

# 1. Espacios vectoriales

**Definición 1** (espacio vectorial). Un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{F}$  es cualquier conjunto no vacío  $V$  que tiene una operación binaria llamada suma:

$$\begin{aligned} + : V \times V &\rightarrow V \\ (u, v) &\mapsto +(u, v) := u + v, \end{aligned}$$

tal que cumple las siguientes propiedades:

- S1)  $u + v \in V \quad \forall u, v \in V$  cerradura de la suma.
- S2)  $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$  asociatividad de la suma.
- S3)  $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$  conmutatividad de la suma.
- S4)  $\exists! 0 \in V$  tal que  $v + 0 = 0 + v = v \quad \forall v \in V$  existencia del neutro aditivo para la suma.
- S5)  $\forall v \in V \quad \exists! -v \in V$  tal que  $v + (-v) = -v + v = 0$  existencia de inversos bajo la suma.

y una función

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times V &\rightarrow V \\ (c, v) &\mapsto \cdot(c, v) := c \cdot v, \end{aligned}$$

llamada producto por escalar que satisface:

- P1)  $c \cdot v \in V \quad \forall c \in \mathbb{F} \text{ y } \forall v \in V$  cerradura del producto por escalar.
- P2)  $(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v \quad \forall c, d \in \mathbb{F} \text{ y } \forall v \in V$  distributividad de la suma de escalares.
- P3)  $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v \quad \forall u, v \in V \text{ y } \forall c \in \mathbb{F}$  distributividad de la suma de vectores.
- P4)  $(cd) \cdot v = c(d \cdot v) \quad \forall u \in V \text{ y } \forall c, d \in \mathbb{F}$  asociatividad del producto por escalar.
- P5)  $\exists! 1 \in \mathbb{F}$  tal que  $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$  existencia del neutro multiplicativo del campo.

La estructura  $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$  se llama espacio vectorial. Aunque también suele decirse que  $V$  es un espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{F}$ . Los elementos de  $V$  se llaman vectores y los elementos del campo  $\mathbb{F}$ , escalares.

Se abusa de la notación para simplificar el producto por escalar: en vez de escribir  $c \cdot v$ , ponemos  $cv$ .

En la literatura moderna de álgebra lineal, suele usarse la letra  $\mathbb{F}$  para denotar campos (fields) o cuerpos. pero cuando se quiere dar a entender que el campo es  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , se acostumbra usar la letra  $\mathbb{K}$ .

**Ejemplo 2** (el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n$  sobre el campo  $\mathbb{R}$  con las operaciones usuales). Sean  $u, v, w \in \mathbb{R}^n$  y  $c, d \in \mathbb{R}$ . Se definen la suma de vectores en  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n) \end{aligned}$$

y el producto por escalar

$$\begin{aligned} cv &= c(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= (cv_1, cv_2, \dots, cv_n). \end{aligned}$$

S1) Cerradura de la suma: ¿ $u + v \in \mathbb{R}^n$ ?

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

porque para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , se tiene que  $u_j + v_j \in \mathbb{R}$  por la cerradura de la suma en el campo.

S2) Asociatividad de la suma: ¿ $(u + v) + w = u + (v + w)$ ?

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= ((u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n)) + (w_1, \dots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) + (w_1, \dots, w_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= ((u_1 + v_1) + w_1, \dots, (u_n + v_n) + w_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (u_1 + (v_1 + w_1), \dots, u_n + (v_n + w_n)) \text{ por asociatividad de la suma en } \mathbb{R} \\ &= (u_1, \dots, u_n) + (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (u_1, \dots, u_n) + ((v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n)) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= u + (v + w). \end{aligned}$$

S3) Conmutatividad de la suma: ¿ $u + v = v + u$ ?

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (v_1 + u_1, \dots, v_n + u_n) \text{ por conmutatividad de la suma en } \mathbb{R} \\ &= (v_1, \dots, v_n) + (u_1, \dots, u_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= v + u. \end{aligned}$$

S4) Existencia del neutro aditivo: supongamos que  $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^n$  es tal que  $u + e = e + u = u$ , entonces:

$$u + e = (u_1, \dots, u_n) + (e_1, \dots, e_n) = (u_1 + e_1, \dots, u_n + e_n).$$

Pero como debe cumplirse que  $u + e = u$ , entonces

$$(u_1 + e_1, \dots, u_n + e_n) = (u_1, \dots, u_n).$$

Luego, por igualdad de  $n$ -tuplas se tiene que para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$

$$u_j + e_j = u_j \implies e_j = 0$$

gracias a la existencia de los inversos aditivos del campo. De lo anterior concluimos que  $e = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ . Ahora debemos ver si  $e \in \mathbb{R}^n$  es único. Para esto, suponemos que existe otro neutro:  $e' \in \mathbb{R}^n$  tal que  $u + e' = u$ . Entonces

$$e = e + e' = e'.$$

S5) Existencia de inversos aditivos: supongamos que  $v' \in \mathbb{R}^n$  es el inverso aditivo de  $v$ . Entonces debe cumplirse que  $v + v' = v' + v = e$ . Observemos que

$$(v_1 + v'_1, \dots, v_n + v'_n) = (0, \dots, 0)$$

Por igualdad de  $n$ -tuplas, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  se tiene que

$$v_j + v'_j = 0 \implies v'_j = -v_j$$

por la existencia de inversos aditivos en el campo. Consecuentemente,  $v'$  se denotará por  $-v$  y

$$-v = (-v_1, \dots, -v_n).$$

Para ver la unicidad, supongamos que  $v'$  y  $v''$  son, ambos, inversos aditivos de  $v$ . Entonces  $v' + v = 0$  y  $v'' + v = 0$ . En consecuencia,

$$v' + v = v'' + v.$$

Si sumamos en ambos miembros  $v'$ , que es uno de los inversos aditivos de  $v$ , tenemos que

$$\begin{aligned} (v' + v) + v' &= (v'' + v) + v' \\ v' + (v + v') &= v'' + (v + v') \\ v' + 0 &= v'' + 0 \\ v' &= v''. \end{aligned}$$

Luego, el inverso aditivo de  $v$  es único y se denotará por  $-v$ .

P1) Cerradura del producto por escalar: ¿ $cv \in \mathbb{R}^n$ ?

$$\begin{aligned} cv &= c(v_1, \dots, v_n) \\ &= (cv_1, \dots, cv_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

porque para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , se tiene que  $cv_j \in \mathbb{R}$  por la cerradura del producto en el campo.

P2) Distributividad del producto por escalar con respecto a la suma de escalares: ¿ $(c + d)v = cv + dv$ ?

$$\begin{aligned} (c + d)v &= (c + d)(v_1, \dots, v_n) \\ &= ((c + d)v_1, \dots, (c + d)v_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= (cv_1 + dv_1, \dots, cv_n + dv_n) \text{ por distributividad en el campo} \\ &= (cv_1, \dots, cv_n) + (dv_1, \dots, dv_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= c(v_1, \dots, v_n) + d(v_1, \dots, v_n) \text{ por definición del producto por un escalar} \\ &= cv + dv. \end{aligned}$$

P3) Distributividad del producto por escalar con respecto a la suma de vectores: ¿ $c(u + v) = cu + cv$ ?

$$\begin{aligned} c(u + v) &= c((u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n)) \\ &= c(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (c(u_1 + v_1), \dots, c(u_n + v_n)) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= (cu_1 + cv_1, \dots, cu_n + cv_n) \text{ por distributividad en el campo} \\ &= (cu_1, \dots, cu_n) + (cv_1, \dots, cv_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= c(u_1, \dots, u_n) + c(v_1, \dots, v_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= cu + cv. \end{aligned}$$

P4) Asociatividad del producto por escalar: ¿ $(cd)v = c(dv)$ ?

$$\begin{aligned} (cd)v &= (cd)(v_1, \dots, v_n) \\ &= ((cd)v_1, \dots, (cd)v_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= (c(dv_1), \dots, c(dv_n)) \text{ por asociatividad del producto en el campo} \\ &= c(dv_1, \dots, dv_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= c(dv). \end{aligned}$$

P5) Existencia de la identidad escalar: sabemos que  $\mathbb{R}$ , por ser campo, tiene un elemento neutro multiplicativo o identidad, denotado por 1. Sin embargo, vamos a encontrar dicho elemento mediante el análisis siguiente:

sea  $k \in \mathbb{R}$  la identidad, tal que  $kv = v$  para todo  $v$  de  $V$ . Entonces

$$\begin{aligned} kv &= k(v_1, \dots, v_n) \\ &= (kv_1, \dots, kv_n). \end{aligned}$$

Pero  $kv = v$  debe satisfacerse, entonces

$$(kv_1, \dots, kv_n) = (v_1, \dots, v_n).$$

Por igualdad de  $n$ -tuplas, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$  se tiene que

$$kv_j = v_j \implies k = 1$$

por la existencia de inversos multiplicativos en el campo (para todo  $v_j \in \mathbb{R}, v_j \neq 0$ , su inverso multiplicativo existe y es  $v_j^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que  $v_j v_j^{-1} = 1$ ). Consecuentemente,  $k = 1$ .

Para mostrar la unicidad, supongamos que existe otro escalar  $k' \in \mathbb{R}$  tal que  $k'v = v$  para todo  $v \in V$ . Entonces  $1v = v$  y  $k'v = v$ , por lo que

$$\begin{aligned} 1v &= k'v \\ (1v_1, \dots, 1v_n) &= (k'v_1, \dots, k'v_n). \end{aligned}$$

Si tomamos la  $j$ -ésima componente de cada miembro, tenemos que  $1v_j = k'v_j$  para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Entonces para cualquier  $v_j \neq 0$  existe su inverso multiplicativo  $v_j^{-1}$  tal que  $v_j v_j^{-1} = 1$ . Así,  $1 = k'$  y el escalar identidad es único.

Por lo anterior podemos concluir que  $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$  es un espacio vectorial real.