

Liste de Números Complexos

Resumo

- $\mathbb{R} \longrightarrow$ **Reta Real**
- $\mathbb{C} \longrightarrow$ **Plano Complexo** (também chamado de Plano de Argand-Gauss)
- $\mathbb{C} = \{z = a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}, \text{ onde } i^2 = -1\}$
- A representação de um complexo como um ponto no plano recebe o nome de **afixo**
- Multiplicar por i corresponde a rotacionar um complexo exatamente 90° no sentido anti-horário, mantendo o tamanho original do vetor. Para rotacionar por ângulos diferentes, bem como para mudar o módulo, multiplicaremos por números complexos específicos, dependendo de cada resultado que se queira obter.
- Para converter de graus para radianos (ou vice-versa), faça a seguinte regra de três:
$$\frac{\theta}{\alpha^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}, \text{ com } \theta \text{ em radianos}$$
- Forma algébrica (ou retangular)
 - Parte Real e Parte Imaginária: $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$ representam as coordenadas do complexo no plano $\longrightarrow z = (a, b)$
 - Igualdade: $z_1 = z_2 \iff a + bi = c + di \longrightarrow a = c \text{ e } b = d$
 - Soma: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C}$
 - Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i \in \mathbb{C}$
 - Conjugado: $z = a + bi \longrightarrow \bar{z} = a - bi$
 - Divisão: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$
- Forma trigonométrica (ou polar)
 - Módulo: $|z|$ é o tamanho do vetor que liga a origem até o afixo, no plano complexo
 - Argumento: $\arg(z) = \theta$; ângulo entre a parte positiva do eixo dos reais, seguindo em sentido anti-horário, até o vetor que representa o número complexo
 - Notação: $z = |z| \text{cis}(\theta) = (|z|; \arg(z))$
 - Soma: **não faça somas nessa forma, porque é muito complicado e trabalhoso**
 - Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$
 - Conjugado: $z = |z| \cdot \text{cis}(\theta) \longrightarrow \bar{z} = |z| \cdot \text{cis}(-\theta)$
 - Divisão: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$
- Conversão: algébrica \longleftrightarrow trigonométrica
 - Algébrica \longrightarrow trigonométrica
 $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\arg(z) = \arctan(\frac{b}{a})$
 - Trigonométrica \longrightarrow algébrica
 $a = |z| \cdot \cos(\theta)$ e $b = |z| \cdot \sin(\theta)$

- Fórmulas de De Moivre

- As fórmulas de De Moivre falam de potenciação e radiciação com $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, a menos que você fique confortável calculando coisas do tipo $z^n = (a+bi)^n$, expandindo o Binômio de Newton, ou coisas do tipo $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a+bi}$, sugiro que use sempre a forma trigonométrica para calculá-las.
- $n \in \mathbb{Z}$
- Potenciação: $z^n = |z|^n \cdot cis(n \cdot \theta)$
- Radiciação: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \cdot cis(\frac{\theta + 2k\pi}{n})$

EXERCÍCIOS

- Segundo o matemático Leopold Kronecker (1823-1891), Deus fez os números inteiros, o resto é trabalho do homem. Os conjuntos numéricos são, como afirma o matemático, uma das grandes invenções humanas. Assim, em relação aos elementos desses conjuntos, é correto afirmar que:
 - o produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.
 - a soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
 - entre os números reais 3 e 4, existe apenas um número irracional.
 - entre dois números racionais distintos existe pelo menos um número racional.
 - a diferença entre dois números inteiros negativos é sempre um número inteiro negativo.
- Seja y um número real compreendido entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{2}$. Qualquer que seja o valor de y , ele pertencerá ao conjunto
 - $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 1\}$
 - $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}\}$
 - $\{x \in \mathbb{Q} \mid -1 < x \leq 2\}$
 - $\{x \in \mathbb{I} \mid x < \frac{1}{2}\}$
 - $\{x \in \mathbb{N} \mid x \geq \frac{1}{2}\}$
- Classifique em verdadeiro ou falso os itens a seguir:
 - $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
 - $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$
 - $\mathbb{N} \subset \mathbb{C}$
 - $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{C}$
 - $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
 - $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \supset \mathbb{R}$
- Marque a(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S), em relação aos conjuntos numéricos $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ e \mathbb{C}
 - A soma de três números ímpares consecutivos é 159. O maior dos três é 55.
 - Se x e y são números racionais, então $x + y$ e $x \cdot y$ também são racionais.
 - Dado um número complexo qualquer $x = a + bi$, existe sempre um número complexo y tal que $x \cdot y$ é real.
 - Se x é um número negativo, então \sqrt{x} não existe.
 - A forma trigonométrica do número complexo $3\sqrt{3} + 3i$ é o número $6 \cdot cis(\frac{\pi}{6})$

5. Identifique as partes real e imaginária dos números a seguir

- (a) $z = \frac{1}{3} + i$
- (b) $z = -3 - 27i$
- (c) $z = 2019$
- (d) $z = -i$

6. **Desafio 1:** O que significa afirmar sobre os conjuntos \mathbb{A} e \mathbb{B} que $\mathbb{A} \subset \mathbb{B}$ e $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$?

Forma algébrica (ou retangular)

7. Represente geometricamente os complexos:

- (a) $z = 1 + i$
- (b) $z = -2i$
- (c) $z = 4i$
- (d) $z = -5$
- (e) $z = 4 - i$
- (f) $z = 3 + 2i$

8. Sejam os complexos $v = (-2, x)$ e $w = (y, -3)$.

- (a) Escreva v e w na forma algébrica convencional.
- (b) Determine x e y reais tais que $v + w = -4 + 2i$

9. Determine $p \in \mathbb{R}$ de modo que $z = (1 - p) + (p^2 - 1) \cdot i$ seja um número real não nulo.

10. Calcule o valor real de x tal que: $(x^2 - 9) + (x + 3)i = 0$

11. Mostre que, para todo $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.

12. Determine a forma algébrica dos seguintes quocientes:

- (a) $\frac{6 - 2i}{4 + 2i}$
- (b) $\frac{5i}{3 - 4i}$
- (c) $\frac{4 + i}{4 - i}$
- (d) $\frac{6}{5i}$
- (e) $\frac{2i}{1 - i}$
- (f) $\frac{12 - i}{7 + 8i}$

13. Determine os números reais m e n para que as igualdades sejam verdadeiras:

- (a) $m + (n - 1)i = -4 + 3i$
- (b) $(n - 2, m + 5) = (3, -2)$
- (c) $(m - 3) + (n - 2)i = 5i$
- (d) $(m - n + 1) + (2m + n - 4)i = 0$

14. Sendo i a unidade imaginária pergunta-se: quantos números reais a existem para os quais $(a + i)^4$ é um número real?
15. Utilize o conjugado \bar{z} para obter a expressão para z^{-1} , com $z \neq 0$.
16. Mostre algebricamente a validade das propriedades a seguir:
- (a) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
 - (b) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
 - (c) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, em que $z_2 \neq 0$
17. **Desafio 2:** Você se lembra de que o produto notável $(x + y)(x - y)$ representa uma fatoração possível para $x^2 - y^2$? Com base nisso e nos conhecimentos que obteve, exiba uma possível fatoração para $x^2 + y^2$.
18. **Desafio 3:** Dado um número complexo $z = x + iy$, o seu conjugado é o número $\bar{z} = x - iy$.
- (a) Resolva as equações: $z \cdot \bar{z} = 4$ e $z^2 = \bar{z}^2$
 - (b) Ache os pontos de intersecção dos lugares geométricos que representam as soluções dessas equações.

Forma trigonométrica (ou polar)

19. Determine o módulo e argumento principal dos números complexos dados:

- (a) $z_1 = 4 + 4i$
- (b) $z_2 = -5i$
- (c) $z_3 = -\sqrt{3} + i$
- (d) $z_4 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$

20. Determine a fórmula polar dos complexos x e y que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} 2xi + y = -3 + i \\ x + yi = -1 \end{cases}$$

21. Escreva os seguintes complexos na forma trigonométrica:

- (a) $z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$
- (b) $z = 2i$
- (c) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
- (d) $z = (1 - i)^2$

22. Sabendo que $z_1 = 4 \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)$ e que $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ)$, determine:

- (a) a forma polar de z_2
- (b) a forma algébrica de z_2

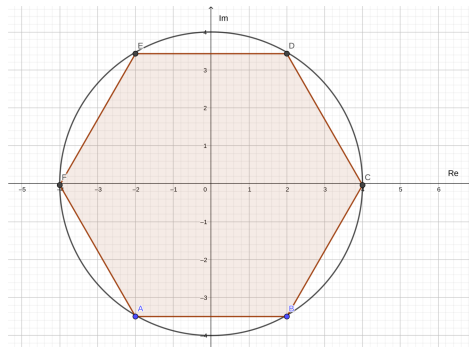
23. São dados os números complexos:

$$\begin{aligned} z_1 &= 6 \cdot (\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) \\ z_2 &= 2\sqrt{3} \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) \\ z_3 &= 6 \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ). \end{aligned}$$

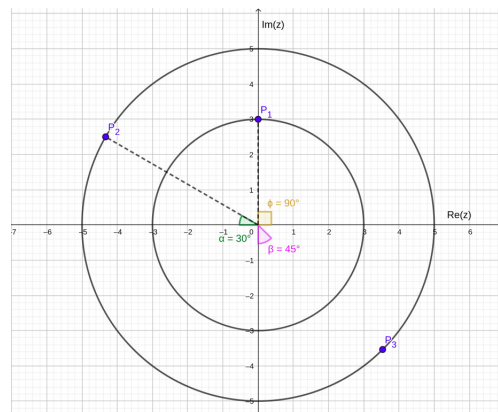
Determine a forma trigonométrica de:

- (a) $z_1 \cdot z_2$
- (b) $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$
- (c) $\frac{z_1}{z_3}$
- (d) $\frac{z_2}{z_3}$

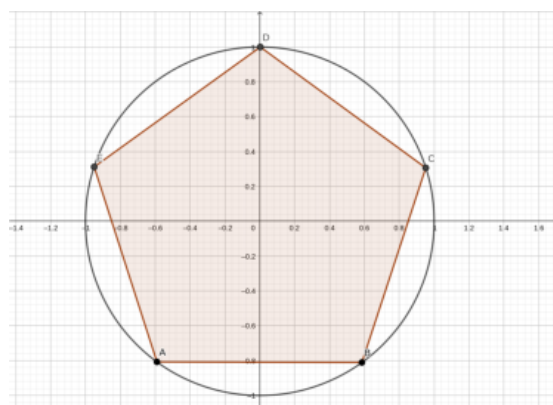
24. A figura apresenta, no plano complexo, um hexágono regular inscrito em uma circunferência cujo raio mede 4. Determine o argumento principal dos complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 , cujas respectivas imagens são os vértices A, B, C, D, E e F



25. Na figura, P_1, P_2 e P_3 são os afixos dos números complexos z_1, z_2 e z_3 , respectivamente. Determine a forma polar de z_1, z_2 e de z_3



26. O polígono $ABCDE$ da figura é um pentágono regular inscrito no círculo unitário de centro na origem. Determine as coordenadas polares do vértice A .



27. Determine o lugar geométrico do conjunto de afixos de números complexos que possuem o mesmo módulo. Justifique sua resposta.

28. Conhecendo um número complexo na sua forma polar, como posso escrever a forma polar do seu inverso multiplicativo z^{-1} ? E do seu conjugado \bar{z} ?
29. **Desafio 4:** Dado $z = 7 \cdot (\cos(\frac{\pi}{4}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{4}))$, descubra os valores de $n \in \mathbb{N}$ para que:
- (a) z^n seja um número imaginário puro
 - (b) z^n seja um número real
- Dica: Represente z no plano complexo.
30. **Desafio 5:** Determine as coordenadas do ponto P' , obtido ao se rotacionar o ponto $P(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ em torno da origem, em um ângulo de 225° , no sentido:
- (a) anti-horário
 - (b) horário
31. **Desafio 6:** No plano complexo, considere a curva β descrita pelos pontos $z = (1 + \cos\theta \cdot (\cos(\theta) + i \sin(\theta)))$, para $\theta \in [-\pi, \pi]$ e julgue os seguintes itens.
- (a) $|z| \leq 2$
 - (b) Se z é um número real e $z \in \beta$, então $z = 0$
 - (c) Se $z \in \beta$, então o conjugado de z também pertence a β

Potenciação e radiciação de complexos (ou fórmulas de De Moivre)

32. Dado $z = 4 \cdot (\cos 15^\circ + i \cdot \sin 15^\circ)$, calcule z^{10} .
33. Encontre a forma trigonométrica de $z = i^{21} \cdot i^{22} \cdot i^{23} \dots i^{29}$.
34. Dado $z = 2 \cdot (\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$, obtenha a forma retangular de
- (a) z^3
 - (b) z^6
 - (c) z^{10}
35. Sabendo que $z = -1 + \sqrt{3}i$, calcule z^6 , z^{16} e z^{101} e expresse os resultados nas forma polar e algébrica.
36. Dado $z = \sqrt{3} - i$, obtenha z^6 :
- (a) sem o uso da fórmula de De Moivre
 - (b) por meio da fórmula de De Moivre
37. Calcule:
- (a) $(-\sqrt{6} - i\sqrt{2})^{13}$
 - (b) $(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}i)^{101}$
 - (c) $(-4 + 4i\sqrt{3})^{-6}$
38. Determine as raízes quadradas dos números complexos seguintes:
- (a) i
 - (b) -3
 - (c) $-\frac{1}{4}$

39. Calcular:

- (a) $\sqrt[3]{-2 + 2i\sqrt{3}}$
- (b) $\sqrt[4]{-5 - 5i}$
- (c) $\sqrt{4\sqrt{3} - 4i}$

40. Interprete, geometricamente, o que representam as duas fórmulas de De Moivre.

41. Dado o complexo $z = 4i$, determine:

- (a) as raízes quadradas de z e as representações no plano de Argand-Gauss.
- (b) a distância entre essas duas raízes.

42. Sabendo que o ponto $A(-1, 0)$ é a imagem de uma das raízes sextas de um número complexo z (isto é, $\sqrt[6]{z}$), determine:

- (a) z
- (b) as formas algébrica e polar de cada uma das raízes sextas de z .

43. Um matemático, observando um vitral com o desenho de um polígono inscrito em um círculo, verificou que os vértices desse polígono poderiam ser representados pelas raízes cúbicas complexas do número 8. Qual é a área do polígono observado pelo matemático?

44. **Desafio 7:** Tendo i como a unidade imaginária, sabemos que $i^2 = -1$. Sendo assim

- (a) Calcule os valores de i^3 , i^4 , i^5 e i^6 .
- (b) Calcule o valor de i^{2019} .
- (c) Encontre uma expressão que relacione um caso genérico de $i^n \mid n \in \mathbb{N}$. Reflita sobre o significado da expressão e tente explicá-lo.

45. **Desafio 8:** Tendo i como a unidade imaginária, sabemos, por definição, que $i^2 = -1$. Todavia, é comum algumas pessoas apresentarem uma definição da unidade imaginária como sendo $i = \sqrt{-1}$.

- (a) Escreva o valor de i na forma polar e calcule o valor de i^2 .
- (b) Escreva -1 na forma polar e calcule $\sqrt{-1}$.
- (c) Qual das duas definições parece ser a mais apropriada? Justifique sua resposta.

46. **Desafio 9:** Uma forma alternativa de escrever os números complexos é usando uma terceira representação: a chamada *forma exponencial*. Ela consiste em usar a identidade de Euler (a qual eu não demonstrarei):

$$|z| \cdot (\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)) = |z| \cdot e^{\theta \cdot i},$$

onde θ é o argumento principal e $|z|$ é o módulo do complexo, já conhecidos nosso.

Como exemplo, podemos escrever $i = e^{90^\circ \cdot i}$, já que seu módulo é 1 e seu argumento é 90° .

É mais comum, no entanto, escrevermos os argumentos em *radianos*. Quando isso acontece, podemos escrever, já que $90^\circ = \frac{\pi}{2}$,

$$i = e^{90^\circ \cdot i} = e^{\frac{\pi}{2} \cdot i}.$$

A forma mais conhecida é escrevermos

$$e^{\pi \cdot i} = -1,$$

tendo em vista que $|-1| = 1$ e que o seu argumento vale π ($= 180^\circ$). Se você parar pra pensar, a equação é meio maluca... Mistura π , número de euler, unidade imaginária... uma bagunça, não? Mas talvez essa seja sua beleza, afinal.

- (a) Teste se você entendeu esse conceito. Passe para a forma exponencial (com os argumentos em radianos) os números
- i. $-i$
 - ii. $2i$
 - iii. 3
 - iv. $7 \cdot \text{cis}(45^\circ)$
 - v. $4 + 4i$
- (b) Mostre que as propriedades de multiplicação e divisão de complexos na forma polar, bem como a potenciação e radiciação, funcionam para esta forma também. Ao usar a forma exponencial, seu uso parece mais simples ou mais complicado que da forma trigonométrica?
- (c) Calcule o valor de i^i . Esse número é puramente real, puramente imaginário ou ele tem ambas as partes? Se necessário, use $e^{-\frac{\pi}{2}} = 4,81$. Dica: pode ser útil lembrar que $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$.

47. **Desafio 10:** Como introdução ao próximo assunto, segue o desafio.

- (a) Calcule as raízes da função $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid f(x) = x^2 - 5x + 6$. Essas raízes possuem alguma semelhança? Se sim, qual?
- (b) Calcule as raízes da função $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid g(x) = x^2 + 1$. Essas raízes possuem alguma semelhança? Se sim, qual?
- (c) Calcule as raízes da função $z : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \mid z(x) = x^2 + 3x + 12$. Essas raízes possuem alguma semelhança? Se sim, qual?
- (d) Compare as semelhanças e as diferenças que você encontrou nos três exemplos acima. Reflita um pouco e responda: foi mera coincidência? Ou será que existe algo mais interessantes por trás...?
- (e) O que significa, geometricamente, uma função de variáveis complexas?