Universidad Nacional de Colombia, 2024, 1–7
Análisis Numérico
Ecuaciones diferenciales aplicadas.

Ecuaciones diferenciales aplicadas.

Alejandra Castaño Morales.
Jhon Fredy Aguirre García.

Definición 1. *Aproximacion numerica hacia adelante de la primera derivada en una y dos variables:*

$$f'(x) = \frac{f(x+k)-f(x)}{k} + O(k), \, U_t(x,t) = \frac{U(x,t+k)-U(x,t)}{k} + 0(k).$$

Definición 2. *Aproximacion numerica centrada de la primera derivada en una y dos variables:*

$$f'(x) = \frac{f(x+k)-f(x-k)}{2k} + O(k^2), \, U_t(x,t) = \frac{U(x,t+k)-U(x,t-k)}{2k} + 0(k^2).$$

Definición 3. *Aproximacion numerica centrada de la segunda derivada es una y dos variables:*

$$f''(x) = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} + 0(h^2), \, U_{xx}(x,t) = \frac{U(x,t+h)-2U(x,t)+U(x,t-h)}{h^2} + 0(h^2)$$

Lema 1. *Tenemos la aproximación para una y dos variables:*

$$2f(x) = f(x+k) + f(x-k) + O(k^2), \, U(x,t) = U(x,t+k) + U(x,t-k) + O(k^2).$$

Demostración. Veamos la prueba en una variable, la cuál es identica con la derivada en varias variables.

Usando la defición 1 y 2 tenemos que:

$$\frac{f(x+k)-f(x)}{k} + O(k) = f'(x) = \frac{f(x+k)-f(x-k)}{2k} + O(k^2)$$

O bien,

$$f(x+k) - f(x) + O(k) = \frac{f(x+k)-f(x-k)}{2} + O(k^2)$$

De donde, al despejar $f(x)$ obtenemos:

$$f(x) = \frac{f(x+k)}{2} - \frac{f(x-k)}{2} + O(k^2) + O(k)$$

Ahora, multiplicando la igualdad por 2 y conservando el error de truncamiento mayor, obtenemos la aproximación deseada: $2f(x) = f(x+k) - f(x-k) + O(k^2)$ □

Problema 1. *Ejercicio 3.8 pagina 120 del libro Introduction to numerical methods in differential equations, Mark H. Holmes.*

El método Dufort–Frankel para resolver la ecuación del calor es:

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^{j-1}}{2k} = \frac{U_{i+1}^{j}-U_i^{j+1}-U_i^{j-1}+U_{i-1}^{j}}{h^2}.$$

(a) *¿Cuál es la plantilla y cuáles son los límites de i, j para este?*

(b) *Mostrar que el error de truncamiento es $O(k^2) + O(h^2) + O(k^2/h^2)$. Si usted no está familiarizado con cómo hacer esto, es posible que desee consultar el Ejercicio 3.19. Explique por qué este resultado muestra que el método solo está condicionalmente consistente.*

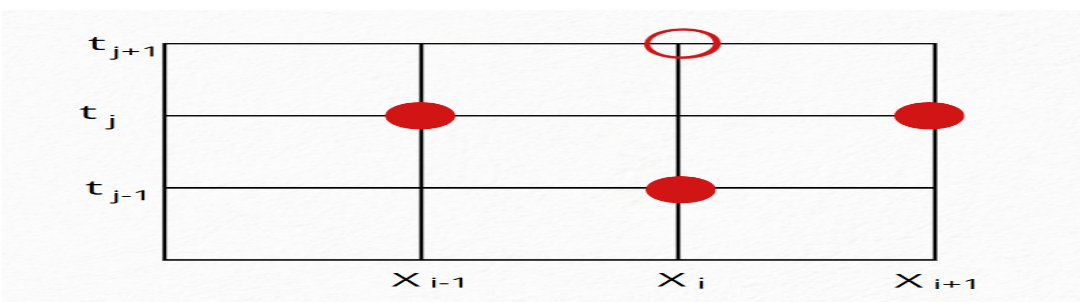
(c) *¿Es el método explícito o implícito?*

(d) *Demostrar que el método es estable.*

(e) *Demostrar que el método no es L-estable.*

(f) *Explique cómo derivar este método directamente de la ecuación del calor.*

Solución 1. *(a)*



(b) *Si realizamos las debidas aproximaciones dadas en las definiciones, conservando $O(h^n)$ obtenemos que:*

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^{j-1}}{2k} + O(k^2) = \frac{U_{i+1}^{j}-[U_i^{j+1}-U_i^{j-1}+O(k^2)]+U_{i-1}^{j}}{h^2} + O(h^2).$$

Sacando este $O(k^2)$ de la fracción nos queda que:

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^{j-1}}{2k} + O(k^2) = \frac{U_{i+1}^{j}-U_i^{j+1}-U_i^{j-1}++U_{i-1}^{j}}{h^2} + O(h^2) + O(\frac{k^2}{h^2}).$$

Ahora, llevando todos los $O(h^n)$ a un solo lado, al no tener una dependencia entre k y h, nos queda que el error de truncamiento $\tau_{i,j} = O(k^2) + O(h^2) + O(\frac{k^2}{h^2})$.

Como recordamos tanto h, k tienden a 0, pero si el valor de h tiende más rápido que el de k el $\tau_{i,j}$ no converge a 0, dejando así de ser consistente, es decir, el sistema es condicionalmente consistente.

(c) *El método es explícito ya que se logra hacer el siguiente despeje:*

$$\frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2k} = \frac{U_{i+1}^j - U_i^{j+1} - U_i^{j-1} + U_{i-1}^j}{h^2},$$
$$U_i^{j+1} - U_i^{j-1} = \frac{2k}{h^2}(U_{i+1}^j - U_i^{j+1} - U_i^{j-1} + U_{i-1}^j),$$
$$U_i^{j+1} = \frac{2k}{h^2}U_{i+1}^j - \frac{2k}{h^2}U_i^{j+1} - \frac{2k}{h^2}U_i^{j-1} + \frac{2k}{h^2}U_{i-1}^j + U_i^{j-1},$$
$$U_i^{j+1} + \frac{2k}{h^2}U_i^{j+1} = \frac{2k}{h^2}U_{i+1}^j - \frac{2k}{h^2}U_i^{j-1} + \frac{2k}{h^2}U_{i-1}^j + U_i^{j-1},$$
$$(\frac{h^2+2k}{h^2})U_i^{j+1} = \frac{2k}{h^2}U_{i+1}^j - \frac{2k}{h^2}U_i^{j-1} + \frac{2k}{h^2}U_{i-1}^j + U_i^{j-1},$$
$$U_i^{j+1} = \frac{2k}{h^2+2k}U_{i+1}^j - \frac{2k}{h^2+2k}U_i^{j-1} + \frac{2k}{h^2+2k}U_{i-1}^j + \frac{h^2}{h^2+2k}U_i^{j-1}.$$

(d) *Para garantizar la estabilidad debemos ver que $||U_i^{j+1}||_1 \leq ||U_i^j||_1$. Definamos de antemano:*

$$\alpha = \frac{2k}{h^2+2k}, \beta = \frac{h^2}{h^2+2k}$$

Así:

$$U_i^{j+1} = \alpha U_{i+1}^j - \alpha U_i^{j-1} + \alpha U_{i-1}^j + \beta U_i^{j-1},$$

O lo que es decir:

$$|U_i^{j+1}| = |\alpha U_{i+1}^j - \alpha U_i^{j-1} + \alpha U_{i-1}^j + \beta U_i^{j-1}|,$$

Ahora, por la desigualdad triangular:

$$|U_i^{j+1}| \leq |\alpha||U_{i+1}^j| + |-\alpha||U_i^{j-1}| + |\alpha||U_{i-1}^j| + |\beta||U_i^{j-1}|,$$
$$|U_i^{j+1}| \leq |\alpha||U_{i+1}^j| + |\alpha||U_i^{j-1}| + |\alpha||U_{i-1}^j| + |\beta||U_i^{j-1}|,$$

Apliquemos sumatoria sobre i a ambos lados, así:

$$\sum_{k=0}^n |U_k^{j+1}| \leq |\alpha| \sum_{k=0}^n |U_k^j| + |\alpha| \sum_{k=0}^n |U_k^{j-1}| + |\alpha| \sum_{k=0}^n |U_k^j| + |\beta| \sum_{k=0}^n |U_k^{j-1}|$$
$$\sum_{k=0}^n |U_k^{j+1}| \leq 2|\alpha| \sum_{k=0}^n |U_k^j| + (|\alpha| + \beta) \sum_{k=0}^n |U_k^{j-1}|.$$

Ahora, si aplicamos sumatoria sobre j y factorizamos:

$$\sum_{k=0}^n |U_k^{j+1}| \leq [2|\alpha| + (|\alpha| + \beta)] \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^n |U_k^j| = (3|\alpha| + \beta) \sum_{j=0}^J \sum_{k=0}^n |U_k^j|.$$

Ahora, si:

$$C_\tau = 3|\alpha| + |\beta| = 3\frac{2k}{h^2+2k} + \frac{h^2}{h^2+2k} = \frac{6k+h^2}{h^2+2k}.$$

Logramos expresar:

$$\sum_{k=0}^{n} |U_k^{j+1}| \leq C_\tau \sum_{j=0}^{J} \sum_{k=0}^{n} |U_k^j|.$$

Como vemos, esto coincide con la definición de $||\cdot||_1$, *así:* $||U^{j+1}||_1 \leq C_\tau ||U^j||_1$

E inductivamente logramos que: $||U^n||_1 \leq C_\tau^n ||U^0||_1$

De esta manera, el método es estable cuando se cumple que $C_\tau \leq 1$.

(e) *Por (d) sabemos que el método es estable, aún así a pesar de reiteradamente buscar una defición para L-Estabilidad, fue imposible encontrar una acertada.*

(f) *La ecuación del calor es* $U_t = U_{xx}$, *ahora deduzcamos el método Dufort-Frankel*

$U_t = \frac{U(x,t+k)-U(x,t-k)}{2k}$ *Si descretizamos el dominio obtenemos* $U_t = \frac{U(x_i,t^{j+1})-U(x_i,t^{j-1})}{2k}$
lo cual denotaremos por $\frac{U_i^{j+1}-U_i^{j-1}}{2k}$.
Ahora veamos $U_{xx} = \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}$ *y por el lema 1 tenemos que* $\frac{f(x+h)-(f(x+k)+f(x-k))+f(x-h)}{h^2}$
lo que denotaremos por $\frac{U_{i+1}^j-U_i^{j+1}-U_i^{j-1}+U_{i-1}^j}{h^2}$, *por hipotesis inicial obtenemos:*

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^{j-1}}{2k} = \frac{U_{i+1}^j-U_i^{j+1}-U_i^{j-1}+U_{i-1}^j}{h^2}.$$

Problema 2. *El método de Fromm para resolver la ecuación de advección es:*

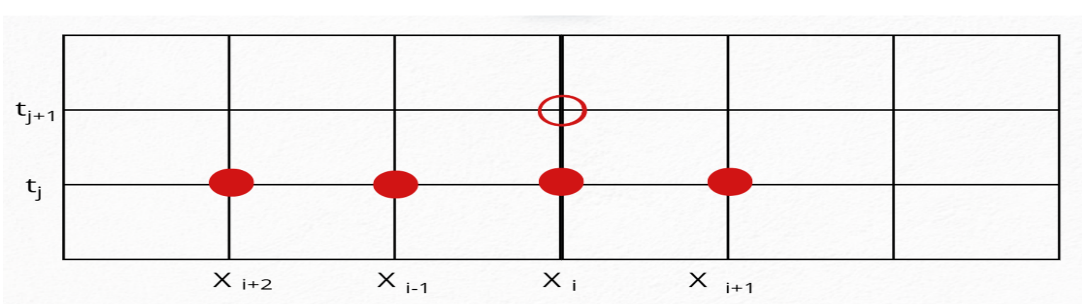
$$U_i^{j+1} = \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i-2}^j + \frac{1}{4}\lambda(5-\lambda)U_{i-1}^j - \frac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)U_i^j + \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i+1}^j$$

(a) *¿Cuál es la plantilla del método?*

(b) *¿Cuál es la condición CFL? ¿Es estable el método? ¿Es monótono?*

(c) *¿Cual es el error de truncamiento?*

Solución 2. *(a)*



(b) *CFL: Para encontrar la condicion CFL, debemos comenzar encontrando los dominios laterales del esquema. Segun la plantilla del subpunto anterior podemos concluir lo que sigue:*

$$\text{Dominio a la derecha } \{X_i, X_i + h, ..., X_i + jh\}$$
$$\text{Dominio a la izquierda } \{X_i, X_i - 2h, ..., X_i - 2jh\}$$

Ahora definamos $\bar{X}_0 = X_i - \alpha t_j$ *el cual es acotado por los limites correspondientes, esto es:*

$$X_i - 2jh \leq X_i - \alpha t_j \leq X_i + jh$$

Usando propiedades y recordando que $t_j = kj$ *se sigue que:*

$$-2jh \leq -\alpha kj \leq jh$$
$$-2h \leq -\alpha k \leq h$$
$$-h \leq \frac{-\alpha k}{2} \leq -\alpha k \leq h$$

En particular, $-h \leq -\alpha k \leq h$.

Ahora usando propiedades del valor absoluto tenemos que:

$$|-\alpha k| \leq h, \text{ es decir } |\tfrac{-\alpha k}{h}| \leq 1$$

Asi, encontramos la condicion CFL, la cual es $\lambda = |\frac{-\alpha k}{h}| \leq 1$.

Estabilidad: $U_i^{j+1} = \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i-2}^j + \frac{1}{4}\lambda(5-\lambda)U_{i-1}^j - \frac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)U_i^j + \frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i+1}^j$.

De este esquema conseguimos que:

$$|U_i^{j+1}| = |\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i-2}^j + \tfrac{1}{4}\lambda(5-\lambda)U_{i-1}^j - \tfrac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)U_i^j + \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i+1}^j|.$$

Ahora, por desigualdad triangular:

$$|U_i^{j+1}| \leq |\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)||U_{i-2}^j| + |\tfrac{1}{4}\lambda(5-\lambda)||U_{i-1}^j| + |-\tfrac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)||U_i^j| + |\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)||U_{i+1}^j|.$$

Si aplicamos el maximo y factorizamos, obtenemos lo siguiente:

$$\max_i |U_i^{j+1}| \leq (|\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)| + |\tfrac{1}{4}\lambda(5-\lambda)| + |-\tfrac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)| + |\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)|) \max_i |u_i^j|.$$

Ahora, si $A = |\frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)| + |\frac{1}{4}\lambda(5-\lambda)| + |-\frac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)| + |\frac{1}{4}\lambda(\lambda-1)|$*:*

$$\max_i |U_i^{j+1}| \leq A \max_i |u_i^j|.$$

Por definición de $||\cdot||_\infty$*, tenemos qué:*

$$||U^{j+1}||_\infty \leq A||U^j||_\infty.$$

Y nuevamente, iterando conseguimos:

$$||U^n||_\infty \leq A^n||U^0||_\infty.$$

Así, hallamos que para que el método sea estable,

$$A = |\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)| + |\tfrac{1}{4}\lambda(5-\lambda)| + |-\tfrac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)| + |\tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)| \leq 0.$$

Monotonia: Inicialmente tenemos el esquema

$$U_i^{j+1} = \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i-2}^j + \tfrac{1}{4}\lambda(5-\lambda)U_{i-1}^j - \tfrac{1}{4}(\lambda-1)(\lambda+4)U_i^j + \tfrac{1}{4}\lambda(\lambda-1)U_{i+1}^j$$

Siendo U_i^n y W_i^n $\forall i$, soluciones de la ecuacion del calor aproximadas con el metodo anteriror, usemos induccion sobre estas para probar que $W_i^{n+1} \leq U_i^{n+1}$. Como hipotesis tenemos que $W_i^0 \leq U_i^0$ y $W_i^n \leq U_i^n$. Ahora por practicidad llamemos $\alpha = \lambda(\lambda-1)$, $\beta = (5-\lambda)$ y $\gamma = (\lambda-1)(\lambda+4)$, lo cual resulta:

$$U_i^{n+1} = \tfrac{1}{4}\alpha U_{i-2}^j + \tfrac{1}{4}\beta U_{i-1}^j - \tfrac{1}{4}\gamma U_i^j + \tfrac{1}{4}\alpha U_{i+1}^j \text{ y}$$

$$W_i^{n+1} = \tfrac{1}{4}\alpha W_{i-2}^j + \tfrac{1}{4}\beta W_{i-1}^j - \tfrac{1}{4}\gamma W_i^j + \tfrac{1}{4}\alpha W_{i+1}^j$$

Ahora aplicando hipotesis inicial obtenemos:

$$\tfrac{1}{4}\alpha W_{i-2}^j + \tfrac{1}{4}\beta W_{i-1}^j - \tfrac{1}{4}\gamma W_i^j + \tfrac{1}{4}\alpha W_{i+1}^j \leq \tfrac{1}{4}\alpha U_{i-2}^j + \tfrac{1}{4}\beta U_{i-1}^j - \tfrac{1}{4}\gamma U_i^j + \tfrac{1}{4}\alpha U_{i+1}^j$$

Pero esta desiguladad se cumple solo si se tienen las siguientes condiciones:

$$\alpha = \lambda(\lambda-1) \geq 0,$$
$$\beta = (5-\lambda) \geq 0,$$
$$\gamma = (\lambda-1)(\lambda+4) \leq 0.$$

Lo cual implica que $5 \geq \lambda$, $\lambda \in (-\infty, 1]$ y $\lambda \in [-4, 1]$.

Con lo cual concluimos que el esquema es monotono si solo si:

$$\lambda \in [-4, 1].$$

(c) Recordemos que la ecuación de onda está dada por la condición $U_{tt} = \alpha^2 U_{xx}$, y que definimos $\lambda = \alpha\frac{k}{h}$. Usemos las siguientes aproximaciones sobre funciones de dos variables:

(a) Sobre la variable tiempo haremos $f''(x) = \frac{f(x+k)-2f(x)+f(x-k)}{k^2} + O(k^2)$.

(b) Sobre la variable espacio usaremos $f''(x) = 2f(x+h) - 5f(x) + 4f(x-h) - f(x-2h)$.

Así, haremos las siguientes cuentas:

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j+U_i^{j-1}}{k^2}+O(k^2)=\alpha^2[\frac{2U_{i+1}^j-5U_i^j+4U_{i-1}^j-U_{i-2}^j}{h^2}+O(h^2)].$$
$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j+U_i^{j-1}}{k^2}+O(k^2)=\alpha^2[\frac{2U_{i+1}^j-3U_i^j+4U_{i-1}^j-U_{i-2}^j-2U_i^j}{h^2}+O(h^2)].$$
$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j+U_i^{j-1}}{k^2}+O(k^2)=\alpha^2[\frac{2U_{i+1}^j-3U_i^j+4U_{i-1}^j-U_{i-2}^j}{h^2}+O(h^2)]-\alpha^2/h^2[2U_i^j].$$

Usando ahora el Lema enunciado anteriormente:

$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j+U_i^{j-1}}{k^2}+O(k^2)=\alpha^2[\frac{2U_{i+1}^j-3U_i^j+4U_{i-1}^j-U_{i-2}^j}{h^2}+O(h^2)]-\alpha^2/h^2[U_i^{j+1}-U_i^{j-1}+O(k^2)].$$
$$\frac{U_i^{j+1}-U_i^j+U_i^{j-1}}{k^2}+O(k^2)=\alpha^2[\frac{2U_{i+1}^j-3U_i^j+4U_{i-1}^j-U_{i-2}^j}{h^2}+O(h^2)]+\lambda^2\frac{U_i^{j-1}}{k^2}-\frac{U_i^{j1}}{k^2}+O(\lambda^2)].$$

Como vemos, logramos inducir el λ^2 que denota el ejercicio, solo es necesario realizar ciertas operaciones sobre la igualdad para transformarlos en los valores α, β, γ definidos en el punto anterior, además de que como vemos, el término U_i^{j-1} que no se considera en el esquema, así que para calcular el error de truncamiento solo necesitamos sacar los valores O() correspondientes:

$$\tau_{i,j}=O(k^2)+O(\alpha^2h^2)+0(\lambda^2).$$

Donde recordemos que $\lambda=\alpha\frac{k}{h}$.

Referencias Bibliográficas.

1 Introduction to numerical methods in differential equations, Mark H. Holmes.

2 Numerical analysis mathematics of scientific computing, David Kincaid and Ward Cheney.

3 Apuntes ANÁLISIS NUMÉRICO PARA ECUACIONES DIFERENCIALES, Rommel Bustinza