圖帶寬問題的 SMT(LIA) 還原與實作

Term Project Proposal

江冠緯　學號：B11009003

目录

1 摘要 (Abstract)

本提案討論如何使用 SMT(LIA) 技術 solve 圖帶寬 (Graph Bandwidth) 判定問題。圖帶寬問題：給定無向圖 $G=(V,E)$ 及整數上界 B，判斷是否存在一個頂點編號轉置 $f: V \to \{1,\dots,n\}$，使得對所有 $(u,v) \in E$ 有 $|f(u)-f(v)| \le B$。我們將此 Decision Problem 轉成 QF_LIA 公式，且利用 SMT 求解器驗證可滿足性。

2 問題定義 (Problem Statement)

- **輸入：** 無向圖 $G=(V,E)$，$|V|=n$，帶寬上界整數 B。
- **輸出：** 布林值 SAT/UNSAT，代表是否存在排列 f 使 $\forall(u,v)\in E: |f(u)-f(v)| \le B$。
- **Complexity：**Graph Bandwidth 判定成 NP-Complete（Garey–Johnson 1979）。

3 SMT(LIA) 還原 (Reduction to SMT(LIA))

3.1 變數定義

對每個頂點 $v \in V$，宣告整數變數

$$f_v \in \mathbb{Z}, \quad v = 1,\dots,n.$$

3.2 約束生成

1. **範圍約束 (Domain)**

$$1 \;\le\; f_v \;\le\; n, \quad \forall v.$$

2. **全非同約束 (Permutation)**

$$\texttt{(distinct } f_1,\dots,f_n\texttt{)}.$$

3. **帶寬約束 (Bandwidth)** 對每條邊 $(u,v)\in E$，加入

$$f_u - f_v \;\le\; B, \quad f_v - f_u \;\le\; B.$$

3.3 完整 SMT2 模板

```
(set-logic QF_LIA)
;; 帶寬上界
(declare-const B Int)
(assert (= B 2)) ;; 可調

;; 頂點位置變數
(declare-const f1 Int)
...
(declare-const fn Int)

;; 範圍約束 1   f_v   n
(assert (and (<= 1 f1) (<= f1 n)))
...
(assert (and (<= 1 fn) (<= fn n)))

;; 全非同約束
(assert (distinct f1 f2 ... fn))

;; 帶寬約束
(assert (<= (- f_u f_v) B))  ;; for each (u,v) in E
(assert (<= (- f_v f_u) B))

(check-sat)
(get-model)
```

4 實作計畫 (Implementation Plan)

- **環境：** Python 3.8+, Z3 或 CVC4，利用 SMT2 接口。
- **輸入格式：** 文本檔 `graph.txt`，首行 ‘n B m‘，後續 ‘u v‘ 列出 m 條無向邊。
- **還原 script：** `reduce_bw.py` 處理輸入且輸出 SMT2 格式。
- **執行流程：**
  1. `python reduce_bw.py graph.txt > bw.smt2`
  2. `z3 bw.smt2`
- **結果解釋：**

  - `sat`：模型含 f_v 值，即是合法排列，滿足 $|f(u) - f(v)| \leq B$。
  - `unsat`：無可行帶寬排列。

- **測試實例：**
  - 小型：$n = 8, B = 2$，路徑、環、樹圖測試。
  - 中型：$n = 30, B = 5$，$|E| \approx 60$ 隨機稀疏圖。
  - 大型：$n = 50, B = 10$，$|E| \approx 200$ 中等密度圖。

5 參考文獻 (References)

1. Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1979). *Computers and Intractability.*
2. Bodlaender, H. L., & Thilikos, D. M. (1997). "Graph bandwidth is tough." *SIAM Journal on Discrete Mathematics.*
3. Z3 SMT Solver Documentation.