1. Sumas y sus propiedades

El símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ se usa para denotar la suma $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Por ejemplo,

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Al símbolo $\sum_{i=1}^{n} a_i$ a veces se le llama **sumatorio** o sumatoria (en la real academia de la lengua no existe la palabra sumatoria). Algunos matemáticos muy rigurosos no aceptan ninguno de los dos términos, ya que el símbolo se conoce formalmente como **suma** y la letra griega sigma $\sum$ es el **operador sumatorio**.

Definición 1 (suma)**.** Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leqslant n$. Entonces

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = f(m) + f(m+1) + \ldots + f(n-1) + f(n),$$

donde $f(i)$ es alguna relación que depende de la variable i.

La variable i de la suma es muda en el sentido de que el valor de la suma no depende de i, es decir, notemos que

$$\sum_{i=m}^{n} f(i) = \sum_{k=m}^{n} f(k) = \sum_{j=m}^{n} f(j).$$

No importa qué símbolo se utilice como índice. En la expresión $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ decimos que m es el límite inferior y n es el límite superior de la suma.

Si $m > n$ convenimos que

$$\sum_{i=m}^{n} a_i = 0,$$

por ejemplo:

$$\sum_{i=4}^{3} a_i = 0.$$

En estos casos se dice que la suma es una **suma vacía**.

Ejemplo 2 (ejemplos de sumas)**.** Veamos algunos ejemplos:

a) $\sum_{i=1}^{4} i = 1 + 2 + 3 + 4 = 10.$

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{3} \frac{2^k}{3} = \frac{2^0}{3} + \frac{2^1}{3} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{15}{3} = 5.$

c) $\displaystyle\sum_{j=-2}^{1} \frac{j^2}{(j+2)!} = \frac{(-2)^2}{0!} + \frac{(-1)^2}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \frac{1^2}{3!} = \frac{4}{1} + \frac{1}{1} + \frac{0}{2} + \frac{1}{6} = \frac{31}{6}.$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} 9 = 9 + 9 + 9 + 9 = 36.$

En ocasiones es conveniente **partir una suma**. Si $m \in \{1, \ldots, n\}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i.$$

Por ejemplo:

$$\sum_{k=2}^{7} a_k = \sum_{k=2}^{4} a_k + \sum_{k=5}^{7} a_k.$$

Veamos algunas propiedades importantes de la suma.

Proposición 3 (propiedad aditiva de la suma)**.** *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leqslant n$ y a, b números reales. Entonces*

$$\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.$$

Demostración:

Desarrollamos la suma y aplicamos las propiedades de conmutatividad y asociatividad de la suma de números reales para obtener:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{n} (a_i + b_i) &= (a_m + b_m) + (a_{m+1} + b_{m+1}) + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1}) + (a_n + b_n) \\
&= (a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n) + (b_m + b_{m+1} + \ldots + b_{n-1} + b_n) \\
&= \sum_{i=m}^{n} a_i + \sum_{i=m}^{n} b_i.
\end{aligned}$$

□

Proposición 4 (propiedad homogénea de la suma)**.** *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leqslant n$ y a, c números reales. Entonces*

$$\sum_{i=m}^{n} (ca_i) = c \sum_{i=m}^{n} a_i.$$

Demostración:

Expandimos la suma y aplicamos distributividad de las operaciones en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=m}^{n}(ca_i) &= (ca_m) + (ca_{m+1}) + \ldots + (ca_{n-1}) + (ca_n)\\ &= c(a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n)\\ &= c\sum_{i=m}^{n} a_i.\end{aligned}$$

$\square$

Doble suma

En ocasiones requerimos usar más de una suma de términos, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{2} a_{i,j} &= \sum_{j=1}^{2} a_{1,j} + \sum_{j=1}^{2} a_{2,j} + \sum_{j=1}^{2} a_{3,j} + \sum_{j=1}^{2} a_{4,j}\\ &= (a_{1,1} + a_{1,2}) + (a_{2,1} + a_{2,2}) + (a_{3,1} + a_{3,2}) + (a_{4,1} + a_{4,2}).\end{aligned}$$

Si invertimos el orden de estas sumas, tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{4} a_{i,j} &= \sum_{i=1}^{4} a_{i,1} + \sum_{i=1}^{4} a_{i,2}\\ &= (a_{1,1} + a_{2,1} + a_{3,1} + a_{4,1}) + (a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2} + a_{4,2}).\end{aligned}$$

Es decir, se pueden intercambiar las sumas interna y externa como lo establece el siguiente enunciado.

Proposición 5 (intercambio de sumas finitas)**.** *Sean $m, p, q \in \mathbb{Z}$ con $m \leqslant p$ y $m \leqslant q$ y sea a un número real. Entonces*

$$\sum_{i=m}^{p}\sum_{j=m}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{q}\sum_{i=m}^{p} a_{i,j}.$$

Demostración:

Desarrollamos la suma externa, luego la interna y reagrupamos términos:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{p}\sum_{j=m}^{q} a_{i,j} &= \left(\sum_{j=m}^{q} a_{m,j}\right) + \left(\sum_{j=m}^{q} a_{m+1,j}\right) + \ldots + \left(\sum_{j=m}^{q} a_{p-1,j}\right) + \left(\sum_{j=m}^{q} a_{p,j}\right) \\
&= (a_{m,m} + a_{m,m+1} + \ldots + a_{m,q-1} + a_{m,q}) \\
&\quad + (a_{m+1,m} + a_{m+1,m+1} + \ldots + a_{m+1,q-1} + a_{m+1,q}) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (a_{p-1,m} + a_{p-1,m+1} + \ldots + a_{p-1,q-1} + a_{p-1,q}) \\
&\quad + (a_{p,m} + a_{p,m+1} + \ldots + a_{p,q-1} + a_{p,q}) \\
&= (a_{m,m} + a_{m+1,m} + \ldots + a_{p-1,m} + a_{p,m}) \\
&\quad + (a_{m,m+1} + a_{m+1,m+1} + \ldots + a_{p-1,m+1} + a_{p,m+1}) \\
&\quad \vdots \\
&+ (a_{m,q-1} + a_{m+1,q-1} + \ldots + a_{p-1,q-1} + a_{p,q-1}) \\
&+ (a_{m,q} + a_{m+1,q} + \ldots + a_{p-1,q} + a_{p,q}) \\
&= \left(\sum_{i=m}^{p} a_{i,m}\right) + \left(\sum_{i=m}^{p} a_{i,m+1}\right) + \ldots + \left(\sum_{i=m}^{p} a_{i,q-1}\right) + \left(\sum_{i=m}^{p} a_{i,q}\right) \\
&= \sum_{j=m}^{q}\sum_{i=m}^{p} a_{i,j}.
\end{aligned}
$$

□