Lista No. 4 Sucesiones y series de números reales

---

1. Utilice la definición de límite de una sucesión para demostrar que las siguientes sucesiones son convergentes:

   (a) $\left(\dfrac{4n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

   (b) $\left(\dfrac{3n+1}{2n+5}\right)_{n=1}^{\infty}$.

2. La sucesión $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ es convergente. ¿Está acotada? Proponga una cota superior.

3. ¿Toda sucesión acotada es convergente? ¿es cierto el recíproco?

4. Proponga dos ejemplos de sucesiones acotadas que no sean convergentes.

5. Una sucesión monótona de números reales es convergente si y sólo si está acotada. Proponga dos ejemplos que ilustren este hecho.

6. Demuestre que la sucesión $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

7. Sea $a_n = \dfrac{2n}{3n+1}$.

   (a) Determine si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

   (b) Determine si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

8. Determine si las series geométricas siguientes son convergentes o divergentes. Si convergen, calcule la suma:

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 6(0.9)^{n-1}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$.

9. Determine si las series siguientes son convergentes o divergentes. Si convergen, calcule la suma:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{3n-1}$.

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{n^2-1}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$.

(f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1}$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)}$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^n} + \frac{1}{n(n+1)}\right)$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n}$.

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n^3+1}$.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n}$.

(l) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos^2 n}{n^2+1}$.

10. Pruebe la convergencia o divergencia de las series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n-1}{2n+1}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+9}$.

11. ¿Para qué valores de p es convergente la serie siguiente?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

12. Determine si las series son absolutamente convergentes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n^3}$.

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-10)^n}{n!}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(n+1)4^{2n+1}}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$.

13. Encuentre el radio de convergencia e intervalo de convergencia de cada serie:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n^3}$.

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2x^n}{2^n}$.

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n x^n}{\sqrt[4]{n}}$.

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2+1}$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(x+4)^n}{\sqrt{n}}$.

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x+1)^n}{n^2}$.

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!(2x-1)^n$.

14. Encuentre una representación de serie de potencias para cada función y determine el intervalo de convergencia:

(a) $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$.

(b) $f(x) = \dfrac{x}{9+x^2}$.

(c) $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$.

15. Encuentre la serie de Maclaurin para cada función y determine su radio de convergencia:

(a) $f(x) = (1-x)^{-2}$.

(b) $f(x) = \sin \pi x$.

(c) $f(x) = e^{5x}$.

16. Encuentre la serie de Taylor para cada función con centro en el valor dado de a:

(a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$, $a = 1$.

(b) $f(x) = e^x$, $a = 3$.

(c) $f(x) = \cos x$, $a = \pi$.

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $a = 9$.