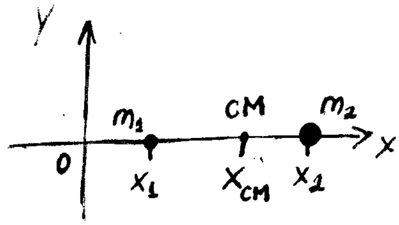
Centro de Massa e Momento Linear

– Centro de massa

O centro de massa de um sistema de partículas é o ponto que se move como se toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e todas as forças externas estivessem aplicadas também nesse ponto.

Para um sistema composto de duas partículas de massas m_1 e m_2, definimos a posição do centro de massa do sistema, considerando que as duas se encontram sobre o eixo x, como

$$\boxed{x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}}$$



Ou, considerando que a massa total M é definida por $M = m_1 + m_2$:

$$\boxed{x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}}.$$

Para n partículas sobre o eixo x, podemos estender a definição acima, considerando que $M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$:

$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{M}$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i}.$$

→ somatório quando $i=1$ até n. Significa que $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots + m_n x_n$.

i → índice de soma

Usando a linguagem de vetores, podemos definir o vetor posição do centro de massa do sistema de $\underline{n}$ partículas, $\vec{r}_{CM} = x_{CM}\hat{\imath} + y_{CM}\hat{\jmath} + z_{CM}\hat{k}$, como

$$\boxed{\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i} \, . \qquad \left(\vec{r}_i = x_i\hat{\imath} + y_i\hat{\jmath} + z_i\hat{k}\right).$$

No caso de corpos macroscópicos, esses somatórios se tornariam integrais, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} m_i x_i \Rightarrow \int x\,dm$ e $M \rightarrow \int dm$. Porém, se o objeto possui um ponto, uma reta ou um plano de simetria, é certo que o centro de massa aí se encontra. Por exemplo, o centro de massa de uma esfera uniforme se encontra no seu centro.

– A Segunda Lei de Newton para um sistema de partículas.

A 2ª Lei de Newton vale também para o movimento do centro de massa de um sistema de partículas. Nesse caso, o centro de massa se move como uma partícula cuja massa é igual à massa total do sistema. Podemos, então, demonstrar que

$$\boxed{\vec{F}_r = M\vec{a}_{CM}} \, . \qquad (\text{sistema de partículas}).$$

Na equação acima:

→ $\vec{F}_r$ é a <u>força resultante</u> de todas as <u>forças externas</u> que agem sobre o sistema.

→ M é a massa total do sistema, supondo que não entra nem sai massa do sistema (ou seja, o sistema é fechado).

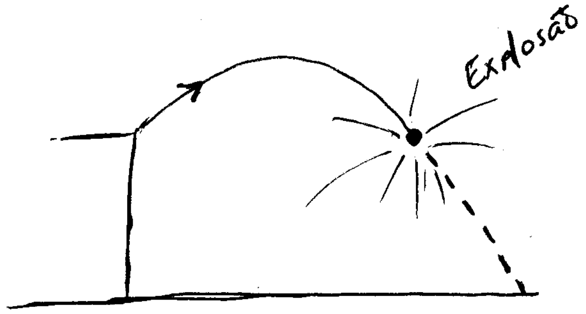
→ $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do centro de massa do sistema.

Nas componentes cartesianas, podemos escrever

$$\boxed{F_{r,x} = M a_{cm,x}}\,,\quad \boxed{F_{r,y} = M a_{cm,y}}\,,\quad \boxed{F_{r,z} = M a_{cm,z}}\,.$$

Como exemplo, podemos imaginar a situação onde acertamos, com o taco, a bola branca em uma outra bola que esteja em repouso, numa mesa de sinuca. No sistema formado pelas duas bolas, após a bola branca ter sido posta em movimento, não há força resultante externa sobre o sistema ($\vec{F}_r = 0$), o que significa que $\vec{a}_{cm} = 0$, e também significa que a velocidade do centro de massa permanece constante, mesmo após a colisão entre as bolas (que gera forças internas ao sistema).

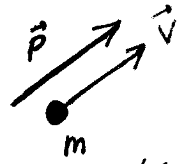
Outro exemplo é o da figura abaixo: um foguete (de fogos de artifício) é lançado no ar e seu centro de massa descreve uma trajetória parabólica; em algum momento, o mesmo explode e se divide em vários pedaços: o centro de massa do sistema agora se mantém em trajetória parabólica, mesmo que seus pedaços se movam em diferentes direções. Isso ocorre devido ao fato de a força externa ao sistema ser a força peso, antes e depois da explosão, gerando uma aceleração $\vec{a}_{cm} = \vec{g}$.



— *Momento Linear*

Definimos o <u>momento linear</u> (ou momento, <u>momentum</u>, quantidade de movimento) de uma partícula como a grandeza vetorial ($\vec{p}$)

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}\,.$$



No S.I, a unidade de $\vec{p}$ é o $Kg.m/s$. Além disso, $\vec{p} \parallel \vec{v}$ sempre!!

Se derivamos $\vec{p}$ em relação ao tempo, mantendo m constante:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}\,.$$

Ou seja, podemos escrever a 2ª Lei de Newton como Newton originalmente escreveu:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}\,.$$

"A taxa de variação com o tempo do momento de uma partícula é igual à força resultante que atua sobre a partícula e tem a mesma orientação que essa força".

Para um sistema de n partículas, o momento linear total $\vec{P}$ (não confundir com força peso!!) é a soma vetorial dos momentos lineares de todas as partículas:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + \ldots + \vec{p}_n \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \ldots + m_n\vec{v}_n\,.\end{aligned}$$

É fácil demonstrar que

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_{CM}},$$

onde $\underline{\vec{v}_{CM}}$ é a velocidade do centro de massa do sistema e que é dado por $\vec{v}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i / M$.

Dessa forma, a 2ª Lei de Newton para o sistema de partículas é

$$\boxed{\vec{F}_r = \frac{d\vec{P}}{dt}}.$$

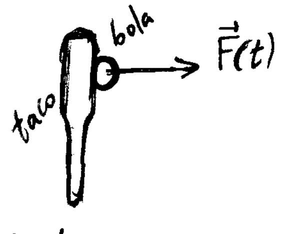
$\vec{P}$ → momento linear total do sistema

$\vec{F}_r$ → Forças externas ao sistema!

– Impulso e Colisão

Em uma colisão, a força exercida por um corpo sobre o outro é de curta duração, tem módulo elevado e muda bruscamente o momento linear do corpo. Vamos considerar, aqui, colisões simples, nas quais um corpo que se comporta como partícula (projétil) colide com outro objeto (alvo).

Suponha que uma bola (projétil) colida com um taco de beisebol (alvo). Nesse caso, a bola sofre a ação de uma força $\vec{F}(t)$ que varia durante a colisão e muda o momento linear $\vec{p}$ da bola.



Pela 2ª Lei de Newton,

$$d\vec{p} = \vec{F}(t)\,dt .$$

Ou

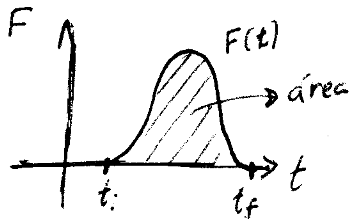
$$\Delta\vec{p} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\,dt \equiv \vec{I} \quad \text{(definição de Impulso } \vec{I}\text{)}.$$

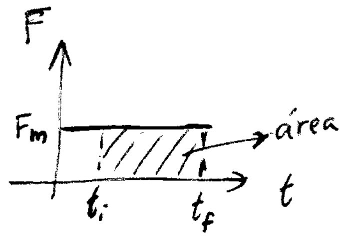
A grandeza $\vec{I} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)dt$ é o impulso exercido sobre o objeto.

Em muitas situações, conhecemos o módulo da força média F_m e a sua duração Δt. Nesse caso, o módulo do impulso é

$$\boxed{I = F_m \Delta t}.$$

Podemos também calcular o módulo do impulso atráves de um gráfico $F(t)$:





$$\boxed{I \overset{N}{=} \text{área}}$$

Por fim, a relação

$$\boxed{\Delta \vec{P} = \vec{I}},$$

vista anteriormente é conhecida como Teorema do Impulso. Além disso, no S.I, a unidade do impulso é o Ns (newton vezes segundo), que é idêntica ao Kgm/s.

– Conservação do Momento Linear

Pelo Teorema do Impulso, se a força resultante externa $\vec{F}_r = 0$, o impulso $\vec{I}$ sobre um sistema de partículas fechado (e isolado) também é zero, de modo que

$$\Delta \vec{P} = 0.$$

$$\vec{P}_f - \vec{P}_i = 0$$

$$\boxed{\vec{P}_f = \vec{P}_i}. \quad \text{(para sistema fechado e isolado)}.$$

Ou seja:

"Se um sistema de partículas não está submetido a nenhuma força externa, o momento linear total $\vec{P}$ do sistema não pode variar, ou seja, $\vec{P}$ = constante."

Essa é a Lei da Conservação do Momento Linear.

Em componentes cartesianas:

$$\boxed{P_{i,x} = P_{f,x}}\ , \quad \boxed{P_{i,y} = P_{f,y}} \quad e \quad \boxed{P_{i,z} = P_{f,z}}\ .$$

– Momento e Energia Cinética em Colisões

Podemos agora estudar colisões onde nos concentramos no sistema como um todo, diferentemente de se concentrar em um único objeto do sistema (como fizemos anteriormente no exemplo da colisão da bola com um taco). Consideraremos o sistema como fechado e isolado, nos exemplos dessa seção. Nesse caso, utilizamos a Lei da Conservação do Momento Linear.

Também nos interessa olhar o que acontece com a energia cinética total do sistema (que é a soma das energias cinéticas de cada objeto do sistema) em que há dois corpos colidindo. Se a energia cinética total não é alterada pela colisão, a mesma é conservada, e a colisão é do tipo elástica; caso a energia cinética total não se conserve (o que ocorre, em geral), temos que a colisão é do tipo inelástica (parte da energia cinética se transforma em energia térmica, sonora, etc.). Se, por exemplo, ao final da colisão entre dois corpos, ambos permanecem juntos, temos uma colisão perfeitamente inelástica.

Portanto, na colisão entre dois corpos, considerando o sistema como fechado e isolado, temos:

→ Se a colisão é inelástica, somente o momento total se conserva, de modo que:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\boxed{m_1 \vec{V}_{1i} + m_2 \vec{V}_{2i} = m_1 \vec{V}_{1f} + m_2 \vec{V}_{2f}}.$$

Quando é uma colisão perfeitamente inelástica, $\vec{V}_{1f} = \vec{V}_{2f}$.

→ Se a colisão é elástica, o momento total e a energia cinética total se conservam, ou seja, além da equação acima, temos que

$$K_i = K_f$$

$$\boxed{\frac{m_1 V_{1i}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2i}^2}{2} = \frac{m_1 V_{1f}^2}{2} + \frac{m_2 V_{2f}^2}{2}}.$$