CAPÍTULO

3

VETORES

3-1 O QUE É FÍSICA?

A física lida com um grande número de grandezas que possuem uma amplitude e uma orientação e precisa de uma linguagem matemática especial, a linguagem dos vetores, para descrever essas grandezas. Essa linguagem também é usada na engenharia, em outras ciências e até mesmo nas conversas do dia a dia. Se você já explicou a alguém como chegar a um endereço usando expressões como "Siga por esta rua por cinco quarteirões e depois dobre à esquerda", usou a linguagem dos vetores. Na verdade, qualquer tipo de navegação se baseia em vetores, mas a física e a engenharia também usam vetores para descrever fenômenos que envolvem rotações e forças magnéticas, como veremos em capítulos posteriores. Neste capítulo, vamos discutir a linguagem básica dos vetores.

3-2 Vetores e Escalares

Uma partícula que se move em linha reta pode se deslocar em apenas dois sentidos, já que a direção é conhecida. Podemos considerar o deslocamento como positivo em um desses sentidos e negativo no outro. No caso de uma partícula que se move em qualquer outra trajetória, porém, um número positivo ou negativo não é suficiente para indicar a orientação; precisamos usar um *vetor*.

Um **vetor** possui um módulo e uma orientação; os vetores seguem certas regras de combinação, que serão discutidas neste capítulo. Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza que possui um módulo e uma orientação e pode, portanto, ser representada por um vetor. O deslocamento, a velocidade e a aceleração são exemplos de grandezas físicas vetoriais. Como neste livro serão apresentadas muitas outras grandezas vetoriais, o conhecimento das regras de combinação de vetores será de grande utilidade para o leitor.

Nem toda grandeza física envolve uma orientação. A temperatura, a pressão, a energia, a massa e o tempo, por exemplo, não "apontam" em nenhuma direção. Chamamos essas grandezas de **escalares** e lidamos com elas pelas regras da álgebra comum. Um único valor, às vezes com um sinal (como no caso de uma temperatura de $-2°C$), é suficiente para especificar um escalar.

A grandeza vetorial mais simples é o deslocamento ou mudança de posição. Um vetor que representa um deslocamento é chamado, como seria de se esperar, de **vetor deslocamento**. (Outros exemplos de vetor são os vetores velocidade e o vetor aceleração.) Se uma partícula muda de posição movendo-se de A para B na Fig. 3-1*a*, dizemos que sofre um deslocamento de A para B, que representamos por uma seta apontando de A para B. A seta especifica o vetor graficamente. Para distinguir símbolos vetoriais de outros tipos de setas neste livro, usamos um triângulo vazado na ponta das setas que representam vetores.

Na Fig. 3-1*a*, as setas de A para B, de A' para B' e de A'' para B'' têm o mesmo módulo e a mesma orientação; assim, especificam vetores deslocamento iguais e representam a mesma *variação de posição* da partícula. Um vetor pode ser deslocado sem que o seu valor mude *se* comprimento, direção e sentido permanecerem os mesmos.

O vetor deslocamento nada nos diz sobre a trajetória percorrida por uma partícula. Na Fig. 3-1*b*, por exemplo, as três trajetórias que unem os pontos A e B correspondem ao mesmo vetor deslocamento, o da Fig. 3-1*a*. O vetor deslocamento não representa todo o movimento, mas apenas seu resultado final.

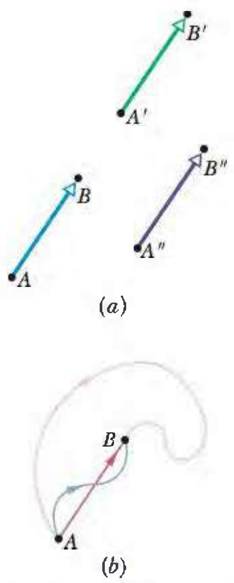


Figura 3-1 (*a*) As três setas têm o mesmo módulo e a mesma orientação e, portanto, representam o mesmo deslocamento. (*b*) As três trajetórias que ligam os dois pontos correspondem ao mesmo vetor deslocamento.

3-3 Soma Geométrica de Vetores

Suponha que, como no diagrama vetorial da Fig. 3-2*a*, uma partícula se desloque de *A* a *B* e, depois, de *B* a *C*. Podemos representar o deslocamento total (independentemente da trajetória seguida) através de dois vetores deslocamento sucessivos, *AB* e *BC*. O *deslocamento total* é um único deslocamento de *A* para *C*. Chamamos *AC* de **vetor soma** (ou **vetor resultante**) dos vetores *AB* e *BC*. Este tipo de soma não é uma soma algébrica comum.

Na Fig. 3-2*b*, desenhamos os vetores da Fig. 3-2*a* e os rotulamos da forma que será usada daqui em diante, com uma seta sobre um símbolo em itálico, como $\vec{a}$. Para indicar apenas o módulo do vetor (uma grandeza positiva e sem direção), usamos o símbolo do vetor em itálico sem a seta, como *a*, *b* e *s*. (Você pode usar simplesmente um símbolo manuscrito.) Uma seta sobre um símbolo indica que a grandeza representada pelo símbolo possui as propriedades de um vetor: módulo e orientação.

Podemos representar a relação entre os três vetores da Fig. 3-2*b* através da *equação vetorial*

$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-1}$$

segundo a qual o vetor $\vec{s}$ é o vetor soma dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O símbolo + na Eq. 3-1 e a palavra "soma" têm um significado diferente no caso dos vetores porque, ao contrário do que acontece na álgebra comum, envolvem tanto o módulo como a orientação da grandeza.

A Fig. 3-2 sugere um método para somar geometricamente dois vetores bidimensionais $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (1) Desenhe o vetor $\vec{a}$ em uma escala conveniente e com o ângulo apropriado. (2) Desenhe o vetor $\vec{b}$ na mesma escala, com a origem na extremidade do vetor $\vec{a}$, também com o ângulo apropriado. (3) O vetor soma $\vec{s}$ é o vetor que vai da origem de $\vec{a}$ à extremidade de $\vec{b}$.

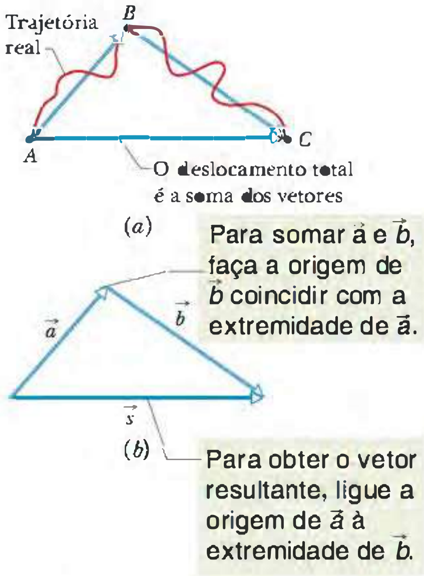


Figura 3-2 (*a*) *AC* é a soma vetorial dos vetores *AB* e *BC*. (*b*) Outra forma de rotular os mesmos vetores.

A soma vetorial, definida desta forma, tem duas propriedades importantes. Em primeiro lugar, a ordem em que os vetores são somados é irrelevante. Somar $\vec{a}$ a $\vec{b}$ é o mesmo que somar $\vec{b}$ a $\vec{a}$ (Fig. 3-3), ou seja,

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{(lei comutativa).} \tag{3-2}$$

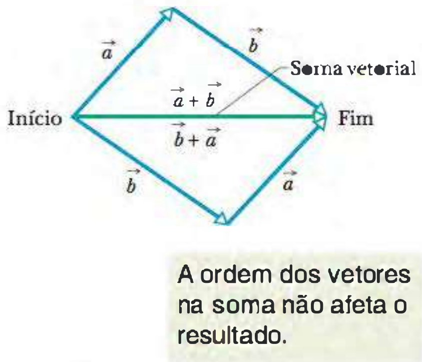


Figura 3-3 A ordem em que os vetores são somados não afeta o resultado; veja a Eq. 3-2.

Em segundo lugar, quando existem mais de dois vetores, podemos agrupá-los em qualquer ordem para somá-los. Assim, se queremos somar os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$, podemos somar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e somar o resultado a $\vec{c}$. Podemos também somar $\vec{b}$ e $\vec{c}$ e depois somar o resultado a $\vec{a}$; o resultado é o mesmo, como mostra a Fig. 3-4. Assim,

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad \text{(lei associativa).} \tag{3-3}$$

O vetor $-\vec{b}$ é um vetor com o mesmo módulo e direção de $\vec{b}$ e o sentido oposto (veja a Fig. 3-5). A soma dos dois vetores da Fig. 3-5 é

$$\vec{b} + (-\vec{b}) = 0.$$

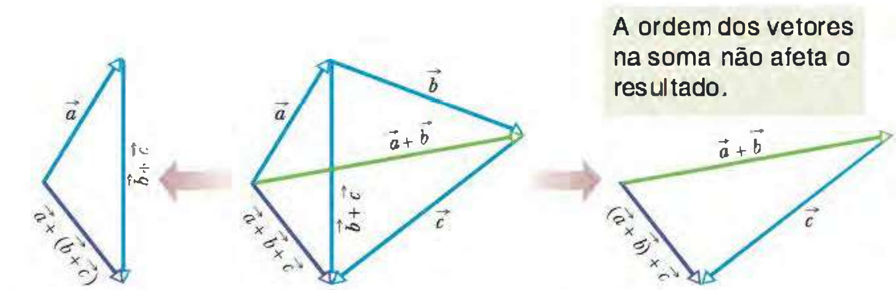


Figura 3-4 Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ podem ser agrupados em qualquer ordem para serem somados; veja a Eq. 3-3.

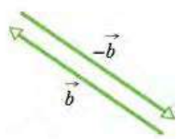


Figura 3-5 Os vetores $\vec{b}$ e $-\vec{b}$ têm o mesmo módulo e sentidos opostos.

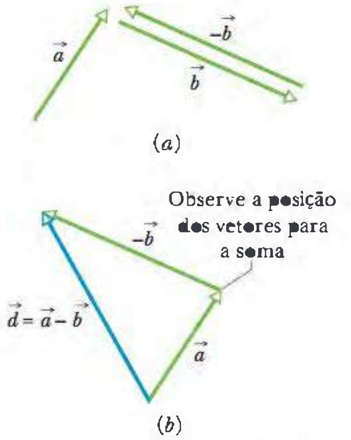


Figura 3-6 (a) Os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{b}$. (b) Para subtrair o vetor $\vec{b}$ do vetor $\vec{a}$, basta somar o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$.

Assim, somar $-\vec{b}$ é o mesmo que subtrair $\vec{b}$. Usamos esta propriedade para definir a diferença entre dois vetores. Se $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, temos:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) \quad \text{(subtração de vetores);} \qquad (3\text{-}4)$$

ou seja, calculamos o vetor diferença $\vec{d}$ somando o vetor $-\vec{b}$ ao vetor $\vec{a}$. A Fig. 3-6 mostra como isso é feito geometricamente.

Como na álgebra comum, podemos passar um termo que inclui um símbolo de vetor de um lado de uma equação vetorial para o outro, mas devemos mudar o sinal. Assim, por exemplo, para explicitar $\vec{a}$ na Eq. 3-4, escrevemos a equação na forma

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = \vec{d} + \vec{b}.$$

Embora tenhamos usado nestes exemplos vetores deslocamento, as regras para somar e subtrair vetores se aplicam a vetores de qualquer tipo, sejam eles usados para representar velocidade, aceleração ou qualquer outra grandeza vetorial. Entretanto, apenas vetores do mesmo tipo podem ser somados. Assim, por exemplo, podemos somar dois deslocamentos ou duas velocidades, mas não faz sentido somar um deslocamento e uma velocidade. Na aritmética dos escalares, isso seria como tentar somar 21 s e 12 m.

TESTE 1

Os módulos dos deslocamentos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, qual é (a) o maior e (b) o menor valor possível do módulo de $\vec{c}$?

Exemplo

Soma gráfica de vetores em um teste de campo

Em um teste de campo, você recebe a tarefa de se afastar o máximo possível de um acampamento através de três deslocamentos retilíneos. Você pode usar os seguintes deslocamentos, em qualquer ordem: (a) $\vec{a}$, 2,0 km para leste; (b) $\vec{b}$, 2,0 km 30° ao norte do leste; (c) $\vec{c}$, 1,0 km para oeste. Você pode também substituir $\vec{b}$ por $-\vec{b}$ e $\vec{c}$ por $-\vec{c}$. Qual é a maior distância que você pode atingir após o terceiro deslocamento?

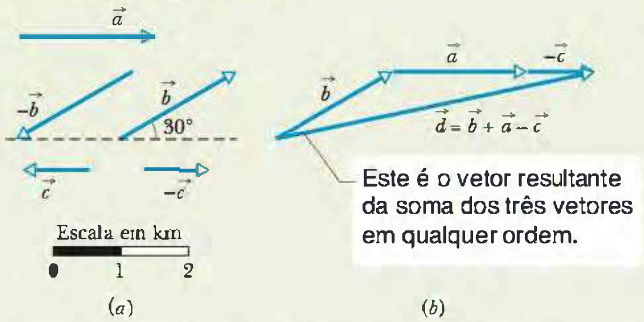


Figura 3-7 (a) Vetores deslocamento; três devem ser usados. (b) A distância do acampamento será a maior possível se os deslocamentos escolhidos forem $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $-\vec{c}$, em qualquer ordem.

Raciocínio Usando uma escala conveniente, desenhamos os vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $-\vec{b}$ e $-\vec{c}$, como na Fig. 3-7a. Em seguida, deslocamos mentalmente os vetores sobre a página, sem mudar a orientação, ligando três vetores de cada vez, em um arranjo no qual a origem do segundo vetor está ligada à extremidade do primeiro e a origem do terceiro está ligada à extremidade do segundo, para encontrar o vetor soma, $\vec{d}$. A origem do primeiro vetor representa o acampamento. A extremidade do terceiro vetor representa o ponto de destino. O vetor soma $\vec{d}$ vai da origem do primeiro vetor à extremidade do terceiro. O módulo d do vetor soma é a distância entre o ponto de destino e o acampamento.

Examinando todos os casos possíveis, descobrimos que a distância é máxima para o arranjo $\vec{a}$, $\vec{b}$, $-\vec{c}$. A ordem em que os vetores são somados não importa, já que a soma vetorial é a mesma para qualquer ordem. A ordem mostrada na Fig. 3-7b é para a soma vetorial

$$\vec{d} = \vec{b} + \vec{a} + (-\vec{c}).$$

Usando a escala da Fig. 3-7a, medimos o comprimento d do vetor resultante, encontrando

$$d = 4{,}8\ \text{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

3-4 Componentes de Vetores

Somar vetores geometricamente pode ser uma tarefa tediosa. Uma técnica mais elegante e mais simples envolve o uso da álgebra, mas requer que os vetores sejam representados em um sistema de coordenadas retangulares. Os eixos x e y são normalmente desenhados no plano do papel, como na Fig. 3-8a. O eixo z é perpendicular ao papel; vamos ignorá-lo por enquanto e tratar apenas de vetores bidimensionais.

Uma **componente** de um vetor é a projeção do vetor em um eixo. Na Fig. 3-8a, por exemplo, a_x é a componente do vetor $\vec{a}$ em relação ao eixo x e a_y é a componente em relação ao eixo y. Para encontrar a projeção de um vetor em um eixo, traçamos retas perpendiculares ao eixo a partir da origem e da extremidade do vetor, como mostra a figura. A projeção de um vetor no eixo x é chamada de *componente x* do vetor; a projeção no eixo y recebe o nome de *componente y*. O processo de obter as componentes de um vetor é chamado de **decomposição do vetor**.

Uma componente de um vetor tem o mesmo sentido (em relação a um eixo) que o vetor. Na Fig. 3-8, a_x e a_y são positivas porque $\vec{a}$ aponta no sentido positivo dos dois eixos. (Observe as setas que mostram o sentido das componentes.) Se invertêssemos o sentido do vetor $\vec{a}$, as componentes seriam negativas e as setas apontariam no sentido negativo dos eixos x e y. A decomposição do vetor $\vec{b}$ da Fig. 3-9 leva a uma componente b_x positiva e a uma componente b_y negativa.

Um vetor pode ter até três componentes, mas, no caso do vetor da Fig. 3-8a, a componente z é nula. Como mostram as Figs. 3-8a e b, quando deslocamos um vetor sem mudar a orientação, as componentes não mudam.

Podemos determinar geometricamente as componentes de $\vec{a}$ na Fig. 3-8a a partir do triângulo retângulo mostrado na figura:

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \tag{3-5}$$

onde θ é o ângulo que o vetor $\vec{a}$ faz com o semieixo x positivo e a é o módulo de $\vec{a}$. A Fig. 3-8c mostra que $\vec{a}$ e as componentes x e y do vetor formam um triângulo retângulo. A figura mostra também que é possível reconstruir um vetor a partir das componentes: basta posicionar a origem de uma das componentes na extremidade da outra e completar o triângulo retângulo ligando a origem livre à extremidade livre.

Uma vez que um vetor tenha sido decomposto em relação a um conjunto de eixos, as componentes podem ser usadas no lugar do vetor. Assim, por exemplo, o vetor $\vec{a}$ da Fig. 3-8a é dado (completamente determinado) por a e θ, mas também

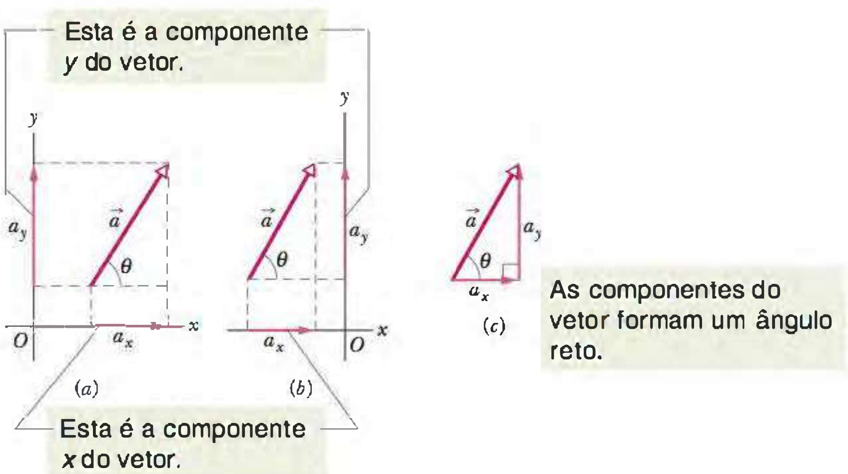


Figura 3-8 (a) As componentes a_x e a_y do vetor $\vec{a}$. (b) As componentes não mudam quando o vetor é deslocado, desde que o módulo e a orientação sejam mantidos. (c) As componentes correspondem aos catetos de um triângulo retângulo cuja hipotenusa é o módulo do vetor.

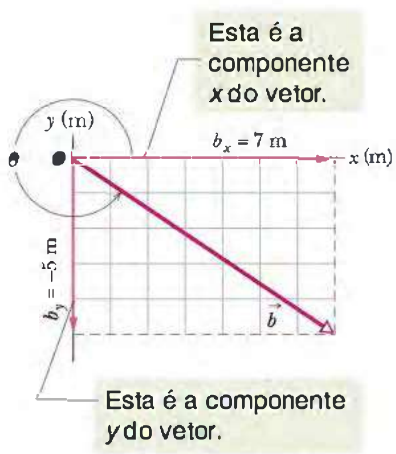


Figura 3-9 A componente x de $\vec{b}$ é positiva e a componente y é negativa.

pode ser dado pelas componentes a_x e a_y. Os dois pares de valores contêm a mesma informação. Se conhecemos um vetor na *notação de componentes* (a_x e a_y) e queremos especificá-lo na notação *módulo-ângulo* (a e θ), basta usar as equações

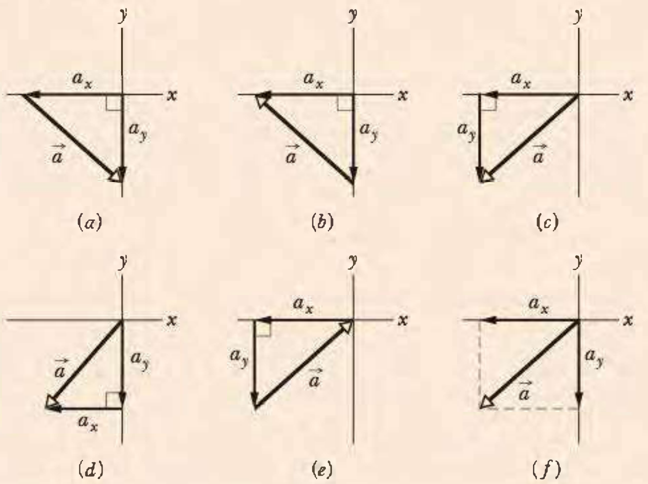
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x} \tag{3-6}$$

para efetuar a transformação.

No caso mais geral de três dimensões, precisamos do módulo e de dois ângulos (a, θ e ϕ, digamos) ou de três componentes (a_x, a_y e a_z) para especificar um vetor.

TESTE 2

Quais dos métodos indicados na figura são corretos para determinar o vetor $\vec{a}$ a partir das componentes x e y?



Exemplo

Determinação dos componentes de um vetor: rota de um avião

Um pequeno avião decola de um aeroporto em um dia nublado e é avistado mais tarde a 215 km de distância, em um curso que faz um ângulo de 22° a leste do norte. A que distância a leste e ao norte do aeroporto está o avião no momento em que é avistado?

IDEIA-CHAVE

Conhecemos o módulo (215 km) e o ângulo (22° a leste do norte) de um vetor e precisamos determinar as componentes do vetor.

Cálculos Desenhamos um sistema de coordenadas xy com o sentido positivo de x para leste e o de y para o norte (Fig. 3-10). Por conveniência, a origem é colocada no aeroporto. O deslocamento $\vec{d}$ do avião aponta da origem para o ponto onde o avião foi avistado.

Para determinar as componentes de $\vec{d}$, usamos a Eq. 3-5 com $\theta = 68°$ ($= 90° - 22°$):

$$d_x = d\cos\theta = (215\text{ km})(\cos 68°) = 81\text{ km} \quad \text{(Resposta)}$$

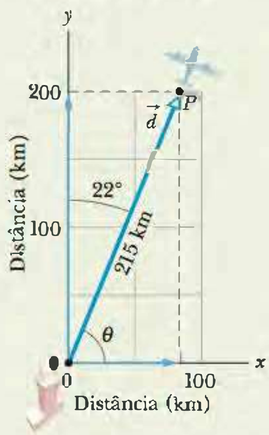


Figura 3-10 Um avião decola de um aeroporto na origem e é avistado mais tarde no ponto P.

$$d_y = d\,\text{sen}\,\theta = (215\text{ km})(\text{sen } 68°) = 199\text{ km} \approx 2{,}0 \times 10^2\text{ km}. \quad \text{(Resposta)}$$

Assim, o avião foi avistado 81 km a leste e $2{,}0 \times 10^2$ km ao norte do aeroporto.

Táticas para a Solução de Problemas

Ângulos, funções trigonométricas e funções trigonométricas inversas

Tática 1:* *Ângulos–Graus e Radianos Ângulos medidos em relação ao semieixo x positivo são positivos se são medidos no sentido anti-horário e negativos se medidos no sentido horário. Assim, por exemplo, 210° e −150° representam o mesmo ângulo.

Os ângulos podem ser medidos em graus ou em radianos (rad). Para relacionar as duas unidades, lembre-se de que uma circunferência é descrita por um ângulo de 360° ou 2π rad. Para converter, digamos, 40° para radianos, escrevemos

$$40° \frac{2\pi\ \text{rad}}{360°} = 0{,}70\ \text{rad}.$$

Tática 2:* *Funções Trigonométricas A Fig. 3-11 mostra as definições das funções trigonométricas básicas (seno, cosseno e tangente), muito usadas na ciência e na engenharia, em uma forma que não depende do modo como o triângulo é rotulado.

O leitor deve saber como essas funções trigonométricas variam com o ângulo (Fig. 3-12), para poder julgar se o resultado mostrado por uma calculadora é razoável. Em algumas circunstâncias, o simples conhecimento do sinal das funções nos vários quadrantes pode ser útil.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{cateto adjacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto oposto a } \theta}{\text{cateto adjacente a } \theta}$$

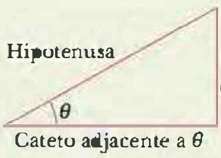


Figura 3-11 Triângulo usado para definir as funções trigonométricas. Veja também o Apêndice E.

Tática 3:* *Funções Trigonométricas Inversas Quando se usa uma calculadora para obter o valor de uma função trigonométrica inversa como sen^{-1}, $\cos^{-1}$ e $\tan^{-1}$, é preciso verificar se o resultado faz sentido, pois, em geral, existe outra solução possível que a calculadora não fornece. Os intervalos em que as calculadoras operam ao fornecer os valores das funções trigonométricas inversas estão indicados na Fig. 3-12. Assim, por exemplo, $\operatorname{sen}^{-1}(0{,}5)$ pode ser igual a 30° (que é o valor mostrado pela calculadora, já que 30° está no intervalo de operação) ou a 150°. Para verificar que isso é verdade, trace uma reta horizontal passando pelo valor 0,5 na escala vertical da Fig. 3-12*a* e observe os pontos em que a reta intercepta a curva da função seno. Como é possível saber qual é a resposta correta? É a que parece mais razoável para uma dada situação.

Tática 4:* *Medida dos Ângulos de um Vetor As expressões de $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ na Eq. 3-5 e de $\tan\theta$ na Eq. 3-6 são válidas apenas se o ângulo for medido em relação ao semieixo x positivo. Se o ângulo for medido em relação a outro eixo, talvez seja preciso trocar as funções trigonométricas da Eq. 3-5 ou inverter a razão da Eq. 3-6. Um método mais seguro é converter o ângulo dado em um ângulo medido em relação ao semieixo x positivo.

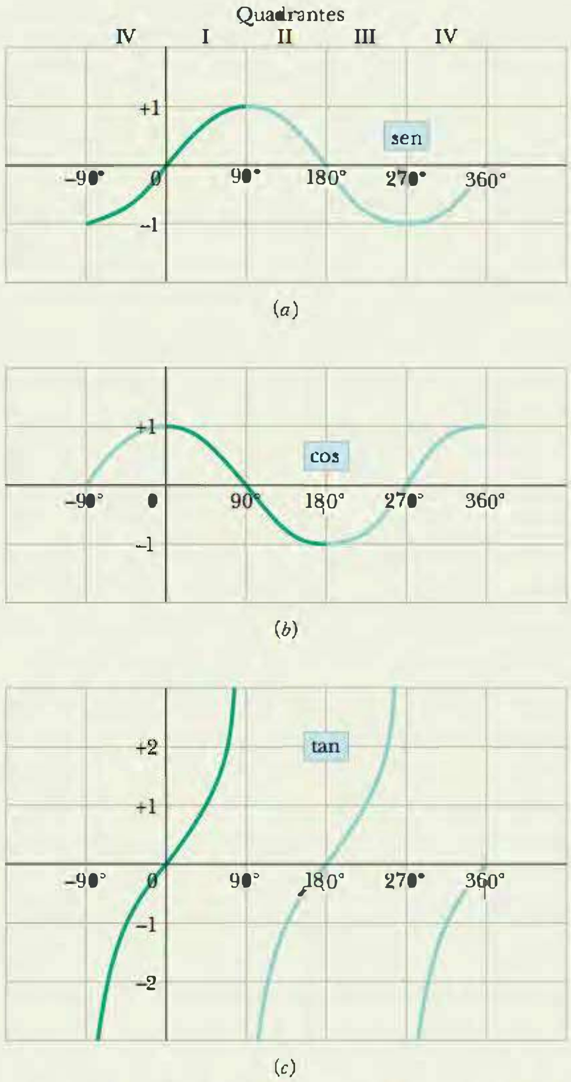


Figura 3-12 Gráficos das três funções trigonométricas. As partes mais escuras das curvas correspondem aos valores fornecidos pelas calculadoras para as funções trigonométricas *inversas*.

3-5 Vetores Unitários

Vetor unitário é um vetor cujo módulo é 1 e que aponta em uma certa direção. Um vetor unitário não possui dimensão nem unidade; sua única função é especificar uma orientação. Neste livro, os vetores unitários que indicam os sentidos positivos dos eixos x, y e z, são representados como $\hat{\text{i}}$, $\hat{\text{j}}$ e $\hat{\text{k}}$, respectivamente, onde o símbolo ^

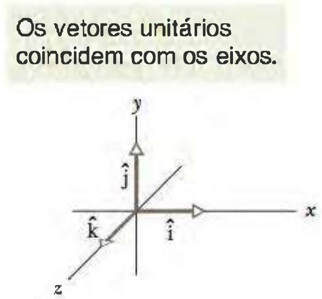


Figura 3-13 Os vetores unitários $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ definem os sentidos positivos de um sistema de coordenadas dextrogiro.

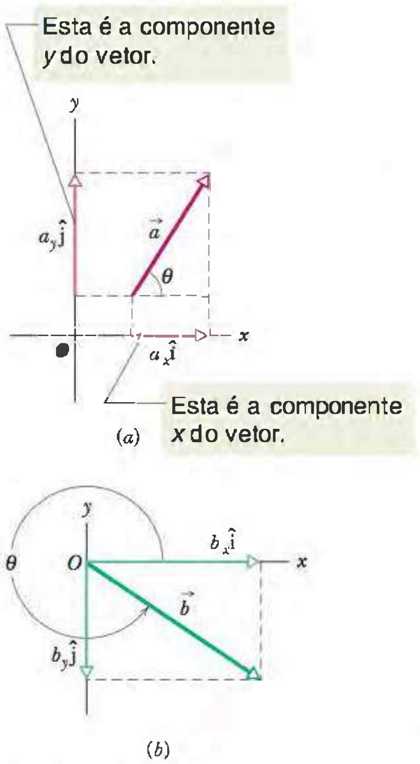


Figura 3-14 (*a*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{a}$. (*b*) Componentes vetoriais do vetor $\vec{b}$.

é usado, em lugar de uma seta, para mostrar que se trata de vetores unitários (Fig. 3-13). Um sistema de eixos como o da Fig. 3-13 é chamado de **sistema de coordenadas dextrogiro**. O sistema permanece dextrogiro quando os três eixos sofrem a mesma rotação, qualquer que seja. Os sistemas de coordenadas usados neste livro são todos dextrogiros.

Os vetores unitários são muito úteis para especificar outros vetores; assim, por exemplo, podemos expressar os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ das Figs. 3-8 e 3-9 como

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} \tag{3-7}$$

e

$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j}. \tag{3-8}$$

Essas duas equações estão ilustradas na Fig. 3-14. As grandezas $a_x\hat{i}$ e $a_y\hat{j}$ são vetores, conhecidos como **componentes vetoriais** de $\vec{a}$. As grandezas a_x e a_y são escalares, conhecidos como **componentes escalares** (ou, simplesmente, **componentes**) de $\vec{a}$.

3-6 Soma de Vetores a partir das Componentes

Podemos somar vetores geometricamente, usando um desenho. Também podemos somar vetores diretamente na tela de uma calculadora gráfica. Uma terceira forma de somar vetores, que é a forma que discutiremos em seguida, consiste em combinar as componentes eixo por eixo.

Para começar, considere a equação

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}, \tag{3-9}$$

segundo a qual o vetor $\vec{r}$ é igual ao vetor $(\vec{a} + \vec{b})$. Nesse caso, cada componente de $\vec{r}$ é igual à componente correspondente de $(\vec{a} + \vec{b})$:

$$r_x = a_x + b_x \tag{3-10}$$

$$r_y = a_y + b_y \tag{3-11}$$

$$r_z = a_z + b_z. \tag{3-12}$$

Em outras palavras, dois vetores são iguais se as componentes correspondentes forem iguais. De acordo com as Eqs. 3-9 a 3-12, para somar dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, podemos (1) obter as componentes escalares dos vetores; (2) combinar as componentes escalares, eixo por eixo, para obter as componentes do vetor soma, $\vec{r}$; (3) combinar as componentes de $\vec{r}$ para obter o vetor $\vec{r}$. Isso pode ser feito de duas maneiras: podemos expressar $\vec{r}$ em termos dos vetores unitários ou através da notação módulo-ângulo.

Esse método de somar vetores usando componentes também se aplica à subtração. Lembre-se de que uma subtração como $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ pode ser escrita como uma adição da forma $\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Para subtrair, somamos as componentes de $\vec{a}$ e $-\vec{b}$ para obter

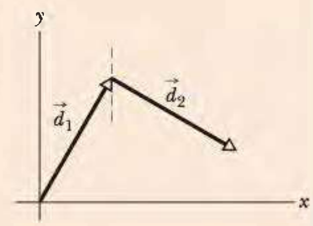
$$d_x = a_x - b_x, \quad d_y = a_y - b_y, \quad \text{e} \quad d_z = a_z - b_z,$$

onde

$$\vec{d} = d_x\hat{i} + d_y\hat{j} + d_z\hat{k}. \tag{3-13}$$

TESTE 3

(a) Quais são os sinais das componentes x de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$ na figura? (b) Quais são os sinais das componentes y de $\vec{d}_1$ e $\vec{d}_2$? Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$?



Exemplo

Soma de vetores usando vetores unitários

A Figura 3-15a mostra os seguintes vetores:

$$\vec{a} = (4{,}2\text{ m})\hat{\text{i}} - (1{,}5\text{ m})\hat{\text{j}},$$
$$\vec{b} = (-1{,}6\text{ m})\hat{\text{i}} + (2{,}9\text{ m})\hat{\text{j}},$$
e
$$\vec{c} = (-3{,}7\text{ m})\hat{\text{j}}.$$

Qual é o vetor soma $\vec{r}$ que também aparece na Fig. 3-15a?

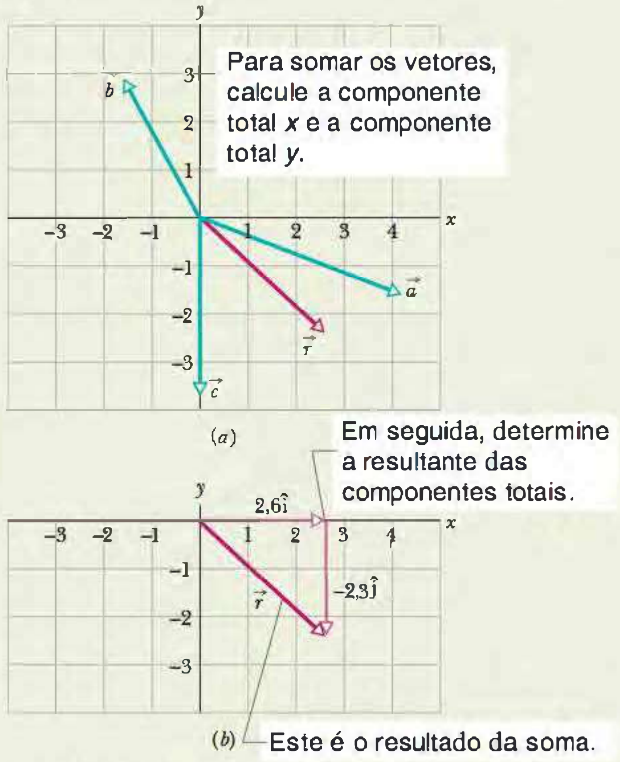


Figura 3-15 O vetor $\vec{r}$ é a soma vetorial dos outros três vetores.

IDEIA-CHAVE

Podemos somar os três vetores somando as componentes, eixo por eixo, e usando as componentes resultantes para obter o vetor soma $\vec{r}$.

Cálculos No caso do eixo x, somamos as componentes x de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ para obter a componente x do vetor soma $\vec{r}$:

$$r_x = a_x + b_x + c_x$$
$$= 4{,}2\text{ m} - 1{,}6\text{ m} + 0 = 2{,}6\text{ m}.$$

Analogamente, no caso do eixo y,

$$r_y = a_y + b_y + c_y$$
$$= -1{,}5\text{ m} + 2{,}9\text{ m} - 3{,}7\text{ m} = -2{,}3\text{ m}.$$

Podemos combinar essas componentes de $\vec{r}$ para escrever o vetor em termos dos vetores unitários:

$$\vec{r} = (2{,}6\text{ m})\hat{\text{i}} - (2{,}3\text{ m})\hat{\text{j}}, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde $(2{,}6\text{ m})\hat{\text{i}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo x e $-(2{,}3\text{ m})\hat{\text{j}}$ é a componente vetorial de $\vec{r}$ em relação ao eixo y. A Fig. 3-15b mostra uma das formas de obter o vetor $\vec{r}$ a partir dessas componentes. (Qual é a outra forma?)

Também podemos resolver o problema determinando o módulo e o ângulo de $\vec{r}$. De acordo com a Eq. 3-6, o módulo é dado por

$$r = \sqrt{(2{,}6\text{ m})^2 + (-2{,}3\text{ m})^2} \approx 3{,}5\text{ m} \qquad \text{(Resposta)}$$

e o ângulo (medido em relação ao semieixo x positivo) é dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2{,}3\text{ m}}{2{,}6\text{ m}}\right) = -41°, \qquad \text{(Resposta)}$$

onde o sinal negativo significa que o ângulo deve ser medido no sentido horário.

Exemplo

Soma de vetores usando componentes: formiga do deserto

A formiga do deserto *Cataglyphis fortis* vive nas planícies do deserto do Saara. Quando uma dessas formigas sai à procura de alimento, percorre um caminho aleatório em um terreno plano, arenoso, desprovido de acidentes geográficos que possam ser usados como referência. Mesmo assim, quando a formiga decide voltar ao formigueiro, ruma diretamente para casa. De acordo com as pesquisas, a formiga do deserto mantém um registro dos seus movimentos em um sistema de coordenadas mental. Quando decide voltar ao formigueiro, soma os deslocamentos em relação aos eixos do sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Como exemplo desse cálculo, considere uma formiga que executa cinco movimentos de 6,0 cm em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas na Fig. 3-16a, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total $\vec{d}_{tot}$ e quais são os valores correspondentes do vetor de retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga à posição do formigueiro? Em uma situação real, esse cálculo vetorial pode envolver milhares desses movimentos.

IDEIAS-CHAVE

(1) Para encontrar o deslocamento resultante $\vec{d}_{tot}$, precisamos somar os cinco vetores deslocamento:

$$\vec{d}_{tot} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 + \vec{d}_3 + \vec{d}_4 + \vec{d}_5.$$

(2) Calculamos esta soma apenas para a componente x,

$$d_{tot,x} = d_{1x} + d_{2x} + d_{3x} + d_{4x} + d_{5x}, \qquad (3\text{-}14)$$

e apenas para a componente y,

$$d_{tot,y} = d_{1y} + d_{2y} + d_{3y} + d_{4y} + d_{5y}. \qquad (3\text{-}15)$$

(3) Obtemos o vetor $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes x e y.

Cálculos Para resolver a Eq. 3-14, aplicamos a parte correspondente a x da Eq. 3-5 a cada movimento:

$$d_{1x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 0° = +6{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{2x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 150° = -5{,}2 \text{ cm}$$
$$d_{3x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 180° = -6{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{4x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos(-120°) = -3{,}0 \text{ cm}$$
$$d_{5x} = (6{,}0 \text{ cm}) \cos 90° = 0.$$

A Eq. 3-14 nos dá

$$\begin{aligned} d_{tot,x} &= +6{,}0 \text{ cm} + (-5{,}2 \text{ cm}) + (-6{,}0 \text{ cm}) \\ &\quad + (-3{,}0 \text{ cm}) + 0 \\ &= -8{,}2 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Analogamente, calculamos as componentes y dos cinco movimentos usando a parte correspondente a y da Eq. 3-5. Os resultados aparecem na Tabela 3-1. Substituindo esses resultados na Eq. 3-15, obtemos:

$$d_{tot,y} = +3{,}8 \text{ cm}.$$

Tabela 3-1

Mov.	d_x (cm)	d_y (cm)
1	+6,0	0
2	−5,2	+3,0
3	−6,0	0
4	−3,0	−5,2
5	0	+6,0
total	−8,2	+3,8

O vetor $\vec{d}_{tot}$ e suas componentes x e y aparecem na Fig. 3-16*b*. Para encontrar o módulo e o ângulo de $\vec{d}_{tot}$ a partir das componentes, usamos a Eq. 3-6. O módulo é dado por

$$d_{tot} = \sqrt{d_{tot,x}^2 + d_{tot,y}^2}$$
$$= \sqrt{(-8{,}2 \text{ cm})^2 + (3{,}8 \text{ cm})^2} = 9{,}0 \text{ cm}.$$

Para encontrar o ângulo (medido a partir do semieixo x positivo), calculamos o arco tangente:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{d_{tot,y}}{d_{tot,x}}\right) \qquad (3\text{-}16)$$
$$= \tan^{-1}\left(\frac{3{,}8 \text{ cm}}{-8{,}2 \text{ cm}}\right) = -24{,}86°.$$

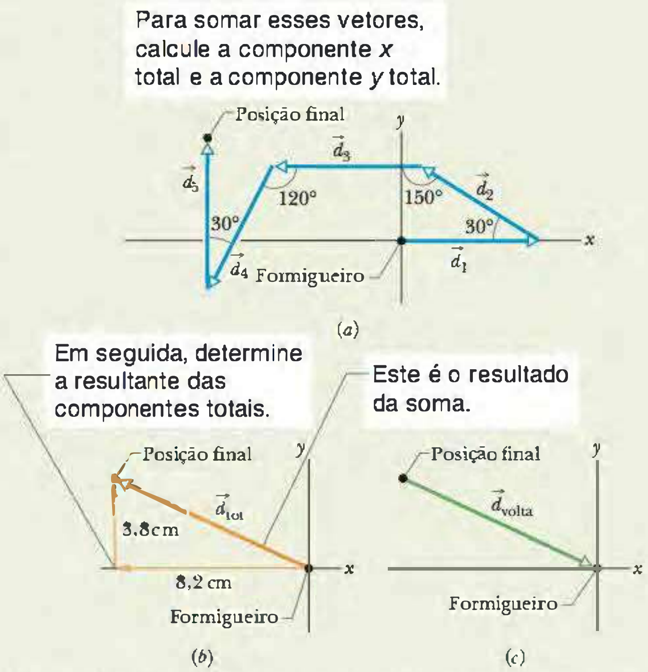


Figura 3-16 (*a*) Movimentos de uma formiga do deserto. (*b*) Componentes x e y de $\vec{d}_{tot}$. (*c*) O vetor $\vec{d}_{volta}$ indica o caminho de volta para o formigueiro.

Atenção: Como foi dito na Tática para a Solução de Problemas 3, uma calculadora nem sempre fornece o resultado correto para o arco tangente. A resposta −24,86° parece indicar que vetor $\vec{d}_{tot}$ está no quarto quadrante do nosso sistema de coordenadas xy. Entretanto, quando desenhamos o vetor a partir das componentes (Fig. 3-16*b*), vemos que $\vec{d}_{tot}$ está no segundo quadrante. Assim, precisamos "corrigir" a resposta da calculadora somando 180°:

$$\theta = -24{,}86° + 180° = 155{,}14° \approx 155°. \qquad (3\text{-}17)$$

Assim, o deslocamento $\vec{d}_{tot}$ da formiga, na notação módulo-ângulo, é dado por

$$d_{tot} = 9{,}0 \text{ cm e } 155°. \qquad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{d}_{volta}$, que aponta da formiga para o formigueiro, tem o mesmo módulo que $\vec{d}_{tot}$ e o sentido oposto (Fig. 3-16*c*). Já temos o ângulo (−24,86° ≈ −25°) para o sentido oposto a $\vec{d}_{tot}$. Assim, $\vec{d}_{volta}$ é dado por

$$d_{volta} = 9{,}0 \text{ cm e } -25°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Uma formiga do deserto que se afasta mais de 500 m do formigueiro realiza, na verdade, milhares de movimentos. Ainda assim, de alguma forma é capaz de calcular $\vec{d}_{volta}$ (sem estudar este capítulo).

3-7 Vetores e as Leis da Física

Até agora, em toda a figura em que aparece um sistema de coordenadas, os eixos x e y são paralelos às bordas do papel. Assim, quando um vetor $\vec{a}$ é desenhado, as componentes a_x e a_y também são paralelas às bordas do papel (como na Fig. 3-17*a*). A única razão para usar esta orientação dos eixos é que parece "apropriada"; não existe uma razão mais profunda. Podemos, perfeitamente, girar os eixos (mas não o vetor $\vec{a}$) de um ângulo ϕ, como na Fig. 3-17*b*, caso em que as componentes terão novos valores, a'_x e a'_y. Como existe uma infinidade de valores possíveis de ϕ, existe um número infinito de pares possíveis de componentes de $\vec{a}$.

Qual é, então, o par de componentes "correto"? A resposta é que são todos igualmente válidos, já que cada par (com o sistema de eixos correspondente) constitui uma forma diferente de descrever o mesmo vetor $\vec{a}$; todos produzem o mesmo módulo e a mesma orientação para o vetor. Na Fig. 3-17, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2} \tag{3-18}$$

e

$$\theta = \theta' + \phi. \tag{3-19}$$

A verdade é que temos uma grande liberdade para escolher o sistema de coordenadas, já que as relações entre vetores não dependem da localização da origem nem da orientação dos eixos. Isso também se aplica às leis da física; são todas independentes da escolha do sistema de coordenadas. Acrescente a isso a simplicidade e riqueza da linguagem dos vetores e é fácil compreender por que as leis da física são quase sempre apresentadas nessa linguagem: uma equação, como a Eq. 3-9, pode representar três (ou até mais) relações, como as Eqs. 3-10, 3-11 e 3-12.

3-8 Multiplicação de Vetores*

Existem três formas de multiplicar vetores, mas nenhuma é exatamente igual à multiplicação algébrica. Ao ler esta seção, tenha em mente que uma calculadora o ajudará a multiplicar vetores apenas se você compreender as regras básicas deste tipo de multiplicação.

Multiplicação de um Vetor por um Escalar

Quando multiplicamos um vetor $\vec{a}$ por um escalar s, obtemos outro vetor cujo módulo é o produto do módulo de $\vec{a}$ pelo valor absoluto de s, cuja direção é a mesma de $\vec{a}$ e cujo sentido é o mesmo de $\vec{a}$ se s for positivo e o sentido oposto se s for negativo. Para dividir $\vec{a}$ por s, multiplicamos $\vec{a}$ por $1/s$.

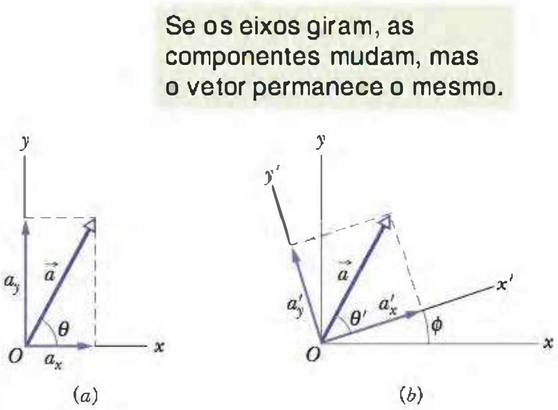


Figura 3-17 (*a*) O vetor $\vec{a}$ e suas componentes. (*b*) O mesmo vetor, com os eixos do sistema de coordenadas girados de um ângulo ϕ.

* Como os assuntos discutidos nesta seção serão aplicados apenas em capítulos posteriores (Capítulo 7, no caso do produto escalar, e Capítulo 11, no caso do produto vetorial), talvez o professor prefira deixar o estudo desta seção para mais tarde.

Multiplicação de um Vetor por um Vetor

Existem duas formas de multiplicar um vetor por um vetor: uma forma (conhecida como *produto escalar*) resulta em um escalar; a outra (conhecida como *produto vetorial*) resulta em um vetor. (Os estudantes costumam confundir as duas formas.)

O Produto Escalar

O **produto escalar** dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ da Fig. 3-18*a* é escrito como $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e definido pela equação

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi, \tag{3-20}$$

onde a é o módulo de $\vec{a}$, b é o módulo de $\vec{b}$ e ϕ é o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (ou, mais apropriadamente, entre as orientações de $\vec{a}$ e $\vec{b}$). Na realidade, existem dois ângulos possíveis: ϕ e $360° - \phi$. Qualquer dos dois pode ser usado na Eq. 3-20, já que os cossenos dos dois ângulos são iguais.

Note que o lado direito da Eq. 3-20 contém apenas escalares (incluindo o valor de $\cos \phi$). Assim, o produto $\vec{a} \cdot \vec{b}$ no lado esquerdo representa uma **grandeza escalar** e é lido como "a escalar b".

O produto escalar pode ser considerado como o produto de duas grandezas: (1) o módulo de um dos vetores e (2) a componente escalar do outro vetor em relação ao primeiro. Assim, por exemplo, na Fig. 3-18*b*, $\vec{a}$ tem uma componente escalar $a \cos \phi$ em relação a $\vec{b}$; note que essa componente pode ser determinada traçando uma perpendicular a $\vec{b}$ que passe pela extremidade de $\vec{a}$. Analogamente, $\vec{b}$ possui uma componente escalar $b \cos \phi$ em relação a $\vec{a}$.

> Se o ângulo ϕ entre dois vetores é 0°, a componente de um vetor em relação ao outro é máxima, o que também acontece com o produto escalar dos vetores. Se o ângulo é 90°, a componente de um vetor em relação ao outro é nula, o que também acontece com o produto escalar.

Para chamar atenção para as componentes, a Eq. 3-20 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a \cos \phi)(b) = (a)(b \cos \phi). \tag{3-21}$$

Como a propriedade comutativa se aplica ao produto escalar, podemos escrever

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

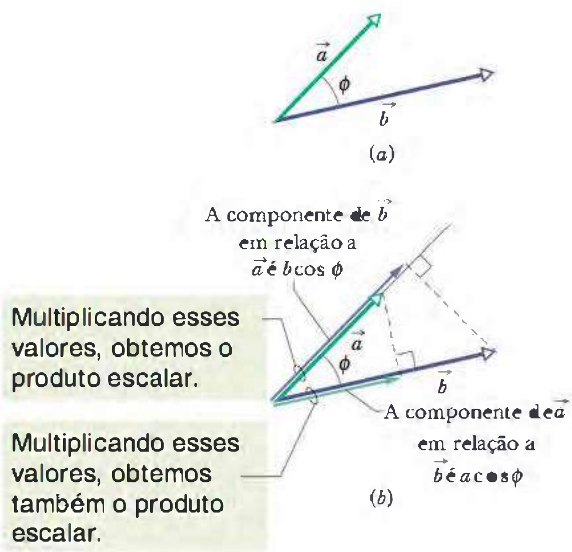


Figura 3-18 (*a*) Dois vetores, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, formando um ângulo ϕ. (*b*) Cada vetor tem uma componente na direção do outro vetor.

Quando os dois vetores são escritos em termos dos vetores unitários, o produto escalar assume a forma

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}})\cdot(b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-22}$$

que pode ser expandida de acordo com a propriedade distributiva. Calculando os produtos escalares das componentes vetoriais do primeiro vetor pelas componentes vetoriais do segundo vetor, obtemos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z. \tag{3-23}$$

TESTE 4

Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C}\cdot\vec{D}$ é igual a (a) zero, (b) 12 unidades e (c) -12 unidades?

Exemplo

Ângulo entre dois vetores usando o produto escalar

Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a} = 3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}}$? (*Atenção:* muitos dos cálculos a seguir não são necessários quando se usa uma calculadora, mas o leitor aprenderá mais sobre produtos escalares se, pelo menos no início, executar esses cálculos.)

IDEIA-CHAVE

O ângulo entre as orientações dos dois vetores aparece na definição do produto escalar (Eq. 3-20):

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi. \tag{3-24}$$

Cálculos Na Eq. 3-24, a é o módulo de $\vec{a}$, ou seja,

$$a = \sqrt{3{,}0^2 + (-4{,}0)^2} = 5{,}00, \tag{3-25}$$

e b é o módulo de $\vec{b}$, ou seja,

$$b = \sqrt{(-2{,}0)^2 + 3{,}0^2} = 3{,}61. \tag{3-26}$$

Podemos calcular o lado esquerdo da Eq. 3-24 escrevendo os vetores em termos dos vetores unitários e usando a propriedade distributiva:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}} - 4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}} + 3{,}0\hat{\mathrm{k}})\\ &= (3{,}0\hat{\mathrm{i}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (3{,}0\hat{\mathrm{i}})\cdot(3{,}0\hat{\mathrm{k}})\\ &\quad + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(-2{,}0\hat{\mathrm{i}}) + (-4{,}0\hat{\mathrm{j}})\cdot(3{,}0\hat{\mathrm{k}}).\end{aligned}$$

Em seguida, aplicamos a Eq. 3-20 a cada termo desta última expressão. O ângulo entre os vetores unitários do primeiro termo ($\hat{\mathrm{i}}$ e $\hat{\mathrm{i}}$) é 0° e os outros ângulos são 90°. Assim, temos:

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= -(6{,}0)(1) + (9{,}0)(0) + (8{,}0)(0) - (12)(0)\\ &= -6{,}0.\end{aligned}$$

Substituindo este resultado e os resultados das Eqs. 3-25 e 3-26 na Eq. 3-24, obtemos:

$$-6{,}0 = (5{,}00)(3{,}61)\cos\phi,$$

e $$\phi = \cos^{-1}\frac{-6{,}0}{(5{,}00)(3{,}61)} = 109° \approx 110°. \quad \text{(Resposta)}$$

O Produto Vetorial

O **produto vetorial** de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}\times\vec{b}$ e resulta em um terceiro vetor, $\vec{c}$, cujo módulo é

$$c = ab\,\mathrm{sen}\,\phi, \tag{3-27}$$

onde ϕ é o *menor* dos dois ângulos entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$. (É preciso usar o menor dos ângulos entre os vetores porque sen ϕ e sen(360° $-$ ϕ) têm sinais opostos.) O produto $\vec{a}\times\vec{b}$ é lido como "*a* vetor *b*".

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos ou antiparalelos, $\vec{a}\times\vec{b} = 0$. O módulo de $\vec{a}\times\vec{b}$, que pode ser escrito como $|\vec{a}\times\vec{b}|$, é máximo quando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são mutuamente perpendiculares.

A direção de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A Fig. 3-19*a* mostra como determinar o sentido de $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ usando a chamada **regra da mão direita.** Superponha as origens de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sem mudar a orientação dos vetores e imagine uma reta perpendicular ao plano definido pelos dois vetores, passando pela origem comum. Envolva essa reta com a mão *direita* de modo que os dedos empurrem $\vec{a}$ em direção a $\vec{b}$ ao longo do menor ângulo entre os vetores. O polegar estendido apontará no sentido de $\vec{c}$.

No caso do produto vetorial, a ordem dos vetores é importante. Na Fig. 3-19*b*, estamos determinando o sentido de $\vec{c}' = \vec{b} \times \vec{a}$, de modo que os dedos da mão direita empurram $\vec{b}$ na direção de $\vec{a}$ ao longo do menor ângulo. Neste caso, o polegar no sentido oposto ao da Fig. 3-19*a*, de modo que $\vec{c}' = -\vec{c}$, ou seja,

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \tag{3-28}$$

Em outras palavras, a propriedade comutativa não se aplica ao produto vetorial.

Em termos dos vetores unitários, podemos escrever

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{\mathrm{i}} + a_y\hat{\mathrm{j}} + a_z\hat{\mathrm{k}}) \times (b_x\hat{\mathrm{i}} + b_y\hat{\mathrm{j}} + b_z\hat{\mathrm{k}}), \tag{3-29}$$

que pode ser expandido de acordo com a propriedade distributiva, ou seja, calculando o produto vetorial de cada componente do primeiro vetor pelas componentes do segundo vetor. Os produtos vetoriais dos vetores unitários aparecem no Apêndi-

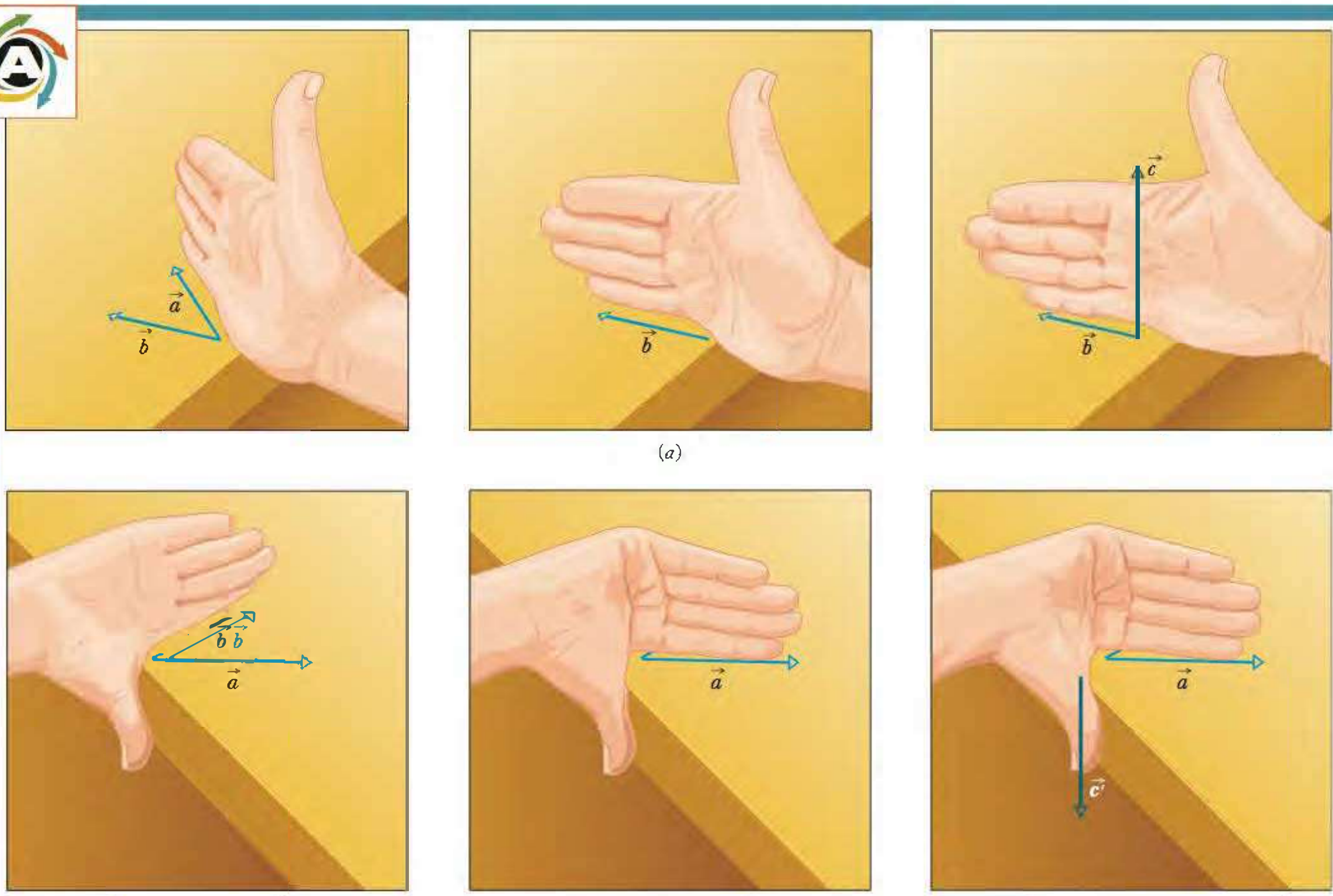


Figura 3-19 Ilustração da regra da mão direita para produtos vetoriais. (a) Empurre o vetor $\vec{a}$ na direção do vetor $\vec{b}$ com os dedos da mão direita. O polegar estendido mostra a orientação do vetor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. (b) O vetor $\vec{b} \times \vec{a}$ tem o sentido oposto ao de $\vec{a} \times \vec{b}$.

ce E (veja "Produtos de Vetores"). Assim, por exemplo, na expansão da Eq. 3-29, temos:

$$a_x\hat{\text{i}} \times b_x\hat{\text{i}} = a_xb_x(\hat{\text{i}} \times \hat{\text{i}}) = 0,$$

porque os vetores unitários $\hat{\text{i}}$ e $\hat{\text{i}}$ são paralelos e, portanto, o produto vetorial é zero. Analogamente, temos:

$$a_x\hat{\text{i}} \times b_y\hat{\text{j}} = a_xb_y(\hat{\text{i}} \times \hat{\text{j}}) = a_xb_y\,\hat{\text{k}}.$$

No último passo, usamos a Eq. 3-27 para descobrir que o módulo de $\hat{\text{i}} \times \hat{\text{j}}$ é 1. (O módulo dos vetores $\hat{\text{i}}$ e $\hat{\text{j}}$ é 1 e o ângulo entre $\hat{\text{i}}$ e $\hat{\text{j}}$ é 90°.) Usando a regra da mão direita, descobrimos que o sentido de $\hat{\text{i}} \times \hat{\text{j}}$ é o sentido do semieixo z positivo, ou seja, o sentido de $\hat{\text{k}}$.

Continuando a expandir a Eq. 3-29, é possível mostrar que

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_yb_z - b_ya_z)\hat{\text{i}} + (a_zb_x - b_za_x)\hat{\text{j}} + (a_xb_y - b_xa_y)\hat{\text{k}}. \qquad (3\text{-}30)$$

Também é possível calcular o resultado de um produto vetorial usando um determinante (veja o Apêndice E) ou uma calculadora.

Para verificar se um sistema de coordenadas xyz é um sistema dextrogiro, basta aplicar a regra da mão direita ao produto vetorial $\hat{\text{i}} \times \hat{\text{j}} = \hat{\text{k}}$ no sistema dado. Se os dedos empurrarem $\hat{\text{i}}$ (semieixo x positivo) na direção de $\hat{\text{j}}$ (semieixo y positivo) e o polegar estendido apontar no sentido do semieixo z positivo, o sistema é dextrogiro.

TESTE 5

Os vetores $\vec{C}$ e $\vec{D}$ têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C} \times \vec{D}$ é igual a (a) zero e (b) 12 unidades?

Exemplo

Produto vetorial: regra da mão direita

Na Fig. 3-20, o vetor $\vec{a}$ está no plano xy, tem um módulo de 18 unidades e uma orientação que faz um ângulo de 250° com o semieixo x positivo. O vetor $\vec{b}$ tem um módulo de 12 unidades e está orientado ao longo do semieixo z positivo. Qual é o produto vetorial $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$?

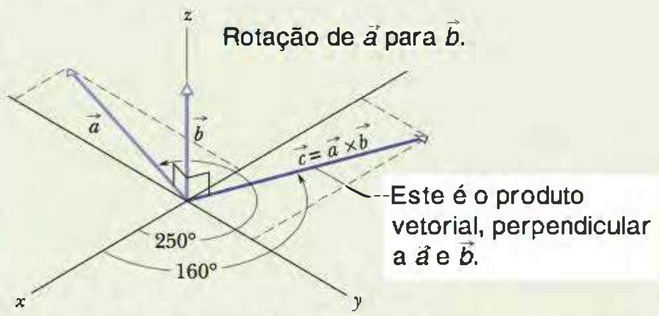


Figura 3-20 O vetor $\vec{c}$ (no plano xy) é o produto vetorial dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

IDEIA-CHAVE

Quando conhecemos dois vetores na notação módulo-ângulo, podemos calcular o módulo do produto vetorial usando a Eq. 3-27 e determinar a orientação do produto vetorial usando a regra da mão direita da Fig. 3-19.

Cálculos O módulo do produto vetorial é dado por

$$c = ab\,\text{sen}\,\phi = (18)(12)(\text{sen}\,90°) = 216. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para determinar a orientação do produto vetorial na Fig. 3-20, coloque os dedos da mão direita em torno de uma reta perpendicular ao plano de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (a reta na qual se encontra o vetor $\vec{c}$) de modo que os dedos empurrem o vetor $\vec{a}$ na direção de $\vec{b}$; o polegar estendido fornece a orientação de $\vec{c}$. Assim, como mostra a figura, $\vec{c}$ está no plano xy. Como a direção de $\vec{c}$ é perpendicular à direção de $\vec{a}$ (o produto vetorial sempre resulta em um vetor perpendicular aos dois vetores originais), o vetor faz um ângulo de

$$250° - 90° = 160° \qquad \text{(Resposta)}$$

com o semieixo x positivo.

Exemplo

Produto vetorial usando vetores unitários

Se $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$, determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

IDEIA-CHAVE

Quando dois vetores estão expressos em termos dos vetores unitários, podemos determinar o produto vetorial usando a lei distributiva.

Cálculos Temos:

$$\vec{c} = (3\hat{i} - 4\hat{j}) \times (-2\hat{i} + 3\hat{k})$$
$$= 3\hat{i} \times (-2\hat{i}) + 3\hat{i} \times 3\hat{k} + (-4\hat{j}) \times (-2\hat{i}) + (-4\hat{j}) \times 3\hat{k}.$$

Podemos calcular os valores dos diferentes termos usando a Eq. 3-27 e determinando a orientação dos vetores com o auxílio da regra da mão direita. No primeiro termo, o ângulo ϕ entre os dois vetores envolvidos no produto vetorial é 0; nos outros três termos, $\phi = 90°$. O resultado é o seguinte:

$$\vec{c} = -6(0) + 9(-\hat{j}) + 8(-\hat{k}) - 12\hat{i}$$
$$= -12\hat{i} - 9\hat{j} - 8\hat{k}. \quad \text{(Resposta)}$$

O vetor $\vec{c}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e $\vec{b}$, o que pode ser demonstrado observando que $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja, que não existem componentes de $\vec{c}$ em relação a $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

REVISÃO E RESUMO

Escalares e Vetores *Grandezas escalares*, como temperatura, possuem apenas um valor numérico. São especificadas por um número com uma unidade (10°C, por exemplo) e obedecem às regras da aritmética e da álgebra comum. As *grandezas vetoriais*, como o deslocamento, possuem um valor numérico (módulo) e uma orientação (5 m para cima, por exemplo) e obedecem às regras da álgebra vetorial.

Soma Geométrica de Vetores Dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ podem ser somados geometricamente desenhando-os na mesma escala e posicionando-os com a origem de umna extremidade do outro. O vetor que liga a as extremidades livres dos dois vetores é o vetor soma, $\vec{s}$. Para subtrair $\vec{b}$ de $\vec{a}$, invertemos o sentido de $\vec{b}$ para obter $-\vec{b}$ e somamos $-\vec{b}$ a $\vec{a}$. A soma vetorial é comutativa e associativa.

Componentes de um Vetor As *componentes* (escalares) a_x e a_y de um vetor bidimensional $\vec{a}$ em relação ao eixos de um sistema de coordenadas xy são obtidas traçando retas perpendiculares aos eixos a partir da origem e da extremidade de $\vec{a}$. As componentes são dadas por

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\,\text{sen}\,\theta, \qquad (3\text{-}5)$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{a}$ e o semieixo x positivo. O sinal algébrico de uma componente indica o sentido da componente em relação ao eixo correspondente. Dadas as componentes, podemos determinar o módulo e a orientação de um vetor $\vec{a}$ através das equações

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}. \qquad (3\text{-}6)$$

Notação com Vetores Unitários Os *vetores unitários* $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ têm módulo unitário e sentido igual ao sentido positivo dos eixos x, y e z, respectivamente, em um sistema de coordenadas dextrogiro. Podemos expressar um vetor $\vec{a}$ em termos de vetores unitários como

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \qquad (3\text{-}7)$$

onde $a_x\hat{i}$, $a_y\hat{j}$ e $a_z\hat{k}$ são as **componentes vetoriais** de $\vec{a}$ e a_x, a_y e a_z são as **componentes escalares**.

Soma de Vetores na Forma de Componentes Para somar vetores na forma de componentes, usamos as regras

$$r_x = a_x + b_x \quad r_y = a_y + b_y \quad r_z = a_z + b_z. \qquad (3\text{-}10 \text{ a } 3\text{-}12)$$

onde $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são os vetores a serem somados e $\vec{r}$ é o vetor soma. Note que adicionamos as componentes do eixo por eixo.

Produto de um Escalar por um Vetor O produto de um escalar s por um vetor $\vec{v}$ é um vetor de módulo sv com a mesma orientação de $\vec{v}$ se s for positivo e com a orientação oposta se s for negativo. Para dividir $\vec{v}$ por s, multiplicamos $\vec{v}$ por $1/s$.

O Produto Escalar O **produto escalar** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é representado por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e é igual à grandeza *escalar* dada por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi, \qquad (3\text{-}20)$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O produto escalar é o produto do módulo de um dos vetores pela componente escalar do outro em relação ao primeiro. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \cdot (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}), \qquad (3\text{-}22)$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva. Note que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

O Produto Vetorial O **produto vetorial** de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, representado por $\vec{a} \times \vec{b}$, é um *vetor* $\vec{c}$ cujo módulo c é dado por

$$c = ab\,\text{sen}\,\phi, \qquad (3\text{-}27)$$

onde ϕ é o menor dos ângulos entre as direções de $\vec{a}$ e $\vec{b}$. A orientação de $\vec{c}$ é perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e é dada pela regra da mão direita, como mostra a Fig. 3-19. Note que $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Em termos dos vetores unitários,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) \times (b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}), \qquad (3\text{-}29)$$

que pode ser expandida de acordo com a lei distributiva.

PERGUNTAS

1 A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma dos mesmos vetores? Justifique sua resposta.

2 Os dois vetores da Fig. 3-21 estão em um plano xy. Determine os sinais das componentes x e y, respectivamente, de (a) $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$; (b) $\vec{d}_1 - \vec{d}_2$; (c) $\vec{d}_2 - \vec{d}_1$.

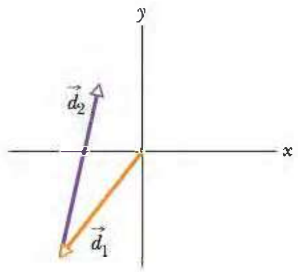


Figura 3-21 Pergunta 2.

3 Como a mascote da Universidade da Flórida é um jacaré, a equipe de golfe da universidade joga em um campo onde existe um lago com jacarés. A Fig. 3-22 mostra uma vista aérea da região em torno de um dos buracos do campo com um sistema de coordenadas xy superposto. As tacadas da equipe devem levar a bola da origem até o buraco, que está nas coordenadas (8 m, 12 m), mas a bola pode sofrer apenas os seguintes deslocamentos, que podem ser usados mais de uma vez:

$$\vec{d}_1 = (8\text{ m})\hat{i} + (6\text{ m})\hat{j}, \qquad \vec{d}_2 = (6\text{ m})\hat{j}, \qquad \vec{d}_3 = (8\text{ m})\hat{i}.$$

O lago está nas coordenadas (8 m, 6 m). Se um membro da equipe lança a bola no lago, é imediatamente transferido para a Universidade Estadual da Flórida, a eterna rival. Que sequência de deslocamentos deve ser usada por um membro da equipe para evitar o lago?

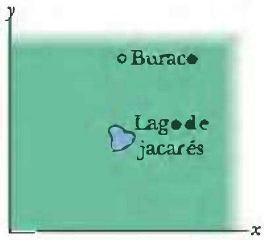


Figura 3-22 Pergunta 3.

4 A Eq. 3-2 mostra que a soma de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é comutativa. Isso significa que a subtração é comutativa, ou seja, que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$?

5 Quais dos sistemas de eixos da Fig. 3-23 são sistemas de coordenadas dextrogiros? Como de costume, a letra que identifica o eixo está no semieixo positivo.

6 Descreva dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ tais que

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c$;

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$;

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$.

7 Se $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$, é verdade que (a) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$, (b) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$ e (c) $\vec{c} + (-\vec{d}) = \vec{a} + \vec{b}$?

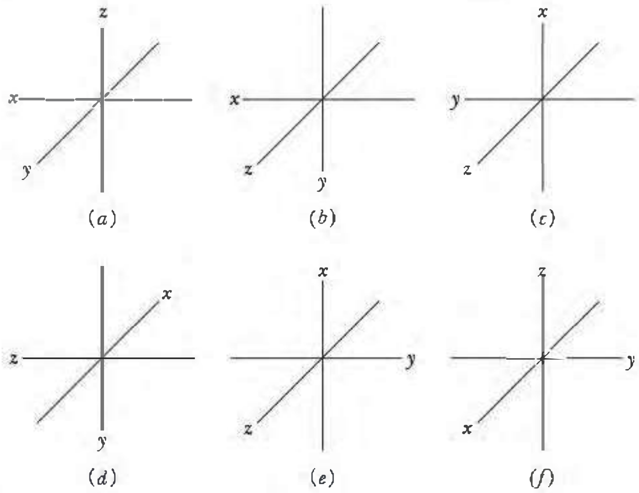


Figura 3-23 Pergunta 5.

8 Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b}$ é necessariamente igual a $\vec{c}$?

9 Se $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ e $\vec{v}$ é perpendicular a $\vec{B}$, qual é a orientação de $\vec{B}$ nas três situações mostradas na Fig. 3-24 se a constante q for (a) positiva e (b) negativa?

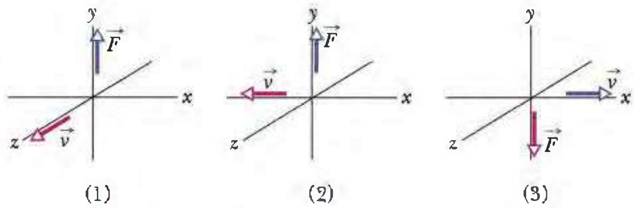


Figura 3-24 Pergunta 9.

10 A Fig. 3-25 mostra um vetor $\vec{A}$ e outros quatro vetores de mesmo módulo e orientações diferentes. (a) Quais dos outros quatro vetores têm o mesmo produto escalar com $\vec{A}$? (b) Quais têm um produto escalar com $\vec{A}$ negativo?

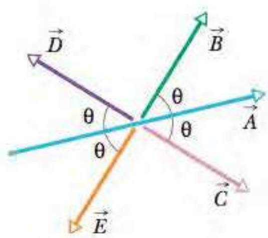


Figura 3-25 Pergunta 10.