Liste de Números Complexos

Resumo

- $\mathbb{R} \longrightarrow$ **Reta** Real
- $\mathbb{C} \longrightarrow$ **Plano** Complexo (também chamado de Plano de Argand-Gauss)
- $\mathbb{C} = \{z = a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}, \text{ onde } i^2 = -1\}$
- A representação de um complexo como um ponto no plano recebe o nome de **afixo**
- Multiplicar por i corresponde a rotacionar um complexo exatamente 90° no sentido anti-horário, mantendo o tamanho original do vetor. Para rotacionar por ângulos diferentes, bem como para mudar o módulo, multiplicaremos por números complexos específicos, dependendo de cada resultado que se queira obter.
- Para converter de graus para radianos (ou vice-versa), faça a seguinte regra de três:
  $\dfrac{\theta}{\alpha^\circ} = \dfrac{\pi}{180^\circ}$, com θ em radianos
- Forma algébrica (ou retangular)
  - Parte Real e Parte Imaginária: $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$ representam as coordenadas do complexo no plano $\longrightarrow z = (a, b)$
  - Igualdade: $z_1 = z_2 \longleftrightarrow a + bi = c + di \longrightarrow a = c$ e $b = d$
  - Soma: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$
  - Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \in \mathbb{C}$
  - Conjugado: $z = a + bi \longrightarrow \overline{z} = a - bi$
  - Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$
- Forma trigonométrica (ou polar)
  - Módulo: $|z|$ é o tamanho do vetor que liga a origem até o afixo, no plano complexo
  - Argumento: $arg(z) = \theta$; ângulo entre a parte positiva do eixo dos reais, seguindo em sentido anti-horário, até o vetor que representa o número complexo
  - Notação: $z = |z|cis(\theta) = (\,|z|; arg(z)\,)$
  - Soma: **não faça somas nessa forma, porque é muito complicado e trabalhoso**
  - Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot cis(\theta_1 + \theta_2)$
  - Conjugado: $z = |z| \cdot cis(\theta) \longrightarrow \overline{z} = |z| \cdot cis(-\theta)$
  - Divisão: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot cis(\theta_1 - \theta_2)$
- Conversão: algébrica $\longleftrightarrow$ trigonométrica
  - Algébrica $\longrightarrow$ trigonométrica
    $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $arg(z) = arctan(\dfrac{b}{a})$
  - Trigonométrica $\longrightarrow$ algébrica
    $a = |z| \cdot cos(\theta)$ e $b = |z| \cdot sin(\theta)$

- Fórmulas de De Moivre
  - As fórmulas de De Moivre falam de potenciação e radiciação com $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, a menos que você fique confortável calculando coisas do tipo $z^n = (a+bi)^n$, expandindo o Binômio de Newton, ou coisas do tipo $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a+bi}$, sugiro que use sempre a forma trigonométrica para calculá-las.
  - $n \in \mathbb{Z}$
  - Potenciação: $z^n = |z|^n \cdot cis(n \cdot \theta)$
  - Radiciação: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot cis(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n})$

EXERCÍCIOS

1. Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem. Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:

   (a) o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

   (b) a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.

   (c) entre os números reais 3 e 4, existe apenas um número irracional.

   (d) entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.

   (e) a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.

2. Seja y um número real compreendido entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Qualquer que seja o valor de y, ele pertencerá ao conjunto

   (a) $\{x \in \mathbb{Z} \,|\, x \leq 1\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{Q} \,|\, -1 < x \leq 2\}$

   (d) $\{x \in \mathbb{I} \,|\, x < \frac{1}{2}\}$

   (e) $\{x \in \mathbb{N} \,|\, x \geq \frac{1}{2}\}$

3. Classifique em verdadeiro ou falso os itens a seguir:

   (a) $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

   (b) $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$

   (c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$

   (d) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$

   (e) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

   (f) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \supset \mathbb{R}$

4. Marque a(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S), em relação aos conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$

   (a) A soma de três números ímpares consecutivos é 159. O maior dos três é 55.

   (b) Se x e y são números racionais, então $x + y$ e $x \cdot y$ também são racionais.

   (c) Dado um número complexo qualquer $x = a + bi$, existe sempre um número complexo y tal que $x \cdot y$ é real.

   (d) Se x é um número negativo, então $\sqrt{x}$ não existe.

   (e) A forma trigonométrica do número complexo $3\sqrt{3} + 3i$ é o número $6 \cdot cis(\frac{\pi}{6})$

5. Identifique as partes real e imaginária dos números a seguir
    (a) $z = \frac{1}{3} + i$
    (b) $z = -3 - 27i$
    (c) $z = 2019$
    (d) $z = -i$
6. **Desafio 1:** O que significa afirmar sobre os conjuntos $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ que $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$?

Forma algébrica (ou retangular)

7. Represente geometricamente os complexos:
    (a) $z = 1 + i$
    (b) $z = -2i$
    (c) $z = 4i$
    (d) $z = -5$
    (e) $z = 4 - i$
    (f) $z = 3 + 2i$
8. Sejam os complexos $v = (-2, x)$ e $w = (y, -3)$.
    (a) Escreva v e w na forma algébrica convencional.
    (b) Determine x e y reais tais que $v + w = -4 + 2i$
9. Determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que $z = (1 - p) + (p^2 - 1) \cdot i$ seja um número real não nulo.
10. Calcule o valor real de x tal que: $(x^2 - 9) + (x + 3)i = 0$
11. Mostre que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.
12. Determine a fórma algébrica dos seguintes quocientes:
    (a) $\frac{6 - 2i}{4 + 2i}$
    (b) $\frac{5i}{3 - 4i}$
    (c) $\frac{4 + i}{4 - i}$
    (d) $\frac{6}{5i}$
    (e) $\frac{2i}{1 - i}$
    (f) $\frac{12 - i}{7 + 8i}$
13. Determine os números reais m e n para que as igualdades sejam verdadeiras:
    (a) $m + (n - 1)i = -4 + 3i$
    (b) $(n - 2, m + 5) = (3, -2)$
    (c) $(m - 3) + (n - 2)i = 5i$
    (d) $(m - n + 1) + (2m + n - 4)i = 0$

14. Sendo i a unidade imaginária pergunta-se: quantos números reais a existem para os quais $(a+i)^4$ é um número real?

15. Utilize o conjugado $\overline{z}$ para obter a expressão para z^{-1}, com $z \neq 0$.

16. Mostre algebricamente a validade das propriedades a seguir:

   (a) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

   (b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

   (c) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, em que $z_2 \neq 0$

17. **Desafio 2:** Você se lembra de que o produto notável $(x+y)(x-y)$ representa uma fatoração possível para $x^2 - y^2$? Com base nisso e nos conhecimentos que obteve, exiba uma possível fatoração para $x^2 + y^2$.

18. **Desafio 3:** Dado um número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número $\overline{z} = x - iy$.

   (a) Resolva as equações: $z \cdot \overline{z} = 4$ e $z^2 = \overline{z}^2$

   (b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

Forma trigonométrica (ou polar)

19. Determine o módulo e argumento principal dos números complexos dados:

   (a) $z_1 = 4 + 4i$

   (b) $z_2 = -5i$

   (c) $z_3 = -\sqrt{3} + i$

   (d) $z_4 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$

20. Determine a fórmula polar dos complexos x e y que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 2xi + y = -3 + i \\ x + yi = -1 \end{cases}$$

21. Escreva os seguintes complexos na forma trigonométrica:

   (a) $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

   (b) $z = 2i$

   (c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

   (d) $z = (1-i)^2$

22. Sabendo que $z_1 = 4 \cdot (cos 120° + i \cdot sin 120°)$ e que $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot (cos 270° + i \cdot sin 270°)$, determine:

   (a) a forma polar de z_2

   (b) a forma algébrica de z_2

23. São dados os números complexos:

   $z_1 = 6 \cdot (cos 240° + i \cdot sin 240°)$

   $z_2 = 2\sqrt{3} \cdot (cos 30° + i \cdot sin 30°)$

   $z_3 = 6 \cdot (cos 150° + i \cdot sin 150°)$.

   Determine a forma trigonométrica de:

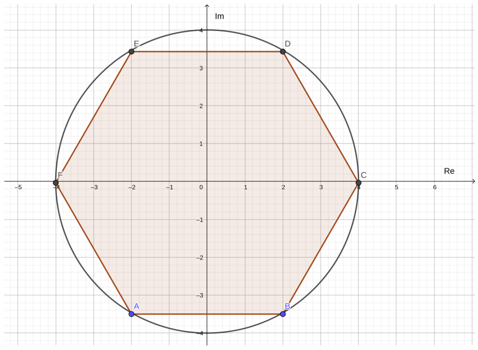
(a) $z_1 \cdot z_2$

(b) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$

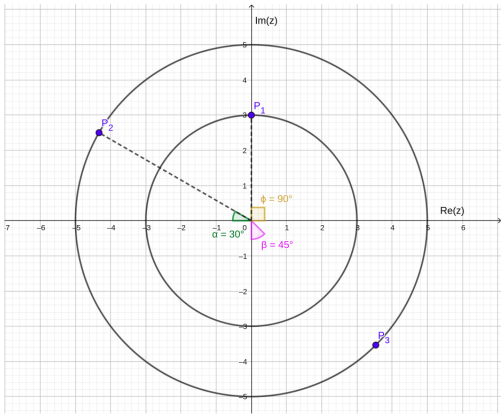
(c) $\dfrac{z_1}{z_3}$

(d) $\dfrac{z_2}{z_3}$

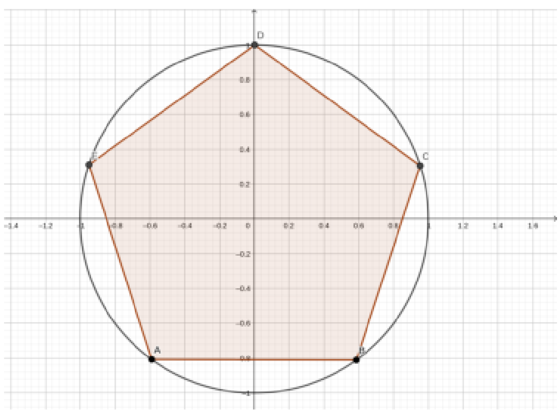
24. A figura apresenta, no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4. Determine o argumento principal dos complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6, cujas respectivas imagens são os vértices A, B, C, D, E e F



25. Na figura, $P1, P2$ e $P3$ são os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3 , respectivamente. Determine a forma polar de z_1, z_2 e de z_3



26. O polígono $ABCDE$ da figura é um pentágono regular inscrito no círculo unitário de centro na origem. Determine as coordenadas polares do vértice A.



27. Determine o lugar geométrico do conjunto de afixos de números complexos que possuem o mesmo módulo. Justifique sua resposta.

28. Conhecendo um número complexo na sua forma polar, como posso escrever a forma polar do seu inverso multiplicativo z^{-1}? E do seu conjugado $\overline{z}$?

29. **Desafio 4:** Dado $z = 7 \cdot (cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot sin(\frac{\pi}{4}))$, descubra os valores de $n \in \mathbb{N}$ para que:
    (a) z^n seja um número imaginário puro
    (b) z^n seja um número real
    Dica: Represente z no plano complexo.

30. **Desafio 5:** Determine as coordenadas do ponto P', obtido ao se rotacionar o ponto $P(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ em torno da origem, em um ângulo de $225°$, no sentido:
    (a) anti-horário
    (b) horário

31. **Desafio 6:** No plano complexo, considere a curva β descrita pelos pontos
    $z = (1 + cos\theta \cdot (cos(\theta) + isen(\theta))$, para $\theta \in [-\pi, \pi]$ e julgue os seguintes itens.
    (a) $|z| \leq 2$
    (b) Se z é um número real e $z \in \beta$, então $z = 0$
    (c) Se $z \in \beta$, então o conjugado de z também pertence a β

Potenciação e radiciação de complexos (ou *fórmulas de De Moivre*)

32. Dado $z = 4 \cdot (cos15° + i \cdot sin15°)$, calcule z^{10}.

33. Encontre a forma trigonomética de $z = i^{21} \cdot i^{22} \cdot i^{23} \ldots i^{29}$.

34. Dado $z = 2 \cdot (cos30° + i \cdot sin30°)$, obtenha a forma retangular de
    (a) z^3
    (b) z^6
    (c) z^{10}

35. Sabendo que $z = -1 + \sqrt{3}i$, calcule z^6, z^{16} e z^{101} e expresse os resultados nas forma polar e algébrica.

36. Dado $z = \sqrt{3} - i$, obtenha z^6:
    (a) sem o uso da fórmula de De Moivre
    (b) por meio da fórmula de De Moivre

37. Calcule:
    (a) $(-\sqrt{6} - i\sqrt{2})^{13}$
    (b) $(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}i)^{101}$
    (c) $(-4 + 4i\sqrt{3})^{-6}$

38. Determine as raízes quadradas dos números complexos seguintes:
    (a) i
    (b) -3
    (c) $-\frac{1}{4}$

39. Calcular:

    (a) $\sqrt[3]{-2+2i\sqrt{3}}$
    (b) $\sqrt[4]{-5-5i}$
    (c) $\sqrt{4\sqrt{3}-4i}$

40. Interprete, geometricamente, o que representam as duas fórmulas de De Moivre.

41. Dado o complexo $z = 4i$, determine:

    (a) as raízes quadradas de z e as representações no plano de Argand-Gauss.
    (b) a distância entre essas duas raízes.

42. Sabendo que o ponto $A(-1, 0)$ é a imagem de uma das raízes sextas de um número complexo z (isto é, $\sqrt[6]{z}$), determine:

    (a) z
    (b) as formas algébrica e polar de cada uma das raízes sextas de z.

43. Um matemático, observando um vitral com o desenho de um polígono inscrito em um círculo, verificou que os vértices desse polígono poderiam ser representados pelas raízes cúbicas complexas do número 8. Qual é a área do polígono observado pelo matemático?

44. **Desafio 7:** Tendo i como a unidade imaginária, sabemos que $i^2 = -1$. Sendo assim

    (a) Calcule os valores de i^3, i^4, i^5 e i^6.
    (b) Calcule o valor de i^{2019}.
    (c) Encontre uma expressão que relacione um caso genérico de $i^n \mid n \in \mathbb{N}$. Reflita sobre o significado da expressão e tente explicá-lo.

45. **Desafio 8:** Tendo i como a unidade imaginária, sabemos, por definição, que $i^2 = -1$. Todavia, é comum algumas pessoas apresentarem uma definição da unidade imaginária como sendo $i = \sqrt{-1}$.

    (a) Escreva o valor de i na forma polar e calcule o valor de i^2.
    (b) Escreva -1 na forma polar e calcule $\sqrt{-1}$.
    (c) Qual das duas definições parece ser a mais apropriada? Justifique sua resposta.

46. **Desafio 9:** Uma forma alternativa de escrever os números complexos é usando uma terceira representação: a chamada *forma exponencial*. Ela consiste em usar a identidade de Euler (a qual eu não demonstrarei):

$$|z| \cdot (cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)) = |z| \cdot e^{\theta \cdot i},$$

onde θ é o argumento principal e $|z|$ é o módulo do complexo, já conhecidos nosso.

Como exemplo, podemos escrever $i = e^{90° \cdot i}$, já que seu módulo é 1 e seu argumento é 90°.

É mais comum, no entanto, escrevermos os argumentos em *radianos*. Quando isso acontece, podemos escrever, já que $90° = \frac{\pi}{2}$,

$$i = e^{90° \cdot i} = e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}.$$

A forma mais conhecida é escrevermos

$$e^{\pi \cdot i} = -1,$$

tendo em vista que $|-1| = 1$ e que o seu argumento vale π ($= 180°$). Se você parar pra pensar, a equação é meio maluca... Mistura π, número de euler, unidade imaginária... uma bagunça, não? Mas talvez essa seja sua beleza, afinal.

(a) Teste se você entendeu esse conceito. Passe para a forma exponencial (com os argumentos em radianos) os números

i. $-i$

ii. $2i$

iii. 3

iv. $7 \cdot cis(45°)$

v. $4+4i$

(b) Mostre que as propriedades de multiplicação e divisão de complexos na forma polar, bem como a potenciação e radiciação, funcionam para esta forma também. Ao usar a forma exponencial, seu uso parece mais simples ou mais complicado que da forma trigonométrica?

(c) Calcule o valor de i^i. Esse número é puramente real, puramente imaginário ou ele tem ambas as partes? Se necessário, use $e^{-\frac{\pi}{2}} = 4,81$. Dica: pode ser útil relembrar que $ln(x^n) = n \cdot ln(x)$.

47. **Desafio 10:** Como introdução ao próximo assunto, segue o desafio.

(a) Calcule as raízes da função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, f(x) = x^2 - 5x + 6$. Essas raízes possuem alguma semelhança? Se sim, qual?

(b) Calcule as raízes da função $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, g(x) = x^2 + 1$. Essas raízes possuem alguma semelhança? Se sim, qual?

(c) Calcule as raízes da função $z : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \,|\, z(x) = x^2 + 3x + 12$. Essas raízes possuem alguma semelhança? Se sim, qual?

(d) Compare as semelhanças e as diferenças que você encontrou nos três exemplos acima. Reflita um pouco e responda: foi mera coincidência? Ou será que existe algo mais interessantes por trás...?

(e) O que significa, geometricamente, uma função de variáveis complexas?