1. Eigenvalores y eigenvectores

Instrucciones: Resuelva los ejercicios indicando con detalle la resolución de los mismos y argumentando sus respuestas.

1. Resuelva los problemas y haga las demostraciones que hayan quedado como ejercicios en clase.

2. Calcule los valores propios, espacios característicos, multiplicidades algebraicas y geométricas de cada matriz. Además mencione si la matriz es diagonalizable o no y por qué (por ejemplo, si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se esperan dos vectores propios l.i., hay que indidcar si se sumple esta condición o no).

$$a)\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad b)\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad c)\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad d)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$e)\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad f)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad g)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad h)\begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & -5 & -2 \end{bmatrix},$$

$$i)\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad j)\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k)\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}, a \neq 0.$$

3. Muestre que las matrices anterirores satisfacen el teorema de Cayley-Hamilton.

4. Emplee el teorema de Cayley-Hamilton para hallar la inversa de aquellas matrices del ejercicio 2 que sean invertibles.

5. Emplee el teorema de Cayley-Hamilton para calcular la inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Si los valores propios de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 1$, ¿cuáles son los valores posibles para a y para d?

7. Muestre que $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ tiene valores propios complejos y calcule sus vectores propios correspondientes.

8. Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ simétrica con valores propios $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$. Sea $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ un vector propio asociado a λ_1. Encuentre un vector propio v_2 correspondiente a λ_2 y los coeficientes de A.

9. Sean $a, b \in \mathbb{C}$. Encuentre los valores propios y vectores propios de la matriz
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

10. Sea T el operador lineal sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ dado por
$$p(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (-3a_1 + 5a_2) + (-4a_0 + 4a_1 - 10a_2)x + 4a_2x^2.$$
Determine los valores propios y vectores propios de T (sugerencia: use base canónica).

11. Sea T el operador lineal sobre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dado por
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a - c + d & b + d \\ -2a + 2c - 2d & 2b + 2d \end{bmatrix}.$$
Determine los valores propios y vectores propios de T (sugerencia: use base canónica).

12. Determine en cada caso si la matriz dada A es diagonalizable. De ser así, encuentre una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$, donde D es una matriz diagonal. En caso de no ser diagonalizable la matriz A, explique por qué no lo es.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix},$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & -15 & -6 \\ -1 & -2 & -2 \\ 3 & 15 & 9 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

13. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^4$ representado en la base canónica por la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$

¿Qué condiciones deben satisfacer a, b y c para que T sea diagonalizable?

14. Para los siguientes operadores lineales, encuentre una base $\mathcal{B}$ del dominio de T tal que la matriz de T con respecto a $\mathcal{B}$ sea diagonal:

    a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x + y \end{pmatrix}$.

    b) $T : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ tal que $T(a + bx) = a + (a + 2b)x$.

15. Para los siguientes operadores lineales, calcule la nulidad y el rango de T. Inmediatamente después, diagonalice los operadores y calcule nuevamente la nulidad y el rango de la matriz diagonal correspondiente:

    a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x + 2y - 3z \\ 2x + y - 6z \\ -x - 2y \end{pmatrix}$.

    b) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = (2a_0 + a_2) + (3a_1 + 4a_2)t + a_2 t^2$.

16. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ dado por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 + x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ -x_1 - x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

    a) Calcule el espectro de T y encuentre sus espacios característicos.

    b) Determine si T es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentre una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de T asociada a $\mathcal{B}$ sea diagonal.

17. Sea T el operador lineal sobre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(X) = MX$, donde $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

    a) Calcule el espectro de T y encuentre sus espacios característicos.

    b) Determine si T es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentre una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz de T asociada a $\mathcal{B}$ sea diagonal.

18. Sea T el operador lineal sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $T(p(x)) = p'(x) + 2p(x)$.

a) Calcule el espectro de T y encuentre sus espacios característicos.

b) Determine si T es diagonalizable. En caso afirmativo, encuentre una base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que la matriz de T asociada a $\mathcal{B}$ sea diagonal.

19. Sean A, B, C matrices tales que A es semejante a B y B es semejante a C. Demuestre que A es semejante a C.

20. Resuelva los problemas y haga las demostraciones que hayan quedado como ejercicios en clase.

21. Sea A semejante a B. Demuestre que A^n es semajante a B^n para todo número natural n.

22. Calcule la potencia indicada de cada matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 18 \\ -6 & -11 \end{bmatrix}, A^6; \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ -3 & -4 & 9 \\ -2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, A^8.$$

23. Demuestre que dos matrices semejantes tienen los mismos valores propios.

24. ¿Puede una matriz ser semejante a dos matrices diagonales distintas? Explique su respuesta.

25. ¿El vector cero puede ser un vector propio? Explique su respuesta.

26. Calcule los valores propios y vectores propios de una matriz 3×3 con todas sus entradas 0.