Solución Prueba Presencial Junio 2014. 2^a semana

14 de junio de 2014

1. Hallar la ecaución de la esfera $S \subset \mathbb{R}^3$ que tiene por planos tangentes $x+y+z=3$ y $x+y+z=-2$ y pasa por el punto $P=(1,1,1)$.

Solución: La recta de ecuación $x=y=z$ pasa por el punto P y es perpendicular a los dos planos del enunciado. Vamos a calcular el punto Q de intersección de esta recta con el plano $x+y+z=-2$, tenemos entonces

$$x+x+x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

y este será el punto de tangencia de la esfera con el plano $x+y+z=-2$. Como ambos puntos pertenecen a la misma recta, el centro de la esfera será el punto medio:

$$O=\frac{(1,1,1)+(-2/3,-2/3,-2/3)}{2}=(1/6,1/6,1/6)$$

y el radio

$$r=d(O,P)=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{25}{36}+\frac{25}{36}}=\frac{\sqrt{75}}{6}$$

y finalmente la ecuación de la esfera es:

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\left(y-\frac{1}{6}\right)^2+\left(z-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{25}{12}$$

2. Calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$$

Solución: La función

$$f(t)=\begin{cases} \dfrac{\cos t-1}{t^2} & \text{si } t\neq 0 \\ -1/2 & \text{si } t=0 \end{cases}$$

Entonces tenemos que $f(x,y) = \frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2}$ es la composición $f = g \circ h$ donde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es la función continua $h(x,y) = xy$. Por otra parte, es fácil comprobar que g es continua en $t = 0$ y por tanto en todo $\mathbb{R}$. Resulta que f es composición de funciones continuas y por tanto continua en $\mathbb{R}^2$ y finalmente

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos(xy)-1}{x^2y^2} = f(0,0) = -\frac{1}{2}$$

3. Escribir la versión de la regla de la cadena para $\mathbf{D}(f \circ g)(u,v)$, donde $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ si tenemos que

$$g(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u))$$

Suponemos que la función g es de clase C^2 en un entorno de (u,v) y f lo es en un entorno de $g(u,v)$

Solución: Tenemos la composición

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\quad g \quad} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\quad f \quad} \mathbb{R}$$

$$(u,v) \longrightarrow (x(u,v), y(u,v), z(u)) \longrightarrow (f \circ g)(u,v)$$

cuya matriz jacobiana $\mathbf{D}(f \circ g)(u,v)$ es el producto de las matrices jacobianas

$$\mathbf{D}g(u,v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{D}f(x,y,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(f \circ g)(u,v) &= \mathbf{D}f(x,y,z) \cdot \mathbf{D}g(u,v) = \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \right] \end{aligned}$$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$$

estudiar y clasificar los puntos críticos de f. Indicar cuáles de los extremos son globales.

Solución: Hallamos las derivadas parciales primeras e igualamos a cero y tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 3x^2 - 3 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 3y^2 - 3 = 0 \end{aligned}$$

de donde obtenemos las soluciones $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, así que los puntos críticos son $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$. Las derivadas segundas son

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \quad , \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

y como se trata de una función polinómica, la caracterización de los puntos críticos se reduce al estudio de la matriz hessiana en cada punto.

$$Hf(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{bmatrix}$$

y aplicando el criterio de la matriz hessiana en cada punto

$$\begin{aligned}
P_1 = (1, 1) \quad &\longrightarrow \quad Hf(1, 1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow P_1 \;\text{ mínimo local} \\
P_2 = (-1, -1) \quad &\longrightarrow \quad Hf(-1, -1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow P_2 \;\text{ máximo local} \\
P_3 = (-1, 1) \quad &\longrightarrow \quad Hf(-1, 1) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow P_3 \;\text{ punto silla} \\
P_4 = (1, -1) \quad &\longrightarrow \quad Hf(1, -1) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow P_4 \;\text{ punto silla}
\end{aligned}$$

ya que en P_1 esta matriz es definida positiva, en P_2 es definida negativa y en los dos restantes es semidefinida.

Claramente los puntos extremos no son globales porque la expresión de la función tiene la potencia de mayor grado impar y entonces para una cantidad $M > 0$ podemos obtener valores (x, y) tales que

$$f(x, y) > M \;\text{ y }\; f(x, y) < -M$$