores $B = \lim_n \sum_{k=1}^n c_k T^k$.

Además, si $B \geq 0$, entonces $\hat{b}(i) \geq 0$ pues $\hat{b}(i) = \langle Bu_i, u_i \rangle$. Se tiene entonces:

Existe un isomorfismo $B \mapsto \widehat{b}$ de a en $C_r(S)$ tal que $\|B\| = \|\widehat{b}\|_\infty$ y si $B \geq 0$, entonces $\widehat{b}(i) \geq 0$. En particular a T le corresponde la función $\widehat{a}(i) = \lambda_i$.

8.- Para cada Δ intervalo de \mathbb{R} , se puede definir el operador $P(\Delta) : H \rightarrow H$ por $y = P(\Delta)x$ si $\widehat{y}(i) = \varphi_\Delta(i)\widehat{x}(i)$, siendo φ_Δ la función característica de Δ . Dicho operador verifica:

i) $P(\Delta)$ es un proyector en H .

ii) $P(\emptyset) = 0$ y $P(\mathbb{R}) = I$.

iii) Si $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$, unión disjunta, $P(\Delta) = \sum_{n \in \mathbb{N}} P(\Delta_n) = \lim_n \sum_{k=1}^n P(\Delta_k)$.

iv) Si $\Delta = \Delta_1 \cap \Delta_2$, $P(\Delta) = P(\Delta_1) \cdot P(\Delta_2)$.

Se dice que $P(\Delta)$ es la *medida espectral* de T pues $P(\Delta)$ tiene las propiedades de una medida común salvo que no es un número sino un proyector.

9.- Si $\Delta_j \cap S = \{j\}$, entonces $P(\Delta_j)x = \widehat{x}(j)u_j$, es decir, $P(\Delta_j)$ es la proyección sobre el autoespacio $H_j = \langle \{u_j\} \rangle$ correspondiente a λ_j . Se tiene así la descomposición $I = P(\Delta_1) + \dots + P(\Delta_n)$ y

$$(*) \quad T = \widehat{a}(1)P(\Delta_1) + \dots + \widehat{a}(n)P(\Delta_n).$$

En definitiva:

A todo operador autoadjunto T le corresponde una medida espectral $P(\Delta)$ con las propiedades i) a iv) de modo que se cumple (*), fórmula llamada *descomposición espectral* de T .

Esta forma tan sencilla de expresar la imagen por T de cualquier elemento $x \in H$ es lo que hace atractiva la descomposición. Otra forma de escribir la representación anterior, más adecuada para su generalización al caso de dimensión infinita, se obtiene de la siguiente forma:

Suponemos como antes que los autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ del operador T son diferentes y que $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$; llamamos nuevamente $\{u_1, \dots, u_n\}$ a la base ortonormal de autovectores asociada y Δ_i un intervalo en \mathbb{R} tal que $\Delta_i \cap S = \{i\}$ ($i = 1, \dots, n$).

Si $P_i = P(\Delta_i) : H \rightarrow H$ es la proyección definida por $P_i x = \widehat{x}(i)u_i = \langle x, u_i \rangle u_i$, se definen las proyecciones

$$E_0 = 0, \quad E_k = \sum_{i \leq k} P_i, \quad k = 1, \dots, n$$

Entonces, para todo $x \in H$ se tiene la descomposición

$$x = \sum_{i=1}^n (E_i - E_{i-1})x \text{ y } Tx = \sum_{i=1}^n \lambda_i (E_i - E_{i-1})x.$$

Más generalmente, si definimos

$$E_\lambda = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} P_i, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

tenemos que $P_1 = E_{\lambda_1}$, $P_i = E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$ ($i = 2, \dots, n$).

Como E_λ es constante si $\lambda \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j)$ ($j = 2, \dots, n$), podemos escribir también $P_j = E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}}$ ($j = 1, \dots, n$), con lo que, para todo $x \in H$,

$$x = \sum_{j=1}^n P_j x = \sum_{j=1}^n (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}})x \text{ y } Tx = \sum_{j=1}^n \lambda_j P_j x = \sum_{j=1}^n \lambda_j (E_{\lambda_j} - E_{\lambda_{j-1}})x.$$

Si llamamos $dE_\lambda = E_\lambda - E_{\lambda-0}$, podemos escribir $T = \sum_{j=1}^n \lambda_j dE_{\lambda_j}$, que es la llamada representación espectral de T . De esta representación se obtiene además que $\langle Tx, y \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle dE_{\lambda_j} x, y \rangle$, expresión que puede escribirse también como integral de Riemann-Stieltjes $\langle Tx, y \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d\mu(\lambda)$, donde $\mu(\lambda) = \langle E_\lambda x, y \rangle$.

Debido a lo anterior se pueden hacer operaciones algebraicas numéricas con el operador y tener información sobre el nuevo espectro. Por ejemplo, si $T = \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k$, $T^3 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^3 P_k$ y $\sigma(T^3) = \{\lambda_1^3, \dots, \lambda_n^3\}$. Recíprocamente, se pueden definir nuevos operadores como funciones del operador conocido. Por ejemplo, $\cos T = (\cos \lambda_1)P_1 + \dots + (\cos \lambda_n)P_n$.

2. PROPIEDADES ESPECTRALES DE OPERADORES NORMALES Y AUTOADJUNTOS.

Los operadores autoadjuntos pueden estudiarse como caso particular de los operadores normales. Recordamos que un operador $A \in L(H)$, donde H un espacio de Hilbert complejo, es *normal* cuando $AA^* = A^*A$. Un ejemplo típico lo forman los operadores de multiplicación $M_\varphi \in L(L^2(\mathbb{R}))$ definidos por $M_\varphi f = \varphi \cdot f$, con $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$ fija. En este caso $\sigma_r(M_\varphi) = \emptyset$, $\sigma_p(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$, $\rho(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists k > 0, |\lambda - \varphi(x)| \geq k \text{ c.s.}\}$. En conclusión $\sigma(M_\varphi) = \overline{\varphi(\mathbb{R})}$.

Estudiaremos en esta sección algunas propiedades de estas clases de operadores, que permitirán simplificar los argumentos en el desarrollo posterior de la teoría.

2.1.- Teorema. *Un operador $A \in L(H)$ es normal si y sólo si $\|A^*x\| = \|Ax\|$, $\forall x \in H$.*

Demostración. Basta observar que $\forall x \in H$,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle \text{ y } \|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle. \quad \diamond$$

Una consecuencia inmediata de este resultado es que los núcleos $N(A)$ y $N(A^*)$ coinciden si A es normal.

En cuanto a la estructura de los operadores autoadjuntos, probaremos los siguientes resultados.

2.2.- Teorema. *Sean $S, T \in L(H)$ operadores autoadjuntos y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces $\alpha S + \beta T$ es autoadjunto. Además ST es autoadjunto si y sólo si $TS = ST$.*

Demostración. De las propiedades del producto escalar, es evidente que

$$\begin{aligned} \langle (\alpha S + \beta T)x, y \rangle &= \alpha \langle Sx, y \rangle + \beta \langle Tx, y \rangle = \alpha \langle x, Sy \rangle + \beta \langle x, Ty \rangle \\ &= \langle x, \alpha Sy \rangle + \langle x, \beta Ty \rangle = \langle x, (\alpha S + \beta T)y \rangle. \end{aligned}$$

Con respecto a la segunda parte, si $TS = ST$, entonces

$$\langle (ST)x, y \rangle = \langle Tx, Sy \rangle = \langle x, TSy \rangle = \langle x, STy \rangle.$$

Recíprocamente, si ST es autoadjunto,

$$\langle STx, y \rangle = \langle x, STy \rangle = \langle Sx, Ty \rangle = \langle TSx, y \rangle, \quad \forall x, y \implies TS = ST. \quad \diamond$$

2.3.- Teorema. *Un operador $T \in L(H)$ es autoadjunto si y sólo si $\langle Tx, x \rangle$ es real, $\forall x \in H$.*

Demostración. Si T es autoadjunto, $\langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$ de donde $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H$.

Recíprocamente, si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x \in H$, entonces, por definición de adjunto,

$$\langle Tx, x \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle} = \langle x, Tx \rangle = \langle T^*x, x \rangle \implies \langle (T - T^*)x, x \rangle = 0, \quad \forall x \in H.$$

Como H es un espacio complejo, $T - T^* = 0$ (ver ejercicio 36 del capítulo III), es decir T es autoadjunto. \diamond

Veremos posteriormente otras similitudes entre ciertas clases de operadores y algunos subconjuntos del campo complejo, que motivarán algunas propiedades importantes de aquellos.

2.4.- Teorema. Si $T \in L(H)$ es autoadjunto, entonces $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$.

Demostración. Llamemos $\alpha = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x \rangle|$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in H, |\langle Tx, x \rangle| \leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2.$$

Esto indica por un lado que $\alpha \leq \|T\|$.

Para probar la desigualdad contraria, sean $x, y \in H$. Entonces

$$\langle T(x+y), x+y \rangle - \langle T(x-y), x-y \rangle = 4 \operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle.$$

Si aplicamos la desigualdad triangular y la identidad del paralelogramo, obtenemos:

$$\begin{aligned} 4 |\operatorname{Re} \langle Tx, y \rangle| &\leq |\langle T(x+y), x+y \rangle| + |\langle T(x-y), x-y \rangle| \\ &\leq \alpha (\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2) = 2\alpha (\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{aligned}$$

En particular, si tomamos $x \in H$ con $\|x\| = 1$ y $Tx \neq 0$, $y = \|Tx\|^{-1}Tx$, resulta

$$\|Tx\| = \operatorname{Re} \langle Tx, \|Tx\|^{-1}Tx \rangle \leq \frac{1}{2}\alpha(1+1) = \alpha.$$

Obtenemos así que $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leq \alpha$. \diamond

2.5.- Lema. Si $T \in L(H)$ es autoadjunto y M un subespacio de H invariante bajo T , entonces M^\perp es también invariante bajo T .

Demostración. Es evidente pues, dados $x \in M$, $y \in M^\perp$ arbitrarios,

$$0 = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \implies Ty \perp M. \quad \diamond$$

Estudiaremos a continuación las propiedades espectrales de estas clases de operadores. Así como en los espacios de dimensión finita el espectro no puntual es vacío, en los operadores normales probaremos que este se reduce al espectro continuo. Esto permite simplificar el estudio del espectro para estos operadores, que son además los que se presentan en los ejemplos más comunes.

2.6.- Teorema. Si $A \in L(H)$ es normal, $\sigma_r(A) = \emptyset$.

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma_r(A)$, $\lambda \neq 0$. Entonces $\overline{(A - \lambda I)H}$ es un subespacio propio de H . Por el teorema de proyección, existe un elemento $v \in H$ no nulo tal que $\langle (A - \lambda I)h, v \rangle = 0$, $\forall h \in H$. Entonces $\langle h, (A^* - \bar{\lambda}I)v \rangle = 0$, $\forall h \in H$

lo que implica que $(A^* - \bar{\lambda}I)v = 0$ así como $\|(A^* - \bar{\lambda}I)v\|^2 = \|(A - \lambda I)v\|^2 = 0$.

Deducimos así que λ es autovalor, lo que contradice la suposición inicial.
 \diamond

2.7.- Teorema. Si A es normal, $r_\sigma(A) = \|A\|$. Además, existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \|A\|$.

Demostración. a) Por ser A normal, $\forall x \in H$

$$\begin{aligned} \|Ax\| = \|A^*x\| &\implies \|A(Ax)\| = \|A^*(Ax)\| \\ \implies \|A^2\| &= \sup_{\|x\|=1} \|A^2x\| = \sup_{\|x\|=1} \|A^*Ax\| = \|A^*A\| = \|A\|^2. \end{aligned}$$

Utilizando el hecho de que si A es normal, entonces A^k es normal, $\forall k \in \mathbb{N}$, se prueba por inducción que $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Si ahora aplicamos la fórmula del radio espectral de Gelfand,

$$r_\sigma(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|A^n\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\|A^{2^k}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[2^k]{\|A\|^{2^k}} = \|A\|.$$

b) Como la función $|\cdot| : \sigma(A) \rightarrow \mathbb{R}^+$ es continua y $\sigma(A)$ es compacto, se alcanza el valor máximo en dicho conjunto, es decir existe $\lambda \in \sigma(A)$ tal que

$$|\lambda| = \max_{\mu \in \sigma(A)} |\mu| = \sup_{\mu \in \sigma(A)} |\mu| = r_\sigma(A) = \|A\|. \quad \diamond$$

2.8.- Corolario. Si $A \in L(H)$ es un operador normal compacto, $\sigma_p(A) \neq \emptyset$ y existe algún $\lambda \in \sigma_p(A)$ tal que $|\lambda| = \|A\|$.

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(A)$ tal que $|\lambda| = \|A\|$.

- Si $\lambda = 0$, entonces $T = 0$, de modo que $\lambda \in \sigma_p(A)$.

- Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \sigma_p(A)$ (teorema 4.11, capítulo V). \diamond

2.9.- Teorema. Sea $T \in L(H)$ autoadjunto. Entonces:

a) Todos los autovalores de T (si existen) son reales.

b) Autovectores correspondientes a distintos autovalores son ortogonales.

Demostración. a) Si λ es autovalor y $Tx = \lambda x$ con $x \neq 0$, entonces

$$\lambda \langle x, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Tx, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

Esto implica que $\lambda = \bar{\lambda}$, es decir λ es real.

b) Si λ y μ son autovalores y $\lambda \neq \mu$, con $Tx = \lambda x$ y $Ty = \mu y$, entonces

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle = \langle x, \mu y \rangle = \mu \langle x, y \rangle.$$

Esto implica que $\langle x, y \rangle = 0$. \diamond

2.10.- Lema. Si $T \in L(H)$ es autoadjunto,

$$\lambda \in \rho(T) \iff \exists c > 0 : \|T_\lambda x\| \geq c\|x\|, \quad \forall x \in H.$$

Demostración. \implies : Si $\lambda \in \rho(T)$, $\exists R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$ y es acotado. Si llamamos $\|R_\lambda\| = k > 0$, entonces

$$\|x\| = \|R_\lambda T_\lambda x\| \leq \|R_\lambda\| \cdot \|T_\lambda x\| = k\|T_\lambda x\|.$$

Esto implica que $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\|$ con $c = 1/k$.

\impliedby : a) Veamos en primer lugar que $T_\lambda : H \rightarrow T_\lambda(H)$ es biyectiva:

$$T_\lambda x = 0 \implies \|T_\lambda x\| = 0 \implies c\|x\| = 0 \implies x = 0.$$

b) Además $T_\lambda(H)$ es denso en H :

$$\begin{aligned} x_0 \perp \overline{T_\lambda(H)} &\implies x_0 \perp T_\lambda(H) \implies 0 = \langle T_\lambda x, x_0 \rangle = \langle Tx, x_0 \rangle - \lambda \langle x, x_0 \rangle, \quad \forall x \in H \\ &\implies \langle Tx, x_0 \rangle = \langle x, Tx_0 \rangle = \langle x, \bar{\lambda}x_0 \rangle, \quad \forall x \in H \implies Tx_0 = \bar{\lambda}x_0. \end{aligned}$$

Si $x_0 \neq 0$, $\bar{\lambda}$ es autovalor de T , por lo que $\bar{\lambda} = \lambda$ y $T_\lambda x_0 = 0$; entonces

$$0 = \|T_\lambda x_0\| \geq c\|x_0\| > 0$$

lo que es absurdo. De aquí concluimos que $x_0 = 0$ y $\overline{T_\lambda(H)}^\perp = \{0\}$.

c) Por último, $T_\lambda(H)$ es cerrado:

Sea $y \in \overline{T_\lambda(H)}$; entonces existe una sucesión $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset T_\lambda(H)$ tal que $y_n \rightarrow y$. Si llamamos $T_\lambda x_n = y_n$, entonces

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{c} \|T_\lambda x_n - T_\lambda x_m\| = \frac{1}{c} \|y_n - y_m\| \rightarrow 0$$

lo que implica que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy. Como H es completo, existe $x \in H$ tal que $x_n \rightarrow x$. De la continuidad de T_λ deducimos que $y_n = T_\lambda x_n \rightarrow T_\lambda x$. Por la unicidad del límite, $T_\lambda x = y$.

Debido a b) y c), se deduce que $T_\lambda(H) = H$. Esto significa que $R_\lambda = T_\lambda^{-1}$ está definido en todo H y es acotado, por la hipótesis, con lo que concluimos que $\lambda \in \rho(T)$. \diamond

2.11.- Teorema. El espectro $\sigma(T)$ de un operador autoadjunto $T \in L(H)$ en un espacio de Hilbert H complejo es real. Más aún, si $m = \inf_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$ y $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle$, entonces $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Demostración. a) Sea $\lambda = \alpha + i\beta$, con $\beta \neq 0$. Si $x \in H$,

$$\begin{aligned} \langle T_\lambda x, x \rangle &= \langle Tx, x \rangle - \lambda \langle x, x \rangle \\ \overline{\langle T_\lambda x, x \rangle} &= \langle Tx, x \rangle - \bar{\lambda} \langle x, x \rangle. \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro,

$$-2i \operatorname{Im} \langle T_\lambda x, x \rangle = \overline{\langle T_\lambda x, x \rangle} - \langle T_\lambda x, x \rangle = (\lambda - \bar{\lambda}) \langle x, x \rangle = 2i\beta \|x\|^2.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\beta| \cdot \|x\|^2 = |\operatorname{Im} \langle T_\lambda x, x \rangle| \leq |\langle T_\lambda x, x \rangle| \leq \|T_\lambda x\| \cdot \|x\|.$$

Esto implica que $|\beta| \cdot \|x\| \leq \|T_\lambda x\|$. Como $\beta \neq 0$, del teorema anterior se deduce que $\lambda \in \rho(T)$.

b) Probaremos que si $\lambda = M + c$, con $c > 0$, es real, entonces $\lambda \in \rho(T)$:

Dado cualquier $x \neq 0$, llamamos $v = \|x\|^{-1}x$. Así:

$$\langle Tx, x \rangle = \|x\|^2 \langle Tv, v \rangle \leq \|x\|^2 \sup_{\|\tilde{v}\|=1} \langle T\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \langle x, x \rangle \cdot M.$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|T_\lambda x\| \cdot \|x\| \geq -\langle T_\lambda x, x \rangle = -\langle Tx, x \rangle + \lambda \langle x, x \rangle \geq (-M + \lambda) \langle x, x \rangle = c\|x\|^2.$$

Dividiendo por $\|x\|$, $\|T_\lambda x\| \geq c\|x\| \implies \lambda \in \rho(T)$.

Análogamente se prueba que si $\lambda < m$, también $\lambda \in \rho(T)$. \diamond

Las constantes m y M tienen una interesante relación con la norma de T :

2.12.- Corolario. Si T es autoadjunto, $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$.

Demostración. Es consecuencia del teorema anterior y el teorema 2.4.

Se puede probar también que las cotas m y M de $\sigma(T)$ no pueden mejorarse, es decir:

2.13.- Teorema. Si $H \neq \{0\}$ y $T \in L(H)$ es autoadjunto, $m, M \in \sigma(T)$.

Demostración. Debido a la equivalencia

$$M \in \sigma(T) \iff M + k \in \sigma(T + kI) \text{ con } k \in \mathbb{R},$$

podemos suponer sin pérdida de generalidad que $0 \leq m \leq M$.

Por el teorema anterior, como $M = \sup_{\|x\|=1} \langle Tx, x \rangle = \|T\|$, entonces dada cualquier sucesión $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reales no negativos, con $\delta_n \rightarrow 0$,

$$\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|x_n\| = 1, \langle Tx_n, x_n \rangle \geq M - \delta_n.$$

Entonces $\|Tx_n\| \leq \|T\| \cdot \|x_n\| = \|T\| = M$ y, como T es autoadjunto,

$$\begin{aligned} \|Tx_n - Mx_n\|^2 &= \langle Tx_n - Mx_n, Tx_n - Mx_n \rangle \\ &= \|Tx_n\|^2 - 2M\langle Tx_n, x_n \rangle + M^2\|x_n\|^2 \\ &\leq M^2 - 2M(M - \delta_n) + M^2 = 2M\delta_n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Por tanto, no existe ningún $c > 0$ tal que

$$\|T_M x_n\| = \|(T - MI)x_n\| \geq c = c\|x_n\|$$

lo que quiere decir que M no puede estar en $\rho(T)$.

La demostración de que $m \in \sigma(T)$ es similar. \diamond

2.14.- Corolario. Si $T \in L(H)$ es autoadjunto, $\|T\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\}$.

Si un operador autoadjunto es además compacto, podemos precisar el resultado del teorema 2.13.

2.15.- Corolario. Si $T \in L(H)$ es autoadjunto y compacto, entonces $m, M \in \sigma_p(T)$ siempre que sean no nulos.

Demostración. El teorema 4.11 del capítulo V afirma que todo punto espectral no nulo de un operador compacto es un autovalor. De aquí se deduce inmediatamente el resultado. \diamond

2.16.- Corolario. Si $T \in L(H)$ es autoadjunto y compacto, entonces su espectro puntual es no vacío.

Demostración. Si alguno de los valores m, M es no nulo, pertenece a $\sigma_p(T)$ según el resultado anterior. Por otra parte, si $m = M = 0$, entonces $\langle Tx, x \rangle = 0$, $\forall x \in H$. Esto implica que $T = 0$ y $\lambda = 0$ es autovalor. \diamond

A continuación definimos el espectro aproximado de un operador, muy útil por poderse describir bajo condiciones poco rigurosas y, que en el caso de operadores normales, es especialmente simple.

2.17.- Definición. Dado $A \in L(H)$, se dice que λ es un *autovalor aproximado* de A si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in D(A) : \|x\| = 1, \|(A - \lambda I)x\| < \varepsilon.$$

Llamaremos *espectro aproximado* de A al conjunto $\Pi(A)$ de autovalores aproximados de A .

A continuación, enunciamos sin demostrar algunas propiedades básicas del espectro aproximado.

2.18.- Teorema. $\lambda \in \Pi(A) \iff A - \lambda I$ no tiene inversa acotada.

Esto implica en particular que $\Pi(A) \subset \sigma(A)$. En el caso de operadores normales, es cierto también el recíproco. Tenemos así:

2.19.- Teorema. Si A es normal, $\Pi(A) = \sigma(A)$.

Este resultado nos proporcionará una forma más conveniente de caracterizar los valores espectrales de un operador normal.

2.20.- Teorema. Sea $A \in L(H)$. Son equivalentes:

i) $\exists \lambda \in \Pi(A) : |\lambda| = \|A\|$;

ii) $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle|$.

De los resultados anteriores se desprende que la condición i) siempre se verifica para operadores normales, de modo que ii) permite calcular la norma de un operador normal.

3. TEOREMA ESPECTRAL DE OPERADORES NORMALES COMPACTOS.

En esta sección damos el primer paso en la generalización del teorema espectral de operadores en espacios euclídeos pues la descomposición que se obtiene en el caso de operadores compactos viene dada en forma de serie infinita. Más próxima aún es la descomposición de los operadores de rango finito, de modo que empezaremos estudiando este caso.

Los operadores normales de rango finito poseen una gran similitud con los operadores lineales definidos en espacios de dimensión finita: por ejemplo, su espectro puntual consiste también en un número finito de autovalores. Además, su espectro residual es vacío y su espectro continuo contiene a lo sumo el cero. Ahora bien, si $0 \in \sigma_c(A)$, $\overline{A(H)} = H$ y, al ser $A(H)$ de dimensión finita, es cerrado con lo que no puede ser igual a H si la dimensión de H es infinita.

Veremos pues que el teorema espectral tiene una forma completamente análoga al caso finito-dimensional. El resultado que obtengamos nos servirá de guía para tratar de extenderlo a casos más generales. Por último, queremos indicar que estos operadores poseen su propio interés pues con frecuencia en las aplicaciones prácticas aparecen, o bien operadores de rango finito, o bien operadores que se pueden expresar como límites de sucesiones de estos operadores.

En la prueba del teorema espectral necesitaremos el siguiente lema.

3.1.- Lema. Sea H un espacio de Hilbert, $T \in L(H)$ un operador compacto normal. Entonces $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T - \lambda I)^\perp = \{0\}$.

Demostración. Si llamamos $L = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T_\lambda)$, debemos probar que $L^\perp = \{0\}$, lo que se deduce de las siguientes propiedades elementales:

- $TT_\lambda = T_\lambda T$ y $T^*T_\lambda = T_\lambda T^*$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$.
- $T(N(T_\lambda)) \subset N(T_\lambda)$ y $T^*(N(T_\lambda)) \subset N(T_\lambda)$.
- $T(L) \subset L$ y $T^*(L) \subset L$.
- $T(L^\perp) \subset L^\perp$ y $T^*(L^\perp) \subset L^\perp$.

Si suponemos que $L^\perp \neq \{0\}$, podemos considerar el operador $A = T|_{L^\perp}$, que es normal y compacto. Entonces existe algún $\lambda \in \sigma_p(A)$ tal que $|\lambda| = \|A\|$. Sea $x \neq 0$ algún autovector asociado a λ . Entonces

$$A_\lambda x = T_\lambda x = 0 \implies x \in N(T_\lambda) \subset L \implies x \in L \cap L^\perp = \{0\}$$

lo que es absurdo. \diamond

3.2.- Teorema. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador normal. Son equivalentes:

- i) T tiene rango finito.
- ii) T es compacto y $\sigma_p(T)$ es un conjunto finito.

En cualquier caso, si $\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y E_i es la proyección ortogonal sobre $N(T - \lambda_i I)$ ($i = 1, \dots, n$), entonces:

- a) $T = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i$.
- b) $E_i \perp E_j$ para $i \neq j$.
- c) $\sum_{i=1}^n E_i = I$.

Demostración. i) \implies ii): Por ser T de rango finito, es compacto y su espectro puntual es a lo sumo numerable. Supongamos pues que $\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots\}$ con $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$. Entonces

$$\exists x_i \in H : x_i \neq 0, T_{\lambda_i} x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}.$$

Como T es normal, el conjunto $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ es ortogonal. Entonces el conjunto $\{T(\lambda_n^{-1} x_n) : \lambda_n \neq 0\}$ es linealmente independiente e infinito; esto implica que $\dim R(T) = \infty$ lo que es absurdo.

ii) \implies i): Supongamos que $\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$). Por ser T normal, autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales, lo que implica que $N(T - \lambda_i I) \perp N(T - \lambda_j I)$ ($i \neq j$) y podemos formar la suma directa ortogonal $M = \bigoplus_{i=1}^n N(T - \lambda_i I)$; veamos que $M = H$.

El espacio M es cerrado por ser suma directa ortogonal de subespacios cerrados. Además, si llamamos $L = \bigcup_{i=1}^n N(T - \lambda_i I)$, teniendo en cuenta que $L^\perp = M^\perp$, basta probar que $L^\perp = \{0\}$ para deducir que $M = H$.

En efecto, si $\lambda \notin \sigma_p(T)$, $N(T_\lambda) = \{0\}$, por lo que podemos escribir $L = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T_\lambda)$. Aplicando el lema anterior, $L^\perp = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T_\lambda)^\perp = \{0\}$.

De lo anterior se obtiene también que, $\forall x \in H$, existe $x_i \in N(T - \lambda_i I)$ ($i = 1, \dots, n$), tal que $x = \sum_{i=1}^n x_i$ y la descomposición es única. Entonces

$$Tx = \sum_{i=1}^n Tx_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in \bigoplus_{i=1}^n N(T - \lambda_i I).$$

Por ser T compacto, $N(T - \lambda_i I)$ tiene dimensión finita, de lo que se deduce que $R(T)$ tiene dimensión finita, es decir que T es de rango finito.

Para probar la última parte, supongamos que T es un operador compacto y $\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Si llamamos E_i a la proyección ortogonal sobre $N(T - \lambda_i I)$ ($i = 1, \dots, n$), debido a que

$$N(T - \lambda_i I) \subset N(T - \lambda_j I)^\perp, \quad (i \neq j),$$

se deduce que $E_i \perp E_j$ ($i \neq j$).

De la descomposición $x = \sum_{i=1}^n x_i$, con $x_i \in N(T - \lambda_i I)$, resulta:

$$E_k x = \sum_{i=1}^n E_k x_i = E_k x_k = x_k,$$

de donde $x = \sum_{i=1}^n E_i x$, es decir $\sum_{i=1}^n E_i = I$. Además

$$Tx = \sum_{i=1}^n Tx_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i x \implies T = \sum_{i=1}^n \lambda_i E_i. \quad \diamond$$

Probaremos por último que la descomposición anterior es única.

3.3.- Teorema. Sean H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador normal que verifica las condiciones a), b) y c) del teorema anterior. Entonces $\sigma_p(T) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ y E_i es la proyección ortogonal sobre $N(T - \lambda_i I)$ ($i = 1, \dots, n$).

Demostración. Aplicando E_k en la igualdad c) y teniendo en cuenta que $E_i E_k = 0$ si $i \neq k$, obtenemos que

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_k E_i = E_k^2,$$

lo que prueba que E_k es un operador proyección.

Sea ahora $x \in R(E_i)$. Entonces $E_i x = x$, de donde $TE_i x = Tx$ pero, por a), resulta también que

$$E_i Tx = \lambda_i E_i x = \lambda_i x = Tx.$$

Esto indica a su vez que x es autovector asociado al autovalor λ_i . Para ver que T no tiene más autovalores, supongamos que $Tx = \mu x$ ($x \neq 0$). Entonces, de a) y c), deducimos que $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \mu) E_i x = 0$. Aplicando E_k y teniendo en cuenta b), resulta que $(\lambda_k - \mu) E_k x = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Si $\mu \neq \lambda_k$, $\forall k$, entonces $E_k x = 0$, así como $\sum_{i=1}^n E_i x = 0$, lo que es absurdo.

Comprobaremos por último que E_i es la proyección ortogonal sobre $N(T - \lambda_i I)$. Sea para ello $x \in N(T - \lambda_i I)$; entonces $(T - \lambda_i I)x = 0$, de donde nuevamente $\sum_{k=1}^n (\lambda_k - \lambda_i) E_k x = 0$. Aplicando ahora E_j , tenemos que $(\lambda_j - \lambda_i) E_j x = 0$, es decir $E_j x = 0$, si $j \neq i$.

Por tanto, $x = \sum_{k=1}^n E_k x = E_i x$ lo que implica que $x \in R(E_i)$.

Recíprocamente, si $x \in R(E_i)$, ya probamos que x es autovector de T asociado al autovalor λ_i , es decir $x \in N(T - \lambda_i I)$. \diamond

Si el operador no tiene rango finito pero es compacto, la descomposición espectral presenta la única diferencia de que la suma no será finita, pero aparece en forma de serie infinita, pues sabemos que el espectro puntual tiene como máximo un conjunto numerable de puntos.

Para obtener la correspondiente descomposición, se debe introducir en primer lugar el concepto de convergencia de una familia de operadores $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ a un operador T como extensión de la idea de convergencia fuerte de sucesiones de operadores.

Para ello, sea H un espacio de Hilbert complejo y $\{M_\alpha : \alpha \in I\}$ una familia de subespacios cerrados de H . Definimos $\sum_{\alpha \in I} M_\alpha$ como el conjunto de sumas conmutativamente convergentes $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$, con $x_\alpha \in M_\alpha$, introducidas en el capítulo III (definición 4.4). Las características de este conjunto se muestran en los siguientes resultados.

3.4.- Proposición. Si llamamos $M = \sum_{\alpha \in I} M_\alpha$, entonces

$$a) \overline{\langle \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \rangle} = \overline{M}.$$

$$b) \text{ Si } M_\alpha \perp M_\beta, \alpha \neq \beta, \text{ entonces } \overline{\langle \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \rangle} = M$$

(en lo sucesivo utilizaremos la notación $\bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$ para indicar la clausura del espacio generado por $\bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha$, donde $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de subespacios cerrados y ortogonales dos a dos).

3.5.- Proposición. Sea $\{M_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia ortogonal de subespacios cerrados de H . Entonces:

$$(x \perp \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \implies x = 0) \iff H = \overline{\langle \bigcup_{\alpha \in I} M_\alpha \rangle} = \bigoplus_{\alpha \in I} M_\alpha$$

(en similitud al concepto de conjunto ortonormal completo definido en el capítulo III).

La prueba es en algún sentido similar a su análoga relativa a las bases ortonormales.

3.6.- Proposición. *Las sumas convergentes y los operadores lineales acotados conmutan, es decir, si $T \in L(H)$, entonces*

$$x = \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha} \implies Tx = \sum_{\alpha \in I} Tx_{\alpha}.$$

Una extensión del concepto de convergencia fuerte de una sucesión de operadores es la siguiente:

3.7.- Definición. Una familia $\{T_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ de operadores en $L(H)$ es *sumable* a T cuando $\sum_{\alpha \in I} T_{\alpha}x = Tx$, $\forall x \in H$. Escribiremos en este caso $\sum_{\alpha \in I} T_{\alpha} = T$.

3.8.- Proposición. *Si $\{E_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ es una familia de proyecciones ortogonales con $E_{\alpha} \perp E_{\beta}$ si $\alpha \neq \beta$, entonces $\sum_{\alpha \in I} E_{\alpha}$ es la proyección ortogonal sobre $\bigoplus_{\alpha \in I} M_{\alpha}$, donde $M_{\alpha} = R(E_{\alpha})$, $\forall \alpha$.*

Demostración. Sea E la proyección ortogonal sobre $M = \bigoplus_{\alpha \in I} M_{\alpha}$ que es un subespacio cerrado.

Todo $z \in H$ tiene la descomposición única $z = x + y$ con $x \in M$, $y \in M^{\perp}$, y $x = \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha}$ con $x_{\alpha} \in M_{\alpha}$. Por otro lado, si $\beta \in I$, $E_{\beta}x = x_{\beta}$ y $E_{\beta}y = 0$, $\forall y \in M^{\perp} \subset M_{\beta}^{\perp}$.

Esto implica que $E_{\beta}z = E_{\beta}x + E_{\beta}y = x_{\beta}$. Entonces

$$Ez = x = \sum_{\alpha \in I} x_{\alpha} = \sum_{\alpha \in I} E_{\alpha}z, \quad \forall z \in H \implies E = \sum_{\alpha \in I} E_{\alpha}. \quad \diamond$$

Con la notación y conceptos anteriores, obtenemos el teorema espectral para operadores normales compactos.

3.9.- Teorema. *Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$ un operador normal compacto. Entonces $\sigma_p(T)$ es finito o numerable. Además*

$$i) \quad H = N(T) \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} N(T - \lambda I) = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T - \lambda I).$$

$$\text{También } H = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T^* - \bar{\lambda} I).$$

$$ii) \quad \overline{R(T)} = \overline{R(T^*)} = \bigoplus_{\lambda \neq 0} N(T - \lambda I) = \bigoplus_{\lambda \neq 0} N(T^* - \bar{\lambda} I).$$

iii) $T = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} \lambda E_\lambda = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda E_\lambda$, $I = \sum_{\lambda \in \mathbb{C}} E_\lambda$, donde E_λ representa la proyección ortogonal sobre $N(T - \lambda I)$.

De este modo, el espacio H se descompone en subespacios en cada uno de los cuales el operador T es simplemente la multiplicación de un elemento por un número particular.

Demostración. i) Como los autovectores asociados a distintos autovalores son ortogonales y si $\lambda \notin \sigma_p(T)$, $N(T_\lambda) = \{0\}$, tenemos que $\{N(T_\lambda) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ es una familia ortogonal de subespacios cerrados de H .

Al ser T normal y compacto,

$$x \perp N(T_\lambda), \forall \lambda \in \mathbb{C} \implies x = 0.$$

Por la proposición 3.5, esto equivale a

$$H = \overline{\langle \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T_\lambda) \rangle} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} N(T_\lambda) = N(T) \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \mathbb{C} \\ \lambda \neq 0}} N(T_\lambda) = N(T) \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} N(T_\lambda).$$

ii) Como T es normal, $N(T) = N(T^*)$, de donde $\overline{R(T)} = N(T^*)^\perp = N(T)^\perp$. De aquí se obtiene la descomposición

$$H = N(T) \oplus \overline{R(T)}.$$

Por otra parte,

$$H = N(T) \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} N(T_\lambda).$$

De estas dos descomposiciones y debido a que el complemento ortogonal de un subespacio es único, resulta que $\overline{R(T)} = \bigoplus_{\lambda \neq 0} N(T_\lambda)$.

iii) El conjunto $\{E_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ es una familia de proyecciones ortogonales tal que $E_\lambda \perp E_\mu$ ($\lambda \neq \mu$). Por la proposición 3.8, la suma $E = E_0 + \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda$ es la proyección ortogonal sobre $N(T) \oplus \bigoplus_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} N(T_\lambda) = H$. Pero la proyección sobre todo el espacio H es la identidad, de modo que

$$I = E_0 + \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda.$$

Si escribimos para cada $x \in H$,

$$x = x_0 + \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} x_\lambda, \quad x_0 \in N(T), \quad x_\lambda \in N(T_\lambda),$$

entonces

$$Tx = Tx_0 + \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} Tx_\lambda = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} \lambda x_\lambda = \sum_{\substack{\lambda \in \sigma_p(T) \\ \lambda \neq 0}} \lambda E_\lambda x. \quad \diamond$$

Observaciones. a) Como T es compacto, como máximo un conjunto numerable de espacios de la forma $N(T - \lambda I)$ será no trivial.

b) Si T es un operador compacto arbitrario, se tiene la descomposición $T = A + iB$, con A y B operadores normales compactos. Así pues, conocidas las descomposiciones espectrales $A = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j P_j$ y $B = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k Q_k$, se obtiene que $T = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j P_j + i \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k Q_k$, pero como P_j y Q_k no conmutan, la descomposición espectral no se puede mejorar.

4. TEOREMA ESPECTRAL DE OPERADORES AUTOADJUNTOS COMPACTOS.

En esta sección estudiaremos el caso particular de los operadores autoadjuntos compactos y obtendremos una representación concreta de los mismos. Así pues, H será un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita, $T \in L(H)$ un operador autoadjunto compacto con infinitos autovalores, los cuales como sabemos forman un conjunto numerable de números reales cuyo único posible punto de acumulación es el cero.

Ordenamos el conjunto de autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de modo que $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$, $n = 1, 2, \dots$, y llamamos $N_n = N(T - \lambda_n I) = \{x \in H : Tx = \lambda_n x\}$, $n = 1, 2, \dots$, es decir, el autoespacio correspondiente al autovalor λ_n .

Como N_n tiene dimensión finita, tiene una base ortonormal de autovectores que designaremos por $\{u_{m_{n-1}+1}, u_{m_{n-1}+2}, \dots, u_{m_n}\}$ (donde $m_0 = 0$) y, si $n \neq m$, cada punto de N_n es ortogonal a N_m . Se deduce de ello que $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es ortonormal.

4.1.- Lema. Si llamamos F al subespacio generado por la familia $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces $T(F) \subset F$ y $T|_{F^\perp} = 0$.

Demostración. Como cada punto de $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ es autovector de T , es evidente que $T(F) \subset F$ de lo que se deduce además que $T(F^\perp) \subset F^\perp$.

Es claro que $T|_{F^\perp}$ es autoadjunto por lo que existe $\lambda \in \sigma(T|_{F^\perp})$ con $|\lambda| = \|T|_{F^\perp}\|$.

Si suponemos que $T|_{F^\perp} \neq 0$, es fácil comprobar que $T|_{F^\perp}$ es compacto, de modo que λ debe ser autovalor de $T|_{F^\perp}$.

Sea $x \neq 0$ un autovector asociado a λ . Entonces $Tx = (T|_{F^\perp})x = \lambda x$ con lo que λ es también autovalor de T . Entonces $\lambda = \lambda_n$ para algún n y $x \in N_n$. Como $N_n \subset F$ y $x \in F^\perp$, entonces $x = 0$, lo que es absurdo. \diamond

Siguiendo la notación anterior, es fácil ver además que $F^\perp = N(T)$. Llamamos ahora $\mu_n = \lambda_k$ si $n = m_{k-1} + 1, \dots, m_k$ y $k = 1, 2, \dots$. Entonces $Tu_n = \mu_n u_n$, $n = 1, 2, \dots$, lo que permite obtener la siguiente generalización del teorema de diagonalización de matrices simétricas.

4.2.- Teorema. *En las condiciones y notación anteriores, para cualquier $x \in H$, $Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \langle x, u_n \rangle u_n$.*

Demostración. Sea $x \in H$ y hacemos $x = y + z$ con $y \in F$, $z \in F^\perp$. Por el lema anterior, $Tx = Ty + Tz = Ty \in F$.

Como $\{u_n : n = 1, 2, \dots\}$ es base ortonormal de F ,

$$Tx = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle Tx, u_n \rangle u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle x, Tu_n \rangle u_n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n \langle x, u_n \rangle u_n. \quad \diamond$$

El siguiente resultado permite calcular numéricamente los autovalores de ciertos operadores autoadjuntos compactos.

4.3.- Corolario. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mu_n| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1 \text{ y } \langle x, u_m \rangle = 0 \text{ para } 1 \leq m \leq n-1\}$.

Demostración. Es obvio que $\langle Tu_n, u_n \rangle = \mu_n$. Además si $x \in H$ y $\langle x, u_m \rangle = 0$, $\forall m = 1, \dots, n-1$, entonces

$$Tx = \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m \langle x, u_m \rangle u_m \text{ y } \langle Tx, x \rangle = \sum_{m=n}^{\infty} \mu_m |\langle x, u_m \rangle|^2.$$

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2$ converge y $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, u_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, resulta que, como además $|\mu_m| \leq |\mu_n|$ para $m \geq n$,

$$|\langle Tx, x \rangle| \leq \sum_{m=n}^{\infty} |\mu_m| \cdot |\langle x, u_m \rangle|^2 \leq |\mu_n| \cdot \sum_{m=n}^{\infty} |\langle x, u_m \rangle|^2 \leq |\mu_n| \cdot \|x\|^2. \quad \diamond$$

Otra dirección en la que puede obtenerse la teoría espectral de operadores autoadjuntos compactos es debida a Riesz y no utiliza la teoría de Riesz-Schauder. El primer paso consiste en probar directamente que existe λ autovalor de T tal que $|\lambda| = \|T\|$ (corolario 2.8). A continuación, un argumento inductivo prueba que existen dos sucesiones $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ y $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ tales que $Tu_n = \mu_n u_n$, $\forall n$, y se satisface el corolario anterior. Por último se

ve que todos los autovalores de T aparecen al menos una vez en $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y que se cumple el teorema de descomposición anterior.

El último resultado de esta sección proporciona una caracterización de la resolvente de los operadores en estudio.

4.4.- Teorema. *Si $T \in L(H)$ es un operador autoadjunto compacto y λ un elemento no nulo de la resolvente de T , entonces*

$$(T - \lambda I)^{-1}x = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu_n}{\lambda - \mu_n} \langle x, u_n \rangle u_n, \forall x \in H.$$

Demostración. Sean $x \in H$, $y = (T - \lambda I)^{-1}x$. Entonces

$$x = (T - \lambda I)y = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle y, u_n \rangle u_n - \lambda y,$$

de donde $y + \frac{1}{\lambda}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\lambda} \langle y, u_n \rangle u_n$. Resulta que

$$\begin{aligned} \langle y, u_m \rangle + \frac{1}{\lambda} \langle x, u_m \rangle &= \langle y + \frac{1}{\lambda}x, u_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\lambda} \langle y, u_n \rangle \langle u_n, u_m \rangle \\ &= \frac{\mu_m}{\lambda} \langle y, u_m \rangle \implies \langle y, u_m \rangle = \frac{1}{\mu_m - \lambda} \langle x, u_m \rangle. \end{aligned}$$

En definitiva, $y = (T - \lambda I)^{-1}x = -\frac{1}{\lambda}x - \frac{1}{\lambda} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu_n}{\lambda - \mu_n} \langle x, u_n \rangle u_n$. \diamond

5. OPERADORES POSITIVOS.

La situación en el caso de operadores autoadjuntos no necesariamente compactos es más complicada. En primer lugar, el espectro, aunque es un subconjunto de \mathbb{R} , puede no ser numerable. Así, mientras un operador autoadjunto compacto se representa por una serie, un operador autoadjunto general se representa por una integral, la cual involucra operadores que son proyección ortogonal. En la construcción de estos son importantes los operadores positivos. Por tanto, el estudio de los operadores positivos y sus raíces cuadradas será una herramienta útil para deducir una representación espectral de los operadores autoadjuntos. El método que se desarrolla aquí se debe a F. Riesz (1934).

En el conjunto de operadores autoadjuntos sobre un espacio de Hilbert complejo H , debido a que $\langle Tx, x \rangle$ es real, se puede introducir una relación de orden así:

$$T_1 \leq T_2 \text{ si } \langle T_1 x, x \rangle \leq \langle T_2 x, x \rangle, \forall x \in H.$$

Esto nos lleva en particular a definir los operadores positivos.

5.1.- Definición. Un operador autoadjunto $T \in L(H)$ es *positivo*, y se escribe $T \geq 0$, si $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$.

Los siguientes resultados describen la estructura de los operadores positivos.

5.2.- Teorema. Sean $S, T \in L(H)$ dos operadores positivos. Entonces

- a) $S + T$ es positivo.
- b) Si $\alpha \in \mathbb{R}^+$, αS es positivo.
- c) Si $ST = TS$, ST es positivo.

Demostración. La demostración de a) y b) es evidente. Veamos pues el apartado c).

Si $S = 0$, es trivial.

Si $S \neq 0$, definimos la sucesión $S_1 = \|S\|^{-1}S$, $S_{n+1} = S_n - S_n^2$, $n = 1, 2, \dots$

*) Se prueba por inducción que $0 \leq S_n \leq I$:

Como $S \geq 0$, $S_1 \geq 0$. Además $S_1 \leq I$ pues

$$\langle S_1 x, x \rangle = \frac{1}{\|S\|} \langle Sx, x \rangle \leq \frac{\|Sx\| \cdot \|x\|}{\|S\|} \leq \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \langle Ix, x \rangle, \forall x \in H.$$

Si hacemos la hipótesis inductiva de que $0 \leq S_k \leq I$, es decir $0 \leq I - S_k \leq I$, como S_k es autoadjunto, para todo $x \in H$, $y = S_k x$, tenemos:

$$\langle S_k^2(I - S_k)x, x \rangle = \langle (I - S_k)S_k x, S_k x \rangle = \langle (I - S_k)y, y \rangle \geq 0,$$

de modo que $S_k^2(I - S_k) \geq 0$.

Análogamente se prueba que $S_k(I - S_k)^2 \geq 0$.

Aplicando a), $0 \leq S_k^2(I - S_k) + S_k(I - S_k)^2 = S_k - S_k^2 = S_{k+1}$.

Por otra parte, como $S_k^2 \geq 0$, $I - S_k \geq 0$, sumando:

$$0 \leq S_k^2 + I - S_k = I - S_{k+1} \implies S_{k+1} \leq I.$$

*) Veamos por último que $\langle STx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$.

De lo anterior se deduce que

$$S_1 = S_1^2 + S_2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3 = \dots = S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_n^2 + S_{n+1}.$$

Como $S_{n+1} \geq 0$, $S_1^2 + \cdots + S_n^2 = S_1 - S_{n+1} \leq S_1$.
 Por la definición de la relación " \leq " tenemos:

$$\sum_{j=1}^n \|S_j x\|^2 = \sum_{j=1}^n \langle S_j x, S_j x \rangle = \sum_{j=1}^n \langle S_j^2 x, x \rangle \leq \langle S_1 x, x \rangle.$$

Esto indica que $\sum_n \|S_n x\|^2$ es una serie convergente, de donde $\|S_n x\| \rightarrow 0$ así como $S_n x \rightarrow 0$. Entonces

$$\left(\sum_{j=1}^n S_j^2 \right) x = (S_1 - S_{n+1})x \rightarrow S_1 x.$$

Todos los S_j conmutan con T pues son combinaciones lineales de $S_1 = \|S\|^{-1}S$. Por ello y de la continuidad del producto escalar deducimos que, para todo $x \in H$, si llamamos $y_j = S_j x$,

$$\begin{aligned} \langle STx, x \rangle &= \|S\| \langle TS_1 x, x \rangle \\ &= \|S\| \lim_n \sum_{j=1}^n \langle TS_j^2 x, x \rangle = \|S\| \lim_n \sum_{j=1}^n \langle Ty_j, y_j \rangle \geq 0. \quad \diamond \end{aligned}$$

5.3.- Teorema. Sea $T \in L(H)$ autoadjunto. Entonces T es positivo si y sólo si $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Demostración. Recordamos que $\sigma(T) \subset [m, M]$, donde

$$m = \inf\{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\} \text{ y } M = \sup\{\langle Tx, x \rangle : \|x\| = 1\}.$$

Si $T \geq 0$, entonces $m \geq 0$ y $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.

Recíprocamente, si $\sigma(T) \subset [0, \infty)$, como $m \in \sigma(T)$, entonces $m \geq 0$, de donde $\langle Tx, x \rangle \geq 0$, para todo x de norma uno. Esto implica que $T \geq 0$.
 \diamond

La relación de orden definida en los operadores autoadjuntos sugiere también el siguiente concepto.

5.4.- Definición. Una sucesión $\{T_n\}$ de operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert H es *monótona* $\left\{ \begin{array}{c} \text{creciente} \\ \text{decreciente} \end{array} \right\}$ si $\left\{ \begin{array}{c} T_1 \leq T_2 \leq \dots \\ T_1 \geq T_2 \geq \dots \end{array} \right\}$.

Una propiedad interesante de las sucesiones monótonas, que será crucial en el resultado final, generaliza el hecho de que toda sucesión monótona y acotada de números reales es convergente. Es la siguiente:

5.5.- Teorema. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente de operadores autoadjuntos en H tal que $T_i T_j = T_j T_i$, $\forall i, j$. Sea $K \in L(H)$ un operador autoadjunto tal que $T_1 \leq T_2 \leq$

$\dots \leq K$ y $T_i K = K T_i$, $\forall i$. Entonces existe $T \in L(H)$ autoadjunto tal que $T_n x \rightarrow T x$, $\forall x \in H$ y $T \leq K$.

Nota. Este teorema fue demostrado por Nagy (1942) pero una prueba general sin la condición de permutabilidad es debida a Vigier (1946).

Demostración. Llamamos $S_n = K - T_n$; claramente S_n es autoadjunto.

Primer paso. Probaremos que $(\langle S_n^2 x, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión convergente para todo $x \in H$.

Observamos en primer lugar que, si $m < n$, $T_n - T_m$ y $K - T_m$ son positivos. Como ambos conmutan, su producto es positivo. Entonces

$$S_m^2 - S_n S_m = (S_m - S_n) S_m = (T_n - T_m)(K - T_m) \geq 0 \implies S_m^2 \geq S_n S_m$$

y, análogamente,

$$S_n S_m - S_n^2 = S_n (S_m - S_n) = (K - T_n)(T_n - T_m) \geq 0 \implies S_n S_m \geq S_n^2.$$

Ambos resultados indican que $S_n^2 \leq S_n S_m \leq S_m^2$ para $m < n$.

Además

$$\langle S_m^2 x, x \rangle \geq \langle S_n S_m x, x \rangle \geq \langle S_n^2 x, x \rangle = \langle S_n x, S_n x \rangle = \|S_n x\|^2 \geq 0,$$

por lo que la sucesión $(\langle S_n^2 x, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$, con x fijo, es decreciente y acotada inferiormente por cero. Entonces converge.

Segundo paso. Veamos ahora que $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Como los S_n son autoadjuntos y conmutan y $-2\langle S_m S_n x, x \rangle \leq -2\langle S_n^2 x, x \rangle$ cuando $m < n$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|S_m x - S_n x\|^2 &= \langle (S_m - S_n)x, (S_m - S_n)x \rangle = \langle (S_m - S_n)^2 x, x \rangle \\ &= \langle S_m^2 x, x \rangle - 2\langle S_m S_n x, x \rangle + \langle S_n^2 x, x \rangle \leq \langle S_m^2 x, x \rangle - \langle S_n^2 x, x \rangle. \end{aligned}$$

De la convergencia de $(\langle S_n^2 x, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ se deduce que la sucesión $(S_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y, por tanto, convergente. Como $T_n = K - S_n$, la sucesión $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ también converge y podemos escribir $T_n x \rightarrow y$, $\forall x \in H$.

Esto define un operador $T : H \rightarrow H$ por $Tx = y$, que es lineal y autoadjunto porque T_n son autoadjuntos y el producto escalar es continuo. Como $(T_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, está acotada para todo $x \in H$. Por el teorema de acotación uniforme, T está acotado. Por último, de $T_n \leq K$ se deduce que $T \leq K$.

◇

Es claro que si $T \in L(H)$ es autoadjunto, T^2 es positivo, pues $\langle T^2 x, x \rangle = \langle T x, T x \rangle \geq 0$, pero ahora nos planteamos el problema inverso: dado un

operador T positivo, encontrar un operador autoadjunto A tal que $A^2 = T$. Esto sugiere el siguiente concepto.

5.6.- Definición. Dado $T \in L(H)$ positivo, un operador $A \in L(H)$ autoadjunto se llama *raíz cuadrada* de T si $A^2 = T$. Si además $A \geq 0$, A se llama *raíz cuadrada positiva* de T y se denota por $A = T^{1/2}$.

El siguiente teorema muestra que la raíz cuadrada de T puede representarse como límite de una sucesión de polinomios en T y, en consecuencia, conmuta con todos los operadores que conmuten con T .

5.7.- Teorema. *Todo operador $T \in L(H)$ positivo tiene una raíz cuadrada positiva A y ésta es única. Además A conmuta con todo $S \in L(H)$ tal que $ST = TS$.*

Demostración. Si $T = 0$, entonces existe $A = T^{1/2} = 0$.

Sea pues $T \neq 0$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\langle Tx, x \rangle \leq \|Tx\| \cdot \|x\| \leq \|T\| \cdot \|x\|^2.$$

Si llamamos $Q = \|T\|^{-1} \cdot T$, entonces $\langle Qx, x \rangle \leq \|x\|^2 = \langle Ix, x \rangle$, es decir, $Q \leq I$.

Si logramos probar que Q tiene una única raíz cuadrada positiva $B = Q^{1/2}$, entonces $\|T\|^{1/2} \cdot B$ es raíz cuadrada de T pues

$$(\|T\|^{1/2} B)^2 = \|T\| \cdot B^2 = \|T\| \cdot Q = T.$$

Además es fácil probar que la unicidad de $Q^{1/2}$ implica la unicidad de la raíz cuadrada positiva de T .

Basta pues probar el teorema bajo la suposición adicional de que $T \leq I$.

(•) Existencia de la raíz cuadrada (Visser, 1937). Definimos la sucesión

$$A_0 = 0, \quad A_{n+1} = A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2), \quad n = 0, 1, \dots$$

Como cada A_n es un polinomio en T , es autoadjunto y todos conmutan entre sí, por lo que también conmutan con todo operador que conmute con T . Probaremos las siguientes propiedades:

(1) $A_n \leq I, \forall n$.

Por inducción; es evidente que $A_0 \leq I$ y si $A_{n-1} \leq I$, $(I - A_{n-1})^2 \geq 0$. También $I - T \geq 0$. Entonces:

$$0 \leq \frac{1}{2}(I - A_{n-1})^2 + \frac{1}{2}(I - T) = I - A_{n-1} - \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) = I - A_n \implies A_n \leq I.$$

(2) $A_n \leq A_{n+1}$, $\forall n$.

Por inducción: como $T \geq 0$, $(1/2)T \geq 0$. Entonces $A_1 \geq A_0$.

Si suponemos que $A_{n-1} \leq A_n$, entonces

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= A_n + \frac{1}{2}(T - A_n^2) - A_{n-1} - \frac{1}{2}(T - A_{n-1}^2) \\ &= (A_n - A_{n-1}) \left[I - \frac{1}{2}(A_n + A_{n-1}) \right]. \end{aligned}$$

Por (1), $I - (1/2)(A_n + A_{n-1}) = (1/2)(I - A_n + I - A_{n+1}) \geq 0$ y, por hipótesis, $A_n - A_{n-1} \geq 0$, de modo que $A_{n+1} - A_n \geq 0$.

(3) $A_n x \rightarrow Ax$, con $A = T^{1/2}$.

Como $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada superiormente por I , aplicando el teorema 5.5, existe $A \in L(H)$ autoadjunto tal que $A_n x \rightarrow Ax$, $\forall x \in H$. Además, por ser $(A_n x)_{n \in \mathbb{N}}$ de Cauchy,

$$A_{n+1}x - A_n x = \frac{1}{2}(Tx - A_n^2 x) \rightarrow 0 \implies Tx - A^2 x = 0, \forall x \implies T = A^2.$$

Como $0 = A_0 \leq A_n$, resulta que $\langle A_n x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. Tomando límites, obtenemos que $\langle Ax, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$, es decir A es positivo.

(4) Si $S \in L(H)$ conmuta con T , entonces S conmuta con A .

Debido a que $ST = TS \implies A_n S = S A_n \implies A_n S x = S A_n x$, $\forall x \in H$. Tomando límites se deduce el resultado.

(•) Unicidad de la raíz cuadrada (Nagy, 1938). Sea B otra raíz cuadrada positiva de T . Como $A^2 = B^2 = T$ y $BT = BB^2 = B^2 B = TB$, entonces $AB = BA$ por (4).

Dado $x \in H$, llamamos $y = (A - B)x$. Entonces $\langle Ay, y \rangle \geq 0$ y $\langle By, y \rangle \geq 0$. Además

$$\begin{aligned} \langle Ay, y \rangle + \langle By, y \rangle &= \langle (A + B)y, y \rangle \\ &= \langle (A^2 - B^2)x, y \rangle = 0 \implies \langle Ay, y \rangle = \langle By, y \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como A es autoadjunto y positivo, existe $C \geq 0$ autoadjunto tal que $C^2 = A$. Entonces

$$0 = \langle Ay, y \rangle = \langle C^2 y, y \rangle = \langle Cy, Cy \rangle = \|Cy\|^2 \implies Cy = 0 \implies Ay = C^2 y = 0.$$

Análogamente se prueba que $By = 0$, de donde $(A - B)y = 0$. Resulta que para todo $x \in H$,

$$\|Ax - Bx\|^2 = \langle (A - B)^2 x, x \rangle = \langle (A - B)y, x \rangle = 0 \implies Ax - Bx = 0,$$

de lo que se deduce en definitiva que $A = B$. \diamond

5.8.- Corolario. Sean $A, B \geq 0$.

a) Si $A^2 = B^2$, entonces $A = B$.

b) Si $A \geq B$ y C es un operador positivo que conmuta con A y B , entonces $AC \geq BC$.

6. OPERADORES PROYECCIÓN.

Un ejemplo importante de operadores positivos lo constituyen los operadores proyección, que fueron definidos en capítulos anteriores: cuando un espacio de Hilbert se representa como suma directa de un subespacio cerrado M y su complemento ortogonal M^\perp , por la unicidad de la descomposición $x = y + z$ con $y \in M$, $z \in M^\perp$, queda definida la proyección ortogonal $P : H \rightarrow H$ por $Px = y$, con lo que se puede escribir $x = Px + (I - P)x$, $\forall x \in H$.

Debido a la simplicidad de estos operadores, es un problema interesante expresar operadores más generales en términos de proyecciones. En este apartado estableceremos algunas propiedades de las proyecciones.

A veces se usa como definición de proyección la siguiente caracterización.

6.1.- Teorema. Un operador lineal y acotado $P : H \rightarrow H$ es proyección ortogonal si y sólo si P es autoadjunto e idempotente (es decir, $P^2 = P$).

Observación. En realidad, basta que P sea lineal pues, como probaremos en el capítulo siguiente, si un operador es autoadjunto, es cerrado y, por el teorema del gráfico cerrado, es acotado.

Demostración. a) Sea P una proyección en H y llamamos $M = P(H)$. Sea $x \in H$ y $Px = y$. Entonces $P^2x = Py = y = Px \implies P^2 = P$.

Si $x_1 = y_1 + z_1$, $x_2 = y_2 + z_2$, con $y_1, y_2 \in M$ y $z_1, z_2 \in M^\perp$, entonces es claro que $\langle y_1, z_2 \rangle = \langle y_2, z_1 \rangle = 0$. Así pues

$$\langle Px_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 + z_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = \langle y_1 + z_1, y_2 \rangle = \langle x_1, Px_2 \rangle.$$

b) Recíprocamente, si $P^2 = P = P^*$, llamamos también $M = P(H)$. Dado $x \in H$, escribimos $x = Px + (I - P)x$.

$$\forall x, y \in H, \langle Px, (I - P)y \rangle = \langle x, P(I - P)y \rangle = \langle x, Py - P^2y \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0.$$

Esto quiere decir que $P(H) \perp (I - P)(H)$.

Además $M = N(I - P)$ pues

$$\begin{aligned} y \in M &\implies y = Px, \quad x \in H \implies (I - P)Px = Px - P^2x = 0 \implies y \in N(I - P); \\ x \in N(I - P) &\implies (I - P)x = 0 \implies x = Px \implies x \in M. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que M es cerrado. Además $P|_M$ es la identidad en M pues si $y = Px$, entonces $Py = P^2x = Px = y$. \diamond

Otras propiedades básicas de las proyecciones son:

6.2.- Teorema. Si $P \in L(H)$ es una proyección ortogonal,

- a) $\langle Px, x \rangle = \|Px\|^2$;
- b) $P \geq 0$;
- c) $\|P\| \leq 1$ y $\|P\| = 1$ si $P(H) \neq \{0\}$.
- d) $R(P) = \{y \in H : Py = y\}$, $N(P) = R(P)^\perp$.
- e) $\|Px\| = \|x\| \implies Px = x$.

La demostración es directa.

A continuación damos condiciones para que la composición de proyecciones sea proyección.

6.3.- Teorema. a) Si P_1, P_2 son proyecciones sobre H , $P = P_1P_2$ es proyección si y sólo si $P_1P_2 = P_2P_1$. En este caso, si $M_i = P_i(H)$ ($i = 1, 2$), $P(H) = M_1 \cap M_2$.

b) Dos subespacios cerrados M_1, M_2 de H son ortogonales si y sólo si $P_1P_2 = 0$, donde P_i es la proyección de H sobre M_i , $i = 1, 2$ (en este caso se dice que P_1 y P_2 son proyecciones ortogonales entre sí).

Demostración. a) Supongamos que $P = P_1P_2$ es proyección; por ser P autoadjunto,

$$P_1P_2 = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1.$$

Recíprocamente, si $P_1P_2 = P_2P_1$, entonces P es autoadjunto pues

$$P^* = (P_1P_2)^* = P_2^*P_1^* = P_2P_1 = P_1P_2 = P.$$

Además es idempotente pues

$$P^2 = (P_1P_2)(P_1P_2) = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P.$$

Por último, si $x \in P(H)$, entonces $x = Px = P_1(P_2x) = P_2(P_1x)$. Como $P_1(P_2x) \in M_1$ y $P_2(P_1x) \in M_2$, entonces $x \in M_1 \cap M_2$. Recíprocamente, si $y \in M_1 \cap M_2$, entonces $Py = P_1P_2y = P_1y = y$, de donde $y \in P(H)$.

b) Si $M_1 \perp M_2$, entonces $M_1 \cap M_2 = \{0\}$ y $P_1 P_2 x = 0, \forall x \in H$, pues

$$\langle P_1 P_2 x, z \rangle = \langle P_2 x, P_1 z \rangle = 0, \forall z \in H.$$

Esto indica que $P_1 P_2 = 0$.

Si $P_1 P_2 = 0, \forall y \in M_1, z \in M_2$, tenemos

$$\langle y, z \rangle = \langle P_1 y, P_2 z \rangle = \langle y, P_1 P_2 z \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0 \implies M_1 \perp M_2. \quad \diamond$$

El siguiente resultado establece condiciones para que la suma de proyecciones sea proyección.

6.4.- Teorema. *Dadas dos proyecciones P_1, P_2 en H ,*

a) la suma $P = P_1 + P_2$ es proyección si y sólo si $M_1 = P_1(H)$ y $M_2 = P_2(H)$ son ortogonales;

b) si $P = P_1 + P_2$ es proyección, P proyecta H sobre $M = M_1 \oplus M_2$.

Demostración. a) Si $P = P_1 + P_2$ es proyección, $P = P^2$, es decir

$$P_1 + P_2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2.$$

Esto implica que $P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$ de donde

$$P_2 P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0 \implies P_2 P_1 P_2 + P_2 P_1 P_2 = 0 \implies P_2 P_1 P_2 = 0 \implies P_2 P_1 = 0.$$

Por el teorema anterior, $M_1 \perp M_2$.

Recíprocamente, si $M_1 \perp M_2$,

$$P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0 \implies P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0 \implies P^2 = P.$$

Como P_1 y P_2 son autoadjuntos, también lo es P . Esto implica que P es proyección.

b) Si llamamos $M = P(H)$, dado $y \in M$, existe $x \in H$ tal que

$$y = Px = P_1 x + P_2 x \in M_1 \oplus M_2 \implies M \subset M_1 \oplus M_2.$$

Sea ahora $z \in M_1 \oplus M_2 \implies z = y_1 + y_2$ con $y_i \in M_i, i = 1, 2$.

$$Pz = P_1(y_1 + y_2) + P_2(y_1 + y_2) = P_1 y_1 + P_2 y_2 = y_1 + y_2 = z.$$

Esto implica que $z \in M$ y $M_1 \oplus M_2 \subset M$.

De lo anterior se deduce la igualdad buscada. \diamond

Las siguientes propiedades de las proyecciones nos permitirán obtener una representación espectral de los operadores autoadjuntos. Una propiedad básica se refiere a la relación de orden que se define entre proyecciones.

6.5.- Teorema. Sean P_1, P_2 proyecciones definidas en H y denotamos por $M_1 = P_1(H)$, $M_2 = P_2(H)$ y $N_1 = N(P_1)$, $N_2 = N(P_2)$ a los rangos y núcleos de P_1 y P_2 , respectivamente. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$.
- ii) $\|P_1x\| \leq \|P_2x\|$, $\forall x \in H$.
- iii) $P_1 \leq P_2$.
- iv) $N_1 \supset N_2$.
- v) $M_1 \subset M_2$.

Demostración.

i) \implies ii). Como $\|P_1\| \leq 1$, $\|P_1x\| = \|P_1P_2x\| \leq \|P_1\| \cdot \|P_2x\| \leq \|P_2x\|$, $\forall x \in H$.

ii) \implies iii). $\forall x \in H$, $\langle P_1x, x \rangle = \|P_1x\|^2 \leq \|P_2x\|^2 = \langle P_2x, x \rangle \implies P_1 \leq P_2$.

iii) \implies iv). Sea $x \in N_2 = N(P_2)$. Entonces

$$P_2x = 0 \implies \|P_1x\|^2 = \langle P_1x, x \rangle \leq \langle P_2x, x \rangle = 0 \implies x \in N(P_1).$$

iv) \implies v). Es evidente pues M_i es el complemento ortogonal de N_i , $i = 1, 2$.

v) \implies i). $\forall x \in H$,

$$P_1x \in M_1 \implies P_1x \in M_2 \implies P_2(P_1x) = P_1x \implies P_2P_1 = P_1.$$

Como P_1 es autoadjunto, $P_1 = P_2P_1 = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2$. \diamond

Como aplicación se puede probar un resultado sobre diferencia de proyecciones.

6.6.- Teorema. Sean P_1, P_2 dos proyecciones definidas en H . Entonces:

- a) $P = P_2 - P_1$ es proyección si y sólo si $M_1 \subset M_2$, donde $M_i = P_i(H)$, $i = 1, 2$.
- b) Además, si $P = P_2 - P_1$ es proyección y $P(H) = M$, entonces M es el complemento ortogonal de M_1 en M_2 , $M = M_2 \ominus M_1$.

Demostración. a) Si $P = P_2 - P_1$ es proyección, $P = P^2$, es decir

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= P_2^2 - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1^2 = P_2 - P_2P_1 - P_1P_2 + P_1 \\ &\implies 2P_1 = P_1P_2 + P_2P_1. \quad (*) \end{aligned}$$

Multiplicando a derecha e izquierda por P_2 , tenemos

$$\begin{aligned} 2P_2P_1 &= P_2P_1P_2 + P_2P_1 \implies P_2P_1P_2 = P_2P_1, \\ 2P_1P_2 &= P_1P_2 + P_2P_1P_2 \implies P_2P_1P_2 = P_1P_2. \end{aligned}$$

Aplicando (*), resulta que $P_1 = P_2P_1P_2 = P_2P_1 = P_1P_2$.

Por el teorema anterior se deduce que $M_1 \subset M_2$.

Recíprocamente, si $M_1 \subset M_2$, de nuevo por el el teorema anterior $P_2P_1 = P_1P_2 = P_1$, de donde, invirtiendo el proceso anterior, P es idempotente. Además P es autoadjunto por serlo P_1 y P_2 .

b) Si $y \in M$, $y = Px = P_2x - P_1x$, como $M_1 \subset M_2$, $P_2P_1 = P_1$, de modo que

$$P_2y = P_2^2x - P_2P_1x = P_2x - P_1x = y \implies y \in M_2.$$

Por otra parte, como $P_1P_2 = P_1$,

$$P_1y = P_1P_2x - P_1^2x = P_1x - P_1x = 0 \implies y \in N(P_1) = M_1^\perp.$$

De lo anterior se deduce que $M \subset M_2 \cap M_1^\perp$. Veamos ahora la inclusión contraria.

Sea pues $v \in M_2 \cap M_1^\perp$;

$$Pv = (P_2 - P_1)v = P_2v - P_1v = v - 0 = v \implies v \in M. \quad \diamond$$

De los dos últimos teoremas se deduce un resultado básico sobre convergencia de sucesiones crecientes de proyecciones.

6.7.- Teorema. Sea $(P_n)_{n \geq 1}$ una sucesión creciente de proyecciones definidas en un espacio de Hilbert H . Entonces:

a) $(P_n)_{n \geq 1}$ converge en sentido fuerte a una proyección P definida en H .

b) P proyecta H sobre $P(H) = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n(H)}$.

c) El núcleo de P es $N(P) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(P_n)$.

Demostración. a) Sea $m < n$. Por hipótesis $P_m \leq P_n$, de donde $P_m(H) \subset P_n(H)$ y $P_n - P_m$ es una proyección. Entonces, $\forall x \in H$,

$$(*) \quad \|P_nx - P_mx\|^2 = \langle (P_n - P_m)x, x \rangle = \langle P_nx, x \rangle - \langle P_mx, x \rangle = \|P_nx\|^2 - \|P_mx\|^2.$$

Como $\|P_n\| \leq 1$, $\|P_nx\| \leq \|x\|$, $\forall n$. Es decir $(\|P_nx\|)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Como también es monótona creciente, es convergente. De (*) deducimos que $(P_nx)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y, como H es de Hilbert, existe $y \in H$

tal que $P_n x \rightarrow y$. Definimos el operador $P \in L(H)$ por $Px = y$, y probemos que P es una proyección:

$$\begin{aligned}\langle P^* x, y \rangle &= \langle x, Py \rangle = \langle x, \lim_n P_n y \rangle = \lim_n \langle x, P_n y \rangle = \lim_n \langle P_n x, y \rangle = \langle Px, y \rangle; \\ \langle P^2 x, x \rangle &= \langle Px, Px \rangle = \lim_n \langle P_n x P_n x \rangle = \lim_n \langle P_n x, x \rangle = \langle Px, x \rangle.\end{aligned}$$

b) Si $m < n$, $P_m \leq P_n$, de modo que $\langle (P_n - P_m)x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in H$. Haciendo $n \rightarrow \infty$, resulta $\langle (P - P_m)x, x \rangle \geq 0$, es decir $P_m \leq P$. Entonces $P_m(H) \subset P(H)$, $\forall m$. Esto prueba que $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m(H) \subset P(H)$; ahora bien, al ser $P(H) = N(I - P)$, $P(H)$ es cerrado, por lo que $\overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m(H)} \subset P(H)$.

Por otro lado, como $P_m x \in P_m(H) \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m(H)$ y $P_m x \rightarrow Px$, deducimos que $Px \in \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m(H)}$, de donde $P(H) \subset \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m(H)}$.

En definitiva, $P(H) = \overline{\bigcup_{m \in \mathbb{N}} P_m(H)}$.

c) De las relaciones $N(P) = P(H)^\perp \subset P_n(H)^\perp$, $\forall n$, se deduce que

$$N(P) \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} P_n(H)^\perp = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(P_n).$$

Por otro lado, si $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(P_n)$, $P_n x = 0$, $\forall n$, de donde $Px = 0$. Esto prueba que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} N(P_n) \subset N(P)$. \diamond

7. FUNCIONES DE OPERADORES ACOTADOS AUTOADJUNTOS.

En esta sección se introduce un cálculo funcional para un operador autoadjunto $T \in L(H)$ en un espacio de Hilbert H y se desarrollan los resultados fundamentales que constituyen las herramientas necesarias para probar el teorema espectral de operadores autoadjuntos, en la línea de las ideas mostradas por F. Riesz en 1934.

Dicho cálculo funcional consiste en estudiar las propiedades de la aplicación $f \mapsto f(T)$, definida en un espacio adecuado de funciones acotadas, como extensión de la aplicación natural $p \mapsto p(T)$, definida en el espacio de los polinomios con coeficientes reales y dominio en el intervalo $[m, M]$, donde $mI \leq T \leq MI$, y $m < M$.

Llamaremos

$$P = \{p : [m, M] \rightarrow \mathbb{R} : p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n, \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i\}$$

al espacio de los polinomios con coeficientes reales y denotaremos por P^+ al subespacio de P formado por los polinomios no negativos.

Si $p \in P$, escribiremos $p(T) = \alpha_0 I + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_n T^n$, que es autoadjunto. La aplicación $p \mapsto p(T)$ es lineal y multiplicativa, es decir $p(T) + q(T) = (p + q)(T)$, $(\lambda p)(T) = \lambda \cdot p(T)$ y $(pq)(T) = p(T)q(T)$, $\forall p, q \in P$. Del lema siguiente se deduce además que es monótona.

7.1.- Lema. *Si $p \in P^+$, entonces $p(T)$ es un operador positivo.*

Demostración. Basta probar que $\sigma(p(T)) \subset [0, \infty)$.

Por el teorema de la aplicación espectral, $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$. Como p es positivo, $p(\sigma(T)) \geq 0$. \diamond

Probaremos a continuación dos resultados que permitirán obtener la extensión deseada de la aplicación $p \mapsto p(T)$.

7.2.- Lema. *Sea $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P^+$, con $p_{n+1} \leq p_n$ para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $(p_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en sentido fuerte a un operador positivo.*

Demostración. Por el lema anterior, $0 \leq p_{n+1}(T) \leq p_n(T)$, $n \in \mathbb{N}$. Si aplicamos el teorema 5.5 a la sucesión $(-p_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$, deducimos que $(p_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en sentido fuerte a un operador autoadjunto S . Además,

$$\langle Sx, x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle p_n(T)x, x \rangle \geq 0,$$

es decir S es positivo. \diamond

7.3.- Lema. *Sean $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P^+$ sucesiones decrecientes y S_1, S_2 los límites fuertes de $(p_n(T))_{n \in \mathbb{N}}, (q_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$, respectivamente. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(t)$ para $m \leq t \leq M$, entonces $S_1 \leq S_2$.*

Demostración. Fijamos un entero positivo k . Para cada $t \in [m, M]$,

$$\lim_n (p_n(t) - q_k(t)) \leq \lim_n p_n(t) - \lim_n q_n(t) \leq 0.$$

Si llamamos $r_n = \max\{p_n - q_k, 0\}$, para $n \in \mathbb{N}$, entonces $\lim_n r_n(t) = 0$, $\forall t$. Además $r_{n+1} \leq r_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Por el teorema de Dini, la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente a 0 en $[m, M]$. Dado pues $\varepsilon > 0$, existe N tal que $0 \leq r_n(t) < \varepsilon$, $\forall t \in [m, M]$, $\forall n \geq N$. Esto implica que $p_n(t) - q_k(t) < \varepsilon$, $\forall t \in [m, M]$, $\forall n \geq N$.

Por el lema 7.1, $p_n(T) \leq q_k(T) + \varepsilon I$, $\forall n \geq N$. Entonces $S_1 \leq q_k(T) + \varepsilon I$. Como k es arbitrario, $S_1 \leq S_2 + \varepsilon I$ de donde $S_1 \leq S_2$. \diamond

7.4.- Definición. Denotaremos por L^+ al conjunto de funciones reales f definidas en el intervalo $[m, M]$ tales que existe una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P^+$ con las propiedades:

- a) $0 \leq p_{n+1} \leq p_n, n \in \mathbb{N}$.
- b) $\lim_n p_n(t) = f(t), \forall t \in [m, M]$.

Es claro que si $f \in L^+$, entonces f es acotada; definimos pues $f(T)$ como el operador positivo que es límite fuerte de $(p_n(T))_{n \in \mathbb{N}}$, donde $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P^+$ es una sucesión decreciente tal que $\lim_n p_n(t) = f(t), \forall t \in [m, M]$. Del lema anterior se deduce que $f(T)$ está bien definida.

Las propiedades de la aplicación $p \mapsto p(T)$ son también válidas en L^+ como se demuestra a continuación.

7.5.- Lema. Dado $f \in L^+$, la aplicación anterior $f \mapsto f(T)$ verifica:

- a) $(f + g)(T) = f(T) + g(T), \forall f, g \in L^+$.
- b) $(\alpha f)(T) = \alpha f(T), \forall f \in L^+, \alpha \geq 0$.
- c) $(fg)(T) = f(T)g(T), \forall f, g \in L^+$.
- d) $f \leq g \implies f(T) \leq g(T), \forall f, g \in L^+$.

Demostración. (a) Si $f(t) = \lim_n p_n(t), g(t) = \lim_n q_n(t)$, entonces $(f + g)(t) = \lim_n (p_n + q_n)(t)$ de donde

$$(f + g)(T) = \lim_n (p_n + q_n)(T) = \lim_n (p_n(T) + q_n(T)) = f(T) + g(T).$$

(b) Si $f(t) = \lim_n p_n(t)$,

$$(\alpha f)(t) = \lim_n (\alpha p_n)(t) \implies (\alpha f)(T) = \lim_n (\alpha p_n)(T) = \alpha \lim_n p_n(T).$$

(c) Si $f(t) = \lim_n p_n(t), g(t) = \lim_n q_n(t)$, con $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}, (q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset P^+$ decrecientes, entonces $p_{n+1}q_{n+1} \leq p_nq_n, \forall n$ y

$$\lim_n (p_nq_n)(t) = \lim_n p_n(t)q_n(t) = f(t)g(t) = (fg)(t), \forall t \in [m, M],$$

es decir $(fg)(T)$ es límite fuerte de $((p_nq_n)(T))_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces, $\forall x, y \in H$,

$$\begin{aligned} \langle (f(T)g(T))x, y \rangle &= \langle f(T)(g(T)x), y \rangle = \langle g(T)x, f(T)y \rangle \\ &= \lim_n \langle q_n(T)x, p_n(T)y \rangle = \lim_n \langle p_n(T)(q_n(T)x), y \rangle \\ &= \lim_n \langle (p_n(T)q_n(T))x, y \rangle = \lim_n \langle (p_nq_n)(T)x, y \rangle = \langle (fg)(T)x, y \rangle, \end{aligned}$$

de donde $f(T)g(T) = (fg)(T)$.

(d) Se deduce del lema 7.3. ◇

7.6.- Definición. Si denotamos por

$$L = \{f : [m, M] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ acotada y } f = f_1 - f_2 \text{ con } f_1, f_2 \in L^+\},$$

es también evidente que las funciones de L están acotadas y que $P \subset L$. Se prueba de forma análoga a la anterior que la aplicación $p \mapsto p(T)$ se puede extender a todo L de modo que se mantengan las propiedades de la misma. Para ello, dado $f \in L$, definimos $f(T) = f_1(T) - f_2(T)$, donde $f = f_1 - f_2$ con $f_1, f_2 \in L^+$; es claro que $f(T)$ es un operador autoadjunto, que la definición no depende de la descomposición de f y coincide con la definición 7.4 en el caso particular de que $f \in L^+$.

7.7.- Teorema. *La aplicación anterior también es lineal y verifica:*

$$a) (fg)(T) = f(T)g(T), \quad \forall f, g \in L.$$

$$b) f \leq g \implies f(T) \leq g(T), \quad \forall f, g \in L.$$

La demostración es directa a partir del lema 7.5.

8. TEOREMA ESPECTRAL DE OPERADORES AUTOADJUNTOS.

Como ya hemos indicado, vamos a desarrollar una versión del teorema espectral con ayuda del cálculo funcional comentado en la sección anterior. Al igual que antes, T será un operador lineal acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert H , $m, M \in \mathbb{R}$ son números tales que $mI \leq T \leq MI$ y $m < M$. El objetivo es aproximar T por combinaciones lineales de proyecciones ortogonales sobre H , obtenidas por un cálculo funcional. Para ello, definimos para cada $s \in \mathbb{R}$ una función $e_s : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ por:

- Si $s < m$, $e_s = 0$.

- Si $m \leq s < M$, $e_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq t \leq s, \\ 0 & \text{si } s < t \leq M. \end{cases}$

- Si $s \geq M$, $e_s = 1$.

8.1.- Lema. *Para todo $s \in \mathbb{R}$, $e_s \in L^+$.*

Esto permite definir para cada $t \in \mathbb{R}$ un operador positivo por $E(t) = e_t(T)$.

Demostración. Si $s < m$ ó $s \geq M$, es evidente.

Sea pues $m \leq s < M$ y denotamos por N al menor entero positivo tal que $s + N^{-1} \leq M$.

Para $n \geq N$, sea $f_n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq t \leq s, \\ -nt + ns + 1 & \text{si } s < t < s + 1/n, \\ 0 & \text{si } s + 1/n \leq t \leq M. \end{cases}$ Es fácil ver

que f_n es continua y que $\lim_n f_n(t) = e_s(t)$, $\forall t \in [m, M]$. También es claro que $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ para $n \geq N$.

Por el teorema de aproximación de Weierstrass, existe una sucesión $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polinomios tal que, para $n \geq N$:

$$f_n(t) + 2^{-n-1} < p_n(t) < f_n(t) + 2^{-n}, \quad \forall t \in [m, M].$$

De este modo, $p_n \in P^+$, $p_{n+1} \leq p_n$, para $n \geq N$, y $\lim_n p_n(t) = e_s(t)$, $\forall t \in [m, M]$. Esto implica que $e_s \in L^+$. \diamond

8.2.- Lema. Para todo $t \in \mathbb{R}$, $E(t)$ es una proyección ortogonal en H que conmuta con T . Además

a) $E(s) \leq E(t)$, para $s \leq t$.

b) $E(t) = 0$, para $t < m$.

c) $E(t) = I$, para $t \geq M$.

Demostración. Es consecuencia del lema 7.5 y del hecho de que $e_t^2 = e_t$, $e_s \leq e_t$ cuando $s \leq t$, $e_t = 0$ para $t < m$ y $e_t = 1$ para $t \geq M$. \diamond

Una aplicación $E : \mathbb{R} \rightarrow L(H)$ que cumple las condiciones a), b) y c) del lema anterior recibe el nombre de *resolución de la identidad* o *descomposición de la unidad*.

Sugeridos por la integral de Riemann-Stieltjes, damos sentido al siguiente concepto.

8.3.- Definición. Dados $m, M \in \mathbb{R}$ con $m < M$ y $E : \mathbb{R} \rightarrow L(H)$ una resolución de la identidad, diremos que una función $f : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ es *E-integrable* cuando existe un operador autoadjunto S tal que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left\| S - \sum_{k=1}^n f(t_k)[E(s_k) - E(s_{k-1})] \right\| < \varepsilon$$

para cualquier partición $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ de $[m, M]$ de diámetro menor que δ (es decir, con $s_k - s_{k-1} < \delta$, $\forall k = 1, 2, \dots, n$) y cualesquiera t_1, \dots, t_n con $s_{k-1} \leq t_k \leq s_k$, $k = 1, \dots, n$.

Es claro que si f es *E-integrable*, sólo existe un operador autoadjunto S que verifica la definición. Bajo estas condiciones, escribiremos $S = \int_m^M f(t) dE(t)$.

8.4.- Teorema (espectral). *En las condiciones y notación anteriores, dados $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < m$ y $b \geq M$, la aplicación identidad $I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es E -integrable y $T = \int_a^b t dE(t)$.*

Demostración. Si $s, u \in \mathbb{R}$ con $s < u$, entonces

$$e_u(t) - e_s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in (s, u] \cap [m, M], \\ 0 & \text{si } t \in [m, M] \setminus (s, u]. \end{cases}$$

Por lo tanto, $s(e_u(t) - e_s(t)) \leq t(e_u(t) - e_s(t)) \leq u(e_u(t) - e_s(t))$, $\forall t \in [m, M]$, de donde

$$s(E(u) - E(s)) \leq T(E(u) - E(s)) \leq u(E(u) - E(s)).$$

Sean ahora $\varepsilon > 0$ y $\{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ una partición de $[a, b]$ de diámetro menor que ε . Tenemos

$$\sum_{k=1}^n s_{k-1}(E(s_k) - E(s_{k-1})) \leq T \sum_{k=1}^n (E(s_k) - E(s_{k-1})) \leq \sum_{k=1}^n s_k(E(s_k) - E(s_{k-1})).$$

Como $\sum_{k=1}^n (E(s_k) - E(s_{k-1})) = E(b) - E(a) = I$, si ahora t_1, \dots, t_n son números reales tales que $s_{k-1} \leq t_k \leq s_k$, obtenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (s_{k-1} - t_k)(E(s_k) - E(s_{k-1})) &\leq T - \sum_{k=1}^n t_k(E(s_k) - E(s_{k-1})) \\ &\leq \sum_{k=1}^n (s_k - t_k)(E(s_k) - E(s_{k-1})). \end{aligned}$$

Como $s_{k-1} - t_k > -\varepsilon$ y $s_k - t_k < \varepsilon$ y debido a que $E(s_k) - E(s_{k-1}) \geq 0$, resulta que

$$\begin{aligned} -\varepsilon \sum_{k=1}^n (E(s_k) - E(s_{k-1})) &= -\varepsilon I \leq T - \sum_{k=1}^n t_k(E(s_k) - E(s_{k-1})) \\ &\leq \varepsilon I = \varepsilon \sum_{k=1}^n (E(s_k) - E(s_{k-1})). \end{aligned}$$

Esto prueba que $T = \int_a^b t dE(t)$. \diamond

Recordamos que, si T es además compacto, las proyecciones ortogonales $E(t)$ tienen una forma especialmente simple, lo que lleva de nuevo al teorema demostrado en la sección 4.

El teorema espectral es una herramienta útil en el estudio de operadores lineales acotados en espacios de Hilbert, pues permite reducir cuestiones

sobre cierto tipo de operadores a cuestiones similares sobre proyecciones ortogonales.

9. TEOREMA ESPECTRAL DE OPERADORES AUTOADJUNTOS: SEGUNDA VERSIÓN.

Recordamos que nuestro objetivo es obtener una representación de operadores acotados autoadjuntos en un espacio de Hilbert en términos de operadores más simples (como son las proyecciones) cuyas propiedades son más fáciles de determinar y las mismas dan información sobre el operador de partida. Dicha representación recibirá el nombre de *representación espectral* y la familia de proyecciones asociada se llamará *familia espectral* o *descomposición de la unidad*. El uso de esta representación para el caso de dimensión finita servirá de motivación para obtener la generalización a este caso.

Sea pues H un espacio de Hilbert complejo de dimensión infinita. Recordamos que, si $T \in L(H)$ es un operador autoadjunto y compacto, el conjunto de autovalores $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ es finito o numerable, cuyo único posible punto de acumulación es el cero. Si P_λ representa la proyección ortogonal sobre $N(T - \lambda I)$, definimos, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, $E_\lambda = \sum_{\lambda_i \leq \lambda} P_{\lambda_i}$. Por la proposición 3.8, E_λ es la proyección ortogonal sobre el espacio generado por los autovalores correspondientes a autovalores $\lambda_i \leq \lambda$. Además, se prueba fácilmente que

$$\begin{aligned} E_\lambda E_\mu &= E_\mu E_\lambda = E_\lambda \text{ si } \lambda < \mu; \\ E_\lambda &= 0 \text{ si } \lambda < m \text{ y } E_\lambda = I \text{ si } \lambda \geq M; \\ E_{\lambda+} &= \lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} E_\mu = E_\lambda. \end{aligned}$$

Lo anterior sugiere la siguiente definición.

9.1.- Definición. Una *familia espectral real* o *descomposición de la unidad* es una familia uniparamétrica de proyecciones $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ definidas en un espacio de Hilbert H y que verifica las propiedades:

- (1) $E_\lambda \leq E_\mu$ si $\lambda < \mu$;
- (2) $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda x = 0$ y $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda x = x$;
- (3) $\lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} E_\mu x = E_\lambda x$, $\forall x \in H$.

La familia $(E_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es *familia espectral del intervalo* $[a, b]$ si $E_\lambda = 0$ para $\lambda < a$ y $E_\lambda = I$ para $\lambda \geq b$. Estas familias tendrán un interés especial

pues el espectro de operadores acotados autoadjuntos es un intervalo real finito.

Más adelante veremos que a todo operador acotado autoadjunto se le puede asociar una familia espectral que permitirá representar el operador mediante una integral de Riemann-Stieltjes (y se llamará *representación espectral* del operador) generalizando lo obtenido en casos anteriores.

9.2.- Lema. Sea H un espacio de Hilbert complejo y $A, B \in L(H)$ operadores autoadjuntos tales que $AB = BA$ y $A^2 = B^2$. Si llamamos Q a la proyección ortogonal de H sobre $N(A + B)$, entonces:

a) Todo operador $C \in L(H)$ que conmuta con $A + B$ conmuta también con Q .

b) Si $Ax = 0$, entonces $Qx = x$.

c) $A = (I - 2Q)B$.

Demostración. a) Sea $x \in H$; entonces $CQx \in N(A + B)$ pues, debido a que $Qx \in N(A + B)$, $(A + B)CQx = C(A + B)Qx = 0$.

Por tanto, $QCQx = CQx$.

Análogamente, se prueba que $QC^*Qx = C^*Qx$, $\forall x \in H$.

Deducimos así que $QC = (C^*Q)^* = (QC^*Q)^* = QCQ = CQ$.

b) Supongamos que $Ax = 0$. Entonces

$$\|Bx\|^2 = \langle Bx, Bx \rangle = \langle B^2x, x \rangle = \langle A^2x, x \rangle = \|A^2x\|^2 = 0.$$

Por tanto, $Bx = 0$, con lo que $(A + B)x = 0$, es decir $x \in N(A + B)$. Por definición de Q , $Qx = x$.

c) Por último, como $A^2 = B^2$,

$$(A + B)(A - B)x = (A^2 - B^2)x = 0, \quad \forall x \in H,$$

de donde $(A - B)x \in N(A + B)$, es decir $Q(A - B)x = (A - B)x$, $\forall x \in H$.

Como, por otra parte, $Q(A + B) = (A + B)Q$ y $Qx \in N(A + B)$, $\forall x \in H$, resulta que $Q(A + B)x = (A + B)Qx = 0$.

De las relaciones $QA + QB = 0$ y $QA - QB = A - B$, deducimos que $2QB = B - A$, es decir $A = (I - 2Q)B$. \diamond

9.3.- Teorema. Si $A \in L(H)$ es autoadjunto, existe un proyector E_- tal que

a) todo $C \in L(H)$ que conmuta con A conmuta también con E_- ;

$$b) Ax = 0 \implies E_-x = x;$$

$$c) A(I - E_-) \geq 0, -AE_- \geq 0.$$

Demostración. a) Definimos E_- como la proyección sobre $N(A + B)$, donde B es la raíz cuadrada positiva de A^2 . Si C conmuta con A , conmuta con A^2 y, por tanto, con B . Por el lema anterior se deduce a).

b) Se deduce también del lema anterior.

c) Teniendo en cuenta el apartado c) del lema anterior, resulta:

$$\begin{aligned} A(I - E_-) &= B - 2E_-B - BE_- + 2E_-BE_- = B - BE_- = B(I - E_-) \geq 0, \\ -AE_- &= -BE_- + 2E_-BE_- = BE_- \geq 0, \end{aligned}$$

pues la composición de dos operadores positivos que conmutan es un operador positivo. \diamond

9.4.- Definición. Dado $A \in L(H)$ autoadjunto, los operadores positivos $A_+ = A(I - E_-)$ y $A_- = -AE_-$ reciben el nombre de *parte positiva* y *parte negativa* de A , respectivamente. Del teorema anterior se deduce que

$$A_+ = \frac{1}{2}(A + B), \quad A_- = \frac{1}{2}(B - A),$$

así como $A = A_+ - A_-$.

Ejemplos. 1) Sea A una matriz simétrica de orden n y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ el conjunto de sus autovalores ordenados de modo que $\lambda_1, \dots, \lambda_k < 0$ y $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n > 0$. Es conocido el hecho de que A es unitariamente equivalente a la matriz diagonal formada por los autovalores, $A = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) U^{-1}$. En este caso, $A_+ = U \operatorname{diag}(0, \dots, 0, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) U^{-1}$ y $A_- = U \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0, \dots, 0) U^{-1}$.

2) Sea $A \in L(L^2[-1, 1])$ el operador definido por $Ax(t) = tx(t)$. Entonces $A_+x(t) = (1/2)(t + |t|)x(t)$ y $A_-x(t) = (1/2)(|t| - t)x(t)$.

9.5.- Lema. Sea $A \in L(H)$ autoadjunto y llamemos E a la proyección ortogonal sobre $N(A_+)$. Entonces

$$a) A_+E = EA_+ = 0.$$

$$b) A_-E = EA_- = A_-.$$

$$c) AE = EA = -A_-, (I - E)A = A(I - E) = A_+.$$

Demostración. a) Por definición, $Ex \in N(A_+)$, $\forall x \in H$. Entonces $A_+E = 0$. Además, $EA_+ = (A_+E)^* = 0^* = 0$.

b) Como

$$A_+A_- = \frac{1}{4}(B + A)(B - A) = \frac{1}{4}(B^2 - A^2) = 0,$$

entonces $A_-x \in N(A_+)$, lo que implica que $EA_-x = A_-x$. Además,

$$A_-E = (EA_-)^* = A_-^* = A_-.$$

c) Como $A = A_+ - A_-$,

$$\begin{aligned} AE &= A_+E - A_-E = -A_-, \\ (I - E)A &= A - AE = A + A_- = A_+. \quad \diamond \end{aligned}$$

9.6.- Definición. Dado $A \in L(H)$, se llama *valor absoluto de A* al operador $|A| = A_+ + A_-$.

Del lema anterior se deduce que

$$E|A| = |A|E = A_- \text{ e } (I - E)|A| = A_+.$$

Es evidente también que

$$|A| \geq A, \quad |A| \geq -A, \quad A_+ \geq A, \quad A_- \geq -A.$$

Estas acotaciones son óptimas en el sentido que indican los resultados siguientes.

9.7.- Lema. Con los datos anteriores, $|A|$ es el menor operador autoadjunto que conmuta con A y es cota superior de A y $-A$.

Demostración. Debemos probar que, si $C \in L(H)$ es un operador autoadjunto tal que $CA = AC$, $C \geq A$ y $C \geq -A$, entonces $C \geq |A|$.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} C \geq A &\implies C(I - E) \geq A(I - E) = A_+, \\ C \geq -A &\implies CE \geq -AE = A_-. \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, deducimos que $C \geq A_+ + A_- = |A|$. \diamond

9.8.- Corolario. Si $A \in L(H)$ es autoadjunto, entonces A_+ y A_- son los menores operadores positivos que conmutan con A y son cotas superiores de A y $-A$, respectivamente.

Demostración. En el lema anterior se probó que $C(I - E) \geq A_+$. Además, si $C \geq 0$, entonces $CE \geq 0$. Por tanto, $C \geq A_+ + CE \geq A_+$.

Análogamente se procede con el otro caso. \diamond

Estamos ya en condiciones de probar el teorema espectral de operadores autoadjuntos.

9.9.- Teorema. Sea $A \in L(H)$ autoadjunto. Existe entonces una descomposición de la unidad $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ tal que $A = \int_a^b \lambda dE_\lambda$, donde $a < m < M \leq b$.

Demostración. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, llamamos $A_\lambda = A - \lambda I$.

Si $\lambda < \mu$, es evidente que $A_\mu \leq A_\lambda \leq A_\lambda^+$. Como $A_\lambda^+ \geq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, por el corolario 9.8 deducimos que $A_\mu^+ \leq A_\lambda^+$.

En particular, si $\lambda < m$, como $A_\lambda \geq 0$, entonces $A_\lambda^+ = A_\lambda \geq (m - \lambda)I$ y, si $\lambda \geq M$, entonces $A_\lambda \leq 0$, de donde $A_\lambda^+ = 0$.

- (•) Llamamos ahora $M_\lambda = N(A_\lambda^+)$. Así definidos, $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una familia creciente de subespacios tal que $M_\lambda = \{0\}$ si $\lambda < m$ y $M_\lambda = H$ si $\lambda \geq M$.

En efecto, si $\lambda < \mu$,

$$A_\mu^+ \leq A_\lambda^+ \implies (A_\mu^+)^2 \leq A_\lambda^+ A_\mu^+ \implies \|A_\mu^+ x\|^2 \leq \langle A_\lambda^+ A_\mu^+ x, x \rangle, \quad \forall x \in H.$$

En particular, si $x \in M_\lambda$, entonces $\|A_\mu^+ x\|^2 = 0$, es decir $x \in M_\mu$.

- (•) Definimos ahora E_λ como la proyección ortogonal sobre M_λ . Así, $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una familia creciente de operadores, tal que

$$E_\lambda = 0 \text{ si } \lambda < m \text{ y } E_\lambda = I \text{ si } \lambda \geq M.$$

- (•) Para $\lambda < \mu$, definimos $E_{\lambda\mu} = E_\mu - E_\lambda$. Entonces

$$\begin{aligned} E_\mu E_{\lambda\mu} &= E_\mu - E_\mu E_\lambda = E_\mu - E_\lambda = E_{\lambda\mu}, \\ (I - E_\lambda) E_{\lambda\mu} &= E_{\lambda\mu} - E_\lambda E_{\lambda\mu} + (E_\lambda)^2 = E_{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Como A_λ^+ , A_μ^+ y $E_{\lambda\mu}$ son operadores positivos y conmutan, entonces

$$\begin{aligned} (\mu I - A) E_{\lambda\mu} &= -A_\mu E_{\lambda\mu} = -A_\mu E_\mu E_{\lambda\mu} = A_\mu^- E_{\lambda\mu} \geq 0, \\ (A - \lambda I) E_{\lambda\mu} &= A_\lambda E_{\lambda\mu} = A_\lambda (I - E_\lambda) E_{\lambda\mu} = A_\lambda^+ E_{\lambda\mu} \geq 0, \end{aligned}$$

o bien

$$(*) \quad \lambda E_{\lambda\mu} \leq A E_{\lambda\mu} \leq \mu E_{\lambda\mu}.$$

- (•) Sea ahora el conjunto $\{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$ tal que

$$a = \mu_0 < m < \mu_1 < \dots < \mu_{n-1} < M \leq \mu_n = b$$

y escribimos la desigualdad (*) para cada par de puntos consecutivos. Llegamos así a

$$\sum_{k=1}^n \mu_{k-1} E_{\mu_{k-1}\mu_k} \leq A \sum_{k=1}^n E_{\mu_{k-1}\mu_k} \leq \sum_{k=1}^n \mu_k E_{\mu_{k-1}\mu_k}.$$

Si $\max_{1 \leq k \leq n} (\mu_k - \mu_{k-1}) \leq \varepsilon$, la diferencia entre los extremos es menor o igual que εI . Además, el término central es A . Eligiendo pues cualquier $\lambda_k \in (\mu_{k-1}, \mu_k)$, $1 \leq k \leq n$, obtenemos:

$$\left\| A - \sum_{k=1}^n \lambda_k (E_{\mu_k} - E_{\mu_{k-1}}) \right\| \leq \varepsilon,$$

lo cual escribimos como $A = \int_a^b \lambda dE_\lambda$, o bien, como $A = \int_{m^-}^M \lambda dE_\lambda$.

- (•) Queda únicamente probar que $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es continua por la derecha, como función de λ , es decir $P_\lambda = \lim_{\mu \rightarrow \lambda^+} E_{\lambda\mu} = 0$.

Tomando límites en la desigualdad (*), obtenemos que $\lambda P_\lambda \leq AP_\lambda \leq \lambda P_\lambda$, de donde $AP_\lambda = \lambda P_\lambda$ o bien $A_\lambda P_\lambda = 0$.

Como $A_\lambda^+ P_\lambda = (I - E_\lambda) A_\lambda P_\lambda = 0$, entonces $P_\lambda x \in M_\lambda$, $\forall x \in H$, de donde $E_\lambda P_\lambda = P_\lambda$.

Análogamente, de $(I - E_\lambda) E_{\lambda\mu} = E_{\lambda\mu}$, se obtiene que $(I - E_\lambda) P_\lambda = P_\lambda$, de donde $P_\lambda - E_\lambda P_\lambda = 0 = P_\lambda$. \diamond

Observación. Como la convergencia uniforme implica la convergencia fuerte y la convergencia débil, del teorema anterior se deducen también las fórmulas $Ax = \int_{m^-}^M \lambda dE_\lambda x$ y $\langle Ax, x \rangle = \int_{m^-}^M \lambda d\langle E_\lambda x, x \rangle$, $\forall x \in H$.

Ejemplos. 1) Sea $A = U \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) U^{-1}$ una matriz simétrica de orden n , donde $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ y sea e_i un vector propio asociado al autovalor λ_i . Entonces, si $t \in [\lambda_i, \lambda_{i+1})$, el operador E_t es un proyector sobre el subespacio de dimensión i generado por e_1, e_2, \dots, e_i . Si $t < \lambda_1$, $E_t = 0$ y si $t \geq \lambda_n$, $E_t = I$.

2) Si $A : L^2[-1, 1] \rightarrow L^2[-1, 1]$ es el operador definido por $Af(x) = xf(x)$, entonces $E_t f(x) = \phi_t(x)$ donde $\phi_t(x) = 0$ para $x > t$ y $\phi_t(x) = 1$ para $x \leq t$. Es evidente que $E_t = 0$ si $t < -1$ y $E_t = I$ si $t > 1$.

EJERCICIOS.

1. Sea $M : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ el operador definido por $(Mf)(x) = e^{ix}f(x)$. Probar que M es unitario, que no tiene valores propios y sin embargo, $\sigma(M) = \mathbb{T}$.

Resp.: Veamos en primer lugar que M es isometría: si $f \in L^2(\mathbb{R})$, entonces

$$\|Mf\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |Mf(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |e^{ix}|^2 |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \|f\|^2.$$

Además M es sobre:

$$M(e^{-ix}f(x)) = f(x) \implies (M^{-1}f)(x) = e^{-ix}f(x).$$

Para probar que M no tiene autovalores, supongamos que, para algún $\lambda \in \mathbb{C}$, existe $f_\lambda \in L^2(\mathbb{R})$ no nula tal que $Mf_\lambda = \lambda f_\lambda$. Esto equivale a la igualdad $e^{ix}f_\lambda(x) = \lambda f_\lambda(x)$ c.s. En los puntos x tales que $f_\lambda(x) \neq 0$, debe ser $e^{ix} = \lambda$, igualdad que sólo es posible a lo sumo en un conjunto numerable. Así pues, $f_\lambda(x) = 0$ c.s., es decir $\|f_\lambda\| = 0$ y M no tiene autovalores.

Para calcular el espectro de M , resolvemos la ecuación $(M - \rho I)f = g$. Resulta así:

$$(e^{ix} - \rho)f(x) = g(x) \text{ c.s.} \implies f(x) = \frac{1}{e^{ix} - \rho}g(x) \text{ c.s.}$$

con lo que $[(M - \rho I)^{-1}g](x) = \frac{1}{e^{ix} - \rho}g(x)$ define un operador lineal. Veamos bajo qué condiciones $(M - \rho I)^{-1}g \in L^2(\mathbb{R})$, $\forall g \in L^2(\mathbb{R})$.

Si $|e^{ix} - \rho|^{-1} \leq c$ c.s., entonces

$$\|(M - \rho I)^{-1}g\|^2 \leq c^2 \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = c^2 \|g\|^2 \implies \|(M - \rho I)^{-1}\| \leq c$$

por lo que $(M - \rho I)^{-1}$ es acotado.

Ahora bien, si $|\rho| \neq 1$, entonces $|e^{ix} - \rho|^{-1} \leq c$ c.s., lo que prueba que $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T} \subset \rho(M)$.

Por el contrario, si $|\rho| = 1$, $\rho = e^{ix_0}$, veamos que el operador

$$[(M - \rho I)^{-1}g](x) = \frac{1}{e^{ix} - e^{ix_0}}g(x) \text{ c.s.}$$

no es acotado en $L^2(\mathbb{R})$. Para ello, sea $\varepsilon > 0$ arbitrario; existe entonces $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta \implies |e^{ix} - e^{ix_0}| < \varepsilon.$$

Si llamamos g a la función característica de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces

$$\|g\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 dx = 2\delta \text{ y } \|(m - \rho I)^{-1}g\| > \frac{\sqrt{2\delta}}{\varepsilon} = \frac{\|g\|}{\varepsilon},$$

lo que implica que $\|(M - \rho I)^{-1}\| > 1/\varepsilon$. Al ser cierta esta desigualdad para cualquier $\varepsilon > 0$, se deduce que $(M - \rho I)^{-1}$ no está acotado.

En definitiva, resulta que $\sigma(M) = \mathbb{T}$.



2. Sea H un espacio de Hilbert. Probar que un operador $A \in L(H)$ es compacto si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon \text{ de rango finito} : \|A - A_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Resp.: Supongamos que A es compacto. Si llamamos B a la bola unidad en H , $A(B)$ es relativamente compacto. Por tanto, se puede recubrir con una familia finita de bolas de centro b_i y radio ε , $A(B) \subset \bigcup_{i=1}^n B(b_i, \varepsilon)$. Sea $M = \langle \{b_1, \dots, b_n\} \rangle$ y P la proyección ortogonal sobre M . Así, PA tiene rango finito. Además, $\forall x \in B$, $Ax \in B(b_i, \varepsilon)$, de donde $d(Ax, M) < \varepsilon$, lo que implica que $\|Ax - PAx\| < \varepsilon$, y esto a su vez que $\|A - PA\| \leq \varepsilon$. Basta llamar $A_\varepsilon = PA$ para probar la tesis.

El recíproco es evidente pues A es límite de una sucesión de operadores de rango finito.



3. Sea $M_\varphi : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ el operador de multiplicación definido por $M_\varphi f = \varphi \cdot f$.

a) Probar que M_φ es acotado si y sólo si $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$.

b) Probar que $\sigma_r(M_\varphi) = \emptyset$, $\sigma_p(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : m(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$, $\rho(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists k > 0, |\lambda - \varphi(x)| \geq k \text{ c.s.}\}$.

Resp.: a) Supongamos que $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R})$. Entonces

$$\|M_\varphi\| = \sup_{\|f\|_2=1} \|\varphi f\|_2 = \sup_{\|f\|_2=1} \left(\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \|\varphi\|_\infty < \infty.$$

Recíprocamente, si $\varphi \notin L^\infty(\mathbb{R})$, entonces $\forall k > 0, \exists A_k \subset \mathbb{R}$ medible y acotado tal que $m(A_k) > 0$ y $\varphi(x) > k, \forall x \in A_k$. Si definimos

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A_k \\ 0 & \text{si } x \notin A_k, \end{cases} \text{ entonces}$$

$$\|M_\varphi f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^2 \cdot |f(x)|^2 dx = \int_{A_k} |\varphi(x)|^2 dx > k^2 \cdot m(A_k) = k^2 \cdot \|f\|_2^2$$

de lo que se deduce que M_φ no es acotado.

b) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$; por definición,

$$\lambda \in \sigma_p(M_\varphi) \iff \exists f \neq 0 : M_\varphi f = \lambda f \iff \exists f \neq 0 : (\varphi(x) - \lambda)f(x) = 0 \text{ c.s.}$$

Como $f \neq 0$, lo anterior es equivalente a la existencia de un conjunto $\Delta \subset \mathbb{R}$ medible, con $m(\Delta) > 0$, tal que $\varphi(x) = \lambda, \forall x \in \Delta$, es decir, que $m(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0$. Un vector propio asociado al autovalor λ es $f = 1_\Delta$.

Para calcular el conjunto resolvente, recordemos que $\lambda \in \rho(M_\varphi)$ si y sólo si $\exists (M_\varphi - \lambda I)^{-1}$ acotado. Ahora bien, $g \in R(M_\varphi - \lambda I)$ si $\exists f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\varphi f - \lambda f = g$ c.s. o bien, si $f(x) = \frac{g(x)}{\varphi(x) - \lambda}$ c.s. (siempre que $\varphi(x) \neq \lambda$ c.s.)

Por tanto, existe $(M_\varphi - \lambda I)^{-1}f(x) = \frac{1}{\varphi(x) - \lambda}f(x)$ si $\varphi(x) \neq \lambda$ c.s. Además,

$$(M_\varphi - \lambda I)^{-1}f \in L^2(\mathbb{R}), \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \iff \exists k > 0 : |\lambda - \varphi(x)| \geq k \text{ c.s.}$$

En este caso, $\|(M_\varphi - \lambda I)^{-1}f\| \leq k^{-1}\|f\|$. Así pues,

$$\rho(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists k > 0 : |\lambda - \varphi(x)| \geq k \text{ c.s.}\}.$$

Por último, para probar que $\sigma_r(M_\varphi) = \emptyset$, veamos que M_φ es normal:

Debido a que

$$\langle M_\varphi f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\varphi(x) g(x)} dx = \langle f, M_{\overline{\varphi}} g \rangle,$$

resulta que $(M_\varphi)^* = M_{\overline{\varphi}}$.

Como además $(M_\varphi M_\psi)f = M_\varphi(\psi \cdot f) = \varphi \cdot \psi \cdot f = M_{\varphi\psi}f, \forall f \in L^2(\mathbb{R})$, deducimos que

$$M_\varphi(M_\varphi)^* = M_\varphi M_{\overline{\varphi}} = M_{|\varphi|^2} = (M_\varphi)^* M_\varphi,$$

es decir M_φ es un operador normal. Basta aplicar el teorema 2.6 para concluir que $\sigma_r(M_\varphi) = \emptyset$.



4. Sea H un espacio de Hilbert y S, T, U, V operadores autoadjuntos. Probar:

a) $S \leq T, U \leq V \implies S + U \leq T + V.$

b) $S \leq T, T \leq U \implies S \leq U.$

c) $S \geq 0, \exists S^{-1} \implies S^{-1} \geq 0.$

Resp.: Los apartados a) y b) son triviales. Para probar c), sea $y \in R(S)$ y llamemos $x = S^{-1}y$. Por ser S autoadjunto,

$$\langle S^{-1}y, y \rangle = \langle x, Sx \rangle = \langle Sx, x \rangle \geq 0.$$



5. Sea $A \in L(H)$ un operador autoadjunto. Probar:

a) $\|A\| \leq a \iff -aI \leq A \leq aI.$

b) Si $A \geq 0$, entonces $|\langle Ax, y \rangle|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \cdot \langle Ay, y \rangle, \forall x, y \in H.$

c) Si $A \geq 0$, entonces $\|Ax\|^2 \leq \|A\| \cdot \langle Ax, x \rangle, \forall x \in H.$

Resp.: a) Por una parte,

$$\begin{aligned} \|A\| \leq a &\implies |\langle Ax, x \rangle| \leq a, \forall x \in H \text{ con } \|x\| = 1 \\ &\implies -a \leq \langle Ax, x \rangle \leq a \implies \langle -ax, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \leq \langle ax, x \rangle. \end{aligned}$$

Sea $z \in H, z \neq 0$, y llamamos $x = z/\|z\|$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle -az, z \rangle &= \|z\|^2 \langle -ax, x \rangle \leq \|z\|^2 \langle Ax, x \rangle = \langle Az, z \rangle \\ &\leq \|z\|^2 \langle Ax, x \rangle = \langle az, z \rangle \implies -aI \leq A \leq aI. \end{aligned}$$

Recíprocamente, $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x \rangle| \leq \sup_{\|x\|=1} \langle ax, x \rangle = a.$

b) Si definimos la forma sesquilineal $f(x, y) = \langle Ax, y \rangle$, la desigualdad buscada se reduce a la desigualdad de Cauchy-Schwarz generalizada probada en el capítulo III (proposición 6.12).

c) Si en el apartado anterior hacemos $y = Ax$, obtenemos:

$$|\langle Ax, Ax \rangle|^2 \leq \langle Ax, x \rangle \cdot \langle A^2x, Ax \rangle.$$

Ahora bien, de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos la acotación

$$\langle A^2x, Ax \rangle \leq \|A^2x\| \cdot \|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|Ax\|^2,$$

lo que, al sustituir en la desigualdad anterior, da lugar al resultado propuesto.



6. Sea H un espacio de Hilbert y sean $\{A_n\}_{n \geq 1}$ y B operadores acotados y autoadjuntos en H tales que $A_1 \leq A_2 \leq \dots \leq B$.

a) Verificar que

$$\|A_nx - A_mx\|^4 \leq |\langle A_nx, x \rangle - \langle A_mx, x \rangle| \cdot (\|A_n\| + \|A_m\|)^3 \cdot \|x\|^2.$$

b) Deducir que existe un operador autoadjunto $A \in L(H)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_nx = Ax, \quad \forall x \in H.$$

Resp.: a) Para $n > m$, llamamos $A_{nm} = A_n - A_m$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|A_nx - A_mx\|^4 &= |\langle A_nx - A_mx, A_nx - A_mx \rangle|^2 = |\langle A_{nm}x, A_{nm}x \rangle|^2 \\ &\leq \langle A_{nm}x, x \rangle \cdot \langle A_{nm}A_{nm}x, A_{nm}x \rangle \quad (\text{por el ejercicio anterior}) \\ &\leq \langle A_{nm}x, x \rangle \cdot \|A_{nm}\| \cdot \|A_{nm}x\|^2 \\ &\leq |\langle A_nx, x \rangle - \langle A_mx, x \rangle| \cdot (\|A_n\| + \|A_m\|)^3 \cdot \|x\|^2. \end{aligned}$$

b) Para cada $x \in H$, la sucesión numérica $\{\langle A_nx, x \rangle\}_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente y acotada pues $\langle A_mx, x \rangle \leq \langle A_nx, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$, $\forall m < n$. Por tanto, es una sucesión de Cauchy, es decir $|\langle A_nx, x \rangle - \langle A_mx, x \rangle| \rightarrow 0$ si $m, n \rightarrow \infty$. Aplicando la desigualdad obtenida en el apartado a), deducimos que

$$\|A_nx - A_mx\| \rightarrow 0 \text{ si } m, n \rightarrow \infty.$$

Como H es completo, la sucesión $\{A_nx\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge y podemos definir el operador $A \in L(H)$ por $Ax = \lim_{n \rightarrow \infty} A_nx$, $\forall x \in H$. Como $\langle A_1x, x \rangle \leq \langle Ax, x \rangle \leq \langle Bx, x \rangle$, $\forall x \in H$, entonces $A \leq B$. Además A es autoadjunto, pues

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \left\langle \lim_{n \rightarrow \infty} A_nx, y \right\rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_nx, y \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle x, A_ny \rangle = \langle x, \lim_{n \rightarrow \infty} A_ny \rangle = \langle x, Ay \rangle. \end{aligned}$$



7. Sea $T \in L(H)$. Probar que T es invertible si y sólo si las cotas inferiores $\inf_{\|x\|=1} \langle (T^*T)x, x \rangle$ e $\inf_{\|x\|=1} \langle (TT^*)x, x \rangle$ son estrictamente positivas.

Resp.: Sean m_1 y m_2 las cotas inferiores de T^*T y TT^* , respectivamente, así como M_1 y M_2 las correspondientes cotas superiores.

a) Supongamos que $m_1 > 0$ y $m_2 > 0$. Si elegimos constantes c_1 y c_2 tales que $c_i < 2/M_i$ ($i = 1, 2$) y definimos los operadores $A'_1 = c_1 T^*T$, $A'_2 = c_2 TT^*$, entonces es fácil comprobar que

$$(*) \quad 0 < m'_i \leq M'_i < 2 \quad (i = 1, 2),$$

donde, para cada $i = 1, 2$, m'_i y M'_i denotan las cotas inferior y superior de A'_i , respectivamente.

Por ser A'_i autoadjunto, para cada $i = 1, 2$, la condición $(*)$ equivale a la acotación $\|I - A'_i\| < 1$. Esto significa que existe $(A'_i)^{-1}$ ($i = 1, 2$) y, en consecuencia, existen $(T^*T)^{-1}$ y $(TT^*)^{-1}$. Así pues, como

$$I = (T^*T)^{-1}T^*T = TT^*(TT^*)^{-1},$$

T tiene inverso a izquierda y a derecha. Por tanto, existe $T^{-1} = (T^*T)^{-1}T^* = T^*(TT^*)^{-1}$.

b) Recíprocamente, si T es un operador invertible y suponemos que $m_1 \leq 0$, entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\|x_n\| = 1$, $\forall n$, y $\|Tx_n\|^2 = \langle T^*Tx_n, x_n \rangle \rightarrow 0$. Esto quiere decir que

$$\|x_n\| = \|T^{-1}Tx_n\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|Tx_n\| \rightarrow 0,$$

lo que contradice lo anterior.



8. H un espacio de Hilbert, M_1 y M_2 subespacios de H y P_1 y P_2 las proyecciones sobre M_1 y M_2 , respectivamente, tales que $P_1P_2 = P_2P_1$. Probar que $P_1 + P_2 - P_1P_2$ es una proyección sobre $M_1 + M_2$.

Resp.: Si escribimos $P_1 + P_2 - P_1P_2 = P_1 + (I - P_1)P_2$, tenemos, por un lado, que

$$P_1(I - P_1)P_2 = (P_1 - P_1^2)P_2 = 0,$$

lo que significa que P_1 e $(I - P_1)P_2$ son proyecciones ortogonales entre sí. Por otra parte, como $(I - P_1)P_2 = P_2(I - P_1)$, deducimos que la composición $(I - P_1)P_2$ es la proyección sobre $M_1^\perp \cap M_2$ (teorema 7.3).

Así pues, la suma $P_1 + (I - P_1)P_2$ es la proyección ortogonal sobre $M_1 + (M_1^\perp \cap M_2) = M_1 + M_2$.



9. Sean A y B dos operadores autoadjuntos que conmutan entre sí. Probar que $(1/2)(A+B+|A-B|)$ es el menor operador autoadjunto que conmuta con A y B y es cota superior de ambos. [Dicho operador se denota por $\sup\{A, B\}$.]

Resp.: Como $|A-B| \geq A-B$, $\sup\{A, B\} \geq (1/2)(A+B+A-B) = A$. Como, además, $|A-B| \geq B-A$, $\sup\{A, B\} \geq (1/2)(A+B+B-A) = B$.

Si $C \in L(H)$ es autoadjunto y $CA = AC$, $CB = BC$, $C \geq A$, $C \geq B$, entonces

$$C - \frac{1}{2}(A+B) \geq \begin{cases} A - \frac{1}{2}(A+B) = \frac{1}{2}(A-B) \\ B - \frac{1}{2}(A+B) = -\frac{1}{2}(A-B). \end{cases}$$

Por tanto,

$$C - \frac{1}{2}(A+B) \geq \frac{1}{2}|A-B| \implies C \geq \frac{1}{2}(A+B+|A-B|),$$

pues C conmuta con $A-B$.



10. Se dice que un operador $V : H \rightarrow H$ es *isometría parcial* si $H = H_1 \oplus H_2$ con $\|Vx\| = \begin{cases} \|x\| & \text{si } x \in H_1 \\ 0 & \text{si } x \in H_2. \end{cases}$ Probar que todo operador $T \in L(H)$ es de la forma $T = VA$ con V isometría parcial, $A = (T^*T)^{1/2} \geq 0$ y $\|Vx\| = \|x\|$, $\forall x \in A(H)$ (descomposición polar de von Neumann).

Resp.: Si $T \in L(H)$, entonces T^*T es positivo pues $\langle T^*Tx, x \rangle = \langle Tx, Tx \rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. Así pues, existe un operador $A \geq 0$ tal que $A^2 = T^*T$ y A conmuta con todo operador que conmute con T^*T .

Además,

$$\begin{aligned} \|Tx\|^2 &= \langle Tx, Tx \rangle = \langle T^*Tx, x \rangle \\ &= \langle A^2x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 \implies \|Tx\| = \|Ax\|, \forall x \in H. \end{aligned}$$

Si definimos el operador $V_1 y = Tx$, $\forall y = Ax$, entonces:

- i) V_1 está bien definida pues, si $Ax_1 = Ax_2$, entonces $A(x_1 - x_2) = 0$, de donde $\|T(x_1 - x_2)\| = 0$, es decir $Tx_1 = Tx_2$.
- ii) V_1 es isometría en $\overline{R(A)}$ pues

$$\|V_1 y\|^2 = \|Tx\|^2 = \langle (T^* T)x, x \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|y\|^2.$$

Así pues, el operador $V : H \rightarrow H$ definido por $Vy = \begin{cases} V_1 y & \text{si } y \in R(A) \\ 0 & \text{si } y \in R(A)^\perp, \end{cases}$

(observemos que $R(A)$ es cerrado, pues $N(A)^\perp = \overline{R(A)}$) es isometría parcial. En efecto, si $y = Ax$, entonces $\|Vy\| = \|Tx\| = \|Ax\| = \|y\|$, pero $\|Vy\| = 0$, $\forall y \in R(A)^\perp$.

Basta, para completar la demostración, comprobar que $T = VA$, lo cual es evidente, pues $\forall x \in H$, $Tx = Vy = VAx$.

Observación. Si $\dim H < \infty$, $A(H)$ y $T(H)$ tienen la misma codimensión, entonces V es una isometría definida en $\overline{A(H)}$ y se puede extender a un operador unitario sobre H . La descomposición polar toma ahora la forma $T = VA$ con V unitario y $A \geq 0$, lo cual es una generalización a operadores de la descomposición polar de un número complejo $\lambda = r \cdot e^{i\vartheta}$, con $r \geq 0$ y $|e^{i\vartheta}| = 1$.

TEMAS COMPLEMENTARIOS.

1. Teoría de funciones casi-periódicas ([AG]).
2. Teorema espectral de operadores normales ([RN], [He]).

VII. OPERADORES NO ACOTADOS EN ESPACIOS DE HILBERT

La teoría de operadores no acotados surge como necesidad de establecer los fundamentos matemáticos de la Mecánica Cuántica y fue desarrollada en los años 1920-1930 por von Neumann y Stone. Sus principales aplicaciones, aparte de la Mecánica Cuántica, se dirigen al estudio de las ecuaciones diferenciales. Sirva este capítulo para mostrar las propiedades fundamentales de los operadores no acotados, destacando las diferencias y nuevas dificultades que aparecen al eliminar la condición de acotación en los operadores, en especial el problema de extensión que aquí aparece.

SECCIONES

1. Introducción. Operadores simétricos y autoadjuntos.
2. Propiedades espectrales de operadores simétricos y autoadjuntos.
3. Teorema espectral de operadores unitarios.
4. Teorema espectral de operadores autoadjuntos no acotados.
5. Ejercicios.

1. INTRODUCCIÓN. OPERADORES SIMÉTRICOS Y AUTO-ADJUNTOS.

Los dos ejemplos básicos de operadores no acotados son el operador multiplicación $Mf(x) = x \cdot f(x)$ y el operador derivación $Df(x) = \frac{d}{dx}f(x)$, definidos en $L^2(\mathbb{R})$, operadores para los que se cumple la relación de conmutación $DM - MD = I$, fórmula en la que se basa el principio de incertidumbre de la Mecánica Cuántica. Se puede probar además que la relación anterior no se da en ninguna pareja de operadores acotados (ver los ejercicios al final del capítulo) y los operadores que la cumplen se pueden identificar con los anteriores.

El primer resultado que enunciamos es uno de los primeros teoremas del Análisis Funcional (1910) y sugiere que el dominio de un operador y el problema de extensión del mismo juegan un importante papel en la cuestión de su acotación.

1.1.- Teorema (Hellinger-Toeplitz). *Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $T : H \rightarrow H$ es un operador lineal definido en todo H y simétrico, es decir tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$, $\forall x, y \in H$. Entonces T es acotado.*

En particular, como el operador multiplicación verifica

$$\langle Mf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{g(x)} dx = \langle f, Mg \rangle$$

y no es acotado, no puede estar definido en todo el espacio.

Demostración. Supongamos por el contrario que existe una sucesión de Cauchy $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en H con $\|y_n\| = 1$ y $\|Ty_n\| \rightarrow \infty$. Definimos la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funcionales lineales en H por $f_n(x) = \langle Tx, y_n \rangle = \langle x, Ty_n \rangle$, $\forall n$.

Por la desigualdad de Schwarz, $|f_n(x)| = |\langle x, Ty_n \rangle| \leq \|Ty_n\| \cdot \|x\|$, de modo que cada f_n está acotado.

Además, de $|f_n(x)| = |\langle Tx, y_n \rangle| \leq \|Tx\|$ se deduce que $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada. Por el principio de acotación uniforme (capítulo IV, teorema 4.2), $(\|f_n\|)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada, por lo que $\|f_n\| \leq k$, $\forall n$. Así

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\| \cdot \|x\| \leq k\|x\|.$$

En particular, para $x = Ty_n$ resulta que

$$\|Ty_n\|^2 = \langle Ty_n, Ty_n \rangle = |f_n(Ty_n)| \leq k\|Ty_n\| \implies \|Ty_n\| \leq k$$

lo que es absurdo. ◇

Observaciones. 1) El teorema anterior sugiere plantear el problema de determinar dominios de operadores y obtener extensiones de los mismos.

Utilizaremos la notación $S \subset T$ para indicar que T es *extensión* de S , es decir $D(S) \subset D(T)$ y $T|_{D(S)} = S$. Es claro que $S \subset T$ si y sólo si $G(S) \subset G(T)$, donde G representa el grafo del operador.

2) Si un operador lineal es acotado, es decir

$$\exists k > 0 : \|Tx\| \leq k\|x\|, \forall x \in D(T),$$

puede extenderse a $\overline{D(T)}$ por continuidad. Si $D(T)$ no fuera denso en H , se puede extender T más allá de $D(T)$, haciendo por ejemplo $Tx = 0$, $\forall x \in D(T)^\perp$, y por linealidad definirlo en todo H . Dicha extensión estará también acotada y tendrá la misma norma de T . Esto sugiere suponer que los operadores lineales acotados están siempre definidos en todo H , de modo que en lo sucesivo adoptaremos dicho convenio.

A continuación vamos a generalizar el concepto de operador adjunto en el caso de operadores no acotados.

1.2.- Definición. Dado un operador lineal T con dominio $D(T) \subset H$, se define

$$D(T^*) = \{x' \in H : \exists y', \langle Tx, x' \rangle = \langle x, y' \rangle, \forall x \in D(T)\}$$

y se llama *adjunto de T* al operador T^* definido por

$$\forall x' \in D(T^*) : T^*x' = y'.$$

1.3.- Proposición. T^* está bien definida (es decir y' es único) si y sólo si $D(T)$ es denso en H .

Demostración. Si $\overline{D(T)} \neq H$, existe $y_1 \in H$ con $y_1 \neq 0$ tal que $y_1 \perp D(T)$. Así $\langle x, y' \rangle = \langle x, y' \rangle + \langle x, y_1 \rangle$.

Recíprocamente, si $\overline{D(T)} = H$ e $y_1 = T^*x$, $y_2 = T^*x$, entonces

$$\langle y_1, z \rangle = \langle y_2, z \rangle, \forall z \in D(T) \implies y_1 - y_2 \perp D(T) \implies y_1 - y_2 \perp H \implies y_1 = y_2.$$

Observaciones. De la definición se deducen también las propiedades correspondientes al caso en que los operadores son acotados. En particular:

$$1) \forall x \in D(T), x' \in D(T^*) : \langle Tx, x' \rangle = \langle x, T^*x' \rangle.$$

$$2) \text{ Si } T \in L(H), \text{ entonces } T^* \in L(H) \text{ y } \|T^*\| = \|T\|.$$

$$3) \text{ Si } T \in L(H), \text{ entonces } T^{**} = T.$$

$$4) \text{ Si } S, T \in L(H), T^*S^* = (ST)^*.$$

$$5) \text{ Si } \alpha \in \mathbb{C} \text{ y } T \text{ tiene dominio denso en } H, \text{ entonces } (\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*.$$

Sin embargo, para operadores no acotados se presentan ciertas diferencias como se muestra a continuación.

1.4.- Proposición. Sean S y T dos operadores lineales con dominio denso en el mismo espacio de Hilbert H .

a) Si $S \subset T$, entonces $T^* \subset S^*$.

b) $T^* + S^* \subset (T + S)^*$.

c) Si ST tiene dominio denso en H , entonces $T^*S^* \subset (ST)^*$. Si además $S \in L(H)$, entonces $T^*S^* = (ST)^*$.

Demostración. a) Si $x \in D(T^*)$, entonces existe $y \in H$ tal que $\langle x, Tz \rangle = \langle y, z \rangle, \forall z \in D(T)$. Como $S \subset T$, $\langle y, z \rangle = \langle x, Tz \rangle = \langle x, Sz \rangle, \forall z \in D(S)$. Esto implica que $x \in D(S^*)$ y $S^*x = y$, o bien que $T^* \subset S^*$.

b) Si $x \in D(T^* + S^*)$, entonces $x \in D(T^*)$ y $x \in D(S^*)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \exists y_1, y_2 \in H : \quad & \langle x, Tz \rangle = \langle y_1, z \rangle, \forall z \in D(T) \\ & \langle x, Sz \rangle = \langle y_2, z \rangle, \forall z \in D(S) \\ \implies & \langle x, (T + S)z \rangle = \langle y_1 + y_2, z \rangle, \forall z \in D(T) \cap D(S) = D(T + S). \end{aligned}$$

Esto implica que $x \in D(T + S)^*$ y $(T + S)^*x = y_1 + y_2 = (T^* + S^*)x$.

c) Si $x \in D(T^*S^*) \implies x \in D(S^*), S^*x \in D(T^*)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \exists y_1 \in H : \quad & \langle x, Sz \rangle = \langle y_1, z \rangle, \forall z \in D(S), \\ \exists y_2 \in H : \quad & \langle S^*x, Tu \rangle = \langle y_2, u \rangle, \forall u \in D(T), \end{aligned}$$

Ahora bien, si $u \in D(ST)$, entonces $u \in D(T)$ y $z = Tu \in D(S)$. Teniendo en cuenta que $y_1 = S^*x$, tenemos:

$$\langle x, STu \rangle = \langle x, Sz \rangle = \langle y_1, z \rangle = \langle S^*x, Tu \rangle = \langle y_2, u \rangle$$

lo que implica que $x \in D((ST)^*)$ y $(ST)^*x = y_2 = T^*S^*x$.

Por último, si $S \in L(H)$, veamos que $D((ST)^*) \subset D(T^*S^*)$.

Sea pues $x \in D((ST)^*)$. Entonces $\exists y \in H : \langle x, (ST)z \rangle = \langle y, z \rangle, \forall z \in D(ST)$. En particular $\langle x, (ST)z \rangle = \langle y, z \rangle, \forall z \in D(T)$. Como $S \in L(H)$, $S^* \in L(H)$ y $\langle x, (ST)z \rangle = \langle S^*x, Tz \rangle$, lo que implica que $S^*x \in D(T^*)$. Como además $D(S^*) = H$, también $x \in D(S^*)$; por tanto $x \in D(T^*S^*)$. \diamond

Una generalización del concepto de operadores simétricos para operadores no acotados es la siguiente:

1.5.- Definición. Un operador $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ es *simétrico* si

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle, \forall x, y \in D(T).$$

Un operador simétrico es *maximal* si no tiene extensiones simétricas propias.

Observación. A veces se exige que un operador simétrico tenga dominio denso y, en caso de no cumplir esta condición, recibe el nombre de *operador hermítico*.

Las siguientes caracterizaciones de los operadores simétricos son útiles.

1.6.- Proposición. Si $\overline{D(T)} = H$, son equivalentes:

- i) T es simétrico.
- ii) $T \subset T^*$.
- iii) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}, \forall x \in D(T)$.

Demostración. i) \implies ii). Sea $x \in D(T)$. Existe entonces $y = Tx$ tal que $\langle Tz, x \rangle = \langle z, y \rangle$, para todo $z \in D(T)$. Esto implica que $x \in D(T^*)$ y que $T^*x = y = Tx$.

ii) \implies iii). Si $x \in D(T)$, $\langle Tx, x \rangle = \langle T^*x, x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$. Esto implica que $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$.

iii) \implies i). Sea $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle T(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle &= \langle Tx, x \rangle + \alpha \langle Ty, x \rangle + \bar{\alpha} \langle Tx, y \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle Ty, y \rangle \\ \langle x + \alpha y, T(x + \alpha y) \rangle &= \langle x, Tx \rangle + \alpha \langle y, Tx \rangle + \bar{\alpha} \langle x, Ty \rangle + \alpha \bar{\alpha} \langle y, Ty \rangle. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\langle T(x + \alpha y), x + \alpha y \rangle = \langle x + \alpha y, T(x + \alpha y) \rangle$, resulta:

$$\text{Para } \alpha = 1, \overline{\langle x, Ty \rangle} + \langle Tx, y \rangle = \overline{\langle Tx, y \rangle} + \langle x, Ty \rangle \implies \text{Im} \langle Tx, y \rangle = \text{Im} \langle x, Ty \rangle.$$

$$\text{Para } \alpha = i, \overline{\langle x, Ty \rangle} + \langle x, Ty \rangle = \overline{\langle Tx, y \rangle} + \langle Tx, y \rangle \implies \text{Re} \langle x, Ty \rangle = \text{Re} \langle Tx, y \rangle.$$

De las dos igualdades se deduce que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$. \diamond

1.7.- Definición. Un operador $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ con dominio denso en H es *autoadjunto* si $T = T^*$.

Es evidente entonces que todo operador autoadjunto es simétrico y si $D(T) = H$, el recíproco también es cierto.

De la definición se deduce también que todo operador simétrico T que verifica $D(T) = D(T^*)$ es autoadjunto.

Ejemplos. 1) Sea $H = L^2(\mathbb{R})$ y $D = i \cdot \frac{d}{dx}$ el operador definido en el conjunto de funciones que tienen límite cero en los infinitos (que es denso en H). Entonces D es simétrico.

2) Sea $H = L^2[0, 1]$ y se define $T_k f = i \cdot f'$, ($k = 1, 2, 3$), con

$$\begin{aligned} D(T_1) &= \{f \in H : f \text{ absolutamente continua y } f' \in H\}, \\ D(T_2) &= \{f \in D(T_1) : f(0) = f(1)\} \subset D(T_1), \\ D(T_3) &= \{f \in D(T_2) : f(0) = f(1) = 0\} \subset D(T_2), \end{aligned}$$

dominios que definen varios aspectos del problema de la cuerda vibrante.

Se observa en primer lugar que $T_3 \subset T_2 \subset T_1$. Tenemos además que $T_1^* = T_3$, $T_2^* = T_2$, $T_3^* = T_1$. Resulta pues que T_2 es extensión autoadjunta del operador simétrico T_3 y T_1 es una extensión no simétrica de T_2 . Esto indica en particular que los conceptos de operador simétrico y autoadjunto no coinciden en el caso de operadores no acotados. Observemos además que el cálculo del operador adjunto depende del dominio del operador y no basta la definición formal del mismo.

En un espacio de Hilbert arbitrario H , la aplicación $U : H \times H \rightarrow H \times H$, definida por $U(x, y) = i(y, -x)$, llamado *operador de conjugación*, es un operador unitario tal que $U^2 = I$; además tenemos lo siguiente:

1.8.- Proposición. Sea $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal con $\overline{D(T)} = H$.

a) Si $G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$ es el grafo de T , entonces $U(G(T))^\perp = G(T^*)$.

b) Si T admite una clausura, entonces su adjunto T^* tiene dominio denso en H y $U(G(T^*))^\perp = G(T^{**})$.

Demostración. a) Supongamos que $(x, y) \in U(G(T))^\perp$. Entonces,

$$\forall (u, v) \in U(G(T)), \langle (x, y), (u, v) \rangle = 0.$$

Como $(u, v) = U(a, Ta) = (iT a, -ia)$ para algún $a \in D(T)$, resulta:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (x, y), (u, v) \rangle = \langle x, u \rangle + \langle y, v \rangle = \langle x, iT a \rangle + \langle y, -ia \rangle \\ &= -i\langle x, Ta \rangle + i\langle y, a \rangle \implies \langle x, Ta \rangle = \langle y, a \rangle. \end{aligned}$$

Esto implica que $x \in D(T^*)$ y que $y = T^*x$.

Recíprocamente, si $(x, y) \in G(T^*)$, $x \in D(T^*)$, $y = T^*x$. Por tanto, para todo $a \in D(T)$,

$$\langle (x, y), (iT a, -ia) \rangle = -i\langle x, Ta \rangle + i\langle y, a \rangle = -i\langle T^*x, a \rangle + i\langle y, a \rangle = 0.$$

b) Supongamos que $\overline{D(T^*)} \neq H$, es decir $\exists y_0 \neq 0 : y_0 \perp D(T^*)$. Entonces $\langle y_0, x \rangle = 0$, $\forall x \in D(T^*)$, de donde

$$\langle (y_0, 0), (x, T^*x) \rangle = 0, \forall x \in D(T^*) \implies (y_0, 0) \in G(T^*)^\perp.$$

Debido al apartado (a),

$$G(T^*)^\perp = U(G(T))^\perp = \overline{U(G(T))}.$$

Por tanto, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ tal que $(y_0, 0) = \lim_n U(x_n, Tx_n)$, de donde

$$y_0 = \lim_n iTx_n, \quad 0 = \lim_n -ix_n.$$

Por ser T clausurable, si $\lim_n ix_n = 0$, $\lim_n iTx_n = y_0$, entonces $y_0 = 0$, lo que contradice la suposición inicial.

La segunda parte se obtiene de (a) sustituyendo T por T^* . \diamond

La importancia de este teorema queda patente en la variedad de consecuencias que de él se derivan.

1.9.- Corolario. Sea $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal con dominio denso en H .

- 1) T^* es cerrado. En particular los operadores autoadjuntos son cerrados.
- 2) Si $D(T^*)$ es también denso en H , $T \subset T^{**}$.
- 3) Si T es clausurable, entonces $(\overline{T})^* = T^*$, $\overline{T} = T^{**}$. En particular, si T es cerrado, $T = T^{**}$.
- 4) $N(T^*) = R(T)^\perp$ y, si T es cerrado, $N(T) = R(T^*)^\perp$.
- 5) Si T es simétrico, es clausurable y \overline{T} es también simétrico.
- 6) $H \times H = G(T^*) \oplus \overline{UG(T)}$.
- 7) Si T es cerrado, el sistema $\begin{cases} -Tx + y = a \\ x + T^*y = b \end{cases}$ siempre tiene solución $(x, y) \in D(T) \times D(T^*)$.
- 8) Si T es inyectiva y $R(T)$ es denso en H , entonces T^* es inyectiva y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

Demostración. 1) $G(T^*)$ es cerrado por ser el complemento ortogonal de un subespacio de $H \times H$.

2) Como $U(G(T))^\perp = G(T^*)$, resulta

$$\begin{aligned} \overline{U(G(T))} = G(T^*)^\perp &\implies U(G(T)) \subset G(T^*)^\perp \\ &\implies G(T) \subset U(G(T^*)^\perp) = G(T^{**}) \implies T \subset T^{**}. \end{aligned}$$

3) Si \overline{T} es la clausura de T , $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$. Entonces

$$U(G(\overline{T})) = \overline{U(G(T))} \implies G(T^*) = U(G(T))^\perp = U(G(\overline{T}))^\perp = G(\overline{T}^*).$$

Por otra parte, de $G(T^*) = U(G(T))^\perp$ deducimos que

$$G(T^*)^\perp = U(G(T))^\perp{}^\perp = U(\overline{G(T)}) = U(G(\overline{T}))$$

y de aquí,

$$G(T^{**}) = U(G(T^*))^\perp = U(G(T^*)^\perp) = U^2(G(\bar{T})) = G(\bar{T}).$$

Esto prueba que $T^{**} = \bar{T}$.

4) De lo anterior se deduce

$$\begin{aligned} x \in N(T^*) &\iff (x, 0) \in G(T^*) \iff \langle (x, 0), (u, v) \rangle = 0, \forall (u, v) \in U(G(T)) \\ &\iff \langle (x, 0), (iT a, -ia) \rangle = 0, \forall a \in D(T) \\ &\iff \langle x, T a \rangle = 0, \forall a \in D(T) \iff x \in R(T)^\perp. \end{aligned}$$

5) Si T es simétrico, T^* es extensión de T y T^* es cerrado. Además, $\forall x, y \in D(\bar{T})$, $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_m)_{m \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ tales que

$$x_n \rightarrow x, T x_n \rightarrow \bar{T} x, y_m \rightarrow y, T y_m \rightarrow \bar{T} y.$$

Así pues,

$$\langle \bar{T} x, y \rangle = \lim_{n, m} \langle T x_n, y_m \rangle = \lim_{n, m} \langle x_n, T y_m \rangle = \langle x, \bar{T} y \rangle.$$

6) Es evidente pues $G(T^*)^\perp = \overline{U(G(T))}$.

7) Sea $(a, b) \in H \times H$ arbitrario. Tenemos:

$$(a, b) = f + g, f \in G(T^*), g \in \overline{U(G(T))} = U(G(T))$$

$$(a, b) = (y, T^* y) + U(x', T x'), y \in D(T^*), x' \in D(T)$$

$$\implies (a, b) = (y, T^* y) + i(T x', -x') = (y, T^* y) + (-T x, x), y \in D(T^*), x \in D(T).$$

8) Por el apartado (4), $N(T^*) = R(T)^\perp = \overline{R(T)}^\perp = \{0\}$. Teniendo en cuenta ahora la proposición 1.4, como $D(T)$ y $D(T^{-1}) = R(T)$ son densos en H , entonces

$$(T^{-1})^* T^* \subset (T T^{-1})^* = I \implies (T^{-1})^* = (T^*)^{-1}. \quad \diamond$$

Observación. Debido al apartado 5) se puede suponer siempre que un operador simétrico es cerrado.

La siguiente propiedad será también útil en el estudio de los operadores autoadjuntos.

1.10.- Proposición. Sea T un operador simétrico con dominio denso en H . Entonces:

$$a) D(T) = H \implies T = T^* \text{ y } T \in L(H).$$

b) $T = T^*$ y T inyectivo $\implies \overline{R(T)} = H$ y $T^{-1} = (T^{-1})^*$.

c) $\overline{R(T)} = H \implies T$ inyectivo.

d) $R(T) = H \implies T = T^*$ y $T^{-1} \in L(H)$.

Demostración. a) Por ser T simétrico, $T \subset T^*$. Como $D(T) = H$, $T = T^*$. Por el teorema del gráfico cerrado, como T es cerrado y $D(T) = H$, T es acotado. (Como se observa, esto constituye otra prueba del teorema de Hellinger-Toeplitz.)

b) Debido al apartado 4 del corolario anterior, $N(T) = R(T)^\perp$, de modo que, si $N(T) = 0$, entonces $\overline{R(T)} = H$.

La segunda parte se obtiene ahora aplicando el apartado 8 del corolario citado.

c) Sea $v \in D(T)$ tal que $Tv = 0$. Entonces:

$$\langle Tv, x \rangle = 0, \forall x \in D(T) \implies \langle v, Tx \rangle = 0, \forall x \in D(T) \implies v \in R(T)^\perp \implies v = 0.$$

d) Si $R(T) = H$, T es inyectiva y existe $S = T^{-1}$ con $D(S) = R(T) = H$.

Dados $f, h \in R(T)$, $f = Tg$, $h = Tk$, entonces

$$\langle Sf, h \rangle = \langle g, Tk \rangle = \langle Tg, k \rangle = \langle f, k \rangle = \langle f, Sh \rangle,$$

es decir S es simétrico. Por el apartado a), $S = S^* \in L(H)$ y, por el apartado b), $T = S^{-1}$ es autoadjunto. \diamond

Estudiaremos a continuación el problema de las extensiones de operadores simétricos. Sabemos que, si T es un operador simétrico y S es una extensión simétrica de T , entonces $T \subset S \subset S^* \subset T^*$, es decir toda extensión simétrica de T es restricción de T^* .

1.11.- Proposición. a) *Todo operador simétrico tiene alguna extensión simétrica maximal.*

b) *Toda extensión simétrica maximal de un operador simétrico es cerrada.*

c) *Todo operador autoadjunto es simétrico maximal.*

El apartado a) es una simple aplicación del lema de Zorn y los otros dos son consecuencia de los resultados anteriores.

1.12.- Teorema. Sean T un operador simétrico y $\lambda = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$a) \|(T - \lambda I)x\|^2 = b^2\|x\|^2 + \|(T - aI)x\|^2, \forall x \in D(T).$$

b) Si $b \neq 0$, $N(T - \lambda I) = \{0\}$, es decir $T - \lambda I$ es inyectivo.

c) Si $b \neq 0$ y T es cerrado, entonces $R(T - \lambda I)$ es cerrado.

d) Si además $R(T - \lambda I) = H$, T es simétrico maximal.

Demostración. Observamos en primer lugar que

$$\|(T - \lambda I)x\|^2 = \|(T - aI)x - ibx\|^2 = \|(T - aI)x\|^2 + b^2\|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} i \langle (T - aI)x, bx \rangle$$

donde $\langle (T - aI)x, bx \rangle = b \langle Tx, x \rangle - ab\|x\|^2 \in \mathbb{R}$. Esto demuestra el apartado a).

De aquí también se deduce que $(T - \lambda I)x = 0 \implies b^2\|x\|^2 = 0 \implies x = 0$, lo que prueba el apartado b).

Para probar c) elegimos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ tal que $(T - \lambda I)x_n \rightarrow y$. Entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy porque

$$b^2\|x_n - x_m\|^2 \leq \|(T - aI)(x_n - x_m)\|^2 + b^2\|x_n - x_m\|^2 = \|(T - \lambda I)(x_n - x_m)\|^2 \rightarrow 0.$$

Por ser H de Hilbert, existe $x = \lim_n x_n$. De este modo, por ser $T - \lambda I$ cerrado, debe ser $x \in D(T - \lambda I)$ y $(T - \lambda I)x = y$, es decir $y \in R(T - \lambda I)$.

Por último, para probar d) suponemos que existe un operador simétrico S tal que $T \subset S$. Entonces $H = R(T - \lambda I) \subset R(S - \lambda I)$. Si consideramos un elemento $u \in D(S) \setminus D(T)$, aplicando el resultado de b) al operador S , tenemos:

$$\exists u' \in D(T) : (S - \lambda I)u = (T - \lambda I)u' = (S - \lambda I)u' \implies u = u'$$

lo que es absurdo a no ser que $T = S$. \diamond

El siguiente resultado permite asociar a todo operador cerrado un operador positivo acotado y sirve de base para dar una prueba del teorema espectral de operadores autoadjuntos no acotados.

1.13.- Teorema. Sea T cerrado con dominio denso; se define $Q = I + T^*T$. Entonces:

a) $Q : D(Q) \rightarrow H$ es biyectivo y existen $B, C \in L(H)$, con $\|B\| \leq 1$, $\|C\| \leq 1$, tales que $C = TB$ y $BQ \subset QB = I$. Además $B \geq 0$ y T^*T es autoadjunto.

b) Sea $T' = T|_{D(T^*T)}$; entonces $G(T')$ es denso en $G(T)$.

Demostración. Por el apartado 6 del corolario 1.9 y teniendo en cuenta que T es cerrado, $H \times H = G(T^*) \oplus UG(T)$. Entonces, $\forall h \in H$, existen $x \in D(T)$, $y \in D(T^*)$ tales que:

$$(0, h) = (y, T^*y) + U(x, Tx) = (y + iTx, T^*y - ix).$$

Quedan definidos así los operadores $Bh = -ix$, $Ch = y$, que tienen dominio H y son lineales. Además, debido a que la suma anterior es ortogonal, por la definición de norma en $H \times H$, tenemos:

$$\|h\|^2 = \|Ch\|^2 + \|T^*Ch\|^2 + \|TBh\|^2 + \|Bh\|^2 \geq \|Ch\|^2 + \|Bh\|^2.$$

Entonces $\|Ch\| \leq \|h\|$ y $\|Bh\| \leq \|h\|$, con lo que $\|B\| \leq 1$ y $\|C\| \leq 1$. Además,

$$\begin{aligned} 0 &= Ch - TBh \implies TB = C \\ h &= T^*Ch + Bh = Bh + T^*TBh = (I + T^*T)Bh \implies QB = I. \end{aligned}$$

En particular, $\forall y \in D(Q)$, $\exists h \in H$ tal que $y = Bh$; por tanto, $Qy = QBh = h$ y $BQy = Bh = y$, de donde $BQ \subset I$.

La aplicación Q es biyectiva pues, por ser $QB = I$, Q es sobre y, por ser $BQ \subset I$, Q es inyectiva.

Además, Q es un operador positivo pues, $\forall x \in D(Q)$,

$$\langle Qx, x \rangle = \langle x, x \rangle + \langle T^*Tx, x \rangle = \|x\|^2 + \|Tx\|^2 \geq 0.$$

Veamos, como consecuencia de lo anterior, que $B \geq 0$:

Dado cualquier $h \in H$, sea $x \in D(Q)$ tal que $h = Qx$; entonces

$$\langle Bh, h \rangle = \langle BQx, Qx \rangle = \langle x, Qx \rangle \geq 0.$$

Como $B \in L(H)$, B es autoadjunto. De 1.10(b) se deduce que Q es también autoadjunto, con lo que evidentemente $Q - I = T^*T$ es autoadjunto.

Para probar b), consideremos un elemento (x, Tx) ortogonal a $G(T')$. Entonces $\forall y \in D(T^*T) = D(Q)$:

$$0 = \langle (x, Tx), (y, Ty) \rangle = \langle x, y \rangle + \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, (I + T^*T)y \rangle = \langle x, Qy \rangle \implies x \perp R(Q).$$

Como $R(Q) = H$, $x = 0$.

◇

Observación. Teniendo en cuenta que $TT^* = T^{**}T^*$ (pues T es cerrado) y T^* es cerrado, el resultado anterior también se aplica al operador TT^* . Además, de la proposición 1.10 se deduce que los operadores $(I + T^*T)^{-1}$ y $(I + TT^*)^{-1}$ son acotados.

Veremos en los ejercicios al final del capítulo algunas aplicaciones de este teorema.

2. PROPIEDADES ESPECTRALES DE OPERADORES SIMÉTRICOS Y AUTOADJUNTOS.

Muchas de las propiedades espectrales de operadores autoadjuntos acotados se conservan en el caso de operadores no acotados. Algunas de dichas propiedades se generalizan en esta sección.

Observemos en primer lugar que, si $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ es un operador lineal cerrado con dominio denso, entonces $T - \lambda I : D(T) \rightarrow R(T)$ es biyectiva si y sólo si λ no es autovalor de T . Así pues, los autovalores son aquellos para los que, o bien $T - \lambda I$ no tiene inverso, o bien $(T - \lambda I)^{-1}$ no es un operador acotado definido en todo H .

Si T es además un operador simétrico, sus autovalores son reales (teorema 1.12.b). Esto da lugar al siguiente resultado.

2.1.- Proposición. *Sea T un operador autoadjunto. La condición necesaria y suficiente para que λ sea autovalor de T es que $\overline{R(T - \lambda I)} \neq H$.*

Demostración. Si λ es autovalor, existe $x \neq 0$ tal que $Tx = \lambda x$. Entonces:

$$\langle x, (T - \lambda I)y \rangle = \langle (T - \lambda I)x, y \rangle = 0, \quad \forall y \in D(T).$$

Esto implica que $x \perp R(T - \lambda I)$ con lo que $\overline{R(T - \lambda I)} \neq H$.

Recíprocamente, si $\overline{R(T - \lambda I)} \neq H$, entonces $\exists x \neq 0$ tal que $x \perp R(T - \lambda I)$. Luego

$$\begin{aligned} \langle x, (T - \lambda I)y \rangle &= 0, \quad \forall y \in D(T) \\ \implies \langle x, Ty \rangle &= \langle x, \lambda y \rangle, \quad \forall y \in D(T) \implies x \in D(T^*), \quad T^*x = \bar{\lambda}x. \end{aligned}$$

Como T es autoadjunto y $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$, entonces $Tx = \lambda x$. ◇

2.2.- Corolario. *Si T es autoadjunto, el autoespacio correspondiente a un autovalor λ es $R(T - \lambda I)^\perp$.*

El siguiente resultado es también similar al correspondiente en el caso de operadores acotados.

2.3.- Teorema. *Sea $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador autoadjunto con dominio denso en H . Entonces*

$$\lambda \in \rho(T) \iff \exists c > 0 : \|(T - \lambda I)x\| \geq c\|x\|, \quad \forall x \in D(T).$$

Los tres lemas siguientes serán útiles en la determinación del espectro de los operadores simétricos.

2.4.- Lema. *Sea T un operador simétrico cerrado y $\lambda = a + ib$ un complejo, con $b \neq 0$. Si $\mu \in \mathbb{C}$ es tal que $|\lambda - \mu| < |b|$, entonces $N(T^* - \mu I) \cap N(T^* - \lambda I)^\perp = \{0\}$.*

Demostración. Supongamos por el contrario que

$$\exists f \in N(T^* - \mu I) \cap N(T^* - \lambda I)^\perp$$

y $\|f\| = 1$. Como $R(T - \bar{\lambda}I)$ es cerrado, $N(T^* - \lambda I)^\perp = R(T - \bar{\lambda}I)$, de modo que existe $g \in H$ tal que $(T - \bar{\lambda}I)g = f$. Así pues, como $f \in N(T^* - \mu I)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle (T^* - \mu I)f, g \rangle = \langle f, (T - \bar{\mu}I)g \rangle \\ &= \langle f, (T - \bar{\lambda}I)g \rangle + (\lambda - \mu)\langle f, g \rangle = \|f\|^2 + (\lambda - \mu)\langle f, g \rangle. \end{aligned}$$

Entonces

$$\left. \begin{aligned} 1 = \|f\|^2 &= |\lambda - \mu| \cdot |\langle f, g \rangle| \leq |\lambda - \mu| \cdot \|g\| \\ 1 = \|f\| &= \|(T - \bar{\lambda}I)g\| \geq |b| \cdot \|g\| \end{aligned} \right\} \implies 1 \leq |\lambda - \mu| \cdot |b|^{-1},$$

lo que contradice la hipótesis. \diamond

2.5.- Lema. Sean M y N subespacios cerrados de un espacio de Hilbert H , tales que $M \cap N^\perp = \{0\}$. Entonces $\dim M \leq \dim N$.

Demostración. Llamamos $P : H \rightarrow H$ a la proyección ortogonal sobre N y $T : M \rightarrow N$ a la restricción de P a M , $Tf = Pf$, $\forall f \in M$. Es evidente que T es inyectiva. Por tanto, si $L \subset M$ es un subespacio arbitrario con $\dim L = k$, entonces $\dim TL = k \leq \dim N$, lo que implica que $\dim M \leq \dim N$. \diamond

2.6.- Lema. Si T es un operador simétrico cerrado, entonces $\dim N(T^* - \lambda I)$ es constante para cualquier λ con $\text{Im } \lambda > 0$.

Demostración. De los lemas anteriores, haciendo $\lambda = a + ib$, con $b > 0$, se deduce que $\dim N(T^* - \mu I) \leq \dim N(T^* - \lambda I)$ si $|\lambda - \mu| < b$. Tomando $|\lambda - \mu| < b/2$, también $|\lambda - \mu| < \text{Im } \mu$, de modo que la desigualdad contraria también es cierta.

Se prueba así que la función $\lambda \mapsto \dim N(T^* - \lambda I)$ es localmente constante. Cubriendo el semiplano superior con bolas donde se cumpla lo anterior, se obtiene la tesis. \diamond

2.7.- Teorema. Si T es un operador simétrico cerrado, entonces una y sólo una de las siguientes posibilidades es cierta:

- i) $\sigma(T) = \mathbb{C}$.
- ii) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im } \lambda \geq 0\}$.
- iii) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im } \lambda \leq 0\}$.
- iv) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $H_\pm = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pm \text{Im } \lambda > 0\}$. Por la proposición 1.12, si $\lambda \in H_\pm$, $T - \lambda I$ es inyectiva y tiene rango cerrado. Tenemos dos posibilidades:

- Si $T - \lambda I$ no es sobre, entonces $\lambda \in \sigma(T)$.

- Si $T - \lambda I$ es sobre, por la proposición 1.10(d), $\lambda \in \rho(T)$.

Como $N(T^* - \bar{\lambda}I) = R(T - \lambda I)^\perp$, del lema anterior resultan las siguientes opciones (observando además que $\sigma(T)$ es cerrado, lo que se prueba como en el caso de operadores acotados):

i) $H_+ \subset \sigma(T)$, $H_- \subset \sigma(T) \implies \sigma(T) = \mathbb{C}$.

ii) $H_+ \subset \sigma(T)$, $H_- \cap \sigma(T) = \emptyset \implies \sigma(T) = \overline{H_+} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im } \lambda \geq 0\}$.

iii) $H_+ \cap \sigma(T) = \emptyset$, $H_- \subset \sigma(T) \implies \sigma(T) = \overline{H_-} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Im } \lambda \leq 0\}$.

iv) $H_+ \cap \sigma(T) = \emptyset$, $H_- \cap \sigma(T) = \emptyset \implies \sigma(T) \subset \mathbb{R}$. \diamond

2.8.- Proposición. Si T es un operador simétrico cerrado, son equivalentes:

i) T es autoadjunto.

ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

iii) $N(T^* - iI) = N(T^* + iI) = \{0\}$.

Demostración. Por ser T simétrico, sus autovalores son reales.

i) \implies ii): Sea T autoadjunto y tomemos $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta los apartados b) y c) del teorema 1.12,

$$\{0\} = N(T - \lambda I) = N(T^* - \lambda I) = [R(T - \bar{\lambda}I)]^\perp \implies R(T - \bar{\lambda}I) = H$$

y, por el teorema anterior (repitiendo el argumento para $\bar{\lambda}$), se deduce que el espectro de T es real.

ii) \implies iii): Como $\pm i \in \rho(T)$,

$$N(T^* \pm iI) = [R(T \mp iI)]^\perp = H^\perp = \{0\}.$$

iii) \implies i): Por hipótesis, $R(T - iI) = R(T + iI) = H$. Veamos que además $T \pm iI$ son inyectivas:

Sea $x \in D(T)$ tal que $(T \pm iI)x = 0$. Por ser T^* extensión de T , $\forall z \in H$ resulta:

$$\langle x, z \rangle = \langle x, (T \mp iI)y \rangle = \langle (T^* \pm iI)x, y \rangle = \langle (T \pm iI)x, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0 \implies x = 0.$$

Esto quiere decir que existe $(T \pm iI)^{-1} \in L(H)$. Como $[(T \pm iI)^{-1}]^* = (T^* \mp iI)^{-1}$, también $(T^* \mp iI)^{-1} \in L(H)$.

Sea $h \in D(T^*)$. Entonces existe $f \in D(T)$ tal que $(T + iI)f = (T^* + iI)h$. Pero $(T + iI)f = (T^* + iI)f$, de modo que $f = h$ y $T = T^*$. \diamond

3. TEOREMA ESPECTRAL DE OPERADORES UNITARIOS.

A fin de lograr una representación espectral de operadores autoadjuntos, utilizaremos la transformada de Cayley y la representación espectral de operadores unitarios, que son acotados. En esta sección se deduce dicha representación espectral. Utilizaremos el enfoque clásico, inigualable en su alcance al enfoque actual vía la teoría de álgebras de Banach, transformada de Gelfand y teorema de Gelfand-Naimark, pero más próximo a quienes estén orientados a las aplicaciones.

En primer lugar se prueba que el espectro de un operador unitario está en la circunferencia unidad.

3.1.- Teorema. *Sea $U : H \rightarrow H$ un operador unitario en un espacio de Hilbert complejo H ; entonces $|\lambda| = 1$, $\forall \lambda \in \sigma(U)$.*

Demostración. Basta observar que,

$$\begin{aligned} \text{si } |\lambda| < 1, \quad & \| (U - \lambda I)x \| \geq \| Ux \| - |\lambda| \cdot \| x \| = (1 - |\lambda|) \| x \|, \\ \text{si } |\lambda| > 1, \quad & \| (U - \lambda I)x \| \geq |\lambda| \cdot \| x \| - \| Ux \| = (|\lambda| - 1) \| x \|, \end{aligned}$$

y, en ambos casos, $\exists (U - \lambda I)^{-1} \in L(H)$. \diamond

Hay varias formas de obtener el teorema espectral de operadores unitarios, desde la de Wintner (1929) y pasando por las de von Neumann (1930), Stone (1932), Wecken (1935), Friedrichs (1935) y Riesz-Nagy (1955).

En el caso finito-dimensional sabemos que si H es un espacio de Hilbert con $\dim H = n$ y U es un operador unitario en H , entonces existe una base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de H formada por vectores propios de U , con $Uv_j = \lambda_j v_j$, $j = 1, \dots, n$ y $|\lambda_j| = 1$. Si llamamos E_j al subespacio propio asociado a λ_j ,

$$E_j = \{v \in H : Uv = \lambda_j v\},$$

y P_j a la proyección ortogonal de H sobre E_j ($j = 1, \dots, m$ con $m \leq n$), el teorema espectral dice que

- i) $H = E_1 \oplus \dots \oplus E_m$;
- ii) $I = P_1 + \dots + P_m$;
- iii) $U = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m$.

Una posible generalización en dimensión infinita puede producir la descomposición $U = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$ o bien $U = \int_{\mathbb{T}} \lambda dP$, siendo $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ (pues los autovalores están en la circunferencia unidad).

Para que tenga sentido dicha integral necesitamos definir una correspondencia entre la σ -álgebra Ω de subconjuntos de Borel en \mathbb{T} y el espacio $L(H)$ de los operadores lineales y acotados en H que tenga las propiedades de una medida. De ahí que debamos introducir la siguiente definición.

3.2.- Definición. Sean X un conjunto arbitrario, Ω una σ -álgebra de subconjuntos de X y H un espacio de Hilbert. Una *medida espectral u ortogonal* en (X, Ω, H) es una correspondencia $E : \Omega \rightarrow L(H)$ con las propiedades

- i) $E(\Delta)$ es una proyección ortogonal, $\forall \Delta \in \Omega$.
- ii) $E(X) = I$, $E(\emptyset) = 0$.
- iii) Si $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ son disjuntos dos a dos y $x \in H$ arbitrario, entonces
$$E\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)x = \sum_{n \in \mathbb{N}} E(A_n)x.$$
- iv) $E(A \cap B) = E(A)E(B)$, $\forall A, B \in \Omega$.

De la definición se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

3.3.- Lema. Si E es una medida espectral en (X, Ω, H) y $x, y \in H$, entonces la función de conjuntos $E_{x,y} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y \rangle$ es una medida numerablemente aditiva en Ω con variación total $\|E_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

El siguiente resultado da sentido al concepto de integral respecto a una medida espectral.

3.4.- Proposición. Si E es una medida espectral en (X, Ω, H) y $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función Ω -medible acotada, existe un único operador $A \in L(H)$ tal que para cualesquiera $\varepsilon > 0$ y $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ Ω -partición de X con

$$\sup\{|\phi(x) - \phi(x')| : x, x' \in \Delta_k\} < \varepsilon \quad (1 \leq k \leq n),$$

entonces

$$\left\| A - \sum_{k=1}^n \phi(x_k) E(\Delta_k) \right\| < \varepsilon, \quad \forall x_k \in \Delta_k.$$

Dicho operador se llama *integral de ϕ respecto a E* y se denota por $A = \int_X \phi dE$. Del resultado anterior se deduce que $\langle Ax, y \rangle = \int_X \phi dE_{x,y}$.

Demostración. A cada función simple $s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{\Delta_k}$ le asociamos el operador $A_s = \sum_{k=1}^n \alpha_k E(\Delta_k)$.

Como cada $E(\Delta_k)$ es autoadjunto, entonces

$$A_s^* = \sum_{k=1}^n \overline{\alpha_k} E(\Delta_k) = A_{\bar{s}}.$$

Si $t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{\Delta'_j}$ es otra función simple, entonces

$$A_s A_t = \sum_{k,j} \alpha_k \beta_j E(\Delta_k) E(\Delta'_j) = \sum_{k,j} \alpha_k \beta_j E(\Delta_k \cap \Delta'_j) = A_{st}.$$

De estas igualdades se deduce que

$$A_s^* A_s = A_{\bar{s}} A_s = A_{\bar{s}s} = A_{|s|^2}.$$

Si tomamos $x, y \in H$ arbitrarios, obtenemos:

$$\langle A_s x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle E(\Delta_k) x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k E_{x,y}(\Delta_k) = \int_X s dE_{x,y},$$

de modo que

$$\|A_s x\|^2 = \langle A_s^* A_s x, x \rangle = \langle A_{|s|^2} x, x \rangle = \int_X |s|^2 dE_{x,x} \leq \|s\|_\infty^2 \|E_{x,x}\| \leq \|s\|_\infty^2 \cdot \|x\|^2,$$

es decir $\|A_s x\| \leq \|s\|_\infty \cdot \|x\|$.

Por otra parte, es claro que, si $x \in R(E(\Delta_i))$, entonces $A_s x = \alpha_i E(\Delta_i) x = \alpha_i x$; de esta igualdad y eligiendo i de manera que $|\alpha_i| = \|s\|_\infty$, resulta que

$$(*) \quad \|A_s\| = \|s\|_\infty.$$

Sea ahora $\phi : X \rightarrow \mathbb{C}$ una función Ω -medible y acotada y $(s^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones simples medibles que converge a ϕ . De la fórmula (*) deducimos que la sucesión $(A_{s^{(i)}})_{i \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L(H)$; por tanto, converge a un operador $A \in L(H)$. Dicho operador no depende de la elección de la sucesión $(s^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$. Así pues, dados $\varepsilon > 0$ y $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ con las condiciones indicadas en el enunciado, la tesis se sigue de la convergencia de la sucesión $(A_{s^{(i)}})_{i \in \mathbb{N}}$ al operador A . \diamond

Con esta notación, si consideramos la σ -álgebra

$$\Omega = \{\Delta \subset \mathbb{T} : \Delta \text{ de Borel en } \mathbb{T}\},$$

el teorema espectral se enuncia entonces de la siguiente forma:

3.5.- Teorema. Si $U \in L(H)$ es unitario, entonces existe una única medida espectral E en (\mathbb{T}, Ω, H) tal que $U^n = \int_{\mathbb{T}} z^n dE(z)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Observación. Debido a que todo punto $z \in \mathbb{T}$ puede representarse como $z = e^{it}$, con $t \in [0, 2\pi)$, podemos escribir $U^n = \int_0^{2\pi} e^{int} dE(t)$.

Demostración. El proceso será el siguiente:

1) Buscaremos una familia de medidas $\{\mu_x, x \in H\}$ tal que

$$\langle U^n x, x \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_x(z), \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Fijado $x \in H$, consideramos la sucesión numérica $\{c_n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, definida por $c_n(x) = \langle U^n x, x \rangle$. De la definición es claro que $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Como la medida espectral debe verificar que $U^n = \int_{\mathbb{T}} z^n dE(z)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ y, en particular, $\langle U^n x, x \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n d\langle E(z)x, x \rangle$, $\forall x \in H$, la medida escalar positiva μ_x definida por $\mu_x(\Delta) = \langle E(\Delta)x, x \rangle$ debe verificar $c_n(x) = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_x(z)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. La existencia de tal medida corresponde al llamado *problema trigonométrico de momentos*; la respuesta a dicho problema la proporciona el *teorema de representación de Herglotz*:

Dicha medida μ existe (y es única) si y sólo si la sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es definida positiva, es decir

$$\sum_{j,k=1}^N c_{j-k} \lambda_j \overline{\lambda_k} \geq 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}.$$

En este caso la sucesión $\{\langle U^n x, x \rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es definida positiva, pues

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N c_{j-k}(x) \lambda_j \overline{\lambda_k} &= \sum_{j,k=1}^N \langle U^{j-k} x, x \rangle \lambda_j \overline{\lambda_k} \\ &= \sum_{j,k=1}^N \langle \lambda_j U^j x, \lambda_k U^k x \rangle = \left\| \sum_{j=1}^N \lambda_j U^j x \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

2) A continuación queremos encontrar una familia de medidas $\mu_{x,y}(\Delta)$ para las que $\langle U^n x, y \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{x,y}(z)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Para ello utilizamos la identidad de polarización

$$\begin{aligned} \langle U^n x, y \rangle &= \frac{1}{4} [\langle U^n(x+y), x+y \rangle - \langle U^n(x-y), x-y \rangle] \\ &\quad + \frac{i}{4} [\langle U^n(x+iy), x+iy \rangle - \langle U^n(x-iy), x-iy \rangle], \end{aligned}$$

por lo que basta definir

$$\mu_{x,y}(\Delta) = \frac{1}{4} \mu_{x+y}(\Delta) - \frac{1}{4} \mu_{x-y}(\Delta) + \frac{i}{4} \mu_{x+iy}(\Delta) - \frac{i}{4} \mu_{x-iy}(\Delta).$$

3) Fijado Δ de Borel en \mathbb{T} , la función $\beta(\Delta) : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$\beta(\Delta)(x, y) = \mu_{x,y}(\Delta)$ es una forma sesquilineal:

$$\begin{aligned}\langle U^n(\alpha x_1 + x_2), y \rangle &= \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{\alpha x_1 + x_2, y}(z), \\ \alpha \langle U^n x_1, y \rangle + \langle U^n x_2, y \rangle &= \alpha \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{x_1, y}(z) + \int_{\mathbb{T}} z^n d\mu_{x_2, y}(z) \\ &= \int_{\mathbb{T}} z^n d[\alpha \mu_{x_1, y}(z) + \mu_{x_2, y}(z)],\end{aligned}$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu_{\alpha x_1 + x_2, y}(z) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d[\alpha \mu_{x_1, y}(z) + \mu_{x_2, y}(z)],$$

$\forall f$ exponencial trigonométrica. Por linealidad, también es cierta para polinomios trigonométricos y, por el teorema de aproximación de Weierstrass, también para toda función continua o continua a trozos. En particular,

$$\int_{\mathbb{T}} \chi_{\Delta}(z) d\mu_{\alpha x_1 + x_2, y}(z) = \int_{\mathbb{T}} \chi_{\Delta}(z) d[\alpha \mu_{x_1, y}(z) + \mu_{x_2, y}(z)],$$

o bien $\mu_{\alpha x_1 + x_2, y}(\Delta) = \alpha \mu_{x_1, y}(\Delta) + \mu_{x_2, y}(\Delta)$.

Análogamente, debido a la igualdad

$$\begin{aligned}\langle x, U^n y \rangle &= \langle U^{-n} x, y \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\mu_{x, y}(z) \\ &= \overline{\langle U^n y, x \rangle} = \int_{\mathbb{T}} z^{-n} d\overline{\mu_{y, x}(z)}, \quad \forall n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

y razonando como en el caso anterior, se deduce que $\mu_{x, y}(\Delta) = \overline{\mu_{y, x}(\Delta)}$.

4) Veremos a continuación que $F : C(\mathbb{T}) \rightarrow L(H)$, definida por $F(g) = g(U)$, es una representación de $C(\mathbb{T})$ (espacio de las funciones continuas en \mathbb{T} con la norma del supremo), es decir es un homomorfismo de álgebras que cumple $F(g^*) = F(g)^*$, donde definimos $g^*(x) = \overline{g(x)}$.

Definimos en primer lugar $F : \mathcal{P} \rightarrow L(H)$ por $F(p) = p(U)$, donde denotamos por $\mathcal{P} = \{p : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} : p(z) = \sum_{n=N_1}^{N_2} a_n z^n\}$ al espacio de los polinomios trigonométricos con la norma del supremo. Resultan de la definición las siguientes propiedades:

i) F es lineal, $F(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2) = \alpha_1 F(p_1) + \alpha_2 F(p_2)$.

ii) F es multiplicativa, $F(p_1 p_2) = F(p_1) F(p_2)$.

iii) $\langle p(U)x, y \rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) d\mu_{x, y}(z)$, $\forall x, y \in H$.

iv) $\bar{p}(U) = p(U)^*$:

$$\begin{aligned}\langle x, p(U)^*y \rangle &= \langle p(U)x, y \rangle = \int_{\mathbb{T}} p(z) d\mu_{x,y}(z) = \overline{\int_{\mathbb{T}} \bar{p}(z) d\overline{\mu_{x,y}(z)}} \\ &= \overline{\int_{\mathbb{T}} \bar{p}(z) d\mu_{y,x}(z)} = \langle \bar{p}(U)y, x \rangle = \langle x, \bar{p}(U)y \rangle.\end{aligned}$$

v) Si $p(z) \geq 0$, $\forall z$, entonces $p(U) \geq 0$:

Por el teorema de Fejér-Riesz, si $p \in \mathcal{P}$ es positivo, $\exists q \in \mathcal{P} : p = |q|^2$.
Entonces

$$\langle p(U)x, x \rangle = \langle (\bar{q}q)(U)x, x \rangle = \langle \bar{q}(U)q(U)x, x \rangle = \langle q(U)^*q(U)x, x \rangle = \|q(U)x\|^2 \geq 0.$$

vi) $\|F\| = 1$:

$$\begin{aligned}\|p(U)x\|^2 &= \langle p(U)x, p(U)x \rangle = \langle p(U)^*p(U)x, x \rangle \leq \|p\|_{\infty}^2 \cdot \|x\|^2 \\ \iff &\langle [\|p\|_{\infty}^2 I - p(U)^*p(U)]x, x \rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Como $\|p\|_{\infty}^2 I - p(U)^*p(U) = F(q)$ con $q(z) = \|p\|_{\infty}^2 - |p(z)|^2 \geq 0$, la desigualdad anterior se deduce de v). En definitiva,

$$\|p(U)x\| \leq \|p\|_{\infty} \cdot \|x\| \implies \|p(U)\| \leq \|p\|_{\infty} \implies \|F\| \leq 1.$$

Por otra parte, tomando $p(z) = 1$, $\forall z$, entonces $p(U) = I$ de modo que

$$\|F\| \geq \|p(U)\|/\|p\|_{\infty} = 1 \implies \|F\| = 1.$$

Como F es acotada y $L(H)$ es completo, F se extiende a $\bar{\mathcal{P}}$ que es el espacio $C(\mathbb{T})$ de las funciones continuas con la norma del supremo, donde se mantienen las propiedades anteriores; en particular,

$$(*) \quad \langle F(g)x, y \rangle = \langle g(U)x, y \rangle = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z), \quad \forall g \in C(\mathbb{T}).$$

5) Debido a la equivalencia entre el dual de $C(\mathbb{T})$ y el espacio de las medidas de Borel finitas en \mathbb{T} , dada por $\mu \mapsto l \in C(\mathbb{T})'$, con $l(f) = \int_{\mathbb{T}} f d\mu$, $\forall f \in C(\mathbb{T})$, podemos probar la acotación de $\mu_{x,y}$ como sigue:

$$\begin{aligned}\|\mu_{x,y}\| &= \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{T}} f d\mu_{x,y} \right| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_{\infty} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \{ |\langle f(U)x, y \rangle| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_{\infty} \leq 1 \} \\ &\leq \sup \{ \|f(U)\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\| \leq 1 \} \leq \|x\| \cdot \|y\|.\end{aligned}$$

6) El siguiente paso es extender la representación F a la C^* -álgebra $B(\mathbb{T})$ de las funciones medibles Borel y acotadas en \mathbb{T} .

Fijamos ahora $g \in B(\mathbb{T})$ y definimos $\beta_g(x, y) = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z)$. Debido a que β_g es una forma sesquilineal acotada con $\|\beta_g\| \leq \|g\|_{\infty}$, por el teorema de representación de Riesz para formas sesquilineales (capítulo III, teorema 6.5), existe un único operador $A_g \in L(H)$ tal que $\beta_g(x, y) = \langle A_g x, y \rangle$ y $\|A_g\| \leq \|g\|_{\infty}$. La nueva aplicación $F : B(\mathbb{T}) \rightarrow L(H)$ definida por $F(g) = A_g$ está bien definida, $\|F(g)\| \leq \|g\|_{\infty}$ y

$$(**) \quad \langle F(g)x, y \rangle = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x,y}(z), \quad \forall x, y \in H.$$

Debemos probar a continuación que F es una representación de $B(\mathbb{T})$ que extiende a la correspondiente representación de $C(\mathbb{T})$.

i) Es inmediato de (*) y (**) que se trata de una extensión.

ii) Es también evidente que F es lineal y tiene norma 1.

iii) $F(\bar{g}) = F(g)^*$ pues, $\forall x, y \in H$:

$$\begin{aligned} \langle F(g)^* x, y \rangle &= \langle A_g^* x, y \rangle = \overline{\langle A_g y, x \rangle} = \int_{\mathbb{T}} \overline{g(z)} d\mu_{y,x}(z) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \overline{g(z)} d\mu_{x,y}(z) = \langle A_{\bar{g}} x, y \rangle = \langle F(\bar{g}) x, y \rangle. \end{aligned}$$

iv) F es multiplicativa; para ello veamos en primer lugar que $F(fg) = F(f)F(g)$ con $f \in C(\mathbb{T})$ y $g \in B(\mathbb{T})$, pero debido a las equivalencias

$$\begin{aligned} F(fg) = F(f)F(g) &\iff \langle F(fg)x, y \rangle = \langle F(f)F(g)x, y \rangle = \langle F(g)x, F(f)^* y \rangle \\ &\iff \int_{\mathbb{T}} (fg)(z) d\mu_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} g(z) d\mu_{x, F(f)^* y}(z), \end{aligned}$$

la igualdad anterior será cierta si y sólo si $f d\mu_{x,y} = d\mu_{x, F(f)^* y}$, $\forall f \in C(\mathbb{T})$, o bien $\int_{\mathbb{T}} \varphi f d\mu_{x,y} = \int_{\mathbb{T}} \varphi d\mu_{x, F(f)^* y}$, $\forall \varphi \in C(\mathbb{T})$, lo que equivale a la multiplicatividad de F en $C(\mathbb{T})$ que ya fue probada.

Queda así probado que $\int_{\mathbb{T}} f(z)(g(z) d\mu_{x,y}(z)) = \int_{\mathbb{T}} f(z) d\mu_{x, g(U)^* y}(z)$, $\forall f \in C(\mathbb{T})$, $g \in B(\mathbb{T})$, de donde $g d\mu_{x,y} = d\mu_{x, g(U)^* y}$.

Sean ahora $g, g_1 \in B(\mathbb{T})$; entonces

$$\begin{aligned} \langle F(gg_1)x, y \rangle &= \int_{\mathbb{T}} (gg_1)(z) d\mu_{x,y}(z) = \int_{\mathbb{T}} g_1(z) d\mu_{x, g(U)^* y}(z) \\ &= \langle g_1(U)x, g(U)^* y \rangle = \langle g(U)g_1(U)x, y \rangle = \langle F(g)F(g_1)x, y \rangle. \end{aligned}$$

7) Definimos ahora, para cada Δ de Borel en \mathbb{T} el operador

$$E(\Delta) = F(\chi_{\Delta}) \in L(H).$$

De la definición se deduce directamente que $\langle E(\Delta)x, y \rangle = \mu_{x,y}(\Delta)$. Veamos que E es una medida espectral en \mathbb{T} .

i) $E(\Delta)$ es un proyector ortogonal:

$$\begin{aligned} E(\Delta)^2 &= F(\chi_\Delta) \cdot F(\chi_\Delta) = F(\chi_\Delta \cdot \chi_\Delta) = F(\chi_\Delta) = E(\Delta); \\ E(\Delta)^* &= F(\chi_\Delta)^* = F(\overline{\chi_\Delta}) = F(\chi_\Delta) = E(\Delta). \end{aligned}$$

ii) $E(\mathbb{T}) = F(\chi_{\mathbb{T}}) = F(1) = I$, $E(\emptyset) = F(\chi_\emptyset) = F(0) = 0$.

iii) Si $\Delta_1, \Delta_2 \in \Omega$,

$$E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = F(\chi_{\Delta_1 \cap \Delta_2}) = F(\chi_{\Delta_1} \chi_{\Delta_2}) = F(\chi_{\Delta_1}) F(\chi_{\Delta_2}) = E(\Delta_1) E(\Delta_2).$$

iv) Si $\{\Delta_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ son disjuntos dos a dos, es fácil probar la aditividad finita. Si llamamos $H_n = \bigcup_{k > n} \Delta_k$, para todo $x \in H$ tenemos:

$$\begin{aligned} \left\| E\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Delta_j\right)x - \sum_{j=1}^m E(\Delta_j)x \right\|^2 &= \langle E(H_m)x, E(H_m)x \rangle \\ &= \langle E(H_m)x, x \rangle = \langle F(\chi_{H_m})x, x \rangle \\ &= \int_{\mathbb{T}} \chi_{H_m}(z) d\mu_{x,x}(z) = \sum_{j > m} \mu_{x,x}(\Delta_j), \end{aligned}$$

expresión que tiende a cero si $m \rightarrow \infty$.

8) Por último veamos que $F(g) = \int_{\mathbb{T}} g(z) dE(z)$, $\forall g \in C(\mathbb{T})$:

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\{\Delta_1, \dots, \Delta_n\}$ una partición de \mathbb{T} mediante elementos de Ω tal que

$$\sup\{|g(x) - g(x')| : x, x' \in \Delta_k\} < \varepsilon, \quad (1 \leq k \leq n).$$

Entonces, para cualquier elección $x_k \in \Delta_k$, $\|g - \sum_{k=1}^n g(x_k) \chi_{\Delta_k}\|_\infty < \varepsilon$. Como $\|F\| = 1$, $\|F(g) - \sum_{k=1}^n g(x_k) E(\Delta_k)\| < \varepsilon$, lo que implica que $F(g) = \int_{\mathbb{T}} g(z) dE(z)$, $\forall g \in C(\mathbb{T})$.

En particular, si $g(z) = z^n$, entonces $F(g) = U^n$, de donde $U^n = \int_{\mathbb{T}} z^n dE(z)$, lo que completa la demostración. \diamond

La medida espectral encontrada tiene la siguiente propiedad adicional.

3.6.- Proposición. Si $U \in L(H)$ es un operador unitario y $A \in L(H)$ es un operador que conmuta con U , entonces A conmuta con $E(\Delta)$, para todo Δ de Borel en \mathbb{T} . Además $\mu_{x, A^*y} = \mu_{Ax, y}$.

Demostración. En primer lugar se comprueba que $Ap(U) = p(U)A$, para cualquier polinomio trigonométrico p . A continuación, si aproximamos toda función continua $f \in C(\mathbb{T})$ mediante polinomios trigonométricos (aplicando el teorema de Stone-Weierstrass), se prueba que $Af(U) = f(U)A$. Por último, si $\Delta \in \Omega$, consideremos la sucesión creciente $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones

continuas tal que $g_n \rightarrow \chi_\Delta$. Por el teorema de la convergencia monótona, $\forall x, y \in H$ se tiene:

$$\begin{aligned}\langle AE(\Delta)x, y \rangle &= \langle E(\Delta)x, A^*y \rangle = \mu_{x, A^*y}(\Delta) \\ &= \int_{\mathbb{T}} \chi_\Delta(z) d\mu_{x, A^*y}(z) = \lim_n \int_{\mathbb{T}} g_n(z) d\mu_{x, A^*y}(z) = \lim_n \langle g_n(U)x, A^*y \rangle \\ &= \lim_n \langle Ag_n(U)x, y \rangle = \lim_n \langle g_n(U)Ax, y \rangle = \langle E(\Delta)Ax, y \rangle.\end{aligned}$$

Para la segunda parte, de $AU = UA$ se deduce que:

$$\langle E(\Delta)Ax, y \rangle = \langle AE(\Delta)x, y \rangle = \langle E(\Delta)x, A^*y \rangle \implies \mu_{x, A^*y} = \mu_{Ax, y}. \quad \diamond$$

4. TEOREMA ESPECTRAL DE OPERADORES AUTOADJUNTOS NO ACOTADOS.

Es natural preguntarse si existe una descomposición espectral de todo operador simétrico análoga a la que existe en el caso de operadores acotados. Trabajos importantes, especialmente de Carleman relativos a ecuaciones integrales singulares, mostraron la imposibilidad de obtener una completa analogía. Fue E. Schmidt quien observó que es necesario restringirse a operadores autoadjuntos si se quiere obtener una descomposición análoga. El teorema espectral para operadores autoadjuntos fue probado de diferentes maneras por von Neumann, Stone, Riesz y otros y constituyó el punto de partida de la nueva teoría de operadores lineales en espacios de Hilbert. En esta sección ilustramos una demostración de von Neumann que hace uso de la transformada de Cayley y, por tanto, se basa en la descomposición espectral de operadores unitarios (acotados). Otras demostraciones pueden verse en los distintos textos de Análisis Funcional (ver por ejemplo [BN], [RN], [Fu], [Ru]).

Si uno considera los operadores, acotados o no, en espacios de Hilbert como generalizaciones de los números complejos, se encuentra que muchos resultados sencillos en relación a los números complejos tienen análogos no triviales en el contexto de operadores. Uno de ellos se refiere a la transformada de Möbius. Si en el espacio \mathbb{C} definimos el conjunto $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, la transformación de Möbius $w = \frac{z-i}{z+i}$ es una aplicación biyectiva de \mathbb{R} en $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ cuya inversa es $z = \frac{i(1+w)}{1-w}$. Una adaptación de esta transformación al caso de operadores permitirá aplicar operadores autoadjuntos no

acotados sobre operadores unitarios acotados y operadores simétricos sobre isométricos. Esto permitirá establecer una analogía entre operadores lineales y números complejos. Mediante esta analogía los operadores autoadjuntos jugarán el papel de números reales, los operadores positivos corresponderán a los reales no negativos y los operadores unitarios a los complejos de módulo 1. Esto viene sugerido por el hecho de que el espectro de un operador autoadjunto es real y el de un operador unitario está contenido en \mathbb{T} . El paralelismo es más acusado si tenemos en cuenta que T es autoadjunto en un espacio complejo si y sólo si $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall x$. El siguiente ejemplo muestra que lo anterior no es cierto si el espacio es real:

En el espacio $X = \mathbb{R}^2$ definimos el operador $T(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, x_2)$. Entonces $\langle Tx, x \rangle = 2|x_2|^2 \in \mathbb{R}$ pero $T^*(x_1, x_2) = (x_1, 2x_1 + x_2)$.

La relación entre operadores autoadjuntos y unitarios viene dada por el siguiente resultado.

4.1.- Proposición. *Sea T un operador autoadjunto en H . Entonces los operadores $T \pm iI$ tienen inversas acotadas definidas en todo H y el operador*

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

es un operador unitario en H , llamado transformada de Cayley de T .

Demostración. La primera parte se deduce de los teoremas 1.10 y 1.12 y de las igualdades $N(T \pm iI) = R(T \mp iI)^\perp$.

Para ver que U es unitario, sea $x \in H$ y llamamos $y = (T + iI)^{-1}x$. Entonces:

$$\begin{aligned} \|Ux\|^2 &= \langle (T - iI)y, (T - iI)y \rangle = \langle Ty, Ty \rangle - i\langle y, Ty \rangle + i\langle Ty, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle Ty, Ty \rangle - i\langle Ty, y \rangle + i\langle y, Ty \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \langle (T + iI)y, (T + iI)y \rangle = \|x\|^2. \quad \diamond \end{aligned}$$

Recíprocamente, conocida la transformada de Cayley de un operador autoadjunto, se puede extraer este como sigue.

4.2.- Proposición. *Si U es la transformada de Cayley de un operador autoadjunto T en H , entonces $I - U$ es inyectiva y $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$.*

Demostración. Si $(I - U)x = 0$ y llamamos $y = (T + iI)^{-1}x$, tenemos:

$$x = Ux \implies x = (T - iI)y \implies (T + iI)y = (T - iI)y \implies y = 0 \implies x = 0.$$

La segunda parte se obtiene por cálculo directo. \diamond

4.3.- Corolario. *Sea U la transformada de Cayley de un operador autoadjunto T . Entonces 1 no es autovalor de U . Además 1 está en la resolvente de U si y sólo si T es acotado.*

El recíproco del resultado anterior también es cierto: si 1 no es autovalor de un operador unitario U , entonces U es la transformada de Cayley de algún operador autoadjunto.

Los dos últimos teoremas, con los que concluimos el capítulo y el curso, permiten establecer una correspondencia biunívoca entre las medidas espectrales en \mathbb{R} y los operadores autoadjuntos.

4.4.- Teorema (espectral de operadores autoadjuntos.) *Sea $T : D(T) \rightarrow H$ un operador autoadjunto con dominio denso en H . Entonces existe una medida espectral P en \mathbb{R} tal que $T = \int_{\mathbb{R}} \lambda dP(\lambda)$.*

Demostración. Sea $U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$ la transformada de Cayley de T ; como ya se ha probado, U es unitario, $I - U$ es inyectivo y $T = i(I + U)(I - U)^{-1}$ con $D(T) = (I - U)(H)$.

Por el teorema espectral de operadores unitarios, existe E medida espectral en \mathbb{T} tal que $U = \int_{\mathbb{T}} z dE(z)$.

Por ser $I - U$ inyectivo, 1 no es valor propio de U . De aquí se deduce que $E(\{1\}) = 0$.

En efecto, supongamos por el contrario que $H_0 = E(\{1\})H \neq \{0\}$. Entonces existe $x \neq 0$ tal que $x = E(\{1\})x$ de donde $Ux = UE(\{1\})x$. Como $E(\{1\})$ es el operador asociado a la función característica $\chi_{\{1\}}$, tenemos:

$$Ux = UE(\{1\})x = \int_{\mathbb{T}} \lambda \cdot \chi_{\{1\}}(\lambda) dE(\lambda)x = 1 \cdot E(\{1\})x = x,$$

lo cual contradice que $I - U$ es inyectivo.

Como la función $\varphi : \mathbb{T} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(z) = i \cdot \frac{1+z}{1-z}$ es biyectiva, la función $P(\Delta) = E(\varphi^{-1}(\Delta))$, $\forall \Delta$ de Borel en \mathbb{R} , es una medida espectral en \mathbb{R} (como $E(\{1\}) = 0$, $E(\mathbb{T}) = E(\mathbb{T} \setminus \{1\}) = I$).

Debido a la fórmula de la transformada de Cayley, procediendo formalmente, obtenemos:

$$T = i(I + U)(I - U)^{-1} = \int_{\mathbb{T}} i \cdot \frac{1+z}{1-z} dE(z) = \int_{\mathbb{T}} \varphi(z) dE(z);$$

si hacemos el cambio $\lambda = \varphi(z)$, resulta

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\varphi^{-1}(\lambda)) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dP(\lambda). \quad \diamond$$

Veamos el sentido de la expresión $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP(\lambda)$, con $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función medible, no necesariamente acotada.

4.5.- Teorema. Sea P una medida espectral en \mathbb{R} y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Existe entonces un único operador autoadjunto T con dominio

$$D(T) = \{x \in H : \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda) d\langle P(\lambda)x, x \rangle < \infty\}$$

tal que $T = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dP(\lambda)$ y $\|Tx\|^2 = \int_{\mathbb{R}} f^2(\lambda) d\langle P(\lambda)x, x \rangle$, $\forall x \in D(T)$.

Demostración. Haremos la demostración en dos pasos.

1) Si f es acotada, $\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP(\lambda)$ es un operador acotado simétrico:

En efecto, la aplicación $\beta(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle P(\lambda)x, y \rangle$ es un funcional sesquilineal acotado pues

$$|\beta(x, y)| \leq \|f\|_{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\langle P(\lambda)x, y \rangle \leq \|f\|_{\infty} \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Por tanto, existe un operador $T \in L(H)$ tal que $\beta(x, y) = \langle Tx, y \rangle$, $\forall x, y \in H$. Además T es autoadjunto pues

$$\begin{aligned} \langle x, Ty \rangle &= \overline{\langle Ty, x \rangle} = \overline{\beta(y, x)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\overline{\langle P(\lambda)y, x \rangle} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d\langle P(\lambda)x, y \rangle = \beta(x, y) = \langle Tx, y \rangle. \end{aligned}$$

Escribiremos en este caso $T = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) dP(\lambda)$.

2) Si f es medible, llamamos $\Delta_n = f^{-1}[n, n+1)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$; por definición, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_n$ y la unión es disjunta. Si llamamos ahora $\varphi_n = \chi_{\Delta_n}$, $P_n = P(\Delta_n)$ y $H_n = P_n H$, entonces $1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n$, $I = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n$, $H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n$ (donde la suma es ortogonal por ser $\{P_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una familia ortogonal de proyecciones).

Como ahora $f(\lambda)\varphi_n(\lambda)$ son funciones acotadas para todo n , existen, según el apartado anterior, T'_n operadores simétricos y acotados tales que

$$T'_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\varphi_n(\lambda) dP(\lambda).$$

Veamos ahora que $T'_n H \subset H_n$, para lo cual basta probar que $P_n T'_n = T'_n$:

Como $T'_n = \int_{\Delta_n} f(\lambda) dP(\lambda)$, podemos aproximarlos por sumas de Riemann del tipo $T'_n \sim \sum_{j=1}^k f(\lambda_j) P(F_j)$, siendo $\{F_1, \dots, F_k\}$ una partición de Δ_n y $\lambda_j \in F_j$ ($j = 1, \dots, k$). Entonces

$$P_n T'_n \sim \sum_{j=1}^k f(\lambda_j) P(\Delta_n) P(F_j) = \sum_{j=1}^k f(\lambda_j) P(\Delta_n \cap F_j) = \sum_{j=1}^k f(\lambda_j) P(F_j).$$

Como ambas sumas de Riemann coinciden, $T'_n = P_n T'_n$ y, en consecuencia, $R(T'_n) \subset H_n$.

Lo anterior permite definir los operadores

$$T_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \varphi_n(\lambda) dP(\lambda)|_{H_n} : H_n \rightarrow H_n$$

y probaremos a continuación que existe un único operador autoadjunto T en H tal que $T|_{H_n} = T_n$ (teorema de Riesz-Lorch):

Definimos pues $Tx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n P_n x$ cuyo dominio es

$$D = \{x \in H : \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|T_n P_n x\|^2 < \infty\}$$

(ver teorema 4.7, capítulo III). Así $x \in D$ si y sólo si $\sum_{n \in [-k, k]} T_n P_n x$ converge cuando $k \rightarrow \infty$.

Así definido se cumplen las siguientes propiedades:

- i) $D \supset H_n, \forall n \in \mathbb{Z}$.
- ii) T está bien definido pues, si $x \in D$,

$$Tx = T\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} P_n x\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T(P_n x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} T_n P_n x.$$

- iii) D es denso en H . En efecto, por i),

$$H_n \subset D \implies \langle \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H_n \rangle \subset D \implies \overline{\langle \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H_n \rangle} \subset \overline{D} \implies H = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H_n \subset \overline{D}.$$

- iv) $D = \{x \in H : \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\langle P(\lambda)x, x \rangle < \infty\}$ pues

$$\begin{aligned} \|T_n P_n x\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) \varphi_n^2(\lambda) d\langle P(\lambda)x, x \rangle = \int_{\Delta_n} f^2(\lambda) d\langle P(\lambda)x, x \rangle \\ &\implies \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|T_n P_n x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\lambda) d\langle P(\lambda)x, x \rangle. \end{aligned}$$

- v) T es simétrico pues, $\forall x, x' \in H$,

$$\begin{aligned} \langle Tx, x' \rangle &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle T_n P_n x, x' \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle T_n P_n x, P_n x' \rangle \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle P_n x, T_n P_n x' \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle x, T_n P_n x' \rangle = \langle x, Tx' \rangle. \end{aligned}$$

- vi) T es autoadjunto, para lo cual basta probar que $D(T^*) \subset D(T)$.
 Sea $y \in D(T^*)$; entonces existe y^* tal que $\langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle$, $\forall x \in D$.
 Veamos que $P_n y^* = T_n P_n y$:

$$\begin{aligned}\langle T_n P_n y, x \rangle &= \langle T_n P_n y, P_n x \rangle = \langle P_n y, T_n P_n x \rangle = \langle y, T_n P_n x \rangle \\ &= \langle y, T P_n x \rangle = \langle y^*, P_n x \rangle = \langle P_n y^*, x \rangle, \quad \forall x \in H.\end{aligned}$$

Entonces $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|T_n P_n y\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|P_n y^*\|^2 = \|y^*\|^2 < \infty \implies y \in D$.

- vii) T es único. Para ello, supongamos que existe un operador autoadjunto S tal que $S|_{H_n} = T_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Veamos que $S = T$.
 Si $x \in D(T)$, debido a que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \|S P_n x\|^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \|T_n P_n x\|^2 < \infty,$$

se deduce que $\sum_{n \in \mathbb{N}} S P_n x$ converge.

Por otro lado, como las sumas parciales de $\sum_{n \in \mathbb{N}} P_n x$ (que están en $D(S)$) convergen a x y S es cerrado, $x \in D(S)$ y además

$$Sx = \sum_{n \in \mathbb{N}} S P_n x = \sum_{n \in \mathbb{N}} T_n P_n x = Tx.$$

Esto implica que $T \subset S$.

Recíprocamente, por ser S autoadjunto, de la proposición 1.4 deducimos que $S = S^* \subset T^* = T$, de donde $S = T$. \diamond

Observaciones. 1) La forma que adopta la descomposición espectral de un operador autoadjunto no acotado es similar a la correspondiente del caso acotado. Sin embargo aquí los límites de integración en la representación no son finitos debido a que el espectro de un operador autoadjunto no acotado, aun siendo real, no es acotado.

2) De la descomposición espectral de un operador autoadjunto T se puede obtener también una fórmula para la resolvente $R_z = (T - zI)^{-1}$ (ver propiedades de la misma en los ejercicios al final del capítulo). Más precisamente, si P es la medida espectral de T ,

$$R_z = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\lambda - z} dP(\lambda)$$

para cualquier valor de z donde tengan sentido dichas expresiones. Esta fórmula se puede generalizar a operadores simétricos arbitrarios y proporcionar así diversas aplicaciones de la teoría de operadores.

3) Algunas notas históricas con respecto al teorema espectral pueden consultarse en las obras de Steen [Ste], Dunford-Schwartz [DS] y Halmos [Ha1].

EJERCICIOS.

1. a) Probar que los operadores $Mf(x) = xf(x)$, $Df(x) = f'(x)$ definidos en $L^2(\mathbb{R})$ son operadores simétricos no acotados y verifican la relación de conmutación $DM - MD = I$.

- b) Probar que no existe ningún par de operadores acotados A, B que cumplan la relación $AB - BA = I$.

Resp.: a) En diversos lugares se ha probado ya que dichos operadores son simétricos no acotados. Además

$$DMf(x) = D(xf(x)) = xf'(x) + f(x) = (I + MD)f(x),$$

es decir $DM - MD = I$ (en esta fórmula se basa el principio de incertidumbre en Mecánica Cuántica).

- b) Supongamos que existen $A, B \in L(H)$ tales que $AB - BA = I$. Entonces, multiplicando a izquierda y derecha por A , obtenemos:

$$A^2B - ABA = A \quad \text{y} \quad ABA - BA^2 = A.$$

Al sumar miembro a miembro, resulta que $A^2B - BA^2 = 2A$.

Repetiendo el proceso, se llega a la igualdad general

$$A^nB - BA^n = nA^{n-1}.$$

Entonces $n\|A^{n-1}\| \leq \|A^nB\| + \|BA^n\| \leq \|A^{n-1}\| \cdot \|AB\| + \|BA\| \cdot \|A^{n-1}\|$.

Si suponemos que $A \neq 0$, entonces $\|A^{n-1}\| \neq 0, \forall n$, y de lo anterior se deduce que $n \leq \|AB\| + \|BA\| \leq 2\|A\| \cdot \|B\|$, lo cual contradice el hecho de que A y B son operadores acotados.



2. Sean T_1, T_2, T_3 tres operadores arbitrarios.

- a) Probar que $(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$.

- b) Probar que $T_1 \subset T_2 \implies T_3T_1 \subset T_3T_2$ y $T_1T_3 \subset T_2T_3$.

Resp.: a) Veamos en primer lugar que $D((T_1T_2)T_3) = D(T_1(T_2T_3))$.

En efecto,

$$\begin{aligned} x \in D((T_1 T_2) T_3) &\iff x \in D(T_3), T_3 x \in D(T_1 T_2) \\ &\iff x \in D(T_3), T_3 x \in D(T_2), T_2 T_3 x \in D(T_1) \\ &\iff x \in D(T_2 T_3), T_2 T_3 x \in D(T_1) \iff x \in D(T_1 (T_2 T_3)). \end{aligned}$$

Por otra parte, es evidente que, si $x \in D((T_1 T_2) T_3)$, entonces $(T_1 T_2) T_3 x = T_1 (T_2 T_3) x$.

b) Como, por hipótesis, $T_1 \subset T_2$, entonces $D(T_1) \subset D(T_2)$ y $T_1 x = T_2 x$, $\forall x \in D(T_1)$. Resulta así:

$$\begin{aligned} x \in D(T_3 T_1) &\implies x \in D(T_1), T_1 x \in D(T_3) \\ &\implies x \in D(T_2), T_2 x \in D(T_3) \implies x \in D(T_3 T_2). \end{aligned}$$

Además, $\forall x \in D(T_3 T_1)$:

$$(T_3 T_1) x = T_3 (T_1 x) = T_3 (T_2 x) = (T_3 T_2) x,$$

lo que prueba que $T_3 T_1 \subset T_3 T_2$.

Con el otro caso se procede de la misma forma.



3. Sea $H = L^2(\mathbb{R})$ y llamamos $D = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : x \cdot f(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$. Probar que el operador $T : H \rightarrow H$ definido por $Tf(x) = xf(x)$ con dominio D es autoadjunto. [Este es el llamado operador posición en Mecánica Cuántica.]

Resp.: Veamos que D es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Para ello, basta observar que D contiene al conjunto de las funciones con soporte compacto y que este conjunto es denso en $L^2(\mathbb{R})$.

Veamos a continuación que T es simétrico:

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \overline{xg(x)} dx = \langle f, Tg \rangle, \quad \forall f, g \in D.$$

Esto implica que $T \subset T^*$ (ver proposición 1.6).

Por último, comprobaremos que $D(T^*) \subset D(T)$:

Sea $g \in D(T^*)$ y llamemos $g^* = T^*g$. Por definición de adjunto,

$$\forall f \in D(T), \quad \int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g^*(x)} dx.$$

Si tomamos $f(x) = \chi_{[\alpha, x_0]}$, la igualdad anterior queda

$$\int_{\alpha}^{x_0} x \overline{g(x)} dx = \int_{\alpha}^{x_0} \overline{g^*(x)} dx$$

y, derivando, $x_0 \overline{g(x_0)} = \overline{g^*(x_0)}$ para casi todo x_0 . Esto implica que $g \in D$ y $T^*g(x) = xg(x)$.

De lo anterior se deduce que T es autoadjunto.



4. Sea $H = L^2(\mathbb{R})$ y $D = \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f \text{ es absolutamente continua en todo intervalo finito y } f' \in L^2(\mathbb{R})\}$. Probar que el operador $T : H \rightarrow H$ definido en D por $Tf(x) = -if'(x)$ es autoadjunto. [Este es el operador momento en Mecánica Cuántica.]

Resp.: Definimos para cada n la función continua

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [\alpha, x_0] \\ 0 & \text{si } x \leq \alpha - 1/n \text{ ó } x \geq x_0 + 1/n \\ \text{recta} & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Las combinaciones lineales de funciones de la forma de f_n con diferentes valores de α , x_0 y n son densas en $L^2(\mathbb{R})$. Por tanto, D es denso en H .

Para probar que T es simétrico, sea $g \in D$. Entonces, $\forall f \in D$, integrando por partes obtenemos:

$$\int_a^b -if'(x) \overline{g(x)} dx = -if(x) \overline{g(x)} \Big|_a^b + \int_a^b f(x) [\overline{-ig'(x)}] dx.$$

Como $f(x) \overline{g(x)}$ es integrable en \mathbb{R} , se deduce que $\lim_{a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty} f(x) \overline{g(x)} \Big|_a^b = 0$ y

$$\langle Tf, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} -if'(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) [\overline{-ig'(x)}] dx = \langle f, Tg \rangle.$$

Esto implica que $g \in D(T^*)$ y $T^*g(x) = -ig'(x)$, es decir $T \subset T^*$.

Sólo falta comprobar, al igual que en el ejercicio anterior, que $D(T^*) \subset D$. Sea para ello $g \in D(T^*)$ y llamemos $g^* = T^*g$. Como sabemos,

$$\int_{\mathbb{R}} -if'(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g^*(x)} dx, \quad \forall f \in D.$$

Eliendo las funciones f_n anteriores, la igualdad anterior se escribe como:

$$n \int_{\alpha-1/n}^{\alpha} -i \overline{g(x)} dx - n \int_{x_0}^{x_0+1/n} -i \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \overline{g^*(x)} dx.$$

Haciendo $n \rightarrow \infty$, obtenemos:

$$-i(\overline{g(\alpha)} - \overline{g(x_0)}) = \int_{\alpha}^{x_0} \overline{g^*(x)} dx \text{ para casi todos } \alpha \text{ y } x_0.$$

Por la desigualdad de Schwarz, se deduce que g^* es integrable sobre cualquier intervalo finito. Entonces $g(x_0)$ es absolutamente continua en x_0 sobre cualquier intervalo finito y, por tanto, $-ig'(x_0) = g^*(x_0)$ para casi todo x_0 . Esto implica que $g \in D$ y $T^*g(x) = -ig'(x)$.



5. Probar que el operador $T_1 f(x) = if'(x)$ es simétrico en $D(T_1) = \{f \in L^2[0, 1] : f \text{ es absolutamente continua, } f(0) = f(1) = 0, f' \in L^2[0, 1]\}$ pero no es autoadjunto.

Resp.: Veamos que $T_1^* = T_2$ donde $T_2 f(x) = if'(x)$ tiene dominio $D(T_2) = \{f \in L^2[0, 1] : f \text{ es absolutamente continua y } f' \in L^2[0, 1]\}$.

Debido a que $\overline{D(T_1)} = L^2[0, 1]$, existe el adjunto T_1^* . Si $g \in D(T_1^*)$ y llamamos $g^* = T_1^*g$, entonces

$$\forall f \in D(T_1) : \int_0^1 if'(x) \overline{g(x)} dx = \int_0^1 f(x) \overline{g^*(x)} dx.$$

Si integramos por partes, $\int_0^1 f(x) \overline{g^*(x)} dx = -\int_0^1 f'(x) \overline{G^*(x)} dx$, donde $G^*(x) = \int_0^x g^*(s) ds$.

Como $f(1) = \int_0^1 f'(x) dx = 0$, entonces

$$\int_0^1 f'(x) [\overline{G^*(x)} + i \overline{g(x)} + \overline{c}] dx = 0, \quad \forall f \in D(T_1), \quad \forall c.$$

Por otra parte, $\forall h \in L^2[0, 1]$, la función $H(x) = \int_0^x h(s) ds - x \int_0^1 h(s) ds$ está en $D(T_1)$. Para esta función se tiene:

$$\int_0^1 \left\{ h(x) - \int_0^1 h(s) ds \right\} [\overline{G^*(x)} + i \overline{g(x)} + \overline{c}] dx = 0.$$

Eliendo c de modo que $\int_0^1 [G^*(x) - ig(x) + c] dx = 0$, resulta la igualdad

$\int_0^1 h(x) [\overline{G^*(x)} + i \overline{g(x)} + \bar{c}] dx = 0$. Al ser h arbitrario, $G^*(x) = \int_0^x g^*(s) ds = ig(x) - c$. Por tanto, $g \in D(T_2)$ y $T_2 g = g^*$, lo que prueba que $T_1^* \subset T_2$.

Es claro también, integrando por partes, que $T_2 \subset T_1^*$, lo que completa la prueba.



6. Sea $T : D(T) \subset H \rightarrow H$ un operador lineal con dominio denso en H . Probar la siguiente equivalencia:

i) T es clausurable

ii) $\overline{D(T^*)} = H$.

Resp.: La implicación i) \implies ii) corresponde a la proposición 1.8.b). El recíproco se deduce del apartado 2 del corolario 1.9 (basta observar que $T \subset T^{**}$ y que T^{**} es cerrado).



7. A la ecuación diferencial $f'' - f = g$, siendo $g \in L^2[0, 1]$ una función conocida, se le asocian los tres problemas de contorno siguientes:

a) $f(0) = f(1) = 0$.

b) $f'(0) = f'(1) = 0$.

c) $f(0) = f(1)$ y $f'(0) = f'(1)$.

Mostrar que los tres problemas tienen solución única f tal que f' es absolutamente continua y $f'' \in L^2[0, 1]$.

Resp.: En el espacio de Hilbert $H = L^2[0, 1]$ definimos los operadores $T_k f = if'$ ($k = 1, 2, 3$), con dominios

$$D(T_1) = \{f \in H : f \text{ es absolutamente continua y } f' \in H\}$$

$$D(T_2) = \{f \in D(T_1) : f(0) = f(1)\} \subset D(T_1)$$

$$D(T_3) = \{f \in D(T_2) : f(0) = f(1) = 0\} \subset D(T_2).$$

Entonces $T_3 \subset T_2 \subset T_1$ y además $T_1^* = T_3$, $T_2^* = T_2$ y $T_3^* = T_1$ (como observábamos en el ejemplo de la página 322).

a) Sea $f \in D(T_3^*T_3)$; entonces $(I + T_3^*T_3)f = f + T_1T_3f = f - f''$. Como T_3 es cerrado (pues $T_3 = T_1^*$), y $D(T_3) = H$, entonces $I + T_3^*T_3 : D(T_3^*T_3) \rightarrow H$ es biyectivo (teorema 1.13). Así pues, $\forall g \in H$, existe un único $f \in D(T_3^*T_3)$ tal que $(I + T_3^*T_3)f = -g$, es decir $f'' - f = g$. Ahora bien, por ser $f \in D(T_3^*T_3)$, $f \in D(T_3)$ y $T_3f \in D(T_3^*)$, es decir $f(0) = f(1) = 0$, f' es absolutamente continua y $f'' \in H$, lo que resuelve el problema a).

b) Sea ahora $f \in D(T_1^*T_1)$; nuevamente, $(I + T_1^*T_1)f = f + T_3T_1f = f - f''$. El teorema 1.13 prueba también que el operador $I + T_1^*T_1 : D(T_1^*T_1) \rightarrow H$ es biyectivo. Así pues, $\forall g \in H$, existe un único $f \in D(T_1^*T_1)$ tal que $(I + T_1^*T_1)f = -g$, es decir $f'' - f = g$. Dicha solución verifica ahora que $f \in D(T_1)$ y $T_1f \in D(T_1^*)$, lo que corresponde a las condiciones $f'(0) = f'(1) = 0$, f' absolutamente continua y $f'' \in L^2[0, 1]$.

c) Consideramos en este caso $f \in D(T_2^*T_2)$. Repitiendo el proceso seguido en los dos casos anteriores se prueba la existencia de solución para este problema.



8. Dada $g \in L^2(\mathbb{R})$, probar que la ecuación diferencial $f'' - f = g$ tiene solución única $f \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $f', f'' \in L^2(\mathbb{R})$ y f, f' son absolutamente continuas.

Mediante cálculo directo, encontrar la fórmula

$$f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^{t-x} g(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^{\infty} e^{x-t} g(t) dt$$

para determinar la solución de la ecuación.

Resp.: Consideramos el operador $Tf = if'$ con dominio el conjunto de funciones absolutamente continuas en un intervalo cerrado de \mathbb{R} y cuya derivada está en $L^2(\mathbb{R})$.

Como dicho dominio es denso en $L^2(\mathbb{R})$ y T es autoadjunto, el teorema 1.13 prueba que $I + T^2 : D(T^2) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ es biyectivo. Así pues, dado $g \in L^2(\mathbb{R})$, existe un único $f \in D(T^2)$ tal que $(I + T^2)f = -g$, es decir $f'' - f = g$. Como $f \in D(T)$ y $f' \in D(T)$, la solución f es absolutamente continua y $f' \in L^2(\mathbb{R})$, así como también f' es absolutamente continua y $f'' \in L^2(\mathbb{R})$.

Para resolver explícitamente la ecuación $f'' - f = g$, busquemos en primer lugar la solución general de la ecuación homogénea asociada

$f'' - f = 0$, lo que da el conjunto $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, con C_1, C_2 constantes arbitrarias.

A continuación aplicamos el método de variación de constantes para resolver la ecuación no homogénea, es decir resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-x} &= 0 \\ C_1'(x)e^x - C_2'(x)e^{-x} &= g(x) \end{aligned}$$

el cual tiene como solución $C_1'(x) = (1/2)g(x)e^{-x}$, $C_2'(x) = -(1/2)g(x)e^x$. La solución general de la ecuación queda pues de la forma indicada en el enunciado.

————— $\diamond\diamond$ —————

9. Sea E una medida espectral arbitraria (ver definición 3.2). Probar que $|\langle E_{x,y}(\Delta) \rangle|^2 \leq E_{x,x}(\Delta)E_{y,y}(\Delta)$, $\forall x, y \in H$.

Resp.: Teniendo en cuenta que $E(\Delta)$ es una proyección ortogonal, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos:

$$\begin{aligned} |\langle E(\Delta)x, y \rangle|^2 &= |\langle E(\Delta)x, E(\Delta)y \rangle|^2 \\ &\leq \|E(\Delta)x\|^2 \cdot \|E(\Delta)y\|^2 = \langle E(\Delta)x, E(\Delta)x \rangle \cdot \langle E(\Delta)y, E(\Delta)y \rangle \\ &= \langle E(\Delta)x, x \rangle \cdot \langle E(\Delta)y, y \rangle. \end{aligned}$$

————— $\diamond\diamond$ —————

10. Sea T un operador simétrico con dominio denso. Probar que el operador $U : R(T + iI) \rightarrow R(T - iI)$ definido por

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

(llamado también transformada de Cayley de T) es isométrico.

Resp.: Veamos en primer lugar que existe $(T + iI)^{-1}$ y es acotado (como operador definido en $R(T + iI)$). Para ello basta observar la siguiente desigualdad, que es consecuencia de la proposición 1.12:

$$\|(T + iI)x\|^2 = \|Tx\|^2 + \|x\|^2 \geq \|x\|^2, \quad \forall x \in D(T).$$

Para probar que U es isométrico, sean $x, y \in D(U)$. Entonces $\exists f, g \in D(T)$ tales que $x = (T + iI)f$, $y = (T + iI)g$. Así pues,

$$\begin{aligned} \langle Ux, Uy \rangle &= \langle (T - iI)f, (T - iI)g \rangle \\ &= \langle Tf, Tg \rangle + \langle Tf, -ig \rangle + \langle -if, Tg \rangle + \langle -if, -ig \rangle \\ &= \langle Tf, Tg \rangle + i\langle f, Tg \rangle - i\langle Tf, g \rangle + \langle if, ig \rangle \\ &= \langle Tf, Tg + ig \rangle + \langle if, Tg + ig \rangle = \langle Tf + if, Tg + ig \rangle = \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$



11. En el espacio ℓ^2 se define el operador V por $V(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Probar que V es la transformada de Cayley de un operador simétrico T con índices de defecto 0 y 1, donde, por definición, los índices de defecto de un operador simétrico T son las dimensiones de $R(T+iI)^\perp$ y $R(T-iI)^\perp$. Hallar una expresión de T .

Resp.: (•) Veamos en primer lugar que V es isometría:

$$\forall \alpha \in \ell^2 : \|\alpha\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 \text{ y } \|V\alpha\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 = \|\alpha\|_2^2.$$

Sin embargo, V no es unitario pues el elemento $\alpha = (1/n)_{n \in \mathbb{N}}$ está en ℓ^2 pero no está en el rango de V .

(•) Probaremos a continuación que $I - V$ es inyectiva. En efecto, si $\alpha \in N(I - V)$, entonces $\alpha = V\alpha$, es decir $\alpha_1 = 0$, $\alpha_{n+1} = \alpha_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde $\alpha = 0$.

(•) De las condiciones anteriores se deduce la existencia de un operador simétrico T cuya transformada de Cayley es V , $T = i(I+V)(I-V)^{-1}$, y $D(T) = R(I-V)$.

(•) Calcularemos a continuación los índices de defecto de T :

Como $D(V) = \ell^2$, $R(T+iI) = \ell^2$ de donde $\dim R(T+iI)^\perp = 0$.

Por otra parte, como $R(V) = \{(0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) : \sum_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|^2 < \infty\}$, entonces $R(V)^\perp$ está generado por el elemento $(1, 0, 0, \dots)$. Teniendo en cuenta que $R(V) = R(T-iI)$, es evidente que $\dim R(T-iI)^\perp = 1$.

(•) Para obtener una expresión explícita de T , observemos que $(I-V)(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_1, \dots)$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (I-V)^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) &= (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \sum_{k=1}^n \alpha_k, \dots) \\ (I+V)(\alpha_1, \alpha_2, \dots) &= (\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \dots) \\ \implies T(\alpha_1, \alpha_2, \dots) &= i(I+V)(I-V)^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) \\ &= i(\alpha_1, \alpha_2 + 2\alpha_1, \dots, \alpha_n + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k, \dots), \end{aligned}$$

con $D(T) = \{(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} : |\alpha_1|^2 + |\alpha_1 + \alpha_2|^2 + \dots + |\sum_{k=1}^n \alpha_k|^2 + \dots < \infty\}$.



12. Sea T un operador autoadjunto con dominio denso en H y $R_z = (T - zI)^{-1}$ el operador resolvente definido en el conjunto de valores $\{z \in \mathbb{C} : \exists (T - zI)^{-1}, \overline{R(T - zI)} = H\}$. Probar:

a) $\|R_z x\| \leq (1/|\beta|)\|x\|$ si $\beta = \text{Im } z \neq 0$.

b) $R_{z_2} - R_{z_1} = (z_2 - z_1)R_{z_2}R_{z_1}$, $\forall z_1, z_2 \in \rho(T)$.

c) $(R_z)^* = R_{\bar{z}}$.

Resp.: a) A partir de la igualdad

$$\|(T - zI)x\|^2 = \beta^2\|x\|^2 + \|(T - \alpha I)x\|^2, \quad \forall x \in D(T), \quad z = \alpha + i\beta,$$

si hacemos $y = (T - zI)x$, resulta $\|y\|^2 \geq \beta^2\|(T - zI)^{-1}y\|^2$.

b) Es evidente que

$$\begin{aligned} R_{z_2} - R_{z_1} &= R_{z_2}(T - z_1I)R_{z_1} - R_{z_2}(T - z_2I)R_{z_1} \\ &= R_{z_2}[(T - z_1I) - (T - z_2I)]R_{z_1} = (z_2 - z_1)R_{z_2}R_{z_1}. \end{aligned}$$

De esta relación se deduce la conmutatividad $R_{z_1}R_{z_2} = R_{z_2}R_{z_1}$, $\forall z_1, z_2 \in \rho(T)$.

c) Como $\overline{D(R_z)} = H$, existe $(R_z)^*$. Además, $\forall x \in D(R_z)$, $y \in D(R_{\bar{z}})$:

$$\begin{aligned} \langle R_z x, y \rangle &= \langle R_z x, (T - \bar{z}I)R_{\bar{z}}y \rangle = \langle (T - zI)R_z x, R_{\bar{z}}y \rangle \\ &= \langle x, R_{\bar{z}}y \rangle \implies R_{\bar{z}} = (R_z)^*. \end{aligned}$$

TEMAS COMPLEMENTARIOS.

1. Operadores de multiplicación y derivación ([AG], [Kr]).
2. Semigrupos de operadores ([Ru]).
3. Operadores no acotados en Mecánica Cuántica ([Kr]).
4. Operadores cerrados y clausurables. Teorema de la aplicación abierta para operadores no acotados ([CC]).

APÉNDICE 1

INTRODUCCIÓN A LOS ESPACIOS DE KREIN.

Una forma de generalizar el concepto de producto escalar viene motivada por el siguiente ejemplo.

1. Ejemplo. En el espacio $K = \ell^2$ se define el producto

$$[x, y] = \sum_{m \in A} x_m \overline{y_m} - \sum_{m \notin A} x_m \overline{y_m},$$

para cualesquiera $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$, donde A es cualquier subconjunto (fijo) de \mathbb{N} .

(1) *El producto $[\cdot, \cdot]$ es una forma sesquilineal hermitica en K pero no necesariamente un producto escalar.*

En efecto, de la desigualdad de Hölder se deduce que las series $\sum_{m \in A} x_m \overline{y_m}$ y $\sum_{m \notin A} x_m \overline{y_m}$ son absolutamente convergentes. Esto permite sumarlas término a término y multiplicarlas por constantes arbitrarias; es decir:

$$\begin{aligned} [\alpha x + \beta y, z] &= \sum_{m \in A} (\alpha x_m + \beta y_m) \overline{z_m} - \sum_{m \notin A} (\alpha x_m + \beta y_m) \overline{z_m} \\ &= \alpha \sum_{m \in A} x_m \overline{z_m} + \beta \sum_{m \in A} y_m \overline{z_m} - \alpha \sum_{m \notin A} x_m \overline{z_m} - \beta \sum_{m \notin A} y_m \overline{z_m} \\ &= \alpha [x, z] + \beta [y, z]; \\ \overline{[x, y]} &= \overline{\sum_{m \in A} x_m \overline{y_m} - \sum_{m \notin A} x_m \overline{y_m}} = \sum_{m \in A} \overline{x_m} y_m - \sum_{m \notin A} \overline{x_m} y_m = [y, x]. \end{aligned}$$

Para ver que no es un producto escalar, observamos que

$$[x, x] = \sum_{m \in A} |x_m|^2 - \sum_{m \notin A} |x_m|^2,$$

de modo que, si elegimos la sucesión $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K$, con $x_n = 0$ para $n \in A$, entonces $[x, x] = -\sum_{m \notin A} |x_m|^2 < 0$.

(2) El producto anterior es no-degenerado, es decir se verifica

$$[x, y] = 0, \forall y \in K \implies x = 0.$$

(3) El producto anterior, restringido a los espacios $K^+ = \{x \in K : \text{sop}(x) \subset A\}$ y $K^- = \{x \in K : \text{sop}(x) \subset \mathbb{N} \setminus A\}$ sí da lugar a espacios de Hilbert. Más concretamente:

i) $K = K^+ \oplus K^-$.

En efecto, si $x \in K$ es arbitrario, llamamos $y_m = \begin{cases} x_m & \text{si } m \in A, \\ 0 & \text{si } m \notin A, \end{cases}$ y

$z_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m \in A, \\ x_m & \text{si } m \notin A, \end{cases}$ con lo que $y = (y_m)_m \in K^+$, $z = (z_m)_m \in K^-$ y además $x = y + z$.

Además la descomposición es única pues, si $x \in K^+ \cap K^-$, entonces $\text{sop}(x) \subset A \cap A^c = \emptyset$, es decir $x = 0$.

ii) $[x^+, x^-] = 0, \forall x^+ \in K^+, x^- \in K^-$.

En efecto, si $x^+ \in K^+, x^- \in K^-$, entonces

$$[x^+, x^-] = \sum_{m \in A} x_m^+ \overline{x_m^-} - \sum_{m \notin A} x_m^+ \overline{x_m^-} = 0$$

pues $x_m^- = 0, \forall m \in A$ y $x_m^+ = 0, \forall m \in A^c$.

iii) $(K^+, [\cdot, \cdot])$ y $(K^-, -[\cdot, \cdot])$ son espacios de Hilbert.

Es evidente que $\forall x \in K^+, [x, x] = \sum_{m \in A} |x_m|^2 \geq 0$ y si $[x, x] = 0$, entonces $x_m = 0, \forall m \in A$. Como además $\text{sop}(x) \subset A$, entonces $x_m = 0, \forall m \in A^c$, es decir $x = 0$.

Lo anterior prueba que $(K^+, [\cdot, \cdot])$ es pre-Hilbert.

Análogamente se prueba que $(K^-, -[\cdot, \cdot])$ es también pre-Hilbert.

Como los productos de K^+ y K^- son los inducidos por el producto usual de ℓ^2 , para ver que K^+ y K^- son completos, basta comprobar que son cerrados en ℓ^2 . Veamos el caso de K^+ (que es análogo al caso de K^-):

Si $x \in \overline{K^+}$, existe una sucesión $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset K^+$ tal que $x^{(n)} \rightarrow x$, es decir $\|x^{(n)} - x\|_2 \rightarrow 0$. Esto implica que $\sum_{m \in \mathbb{N}} |x_m^{(n)} - x_m|^2 \rightarrow 0$, de donde $|x_m^{(n)} - x_m| \rightarrow 0, \forall m \in \mathbb{N}$. Como $x_m^{(n)} = 0$ si $m \notin A$, también $x_m = 0, \forall m \notin A$, es decir $\text{sop}(x) \subset A$, de modo que $x \in K^+$.

El ejemplo anterior da sentido a la siguiente definición.

2. Definición. Un espacio vectorial K en el que se define una forma sesquilineal hermítica $[\cdot, \cdot]$ es un *espacio de Krein* si existen dos subespacios K^+ y K^- con las propiedades i), ii) y iii).

3. Observaciones. a) Todo espacio de Hilbert puede considerarse como un espacio de Krein, con la descomposición trivial $H = H \oplus 0$.

b) El apartado ii) de la definición permite decir que K^+ y K^- son ortogonales de modo que la descomposición i) es una suma directa ortogonal, llamada *descomposición fundamental de K* .

4. Proposición. Si $P^+ : K \rightarrow K^+$ y $P^- : K \rightarrow K^-$ son las proyecciones ortogonales asociadas a la descomposición $K = K^+ \oplus K^-$, entonces el operador $J = P^+ - P^-$, llamada *simetría fundamental*, verifica que

$$[Jx, y] = [x, Jy], \quad \forall x, y \in K;$$

además J es invertible y $J^{-1} = J$.

Demostración. Sean $x = x^+ + x^- \in K$, $y = y^+ + y^- \in K$ arbitrarios. Entonces

$$[Jx, y] = [x^+ - x^-, y^+ + y^-] = [x^+, y^+] - [x^-, y^-] = [x^+ + x^-, y^+ - y^-] = [x, Jy].$$

Por otra parte, si $Jx = 0$, entonces $x^+ - x^- = 0$ y, por la unicidad de la descomposición $K = K^+ \oplus K^-$, se deduce que $x^+ = x^- = 0$, de modo que J es invertible.

Por último, como $J(x^+ - x^-) = x^+ + x^-$, deducimos que $J^{-1} = J$. \diamond

5. Proposición. Si definimos $\langle x, y \rangle_J = [Jx, y]$, $x, y \in K$, entonces $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_J)$ es un espacio de Hilbert en el cual J es un operador autoadjunto e involutivo. Recíprocamente, si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio de Hilbert y $G \in L(H)$ un operador autoadjunto tal que $G^2 = I$, entonces $(H, [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Krein con el producto $[x, y] = \langle Gx, y \rangle, \forall x, y \in H$.

Demostración. a) Es evidente que el producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_J$ es lineal en la primera componente. Además, de la proposición anterior, resulta:

$$\overline{\langle y, x \rangle_J} = \overline{[Jy, x]} = [x, Jy] = [Jx, y] = \langle x, y \rangle_J.$$

Por ser $(K^+, [\cdot, \cdot])$ y $(K^-, -[\cdot, \cdot])$ pre-Hilbert, deducimos que

$$\langle x, x \rangle_J = [Jx, x] = [x^+ - x^-, x^+ + x^-] = [x^+, x^+] - [x^-, x^-] \geq 0,$$

y, si $\langle x, x \rangle_J = 0$, entonces $[x^+, x^+] = 0$, $[x^-, x^-] = 0$ de donde $x^+ = 0$, $x^- = 0$, es decir $x = 0$.

Veamos que K es completo con dicho producto:

Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ de Cauchy, es decir $\|x_n - x_m\|_J \rightarrow 0$. Esto implica que $[J(x_n - x_m), x_n - x_m] \rightarrow 0$, de donde

$$\begin{aligned} [x_n^+ - x_m^+ - x_n^- + x_m^-, x_n^+ - x_m^+ + x_n^- - x_m^-] &\rightarrow 0 \\ \implies [x_n^+ - x_m^+, x_n^+ - x_m^+] - [x_n^- - x_m^-, x_n^- - x_m^-] &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

lo que implica que $(x_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en K^+ y $(x_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en K^- . Así pues, existen $x^+ \in K^+$, $x^- \in K^-$ tales que $x_n^+ \rightarrow x^+$ y $x_n^- \rightarrow x^-$. Si llamamos $x = x^+ + x^-$, entonces

$$\langle x_n - x, x_n - x \rangle_J = [J(x_n - x), x_n - x] = [x_n^+ - x^+, x_n^+ - x^+] - [x_n^- - x^-, x_n^- - x^-] \rightarrow 0$$

lo que implica que $x_n \rightarrow x$.

Como J es simétrico respecto a $[\cdot, \cdot]$, entonces

$$\langle Jx, y \rangle_J = [J^2x, y] = [Jx, Jy] = \langle x, Jy \rangle_J.$$

Además, de $J = J^{-1}$ resulta que $JJ = JJ^{-1} \implies J^2 = I$, es decir J es involutivo.

Para probar el recíproco, veamos los siguientes apartados:

•) $[\cdot, \cdot]$ es una forma sesquilineal hermítica.

$$\begin{aligned} [\alpha x + \beta y, z] &= \langle G(\alpha x + \beta y), z \rangle = \langle \alpha Gx + \beta Gy, z \rangle \\ &= \alpha \langle Gx, z \rangle + \beta \langle Gy, z \rangle = \alpha [x, z] + \beta [y, z]; \\ \overline{[y, x]} &= \overline{\langle Gy, x \rangle} = \langle x, Gy \rangle = \langle Gx, y \rangle = [x, y]. \end{aligned}$$

•) $\exists K^+, K^-$ tales que $K = K^+ \oplus K^-$.

Definimos para ello $K^+ = N(I - G)$, $K^- = N(I + G)$ y escribimos la descomposición $h = \frac{1}{2}(h + Gh) + \frac{1}{2}(h - Gh)$, $\forall h \in H$. Veamos que:

$$\begin{aligned} h^+ = \frac{1}{2}(h + Gh) \in K^+ & : (I - G)h^+ = \frac{1}{2}(h + Gh - Gh - G^2h) = 0; \\ h^- = \frac{1}{2}(h - Gh) \in K^- & : (I + G)h^- = \frac{1}{2}(h - Gh + Gh - G^2h) = 0; \\ K^+ \cap K^- = \{0\} & : h \in K^+ \cap K^- \implies (I - G)h = (I + G)h = 0 \\ & \implies h = Gh = -Gh \implies h = 0. \end{aligned}$$

•) $[x^+, x^-] = 0, \forall x^+ \in K^+, x^- \in K^-$.

$$(*) \quad x^+ \in K^+ \implies (I - G)x^+ = 0 \implies x^+ = Gx^+,$$

$$(**) \quad x^- \in K^- \implies (I + G)x^- = 0 \implies x^- = -Gx^-.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} [x^+, x^-] &= \langle Gx^+, x^- \rangle = \langle x^+, Gx^- \rangle = \langle x^+, -x^- \rangle \\ &= \langle Gx^+, -x^- \rangle = -[x^+, x^-] \implies [x^+, x^-] = 0. \end{aligned}$$

•) $(K^+, [\cdot, \cdot])$ y $(K^-, -[\cdot, \cdot])$ son espacios de Hilbert.

Para ello, sólo falta comprobar que

$$[x^+, x^+] \geq 0 \text{ y } [x^+, x^+] = 0 \implies x^+ = 0,$$

$$[x^-, x^-] \geq 0 \text{ y } [x^-, x^-] = 0 \implies x^- = 0$$

(al ser K^+ y K^- subespacios cerrados de H , que es de Hilbert, ya son completos).

Aplicando las igualdades (*) y (**), obtenemos en efecto:

$$[x^+, x^-] = \langle Gx^+, x^- \rangle = \langle x^+, x^+ \rangle \geq 0,$$

$$[x^+, x^+] = 0 \implies \langle x^+, x^+ \rangle = 0 \implies x^+ = 0;$$

$$[x^-, x^-] = \langle Gx^-, x^- \rangle = -\langle x^-, x^- \rangle \leq 0,$$

$$[x^-, x^-] = 0 \implies \langle x^-, x^- \rangle = 0 \implies x^- = 0.$$

Como en K^+ coinciden los productos $[\cdot, \cdot]$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $(K^+, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es subespacio cerrado de H , K^+ es de Hilbert (análogamente se argumenta con K^-).

◇

6. Teorema. Sea $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert en el que se define una forma sesquilineal hermitica $[\cdot, \cdot] : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\alpha > 0 : |[x, y]| \leq \alpha \langle x, x \rangle^{1/2} \langle y, y \rangle^{1/2}, \quad \forall x, y \in H.$$

Entonces existe un operador autoadjunto $G \in L(H)$ tal que $[x, y] = \langle Gx, y \rangle$, $\forall x, y \in H$ y $\|G\| \leq \alpha$.

Dicho operador G se llama *operador de Gram* de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ con respecto a $[\cdot, \cdot]$ y lo dicho anteriormente sugiere que $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es de Krein si y sólo si G es invertible.

Demostración. Se define el operador $G : H \times H$ por $\langle Gx, y \rangle = [x, y]$, $\forall x, y \in H$. Se cumple así:

•) G es lineal:

$$\begin{aligned}\langle G(ax_1 + bx_2), y \rangle &= [ax_1 + bx_2, y] = a[x_1, y] + b[x_2, y] \\ &= a\langle Gx_1, y \rangle + b\langle Gx_2, y \rangle = \langle aGx_1 + bGx_2, y \rangle, \quad \forall y \in H \\ \implies G(ax_1 + bx_2) &= aGx_1 + bGx_2.\end{aligned}$$

•) G es acotado:

$$\begin{aligned}|\langle Gx, Gx \rangle| &= |[x, Gx]| \leq \alpha \langle x, x \rangle^{1/2} \cdot \langle Gx, Gx \rangle^{1/2} \\ \implies \|Gx\|^2 &\leq \alpha \|x\| \cdot \|Gx\| \implies \|Gx\| \leq \alpha \|x\| \implies \|G\| \leq \alpha.\end{aligned}$$

•) G es autoadjunto:

$$\langle Gx, y \rangle = [x, y] = \overline{[y, x]} = \overline{\langle Gy, x \rangle} = \langle x, Gy \rangle. \quad \diamond$$

7. Teorema. Sean $K = K_1^+ \oplus K_1^-$, $K = K_2^+ \oplus K_2^-$ dos descomposiciones fundamentales del espacio de Krein $(K, [\cdot, \cdot])$ con simetrías fundamentales J_1 y J_2 , respectivamente. Entonces:

i) $\dim K_1^+ = \dim K_2^+$, $\dim K_1^- = \dim K_2^-$.

ii) Las normas $\|\cdot\|_{J_1}$ y $\|\cdot\|_{J_2}$ asociadas a los productos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_{J_1}$ y $\langle \cdot, \cdot \rangle_{J_2}$, respectivamente, son equivalentes.

8. Definición. Un subespacio L de un espacio de Krein $(K, [\cdot, \cdot])$ es ortocomplementado si L admite un subespacio complementario ortogonal, es decir si $K = L \oplus L^\perp$, donde $L^\perp = \{y \in K : [x, y] = 0, \forall x \in L\}$.

9. Observación. Es conocido el hecho que en espacios de Hilbert todo subespacio cerrado es ortocomplementado. En espacios de Krein esta propiedad no siempre es cierta, como muestran los siguientes ejemplos.

10. Ejemplos. a) Sea $K = \ell^2$ y $[x, y] = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j x_j \overline{y_j}$, donde $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $y = (y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ son elementos arbitrarios de K . Como vimos en el ejemplo 1, $(K, [\cdot, \cdot])$ es un espacio de Krein pues basta tomar $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, de modo que $[x, y] = \sum_{j \in A} x_j \overline{y_j} - \sum_{j \notin A} x_j \overline{y_j}$.

Si definimos

$$L = \left\{ x \in K : x_{2j} = \frac{2j}{2j-1} x_{2j-1}, \quad \forall j \in \mathbb{N} \right\},$$

se puede probar lo siguiente:

•) L es cerrado pues, si $x \in \overline{L}$, existe $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subset L$ tal que $x^{(n)} \rightarrow x$.

Es evidente (análogamente al ejemplo 1) que $x_j^{(n)} \rightarrow x_j, \forall j \in \mathbb{N}$. Como $x_{2j}^{(n)} = \frac{2j}{2j-1} x_{2j-1}^{(n)}$, tomando límites, $x_{2j} = \frac{2j}{2j-1} x_{2j-1}$, es decir $x \in L$.

•) L es definido positivo pues, si $x \in L$,

$$\begin{aligned} [x, x] &= \sum_{j \in \mathbb{N}} (-1)^j |x_j|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_{2j}|^2 - \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_{2j-1}|^2 \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \left[\left(\frac{2j}{2j-1} \right) - 1 \right] |x_{2j-1}|^2 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{4j-1}{(2j-1)^2} |x_{2j-1}|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

y $[x, x] = 0 \implies x_{2j-1} = 0, \forall j \implies x_{2j} = 0, \forall j$.

•) $L^\perp = \{y \in K : y_{2j} = \frac{2j-1}{2j} y_{2j-1}, \forall j\}$ pues, si $[x, y] = 0, \forall x \in L$, en particular $\left[e_{2j-1} + \frac{2j}{2j-1} e_{2j}, y \right] = 0 \implies -y_{2j-1} + \frac{2j}{2j-1} y_{2j} = 0 \implies y_{2j} = \frac{2j-1}{2j} y_{2j-1}, \forall j$.

Recíprocamente, si $y_{2j} = \frac{2j-1}{2j} y_{2j-1}, \forall j \implies [x, y] = 0, \forall x \in L$ pues

$$\begin{aligned} [x, y] &= \sum_{j \in \mathbb{N}} x_{2j} \overline{y_{2j}} - \sum_{j \in \mathbb{N}} x_{2j-1} \overline{y_{2j-1}} \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \frac{2j}{2j-1} x_{2j-1} \cdot \frac{2j-1}{2j} \overline{y_{2j-1}} - \sum_{j \in \mathbb{N}} x_{2j-1} \cdot \overline{y_{2j-1}} = 0. \end{aligned}$$

•) Veamos por último que L no es ortocomplementado, es decir $L \oplus L^\perp \neq K$. Para ello consideramos $x \in K$ de la forma $x_{2j-1} = 0, x_{2j} = 1/(2j)$ y supongamos que existen $y \in L, z \in L^\perp$ tales que $x = y + z$. Entonces

$$\begin{aligned} x_{2j-1} = y_{2j-1} + z_{2j-1} = 0 &\implies y_{2j-1} = -z_{2j-1} \\ x_{2j} = y_{2j} + z_{2j} = \frac{1}{2j} &\implies \frac{1}{2j} = \frac{2j}{2j-1} y_{2j-1} + \frac{2j-1}{2j} z_{2j-1} \\ &\implies \frac{1}{2j} = \left[\frac{2j}{2j-1} - \frac{2j-1}{2j} \right] y_{2j-1} = \frac{4j^2 - (2j-1)^2}{2j(2j-1)} y_{2j-1} \\ &\implies y_{2j-1} = \frac{2j-1}{4j-1}, \forall j. \end{aligned}$$

Sin embargo, la sucesión $y = (y_{2j-1})_{j \in \mathbb{N}}$ no está en ℓ^2 porque $\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{2j-1}{4j-1} \right)^2 = \infty$.

b) Sea K un espacio de Krein y $x, y \in K$ tales que $[x, x] > 0, [y, y] < 0$. Consideramos el subespacio $L = \{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{C}\}$. Se prueba entonces:

- L es cerrado.

- Si L fuera ortocomplementado, sería no degenerado.

- L es degenerado (sugerencia: considerar las raíces de la ecuación $[\lambda x + y, \lambda x + y]$ con $\lambda \in \mathbb{R}$).

Observación. Dos referencias básicas correspondientes a este tema son [An] y [Bog].

APÉNDICE 2

EL TEOREMA ESPECTRAL. ORÍGENES Y EVOLUCIÓN.

La evolución de la teoría espectral es uno de los capítulos más informativos en la historia de las matemáticas modernas. El hecho central del teorema espectral es que ciertos operadores lineales en dimensión infinita pueden representarse en forma diagonal. Aunque el teorema tenga profundas raíces en el pasado, la teoría matemática es un fenómeno estrictamente del siglo XX. Todo estudiante de matemáticas estudia algún tipo de teorema espectral extraído de su contexto histórico pero inserto en su propio contexto del curso. Este esquema, aunque eficiente pedagógicamente, a menudo oscurece el hecho de que el teorema espectral es una especie en evolución, que pretende proporcionar teorías matemáticas adecuadas para varios fenómenos físicos.

Las raíces históricas del tema deben buscarse en tres áreas originalmente alejadas, como son la Geometría Analítica (teorema de los ejes principales), el Análisis (ecuaciones integrales) y el Álgebra (sistemas infinitos de ecuaciones lineales), los cuales pasamos a esbozar.

1. TEOREMA DE LOS EJES PRINCIPALES.

Es el único teorema que puede considerarse precursor directo del teorema espectral moderno. No debe sorprender que en su forma más simple esté contenido en los escritos de los fundadores de la Geometría Analítica, P. de Fermat y R. Descartes.

Destacaremos dos versiones del teorema de los ejes principales.

- En el lenguaje de **formas cuadráticas**:

1637 ... Descartes ... *Una forma cuadrática $ax^2 + 2bxy + cy^2$ puede transformarse mediante una rotación en la forma normal $\alpha x^2 + \beta y^2$ donde los ejes principales de la forma normal coinciden con los ejes de coordenadas.*

1759 ... Lagrange ... *Toda forma cuadrática simétrica $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ en \mathbb{R}^n puede escribirse mediante una transformación ortogonal en la forma normal $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2$.*

- Veamos cómo surge un enunciado de este teorema en el **lenguaje de matrices**:

Dada una aplicación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, su comportamiento viene determinado por los valores $\{Te_1, \dots, Te_n\}$, siendo $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de \mathbb{R}^n , y la matriz $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ definida por $Te_i = \sum_{j=1}^n a_{ji}e_j$ representa la aplicación T .

Como esa matriz es diferente con respecto a otra base, surge la cuestión fundamental:

Dado T , determinar las bases para las que la matriz asociada es sencilla.

Esto permitiría reconocer algunas propiedades intrínsecas de la aplicación sólo a partir de la representación matricial.

El siguiente resultado proporciona una condición necesaria y suficiente para que T admita una representación en matriz diagonal.

Teorema. *Dada $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si T tiene una representación en matriz diagonal, existe un conjunto linealmente independiente $\{u_1, \dots, u_n\}$ y un conjunto de escalares $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ tales que $Tu_k = \lambda_k u_k$ ($k = 1, \dots, n$).*

Recíprocamente, si existe un conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ linealmente independiente en \mathbb{R}^n y un conjunto $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de escalares tales que $Tu_k = \lambda_k u_k$ ($k = 1, \dots, n$), entonces la matriz $A = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ representa la aplicación T respecto a la base $\{u_1, \dots, u_n\}$.

Esto nos lleva a definir las nociones de autovalor y autovectores asociados, y el problema anterior será consecuencia de:

Dado T , encontrar todos sus autovalores y autovectores asociados.

En algunos casos el problema de los autovalores da la respuesta completa o por lo menos es la clave para resolver el problema de la estructura de T . Una solución sencilla a dicho problema es la siguiente:

1852 ... Sylvester ... Si A es una matriz asociada a T , λ es autovalor de T si y sólo si $(A - \lambda I)x = 0$ tiene solución no trivial.

Según la teoría de matrices, esto equivale a $\det(A - \lambda I) = 0$. En este punto es lógico suponer el espacio complejo, para poder aceptar autovectores asociados a autovalores complejos (a no ser que T sea simétrico) y poder extenderlo a espacios de cualquier dimensión. A simple vista esto puede afectar la geometría de nuestro espacio, pero en realidad no será así.

En el caso particular de las aplicaciones simétricas, el problema de los autovalores tiene la siguiente solución:

Teorema. Sea $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación lineal simétrica. Entonces:

- i) Todos los autovalores de T son reales.
- ii) Autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.
- iii) Existe una base de \mathbb{C}^n formada por autovectores ortogonales dos a dos.

Esto proporciona el teorema de los ejes principales en el lenguaje de matrices.

1858 ... Cayley ... Si A es una matriz simétrica real, existe una matriz ortogonal P tal que $D = P^{-1}AP$ tiene forma diagonal; los elementos de D son los autovalores de A .

1904 ... Hilbert ... Sean $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ los autovalores de una matriz simétrica K , y $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ un sistema ortonormal de vectores propios asociados. La acción de K con respecto a dicha base se representa por la matriz diagonal $L = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. La matriz T cuyas filas son los vectores Φ_1, \dots, Φ_n es una transformación ortogonal que aplica la base $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ en la base canónica, $L = T^{-1}KT$. La matriz L puede escribirse como $L = \sum_{i=1}^n \lambda_i P_i$, donde P_i es la proyección sobre el subespacio generado por Φ_i .

Veamos cómo puede exponerse en forma geométrica el análisis sobre la estructura de la aplicación T .

Suponemos que T es una aplicación lineal simétrica en \mathbb{C}^n , dotado de una estructura lineal. Definimos el concepto de *autoespacio* como el subespacio generado por el conjunto de autovectores asociados a un mismo autovalor. Debido a que dos autoespacios distintos son ortogonales, cabe definir la noción de *complemento ortogonal* de un conjunto M como el conjunto M^\perp de vectores ortogonales a todos los elementos de M .

Las siguientes propiedades expresan características útiles de las transformaciones simétricas:

◇ Si M_λ es el autoespacio asociado al autovalor λ , entonces M_λ^\perp es invariante bajo T .

Esto sugiere que la estructura de T viene determinada por su comportamiento sobre M_λ y M_λ^\perp .

◇ Siempre existe algún autovalor λ (por ser el espacio complejo).

◇ Si $\dim M_\lambda = r$ y $\dim M_\lambda^\perp = s$, entonces $s < n$ (de hecho $r + s = n$).

◇ Todo elemento $x \in \mathbb{C}^n$ puede descomponerse como $x = y + z$, con $y \in M_\lambda$, $z \in M_\lambda^\perp$ (y la descomposición es única).

Debido a la descomposición anterior, $Tx = Ty + Tz$, de la que sabemos $Ty = \lambda y$; basta calcular Tz , el cual sabemos que está en M_λ^\perp .

Hemos reducido pues el problema a un espacio s -dimensional, con $s < n$.

- Si $s = 0$ termina aquí.

- Si $s > 0$, buscamos un autovalor μ de la restricción $T|_{M_\lambda^\perp}$ y continuamos como antes.

Como la dimensión del espacio es finita, el proceso termina en un número finito de pasos.

Recapitulando lo anterior, llegamos al teorema espectral en dimensión finita, que enunciamos así:

Teorema. Sea $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ una aplicación lineal simétrica. Existe entonces un número finito de números reales distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ y de subespacios cerrados M_1, \dots, M_k no triviales tales que:

i) $T|_{M_i} = \lambda_i I$, $i = 1, \dots, k$ (M_i es el autoespacio asociado a λ_i).

ii) $M_i \perp M_j$, $\forall i \neq j$.

iii) $\forall x \in \mathbb{C}^n$, $\exists x_i \in M_i : x = x_1 + \dots + x_k$ (descomposición única).

El teorema puede interpretarse diciendo que todo operador simétrico es suma de operadores elementales $T = T_1 + \dots + T_k$, con $T_i = \lambda_i I$. El recíproco establece que todo operador de la forma anterior es simétrico.

Observaciones. 1) Es claro que M_i no están generados por los ejes principales $e_i = (\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni})$. Sin embargo siempre es posible elegir una base ortogonal de modo que cada M_i esté generado por algún subconjunto de dicha base.

2) A pesar de la gran importancia del teorema espectral anterior en multitud de aplicaciones, el verdadero desarrollo de las ideas arriba esbozadas no se consigue hasta que se consideran espacios de dimensión infinita. La axiomatización y discusión de estos espacios es la que permite un tratamiento

unificado de elementos de análisis, geometría y matemática aplicada: espacios de funciones, ecuaciones diferenciales e integrales, teoría de operadores, series de Fourier abstractas, geometría de subespacios, topología débil, fuerte y uniforme, teoría de espectros, mecánica cuántica y muchos otros.

2.- EVOLUCIÓN A ESPACIOS INFINITO-DIMENSIONALES.

Dos son las líneas fundamentales de evolución de la teoría al caso de espacios de dimensión infinita: los sistemas infinitos de ecuaciones lineales y las ecuaciones integrales.

A. Sistemas infinitos de ecuaciones lineales.

Los sistemas finitos de ecuaciones lineales se resolvían a menudo por el método de eliminación de variables. En los siglos XVIII y XIX se resolvían sistemas infinitos de ecuaciones para obtener soluciones formales de ecuaciones diferenciales, por el método de coeficientes indeterminados. Los avances más significativos en esta línea fueron los siguientes:

1822 ... Fourier ... quiso probar que toda función puede expresarse como combinación lineal infinita de términos trigonométricos. Esto le llevaba a resolver un sistema infinito de ecuaciones lineales, por un proceso de límite.

1870 ... Kötteritzsch ... intentó extender la regla de Cramer a sistemas infinitos.

1877 ... Hill ... aplicó al caso infinito la teoría de determinantes.

1885 ... Appell ... aplicó el método de Fourier para determinar los coeficientes del desarrollo en serie de potencias de funciones elípticas.

1885 ... Poincaré ... proporcionó una definición rigurosa de un determinante infinito.

1891 ... Von Koch ... desarrolló la teoría de los determinantes infinitos.

Los avances en esta dirección podían haber llevado a algún teorema espectral elemental si alguien hubiera generalizado la forma de diagonalización del teorema de los ejes principales. Esto se hizo al aplicar la teoría de los determinantes infinitos a las ecuaciones integrales.

B. Ecuaciones integrales.

Las ecuaciones integrales motivaron el interés de los matemáticos por los espacios de dimensión infinita, espacios de Hilbert y, posteriormente, espacios de Banach. Es curioso que la atención prestada a las ecuaciones integrales fuera posterior a la relacionada con las ecuaciones diferenciales, a pesar de que la teoría de estas es considerablemente más complicada que la de las primeras.

Se remonta a Abel en 1823 el primer estudio sobre las ecuaciones integrales, pero la teoría tomó relevancia en 1900 cuando Fredholm aplicó a ellas la teoría de matrices y determinantes infinitos. Imitando la técnica de von Koch en el desarrollo de determinantes infinitos, Fredholm desarrolló su famoso teorema de alternativa con respecto a las soluciones Φ de la ecuación integral

$$(1) \quad \Phi(x) + \int_0^1 K(x, y)\Phi(y)dy = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

considerándola como la situación límite del correspondiente sistema lineal

$$(2) \quad \Phi(x_i) + \sum_{j=1}^n K(x_i, x_j)\Phi(x_j) = \Psi(x_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fredholm definió un determinante D_K para (1) como el análogo continuo del correspondiente al sistema (2) y probó que (1) tiene una única solución que puede expresarse como cociente de dos determinantes cuando $D_K \neq 0$; alternativamente, cuando $D_K = 0$, la ecuación homogénea traspuesta

$$\Phi(x) + \int_0^1 K(y, x)\Phi(y)dy = 0$$

tiene soluciones no triviales y (1) tiene solución si y sólo si Ψ es ortogonal a dichas soluciones.

Posteriormente a Fredholm, Hilbert (1904) trabajó con la ecuación integral

$$(3) \quad \Phi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\Phi(y)dy = \Psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

y su análoga ecuación matricial finita o infinita

$$(4) \quad \Phi(x_i) - \lambda \sum_{j=1}^n K(x_i, x_j)\Phi(x_j) = \Psi(x_i).$$

Para construir la maquinaria de resolución de estas ecuaciones, Hilbert definió el espectro de la forma cuadrática K , distinguiendo el espectro puntual

del espectro continuo, definió el concepto de continuidad completa para distinguir las formas con espectro puntual puro y las que tienen espectro más complicado. Incluso formuló y probó el teorema espectral, no sólo para formas completamente continuas, sino para formas acotadas.

3.- TEORÍA ESPECTRAL DE HILBERT-SCHMIDT.

A pesar de la asombrosa cantidad de análisis moderno contenido en los trabajos de Hilbert sobre ecuaciones integrales, su método básico era el de Bernoulli y Fredholm, de reducción al caso finito y un laborioso paso al límite. Fue su alumno E. Schmidt quien introdujo el lenguaje de la geometría euclídea y en 1907 presentó una teoría de los espacios ℓ^2 incluyendo las nociones de norma, linealidad, subespacios y proyecciones ortogonales. Observemos que una generalización natural del concepto de longitud para sucesiones numéricas, como $\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots}$, conduce a la restricción $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$, necesaria en la consideración de espacios infinito-dimensionales. Sin embargo, un desarrollo abstracto, como el introducido por von Neumann (del que hablaremos posteriormente) no tendrá que estar sujeto a elección de coordenadas ni a la adopción de una base específica respecto a la cual la estructura de los operadores simétricos venga determinada.

Los pasos más importantes en la extensión del teorema espectral son los siguientes:

1 - Generalización del concepto de autovalor al caso de una forma cuadrática simétrica infinita K . Se define para eso el *espectro* de K , $\sigma(K) = \{\lambda \in \mathbb{C} : K - \lambda I \text{ no tiene inversa acotada}\}$, el cual puede descomponerse en:

Espectro puntual, $\sigma_p(K) = \{\lambda \in \sigma(K) : K\phi = \lambda\phi \text{ tiene solución no trivial}\}$.

Espectro continuo, $\sigma_c(K) = \sigma(K) \setminus \sigma_p(K)$.

(Recordemos que, para las transformaciones simétricas, el espectro residual es vacío.)

Al igual que en dimensión finita, todo punto espectral es real.

2 - Estudio de las relaciones entre una transformación y su espectro. Destacamos:

“*El espectro está acotado cuando K está acotado. Además $\sigma(K) \subset \overline{B}(0, \|K\|)$.*” De hecho,

“Si K es simétrico, $\|K\| = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(K)\}$.” (Teorema del radio espectral.) Incluso, $\exists \lambda \in \sigma(K) : |\lambda| = \|K\|$.

3 - Relación entre la continuidad y la acotación.

“Los operadores lineales acotados en ℓ^2 son precisamente los operadores lineales continuos (preservan la convergencia fuerte).”

Así, Hilbert extendió el teorema de los ejes principales a operadores lineales simétricos acotados.

Teorema. Cada $\lambda \in \sigma_p(K)$ tiene asociado un autovector ϕ_λ tal que el conjunto $\{\phi_\lambda : \lambda \in \sigma_p(K)\}$ es ortonormal. Si P_λ denota la proyección sobre el subespacio generado por ϕ_λ , el operador $L = \sum_{\lambda \in \sigma_p(K)} \lambda P_\lambda$ es diagonal.

Observemos que L refleja exactamente la acción de K sobre el subespacio generado por ϕ_λ pero, al ser estrictamente menor que ℓ^2 , no se puede asegurar que L y K representen la misma transformación.

Para expresar la contribución del espectro continuo, Hilbert adoptó la noción de integral de Stieltjes, definida por este en 1894 en su estudio sobre fracciones continuas:

Si f es continua y g creciente, denotamos por $\int_a^b f(x)dg(x)$ a
$$\lim_n \sum_{i=1}^n f(\xi_i)[g(x_i) - g(x_{i-1})].$$

Escribiendo pues la suma $\sum \lambda_i P_{\lambda_i}$ como $\sum \lambda_i (E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}})$, donde $E_{\lambda_i} = \sum_{j=1}^i P_{\lambda_j}$, Hilbert construyó para el espectro continuo $\sigma_c(K)$ la integral de Stieltjes $\int_{\sigma_c(K)} \lambda dE_\lambda$, quedando el teorema espectral enunciado de la siguiente forma:

Teorema. Todo operador lineal simétrico acotado K en ℓ^2 puede representarse, a partir de una transformación ortogonal, en forma diagonal como

$$\sum_{\lambda \in \sigma_p(K)} \lambda P_\lambda + \int_{\lambda \in \sigma_c(K)} \lambda dE_\lambda.$$

Hilbert completó su teoría espectral identificando una gran clase de operadores con espectro continuo vacío, los que llamó *operadores completamente continuos*. Schmidt los caracterizó con la propiedad de que aplican sucesiones débilmente convergentes en sucesiones fuertemente convergentes. Estos operadores son los análogos infinito-dimensionales más próximos a los operadores lineales en dimensión finita en cuanto pueden aproximarse por operadores de rango finito y su espectro está formado sólo por autovalores donde el cero es el único posible punto de acumulación. En el estudio de las ecuaciones integrales, el operador $Kf = \int_a^b k(\cdot, y)f(y)dy$ es completamente continuo.

El primer problema que se plantea en esta situación es el de encontrar todos los autovalores de un operador completamente continuo y simétrico. No es posible aquí una analogía completa con el caso finito-dimensional, pues no existe una teoría de determinantes que dé lugar a la ecuación característica. Un método alternativo consiste en probar la existencia de un autovalor extremo para el cual $|\lambda| = \|K\|$. A partir de aquí es también sencillo ver que todos los autovalores son reales, que autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales y que K deja invariante al complemento ortogonal del autoespacio correspondiente a cualquier autovalor. Tenemos además, debido a que la identidad es completamente continua únicamente en espacios finito-dimensionales, que el autoespacio correspondiente a cualquier autovalor no nulo tiene dimensión finita.

En el caso de que $\lambda = 0$ sea autovalor, se presenta un problema adicional que se maneja como sigue:

Llamamos M_0 al autoespacio asociado al autovalor $\lambda = 0$. Como K deja invariante a M_0^\perp , distinguimos dos casos:

- Si $\dim M_0^\perp$ es finita, aplicamos el teorema espectral en \mathbb{C}^n .
- Si $\dim M_0^\perp$ es infinita, M_0^\perp es a su vez un espacio de Hilbert sobre el cual K no tiene a $\lambda = 0$ como autovalor.

Esto permite suponer en adelante que $\lambda = 0$ no es autovalor de K y, por tanto, $M_0^\perp = H$.

Para cualquier constante real $\alpha > 0$, se puede probar que sólo hay un número finito de autovalores de módulo mayor que α . Así pues, los autovalores pueden disponerse en forma de sucesión $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ tal que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$. En el caso de que esta sucesión sea infinita, deducimos que $\lim \lambda_n = 0$.

Con estos datos, el teorema espectral puede enunciarse detalladamente como sigue:

Teorema (espectral para operadores completamente continuos). *Sea K un operador completamente continuo en un espacio de Hilbert con $N(K) = \{0\}$. Existe entonces una sucesión finita o infinita de números reales distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ y una sucesión de subespacios asociados M_1, M_2, \dots cada uno de ellos de dimensión no nula, tales que:*

- i) $K|_{M_i} = \lambda_i I, \forall i$.
- ii) $M_i \perp M_j, \forall i \neq j$.
- iii) $H = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots$ (clausura del espacio generado por $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$).
- iv) $\dim M_i < \infty, \forall i$.

Los números λ_i y los subespacios M_i están unívocamente determinados por K .

Un método constructivo de demostración se basa en definir la sucesión $\{\lambda_n\}$ recursivamente como sigue:

$$\begin{aligned} |\lambda_1| &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1\} \text{ y } Tu_1 = \lambda_1 u_1; \\ |\lambda_n| &= \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : \|x\| = 1, \langle x, u_m \rangle = 0, m = 1, \dots, n-1\} \\ \text{y } Tu_n &= \lambda_n u_n \text{ (} n > 1 \text{)}. \end{aligned}$$

Se prueba entonces que la familia $M_n = N(T - \lambda_n I)$ ($n \geq 1$) es ortogonal y $H = \bigoplus_n M_n$.

La sucesión $\{\lambda_n\}$ es el conjunto de autovalores de K y la familia $\{M_n\}$, la de los autoespacios asociados a dichos autovalores.

Con este enunciado se incluye el mínimo necesario de resultados que podrían esperarse a partir del teorema espectral en \mathbb{C}^n . Además es el teorema que se aplica a las ecuaciones integrales clásicas.

El recíproco del teorema espectral es sencillo pues se trata de construir un operador simétrico y completamente continuo a partir de las sucesiones $\{\lambda_n\}$ y $\{M_n\}$ de modo que estas den la solución al problema de autovalores y autovectores.

Un nexo mayor entre las teorías de ecuaciones integrales y de matrices fue establecido por Hilbert a través de los *sistemas ortonormales completos*. Así la ecuación matricial (4) puede deducirse de la ecuación integral (3) sustituyendo cada función continua Φ, Ψ por su desarrollo de Fourier con respecto a un sistema ortonormal completo. Esto permitió a Hilbert deducir el teorema de alternativa de Fredholm para la ecuación integral (1) directamente del teorema correspondiente para el sistema lineal infinito (2).

4. INTEGRAL DE LEBESGUE.

La teoría de operadores lineales en dimensión infinita no se hizo clara hasta que se estudiaron nuevos espacios abstractos, propiciados por la integral de Lebesgue. El siguiente ejemplo que se estudió fue el de las funciones continuas:

Si consideramos el espacio de las funciones $x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ continuas, la operación $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)} dt$ es un producto interior, pero el espacio, que tiene obviamente dimensión infinita, no es completo. El proceso de completación requiere el desarrollo de la teoría de integración debida a H. Lebesgue, en la

misma época en que Hilbert creaba la teoría espectral para el espacio ℓ^2 . Se construye así el espacio L^2 de las funciones cuyo cuadrado es integrable según Lebesgue, considerando idénticas dos funciones si difieren en un conjunto de medida nula. La demostración de la completitud de L^2 fue dada simultánea e independientemente por Riesz y Fischer en 1907. Esta prueba ilustra además el isomorfismo entre los espacios ℓ^2 y L^2 pues los coeficientes de Fourier de una función $x \in L^2$ verifican $\sum_{n=1}^{\infty} |\hat{x}(n)|^2 = \int_0^1 |x(t)|^2 dt$.

En 1910, Riesz, además de introducir los espacios L^p , obtuvo una teoría espectral para L^2 análoga a la desarrollada por Hilbert y Schmidt para ℓ^2 . Previamente, en 1909, el propio Riesz probó su famoso teorema de representación en el que resolvía un problema estudiado en 1903 por J. Hadamard. Riesz probó que todo funcional lineal continuo en $C[a, b]$ es una integral de Stieltjes $\int_a^b f dg$ con respecto a alguna función g de variación acotada. A continuación, Lebesgue probó que toda integral de Stieltjes puede interpretarse como una integral de Lebesgue interpretando adecuadamente la fórmula $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b f(x) g'(x) dx$.

Esto condujo a J. Radon a desarrollar en 1913 la integración con respecto a una medida (función de conjuntos numerablemente aditiva) abarcando las integrales de Lebesgue y Stieltjes y dando pie a los fundamentos de todas las teorías modernas de la integral abstracta.

Lo anterior indica que la evolución de la integral moderna estuvo conectada a la creación de la teoría espectral por Hilbert. Aunque no hay dependencia lógica entre ellas, es clara su dependencia histórica: *Hilbert usó la integral de Stieltjes para obtener el teorema espectral en ℓ^2 , mientras que Riesz usó la integral de Lebesgue para desarrollar la misma en L^2 .*

5. MECÁNICA CUÁNTICA.

En 1925-26, W. Heisenberg y E. Schrödinger crearon la teoría de la mecánica cuántica en Göttingen. En la teoría de Heisenberg el hecho de que ciertas observaciones atómicas no pueden hacerse simultáneamente fue interpretado matemáticamente como la no conmutatividad de las operaciones que las representan. Como el álgebra de matrices es no conmutativa, Heisenberg junto con M. Born y P. Jordan representaron cada cantidad física por una matriz apropiada. El conjunto de valores posibles de dicha cantidad física era el espectro de la transformación. En contraste, Schrödinger inició una teoría menos ortodoxa basada en su ecuación de ondas. Tras la sorpresa inicial de que la mecánica de ondas de Schrödinger y la mecánica de matrices de Heisenberg -dos teorías con hipótesis esencialmente diferentes- debían producir

los mismos resultados, Schrödinger unificó los dos enfoques probando que los autovalores del operador diferencial en la ecuación de ondas determinan la correspondiente matriz de Heisenberg, resultados también obtenidos simultáneamente por P. Dirac. Se comprobó que la energía de un átomo puede ser expresada por una forma cuadrática, cuyo espectro corresponde al observable mediante un espectroscopio.

Todo esto impulsó nuevamente el interés en la teoría espectral. El propio Hilbert se asombró de que los espectros de sus formas cuadráticas se pudieran interpretar como espectros atómicos. Como él mismo dijo:

Yo desarrollé mi teoría de infinitas variables sin presentir que más tarde encontrara aplicaciones al espectro de la física.

Rápidamente se aclaró sin embargo que la teoría espectral de Hilbert era la base matemática apropiada para la nueva mecánica. Matrices finitas e infinitas se interpretaron como operadores en un espacio de Hilbert (todavía limitado a ℓ^2 ó L^2) y cantidades físicas se representaban por tales operadores. La maquinaria matemática de la mecánica cuántica pasó a ser la del análisis espectral y la renovada actividad precipitó la publicación por A. Wintner (1929) del primer libro dedicado a la teoría espectral.

El teorema original de Hilbert aplicado a formas cuadráticas reales acotadas y simétricas fue rápidamente extendido (por Schmidt y otros) a matrices complejas acotadas y hermíticas, cuyos autovalores son también reales. Tanto las formas simétricas como las hermíticas pueden caracterizarse por la relación $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$, $\forall x, y$. Los operadores hermíticos tienen también espectro real y juegan el papel de los números reales en el álgebra de operadores.

Casi milagrosamente, fueron los operadores hermíticos los que representaban cantidades físicas en la nueva mecánica. Una razón es que las cantidades físicas se miden por números reales, aunque más convincente es la justificación de que los operadores hermíticos de la física matemática proporcionan leyes fundamentales de la física: si A es hermítico, la ecuación de ondas $\Phi'' = A\Phi$ implica la conservación de la energía y las soluciones de la ecuación de Schrödinger $\Phi' = iA\Phi$ tienen norma constante, que es una hipótesis fundamental en Mecánica Cuántica.

Aunque todo observable era representado por un operador hermítico, no necesariamente todo operador hermítico representaba un observable. Dirac añadió en 1930 la hipótesis crucial de que un operador hermítico representa un observable si y sólo si sus autovectores forman un sistema ortogonal completo. Esto aseguraba que cualquier vector (que representa un estado) podía expresarse como combinación lineal (posiblemente infinita) de autovectores de un observable dado. La identificación de operadores con esta propiedad es parte de la teoría espectral de Hilbert-Schmidt, la cual sólo proporcio-

na una respuesta parcial: *los operadores hermíticos que son completamente continuos tienen un conjunto completo de autovalores.*

El teorema no da respuesta al esquema de Dirac pues los operadores en Mecánica Cuántica normalmente no son completamente continuos. La mayoría de los operadores importantes en física involucran la diferenciación. El teorema de integración por partes prueba que el operador diferencial es esencialmente simétrico. Pero la derivada de una función prácticamente no tiene relación con la magnitud de la función, por tanto la diferencial no es continua ni acotada, ni siquiera está definida en todo punto. De hecho, como probaron Hellinger y Toeplitz en 1910, *si un operador simétrico o hermítico estuviera definido en todo punto, debía estar acotado.* Este sorprendente hecho afirma que un candidato al teorema espectral que no sea acotado, no puede estar definido en todo punto.

P. Dirac intentó soslayar el comportamiento excepcional del operador diferencial introduciendo su función δ para definir derivadas donde no existen y así ampliar el conjunto de funciones en donde se pueda aplicar dicho operador. Aunque este enfoque pudo explicar con éxito la nueva mecánica cuántica, en aquella época representó más bien una alternativa al teorema espectral que una extensión del mismo y realmente no ayudó a extender la teoría de Hilbert a operadores no acotados.

6. TEORÍA ESPECTRAL DE VON NEUMANN Y STONE.

Desde Hilbert, el único estudio importante sobre los operadores no acotados fue el publicado por T. Carleman en 1923, donde se probó que muchos de los resultados de Fredholm y Hilbert son ciertos bajo un tipo más débil de hipótesis de acotación. Desde el punto de vista de la teoría espectral, la mayor contribución se debió a J. von Neumann, quien introdujo en 1927 el concepto abstracto de operador lineal en un espacio de Hilbert, expresó la teoría de operadores de la Mecánica Cuántica en términos de operadores en un espacio de Hilbert y reconoció explícitamente la necesidad de extender la teoría espectral de operadores hermíticos al caso no acotado, extensión que obtuvo en 1929.

1) El primer paso en la teoría de von Neumann fue definir axiomáticamente el espacio de Hilbert abstracto como un espacio en el que se define un producto interior, que es completo y separable. Entonces definió un operador lineal T sobre un espacio de Hilbert abstracto H , cuyo dominio D_T se supone generalmente denso en H . De este modo, los operadores lineales comprenden a las matrices y las formas cuadráticas de la teoría de Hilbert

y las transformaciones de la mecánica cuántica.

Un operador lineal es continuo si y sólo si es acotado, y un operador lineal acotado con dominio denso puede extenderse unívocamente a un operador lineal acotado definido en todo H . Todo operador lineal T con dominio denso tiene un único *adjunto* T^* definido por la relación

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \quad \forall x \in D_T,$$

y cuyo dominio es el conjunto de $y \in H$ para los que se cumple la relación anterior. Un operador T es *autoadjunto* si $T = T^*$ y *simétrico* si T^* es extensión de T (los operadores autoadjuntos eran llamados hipermaximales por von Neumann).

2) En los operadores lineales acotados (definidos en todo H o que pueden extenderse para que lo estén) coinciden los conceptos de operador simétrico y autoadjunto. El teorema de Hellinger-Toeplitz puede extenderse a los operadores de von Neumann con lo que se prueba que todo operador simétrico definido en todo H debe estar acotado (resultado muy relacionado con el teorema del gráfico cerrado de S. Banach publicado en 1932). Hay así tres tipos de operadores simétricos en la teoría de von Neumann:

- Acotados, autoadjuntos y definidos en todo el espacio.
- No acotados, autoadjuntos y densamente definidos.
- No acotados, no autoadjuntos y densamente definidos.

La teoría original de Hilbert se aplicaba a los primeros y el teorema espectral de von Neumann incluía también a los segundos. Esta teoría fue desarrollada por Riesz en 1930 y más extensivamente por M. Stone en 1932. Los esfuerzos combinados de von Neumann y Stone en el período 1927-1932 proporcionaron la mayor colección de nuevos métodos para la teoría espectral desde el trabajo de Hilbert durante el período 1901-1906.

3) Del teorema espectral de Hilbert para un operador lineal simétrico acotado,

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma_p(T)} \lambda P_\lambda + \int_{\lambda \in \sigma_c(T)} \lambda dE_\lambda,$$

al escribir la primera suma como integral de Stieltjes y combinarla con la segunda integral, se obtiene la forma compacta $T = \int_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda dE_\lambda$ sobre todo el espectro. Los operadores E_λ son proyecciones con las siguientes propiedades:

- i) Si $\lambda < \mu$, el rango de E_λ está contenido en el rango de E_μ .
- ii) $E_{\lambda+\varepsilon} \rightarrow E_\lambda$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$.
- iii) $E_\lambda \rightarrow 0$ si $\lambda \rightarrow -\infty$.

iv) $E_\lambda \rightarrow I$ si $\lambda \rightarrow +\infty$.

Stone llamó a dicha familia *resolución de la identidad*. En forma intuitiva, se requiere que la función $\lambda \mapsto E_\lambda$ sea creciente, continua por la derecha, con 0 e I como valores límites a la izquierda y derecha.

La extensión de von Neumann-Stone del teorema espectral al caso no acotado se enuncia del siguiente modo:

Teorema. *A todo operador autoadjunto T definido en un espacio de Hilbert H le corresponde una única resolución de la identidad $\{E_\lambda\}$ tal que $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda$. (El espectro ahora no tiene porqué ser acotado.)*

Hagamos un esbozo de la demostración en el caso acotado:

El primer paso consiste en encontrar una familia $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ de subespacios de H con las siguientes propiedades:

i) $\lambda < -\|T\| \implies M_\lambda = \{0\}$, $\lambda > \|T\| \implies M_\lambda = H$.

ii) $\lambda \leq \mu \implies M_\lambda \subset M_\mu$.

iii) $x \in M_\lambda \implies Tx \in M_\lambda$.

Si llamamos E_λ a la proyección sobre M_λ , la familia $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ es una resolución de la identidad.

El siguiente paso es considerar cualquier partición de $(-\|T\|, \|T\|)$ o, más generalmente, una sucesión $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ tales que $\lambda_0 < -\|T\|$, $\lambda_n > \|T\|$. Denotamos por Δ_i a la diferencia $\lambda_i - \lambda_{i-1}$ y E_{Δ_i} a $E_{\lambda_i} - E_{\lambda_{i-1}}$. Se prueba entonces:

i) $\forall x, y \in H$, $\langle E_{\Delta_i}x, E_{\Delta_j}y \rangle = 0$ si $i \neq j$.

ii) Como $I = \sum_{i=1}^n E_{\Delta_i}$, todo $x \in H$ tiene la descomposición $x = \sum_{i=1}^n x_i$, con $x_i = E_{\Delta_i}x$. Entonces $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$. Además:

iii) Si λ'_i es cualquier número entre λ_{i-1} y λ_i , entonces

$$\|Tx_i - \lambda'_i x_i\| \leq \Delta_i \|x_i\|.$$

A continuación se prueba que T puede aproximarse en norma por sumas del tipo $\sum_{i=1}^n \lambda'_i E_{\Delta_i}$, es decir que para cualquier $\varepsilon > 0$, se tiene

$$\|T - \sum_{i=1}^n \lambda'_i E_{\Delta_i}\| < \varepsilon, \text{ si } \lambda'_i \in (\lambda_{i-1}, \lambda_i), \text{ máx}(\lambda_i - \lambda_{i-1}) \leq \varepsilon,$$

desigualdad que, al interpretarse como aproximación mediante sumas de Riemann, da lugar a la integral $\int_\alpha^\beta \lambda dE_\lambda$, con $\alpha < -\|T\|$, $\beta > \|T\|$.

El recíproco es consecuencia directa del hecho de que toda suma del tipo $\sum_{i=1}^n \lambda'_i E_{\Delta_i}$ es simétrica y el límite (en norma) de operadores simétricos es simétrico.

Veremos por último cómo se construyen los subespacios M_λ en el caso de que el operador sea completamente continuo:

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrario, si M_i representa el autoespacio correspondiente al autovalor λ_i , definimos M_λ como el menor subespacio cerrado que incluye a todos los M_i , con $\lambda_i < \lambda$. La sucesión M_λ es constante hasta que λ pase por un autovalor, en cuyo caso se le añade el subespacio finito-dimensional de los autovectores asociados a dicho autovalor.

A pesar de la fuerza del teorema, no cubre a muchos operadores diferenciales pues raramente son autoadjuntos. Por ejemplo, para que $T = d/dt$ sea simétrico con $\overline{D_T} = L^2[0, 1]$, debemos hacer $D_T = \{f \text{ continuamente diferenciable tal que } f(0) = f(1) = 0\}$, pero este dominio es demasiado pequeño para que T sea autoadjunto, y al agrandar el dominio se corre el riesgo de perder simetría. Esto mismo le sucede al tercer tipo de operadores citado antes. Para aplicar su teorema espectral a operadores simétricos, von Neumann tuvo que saber qué tipos de operadores simétricos admiten extensiones autoadjuntas (es fácil deducir que, si T es simétrico y S es extensión simétrica de T , entonces $T \subset S \subset S^* \subset T^*$, es decir, toda extensión simétrica de T es restricción de T^*). En 1929, él y Wintner identificaron una gran clase de tales operadores, los *operadores semiacotados*, para los que existe una constante $M > 0$ tal que

$$\langle Tx, x \rangle \leq M\|x\|, \quad \forall x \in D_T \quad \text{ó} \quad -M\|x\| \leq \langle Tx, x \rangle, \quad \forall x \in D_T.$$

Stone (1932) y Friedrichs (1934) probaron que todo operador simétrico semiacotado puede extenderse a un operador autoadjunto semiacotado con la misma cota.

Mientras que la teoría espectral de Hilbert y de von Neumann-Stone está enfocada a operadores con espectro real, también el teorema espectral se aplica a operadores con espectro más general. El caso más simple corresponde a los operadores *isométricos*, que dejan invariante el producto interior; su espectro está contenido en el círculo unidad. Un operador isométrico sobre se dice *unitario* y está caracterizado por el hecho de que su adjunto es su inverso.

Los operadores unitarios fueron introducidos por L. Autonne en 1902 y estudiados por I. Schur en 1909. En 1929, von Neumann utilizó la transformada de Cayley $C : T \mapsto (T - iI)(T + iI)^{-1}$ para aplicar operadores simétricos en operadores isométricos y probó que T es autoadjunto si y sólo si $C(T)$ es

unitario. Así el teorema espectral de operadores unitarios se sigue del correspondiente para operadores autoadjuntos usando una integral espectral sobre el círculo unidad en vez de sobre la recta real.

Como todo operador lineal acotado T puede descomponerse en forma $T = A + iB$ con A y B acotados y autoadjuntos, en concreto $A = (1/2)(T + T^*)$, $B = (1/2i)(T - T^*)$, pareciera que el teorema espectral puede extenderse a todos los operadores lineales acotados usando esta descomposición. Sin embargo, hace falta que A y B conmuten (lo que equivale a que $TT^* = T^*T$), de modo que la extensión deseada sólo funciona para los operadores que conmutan con su adjunto, a los que Toeplitz llamó *normales* en 1918. Toeplitz extendió el teorema espectral de Hilbert a formas cuadráticas normales completamente continuas probando que eran unitariamente equivalentes a una forma diagonal. En general, la resolución espectral

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE_\lambda$$

se extiende a operadores normales acotados, donde $\sigma(T)$ es un conjunto compacto en \mathbb{C} contenido en el disco cerrado $\overline{B}(0, \|T\|)$. Tanto las definiciones como la teoría espectral de operadores normales no acotados fueron extendidas por von Neumann (1930) y Stone (1932).

Después del largo camino recorrido por el teorema de los ejes principales, estamos más cerca del Análisis que de la Geometría. El contenido geométrico del teorema espectral en dimensión finita es que el espacio se puede escribir como suma directa de subespacios donde la transformación actúa como una simple multiplicación. Pero este enunciado falla en dimensión infinita en cuanto hace aparición el espectro continuo. En 1938 von Neumann resucitó el teorema espectral geométrico definiendo una integral directa de espacios de Hilbert (en completa analogía con la suma directa). Probó entonces que la acción de un operador autoadjunto en un espacio de Hilbert podía representarse como el efecto acumulado de multiplicaciones sobre ciertos subespacios cuya integral directa era unitariamente equivalente al espacio original.

7. TEOREMA DE GELFAND-NAIMARK.

Si H es un espacio de Hilbert, el conjunto $L(H) = \{T : H \rightarrow H : T \text{ lineal y acotado}\}$ forma un anillo normado; tales anillos, y las distintas topologías sobre ellos definidas, fueron ampliamente estudiados por von Neumann y F. Murray, en el período 1936-40. Los trabajos de 1941 y 1943 de I. Gelfand, M. Naimark y G. Shilov constituyeron una teoría de anillos normados que

incluía los anillos de operadores de von Neumann y Murray y que proporcionó un contexto general para el estudio de las transformadas de Fourier y el análisis armónico.

El nombre de *álgebra de Banach* se da actualmente a toda álgebra normada completa (sobre \mathbb{C}) que verifique la desigualdad $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ (es decir, el producto es continuo), y donde se supone la existencia de un elemento identidad e , tal que $xe = ex = x$ y $\|e\| = 1$. Ejemplos de álgebras de Banach son el espacio $L(H)$ y el espacio de las funciones continuas con valores complejos sobre un espacio topológico compacto X con la norma del supremo. La relación entre estos dos ejemplos es la parte de la teoría de álgebras de Banach que se dedica a la teoría espectral.

La teoría de Gelfand sobre álgebras de Banach conmutativas depende de tres conceptos fundamentales: homomorfismos complejos, ideales maximales y espectros. Un homomorfismo complejo es un funcional lineal multiplicativo no nulo. En completa analogía con la teoría espectral en espacios de Hilbert, Gelfand define el espectro $\sigma(x)$ de un elemento $x \in B$ como el conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ no tiene inverso}\}$. De estas definiciones se deducen las siguientes propiedades:

Proposición. *Sea B un álgebra de Banach conmutativa y M_B el conjunto de homomorfismos complejos de B .*

- a) $f \in M_B \implies N(f)$ es ideal maximal.
- b) $K \subset B$ ideal maximal $\implies \exists f \in M_B : K = N(f)$ y $\dim B/K = 1$.
- c) $x \in B$ es inversible $\iff f(x) \neq 0, \forall f \in M_B$.
- d) $x \in B$ es inversible $\iff x \notin I, \forall I$ ideal propio de B .
- e) $\sigma(x)$ es compacto, no vacío y $\sigma(x) \subset \overline{B}(0, \|x\|)$.
- f) $\sigma(x) = \{h(x) : h \in M_B\}$.

Por esta razón, el espacio M_B a menudo se llama espectro de B .

El conjunto M_B de homomorfismos complejos de un álgebra conmutativa B (o equivalentemente de ideales maximales) es la topología más débil con respecto a la cual las funciones $\hat{x} : M_B \rightarrow \mathbb{C}$ definidas por $\hat{x}(h) = h(x)$ son continuas, $\forall x \in B$. Es evidente pues que $\{\hat{x} : x \in M_B\} \subset C(M_B)$. Entonces el espacio topológico M_B es compacto y Hausdorff y cada elemento $x \in B$ se representa en $C(M_B)$ por su *transformada de Gelfand* \hat{x} . Se prueba además que el rango de \hat{x} es $\sigma(x)$, por lo que $\|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\|$. Además $\|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$ (es decir, la transformada de Gelfand es una isometría) si y sólo si $\|x\|^2 = \|x^2\|$, $\forall x \in B$.

En 1943, Gelfand y Naimark probaron que el álgebra de Banach conmutativa $C(M_B)$ se caracteriza por la presencia de una involución, $*$: $f \mapsto \bar{f}$ (la

conjugación compleja). En general, una involución en un álgebra B es una aplicación $*$: $B \rightarrow B$ que verifica:

i) $(x + y)^* = x^* + y^*$.

ii) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda}x^*$.

iii) $(xy)^* = y^*x^*$.

iv) $x^{**} = x$.

Probaron incluso que toda álgebra de Banach conmutativa con una involución que satisfaga $\|xx^*\| = \|x\|^2$, $\forall x$, (llamada C^* -álgebra) es isomorfa isométricamente al álgebra $C(M_B)$ de algún álgebra de Banach B . En particular, si $B(T)$ es la C^* -álgebra conmutativa generada por un operador normal acotado T , es isomorfa al álgebra $C(\sigma(T))$.

Teorema. Sea A una C^* -álgebra conmutativa con espacio de ideales maximales M_A . Entonces la transformada de Gelfand es una isometría de A sobre $C(M_A)$, con la propiedad adicional de que $(x^*)^\wedge = \widehat{x}$ (es decir, la transformada de Gelfand traslada la involución dada sobre A a la involución natural sobre $C(M_A)$).

En particular, si $B(T)$ es la C^* -álgebra conmutativa generada por un operador normal acotado T , es isomorfa al álgebra $C(\sigma(T))$.

Con respecto a la teoría espectral, el teorema de Gelfand-Naimark es clave, pues permite deducir el teorema espectral de un operador normal acotado T , traduciendo el teorema de aproximación uniforme de una función $f \in C(\sigma(T))$ por funciones escalonadas medibles de la forma $\sum f(\lambda_i)\chi_{\Delta_i}$ (Δ_i conjunto medible). La traducción de este teorema al álgebra $B(T)$ (en el caso particular de $f(\lambda) = \lambda$) es la resolución espectral $T = \int \lambda dE_\lambda$. La teoría de Gelfand sobre álgebras de Banach revela por tanto que el teorema espectral en algún sentido es equivalente al hecho más rudimentario en teoría de funciones.

Incluso la teoría de Gelfand lleva a un teorema espectral más fuerte, pues se tiene que $f(T) = \int f(\lambda)dE_\lambda$, para toda función continua f . Este fórmula fue originalmente introducida por von Neumann y Stone como la base de su cálculo funcional.

Para finalizar, daremos algún detalle de la prueba del teorema espectral, utilizando estas ideas.

Si A es un álgebra con una involución, decimos que un subconjunto $S \subset A$ es *normal* cuando $xy = yx$, $\forall x, y \in S$ y $x^* \in S$, $\forall x \in S$.

Asociado al concepto de resolución de la identidad, definimos una *medida espectral* sobre la σ -álgebra $B(M_A)$ de los conjuntos de Borel de M_A , a una aplicación $E : B(M_A) \rightarrow L(H)$ con las propiedades

- i) $E(\emptyset) = 0$, $E(M_A) = I$.
- ii) $E(\Delta)$ es un proyector ortogonal.
- iii) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.
- iv) $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset \implies E(\Delta_1 \cup \Delta_2) = E(\Delta_1) + E(\Delta_2)$.
- v) $\forall x, y \in H$, $E_{x,y}(\Delta) = \langle E(\Delta)x, y \rangle$ es una medida de Borel regular sobre $B(M_A)$.

Teorema. Sea A una subálgebra normal cerrada de $L(H)$ que contiene la identidad y M_A el espacio de ideales maximales de A . Entonces existe una única medida espectral E sobre los conjuntos de Borel de M_A tal que

$$T = \int_{M_A} \hat{T} dE, \quad \forall T \in A,$$

(\hat{T} es la transformada de Gelfand de T) donde la integral se interpreta como $\langle Tx, y \rangle = \int_{M_A} \hat{T} dE_{x,y}$.

Demostración. Es claro que A es una C^* -álgebra conmutativa. Por el teorema de Gelfand-Naimark, la aplicación $T \mapsto \hat{T}$ es un isomorfismo isométrico de A sobre $C(M_A)$.

- Unicidad de E : Fijados $x, y \in H$, la aplicación $\hat{T} \mapsto \langle Tx, y \rangle$ es un funcional lineal y acotado definido en todo $C(M_A)$, el cual determina unívocamente la medida $E_{x,y}$ por la fórmula

$$\langle Tx, y \rangle = \int_{M_A} \hat{T} dE_{x,y} \text{ (teorema de representación de Riesz).}$$

Por definición, $\langle E(\Delta)x, y \rangle = E_{x,y}(\Delta)$, lo que determina unívocamente la proyección $E(\Delta)$, para cada Δ .

- Existencia de E : Fijados $x, y \in H$, la aplicación $\beta_{x,y} : C(M_A) \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\beta_{x,y}(\hat{T}) = \langle Tx, y \rangle$ es un funcional lineal acotado (por el teorema de Gelfand-

Naimark), tal que $\|\beta_{x,y}\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, pues $\|\hat{T}\|_\infty = \|T\|$. Por el teorema de representación de Riesz, existe una medida compleja de Borel regular $\mu_{x,y}$ sobre M_A tal que $\langle Tx, y \rangle = \int_{M_A} \hat{T} d\mu_{x,y}$. Dicha medida verifica además:

- (1) $\mu_{\alpha x_1 + \beta x_2, y} = \alpha \mu_{x_1, y} + \beta \mu_{x_2, y}$.
- (2) $\overline{\mu_{x,y}} = \mu_{y,x}$, pues cuando \hat{T} es real, T es autoadjunto.
- (3) $\|\mu_{x,y}\| = \|\beta_{x,y}\|$.

Fijada ahora f de Borel y acotada en M_A , la aplicación $\beta_f : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\beta_f(x, y) = \int_{M_A} f d\mu_{x,y}$ es una forma sesquilineal acotada.

Entonces (teorema de representación de formas sesquilineales),

$$\exists \Phi(f) \in L(H) : \langle \Phi(f)x, y \rangle = \int_{M_A} f d\mu_{x,y}, \quad \forall x, y \in H.$$

Este operador verifica:

(4) $\Phi(\widehat{T}) = T$ (Φ extiende a la inversa de la transformada de Gelfand).

(5) $\Phi(f)$ es autoadjunto si f es real.

(6) $\Phi(fg) = \Phi(f)\Phi(g)$, $\forall f, g$ de Borel acotadas.

Si para cada Δ de Borel en M_A definimos $E(\Delta) = \Phi(1_\Delta)$, se demuestra también que:

(7) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$; en particular, por (6), $E(\Delta)$ es una proyección.

(8) $E(\Delta)$ es autoadjunto, por (5).

(9) $E(\emptyset) = 0$, $E(M_A) = I$, por (4).

(10) $E(\bigcup_{i=1}^n \Delta_i) = \sum_{i=1}^n E(\Delta_i)$, si $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$, $i \neq j$.

(11) $\langle E(\Delta)x, y \rangle = \mu_{x,y}(\Delta)$.

En definitiva, E es la medida espectral buscada.

Particularizando lo anterior a un solo operador, resulta:

Teorema. Sea $T \in L(H)$ un operador normal. Existe entonces una única medida espectral E definida sobre los conjuntos de Borel de $\sigma(T)$ tal que

$$T = \int_{\sigma(T)} \lambda dE(\lambda)$$

(descomposición espectral de T).

Demostración. Sea A la mínima subálgebra cerrada de $L(H)$ que contiene a I , T y T^* . Así puede aplicarse el teorema anterior; sabemos también que $\sigma(T)$ puede identificarse con el espacio de ideales maximales de A .

Observación. Para consultar más detalles sobre este tema o completar alguna información, pueden verse las referencias [GG], [Lor], [Ru], [Ste].

BIBLIOGRAFÍA

- [AG] AKHIEZER, N. y GLAZMAN, I. *Theory of Linear Operators in Hilbert Space*. Traducción inglesa: Ungar, New York, 1961–1963.
- [AKL] ALEXANDROV, A, KOLMOGOROV, A. y LAURENTIEV, M. *La matemática: su contenido, métodos y significado*. Alianza Universidad, Madrid, 1974.
- [An] ANDO, T. *Linear Operators in Krein Spaces*. Hokkaido University, Sapporo, 1979.
- [BN] BACHMAN, G. y NARICI, L. *Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1966.
- [Ba] BANACH, S. *Théorie des Opérations Linéaires*. Chelsea Publ. Comp., New York, 1932.
- [Be] BERBERIAN, S. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*. Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.
- [Bog] BOGNAR, J. *Indefinite Inner Product Spaces*. Springer Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1974.
- [Bou1] BOURBAKI, N. *Eléments de Mathématique, V*. Hermann, Paris, 1955.
- [Bou2] BOURBAKI, N. *Elementos de historia de las matemáticas*. Alianza Universidad, Madrid, 1969.
- [Br] BRÉZIS, H. *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [BP] BROWN, A. y PAGE, A. *Elements of Functional Analysis*. Van Nostrand Reinhold, London, 1970.

- [Co] CONWAY, J. *A Course in Functional Analysis*. Springer Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1985.
- [CC] COTLAR, M. y CIGNOLI, R. *Nociones de espacios normados*. EUDEBA, Buenos Aires, 1971.
- [Da] DAVIS, M. *A first course in Functional Analysis*. Gordon and Breach, New York, 1967.
- [Di] DIEUDONNÉ, J. *Abrégé d'histoire des Mathématiques, II*. Hermann, Paris, 1978.
- [DS] DUNFORD, N. y SCHWARTZ, J. *Linear Operators, Vol. I, II*. Interscience-Wiley, New York, 1957–1963.
- [Ed] EDWARDS, R. *Functional Analysis: Theory and Applications*. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.
- [Fo] FOLLAND, G. *Fourier Analysis and its Applications*. Wadsworth & Brooks, 1992.
- [Fr] FRIEDRICHS, K. *Spectral Theory of Operators in Hilbert Space*. Springer-Verlag, 1973.
- [Fu] FUHRMANN, P. *Linear systems and operators in Hilbert spaces*. McGraw-Hill, 1981.
- [GG] GOHBERG, I. y GOLDBERG, S. *Basic Operator Theory*. Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1981.
- [GGK] GOHBERG, I., GOLDBERG, S. y KAASHOEK, M. *Classes of Linear Operators, vol. I*. Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Berlin, 1990.
- [Ha1] HALMOS, P. *Introduction to Hilbert Space and the Theory of Spectral Multiplicity*. Chelsea, New York, 1951.
- [Ha2] HALMOS, P. *A Hilbert Space Problem Book*. Van Nostrand, Princeton, 1967.
- [He] HELMBERG, G. *An Introduction to Spectral Theory in Hilbert Space*. North Holland, Amsterdam, 1969.
- [HP] HILLE, E. y PHILLIPS, R. *Functional Analysis and Semigroups*. AMS Colloquium Publications, vol. XXXI, New York, 1957.
- [KG] KIRILLOV, A. y GVISHIANI, A. *Theorems and Problems in Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [KF] KOLMOGOROV, A. y FOMIN, S. *Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional*. MIR, Moscú, 1978.

- [Kr] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1978.
- [La] LARSEN, R. *Functional Analysis*. Dekker, New York, 1973.
- [Loo] LOOMIS, L. *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*. Van Nostrand, Princeton, 1953.
- [Lor] LORCH, E. *The Spectral Theorem*. MAA Studies in Math. **1**, Studies in Modern Analysis (1962), 88–137.
- [LS] LUSTERNIK, L. y SOBOLEV, V. *Précis d'analyse fonctionnelle*. MIR, Moscou, 1989.
- [Na] NAIMARK, M. *Normed Rings*. Noordhoff, Groningen, 1964.
- [Ne] VON NEUMANN, J. *Les Fondements Mathématiques de la Mécanique Quantique*. Editions Jacques Gabay, 1988 (reimpresión de la traducción francesa publicada en 1946).
- [Pr] PRYCE, J. *Basic Methods of Linear Functional Analysis*. Hutchinson Univ. Library, London, 1973.
- [RS] REED, M. y SIMON, B. *Methods of Modern Mathematical Physics, I: Functional Analysis; IV: Analysis of Operators*. Academic Press, New York, 1972–1978.
- [RN] RIESZ, F. y NAGY, B.Sz. *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1952. Apéndice *Extensions of Linear Transformations in Hilbert space which extend beyond this space*, publicado separadamente por Ungar, 1960.
- [Ro] ROYDEN, H. *Real Analysis*. Macmillan, Basingstoke, England, 1988.
- [Ru] RUDIN, W. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1973.
- [Sc] SCHECHTER, M. *Principles of Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1971.
- [So] SOULÉ, J. *Linear Operators in Hilbert Space*. Gordon and Breach, New York, 1968.
- [Ste] STEEN, L. *Highlights in the History of Spectral Theory*. Amer. Math. Monthly **80** (1973), 359–381.
- [Sto] STONE, M. *Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis*. Colloquium Publications, vol. XV, AMS, New York, 1932.
- [Ta] TAYLOR, A. *Introduction to Functional Analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1958.

- [**TPS**] TRENOGUINE, V., PISSAREVSKI, B. y SOBOLEVA, T. *Problèmes et exercices d'analyse fonctionnelle*. MIR, Moscou, 1987.
- [**Vi**] VILENKIN, N. et al. *Functional Analysis*. Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1972.
- [**Vu**] VULIKH, B. *Introduction to Functional Analysis*. Pergamon Press, Oxford, 1963.
- [**Yos**] YOSIDA, K. *Functional Analysis. 3rd. ed.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [**You**] YOUNG, N. *An Introduction to Hilbert Space*. Cambridge University, 1988.