Ejercicio 1. *En el ejercicio 2 de la prueba anterior, tras un período de observación el estudiante se da cuenta de que utiliza el libro 3 dos veces más a menudo que cualquiera de los otros dos, pero que las duraciones de las consultas se distribuyen exponencialmente con parámetro $6i$ ($i = 1, 2, 3$), mientras que los períodos entre consultas son exponenciales de parámetro 4. Hallar la proporción límite de tiempo que pasa consultando cada libro.*

Solución:
Sean 1, 2, 3 los estados en los que el estudiante está consultando cada libro y 0 el estado correspondiente a los períodos entre consultas. La matriz infinitesimal de transición es

$$\begin{array}{c|cccc|} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & -6 & & \\ 2 & 12 & & -12 & \\ 3 & 18 & & & -18 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \mathrm{P}'(0).$$

cuya distribución estacionaria verifica

$$\left.\begin{array}{l} -4\pi_0 + 6\pi_1 + 12\pi_2 + 18\pi_3 = 0 \\ \pi_0 - 6\pi_1 = 0 \\ \pi_0 - 12\pi_2 = 0 \\ 2\pi_0 - 18\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{array}\right\} \text{ o bien } \left\{\begin{array}{l} \pi_1 = \dfrac{1}{6}\pi_0 \\ \pi_2 = \dfrac{1}{12}\pi_0 \\ \pi_3 = \dfrac{1}{9}\pi_0 \\ 1 = \pi_0 \left(1 + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{49}{36}\pi_0 \end{array}\right.$$

luego

$$\pi_0 = \frac{36}{49}, \quad \pi_1 = \frac{6}{49}, \quad \pi_2 = \frac{3}{49}, \quad \pi_3 = \frac{4}{49}$$

son las proporciones límites de tiempo de utilización de cada libro.

Ejercicio 2. *En el ejercicio 3 de la prueba anterior, un modelo más detallado incorpora la información de que los períodos de hospitalización siguen una distribución exponencial de media 2, mientras que los enfermos no hospitalizados continúan así durante un tiempo exponencial de media 1. Por otra parte el tiempo que tarda un trabajador en contraer alguna enfermedad es exponencial de media 100. A la larga, ¿cómo se distribuye la población entre las tres situaciones?*

Solución:
De acuerdo con los datos, la matriz infinitesimal de transición es

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & \text{B} & \text{H} & \text{A} \\
\hline
\text{B} & -1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\
\text{H} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \\
\text{A} & \frac{9}{1000} & \frac{1}{1000} & -\frac{1}{100} \\
\hline
\end{array} \; = \; \mathrm{P}'(0).$$

La distribución estacionaria asociada cumple

$$\left.\begin{array}{r}
-\pi_B + \frac{1}{2}\,\pi_H + \frac{9}{1000}\,\pi_A = 0 \\
\frac{1}{6}\,\pi_B - \frac{1}{2}\,\pi_H + \frac{1}{1000}\,\pi_A = 0 \\
\frac{5}{6}\,\pi_B \qquad\quad - \frac{1}{100}\,\pi_A = 0 \\
\pi_B + \pi_H + \pi_A = 1
\end{array}\right\} \quad \text{cuya solución es} \quad \left\{\begin{array}{l}
\pi_B = \dfrac{6}{509} \\
\pi_H = \dfrac{3}{509} \\
\pi_A = \dfrac{500}{509}
\end{array}\right.$$

y constituye la distribución, a la larga, de la población entre los tres estados.

Ejercicio 3. *El tiempo de funcionamiento de cierta componente de una máquina antes de quedar inutilizada tiene distribución exponencial de parámetro λ. La máquina se usa de forma intermitente, siendo los periodos de utilización distribuidos exponencialmente, con parámetro μ, y los descansos exponenciales de parámetro γ.*
Hallar la distribución del tiempo en que se producirá el fallo de la componente, contado a partir del instante en que fue instalada, aprovechando un descanso de la máquina. Determinar su media.

Solución:
Entre los tres estados: Funcionamiento, Descanso y Avería, la matriz infinitesimal de transición es

$$\begin{array}{c|ccc|} & F & D & A \\ \hline F & -(\lambda+\mu) & \mu & \lambda \\ D & \gamma & -\gamma & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \mathrm{P}'(0).$$

Con $R = \sqrt{(\lambda+\mu+\gamma)^2 - 4\lambda\gamma}$, los autovalores de $\mathrm{P}'(0)$ y los autovectores asociados son

$$\begin{array}{ccc} 0 & (-\lambda-\mu-\gamma-R)/2 & (-\lambda-\mu-\gamma+R)/2 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\lambda-\mu+\gamma+R \\ 2\gamma \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\lambda-\mu+\gamma-R \\ 2\gamma \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

luego

$$e^{P'(0)\,t} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda-\mu+\gamma+R & -\lambda-\mu+\gamma-R \\ 1 & 2\gamma & 2\gamma \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-(\lambda+\mu+\gamma-R)t/2} & \\ & & e^{-(\lambda+\mu+\gamma+R)t/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4\gamma R \\ 2\gamma & \lambda+\mu-\gamma+R & -\lambda-\mu-\gamma-R \\ -2\gamma & -\lambda-\mu+\gamma-R & \lambda+\mu+\gamma-R \end{pmatrix} \frac{1}{4\gamma R}.$$

con lo cual

$$P_{DA}(t) = 1 - \frac{\lambda+\mu+\gamma+R}{2R}\, e^{-(\lambda+\mu+\gamma-R)\,t/2} + \frac{\lambda+\mu+\gamma-R}{2R}\, e^{-(\lambda+\mu+\gamma+R)\,t/2}$$

es la probabilidad de que la avería se produzca antes del instante t.

El tiempo medio hasta la avería es entonces

$$\begin{aligned} E\,[\,T\,] &= \int_0^{\infty} (\,1 - p_{DA}(t)\,)\,dt \\ &= \frac{\lambda+\mu+\gamma+R}{2R}\,\frac{2}{\lambda+\mu+\gamma-R} - \frac{\lambda+\mu+\gamma-R}{2R}\,\frac{2}{\lambda+\mu+\gamma+R} \\ &= \frac{\lambda+\mu+\gamma}{\lambda\,\gamma}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4. *Para una población de N individuos se desea estudiar un esquema simplificado del contagio de una enfermedad en el cual se supone que, si en el instante t hay i individuos enfermos, la probabilidad de que se presente un nuevo caso antes de $t + \Delta t$ es $(1 + 2i)\Delta t + o(\Delta t)$. Cada individuo tarda en sanar un tiempo exponencial de parámetro 1, sin que ello le proporcione ningún tipo de inmunidad una vez curado. Se entiende por epidemia el periodo que transcurre desde la aparición del primer caso hasta que no queda ningún individuo enfermo.*

a) *Para una familia con $N = 4$ individuos, hallar la probabilidad de que lleguen a estar todos afectados simultáneamente a lo largo de una epidemia.*

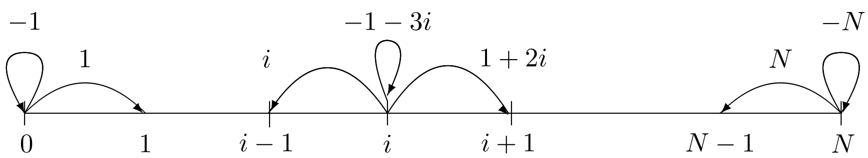
b) *En las condiciones de la pregunta anterior, determinar la duración media de una epidemia.*

c) *Generalizar los resultados anteriores al caso de N arbitrario*

d) *Siendo ahora $N = \infty$ y supuesto que los afectados continuan siempre transmitiendo la enfermedad y que no hay inicialmente ningún enfermo, calcular la distribución del número de individuos que han sufrido la enfermedad al cabo de un tiempo t.*

e) *Hallar la distribución estacionaria del número de enfermos.*

Solución:
El número de personas afectadas varía de acuerdo con la matriz infinitesimal representada por el diagrama:



En el caso $N = 4$, la matriz infinitesimal es

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
\hline
0 & -1 & 1 & & & \\
1 & 1 & -4 & 3 & & \\
2 & & 2 & -7 & 5 & \\
3 & & & 3 & -10 & 7 \\
4 & & & & 4 & -4 \\
\hline
\end{array} = \mathrm{P}'(0)
$$

a) Para calcular la probabilidad de llegar a N antes de que acabe la epidemia, se transforman 0 y N en absorbentes y se calcula la última columna de $\Pi = \lim_{t\to\infty} P(t)$.
Puesto que $P\,\Pi = 0$; $\pi_{04} = 0$ y $\pi_{44} = 1$ se cumple

$$
\left.\begin{aligned}
-4\,\pi_{14} + 3\,\pi_{24} &= 0 \\
2\,\pi_{14} - 7\,\pi_{24} + 5\,\pi_{34} &= 0 \\
3\,\pi_{24} - 10\,\pi_{34} + 7 &= 0
\end{aligned}\right\} \text{ luego } \left\{\begin{aligned}
\pi_{14} &= \frac{3}{4}\,\pi_{24} &&= \frac{21}{32} \\
\pi_{24} &= \frac{10}{11}\,\pi_{34} &&= \frac{7}{8} \\
\pi_{34} &= \frac{77}{80}
\end{aligned}\right.
$$

que es la probabilidad de que lleguen a estar los 4 afectados durante la epidemia.

c) En el caso de un N arbitrario, llamando π_i al término i-ésimo de la última columna de la matriz π, se cumple

$$
\begin{aligned}
&-4\,\pi_1 + 3\,\pi_2 = 0 \;\Rightarrow \pi_2 - \pi_1 = \frac{1}{3}\,\pi_1 \\
&2\,\pi_1 - 7\,\pi_2 + 5\,\pi_3 = 0 \;\Rightarrow \pi_3 - \pi_2 = \frac{2}{5}\,(\pi_2 - \pi_1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&i\pi_{i-1} - (1+3i)\pi_i + (1+2\,i)\pi_{i+1} = 0 \;\Rightarrow \pi_{i+1} - \pi_i = \frac{i}{1+2i}\,(\pi_i - \pi_{i-1})
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\pi_{i+1} - \pi_i = \frac{i}{2i+1}\,\frac{i-1}{2i-1}\,\frac{i-2}{2i-3}\cdots\frac{2}{5}\,\frac{1}{3}\,\pi_1 = \frac{i!}{(2i+1)!!}\,\pi_1
$$

luego

$$\pi_{i+1} = \pi_i + \frac{i!}{(2i+1)!!}\,\pi_1 = \pi_1 \sum_{k=0}^{i} \frac{k!}{(2k+1)!!}$$

y, en particular,

$$1 = \pi_N = \pi_1 \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k!}{(2k+1)!!}$$

con lo cual:

$$\pi_1 = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{k!}{(2k+1)!!} \right)^{-1}.$$

b) Si en un instante hay i afectados, el tiempo medio m_i hasta el fin de la epidemia estará compuesto, en primer lugar, por el tiempo medio $1/(1+3i)$ hasta salir del estado i. La salida puede ocurrir, con probabilidad $(1+2i)/(1+3i)$, a $i+1$ y, con probabilidad $i/(1+3i)$, a $i-1$.
Será pues

$$m_i = \frac{1}{1+3i} + \frac{1+2i}{1+3i}\, m_{i+1} + \frac{i}{1+3i}\, m_{i-1}$$

o bien

$$i\, m_{i-1} - (1+3i) m_i + (1+2i) m_{i+1} + 1 = 0$$

con la condición $m_0 = 0$.
En el caso $N = 4$ resulta

$$\left.\begin{aligned} -4\,m_1 + 3\,m_2 + 1 &= 0 \\ 2\,m_1 - 7\,m_2 + 5\,m_3 + 1 &= 0 \\ 3\,m_2 - 10\,m_3 + 7\,m_4 + 1 &= 0 \\ 4\,m_3 - 4\,m_4 + 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{de forma que} \quad \left\{\begin{aligned} m_4 &= m_3 + \frac{1}{4} \\ m_3 &= m_2 + \frac{11}{12} \\ m_2 &= m_1 + \frac{67}{24} \\ m_1 &= \frac{75}{8} \end{aligned}\right.$$

y $m_1 = 75/8$ es la duración media de la epidemia.

c') En el caso de un N arbitrario, el sistema adopta la forma

$$\begin{cases} -4\,m_1 + 3\,m_2 + 1 = 0 \\ \\ 2\,m_1 - 7\,m_2 + 5\,m_3 + 1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ i\,m_{i-1} - (1+3i)m_i + (1+2i)m_{i+1} + 1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ N\,m_{N-1} - N\,m_N + 1 = 0 \end{cases}$$

que se puede expresar

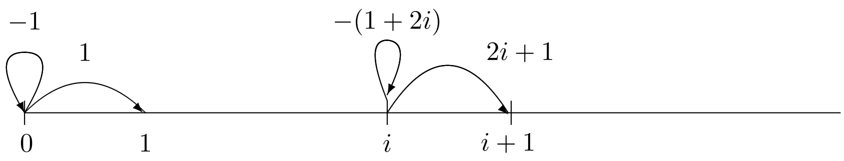
$$\begin{cases} m_1 = 1 + 3\,(m_2 - m_1) \\ \\ m_2 - m_1 = \dfrac{5}{2}\,(m_3 - m_2) + \dfrac{1}{2} \\ \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_i - m_{i-1} = \dfrac{1+2i}{i}\,(m_{i+1} - m_i) + \dfrac{1}{i} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ m_N - m_{N-1} = \dfrac{1}{N} \end{cases}$$

luego la duración media de la epidemia es

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{3\cdot 5}{2}\,(m_3 - m_2) \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 3}(m_4 - m_3) = \cdots \\ &= 1 + \frac{3}{2} + \frac{3\cdot 5}{2\cdot 3} + \frac{3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \frac{3\cdot 5\cdots(2N-1)}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(N-1)}(m_N - m_{N-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{(2k-1)!!}{k!} \end{aligned}$$

d) Puesto que los afectados continuan siempre transmitiendo la enfermedad, podemos considerar que los enfermos no sanan nunca e interesa el núnero total de casos presentados.

El número de afectados crecerá entonces según la matriz infinitesimal representada por el diagrama:



Las ecuaciones de Kolmogorov del futuro, para la probabilidad, $p_i(t)$, de que el número de afectados en el instante t sea i, son:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -p_0(t) \\ p_1'(t) = -3p_1(t) + p_0(t) \\ p_2'(t) = -5p_2(t) + 3p_1(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_i'(t){=}{-}(2i{+}1)p_i(t) + (2i{-}1)p_{i-1}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

que, integradas sucesivamente con la condición inicial $p_0(0) = 1$, dan

$$\begin{aligned} p_0 &= e^{-t} \\ p_1(t) &= \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t}) = \frac{1}{2}e^{-t}(1 - e^{-2t}) \\ p_2(t) &= \frac{3}{8}e^{-t}(1 - e^{-2t})^2 \\ p_3(t) &= \frac{5}{16}e^{-t}(1 - e^{-2t})^3 \end{aligned}$$

La solución general parece ser de la forma: $p_i(t) = a_i\, e^{-t}\, (1{-}e^{-2t})^i$. De hecho, la expresión anterior verifica la ecuación general si es $a_i = \dfrac{2\,i-1}{2\,i}\; a_{i-1}$ con lo cual

$$a_i = \frac{2i-1}{2i}\;\frac{2i-3}{2(i-1)}\;\frac{2i-5}{2(i-2)}\cdots\frac{3}{2\cdot 2}\;\frac{1}{2} = \frac{(2i-1)!!}{i!\;2^i}$$

y resulta

$$p_i(t) = \frac{(2i-1)!!}{i!\;2^i}\; e^{-t}(1 - e^{-2t})^i.$$

e) Volviendo a la situación y al diagrama inicial, la distribución estacionaria del número de enfermos cumple

$$
\begin{cases}
0 = -\pi_0 + \pi_1 & \pi_1 = \pi_0 \\
0 = \pi_0 - 4\pi_1 + 2\pi_2 & \pi_2 = \dfrac{3}{2}\,\pi_0 \\
0 = 3\pi_1 - 7\pi_2 + 3\pi_3 & \pi_3 = \dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 3}\,\pi_0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 = (2i-1)\pi_{i-1} - (1+3i)\pi_i + (i+1)\pi_{i+1} & \pi_i = \dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2i-1)}{2\cdot 3\cdots i}\pi_0 \\
& \quad = \dfrac{(2i-1)!!}{i!}\,\pi_0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 = (2N-1)\pi_{N-1} - N\,\pi_N & \pi_N = \dfrac{(2N-1)!!}{N!}\,\pi_0
\end{cases}
$$

Como

$$
1 = \sum_{i=0}^{N} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{N} \frac{(2i-1)!!}{i!} \qquad \text{es} \qquad \pi_0 = \left(\sum_{i=0}^{N} \frac{(2i-1)!!}{i!} \right)^{-1}.
$$

Ejercicio 5. *Las instalaciones del servicio de transplante de riñón de un hospital permiten conservar k de tales órganos hasta el momento de su utilizazción. Las solicitudes de órganos se suceden según un proceso de Poisson de parámetro λ, mientras que las donaciones ocurren según un proceso de Poisson de tasa μ.*

a) Plantear un modelo de la situación anterior mediante el proceso de Markov X_t =Número de solicitantes – Número de órganos disponibles.

b) Como deben ser λ, μ y k para que el sistema adquiera a la larga un régimen estacionario y cuáles son en él las probabilidades de cada estado.

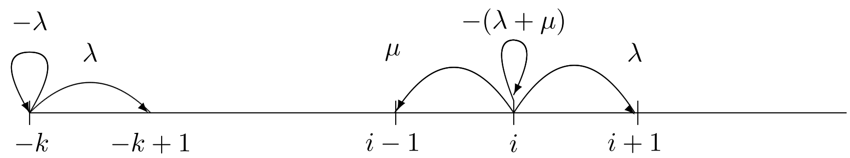
c) Determinar en régimen estacionario, el número medio de pacientes que aguardan transplante, el tiempo medio de espera de cada paciente y la proporción de donaciones que no pueden ser utilizadas.

d) Hallar la probabilidad de que se produzcan tres donaciones consecutivas sin que se solicite ningún transplante.

e) Si en un cierto instante no hay pacientes ni órganos en línea de espera, determinar la probabilidad de que alguna donación tenga que ser desechada antes de que haya un paciente que no pueda ser atendido de forma inmediata.

Solución:

a) Para cada $t > 0$, X_t puede tomar cualquier valor entero, mayor que $-k$. La matriz infinitesimal de transición, $P'(0)$, responde al diagrama:



b) Si existe distribución estacionaria, quedará determinada por las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda\pi_{-k} + \mu\pi_{-k+1} = 0 \\[2ex] \lambda\pi_{-k} - (\lambda+\mu)\,\pi_{-k+1} + \mu\pi_{-k+2} = 0 \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\[2ex] \lambda\pi_{i-1} - (\lambda+\mu)\pi_i + \mu\,\pi_{i+1} = 0 \\[2ex] \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \text{luego} \left\{\begin{array}{ll} \pi_{-k+1} & = \frac{\lambda}{\mu}\,\pi_{-k} \\[2ex] \pi_{-k+2} & = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\pi_{-k+1} - \frac{\lambda}{\mu}\pi_{-k} \\[2ex] & = \dfrac{\lambda^2}{\mu^2}\,\pi_{-k} \\ \quad\vdots & \\ \pi_{i+1} & = \frac{\lambda+\mu}{\mu}\,\pi_i - \frac{\lambda}{\mu}\,\pi_{i-1} \\[2ex] & = \dfrac{\lambda^{k+i+1}}{\mu^{k+i+1}}\,\pi_{-k} \end{array}\right.$$

Además debe ser

$$1 = \sum_{i=-k}^{\infty} \pi_i = \pi_{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \begin{cases} \infty & \text{si } \lambda \geq \mu \\[2ex] \pi_{-k}\left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{-1} & \text{si } \lambda < \mu \end{cases}$$

En el primer caso no hay distribución estacionaria, y en el segundo caso la distribución estacionaria es

$$\pi_i = (\,1 - \lambda/\mu\,)\,(\,\lambda/\mu\,)^{k+i}\,.$$

c) En regimen estacionario, el número de pacientes que aguardan transplante es

$$\begin{aligned} E\,[\,N\,] &= \sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+i} i = \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\sum_{i=1}^{\infty} i\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i} \\ &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Un paciente que solicita transplante cuando hay N aguardando, tendrá que esperar $N+1$ donaciones, espaciadas unas de otras un tiempo medio $1/\mu$. Así que el tiempo medio que ha de esperar un paciente es

$$E\,[\,T\,] = \frac{1}{\mu}\,E\,[\,N+1\,] = \frac{1}{\mu}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1} + 1\right]$$

No pueden ser utilizadas las donaciones que se produzcan cuando el sistema está en el estado $-k$: es decir con probabilidad $\pi_{-k} = 1 - \lambda/\mu$.

d) La probabilidad de que, cuando ocurra un cambio en el estado i, sea una donación es $-\frac{p'_{i,i-1}(0)}{p'_{ii}(0)} = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.
Luego la probabilidad de 3 donaciones consecutivas es $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^3$.

e) Partiendo de 0 y ampliando un estado más: $-(k+1)$, hay que calcular la probabilidad de llegar a $-(k+1)$ antes que al estado 1. Si f_i es dicha probabilidad en el supuesto de que el estado de partida fuese i, se cumpliría

$$f_i = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\, f_{i+1} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\, f_{i-1} \quad \text{con} \quad f_{-(k+1)} = 1 \quad \text{y} \quad f_1 = 0.$$

La solución general de la ecuación es $A + B\,(\,\mu/\lambda\,)^i$ y con las condiciones impuestas se obtiene

$$f_i = \frac{(\,N/\lambda\,)^i - \mu/\lambda}{(\,N/\lambda\,)^{-(k+1)} - \mu/\lambda}.$$

En particular:

$$f_0 = \frac{1 - \mu/\lambda}{(\,\mu/\lambda\,)^{-(k+1)} - \mu/\lambda}.$$

Ejercicio 6. *A una gasolinera que cuenta con un sólo surtidor hay probabilidad $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ de que llegue un cliente en cada intervalo de tiempo de longitud Δt. Cada cliente ocupa ocupa el surtidor un tiempo exponencial de parámetro μ.*

a) Estudiar la distribución del número de clientes que hay en la gasolinera en el instante t y la distribución límite.

b) Utilizando la distribución límite obtener la distribución del tiempo de espera de un cliente y la distribución del tiempo que la gasolinera está vacía entre dos clientes consecutivos.

Solución:
a) La matriz infinitesimal que rige la evolución del número de clientes en la gasolinera es

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
\hline
0 & -\lambda & \lambda & & & \\
1 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & & \\
2 & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \\
3 & & & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\
\vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots \\
\hline
\end{array} = \mathrm{P}'(0)$$

Las probabilidades $p_i(t)$ de que haya i clientes en el instante t, verifican las ecuaciones de Kolmogorov del futuro:

$$\left\{\begin{array}{rcl} p_0'(t) & = & -\lambda\, p_0(t) + \mu\, p_1(t) \\ p_i'(t) & = & \lambda\, p_{i-1}(t) - (\lambda+\mu)\, p_i(t) + \mu\, p_{i+1}(t) \qquad i \geq 1 \end{array}\right.$$

que no pueden integrarse elementalmente.
Haciendo $t \to \infty$, los términos de la distribución estacionaria, si existe, verificarán

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 \\ 0 = \lambda\pi_{i-1} - (\lambda+\mu)\pi_i + \mu\pi_{i+1} \quad i \geq 1 \end{array}\right.$$

de donde se obtiene

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0, \qquad \pi_2 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}\pi_0, \quad \ldots \quad \pi_i = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0, \ldots$$

Para que se cumpla

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{\infty} (\,\lambda/\mu\,)^i$$

debe ser $\lambda < \mu$ y en tal caso $\pi_0 = 1 - \lambda/\mu$.
Si $\lambda \geq \mu$ no existe distribución estacionaria y el tamaño de la cola crece hacia infinito.

b) Para un cliente que llega cuando hay n en la gasolinera, su tiempo de espera W será la suma de n tiempos de servicio, independientes y exponenciales de parámetro μ.
Es decir, si N es el número de clientes en la cola

$$\mathrm{P}\{W > x \,|\, N = n\} = \int_x^{\infty} \frac{\mu^n y^{n-1}\, e^{-\mu y}}{(n-1)!} dy$$

si $n > 0$ mientras que $\mathrm{P}\{W > x \,|\, N = 0\} = 0$.
Luego

$$\begin{aligned} P\{W > x\} &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \int_x^{\infty} \frac{\mu^n y^{n-1}\, e^{-\mu y}}{(n-1)!} dy \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\mu^n} \int_x^{\infty} \frac{\mu^n y^{n-1} e^{-\mu y}}{(n-1)!} dy \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \lambda \int_x^{\infty} e^{\lambda y}\, e^{-\mu y}\, dy = \frac{\lambda}{\mu}\, e^{(\lambda-\mu)x} \end{aligned}$$

para $x > 0$. En cambio $P\{W = 0\} = 1 - \lambda/\mu$.

El tiempo total V de permanencia de un cliente en la gasolinera será W más su tiempo de servicio, exponencial de parámetro μ. Por tanto

$$P\{V \leq x\} = \int_0^x \mu\, e^{-\mu y} \left\{1 - \frac{\lambda}{\mu}\, e^{(\lambda-\mu)(x-y)}\right\} dy = 1 - e^{(\lambda-\mu)x}$$

exponencial de parámetro $\mu - \lambda$. Por otra parte, si el tiempo τ que tarda en llegar el cliente siguiente, de distribución exponencial de parámetro λ, es tal que $\tau > V$, la gasolinera estará vacía un tiempo $\tau - V$. En cambio, si $\tau < V$, no se producirá hueco entre un cliente y el siguiente. Así pues, el tiempo que la gasolinera permanece vacía es $\max(0, \tau - V)$:

$$P\{\max(0, \tau - V) > x\} \;=\; \mathrm{P}\{V < \tau - x\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda y} \left[1 - e^{(\lambda-\mu)(y-x)} \right] dy \\
&= \left(1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) e^{-\lambda x}
\end{aligned}
$$

para $x > 0$, mientras que $P\{\text{máx}(0, \tau - V) = 0\} = \lambda/\mu$.

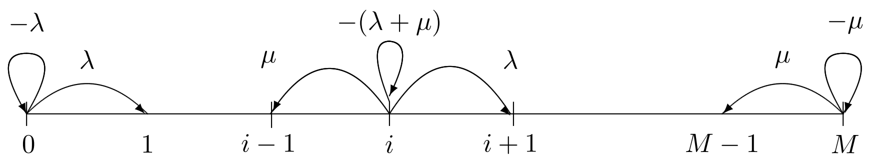
Ejercicio 7. *Los clientes llegan a una ventanilla de acuerdo con un proceso de Poisson de parámetro λ y tienen un tiempo de servicio exponencial de parámetro μ. Sin embargo la instalación cuenta con una sala de espera con capacidad para M clientes, incluido el que está recibiendo servicio, y los clientes que no caben en la sala se marchan y no regresan.*

a) Hallar la distribución en régimen estacionario y la proporción límite de tiempo que la sala permanece completa.

b) Si la sala está inicialmente completa, calcular la distribución del tiempo que tardan en producirse dos huecos en la sala, suponiendo $\lambda = 3$ y $\mu = 6$.

c) Si la sala está inicialmente vacía, hallar el tiempo medio que tarda en llenarse completamente.

Solución:
a) El número de clientes en la oficina varía entre 0 y M de acuerdo con la matriz infinitesimal descrita por el esquema:



Las ecuaciones que determinan la distribución estacionaria son:

$$\begin{cases} -\lambda\,\pi_0 + \mu\,\pi_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda\pi_{i-1} - (\lambda+\mu)\pi_i + \mu\pi_{i+1} = 0 \qquad (1 \le i \le M-1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda\pi_{M-1} - \mu\pi_M = 0 \end{cases}$$

luego

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0, \qquad \pi_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \pi_0, \quad \ldots \quad \pi_i \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0, \ldots$$

para $i \le M$
Como

$$1 = \sum_{i=0}^{M} \pi_i = \pi_0 \sum_{i=0}^{M} (\,\lambda/\mu\,)^i = \pi_0\,\frac{1 - (\,\lambda/\mu\,)^{M+1}}{1 - \lambda/\mu}$$

se obtiene

$$\pi_i = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{M+1}}\,(\lambda/\mu)^i\,.$$

En particular, la proporción límite de tiempo que la sala permanece completa es

$$\pi_M = \frac{1-\lambda/\mu}{1-(\lambda/\mu)^{M+1}}\,(\lambda/\mu)^M\,.$$

b) Tomando M como estado inicial y haciendo absorbente el estado $M-2$ (que indica que hay supone dos huecos en la sala) se obtiene la matriz de transición infinitesimal

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & M-2 & M-1 & M \\ \hline
M-2 & 0 & & \\
M-1 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\
M & & \mu & -\mu \\ \hline
\end{array} = \mathrm{P}'(0).$$

La descomposición de Jordan de $\mathrm{P}'(0)$ es:

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -9 & 3 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -3 & \\ & & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}.$$

Luego

$$\mathrm{P}(t) = e^{P'(0)\,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-3\,t} & \\ & & e^{-12\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

y la función de distribución del tiempo que tardan en producirse dos huecos en la sala es

$$p_{M,M-2}(t) = 1 - \frac{4}{3}\,e^{-3\,t} + \frac{1}{3}\,e^{-12\,t}.$$

c) El tiempo medio, m_i, para que la sala se llene, si hay i clientes inicialmente, cumple

$$m_i = \frac{1}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,m_{i+1} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,m_{i-1}$$

para $i = 1, \ldots m - 1$, con $m_0 = \dfrac{1}{\lambda} + m_1$ y $m_M = 0$.
Por tanto, resulta

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_0 \; - \frac{1}{\lambda} \\
m_2 &= \frac{\lambda + \mu}{\lambda}\, m_1 - \frac{\mu}{\lambda}\, m_0 - \frac{1}{\lambda} = m_1 - \frac{\mu}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \\
m_3 &= m_2 - \frac{\mu^2}{\lambda^3} - \frac{\mu}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \\
&\vdots \\
m_i &= m_{i-1} - \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{\mu}{\lambda} + \cdots + \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{i-1}\right) = m_{i-1} - \frac{1 - (\mu/\lambda)^i}{\lambda - \mu} \\
&\vdots \\
m_M &= m_{M-1} - \frac{1 - (\mu/\lambda)^M}{\lambda - \mu}
\end{aligned}
$$

y, dado que $m_M = 0$, es

$$
\begin{aligned}
m_0 &= \sum_{i=1}^{M} \frac{1 - (\mu/\lambda)^i}{\lambda - \mu} = \frac{1}{\lambda - \mu}\left[M - \frac{\mu}{\lambda} \sum_{i=0}^{M-1} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i\right] \\
&= \frac{1}{\lambda - \mu}\left[M - \mu\, \frac{1 - (\mu/\lambda)^M}{\lambda - \mu}\right].
\end{aligned}
$$

Ejercicio 8. *Tres amigos A, B y C de igual habilidad establecen una competición entre ellos por el siguiente procedimiento: el que se apunta un tanto propone un problema a los otros dos y aquel que lo resuelva primero se apunta un tanto. Han observado que el tiempo que tarda cada problema en ser resuelto sigue un distribución exponencial de parámetro 4 y para empezar deciden sortear para saber quién propondrá el primer problema.*

a) Hallar la distribución del tiempo que tarda cada uno de ellos en apuntarse el primer tanto.

b) Si el primer tanto se lo apunta A, determinar la probabilidad que tiene cada uno de ser el primero en conseguir dos tantos.

c) Si A acaba de apuntarse un tanto, calcular el tiempo medio que permanecerá inactivo durante las 10 unidades de tiempo siguientes.

Solución:
a) En cada instante se puede estar resolviendo un problema propuesto por A, B ó C.
La matriz infinitesimal de transición entre los tres estados será

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \end{array} = \mathrm{P}'(0)$$

habida cuenta que los problemas son resueltos con la misma probabilidad por los dos jugadores que lo intentan. La distribución inicial es (1/3,1/3,1/3).
Para determinar el tiempo que tarda A en apuntarse un tanto, ha de hacerse A absorbente :

$$\overline{\mathrm{P}}'(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -2 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

lo cual da

$$e^{\overline{\mathrm{P}}'(0)\,t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-e^{-2t} & (e^{-2t}+e^{-6t})/2 & (e^{-2t}-e^{-6t})/2 \\ 1-e^{-2t} & (e^{-2t}-e^{-6t})/2 & (e^{-2t}+e^{-6t})/2 \end{pmatrix}$$

Los términos $p_{BA}(t) = p_{CA}(t) = 1 - e^{-2\,t}$ son las probabilidades de que A se apunte un tanto antes del instante t si el juego lo inician B ó C. Si lo

incia A, tendrá que esperar un tiempo exponencial de parámetro4 antes de que B ó C planteen un problema y se pase a la situación anterior. Así que, en tal caso, el tiempo hasta que A se apunta un tanto será la suma de dos exponenciales de parámetros 4 y 2; esto es: $1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}$.
En definitiva, la distribución será: $\frac{2}{3}(1 - e^{-2\,t}) + \frac{1}{3}(1 - 2e^{-2\,t} + e^{-4\,t})$.

b) Si el primer tanto se lo apunta A, las evoluciones posteriores pueden ser

$$A \begin{cases} \text{BA} & 1/4 \\ \text{BCA} & 1/8 \\ \text{BCB} & 1/8 \\ \text{CBA} & 1/8 \\ \text{CBC} & 1/8 \\ \text{CA} & 1/4 \end{cases}$$

Luego A es el primero en apuntarse dos tantos con probabilidad 3/4 mientras que B ó C lo consiguen son probabilidad 1/8 cada uno.

c) La matriz infinitesimal original se expresa

$$\mathrm{P}'(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -6 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{3}$$

luego

$$e^{\mathrm{P}'(0)\,t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t} & \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-6t} & \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6t} \end{pmatrix}$$

y el término $p_{AA}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-6\,t}$ es la probabilidad de que A esté inactivo, en el instante t, supuesto que A acaba de anotarse un tanto.
El tiempo medio que pasará inactivo durante las próximas 10 unidades de tiempo será

$$\int_0^{10} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,e^{-6\,t} \right) dt = \frac{10}{3} + \frac{1}{9} \left(1 - e^{-60} \right).$$

Ejercicio 9. *Consideremos el proceso de Markov en* $[0,1]$, *tal que si* $X_n = x$ *la densidad de* X_{n+1} *es un triángulo de base* $[0,1]$ *y vértice situado en la vertical de* x.

a) Expresar su función de transición.

b) Calcular el coeficiente de ergodicidad.

c) Determinar la distribución estacionaria.

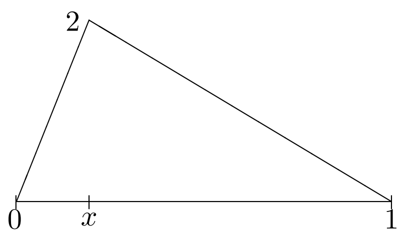
Solución:
a) La densidad de transición es

$$p(x,y) = \begin{cases} 2\,\dfrac{y}{x} & \text{si } 0 < y < x \\ 2\,\dfrac{y-1}{x-1} & \text{si } x < y < 1 \end{cases}$$

o bien, la función de transición

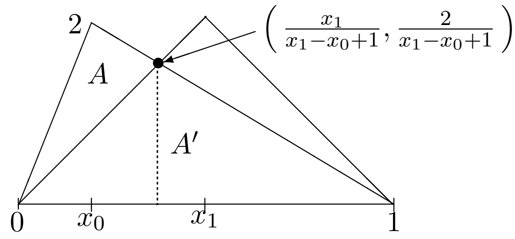
$$P(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } 0 < y < x \\ 1 + \dfrac{(y-1)^2}{x-1} & \text{si } x < y < 1 \end{cases}$$

La figura siguiente representa la densidad de transición $p(x,y)$.



b)Como muestra la figura siguiente, si $x_0 < x_1$, la densidad $p(x_0,y)$ es superior a $p(x_1,y)$ en el intervalo $\left(0, \frac{x_1}{x_1-x_0+1}\right)$. Luego

$$\sup_B |\, P(x_0,B) - P(x_1,B)\,| = A = 1 - A' = 1 - \frac{1}{x_1 - x_0 + 1} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0 + 1}$$



Puesto que la función $\frac{z}{z+1}$ es creciente entre $(0,1)$,

$$\sup_{x,y\in[\,0,1\,]} \sup_{B} |\, P(x_0,B) - P(x_1,B)\,|$$

se alcanza para $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ y vale $1/2$. Por tanto el coeficiente de ergodicidad es $1 - 1/2 = 1/2$.

c) La densidad $\pi(y)$ de la distribución estacionaria tendrá que cumplir:

$$\pi(y) = \int_0^1 \pi(x)p(x,y)dy$$

o bien

$$\begin{aligned} \pi(y) &= \int_0^y \pi(x) 2\frac{y-1}{x-1}dx + \int_y^1 \pi(x)2\frac{y}{x}dx \\ &= 2(y-1)\int_0^y \frac{\pi(x)}{x-1}dx + 2y\int_y^1 \frac{\pi(x)}{x}dx. \end{aligned}$$

Al derivar respecto a y resulta

$$\begin{aligned} \pi'(y) &= 2\int_0^y \frac{\pi(x)}{x-1}dx + 2(y-1)\frac{\pi(y)}{y-1} + 2\int_y^1 \frac{\pi(x)}{x}dx - 2\,y\frac{\pi(y)}{y} \\ &= 2\int_0^y \frac{\pi(x)}{x-1}dx + 2\int_y^1 \frac{\pi(x)}{x}dx \end{aligned}$$

Si se vuelve a derivar se obtiene:

$$\pi''(y) = 2\frac{\pi(y)}{y-1} - 2\frac{\pi(y)}{y} = 2\frac{\pi(y)}{y(y-1)}$$

Una solución de esta última ecuación es $\pi(y) = ay(y-1)$, que es una densidad para $a = -6$. Puede comprobarse que $\pi(y) = -6y(y-1)$ es densidad estacionaria.

Ejercicio 10. *El crecimiento de una cierta especie vegetal se produce de acuerdo con el siguiente esquema: La semilla tarda un tiempo exponencial de parámetro 2 en producir un tallo; a partir de entonces surgen del tallo ramas laterales espaciadas por intervalos de tiempo exponencial de parámetro 3. Por otra parte en cada intervalo* $(t, t + \Delta t)$ *la planta tiene probabilidad* $2\Delta t + o(\Delta t)$ *de secarse y desaparecer.*

a) Hallar la probabilidad de que un individuo de la especie llegue a tener i *ramas antes de secarse.*

b) Si cada vez que se seca la planta se planta inmediatamente una semilla de la misma especie, obtener la distribución del tiempo que se tarda en obtener un individuo con alguna rama.

Solución:
a) Representemos por M la muerte de la planta, S el estado de semilla e $i\,(= 0, 1, 2, \ldots)$ un tallo con i ramas. La matriz infinitesimal de la evolución es

$$
\begin{array}{c|cccccccc|}
 & M & S & 0 & 1 & 2 & 3 & \ldots & i \\
\hline
M & 0 & & & & & & & \\
S & & -2 & 2 & & & & & \\
0 & 2 & & -5 & 3 & & & & \\
1 & 2 & & & -5 & 3 & & & \\
2 & 2 & & & & -5 & 3 & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \\
i & 0 & & & & & & & 0 \\
\hline
\end{array}
$$

donde el estado i se ha hecho absorbente para contar las plantas que llegan a tener i ramas antes de secarse.
Los términos π_j de la última columna de la matriz límite Π son las proba-

bilidades de alcanzar i, desde j, antes que M, y verifican

$$\left.\begin{array}{r} \pi_M = 0 \\ -2\pi_S \;+2\pi_0 = 0 \\ -5\pi_0 \;+3\pi_1 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -5\pi_j \;+3\pi_{j+1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_i = 1 \end{array}\right\} \quad \text{de donde} \quad \left\{\begin{array}{l} \pi_S = \pi_0 \\ \pi_1 = \dfrac{5}{3}\,\pi_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \pi_{j+1} = \dfrac{5}{3}\,\pi_j = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{j+1} \pi_0 \\ \pi_i = \left(\dfrac{5}{3}\right)^{i} \pi_0 \end{array}\right.$$

luego: $\pi_0 = \pi_S = (\,3/5\,)^i$.
El resultado era previsible, pues cada vez que se cambia de estado hay probabilidad 3/5 de que sea para adquirir una nueva rama y probabilidad 2/5 de que sea para secarse.

b) Consideremos ahora la situación descrita por la matriz

$$\begin{array}{c|ccc|} & S & 0 & 1 \\ \hline S & -2 & 2 & \\ 0 & 2 & -5 & 3 \\ 1 & & & 0 \\ \hline \end{array} \;=\; \mathrm{P}'(0).$$

en la cual se ha hecho absorbente el estado 1 para medir el tiempo que tarda en aparecer la primera rama.
La descomposición de Jordan de $\mathrm{P}'(0)$ es:

$$\mathrm{P} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$$

luego

$$\mathrm{P}(t) \;=\; e^{P'(0)t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-t} & \\ & & e^{-6\,t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$$

y $\;p_{S1}(t) = 1 - \dfrac{6}{5}\,e^{-t} + \dfrac{1}{5}\,e^{-6\,t}$ es la probabilidad de que se haya producido alguna rama antes del tiempo t.

Ejercicio 11.
Sean X_t e Y_t dos procesos de Poisson de parámetros λ y μ cuyas llegadas se superponen. Si en el instante t se ha producido una llegada, determinar la probabilidad de que proceda de X_t.
Deducir la probabilidad de que en un intervalo de tiempo (s,t) se produzcan las mismas llegadas de cada uno de ambos procesos.

Solución:
La suma $Z_t = X_t + Y_t$ es un proceso de Poisson de parámetro $\lambda + \mu$, cuyos instantes de salto son la superposición de los de X_t y los de Y_t.
De hecho, en cualquier intervalo $(t, t + \Delta t)$, la probabilidad de que ocurra un salto de X_t es $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ y la probabilidad de que ocurra un salto Y_t es $\mu\Delta t + o(\Delta t)$. Por tanto, la probabilidad de que Z_t tenga un salto deberá ser $(\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t)$. Además

$$P\{X_{t+\Delta t} - X_t = 1 \mid Z_{t+\Delta t} - Z_t = 1\} = \frac{\lambda\Delta t + o(\Delta t)}{(\lambda + \mu)\Delta t + o(\Delta t)} \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

luego la probabilidad de que una llegada proceda de X_t es $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.
Según ello, a partir de cualquier instante s, e independientemente de lo ocurrido en $(0, s)$, los saltos se producen independientemente unos de otros: con probabilidad $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ de X_t y con probabilidad $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ de Y_t.
La probabilidad de que entre s y t se produzca el mismo número de llegadas de ambos procesos es

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[\,\lambda(t-s)\,]^k}{k!} \frac{[\,\mu(t-s)\,]^k}{k!} \; e^{-(\lambda+\mu)(t-s)}.$$

Ejercicio 12. *Un traductor puede traducir trabajos de dos idiomas A y B que le llevan un tiempo exponencial de parámetro 4 ó 2 respectivamente. Cuando acaba un trabajo tarda un tiempo exponencial de parámetro 6 en recibir alguna oferta que puede ser con probabilidad 1/2 de A, con probabilidad 1/4 de B y con probabilidad 1/4 de ambos simultáneamente. En este último caso tiene posibilidad de aceptar uno de los dos y rechazar el otro.*

a) Si le pagan 100 y 80 por cada unidad de tiempo que pasa traduciendo A y B respectivamente, ¿le resultará más conveniente elegir A siempre que pueda, o al revés?

b) Una vez elegida su mejor estrategia y si actualmente está esperando trabajo, determinar la distribución del tiempo que tardará en tener que hacer la primera traducción de A.

Solución:

a) Sean A, B y D las situaciones en que está haciendo una traducción de A, una traducción de B y descansando respectivamente. Según la alternativa que escoja, la evolución seguirá una u otra de las dos matrices infinitesimales siguientes:

$$\begin{array}{c|ccc|} & A & B & D \\ \hline A & -4 & & 4 \\ B & & -2 & 2 \\ D & 9/2 & 3/2 & -6 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc|} & A & B & D \\ \hline A & -4 & & 4 \\ B & & -2 & 2 \\ D & 3 & 3 & -6 \\ \hline \end{array}$$

En el primer caso la distribución estacionaria cumple

$$\left.\begin{aligned} -4\,\pi_A + \frac{9}{2}\,\pi_D = 0 \\ -2\,\pi_B + \frac{3}{2}\,\pi_D = 0 \\ \pi_A + \pi_B + \pi_C = 1 \end{aligned}\right\} \text{ de donde } \pi_A = \frac{9}{23}, \quad \pi_B = \frac{6}{23}, \quad \pi_D = \frac{8}{23}.$$

mientras que con la segunda alternativa se verifica

$$\left.\begin{aligned} -4\,\pi'_A + 3\,\pi'_D = 0 \\ -2\,\pi'_B + 3\,\pi'_D = 0 \\ \pi'_A + \pi'_B + \pi'_C = 1 \end{aligned}\right\} \quad \text{luego} \quad \pi'_A = \frac{3}{13}, \quad \pi'_B = \frac{6}{13}, \quad \pi'_D = \frac{4}{13}.$$

Como cada π_i representa la proporción de tiempo en el estado i, los rendimientos por unidad de tiempo, según la estrategia adoptada, son

$$\frac{9}{23}\,100 + \frac{6}{23}\,80 = 60 \qquad \text{y} \qquad \frac{3}{13}\,100 + \frac{6}{13}\,80 = 60$$

Económicamente ambas alternativas son indiferentes; pero con la primera descansa más que con la segunda, puesto que $\pi_D > \pi'_D$.

b) Con la primera alternativa y haciendo A absorbente, la matriz $\mathrm{P}'(0)$ será

$$\begin{aligned}\mathrm{P}'(0) \;&=\; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 9/2 & 3/2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2+\sqrt{7} & -2-\sqrt{7} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -4+\sqrt{7} & \\ & & -4-\sqrt{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{7} & 0 & 0 \\ -4-\sqrt{7} & 2+\sqrt{7} & 2 \\ 4-\sqrt{7} & -2+\sqrt{7} & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{7}}\end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(t) \;&=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2+\sqrt{7} & -2-\sqrt{7} \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{-(4-\sqrt{7})t} & \\ & & e^{-(4+\sqrt{7})t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4\sqrt{7} & 0 & 0 \\ -4-\sqrt{7} & 2+\sqrt{7} & 2 \\ 4-\sqrt{7} & -2+\sqrt{7} & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{4\sqrt{7}}\end{aligned}$$

y por consiguiente

$$p_{DA}(t) = 1 + \frac{1-2\sqrt{7}}{4\sqrt{7}}\, e^{-(4-\sqrt{7})t} - \frac{1+2\sqrt{7}}{4\sqrt{7}}\, e^{-(4+\sqrt{7})t}$$

es la probabilidad de que tarde menos de t en hacer la primera traducción de A.