Lista No. 3 Integrales impropias y aplicaciones

Instrucciones: Resuelva los ejercicios indicando con detalle la resolución de los mismos y argumentando sus respuestas.

1. Calcule el área de la región delimitada por las gráficas de:

   (a) $y_1 = x^2 - 6x$ y $y_2 = 0$.

   (b) $y_1 = x^2 - 4x + 3$ y $y_2 = -x^2 + 2x + 3$.

   (c) $y_1 = 3(x^3 - x)$ y $y_2 = 0$.

2. En los siguientes dos ejercicios calcule el área de la región integrando con respecto a x, luego integrando con respecto a y. Compare sus resultados. ¿Cuál método es más simple? ¿Por qué?

   (a) $x = 4 - y^2$ y $x = y - 2$.

   (b) $y = x^2$ y $y = 6 - x$.

3. Trace la región acotada por las gráficas y calcule el área:

   (a) $y = x^2 - 1$, $y = -x + 2$, $x = 0$, $x = 1$.

   (b) $y = \frac{1}{2}x^3 + 2$, $y = x + 1$, $x = 0$, $x = 2$.

   (c) $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = 0$.

   (d) $f(x) = x^2 + 2x$, $g(x) = x + 2$.

   (e) $y = x$, $y = 2 - x$, $y = 0$.

   (f) $f(x) = \sqrt{x} + 3$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 3$.

   (g) $f(y) = y^2$, $g(y) = y + 2$.

   (h) $f(y) = y^2 + 1$, $g(y) = 0$, $y = -1$, $y = 2$.

   (i) $f(x) = x(x^2 - 3x + 3)$, $g(x) = x^2$.

   (j) $f(x) = x^4 - 2x^2$, $g(x) = x^2 - 4$.

   (k) $f(x) = cos x$, $g(x) = 2 - cos x$, $0 \leq x \leq 2\pi$.

   (l) $y_1 = sen x$, $y_2 = x$, $y = 0$.

   (m) $y = |x^2 - 4|$, $y = 0$.

4. Las gráficas de $y = x^4 - 2x^2 + 1$ y $y = 1 - x^2$ se intersecan en tres puntos. Sin embargo, el área entre las curvas puede calcularse con una sola integral. Explique por qué es posible hacerlo y calcule el área.

5. Formule y calcule la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje x y dibuje la región y el sólido de revolución:

   (a) $y = -x + 1$, $x = 0$, $x = 1$.

   (b) $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$.

   (c) $y = x^2$, $y = x^3$.

6. Formule y calcule la integral que da el volumen del sólido formado al girar la región alrededor del eje y y dibuje la región y el sólido de revolución:

   (a) $y = x^2$, $y = 0$, $y = 4$.

   (b) $y = x^{2/3}$, $y = 0$, $y = 1$.

7. Calcule el volumen del sólido generado por la región acotada por las gráficas de las ecuaciones al girar alrededor de las rectas dadas:

   (a) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ alrededor del eje x.

   (b) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ alrededor del eje y.

   (c) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ alrededor de la recta $x = 3$.

   (d) $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 3$ alrededor de la recta $x = 6$.

   (e) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ alrededor del eje x.

   (f) $y = x^2$, $y = 4x - x^2$ alrededor de la recta $y = 3$.

   (g) $y = x$, $y = 3, x = 0$ alrededor de la recta $y = 4$.

   (h) $x = y^2$, $x = 4$ alrededor de la recta $x = 5$.

   (i) $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ alrededor del eje x.

   (j) $y = senx$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$ alrededor del eje x.

8. Calcule la longitud del segmento de recta que une los puntos $A(-2, 3)$ y $B(5, -5)$ empleando cálculo integral.

9. Calcule la longitud de arco de la curva $y = x^{3/2}$ desde el punto $(1, 1)$ hasta el punto $(4, 8)$.

10. Calcule la longitud de un arco senoidal desde 0 hasta π.

11. Calcule el área bajo la curva $y = \dfrac{1}{x^3}$ de $x = 1$ a $x = t$ para $t = 10, 100$ y 1000. A continuación calcule el área total bajo esta curva para $x \geq 1$.

12. Determine si cada integral es convergente o divergente. Calcule las que sean convergentes:

   (a) $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{1}{(x-2)^{3/2}}dx.$

   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{\sqrt{2-x}}dx.$

   (c) $\displaystyle\int_4^{\infty} e^{-x/2}dx.$

   (d) $\displaystyle\int_{2\pi}^{\infty} sen x\, dx.$

   (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx.$

   (f) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x}dx.$

   (g) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x}dx.$

   (h) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6}dx.$

   (i) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3}{x^5}dx.$

   (j) $\displaystyle\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}.$

   (k) $\displaystyle\int_0^{33} (x-1)^{-1/5}dx.$

   (l) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{e^x}{e^x-1}dx.$

   (m) $\displaystyle\int_0^{2} x^2 \ln x\, dx.$

13. Encuentre los valores de p para los cuales la integral converge y calcule la integral para esos valores de p:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx.$$

14. Sea $f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$

   (a) Verifique que f sea una función de densidad de probabilidad.

   (b) Calcule $P(1 \leq X \leq 2)$.

15. Sea $f(x) = \dfrac{k}{1+x^2}$. ¿Para qué valor real de k es f una función de densidad de probabilidad?