Introdução à Álgebra Linear

Alexandre S. Allil

Graduação em Sistemas de Informação

Centro Federal de Educação Tecnológica

Celso Suckow da Fonseca (CEFET/RJ)

Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição ($\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n$ *é o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais.*

$(1, 2) \in \mathbb{R}^2$

$(-1, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$

$(1, 2, 3, 4) \neq (2, 1, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$

Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição ($\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n$ é o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais.

$(1, 2) \in \mathbb{R}^2$

$(-1, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$

$(1, 2, 3, 4) \neq (2, 1, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$

Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição ($\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n$ é o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais.

$$(1, 2) \in \mathbb{R}^2$$

$$(-1, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$$

$$(1, 2, 3, 4) \neq (2, 1, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$$

Espaço $\mathbb{R}^n$

Definição ($\mathbb{R}^n$)

$\mathbb{R}^n$ é o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais.

$(1, 2) \in \mathbb{R}^2$

$(-1, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^3$

$(1, 2, 3, 4) \neq (2, 1, 3, 4) \in \mathbb{R}^4$

Soma em $\mathbb{R}^n$

Definição (Soma em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_n+v_n)\end{aligned}$$

Propriedades da Soma em $\mathbb{R}^n$

- comutativ.: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$,
- associativ.: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$
- elemento neutro: $\exists\, \mathbf{0}$ t.q. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u}$
- inverso aditivo: dado $\mathbf{u}$, $\exists\, (-\mathbf{u})$ t.q. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Soma em $\mathbb{R}^n$

Definição (Soma em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= (u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2\ ,\ \dots\ ,\ u_n+v_n) \end{aligned}$$

Propriedades da Soma em $\mathbb{R}^n$

- comutativ.: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$,
- associativ.: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$
- elemento neutro: $\exists\, \mathbf{0}$ t.q. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u}$
- inverso aditivo: dado $\mathbf{u}$, $\exists\, (-\mathbf{u})$ t.q. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Soma em $\mathbb{R}^n$

Definição (Soma em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_n+v_n) \end{aligned}$$

Propriedades da Soma em $\mathbb{R}^n$

- comutativ.: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$,
- associativ.: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$
- elemento neutro: $\exists\ \mathbf{0}$ t.q. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u}$
- inverso aditivo: dado $\mathbf{u}$, $\exists\ (-\mathbf{u})$ t.q. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Soma em $\mathbb{R}^n$

Definição (Soma em $\mathbb{R}^n$)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u} + \mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\
&= (u_1 + v_1\ ,\ u_2 + v_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_n + v_n)
\end{aligned}
$$

Propriedades da Soma em $\mathbb{R}^n$

- comutativ.: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$,
- associativ.: $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$
- elemento neutro: $\exists\, \mathbf{0}$ t.q. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u}$
- inverso aditivo: dado $\mathbf{u}$, $\exists\, (-\mathbf{u})$ t.q. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Soma em $\mathbb{R}^n$

Definição (Soma em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_n+v_n)\end{aligned}$$

Propriedades da Soma em $\mathbb{R}^n$

- comutativ.: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$,
- associativ.: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$
- elemento neutro: $\exists\, \mathbf{0}$ t.q. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u}$
- inverso aditivo: dado $\mathbf{u}$, $\exists\, (-\mathbf{u})$ t.q. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Soma em $\mathbb{R}^n$

Definição (Soma em $\mathbb{R}^n$)

$$\begin{aligned}\mathbf{u}+\mathbf{v} &= (u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n) \\ &= (u_1+v_1\ ,\ u_2+v_2\ ,\ \ldots\ ,\ u_n+v_n)\end{aligned}$$

Propriedades da Soma em $\mathbb{R}^n$

- comutativ.: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$,
- associativ.: $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \quad \forall\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$
- elemento neutro: $\exists\ \mathbf{0}$ t.q. $\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{u} \quad \forall\ \mathbf{u}$
- inverso aditivo: dado $\mathbf{u}$, $\exists\ (-\mathbf{u})$ t.q. $\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=\mathbf{0}$

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Definição (multiplicação por escalar)

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}), \ \forall\ \alpha, \ \forall\ \beta, \ \forall\ \mathbf{u}$
- elemento neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \ \forall \mathbf{u}$

Propriedades Distributivas de $\mathbb{R}^n$

- $\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \ \forall\ \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}$
- $($

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Definição (multiplicação por escalar)

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}), \ \forall\, \alpha, \ \forall\, \beta, \ \forall\, \mathbf{u}$
- elemento neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \ \forall\mathbf{u}$

Propriedades Distributivas de $\mathbb{R}^n$

- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \ \forall\, \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}, \ \forall\, \alpha, \beta, \mathbf{u}$

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Definição (multiplicação por escalar)

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}),\ \forall\ \alpha,\ \forall\ \beta,\ \forall\ \mathbf{u}$
- elemento neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u},\ \forall \mathbf{u}$

Propriedades Distributivas de $\mathbb{R}^n$

- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v},\ \forall\ \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u},\ \forall\ \alpha, \beta, \mathbf{u}$

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Definição (multiplicação por escalar)

$$\alpha \mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}),\ \forall\, \alpha,\ \forall\, \beta,\ \forall\, \mathbf{u}$
- elemento neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u},\ \forall \mathbf{u}$

Propriedades Distributivas de $\mathbb{R}^n$

- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v},\ \forall\, \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u},\ \forall\, \alpha, \beta, \mathbf{u}$

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Definição (multiplicação por escalar)

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}),\ \forall\, \alpha,\ \forall\, \beta,\ \forall\, \mathbf{u}$
- elemento neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u},\ \forall \mathbf{u}$

Propriedades Distributivas de $\mathbb{R}^n$

- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v},\ \forall\, \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u},\ \forall\, \alpha, \beta, \mathbf{u}$

Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

Definição (multiplicação por escalar)

$$\alpha\mathbf{u} \quad = \quad \alpha(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (\alpha u_1, \alpha u_2, \ldots, \alpha u_n)$$

Propriedades da Multiplicação por Escalar em $\mathbb{R}^n$

- $(\alpha\beta)\mathbf{u} = \alpha(\beta\mathbf{u}), \ \forall\, \alpha, \ \forall\, \beta, \ \forall\, \mathbf{u}$
- elemento neutro: $1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \ \forall\mathbf{u}$

Propriedades Distributivas de $\mathbb{R}^n$

- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}, \ \forall\, \alpha, \mathbf{u}, \mathbf{v}$
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}, \ \forall\, \alpha, \beta, \mathbf{u}$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& (2,-1,0,3)-3(0,-2,2,1) \\
= \quad & (2,-1,0,3)+((-3)(0,-2,2,1)) \\
= \quad & (2,-1,0,3)+((-3)0,(-3)(-2),(-3)2,(-3)1) \\
= \quad & (2,-1,0,3)+(0,6,-6,-3) \\
= \quad & (2+0,-1+6,0-6,3-3) \\
= \quad & (2,5,-6,0)
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& (2,-1,0,3) - 3(0,-2,2,1) \\
= \; & (2,-1,0,3) + ((-3)(0,-2,2,1)) \\
= \; & (2,-1,0,3) + ((-3)0,(-3)(-2),(-3)2,(-3)1) \\
= \; & (2,-1,0,3) + (0,6,-6,-3) \\
= \; & (2+0,-1+6,0-6,3-3) \\
= \; & (2,5,-6,0)
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& (2,-1,0,3) - 3(0,-2,2,1) \\
= \;& (2,-1,0,3) + ((-3)(0,-2,2,1)) \\
= \;& (2,-1,0,3) + ((-3)0,(-3)(-2),(-3)2,(-3)1) \\
= \;& (2,-1,0,3) + (0,6,-6,-3) \\
= \;& (2+0,-1+6,0-6,3-3) \\
= \;& (2,5,-6,0)
\end{aligned}
$$

Exemplo

$$
\begin{aligned}
& (2,-1,0,3) - 3(0,-2,2,1) \\
= \quad & (2,-1,0,3) + ((-3)(0,-2,2,1)) \\
= \quad & (2,-1,0,3) + ((-3)0,(-3)(-2),(-3)2,(-3)1) \\
= \quad & (2,-1,0,3) + (0,6,-6,-3) \\
= \quad & (2+0,-1+6,0-6,3-3) \\
= \quad & (2,5,-6,0)
\end{aligned}
$$

CEFET/RJ
campus Maria da Graça

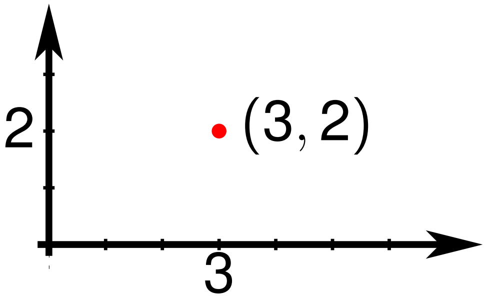
Exemplo

$$
\begin{aligned}
& (2,-1,0,3) - 3(0,-2,2,1) \\
= \quad & (2,-1,0,3) + ((-3)(0,-2,2,1)) \\
= \quad & (2,-1,0,3) + ((-3)0,(-3)(-2),(-3)2,(-3)1) \\
= \quad & (2,-1,0,3) + (0,6,-6,-3) \\
= \quad & (2+0,-1+6,0-6,3-3) \\
= \quad & (2,5,-6,0)
\end{aligned}
$$

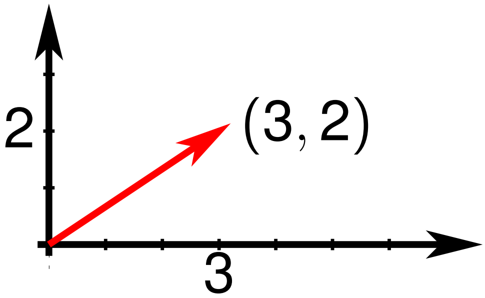
Exemplo

$$
\begin{aligned}
& (2,-1,0,3)-3(0,-2,2,1) \\
= \;& (2,-1,0,3)+((-3)(0,-2,2,1)) \\
= \;& (2,-1,0,3)+((-3)0,(-3)(-2),(-3)2,(-3)1) \\
= \;& (2,-1,0,3)+(0,6,-6,-3) \\
= \;& (2+0,-1+6,0-6,3-3) \\
= \;& (2,5,-6,0)
\end{aligned}
$$

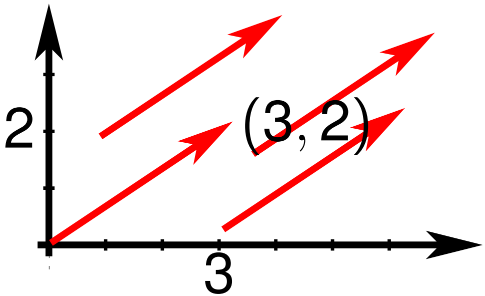
Representações Gráficas



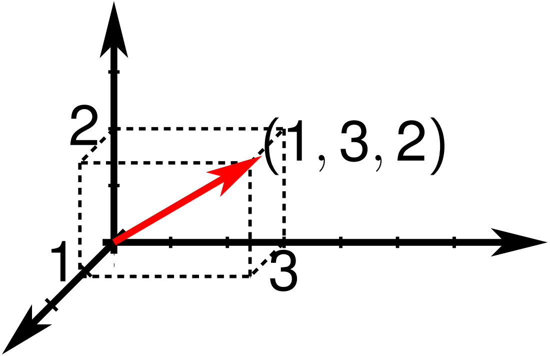
Representações Gráficas



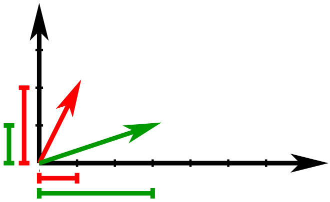
Representações Gráficas



Representações Gráficas



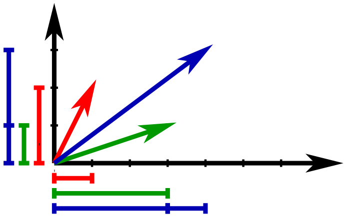
Soma de Vetores



$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

Soma de Vetores

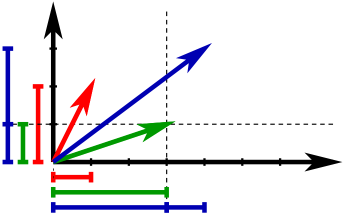


$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Soma de Vetores

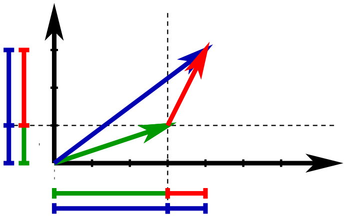


$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Soma de Vetores

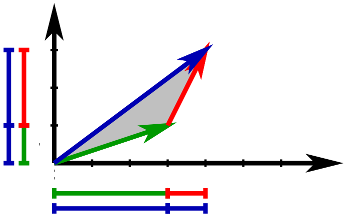


$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Soma de Vetores



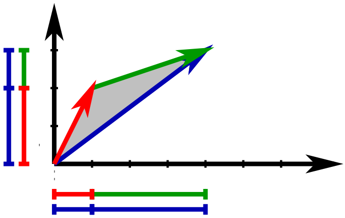
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Regra do Triângulo

Soma de Vetores



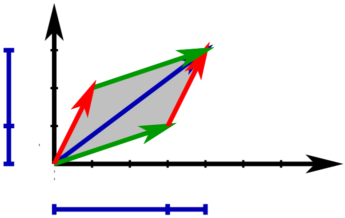
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$

Regra do Triângulo

Soma de Vetores



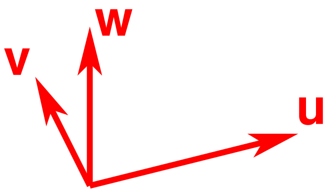
$$\mathbf{u} = (u_1, u_2)$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

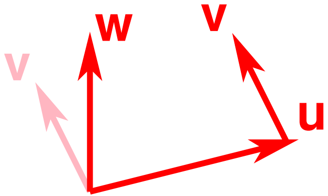
$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Regra do Paralelogramo

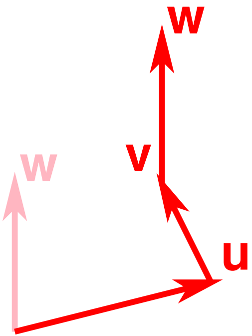
Somando Vários Vetores



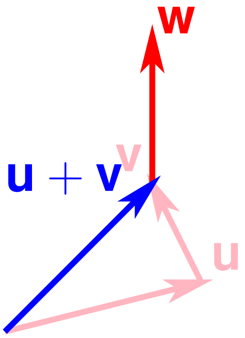
Somando Vários Vetores



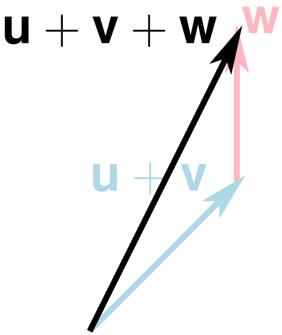
Somando Vários Vetores



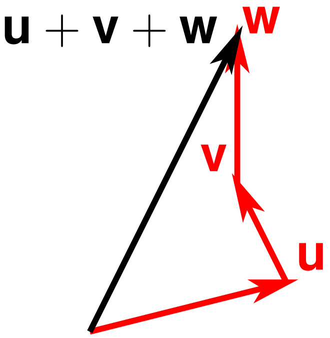
Somando Vários Vetores



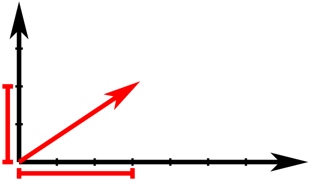
Somando Vários Vetores



Somando Vários Vetores



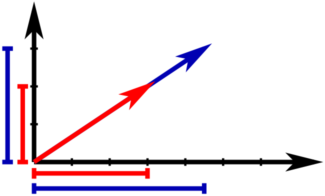
Multiplicação por Escalar



$$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$$

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2)$$

Multiplicação por Escalar

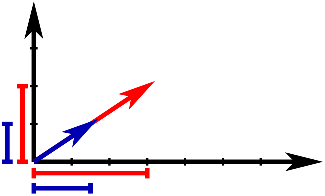


$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2)$

$\alpha > 1$

Multiplicação por Escalar

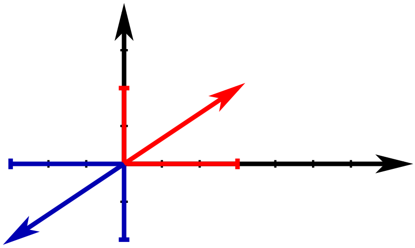


$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2)$

$0 < \alpha < 1$

Multiplicação por Escalar



$\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

$\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v} = (\alpha v_1, \alpha v_2)$

$\alpha < 0$

Combinações Lineares

Definição (combinação linear)

$\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ se pode ser expresso como

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p \mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i,$$

onde α_i's são escalares.

$$(3,3) \;=\; 3(1,1) + 0(-1,-1) \;=\; 1(1,1) - 2(-1,-1) \qquad \checkmark$$

$$(3,4) \;\neq\; \alpha(1,1) + \beta(-1,-1) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta) \;\; \forall \alpha, \beta \qquad \times$$

Combinações Lineares

Definição (combinação linear)

$\mathbf{v}$ *é combinação linear de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *se pode ser expresso como*

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i,$$

onde α_i*'s são escalares.*

$$(3,3) \;=\; 3(1,1) + 0(-1,-1) \;=\; 1(1,1) - 2(-1,-1) \quad \checkmark$$

$$(3,4) \;\neq\; \alpha(1,1) + \beta(-1,-1) = (\alpha-\beta, \alpha-\beta) \;\; \forall \alpha, \beta \quad \times$$

Combinações Lineares

Definição (combinação linear)

$\mathbf{v}$ *é combinação linear de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *se pode ser expresso como*

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i,$$

onde α_i*'s são escalares.*

$$(3,3) \;=\; 3(1,1) + 0(-1,-1) \;=\; 1(1,1) - 2(-1,-1) \quad \checkmark$$

$$(3,4) \;\neq\; \alpha(1,1) + \beta(-1,-1) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta) \;\; \forall \alpha, \beta \quad \times$$

Combinações Lineares

Definição (combinação linear)

$\mathbf{v}$ é combinação linear de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ se pode ser expresso como

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i,$$

onde α_i's são escalares.

$$(3,3) \;=\; 3(1,1) + 0(-1,-1) \;=\; 1(1,1) - 2(-1,-1) \qquad \checkmark$$

$$(3,4) \;\neq\; \alpha(1,1) + \beta(-1,-1) = (\alpha - \beta, \alpha - \beta) \;\; \forall \alpha, \beta \qquad \times$$

Combinações Lineares

Definição (combinação linear)

$\mathbf{v}$ *é combinação linear de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *se pode ser expresso como*

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{v}_p \;=\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{v}_i,$$

onde α_i*'s são escalares.*

$$(3,3) \;=\; 3(1,1) + 0(-1,-1) \;=\; 1(1,1) - 2(-1,-1) \qquad \checkmark$$

$$(3,4) \;\neq\; \alpha(1,1) + \beta(-1,-1) = (\alpha-\beta, \alpha-\beta) \;\; \forall \alpha, \beta \qquad \times$$

Conjunto Gerado

Definição (conjunto gerado)

O conjunto gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *é o conjunto de todas as combinações lineares de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p \right\}$$

Definição (conjunto gerador)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *gera o conjunto* S *se* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = S$.
Diz-se também que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é gerador de* S.

Conjunto Gerado

Definição (conjunto gerado)

O conjunto gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ é o conjunto de todas as combinações lineares de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p \right\}$$

Definição (conjunto gerador)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ gera o conjunto S se $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = S$. Diz-se também que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é gerador de S.

Conjunto Gerado

Definição (conjunto gerado)

O conjunto gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *é o conjunto de todas as combinações lineares de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, p \right\}$$

Definição (conjunto gerador)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *gera o conjunto* S *se* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = S$.

Diz-se também que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é gerador de* S.

Conjunto Gerado

Definição (conjunto gerado)

O conjunto gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ *é o conjunto de todas as combinações lineares de* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$.

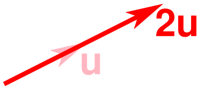
$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i \;\middle|\; \alpha_i \in \mathbb{R},\; i = 1, 2, \ldots, p \right\}$$

Definição (conjunto gerador)

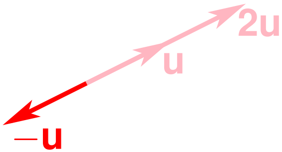
$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *gera o conjunto* S *se* $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle = S$.
Diz-se também que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é gerador de* S.

Conjunto Gerado por 1 Vetor

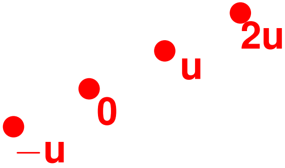
Conjunto Gerado por 1 Vetor



Conjunto Gerado por 1 Vetor

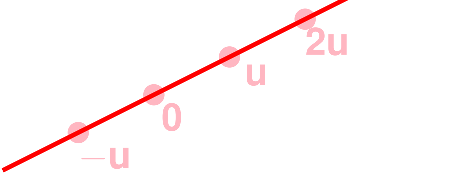


Conjunto Gerado por 1 Vetor

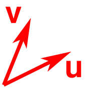


Conjunto Gerado por 1 Vetor

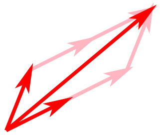
$$\{\alpha \mathbf{u}, \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \mathbf{u} \rangle$$



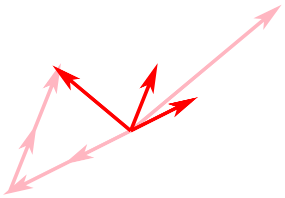
Conjunto Gerado por 2 Vetores



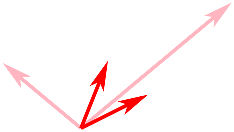
Conjunto Gerado por 2 Vetores



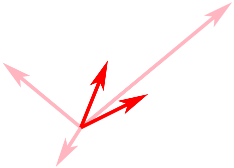
Conjunto Gerado por 2 Vetores



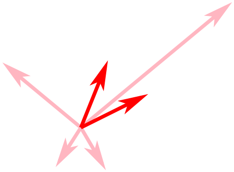
Conjunto Gerado por 2 Vetores



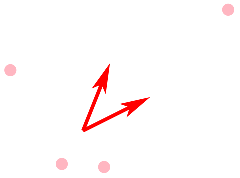
Conjunto Gerado por 2 Vetores



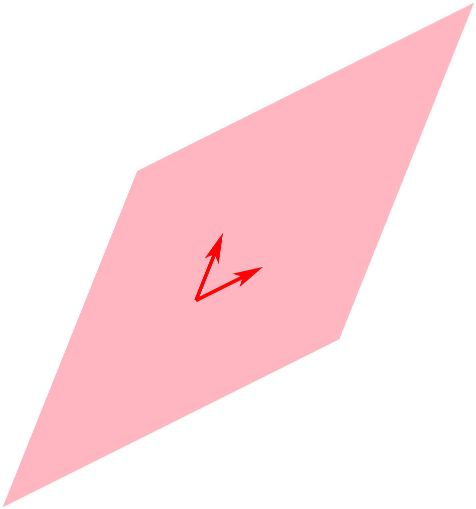
Conjunto Gerado por 2 Vetores



Conjunto Gerado por 2 Vetores



Conjunto Gerado por 2 Vetores



Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

O espaço gerado por um conjunto de vetores é um espaço vetorial.

Observação

- *sinônimos: espaço linear, subespaço (vetorial/linear)*
- $\mathbf{0} \in V$
- *pode ser um ponto, uma reta, um plano, ...*
- *sempre "reto", nunca "curvo"*

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

O espaço gerado por um conjunto de vetores é um espaço vetorial.

Observação

- *sinônimos: espaço linear, subespaço (vetorial/linear)*
- $\mathbf{0} \in V$
- *pode ser um ponto, uma reta, um plano, ...*
- *sempre "reto", nunca "curvo"*

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

O espaço gerado por um conjunto de vetores é um espaço vetorial.

Observação

- *sinônimos: espaço linear, subespaço (vetorial/linear)*
- $\mathbf{0} \in V$
- *pode ser um ponto, uma reta, um plano, . . .*
- *sempre "reto", nunca "curvo"*

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

O espaço gerado por um conjunto de vetores é um espaço vetorial.

Observação

- *sinônimos: espaço linear, subespaço (vetorial/linear)*
- $\mathbf{0} \in V$
- *pode ser um ponto, uma reta, um plano, . . .*
- *sempre "reto", nunca "curvo"*

Espaço Vetorial

Definição (espaço vetorial)

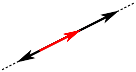
O espaço gerado por um conjunto de vetores é um espaço vetorial.

Observação

- *sinônimos: espaço linear, subespaço (vetorial/linear)*
- $\mathbf{0} \in V$
- *pode ser um ponto, uma reta, um plano, ...*
- *sempre "reto", nunca "curvo"*

Conjunto Gerado

1 vetor | 2 vetores | 3 vetores

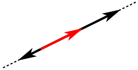


caso “típico” | caso “típico” | caso “típico”

“redundância” | “redundância”

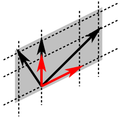
Conjunto Gerado

1 vetor



caso “típico”

2 vetores



caso “típico”

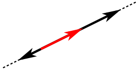
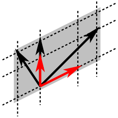
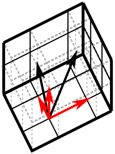
“redundância”

3 vetores

caso “típico”

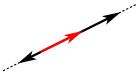
“redundância”

Conjunto Gerado

1 vetor	2 vetores	3 vetores
		
caso "típico"	caso "típico"	caso "típico"
	"redundância"	"redundância"

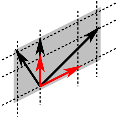
Conjunto Gerado

1 vetor



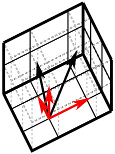
caso “típico”

2 vetores



caso “típico”

3 vetores



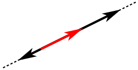
caso “típico”

“redundância”

“redundância”

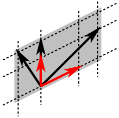
Conjunto Gerado

1 vetor

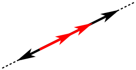


caso "típico"

2 vetores

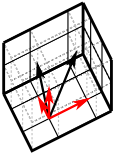


caso "típico"



"redundância"

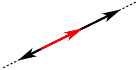
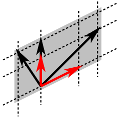
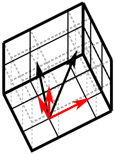
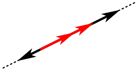
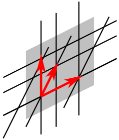
3 vetores



caso "típico"

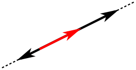
"redundância"

Conjunto Gerado

1 vetor	2 vetores	3 vetores
		
caso “típico”	caso “típico”	caso “típico”
		
	“redundância”	“redundância”

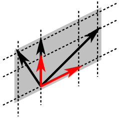
Conjunto Gerado

1 vetor

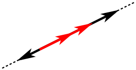


caso "típico"

2 vetores

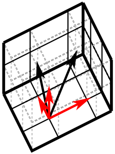


caso "típico"

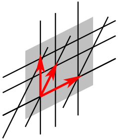


"redundância"

3 vetores



caso "típico"



"redundância"

Dependência Linear

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$

"redundância": um vetor é c.l. dos demais, $\mathbf{v}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i$

Neste caso, diz-se que $\mathbf{v}_k$ depende linearmente dos demais.

Definição (dependência linear)

Um conjunto de vetores é linearmente dependente (LD) se existe um vetor que é c.l. dos demais.

Dependência Linear

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$

"redundância": um vetor é c.l. dos demais, $\mathbf{v}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i$

Neste caso, diz-se que $\mathbf{v}_k$ depende linearmente dos demais.

Definição (dependência linear)

Um conjunto de vetores é linearmente dependente (LD) se existe um vetor que é c.l. dos demais.

Dependência Linear

$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$

"redundância": um vetor é c.l. dos demais, $\mathbf{v}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i$

Neste caso, diz-se que $\mathbf{v}_k$ depende linearmente dos demais.

Definição (dependência linear)

Um conjunto de vetores é linearmente dependente (LD) se existe um vetor que é c.l. dos demais.

Exemplos

Exemplo

$\{(1,0,0,0),(0,0,3,0),(0,0,0,2)\}$ *é LI.*

Exemplo

$\{(1,0,0,0),(2,1,3,0),(5,2,6,0)\}$ *é LD.*
De fato, $(5,2,6,0)=(1,0,0,0)+2(2,1,3,0)$.

Exemplos

Exemplo

$\{(1,0,0,0),(0,0,3,0),(0,0,0,2)\}$ *é LI.*

Exemplo

$\{(1,0,0,0),(2,1,3,0),(5,2,6,0)\}$ *é LD.*
De fato, $(5,2,6,0)=(1,0,0,0)+2(2,1,3,0)$.

Exemplos

Exemplo

$\{(1,0,0,0),(0,0,3,0),(0,0,0,2)\}$ *é LI.*

Exemplo

$\{(1,0,0,0),(2,1,3,0),(5,2,6,0)\}$ *é LD.*
De fato, $(5,2,6,0) = (1,0,0,0) + 2(2,1,3,0)$.

Equação Paramétrica da Reta em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta que não passa pela origem.

Equação Paramétrica da Reta

Toda reta pode ser expressa na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica da Reta em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta que não passa pela origem.

Equação Paramétrica da Reta

Toda reta pode ser expressa na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica da Reta em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta que não passa pela origem.

Equação Paramétrica da Reta

Toda reta pode ser expressa na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica da Reta em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}, \quad t \in \mathbb{R}\}$ representa uma reta que não passa pela origem.

Equação Paramétrica da Reta

Toda reta pode ser expressa na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica do Plano em $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \;\; s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \;\; s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano que não passa pela origem.

Equação Paramétrica do Plano

Todo plano pode ser expresso na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica do Plano em $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \ \ s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \ \ s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano que não passa pela origem.

Equação Paramétrica do Plano

Todo plano pode ser expresso na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica do Plano em $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano que não passa pela origem.

Equação Paramétrica do Plano

Todo plano pode ser expresso na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica do Plano em $\mathbb{R}^3$

Em geral, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano passando pela origem.

Em geral, $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \{\mathbf{u} = \mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2, \quad s, t \in \mathbb{R}\}$ representa um plano que não passa pela origem.

Equação Paramétrica do Plano

Todo plano pode ser expresso na forma

$$\mathbf{w} + t\mathbf{v}_1 + s\mathbf{v}_2$$

(Esta representação não é única.)

Equação Paramétrica da Reta em $\mathbb{R}^n$

CEFET/RJ
campus Maria da Graça

Definição (reta)

Em $\mathbb{R}^n$, define-se uma reta como um conjunto da forma

$$\mathbf{w} + \langle \mathbf{v} \rangle \,, \quad \textit{com } \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Uma reta passando pela origem é um subespaço vetorial de dimensão 1.

Uma reta qualquer é um subespaço afim de dimensão 1.

Equação Paramétrica da Reta em $\mathbb{R}^n$

Definição (reta)

Em $\mathbb{R}^n$, define-se uma reta como um conjunto da forma

$$\mathbf{w} + \langle \mathbf{v} \rangle\,, \quad \textit{com}\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Uma reta passando pela origem é um subespaço vetorial de dimensão 1.

Uma reta qualquer é um subespaço afim de dimensão 1.

Equação Paramétrica da Reta em $\mathbb{R}^n$

Definição (reta)

Em $\mathbb{R}^n$, define-se uma reta como um conjunto da forma

$$\mathbf{w} + \langle \mathbf{v} \rangle\,, \quad \textit{com}\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}.$$

Uma reta passando pela origem é um subespaço vetorial de dimensão 1.

Uma reta qualquer é um subespaço afim de dimensão 1.

Espaço Vetorial $\times$ Espaço Afim

Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é LI, então $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ é um **espaço vetorial** de dimensão p.

Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é LI, então $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ é um **espaço afim** de dimensão p.

Espaço Vetorial $\times$ Espaço Afim

Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é LI, então $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ é um **espaço vetorial** de dimensão p.

Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é LI, então $\mathbf{w} + \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p \rangle$ é um **espaço afim** de dimensão p.

Base

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n \\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

$$\sum \alpha_i \mathbf{e_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \mathbf{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_i = v_i \quad \forall i$$

Definição (base)

Um conjunto ordenado S é base de V se todo vetor de V é expressível de forma única como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Base

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\ldots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\ldots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\
\vdots &= \qquad\quad \vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0,0,0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

$$\sum \alpha_i \mathbf{e_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \mathbf{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_i = v_i \quad \forall i$$

Definição (base)

Um conjunto ordenado S é base de V se todo vetor de V é expressível de forma única como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Base

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0) \in \mathbb{R}^n \\
\vdots &= \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

$$
\sum \alpha_i \mathbf{e_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \stackrel{?}{=} (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \mathbf{v}
$$

$$
\Updownarrow
$$

$$
\alpha_i = v_i \quad \forall i
$$

Definição (base)

Um conjunto ordenado S é base de V se todo vetor de V é expressível de forma única como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Base

Introdução à Álgebra Linear

Espaço $\mathbb{R}^n$
Definição
Operações

Espaços Gerados

Bases

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\dots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\dots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\
\vdots &= \qquad\quad \vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0,0,0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

$$
\sum \alpha_i \mathbf{e_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathbf{v}
$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha_i = v_i \ \ \forall i$$

Definição (base)

Um conjunto ordenado S é base de V se todo vetor de V é expressível de forma única como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Base

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (1,0,0,\ldots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\
\mathbf{e}_2 &= (0,1,0,\ldots,0,0) \in \mathbb{R}^n \\
\vdots &= \qquad\quad \vdots \\
\mathbf{e}_n &= (0,0,0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}$$

$$\sum \alpha_i \mathbf{e_i} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = \mathbf{v}$$
$$\Updownarrow$$
$$\alpha_i = v_i \ \ \forall i$$

Definição (base)

Um conjunto ordenado S é base de V se todo vetor de V é expressível de forma única como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Base

Exemplo 1

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$.

Exemplo 2

$S = \{(1, 0), (2, 2), (0, 1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$.

$(4, 4) = 2(2, 2) = 4(1, 0) + 4(0, 1)$.

Base

Exemplo 1

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$.

Exemplo 2

$S = \{(1, 0), (2, 2), (0, 1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$.

$(4, 4) = 2(2, 2) = 4(1, 0) + 4(0, 1)$.

Base

Exemplo 1

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$.

Exemplo 2

$S = \{(1, 0), (2, 2), (0, 1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$.

$(4, 4) = 2(2, 2) = 4(1, 0) + 4(0, 1)$.

Base

Exemplo 1

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$.

Exemplo 2

$S = \{(1, 0), (2, 2), (0, 1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$.

$(4, 4) = 2(2, 2) = 4(1, 0) + 4(0, 1)$.

Base

Exemplo 1

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ é base de $\mathbb{R}^2$.

Dado $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$.

Exemplo 2

$S = \{(1, 0), (2, 2), (0, 1)\}$ não é base de $\mathbb{R}^2$.

$(4, 4) = 2(2, 2) = 4(1, 0) + 4(0, 1)$.

Base

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
\beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\
&= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \ \subset \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{b_i} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \\
&= (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\
&= (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = v_1 \\
\alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
\alpha_1 = v_1 \\
\alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\
\alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2
\end{cases}
$$

Base

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
\beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\
&= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{b_i} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \\
&= (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\
&= (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v} \\
&\Updownarrow
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = v_1 \\
\alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
\alpha_1 = v_1 \\
\alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\
\alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2
\end{cases}
$$

Base

Exemplo 3

$$\begin{aligned}\beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\ &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{b_i} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \\ &= (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v}\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\ \alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2 \end{cases}$$

Base

Exemplo 3

$$\begin{aligned}\beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\}\\ &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{b_i} &= \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \alpha_3\mathbf{b}_3\\ &= (\alpha_1,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)\\ &\overset{?}{=} (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v}\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases}\alpha_1 = v_1\\ \alpha_1+\alpha_2 = v_2\\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = v_3\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha_1 = v_1\\ \alpha_2 = v_2-\alpha_1 = v_2 - v_1\\ \alpha_3 = v_3-(\alpha_1+\alpha_2) = v_3 - v_2\end{cases}$$

Base

Exemplo 3

$$\begin{aligned} \beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\ &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{b_i} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \\ &= (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\ \alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2 \end{cases}$$

Exemplo 3

$$
\begin{aligned}
\beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\
&= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{b_i} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \\
&= (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\
&= (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

$$\Updownarrow$$

$$
\begin{cases}
\alpha_1 = v_1 \\
\alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\
\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
\alpha_1 = v_1 \\
\alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\
\alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2
\end{cases}
$$

Exemplo 3

$$\begin{aligned} \beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\ &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3 \ \textbf{é base.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{b_i} &= \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \alpha_2 \mathbf{b}_2 + \alpha_3 \mathbf{b}_3 \\ &= (\alpha_1,\ \alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ &= (v_1, v_2, v_3) = \mathbf{v} \end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = v_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = v_3 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = v_1 \\ \alpha_2 = v_2 - \alpha_1 = v_2 - v_1 \\ \alpha_3 = v_3 - (\alpha_1 + \alpha_2) = v_3 - v_2 \end{array} \right.$$

Coordenadas

Definição (coordenadas)

As coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ *na base* $\beta = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, *são os coeficientes* α_i*'s usados para combinar linearmente os vetores* $\mathbf{b}_i$*'s de forma a gerar* $\mathbf{v}$.

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{b}_i$$

Coordenadas

Exemplo 1

$$\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

$$[\mathbf{v}]_\varepsilon = \Big[(v_1, v_2, \ldots, v_n)\Big]_\varepsilon = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

coordenadas de $\mathbf{v}$ com relação à base ε

Coordenadas

Exemplo 1

$$\varepsilon = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n$$

$$[\mathbf{v}]_\varepsilon = \Big[(v_1, v_2, \ldots, v_n)\Big]_\varepsilon = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

coordenadas de **v** com relação à base ε

Coordenadas

Exemplo 2

$$\begin{aligned} \beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\ &= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{b}_1 + (v_2 - v_1)\mathbf{b}_2 + (v_3 - v_2)\mathbf{b}_3$$

$$[\mathbf{v}]_\beta = \Big[(v_1, v_2, v_3)\Big]_\beta = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 - v_2 \end{bmatrix}$$

coordenadas de $\mathbf{v}$ com relação à base β

Coordenadas

Exemplo 2

$$
\begin{aligned}
\beta &= \{(1,1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,1)\} \\
&= \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\} \quad \subset \mathbb{R}^3
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\mathbf{b}_1 + (v_2 - v_1)\mathbf{b}_2 + (v_3 - v_2)\mathbf{b}_3$$

$$[\mathbf{v}]_\beta = \Big[(v_1, v_2, v_3)\Big]_\beta = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 - v_2 \end{bmatrix}$$

coordenadas de **v** com relação à base β

Coordenadas

Observação

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 - v_2 \end{bmatrix}$$

Não confundir coordenadas e entradas.

Coordenadas

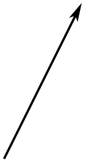
Observação

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

$$[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad [\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 - v_2 \end{bmatrix}$$

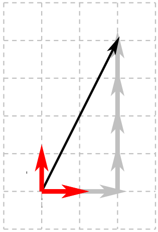
Não confundir coordenadas e entradas.

Coordenadas



$$\mathbf{v} = (2, 4)$$

Coordenadas

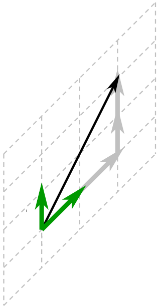


$$\varepsilon = \{\ (1,0),\ (0,1)\ \}$$

$$[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = (2,4)$$

Coordenadas



$$\beta = \{\ (1,1),\ (0,1)\ \}$$

$$[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = (2,4)$$

CEFET/RJ
campus Maria da Graça

Coordenadas

Observação

Determinam mesmo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*:*

- $\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *(uso correto);*
- $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(uso correto);*
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação);*
- $\mathbf{v}^t = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação).*

Coordenadas

Observação

Determinam mesmo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*:*

- $\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *(uso correto);*
- $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(uso correto);*
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação);*
- $\mathbf{v}^t = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação).*

Coordenadas

Observação

Determinam mesmo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*:*

- $\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *(uso correto);*
- $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(uso correto);*
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação);*
- $\mathbf{v}^t = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação).*

Coordenadas

Observação

Determinam mesmo vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$*:*

- $\mathbf{v} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *(uso correto);*
- $[\mathbf{v}]_\varepsilon = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(uso correto);*
- $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação);*
- $\mathbf{v}^t = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$ *(abuso de notação).*