1. Coordenadas y cambio de base

Instrucciones: Resuelva los ejercicios indicando con detalle la resolución de los mismos y argumentando sus respuestas.

1. Resuelva los problemas y haga las demostraciones que hayan quedado como ejercicios en clase.

2. Considere las bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ y $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$, y sea $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Calcule:

   a) $v_{\mathcal{B}_1}$,
   b) $v_{\mathcal{B}_2}$,
   c) la matriz de transición de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$,
   d) la matriz de transición de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.
   e) Compruebe sus resultados de a) y b) empleando las matrices de c) y d).

3. Sean $\mathcal{B}_1 = (2, 1-x, 1+x^2)$ y $\mathcal{B}_2 = (-3, 1+x^2, x-x^2)$ bases ordenadas de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Calcule los mismos incisos que en el ejercicio anterior si $v = 1 + 2x + 3x^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

4. Sean $\mathcal{E}$ la base canónica de matrices 2×2 con entradas reales y $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right)$ otra base del mismo espacio. Calcule los mismos incisos que en el ejercicio anterior si $v = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

5. En $\mathbb{R}^2$ suponga que $x_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, donde $\mathcal{B}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$. Calcule $x_{\mathcal{B}_2}$, donde $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

6. Resuelva los ejercicios 24, 25 y 26 de la lista de ejercicios 1.

2. Ejercicios de Transofrmaciones Lineales

Instrucciones: Resuelva los ejercicios indicando con detalle la resolución de los mismos y argumentando sus respuestas.

1. Resuelva los problemas y haga las demostraciones que hayan quedado como ejercicios en clase.

2. Determine si las siguientes funciones son transformaciones lineales o no lo son.

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y) = (x + y, 0)$.

   b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ xy \end{pmatrix}$.

   c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + 1 \end{pmatrix}$.

   d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   e) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} -a_0 \\ a_1 + a_2 \end{pmatrix}$.

   f) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dada por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 \\ a_2 & 1 \end{pmatrix}$.

   g) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b \\ c - d \end{pmatrix}$.

   h) $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dada por $D(p) = p'$.

   i) $I : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $I(p) = \int_a^b p$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

   j) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ dada por $T\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a + bi$.

   k) $T : \mathbb{C}_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(a + bi) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

3. Sea $T : V \to W$ lineal. Pruebe que el kernel de T es un subespacio de V.

4. Sea $T : V \to W$ lineal. Pruebe que la imagen de T es un subespacio de W.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ con $\theta \in \mathbb{R}$. Pruebe que A es un operador lineal sobre $\mathbb{R}^2$ y calcule las imágenes de los vértices del cuadrado $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$. Interprete geométricamente este operador, llamado operador o matriz de rotación en el plano.

6. Calcule el kernel, la imagen, una base para el kernel, la nulidad, una base para la imagen y el rango de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 \\ x_1 + 4x_2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

   d) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$.

   e) $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dada por $T(A) = A^t$ (A^t representa la transpuesta de A).

   f) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}$.

   g) $D : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ dada por $D(p) = p'$.

7. Calcule la regla de la transformación dadas las condiciones siguientes:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, inducida por la matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, si

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

8. Determine si las transformaciones de los ejercicios 6 y 7 son isomorfismos o son invertibles.

9. Sea $H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 - x_3 \right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y $H_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a t^3 \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p'(0) = 0\}$ un subespacio de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Emplee el teorema de la dimensión para determinar si $H_1 \cong H_2$. En caso positivo, proporcione un isomorfismo entre estos subespacios y pruebe su afirmación.

10. Demuestre que $T \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ es un isomorfismo entre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ y $\mathbb{K}^4$.

    Este isomorfismo se llama vectorización canónica de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a $\mathbb{K}^n$ con $n = 2$. Esto consiste en *desdoblar* una matriz para pornerla como un vector. Se hace por filas, por ejemplo, si $n = 3$:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{1,2} \\ a_{1,3} \\ a_{2,1} \\ a_{2,2} \\ a_{2,3} \\ a_{3,1} \\ a_{3,2} \\ a_{3,3} \end{bmatrix}.$$

11. Sea T el operador lineal sobre $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dado por $T(X) = BX$, donde

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

    a) Determine si T es un isomorfismo sobre el espacio $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
    b) Calcule la matriz de T respecto de la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. **Use la vectorización canónica del ejercicio anterior.**
    c) Calcule la matriz de T respecto de la base $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$. **Use la vectorización canónica del ejercicio anterior.**

12. Muestre que el espacio vectorial $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{K}^{mn}$.

13. Muestre que el espacio vectorial $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{K}^{n+1}$.

14. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ inducida por la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcule la regla del operador.
   b) Determine si T es invertible.
   c) En caso de ser T invertible, calcule la regla de la inversa, T^{-1}. **Sugerencia:** calcule la inversa de A para encontrar la regla.

15. Sea $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ definida mediante la regla

$$T(p(t)) = (-3t^2 + 2t - 2)p''(t) + (-t + 1)p'(t) + 2p(t).$$

   a) Pruebe que T es un operador lineal.
   b) Calcule la matriz $T_{\mathcal{E}}$ asociada a T respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (1, t, t^2)$. Para comprobación calcule $T(q)$ aplicando la regla de T, escriba al vector $T(q)_{\mathcal{E}}$ y calcule el producto $T_{\mathcal{E}} q_{\mathcal{E}}$, con $q(t) = t^2 - t + 5$.

16. Sea $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ un operador lineal cuya matriz respecto a la base canónica $\mathcal{E} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2}, E_{2,2})$ es

$$T_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

   a) Calcule la regla de T.
   b) Calcule una base para el kernel, una base para la imagen, la nulidad y el rango de T.
   c) Determine si T es invertible. En caso afirmativo, calcule la regla de T^{-1} así como $T_{\mathcal{E}}^{-1}$, la matriz de T^{-1} respecto de la base canónica $\mathcal{E}$.

17. Considere tres transformaciones lineales S, T, U dadas por sus matrices asociadas a ciertas bases:

$$S_{\mathcal{A},\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad T_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad U_{\mathcal{F},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Llene la siguiente tabla:

	S	T	U
dim(dominio)	?	?	?
dim(contradominio)	?	?	?
rango	?	?	?
nulidad	?	?	?
¿es inyectiva?	?	?	?
¿es suprayectiva?	?	?	?
¿es un isomorfismo?	?	?	?
¿es invertible?	?	?	?

b) Calcule la regla de cada transformación S, T, U.

c) En el caso de aquellas transformaciones que sean invertibles, calcule la regla de la transformación lineal inversa correspondiente.