1. Unidad 1: Espacios vectoriales

1. Realice las demostraciones de aquellas proposiciones vistas en clase que se dejaron como ejercicio.
2. Determine si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales con el campo y operaciones dadas. En caso afirmativo, demuestre que se cumplen los 10 axiomas, en caso contrario, indique todos los axiomas que no se cumplen con un contraejemplo:
   a) Polinomios de grado menor o igual que n con coeficientes reales no negativos, el campo real y las operaciones usuales.
   b) Conjunto de las funciones $f \in C[a,b]$ tales que $|f(t)| \leqslant 1$ para todo $t \in [0,1]$.
   c) Las funciones reales *pares* de variable real en el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales.
   d) $< \mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \cdot >$, donde el producto por escalar es el usual pero la suma $\oplus$ se define como:
   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ x_2 - y_2 \end{pmatrix}.$$
   e) $< \mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \oplus, \cdot >$, donde el producto por escalar es el usual pero la suma $\oplus$ se define como:
   $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + 1 \\ x_2 + y_2 + 1 \end{pmatrix}.$$
   f) $< \mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \odot >$, donde la suma de vectores es la usual pero el producto por escalar $\odot$ se define como:
   $$\lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2\lambda x_1 \\ 2\lambda x_2 \end{pmatrix}.$$
   g) Las matrices 2×2 con entradas reales y determinante nulo, junto con el campo real y las operaciones usuales.
3. Demuestre que las matrices simétricas de orden $m \times n$ con entradas en $\mathbb{K}$ y operaciones usuales forman un espacio vectorial.
4. Demuestre que $\mathbb{C}$ con el campo $\mathbb{R}$ y las operaciones usuales es un espacio vectorial.
5. Demuestre que $\mathbb{C}$ con el campo $\mathbb{C}$ y las operaciones usuales es un espacio vectorial.

6. Verifique cuál de los siguientes conjuntos W son subespacios del espacio vectorial V:

   a) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant y\}$ con $V = \mathbb{R}^2$.
   b) $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = ay\}$ con $V = \mathbb{R}^2$ y $a \in \mathbb{R}$ fijo.
   c) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}$ con $V = \mathbb{R}^3$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$ fijos.
   d) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geqslant 0\}$ con $V = \mathbb{R}^3$.

7. Verifique cuál de los siguientes conjuntos W son subespacios del espacio vectorial $V = \mathbb{K}^n$:

   a) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ fijos.
   b) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 = 0\}$.
   c) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1\}$.
   d) $W = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : x_1 = x_n\}$.

8. Verifique cuál de los siguientes conjuntos W son subespacios del espacio vectorial $V = P(\mathbb{K})[x]$, donde cada elemento de V se expresa de la forma $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ con $n \geqslant 0$:

   a) $W = \{p(x) \in V : p'(x) \text{ es constante}\}$, donde $p'(x)$ es la derivada de $p(x)$.
   b) $W = \{p(x) \in V : n \leqslant 5 \text{ y } a_n = 1\}$.
   c) $W = \{p(x) \in V : n = 3 \text{ y } a_n = 1\}$.
   d) $W = \{p(x) \in V : a_0 = 3a_n\}$.
   e) $W = \{p(x) \in V : p(0) = 1\}$.
   f) $W = \{p(x) \in V : p(x) = 0 \text{ o } \operatorname{grad}(p(x)) \leqslant 2\}$.
   g) $W = \{p(x) \in V : p(x) = 0 \text{ o } a_0 + \ldots + a_n = 0\}$ con $n \leqslant 3$.

9. Sea $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, con $n \geqslant 2$, como espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Verifique cuáles de los conjuntos W son subespacios de V:

   a) $W = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})^* = \{A \in V : A \text{ es invertible }\}$.
   b) $W = \{A \in V : A \text{ es triangular superior }\}$.
   c) $W = \{A \in V : A \text{ es diagonal }\}$.
   d) $W = \{A \in V : AB = BA\}$, donde $B \in V$ es una matriz fija.
   e) $W = \{A \in V : A^2 = A\}$ (Una matriz A que cumple $A^2 = A$ se dice ser **idempotente**).

10. Se dice que el espacio vectorial V es la **suma directa** de sus subespacios U y W, denotado por $V = U \bigoplus W$ si todo vector $v \in V$ puede escribirse de una y sólo una forma como $v = u + w$, con $u \in U$ y $w \in W$. Demuestre que V es la suma directa de sus subespacios U y W si y sólo si $V = U + W$ y $U \cap W = \{0\}$.

11. Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 4}(\mathbb{R})$ y S el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales homogéneo $AX = O$. Encuentre un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^4$ que generen al subespacio S.

12. Muestre que los vectores $v = (1 + i, 2i)$ y $w = (1, 1 + i)$ en $\mathbb{C}^2$ son linealmente dependientes sobre el campo $\mathbb{C}$ pero linealmente independientes sobre el campo $\mathbb{R}$.

13. Exprese al polinomio sobre $\mathbb{R}$, $p(x) = x^2 + 4x - 3$ como una combinación lineal de los polinomios $p_1(x) = x^2 - 2x + 5$, $p_2(x) = 2x^2 - 3x$, $p_3(x) = x + 3$.

14. Encuentre una condición a imponer sobre $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que $w = (a, b, c) \in \mathcal{L}((1, -3, 2), (2, -1, 1))$.

15. Sea V el espacio vectorial de las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Pruebe que $f, g, h \in V$ son linealmente independientes, donde $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = x$.

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n. Pruebe que un conjunto de $n + 1$ vectores distintos de V forman un conjunto linealmente dependiente.

17. Suponga que u, v y w son linealmente independientes. Pruebe que también lo son $u + v$, $u - v$ y $u - 2v + w$.

18. Sea V el conjunto de todas las matrices cuadradas $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que $a + d = 0$. Entonces

    a) Pruebe que V es un espacio vectorial real con las operaciones usuales de suma de matrices y producto de un escalar por una matriz de V.

    b) Encuentre una base para V.

19. Proporcione ejemplos de dos subespacios W_1 y W_2 de $\mathbb{R}^2$ tales que $\mathbb{R}^2 = W_1 + W_2$ y $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

20. Sea $W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{K}^4 : 2x - y + z + 5w = 0\}$. Pruebe que W es un subespacio de $\mathbb{K}^4$ y encuentre una base para W.

21. Sea $W_1 = \mathcal{L}((i, 1 + i, 1), (0, 1 - i, i))$ y $W_2 = \mathcal{L}((1, i, 1 + i), (i, 0, 1 - i))$ subespacios complejos de $\mathbb{C}^3$. Encuentre una base para $W_1 + W_2$.

22. Sean $W = \mathcal{L}((-2, 1, 3), (6, -5, 17), (1, -1, 5))$ subespacio real de $\mathbb{R}^3$, $B_1 = \{(3, -2, 2), (0, -1, 13)\}$ y $B_2 = \{(1, 0, -8), (-6, 4, -4)\}$. Pruebe que B_1 y B_2 son bases de W.

23. Pruebe que $W = \{(s+4t, t, s, 2s - t + r) \in \mathbb{K}^4 : s, t, r \in \mathbb{K}\}$ es un subespacio de $\mathbb{K}^4$, encuentre una base para W y su dimensión.

24. Encuentre el vector de coordenadas de $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con respecto a la base ordenada

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \right).$$

25. Considere el espacio vectorial $P_3(\mathbb{R})[t]$.

    a) Muestre que $S = \{1, 1-t, (1-t)^2, (1-t)^3\}$ es una base de $P_3(\mathbb{R})[t]$.

    b) Encuentre el vector de coordenadas de $u = 2 - 3t + 3t^2 + 2t^3$ respecto a S.

26. Sea W el subespacio de $\mathbb{C}^3$ generado por los vectores $u_1 = (1, 0, i)$ y $u_2 = (1+i, 1, -1)$. Entonces

    a) Pruebe que $S = \{u_1, u_2\}$ forma una base de W.

    b) Los vectores $v_1 = (1, 1, 0)$ y $v_2 = (1, i, 1+i)$ pertenecen a W y forman una base de W.

    c) Encuentre las coordenadas de u_1 y de u_2 en la base ordenada $B = (v_1, v_2)$.