Problema 4. *¿Cuántos grupos abelianos no isomosrfos existen de orden 100? ¿Y de orden 175?.*

Solución. Vamos a aplicar el teorema de estructura de grupos abelianos finitos.

Primero veamos los grupos de órden 100. Descomponemos 100 en sus factores primos:

$$100 = 2^2 \cdot 5^2 \ .$$

Se puede ver que las posibilidades de poner 100 como producto de dos números son:

$$\begin{array}{rr} 100 = & 2 \cdot 50 \\ & 4 \cdot 25 \\ & 5 \cdot 20 \\ & 10 \cdot 10 \end{array}$$

Las únicas parejas que verifican que el menor divide al mayor son $(2, 50)$, $(5, 20)$ y $(10, 10)$. Ahora veamos la forma de escribir 100 como producto de 3 números:

$$\begin{array}{rl} 100 = & 2 \cdot 2 \cdot 25 \\ & 2 \cdot 5 \cdot 10 \\ & 5 \cdot 5 \cdot 4 \end{array}$$

Ninguna de estas descomposiciones nos sirve ya que no se dividen de forma adecuada tal como indica el teorema de estructura. Sólo hay una forma de descomponer 100 como producto de 4 elementos: $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$, que tampoco nos sirve. Luego los grupos abelianos finitos no isomorfos de óden 100 serán:

$$\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

Notar que hemos incluido el grupo cíclico $\mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$ que aparece de forma trivial. Todas las combinaciones que hemos descartado son isomórfas a uno de estos grupos:

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/100\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/25\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/50\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$$

Para deducir esto último hemos utilizado un teorema que dice que si m y n son primos entre sí entonces $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es cíclico y por tanto isomorfo a $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$.

Si aplicamos el mismo razonamiento para $175 = 5^2 \cdot 7$ vemos que los únicos grupos abelianos finitos no isomorfos de órden 175 son

$$\mathbb{Z}/175\mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/35\mathbb{Z}$$