1. Sumas telescópicas

En el cálculo de áreas mediante sumas superiores o sumas inferiores se necesita conocer el valor de algunas sumas especiales. Todas estas fórmulas se pueden demostrar por inducción matemática (incluso algunas se estudian en álgebra superior) pero vamos a presentar una forma de conseguir tales fórmulas.

Más adelante, cuando veamos series en el curso de Cálculo II, estudiaremos las **series telescópicas**, por el momento pensemos en sumas finitas de términos que, al desarrollar, hacen que la mayoría de los términos se anulen, quedando por lo regular sólo dos de ellos.

Ejemplo 1 (suma telescópica)**.** Calculemos el valor de la suma siguiente:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k}.$$

Solución: descomponemos la expresión $\frac{1}{k^2+k}$ en fracciones parciales:

$$\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ahora, desarrollamos la suma

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 - \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1}.
\end{aligned}$$

Observemos que casi todos los términos se cancelaron, es por esto que se llama suma telescópica, es como si colapsara un telescopio de mano.

2. Fórmulas de sumas especiales

Recordemos que en este curso consideramos que el 0 no es un número natural. Es decir, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Proposición 2 (suma de los primeros n números naturales)**.** *Sea* $n \in \mathbb{N}$*, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Recordemos que esta fórmula y las siguientes se pueden demostrar directamente por inducción. Aquí vamos a hacer pruebas indirectas empleando sumas telescópicas.

Demostración:
Consideremos la suma telescópica

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2].$$

Resolvamos la suma telescópica propuesta de dos maneras: primero por desarrollo de términos y después empleando propiedades de la suma.

I. Al desarrollar la suma tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2] &= [2^2 - 1^2] + [3^2 - 2^2] + \ldots + [n^2 - (n-1)^2] + [(n+1)^2 - n^2] \\
&= (n+1)^2 - 1^2 \\
&= n^2 + 2n.
\end{aligned}$$

II. Empleamos propiedades de la suma y el hecho $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2] &= \sum_{i=1}^{n} [i^2 + 2i + 1 - i^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n} (2i + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 2i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 2\sum_{i=1}^{n} i + n.
\end{aligned}$$

Igualamos los resultados obtenidos por medio de los procedimientos I y II:

$$2\sum_{i=1}^{n} i + n = n^2 + 2n,$$

y despejamos lo que queríamos calcular

$$\begin{aligned} 2\sum_{i=1}^{n} i &= n^2 + n \\ \sum_{i=1}^{n} &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3 (suma de los cuadrados de los primeros n naturales)**.** *Sea $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Demostración:
Consideremos la suma telescópica

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^3 - i^3].$$

Resolvamos la suma telescópica propuesta de dos maneras: primero por desarrollo de términos y después empleando propiedades de la suma.

I. Al desarrollar la suma tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [(i+1)^3 - i^3] &= [2^3 - 1^3] + [3^3 - 2^3] + \ldots + [n^3 - (n-1)^3] + [(n+1)^3 - n^3] \\ &= (n+1)^3 - 1^3 \\ &= n^3 + 3n^2 + 3n. \end{aligned}$$

II. Empleamos propiedades de la suma y el hecho $\sum_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}[(i+1)^3 - i^3] &= \sum_{i=1}^{n}[i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} 3i^2 + \sum_{i=1}^{n} 3i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 \\
&= 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n.
\end{aligned}$$

Igualamos los resultados obtenidos por medio de los procedimientos I y II:

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

De aquí obtenemos

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + n = n^3 + 3n^2 + 3n.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned}
3\sum_{i=1}^{n} i^2 &= n^3 + 3n^2 + 3n - \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n - n \\
&= n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
&= \frac{1}{2} \cdot (2n^3 + 3n^2 + n) \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$\square$

Ahora el estudiante podrá deducir fórmulas para la suma de las demás potencias de i con una suma telescópia.

Ejercicio 4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Pruebe que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ejercicio 5. Use una suma telescópica para calcular $\sum_{i=1}^{n} i^4$ y pruebe su resultado mediante inducción matemática.

Ejercicio 6. Use una suma telescópica para calcular $\sum_{i=1}^{n} i^5$ y pruebe su resultado mediante inducción matemática.