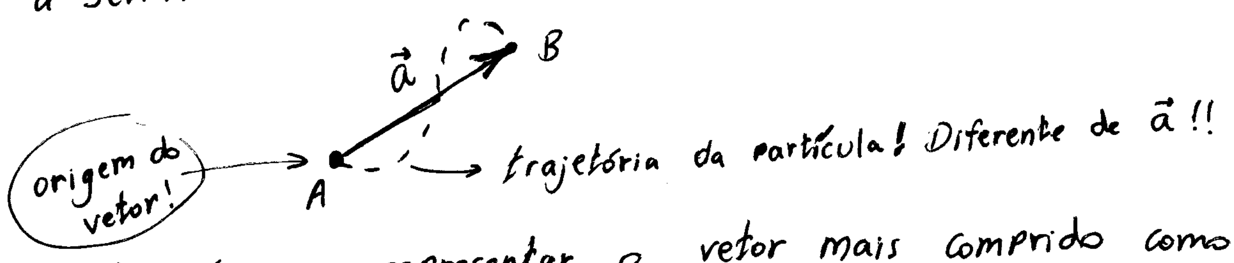
Vetores

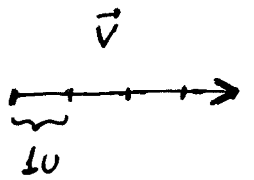
Algumas grandezas físicas necessitam de orientação (direção e sentido), além de simplesmente um número, para serem completamente caracterizadas. Nesse caso, dizemos que são grandezas vetoriais, pois são representadas pelo objeto matemático denominado vetor. Um vetor é constituído por um módulo, direção e sentido (os dois últimos estão associados à orientação). Exemplos de grandezas vetoriais são: deslocamento, velocidade, aceleração, força, etc.

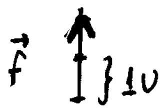
As grandezas que não necessitam de orientação são denominadas grandezas escalares. Nesse caso, um valor (positivo ou negativo) é suficiente para caracterizar a grandeza. Exemplos de grandezas escalares são: tempo, temperatura, massa, etc.

Para visualizarmos um vetor, vamos utilizar o vetor mais simples: o vetor deslocamento. Entre dois pontos no espaço, A e B, o vetor deslocamento $\vec{AB}$, que podemos representar por $\vec{a}$ (note a setinha sobre a letra), é representado por

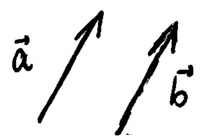


Em geral, é comum representar o vetor mais comprido como sendo aquele que possui maior módulo. Para o vetor acima, representamos seu módulo por $|\vec{a}|$ (sempre um número positivo seguido de uma unidade).

Ex.  Vetor $\vec{v}$; direção: horizontal; sentido: para a direita; $|\vec{v}| = 4u$.

 Vetor $\vec{f}$, direção: vertical; sentido: para cima; $|\vec{F}| = 2u$.

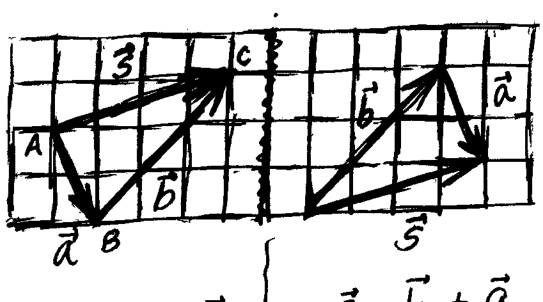
Dois vetores são considerados iguais se possuem o mesmo módulo e mesma orientação.

 $\vec{a} = \vec{b}$.

Portanto, um vetor que é deslocado sem que sejam alteradas o módulo e orientação é o mesmo vetor!!

— Soma Geométrica de Vetores

Supondo que uma partícula se desloque inicialmente de A para B, e depois de B para C, como no diagrama de vetores abaixo, podemos encontrar o deslocamento total fazendo uma soma de vetores $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ (diferente da soma algébrica!).

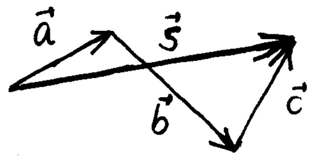


Note que $|\vec{s}| \neq |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$ | $\vec{s} = \vec{b} + \vec{a}$ (Lei comutativa).

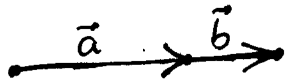
Vale também, para a soma de vetores, a Lei associativa:

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) .$$



$$\underline{\vec{s} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}$$

Em particular, quando somamos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ de mesma direção:



$$\vec{s} = \vec{a}+\vec{b}$$

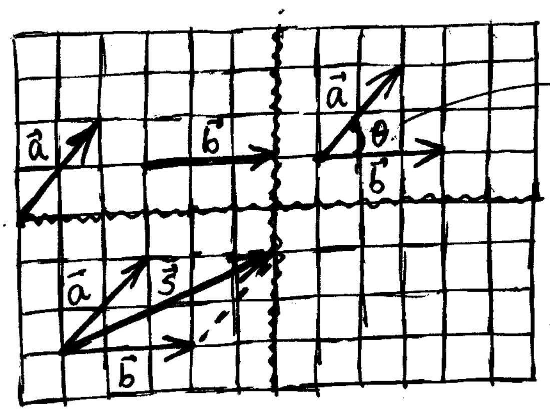
$$\boxed{|\vec{s}| = |\vec{a}|+|\vec{b}|}$$

$$\vec{s} = \vec{a}+\vec{b}$$

$$|\vec{s}| = |\vec{a}|-|\vec{b}| .$$

↳ o de maior módulo primeiro!!

Supondo que tenhamos dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e queiramos encontrar a soma $\vec{s} = \vec{a}+\vec{b}$, podemos deslocar os vetores de modo a uní-los pelas origens e utilizar a <u>regra do paralelogramo</u>:



θ: ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\vec{s} = \vec{a}+\vec{b}$$

Pela Lei dos cossenos, é possível demonstrar que

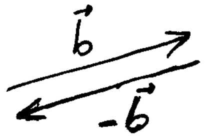
$$\boxed{|\vec{s}| = \sqrt{|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}}$$

Por fim, sabendo-se que uma subtração também é uma soma, podemos definir a subtração de vetores como

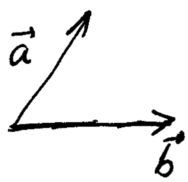
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

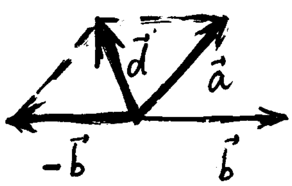
$$\boxed{\vec{d} = \vec{a} + (-\vec{b})}$$

Aqui, o vetor $-\vec{b}$ é chamado de vetor oposto a $\vec{b}$.

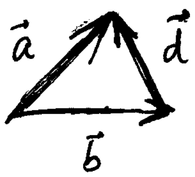


$|\vec{b}| = |-\vec{b}|$!!

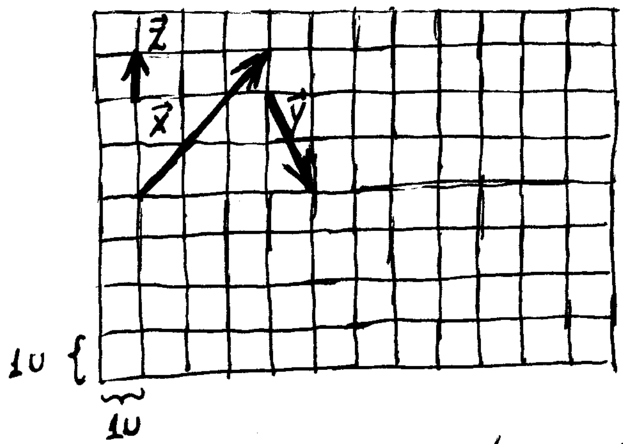




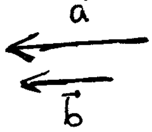
ou



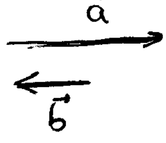
Exemplo 1. Encontre o módulo do vetor $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ e $\vec{s}$, onde $\vec{s} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$. Desenhe também o vetor $\vec{s}$.



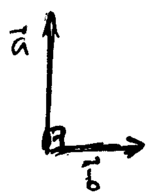
Exemplo 2. Encontre o vetor resultante (soma):

a) 

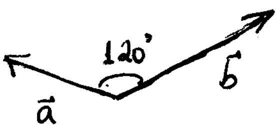
$|\vec{a}| = 12u$
$|\vec{b}| = 7u$

b) 

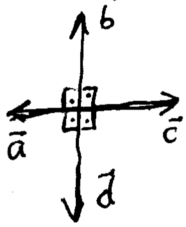
$|\vec{a}| = 15u$
$|\vec{b}| = 5u$

c) 

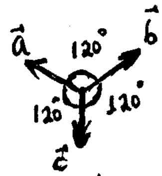
$|\vec{a}| = 12u$
$|\vec{b}| = 5u$

d) 

$|\vec{a}| = 4u$
$|\vec{b}| = 8u$

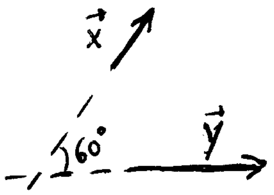
e) 

$|\vec{a}| = 3u$
$|\vec{b}| = 4u$
$|\vec{c}| = 5u$
$|\vec{d}| = 7u$

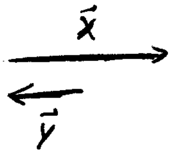
f) 

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 8u$

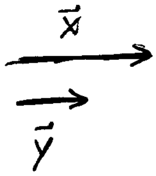
Exemplo 3. Determine o vetor diferença para cada caso ($\vec{d} = \vec{x} - \vec{y}$):

a) 

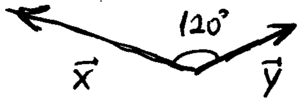
$|\vec{x}| = 4u$
$|\vec{y}| = 6u$.

b) 

$|\vec{x}| = 5u$
$|\vec{y}| = 3u$

c) 

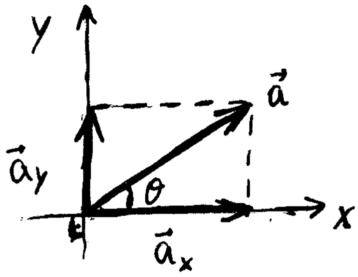
$|\vec{x}| = 5u$
$|\vec{y}| = 3u$

d) 

$|\vec{x}| = 5u$
$|\vec{y}| = 3u$.

- Decomposição de Vetores

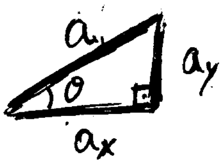
Significa encontrar as componentes (projeções) de um vetor relativas a um sistema de coordenadas (perpendiculares entre si). No caso bidimensional:



$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y$

> $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$: projeções do vetor $\vec{a}$ em x e y, respectivamente.
>
> θ: ângulo medido a partir do semi-eixo x positivo!

Dado um vetor $\vec{a}$, de módulo a, quais os vetores $\vec{a}_x$ e $\vec{a}_y$, perpendiculares entre si, que somados resultam em $\vec{a}$?



→ Componente a_x: $\cos\theta = \dfrac{a_x}{a} \Rightarrow \boxed{a_x = a.\cos\theta}$.

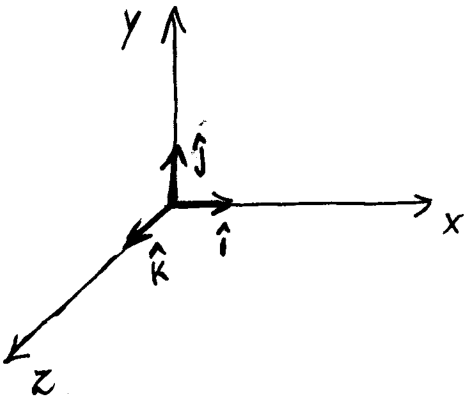
→ Componente a_y: $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{a_y}{a} \Rightarrow \boxed{a_y = a.\operatorname{sen}\theta}$.

→ Caso tenhamos a_x e a_y, podemos ainda escrever:

$$\boxed{a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \quad e \quad \boxed{\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}}$$

— Vetores unitários.

Um vetor unitário é um vetor de módulo 1 e aponta em uma certa direção (Ele não possui unidade!). Por exemplo, no sistema de coordenadas tridimensional abaixo, representamos os vetores unitários relativos a cada um dos eixos (x, y e z):



Vetores unitários $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ e $\hat{k}$ determinam as direções e sentidos positivos dos eixos x, y e z, respectivamente. (o símbolo "^" é usado no lugar da seta para indicar que o vetor é unitário!).

Dessa forma, podemos expressar vetores em termos de suas componentes e vetores unitários. Por exemplo, no caso do plano xy:

$$\vec{a} = \underbrace{a_x}_{\text{Componente } x \text{ do vetor } \vec{a} \text{ (escalar!)}} \hat{\imath} + \underbrace{a_y}_{\text{componente } y \text{ do vetor } \vec{a} \text{. (escalar!)}} \hat{\jmath}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{\imath} + b_y \hat{\jmath}$$

– Soma de Vetores utilizando componentes

Considerando a equação

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k} + b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

$$r_x\hat{\imath} + r_y\hat{\jmath} + r_z\hat{k} = (a_x+b_x)\hat{\imath} + (a_y+b_y)\hat{\jmath} + (a_z+b_z)\hat{k} .$$

Logo: $\boxed{r_x = a_x + b_x}$, $\boxed{r_y = a_y + b_y}$ e $\boxed{r_z = a_z + b_z}$. (Dois vetores são iguais se suas correspondentes componentes são iguais!).

Dessa forma, podemos, para somar vetores seguir os passos abaixo:

(1) Obter as componentes escalares dos vetores;

(2) Combinar essas componentes, eixo por eixo, para obter as componentes do vetor soma $\vec{r}$;

(3) Combinar as componentes de $\vec{r}$ para obter $\vec{r}$.

No caso da subtração, por exemplo, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, teremos:

$\boxed{d_x = a_x - b_x}$, $\boxed{d_y = a_y - b_y}$ e $\boxed{d_z = a_z - b_z}$

Exemplo 3. Determine a força resultante $\vec{F}$ sobre a caixa abaixo, sabendo que:

$|\vec{F}_1| = 50N$

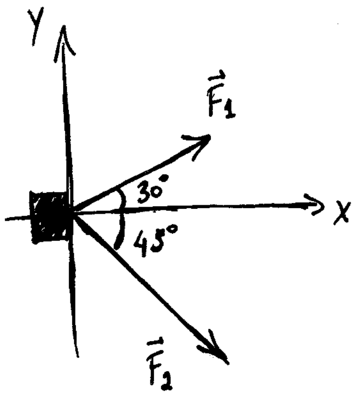
$|\vec{F}_2| = 60N$

$\text{sen } 30° = 0{,}50$

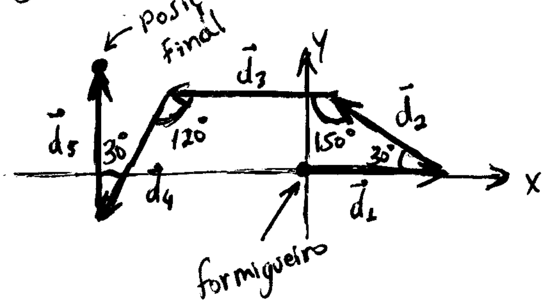
$\cos 30° = 0{,}87$

$\text{sen } 45° = 0{,}71$

$\cos 45° = 0{,}71$



Exemplo 4. De acordo com pesquisas, a formiga do deserto mantém um registro dos seus movimentos em um sistema mental de coordenadas. Quando decide voltar ao formigueiro, soma seus deslocamentos em relação aos eixos do sistema para calcular um vetor que aponta diretamente para o ponto de partida. Considere, então, uma formiga que executa cinco movimentos de 6,0 cm cada um em um sistema de coordenadas xy, nas orientações mostradas abaixo, partindo do formigueiro. No final do quinto movimento, quais são o módulo e o ângulo do vetor deslocamento total $\vec{d}_T$ e quais são os valores correspondentes do vetor de retorno $\vec{d}_{volta}$ que liga a posição final da formiga à posição do formigueiro?



– Multiplicação de Vetores

Existem três formas de multiplicar vetores: <u>multiplicação de vetor por escalar</u>, <u>produto escalar entre dois vetores</u> e <u>produto vetorial entre dois vetores</u>.

* Multiplicação de vetor por escalar

$$\vec{w} = K\vec{a} \qquad (K \text{ é um escalar}).$$

$\vec{w}$ é um novo vetor:

→ Com $|\vec{w}| = |K||\vec{a}|$

→ Com mesma direção de $\vec{a}$.

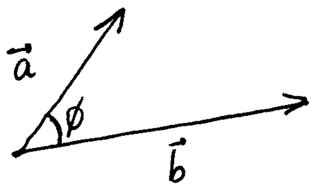
→ Com mesmo sentido de $\vec{a}$, se $K > 0$; com sentido oposto ao de $\vec{a}$, se $K < 0$.

* Produto Escalar

O produto escalar dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\vec{a}\cdot\vec{b}$ e definido pela equação

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\phi}$$

a é o módulo de $\vec{a}$;
b é o módulo de $\vec{b}$;
ϕ é o ângulo entre as orientações de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



O produto $\vec{a}\cdot\vec{b}$ é igual a um <u>escalar</u> (ou seja, <u>não</u> é um vetor)! Ele pode ser entendido como o produto entre o módulo de um dos vetores pela componente do outro! Importante notar que quando $\phi = 0°$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$ (valor máximo) e quando $\phi = 90°$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

A propriedade comutativa se aplica ao produto escalar:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}}.$$

Se escrevemos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ em termos dos vetores unitários, temos:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}) .$$

$$= a_x b_x \underbrace{\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}}_{1} + a_y b_y \underbrace{\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}}_{1} + a_z b_z \underbrace{\hat{k}\cdot\hat{k}}_{1}$$

(Note que $\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}$, $\hat{\imath}\cdot\hat{k}$ e $\hat{\jmath}\cdot\hat{k}$ são nulos, pois possuem $\cos 90° = 0$!).

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}$$

* Produto Vetorial.

O produto vetorial entre dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é escrito como $\underline{\vec{a}\times\vec{b}}$ e resulta num terceiro vetor $\vec{c}$

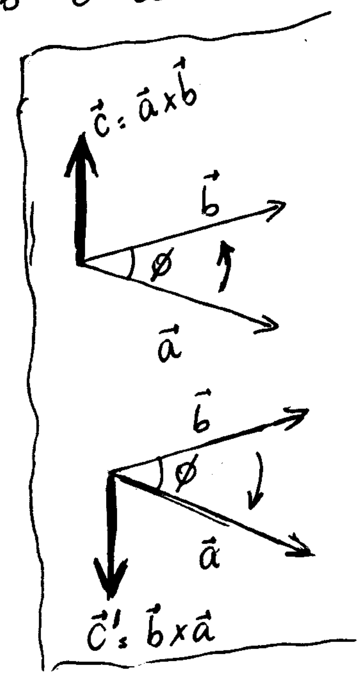
$$\boxed{\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}} ,$$

cujo módulo é

$$\boxed{c = ab\,\text{sen}\,\phi} ,$$

Note que, se $\phi = 0°$ ou $180°$, $c = 0$!!

Com ϕ sendo o <u>menor ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$</u>.

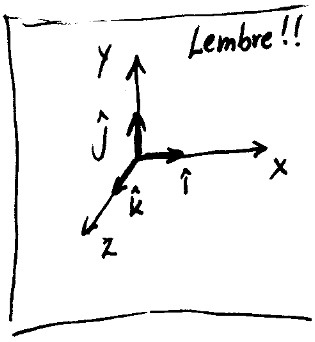


A direção de $\vec{c}$ é sempre perpendicular ao plano definido por $\vec{a}$ e $\vec{b}$. O sentido de $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ pode ser definido pela <u>regra da mão direita</u> (com a mão direita, com o polegar estendido ao longo da reta perpendicular ao plano formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$, empurre, com os demais dedos, o vetor $\vec{a}$ em direção ao vetor $\vec{b}$, seguindo ϕ; o sentido de $\vec{c}$ é o sentido do polegar).

Pela regra da mão direita, podemos notar uma importante característica do produto vetorial: ele não possui propriedade comutativa.

$$\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})}$$

Podemos escrever também, em termos de vetores unitários:



$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

$$= a_x \hat{i} \times b_x \hat{i} + a_x \hat{i} \times b_y \hat{j} + a_x \hat{i} \times b_z \hat{k}$$

$$+ a_y \hat{j} \times b_x \hat{i} + a_y \hat{j} \times b_y \hat{j} + a_y \hat{j} \times b_z \hat{k}$$

$$+ a_z \hat{k} \times b_x \hat{i} + a_z \hat{k} \times b_y \hat{j} + a_z \hat{k} \times b_z \hat{k} .$$

O produto, por exemplo, $a_x \hat{i} \times b_x \hat{i}$ pode ser escrito como $a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i})$. (escalares podem ser separados!).

É possível mostrar (pela regra da mão direita) que

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \;,\; \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \;\text{ e }\; \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} .$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k}}$$

Uma outra maneira de se encontrar o resultado acima é calculando o determinante da matriz construída da seguinte forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - b_y a_z)\hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y)\hat{k} .$$

Exemplo 5. Qual é o ângulo ϕ entre $\vec{a} = 3{,}0\hat{i} - 4{,}0\hat{j}$ e $\vec{b} = -2{,}0\hat{i} + 3{,}0\hat{k}$? (Use a definição de produto escalar!).

Exemplo 6. Sabendo que $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ e $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{k}$:

a) Determine $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ e calcule o seu módulo.

b) Encontre os módulos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ e o ângulo ϕ entre eles e calcule o módulo do vetor $\vec{c}$. Compare com o resultado do item anterior.