

Hamiltonian Cycle 問題的 SAT 還原與實作

Term Project Proposal

江冠緯 學號：B11009003

目录

1	摘要 (Abstract)	3
2	問題定義 (Problem Statement)	3
3	Reduction 概述 (Overview of the Reduction)	3
3.1	變數定義	3
3.2	子句生成	3
4	實作計畫 (Implementation Plan)	4
5	測試實例 (Test Instances)	5
5.1	實例 1: 8-頂點圖	5
5.2	實例 2: 9-頂點圖	6
5.3	實例 3: 10-頂點圖	7
5.4	實例 4: 8-頂點圖	7
6	參考文獻 (References)	8

1 摘要 (Abstract)

本提案旨在使用 SAT 技術求解 Hamiltonian Cycle 問題。Hamiltonian Cycle 問題：給定無向圖 $G = (V, E)$ ，判斷是否存在一條環路訪問每個頂點恰好一次且返回起點。我們將此問題轉成 SAT，生成 CNF 公式且使用現代求解器進行求解。

2 問題定義 (Problem Statement)

Hamiltonian Cycle 問題是一個經典的 NP-Complete 問題。

- **輸入：**圖 $G = (V, E)$ ，其中 V 是頂點集合、 E 是邊集合。
- **問題：**是否存在一條 Hamiltonian 環，恰好訪問每個頂點一次且返回起點

3 Reduction 概述 (Overview of the Reduction)

本節闡述如何將 Hamiltonian Cycle 問題多項式時間地還原 SAT。

3.1 變數定義

令 $|V| = n$ 。對每個頂點 $v \in V$ 及每個位置 $p \in \{1, \dots, n\}$ 定義布林變數

$$x_{v,p} = \begin{cases} \top, & \text{若頂點 } v \text{ 位於環的第 } p \text{ 個位置;} \\ \perp, & \text{否則。} \end{cases}$$

共使用 $n \times n$ 個變數。

3.2 子句生成

本還原共生成以下五類子句：

1. **Position-Cover:** 每個位置至少有一個頂點

$$(x_{1,p} \vee x_{2,p} \vee \dots \vee x_{n,p}), \quad p = 1, \dots, n.$$

2. **Position-Uniqueness:** 每個位置至多一個頂點

$$\neg x_{u,p} \vee \neg x_{v,p}, \quad \forall u \neq v, p = 1, \dots, n.$$

3. **Vertex-Cover:** 每個頂點至少出現在一個位置

$$(x_{v,1} \vee x_{v,2} \vee \dots \vee x_{v,n}), \quad v = 1, \dots, n.$$

4. **Vertex-Uniqueness:** 每個頂點至多出現在一個位置

$$\neg x_{v,i} \vee \neg x_{v,j}, \quad \forall i \neq j, v = 1, \dots, n.$$

5. **Adjacency-Constraints:** 相鄰位置必須在圖中相連。可使用以下兩種方式：

- **使用不相鄰頂點對:** 對所有不相鄰頂點對 $(u, v) \notin E$ 及每個 $p = 1, \dots, n-1$, 加入

$$\neg x_{u,p} \vee \neg x_{v,p+1}.$$

對環回到起點：對所有 $(u, v) \notin E$, 加入

$$\neg x_{u,n} \vee \neg x_{v,1}.$$

此方式通過禁止無邊的頂點對出現在相鄰位置，間接確保環路僅使用圖中的邊。

- **使用相鄰頂點對:** 對每個頂點 $u \in V$ 及每個位置 $p = 1, \dots, n-1$, 加入

$$\neg x_{u,p} \vee \bigvee_{(u,v) \in E} x_{v,p+1}.$$

對環回到起點：對每個 $u \in V$, 加入

$$\neg x_{u,n} \vee \bigvee_{(u,v) \in E} x_{v,1}.$$

此方式直接要求若 u 在位置 p , 則下一位置必須是其鄰居頂點之一。

兩種方式均符合 CNF 形式，但適用場景不同。使用不相鄰頂點對生成 $O(n^3)$ 個子句（每個子句有 2 個文字），在稀疏圖（邊數少， $|E|$ 小）中子句數較多，因非邊數 $O(n^2)$ 較大。使用相鄰頂點對生成 n^2 個子句（每個子句包含 $1 + \deg(u)$ 個文字， $\deg(u)$ 是 u 的度數），在稀疏圖中子句數較少，適合邊數少的圖形；但在密圖（如接近完全圖， $|E| \approx n^2$ ）中，子句因包含多個鄰居文字而變長，可能影響求解性能。因此，對於稀疏圖，建議使用相鄰頂點對以降低子句數；對於密圖，則使用不相鄰頂點對以保持較小的子句大小，提升求解效率。

4 實作計畫 (Implementation Plan)

- **環境:** Python 3.8+, python-sat (PySAT), Cadical195 SAT 求解器。
- **輸入格式:** 圖的邊列表 (graph.txt)，第一行是頂點數 n 和邊數 m ，後續 m 行是邊 $u v$ 。

- 執行流程：

- 執行還原與求解 script：

```
python reduce_hc.py graph.txt
```

- script 功能：

- * 讀取圖且生成 $n \times n$ 個布林變數 $x_{v,p}$ 。
- * 生成五類 CNF 子句 (Position-Cover, Position-Uniqueness, Vertex-Cover, Vertex-Uniqueness, Adjacency-Constraints)。
- * 使用 Cadical195 求解器判斷 SAT 或 UNSAT。
- * 若 SAT，解碼且輸出 Hamiltonian 環序列。

- 結果解釋：

- SAT：輸出 Hamiltonian 環，例如 1 -> 2 -> 3 -> ... -> 1。
- UNSAT：表示無 Hamiltonian 環。

- 測試實例：

- 實例 1：8-頂點圖 (graph1.txt)
- 實例 2：9-頂點圖 (graph2.txt)
- 實例 3：10-頂點圖 (graph3.txt)
- 實例 4：8-頂點圖 (graph4.txt)

5 測試實例 (Test Instances)

5.1 實例 1：8-頂點圖

- 輸入 (graph1.txt)：

```
8 12
1 4
4 2
2 6
6 3
3 8
8 5
5 7
7 1
```

```
1 5
2 7
3 4
6 8
```

- 輸出:

```
SAT
```

```
Hamiltonian Cycle: 1 -> 4 -> 2 -> 6 -> 3 -> 8 -> 5 -> 7 -> 1
```

- 解碼結果: Hamiltonian 環是 $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 1$ 。

5.2 實例 2: 9-頂點圖

- 輸入 (graph2.txt):

```
9 15
1 7
7 3
3 9
9 2
2 8
8 4
4 6
6 5
5 1
1 3
2 4
3 5
4 7
6 9
8 1
```

- 輸出:

```
SAT
```

```
Hamiltonian Cycle: 1 -> 7 -> 3 -> 9 -> 2 -> 8 -> 4 -> 6 -> 5 -> 1
```

- 解碼結果: Hamiltonian 環是 $1 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ 。

5.3 實例 3: 10-頂點圖

- 輸入 (graph3.txt):

```
10 16
1 8
8 3
3 10
10 4
4 7
7 2
2 9
9 5
5 6
6 1
1 4
2 5
3 7
4 8
5 10
6 9
```

- 輸出:

```
SAT
```

```
Hamiltonian Cycle: 1 -> 8 -> 3 -> 10 -> 4 -> 7 -> 2 -> 9 -> 5 -> 6 -> 1
```

- 解碼結果: Hamiltonian 環是 $1 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 10 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1$ 。

5.4 實例 4: 8-頂點圖

- 輸入 (graph4.txt):

```
8 14
1 6
6 2
2 8
8 3
3 5
```

5 4
4 7
7 1
1 3
2 4
3 6
4 8
5 7
6 1

- 輸出:

SAT

Hamiltonian Cycle: 1 -> 6 -> 2 -> 8 -> 3 -> 5 -> 4 -> 7 -> 1

- 解碼結果: Hamiltonian 環是 $1 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 7 \rightarrow 1$ 。

6 參考文獻 (References)

1. OpenDSA. 3-SAT to Hamiltonian Cycle reduction.