1. Espacios vectoriales

Definición 1 (espacio vectorial)**.** Un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$ es cualquier conjunto no vacío V que tiene una operación binaria llamada suma:

$$\begin{aligned} + :& V \times V \to V \\ & (u, v) \mapsto +(u, v) := u + v, \end{aligned}$$

tal que cumple las siguientes propiedades:

$S1)$ $u + v \in V \quad \forall u, v \in V$ cerradura de la suma.
$S2)$ $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall u, v, w \in V$ asociatividad de la suma.
$S3)$ $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$ conmutatividad de la suma.
$S4)$ $\exists ! 0 \in V$ tal que $v + 0 = 0 + v \quad \forall v \in V$ existencia del neutro aditivo para la suma.
$S5)$ $\forall v \in V \quad \exists ! - v \in V$ tal que $v + (-v) = -v + v = 0$ existencia de inversos bajo la suma.

y una función

$$\begin{aligned} \cdot :& \mathbb{F} \times V \to V \\ & (c, v) \mapsto \cdot(c, v) := c \cdot v, \end{aligned}$$

llamada producto por escalar que satisface:

$P1)$ $c \cdot v \in V \quad \forall c \in \mathbb{F}$ y $\forall v \in V$ cerradura del producto por escalar.
$P2)$ $(c + d) \cdot v = c \cdot v + d \cdot v \quad \forall c, d \in \mathbb{F}$ y $\forall v \in V$ distributividad de la suma de escalares.
$P3)$ $c \cdot (u + v) = c \cdot u + c \cdot v \quad \forall u, v \in V$ y $\forall c \in \mathbb{F}$ distributividad de la suma de vectores.
$P4)$ $(cd) \cdot v = c(d \cdot v) \quad \forall u \in V$ y $\forall c, d \in \mathbb{F}$ asociatividad del producto por escalar.
$P5)$ $\exists ! 1 \in \mathbb{F}$ tal que $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V$ existencia del neutro multiplicativo del campo.

La estructura $(V, \mathbb{F}, +, \cdot)$ se llama espacio vectorial. Aunque también suele decirse que V es un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{F}$. Los elementos de V se llaman vectores y los elementos del campo $\mathbb{F}$, escalares.

Se abusa de la notación para simplificar el producto por escalar: en vez de escribir $c \cdot v$, ponemos cv.

En la literatura moderna de álgebra lineal, suele usarse la letra $\mathbb{F}$ para denotar campos (fields) o cuerpos. pero cuando se quiere dar a entender que el campo es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, se acostumbra usar la letra $\mathbb{K}$.

Ejemplo 2 (el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ sobre el campo $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales)**.** Sean $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ y $c, d \in \mathbb{R}$. Se definen la suma de vectores en $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \end{aligned}$$

y el producto por escalar

$$\begin{aligned} cv &= c(v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (cv_1, cv_2, \ldots, cv_n). \end{aligned}$$

S1) Cerradura de la suma: ¿$u + v \in \mathbb{R}^n$?

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

porque para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, se tiene que $u_j + v_j \in \mathbb{R}$ por la cerradura de la suma en el campo.

S2) Asociatividad de la suma: ¿$(u + v) + w = u + (v + w)$?

$$\begin{aligned} (u + v) + w &= ((u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n)) + (w_1, \ldots, w_n) \\ &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) + (w_1, \ldots, w_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= ((u_1 + v_1) + w_1, \ldots, (u_n + v_n) + w_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (u_1 + (v_1 + w_1), \ldots, u_n + (v_n + w_n)) \text{ por asociatividad de la suma en } \mathbb{R} \\ &= (u_1, \ldots, u_n) + (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (u_1, \ldots, u_n) + ((v_1, \ldots v_n) + (w_1, \ldots, w_n)) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= u + (v + w). \end{aligned}$$

S3) Conmutatividad de la suma: ¿$u + v = v + u$?

$$\begin{aligned} u + v &= (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) \\ &= (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (v_1 + u_1, \ldots, v_n + u_n) \text{ por conmutatividad de la suma en } \mathbb{R} \\ &= (v_1, \ldots, v_n) + (u_1, \ldots, u_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= v + u. \end{aligned}$$

S4) Existencia del neutro aditivo: supongamos que $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{R}^n$ es tal que $u + e = e + u = u$, entonces:

$$u + e = (u_1, \ldots, u_n) + (e_1, \ldots, e_n) = (u_1 + e_1, \ldots, u_n + e_n).$$

Pero como debe cumplirse que $u + e = u$, entonces

$$(u_1 + e_1, \ldots, u_n + e_n) = (u_1, \ldots, u_n).$$

Luego, por igualdad de n-tuplas se tiene que para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$

$$u_j + e_j = u_j \implies e_j = 0$$

gracias a la existencia de los inversos aditivos del campo. De lo anterior concluimos que $e = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Ahora debemos ver si $e \in \mathbb{R}^n$ es único. Para esto, suponemos que existe otro neutro: $e' \in \mathbb{R}^n$ tal que $u + e' = u$. Entonces

$$e = e + e' = e'.$$

S5) Existencia de inversos aditivos: supongamos que $v' \in \mathbb{R}^n$ es el inverso aditivo de v. Entonces debe cumplirse que $v + v' = v' + v = e$. Observemos que

$$(v_1 + v_1', \ldots, v_n + v_n') = (0, \ldots, 0)$$

Por igualdad de n-tuplas, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$v_j + v_j' = 0 \implies v_j' = -v_j$$

por la existencia de inversos aditivos en el campo. Consecuentemente, v' se denotará por $-v$ y

$$-v = (-v_1, \ldots, -v_n).$$

Para ver la unicidad, supongamos que v' y v'' son, ambos, inversos aditivos de v. Entonces $v' + v = 0$ y $v'' + v = 0$. En consecuencia,

$$v' + v = v'' + v.$$

Si sumamos en ambos miembros v', que es uno de los inversos aditivos de v, tenemos que

$$\begin{aligned}
(v' + v) + v' &= (v'' + v) + v' \\
v' + (v + v') &= v'' + (v + v') \\
v' + 0 &= v'' + 0 \\
v' &= v''.
\end{aligned}$$

Luego, el inverso aditivo de v es único y se denotará por $-v$.

P1) Cerradura del producto por escalar: ¿$cv \in \mathbb{R}^n$?

$$\begin{aligned} cv &= c(v_1, \dots v_n) \\ &= (cv_1, \dots, cv_n) \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

porque para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, se tiene que $cv_j \in \mathbb{R}$ por la cerradura del producto en el campo.

P2) Distributividad del producto por escalar con respecto a la suma de escalares: ¿$(c+d)v = cv + dv$?

$$\begin{aligned} (c+d)v &= (c+d)(v_1, \dots v_n) \\ &= ((c+d)v_1, \dots, (c+d)v_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= (cv_1 + dv_1, \dots, cv_n + dv_n) \text{ por distributividad en el campo} \\ &= (cv_1, \dots, cv_n) + (dv_1, \dots, dv_n) \text{ por definición de suma en} \mathbb{R}^n \\ &= c(v_1, \dots, v_n) + d(v_1, \dots, v_n) \text{ por definición del producto por un escalar} \\ &= cv + dv. \end{aligned}$$

P3) Distributividad del producto por escalar con respecto a la suma de vectores: ¿$c(u+v) = cu + cv$?

$$\begin{aligned} c(u+v) &= c((u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots v_n)) \\ &= c(u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= (c(u_1 + v_1), \dots, c(u_n + v_n)) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= (cu_1 + cv_1, \dots, cu_n + cv_n) \text{ por distributividad en el campo} \\ &= (cu_1, \dots, cu_n) + (cv_1, \dots, cv_n) \text{ por definición de suma en } \mathbb{R}^n \\ &= c(u_1, \dots, u_n) + c(v_1, \dots, v_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= cu + cv. \end{aligned}$$

P4) Asociatividad del producto por escalar: ¿$(cd)v = c(dv)$?

$$\begin{aligned} (cd)v &= (cd)(v_1, \dots, v_n) \\ &= ((cd)v_1, \dots, (cd)v_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= (c(dv_1), \dots, c(dv_n)) \text{ por asociatividad del producto en el campo} \\ &= c(dv_1, \dots, dv_n) \text{ por definición del producto por escalar} \\ &= c(dv). \end{aligned}$$

P5) Existencia de la identidad escalar: sabemos que $\mathbb{R}$, por ser campo, tiene un elemento neutro multiplicativo o identidad, denotado por 1. Sin embargo, vamos a encontrar dicho elemento mediante el análisis siguiente:

sea $k \in \mathbb{R}$ la identidad, tal que $kv = v$ para todo v de V. Entonces

$$\begin{aligned} kv &= k(v_1, \ldots, v_n) \\ &= (kv_1, \ldots, kv_n). \end{aligned}$$

Pero $kv = v$ debe satisfacerse, entonces

$$(kv_1, \ldots, kv_n) = (v_1, \ldots, v_n).$$

Por igualdad de n-tuplas, para caja $j \in \{1, \ldots, n\}$ se tiene que

$$kv_j = v_j \implies k = 1$$

por la existencia de inversos multiplicativos en el campo (para todo $v_j \in \mathbb{R}, v_j \neq 0$, su inverso multiplicativo existe y es $v_j^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $v_j v_j^{-1} = 1$). Consecuentemente, $k = 1$.

Para mostrar la unicidad, supongamos que existe otro escalar $k' \in \mathbb{R}$ tal que $k'v = v$ para todo $v \in V$. Entonces $1v = v$ y $k'v = v$, por lo que

$$\begin{aligned} 1v &= k'v \\ (1v_1, \ldots, 1v_n) &= (k'v_1, \ldots, k'v_n). \end{aligned}$$

Si tomamos la j-ésima componente de cada miembro, tenemos que $1v_j = k'v_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces para cualquier $v_j \neq 0$ existe su inverso multiplicativo v_j^{-1} tal que $v_j v_j^{-1} = 1$. Así, $1 = k'$ y el escalar identidad es único.

Por lo anterior podemos concluir que $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial real.