1. Unidad 4: Producto interno

1. Pruebe que la siguiente función es un producto interno en $\mathbb{R}^2$, donde $u = (x_1, x_2)$ y $v = (y_1, y_2)$:

$$f(u, v) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

2. Muestre que $\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}B^tA$ define un producto interno en $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

3. Pruebe que $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ define un producto interno en $P(\mathbb{R})[t]$.

4. Encuentre el valor de k para que $u = (1, 2, k, 3)$ y $v = (3, k, 7, -5)$ sean ortogonales con el producto interno usual de $\mathbb{R}^4$.

5. Encuentre el valor de k para que $f(t) = t + k$ y $g(t) = t^2$ sean ortogonales con el producto interno del ejercicio 3.

6. Encuentre una base del subespacio W de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a $u_1 = (1, -2, 3, 4)$ y $u_2 = (3, -5, 7, 8)$.

7. Sea $w = (1, -2, -1, 3) \in \mathbb{R}^4$. Encuentre una base:

   a) ortogonal de $w^\perp$.

   b) ortonormal de $w^\perp$.

8. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a $u_1 = (1, 1, 2, 2)$ y $u_2 = (0, 1, 2, -1)$. Encuentre una base:

   a) ortogonal de W.

   b) ortonormal de W.

9. Suponga que $S = ((1, 1, 1, 1), (1, 1, -1, -1), (1, -1, 1, -1), (1, -1, -1, 1))$ en $\mathbb{R}^4$.

   a) Pruebe que S es ortogonal y es una base de $\mathbb{R}^4$.

   b) Normalice S para conseguir una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

10. Encuentre una base ortogonal y una ortonormal para el subespacio U de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 2, 2), v_3 = (1, 2, -3, -4)$.

11. Usando el problema anterior, encuentre la proyección de $v = (1, 2, -3, 4)$ sobre U.

12. Muestre que las siguientes matrices son ortogonales:

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ -1/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ \cos t & -\operatorname{sen} t \end{bmatrix} \forall t \in \mathbb{R}.$$

13. Muestre que la siguiente matriz es unitaria

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \end{bmatrix}.$$

14. Muestre que $f(x) = \operatorname{sen} x + i \cos x$ y $g(x) = \operatorname{sen} x - i \cos x$ son ortogonales según el producto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x)\overline{g(x)}.$$