1. Ejercicios Unidad 1: la integral definida

Instrucciones: Resuelva los ejercicios indicando con detalle la resolución de los mismos y argumentando sus respuestas.

1. Resuelva los problemas y haga las demostraciones que hayan quedado como ejercicios en clase.

2. Demuestre las propiedades del operador sumatorio:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k.$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k.$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k.$

3. Calcule las sumas:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3k - 10) =$

   b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{5} j(j-1) =$

   c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{8} 2^i =$

   d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{1000} 2 =$

   e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k^2 + 3k + 1) =$

   f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+4}\right) =$

   g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) =$

h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{k+1} =$

4. Emplee sumas telescópicas y obtenga una fórmula para las siguientes sumas:

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4 =$

   b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^5 =$

   c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^6 =$

5. Calcule los límites:

   a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)(n+3)}{n^2(3n+6)}.$

   b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{2n-3}{n+5} \cdot \frac{n(n-1)}{n^2-3n+1}.$

6. Sea $f(x) = 2x - 3$.

   a) Calcule el área bajo la curva de f en el intervalo $[2, 5]$, empleando la partición $P = \{2, 2.1, 2.4, 2.5, 3, 3.2, 3.7, 4, 4.5, 5\}$. Haga un bosquejo de la gráfica.

   b) Calcule el área bajo la curva de f en el intervalo $[2, 5]$, empleando una partición regular con 6 puntos y usando rectángulos inscritos. Haga un bosquejo de la gráfica y del i-ésimo rectángulo.

   c) Calcule el área bajo la curva de f en el intervalo $[2, 5]$, empleando una partición regular con 6 puntos y usando rectángulos circunscritos. Haga un bosquejo de la gráfica y del i-ésimo rectángulo.

   d) Calcule el área exacta bajo la curva de f en el intervalo $[2, 5]$, empleando rectángulos inscritos.

   e) Calcule el área exacta bajo la curva de f en el intervalo $[2, 5]$, empleando rectángulos circunscritos.

   f) Calcule $\displaystyle\int_0^5 f(x)dx$ empleando sumas de Riemann.

   g) Calcule el área real de la región delimitada por la gráfica de f, el eje x y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

7. Considere la función $f(x) = x - x^3$.

   a) Calcule $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ empleando sumas de Riemann.

   b) Calcula el área de la región encerrada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

8. ¿Qué tipo de funciones son integrables? Explique los tipos de funciones integrables o las condiciones que deben satisfacer.

9. Proponga al menos tres ejemplos de funciones no integrables. (Sugerencia: proponga al menos una función con una discontinuidad esencial o infinita y al menos otra función con una cantidad infinita de discontinuidades).

10. Emplee sumas de Riemann para calcular:

    a) $\int_{a}^{b} x^3 dx$.

    b) $\int_{0}^{5} (px + q)dx$, con $p, q \in \mathbb{R}$.

    c) $\int_{-2}^{1} (4x^4 - x + 1)dx$.

11. Emplee sumas de Riemann para calcular el área de la región delimitada por:

    a) $f(x) = 4 - x^2$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. Realice un bosquejo de la gráfica.

    b) $f(x) = -6x^3 + x^2 + 5x - 2$, el eje x y las rectas $x = -1$ y $x = 1$. Realice un bosquejo de la gráfica.

12. Sean f, g y h son funciones continuas en el intervalo $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$, demuestre que:

    a) $\int_{a}^{b} cf(x)dx = c\int_{a}^{b} f(x)dx$.

    b) $\int_{a}^{b} (f(x) + g(x))dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx$.

    c) $\int_{a}^{b} c \; dx = c(b - a)$.

    d) $\int_{a}^{b} f(x)dx = (b - a)f(c)$, para algún $c \in [a, b]$.

13. Para $\int_0^3 x^2 dx = 9$, encuentre un número real c que satisfaga la conclusión del teorema de valor medio para integrales.

14. Sea f continua en $[a, b]$. El **valor medio** (o **promedio**) f_{med} de f en $[a, b]$ se define como

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx.$$

Para las siguientes integrales encuentre (a) números que satisfagan la conclusión del teorema de valor medio, y (b) el valor medio de f en $[a, b]$:

a) $\int_0^3 3x^2 dx = 27.$

b) $\int_{-1}^8 3\sqrt{x+1}dx = 54.$

15. Calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_0^x (t^3 - 4\sqrt{t} + 5)dt.$

b) $F(x) = \int_a^{x^3} sen^3 t dt.$

c) $F(x) = \int_3^{\int_1^x sen^3 t dt} \frac{1}{1 + sen^6 t + t^2} dt.$

d) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1 + t^2 + sen^2 t} dt.$

e) $F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2} dt.$

f) $F(x) = sen\left(\int_0^x sen\left(\int_0^y sen^3 t dt\right) dy\right).$

16. Emplee el segundo teorema fundamental del cálculo para calcular:

a) $\int_0^4 x \; dx.$

b) $\int_{-2}^5 3x^2 \; dx.$

c) $\displaystyle\int_0^4 f(x)dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \leqslant x < 2 \\ 1, & 2 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$$

Sugerencia: utilice la propiedad aditiva de la integral.

d) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

17. ¿Cuál es el valor de la integral de una función continua par en un intervalo simétrico? Justifique.

18. ¿Cuál es el valor de la integral de una función continua impar en un intervalo simétrico? Justifique.

19. Si f es una función tal que $f'(x) = 0, \forall x \in [a, b]$, demuestre que f es una función constante en $[a, b]$.

20. Evalúe las integrales definidas:

    a) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx.$

    b) $\displaystyle\int_5^5 \sqrt[3]{x^2 + \sqrt{x^5 + 1}}dx.$

    c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^7 + x}dx.$