Método del gradiente Conjugado para aproximar la ecuación de Helmholtz.

Jhon Fredy Aguirre García. jhaguirreg@unal.edu.co
Profesor encargado: Carlos Daniel Acosta Medina.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Introducción

Cuando buscamos generalizar los métodos de aproximación estudiados en el curso a una ecuación diferencial de la forma $\nabla^2 u + wu = 0$, con w contante y $\nabla^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ el Laplaciano, la cual suele conocerse como **la ecuación de Helmholtz,** nos encontramos con ciertas dificultades. Veamos como ejemplo particular, cómo podemos aproximar esta ecuación, nuestros objetivos por tanto serán:

1. Encontrar un método de diferencias finitas con error de truncamiento de $O(h^2) + O(k^2)$, además ver que la matriz resultante es definida positiva.
2. Tomando $w = 2$, $g(x) = sen(3\pi x)$ y $N = M$, usar CGM para encontrar aproximaciones, lograr analizarlas y graficarlas.
3. Hacer un estudio al error máximo del método con diferentes valores de N.
4. Usar PCGM para aproximar el método y ver que mejoras hay.

Conceptos necesarios

- Debemos recordar la siguiente aproximación de diferencias finitas:

$$U_{xx}(x,t) = \frac{U(x,t+h) - 2U(x,t) + U(x,t-h)}{h^2} + 0(h^2)$$

- La solución exacta para la ecuación de Helmholtz's es:

$$U(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sinh(\gamma_n y) sin(\lambda_n x),$$

donde $\lambda_n = n\pi$, $\gamma_n = \sqrt{\lambda_n^2 - w}$ y $a_n = \frac{2}{sinh(\gamma_n)} \int_0^1 g(x) sin(\lambda_n x) dx$.
- Una matriz A será irreducible si tomando cualquier par de puntos P_i, P_j en su grafo, es posible ir del punto P_i al punto P_j.
- El precondicionador para el PCGM será Precondicionador Incomplete Cholesky (IC).

Planteamiento del método

Para resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + wU = U_{xx} + U_{yy} + wU = 0$$

Iniciaremos aplicando la aproximación de diferencias finitas antes vista, por tanto, después de discretizar tomando $k = \frac{1}{M}$, $h = \frac{1}{N}$ y $\lambda = \frac{k}{h}$:

$$\lambda^2 U_{i+1}^j + \beta U_i^j + \lambda^2 U_{i-1}^j + U_i^{j+1} + U_i^{j-1} = 0$$

Con $\beta = wk^2 - 2\lambda^2 - 2$, ahora usaremos el ordenamiento natural tomando $V_l = U_i^j$ si $l = (j-1)N + 1$, así, obtenemos la ecuación:

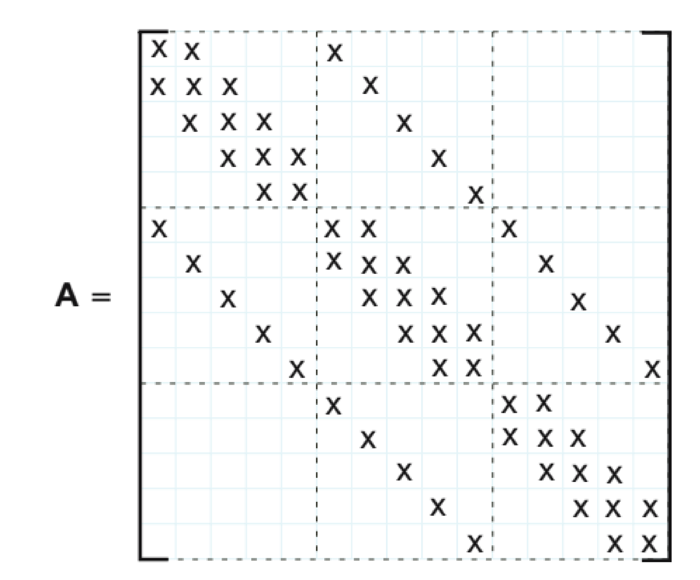
$$\lambda^2 V_{l+1} + \beta V_l + \lambda^2 V_{l-1} + V_{l+N} + V_{l-N} = 0$$

De este modo, la matriz A resultante del sistema $A\vec{v} = \vec{b}$:

Planteamiento del método

$$A_{NMxNM} = \begin{pmatrix} T & D & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ D & T & D & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D & T & D & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & D & T \end{pmatrix} \text{ Donde: } T_{NxN} = \begin{pmatrix} \beta & \lambda^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda^2 & \beta & \lambda^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^2 & \beta \end{pmatrix} \text{ y D=Id(N).}$$

Si por ejemplo, N=5, los valores de A vendrían dados en las posiciones:



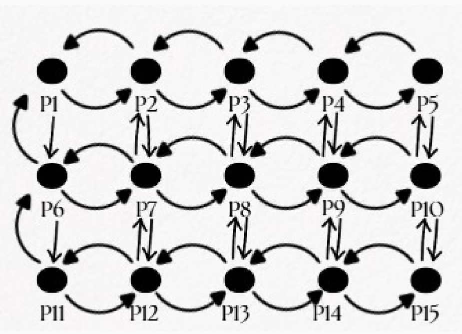
Inicialmente debemos ver que la matriz A es definida positiva, para esto debemos ver que satisface las siguientes condiciones:

1. Todas las entradas de la diagonal son positivas y diferentes de 0.
2. Si $r_i = \sum_{j=1_{j \neq i}}^{N} |a_{ij}|$, entonces $r_i \leq a_{ii}$ para todo i.
3. Hay almenos una fila donde $r_i < a_{ii}$.
4. La matriz A es irreducible.

Aplicación del método para aproximar la solución

Iniciemos viendo bajo que condiciones nuestra matriz A cumple las propiedades anteriores:

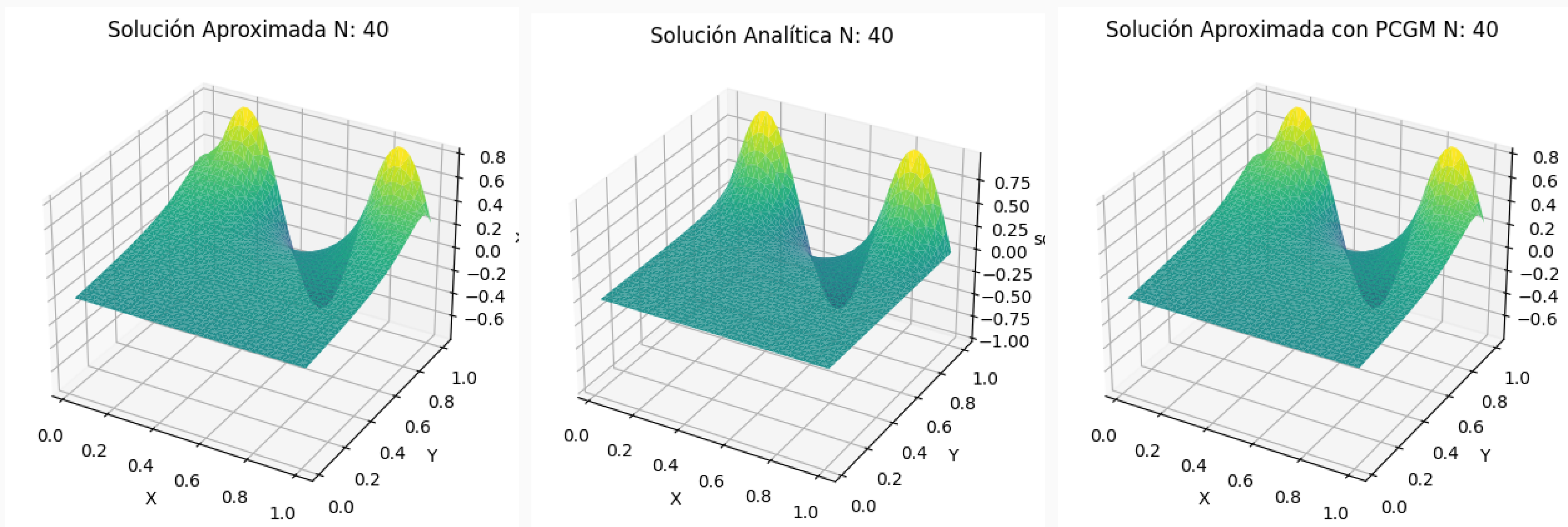
1. Si $\beta = wk^2 - 2\lambda^2 - 2 > 0$ entonces, recordando de $\lambda = \frac{k}{h}$, llegamos a que $w > \frac{2}{k^2} + \frac{2}{h^2}$.
2. Sabemos que $r_i \leq 2\lambda^2 + 2$ para todo i, así, basta garantizar que $2\lambda^2 + 2 \leq wk^2 - 2\lambda^2 - 2$, es decir, $w \geq \frac{4}{k^2} + \frac{4}{h^2}$.
3. Para esta condición consideremos el r_i más pequeño posible, el cual está dado en r_0 (Cualquier otro será mayor o igual que este), es decir, se debe cumplir que $wk^2 - 2\lambda^2 - 2 > \lambda^2 + 1$, es decir, $w > \frac{3}{h^2} + \frac{3}{k^2}$.
4. Estudiemos para comprobar esta condición el grafo dirigido de un caso particular, si tomamos nuevamente N=5,



En algunos casos, como cuando w es negativo, será necesario estudiar el caso $-A\vec{v} = -\vec{b}$, este nos dará un $\vec{v}$ que cumple con la ecuación inicial a aproximar, este cambio se suele hacer cuando la matriz A no cumple con la condición 1, obligando a que $-A$ la cumpla. La condición 4 también se cumple inmediatamente, así que solo bastaría estudiar las condiciones 2 y 3, para las cuales nos queda que $w \leq 0$ y $w < \frac{1}{k^2} + \frac{1}{h^2}$.

Resultados de la aproximación

Estudiemos ahora tomando a $w = 2$ y a M=N, de esta manera tenemos que k=h (pues estamos en el mismo intervalo) y así $\lambda = 1$. Ahora, si tomamos un sistema de la forma $A\vec{v} = \vec{b}$, deberíamos tener que $2k^2 - 4 > 0$, es decir, $k > \sqrt{2}$, pero recordemos que $k = \frac{1}{M}$ con $M \in N$, así debemos tener que $M < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, lo cual claramente no es posible en los naturales. Ahora, si consideramos el sistema $-A\vec{v} = -\vec{b}$ efectivamente cumple la condición 1, pero $2 = w > 0$, así tampoco se cumplirá la condición 2 para que A sea definida positiva (pues $w \leq 0$).
Aunque sería interesante ver las aproximaciones del CGM y PCGM en una matriz que si nos garantice la solución del sistema, por lo consideremos $w = -2$, tenemos que este satisface las condiciones de $-A\vec{v} = -\vec{b}$, por tanto, comparando la solución analítica y la aproximada tenemos:



CGM: Cuando N=20 toma 54 iteraciones y tiene un $E_{max} = 0.5369$. Cuando N=40 toma 107 iteraciones y tiene un $E_{max} = 0.3687$. Cuando N=80 toma 208 iteraciones y tiene un $E_{max} = 0.3882$. Cuando N=160 toma 407 iteraciones y tiene un $E_{max} = 0.3956$.
PCGM: Cuando N=20 toma 54 iteraciones y tiene un $E_{max} = 1.6201$. Cuando N=40 toma 107 iteraciones y tiene un $E_{max} = 1.8052$.

References

[1] Introduction to numerical methods in differential equations, Mark H. Holmes.
[2] Numerical analysis mathematics of scientific computing, David Kincaid and Ward Cheney.
[3] Apuntes ANÁLISIS NUMÉRICO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES, Rommel Bustinza