

Universidad Distrital
Francisco José de Caldas–Facultad Tecnológica
Curso de Nivelación en Matemáticas

Grupo de Ciencias Básicas–SciBas

Elaboración Documento

Jorge Adelmo Hernández Pardo

Juan N. Zambrano Caviedes

Rodrigo Rincón Zarta

Pablo Andrés Acosta Solarte

Ivan Dario Zuluaga

Carmen Leonor Pulido Segura

Harold Vacca

16 de enero de 2014

Índice general

Introducción	v
1. Conjuntos Numéricos	1
1.1. Números Naturales	1
1.1.1. Divisibilidad	1
1.1.2. Criterios de Divisibilidad	2
1.2. Números enteros	5
1.3. Números Racionales.	6
1.4. Números Reales	11
1.5. Ejercicios	11
2. Radicales y Logaritmos	15
2.1. Potenciación y Radicación	15
2.2. Logaritmos:	19
2.3. Ejercicios	21
3. Factorización	25
3.1. Expresiones Algebraicas	25
3.1.1. Multiplicación de monomios	26
3.1.2. Multiplicación de un monomio por un binomio	26
3.2. Factorización	27
3.3. Casos de Factorización	27
3.3.1. Factor común en los términos de un polinomio	27
3.3.2. Factor común por agrupación de términos	28
3.3.3. Trinomio cuadrado perfecto	29
3.3.4. Diferencia de cuadrados	30
3.3.5. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$	30
3.3.6. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$	31
3.4. Ejercicios	32
4. Fracciones algebraicas	35
4.1. Fracciones algebraicas	35
4.2. Suma de fracciones algebraicas	36
4.3. Ejercicios	36

5. Ecuaciones	39
5.1. Algunos tipos de ecuaciones	39
5.1.1. Ecuación lineal	39
5.1.2. Ecuación lineal con una incógnita	39
5.1.3. Ecuación Cuadrática	39
5.1.4. ¿Qué es una solución de una ecuación?	40
5.1.5. ¿Cómo resolver una ecuación con una incógnita?	40
5.1.6. Sistemas de ecuaciones 2×2	42
5.1.7. Solución de un sistema de ecuaciones 2×2	42
5.2. Ejercicios	44
5.3. Ecuaciones de Orden Superior	46
6. Solución de problemas	47
6.1. Introducción	47
6.2. Estrategia para resolver problemas	49
6.3. Ejercicios	52
7. Matemática Recreativa	55

Introducción

De acuerdo al trabajo de los docentes de Ciencias Básicas de la Facultad Tecnológica de la Universidad Distrital, se ha percibido que un gran porcentaje de estudiantes que ingresan a la Universidad, tanto al ciclo de tecnología como al ciclo de ingeniería, presentan deficiencias en las áreas de Matemáticas y Física entre otras. Estas deficiencias impiden el desarrollo normal del contenido programático de los cursos que hacen parte del plan curricular, debido a que los estudiantes no pueden asimilar adecuadamente los temas. En el mejor de los casos, el docente dedica la parte inicial del curso a nivelar a sus estudiantes y como consecuencia no se cubre la totalidad del contenido; esto implica que en los siguientes cursos se presente el mismo fenómeno.

Por otra parte, los docentes de Ciencias Básicas han observado un alto porcentaje de mortalidad académica en los cursos de física y matemáticas que ofrece la Facultad Tecnológica, lo que se constituye posiblemente en uno de los factores de deserción.

Esta propuesta hace parte del proyecto que busca establecer el plan de seguimiento para la retención y disminución del fracaso académico, del programa 1: “Disminución de deserción y repitencia, retención efectiva de los estudiantes de la universidad ”, de la estrategia 3: consolidación del bienestar de la universidad, contemplada en la política 2: Gestión académica para el desarrollo social y cultural, establecidas en el Plan Estratégico de Desarrollo 2007-2016 de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Capítulo 1

Conjuntos Numéricos

1.1. Números Naturales

El conjunto de números naturales, denotado con \mathbb{N} , es aquel que se usa para contar. Se representa como

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Algunas propiedades de los números naturales son

1. Todo número natural n tiene un siguiente $n + 1$
2. El número natural cero 0 no es siguiente de ningún otro.

Entre los subconjuntos del conjunto de los números naturales, se destacan dos:

1. El de los números pares, P , que son aquellos números naturales que tienen la forma $2n$, es decir aquellos que tienen división exacta entre 2,

$$P = \{2n : n \in \mathbb{N}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}.$$

2. El de los números impares, I , que corresponden a aquellos que tienen la forma $2n + 1$, o $2n - 1$, es decir, aquellos que al dividirlos entre dos siempre tendrán residuo igual a 1. Tenga en cuenta que los números impares no son aquellos que únicamente se pueden dividir entre 3, por ejemplo 5 es impar y sin embargo no se puede dividir entre 3.

$$I = \{2n + 1 : n \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

$$I = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N} - \{0\}\} = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$$

1.1.1. Divisibilidad

Si a y b son dos números naturales y a no es cero ($a \neq 0$), se dice que a *divide* a b o que b es *divisible* por a , si existe un número natural c de tal forma que $b = a \times c$, observe que c también divide a b . Si a divide a b se dice también que b es un *múltiplo* de a o que a es un *factor* de b . Tenga en cuenta que 0 es un múltiplo de cualquier número. Si a divide a b lo denotamos con $a \mid b$.

Ejemplo 1.1. 2 divide a 6, $(2 \mid 6)$, puesto que $6 = 2 \times 3$. En este ejemplo, 2 es un factor de 6, al igual que 3 es un factor de 6, y también, 6 es un múltiplo de 2 y de 3.

Ejemplo 1.2. 5 divide a 30, $(5 \mid 30)$, puesto que $30 = 5 \times 6$. Aquí, 5 y 6 son factores de 30 y también, 30 es un múltiplo de 5 y de 6.

1.1.2. Criterios de Divisibilidad

Las siguientes son algunas reglas que permiten saber cuando un número es divisible entre otro:

1. **Divisibilidad por 2:** un número es divisible por 2 si es par.
2. **Divisibilidad por 3:** un número es divisible por 3 si la suma de sus cifras (o dígitos) es un múltiplo de 3, por ejemplo, 135 es divisible por 3 porque al sumas sus cifras $1 + 3 + 5$ obtenemos 9, el cual es divisible por 3. Si la suma es mayor que 9 se repite la regla.
3. **Divisibilidad por 4:** un número es divisible por 4 si el número formado por sus dos últimas cifras es múltiplo de 4, es decir, su mitad es par. Por ejemplo, 35796 es divisible entre 4 pues 96 (las últimas dos cifras) es múltiplo de 4 (su mitad es 48 que es par).
4. **Divisibilidad por 5:** un número es divisible por 5 si termina en 0 o en 5, por ejemplo, 1275 o 2453670.
5. **Divisibilidad por 6:** un número es divisible por 6 si es par y además es divisible por 3, por ejemplo, 36 es par y la suma de sus dígitos es múltiplo de tres, es decir, 36 se puede dividir por tres, por tanto, 36 es divisible por 6. De manera similar se puede verificar que 192 es múltiplo de 6.
6. **Divisibilidad por 7:** para verificar si un número es divisible por 7 seguimos los siguientes pasos:
 - i) Elimine la última cifra del número.
 - ii) Reste el doble de la cifra eliminada al resultado del paso anterior.
 - iii) Si el número resultante es un múltiplo de 7 (incluido 0), entonces el número inicial también lo es.

Por ejemplo, si tomamos 1071, al hacer el proceso tenemos:

- i) Eliminando la última cifra del número tenemos 107.
- ii) Restando el doble de la cifra eliminada al número del paso anterior se tiene $107 - (1 \times 2) = 105$. Como hasta aquí no es claro que 105 sea múltiplo de 7, repetimos el proceso: eliminando la última se tiene 10, luego, $10 - (5 \times 2) = 0$.
- iii) En total, el número resultante es 0, pero recuerde que 0 es múltiplo de cualquier número, entonces 1071 es un múltiplo de 7.

Definición 1.1. Números primos

Un número natural p mayor que 1 se llama número primo si sus únicos divisores son 1 y el mismo número p . Los primeros 20 números primos son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, y 71

Ejemplo 1.3. Diga cuáles de los números 72, 73, 74, 75, 76, y 77 son primos.

Dado que 72, 74 y 76 son pares, es decir, se pueden dividir por 2, entonces no pueden ser primos; 75 es múltiplo de tres; 77 es un múltiplo de 7 (recuerde las reglas de divisibilidad) y 73 es primo.

Teorema 1.1. Teorema fundamental de la aritmética

Todo número natural n es primo o puede descomponerse de manera única como producto de factores primos.

Ejemplo 1.4. Descomponer en factores primos el número 425: Al hacer divisiones sucesivas tenemos:

$$\begin{array}{r|l} 425 & 5 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

Entonces la descomposición es $425 = 5 \times 5 \times 17 = 5^2 \times 17$.

Definición 1.2. Máximo Común Divisor

El máximo común Divisor de los números naturales a y b que se escribe $M.C.D(a, b)$ es, como su nombre lo indica, el divisor común de a y b más grande, es decir, si llamamos $\text{div}(a)$ al conjunto de los divisores de a y $\text{div}(b)$ al de los divisores de b entonces

$$M.C.D(a, b) = \max(\text{div}(a) \cap \text{div}(b))$$

Ejemplo 1.5. Calcular $M.C.D(20, 28)$

$$\begin{aligned} \text{div}(20) &= \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}, \text{div}(28) = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \text{ y} \\ \text{div}(20) \cap \text{div}(28) &= \{1, 2, 4\}, \text{por tanto,} \\ \max \{1, 2, 4\} &= 4 \end{aligned}$$

Es decir, $M.C.D(20, 28) = 4$.

Otra forma de calcular el $M.C.D$ de dos o más números es descomponer en factores primos cada uno de los números dados y a continuación seleccionar los factores comunes (repetidos) con su menor exponente.

Ejemplo 1.6. Calcular el $M.C.D(16, 24, 56)$. Al descomponer cada número en factores primos tenemos:

$$\begin{aligned} 16 &= 2^4 \\ 24 &= 2^3 \cdot 3 \\ 56 &= 2^3 \cdot 7 \end{aligned}$$

el factor común a todos los números es 2 y su menor exponente es 3, luego el $MCD(16, 24, 56) = 2^3 = 8$.

Una forma adicional de calcular el $M.C.D$ de dos números, es por medio de divisiones sucesivas, es decir, usando el algoritmo de Euclides o algoritmo de la división. A continuación se describe:

Si n y m son números naturales con $m < n$ (m menor que n) donde n será el dividendo y m será el divisor entonces existen números naturales k (cociente) y r (residuo) tales que:

$$n = km + r, \quad 0 \leq r < m$$

Para aplicar el algoritmo y encontrar k y r se hace lo siguiente:

- Se divide el número mayor entre el número menor para obtener un cociente k y un residuo r
- Si el residuo r es igual a cero entonces el $M.C.D$ de los dos números es el menor de los dos
- Si el residuo r no es cero se divide el divisor entre el residuo para obtener un cociente k_1 y un residuo r_1
- Si el residuo r_1 es igual a cero el $M.C.D$ de los dos números es el cociente de la última división, es decir, k .
- Si el residuo r_1 no es cero se divide el cociente k_1 entre el residuo r_1 para obtener un cociente k_2 y un residuo r_2
- Si el residuo r_2 es cero entonces el $M.C.D$ es el cociente k_1
- Si el residuo r_2 no es cero se continua este proceso hasta obtener un residuo r_n igual a cero esto siempre será posible y en este caso el $M.C.D$ es el penúltimo residuo es decir r_{n-1}

Ejemplo 1.7. Use divisiones sucesivas para calcular $M.C.D(56, 35)$

Empezamos haciendo la división de 56 y 35, donde, $56 \div 35$ tiene cociente 1 y residuo 11, luego,

$$56 = 35 \times 1 + 11$$

Como el residuo es $\neq 0$ entonces repetimos el proceso con 35 y 11, para tener que

$$35 = 11 \times 3 + 2$$

Ahora, repetimos el proceso con 11 y 2 y se tiene,

$$11 = 2 \times 5 + 1$$

y finalmente,

$$2 = 1 \times 2 + 0$$

para concluir que $M.C.D(56, 35) = 1$

Definición 1.3. Mínimo Común Múltiplo. El mínimo común Múltiplo mcm de dos o más números es, como su nombre lo indica, el múltiplo común más pequeño y diferente de cero. Si denotamos con $\text{mul}(a)$ al conjunto de múltiplos del número a y con $\text{mul}(b)$ al conjunto de múltiplos del número b , entonces $\text{mcm}(a, b) = \text{mín}(\text{mul}(a) \cap \text{mul}(b))$.

Ejemplo 1.8. El $\text{mcm}(12, 16) = \text{mín}(\text{mul}(12) \cap \text{mul}(16))$

Los múltiplos de 12 son $12 \times 1 = 12$, $12 \times 2 = 24$, $12 \times 3 = 36, \dots$ de manera similar con 16 y tenemos:

$$\text{mul}(12) = \{12, 24, 36, 48, 60, 72, \dots\}$$

$$\text{mul}(16) = \{16, 32, 48, 64, 80, 96, \dots\}$$

luego,

$$\text{mul}(12) \cap \text{mul}(16) = \{48, 96, \dots\}$$

y el mínimo de la intersección es

$$\text{mín} \{48, 96, \dots\} = 48$$

Por tanto, el $\text{mcm}(12, 16)$ es 48.

Otra forma de calcular el mcm de dos o más números es descomponiendo en factores primos cada uno de los números dados y luego seleccionando los factores comunes (repetidos) y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplo 1.9. Calcular el $\text{mcm}(16, 24, 56)$.

La descomposición de los números dados es la siguiente: $16 = 2^4$, $24 = 2^3 \cdot 3$ y $56 = 2^3 \cdot 7$ luego $\text{mcm}(16, 24, 56) = 2^4 \times 3 \times 7 = 336$.

Existe una relación muy estrecha entre el mcm y el M.C.D y es la siguiente:

$$\text{mcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{M.C.D}(a, b)}$$

Por ejemplo, como sabemos de un ejemplo anterior, $\text{mcm}(12, 16) = 48$ y podemos llegar a que $\text{M.C.D}(12, 16) = 4$. Con esa información podemos verificar la fórmula anterior así:

$$\text{mcm}(12, 16) = \frac{12 \times 16}{\text{M.C.D}(12, 16)} = \frac{192}{4} = 48 .$$

1.2. Números enteros

La ecuación $n + 8 = 6$ no tiene solución en los números naturales, es decir, no existe un número natural n que sumado con 8 nos de como resultado el número 6, para solucionar ecuaciones de este tipo debemos extender el conjunto de números naturales.

Los números enteros, \mathbb{Z} , están definidos como los números naturales junto con sus opuestos, es decir

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

El opuesto de un número entero n es el número entero $-n$, el opuesto del opuesto de un número entero es el número entero inicial es decir $-(-n) = n$.

Ejemplo 1.10. El opuesto de -2 es $-(-2) = 2$, el opuesto de 8 es -8 , el opuesto de -12 es 12 .

Los opuestos de los naturales suelen llamarse también negativos, por ejemplo -2 o -23 se llaman negativos.

Al igual que con los números naturales podemos realizar operaciones con los números enteros. Para ello debe tenerse en cuenta el signo de cada número para poder conocer el resultado. Por ejemplo, al hacer la suma $5 + (-7)$, que es equivalente a $5 - 7$, se entiende que a 5 se le está restando 7 , es decir, se resta algo mayor, luego el resultado debe ser negativo, es decir, $5 + (-7) = -2$. Si tuviese $-5 + 7$ entonces el resultado es positivo, pues 7 es más grande que 5 ; es decir, $-5 + 7 = 2$.

$$\begin{array}{llll} 42 + 12 = 54, & 23 + 32 = 55, & 12 + (-4) = 8, & 10 + (-15) = -5, \\ -20 + 10 = -10, & -2 + (-8) = -10, & -45 + 50 = 5, & -4 + (-34) = -38. \end{array}$$

Para multiplicar y dividir debe tenerse en cuenta la siguiente tabla de signos, conocida como ley de los signos:

\times/\div	+	-
+	+	-
-	-	+

La cual dice que si se multiplica o divide enteros con igual signo entonces el resultado es positivo, y si los números tienen signo contrario entonces el resultado es negativo, por ejemplo,

$$\begin{array}{llll} 4 \times 2 = 8, & 23 \times (-2) = -46, & -5 \times (-4) = 20, & -6 \times 5 = -30, \\ 10 \div 5 = 2, & 20 \div (-4) = -5, & -28 \div (-7) = 4, & -44 \div 4 = -11. \end{array}$$

1.3. Números Racionales.

Considere las siguientes situaciones:

- La ecuación $5q = -18$ no tiene solución en los números enteros, es decir, no existe un número entero q de tal forma que multiplicado por 5 de como resultado el número entero -18 .
- Tres de cada siete estudiantes nuevos de la Facultad Tecnológica no conocían sus instalaciones. Si para el semestre 2009–III entraron 700 nuevos estudiantes ¿Cuántos de ellos no conocían las instalaciones de la facultad?
- El 32 % de los profesores que trabajan en la facultad son profesores de planta. Si en la actualidad hay 128 profesores de planta ¿Cuántos profesores hay en la actualidad?
- En una granja agrícola 3 de cada 5 hectáreas están cultivadas en fresa; de la parte restante, dos de cada tres hectáreas están cultivadas en tomate de árbol. ¿Cuántas hectáreas están cultivadas en tomate de árbol si la granja tiene una extensión total de 20 hectáreas?

Cada una de estas situaciones nos obligan a considerar divisiones no exactas entre números enteros, por ejemplo, $-18 \div 5$, o también $3 \div 7$, por tanto, es necesario considerar un conjunto numérico mucho más amplio que el de los números enteros. El conjunto que nos permitirá modelar y solucionar estas situaciones es el conjunto de números racionales, que denotamos con \mathbb{Q} y podemos

definir como el conjunto de números de la forma $p \div q$ o también $\frac{p}{q}$ donde p y q son números enteros y q no es cero. De manera más compacta:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0 \right\} ;$$

por ejemplo, cada uno de los siguientes números es racional:

$$\frac{3}{4}, \frac{-2}{5}, \frac{3}{-7}, \frac{-3}{-5}, \frac{5}{1},$$

observemos que el cuarto número, $\frac{-3}{-5}$, es igual a $\frac{3}{5}$, pues como se dijo antes al dividir dos números negativos tenemos como resultado un número positivo. La última expresión, es decir, $\frac{5}{1}$ es igual a 5, pues todo número dividido entre 1 no se altera, es decir, es él mismo, luego, podemos afirmar que todo número entero es racional ya que cualquier número entero n se puede escribir como $\frac{n}{1}$, $\left(n = \frac{n}{1} \right)$.

Orden de racionales: los números racionales se pueden ordenar de mayor a menor, de la misma manera que los enteros o los naturales, pero en este caso ya no es de manera tan directa. Supongamos que queremos verificar cuál de los números $\frac{2}{3}$ y $\frac{7}{9}$ es mayor; para eso hacemos:

- multiplicamos el numerador del primero con el denominador del segundo $2 \cdot 9 = 18$ y el denominador del primero con el numerador del segundo $3 \cdot 7 = 21$.
- comparamos los resultados obtenidos: $18 < 21$
- en conclusión, como 18 es menor que 21, entonces $\frac{2}{3}$ es menor que $\frac{7}{9}$

$$\frac{2}{3} < \frac{7}{9} .$$

Operaciones con números racionales

Al igual que con los otros tipos de números, con los racionales tenemos operaciones. Veamos cómo podemos hacerlo.

Suma (y resta) de racionales: Para sumar dos números racionales hacemos:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d} .$$

La fórmula nos dice que para sumar dos racionales debemos multiplicar el numerador del primero por el denominador del segundo número, a ese resultado sumarle la multiplicación del denominador del primero por el numerador del segundo y por último dividirlo entre la multiplicación de los denominadores. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
a) \quad & \frac{2}{3} + \frac{-4}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot (-4)}{3 \cdot 5} = \frac{10 - 12}{15} = \frac{-2}{15}, \\
b) \quad & \frac{-5}{7} + \frac{-3}{2} = \frac{(-5) \cdot 2 + 7 \cdot (-3)}{7 \cdot 2} = \frac{-10 - 21}{14} = \frac{-31}{14}, \\
c) \quad & \frac{5}{6} - \frac{-1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{-(-1)}{2} = \frac{5}{6} + \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 1}{6 \cdot 2} \\
& \quad = \frac{10 + 6}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}, \\
d) \quad & \frac{7}{2} - \frac{3}{4} = \frac{28 - 6}{8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4}, \\
e) \quad & \frac{1}{3} + \frac{5}{9} = \frac{9 + 15}{27} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9},
\end{aligned}$$

Existen maneras adicionales de sumar racionales, pero todas convergen a la definición que hemos dado, por tanto no las presentaremos aquí. También existen casos particulares de sumas de racionales, por ejemplo, que los números tengan igual denominador, en ese caso, simplemente se suman los numeradores, eso puede verificarse es cierto usando la definición dada anteriormente; por ejemplo,

$$\frac{-10}{3} + \frac{6}{3} = \frac{-4}{3}$$

Multiplicación de racionales: para multiplicar dos números racionales, multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

por ejemplo,

$$\begin{aligned}
a) \quad & \frac{3}{2} \cdot \frac{-4}{5} = \frac{3 \cdot (-4)}{2 \cdot 5} = \frac{-12}{10} = \frac{-6}{5}, \\
b) \quad & \frac{-5}{7} \cdot \frac{-3}{2} = \frac{(-5) \cdot (-3)}{7 \cdot 2} = \frac{-15}{14}, \\
c) \quad & \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5 \cdot 1}{6 \cdot 2} = \frac{5}{12},
\end{aligned}$$

División de racionales: Para dividir dos números racionales hacemos:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Es decir, multiplicamos el numerador del primero con el denominador del segundo y dividimos por la multiplicación del denominador del primero con el numerador del segundo. También es común escribirlo de la siguiente manera y suele conocerse como el método de las *orejas* y lo que hacemos es multiplicar extremos con extremos y medios con medios, para obtener los mismos resultados que con la manera anterior:

$$\text{Medios} \left(\begin{array}{c} \overline{a} \\ \overline{b} \\ \overline{c} \\ \overline{d} \end{array} \right) \text{Extremos} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Por ejemplo,

$$\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{5}} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 4} = \frac{15}{28}$$

Algunas propiedades de los números racionales

1. Entre dos números racionales A y B , hay al menos un número racional (basta considerar el promedio: $\frac{A+B}{2}$).
2. Entre dos números racionales hay infinitos números racionales.
3. Dado cualquier número racional, no existe el número racional que esté a continuación

Números decimales

Los números decimales son aquellos que se obtienen de calcular la división entre dos números enteros, o también son los racionales escritos de una manera diferente. Por ejemplo,

$$\frac{2}{10} = 0.2, \quad \frac{325}{2} = 162.5, \quad \frac{-753}{9} = -83.666 \dots$$

En los ejemplos anteriores, los dos primeros números tienen expresión decimal **finita** y el tercero tiene expresión decimal **infinita y periódica**, con periodo 6, es decir, el número después del punto que se repite infinitas veces es 6.

La multiplicación de un número decimal por una potencia de 10 tiene como efecto correr el punto a la derecha tantos lugares como ceros tenga la potencia de 10; y el dividir corre el punto a la izquierda:

- $-2.234 \times 10^2 = -223.4$
- $23.23444 \dots \times 1000 = 23234.444 \dots$
- $0.03 \times 10^4 = 300$ los lugares faltantes se completan con ceros.
- $45.32 \div 100 = 0.4532$
- $56.999 \dots \div 10^4 = 0.0056999 \dots$

Proposición 1.2. *Todo número racional tiene escritura decimal finita o infinita periódica.*

Para encontrar la escritura decimal de un número racional basta con hacer la división, es decir, dividir el numerador entre el denominador, de allí los anteriores ejemplos.

Escritura racional de un número decimal

En esta dirección necesitamos realizar algunos cálculos adicionales para llegar a un resultado. Para poder hacerlo necesitamos que el número decimal tenga su expresión decimal finita o infinita periódica, es decir, sea racional y procedemos de la siguiente manera:

- Si el número tiene expresión decimal finita, por ejemplo, 2.034 entonces multiplicamos y dividimos el número por una potencia de 10 con tantos ceros como cifras decimales (después del punto) tenga y simplificamos, en nuestro ejemplo, tiene 3 cifras luego hacemos:

$$2.034 = \frac{2.034 \times 1000}{1000} = \frac{2034}{1000} = \frac{1017}{500}$$

- Si el periodo del número decimal inicia inmediatamente después del punto, entonces se multiplica el número por una potencia de diez cuyo exponente sea igual al número de dígitos que tenga el periodo del número original, por ejemplo, si el número, que lo hemos llamado x , es $x = 0.125125125125 \dots$, con periodo 125 es decir, de tres cifras entonces multiplicamos a x por 10^3 , luego se hace la resta, y se despeja la variable y tenemos :

$$\begin{aligned} x &= 0.125125125 \dots \\ 10^3 x &= 10^3 \times 0.125125 \dots = 125.125125 \dots \\ 10^3 x - x &= 125.125125 - 0.125125 \dots = 125 \\ 999x &= 125, \text{ despejamos } x \\ x &= \frac{125}{999} \end{aligned}$$

en conclusión, $0.125125 \dots = \frac{125}{999}$.

- Si el periodo del número decimal no inicia inmediatamente después del punto, entonces primero se multiplica el número dado x por una potencia de 10 con exponente igual al número de dígitos que haya hasta iniciar el período. Luego x se multiplica por una potencia de 10 con exponente igual al número de dígitos que haya antes de empezar el periodo más el número de dígitos que tenga el periodo. Finalmente se hace la resta de los resultados y se despeja la variable: por ejemplo, tomemos el número $x = 0.32405405 \dots$

$$\begin{aligned} x &= 0.32405405 \dots \\ 10^2 x &= 10^2 \times 0.32405405 \dots = 32.405405 \dots \\ 10^5 x &= 32405.405 \dots \\ 10^5 x - 10^2 x &= 32405.405 \dots - 32.405405 \dots \\ 99900x &= 32373, \text{ despejamos } x \\ x &= \frac{32373}{99900} \end{aligned}$$

en conclusión, $0.32405405 \dots = \frac{32373}{99900} = \frac{1199}{3700}$.

1.4. Números Reales

La ecuación $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución en los números racionales, este inconveniente lo podemos sortear considerando el conjunto de los números reales, que denotamos con \mathbb{R} . Este conjunto está compuesto de los números racionales junto con los irracionales. Los números irracionales se identifican como aquellos que tienen expresión decimal no periódica. Ejemplos de números irracionales son todas las raíces cuadradas de números que no sean cuadrados perfectos es decir de números r de tal forma que $r \neq k^2$ para todo k entero, $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \dots$. También son números reales los números π, e, π^2 .

1.5. Ejercicios

Encuentre la solución de los siguientes ejercicios.

1. Descomponga en factores primos cada uno de los siguientes números:

34, 246, 215, 428, 625, 1248 y 2310

2. Calcule el *M.C.D* de cada lista de números naturales

a) 24, 56 y 30

c) 15, 17, 24 y 45

e) 24, 48, 72, 96 y 120

b) 12, 24 y 36

d) 23, 18, 35, 12 y 52

3. En cada caso encuentre, por divisiones sucesivas, el *M.C.D* de cada par de números.

a) 36 y 48

c) 56 y 72

e) 64 y 128

b) 24 y 36

d) 50 y 108

4. Encuentre el mcm de cada par de números del ejercicio anterior.

5. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. Donde n es cualquier número natural.

a) $n(n+1)(n+2)$ es divisible por 3

b) $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6

c) $n(n+1)(n+2)(n+3)$ es múltiplo de 4

d) Si n es divisible por 6 entonces n es divisible por 2.

e) Si m es divisible por 2 entonces, m es divisible por 4.

6. Usando vasijas de 4 litros y de 5 litros, explique cómo podría llenar una vasija de 32 litros, una de 52 litros y una de 74 litros.

7. En los siguientes ejercicios n es cualquier número natural.

a) Demuestre que 4 es un factor de $n^4 - n^2 + 4$

b) Demuestre que 2 es un factor de $n^2 + n + 6$

c) Demuestre que 6 es un factor de $7^n - 1$

8. Decida si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera

a) Si a^2 es par, entonces a es par

b) Si b^2 es impar, entonces b es impar

c) $n(n+1)$ es par

d) $n(n+1)(n+2)$ es par

9. Si $a = -2$, $b = 3$, $c = -5$ y $d = 4$. Calcular el valor numérico de cada expresión.

a) $3a - 2b + d$

e) $(a-d)(a+d)$

i) $(a-b)(d+c)$

b) $(a+b)(c-d)$

f) $a^2 - d^2$

j) $(a+b+c+d)^2$

c) $(a+b)^2$

g) $a^3 + c^3$

d) $a^2 + 2ab + b^2$

h) $(a+c)(a^2 - ac + c^2)$

k) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$.

10. Encuentre el valor de cada una de las siguientes operaciones

a) $\frac{-2}{3} + \frac{3}{4}$.

e) $\frac{4}{8} - \frac{1}{2}$.

i) $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$.

l) $\frac{\frac{9}{2}}{\frac{12}{8}}$.

b) $\frac{7}{5} - \frac{12}{6}$.

f) $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}$.

j) $\frac{3}{2} \div \frac{9}{5}$.

c) $\frac{-4}{3} + \frac{8}{3}$.

g) $\frac{-2}{9} \times \frac{3}{5}$.

m) $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{5}}$.

d) $\frac{12}{7} - \frac{13}{7}$.

h) $\frac{7}{4} \times \frac{10}{70}$.

k) $\frac{7}{4} \div \frac{8}{10}$.

n) $\left(\frac{1}{7} - \frac{3}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3} \div \frac{7}{4}\right) + \frac{-3}{2}$.

o) $\frac{10}{4} - \left(\frac{6}{9} \times \frac{3}{12}\right) \times \left(\frac{2}{3} - \frac{9}{2}\right)$

\tilde{n} $\frac{-10}{3} + \left(\frac{7}{9} \times \frac{3}{14}\right) \div \left(\frac{1}{4} - \frac{7}{8}\right)$

11. Encuentre tres números racionales que estén entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{5}{6}$.

12. Encuentre la forma decimal de cada uno de los siguientes números racionales y ordénelos de menor a mayor

$$\frac{3}{2}, \frac{7}{8}, \frac{13}{18}, \frac{-23}{56}, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{-20}{17}, \frac{52}{35}, \frac{-45}{12}, \frac{-7}{9}.$$

13. Encuentre la forma decimal finita o infinita periódica de cada número racional:

$$\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{-3}{4}, \frac{18}{13}, \frac{-12}{5}, \frac{4}{7}, \frac{-3}{2}, \frac{5}{12}, \frac{7}{8}, \frac{-12}{7}$$

14. Encuentre la forma racional de cada número decimal.

- a) $x = 0,121212\dots$ c) $x = 4,1234333\dots$ e) $x = 2,345123123\dots$
 b) $x = 0,245245\dots$ d) $x = 0,312121\dots$

15. Encuentre números racionales a, b y c tales que :

$$a = 1 - d^{-1}, \quad b = 5a - 3c, \text{ y } c = b^{-1} + d,$$

cuando $d = \frac{3}{4}$. Además calcule:

- a) $\frac{1}{a} + \frac{2}{b}$ c) $\frac{a+b}{b-c}$ e) $\frac{a-c}{b-d}$
 b) $(a-b)(a+b)$ d) $(a+b)^{-1}(c-d)$ f) $3a-2b$

16. Sean $a = \sqrt{2}$, $b = -2\sqrt{6}$. Hallar el valor numérico de cada una de las siguientes expresiones:
 a^2 , $2a^3$, b^2 , $-3b$, ab , $(a+b)^2$

17. Encuentre 5 números racionales entre $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{4}$.

18. Encuentre el número decimal equivalente a :

- a) $\frac{5}{7}$ b) $\frac{28}{59}$ c) $\frac{37}{39}$ d) $\frac{3}{4}$ e) $\frac{-7}{9}$

19. Encuentre la fracción equivalente a cada decimal

- a) 0,34 b) 0,3666... c) -0,152020... d) -0,312312...

20. Encuentre enteros a y b de tal forma que $(2 - \sqrt{5})^3 = a + b\sqrt{5}$.

21. Encuentre dos números naturales uno par y uno impar cuya suma sea 543 y cuya diferencia sea 5.

22. Encuentre dos números naturales impares cuya suma sea 1026 y cuya diferencia sea 8.

23. Encuentre dos números pares cuya suma sea 1026 y cuya diferencia sea 8.

24. Encuentre dos números impares cuya suma sea 215 y cuyo producto sea 3015.

25. Encuentre las dimensiones enteras (largo y ancho en números enteros) del rectángulo cuya área sea $144m^2$

- a) ¿Cuál es el rectángulo de menor perímetro?
 b) ¿Cuál es el rectángulo de mayor perímetro?

26. Encuentre el lado y la altura de un triángulo equilátero cuya área sea $64 m^2$ (el lado y la altura deben ser enteros positivos)

- a) ¿Cuál es el triángulo de menor perímetro?
- b) ¿Cuál es el triángulo de mayor perímetro?
27. ¿Cuál es la menor distancia que se puede medir exactamente con dos cuerdas: una que tiene 40 cm. de largo y la otra 50 cm.?
28. ¿Cuál es la mayor longitud entera que debe tener una cuerda para que se puedan medir longitudes de 320 cm y 280 cm.?
29. En un país donde no hay segunda reelección para presidente, el periodo presidencial es de 6 años y el periodo de los parlamentarios es de 4 años, si hubo elecciones simultáneas en el 2006, ¿cuándo volverá a haber elecciones simultáneas para presidente y congreso?
30. En un velódromo dos ciclistas parten simultáneamente, pero mientras uno de ellos da una vuelta el otro da $7/8$ de vuelta. ¿Cada cuántas vueltas pasarán iguales por el punto de partida?. Si la carrera es a 250 vueltas, ¿cuántas veces se encontrarán en el punto de partida?
31. Un estudiante universitario de la jornada diurna invierte mensualmente $\frac{1}{3}$ de salario mensual en la cuota para el pago de la matrícula, $\frac{1}{5}$ de su salario para el pago de su arriendo, $\frac{1}{6}$ en comida, si aún le quedan \$200000 para el pago del transporte y sus gastos personales. ¿Cuál es el salario mensual de dicho estudiante?
32. El estudiante Pedro Palo tomó el primer semestre de 2009 las siguientes materias: Cálculo diferencial (4 créditos), elementos de álgebra lineal (3 créditos), lógica computacional (3 créditos) y algoritmos (4 créditos). Si sus calificaciones fueron 35, 40, 30 y 35 respectivamente. ¿Cuál fue el promedio de Pedro? ¿Cuál fue el promedio ponderado del señor Palo?
33. El profesor Moncada buscando el intercambio humanitario se propuso caminar de Bogotá a Pasto (760 Km. Aprox.). Para cumplir dicho propósito, recorrió inicialmente $1/38$ de la distancia, al día siguiente recorrió $1/37$, al tercer día $1/36$ de la distancia que le faltaba y así sucesivamente, si nunca recorrió menos de 15 Km. diarios, ¿en cuántos días cumplió su propósito?
34. El presupuesto de Colombia para el año 2010 es de $1,44 \times 10^{14}$. Si los gastos en defensa ascienden a $\frac{1}{10}$ del presupuesto nacional, el servicio de la deuda y el pago de obligaciones (cuotas vencidas) ascienden a $\frac{1}{3}$ del presupuesto total. ¿Cuál es el monto que se invierte en los otros gastos de la nación?
35. Un caracol inicialmente está en el fondo de un estanque que tiene 3 metros de profundidad, asciende 30 cm. en la noche, pero en el día por efecto del sol desciende 20 cm. ¿Cuántos días gastará dicho molusco para salirse del estanque?
36. La deuda externa colombiana es de aproximadamente $US\$4,0 \times 10^{10}$. Si consideramos que el dólar está a \$1800 ¿Cuántos salones de 6 m. de largo, 7 m. de ancho y 3 mt. de alto serán necesarios para depositar dicho dinero? Considere que todos los billetes son de \$20,000 y que cada billete mide 14 cm. de largo, 7 cm. de ancho y 0,1 mm. de espesor.

Capítulo 2

Radicales y Logaritmos

2.1. Potenciación y Radicación

Cuando realizamos operaciones con números naturales, por ejemplo una suma, en donde el número que se suma es el mismo varias veces, digamos

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2}_{6 \text{ veces el } 2},$$

para no escribir de manera extensa, simplemente escribimos una multiplicación

$$\underbrace{2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2}_{6 \text{ veces el } 2} = 2 \times 6,$$

es decir, el 2, aquél que estamos sumando multiplicado por el 6, el número de veces que sumamos 2. Si ahora en lugar de sumar buscamos multiplicar:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6 \text{ veces el } 2},$$

entonces, una forma compacta de escribir esa expresión es:

$$\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{6 \text{ veces el } 2} = 2^6.$$

Es decir, 2 el que se multiplica y 6 el número de veces que se multiplica el 2.

Ahora, dado que en esta unidad se quiere centrar la atención en estas expresiones, a continuación detallaremos algunos términos usados con ellas:

$$\begin{array}{c} 2^6 \leftarrow \text{Exponente} \\ \uparrow \\ \text{Base} \end{array}$$

Esta expresión se lee 2 **elevado a la 6**. El resultado de la operación, es decir, el resultado de multiplicar 6 veces 2 se llama potencia y la operación como tal se llama **potenciación**; en este caso la potencia es 64.

$$\begin{array}{ccc}
 & \swarrow \text{Exponente} & \\
 2^6 & = & 64 \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{Base} & & \text{Potencia}
 \end{array}$$

2 elevado a la 6 es igual a 64. Se debe tener en cuenta que el número de veces que se multiplica es el exponente y lo que estamos multiplicando es la base. A continuación otros ejemplos:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3}_{4 \text{ veces el } 3} &= 3^4 = 81 \\
 \underbrace{4 \times 4 \times 4}_{3 \text{ veces el } 4} &= 4^3 = 64 \\
 (-5) \times (-5) \times (-5) &= (-5)^3 = -125 \\
 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 &= 10^7 = 10000000 \\
 (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) \times (-7) &= (-7)^6 = 117649 \\
 \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) &= \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} \\
 11^4 &= 11 \times 11 \times 11 \times 11 = 14641 \\
 8^3 &= 8 \times 8 \times 8 = 512 .
 \end{aligned}$$

En los ejemplos anteriores puede notarse que no es lo mismo escribir, por ejemplo, 3^4 que 4^3 .

Propiedades de las Potencias: en las propiedades que escribimos a continuación se usan letras para indicar que son fórmulas válidas para todo número real, siempre y cuando no se llegue a contradicciones como dividir por cero. Para eso a y b representan números reales y m y n representan números naturales. Estas propiedades se usan principalmente con el fin de simplificar expresiones en las que están presentes:

1. $a^0 = 1$, cuando $a \neq 0$. Es decir, todo número diferente de cero elevado al exponente 0 es igual a 1.

Ejemplo 2.1. $3^0 = 1$, $(-12)^0 = 1$, $\left(\frac{5}{3}\right)^0 = 1$, $(-\sqrt{3})^0 = 1$.

2. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, cuando $a \neq 0$.

Ejemplo 2.2.

- $3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81},$
- $(-12)^2 = \left(\frac{1}{-12}\right)^2 = \frac{1}{144},$
- $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}.$

3. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$

Ejemplo 2.3.

- $3^{-4} \cdot 3^5 = 3^{-4+5} = 3^1 = 3,$
- $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5,$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{3+3} = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$

4. $(a^n)^m = a^{n \times m}.$

Ejemplo 2.4.

- $(3^{-2})^3 = 3^{-2 \times 3} = 3^{-6},$
- $(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12},$
- $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2 \times 4} = \left(\frac{2}{3}\right)^8.$

5. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$

Ejemplo 2.5.

- $(3 \cdot (-2))^2 = 3^2 \cdot (-2)^2 = 9 \cdot 4 = 36,$
- $(4 \cdot 7)^4 = 4^4 \cdot 7^4,$
- $\left(\frac{7}{8} \cdot 3\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 \cdot 3^2.$

6. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$

Ejemplo 2.6.

- $\left(\frac{-2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = \frac{-8}{125},$
- $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3^2 9}{2^2 4},$
- $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^5 = \frac{(\sqrt{2})^5}{3^5}.$

7. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$

Ejemplo 2.7.

- $\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 25,$
- $\frac{7^3}{7^5} = 7^{3-5} = 7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49},$
- $\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^7}{\left(\frac{6}{5}\right)^6} = \left(\frac{6}{5}\right)^{7-6} = \frac{6}{5}.$

8. $a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n.$

Ejemplo 2.8.

- $9^{1/2} = \sqrt{9^1} = 3,$
- $8^{2/3} = \sqrt[3]{8^2} = 2^2 = 4,$
- $\left(\frac{7}{6}\right)^{3/5} = \sqrt[5]{\left(\frac{7}{6}\right)^3}.$

La última propiedad dice además que toda raíz de un número real se puede ver como una potencia, por tanto, las propiedades anteriores, de la 1 a la 7, se pueden aplicar también con raíces, es decir, en **radicales**.

Ejemplo 2.9.

- $25^{-1/2} = \frac{1}{25^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}$ (propiedad 2),
- $\sqrt[3]{3^2} \sqrt{3^5} = 3^{2/3} \cdot 3^{5/2} = 3^{(2/3)+(5/2)} = 3^{19/6} = \sqrt[6]{3^{19}}$ (propiedad 3),
- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7^2}} = (7^{1/5})^{2/3} = 7^{(1/5) \cdot (2/3)} = 7^{2/15} = \sqrt[15]{7^2}$ (propiedad 4),
- $\sqrt[5]{(5 \cdot 4)^2} = \sqrt[5]{(5)^2 \cdot (4)^2} = \sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[5]{4^2}$ (propiedad 5),
- $\sqrt[4]{(8/4)^3} = \sqrt[4]{8^3/4^3} = \sqrt[4]{8^3}/\sqrt[4]{4^3}$ (propiedad 6),
- $\frac{\sqrt[3]{8^5}}{\sqrt[4]{8^3}} = \frac{8^{5/3}}{8^{3/4}} = 8^{(5/3)-(3/4)} = 8^{11/12} = \sqrt[12]{8^{11}}$ (propiedad 7),

2.2. Logaritmos:

Cuando estamos calculando una potencia nos preguntamos por su resultado, es decir, el resultado de la multiplicación; pero en muchas ocasiones necesitaremos preguntarnos por cuál debe ser el exponente para que el resultado sea un valor dado, por ejemplo, ya hemos visto que 3^4 es igual a 81; en algún momento nos preguntaremos cuál debe ser el exponente para que $3^? = 81$?, o también:

¿cuál es el exponente en $2^? = 8$? Respuesta 3, porque $2^3 = 8$.

¿cuál es el exponente en $4^? = 16$? Respuesta 2, porque $4^2 = 16$.

¿cuál es el exponente en $5^? = \frac{1}{25}$? Respuesta -2 , porque $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

¿cuál es el exponente en $9^? = 1$? Respuesta 0, porque $9^0 = 1$.

En la sección anterior calculamos potencias, ahora encontraremos exponentes. Esta operación (la de encontrar exponentes) se llama **Logaritmo**, es decir, las 4 preguntas anteriores pueden formularse como:

¿cuál es el logaritmo base 2 de 8? Respuesta 3, porque $2^3 = 8$.

¿cuál es el logaritmo base 4 de 16? Respuesta 2, porque $4^2 = 16$.

¿cuál es el logaritmo base 5 de $\frac{1}{25}$? Respuesta -2 , porque $5^{-2} = \frac{1}{25}$.

¿cuál es el logaritmo base 9 de 1? Respuesta 0, porque $9^0 = 1$.

Como en la potenciación, usaremos una notación para representar los logaritmos, la cual tiene mucha relación con la usada en la potenciación y es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Exponente} & \\
 & \downarrow \quad \quad \downarrow & \\
 \log_2 64 = 6 & \Longleftrightarrow & 2^6 = 64 \\
 \uparrow \quad \quad \uparrow & & \\
 & \text{Base} &
 \end{array}$$

Cuando escribimos $\log_2 64 = 6$, leemos **el logaritmo en base 2 de 64 es igual a 6**; y quiere decir que el exponente necesario para que la potencia sea 64, cuando la base es 2, es 6. Con esta notación, de las 4 preguntas anteriores podemos escribir

$$\begin{aligned}\log_2 8 &= 3, \text{ porque } 2^3 = 8. \\ \log_4 16 &= 2, \text{ porque } 4^2 = 16. \\ \log_5 \frac{1}{25} &= -2, \text{ porque } 5^{-2} = \frac{1}{25}. \\ \log_9 1 &= 0, \text{ porque } 9^0 = 1.\end{aligned}$$

Siguiendo los anteriores ejemplos el lector puede verificar los siguientes logaritmos:

$$\begin{array}{lll}\log_3 27 = 3 & \log_5 125 = 3 & \log_4 2 = 1/2 \\ \log_{1/2} 16 = -4 & \log_8 8 = 1 & \log_{27} 3 = 1/3 \\ \log_7 \frac{1}{49} = -2 & \log_{100} 1 = 0 & \log_9 27 = 3/2\end{array}$$

Nota 1: es claro que, por ejemplo, $(-2)^3 = -8$, luego podríamos pensar que $\log_{-2} -8 = 3$, lo cual es cierto de manera como se ha presentado anteriormente, pero debemos tener en cuenta que los logaritmos se definen únicamente para bases positivas lo cual lleva a concluir que no podemos calcular logaritmos de números negativos. Es decir, cuando tengamos algo como $\log_a b$ con a positivo y b negativo diremos que no existe.

Nota 2: cuando calculemos logaritmos en base 10 escribimos simplemente \log en lugar de \log_{10} . Por ejemplo, $\log 100 = 2$ porque $10^2 = 100$, o también $\log 1000 = 3$, $\log \frac{1}{100} = -2$.

Al igual que con las potencias, con los logaritmos tenemos propiedades que nos permiten manipularlos de una mejor manera; estas son las siguientes:

Propiedades de los logaritmos: supondremos que a , b y c son números reales positivos y r un número real cualquiera.

1. **$\log_a a = 1$:** es decir, el logaritmo (en cualquier base) de la misma base es igual a 1, por ejemplo, $\log_2 2 = 1$, $\log_{27} 27 = 1$, $\log_{15} 15 = 1$, etc.
2. **$\log_a 1 = 0$:** por ejemplo, $\log_2 1 = 0$, $\log_{27} 1 = 0$, $\log_{15} 1 = 0$, etc., esto pues $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$.
3. **$\log_a a^r = r$:** por ejemplo, $\log_2 2^4 = 4$, $\log_{27} 27^{-10} = -10$, $\log_6 16^{5/7} = \frac{5}{7}$, $\log_\pi \pi^6 = 6$, etc.
Esta propiedad nos dice que independientemente de cuál sea el exponente (siempre y cuando tenga sentido), el logaritmo y la potencia se cancelan (si sus bases son iguales).
4. **$a^{\log_a b} = b$:** esta propiedad y la anterior nos dicen que los logaritmos y la potenciación son inversas, algo así como la raíz cuadrada y el exponente 2, es decir, se cancelan, por ejemplo, $2^{\log_2 45} = 45$, $(15)^{\log_{15} 67} = 67$, $(\frac{5}{4})^{\log_{5/4} 8} = 8$, $(98)^{\log_{98}(6/11)} = \frac{6}{11}$, o también $3^{\log_3(x^2+xy^3)} = x^2 + xy^3$.
5. **$\log_a bc = \log_a b + \log_a c$:** el logaritmo de una multiplicación se convierte en la suma de logaritmos, por ejemplo, $\log_4(16 \times 64) = \log_4(16) + \log_4(64) = 2 + 3 = 5$, si lo hiciéramos de la manera larga, es decir, sin usar la propiedad tendríamos que calcular $\log_4(16 \times 64) = \log_4(1024)$, es decir, debemos buscar un exponente para 4 cuyo resultado sea 1024, eso podría no ser tan fácil, mucho menos si se hace a mano; en conclusión la propiedad nos simplifica algunos cálculos.

6. $\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c$: el logaritmo de una división se convierte en la resta de logaritmos, por ejemplo, $\log_5 \left(\frac{125}{25} \right) = \log_5(125) - \log_5(25) = 3 - 2 = 1$. En este caso es mejor ver la propiedad de la resta a la multiplicación, es decir, usar el lado izquierdo de la propiedad pues la división simplifica la expresión, por ejemplo, si tenemos la resta $\log_9(59049) - \log_9(6561)$, no es fácil calcular esos logaritmos, pero si usamos la propiedad tendríamos $\log_9(59049) - \log_9(6561) = \log_9 \left(\frac{59049}{6561} \right) = \log_9(9) = 1$, lo cual claramente es más manejable.
7. $\log_a b^r = r \log_a b$: esta propiedad es un caso particular de la propiedad (5), solo que se multiplica el mismo término r veces, por ejemplo, $\log_3 9^4 = 4 \log_3 9 = 4 \times 2 = 8$, $\log(1000)^3 = 3 \log(1000) = 3 \times 3 = 9$.
8. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$: esta es la propiedad de cambio de base de los logaritmos, es decir, si tenemos un logaritmo en una base que no nos interesa, podemos cambiar a otra base; por ejemplo, para encontrar logaritmos (cuyo valor no es exacto principalmente) debemos usar una calculadora, pero en la mayoría de calculadoras aparecen los logaritmos en base 10 (y otros que por ahora no los estudiaremos), por tanto debemos pasar a base 10, por ejemplo, $\log_2 7$ no es un valor exacto, pues $2^2 = 4$ y $2^3 = 8$, es decir, el exponente deseado debe estar entre 2 y 3, entonces para encontrar su valor podemos hacer:

$$\log_2 7 = \frac{\log 7}{\log 2} \approx \frac{0.8451}{0.30102} \approx 2.80735$$

los valores de 0.451 y 0.30102 se encontraron usando una calculadora. Pero el cambio de base no solo se hace a base 10, se puede hacer a cualquier base, por ejemplo,

$$\log_9 3 = \frac{\log_3 3}{\log_3 9} = \frac{1}{2}, \text{ etc.}$$

2.3. Ejercicios

- Use las propiedades de los exponentes para escribir cada una de las siguientes expresiones en la forma $\frac{a}{b}$, con a y b números enteros, o de manera simplificada.

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$	d) $\frac{2^{-1} + 1}{3^{-1} - 1}$	g) $\sqrt[3]{\frac{2 \cdot 12^4 \cdot 13^4}{9 \cdot 12}}$	j) $(-6 \cdot 7^{7/5})(2 \cdot 7^{8/5})$
b) $\frac{2^{-3}}{3^{-2}}$	e) $16^{(-3/2)}$	h) $\sqrt{9 \cdot 5^{-4} \cdot 7^6}$	k) $\left(\frac{4 \cdot 5^2 \cdot 6}{5^3 \cdot 6^2}\right) \left(\frac{5 \cdot 5^2 \cdot 6}{2 \cdot 6^4}\right)$
c) $(-2)^5$	f) $\left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2^{-4}$	i) $(4 \cdot 8^{3/2})(2 \cdot 8^{1/2})$	l) $\left(\frac{-8 \cdot 10^3}{9^{-6}}\right)^{2/3}$
m) $(2^3 \cdot 3^4)^{-2} (1/(2^3 \cdot 3^3))^{-3}$	n) $\sqrt{5 \cdot 3 \cdot 5^7} \sqrt{10 \cdot 3^3 \cdot 5^3}$		
- Complete los enunciados con el símbolo igual (=) o con el símbolo diferente (\neq) para que la expresión sea correcta.

- a) $(a^r)^2$ _____ a^{r^2} d) $\sqrt{a^2 + b^2}$ _____ $a + b$ h) $\sqrt{a + b}$ _____ $\sqrt{a} + \sqrt{b}$
 b) $a^x b^y$ _____ $(ab)^{xy}$ e) $(a + b)^2$ _____ $a^2 + b^2$ i) $\sqrt[n]{a^n}$ _____ $\sqrt[n]{a^2}$
 c) $\sqrt[n]{\frac{1}{c}}$ _____ $\frac{1}{\sqrt[n]{c}}$ f) $(a + b)^2$ _____ $(a - b)^2$ j) $(-4)^{10}$ _____ $(4)^{10}$
 g) $a^{1/n}$ _____ $\frac{1}{a^n}$

3. Justifique la veracidad o falsedad de las siguientes igualdades:

- a) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sqrt[5]{a^3 a^2} = \sqrt[3]{a^3}$ g) $\sqrt[3]{24} = 2\sqrt[6]{9}$ j) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt[6]{2}}$
 b) $\frac{2\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}} = 1$ e) $\frac{\sqrt[3]{x^2 y^2}}{xy} = \sqrt[3]{\frac{1}{xy}}$ h) $\sqrt{-4} = \sqrt{4}$ k) $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}$
 c) $\sqrt[3]{648} = 6\sqrt[3]{3}$ f) $\frac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[12]{8}} = 2$ i) $\frac{\sqrt[6]{384}}{\sqrt[6]{6}} = 2$ l) $3x^2 = (3x^2)$

4. Simplifique las siguientes expresiones

- a) $(\frac{1}{2}x^4)(16x^5)$ f) $\frac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3}y^0$ k) $(8x^{-2/3})x^{1/6}$
 b) $(\frac{1}{6}a^5)(-3a^2)(4a^7)$ g) $\left(\frac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\frac{5a^2b}{2b^4}\right)$ l) $\frac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$
 c) $(3u^7v^3)(4u^4v^{-5})$ h) $(4a^{3/2})(2a^{1/2})$ m) $\sqrt{5xy^7}\sqrt{10x^3y^3}$
 d) $\left(\frac{3x^5y^4}{x^0y^{-3}}\right)^2$ i) $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$ n) $\sqrt[5]{\frac{8x^3}{y^4}}\sqrt[5]{\frac{4x^4}{y^2}}$
 e) $\frac{(2x^2)^3}{4x^4}$ j) $(27a^6)^{-2/3}$ o) $\sqrt[5]{\frac{3x^{11}y^3}{9x^2}}$

5. Para cada una de las siguientes potencias escriba una igualdad que sea equivalente pero en términos de logaritmos

- a) $4^3 = 64$ c) $3^x = 4 - t$ e) $t^r = s$ g) $(3/4)^3 = 27/64$
 b) $4^{-3} = 1/64$ d) $3^5 = 243$ f) $(0,9)^t = 1/2$ h) $49^{1/2} = 7$

6. Para cada una de los siguientes logaritmos escriba una igualdad que sea equivalente pero en términos de potencias

- a) $\log_2 32 = 5$ c) $\log_b 512 = 3/2$ e) $\log_3 81 = 4$ g) $\log_v w = q$
 b) $\log_t r = p$ d) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$ f) $\log_a 343 = 3/4$ h) $\log_4 p = 5 - x$

7. Encuentre el valor, si existe, de

- | | | |
|--------------------------|-------------------|--------------------|
| a) $\log_5 1$ | d) $\log 10^5$ | g) $\log_3 243$ |
| b) $\log_6 6^7$ | e) $\log 0,0001$ | h) $(10)^{\log 7}$ |
| c) $\log_4 \frac{1}{16}$ | f) $\log 10^{-6}$ | i) $3^{\log_3 8}$ |

8. En las siguientes igualdades encuentre el valor de la incógnita.

- | | |
|---|--|
| a) $2 \times 5^{t/3} = 10$ | m) $\log(x+2) - \log x = 2 \log 4$ |
| b) $6 = 2^t + 2$ | n) $\log_2(x+7) + \log_2 x = 3$ |
| c) $\log_4 x = \log_4(8-x)$ | \tilde{n}) $\log_3(x+3) + \log_3(x+5) = 1$ |
| d) $\log_3(x+4) = \log_3(1-x)$ | o) $\log(57x) = 2 + \log(x-2)$ |
| e) $\log x^2 = \log(3x+7)$ | p) $\log_2(x+3) = -2 \log_2(x+3) + \log_3 27 + 4^{\log_4 3}$ |
| f) $\log_9 x = 3/2$ | q) $\log x^2 = (\log x)^2$ |
| g) $\log_5 x^2 = \log_5(12-x)$ | r) $\log(\log x) = 2$ |
| h) $4^{x-3} - 4^{-x+5} = 0$ | s) $x^{\sqrt{\log x}} = 10^8$ |
| i) $7^{x^2-3} = (49)^{-x+5}$ | t) $\log \sqrt{x} = \sqrt{\log x}$ |
| j) $2^{2x-3} = 5^{x-2}$ | u) $\log \sqrt{x^3-9} = 2$ |
| k) $\log_6(2x-3) = \log_6(12) - \log_6 3$ | |
| l) $2 \log_3 x = 3 \log_3 5$ | |

9. En las siguientes igualdades escriba x en términos de y .

- | | |
|-----------------------------------|--|
| a) $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{2}$ | c) $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}}$ |
| b) $y = \frac{10^x - 10^{-x}}{2}$ | d) $y = \frac{10^x + 10^{-x}}{10^x - 10^{-x}}$ |

Capítulo 3

Factorización

3.1. Expresiones Algebraicas

En este capítulo trabajaremos con expresiones algebraicas, que son combinaciones de variables por medio de sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y raíces de algún orden; por ejemplo,

$$3x + 5y - 7z, \quad \sqrt{5a + 9b^3}, \quad \frac{7a - \sqrt{a^2 + 5a}}{12a - 5b}$$

Supondremos que las letras usadas representan números reales que le dan sentido a la expresión.

A las variables se les llama parte literal. Es de anotar que una expresión como $-x^2yz$ es equivalente a $-1x^2yz$.

Si las operaciones presentes en la expresión son únicamente de suma, resta, multiplicación y los exponentes positivos entonces el resultado obtenido se llama polinomio, digamos

$$-4x^2y^3 + 3x - y^5 + 10$$

Cada una de las expresiones separadas por una suma o una resta (incluido su signo) se llaman **términos**; en el anterior ejemplo, son términos de la expresión $-4x^2y^3$, $3x$, $-y^5$ y 10 , es decir, tiene 4 términos. Los números que multiplican a las partes literales se llaman coeficientes, entonces en $-4x^2y^3$ el número -4 es el coeficiente, en $-y^5$ el coeficiente es -1 . El término 10 se llama término independiente. Dependiendo del número de términos que tenga la expresión le daremos nombres diferentes, a saber,

- si tiene un término se llama **monomio**.
- si tiene dos términos se llama **binomio**.
- si tiene tres términos se llama **trinomio**.
- si tiene cuatro o más términos se llama **polinomio**.
- si no tiene partes literales es una expresión **constante**.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
 \text{monomios : } & -4x^3y^2, \quad 10x \\
 \text{binomios : } & 2x^2y + 3xy^3, \quad 2ab + 10 \\
 \text{trinomios : } & a^2b + ab - 2ab^2, \quad 3a^2b + 5ab^2 - 7 \\
 \text{polinomios : } & a^2b + ab - 2ab^2 + 3, \quad 2x^2y^3 + 10xz^2 - y^2z + x \\
 \text{constantes : } & -42, \quad -\frac{2}{7}
 \end{aligned}$$

Dos expresiones algebraicas se dicen semejantes si contienen las mismas partes literales y con los mismos exponentes, por ejemplo, $2x^2y^3$ y $-3x^2y^3$, o también $x^2 - 3x$ y $-2x^2 + 5x$. Esas expresiones pueden sumarse o restarse sin ningún inconveniente, operando sus coeficientes y manteniendo sus exponentes: $2x^2y^3 + (-3x^2y^3) = -x^2y^3$ o $x^2 - 3x - (-2x^2 + 5x) = x^2 - 3x + 2x^2 - 5x = 3x^2 - 8x$.

3.1.1. Multiplicación de monomios

Para multiplicar dos monomios, se multiplica primero el signo, luego los coeficientes y por último la parte literal, teniendo en cuenta las leyes de los exponentes

Ejemplo 3.1.

$$(-5a^4b^3c^5)(6a^5b^4cd^2) = (-5)(6)(a^4a^5)(b^3b^4)(c^5c^1)d^2 = -30a^9b^7c^6d^2$$

3.1.2. Multiplicación de un monomio por un binomio

Para multiplicar expresiones diferentes de monomios simplemente aplicamos la propiedad distributiva tantas veces como sea necesario, por ejemplo,

$$\begin{array}{c}
 \curvearrowright \\
 -5x^2y^2(4x^3y^2 - 5x^2y)
 \end{array}$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned}
 -5x^2y^2(4x^3y^2 - 5x^2y) &= -5x^2y^2(4x^3y^2) + (-5x^2y^2)(-5x^2y) \\
 &= -20x^5y^4 + 25x^4y^3
 \end{aligned}$$

Para multiplicar un polinomio por otro polinomio, se multiplica cada término del primer polinomio por cada término del segundo polinomio:

Ejemplo 3.2.

$$(4x^2y^3 - 2xy^2)(2x^2y^4 - 5x^4y^2 + 7x^5y) = 8x^4y^7 - 20x^6y^5 + 28x^7y^4 - 4x^3y^6 + 10x^5y^4 - 14x^6y^3$$

En capítulos anteriores hablamos de factores, en este caso también lo haremos. Recordemos algunas cosas:

Ejemplo 3.3.

1. $mnpqxyz$, en esta expresión los elementos m, n, p, q, x, y, z son factores que los llamaremos singulares; la expresión se llama simple si cada factor es numérico y singular.
2. $m[(n+p) - q(x+yz)]$, esta expresión se llama mixta pues contiene factores singulares y compuestos como $(n+p)$, $(x+yz)$.

3.2. Factorización

La factorización corresponde al proceso lógico mediante el cual se expresa un objeto o número como el producto de otros objetos o números más simples (*llamados factores*). Aplicada esta noción a los números, nos permite entender que la factorización es la parte esencial del teorema fundamental de la aritmética; el cual nos garantiza que todo número entero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$ se puede representar de forma única como el producto de sus factores primos, salvo por el orden de los mismos.

Ejemplo 3.4.

1. $108 = 2^2 3^3$
2. $648 = 2^3 3^4$
3. $1125 = 3^2 5^3$
4. $16875 = 3^3 5^4$

y aquí, cada número base, en el lado derecho de la igualdad, es “un factor” múltiples veces.

Como se dijo antes, en este capítulo nos interesan las expresiones algebraicas, por tanto daremos algunos métodos para factorizarlas.

3.3. Casos de Factorización

A continuación se presentan varios tipos de expresiones algebraicas que pueden factorizarse por métodos particulares.

3.3.1. Factor común en los términos de un polinomio**Factor común monomio**

Si en una expresión algebraica encontramos un factor común en cada término y éste está constituido por un término, entonces decimos que en la expresión hay un factor común.

Ejemplo 3.5.

1. Para identificar cuál es el factor común en una expresión, inicialmente extraemos el máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos, luego identificamos letras comunes con mayor exponente también en todos los términos, por ejemplo en $2a^3 - 3a$ el $MCD(2, 3) = 1$ (esto no es interesante) y a^1 es la parte literal que se repite en todos, luego el factor común es a , entonces $2a^3 - 3a = a(2a^2 - 3)$ es la factorización de la expresión dada. Téngase en cuenta que para factorizar lo que hacemos es dividir, es decir, la parte que escribimos dentro del paréntesis es el resultado de dividir $2a^3 - 3a$ (lo dado) entre a :

$$\frac{2a^3 - 3a}{a} = \frac{2a^3}{a} - \frac{3a}{a} = 2a^2 - 3$$

2. De manera similar podemos proceder con $3a^5 - 6a^2$. En este caso, $MCD(3, 6) = 3$, la parte literal común es a^2 y también,

$$\frac{3a^5 - 6a^2}{3a^2} = \frac{3a^5}{3a^2} - \frac{6a^2}{3a^2} = a^3 - 2,$$

por tanto, $3a^5 - 6a^2 = 3a^2(a^3 - 2)$.

3. En $2ab - 4ab^2 + 6abc$, el factor común es $2ab$, entonces $2ab - 4ab^2 + 6abc = 2ab(1 - 2b + 3c)$.

Factor común polinomio

En algunas expresiones podemos encontrar que los términos comunes no son sólo monomios, luego también podemos aplicar factor común, por ejemplo,

1. En la expresión $2(a + 3)x^3 - 3b(a + 3)$ se tiene a $a + 3$ como factor común, luego procediendo como antes obtenemos que $2(a + 3)x^3 - 3b(a + 3) = (a + 3)(2x^3 - 3b)$, pues

$$\frac{2(a + 3)x^3 - 3b(a + 3)}{a + 3} = \frac{2(a + 3)x^3}{a + 3} - \frac{3b(a + 3)}{a + 3} = 2x^3 - 3b,$$

de manera similar hacemos en los siguientes.

2. $3x(a^2 - 1) - 5b(a^2 - 1) = (a^2 - 1)(3x - 5b)$
 3. $2a(1 - x + y) - 3b(1 - x + y) + 5xc(1 - x + y) = (1 - x + y)(2a - 3b + 5xc)$

3.3.2. Factor común por agrupación de términos

En muchos casos debemos realizar más de un paso para poder factorizar una expresión, por ejemplo, agrupar algunos términos y luego, debemos sacar factor común a partes de la expresión dada para después poder asociar los términos semejantes, eso suele llamarse agrupación de términos. Los siguientes ejemplos involucran este método.

Ejemplo 3.6.

1. Tomemos $ab + ac + bd + dc$. Nuestro objetivo es escribirla como producto de dos o más factores. Si asociamos los dos primeros términos y los dos últimos tenemos $ab + ac + bd + dc = (ab + ac) + (bd + dc)$ y en cada uno tenemos expresiones comunes, luego las podemos factorizar: $(ab + ac) + (bd + dc) = a(b + c) + d(b + c)$, y esta última también tiene a $(b + c)$ como factor común que podemos extraer, por lo tanto se escribe como $a(b + c) + d(b + c) = (a + d)(b + c)$, es decir, después de agrupar términos tenemos que $ab + ac + bd + dc = (a + d)(b + c)$. En total hicimos:

$$\begin{aligned} ab + ac + bd + dc &= (ab + ac) + (bd + dc) \\ &= a(b + c) + d(b + c) \\ &= (a + d)(b + c) \end{aligned}$$

2. Ahora tomemos $2a^2 - 3ab - 4a + 6b$. En este caso podemos hacer:

$$\begin{aligned}
 2a^2 - 3ab - 4a + 6b &= (2a^2 - 3ab) - \underbrace{(4a - 6b)}_{\text{cambiaron los signos}} \quad \text{agrupamos} \\
 &= a(2a - 3b) - 2(2a - 3b) \quad \text{factor común en términos agrupados} \\
 &= (2a - 3b)(a - 2) \quad \text{factor común definitivo}
 \end{aligned}$$

Téngase en cuenta siempre los signos para poder realizar una correcta factorización, notemos que en el segundo término de la agrupación cambiaron los signos internos al paréntesis pues afuera tenemos un menos.

3. En el siguiente ejemplo debemos reescribir las expresiones:

$$\begin{aligned}
 3ax - 3x + 4y - 4ay + ax^2 - x^2 &= (3ax - 3x) + (4y - 4ay) + (ax^2 - x^2) \\
 &= 3x(a - 1) + \underbrace{4y(1 - a)}_{\substack{\text{podemos factorizar} \\ \text{un } -1 \text{ para tener} \\ \text{un } a - 1}} + x^2(a - 1) \\
 &= (3x + x^2)(a - 1) - 4y(a - 1) \\
 &= (a - 1)(x^2 + 3x - 4y)
 \end{aligned}$$

3.3.3. Trinomio cuadrado perfecto

Sabemos que cuando una cantidad es el producto de dos factores iguales, entonces es un cuadrado perfecto. Ahora bien, cuando el producto es de dos binomios iguales, entonces se obtiene un trinomio que se conoce como «trinomio cuadrado perfecto», por ejemplo,

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2 \quad (3.1)$$

En ese caso su factorización es el lado izquierdo de la anterior igualdad. Para saber si un trinomio es un cuadrado perfecto, debemos identificar dos términos al cuadrado con el mismo signo y un tercer término que es el doble producto de las raíces cuadradas de los otros dos.

Ejemplo 3.7.

1. Si tomamos $4x^2 + 12xy + 9y^2$ tenemos dos cuadrados que son $4x^2 = (2x)^2$ y $9y^2 = (3y)^2$ y el doble producto de las raíces $12xy = 2(2x)(3y)$, por tanto es un trinomio cuadrado perfecto, luego:

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)(2x + 3y) = (2x + 3y)^2.$$

Normalmente escribimos los cuadrados a los extremos y el doble producto en la mitad de los dos, como antes.

2. En nuestro segundo ejemplo, $-6ab + 9a^2 + b^2$, los cuadrados son $9a^2 = (3a)^2$ y b^2 y el doble producto es $-6ab$; podemos ordenarlo así, $9a^2 - 6ab + b^2$. Si el doble producto tiene un menos entonces la factorización es una resta al cuadrado, así:

$$9a^2 - 6ab + b^2 = (3a - b)(3a - b) = (3a - b)^2$$

3.3.4. Diferencia de cuadrados

Como su nombre lo expresa, se trata de la diferencia o resta de dos elementos, cada uno de los cuales está elevado al cuadrado, algo como:

$$x^2 - y^2 \text{ o también } (2x - 1)^2 - (y - 3)^2$$

La factorización está dada por el producto de una suma y una resta de las raíces cuadradas de los cuadrados que se están restando:

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

y el otro caso,

$$\begin{aligned} (2x - 1)^2 - (y - 3)^2 &= [(2x - 1) + (y - 3)][(2x - 1) - (y - 3)] \\ &= (2x + y - 4)(2x - y + 2) \end{aligned}$$

Ejemplo 3.8.

1.

$$1 - a^2 = (1 - a)(1 + a)$$

2.

$$a^2 - x^2 = (a - x)(a + x)$$

3.

$$9x^2 - 16y^2 = (3x - 4y)(3x + 4y)$$

4.

$$x^{2m} - y^{2n} = (x^m - y^n)(x^m + y^n)$$

3.3.5. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ tratamos de encontrar dos números (por facilidad enteros) que su producto sea igual a c y su suma sea igual a b , esas operaciones manteniendo sus signos dados.

Ejemplo 3.9.

1. Veamos el siguiente ejemplo, $x^2 - 3x - 10$. En este caso debemos buscar dos números que multiplicados sean -10 y sumados sean -3 . Los números (enteros) tales que su producto sea -10 son -2 y 5 , 5 y -2 , 10 y -1 o -10 y 1 . De todas esas combinaciones, las que hacen que su suma sea -3 es -5 y 2 , luego la factorización es $x^2 - 3x - 10 = (x - 5)(x + 2)$. Tenemos:

$$\begin{aligned} x^2 - 3x - 10 &= (x \pm \dots)(x \pm \dots) \\ &= (x - 5)(x + 2) \end{aligned}$$

2. De manera similar

$$x^2 - 7x + 12 = (x \pm \dots)(x \pm \dots) = (x - 4)(x - 3)$$

3. O también

$$x^2 - 13x + 40 = (x \pm \dots)(x \pm \dots) = (x - 8)(x - 5)$$

3.3.6. Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ podemos intentar factorizarla usando el método anterior, pero para eso el coeficiente principal (el del cuadrado) debería ser igual a 1, entonces modificaremos la expresión dada de la siguiente manera: para factorizar un trinomio de dicha forma; procedemos de la siguiente manera:

a) Multiplicamos y dividimos los tres términos del trinomio por el coeficiente principal, en este caso a , quedando así un nuevo trinomio diferente al primero. Y haremos que la variable no sea x sino ax :

$$ax^2 + bx + c = \frac{a^2x^2 + abx + ac}{a} = \frac{(ax)^2 + b(ax) + ac}{a}$$

b) El numerador de la expresión anterior ya tiene coeficiente principal 1, pues su variable es ax , luego podemos buscar dos números que multiplicados sean ac y sumados b , como antes, para tener algo como:

$$\frac{(ax \mp \dots)(ax \pm \dots)}{a}$$

c) Simplificamos la expresión resultante principalmente para tratar de eliminar el a que está dividiendo.

Ejemplo 3.10.

1. Aclaremos el método con los siguientes ejemplos:

$$\begin{aligned} 4x^2 - 3x - 10 &= \frac{(4)4x^2 - (4)3x - (4)10}{4} \\ &= \frac{(4x)^2 - 3(4x) - 40}{4} \quad \text{dos números que multipliquen } -40 \text{ y sumen } -3 \\ &= \frac{(4x - 8)(4x + 5)}{4} \quad (-8) \cdot 5 = -40, -8 + 5 = -3 \\ &= \frac{4(x - 2)(4x + 5)}{4} \quad \text{factor común } 4 \\ &= (x - 2)(4x + 5) \quad \text{simplificamos } 4 \end{aligned}$$

En conclusión, la factorización es $4x^2 - 3x - 10 = (x - 2)(4x + 5)$.

2. En el siguiente ejemplo en lugar de un cuadrado tenemos un exponente 4, luego la variable inicial es a^2 , es decir, a^4 puede verse como $(a^2)^2$, entonces

$$\begin{aligned} 6a^4 - 5a^2 - 6 &= \frac{(6)6a^4 - (6)5a^2 - (6)6}{6} = \frac{(6a^2)^2 - 5(6a^2) - 36}{6} = \frac{(6a^2 - 9)(6a^2 + 4)}{6} \\ &= \frac{3(2a^2 - 3)2(3a^2 + 2)}{2 \times 3} = (2a^2 - 3)(3a^2 + 2) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 9x^2 - 3x - 20 &= \frac{(9)9x^2 - (9)3x - (9)20}{9} = \frac{(9x)^2 - 3(9x) - 180}{9} = \frac{(9x - 15)(9x + 12)}{9} \\ &= \frac{3(3x - 5)3(3x + 4)}{3 \times 3} = (3x - 5)(3x + 4) \end{aligned}$$

3.4. Ejercicios

1. Reducir los siguientes términos:

$$\begin{array}{ll} a) 5x^2y - 7x^2y - 8x^2y + 16x^2y & d) x^5y^3z^2 - 10x^5y^3z^2 + 8x^5y^3z^2 + 9x^5y^3z^2 \\ b) -8x^3y^2z^5 + 19x^3y^2z^5 - 24x^3y^2z^5 & \\ c) 9a^3b^3c^3 - 17 - 14 + 18 + 34a^3b^3c^3 + 12a^3b^3c^3 & e) -16a^5b^4c^3d^3 + 14a^5b^4c^3d^3 + 28a^5b^4c^3d^3 \end{array}$$

2. Aplicar la propiedad distributiva

$$\begin{array}{ll} a) 5x^2y^2(4x^3y^2 - 5x^2y) & d) -7x^4y^5z^2(4x^5y^3z^3 - 5x^2y^2) \\ b) 9x^3y^2z^2(4x^3y^3 - 5x^2y^3) & e) 9a^5b^4c^3(4a^4b^3c^2 - 5a^3b^3c^5) \\ c) -13x^3y^2z^3(4x^4y^3 + 8x^4y^3z^4) & f) 12a^7b^5c^3(4a^3b^4c - 5a^3b^3c^2d) \end{array}$$

3. Multiplicar los siguientes polinomios:

$$\begin{array}{l} a) (5x^4y^2 - 2x^3y^3)(6x^3y^3 - 5x^5y^4 - 7x^6y^3) \\ b) (-9x^5y^2 + 3x^4y^3)(7x^4y^3 - 7x^6y^3 - 9x^4y^4) \\ c) (6x^5y^2 + 3x^4y^3 - 2xy^3)(8x^4y^3 - 7x^6y^3 + 4x^4y^4) \\ d) (6x^5y^2 + 3x^4y^3)(7x^4y^3 - 7x^6y^3 - 9x^4y^4 - 3x^2y^3z^2) \\ e) (2x^5y^2 + 3x^5y^3 - 4x^4y^5z^2)(7x^4y^3 - 7x^6y^3 - 9x^4y^4 + x^3y^2z^3) \\ f) (m + n)(p - q)(x + y + z) \\ g) a \left\{ \left(m + \frac{n}{p} \right) \left[q + \left(\frac{x}{y} \right)^z \right] + R \right\} \end{array}$$

4. Factorizar cada una de las siguientes expresiones:

- | | | |
|-------------------------|------------------------------|-------------------------------------|
| a) $am + bm$ | e) $5m^2 + 10m$ | i) $3a^2b + 6ab^2 - 5a^3b + 8a^2bx$ |
| b) $2x + 3x^2$ | f) $xy^2 - 2x^2y$ | j) $25x^3 - 10x^5 + 15x^7$ |
| c) $2a^2b^2 + 3a^3b^3c$ | g) $3x^2y^3 - 6y^2z^6$ | |
| d) $-a^2 + 2ax^3$ | h) $ax - bx^2 + cx^3 - dx^4$ | |

5. En las siguientes expresiones, identifique cuáles de ellas tienen como factor común un polinomio y luego factorice.

- a) $an(a - b) + fm(a - b)$
 b) $2x(a + b + c) + 3x^2(a + b + c)$
 c) $2a^2(x + y + z) + 3a^3b^3(x + y + z)$
 d) $-a^2(a + b) + (2ax^3 - 1)(a + b)$
 e) $5m^2(a + bx + cy) + (a + bx + cy)(10m + n)$
 f) $xy^2(a + b) - x^2y(a + b)$
 g) $3x^2y^3(ax + bz) - 6y^2z^6(ax + bz)$
 h) $ax(a + b) - bx^2(a + b) + cx^3(a + b) - dx^4(a + b)$
 i) $3a^2b(a + b - c) + 6ab^2(a + b - c) - 5a^3b(a + b - c) + 8a^2bx(a + b - c)$
 j) $25(x - 1) - 10x^5(x - 1) + 15x^7(x - 1)$

6. En las siguientes expresiones, identifique términos comunes, luego agrupe y finalmente factorice.

- | | |
|---------------------------|------------------------------------|
| a) $2x^2 + xy + ax + ay$ | f) $6ax + 3a + 1 + 2x$ |
| b) $a^2 - x^2 + a - x^2a$ | g) $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$ |
| c) $4a^3 - 1 - a^2 + 4a$ | h) $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$ |
| d) $am - bm^2 + an - bmn$ | i) $2a^2x - 5a^2y + 15by - 6bx$ |
| e) $1 + a + 3ab + 3b$ | j) $6m - 9n + 21nx - 14mx$ |

7. Verifique cuáles de las siguientes expresiones tienen la forma de trinomios cuadrados perfectos y escribálas como cuadrados.

- | | | |
|----------------------|--|--|
| a) $a^2 + 2ab + b^2$ | e) $36x^2 - 12xy + y^2$ | i) $225a^4 + 30a^2b + b^2$ |
| b) $a^2 + 2a + 1$ | f) $9a^2 + 18ab + 9b^2$ | j) $(a + b)^2 - 2(a + b)(x - a) + (x - a)^2$ |
| c) $4 + 4b + b^2$ | g) $1 - 2y^3 + y^6$ | |
| d) $x^2 + 6x + 9^2$ | h) $\frac{a^2}{9} + \frac{2}{3}ab + b^2$ | |

8. Factorizar las siguientes expresiones:

- | | | |
|------------------|---|--|
| a) $a^2 - b^2$ | c) $25a^2 - 36b^2$ | e) $25a^{2m} - 36b^{2n}$ |
| b) $4x^2 - 9y^2$ | d) $a^{2m} - b^{2n}$, si $m = 2$ $n = 4$ | f) $\left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2$ |

- | | | |
|------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| $g) \frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2}$ | $n) a^8 - 4a^4b^4 + 16b^8$ | $t) 4a^4y^4 + 43a^2y^2 + 121$ |
| $h) \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}$ | $\tilde{n}) 16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$ | $u) a^2 - 3a + 2$ |
| $i) 25a^2b^4c^6 - x^2$ | $o) 36a^4 - 109a^2b^2 + 49b^4$ | $v) x^2 - 7x + 6$ |
| $j) (x + y)^2 - a^2$ | $p) c^4 - 45c^2 + 100$ | $w) x^2 + 7x + 6$ |
| $k) 9y^{2n} - \frac{1}{b^2}$ | $q) 49 + 76b^2 + 64b^4$ | $x) x^2 - 4x + 3$ |
| $l) x^4 + 2x^2 + 9$ | $r) 4 - 108x^2 + 121x^4$ | $y) a^2 - 8a + 12$ |
| $m) 4a^4 - 3a^2b^2 + 9b^4$ | $s) a^8 + 16 - 9c^4$ | $z) x^2 - 6x - 16$ |

9. Factorice las siguientes expresiones

- | | | |
|----------------------|------------------------|----------------------------------|
| $a) y^2 - y + 30$ | $f) 18x^2 - 13x - 5$ | $k) 7x^6 - 33x^3 - 10$ |
| $b) x^2 + 28 - 11x$ | $g) 6a^2 - 7a - 3$ | $l) 6x^2y^2 + 5xy - 21$ |
| $c) x^2 + 28 - 11x$ | $h) 6a^4 + 5a^2 - 6$ | $m) 10a^2 + 7a - 12$ |
| $d) x^2 - 13x - 30$ | $i) 15x^2 - ax + 2a^2$ | $n) 5 + 7x^4 - 6x^8$ |
| $e) m^2 - 20m + 300$ | $j) 14a^2 - 45a - 14$ | $\tilde{n}) 6m^2 - 13mx - 15x^2$ |

Capítulo 4

Fracciones algebraicas

4.1. Fracciones algebraicas

En esta parte se va a trabajar con fracciones cuyos numeradores y denominadores son polinomios. En un sentido más amplio, las fracciones algebraicas, son fracciones cuyos numeradores y denominadores son polinomios. Simplificar una fracción algebraica, consiste en escribirla con la menor cantidad de factores o términos posible; esto se hace con divisiones de factores similares, después de factorizar el numerador y denominador. Recordemos que con números racionales hacemos algo similar, para simplificar, después de descomponer el numerador y denominador en factores primos cancelamos (o dividimos) los números iguales:

$$\frac{12}{24} = \frac{2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{1}{2}$$

igualmente podemos hacer cuando tenemos polinomios, por ejemplo,

$$\frac{x^2 - x - 20}{x - 5} = \frac{(x - 5)(x + 4)}{x - 5} = \frac{x - 5}{x - 5} \times \frac{x + 4}{1} = x + 4, \quad x \neq 5$$

en este caso el factor igual en el numerador y denominador es $x - 5$, luego al hacer la división $(x - 5)/(x - 5)$ obtenemos un 1 multiplicando a toda la fracción, lo cual no la afecta y podemos omitirlo simplificándola.

Ejemplo 4.1.

No importa qué tantos factores o de qué tipo sean, siempre hacemos lo mismo:

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - 3)(x + 5)(x - 9)(2x + 7)}{(2x + 7)(x + 8)(x^2 - 3)(x - 12)} &= \frac{(x^2 - 3)(2x + 7)}{(x^2 - 3)(2x + 7)} \times \frac{(x + 5)(x - 9)}{(x + 8)(x - 12)} \\ &= \frac{(x + 5)(x - 9)}{(x + 8)(x - 12)}, \quad x \neq \pm\sqrt{3}, -\frac{7}{2}, -8, 12. \end{aligned}$$

Por tanto la fracción simplificada es

$$\frac{(x + 5)(x - 9)}{(x + 8)(x - 12)}, \quad x \neq \pm 3, -7/2, -8, 12.$$

Ejemplo 4.2.

En el siguiente ejemplo, inicialmente necesitamos factorizar la expresión, usando alguno de los métodos del capítulo anterior, para poder simplificarla

$$\frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - 3x - 28} = \frac{(x+4)(x+5)}{(x+4)(x-7)} = \frac{x+5}{x-7}, \quad x \neq -4, 7$$

4.2. Suma de fracciones algebraicas

El resultado de sumar varias fracciones algebraicas es nuevamente una fracción algebraica. Esta operación se hace de manera similar a como lo hacemos con números racionales; una forma muy usada es usando el mínimo común múltiplo de los denominadores de las fracciones que se van a sumar. Recordemos con un ejemplo cómo lo hacemos con números racionales para seguir el mismo procedimiento:

$$\frac{7}{4} - \frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{7 \times (24 \div 4) - 5 \times (24 \div 6) + 3 \times (24 \div 8)}{24} = \frac{42 - 20 + 9}{24} = \frac{31}{24}.$$

Después de identificado el *mcm* lo que hacemos es dividir ese número entre el denominador de la fracción y el resultado multiplicarlo por el numerador.

Si tenemos fracciones algebraicas hacemos exactamente lo mismo, por ejemplo,

Ejemplo 4.3. *Sumar las siguientes fracciones:*

$$\frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{x+1}{x-5} - \frac{x}{(x-5)^2}$$

Los denominadores son: x , x^2 , $x-5$, y $(x-5)^2$. El mínimo común múltiplo de ellos es la expresión de menor exponente que es dividida exactamente por cada uno de ellos, en este caso $x^2(x-5)^2$. Para proceder como en el ejemplo con racionales, al dividir el mínimo común múltiplo entre cada denominador, se obtiene: $x(x-5)^2$, $(x-5)^2$, $x^2(x-5)$, y x^2 , estos resultados los multiplicamos por su respectivo numerador, es decir, por 1, 5, $(x+1)$, y x , y luego quitamos paréntesis para realizar las operaciones que aparecen y obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{x+1}{x-5} - \frac{x}{(x-5)^2} &= \frac{x(x-5)^2 + 5(x-5)^2 - (x+1)x^2(x-5) - x^3}{x^2(x-5)^2} \\ &= \frac{(x+5)(x^2 - 10x + 25) - x^2(x^2 - 4x - 5) - x^3}{x^2(x-5)^2} \\ &= \frac{x^3 - 10x^2 + 25x + 5x^2 - 50x + 125 - x^4 + 4x^3 + 5x^2 - x^3}{x^2(x-5)^2} \\ &= \frac{-x^4 + 4x^3 - 25x + 125}{x^2(x-5)^2}. \end{aligned}$$

4.3. Ejercicios

1. Simplificar las siguientes fracciones algebraicas

$$a) \frac{x^2 + 9x + 20}{x^2 - 3x - 28}$$

$$b) \frac{x^2 - 15x + 56}{x^2 + 2x - 80}$$

$$c) \frac{x^2 + 17x + 66}{x^2 + 18x + 72}$$

$$d) \frac{x^2 - 14x + 45}{x^2 - 21x + 108}$$

$$e) \frac{6x^2 - x - 2}{6x^2 - 3x - 3}$$

$$f) \frac{15x^2 + 14x - 8}{20x^2 + 17x - 10}$$

$$g) \frac{15x^3 + 59x^2 + 34x - 24}{20x^3 + 77x^2 + 41x - 30}$$

$$h) \frac{2x^3 + 3x^2 - 23x - 12}{2x^3 - 3x^2 - 50x - 24}$$

2. Sumar las siguientes fracciones polinómicas

$$a) \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x-2} - \frac{x-1}{(x-2)^2} + \frac{3}{(x-2)^3}$$

$$b) \frac{4}{x-6} + \frac{x-1}{x-3} - \frac{x-1}{x-2} + \frac{x+1}{(x-6)^2}$$

$$c) \frac{x}{x^2-1} + \frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{(x+1)^2} + \frac{3}{x-2}$$

$$d) \frac{x}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} - \frac{x+4}{x+2} + \frac{x}{x-4}$$

$$e) \frac{x}{x^2+2x-3} + \frac{5x}{x^2+3x-4} - \frac{3x}{x^2+7x+4}$$

$$f) \frac{x}{x^2+x-20} + \frac{x-4}{x^2+8x+15} - \frac{x}{x^2-3x-18}$$

$$g) \frac{x}{4x^2-1} + \frac{x+1}{6x^2-x-2} - \frac{5x}{6x^2-7x+2}$$

$$h) \frac{2}{(x-3)^2} + \frac{2x+1}{x^2-6x+9} + \frac{7}{x^2-8x+15}$$

$$i) \frac{x}{(2x-3)^2} - \frac{3x+1}{2x^2+5x-12} - \frac{7}{2x^2+3x-20}$$

$$j) \frac{x}{x^3-2x^2-11x+12} - \frac{3x+1}{x^3+4x^2+x-6} - \frac{7}{x^3+6x^2+5x-12}$$

Capítulo 5

Ecuaciones

5.1. Algunos tipos de ecuaciones

Definición 5.1. *Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones que contiene incógnitas (letras que eventualmente representan números).*

Ejemplo 5.1. *Algunas ecuaciones son:*

- $3w + 5 = 8$
- $x^2 - 25 = (x + 5)(x - 5)$
- $y + 5x = 4$

5.1.1. Ecuación lineal

Es una ecuación que contiene incógnitas elevadas como máximo a la uno.

$$3x - \frac{1}{2}z - 7w = 9$$

Las incógnitas son x , z y w .

5.1.2. Ecuación lineal con una incógnita

Es una ecuación con una sola incógnita, la cual aparece elevada a la uno.

$$-2(y + 5) = y - \frac{3}{2}$$

5.1.3. Ecuación Cuadrática

Una ecuación cuadrática en una variable x con coeficientes reales es una ecuación de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

5.1.4. ¿Qué es una solución de una ecuación?

Es el valor que toma la incógnita para el cual la ecuación es verdadera. Las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se llaman también ceros o raíces de $ax^2 + bx + c$.

Ejemplo 5.2. Encuentre las soluciones de las siguientes ecuaciones:

1. $3w + 5 = 8$

Solución:

$$3w + 5 = 8$$

$$3w = 8 - 5$$

$$3w = 3$$

$$w = 1$$

La solución de la ecuación es 1.

2. $x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 0$

Solución:

$$x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$x^{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) = 0$$

$$x^{\frac{1}{2}}(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x^{\frac{1}{2}} = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 1 = 0$$

Según el procedimiento, las soluciones de la ecuación son 0, -1 y 1 ; pero cuando comprobamos, $x = -1$ es una solución errónea. Esto se tiene cuando tomamos factor común, cuando multiplicamos o dividimos una igualdad por algo que puede ser cero.

5.1.5. ¿Cómo resolver una ecuación con una incógnita?

1. Si la ecuación es lineal con una incógnita, para encontrar su solución, se despeja la incógnita aplicando las propiedades de la suma y multiplicación de números reales.

Ejemplo 5.3. Resolver la ecuación $\frac{-5}{2}w + 1 = -7 - 3w$

Solución

$$\frac{-5}{2}w + 3w = -7 - 1$$

$$\frac{1}{2}w = -8$$

$$w = -16$$

Así, la solución de la ecuación es -16 .

2. Si la ecuación es de potencia diferente de uno, se iguala a cero, se factoriza como producto de ecuaciones lineales y se aplica la propiedad del producto igual a cero (si un producto es igual a cero al menos uno de sus factores debe ser cero).

Ejemplo 5.4. Resolver la ecuación $x^{\frac{-3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = -2x^{\frac{-1}{2}}$

Solución

$$\begin{aligned}
 x^{\frac{-3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} &= -2x^{\frac{-1}{2}} \\
 x^{\frac{-3}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} &= 0 \\
 x^{\frac{-3}{2}}(1 + 2x + x^2) &= 0 \\
 x^{\frac{-3}{2}}(x + 1)^2 &= 0 \\
 x^{\frac{-3}{2}}(x + 1)(x + 1) &= 0 \\
 x^{\frac{-3}{2}} = 0 \text{ o } (x + 1) &= 0
 \end{aligned}$$

Para $x^{\frac{-3}{2}} = 0$ no existen valores de x que la hagan cierta, pero para $x + 1 = 0$, se tiene $x = -1$. Si verificamos en la ecuación inicial, podemos notar que $x = -1$ no se puede reemplazar en ella, es decir, $x = -1$ tampoco es solución. El proceso lleva a este valor errado pues en uno de los pasos se factorizó $x^{-3/2}$, lo cual, dado que el exponente es negativo puede llevar a dividir por cero. Cada vez que multiplicamos o dividimos la ecuación por algún término variable debemos tener cuidado de no obtener soluciones erróneas, para esto se comprueba que los resultados obtenidos son soluciones de la ecuación. En conclusión, la ecuación dada no tiene solución.

3. Para resolver una ecuación cuadrática se pueden utilizar los casos de factorización o la fórmula cuadrática.

Ejemplo 5.5. Encontrar las soluciones de la ecuación $2x^2 - 3x + 1 = 0$

Solución: Factorizando se tiene

$$\begin{aligned}
 \frac{(2x-2)(2x-1)}{2} &= 0 \\
 \frac{2(x-1)(2x-1)}{2} &= 0 \\
 (x-1)(2x-1) &= 0 \\
 (x-1) = 0 \text{ o } (2x-1) &= 0 \\
 x = 1 \text{ o } x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Así, las soluciones de la ecuación son 1 y $\frac{1}{2}$.

Fórmula cuadrática

Si la ecuación es de la forma $ay^2 + by + c = 0$ entonces

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Las soluciones de la ecuación son $y = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ y $y = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Ejemplo 5.6. Resolver la ecuación $y^2 + 3y + 2 = 0$

Solución:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} \\
 &= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} \\
 &= \frac{-3 \pm 1}{2}.
 \end{aligned}$$

Es decir, $y = \frac{-3+1}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ o $y = \frac{-3-1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$. Entonces, las soluciones de la ecuación son -1 y -2 .

5.1.6. Sistemas de ecuaciones 2×2

Es un conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ejemplo 5.7.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 6 \\ -x - 8y = 18 \end{cases}$$

5.1.7. Solución de un sistema de ecuaciones 2×2

Una solución de un sistema de ecuaciones 2×2 , es una pareja de valores que toman las incógnitas para las cuales las ecuaciones son verdaderas. Algunos métodos para solucionarlos son:

Método de Igualación

Primero se despeja, en cada una de las ecuaciones, cualquiera de las incógnitas, luego se igualan los dos valores encontrados obteniéndose una ecuación en una incógnita. Posteriormente se encuentra el valor de ésta y luego se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales para despejar la incógnita faltante.

Ejemplo 5.8. Resolver el sistema $\begin{cases} 2z + 3w = 1 & (1) \\ -z - 3w = 2 & (2) \end{cases}$

Despejamos z en las dos ecuaciones

De la primera ecuación se tiene $z = \frac{1-3w}{2}$

De la segunda ecuación se tiene $z = -2 - 3w$

Ahora igualando los dos valores de z obtenemos

$$\frac{1-3w}{2} = -2 - 3w$$

resolviendo esta ecuación

$$\begin{aligned} 1 - 3w &= 2(-2 - 3w) \\ -3w + 6w &= -4 - 1 \\ 3w &= -5 \\ w &= -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Luego reemplazando $w = -\frac{5}{3}$ en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} 2z + 3\left(-\frac{5}{3}\right) &= 1 \\ 2z &= 1 + 5 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Entonces la solución del sistema de ecuaciones es $z = 3$, $w = -\frac{5}{3}$.

Método de Sustitución

En este método se despeja de una de las ecuaciones cualquiera de las incógnitas y luego se reemplaza ese valor en la otra ecuación, obteniéndose una con una incógnita; se encuentra el valor de esta incógnita y luego se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales para hallar el valor de la incógnita faltante.

Ejemplo 5.9. Resolver el sistema
$$\begin{cases} x + 3y = 6 & (1) \\ -x - 8y = 8 & (2) \end{cases}$$

Se despeja x de la primera ecuación

$$x = 6 - 3y.$$

Se sustituye el valor de x en la segunda ecuación $-(6 - 3y) - 8y = 8$. Y se resuelve esta ecuación:

$$\begin{aligned} 3y - 8y &= 8 + 6 \\ -5y &= 14 \\ y &= -\frac{14}{5} \end{aligned}$$

Luego reemplazamos $y = -14/5$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned} -x - 8(-14/5) &= 8 \\ -x &= 8 - \frac{112}{5} \\ x &= \frac{72}{5} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema de ecuaciones es $x = \frac{72}{5}$ y $y = -\frac{14}{5}$.

Método de Reducción

Por medio de multiplicaciones por constantes, se hacen iguales los coeficientes de una de las incógnitas pero con signos distintos, luego se suman estas ecuaciones eliminándose la incógnita a la cual le igualamos los coeficientes. La ecuación resultante tiene una incógnita, la cual se puede solucionar con los métodos pasados. Después de encontrar el valor de esta incógnita, se sustituye en cualquiera de las ecuaciones iniciales y se encuentra el valor de la incógnita faltante.

Ejemplo 5.10. Resolver el sistema
$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = 2 & (1) \\ x^2 - 2y^2 = \frac{1}{3} & (2) \end{cases}$$

Vamos a igualar los coeficientes de la incógnita y en ambas ecuaciones pero con signos distintos, para ésto multipliquemos la ecuación (1) por -2 y la ecuación (2) por 3 , obteniéndose

$$\begin{aligned} -6x^2 + 6y^2 &= -4 \\ 3x^2 - 6y^2 &= 1 \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones miembro a miembro se tiene

$$\begin{aligned}
-3x^2 &= -3 \\
3 - 3x^2 &= 0 \\
1 - x^2 &= 0 \\
(1 - x)(1 + x) &= 0 \\
1 - x = 0 \text{ o } 1 + x &= 0 \\
x = 1 \text{ o } x &= -1
\end{aligned}$$

Luego substituyendo $x = 1$ en la ecuación (2)

$$\begin{aligned}
1^2 - 2y^2 &= \frac{1}{3} \\
-2y^2 &= \frac{1}{3} - 1 \\
-2y^2 &= \frac{-2}{3} \\
y^2 &= \frac{1}{3} \\
y^2 - \frac{1}{3} &= 0 \\
(y - \frac{\sqrt{3}}{3})(y + \frac{\sqrt{3}}{3}) &= 0 \\
y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o } y &= -\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Obtenemos los valores de $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ o $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
 Ahora substituyendo $x = -1$ en la ecuación (1)

$$\begin{aligned}
3(-1)^2 - 3y^2 &= 2 \\
3 - 3y^2 &= 2 \\
-3y^2 &= -1 \\
3y^2 &= 1 \\
3y^2 - 1 &= 0 \\
(\sqrt{3}y - 1)(\sqrt{3}y + 1) &= 0 \\
y = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ o } y &= -\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

Tenemos los valores de $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$ o $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
 Por lo tanto las soluciones del sistema de ecuaciones son:

$$\begin{aligned}
&\left[x = 1, y = \frac{\sqrt{3}}{3} \right], \left[x = 1, y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right], \\
&\left[x = -1, y = \frac{\sqrt{3}}{3} \right] \text{ o } \left[x = -1, y = -\frac{\sqrt{3}}{3} \right]
\end{aligned}$$

5.2. Ejercicios

1. Resuelva las ecuaciones

a) $3x - 2 = 10$

b) $-2w + 1 = 9$

c) $3(z - 2) = 15$

d) $\frac{5}{2}t - 8 = t + 3$

e) $\frac{4}{3}x - 7 = \frac{1}{3}x + 8$

f) $\frac{3}{5}(y - 5) = y + 1$

g) $\frac{7}{2}v + 5 + \frac{1}{2}v = \frac{5}{2}v - 6$

h) $\frac{4}{3}(z + 8) = \frac{3}{4}(2z + 12)$

i) $1 - 12u = 7(1 - 2u)$

j) $x + 2(\frac{1}{6}x + 2) = \frac{6}{5}x + 16$

k) $\sqrt{2z + 8} = \sqrt{6z}$

l) $\frac{2}{x} - 5 = \frac{6}{x} + 4$

- m) $5(1-y)^2 - 5(y^2 - 3y - 7) = y(y-3) - 2y(y+5) - 2$
 n) $6x - (2x+1) = -\{-5x + [-(-2x-1)]\}$
 ñ) $14w - (3w-2) - [5w+2 - (w-1)] = 0$

2. Resuelva la ecuación para la incógnita indicada

- a) $c = \frac{2ab}{a+b}$, para b
 b) $V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)$, para R
 c) $\frac{ax+b}{cx+d} = 2$, para x
 d) $F = G\frac{mM}{r^2}$; para r
 e) $S = \frac{n(n+1)}{2}$; para n
 f) $A = 2lw + 2wh + 2lh$; para h
 g) $a^2 + b^2 = c^2$; para b

3. Plantee la ecuación correspondiente con una incógnita y resuelva

- a) Determine un número tal que dos tercios de él incrementados en uno sean igual a 13.
 b) Determine las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es de 56 pulgadas, si la longitud es 4 pulgadas mayor que el ancho.
 c) Cada uno de los dos lados iguales de un triángulo isósceles tiene 3 pulgadas más que la base. El perímetro tiene 21 pulgadas. Calcule la longitud de cada lado.
 d) Roberto da una caminata a un paso de 3 millas por hora. Dos horas después, Rogelio trata de alcanzarlo trotando a 7 millas por hora ¿Cuánto tiempo tardará en llegar donde está Roberto?
 e) La suma de tres números es 238. El primero excede al duplo del segundo en 8 y al tercero en 18. hallar los números.

4. Resolver la siguientes ecuaciones

- a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
 b) $x^2 - 10x = 0$
 c) $2x^2 = x$
 d) $4x^2 - 15x = -9$
 e) $(y+1)(y+2) = 30$
 f) $2z(z+6) = 22z$
 g) $x^2 - 2x - 15 = 0$
 h) $2w^2 - 2w = 15$
 i) $-y^2 + 6y - 14 = 0$
 j) $2 - 4x - x^2 = 0$
 k) $3z + 1 = 2z^2$
 l) $2t^2 - t + 1 = 0$
 m) $4x^2 + x = 3$
 n) $2y + 3 = -4y^2$
 ñ) $\frac{4}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{35}{x^2-1}$
 o) $\frac{1}{z} - \frac{1}{2z} - \frac{1}{5z} = \frac{10}{z+1}$
 p) $y^2 - \sqrt{5}y + 1 = 0$
 q) $\frac{x^2}{x+100} = 50$
 r) $1 + \frac{2x}{(x+3)(x+4)} = \frac{2}{x+3} + \frac{4}{x+4}$
 s) $\frac{1}{w-1} - \frac{2}{w^2} = 0$
 t) $\sqrt{2x+1} + 1 = x$
 u) $2y + \sqrt{y+1} = 8$
 v) $\sqrt{\sqrt{x-5} + x} = 5$
 w) $4(z+1)^{\frac{1}{2}} - 5(z+1)^{\frac{3}{2}} + (z+1)^{\frac{5}{2}} = 0$
 x) $x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{-1}{2}} = 10x^{\frac{-3}{2}}$
 y) $\frac{1}{z^3} + \frac{4}{z^2} + \frac{4}{z} = 0$

5. Plantee la ecuación correspondiente con una incógnita y resuelva

- a) La suma de un número y su cuadrado es 56. calcule el número.

- b) La longitud de un rectángulo es 3 cm mayor que su ancho. El área es de 70 cm². Determine las dimensiones del rectángulo.
- c) Se debe fabricar una caja con base cuadrada y sin tapa a partir de un trozo cuadrado de cartón, cortando cuadrados de 4 pulgadas en cada una de las esquinas y doblando los costados. La caja debe tener 100 pulgadas cúbicas ¿Cuál es el tamaño de la pieza de cartón necesaria?
- d) Durante su carrera en las ligas mayores, Fabio conectó 31 cuadrangulares más que Juan. Juntos batearon 1459 ¿Cuántos conectó Juan?

6. Determine las soluciones del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} 2u - 6v = -16 \\ 5u - 3v = 8 \end{cases} & e) \begin{cases} 2(x - y - 1) = 1 - 2x \\ 6(x - y) = 4 - 3(3y - x) \end{cases} & i) \begin{cases} w^2 + t^2 = 8 \\ w + t = 0 \end{cases} \\
 b) \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3y = 6 \\ -x - 8y = 18 \end{cases} & f) \begin{cases} \frac{x-2}{\frac{5}{3}} + \frac{y+1}{\frac{10}{2}} = 1 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y+3}{2} = 4 \end{cases} & j) \begin{cases} v^2 + w = 9 \\ v - w + 3 = 0 \end{cases} \\
 c) \begin{cases} 3s + t - 3 = 0 \\ 2s - 3t - 2 = 0 \end{cases} & g) \begin{cases} 4x = 7y - 6 \\ 9y = -12x + 12 \end{cases} & k) \begin{cases} 2x^2 + 4y = 13 \\ x^2 - y^2 = \frac{7}{2} \end{cases} \\
 d) \begin{cases} \frac{1}{4}w + \frac{1}{3}y = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{2}w + y = 1 \end{cases} & h) \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{3}{4}x \end{cases} & l) \begin{cases} 3x^2 + 4y = 17 \\ 2x^2 + 5y = 2 \end{cases}
 \end{array}$$

7. Use un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas para resolver los siguientes problemas

- a) El perímetro de un rectángulo es de 72 pulgadas. Su longitud es tres y media veces el ancho. Calcule las dimensiones.
- b) El triple del mayor de dos números es 10 más que el doble del menor. Cinco veces el menor es cuatro veces el mayor menos 11. ¿Cuáles son los números?

5.3. Ecuaciones de Orden Superior

1. Resolver las ecuaciones

$$\begin{array}{ll}
 a) x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0 & f) x^5 - 4x^4 - 3x^3 + 22x^2 - 4x - 24 = 0 \\
 b) z^3 - 4z^2 + z + 6 = 0 & g) 3t^5 - 14t^4 - 14t^3 + 36t^2 + 43t + 10 = 0 \\
 c) x^3 - 2x^2 - 2x - 3 = 0 & h) x^6 - 729 = 0 \\
 d) x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 8x - 4 = 0 & i) y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = 0 \\
 e) w^4 - w^3 - 23w^2 - 3w + 90 = 0 & j) 2x^6 + 5x^5 + x^4 + 10x^3 - 4x^2 + 5x - 3 = 0
 \end{array}$$

Capítulo 6

Solución de problemas

6.1. Introducción

La solución de problemas prácticos en Ingeniería, Economía, Física y muchas otras áreas de la ciencia, casi siempre llevan a resolver sistemas de ecuaciones. Muchos de estos sistemas se podrían resolver utilizando los procedimientos estudiados hasta ahora, a pesar de que no existen reglas sencillas que garanticen el éxito en la resolución de problemas. Sin embargo es posible establecer algunas pautas y algunos principios que pueden ser útiles en estos procesos. Las sugerencias planteadas en este capítulo son basadas en el libro de *George Polya*¹.

1. Comprender el problema

Es importante leer el problema y asegurarse de comprenderlo completamente, identificar las incógnitas y las cantidades conocidas y establecer las condiciones dadas. Si es necesario y se puede, se debe dibujar un diagrama e identificar en él, las cantidades mencionadas anteriormente. Igualmente es importante definir nombres y unidades para dichas cantidades y establecer una notación adecuada.

2. Pensar un plan

Determinar alguna relación entre las incógnitas y los datos conocidos, para ello es bueno:

- Tratar de reconocer algo familiar.
- Identificar algún patrón.
- Utilizar analogías.
- Introducir algo adicional.
- Dividir el problema en casos.
- Trabajar hacia atrás.
- Establecer objetivos parciales.
- Razonar Indirectamente.
- Utilizar el principio de inducción matemática cuando sea posible.

¹Polya, G. *Cómo Plantear y Resolver Problemas*. Ed. Trillas: México, 1965.

3. Ejecutar el plan

Llevar a cabo el plan trazado en el punto 2, tomando atenta nota de cada paso para asegurarse de que el proceso es correcto.

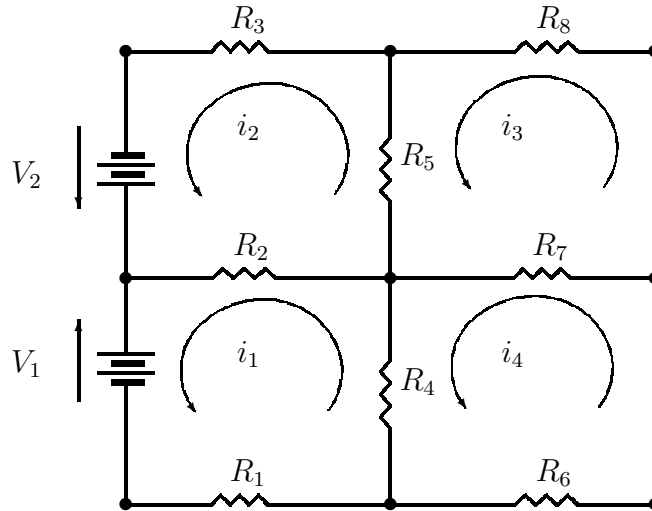
4. Mirar hacia atrás

es importante revisar los pasos realizados para ver si se han cometido errores y para encontrar formas más sencillas de resolver el problema.

El siguiente ejemplo permite visualizar la necesidad de herramientas matemáticas para encontrar solución a un problema de la vida práctica:

Ejemplo 6.1. (Regla de Kirchhoff) *Un problema de Circuitos:*

La red de resistencia eléctrica de la figura 2.1 contiene resistencias de R_1 a R_8 y dos fuentes de tensión o voltaje V_1 y V_2 . Las corrientes en los cuatro circuitos cerrados de la red son i_1 a i_4 , que se dibujan en sentido contrario a las manecillas del reloj (se hubieran podido dibujar de otra manera).



Las Ecuaciones para las corrientes en términos de las resistencias y tensiones conocidas se obtienen de la ley de Ohm y de la ley de Kirchhoff para el voltaje. Estas leyes son:

- **Ley de Ohm:** La caída de voltaje a través de una resistencia R es (iR) en la dirección de la corriente i .
- **Ley de Kirchhoff para el voltaje:** La caída de voltaje neta en un circuito cerrado es cero.
- **Ley de Kirchhoff para la corriente:** La corriente neta que sale de un nodo de un circuito es cero

Las ecuaciones obtenidas son:

$$\text{Circuito 1} \quad i_1 R_1 + (i_1 - i_4) R_4 + (i_1 - i_2) R_2 + V_1 = 0$$

$$\text{Circuito 2} \quad (i_2 - i_1) R_2 + (i_2 - i_3) R_5 + i_2 R_3 - V_2 = 0$$

$$\text{Circuito 3} \quad (i_3 - i_4) R_7 + i_3 R_8 + (i_3 - i_2) R_5 = 0$$

$$\text{Circuito 4} \quad i_4 R_6 + (i_4 - i_3) R_7 + (i_4 - i_1) R_4 = 0$$

Obviamente este es un S.E.L. cuya solución, a lo mejor, requiere de un proceso bastante engorroso para ser hallada, pero que obviamente se puede encontrar.

Nota: Asigne valores a las resistencias y a la fuentes y resuelva el sistema de ecuaciones obtenido en el ejemplo utilizando algún programa de computador.

6.2. Estrategia para resolver problemas

En la solución de problemas de aplicación siempre es bueno tener una estrategia metodológica propia para abordarlos, aquí sugerimos (con base en las recomendaciones de *Polya*) algunos pasos que pueden ser aplicados indistintamente a diferentes tipos de situaciones, en diferentes áreas del conocimiento:

- **Definición de variables:**

Lea cuidadosamente el problema y determine las variables necesarias a ser definidas para el posterior planteamiento del mismo. Aquí es necesario hacer diferencias entre los términos desconocidos o *incógnitas* y los conocidos o *constantes*.

- **Modelamiento del problema:**

Aquí se pretende que el estudiante transforme la información contenida en el problema, en ecuaciones; dicha información la mayoría de las veces está redactada en forma verbal y se requiere de una buena dosis de práctica, para desarrollar la habilidad de hacer esta especie de “traducción” del lenguaje verbal al lenguaje matemático.

- **Solución del modelo:**

Ésta es quizás la parte más sencilla en la solución de un problema de aplicación, dado que aquí, se trata de aplicar los métodos estudiados previamente para resolver ecuaciones, también es necesario que el estudiante conozca las operaciones y propiedades estudiadas, para los números involucrados en el problema.

- **Interpretación de resultados:**

Es necesario que la persona que resuelve un problema de aplicación, sea consciente de las unidades de cada variable, al igual que de su valor numérico, para que pueda al final del proceso, verificar que éstas tienen sentido y además poder expresar su respuesta en términos de unidades y cantidades reales y no las definidas en la primera parte del proceso.

Veamos un par de ejemplos en los que se pretende mostrar cada uno de los pasos del anterior proceso:

Ejemplo 6.2. *El Problema:*

“En un corral hay 70 animales entre conejos y gallinas. Si entre todos los animales suman 190 patas. ¿Cuántos conejos y cuántas gallinas hay en el corral?”

- **Definición de variables:**

Si leemos detenidamente el problema, deducimos que el objetivo es calcular la cantidad de conejos y la cantidad de gallinas que hay en el corral, por lo tanto alrededor de este objetivo, definiremos nuestras incógnitas.

$$\begin{aligned}x_1 &:= \text{Cantidad de conejos} \\x_2 &:= \text{Cantidad de gallinas}\end{aligned}$$

Estas tres variables se hubieran podido nombrar de cualquier forma como α, β, γ , a, b, c o x, y, z sin que ello afecte la solución del problema.

■ **Planteamiento del problema:**

Para plantear el problema, se desglosará el texto inicial teniendo en cuenta los signos de puntuación y las oraciones completas que lo conforman. Así, la expresión:

“En un corral hay 70 animales entre conejos y gallinas.”

Se puede escribir como:

$$x_1 + x_2 = 70 \tag{6.1}$$

Ahora, la frase:

“Si entre todos los animales suman 190 patas”

Se puede escribir como:

$$4x_1 + 2x_2 = 190$$

Así las cosas, escribiendo los resultados anteriores, el problema se puede resumir en:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 70 \\ 4x_1 + 2x_2 = 190 \end{cases} \tag{6.2}$$

el cual, como se observa es un sistema de ecuaciones lineales de 2×2 que se puede resolver utilizando los métodos estudiados en el capítulo 5.

■ **Solución de las ecuaciones:**

Utilizaremos un procedimiento intuitivo para resolver el sistema.

Imagine que en el corral están los 70 animales y usted de alguna manera logra que los conejos se paren en sus patas traseras, esto significa que todos los animales (gallinas y conejos) quedarían parados en dos patas y por lo tanto habría 140 patas en el piso, como en total hay 190 patas, esto significa que hay 50 patas de conejo levantadas, dos por cada conejo y por ende hay 25 conejos. Como el resto de los 70 animales son gallinas, quiere decir que hay 45 gallinas en el corral.

■ **Interpretación de resultados:**

De acuerdo a las variables definidas y los resultados obtenidos mediante el proceso anterior, podemos concluir que:

“En el corral hay 25 conejos y 45 gallinas”

Ejemplo 6.3. El problema:

“Tres especies de ardillas han sido llevadas a una isla con una población inicial total de 2000. Después de 10 años la especie I ha duplicado su población, la especie II se ha incrementado en un 50 % y la especie III se ha extinguido. Si el incremento de la población de la especie I es igual al de la especie II y si la población total se ha incrementado en 500, determine la población inicial de cada una de las tres especies”

■ **Definición de variables:**

Si leemos detenidamente el problema, deducimos que el objetivo es calcular la cantidad inicial de ardillas en cada una de las especies, por lo tanto alrededor de éste objetivo, definiremos nuestra incógnitas.

x_1 := Cantidad inicial de ardillas de la especie I

x_2 := Cantidad inicial de ardillas de la especie II

x_3 := Cantidad inicial de ardillas de la especie III

Estas tres variables se hubieran podido nombrar de cualquier forma como x, y, z o a, b, c sin que ello afecte la solución del problema.

■ **Planteamiento del problema:**

Para plantear el problema, se desglosará el texto inicial teniendo en cuenta los signos de puntuación y las oraciones completas que lo conforman. Así, la expresión:

“Tres especies de ardillas han sido llevadas a una isla con una población inicial total de 2000.”

Se puede escribir como:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2000 \quad (6.3)$$

Dado que las variables utilizadas fueron definidas previamente. Es importante aclarar que tanto las variables como la frase, se refieren a la cantidad *inicial* de ardillas y no a la cantidad después de 10 años.

Ahora, la frase:

“Después de 10 años la especie I ha duplicado su población, la especie II se ha incrementado en un 50 % (recordemos que $50\% = \frac{50}{100}$) y la especie III se ha extinguido”

Se puede escribir como:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= \text{Cantidad final de ardillas de la especie I} \\ x_2 + \frac{50}{100}x_2 &= \text{Cantidad final de ardillas de la especie II} \end{aligned}$$

Las cuales representan la población de ardillas, 10 años después.

Igualmente: “Si el incremento de la población de la especie I es igual al de la especie II” podemos expresar la palabra incremento como el valor final de algo, menos el valor inicial y por tanto

$2x_1 - x_1$ = Incremento en la cantidad de ardillas de la especie I

$x_2 + \frac{50}{100}x_2 - x_2 =$ Incremento en la cantidad de ardillas de la especie II

Es decir

$$2x_1 - x_1 = x_2 + \frac{50}{100}x_2 - x_2 \quad (6.4)$$

Y por último

“si la población total se ha incrementado en 500”

entendida como población total final menos población total inicial, sería:

$$2x_1 + \left(x_2 + \frac{50}{100}x_2\right) - 2000 = 500 \quad (6.5)$$

Así las cosas, escribiendo los resultados (6.3), (6.4) y (6.5) el problema se puede resumir en :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2000 \\ 2x_1 - x_1 = x_2 + \frac{50}{100}x_2 - x_2 \\ 2x_1 + \left(x_2 + \frac{50}{100}x_2\right) - 2000 = 500 \end{cases} \quad (6.6)$$

el cual, como se observa, es un sistema de ecuaciones lineales de 3×3

El anterior sistema se puede simplificar y sus variables se pueden ordenar para presentarlo como:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2000 \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 = 2500 \end{cases} \quad (6.7)$$

■ Solución de las ecuaciones:

Utilizando cualquiera de los métodos estudiados se puede resolver el sistema (6.7), obteniéndose:

$$\begin{cases} x_1 = 500 \\ x_2 = 1000 \\ x_3 = 500 \end{cases}$$

■ Interpretación de resultados:

De acuerdo a las variables definidas y los resultados obtenidos mediante el proceso de reducción, podemos concluir que:

“La población inicial de la isla estaba conformada por 500 ardillas de la especie I, 1000 ardillas de la especie II y 500 ardillas de la especie III”

6.3. Ejercicios

Defina adecuadamente las variables necesarias y **plantee** las ecuaciones correspondientes en los siguientes problemas:

1. Una cafetería tiene 120 mesas, unas con cuatro asientos cada una y otras con ocho asientos cada una. Si la capacidad de asientos de la cafetería es 640, y la mitad de las mesas de cuatro asientos equivale al número de mesas de ocho asientos. ¿Cuántas mesas de cuatro asientos hay?

2. Los dueños de un centro comercial, en donde el 70 % del área era destinada para parqueaderos, compraron un terreno adyacente y dispusieron (de éste último) el 85 % para parqueaderos y el resto para construcción. El área total es ahora 300000 metros cuadrados con el 75 % para parqueaderos. Encuentre el área original y el área del terreno adquirido.
3. La suma de tres números reales es 105. El doble del número mediano excede en 20 unidades al número mayor, y el 10 % del mayor es inferior en 6 unidades al 20 % de la suma de los otros dos. ¿Cuáles son estos números?
4. Un editor publica un posible éxito de librería en tres presentaciones distintas: Libro de bolsillo, club de lectores y edición de lujo. Cada libro de bolsillo necesita un minuto para el cosido y 2 para el pegado. Cada libro para el club de lectores necesita 2 minutos para el cosido y 4 para el pegado. Cada libro en edición de lujo necesita 3 minutos para el cosido y 5 para el pegado. Si la planta de cosido está disponible 6 horas diarias y la planta de pegado 11 horas, ¿Cuántos libros de cada presentación se pueden hacer por día de modo que las plantas se aprovechen a toda capacidad?
5. Un departamento de caza y pesca estatal suministra tres tipos de alimento a un lago que mantiene a tres especies de peces. Cada pez de la especie 1 consume cada semana, un promedio de dos unidades del alimento A, tres unidades del alimento B y dos unidades del alimento C. Cada pez de la especie 2, consume cada semana un promedio de seis unidades del alimento A, doce unidades del alimento B, y cinco unidades del alimento C. Para un pez de la especie 3, el consumo semanal promedio es cuatro unidades del alimento A, tres unidades del alimento B y cinco unidades del alimento C. Cada semana se proporciona al lago 3000 unidades del alimento A, 3000 del B y 3500 del C. Si se supone que todo el alimento es ingerido, ¿cuántos peces de cada especie pueden coexistir en el lago?. ¿Existe una única solución?.
6. Una compañía cuenta con tres tipos de máquinas I, II y III que producen dulces de tres clases: A, B y C, de tal forma que el número de dulces que producen diariamente es: 760 de clase A, 380 de clase B y 660 de clase C. Si la máquina tipo I produce diariamente 20 dulces del tipo A, 10 dulces del tipo B y ningún dulce del tipo C; La máquina tipo II produce diariamente 24 dulces del tipo A, 18 dulces del tipo B y 30 dulces del tipo C; y la máquina tipo III produce 30 dulces del tipo A, 10 dulces del tipo B y 30 dulces del tipo C, ¿Cuántas máquinas de cada tipo posee la compañía?
7. La Compañía Alkos fabrica tres tipos de computadora: Ciclón, Cíclope y Cicloide. Para armar una Ciclón se necesitan 10 horas, otras 2 horas para probar sus componentes y 2 horas más para instalar sus programas. El tiempo requerido para la Cíclope es 12 horas en su ensamblado, 2.5 para probarla y 2 horas para instalar los programas. La Cicloide, la más sencilla de la línea, necesita 6 horas de armado, 1.5 horas de prueba y 1.5 horas de instalación de programas. Si la fábrica de esta empresa dispone de 1560 horas de trabajo por mes para armar, 340 horas para probar y 320 horas para instalar, ¿Cuántas computadoras de cada tipo puede producir en un mes?
8. Calcule la longitud de cada lado de un paralelogramo con 100 centímetros de perímetro y en el que dos lados consecutivos difieren 10 centímetros en su longitud

9. Tres compuestos se mezclan para formar tres tipos de fertilizantes. Una unidad del fertilizante del tipo I requiere 10 kg. del compuesto A, 30 del B y 60 del C; una unidad del tipo II requiere 20 kg del A, 30 del B y 50 del C; Una unidad del tipo III requiere 50 kg. de A, y 50 del C. Si hay disponibles 1600 kg. del compuesto A, 1200 kg. del B y 3200 del C, ¿Cuántas unidades de cada tipo de fertilizante se pueden producir si se usa todo el material químico disponible?
10. Un empleado de cierta empresa extranjera debe visitar Bogotá, Medellín y Cali para realizar un trabajo y en cada ciudad debe permanecer mínimo 2 días. Suponga que en cada una de las tres ciudades gasta 10 dólares diarios en transporte. Los gastos diarios en alimentación son: en Bogotá 20 dólares, en Medellín 30 dólares y en Cali 30 dólares. Por concepto del hotel el gasto diario es , en Bogotá 40 dólares, en Medellín 20 dólares y en Cali 20 dólares. Suponiendo que los viáticos totales por los tres conceptos están distribuidos como sigue: 140 dólares para transporte, 320 dólares destinados a la alimentación y 480 para el hotel.
- a) Determine el número de días que el empleado puede permanecer en cada una de las tres ciudades.
 - b) Encuentre el gasto total en Bogotá.
 - c) ¿Cómo cambiaría la solución si no se tuviera la condición de permanecer mínimo 2 días en cada ciudad?
11. Para cierto tipo de cultivo, se recomendó que cada pie cuadrado de terreno sea tratado con 10 unidades de fósforo, 9 unidades de potasio y 19 unidades de nitrógeno. Suponga que hay tres marcas de fertilizantes en el supermercado, digamos marca \mathcal{X} , marca \mathcal{Y} y marca \mathcal{Z} . Una libra de la marca \mathcal{X} contiene 2 unidades de fósforo, 3 unidades de potasio y 5 unidades de nitrógeno. Una libra de la marca \mathcal{Y} contiene una unidad de fósforo, 3 unidades de potasio y 4 unidades de nitrógeno. Una libra de la marca \mathcal{Z} contiene solo una unidad de fósforo y una de nitrógeno.
- a) Tenga en cuenta el hecho obvio de que un número negativo de libras de cualquier marca no puede ser aplicado y que sólo se puede aplicar un número entero de libras de cada marca. Bajo estas restricciones, determine todas las posibles combinaciones de las tres marcas que pueden ser aplicados para satisfacer exactamente las cantidades recomendadas.
 - b) Suponga que la marca \mathcal{X} cuesta \$1000 por libra, la marca \mathcal{Y} cuesta \$6000 por libra y la marca \mathcal{Z} , \$3000 por libra. Determine la combinación más económica que satisfaga exactamente las cantidades recomendadas y las restricciones de la parte a.

Capítulo 7

Matemática Recreativa

Adicionemos algunos problemas sencillos y asequibles al estudiante, para hacer más ameno el desarrollo de estos módulos introductorios a las matemáticas superiores. LLamémoslos, rompecabezas o si se prefiere devana sesos.

También podríamos denominar a éstos ejercicios, los «Escapes a la rutina»; siempre y cuando se planteen de tal forma que facilite el abordaje de los mismos, en grupos de tres personas y de cada uno de éstos, un delegado interactúe luego con el delegado de cada uno de los demás grupos, en una especie de reunión plenaria para debatir el análisis de cada ejercicio.

Veamos algunos problemas ilustrativos:

1. Una amiba se reproduce por simple división; cada división tarda tres minutos en completarse. Cuando se coloca en un recipiente de cristal con un fluido nutriente, el recipiente se llena totalmente de amibas en una hora. ¿Cuánto tardaría para que se llene el recipiente si comenzamos con dos amibas, en vez de una?
2. El señor Blanco, el señor Rojas y el señor Pardo se encuentran por la calle. -Que curioso- dice el que lleva la corbata roja-, los colores de nuestras corbatas se corresponden con nuestros apellidos, pero ninguno lleva el color del propio.
-Tiene usted razón- comenta Blanco.
¿De qué color es la corbata de cada uno?
3. Usar una calculadora para obtener el valor de la expresión:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$$

El número parece muy simple. Demuestre que el valor calculado es correcto.

4. Determinar el último dígito en el número 3^{459}
5. ¿Cuántos años tiene?

A un aficionado le preguntaron cuántos años tenía. -Su respuesta nos lleva a un análisis y plantear un modelo sencillo, para describir éste tipo de respuestas- veamos, dijo: Tomen tres veces los años que tendré al cabo de los próximos tres años, al resultado resten tres veces los años que tenía hace tres años y obtendrán la respuesta esperada.

6. Preparación de una solución.

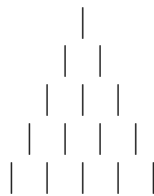
¿Recuerdan química? ¡Ah, que se puede esperar! En una probeta graduada se tiene un poco de ácido clorhídrico, -(¡no lo vaya a tocar!)- en otra, se tiene la misma cantidad, pero de agua. Para preparar una solución, al comienzo se transfirió de la primera probeta a la segunda veinte gramos del ácido. A continuación, dos tercios de la solución obtenida se vacían a la primera. Luego de esto, en la primera probeta resultó haber un cuarto más de líquido que en la segunda. ¿Cuánto de cada líquido se tomó inicialmente?

7. ¡Que no se derripan las neuronas!

Sale el adolescente a un partido clásico de Millonarios vs Santafé. Además de su boleto, llevaba unos quince mil pesos en billetes de mil y monedas de doscientos pesos. Al regresar alegre y satisfecho con el empate, traía tantos billetes como monedas tenía al principio, y tantas monedas como billetes tenía a la ida. Le quedó un tercio del monto inicial de dinero. ¿Cuánto gastó entonces?

8. Un juego

A propósito de las pirámides



Se juega entre dos personas, cada uno a su turno elimina la cantidad de palos que quiera, siguiendo solamente dos reglas:

- a) Los palos deben pertenecer a la misma fila.
- b) Los palos deben ser consecutivos.

Al final pierde quien elimine el último palo.

¿Podría usted demostrar que quien inicia el juego siempre gana, si hace los movimientos correctos?

9. Cien mil por cinco mil pesos.

Un cuentero invitado por Bienestar Universitario a la plazoleta central de la Facultad Tecnológica, hace la siguiente propuesta al público estudiantil: Declaro que pagaré cien mil pesos al que me de cinco mil en veinte monedas; deberá haber entre éstas, tres clases de monedas: de quinientos, de doscientos y de cincuenta pesos. Seguidamente dice: ¡puede ser que no tengan ustedes menuda! no se preocupen; dejen por escrito, cuántas monedas de cada clase se comprometen a traer.