Diagonalización

En esta unidad abordaremos en general el problema de la diagonalización de operadores lineales. La teoría va dirigida hacia los operadores, pero sabemos que el mundo de matrices conecta con el mundo de operadores mediante un isomorfismo. Por lo que buscaremos la manera de obtener bases de modo que la representación matricial del operador asociado tenga una forma diagonal.

Los contenidos de esta unidad se aplican en la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, en procesos estocásticos y análisis funcional.

1. Valores propios y vectores propios

Definición 1 (valor propio y vector propio de un operador)**.** Sea V un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ y sea T un operador lineal sobre V. Se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$.

Si λ es un valor propio de T, entonces cualquier $v \in V$, no nulo, tal que $T(v) = \lambda v$ se llama vector propio de T correspondiente al valor propio λ. En la diversa literatura de álgebra lineal suele llamarse valor propio, eigenvalor, auto valor o valor característico al escalar λ y al vector v se le suele llamar vector propio, eigenvector, auto vector o vector característico.

Ejemplo 2 (un vector propio asociado a un valor propio de un operador)**.** Sea V el espacio vectorial real de todas las funciones infinitamente derivables y sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces la función f definida por $f(x) = e^{\lambda x}$ es un vector propio del operador $\frac{d}{dx}$, con valor propio λ, ya que

$$\frac{df}{dx} = \lambda f.$$

Sabemos que existe un isomorfismo entre el espacio vectorial de las transformaciones lineales de V en W sobre un campo $\mathbb{K}$, $\mathcal{L}(V, W)$ y el espacio vectorial de las matrices de orden m por n con entradas en el campo $\mathbb{K}$, $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$. Por lo que muchas veces vamos a trabajar con matrices cuadradas en vez de operadores para simplificar los cálculos.

Definición 3 (valor propio y vector propio de una matriz)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se dice que un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{K}^n$ tal que $Av = \lambda v$.

Ejemplo 4 (un vector propio asociado a un valor propio de una matriz)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $\lambda = 1$.

En efecto,

$$\begin{aligned} Av &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda v. \end{aligned}$$

Ejemplo 5 (un vector propio correspondiente a valor propio de un operador o matriz)**.** Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ definido por la regla

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 2y \\ x \end{bmatrix}.$$

Entonces $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de T correspondiente al valor propio $\lambda = 2$.

Notemos que $Tv = T(v) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 2v$.

Equivalentemente, si usamos la representación matricial de T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$, podemos observar que

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

También podemos observar que $Av = \lambda v$.

Observación 6. De los ejemplos anteriores y de la definición de valor propio y vector propio, podemos interpretar que la expresión $T(v) = \lambda v$ significa que el operador T transforma a un vector v en un múltiplo escalar no nulo de sí mismo, λv. En el caso de vectores de $\mathbb{K}^n$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $n = 2$ se puede ver fácilmente que el nuevo vector λv cambia su longitud pero no cambia de dirección.

Aunque en los ejemplos anteriores solamente hemos presentado un vector propio correspondiente a cada valor propio, resulta que a cada valor propio se le puede asociar infinidad de vectores propios.

Ejemplo 7 (un valor propior tiene asociado más de un vector propio)**.** La matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ tiene el vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda = 2$. En efecto,

$$\begin{aligned} Av_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda v_1. \end{aligned}$$

También el vector $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda = 2$:

$$\begin{aligned} Av_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda v_2. \end{aligned}$$

Más adelante veremos cómo obtener los vares propios y vectores propios de un operador. Por el momento veamos un último ejemplo de cómo a un valor propio le corresponde una infinidad de vectores propios.

Ejemplo 8 (a cada valor propio le corresponde una infinidad de vectores propios)**.** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ y suponga que sabemos que $\lambda = 1$ es un valor propio de A. Calculemos los vectores propios asociados a λ.

Para resolver este problema aplicamos la definición $Av = \lambda v$ y denotamos al vector v de la manera siguiente

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Entonces, $Av = \lambda v$ implica que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Luego de hacer las operaciones en ambos miembros tenemos que

$$\begin{bmatrix} x - 2y + z \\ 0 \\ y + z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Por igualdad de n-tuplas, podemos igualar cada componente y obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - 2y + z & = x \\ 0 & = y \\ y + z & = z \end{cases}.$$

De aquí se sigue que $x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0$.

Esto significa que todo vector de la forma $\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $\lambda = 1$. Es fácil ver que

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si damos un valor particular para x, tendremos un vector propio particular correspondiente al valor propio $\lambda = 1$. Por ejemplo, si $x = -4$, sea $v = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y tenemos que

$$\begin{aligned} Av &= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \lambda v. \end{aligned}$$

Teorema 9 (los vectores propios de cada valor propio forman un subespacio)**.** *Si A es una matriz en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ con un valor propio λ, entonces el conjunto de todos los vectores propios correspondientes a λ junto con el vector cero,*

$$E_\lambda = \{v : v \text{ es un vector propio asociado a } \lambda\} \cup \{0\}$$

es un subespacio de $\mathbb{K}^n$. Este subespacio se llama espacio propio o espacio característico de A asociado a λ y se denota por E_λ.

Demostración:

Sean v_1 y v_2 dos vectores propios de A correspondientes a λ y sea $c \in \mathbb{K}$. Entonces

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

y

$$A(cv_1) = c(Av_1) = c(\lambda v_1) = \lambda(cv_1).$$

Luego, E_λ es cerrado bajo las operaciones lineales de suma y producto por escalar, por lo que es un subespacio de $\mathbb{K}^n$. $\square$

Ejemplo 10 (espacios característicos de una matriz)**.** Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Encuentre los espacios propios de A, si se sabe que sus valores propios son $\lambda_1 = 4$ y $\lambda_2 = -1$.

Solución: Sea $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Al realizar $Av = \lambda_1 v$, tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \left\{ \begin{array}{ll} x + 2y & = 4x \\ 3x + 2y & = 4y \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{ll} -3x + 2y & = 0 \\ 3x - 2y & = 0 \end{array} \right. .$$

El sistema anterior tiene infinidad de soluciones. Si despejamos y, obtenemos que

$$v = \begin{bmatrix} x \\ \frac{3}{2}x \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Si elegimos $x = 2$, tenemos el vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

De forma análoga, se puede ver que un vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$ es el vector $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Consecuentemente,

$$E_{\lambda_1} = E_4 = \text{ gen } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

y

$$E_{\lambda_2} = E_{-1} = \text{ gen } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

En la siguiente sección veremos cómo calcular los valores propios y vectores propios de matrices y operadores.

2. Polinomio característico

Definición 11 (polinomio característico de un operador lineal)**.** Sea T un operador lineal sobre un espacio vectorial T. Entonces el polinomio

$$p_T(\lambda) = \det(\lambda I - T),$$

donde I es el operador identidad, se llama el polinomio característico de T.

Recordamos que una matriz cuadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se identifica con el operador lineal $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ que actúa mediante la regla $T_A v := Av$. La matriz asociada al operador T_A respecto a la base canónica $\mathcal{E}$ es la matriz original A, además, se puede comprobar fácilmente que $\det(T_A) = \det(A)$ y $\det(\lambda I - T_A) = \det(\lambda I_n - A)$.

Definición 12 (polinomio característico de una matriz cuadrada)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces el polinomio característico de A se define como

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Observación 13. Como ya hemos dicho antes, los resultados de la teoría de operadores están íntimamente ligados con los resultados de la teoría de matrices, por lo que cuando vayamos a calcular el polinomio característico de un operador, $p_T(\lambda)$, calcularemos el polinomio característico de su matriz asociada a la base canónica, $p_A(\lambda)$, por facilidad de cálculos. En cualquier caso, simplemente denotaremos al polinomio característico por $p(\lambda)$ y a la matriz identidad I_n sólo la denotaremos por I.

Observación 14. Algunos autores definen al polinomio característico de T como

$$p(\lambda) = \det(T - \lambda I).$$

Notemos que la matriz asociada a $\lambda I - T$ es de orden n=dim(V), y al cambiar el signo en todas las filas del determinante se multiplica por $(-1)^n$:

$$\det(T - \lambda I) = (-1)^n \det(\lambda I - T).$$

En particular, los polinomios $\det(T - \lambda I)$ y $\det(\lambda I - T)$ tienen las mismas raíces.

Teorema 15 (obtención de los valores y vectores propios mediante el polinomio característico)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces*

1. *un valor propio de A es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $p(\lambda) = 0$.*

2. *Los vectores propios de A correspondientes al valor propio λ son las soluciones diferentes de cero de $(\lambda I - A)v = 0$.*

Demostración:

Sea I la matriz identidad de orden n y sea v un vector propio de A asociado al valor propio λ. Entonces se satisface $Av = \lambda v$. Reescribimos esta ecuación como

$$\lambda I v = Av \implies (\lambda I - A)v = 0.$$

Este sistema homogéneo de ecuaciones tiene soluciones no triviales si y sólo si el determinante de $\lambda I - A$ es cero. $\square$

La ecuación $\det(\lambda I - A) = 0$ se llama ecuación característica de A. Si se desarrolla $\det(\lambda I - A)$ se puede observar que $p(\lambda)$ es un polinomio de grado n, entonces A tiene cuando mucho n valores propios distintos.

Ejemplo 16 (valores propios y vectores propios de una matriz 2×2)**.** Obtenga los valores propios y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, así como sus espacios característicos.

Solución: calculemos el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda + 5 & -2 \\ 7 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda + 5)(\lambda - 4) - (-2)(7). \end{aligned}$$

Entonces $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$ se factoriza como $p(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$.

Ahora, los valores propios de A son las raíces del polinomio $p(\lambda)$ o, equivalentemente, las soluciones de la ecuación característica $p(\lambda) = 0$. Esto es, $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda_1 = -3$ calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda_1 I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = y.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Así, obtenemos el vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = -3$.

Para $\lambda_2 = 2$ calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda_2 I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = \frac{2}{7}y.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} \frac{2}{7}y \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7}y \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$. Así, obtenemos el vector propio $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$.

Además, los espacios característicos de A son:

$$E_{-3} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y } E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}.$$

En el ejemplo anterior, la matriz cuadrada fue de orden 2 y tuvo dos valores propios distintos. En los siguientes ejemplos veremos una matriz de orden 2 con un solo valor propio. En ocasiones, este valor propio podría devolvernos dos vectores propios o solo uno.

Recordemos una definición acerca de las raíces repetidas en un polinomio.

Definición 17 (multiplicidad algebraica)**.** Si un polinomio admite k veces una raíz r, se dice que la raíz r es de multiplicidad algebraica k.

Ejemplo 18 (una matriz de orden 2 con un valor propio y dos vectores propios asociados)**.** Obtenga los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solución: calculemos el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Entonces $\lambda = 3$ es el único valor propio de A de multiplicidad algebraica 2. Calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}.$$

Lo anterior resulta debido a que $A = 3I$ y $Av = 3v$ para todo $v \in \mathbb{R}^2$. De aquí se sigue que x, y son variables libres y todo vector de la forma $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ no nulo es vector propio de A correspondiente a $\lambda = 3$. Entonces, escribimos

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De esta forma, $\lambda = 3$ tiene asociado dos vectores propios, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, y además, $E_3 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

Ejemplo 19 (una matriz de orden 2 con un valor propio y un vector propio asociado)**.** Obtenga los valores y vectores propios de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solución: calculemos el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 3)^2. \end{aligned}$$

Entonces $\lambda = 3$ es el único valor propio de A de multiplicidad algebraica 2. Calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix} \implies -y = 0.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así, obtenemos el vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda = 3$. Además, $E_3 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Observemos que en el ejemplo anterior encontramos dos vectores propios asociados al único valor propio y en este ejemplo sólo encontramos uno. Antes se mencionó que un valor propio podía tener una infinidad de vectores propios (no nulos) asociados, pero todos estos son múltiplos entre sí, es decir, son linealmente dependientes. Sin embargo, en el ejemplo anterior, se encontraron dos vectores propios linealmente independientes.

Teorema 20 (los vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes)**.** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ valores propios de A distintos entre sí con vectores propios correspondientes $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Entonces $v_1, v_2, \ldots, v_m$ son linealmente independientes.*

Demostración:

La prueba se hace por inducción sobre m. Cuando $m = 2$, supongamos que

$$c_1v_1 + c_2v_2 = 0.$$

Al multiplicar ambos miembros de la ecuación por A tenemos que

$$A(c_1v_1 + c_2v_2) = c_1Av_1 + c_2Av_2 = 0.$$

Pero $Av_j = \lambda_jv_j$ para $j = 1, 2$, por lo que

$$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 = 0.$$

Multiplicamos λ_1 por la ecuación $c_1v_1 + c_2v_2 = 0$ y restamos de la anterior para obtener

$$(c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2) - (c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_1v_2) = 0,$$

es decir

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 = 0.$$

Como $v_2 \neq 0$ (por definición de vector propio) y como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, se concluye que $c_2 = 0$ y, consecuentemente, $c_1 = 0$. De esta manera v_1 y v_2 son linealmente independientes.

Ahora, supongamos que el teorema se cumple para $m = k$ y probemos su veracidad para $m = k + 1$. Esto es, supongamos que k vectores propios correspondientes a valores propios distintos son linealmente independientes. Entonces, supongamos que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1} = 0.$$

Multiplicamos la ecuación anterior por A y usamos el hecho de que $Av_j = \lambda_jv_j$ para obtener

$$c_1\lambda_1v_1 + c_2\lambda_2v_2 + \ldots + c_k\lambda_kv_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}v_{k+1} = 0.$$

Multiplicamos λ_{k+1} por la ecuación $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{k+1}v_{k+1} = 0$ y restamos de la anterior para obtener

$$c_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)v_1 + c_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)v_2 + \ldots + c_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)v_k + c_{k+1}(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})v_{k+1} = 0,$$

es decir

$$c_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)v_1 + c_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)v_2 + \ldots + c_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)v_k = 0.$$

Pero de acuerdo con la hipótesis de inducción, los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ son linealmente independientes. Así,

$$c_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1) = c_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2) = \ldots = c_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k);$$

y como $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, se concluye que $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$. Al sustituir estos valores en $c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_kv_k + c_{k+1}v_{k+1} = 0$, se tiene que $c_{k+1} = 0$. Por lo tanto, los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_{k+1}$ son linealmente independientes. $\square$

Ejemplo 21 (una matriz con 3 valores propios distintos tiene 3 vectores propios linealmente independientes)**.** Obtenga los valores y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Solución: calculemos el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 8\lambda \\ &= \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 2). \end{aligned}$$

Entonces los valores propios de A son $\lambda = 0, 2$ y 4. Como son tres valores propios distintos, por el teorema anterior, obtendremos tres vectores propios linealmente independientes.

Para $\lambda = 0$ calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = z \text{ y } y = 0.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} z \\ 0 \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Así, obtenemos el vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 0$.

Para $\lambda = 2$ calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = 0 \text{ y } y = z.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ z \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Así, obtenemos el vector propio $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_2 = 2$.

Para $\lambda = 4$ calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = y \text{ y } z = 0.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} y \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Así, obtenemos el vector propio $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_3 = 4$.

Además,

$$E_0 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, E_2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, E_4 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

En ocasiones, una matriz puede tener coeficientes reales pero sus valores propios pueden ser complejos.

Ejemplo 22 (matriz real con valores propios complejos)**.** Calcule los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solución: calculemos el polinomio característico $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \left| \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)^2 + 1 \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 2. \end{aligned}$$

Al hallar las raíces de $p(\lambda) = 0$, tenemos las soluciones complejas conjugadas $1 + i$ y $1 - i$.

Para $\lambda_1 = 1 + i$ calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda_1 I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\left[\begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies x = iy.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} iy \\ y \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$. Así, obtenemos el vector propio $v_1 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ asociado al valor propio $\lambda_1 = 1 + i$.

Es sencillo comprobar que $v_2 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 1 - i$.

Además, podemos dar los espacios característicos:

$$E_{1+i} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ y } E_{1-i} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Notemos que como $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, los espacios característicos generan subespacios de parejas complejas con escalares reales.

Finalizamos esta sección estudiando un tipo especial de matrices.

Teorema 23 (los valores propios de una matriz triangular)**.** *Los valores propios de una matriz triangular son las componentes diagonales de la matriz.*

Demostración:

Supongamos que A es triangular superior de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix},$$

entonces

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \dots & -a_{1,n} \\ 0 & \lambda - a_{2,2} & \dots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda - a_{n,n} \end{bmatrix},$$

y como el determinante de una matriz triangular es igual al producto de las entradas de asu diagonal principal, se ve que $p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - a_{1,1})(\lambda - a_{2,2}) \dots (\lambda - a_{n,n})$ tiene raíces $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$. El caso de una matriz triangular inferior es análogo. $\square$

Ejemplo 24 (valores y vectores propios de una matriz triangular)**.** Calcule los valores y vectorios propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Solución: como A es triangular, sus valores propios se encuentran en la diagonal principal, esto es, $\lambda = 1$ de multiplicidad algebraica 3. No sabemos si existirán 3 vectores propios linealmente independientes.

Calculamos algún vector propio mediante el sistema $(\lambda I - A)v = 0$, donde $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y resolvemos por Gauss-Jordan como sigue:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies z = 0 \text{ y } x, y \in \mathbb{R}.$$

De aquí se sigue que $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Por tanto, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ son dos vectores propios linealmente independientes correspondientes al valor propio $\lambda = 1$.

Además,

$$E_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

es el único espacio propio de A.

Ejemplo 25 (valores y vectores propios de una matriz triangular)**.** Calcule los valores y vectorios propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Solución: como A es triangular, sus valores propios se encuentran en la diagonal principal, es decir, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3$.

Por el teorema de valores propios distintos, sabemos que A tiene tres vectores propios linealmente independientes. Se deja al estudiante comprobar que estos vectores son

$$v_1 = \begin{bmatrix}0\\-4\\1\end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix}-3\\-1\\1\end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

3. Diagonalización y bases de vectores propios

En la sección anterior estudiamos un teorema que establece la independencia lineal de vectores propios asociados a valores propios distintos. Esto es parte de la teoría que nos ayudará a decidir si una matriz (o un operador lineal) es diagonalizable.

Matrices semejantes

Nuestro propósito en esta sección es mostrar que las matrices semejantes tienen propiedades comunes y que muchas matrices son semejantes a matrices diagonales.

Definición 26 (matrices semejantes)**.** Se dice que dos matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ son semejantes si existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ invertible tal que

$$B = C^{-1}AC.$$

Como definición alternativa se dice que A y B son semejantes si existe una matriz invertible C tal que

$$CB = AC.$$

Teorema 27 (dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios)**.** *Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semejantes. Entonces A y B tienen los mismos valores propios.*

Demostración:

Como A y B son semejantes, entonces existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que $B = C^{-1}AC$ y se tiene que

$$\begin{aligned}
\det(\lambda I - B) &= \det(\lambda I - C^{-1}AC) \\
&= \det(C^{-1}(\lambda I)C - C^{-1}AC) \\
&= \det(C^{-1}(\lambda I - A)C) \\
&= \det(C^{-1})\det(\lambda I - A)\det(C) \\
&= \det(C^{-1})\det(C)\det(\lambda I - A) \\
&= \det(C^{-1}C)\det(\lambda I - A) \\
&= \det(I)\det(\lambda I - A) \\
&= \det(\lambda I - A).
\end{aligned}$$

Esto significa que A y B tienen el mismo polinomio característico y, consecuentemente, las mismas raíces, que son los valores propios. $\square$

Ejemplo 28 (dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios)**.** Se puede comprobar que

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 10 & -13 \\ -4 & 2 & 4 \\ 6 & 10 & -9 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

tienen los mismos valores propios: $-3, 2$ y 4.

Diagonalización

Definición 29 (matriz diagonalizable)**.** Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se dice que es diagonalizable si existe una matriz diagonal $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tal que A es semejante a D.

Teorema 30 (criterio de diagonalización)**.** *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si y sólo si tiene n vectores propios linealmente independientes.*

Demostración:

I. Supongamos que A es diagonalizable y probemos que tiene n vectores propios linealmente independientes. Entonces existe una matriz invertible C tal que $C^{-1}AC = D$ es diagonal. Al hacer que las entradas en la diagonal principal de D sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ y que los vectores columna de C sean $col_1, col_2, \ldots, col_n$ tenemos que

$$\begin{aligned} CD &= \begin{bmatrix} col_1 & col_2 & \ldots & col_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 col_1 & \lambda_2 col_2 & \ldots & \lambda_n col_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pero como

$$AC = \begin{bmatrix} Acol_1 & Acol_2 & \ldots & Acol_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C^{-1}AC = D,$$

se tiene que $AC = CD$, lo cual implica que

$$\begin{bmatrix} Acol_1 & Acol_2 & \ldots Acol_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 col_1 & \lambda_2 col_2 & \ldots & \lambda_n col_n \end{bmatrix}.$$

Esto significa que $Acol_j = \lambda_j col_j$ para todo vector columna $col_j, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Esto implica que los vectores columna col_j de C son vectores propios de A. Además, dado que C es invertible, entonces sus vectores columna son linealmente independientes. Así, A tiene n vectores propios linealmente independientes.

II. Recíprocamente, supongamos que A tiene n vectores propios linealmente independientes y mostremos que A es diagonalizable. Sean $col_1, col_2, \ldots, col_n$ los n vectores propios linealmente independientes de A con valores propios correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Sea C la matriz cuyas columnas son estos n vectores propios linealmente independientes. Es decir,

$$C = \begin{bmatrix} col_1 & col_2 & \ldots & col_n \end{bmatrix}.$$

Como para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene que col_j es un vector propio de A, entonces $Acol_j = \lambda_j col_j$ y

$$\begin{aligned} AC &= A \begin{bmatrix} col_1 & col_2 & \ldots & col_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 col_1 & \lambda_2 col_2 & \ldots & \lambda_n col_n . \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La última matriz se puede escribir como el producto de matrices

$$AC = \begin{bmatrix} col_1 & col_2 & \ldots & col_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix} = CD.$$

Como los vectores $col_1, col_2, \ldots, col_n$ son linealmente independientes, entonces C es invertible y se puede escribir la ecuación $AC = CD$ como $C^{-1}AC = D$, lo cual significa que A es diagonalizable. $\square$

Corolario 31 (condición suficiente para la diagonalización)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.*

Ejemplo 32 (diagonalización de una matriz 2×2 con dos valores propios distintos)**.** Muestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

es diagonalizable.

Solución: es fácil ver que $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 4$ son los valores propios de A. Por el corolario, A es diagonalizable; formemos una matriz $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cuyas columnas son los vectores propios $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (el estudiantado debe comprobar estos cálculos). Entonces

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D &= C^{-1}AC \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 33 (diagonalización de una matriz 3×3 con dos valores propios distintos pero tres vectores propios linealmente independientes)**.** Muestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

es diagonalizable.

Solución: es fácil ver que los valores propios de A son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ de multiplicidad algebraica dos.

En estas condiciones tenemos que averiguar si podemos obtener tres vectores propios linealmente independientes. El estudiantado debe verificar que $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda_1 = 1$, mientras que $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ son dos vectores propios asociados a $\lambda_2 = 2$. Como v_2 y v_3 son linealmente independientes y provienen de un valor propio distinto al valor propio del que v_1 es vector propio, entonces los tres vectores son linealmente independientes y A es diagonalizable. Sea C la matriz cuyos vectores columna son estos vectores propios (no importa el orden de los vectores, eso sólo impacta en el orden de los elementos de la diagonal de D). Entonces

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} D &= C^{-1}AC \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 34 (una matriz 2×2 con un solo vector propio linealmente independiente no se puede diagonalizar)**.** Muestre que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

no es diagonalizable.

Solución: Es fácil comprobar que A tiene un valor propio $\lambda = 2$ de multiplicidad algebraica 2 pero sólo le corresponde un vector propio linealmente independiente $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Para que A sea diagonalizable requiere de dos vectores propios linealmente independientes. Por lo tanto, A no es diagonalizable.

Bases de vectores propios

Hasta ahora ya hemos dado algunas herramientras para determinar si una matriz es diagonalizable. Pero ¿qué pasa con los operadores?

Como un operador lineal sobre un espacio vectorial V puede ser representado por una matriz asociada a alguna base de V (lo usual es la base canónica), diagonalizar el operador implica hallar otra base del espacio V de manera que la representación del operador en dicha base sea diagonal. Esta base es, precisamente, el conjunto de vectores propios linealmente independientes de la matriz del operador en la base canónica.

Ejemplo 35 (diagonalización de un operador y una base para su representación matricial diagonal)**.** Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ dado por la regla

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 - 2x_3 \\ 6x_1 - 2x_2 - 3x_3 \end{pmatrix}.$$

Encuentre, de ser posible, una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo que la matriz de T respecto a la base $\mathcal{B}$ sea diagonal.

Solución: Sea $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y denotemos por $T_{\mathcal{E}}$ a la matriz de T respecto de la base $\mathcal{E}$:

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 7 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

El estudiantado debe verificar que los valores propios de esta matriz son $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad doble y $\lambda_2 = 2$, con vectores propios linealmente independientes $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Luego, la matriz $T_{\mathcal{E}}$ es diagonalizable. Entonces

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -6 & 2 & 5 \\ 9 & -3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, sea

$$\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

la nueva base de $\mathbb{R}^3$. El estudiantado debe comprobar que la matriz del operador respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$T_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

es decir, $T_{\mathcal{B}} = D$.

4. Una aplicación de la diagonalización

Supongamos que una matriz A es semejante a una matriz diagonal D. Entonces existe una matriz invertible C tal que

$$C^{-1}AC = D.$$

También podemos escribir

$$A = CDC^{-1}.$$

Y supongamos que deseamos calcular A^n, con $n \in \mathbb{N}$.

Podemos desarrollar inductivamente:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA \\ &= (CDC^{-1})(CDC^{-1}) \\ &= (CD)(C^{-1}C)(DC^{-1}) \\ &= (CD)I(DC^{-1}) \\ &= (CD)(DC^{-1}) \\ &= C(DD)C^{-1} \\ &= CD^2C^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces $A^2 = CD^2C^{-1}$.

Ahora,

$$\begin{aligned} A^3 &= A^2A \\ &= (CD^2C^{-1})(CDC^{-1}) \\ &= (CD^2)(C^{-1}C)(DC^{-1}) \\ &= (CD^2)(DC^{-1}) \\ &= CD^3C^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces $A^3 = CD^3C^{-1}$.

Ejercicio 36. Pruebe por inducción que

$$A^n = CD^nC^{-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 37 (cálculo de la potencia de una matriz)**.** Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calcule A^4 mediante diagonalización.

Solución:

Queda como ejercicio para el estudiante verificar que

$$\underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{D},$$

donde C es la matriz que diagonaliza, es decir, la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A.

También podemos escribir

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{C^{-1}}.$$

Entonces,

$$A^4 = CD^4C^{-1},$$

es decir

$$\begin{aligned} A^4 &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^4 \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-1)^4 & 0 \\ 0 & 4^4 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 256 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1025 & 510 \\ 510 & 260 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 205 & 102 \\ 102 & 52 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se puede comprobar el resultado anterior realizando el producto matricial $AAAA$.

Ejercicio 38. Calcule la décima potencia de $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

5. Teorema de Cayley-Hamilton

En esta sección estudiaremos un resultado interesante de los valors propios de una matriz, el cual establece que cualquier matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica.

Definición 39 (polinomio con coeficientes matriciales)**.** Sean $P_0, \ldots, P_m \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces la expresión

$$P(\lambda) = P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \ldots + P_m\lambda^m$$

se llama polinomio con coeficientes matriciales.

Definición 40 (evaluación de un polinomio con coeficientes matriciales)**.** Sea P un polinomio con coeficientes matriciales en $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$P(\lambda) = P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2 + \ldots + P_m\lambda^m,$$

y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz. Entonces se definen las evaluaciones por derecha y por izquierda del polinomio P en la matriz A como sigue:

$$\begin{aligned} P_d(A) &= P_0 + P_1 A + P_2 A^2 + \ldots + P_m A^m, \\ P_i(A) &= P_0 + A P_1 + A^2 P_2 + \ldots + A^m P_m. \end{aligned}$$

Ejemplo 41 (evaluación de un polinomio con coeficientes matriciales)**.** Sean las matrices reales $P_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $P_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Definimos el polinomio $P(\lambda) = P_0 + P_1\lambda + P_2\lambda^2$. Entonces podemos evaluar el polinomio en la matriz A por derecha:

$$\begin{aligned} P_d(A) &= P_0 + P_1 A + P_2 A^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

También evaluamos $P(A)$ por izquierda:

$$\begin{aligned} P_i(A) &= P_0 + AP_1 + A^2P_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 12 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Observemos que las evaluaciones de $P(A)$ por izquierda y por derecha no coinciden. Es importante recordar que el producto de matrices no es, en general, conmutativo y la evaluación usual se hace por derecha. En estos casos solo escribiremos $P(A)$.

Observación 42 (evaluación de una matriz en un polinomio)**.** En ocasiones necesitaremos evaluar una matriz en un polinomio que puede aparecer en el contexto de coeficientes y variables numéricas, por ejemplo: sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m \in \mathcal{P}_m(\mathbb{K})$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Entonces definimos

$$p(A) := a_0I + a_1A + a_2A^2 + \ldots + a_mA^m.$$

Aunque el coeficiente a_0 del polinomio $p(x)$ es el término constante, es necesario multiplicarlo por una matriz identidad I para que pueda evaluarse dicho polinomio en alguna matriz A. Recordemos que la matriz identidad funciona igual que el elemento neutro de un campo, por lo que no altera el valor "matricial"del término independiente a_0.

Ejemplo 43 (evaluación de una matriz en un polinomio)**.** Sea $p(x) = x^2 - 3x + 5 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y sea $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Entonces

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - 3A + 5I \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Lema 44. *Si $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ son polinomios con coeficientes matriciales en la variable escalar λ y si $P(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda I - A)$, entonces $P(A) = 0$.*

Demostración:

Supongamos que $Q(\lambda)$ tiene la forma

$$Q(\lambda) = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \ldots + B_n\lambda^n,$$

entonces

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \ldots + B_n\lambda^n)(\lambda I - A) \\ &= B_0\lambda + B_1\lambda^2 + B_2\lambda^3 + \ldots + B_n\lambda^{n+1} - B_0A - B_1A\lambda - B_2A\lambda^2 - \ldots - B_nA\lambda^n. \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos $\lambda = A$ y obtenemos

$$P(A) = B_0A + B_1A^2 + B_2A^3 + \ldots + B_nA^{n+1} - B_0A - B_1A^2 - B_2A^3 - \ldots - B_nA^{n+1} = 0.$$

$\square$

Observación 45. No podemos demostrar el lema anterior sustituyendo directamente $\lambda = A$ para obtener $P(A) = Q(A)(A - A) = 0$, puesto que se pueden encontrar polinomios $P(\lambda)$ y $Q(\lambda)$ con coeficientes matriciales tales que $(PQ)(\lambda) = P(\lambda)Q(\lambda)$ pero $(PQ)(A) \neq P(A)Q(A)$. Por ejemplo, definamos las matrices

$$P(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\lambda, \quad Q(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces

$$(PQ)(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda, \quad (PQ)(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P(A)Q(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Luego, $(PQ)(A) \neq P(A)Q(A)$.

Lema 46 (condición suficiente para la igualdad $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$)**.** *Sean P y Q polinomios con coeficientes matriciales:*

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} P_i\lambda^i, \qquad Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{s} Q_j\lambda^j,$$

donde $P_i, Q_i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matriz que conmuta con todos los coeficientes del polinomio Q:

$$Q_jA = AQ_j \qquad \forall j \in \{0, \ldots, s\}.$$

Entonces

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

Demostración:

Recordamos la definición del producto de polinomios:

$$(PQ)(\lambda) = \sum_{k=0}^{m+s} \left(\sum_{i,j:i+j=k} P_i Q_j \right) \lambda^k.$$

De allí,

$$(PQ)(A) = \sum_{k=0}^{m+s} \left(\sum_{i,j:i+j=k} P_i Q_j \right) A^k.$$

Por otro lado,

$$P(A)Q(A) = \left(\sum_{i=0}^{m} P_i A^i \right) \left(\sum_{j=0}^{s} P_j A^j \right) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{s} P_i A^i Q_j A^j.$$

Al agrupar los sumandos con $i + j = k$ podemos escribir el resultado del producto como sigue:

$$P(A)Q(A) = \sum_{k=0}^{m+s} \left(\sum_{i,j:i+j=k} P_i A^i Q_j A^j \right).$$

Ahora usemos la condición que A conmuta con Q_j:

$$P_i A^i Q_j A^j = P_i Q_j A^{i+j}.$$

De allí obtenemos que

$$P(A)Q(A) = \sum_{k=0}^{m+s} \sum_{i,j:i+j=k} P_i Q_j A^k = (PQ)(A).$$

$\square$

Ya estamos preparados para establecer el teorema principal de esta sección.

Teorema 47 (Cayley-Hamilton)**.** *Toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica. Es decir, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ y $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ es el polinomio característico de A, entonces $p(A) = 0$.*

Demostración:

De la definición de matriz adjunta, vista en la unidad 1 (determinantes), sabemos que para cualquier matriz cuadrada B se tiene

$$\operatorname{adj}(B)B = \det(B)I,$$

donde $\operatorname{adj}(B)$ es la matriz adjunta clásica de B, o sea, la matriz de cofactores transpuesta. Apliquemos este resultado a la matriz $\lambda I - A$:

$$\operatorname{adj}(\lambda I - A)(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A)I = p(\lambda)I.$$

Hagamos

$$P(\lambda) = \operatorname{adj}(\lambda I - A), \quad Q(\lambda) = \lambda I - A.$$

Estas expresiones son matrices con entradas polinomiales, las cuales vamos a tratar como polinomios con coeficientes matriciales. Notemos que los coeficientes de Q son I y A, y estas matrices conmutan con A. Por el lema anterior,

$$p(A) = P(A)Q(A) = P(A)(IA - A) = 0.$$

□

Corolario 48 (teorema de Cayley-Hamilton para operadores)**.** *Sea V un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ de dimensión finita y sea T un operador lineal sobre V. Entonces $p(T) = 0$, donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico del operador T.*

Ejemplo 49 (verificación del teorema de Cayley-Hamilton)**.** El polinomio característico de la matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8$. Entonces

$$\begin{aligned}
p(A) &= A^3 - 6A^2 - 15A - 8I \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^3 - 6\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}^2 - 15\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 8\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 227 & 114 & 228 \\ 114 & 56 & 114 \\ 228 & 114 & 227 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -174 & -84 & -168 \\ -84 & -48 & -84 \\ -168 & -84 & -174 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -45 & -30 & -60 \\ -30 & 0 & -30 \\ -60 & -30 & -45 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Finalizamos esta sección dando una aplicación importante del teorema de Cayley-Hamilton.

Ejemplo 50 (aplicación del teorema de Cayley-Hamilton para calcular la inversa de una matriz)**.** Calculemos la inversa de la matriz del ejemplo anterior.

Como $\det(A) = 8 \neq 0$, tenemos que A es invertible y, además, $p(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8$ es su polinomio característico. Entonces $p(A) = 0$, es decir

$$A^3 - 6A^2 - 15A - 8I = 0.$$

Escribimos

$$8I = A^3 - 6A^2 - 15A.$$

Ahora, multiplicamos ambos miembros por A^{-1}:

$$8A^{-1} = A^2 - 6A - 15I.$$

De allí tenemos que

$$A^{-1} = \frac{1}{8}(A^2 - 6A - 15I).$$

De esta forma,

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$