EJERCICIO 1:

Sea $X = \{(x, 0, 700 - x) : 0 \leq x \leq 700\}$ el candidato a conjunto estable de imputaciones (SSI por sus siglas en inglés) para el juego del vendedor del coche usado y $\vec{r}, \vec{t} \in X$ dos imputaciones definidas por $\vec{r} = (r, 0, 700 - r)\ y\ \vec{t} = (t, 0, 700 - t)$. Para que X sea SSI debe verificar:

<u>Estabilidad interna:</u> No existe dominancia entre dos imputaciones cualesquiera de X, para cualquier coalición S.

Sea S una coalición cualquiera, supongamos que $\vec{r} >_S \vec{t}$ y veamos si puede existir alguna coalición S que verifique la dominancia. Para ello distinguimos dos casos:

a) S es una coalición unipersonal: en este caso la función característica es nula, y usando la condición de factibilidad en las relaciones de dominancia

$$\vec{r} >_S \vec{t} \ \ tal\ que \sum_{P_i \in S} r_i \leq v(S) = 0$$

Pero por ser $\vec{r}$ imputación $r_i \geq v(\{P_i\}) = 0$ (racionalidad individual) por tanto, para que la dominancia suceda se debe verificar que $r_i = 0$ para $S = \{P_i\}$ y llegamos a un absurdo.

b) S es una coalición bipersonal: análogamente al caso anterior, examinamos la factibilidad.
   - Si $P_2 \in S$ la condición de dominancia exige que $r_i > t_i\ \forall P_i \in S$ sin embargo $0 > 0$ es un absurdo y no puede haber dominancia.
   - Si $P_2 \notin S \Rightarrow\ S = \{P_1, P_3\}$ con $v(S) = 700$, la dominancia $\vec{r} >_S \vec{t}$ implica

$$\begin{cases} 700 - r > 700 - t \\ r > t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r < t \\ r > t \end{cases}$$

Y nuevamente llegamos a un absurdo.

<u>Estabilidad externa:</u> para cualquier imputación $\vec{t} = (t_1, t_2, t_3)$ fuera del conjunto estable existe una imputación $\vec{r} = (r, 0{,}700 - r) \in X$ y una coalición S, talque $\vec{r} >_S \vec{t}$.

Por ser $\vec{t}$ una imputación verifica

1. $t_1 + t_2 + t_3 = v(P) = 700$ (racionalidad colectiva)
2. $t_i \geq v(\{P_i\}) = 0 \quad \forall i \in \{1,2,3\}$ (racionalidad individual)

Es evidente que la coalición S que verifique $\vec{r} >_S \vec{t}$ no puede contener a P_2, puesto que $t_2 \geq 0$ con lo que no se verifica la condición de dominancia $r_2 > t_2$.

Ahora bien, sea $S = \{P_1, P_3\}$, tenemos dos casos:

(a) Si $t_2 = 0$ entonces $\vec{t} \in X$ y estamos en el caso b) del apartado anterior.

(b) Si $t_2 > 0$ entonces por construcción tenemos:

$$t_2 > 0 \Rightarrow t_2 + t_1 - t_1 > r - r$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -t_1 > -r \\ t_2 + t_1 > r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 < r \\ 700 - t_3 > r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 < r \\ 700 - r > t_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 < r_1 \\ t_3 < r_3 \end{cases}$$

Y efectivamente $\exists \vec{r} \in X$ tal que $\vec{r} >_S \vec{t}$ para algún S si $\vec{t} \notin X$.

Intuitivamente, este SSI refleja un comportamiento socialmente aceptado o éticamente correcto, que podría fundamentarse en el hecho de que el tercer jugador puede ofrecer más dinero que el segundo, de manera que no parece del todo irracional que el jugador 2 se retirase y dejase negociar un precio a los jugadores 1 y 3 que tienen mayor posibilidad de llegar a un acuerdo. (Así lo refleja el “core” o núcleo de imputaciones del juego, que es subconjunto del SSI)

Sin embargo, cabe mencionar que no constituye una solución absoluta o determinista, pudiéndose desarrollar el juego en cualquier otro conjunto de acciones no contemplado en el SSI. De hecho, la presencia del jugador 2 hace la negociación más dura según el “core”, que presenta unas condiciones de estabilidad mas restringidas que el SSI.

EJERCICIO 2:

La forma normal del ejercicio es la siguiente:

jugada	pagos	jugada	pagos
['L', 'L', 'L', 'L']	[0, 0, 0, 0]	**['M', 'M', 'M', 'M']**	[0, 0, 0, 0]
['L', 'L', 'L', 'M']	[10, 10, 10, -30]	**['M', 'M', 'M', 'N']**	[10, 10, 10, -30]
['L', 'L', 'L', 'N']	[-10, -10, -10, 30]	**['M', 'M', 'N', 'L']**	[0, 0, -10, 10]
['L', 'L', 'M', 'L']	[10, 10, -30, 10]	**['M', 'M', 'N', 'M']**	[10, 10, -30, 10]
['L', 'L', 'M', 'M']	[20, 20, -20, -20]	**['M', 'M', 'N', 'N']**	[20, 20, -20, -20]
['L', 'L', 'M', 'N']	[0, 0, -10, 10]	**['M', 'N', 'L', 'L']**	[-10, 10, 0, 0]
['L', 'L', 'N', 'L']	[-10, -10, 30, -10]	**['M', 'N', 'L', 'M']**	[0, -10, 10, 0]
['L', 'L', 'N', 'M']	[0, 0, 10, -10]	**['M', 'N', 'L', 'N']**	[10, 0, -10, 0]
['L', 'L', 'N', 'N']	[-20, -20, 20, 20]	**['M', 'N', 'M', 'L']**	[0, -10, 0, 10]
['L', 'M', 'L', 'L']	[10, -30, 10, 10]	**['M', 'N', 'M', 'M']**	[10, -30, 10, 10]
['L', 'M', 'L', 'M']	[20, -20, 20, -20]	**['M', 'N', 'M', 'N']**	[20, -20, 20, -20]
['L', 'M', 'L', 'N']	[0, -10, 0, 10]	**['M', 'N', 'N', 'L']**	[10, 0, 0, -10]
['L', 'M', 'M', 'L']	[20, -20, -20, 20]	**['M', 'N', 'N', 'M']**	[20, -20, -20, 20]
['L', 'M', 'M', 'M']	[30, -10, -10, -10]	**['M', 'N', 'N', 'N']**	[30, -10, -10, -10]
['L', 'M', 'M', 'N']	[10, 0, 0, -10]	**['N', 'L', 'L', 'L']**	[30, -10, -10, -10]
['L', 'M', 'N', 'L']	[0, -10, 10, 0]	**['N', 'L', 'L', 'M']**	[10, 0, 0, -10]
['L', 'M', 'N', 'M']	[10, 0, -10, 0]	**['N', 'L', 'L', 'N']**	[20, -20, -20, 20]
['L', 'M', 'N', 'N']	[-10, 10, 0, 0]	**['N', 'L', 'M', 'L']**	[10, 0, -10, 0]
['L', 'N', 'L', 'L']	[-10, 30, -10, -10]	**['N', 'L', 'M', 'M']**	[-10, 10, 0, 0]
['L', 'N', 'L', 'M']	[0, 10, 0, -10]	**['N', 'L', 'M', 'N']**	[0, -10, 10, 0]
['L', 'N', 'L', 'N']	[-20, 20, -20, 20]	**['N', 'L', 'N', 'L']**	[20, -20, 20, -20]
['L', 'N', 'M', 'L']	[0, 10, -10, 0]	**['N', 'L', 'N', 'M']**	[0, -10, 0, 10]
['L', 'N', 'M', 'M']	[10, -10, 0, 0]	**['N', 'L', 'N', 'N']**	[10, -30, 10, 10]
['L', 'N', 'M', 'N']	[-10, 0, 10, 0]	**['N', 'M', 'L', 'L']**	[10, -10, 0, 0]
['L', 'N', 'N', 'L']	[-20, 20, 20, -20]	**['N', 'M', 'L', 'M']**	[-10, 0, 10, 0]
['L', 'N', 'N', 'M']	[-10, 0, 0, 10]	**['N', 'M', 'L', 'N']**	[0, 10, -10, 0]
['L', 'N', 'N', 'N']	[-30, 10, 10, 10]	**['N', 'M', 'M', 'L']**	[-10, 0, 0, 10]
['M', 'L', 'L', 'L']	[-30, 10, 10, 10]	**['N', 'M', 'M', 'M']**	[-30, 10, 10, 10]
['M', 'L', 'L', 'M']	[-20, 20, 20, -20]	**['N', 'M', 'M', 'N']**	[-20, 20, 20, -20]
['M', 'L', 'L', 'N']	[-10, 0, 0, 10]	**['N', 'M', 'N', 'L']**	[0, 10, 0, -10]
['M', 'L', 'M', 'L']	[-20, 20, -20, 20]	**['N', 'M', 'N', 'M']**	[-20, 20, -20, 20]
['M', 'L', 'M', 'M']	[-10, 30, -10, -10]	**['N', 'M', 'N', 'N']**	[-10, 30, -10, -10]
['M', 'L', 'M', 'N']	[0, 10, 0, -10]	**['N', 'N', 'L', 'L']**	[20, 20, -20, -20]
['M', 'L', 'N', 'L']	[-10, 0, 10, 0]	**['N', 'N', 'L', 'M']**	[0, 0, -10, 10]
['M', 'L', 'N', 'M']	[0, 10, -10, 0]	**['N', 'N', 'L', 'N']**	[10, 10, -30, 10]
['M', 'L', 'N', 'N']	[10, -10, 0, 0]	**['N', 'N', 'M', 'L']**	[0, 0, 10, -10]
['M', 'M', 'L', 'L']	[-20, -20, 20, 20]	**['N', 'N', 'M', 'M']**	[-20, -20, 20, 20]
['M', 'M', 'L', 'M']	[-10, -10, 30, -10]	**['N', 'N', 'M', 'N']**	[-10, -10, 30, -10]
['M', 'M', 'L', 'N']	[0, 0, 10, -10]	**['N', 'N', 'N', 'L']**	[10, 10, 10, -30]
['M', 'M', 'M', 'L']	[-10, -10, -10, 30]	**['N', 'N', 'N', 'M']**	[-10, -10, -10, 30]

Como se puede apreciar en la tabla, el juego en su forma normal es de suma nula, por lo que en su forma función característica también será de suma nula, y en forma característica, ser de suma nula significa que, para cualquier coalición S, se verifica:

$$v(S) + v(S^c) = v(P) \quad con\ P\ la\ gran\ coalición$$

Además, el valor de la gran coalición es $v(P) = 0$.

Calculamos los pagos en coalición unipersonal contra una coalición de 3 jugadores:

	L,L,L	**L, L, M**	**L, L, N**	**L, M, M**	**L, M, N**	**L, N, N**	**M, M, M**	**M, M, N**	**M, N, N**	**N, N, N**
L	[0 0]	[10 -10]	[-10 10]	[20 -20]	[0 0]	[-20 20]	[30 -30]	[10 -10]	[-10 10]	[-30 30]
M	[-30 30]	[-20 20]	[-10 10]	[-10 10]	[0 0]	[10 -10]	[0 0]	[10 -10]	[20 -20]	[30 -30]
N	[30 -30]	[10 -10]	[20 -20]	[-10 10]	[0 0]	[10 -10]	[-30 30]	[-20 20]	[-10 10]	[0 0]

Donde hemos obviado estrategias de 3 jugadores que son idénticas en términos de pagos, por ejemplo, $[L, L, M] \equiv [L, M, L] \equiv [M, L, L]$, ya que es indiferente qué jugador juega M lo importante es que un jugador juega M y otros dos juegan L.

Aplicando el método simplex obtenemos que la solución del juego es:

$$\vec{p} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \quad con\ v = 0$$

Por otro lado, el dual nos dice que las estrategias que se utilizaran son $\{M, M, M\}, \{L, L, L\}, \{N, N, N\}$ con probabilidad $1/3$ cada una y mismo valor de juego nulo.

Podemos deducir entonces que el valor de la función característica para coaliciones de uno o tres jugadores es nulo.

Análogamente para una coalición de 2 jugadores contra otra de dos jugadores, eliminando información redundante, resulta:

$S \backslash S^c$	**L, L**	**L, M**	**L, N**	**M, M**	**M, N**	**N, N**
L, L	[0 0]	[20 -20]	[-20 20]	[40 -40]	[0 0]	[-40 40]
L, M	[-20 20]	[0 0]	[-10 10]	[20 -20]	[10 -10]	[0 0]
L, N	[20 -20]	[10 -10]	[0 0]	[0 0]	[-10 10]	[-20 20]
M, M	[-40 40]	[-20 20]	[0 0]	[0 0]	[20 -20]	[40 -40]
M, N	[0 0]	[-10 10]	[10 -10]	[-20 20]	[0 0]	[20 -20]
N, N	[40 -40]	[0 0]	[20 -20]	[-40 40]	[-20 20]	[0 0]

Podemos apreciar que el juego es simétrico, por lo que el valor esperado solución del juego, para cada coalición es nulo. $v(G) = 0 \Rightarrow \mu(S) = 0 \Rightarrow \mu(S^c) = 0.$ Es decir, las coaliciones de dos jugadores tienen valor nulo en la función característica.

$$\boxed{\text{SOLUCIÓN: } \mu(S) = 0 \ \forall\, S,\ \ \mu(\emptyset) = 0}$$

Ahora, bien, un juego no es esencial si se verifica que:

$$v(P) = \sum_{i=1}^{N} v(\{P_i\})$$

puesto que $v(P) = 0$ y $v(S) = 0$ para cualquier coalición unipersonal, **el juego no es esencial.**

EJERCICIO 3:

Para verificar que es una función característica, debemos comprobar que cumple el **teorema de superaditividad**, que es:

Sean S y T dos coaliciones disjuntas, entonces:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$$

Donde v es la función característica.

$v(\{J_1, J_2\}) = 0 \geq -1 + 0 = v(\{J_1\}) + v(\{J_2\})$

$v(\{J_1, J_3\}) = -1 \geq -1 - 1 = v(\{J_1\}) + v(\{J_3\})$

$v(\{J_1, J_4\}) = 1 \geq -1 + 0 = v(\{J_1\}) + v(\{J_4\})$

$v(\{J_2, J_3\}) = 0 \geq 0 - 1 = v(\{J_2\}) + v(\{J_3\})$

$v(\{J_2, J_4\}) = 1 \geq 0 + 0 = v(\{J_2\}) + v(\{J_4\})$

$v(\{J_3, J_4\}) = 0 \geq -1 + 0 = v(\{J_3\}) + v(\{J_4\})$

$v(\{J_1, J_2, J_3\}) = 1 \geq -1 + 0 - 1 = v(\{J_1\}) + v(\{J_2\}) + v(\{J_3\})$

$v(\{J_1, J_2, J_4\}) = 2 \geq -1 + 0 + 0 = v(\{J_1\}) + v(\{J_2\}) + v(\{J_4\})$

$v(\{J_1, J_4, J_3\}) = 0 \geq -1 + 0 - 1 = v(\{J_1\}) + v(\{J_4\}) + v(\{J_3\})$

$v(\{J_4, J_2, J_3\}) = 1 \geq 0 + 0 - 1 = v(\{J_4\}) + v(\{J_2\}) + v(\{J_3\})$

Además, $v(\{J_4, J_2, J_3, J_1\}) = 2$ y la única forma de sumar el valor 2 es con $v(\{J_1, J_2, J_3\}) =$ $= v(\{J_4, J_2, J_3\}) = v(\{J_4, J_1\}) = v(\{J_4, J_2\}) = 1$ y todas ellas tienen intersección no vacía, por lo que podemos concluir que v es función característica.

Calculamos ahora la forma (0,1)-reducida. Para ello, debemos encontrar las constantes $k, c_1, \ldots, c_N$ que hacen que el juego en forma característica v sea equivalente estratégicamente a μ, es decir:

$$\mu(S) = kv(S) + \sum_{J_i \epsilon S} c_i$$

Como sabemos

$$c_i = -kv(\{P_i\})$$

$$k = \frac{1}{v(J) - \sum_{i=1}^{n} v(\{J_i\})} \qquad J \; la \; "gran \; coalición"$$

Con esto tenemos que $k = \frac{1}{2-(-1+0-1+0)} = \frac{1}{4}$ y para este valor de k, tenemos unas constantes $c_1 = c_3 = \frac{1}{4}$ y $c_2 = c_4 = 0$.

Con estos cálculos podemos definir la forma (0,1)-reducida:

$$\mu(\{J_1\}) = \mu(\{J_3\}) = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4} = 0$$

$$\mu(\{J_2\}) = \mu(\{J_4\}) = \frac{1}{4}(0) + 0 = 0$$

$$\mu(\{J_3, J_4\}) = \mu(\{J_2, J_3\}) = \mu(\{J_1, J_2\}) = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mu(\{J_1, J_3\}) = \frac{1}{4}(-1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mu(\{J_1, J_4\}) = \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mu(\{J_2, J_4\}) = \frac{1}{4}(1) = \frac{1}{4}$$

$$\mu(\{J_1, J_2, J_3\}) = \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mu(\{J_1,J_2,J_4\}) = \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\mu(\{J_1,J_3,J_4\}) = \frac{1}{4}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\mu(\{J_2,J_3,J_4\}) = \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\mu(J) = \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

Y concluimos que efectivamente μ es la forma (0,1)-reducida, puesto que:

$$\mu(\{J_i\}) = 0 \ \forall \ i \in \{1,2,3,4\}$$

$$\mu(J) = 1$$

Con el vector de constantes $(k, c_1, c_2, c_3, c_4) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0)$

Veamos cuál es el valor de Shapley de cada jugador, que está definido como:

$$\varphi_i = \sum_{J_i \in S} \frac{(O(S)-1)!\,\big(N-O(S)\big)!}{N!}\delta(J_i,S) \quad tal\ que\ \delta(J_i,S) = v(S) - v(S - \{J_i\})$$

Para el jugador 1 tenemos:

$$\delta(J_1,\{J_1,J_2\}) = v(\{J_1,J_2\}) - v(\{J_2\}) = 0$$

$$\delta(J_1,\{J_1,J_3\}) = v(\{J_1,J_3\}) - v(\{J_3\}) = -1 + 1 = 0$$

$$\delta(J_1,\{J_1,J_4\}) = v(\{J_1,J_4\}) - v(\{J_4\}) = 1 - 0 = 1$$

$$\delta(J_1,\{J_1,J_2,J_3\}) = v(\{J_1,J_2,J_3\}) - v(\{J_2,J_3\}) = 1 - 0 = 1$$

$$\delta(J_1,\{J_1,J_2,J_4\}) = v(\{J_1,J_2,J_4\}) - v(\{J_2,J_4\}) = 2 - 1 = 1$$

$$\delta(J_1,\{J_1,J_3,J_4\}) = v(\{J_1,J_3,J_4\}) - v(\{J_3,J_4\}) = 0 - 0 = 0$$

$$\delta(J_1,\{J_1,J_2,J_3,J_4\}) = v(\{J_1,J_2,J_3,J_4\}) - v(\{J_2,J_3,J_4\}) = 2 - 1 = 1$$

Aplicamos la fórmula inicial obviando los factores nulos:

$$\varphi_1 = \frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!}\,\delta(J_1,\{J_1,J_4\}) + \frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!}\delta(J_1,\{J_1,J_2,J_3\})$$
$$+\frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!}\delta(J_1,\{J_1,J_2,J_4\})$$
$$+\frac{(4-1)!\,(4-4)!}{4!}\delta(J_1,\{J_1,J_2,J_3,J_4\}) = \frac{2!}{4!} + 2\frac{2!}{4!} + \frac{3!}{4!} = 3\frac{2!}{4!} + \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Para el jugador 3 tenemos:

$$\delta(J_3,\{J_1,J_3\}) = v(\{J_1,J_3\}) - v(\{J_1\}) = 1$$

$$\delta(J_3,\{J_2,J_3\}) = v(\{J_2,J_3\}) - v(\{J_3\}) = 0 - 0 = 0$$

$$\delta(J_3,\{J_4,J_3\}) = v(\{J_3,J_4\}) - v(\{J_4\}) = 0 - 0 = 0$$

$$\delta(J_3,\{J_1,J_2,J_3\}) = v(\{J_1,J_2,J_3\}) - v(\{J_1,J_2\}) = 1 - 0 = 1$$

$$\delta(J_3,\{J_1,J_4,J_3\}) = v(\{J_1,J_4,J_3\}) - v(\{J_1,J_4\}) = 0 - 1 = -1$$

$$\delta(J_3,\{J_2,J_4,J_3\}) = v(\{J_2,J_4,J_3\}) - v(\{J_2,J_4\}) = 1 - 1 = 0$$

$$\delta(J_1,\{J_1,J_2,J_3,J_4\}) = v(\{J_1,J_2,J_3,J_4\}) - v(\{J_2,J_3,J_4\}) = 2 - 2 = 0$$

$$\varphi_3 = \frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!}\delta(J_3,\{J_1,J_3\}) + \frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!}\delta(J_3,\{J_1,J_2,J_3\})$$
$$+\frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!}\delta(J_3,\{J_1,J_4,J_3\}) = \frac{2!}{4!} + \frac{2!}{4!} + (-1)\frac{2!}{4!} = \frac{2!}{4!} = \frac{1}{12}$$

Para el jugador 2 tenemos:

$$\delta(J_2,\{J_1,J_2\}) = v(\{J_1,J_2\}) - v(\{J_1\}) = 1$$

$$\delta(J_2,\{J_3,J_2\}) = v(\{J_3,J_2\}) - v(\{J_3\}) = 0 - 0 = 1$$

$$\delta(J_2,\{J_4,J_2\}) = v(\{J_2,J_4\}) - v(\{J_4\}) = 1 - 0 = 1$$

$$\delta(J_2,\{J_1,J_2,J_3\}) = v(\{J_1,J_2,J_3\}) - v(\{J_1,J_3\}) = 1 - 0 = 1$$

$$\delta(J_2, \{J_1, J_4, J_2\}) = v(\{J_1, J_4, J_2\}) - v(\{J_1, J_4\}) = 2 - 1 = 1$$

$$\delta(J_2, \{J_2, J_4, J_3\}) = v(\{J_2, J_4, J_3\}) - v(\{J_3, J_4\}) = 1 - 0 = 1$$

$$\delta(J_1, \{J_1, J_2, J_3, J_4\}) = v(\{J_1, J_2, J_3, J_4\}) - v(\{J_1, J_3, J_4\}) = 2 - 0 = 2$$

$$\varphi_2 = 3\frac{(2-1)!\,(4-2)!}{4!} + 3\frac{(3-1)!\,(4-3)!}{4!} + 2\frac{(4-1)!\,(4-4)!}{4!}$$
$$= 3\frac{2!}{4!} + 3\frac{2!}{4!} + 2\frac{3!}{4!} = 2\frac{3!}{4!} + 2\frac{3!}{4!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

Ahora, sabiendo que el vector de Shapley $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ es una imputación, por la propiedad de racionalidad colectiva de las imputaciones sabemos que:

$$\sum_{i=1}^{4} \varphi_i = v(J) \quad \Rightarrow \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 2$$

$$\varphi_4 = 2 - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)$$

$$\varphi_4 = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - 1 = \frac{5}{12}$$

Por tanto, el vector de Shapley para este juego es:

$$\vec{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{12}, \frac{5}{12})$$