25. Selbsttest 1 ANA II:

Bearbeitungszeit: 90min
Die maximal erreichbare Punktzahl beträgt 50 Pkt.
Pro Punkt haben Sie also eine Bearbeitungszeit von knapp 2 Minuten.
Zum Bestehen genügen 50% der maximalen Punktzahl (= 25 Pkt).

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass die folgende Differentialgleichung exakt ist und lösen sie sie.

[4 $Pkt.$] a) $(x^2 + y^2 - 1)x + (x^2 + y^2 + 1)yy' = 0$

$$y(0) = 1$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int\int_G 2y^3 + 3x + 2dA$$

auf unterschiedliche Arten.
G bezeichne das Viereck, das von den Punkten $(0,0), (0,1), (3,2), (4,4)$ gebildet wird.

[4 $Pkt.$] 1. Integration in kartesische Koordinaten.
[4 $Pkt.$] 2. Übergang zu Polarkoordinaten.
[4 $Pkt.$] 3. Berechnung mit Hilfe des Satzes von Green.

Aufgabe 3

Sei $Q \subset \mathbb{R}^3$ der Körper, der durch die Flächen $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1, z = 16 - 2x^2 - 2y^2, z = 0$ begrenzt wird. Sei S die Oberfläche von Q.

[2 $Pkt.$] 1. Berechnen Sie das Volumen von Q.

[3 $Pkt.$] 2. Berechnen Sie den Teil der Oberfläche von Q, der durch $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ gegeben ist.

[5 $Pkt.$] 3. Berechnen Sie den Fluss des Vektorfeldes $F(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ yz^2 \\ zx^2 \end{pmatrix}$

(a) durch die Oberfläche S unter Zuhilfenahme des Gaußschen Integralsatzes.
(b) durch die Standarddefinition für Flussintegrale.

[2 $Pkt.$] 4. Berechnen Sie das Kurvenintegral über F entlang der (einfach geschlossenen) Schnittkurve der Flächen

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9,$$
$$z = 16 - 2x^2 - 2y^2$$

Aufgabe 4

[6 $Pkt.$] Sei

$$f(x,y) = \begin{cases} 3xy^2 + 2x^2, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0, sonst \end{cases}$$

Berechnen Sie die zweidimensionale Fouriertransformierte von f.

Aufgabe 5

[8 $Pkt.$] Die Punkte
$[[0.5, 1.32], [1.0, 2.24], [1.5, 3.12], [2.0, 4.0], [2.5, 4.87], [3.0, 5.74], [3.5, 6.61], [4.0, 7.48]]$
liegen in der Nähe einer Funktion f von der Form

$$y = \sqrt{ax + bx^2}.$$

Berechnen Sie a und b, indem Sie ein geeignetes Ausgleichsproblem lösen.

Aufgabe 6

[8 $Pkt.$] Bestimmen Sie den Abstand der Fläche

$$f(x,y) = x^3 + y^3/4 + 2$$

von dem Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.