

Árvores Rubro-Negra

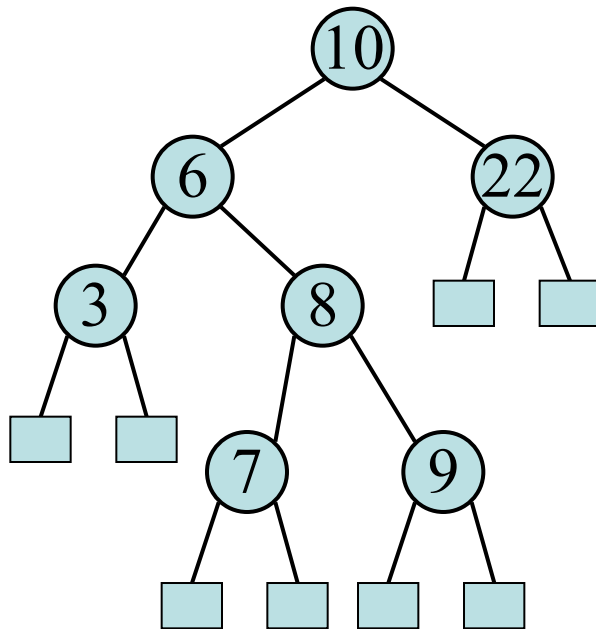
IFRN

Árvores Rubro-Negra

- Seja T uma árvore binária de pesquisa
- Cada nó deve estar associado a uma cor **rubro** ou negra
- Uma árvore é **rubro**-negra quando as seguintes condições são satisfeitas:
 - i. Se v é nó externo , v é negro
 - ii. O nó raiz é negro
 - iii. Se v é rubro, então ambos os filhos são negros
 - iv. Os caminhos de v para seus nós descendentes externos possuem idêntico número de nós negros

Árvores Rubro-Negra

- Exemplo 1



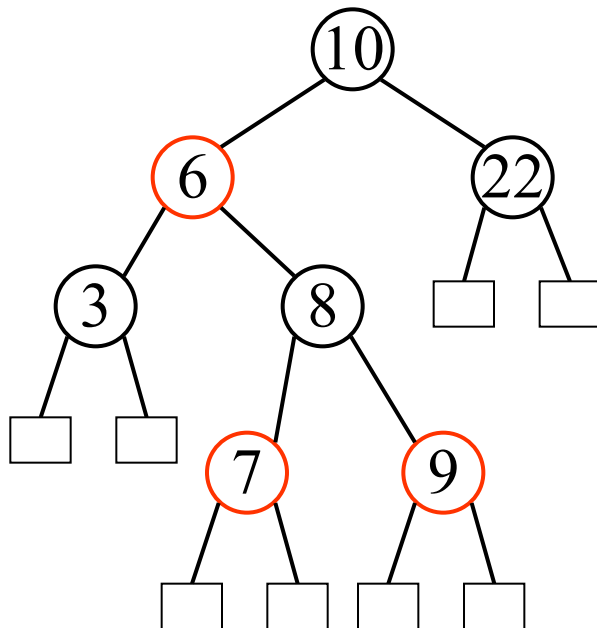
OBS.: as propriedades acima asseguram que o maior caminho desde a raiz até uma folha é no máximo duas vezes maior que o de qualquer outro caminho até outra folha, e portanto a árvore é aproximadamente balanceada e as operações básicas levarão o tempo de $O(\log n)$

Ex.: 14,9,10,8 = 4 nós

14,17 = 2 nós

Árvores Rubro-Negra

- Altura negra de um nó
 - É representado pelo número de nós negros encontrados até qualquer nó folha descendente



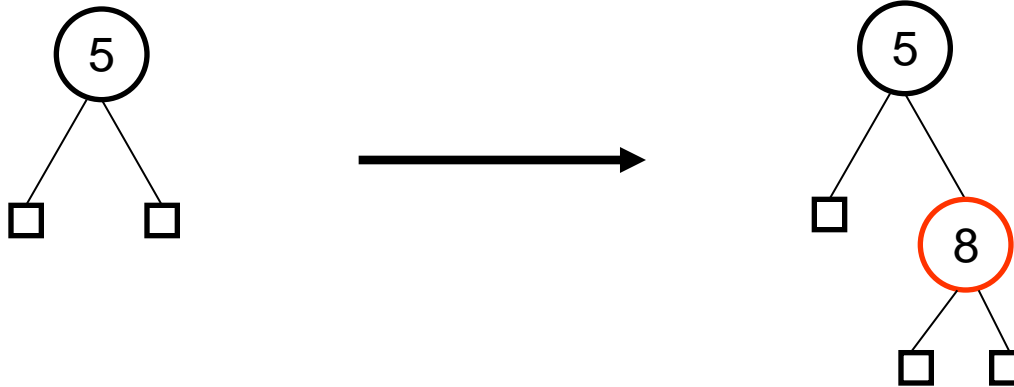
A altura negra é 2

Inserção em Rubro-Negras

- Ao contrário da árvore AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente
- Ao inserir um nó v numa posição vazia da árvore (nó nulo) este é pintado de rubro. Pintando o nó de rubro o critério IV é preservado, já que um nó rubro não contribui para a altura negra da árvore ($hb(v)$)

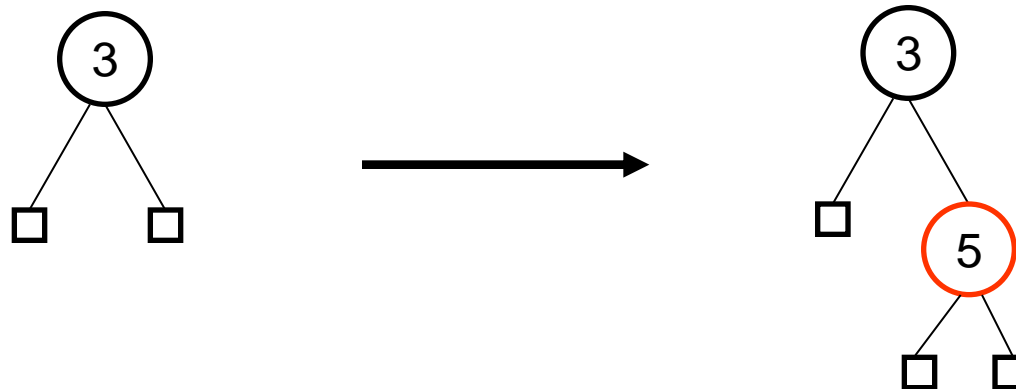
Inserção em Rubro-Negras

- Ex.: incluir 8



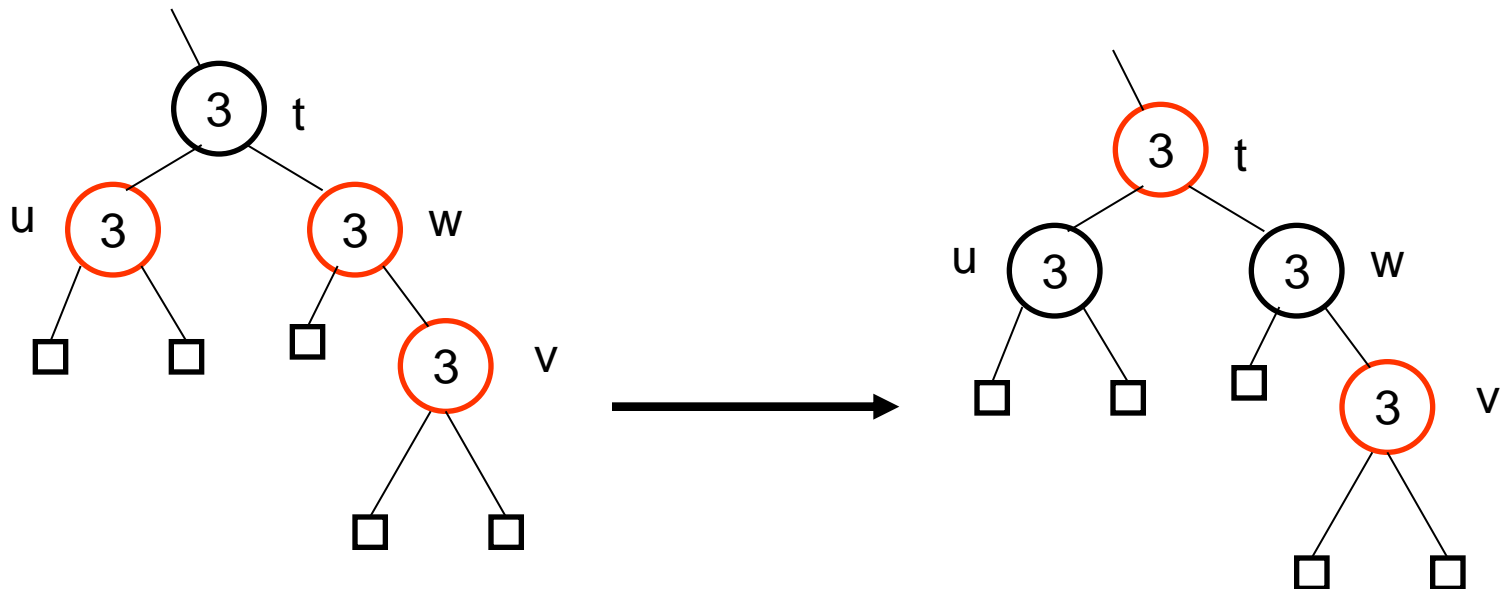
Inserção em Rubro-Negras

- Quando incluimos um nó em uma árvore Rubro-Negra, alguns ajustes podem ser necessários. Destacamos três casos:
 - Caso 1: se **w**, o pai de **v**, é negro, nada mais precisa ser feito já que o critério IV foi mantido



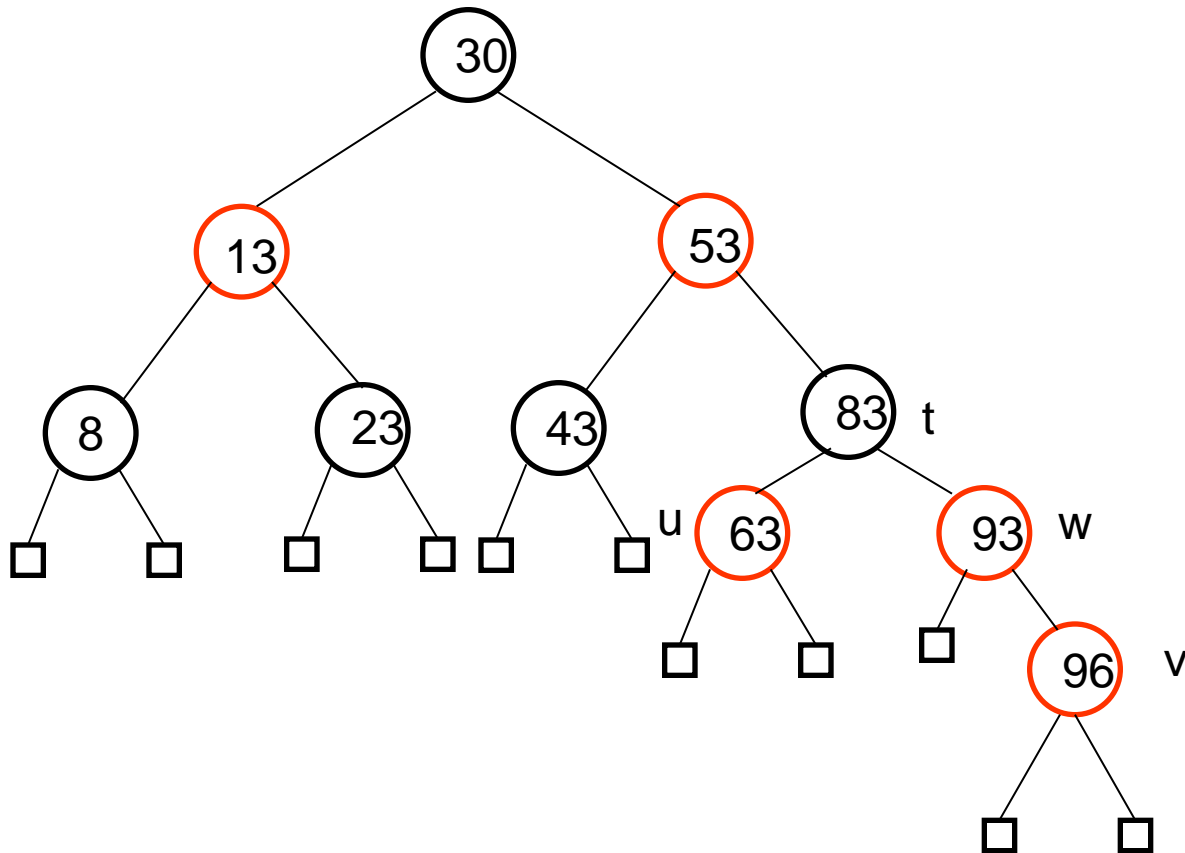
Inserção em Rubro-Negras

- Caso 2: Suponha **w** rubro e **t**, o pai de **w** (avó de **v**) é negro. Se **u**, o irmão de **w** (tio de **v**) é rubro, ainda é possível manter o critério IV apenas fazendo a re-coloração de **t**, **u** e **w**



Inserção em Rubro-Negras

- Se o pai de **t** for rubro o processo deverá ser repetido fazendo **v=t**

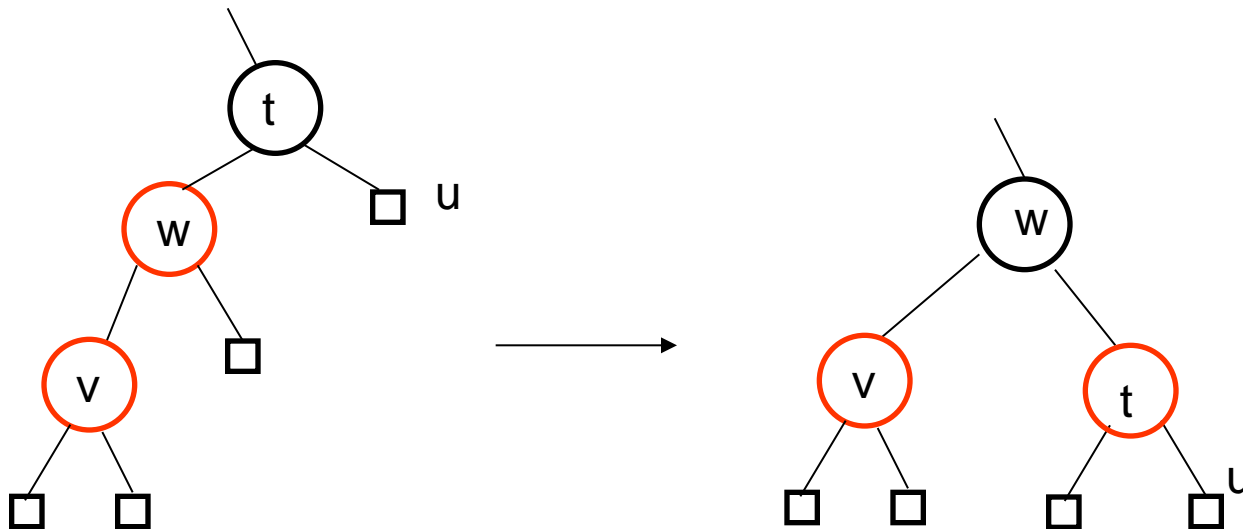


Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3: suponha **w** rubro, seu pai **t** é negro e seu irmão **u** é negro. Neste caso, para manter o critério III é necessário fazer rotações com **w**, **v**, **t** e **u**. Existe 4 subcasos que correspondem às 4 rotações possíveis

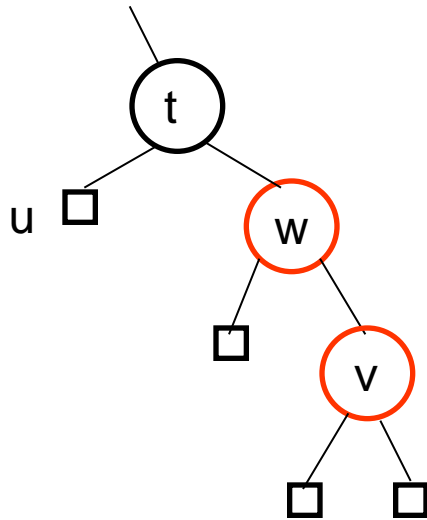
Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3a: Rotação direita simples



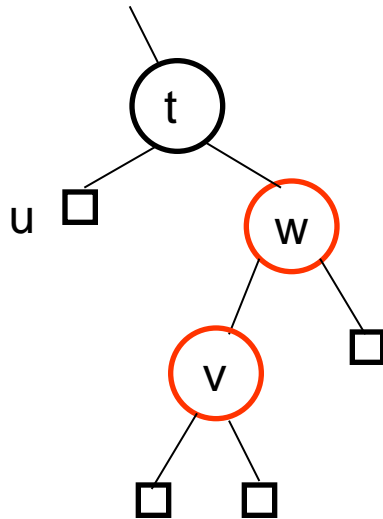
Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3b: Rotação esquerda simples



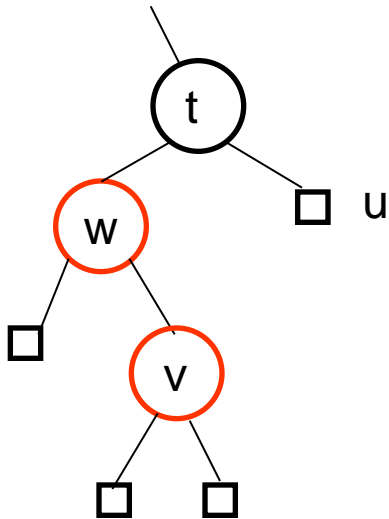
Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3c: Rotação esquerda dupla



Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3d: Rotação direita dupla



Remoção em Rubro-Negras

- É um pouco mais complexa do que a inserção
 - Passos:
 - Encontre o nó **v** a ser removido
 - Remova o nó **v** da mesma forma que em uma árvore binária de pesquisa
 - Ajuste os critérios da árvore rubro-negra

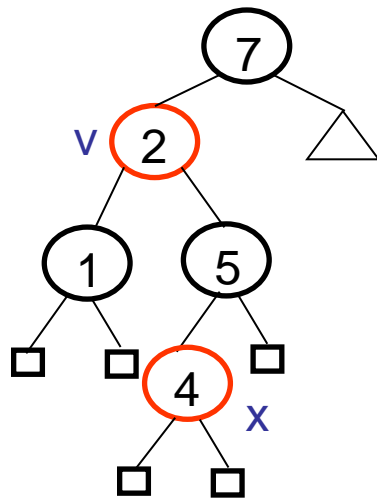
Remoção em Rubro-Negras

- Situações
 - As situações que podem ocorrer na remoção de elementos são quatro.

| Situação | v | sucessor |
|----------|-------|----------|
| 1 | Rubro | Rubro |
| 2 | Negro | Rubro |
| 3 | Negro | Negro |
| 4 | Rubro | Negro |

Remoção em Rubro-Negras

- Situação 1 – seja **v** o nó a ser removido. Sendo **v** rubro e **x**, sucessor de **v**, também rubro

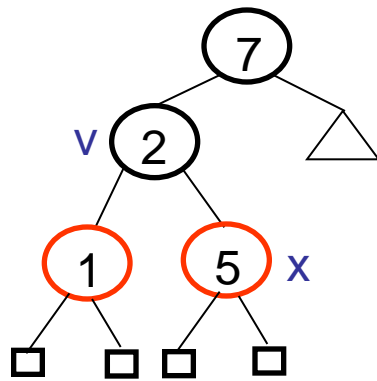


Remove 2

- Nada necessita ser feito, pois a árvore Rubro-Negra continua atendendo a todos os critérios

Remoção em Rubro-Negras

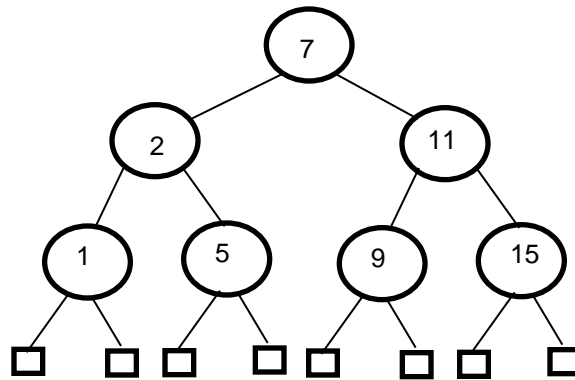
- Situação 2 – **v** é negro e **x** é rubro.
 - Pinte **x** de negro e pare.



Remove 2

Remoção em Rubro-Negras

- Duplo Negro
 - Ocorre após a retirada de um nó negro. O duplo negro é uma forma de compensar a falta do nó removido na altura negra da árvore.



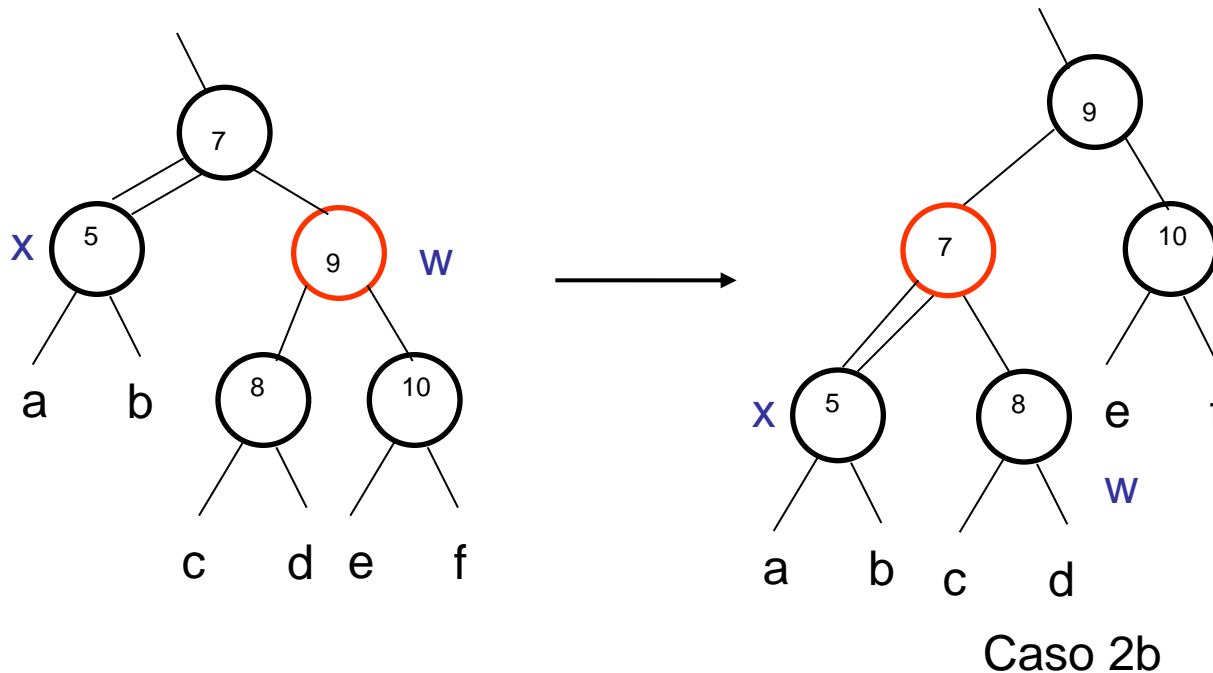
Remover 5

Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **v** é negro e **x** é negro.
 - **Caso 1**: se x é negro e x tem irmão w rubro e pai negro. Marque ele com um duplo negro e faça o seguinte:
 - Faça uma rotação simples esquerda
 - Pinte w de negro
 - Pinte pai de x de rubro

Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 1 - exemplo**

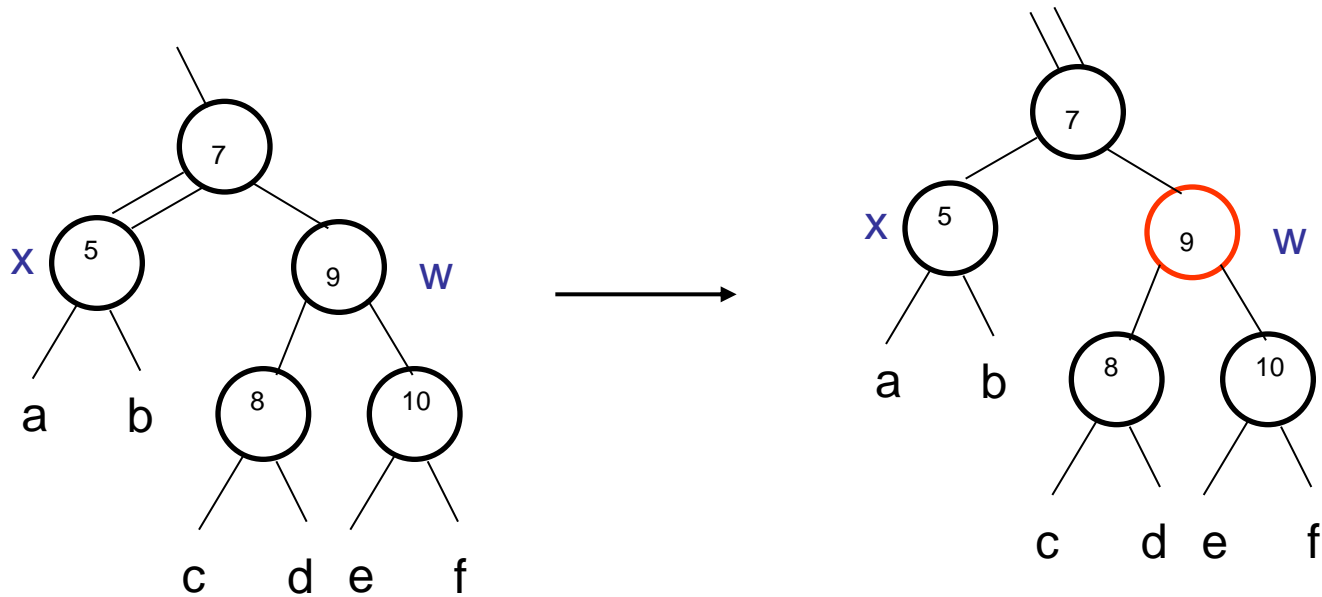


Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **v** é negro e **x** é negro.
 - **Caso 2a**: se **x** é negro, tem irmão **w** negro com filhos negros e pai negro. faça o seguinte:
 - Pinte o irmão **w** de rubro

Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 2a - exemplo**

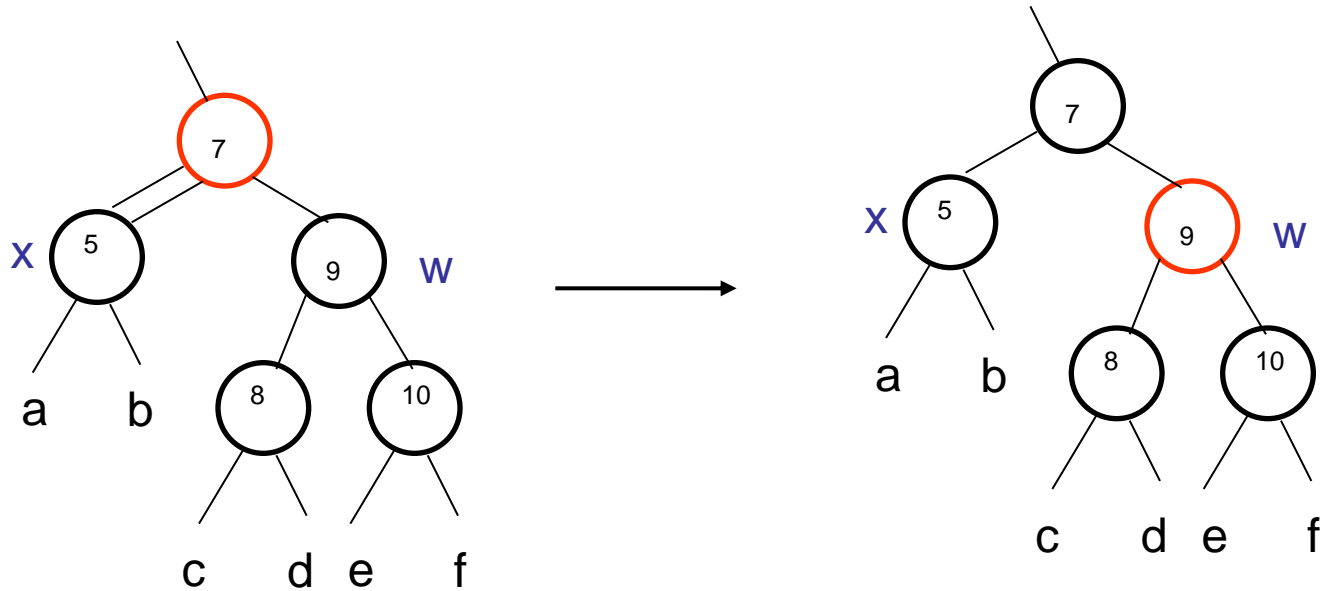


Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – v é negro e x é negro.
 - Caso 2b: se x é negro, tem irmão w negro com filhos negros e pai rubro. faça o seguinte:
 - Pinte o irmão w de rubro e o pai de x de negro

Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 2b** - exemplo

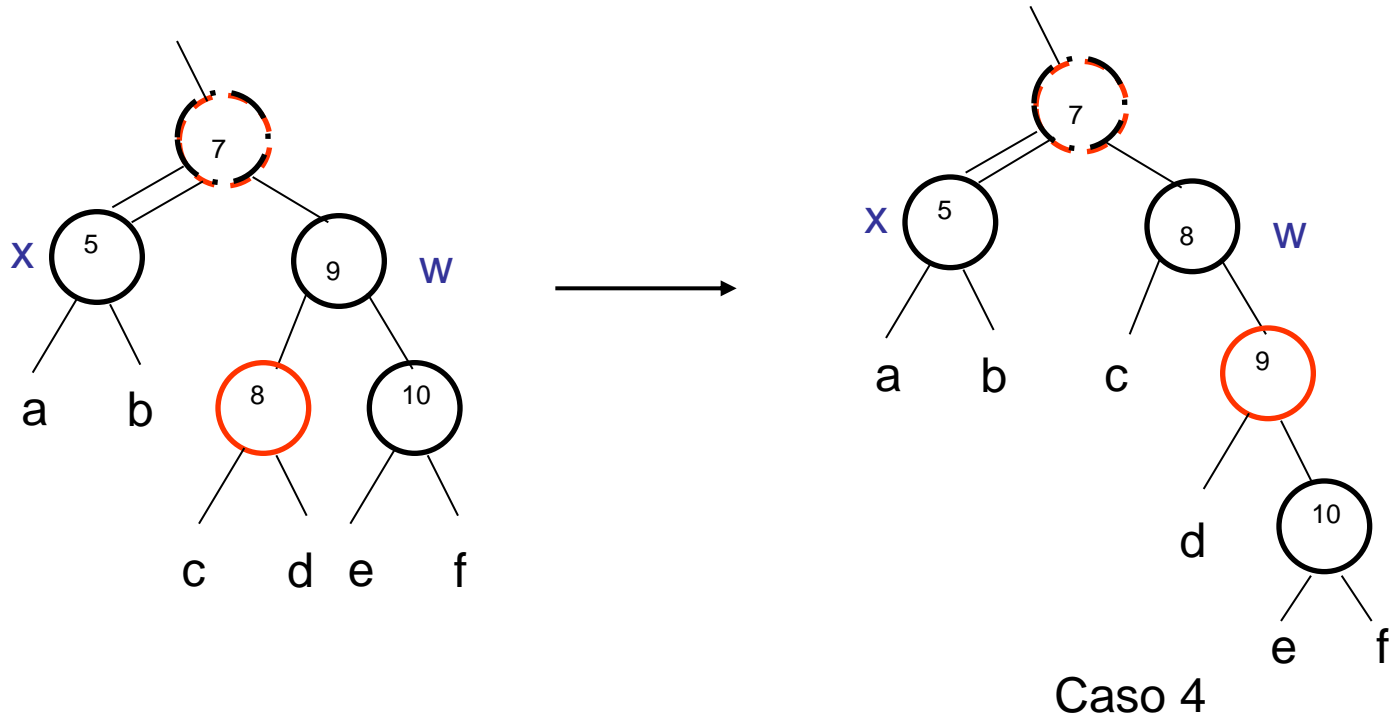


Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – v é negro e x é negro.
 - **Caso 3:** se x é negro, tem irmão w negro, tem pai de qualquer cor (rubro ou negro), tem irmão w com filho esquerdo rubro e irmão w com filho direito negro. faça o seguinte:
 - Rotação simples direita em w
 - Trocar as cores de w com seu filho esquerdo

Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 3** - exemplo

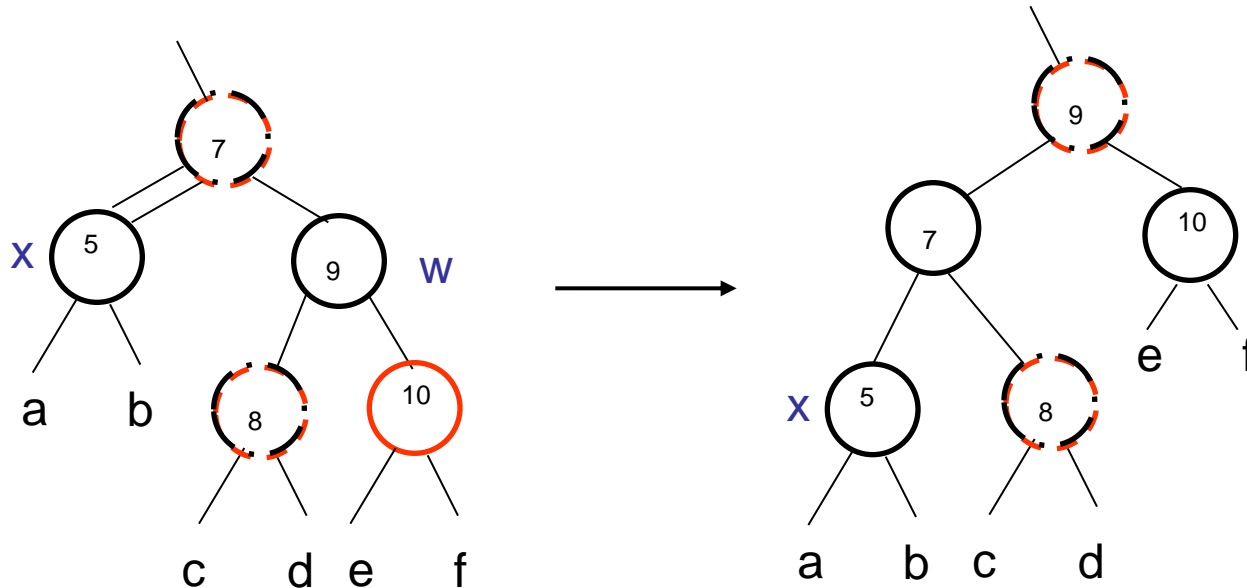


Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – v é negro e x é negro.
 - Caso 4: se x é negro, tem irmão w negro, tem pai de qualquer cor (rubro ou negro), tem irmão w com filho esquerdo qualquer cor e irmão w com filho direito rubro. faça o seguinte:
 - Rotação simples a esquerda
 - Pinte o pai de negro
 - w igual a cor anterior do pai de x
 - Pinte o filho direito de w de negro

Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 4 - exemplo**

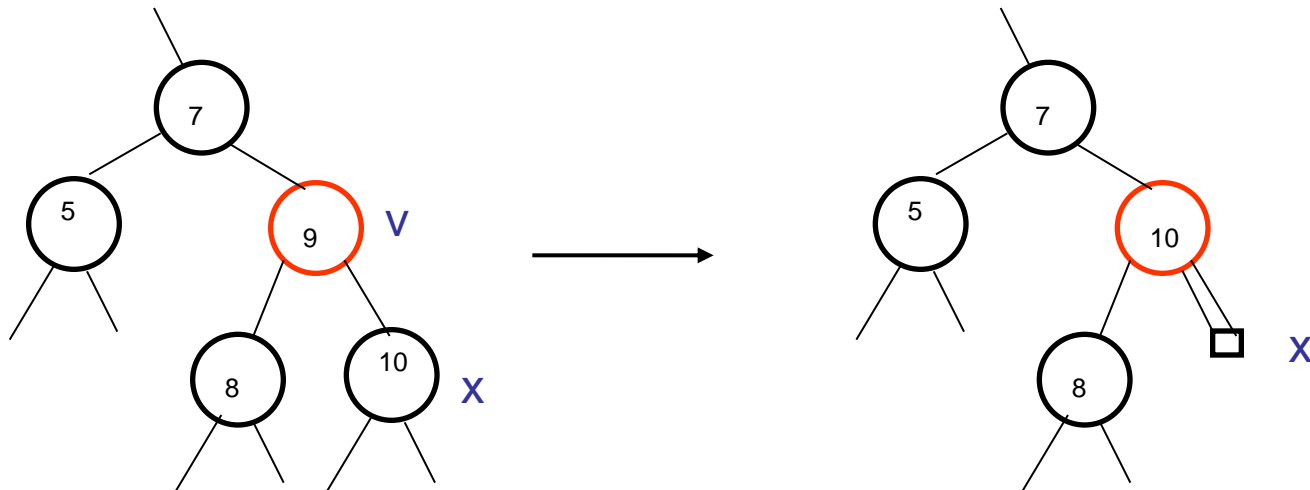


Remoção em Rubro-Negras

- Situação 4 – **v** é rubro e **x** é negro.
 - Similar à situação 3. faça o seguinte:
 - Pinte x de rubro
 - Proceda como na situação 3

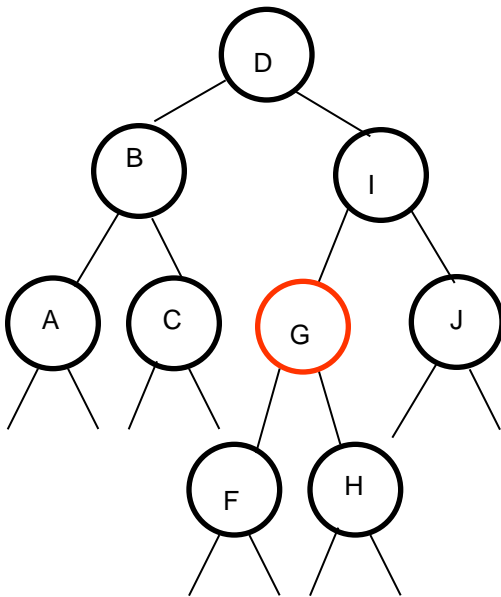
Remoção em Rubro-Negras

- Situação 4 – exemplo



Remoção em Rubro-Negras

- Exercício 1: remover C



Remoção em Rubro-Negras

- Exercício 2: remover B

