data 24.02.22

ALGEBRA LINEAR - PROVA

ALUNO JORGE NAMI HARBES
SISTEMAS DE INFORMAÇÃO 2022.1
PROF. ALEXANDRE SILVA ALLIL

1-

I) Conforme a definição base do $\mathbb{R}^2$ é todo conjunto formado por DOIS vetores linearmente independentes, pertencentes ao $\mathbb{R}^2$. Logo um vetor não pode gerar $\mathbb{R}^2$. (F)

II) $\{(1,1),(3,3)\}$ gera $\mathbb{R}^2$?
Para que os vetores possam gerar $\mathbb{R}^2$ eles devem ser linearmente independentes, isto é não podem ser paralelos, logo:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 3 = 0$$

(logo não geram $\mathbb{R}^2$) (F)

III) $\{(0,0),(3,4)\}$ é base de $\mathbb{R}^2$
Conforme já dito acima

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 4.0 - 0.3 = 0$$

(logo não é base de $\mathbb{R}^2$) (F)

data
fecha

D S T Q Q S S
D L M M J V S

IV) $\{(3,1),(8,3)\}$ gera $\mathbb{R}^2$
Conforme mencionado anteriormente:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow 9-8=1$$

(gera espaço $\mathbb{R}^2$) (V)

V) $\{(1,2),(3,5),(1,0)\}$ gera $\mathbb{R}^2$

Conforme definição que consta no item I base do $\mathbb{R}^2$ é todo conjunto formado por DOIS vetores linearmente independentes, ou seja, TRÊS vetores não formam base em $\mathbb{R}^2$ (F)

2- Pela definição toda matriz escalonada reduzida também é escalonada

a) Escalonada Reduzida e escalonada

b) Escalonada reduzida e escalonada

c) Escalonada reduzida e escalonada

d) Escalonada reduzida e escalonada

e) Escalonada reduzida e escalonada

f) Escalonada reduzida e escalonada

g) Nenhuma

3 -

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 1 & 0 & -2 & 7 & 11 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 8 \\ 2 & 1 & 4 & 4 & 10 \end{array}\right]$ $\times(-1/2)$ + $\times(-3/2)$ + $\times(-1)$ + $\sim$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & \frac{1}{2} & -7/2 & 5 & 13/2 \\ 0 & -3/2 & -7/2 & -1 & -11/2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $(\times 3)$ + $(\times(-4))$ + $\sim$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1/2 & -7/2 & 5 & 13/2 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 15 & -20 & -25 \end{array}\right]$ $\times\left(\frac{15}{14}\right)$ + $\sim$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 & 9 \\ 0 & 1/2 & -7/2 & 5 & 13/2 \\ 0 & 0 & -14 & 14 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -10 \end{array}\right] \rightarrow -5I_4 = -10 \Rightarrow \boxed{I_4 = 2}$

$-14 I_3 + 14(2) = 14 \rightarrow \boxed{I_3 = 1}$

$I_2/2 - 7/2(1) + 5(2) = 13/2 \Rightarrow \frac{I_2}{2} = \frac{20}{2} - 10 \boxed{= 0}$

$2I_1 - (0) + 3(1) + 4(2) = 9 \Rightarrow 2I_1 = 9 - 8 - 3 = -2$

$\boxed{I_1 = -1}$

data
fecha

b)

$$\begin{cases} z_3 + \cancel{z_4} + z_5 = 0 \\ -z_1 - z_2 + 2z_3 - 3z_4 + z_5 = 0 \\ z_1 + z_2 - 2z_3 - z_5 = 0 \\ 2z_1 + 2z_2 - z_3 + z_5 = 0 \end{cases}$$

$$-3z_4 = 0 \Rightarrow \boxed{z_4 = 0}$$

$$\boxed{z_3 = -z_5}$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + 2z_5 - z_5 = 0 \\ 2z_1 + 2z_2 + z_5 + z_5 = 0 \end{cases}$$

$$\sim$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_5 = 0 \\ 2z_1 + 2z_2 + 2z_5 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{z_2 = z_5 - z_1} \qquad \boxed{z_1 = z_2 + z_5}$$

sistema possível e indeterminado

data
fecha

D S T Q Q S S
D L M M J V S

4-

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(-2) & \times(-7) \\ + & + \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(-6/7) & \times(-3/7) \\ + & + \end{matrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -26 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times(-1/3) \\ + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -26 \end{bmatrix}$$

$$\det = 1 \cdot 7 \cdot 3 \cdot -26 = \boxed{-546}$$

data
fecha

5-

$$A = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, $\vec{v}$ não nulo, $\det(\lambda I_n - A) = 0$

$$\det(\lambda I_n - A) = \det\left(\lambda \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{vmatrix} u_{11}-\lambda & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22}-\lambda & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33}-\lambda & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44}-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(u_{11}-\lambda)(u_{22}-\lambda)(u_{33}-\lambda)(u_{44}-\lambda) = 0$$

$$\boxed{\lambda_1 = u_{11} \quad \lambda_2 = u_{22} \quad \lambda_3 = u_{33} \quad \lambda_4 = u_{44}}$$

data
fecha

D S T Q Q S S
D L M M J V S

6 -

I) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \xrightarrow{\times(-2)} + \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = U$

$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad U' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = LDU = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

II) $A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -28 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(-2)} + \sim \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\times(2)} \sim$

$\begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & -28 & 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{array}{l} \div 3 \\ \div 2 \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 3 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = LDU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

data
fecha

7- $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$

$A^t = \begin{bmatrix} p & 0 \\ 2 & p \end{bmatrix}$ $A + A^t = \begin{bmatrix} 2p & 2 \\ 2 & 2p \end{bmatrix}$

Se $(A+A^t)$ é singular então $\det(A+A^t) = 0$

$\det(A+A^t) = 4p^2 - 4 = 0$

$p^2 = 1 \Rightarrow \boxed{p = \pm 1}$, logo $\boxed{|p| = 1}$

letra B