Ficha 7 - Cálculo simbólico resolvida

Jorge Gustavo Rocha

May 30, 2020

1 Cálculo simbólico em Python

Jorge Gustavo RochaDepartamento de Informática, Universidade do Minho25 de maio de 2020 O módulo SymPy suporta o cálculo simbólico. Em vez de lidar apenas com números e operações sobre os mesmos, como acontece no cálculo numérico, o SymPy permite-nos lidar com símbolos e realizar operações que manipulam esses símbolos. Isto permite-nos, entre outras coisas, trabalhar com representações exactas e não com aproximações.

O módulo é bastante abrangente e inerentemente **complexo**, até porque liga com algumas questões da matemética que já não são triviais. Contudo, como vamos tentar ilustrar, embora seja um módulo complexo, consegue-se usar com alguma facilidade.

Antes de mais, instale o módulo `sympy`. Se usa o Anaconda, acrescente o SymPy. Se usa a linha de comandos, faça: `pip3 install sympy`.

1.0.1 Limitações do cálculo numérico

Vejamos o primeio exemplo: a operação `math.sqrt()` permite-nos calcular a raíz quadrada de um número. A raíz quadrada de 2, por exemplo, é um número irracional que não conseguimos representar com toda a precisão em computador. Usa-se sempre uma aproximação.

[1]:
```
import math
#
print(math.sqrt(2))
print(math.sqrt(2)**2)
```

```
1.4142135623730951
2.0000000000000004
```

O exemplo anterior exemplifica a limitação do cálculo numérico: o quadrado da raíz quadrada não é (exatamente) igual a 2.

1.0.2 Símbolos em vez de números

O cálculo simbólico permite-nos representar o número irracional $\sqrt{2}$ por `sympy.sqrt(2)`. Assim sendo, o quadrado `sympy.sqrt(2)` dá como resultado 2.

[2]:
```
import sympy
sympy.sqrt(2)**2
```

[2]: 2

[3]:
```python
sympy.sqrt(2)
```

[3]: $\sqrt{2}$

Verificam-se o mesmo tipo de limitações do cálculo númerico com os números racionais. Repare que o resultado da soma seguinte não está correta.

[4]:
```python
i = 1/10
j = 1/10
k = 1/10
i+j+k
```

[4]: 0.30000000000000004

Usando o suporte do SymPy à representação de números racionais, pode-se representar com exatidão o valor $1/10$.

Depois de feitos os cálculos e obtidos os resultados usando a representação simbólica, pode-se obter o valor real aproximado, usando o método evalf() para transformar a expressão num valor númerico (um float).

[5]:
```python
i = j = k = sympy.Rational(1,10)
i+j+k
```

[5]: $\frac{3}{10}$

[6]:
```python
(i+j+k).evalf()
```

[6]: 0.3

A noção matemática do π ou do infinito, entre muitas, estão disponíveis SymPy.

[7]:
```python
sympy.oo
```

[7]: ∞

[8]:
```python
sympy.pi
```

[8]: π

1.0.3 Operações com símbolos

Ao contrário das expressões numéricas, em que uma variável representa um número, no cálculo simbólico é preciso declarar explicitamente os símbolos que vamos usar.

[9]:
```python
x = sympy.Symbol('x')
y = sympy.Symbol('y')
# alternativamente, pode-se fazer:
# x, y = sympy.symbols('x y')
```

Depois de declarados os símbolos, as operações sobre os mesmos são simbólicas.

[10]:
```
x+2*y+x-y
```

[10]:

$2x + y$

As expressões simbólicas podem ser expandidas expand(), simplificadas simplify(), resolvidas solve() ou até representadas graficamente.

Vamos ver as operações básicas sobre expressões simbólicas.

simplify() Considere a expressão

$$\frac{1}{x} + \frac{(x \cdot \sin(x) - 1)}{x}$$

Simplifique a expressão manualmente e veja de seguida como a mesma é simplificada pelo SymPy.

[11]:
```
x = sympy.Symbol('x')
c = 1/x + (x*sympy.sin(x) - 1)/x
sympy.simplify(c)
```

[11]:

$\sin(x)$

Já agora, repare que os resultados das expressões do SymPy são apresentadas com uma forma bem mais simpática, utilizando os símbolos matemáticos mais adequados.

Neste notebook, em vez de se usar o print() para se apresentar as expressões, usa-se apenas a expressão, que é o mesmo que fazer display().

Veja as diferenças:

[12]:
```
# visualização pouco simpática
print(c)
```

```
(x*sin(x) - 1)/x + 1/x
```

[13]:
```
# visualização simpática
# display(c)
# ou simplesmente:
c
```

[13]:

$\frac{x \sin(x) - 1}{x} + \frac{1}{x}$

expand() Considere a seguinte expressão e veja como a mesma pode ser expandida.

[14]:
```
x, y = sympy.symbols('x y')
d = 3*(x+y)**2+2*y+x**2+1
d
```

[14]:

$x^2 + 2y + 3(x + y)^2 + 1$

[15]:
```
sympy.expand(d)
```

[15]: $4x^2 + 6xy + 3y^2 + 2y + 1$

solve() Considere estas duas expressões diferentes:

$$2 \cdot x + 4 = 0$$

e

$$x^2 - 2y - 6 = 0$$

Podemos pedir para resolver a equação, sendo que para a segunda, o valor dependerá de y.

Nota: usa-se o método sympy.Eq() para criar uma igualdade simbólica. Não se usa o operador == nativo do Python.

[16]:
```
e = sympy.Eq(2*x+4, 0)
i = sympy.Eq(x**2-2*y-6, 0)
```

[17]:
```
sympy.solve(e)
```

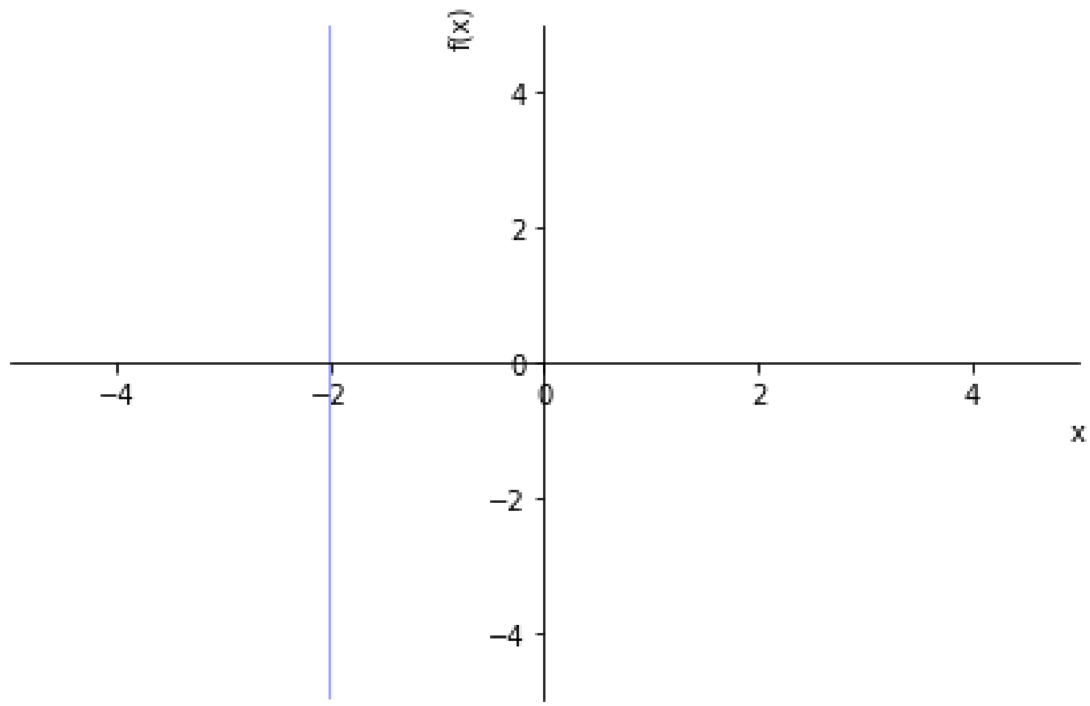
[17]:
```
[-2]
```

[18]:
```
sympy.solve(i)
```

[18]:
```
[{y: x**2/2 - 3}]
```

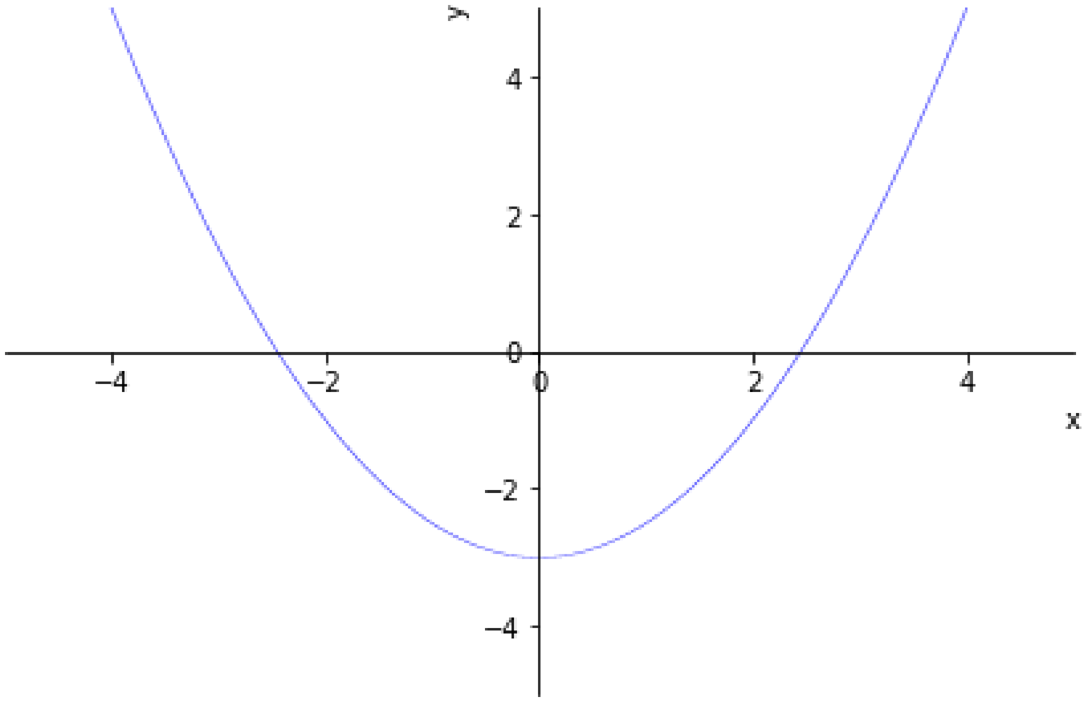
plot() As expressões anteriores podem ser visualizadas de uma forma bastante imediata, usando o método sympy.plot_implicit(). Os gráficos do SymPy não são tão flexíveis como os da biblioteca matplolib, mas são bastante práticos.

[19]:
```
sympy.plot_implicit(e)
```



[19]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fea5fa6f850>

[20]:
```
sympy.plot_implicit(i)
```



[20]: <sympy.plotting.plot.Plot at 0x7fea5cf8fb50>

1.0.4 Exercícios

1. Diga qual é a solução da equação

$$x^2 - 1$$

[21]:
```
sympy.solve(x**2-1)
```

[21]: [-1, 1]

2. Simplifique a expressão

$$\frac{\sin^4(x) - \cos^4(x)}{\sin^2(x) - \cos^2(x)}$$

[22]:
```
sympy.simplify((sympy.sin(x)**4-sympy.cos(x)**4)/(sympy.sin(x)**2-sympy.
↪cos(x)**2))
```

[22]: 1

1.0.5 Igualdade de duas expressões

É preciso ter algum cuidado com a igualdade no SymPy. Considere as duas expressões, matematicamente iguais:

[23]:
```
a = (x + 1)**2
a
```

[23]: $(x + 1)^2$

[24]:
```
b = x**2 + 2*x + 1
b
```

[24]: $x^2 + 2x + 1$

Embora iguais matematicamente, se usar a igualdade do Python == para as comparar, o resultado dá False.

[25]:
```
a == b
```

[25]: False

O resultado dá negativo porque este operador igual não atende ao significado das expressões, mas apenas à forma. Em termos de forma, elas são diferentes.

Matematicamente falando, se $a = b$, então $a - b = 0$. Usando esta lógica, podemos usar o SymPy para realmente ver se as expresões são matematicamente equivalentes, fazendo:

[26]:
```
sympy.simplify(a-b)
```

[26]: 0

O resultado dá 0, provando que as expressões são iguais.

O mesmo não acontece, por exemplo, com expressões ligeiramente diferentes:

[27]:
```
m = 2*x-2*y+1
n = 2*x-3*y+1
sympy.simplify(m-n)
```

[27]: y

1.0.6 Exercício

3. Verifique se as seguintes expressões são equivalentes:

$$\cos(\pi/2) + 1$$

$$\sin(\pi/2)$$

[28]:
```
y = sympy.cos(sympy.pi / 2) + 1
z = sympy.sin(sympy.pi / 2)
sympy.simplify(y-z)
```

[28]: 0

1.0.7 Exercício

4. Verifique se as seguintes expressões são equivalentes:

$$x^a \cdot x^b$$

$$x^{a+b}$$

[29]:
```
x, a, b = sympy.symbols('x a b')
i = x**a * x**b
j = x**(a+b)
sympy.simplify(i-j)
```

[29]: 0

1.0.8 Álbegra linear

Nesta ficha introdutória ao SymPy vamos também ver como são representadas e manipuladas as matrizes.

[30]:
```
A = sympy.Matrix( [[ 2,-3,-8, 7],[-2,-1, 2,-7],[ 1, 0,-3, 6]] )
A
```

[30]: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & 7 \\ -2 & -1 & 2 & -7 \\ 1 & 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Selecionar partes da matriz:

[31]:
```
# linha 0, coluna 0
# A[0,0]
# primeira linha, terceira coluna
# A[0,2]
# toda a segunda coluna
A[:,1]
```

[31]: $\begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Selecionar uma parte da matriz:

Note: repare que os índices sequem a lógica do Python para listas: do limite inferior até ao limite superior **exclusive**.

[32]:
```
A[1:3,1:4]
```

[32]: $\begin{bmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

Outras operações básicas

[33]:
```
sympy.eye(3)
```

[33]:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

[34]:
```
sympy.ones(2)
```

[34]:

$$\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

[35]:
```
sympy.zeros(4)
```

[35]:

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

[36]:
```
# A.transpose()
# ou também se pode fazer
A.T
```

[36]:

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\-3 & -1 & 0\\-8 & 2 & -3\\7 & -7 & 6\end{bmatrix}$$

1.0.9 Exercício

5. Represente no SymPy a seguinte matriz:

$$B = \begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 2^2\\1 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

[37]:
```
B = sympy.Matrix( [[ 2, sympy.Rational(1,2),2**2],[-1, sympy.sqrt(3),sympy.
 ↪sqrt(3)/3]] )
B
```

[37]:

$$\begin{bmatrix}2 & \frac{1}{2} & 4\\-1 & \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}$$

Aritmética de matrizes Considere as seguintes matrizes:

[38]:
```
A = sympy.Matrix( [ [1, 2], [3, 4] ] ); A
```

[38]:

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$$

[39]:
```
B = sympy.Matrix( [ [1, -2], [-1, 0] ] ); B
```

[39]:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[40]:
```python
C = sympy.Matrix( [ [2, -2], [-2, 2] ] ); C
```

[40]:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

1.0.10 Exercício

6. Calcule $A + B$
7. Calcule $A \cdot B \cdot C$

[41]:
```python
A+B
```

[41]:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

[42]:
```python
A*B*C
```

[42]:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 10 & -10 \end{bmatrix}$$

1.0.11 Exercício

8. Se determinante de B for diferente de 0, calcule a inversa de B.

[43]:
```python
if B.det() != 0:
    display(B.inv())
```

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

9. Se B é invertível, mostre que $B^{-1} \cdot B = I$.

[44]:
```python
B.inv()*B == sympy.eye(2)
```

[44]: True

Alternativamente, se a matriz incluísse expressões simbólicas, tinha-se que fazer:

[45]:
```python
sympy.simplify( B.inv()*B - sympy.eye(2) )
```

[45]:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.0.12 Resolução de uma equação

As equações da forma $Ax = B$ podem ser resolvidas através do método sympy.LUsolve().

1.0.13 Exercício

10. Resolva o sistema de equações lineares:

$$\begin{aligned} x+y+z=6 \\ 2y+5z=-4 \\ 2x+5y-z=27 \end{aligned}$$

Comece por reescrever o sistema de forma a ser mais fácil extrair a matriz A e B:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 6 \\ & & 2y & + & 5z & = & -4 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & 27 \end{array}$$

Extraindo as matrizes, o que queremos resolver é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 27 \end{bmatrix}$$

[46]:
```
A = sympy.Matrix( [ [ 1, 1, 1 ], [0, 2, 5], [2, 5, -1] ] )
B = sympy.Matrix( [6, -4, 27] )
A.LUsolve(B)
```

[46]:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Podemos comprovar o resultado, ora usando o método $x = A^{-1} \cdot B$ ou confirmando que $A \cdot x = B$.

[47]:
```
A.inv() * B
```

[47]:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

[48]:
```
A*x == B
```

[48]: False