Movimento em duas e três dimensões

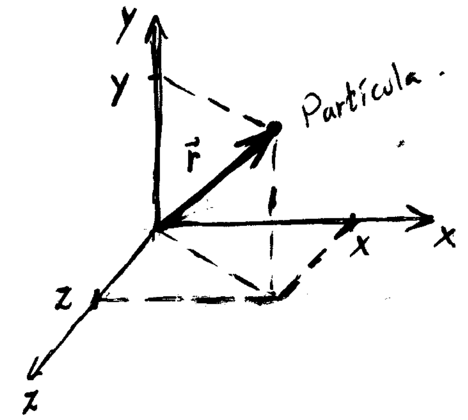
Com o conhecimento da Cinemática do movimento unidimensional e dos vetores, podemos agora definir as grandezas físicas relevantes até aqui de maneira mais completa, ampliando o conhecimento da Cinemática para duas e três dimensões.

– Posição e deslocamento

O vetor posição $\vec{r}$ indica a localização de um corpo ou partícula no espaço em relação a um ponto de referência, como a origem de um sistema de coordenadas. No espaço tridimensional:

$$\boxed{\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}}.$$

Componentes escalares nos eixos x, y e z. (Coordenadas retangulares)



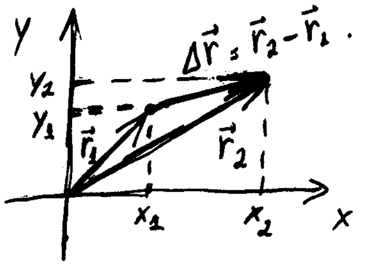
Ao sair de uma posição $\vec{r}_1$ e chegar a uma posição $\vec{r}_2$, dizemos que a partícula sofreu um deslocamento $\Delta\vec{r}$ definido por

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1}.$$

Ou, em termos dos unitários $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$ e $\hat{k}$:

$$\boxed{\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\hat{k}}.$$

Em duas dimensões, por exemplo:



$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\hat{\jmath}$.

(não importa a trajetória da partícula!).

- Velocidade média e instantânea.

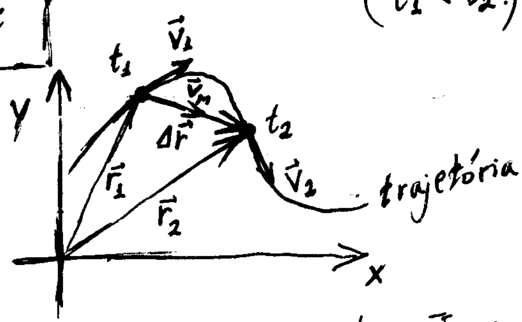
O vetor velocidade média $\vec{v}_M$ é definido por

$$\boxed{\vec{v}_M = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}} \Rightarrow \boxed{\vec{v}_M = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}}.$$

No caso da velocidade instantânea temos

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}}$$

$(t_1 < t_2)$.



Onde podemos definir

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad e \quad v_z = \frac{dz}{dt}}.$$

É importante observar que $\vec{v}_M$ sempre tem a mesma direção e sentido de $\Delta\vec{r}$ e $\vec{v}$ em um determinado ponto sempre se encontra na direção da reta tangente à trajetória da partícula naquele ponto!!.

- Aceleração média e instantânea.

A aceleração média, analogamente, é definida por

$$\boxed{\vec{a}_M = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}},$$

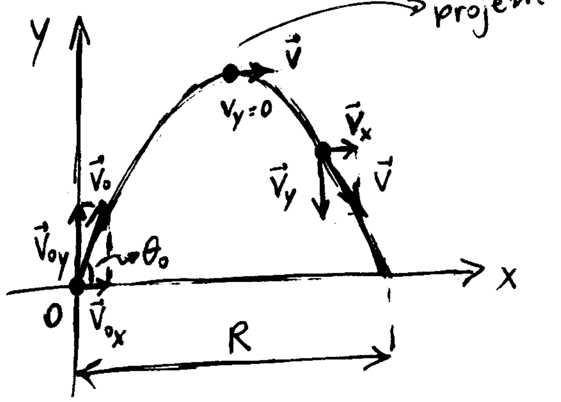
Enquanto a aceleração instantânea é dada por

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}}.$$

Onde definimos

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad e \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}.}$$

- Movimento de Projéteis



(Movimento bidimensional).

Vamos estudar o caso particular de uma partícula lançada com velocidade inicial $\vec{v}_0$ no plano xy que se move sob ação da aceleração constante da gravidade $\vec{g}$ (vertical para baixo). Podemos escrever então

$$\boxed{\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{\imath} + v_{0y}\hat{\jmath}}.$$

Com $v_{0x} = v_0 \cos\theta_0$ e $v_{0y} = v_0 \operatorname{sen}\theta_0$.

Podemos, dessa forma, decompor todo o problema do movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes mais fáceis de serem resolvidos: um para o movimento horizontal (aceleração nula) e o outro para o movimento vertical (aceleração constante para baixo).

* Movimento horizontal.

Como não existe aceleração nessa direção, temos o caso do movimento retilíneo uniforme. Logo:

$$x = x_0 + v_{0x} t .$$

$$\boxed{x = x_0 + (v_0 . \cos\theta_0) t} \quad . \quad (\text{onde } v_x = v_{0x} \text{ !!}) .$$

* Movimento vertical.

Nesse caso, com aceleração constante $\vec{g}$, temos um movimento retilíneo uniformemente variado. Logo:

$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{g}{2} t^2$$

$$\boxed{y = y_0 + (v_0 . \operatorname{sen}\theta_0) t - \frac{g}{2} t^2} ,$$

além das outras equações conhecidas

$$\boxed{v_y = (v_0 . \operatorname{sen}\theta_0) - g t}$$

e

$$\boxed{v_y^2 = (v_0 . \operatorname{sen}\theta_0)^2 - 2g(y - y_0)} .$$

* Equação da Trajetória.

Eliminando o tempo t nas equações para x e y

$$x - x_0 = (v_0 \cos\theta_0)\, t \quad \text{e} \quad y - y_0 = (v_0 \,\text{sen}\,\theta_0)\, t - \frac{g}{2} t^2 ,$$

encontramos :

$$y - y_0 = (v_0 \,\text{sen}\,\theta_0)\frac{(x - x_0)}{(v_0 \cos\theta_0)} - \frac{g}{2}\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos\theta_0}\right)^2 .$$

Fazendo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$ (posição inicial na origem) e lembrando que $\tan\theta_0 = \frac{\text{sen}\,\theta_0}{\cos\theta_0}$:

$$\boxed{y = (\tan\theta_0)\, x - \left[\frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}\right] x^2} .$$

Essa é uma função $y(x)$ que chamamos de equação da trajetória. Como θ_0, v_0 e g são constantes, ela é a equação de uma <u>parábola</u>. (forma da trajetória!).

* Alcance horizontal.

O alcance horizontal R é definido como a distância horizontal percorrida pelo projétil até voltar à sua altura inicial. Nesse caso, fazemos $x - x_0 = R$ e $y - y_0 = 0$ nas equações de $x(t)$ e $y(t)$ do movimento:

$$R = (v_0 \cos\theta_0)\, t \quad \text{e} \quad 0 = (v_0 \,\text{sen}\,\theta_0)\, t - \frac{g}{2} t^2 .$$

Eliminando t nas equações encontramos:

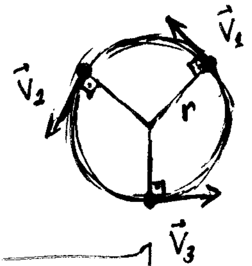
$$\boxed{R = \frac{2 v_0^2}{g} \,\text{sen}\,\theta_0 \cos\theta_0} \quad \text{ou} \quad \boxed{R = \frac{v_0^2}{g} \,\text{sen}(2\theta_0)} .$$

- Movimento Circular Uniforme

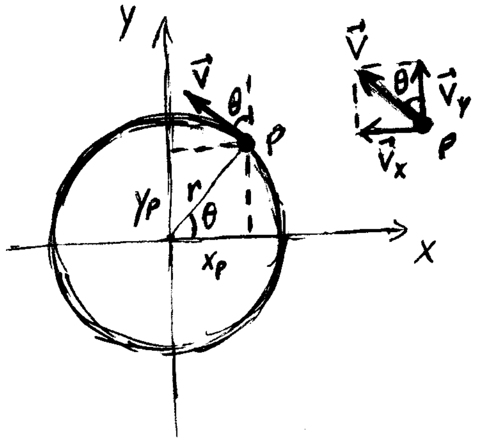
Uma partícula está em Movimento Circular Uniforme (MCU) se descreve uma circunferência ou arco de circunferência com velocidade escalar v constante (uniforme). Tal movimento é dito acelerado, pois apesar de a velocidade escalar (módulo de $\vec{v}$) ser constante, a direção de $\vec{v}$ varia.

r: raio da trajetória.

$\vec{v} \perp \vec{r}$ sempre!



$v_1 = v_2 = v_3$
$\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \neq \vec{v}_3$
(MCU)



(MCU)

Durante o MCU, a partícula percorre uma circunferência completa, $2\pi r$, em um intervalo de tempo T dado por

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v}}$$ (Período do MCU).

A aceleração $\vec{a}$ do MCU, responsável unicamente pela mudança na direção de $\vec{v}$, pode ser encontrada lembrando que (ver figura acima)

$$\vec{v} = v_x \hat{\imath} + v_y \hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{v} = -v \operatorname{sen}\theta\, \hat{\imath} + v\cos\theta\, \hat{\jmath}}$$

Mas, pela figura acima, vemos que

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y_P}{r} \quad e \quad \cos\theta = \frac{x_P}{r}.$$

Logo:

$$\vec{v} = \left(-v\frac{y_P}{r}\right)\hat{\imath} + \left(v\frac{x_P}{r}\right)\hat{\jmath}$$

Lembrando que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

e que v e r são constantes (números que não dependem do tempo),

temos

$$\vec{a} = \left(-\frac{v}{r}\underbrace{\frac{dy_P}{dt}}_{v_y}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{v}{r}\underbrace{\frac{dx_P}{dt}}_{v_x}\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{a} = \left(-\frac{v}{r}v\cos\theta\right)\hat{\imath} + \left[\frac{v}{r}(-v\,\text{sen}\,\theta)\right]\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)\hat{\imath} + \left(-\frac{v^2}{r}\text{sen}\,\theta\right)\hat{\jmath}}$$

($\vec{a}$ se encontra na direção do raio r e aponta para o centro da circunferência!)

O módulo de $\vec{a}$ é

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

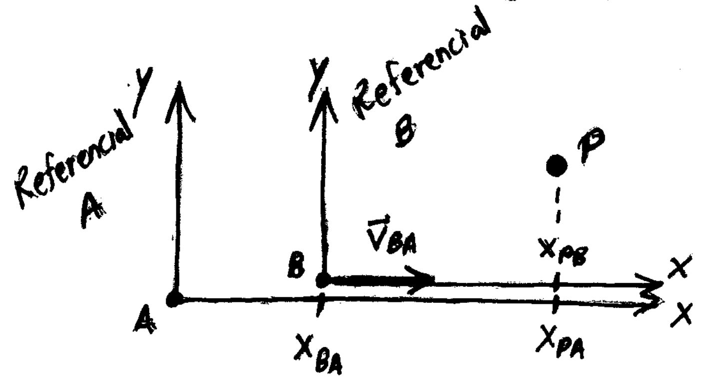
$$a = \sqrt{\left(-\frac{v^2}{r}\cos\theta\right)^2 + \left(-\frac{v^2}{r}\text{sen}\,\theta\right)^2}$$

$$a = \sqrt{\frac{v^4}{r^2}\underbrace{(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}_{1}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{v^2}{r}}$$

Fazendo $\tan\phi = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \tan\phi = \frac{-\cancel{v^2/r}\,\text{sen}\,\theta}{-\cancel{v^2/r}\cos\theta} \Rightarrow \tan\phi = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \boxed{\tan\phi = \tan\theta}$

Logo, $\boxed{\phi = \theta}$!

— Movimento Relativo Unidimensional (1d)



Considere que uma pessoa A se encontre no solo, em repouso; e uma outra pessoa se encontre dirigindo (carro) com velocidade constante no eixo x, enquanto observam um carro P passar. No momento da figura acima, temos

$$\boxed{x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}} \quad \left(\text{ou } \vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}\right)$$

Derivando a equação acima em relação ao tempo, temos

$$\frac{d}{dt}x_{PA} = \frac{d}{dt}x_{PB} + \frac{d}{dt}x_{BA}$$

$$\boxed{v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}} \quad \left(\text{ou } \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}\right)$$

Se considerarmos que v_{BA} é constante (número que não depende do tempo), ao derivarmos a equação acima, teremos:

$$\frac{dv_{PA}}{dt} = \frac{dv_{PB}}{dt} + \frac{dv_{BA}}{dt}$$

$$a_{PA} = a_{PB} + \cancelto{0}{a_{BA}} \Rightarrow \boxed{a_{PA} = a_{PB}} \quad \left(\text{ou } \vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}\right).$$

A aceleração de uma partícula medida por observadores em diferentes referenciais que se movem com velocidade constante uns em relação aos outros é sempre a mesma!! (Válido para 2d e 3d!).