1. Ejemplos de espacios vectoriales

Ejemplo 1 (el espacio de n-tuplas)**.** Si $\mathbb{F}$ es un campo, entonces $\mathbb{F}^n$ es el conjunto de n-tuplas formadas por

$$\mathbb{F}^n = \mathbb{F} \times \mathbb{F} \times \ldots \times \mathbb{F} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_j \in \mathbb{F} \, \forall j \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

Sean $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{F}^n$ y $c \in \mathbb{F}$. Si definimos

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F} \\ (a, b) &\mapsto a + b := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n &\to \mathbb{F}^n \\ (c, a) &\mapsto ca := (ca_1, \ldots, ca_n), \end{aligned}$$

entonces $\mathbb{F}^n$ es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$.

$\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial. En estas condiciones, es claro que $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, así como $\mathbb{C}^n$ también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ con la suma usual de n-tuplas complejas y el producto de un escalar complejo por una n-tupla de números complejos.

Por supuesto, cualquier campo $\mathbb{F}$ sobre sí mismo es un espacio vectorial.

Ejemplo 2 (espacio de matrices)**.** $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$, el conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$ junto con el mismo campo $\mathbb{K}$ y las operaciones usuales de suma matricial y producto de un escalar por una matriz es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 3 (espacio de todos los polinomios)**.** $\mathcal{P}(\mathbb{K})$, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{K}$ junto con las operaciones usuales de suma de polinomios y producto de un escalar por un polinomio es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 4 (espacio de polinomios de grado menor o igual que n)**.** $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$, el conjunto de los polinomios de grado **menor o igual** que n junto con las operaciones mencionadas en el ejemplo anterior es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Ejemplo 5 (conjunto de polinomios de exactamente grado n no es un espacio vectorial)**.** Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Denotemos por P al conjunto de polinomios de grado exactamente n con coeficientes en $\mathbb{K}$ y las operaciones usuales. Entonces P no forma un espacio vectorial. Veamos, por ejemplo, para $n = 3$, que la cerradura bajo la suma no se satisface:

$$\text{Supongamos que } p(x) = 2 - 3x + x^2 - 5x^3, \quad q(x) = 7 - x + x^2 + 5x^3 \in P.$$

Entonces

$$p(x) + q(x) = 9 - 4x + 2x^2 \text{ no es un polinomio de grado } 3.$$

Ejemplo 6 (espacio de funciones)**.** Sea X un conjunto no vacío. Denotamos por $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ al conjunto de todas las funciones f con dominio en X y conradominio $\mathbb{F}$:

$$\mathcal{F}(X, \mathbb{F}) := \{f : X \to \mathbb{F}\}.$$

Si definimos operaciones punto a punto:

$$\begin{aligned} + : \mathcal{F}(X, \mathbb{F}) \times \mathcal{F}(X, \mathbb{F}) &\to \mathcal{F}(X, \mathbb{F}) \\ (f, g) &\mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x), \ \forall x \in X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{F}(X, \mathbb{F}) &\to \mathcal{F}(X, \mathbb{F}) \\ (a, f) &\mapsto (af)(x) := af(x) \, \forall x \in X, \end{aligned}$$

entonces $\mathcal{F}(X, \mathbb{F})$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$.

Ejemplo 7 (espacio vectorial trivial)**.** Sea V un conjunto dado por un único elemento v, es decir, $V = \{v\}$. Entonces V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ con las operaciones

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V \\ (v, v) &\mapsto v + v := v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + : \mathbb{F} \times V &\to V \\ (a, v) &\mapsto av := v. \end{aligned}$$

Observe que el elemento v se comporta como el elemento neutro del espacio, por lo que simplemente escribiremos $v = 0$, es decir, $V = \{0\}$. En otras palabras, V consta solamente de un vector llamado **vector cero**.