FUNÇÃO EXPONENCIAL E LOGARITMO

Função exponencial

1. Sem usar calculadora, determine o valor das funções abaixo nos pontos indicados. Determine também os domínios de cada uma e suas respectivas imagens.

(a) 1; 1/3; 3; $\sqrt{3}$; 9. (b) 1; 3; 1/3; $1/\sqrt{3}$; 1/9.
(c) 1; 3; 1/3; $1/\sqrt{3}$; 1/9. (d) ½; $\sqrt{2}/2$; 1; 2; 4
(e) ½; $\sqrt{2}/2$; 1; 2; 4. (f) 5/8; 9/16; 17/2
(g) 25; $\sqrt{5}$; 1/125 (h) 1; 1/16; 2; 16

a) $f(x) = 3^x$; f(0), f(-1), f(1), f(0,5), f(2).
b) $f(x) = 3^{-x}$; f(0), f(-1), f(1), f(0,5), f(2).
c) $f(x) = (1/3)^x$; f(0), f(-1), f(1), f(0,5), f(2).
d) $f(x) = ½\cdot 2^x$; f(0), f(-1), f(1), f(2), f(3).
e) $f(x) = 2^{x-1}$; f(0), f(-1), f(1), f(2), f(3).
f) $f(x) = 2^{x-3} + ½$; f(0), f(-1), f(6).
g) $f(x) = 5^{-x}$; f(-2), f(-0,5), f(3).
h) $f(x) = (¼)^{-x}$; f(0), f(-2), f(1), f(0,5), f(2).

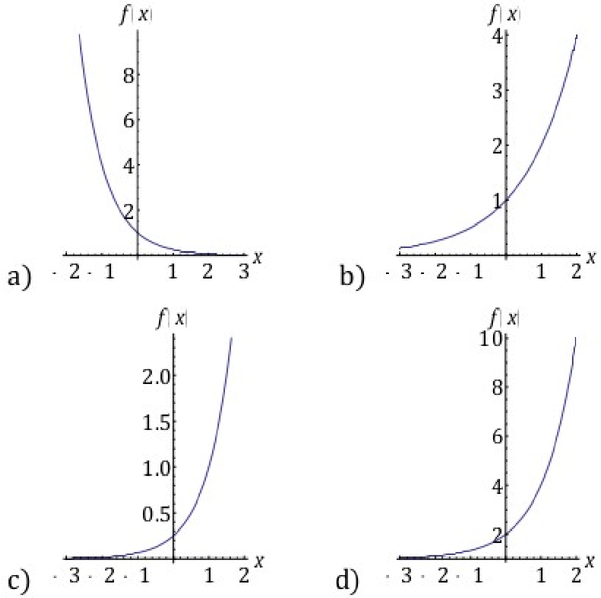
2. Você notou alguma semelhança nos valores encontrados nos itens (b) e (c) da questão anterior? Explique o que ocorre. Faça o mesmo com os itens (d) e (e) da questão.

Gráficos da função exponencial

3. Em um mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico das funções dos itens (a), (b) e (d) da questão 5. Essas funções são crescentes ou decrescentes? Qual delas cresce/decresce mais rapidamente? Quais suas assíntotas? Quais as raízes dessas funções?

4. Relacione o gráfico à função. (d, c, a, b)

( )$f(x) = 3^x + 1$ ( )$f(x) = 4^{x-1}$
( )$f(x) = 4^{-x}$ ( )$f(x) = 2^x$



5. Esboce os gráficos de
(a) $f(x) = e^x$ (c) $h(x) = e^{-x}$
(b) $g(x) = e^{x-2}$

Logaritmos

6. Usando as leis dos logaritmos, expanda as expressões abaixo.

(a) $\log(4) + \log(x)$ (b) $4 + \log_2(x)$
(c) $\log_3(y) + 3\log_2(x)$ (d) $[\log_2(x) + \log_2(y)] / 2$
(e) $3 - 2\log_2(x)$ (f) $\log_2(x) - 5\cdot\log_2(w) - 3\cdot\log_2(z)$
(g) $\log_5(x + 2) - \log_5(x^2 + 1) / 2$
(h) $3/2\cdot\log_3(x)$ (i) $2/3\cdot\log_3(x) + 1/3\cdot\log_3(w)$
(j) $1/3\cdot\ln(y)$ (k) $½\cdot\log_2(x) + ½\cdot\log_2(x + 1)$

a) $\log(4x)$
b) $\log_2(16x^3)$
c) $\log_3(y\cdot x^3)$
d) $\log_2[\sqrt{(xy)}]$
e) $\log_2(8/x^2)$
f) $\log_2(x / w^5\cdot z^2)$
g) $\log_5 [x+2 /(x^2+1)]$
h) $\log_3 [x\sqrt{x}]$
i) $\log_3 [\sqrt[3]{(x^2\cdot w)}]$
j) $\ln [\sqrt[3]{(y/w^4)}]$
k) $\log_2 [\sqrt{(x(x+1))}]$

7. Usando as leis dos logaritmos, condense as expressões abaixo.

(a) $\log(30)$ (b) $\log_2(x/y)$
(c) $\log_2(25\cdot x^3)$ (d) $\log_2[\sqrt{(x/z^3)}]$
(e) $\log_2 (y^2\cdot\sqrt{x} / \sqrt[3]{z})$ (f) $\log_2 \{\sqrt[3]{[(x-1)^4 / (x+1)]}\}$
(g) $\log_4(1/x^2)$ (h) $\sqrt[3]{x}$

a) $\log(6) + \log(5)$
b) $\log_2(x) - \log_2(y)$
c) $3\cdot\log_2(x) + 2\cdot\log_2(5)$
d) $[\log_2(x) - 3\cdot\log_2(z)] / 2$
e) $½\cdot\log_2(x) + 2\cdot\log_2(y) - 1/3\cdot\log_2(z)$
f) $4/3\cdot\log_2(x-1) - 1/3\cdot\log_2(x+1)$
g) $-2\cdot\log_4(x)$
h) $1/3\cdot\log_2(x)$

8. Escreva cada expressão abaixo como o logaritmo de um único termo.
(a) $\log_5[(x + 1)\cdot\sqrt{(x - 1)}]$
(b) $\log_2 [\sqrt{(2x + 3)^3} / (x + 2)]$
(c) $\log[4\cdot(x + 3)^2 / \sqrt{(x^7)}]$

a) $½\cdot\log_5 (x - 1) + \log_5 (x + 1)$
b) $3\cdot\log_4 (2x + 3) - \log_2 (x + 2)$
c) $2\cdot [\log (x + 3) - \log (x/2)] - 3/2\cdot\log(x)$

9. Mostre, com um exemplo, que
a) $\log(a + b) \neq \log(a) + \log(b)$
b) $\log(a\cdot b) \neq \log(a) \cdot \log(b)$

10. Use uma calculadora científica e a regra de mudança de base para aproximar
(1,584963; 0,4306766; 1,528321; –1,386853)

a) $\log_2(3)$ b) $\log_5(2)$
c) $\log_8(24)$ d) $\log_6(1/12)$

Equações com exponencial e logaritmo

11. Resolva as equações.
(4; 1,8684; 1,71882; 2; 1,25; 2,79635; 1024)

a) $3^{-x} = 1/81$ b) $e^{3x - 1} = 100$
c) $4^{3x + 2} = 5^{x - 1}$ d) $\ln(3x - 1) = 2$
e) $100 / (1 + 2^{3 - x/2}) = 20$
f) $\log_3(x + 19) - 1 = 3 + \log_3(x - 1)$
g) $\log_2(4x) = \log_4(x) + 7$

12. Resolva as equações.
(–3; 5; (–1–3·$\log_3$2) / (1–2·$\log_3$2); sem solução; 40/11; 3; [1+$\sqrt{(9+4\cdot e)}$]/2)

a) $(1/3)^x = 27$
b) $5^{2x - 7} = 125$
c) $3^{x + 1} = 2^{2x - 3}$
d) $20 / (10 + 2^x) = 5$
e) $\log (10\cdot x) - \log (4 - x) = 2$
f) $\log_{25} (2\cdot x - 1) = ½$
g) $\ln (x + 1) + \ln (x - 2) = 1$

13. Dada a função (x < –2 ou x > 1/7)

$$f(x) = \log (2\cdot x + 4 / 3\cdot x),$$

determine os valores de x para os quais f(x) é um número real menor que 1.

Gráficos da função logaritmo

14. Esboce os gráficos de
(a) $f(x) = \ln(x)$
(b) $g(x) = \ln(x - 2)$
(c) $h(x) = \ln(1/x)$

15. Compare os gráficos do exercício anterior com os do exercício 5.

16. Em um mesmo plano cartesiano, esboce o gráfico das funções dos itens (a), (b) e (c) da questão 14. Essas funções são crescentes ou decrescentes? Qual delas cresce/decresce mais rapidamente? Quais suas assíntotas? Quais as raízes dessas funções?

Problemas

Comentário: se achar interessante, verifique se em cada um dos problemas abaixo a função é crescente ou decrescente, quais suas assíntotas e quais suas raízes.

17. Você pegou um empréstimo bancário de R\$2500,00, a uma taxa de 5% ao mês.
($D(t) = 2500\cdot1{,}05^t$; 4489,64)

a) Escreva a função que fornece o quanto você deve em um determinado mês , contado a partir da data do empréstimo, supondo que você não tenha condições de saldar nem mesmo parte da dívida.

b) Determine a dívida acumulada após 12 meses do empréstimo.

18. O decaimento radioativo do estrôncio 90 (Sr-90) é descrito por $P(t) = P_0\cdot2^{-bt}$, onde t é um instante de tempo, medido em anos, b é uma constante real e P_0 é a concentração inicial de Sr-90, ou seja, a concentração no instante t_0 .
(1/29; 52,22 becquerels)

a) Determine o valor da constante b. sabendo que a meia-vida do Sr-90 é de 29 anos (ou seja, que a concentração de Sr-90 cai pela metade em 29 anos).

b) Foram detectados 570 becquerels de Sr-90 por kg de solo na região da usina de Fukushima, no Japão, em abril de 2011 (valor que corresponde a cerca de 130 vezes a concentração normal do solo daquela região). Determine qual será a concentração de Sr-90 daqui a 100 anos.

19. A concentração de CO2 na atmosfera vem sendo medida desde 1958 pelo Observatório de Mauna Loa, no Havaí. Os dados coletados mostram que, nos últimos anos, essa concentração aumentou, em média, 0,5% por ano. É razoável supor que essa taxa anual de crescimento da concentração de CO2 irá se manter constante nos próximos anos.
($C(t) = 377{,}4 \cdot 1{,}005^t$; 388,9)

a) Escreva uma função C(t) que forneça a concentração de CO2 na atmosfera em relação ao tempo t, dado em anos. Considere como instante inicial — ou seja, aquele em que t = 0 — o ano de 2004, onde foi observada uma concentração de 377,4 ppm de CO2 na atmosfera.

b) Determine a concentração em 2010.

c) Determine em que ano a concentração será o triplo daquela verificada em 2010.

20. O sistema de ar condicionado de um ônibus quebrou durante uma viagem. A função que descreve a temperatura (em graus Celsius) no interior do ônibus em função de t, o tempo transcorrido, em horas, desde a quebra do ar condicionado, é

$$T(t) = (T_0 - T_{ext}) \cdot 10^{-t/4},$$

onde T_0 é a temperatura interna do ônibus enquanto a refrigeração funcionava, e T_{ext} é a temperatura externa (que supomos constante durante toda a viagem). Sabendo que $T_0 = 21°C$ e também que $T_{ext} = 30ºC$,
(29,1°C; $T(t) = 30 - 9 \cdot 10^{t/4}$

a) calcule a temperatura no interior do ônibus transcorridas 4 horas desde a quebra do sistema de ar condicionado;

b) esboçe abaixo o gráfico de T(t).

21. A população brasileira era de cerca de 170 milhões de habitantes em 2000 e atingiu os 190 milhões de habitantes em 2010.
($P(t) = 170.000.000 \cdot e^{0{,}0111t}$; 207.640.000)

a) Considerando que t = 0 no ano 2000, determine a função exponencial $P(t) = a \cdot e^{bt}$ que fornece o número aproximado de habitantes do país, em relação ao ano.

b) Usando seu modelo matemático, estime a população brasileira em 2020.

22. Suponha que o preço de um automóvel tenha uma desvalorização média de 19% ao ano sobre o preço do ano anterior. Suponha que represente o preço inicial (preço de fábrica) e p(t) o preço após anos.
($p(t) = F \cdot 0{,}81^t$; 15 anos)

a) Determine a expressão de p(t).

b) Determine o tempo mínimo necessário, em número inteiro de anos, após a saída da fábrica, para que um automóvel venha a valer menos que 5% do valor inicial. Se for preciso, use log(2) = 0,301 e log(3) = 0,477.

23. Uma bateria perde permanentemente sua capacidade ao longo dos anos. Essa perda varia de acordo com a temperatura de operação e armazenamento da bateria. A função que fornece o percentual de perda anual de capacidade de uma bateria, de acordo com a temperatura de armazenamento, T (em °C), tem a forma

$$P(T) = a \cdot 10^{bt},$$

em que a e b são constantes reais positivas. A tabela abaixo fornece, para duas temperaturas específicas, o percentual de perda de uma determinada bateria de íons de Lítio.

Temperatura (°C)	Perda anual decapacidade (%)
0	1,6
55	20,0

Com base na expressão de P(t) e nos dados da tabela, (a = 1,6; b = 1/50)

a) esboce a curva que representa a função P(T), exibindo o percentual exato para T = 0 e T = 55;

b) determine as constantes a e b para a bateria em questão.

24. Você acaba de contrair uma dívida no cheque especial, pagando uma taxa de 8% ao mês. Supondo que você não terá como saldar nem mesmo parcialmente essa dívida nos próximos meses, determine em quanto tempo ela dobrará de valor. (9 meses)

25. Os vegetais e a maioria dos animais vivos contêm uma concentração de carbono 14 semelhante àquela encontrada na atmosfera. Os vegetais os absorvem quando consomem dióxido de carbono durante a fotossíntese. Entre os animais, ele é distribuído através da cadeia alimentar. Quando um ser vivo morre, ele para de repor o carbono 14, de modo que as quantidades desse elemento começam a decair. ($C(t) = C_0 \cdot 2^{-t/5730}$; 2948 anos)

a) Se a meia-vida do carbono 14 é de 5730 anos, encontre a função que fornece a concentração desse elemento ao longo do tempo.

b) Determine a idade de uma múmia que tem 70% da concentração de carbono 14 encontrada nos seres vivos atualmente.

26. Para certo modelo de computadores produzidos por uma empresa, o percentual dos processadores que apresentam falhas após t anos de uso é dado pela função

$$P(t) = 100\cdot(1 - 2^{-0.1t}).$$

Em quanto tempo 75% dos processadores de um lote desse modelo de computadores terão apresentado falhas? (20 anos)

27. A escala de um aparelho de medir ruídos é definida como

$$R(I) = 120 + 10\cdot\log_{10}(I),$$

em que R é a medida do ruído, em decibéis (dB), e I é a intensidade sonora, em W/m^2. O ruído dos motores de um avião a jato equivale a 160 dB , enquanto o tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade atinge 80 dB , que é o limite a partir do qual o ruído passa a ser nocivo ao ouvido humano. (10^4 W/m^2 e 10^{-4} W/m^2 ; 10^8 vezes)

a) Determine as intensidades sonoras do motor de um avião a jato e do tráfego em uma esquina movimentada de uma grande cidade.

b) calcule a razão entre essas intensidades, ou seja, calcule quantas vezes o ruído do avião é maior que o do tráfego.

28. As populações de duas cidades, A e B, são dadas em milhares de habitantes por

$$A(t) = \log_8(1+t)^6 \text{ e}$$
$$B(t) = \log_2(4t+4),$$

em que a variável t representa o tempo em anos. Após certo instante, a população de uma dessas cidades é sempre maior que a da outra. Determine o valor mínimo desse instante e especifique a cidade cuja população é maior a partir desse instante.
(3 anos)

29. A função $L(x) = a\cdot e^{bx}$ fornece o nível de iluminação, em luxes, de um objeto situado a x metros de uma lâmpada.
(a = 120, b = –ln(2); 3 m)

a) Calcule os valores numéricos das constantes *a* e *b* , sabendo que um objeto a 1 metro de distância da lâmpada recebe 60 luxes e que um objeto a 2 metros de distância recebe 30 luxes.

b) Considerando que um objeto recebe 15 luxes, calcule a distância entre a lâmpada e esse objeto.

30. O pH de uma substância indica se ela é ácida (pH < 7), neutra (pH = 7), ou básica (pH > 7). O pH está associado à concentração de íons de hidrogênio ($[H^+]$), dada em mol/l, através da fórmula
$pH = -\log[H^+]$. ($3{,}162\cdot10^{-11}$ mol/L ; o suco de limão)

a) Determine a concentração de íons de hidrogênio do leite de magnésia, cujo pH é 10,5.

b) Determinou-se que o suco de um determinado limão tinha pH 2,2 e o suco de uma certa laranja tinha pH 3,5. Qual dos dois tinha a maior concentração de íons de hidrogênio?

31. Em um determinado momento, foram introduzidos 100 peixes em um lago. Um estudo ecológico-matemático determinou que a população dessa espécie de peixes nesse lago é dada pela fórmula abaixo:

$$P(t) = 1000 / (1 + A \cdot e^{-kt}),$$

em que é t o tempo decorrido, em meses, desde que os primeiros peixes foram postos no lago.
($P(t) = 1000 / [1 + 9 \cdot e^{-t \cdot \ln(3)/3}]$; 12 meses)

a) Determine a função P(t), sabendo que, passados 3 meses da introdução dos peixes, a população atingiu 250 cabeças.

b) Determine em quantos meses a população atingirá 900 peixes.

32. O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por

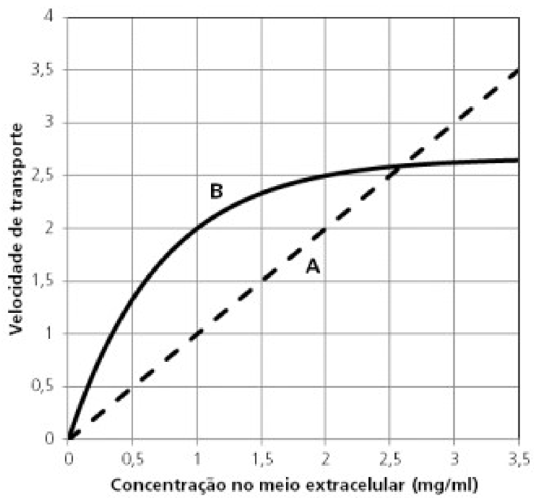
$$T(t) = T_A + a \cdot 3^{bt},$$

onde T(t) é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e a e b são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de –18°C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0°C após 90 minutos e chegou à marca de – 16°C após 270 minutos.
(a = 54 e b = –1/90 ; 360 minutos)

a) Encontre os valores numéricos das constantes a e b.

b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas 2/3°C superior à temperatura ambiente.

33. Hemácias de um animal foram colocadas em meio de cultura em vários frascos contendo diferentes concentrações das substâncias A e B, marcadas com isótopo de hidrogênio. Dessa forma os pesquisadores puderam acompanhar a entrada dessas substâncias nas hemácias, como mostrado no gráfico abaixo.



Seja x a concentração de substância B no meio extracelular e y a velocidade de transporte. Observando-se o formato da curva B e os valores de x e y em determinados pontos, podemos concluir que a função que melhor relaciona essas duas grandezas é (c)

a) $y = [4 + \log_2(x)] / 2$
b) $y = 1 - \log_2 (x + 1)$
c) $y = 8/3 \cdot (1 - 2^{-2x})$
d) $y = 3^x - 1$

34. As funções $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$, tais que $a > b > 0$, se interceptam em quantos pontos? Quais são eles?

35. Sejam $f(x) = a^x$ e $g(x) = b^x$. Encontre a e b de modo que as funções tenham infinitos pontos de interceção.