FISIKA 2

Pertemuan 1 - Minggu 2 (443483)

March 16, 2021

1 Medan Listrik Oleh Muatan Terdistribusi Kontinu

1.1 Konsep Awal

Dari sini akan dibahas medan listrik oleh muatan terdistribusi kontinu yang homogen, atau persebarannya merata. Medan listrik yang ditimbulkan oleh elemen muatan Δq adalah:

$$\Delta \vec{E} = k\frac{\Delta q}{r^2}\hat{r}$$

Perlu diingat bahwa

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

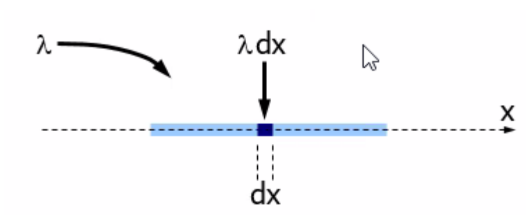
Medan listrik karena gabungan "elemen" muatan adalah:

$$\Delta \vec{E} = \sum_i \Delta \vec{E}_i = k\sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2}\hat{r}_i$$

Dimana $\hat{r}$ dan $\hat{r}_i$ adalah vektor satuan Δq untuk menghitung arah dari $\Delta\vec{E}$. Jika $\Delta q \to dq \to 0$, penjumlahannya berubah menjadi integral.

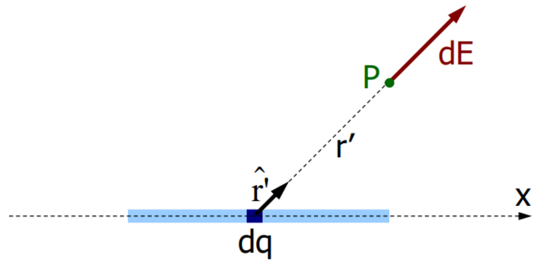
1.1.1 Bidang Satu Dimensi (batang)

Jika muatan didistribusikan di sepanjang segmen garis lurus yang sejajar dengan sumbu x, besarnya muatan dQ pada segmen dengan panjang dx adalah λdx



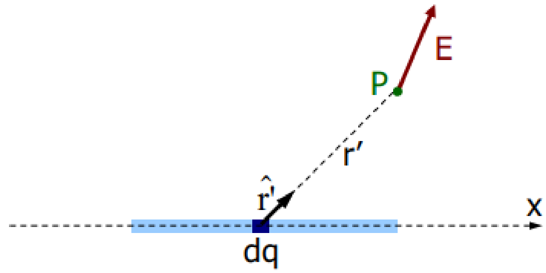
λ adalah massa jenis muatan (jumlah muatan per satuan panjang). λ bisa juga menjadi fungsi posisi.

Jika $\lambda \iff \ell \iff$ panjang, maka λ dikali panjang ruas garis adalah total muatan pada ruas garis.



Medan listrik di titik P karena muatan dq adalah

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{r'^2}\hat{r} = k\frac{\lambda dx}{r'^2}\hat{r'}$$



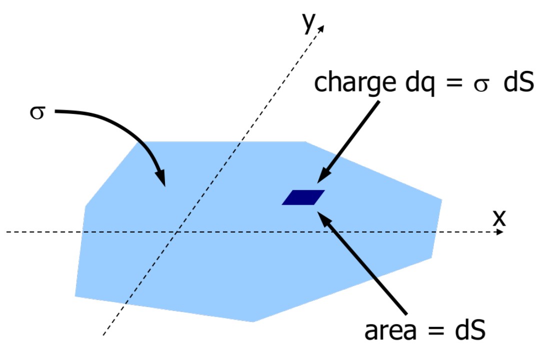
Medan Listrik di titik P karena seluruh garis muatan adalah

$$\vec{E} = k\int \hat{r'}\frac{\lambda(x)dx}{r'^2}$$

Integrasi dilakukan di seluruh panjang garis yang tidak harus tegak lurus. Juga, λ bisa menjadi fungsi posisi, dan dapat diambil di luar integral **hanya jika distribusi muatan seragam.**

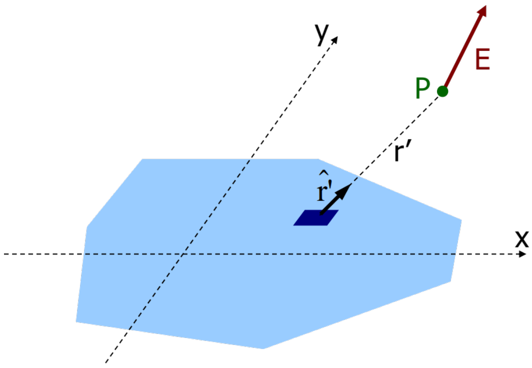
1.1.2 Bidang Dua Dimensi

Jika muatan didistribusikan pada permukaan dua dimensi, jumlah muatan dq pada bagian permukaan yang sangat kecil adalah $\sigma\ dS$, dimana σ adalah massa jenis muatan (jumlah muatan per satuan luas).

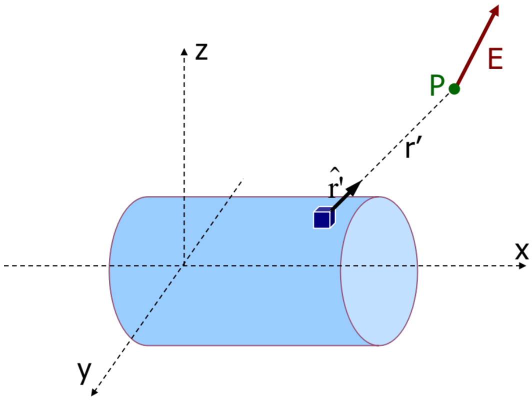


Lalu Medan listrik pada titik P karena seluruh permukaan muatan adalah..

$$\vec{E} = k \int_s \hat{r'} \frac{\sigma(x,y)dS}{r'^2}$$



1.1.3 Bangun 3 Dimensi



$$\vec{E} = k \int_V \hat{r'} \frac{\rho(x,y,z)dV}{r'^2}$$

Untuk densitas muatan pada bidang satu dimensi, dua dimensi dan tiga dimensi, **Jika distribusi muatan seragam, maka λ, σ dan ρ dapat diambil di luar integral**

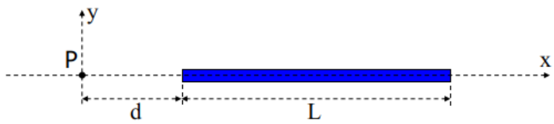
1.2 Densitas Muatan

Ini semua hanya berlaku jika distribusi muatan seragam, maka λ, σ dan ρ dapat diambil di luar integral

- **Garis** Jika muatan terdistribusi pada sepanjang garis ℓ, $\lambda \equiv \frac{Q}{\ell}$, satuannya adalah C/m.
- **Luas** Jika muatan terdistribusi pada luas permukaan A, maka $\sigma \equiv \frac{Q}{A}$, dengan satuan C/m^2
- **Volume** Jika muatan terdistribusi pada volume V, maka $\rho \equiv \frac{Q}{V}$ dengan satuan C/m^3

1.3 Contoh Permasalahan Batang Bermuatan

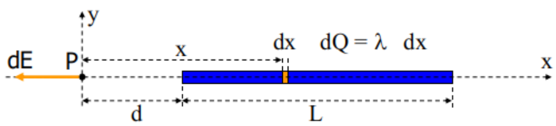
Contoh 1:
Batang dengan panjang L memiliki muatan seragam per satuan panjang λ dan a muatan total Q. Hitung medan listrik pada titik P sepanjang sumbu batang pada jarak d dari salah satu ujungnya.



Mari kita letakkan asal di P. Kerapatan muatan linier dan Q terkait dengan

$$\lambda = \frac{Q}{L} \; dan \; Q = \lambda L$$

Kita anggap bahwa Q bermuatan Positif.



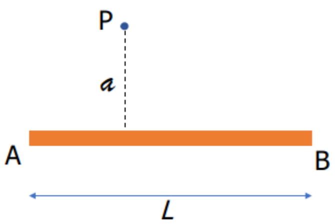
Titik medan listrik menjauh dari batang. Secara simetri, medan listrik pada sumbu batang tidak memiliki komponen y. dE dari muatan pada panjang batang dx yang sangat kecil adalah..

$$d\vec{E} = k\frac{dq}{x^2} = k\frac{\lambda \, dx}{x^2}$$

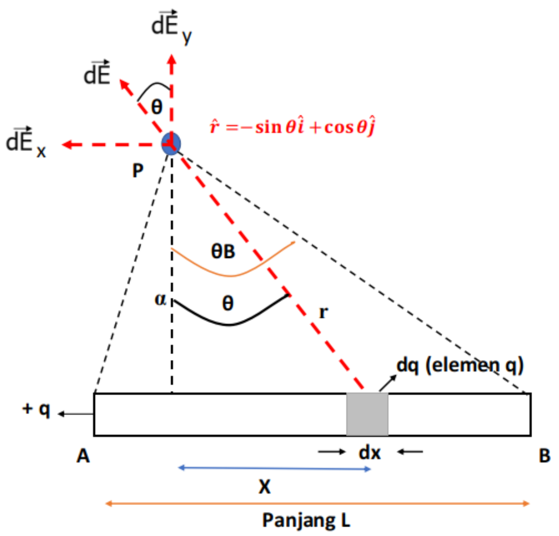
Perlu diingat bahwa $d\vec{E}$ pada arah sumbu $-x$. dE adalah harga/nilai dari vektor $d\vec{E}$. Kita gunakan fakta bahwa $Q > 0$, maka $dq = 0$ untuk menghilangkan tanda nilai absolut dalam persamaan awal.

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \int_{d}^{d+L} d\vec{E}_x \\
&= -k\int_{d}^{d+L} \frac{\lambda dx}{x^2}\hat{i} \\
&= -k\lambda\int_{d}^{d+L} \frac{dx}{x^2}\hat{i} \\
&= -k\lambda\left(-\frac{1}{x}\right)_{d}^{d+L}\hat{i} \\
&= -k\lambda\left(-\frac{1}{d+L}+\frac{1}{d}\right)\hat{i} \\
&= -k\lambda\left(\frac{-d+d+L}{d(d+L)}\right)\hat{i} \\
&= -k\frac{\lambda L}{d(d+L)}\hat{i} \\
&= -\frac{kQ}{d(d+L)}\hat{i}
\end{aligned}
$$

Contoh 2:
Sebuah batang dengan panjang L memiliki muatan seragam per satuan panjang λ dan muatan total q. Hitung medan listrik pada titik P yang terletak pada jarak a dari batang..



Pertama-tama, kita analisis persoalan tersebut dengan gambar analisis medan listrik



Kita ketahui bahwa kuat medan listrik di titik P oleh batang AB bermuatan $+Q$, maka

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dQ}{r^2}\hat{r}$$

Rapat muatan per satuan panjang λ pada kawat lurus homogen

$$\lambda = \frac{dQ}{dx} = \frac{q}{L}$$

dimana $\frac{dQ}{dx}$ adalah densitas muatan per elemen yang dianggap sangat kecil dan $\frac{q}{L}$ adalah densitas muatan pada batang utuh, keduanya dianggap sama karena persebaran muatan pada sebuah batang dianggap homogen. Sehingga

$$dq = \lambda\ dx$$

Disamping itu, hubungan geometris antara a, x, dan r adalah:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{a}{r} \quad \rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{\cos^2\theta}{a^2} \\
\tan\theta &= \frac{x}{a} \quad \rightarrow x = a\ tan\theta \\
& \qquad\qquad dx = a\frac{1}{cos^2\theta}d\theta
\end{aligned}
$$

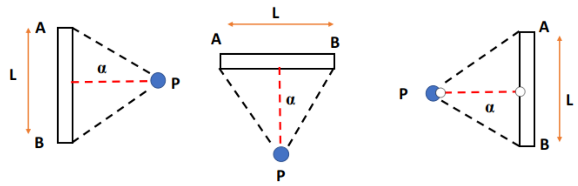
Maka

$$
\begin{aligned}
d\vec{E} &= k\frac{dQ}{r^2}\hat{r} = k\lambda\frac{dx}{r^2}\hat{r}^2 \\
d\vec{E} &= k\lambda\frac{dx}{r^2}\hat{r} \\
d\vec{E} &= k\lambda(-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}) \\
d\vec{E} &= k\lambda(dx\frac{1}{r^2}(-\sin\theta)\hat{i}+dx\frac{1}{r^2}(cos\theta)\hat{j}) \\
d\vec{E} &= \frac{k\lambda}{a}(-\sin\theta d\theta\hat{i}+\cos\theta d\theta\hat{j}) \\
\vec{E} &= \frac{k\lambda}{a}\int_{\theta A}^{\theta B}(-\sin\theta\hat{i}+\cos\theta\hat{j}) \\
\vec{E} &= \frac{k\lambda}{a}[(\cos\theta_B-\cos\theta_A)\hat{i}+(\sin\theta_B-\sin\theta_A)\hat{j}]
\end{aligned}
$$

Jika panjang kawat tak terhingga, maka $\theta_B = 90°$ **dan** $\theta_a = 270°$, sehingga

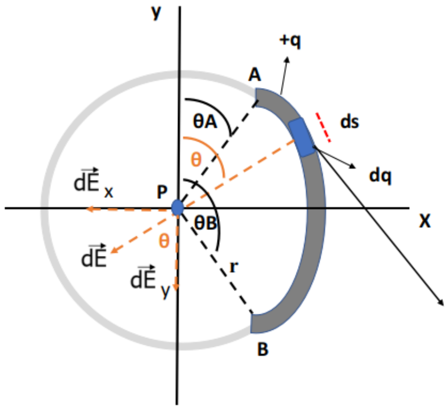
$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{a}2\hat{j}$$

Pada sistem berikut ini, cara penurunan rumusnya sama, namun yang berbeda cuma $\hat{r}$ nya saja



1.4 Bagian cincin bermuatan listrik

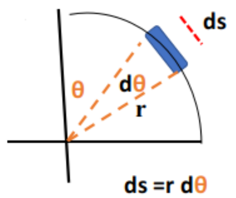
Akan dibahas bagaimana kuat medan listrik di pusat cincin P oleh bagian cincin AB



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

dengan $\hat{r} = -\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j}$, maka

$$\lambda = \frac{dq}{ds} \rightarrow \; dq = \lambda \; ds$$
$$dq = \lambda \; r \; d\theta$$



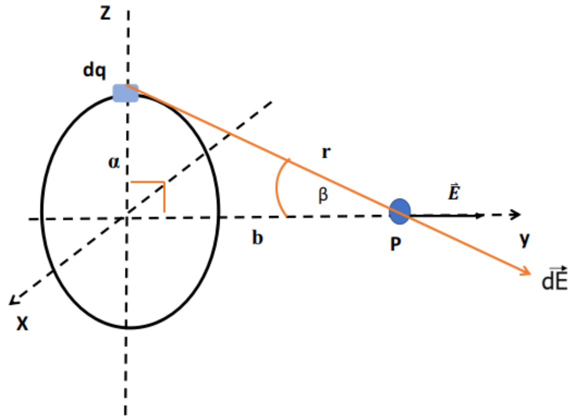
Sehingga,

$$d\vec{E} = k\lambda\frac{dx}{r^2}\hat{r}$$
$$d\vec{E} = k\lambda\frac{rd\theta}{r^2}(-\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j})$$
$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{r}\int_{\theta_A}^{\theta_B}(-\sin\theta\hat{i} - \cos\theta\hat{j})$$
$$\vec{E} = \frac{k\lambda}{r}[(\cos\theta_B - \cos\theta_A)\hat{i} - (\sin\theta_B - \sin\theta_A)\hat{j}]$$

Jika cincin penuh dan titik pengamatannya berada di tengah, maka yang terjadi adalah $\theta_A = \theta_B \rightarrow$ saling meniadakan.

1.5 Sumbu Cincin Bermuatan Listrik

Bagaimana kuat medan listrik pada titik P oleh cincin bermuatan?



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$

Dengan

$$\hat{r} = \cos a\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$$
$$\hat{t} = \cos\beta\hat{j}$$

Kenapa E total arahnya ke sumbu Y (hanya ada elemen di sumbu y)?? Jika ditinjau dari sumbu x dan sumbu z, cincin simetris dalam sumbu dan sumbu z, sehingga saling meniadakan. Maka

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\hat{r}$$
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}\cos\beta\hat{j}$$
$$\vec{E} = \frac{k\cos\beta\hat{j}}{r^2}\int dq\hat{j}$$
$$\vec{E} = \frac{k\;q}{r^2}\cos\beta\hat{j}$$
$$\vec{E} = \frac{k\;q}{(a^2+b^2)^{3/2}}\hat{j}$$

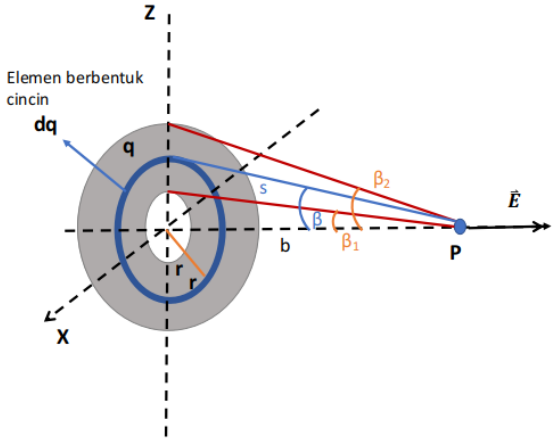
Dimana

$$q = \lambda$$

$$ds = \lambda\; 2\pi a$$

$$r^2 = a^2 + b^2 \;\rightarrow\; cos\beta = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1.6 Medan Listrik di Bidang lingkaran/Disk/Cakram



Rapat muatan persatuan luas adalah σ

$$\sigma = \frac{dq}{dA} = \frac{dq}{2\pi r\ dr} \ \rightarrow \ dq = \sigma 2\pi r\ dr$$

Medan listrik di titik P adalah

$$d\vec{E} = \frac{k\ dq}{s^2}\cos\beta\hat{j}$$
$$d\vec{E} = \frac{k\ \sigma 2\pi r\ dr}{s^2}\cos\beta\hat{j}$$

dengan

$$\cos\beta = \frac{b}{s} \ \rightarrow \ \frac{1}{s^2} = \frac{\cos^2\beta}{b^2}$$
$$\tan\beta = \frac{r}{b} \ \rightarrow \ r = b\ \tan\beta$$
$$dr = b\frac{1}{\cos^2\beta}d\beta$$

Maka

$$\vec{E} = k\sigma 2\pi \int \frac{r\ dr}{s^2}\cos\beta\hat{j}$$
$$\vec{E} = k\sigma 2\pi \int b\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\frac{\cos^2\beta}{b^2}b\frac{1}{\cos^2\beta}\ d\beta\cos\beta\hat{j}$$
$$\vec{E} = 2\pi\sigma k\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\ d\beta\hat{j}$$
$$\vec{E} = 2\pi\sigma k\ (-\cos\beta_2 + \cos\beta_1)\hat{j}$$
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\cos\beta_2 + \cos\beta_1)\hat{j}$$

Lalu jika bidang lingkaran penuh beradius R $\rightarrow \ \beta_1 = 0$, Maka

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\cos\beta_2 + \cos 0^\circ)\hat{j}$$
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\frac{b}{\sqrt{b^2+R^2}} + 1)\hat{j}$$

Jika luas bidang lingkaran tak berhingga, maka $\beta_2 = 90^\circ$ dan $\beta_1 = 0^\circ$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(-\cos 90^\circ + \cos 0^\circ)\hat{j}$$
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$