

# **Hamiltonian Cycle 問題的 SAT 還原與實作**

## **Term Project Proposal**

江冠緯 學號：B11009003

# 目录

1 摘要 (Abstract)	3
2 問題定義 (Problem Statement)	3
3 Reduction 概述 (Overview of the Reduction)	3
3.1 變數定義 . . . . .	3
3.2 子句生成 . . . . .	3
4 實作計畫 (Implementation Plan)	4
5 測試實例 (Test Instances)	5
5.1 實例 1: 8-頂點圖 . . . . .	5
5.2 實例 2: 9-頂點圖 . . . . .	6
5.3 實例 3: 10-頂點圖 . . . . .	7
5.4 實例 4: 8-頂點圖 . . . . .	7
6 參考文獻 (References)	8

## 1 摘要 (Abstract)

本提案旨在使用 SAT 技術求解 Hamiltonian Cycle 問題。Hamiltonian Cycle 問題：給定無向圖  $G = (V, E)$ ，判斷是否存在一條環路訪問每個頂點恰好一次且返回起點。我們將此問題轉成 SAT，生成 CNF 公式且使用現代求解器進行求解。

## 2 問題定義 (Problem Statement)

Hamiltonian Cycle 問題是一個經典的 NP-Complete 問題。

- **輸入：** 圖  $G = (V, E)$ ，其中  $V$  是頂點集合、 $E$  是邊集合。
- **問題：** 是否存在一條 Hamiltonian 環，恰好訪問每個頂點一次且返回起點

## 3 Reduction 概述 (Overview of the Reduction)

本節闡述如何將 Hamiltonian Cycle 問題多項式時間地還原 SAT。

### 3.1 變數定義

令  $|V| = n$ 。對每個頂點  $v \in V$  及每個位置  $p \in \{1, \dots, n\}$  定義布林變數

$$x_{v,p} = \begin{cases} \top, & \text{若頂點 } v \text{ 位於環的第 } p \text{ 個位置;} \\ \perp, & \text{否則。} \end{cases}$$

共使用  $n \times n$  個變數。

### 3.2 子句生成

本還原共生成以下五類子句：

1. **Position-Cover:** 每個位置至少有一個頂點

$$(x_{1,p} \vee x_{2,p} \vee \dots \vee x_{n,p}), \quad p = 1, \dots, n.$$

2. **Position-Uniqueness:** 每個位置至多一個頂點

$$\neg x_{u,p} \vee \neg x_{v,p}, \quad \forall u \neq v, \quad p = 1, \dots, n.$$

3. **Vertex-Cover:** 每個頂點至少出現在一個位置

$$(x_{v,1} \vee x_{v,2} \vee \dots \vee x_{v,n}), \quad v = 1, \dots, n.$$

4. **Vertex-Uniqueness:** 每個頂點至多出現在一個位置

$$\neg x_{v,i} \vee \neg x_{v,j}, \quad \forall i \neq j, v = 1, \dots, n.$$

5. **Adjacency-Constraints:** 相鄰位置必須在圖中相連。可使用以下兩種方式：

- **使用不相鄰頂點對:** 對所有不相鄰頂點對  $(u, v) \notin E$  及每個  $p = 1, \dots, n - 1$ , 加入

$$\neg x_{u,p} \vee \neg x_{v,p+1}.$$

對環回到起點：對所有  $(u, v) \notin E$ , 加入

$$\neg x_{u,n} \vee \neg x_{v,1}.$$

此方式通過禁止無邊的頂點對出現在相鄰位置，間接確保環路僅使用圖中的邊。

- **使用相鄰頂點對:** 對每個頂點  $u \in V$  及每個位置  $p = 1, \dots, n - 1$ , 加入

$$\neg x_{u,p} \vee \bigvee_{(u,v) \in E} x_{v,p+1}.$$

對環回到起點：對每個  $u \in V$ , 加入

$$\neg x_{u,n} \vee \bigvee_{(u,v) \in E} x_{v,1}.$$

此方式直接要求若  $u$  在位置  $p$ , 則下一位置必須是其鄰居頂點之一。

兩種方式均符合 CNF 形式，但適用場景不同。使用不相鄰頂點對生成  $O(n^3)$  個子句（每個子句有 2 個文字），在稀疏圖（邊數少,  $|E|$  小）中子句數較多，因非邊數  $O(n^2)$  較大。使用相鄰頂點對生成  $n^2$  個子句（每個子句包含  $1 + \deg(u)$  個文字,  $\deg(u)$  是  $u$  的度數），在稀疏圖中子句數較少，適合邊數少的圖形；但在密圖（如接近完全圖,  $|E| \approx n^2$ ）中，子句因包含多個鄰居文字而變長，可能影響求解性能。因此，對於稀疏圖，建議使用相鄰頂點對以降低子句數；對於密圖，則使用不相鄰頂點對以保持較小的子句大小，提升求解效率。

## 4 實作計畫 (Implementation Plan)

- **環境:** Python 3.8+, python-sat (PySAT), Cadical195 SAT 求解器。
- **輸入格式:** 圖的邊列表 (graph.txt), 第一行是頂點數  $n$  和邊數  $m$ , 後續  $m$  行是邊  $u v$ 。

- 執行流程:

- 執行還原與求解 script:

```
python reduce_hc.py graph.txt
```

- script 功能:

- \* 讀取圖且生成  $n \times n$  個布林變數  $x_{v,p}$ 。
- \* 生成五類 CNF 子句 (Position-Cover, Position-Uniqueness, Vertex-Cover, Vertex-Uniqueness, Adjacency-Constraints)。
- \* 使用 Cadical195 求解器判斷 SAT 或 UNSAT。
- \* 若 SAT，解碼且輸出 Hamiltonian 環序列。

- 結果解釋:

- SAT: 輸出 Hamiltonian 環，例如  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow 1$ 。
- UNSAT: 表示無 Hamiltonian 環。

- 測試實例:

- 實例 1: 8-頂點圖 (graph1.txt)
- 實例 2: 9-頂點圖 (graph2.txt)
- 實例 3: 10-頂點圖 (graph3.txt)
- 實例 4: 8-頂點圖 (graph4.txt)

## 5 測試實例 (Test Instances)

### 5.1 實例 1: 8-頂點圖

- 輸入 (graph1.txt):

```
8 12
1 4
4 2
2 6
6 3
3 8
8 5
5 7
7 1
```

1 5  
2 7  
3 4  
6 8

- 輸出:

SAT  
Hamiltonian Cycle: 1 -> 4 -> 2 -> 6 -> 3 -> 8 -> 5 -> 7 -> 1

- 解碼結果: Hamilton 環是 1 → 4 → 2 → 6 → 3 → 8 → 5 → 7 → 1。

## 5.2 實例 2: 9-頂點圖

- 輸入 (*graph2.txt*):

9 15  
1 7  
7 3  
3 9  
9 2  
2 8  
8 4  
4 6  
6 5  
5 1  
1 3  
2 4  
3 5  
4 7  
6 9  
8 1

- 輸出:

SAT  
Hamiltonian Cycle: 1 -> 7 -> 3 -> 9 -> 2 -> 8 -> 4 -> 6 -> 5 -> 1

- 解碼結果: Hamilton 環是 1 → 7 → 3 → 9 → 2 → 8 → 4 → 6 → 5 → 1。

### 5.3 實例 3: 10-頂點圖

- 輸入 (graph3.txt):

```
10 16
1 8
8 3
3 10
10 4
4 7
7 2
2 9
9 5
5 6
6 1
1 4
2 5
3 7
4 8
5 10
6 9
```

- 輸出:

```
SAT
Hamiltonian Cycle: 1 -> 8 -> 3 -> 10 -> 4 -> 7 -> 2 -> 9 -> 5 -> 6 -> 1
```

- 解碼結果: Hamiltonian 環是  $1 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ 。

### 5.4 實例 4: 8-頂點圖

- 輸入 (graph4.txt):

```
8 14
1 6
6 2
2 8
8 3
3 5
```

5 4  
4 7  
7 1  
1 3  
2 4  
3 6  
4 8  
5 7  
6 1

- 輸出：

SAT

Hamiltonian Cycle: 1 -> 6 -> 2 -> 8 -> 3 -> 5 -> 4 -> 7 -> 1

- 解碼結果： Hamiltonian 環是  $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$ 。

## 6 參考文獻 (References)

1. OpenDSA. 3-SAT to Hamiltonian Cycle reduction.