¿Qué quiere decir para Hilbert la existencia de un sistema matemático?

Hilbert basa la existencia de un sistema matemático en una no contradicción de conceptos. Me explico: si a un concepto o sistema se le asignan características que se contradicen, se puede afirmar que no existe. Por otro lado, cuando se logre demostrar mediante un número finito de inferencias o iteraciones lógicas que dichas características no llevan a contradicción alguna, se puede afirmar que el concepto EXISTE desde el punto de vista matemático.

Para Hilbert, la clave es la imposibilidad de encontrar una contradicción en el axioma que se quiere demostrar. Para demostrar la consistencia se deben conocer todas las formas de inferir una contradicción que existen.

Podemos añadir que trasladado a la teoría de conjuntos o a la aritmética, fue un reto demostrar la consistencia absoluta evitando un círculo vicioso. Se resolvió por Skolem en cuanto a que el sistema cuya consistencia debía ser demostrada es el sistema axiomático de primer orden formalizado de la aritmética de los números naturales (se evitaba la circularidad o círculo vicioso).

¿**Qué tipo de dudas había planteado Cantor sobre la existencia del "sistema completo de los números reales"?**

Directamente, no podemos conocer la verdadera cantidad de elementos en el conjunto de los reales – entendiéndose como el conjunto leyes posibles de acuerdo a las que los elementos de una secuencia fundamental van sucediéndose, teniendo relaciones mutuas gobernadas por un sistema finito y cerrado (Axiomas I–IV de Hilbert).

Por ello, no se puede asumir que sea un conjunto bien definido ni que sea posible ordenarlo según su numerosidad. De hecho en una de sus primeras investigaciones, Cantor demostró que el conjunto de números reales es "más numeroso" que el conjunto de números naturales o incluso de los cardinales. Esto ponía de manifiesto entiendo que por primera vez, que existen infinitos conjuntos de tamaños diferentes. (conjuntos infinitos incontables). Existen, por lo tanto, varios infinitos, más grandes los unos que los otros. Como curiosidad esta línea argumental le valió acusaciones de blasfemia (siendo Cantor profundamente religioso) llegando a ser ingresado en hospitales psiquiátricos.

Tenemos: 1) la propia definición del concepto de conjunto, pues si el conjunto de los reales no tuviera un cardinal, el programa de Cantor quedaría en entredicho 2) Por otro lado, dependiendo de si incorporamos o no la hipótesis del continuo, la teoría de conjuntos se interpretará de distinto modo.

Cantor no suponía la equivalencia entre conjunto y concepto. Para él, los transfinitos no son conceptos simplemente, sino que son entidades cuyas teorías matemáticas son modelos. Existen continuas connotaciones religiosas en sus argumentaciones hasta el punto que apelaba a Dios en cuanto a la imposibilidad de que el ser humano pudiera alcanzar determinadas propiedades de los conjuntos. Empezó a equiparar el concepto de infinito absoluto(que no es concebible por la mente humana) con Dios, y escribió artículos religiosos sobre el tema.

¿Por qué la demostración de la consistencia de los axiomas disiparía esas dudas sobre el continuo?

Para evitar las paradojas sobre el continuo, se propone (Ackermann) un sistema axiomático que sea suficiente para describir la "matemática entera", buscando para ello su consistencia. Cualquier forma de inferencia deberá evitarse en las demostraciones de consistencia, para no caer en la circularidad mencionada en la pregunta 1.

Hilbert propone una diferenciación entre matemática (todas las fórmulas y signos) y metamatemática (prueba de consistencia de la primera). La metamatemática solo utiliza aseveraciones sobre cosas concretas, así usa formas de inferencia primitivas y finitas, comunmente aceptadas.

Volviendo a Ackermann, enuncia como criterio de consistencia lo siguiente: un sistema axiomático es consistente si, y solo si, es posible deducir de sus axiomas la fórmula numérica ~(0=0) (uso ~ como símbolo de "contradictorio"). Saltándonos el desarrollo mátemático, que no puedo introducir con el teclado, podemos continuar añadiendo que los axiomas de Ackermann formaron dos grupos, axiomas para la matemática finita, y por otro lado "axiomas transfinitos".

¿Cuál es la relación entre consistencia y completud? ¿Pudo bastarle a Hilbert el teorema de completud de la lógica de primer orden para lograr su demostración? ¿Por qué?

El problema de la completud se basa en probar que un sistema axiomático, como los propuestos por Hilbert, es capaz de derivar toda proposición verdadera dentro del propio sistema.

Gödel abordó este problema con pasión (anecdóticamente, tras asistir a una conferencia de Hilbert sobre consistencia y completitud). Tras años de deicación postulo su "Teoremas de Incompletitud": Cualquier sistema axiomático que pueda ser capaz de describir la aritmética de los números naturales, está sujeto a dos condiciones: 1) Si el sistema es consistente, entonces no puede ser completo. 2) La consistencia de los axiomas no puede demostrarse desde dentro del propio sistema.

El segundo Teorema de Incompletitud de Gödel reza: "En toda teoría aritmética recursiva "T", la fórmula consistente T no puede ser un teorema". Esto limitó la posibilidad de demostrar la consistencia de una tería formal "T", puesto que no puede hacerse utilizando solamente la propia teoría. Llevando esto a una negación del programa de Hilbert, ya que recordemos que se proponía demostrar la corrección de la matemática basada en objetos infinitos utilizando únicamente razonamientos sobre objetos finitos.

Esta formulación, aunque pasó desapercibida durante cierto tiempo, incluso para el propio Hilbert y su equipo, supuso una dificultad extraordinario para fundamentar su programa.

Es sabido que estos teoremas de Gödel marcan los límites del formalismo. Como el objetivo primero de Hilbert era reducir la matemática precisamente al formalismo y fundamentarla en él, se puede concluir que por lo tanto, las limitaciones derivadas de los teoremas de Gödel son limitaciones propias de la Matemática.

Incidir de nuevo que todo ello supuso un duro golpe para los "hilbertianos".

Hilbert afirmó que en la investigación de una ciencia, se precisa establecer un sistema de axiomas completo y exacto sobre las relaciones existentes en las ideas de dicha ciencia. Y para demostrar que no son contradictorias, la prueba de compatibilidad puede hacerse mediante un campo adecuado de los números de manera que relaciones análofas entre números se correspondan con los axiomas. Es importante que ha de entenderse aquí que Hilbert hacía referencia a un sistema con un axioma de completitud de segundo orden, no de primero (referencia a aritmética de Peano, fuera del alcance de esta pregunta, entiendo, espero, acertadamente)