

# MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES

# 4

## 4-1 O QUE É FÍSICA?

Neste capítulo, continuamos a estudar a parte da física que analisa o movimento, mas agora os movimentos podem ser em duas ou três dimensões. Médicos e engenheiros aeronáuticos, por exemplo, precisam conhecer a física das curvas realizadas por pilotos de caça durante os combates aéreos, já que os jatos modernos fazem curvas tão rápidas que o piloto pode perder momentaneamente a consciência. Um engenheiro esportivo talvez esteja interessado na física do basquetebol. Quando um jogador vai cobrar um *lance livre* (em que o jogador lança a bola em direção à cesta, sem marcação, de uma distância de 4,3 m), pode arremessar a bola da altura dos ombros ou da altura da cintura. A primeira técnica é usada pela maioria esmagadora dos jogadores profissionais, mas o legendário Rick Barry estabeleceu o recorde de aproveitamento de lances livres usando a segunda.

Não é fácil compreender os movimentos em três dimensões. Por exemplo, o leitor provavelmente é capaz de dirigir um carro em uma rodovia (movimento em uma dimensão), mas teria muita dificuldade para pousar um avião (movimento em três dimensões) sem um treinamento adequado.

Iniciaremos nosso estudo do movimento em duas e três dimensões com as definições de posição e deslocamento.

## 4-2 Posição e Deslocamento

A localização de uma partícula (ou de um objeto que se comporte como uma partícula) pode ser especificada, de forma geral, através do vetor posição  $\vec{r}$ , um vetor que liga um ponto de referência (a origem de um sistema de coordenadas, na maioria dos casos) à partícula. Na notação de vetores unitários da Seção 3-5,  $\vec{r}$  pode ser escrito na forma

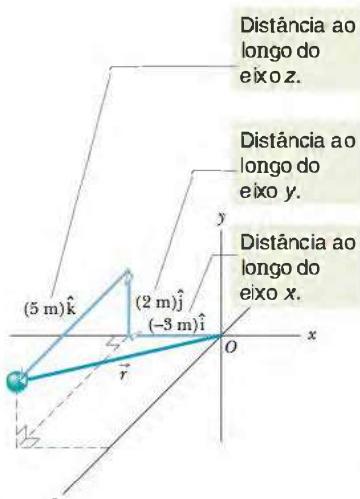
$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}, \quad (4-1)$$

onde  $x\hat{i}$ ,  $y\hat{j}$  e  $z\hat{k}$  são as componentes vetoriais de  $\vec{r}$  e  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as componentes escalares.

Os coeficientes  $x$ ,  $y$  e  $z$  fornecem a localização da partícula em relação à origem ao longo dos eixos de coordenadas; em outras palavras,  $(x, y, z)$  são as coordenadas retangulares da partícula. A Fig. 4-1, por exemplo, mostra uma partícula cujo vetor posição é

$$\vec{r} = (-3 \text{ m})\hat{i} + (2 \text{ m})\hat{j} + (5 \text{ m})\hat{k}$$

e cujas coordenadas retangulares são  $(-3 \text{ m}, 2 \text{ m}, 5 \text{ m})$ . Ao longo do eixo  $x$ , a partícula está a 3 m da origem, no sentido oposto ao do vetor unitário  $\hat{i}$ . Ao longo do eixo  $y$ , está a 2 m da origem, no sentido do vetor unitário  $\hat{j}$ . Ao longo do eixo  $z$ , está a 5 m da origem, no sentido do vetor unitário  $\hat{k}$ .



**Figura 4-1** O vetor posição  $\vec{r}$  de uma partícula é a soma vetorial das componentes vetoriais.

Quando uma partícula se move, o vetor posição varia de tal forma que sempre liga o ponto de referência (origem) à partícula. Se o vetor posição varia de  $\vec{r}_1$  para  $\vec{r}_2$ , digamos, durante um certo intervalo de tempo, o **deslocamento** da partícula,  $\Delta\vec{r}$ , durante esse intervalo de tempo é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4-2)$$

Usando a notação de vetores unitários da Eq. 4-1, podemos escrever este deslocamento como

$$\Delta\vec{r} = (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$$

$$\text{ou como } \Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}, \quad (4-3)$$

onde as coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  correspondem ao vetor posição  $\vec{r}_1$  e as coordenadas  $(x_2, y_2, z_2)$  correspondem ao vetor posição  $\vec{r}_2$ . Podemos também escrever o vetor deslocamento substituindo  $(x_2 - x_1)$  por  $\Delta x$ ,  $(y_2 - y_1)$  por  $\Delta y$  e  $(z_2 - z_1)$  por  $\Delta z$ :

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \quad (4-4)$$

### Exemplo

#### Vetor posição bidimensional: movimento de um coelho

Um coelho atravessa um estacionamento, no qual, por alguma razão, um conjunto de eixos coordenados foi desenhado. As coordenadas da posição do coelho, em metros, em função do tempo  $t$ , em segundos, são dadas por

$$x = -0,31t^2 + 7,2t + 28 \quad (4-5)$$

$$\text{e} \quad y = 0,22t^2 - 9,1t + 30. \quad (4-6)$$

(a) No instante  $t = 15$  s, qual é o vetor posição  $\vec{r}$  do coelho na notação de vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

#### IDEIA-CHAVE

As coordenadas  $x$  e  $y$  da posição do coelho, dadas pelas Eqs. 4-5 e 4-6, são as componentes escalares do vetor posição  $\vec{r}$  do coelho.

**Cálculos** Podemos escrever

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}. \quad (4-7)$$

[Escrevemos  $\vec{r}(t)$  em vez de  $\vec{r}$  porque as componentes são funções de  $t$  e, portanto,  $\vec{r}$  também é função de  $t$ .]

Em  $t = 15$  s, as componentes escalares são

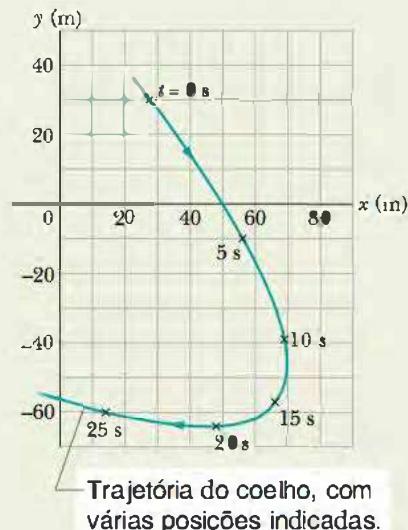
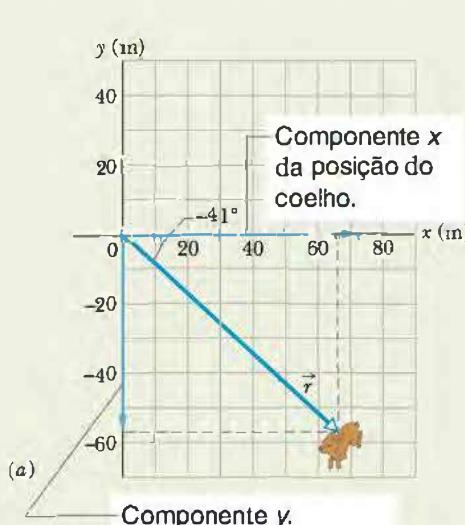
$$x = (-0,31)(15)^2 + (7,2)(15) + 28 = 66 \text{ m}$$

$$\text{e} \quad y = (0,22)(15)^2 - (9,1)(15) + 30 = -57 \text{ m},$$

onde  $\vec{r} = (66 \text{ m})\hat{i} - (57 \text{ m})\hat{j}$ , (Resposta)

que está desenhado na Fig. 4-2a. Para obter o módulo e o ângulo de  $\vec{r}$ , usamos a Eq. 3-6:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(66 \text{ m})^2 + (-57 \text{ m})^2} \\ &= 87 \text{ m}, \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$



**Figura 4-2** (a) O vetor posição de um coelho,  $\vec{r}$ , no instante  $t = 15$  s. As componentes escalares de  $\vec{r}$  são mostradas ao longo dos eixos. (b) A trajetória do coelho e a posição do animal para seis valores de  $t$ .

$$\text{e} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} = \tan^{-1} \left( \frac{-57 \text{ m}}{66 \text{ m}} \right) = -41^\circ.$$

(Resposta)

**Verificação** Embora  $\theta = 139^\circ$  possua a mesma tangente que  $-41^\circ$ , os sinais das componentes de  $\vec{r}$  indicam que o ângulo desejado é  $139^\circ - 180^\circ = -41^\circ$ .

(b) Desenhe o gráfico da trajetória do coelho de  $t = 0$  a  $t = 25 \text{ s}$ .

**Plotagem** Podemos repetir a parte (a) para vários valores de  $t$  e plotar os resultados. A Fig. 4-2b mostra os pontos do gráfico para seis valores de  $t$  e a curva que liga esses pontos. Podemos também plotar a curva em uma calculadora gráfica a partir das Eqs. 4-5 e 4-6.

### 4-3 Velocidade Média e Velocidade Instantânea

Se uma partícula se move de um ponto para outro, podemos estar interessados em saber com que rapidez a partícula está se movendo. Como no Capítulo 2, podemos definir duas grandezas que expressam a “rapidez” de um movimento: *velocidade média* e *velocidade instantânea*. No caso de um movimento bidimensional ou tridimensional, porém, devemos considerar essas grandezas como vetores e usar a notação vetorial.

Se uma partícula sofre um deslocamento  $\Delta\vec{r}$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a **velocidade média**  $\vec{v}_{\text{méd}}$  é dada por

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (4-8)$$

Esta equação nos diz que a orientação de  $\vec{v}_{\text{méd}}$  (o vetor do lado esquerdo da Eq. 4-8) deve ser igual à do deslocamento  $\Delta\vec{r}$  (o vetor do lado direito). Usando a Eq. 4-4, podemos escrever a Eq. 4-8 em termos das componentes vetoriais:

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \hat{k}. \quad (4-9)$$

Assim, por exemplo, se uma partícula sofre um deslocamento de  $(12 \text{ m})\hat{i} + (3,0 \text{ m})\hat{k}$  em  $2,0 \text{ s}$ , a velocidade média durante esse movimento é

$$\vec{v}_{\text{méd}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(12 \text{ m})\hat{i} + (3,0 \text{ m})\hat{k}}{2,0 \text{ s}} = (6,0 \text{ m/s})\hat{i} + (1,5 \text{ m/s})\hat{k}.$$

Nesse caso, portanto, a velocidade média (uma grandeza vetorial) tem uma componente de  $6,0 \text{ m/s}$  em relação ao eixo  $x$  e uma componente de  $1,5 \text{ m/s}$  em relação ao eixo  $z$ .

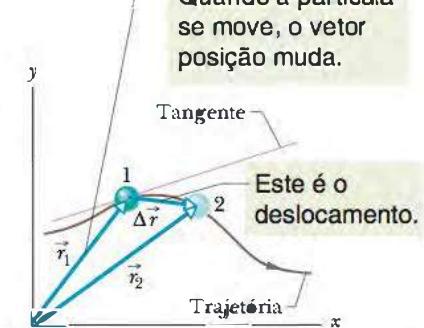
Quando falamos da **velocidade** de uma partícula, em geral estamos nos referindo à **velocidade instantânea**  $\vec{v}$  em um certo instante. Esta velocidade  $\vec{v}$  é o valor para o qual tende a velocidade  $\vec{v}_{\text{méd}}$  quando o intervalo de tempo  $\Delta t$  tender a zero. Usando a linguagem do cálculo, podemos escrever  $\vec{v}$  como a derivada

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4-10)$$

A Fig. 4-3 mostra a trajetória de uma partícula que se move no plano  $xy$ . Quando a partícula se desloca para a direita ao longo da curva, o vetor posição gira para a direita. Durante o intervalo de tempo  $\Delta t$ , o vetor posição muda de  $\vec{r}_1$  para  $\vec{r}_2$  e o deslocamento da partícula é  $\Delta\vec{r}$ .

Para determinar a velocidade instantânea da partícula no instante  $t_1$  (instante em que a partícula se encontra na posição 1), reduzimos o intervalo de tempo  $\Delta t$  nas vizinhanças de  $t_1$ , fazendo-o tender a zero. Ao fazermos isso, três coisas acontecem: (1) O vetor posição  $\vec{r}_2$  da Fig. 4-3 se aproxima de  $\vec{r}_1$ , fazendo  $\Delta\vec{r}$  tender a zero. (2) A direção de  $\Delta\vec{r}/\Delta t$  (e, portanto, de  $\vec{v}_{\text{méd}}$ ) se aproxima da direção da reta tangente à

Quando a partícula se move, o vetor posição muda.



**Figura 4-3** O deslocamento  $\Delta\vec{r}$  de uma partícula durante um intervalo de tempo  $\Delta t$ , da posição 1, com vetor posição  $\vec{r}_1$  no instante  $t_1$ , até a posição 2, com vetor posição  $\vec{r}_2$  no instante  $t_2$ . A figura mostra também a tangente à trajetória da partícula na posição 1.

trajetória da partícula na posição 1. (3) A velocidade média  $\vec{v}_{\text{med}}$  se aproxima da velocidade instantânea  $\vec{v}$  no instante  $t_1$ .

No limite  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos  $\vec{v}_{\text{med}} \rightarrow \vec{v}$  e, o que é mais importante nesse contexto,  $\vec{v}_{\text{med}}$  assume a direção da reta tangente. Assim,  $\vec{v}$  também assume essa direção:

 A direção da velocidade instantânea  $\vec{v}$  de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

O resultado é o mesmo em três dimensões:  $\vec{v}$  é sempre tangente à trajetória da partícula.

Para escrever a Eq. 4-10 na forma de vetores unitários, usamos a expressão para  $\vec{r}$  dada pela Eq. 4-1:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}.$$

Essa equação pode ser simplificada se a escrevermos como

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \quad (4-11)$$

onde as componentes escalares de  $\vec{v}$  são

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad \text{e} \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \quad (4-12)$$

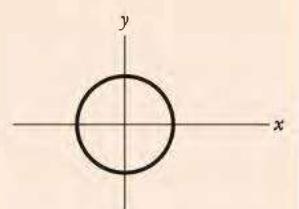
Assim, por exemplo,  $dx/dt$  é a componente escalar de  $\vec{v}$  em relação ao eixo  $x$ . Isso significa que podemos encontrar as componentes escalares de  $\vec{v}$  derivando as componentes de  $\vec{r}$ .

A Fig. 4-4 mostra o vetor velocidade  $\vec{v}$  e as componentes escalares  $x$  e  $y$ . Note que  $\vec{v}$  é tangente à trajetória da partícula na posição da partícula. *Atenção:* um vetor posição, como os que aparecem nas Figs. 4-1 a 4-3, é uma seta que se estende de um ponto (“aqui”) a outro (“lá”). Entretanto, um vetor velocidade, como o da Fig. 4-4, não se estende de um ponto a outro. No caso do vetor velocidade, a orientação do vetor é usada para mostrar a direção instantânea do movimento de uma partícula localizada na origem do vetor; o comprimento, que representa o módulo da velocidade, pode ser desenhado em qualquer escala.

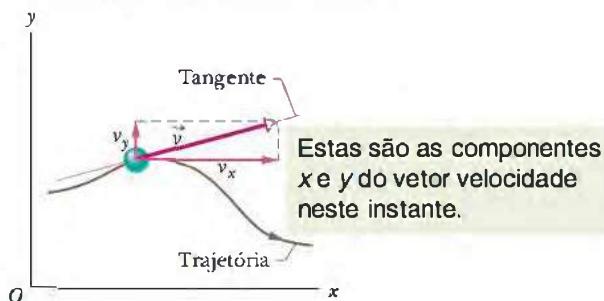


### TESTE 1

A figura mostra uma trajetória circular descrita por uma partícula. Se a velocidade da partícula em um certo instante é  $\vec{v} = (2 \text{ m/s})\hat{i} - (2 \text{ m/s})\hat{j}$ , em qual dos quadrantes a partícula está se movendo nesse instante se o movimento é (a) no sentido horário e (b) no sentido anti-horário? Desenhe  $\vec{v}$  na figura para os dois casos.



O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória.



**Figura 4-4** A velocidade  $\vec{v}$  de uma partícula e as componentes escalares de  $\vec{v}$ .

## Exemplo

### Velocidade bidimensional de um coelho

Determine a velocidade  $\vec{v}$  do coelho do exemplo anterior no instante  $t = 15$  s.

#### IDEIA-CHAVE

Podemos determinar  $\vec{v}$  calculando as derivadas das componentes do vetor posição do coelho.

**Cálculos** Aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a  $v_x$  à Eq. 4-5, descobrimos que a componente  $x$  de  $\vec{v}$  é

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(-0,31t^2 + 7,2t + 28) \\ &= -0,62t + 7,2. \end{aligned} \quad (4-13)$$

Em  $t = 15$  s, isso nos dá  $v_x = -2,1$  m/s. Da mesma forma, aplicando a parte da Eq. 4-12 correspondente a  $v_y$  à Eq. 4-6, descobrimos que a componente  $y$  é

$$\begin{aligned} v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(0,22t^2 - 9,1t + 30) \\ &= 0,44t - 9,1. \end{aligned} \quad (4-14)$$

Em  $t = 15$  s, isso nos dá  $v_y = -2,5$  m/s. Assim, de acordo com a Eq. 4-11,

$$\vec{v} = (-2,1 \text{ m/s})\hat{i} + (-2,5 \text{ m/s})\hat{j}. \quad (\text{Resposta})$$

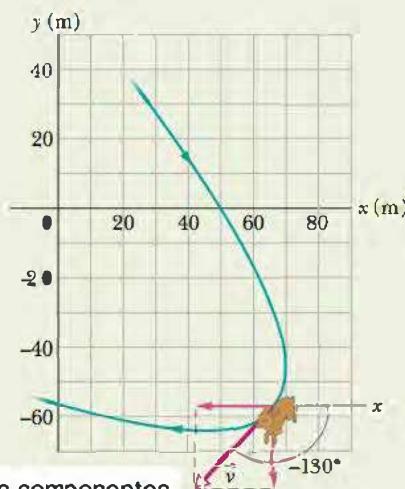
que está desenhada na Fig. 4-5, tangente à trajetória do coelho e na direção em que o animal está se movendo em  $t = 15$  s.

Para obter o módulo e o ângulo de  $\vec{v}$ , podemos usar uma calculadora ou escrever, de acordo com a Eq. 3-6,

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-2,1 \text{ m/s})^2 + (-2,5 \text{ m/s})^2} \\ &= 3,3 \text{ m/s} \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \left( \frac{-2,5 \text{ m/s}}{-2,1 \text{ m/s}} \right) \\ &= \tan^{-1} 1,19 = -130^\circ. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

**Verificação** O ângulo é  $-130^\circ$  ou  $-130^\circ + 180^\circ = 50^\circ$ ?



Estas são as componentes  $x$  e  $y$  da velocidade neste instante.

**Figura 4-5** A velocidade  $\vec{v}$  do coelho em  $t = 15$  s.

## 4-4 Aceleração Média e Aceleração Instantânea

Quando a velocidade de uma partícula varia de  $\vec{v}_1$  para  $\vec{v}_2$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a **aceleração média**  $\vec{a}_{\text{med}}$  durante o intervalo  $\Delta t$  é

$$\text{aceleração média} = \frac{\text{variação de velocidade}}{\text{intervalo de tempo}},$$

ou

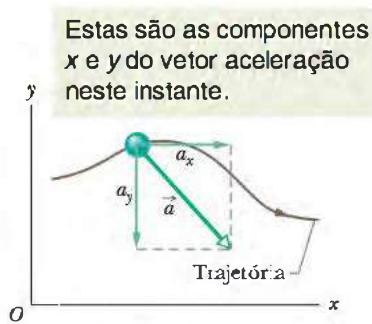
$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (4-15)$$

Quando fazemos  $\Delta t$  tender a zero no entorno de um certo instante,  $\vec{a}_{\text{med}}$  tende para a **aceleração instantânea** (ou, simplesmente, **aceleração**)  $\vec{a}$  nesse instante, ou seja,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4-16)$$

Se o módulo ou a orientação da velocidade varia (ou ambos variam), a partícula possui uma aceleração.

Podemos escrever a Eq. 4-16 em termos de vetores unitários substituindo  $\vec{v}$  pelo seu valor, dado pela Eq. 4-11, para obter



**Figura 4-6** A aceleração  $\vec{a}$  de uma partícula e as componentes escalares de  $\vec{a}$ .

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d}{dt}(v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}) \\ &= \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}.\end{aligned}$$

Podemos escrever esta equação na forma

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad (4-17)$$

onde as componentes escalares de  $\vec{a}$  são

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad \text{e} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}. \quad (4-18)$$

Assim, podemos obter as componentes escalares de  $\vec{a}$  derivando as componentes escalares de  $\vec{v}$  em relação ao tempo.

A Fig. 4-6 mostra o vetor aceleração  $\vec{a}$  e suas componentes escalares para uma partícula que se move em duas dimensões. *Atenção:* um vetor aceleração, como o da Fig. 4-6, não se estende de um ponto a outro. No caso do vetor aceleração, a orientação do vetor é usada para mostrar a direção instantânea da aceleração de uma partícula localizada na origem do vetor; o comprimento, que representa o módulo da aceleração, pode ser desenhado em qualquer escala.



### TESTE 2

Considere as seguintes descrições da posição (em metros) de uma partícula que se move no plano  $xy$ :

- (1)  $x = -3t^2 + 4t - 2$  e  $y = 6t^2 - 4t$     (3)  $\vec{r} = 2t^2\hat{i} - (4t + 3)\hat{j}$   
 (2)  $x = -3t^3 - 4t$  e  $y = -5t^2 + 6$     (4)  $\vec{r} = (4t^3 - 2t)\hat{i} + 3\hat{j}$

As componentes  $x$  e  $y$  da aceleração são constantes em todas essas situações? A aceleração  $\vec{a}$  é constante?

### Exemplo

#### Aceleração bidimensional de um coelho

Determine a aceleração  $\vec{a}$  do coelho dos exemplos anteriores no instante  $t = 15$  s.

#### IDEIA-CHAVE

Podemos determinar a aceleração  $\vec{a}$  calculando as derivadas das componentes da velocidade do coelho.

**Cálculos** Aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a  $a_x$  à Eq. 4-13, descobrimos que a componente  $x$  de  $\vec{a}$  é

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0,62t + 7,2) = -0,62 \text{ m/s}^2.$$

Analogamente, aplicando a parte da Eq. 4-18 correspondente a  $a_y$  à Eq. 4-14, descobrimos que a componente  $y$  é

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(0,44t - 9,1) = 0,44 \text{ m/s}^2.$$

Vemos que essa aceleração não varia com o tempo (é constante), pois a variável tempo,  $t$ , não aparece na expressão das componentes da aceleração. De acordo com a Eq. 4-17,

$$\vec{a} = (-0,62 \text{ m/s}^2)\hat{i} + (0,44 \text{ m/s}^2)\hat{j}, \quad (\text{Resposta})$$

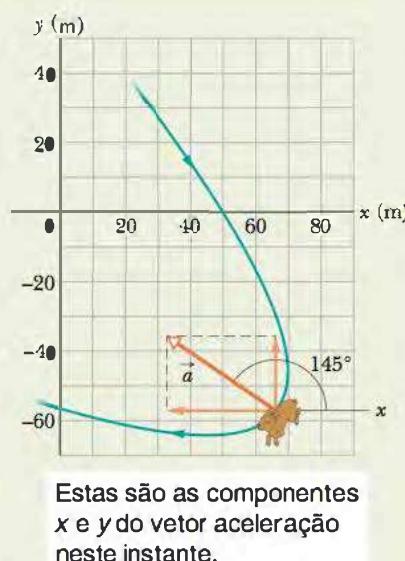
que é mostrada superposta à trajetória do coelho na Fig. 4-7.

Para obter o módulo e o ângulo de  $\vec{a}$ , podemos usar uma calculadora ou a Eq. 3-6. No caso do módulo, temos:

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0,62 \text{ m/s}^2)^2 + (0,44 \text{ m/s}^2)^2} \\ &= 0,76 \text{ m/s}^2.\end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

No caso do ângulo, temos:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{a_y}{a_x} = \tan^{-1} \left( \frac{0,44 \text{ m/s}^2}{-0,62 \text{ m/s}^2} \right) = -35^\circ.$$



Esse ângulo, que é o resultado fornecido por uma calculadora, indica que a orientação de  $\vec{a}$  é para a direita e para baixo na Fig. 4-7. Entretanto, sabemos, pelas componentes  $x$  e  $y$ , que a orientação de  $\vec{a}$  é para a esquerda e para cima. Para determinar o outro ângulo que possui a mesma tangente que  $-35^\circ$ , mas não é mostrado pela calculadora, somamos  $180^\circ$ :

$$-35^\circ + 180^\circ = 145^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

Esse novo resultado é compatível com as componentes de  $\vec{a}$ . Observe que, como a aceleração do coelho é constante, o módulo e a orientação de  $\vec{a}$  são os mesmos em todos os pontos da trajetória do coelho.

## 4-5 Movimento Balístico

Consideraremos a seguir um caso especial de movimento bidimensional: uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial  $\vec{v}_0$  e com uma aceleração constante, igual à aceleração de queda livre  $\vec{g}$ , dirigida para baixo. Uma partícula que se move dessa forma é chamada de **projétil** (o que significa que é projetada ou lançada) e o movimento é chamado de **movimento balístico**. O projétil pode ser uma bola de tênis (Fig. 4-8) ou de pingue-pongue, mas não um avião ou um pato. Muitos esportes (do golfe e do futebol ao lacrosse e ao raquetebol) envolvem o movimento balístico de uma bola; jogadores e técnicos estão sempre procurando controlar esse movimento para obter o máximo de vantagem. O jogador que descobriu a rebatida em Z no raquetebol na década de 1970, por exemplo, vencia os jogos com facilidade porque a trajetória peculiar da bola no fundo da quadra surpreendia os adversários.

Vamos agora analisar o movimento balístico usando as ferramentas descritas nas Seções 4-2 a 4-4 para o movimento bidimensional, sem levar em conta a influência do ar. A Fig. 4-9, que será discutida na próxima seção, mostra a trajetória de um projétil quando o efeito do ar pode ser ignorado. O projétil é lançado com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$  que pode ser escrita na forma

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{i} + v_{0y} \hat{j}. \quad (4-19)$$

As componentes  $v_{0x}$  e  $v_{0y}$  podem ser calculadas se conhecermos o ângulo  $\theta_0$  entre  $\vec{v}_0$  e o semieixo  $x$  positivo:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad \text{e} \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0. \quad (4-20)$$

Durante o movimento bidimensional, o vetor posição  $\vec{r}$  e a velocidade  $\vec{v}$  do projétil mudam continuamente, mas o vetor aceleração  $\vec{a}$  é constante e está *sempre* dirigido verticalmente para baixo. O projétil *não possui* aceleração horizontal.

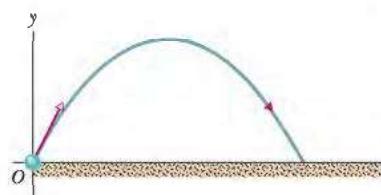
O movimento balístico, como o das Figs. 4-8 e 4-9, parece complicado, mas temos a seguinte propriedade simplificadora (demonstrada experimentalmente):



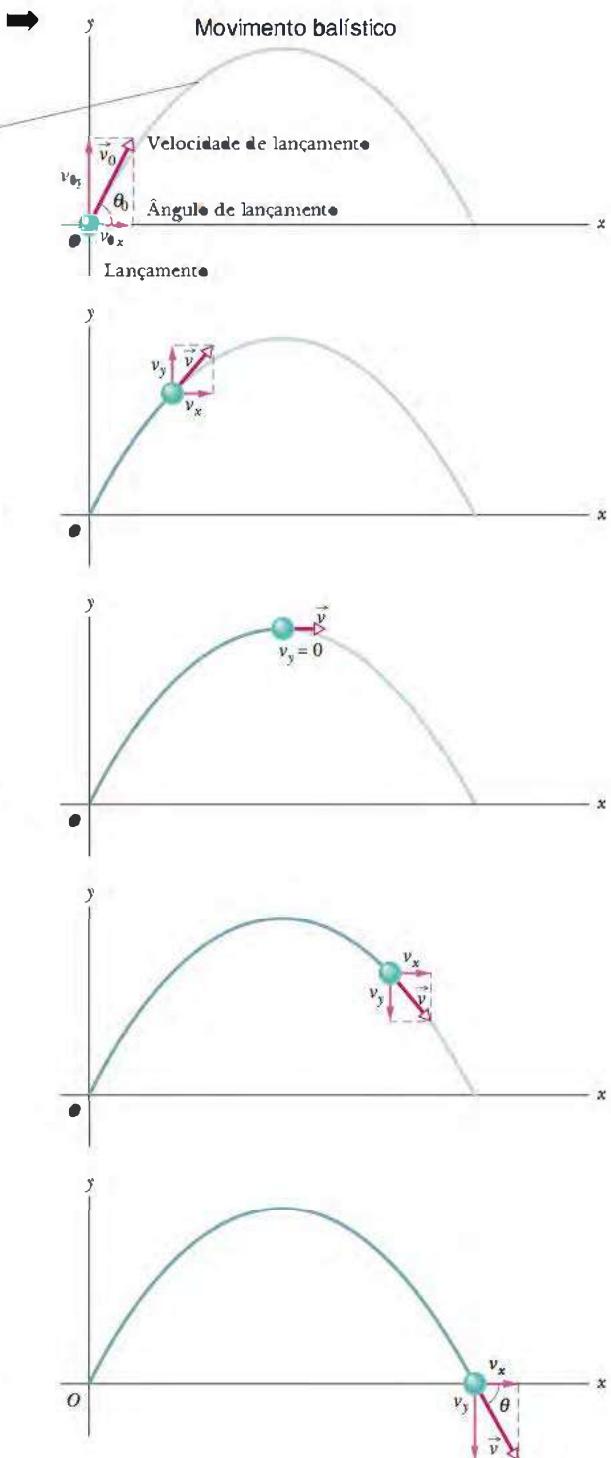
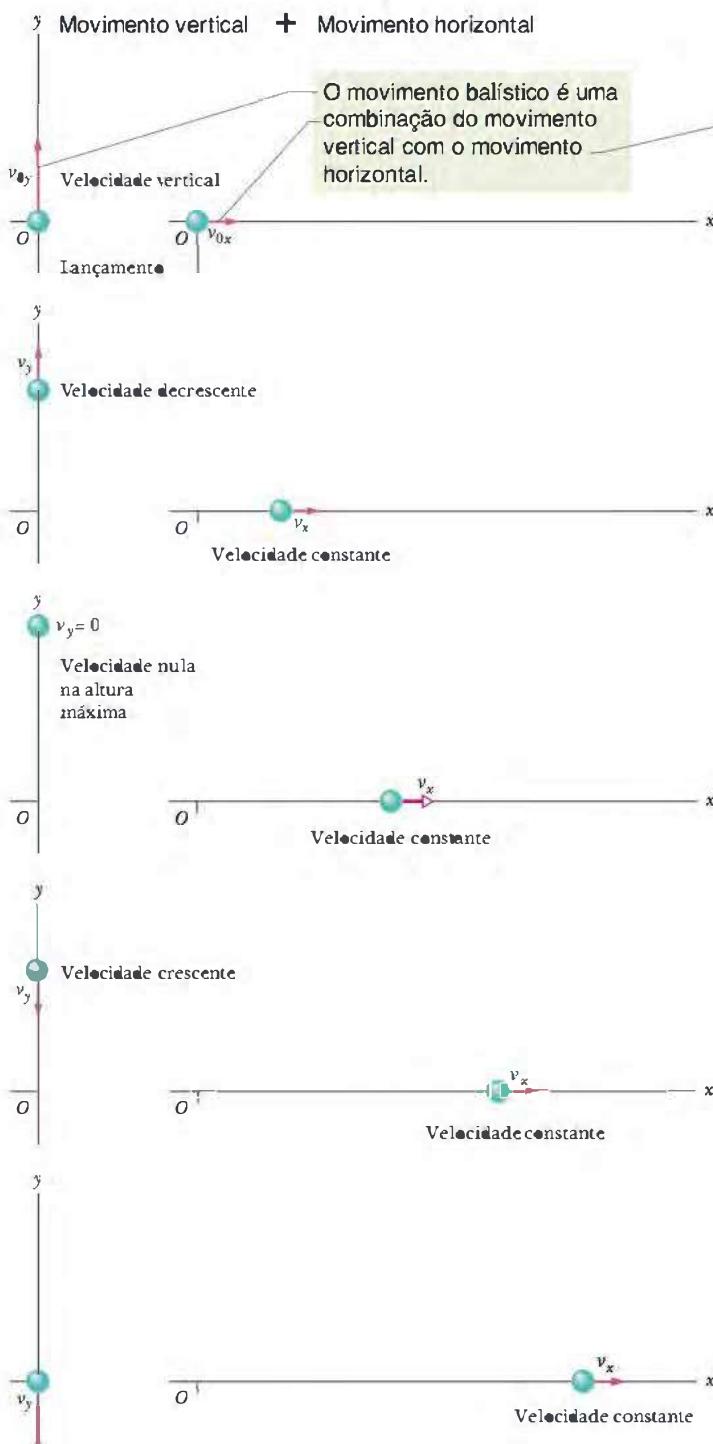
Figura 4-8 Fotografia estroboscópica de uma bola de tênis amarela quicando em uma superfície dura. Entre os impactos, a trajetória da bola é balística.  
Fonte: Richard Megna/Fundamental Photographs.



No movimento balístico, o movimento horizontal e o movimento vertical são independentes, ou seja, um não afeta o outro.



**Figura 4-9** O movimento balístico de um projétil lançado da origem de um sistema de coordenadas com velocidade inicial  $\vec{v}_0$  e ângulo  $\theta_0$ . Como mostram as componentes da velocidade, o movimento é uma combinação de movimento vertical (com aceleração constante) e movimento horizontal (com velocidade constante).



Essa propriedade permite decompor um problema que envolve um movimento bidimensional em dois problemas unidimensionais independentes e mais fáceis de serem resolvidos, um para o movimento horizontal (com *aceleração nula*) e outro para o movimento vertical (com *aceleração constante para baixo*). Apresentamos a seguir dois experimentos que mostram que o movimento horizontal e o movimento vertical são realmente independentes.

### Duas Bolas de Golfe

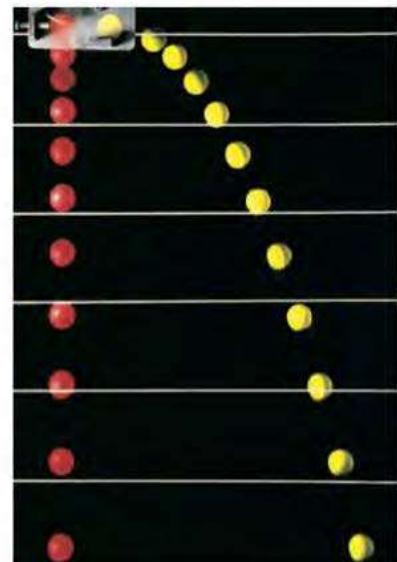
A Fig. 4-10 é uma fotografia estroboscópica de duas bolas de golfe, uma que simplesmente se deixou cair e outra que foi lançada horizontalmente por uma mola. As bolas de golfe têm o mesmo movimento vertical; ambas percorrem a mesma distância vertical no mesmo intervalo de tempo. *O fato de uma bola estar se movendo horizontalmente enquanto está caindo não afeta o movimento vertical*, ou seja, os movimentos horizontal e vertical são independentes.

### Uma Demonstração Interessante

A Fig. 4-11 mostra uma demonstração que tem animado muitas aulas de física. Um canudo C é usado para soprar pequenas bolas em direção a uma lata suspensa por um eletrônico M. O experimento é arranjado de tal forma que o canudo está apontado para a lata e o ímã solta a lata no mesmo instante em que a bola deixa o tubo.

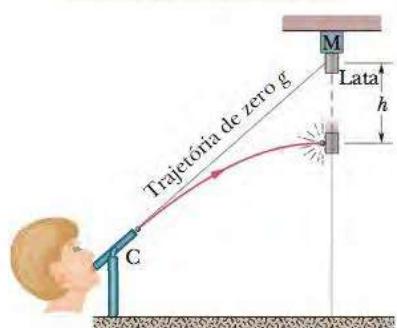
Se  $g$  (o módulo da aceleração de queda livre) fosse zero, a bola seguiria a trajetória em linha reta mostrada na Fig. 4-11 e a lata continuaria no mesmo lugar após ter sido liberada pelo eletrônico. Assim, a bola certamente atingiria a lata, independentemente da força do sopro.

Na verdade,  $g$  não é zero, mas, mesmo assim, a bola *sempre atinge a lata!* Como mostra a Fig. 4-11, a aceleração da gravidade faz com que a bola e a lata sofram o mesmo deslocamento para baixo,  $h$ , em relação à posição que teriam, a cada instante, se a gravidade fosse nula. Quanto maior a força do sopro, maior a velocidade inicial da bola, menor o tempo que a bola leva para se chocar com a lata e menor o valor de  $h$ .



**Figura 4-10** Uma bola é deixada cair a partir do repouso no mesmo instante em que outra bola é lançada horizontalmente para a direita. Os movimentos verticais das duas bolas são iguais. *Fonte:* Richard Megna/Fundamental Photographs.

A bola e a lata caem à mesma distância  $h$ .



**Figura 4-11** A bola sempre acerta a lata que está caindo, já que as duas percorrem a mesma distância  $h$  em queda livre.

### 4-6 Análise do Movimento Balístico

Agora estamos preparados para analisar o movimento horizontal e vertical de um projétil.

#### Movimento Horizontal

Como *não existe aceleração* na direção horizontal, a componente horizontal  $v_x$  da velocidade de um projétil permanece inalterada e igual ao valor inicial  $v_{0x}$  durante toda a trajetória, como mostra a Fig. 4-12. Em qualquer instante  $t$ , o deslocamento horizontal do projétil em relação à posição inicial,  $x - x_0$ , é dado pela Eq. 2-15 com  $a = 0$ , que podemos escrever na forma

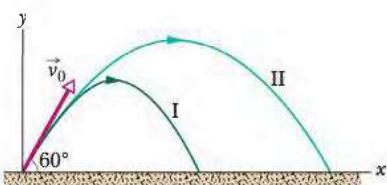
$$x - x_0 = v_{0x}t.$$

Como  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ , temos:

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4-21)$$



**Figura 4-12** A componente vertical da velocidade deste skatista está variando, mas não a componente horizontal, que é igual à velocidade do skate. Em consequência, o skate permanece abaixo do atleta, permitindo que ele pouse no skate após o salto. *Fonte:* Jamie Budge/Liaison/Getty Images, Inc.



**Figura 4-13** (I) Trajetória de uma bola, levando em conta a resistência do ar. (II) Trajetória que a bola seguiria no vácuo, calculada usando as equações deste capítulo. Os dados correspondentes estão na Tabela 4-1. (Adaptada de "The Trajectory of a Fly Ball", Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985.)

**Tabela 4-1**

**Trajetórias de Duas Bolas de Beisebol<sup>a</sup>**

	Trajetória I (Ar)	Trajetória II (Vácuo)
Alcance	98,5 m	177 m
Altura máxima	53,0 m	76,8 m
Tempo de percurso	6,6 s	7,9 s

<sup>a</sup>Veja a Fig. 4-13. O ângulo de lançamento é 60° e a velocidade de lançamento é 44,7 m/s.

## Movimento Vertical

O movimento vertical é o movimento que discutimos na Seção 2-9 para uma partícula em queda livre. O mais importante é que a aceleração é constante. Assim, as equações da Tabela 2-1 podem ser usadas, desde que  $a$  seja substituído por  $-g$  e o eixo  $x$  seja substituído pelo eixo  $y$ . A Eq. 2-15, por exemplo, se torna

$$\begin{aligned} y - y_0 &= v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ &= (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2, \end{aligned} \quad (4-22)$$

onde a componente vertical da velocidade inicial,  $v_{0y}$ , foi substituída pela expressão equivalente  $v_0 \sin \theta_0$ . Da mesma forma, as Eqs. 2-11 e 2-16 se tornam

$$v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt \quad (4-23)$$

$$\text{e} \quad v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4-24)$$

Como mostram a Fig. 4-9 e a Eq. 4-23, a componente vertical da velocidade se comporta exatamente como a de uma bola lançada verticalmente para cima. Está dirigida inicialmente para cima e o módulo diminui progressivamente até se anular, *exatamente no ponto mais alto da trajetória*. Em seguida, a componente vertical da velocidade muda de sentido e o módulo passa a aumentar com o tempo.

## Equação da Trajetória

Podemos obter a equação do caminho percorrido pelo projétil (a trajetória) eliminando o tempo  $t$  nas Eqs. 4-21 e 4-22. Explicitando  $t$  na Eq. 4-21 e substituindo o resultado na Eq. 4-22, obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \quad (\text{trajetória}). \quad (4-25)$$

Esta é a equação da trajetória mostrada na Fig. 4-9. Ao deduzi-la, para simplificar, fizemos  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$  nas Eqs. 4-21 e 4-22, respectivamente. Como  $g$ ,  $\theta_0$  e  $v_0$  são constantes, a Eq. 4-25 é da forma  $y = ax + bx^2$ , onde  $a$  e  $b$  são constantes. Como essa é a equação de uma parábola, dizemos que a trajetória é *parabólica*.

## Alcance Horizontal

O *alcance horizontal*  $R$  de um projétil é a distância *horizontal* percorrida pelo projétil até voltar à altura inicial (altura de lançamento). Para determinar o alcance  $R$ , fazemos  $x - x_0 = R$  na Eq. 4-21 e  $y - y_0 = 0$  na Eq. 4-22, obtendo

$$R = (v_0 \cos \theta_0)t$$

$$\text{e} \quad 0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Eliminando  $t$  nessas duas equações, obtemos

$$R = \frac{2v_0^2 \sin \theta_0 \cos \theta_0}{g}.$$

Usando a identidade  $\sin 2\theta_0 = 2 \sin \theta_0 \cos \theta_0$  (veja o Apêndice E), obtemos

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (4-26)$$

*Atenção:* esta equação *não fornece* a distância horizontal percorrida pelo projétil quando a altura final é diferente da altura de lançamento.

Observe que  $R$  na Eq. 4-26 atinge o valor máximo para  $\sin 2\theta_0 = 1$ , que corresponde a  $2\theta_0 = 90^\circ$  ou  $\theta_0 = 45^\circ$ .



O alcance horizontal  $R$  é máximo para um ângulo de lançamento de  $45^\circ$ .

Quando a altura final é diferente da altura de lançamento, com acontece no arremesso de peso, no lançamento de disco e no basquetebol, a distância horizontal máxima não é atingida para um ângulo de lançamento de  $45^\circ$ .

## Efeito do Ar

Até agora, supusemos que o ar não exerce efeito algum sobre o movimento de um projétil. Em muitas situações, porém, a diferença entre a trajetória calculada desta forma e a trajetória real do projétil pode ser considerável, já que o ar resiste (se opõe) ao movimento. A Fig. 4-13, por exemplo, mostra as trajetórias de duas bolas de beisebol que deixam o bastão fazendo um ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal, com uma velocidade inicial de  $44,7 \text{ m/s}$ . A trajetória I (de uma bola de verdade) foi calculada para as condições normais de jogo, levando em conta a resistência do ar. A trajetória II (de uma bola em condições ideais) é a trajetória que a bola seguiria no vácuo.



### TESTE 4

Uma bola de beisebol é rebatida na direção do campo de jogo. Durante o percurso (ignorando o efeito do ar), o que acontece com a componente (a) horizontal e (b) vertical da velocidade? Qual é a componente (c) horizontal e (d) vertical da aceleração durante a subida, durante a descida e no ponto mais alto da trajetória?

## Exemplo

### Projétil lançado de um avião

Na Fig. 4-14, um avião de salvamento voa a  $198 \text{ km/h}$  ( $= 55,0 \text{ m/s}$ ), a uma altura constante de  $500 \text{ m}$ , rumo a um ponto diretamente acima da vítima de um naufrágio, para deixar cair uma balsa.

(a) Qual deve ser o ângulo  $\phi$  da linha de visada do piloto para a vítima no instante em que o piloto deixa cair a balsa?

### IDEIAS-CHAVE

Depois de liberada, a balsa é um projétil; assim, os movimentos horizontal e vertical podem ser examinados se-

paradamente (não é preciso levar em conta a curvatura da trajetória).

**Cálculos** Na Fig. 4-14, vemos que  $\phi$  é dado por

$$\phi = \tan^{-1} \frac{x}{h}, \quad (4-27)$$

onde  $x$  é a coordenada horizontal da vítima (e da balsa ao chegar à água) e  $h = 500 \text{ m}$ . Podemos calcular  $x$  com o auxílio da Eq. 4-21:

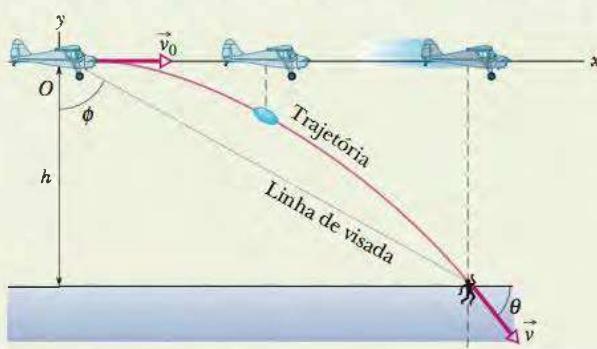
$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t. \quad (4-28)$$

Sabemos que  $x_0 = 0$  porque a origem foi colocada no ponto de lançamento. Como a balsa é deixada cair e não arremessada do avião, a velocidade inicial  $v_0$  é igual à velocidade do avião. Assim, sabemos também que a velocidade inicial tem módulo  $v_0 = 55,0 \text{ m/s}$  e ângulo  $\theta_0 = 0^\circ$  (medido em relação ao semieixo  $x$  positivo). Entretanto, não conhecemos o tempo  $t$  que a balsa leva para percorrer a distância do avião até a vítima.

Para determinar o valor de  $t$ , temos que considerar o movimento vertical e, mais especificamente, a Eq. 4-22:

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4-29)$$

onde o deslocamento vertical  $y - y_0$  da balsa é  $-500 \text{ m}$  (o valor negativo indica que a balsa se move para baixo).



**Figura 4-14** Um avião lança uma balsa enquanto se desloca com velocidade constante em um voo horizontal. Durante a queda, a velocidade horizontal da balsa permanece igual à velocidade do avião.

Assim,

$$-500 \text{ m} = (55,0 \text{ m/s})(\cos 0^\circ)t - \frac{1}{2}(9,8 \text{ m/s}^2)t^2. \quad (4-30)$$

Resolvendo esta equação, obtemos  $t = 10,1$ . Substituindo este valor na Eq. 4-28, obtemos:

$$x - 0 = (55,0 \text{ m/s})(\cos 0^\circ)(10,1 \text{ s}), \quad (4-31)$$

ou

$$x = 555,5 \text{ m}.$$

Nesse caso, a Eq. 4-27 nos dá

$$\phi = \tan^{-1} \frac{555,5 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 48,0^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

(b) No momento em que a balsa atinge a água, qual é a sua velocidade  $\vec{v}$  em termos dos vetores unitários e na notação módulo-ângulo?

### IDEIAS-CHAVE

(1) As componentes horizontal e vertical da velocidade da balsa são independentes. (2) A componente  $v_x$  não muda

em relação ao valor inicial  $v_{0x} = v_0 \cos \theta_0$ , pois não existe uma aceleração horizontal. (3) A componente  $v_y$  muda em relação ao valor inicial  $v_{0y} = v_0 \sin \theta_0$ , pois existe uma aceleração vertical.

### Cálculos

Quando a balsa atinge a água,

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = (55,0 \text{ m/s})(\cos 0^\circ) = 55,0 \text{ m/s}.$$

Usando a Eq. 4-23 e o tempo de queda da balsa  $t = 10,1$  s, descobrimos que, quando a balsa atinge a água,

$$\begin{aligned} v_y &= v_0 \sin \theta_0 - gt \\ &= (55,0 \text{ m/s})(\sin 0^\circ) - (9,8 \text{ m/s}^2)(10,1 \text{ s}) \\ &= -99,0 \text{ m/s}. \end{aligned} \quad (4-32)$$

Assim, temos:

$$\vec{v} = (55,0 \text{ m/s})\hat{i} - (99,0 \text{ m/s})\hat{j}. \quad (\text{Resposta})$$

Usando a Eq. 3-6 como guia, descobrimos que o módulo e o ângulo de  $\vec{v}$  são

$$v = 113 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad \theta = -60,9^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

### Exemplo

#### Tiro de canhão contra um navio pirata

A Fig. 4-15 mostra um navio pirata a 560 m de um forte que protege a entrada de um porto. Um canhão de defesa, situado ao nível do mar, dispara balas com uma velocidade inicial  $v_0 = 82 \text{ m/s}$ .

(a) Com que ângulo  $\theta_0$  em relação à horizontal as balas devem ser disparadas para atingir o navio?

### IDEIAS-CHAVE

(1) Uma bala disparada pelo canhão é um projétil. Estamos interessados em uma equação que relate o ângulo de lançamento  $\theta_0$  ao deslocamento horizontal da bala entre o canhão e o navio. (2) Como o canhão e o navio estão na mesma altura, o deslocamento horizontal é igual ao alcance.

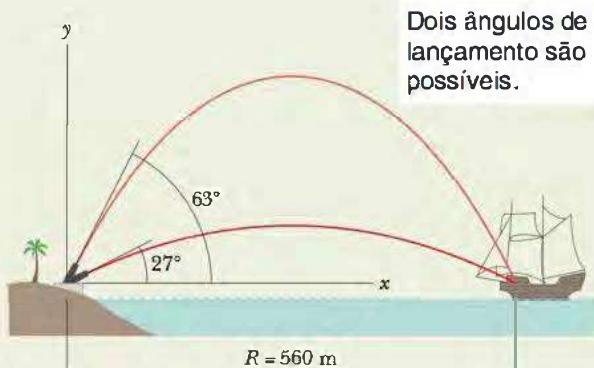


Figura 4-15 Um navio pirata sendo atacado.

**Cálculos** Podemos relacionar o ângulo de lançamento  $\theta_0$  ao alcance  $R$  através da Eq. 4-26, que pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{gR}{v_0^2} = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{(9,8 \text{ m/s}^2)(560 \text{ m})}{(82 \text{ m/s})^2} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^{-1} 0,816. \end{aligned} \quad (4-33)$$

Uma solução de  $\operatorname{sen}^{-1} 0,816$  ( $54,7^\circ$ ) é fornecida pelas calculadoras; subtraindo-a de  $180^\circ$ , obtemos a outra solução ( $125,3^\circ$ ). Assim, a Eq. 4-33 nos dá

$$\theta_0 = 27^\circ \quad \text{e} \quad \theta_0 = 63^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

(b) Qual é o alcance máximo das balas de canhão?

**Cálculos** Como vimos anteriormente, o alcance máximo corresponde a um ângulo de elevação  $\theta_0$  de  $45^\circ$ . Assim,

$$\begin{aligned} R &= \frac{v_0^2}{g} \operatorname{sen} 2\theta_0 = \frac{(82 \text{ m/s})^2}{9,8 \text{ m/s}^2} \operatorname{sen} (2 \times 45^\circ) \\ &= 686 \text{ m} \approx 690 \text{ m}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

Quando o navio pirata se afasta do porto, a diferença entre os dois ângulos de elevação que permitem acertar o navio diminui até que se tornam iguais entre si e iguais a  $\theta = 45^\circ$  quando o navio está a 690 m de distância. Para distâncias maiores, é impossível acertar o navio.

## 4-7 Movimento Circular Uniforme

Uma partícula em **movimento circular uniforme** descreve uma circunferência ou um arco de circunferência com velocidade escalar constante (*uniforme*). Embora a velocidade escalar não varie nesse tipo de movimento, a partícula está acelerada porque a direção da velocidade está mudando.

A Fig. 4-16 mostra a relação entre os vetores velocidade e aceleração em várias posições durante o movimento circular uniforme. O módulo dos dois vetores permanece constante durante o movimento, mas a orientação varia continuamente. A velocidade está sempre na direção tangente à circunferência e tem o mesmo sentido que o movimento. A aceleração está sempre na direção *radial* e aponta para o centro da circunferência. Por essa razão, a aceleração associada ao movimento circular uniforme é chamada de **aceleração centrípeta** (“que busca o centro”). Como será demonstrado a seguir, o módulo dessa aceleração  $\ddot{a}$  é

$$\ddot{a} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{aceleração centrípeta}). \quad (4-34)$$

onde  $r$  é o raio da circunferência e  $v$  é a velocidade da partícula.

Durante essa aceleração com velocidade escalar constante, a partícula percorre a circunferência completa (uma distância igual a  $2\pi r$ ) em um intervalo de tempo dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (\text{período}). \quad (4-35)$$

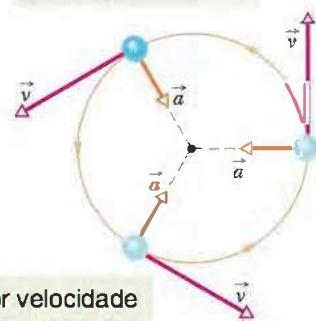
O parâmetro  $T$  é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*. No caso mais geral, o período é o tempo que uma partícula leva para completar uma volta em uma trajetória fechada.

### Demonstração da Eq. 4-34

Para determinar o módulo e a orientação da aceleração no caso do movimento circular uniforme, considere a Fig. 4-17. Na Fig. 4-17a, a partícula  $p$  se move com velocidade escalar constante  $v$  enquanto percorre uma circunferência de raio  $r$ . No instante mostrado, as coordenadas de  $p$  são  $x_p$  e  $y_p$ .

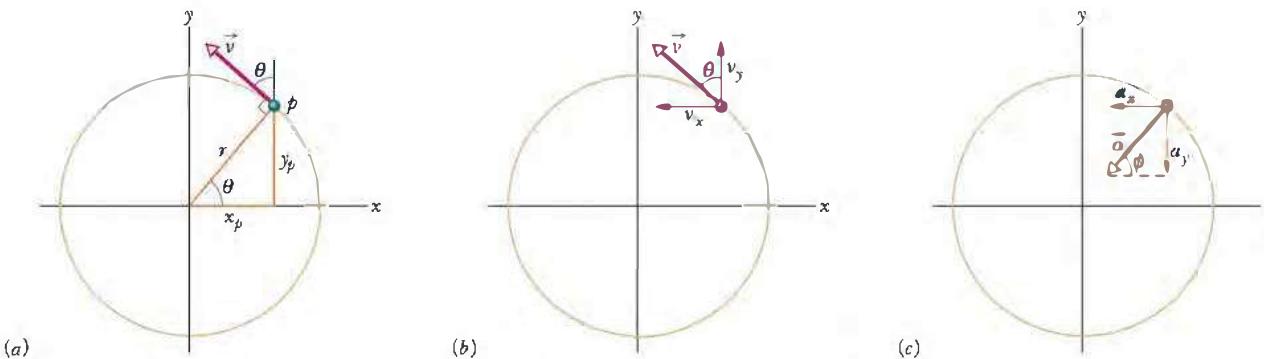
Como vimos na Seção 4-3, a velocidade  $\vec{v}$  de uma partícula em movimento é sempre tangente à trajetória da partícula na posição considerada. Na Fig. 4-17a, isso significa que  $\vec{v}$  é perpendicular a uma reta  $r$  que liga o centro da circunferência à posição da partícula. Nesse caso, o ângulo  $\theta$  que  $\vec{v}$  faz com uma reta vertical passando pelo ponto  $p$  é igual ao ângulo  $\theta$  que o raio  $r$  faz com o eixo  $x$ .

O vetor aceleração sempre aponta para o centro.



O vetor velocidade é sempre tangente à trajetória.

**Figura 4-16** Os vetores velocidade e aceleração de uma partícula em movimento circular uniforme.



**Figura 4-17** Uma partícula  $p$  em movimento circular uniforme no sentido antihorário.

- (a) Posição e velocidade  $\vec{v}$  da partícula em um certo instante de tempo.
- (b) Velocidade  $\vec{v}$ .
- (c) Aceleração  $\ddot{a}$ .

As componentes escalares de  $\vec{v}$  aparecem na Fig. 4-17b. Em termos dessas componentes, a velocidade  $\vec{v}$  pode ser escrita na forma

$$\vec{v} = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} = (-v \sin \theta) \hat{i} + (v \cos \theta) \hat{j}. \quad (4-36)$$

Usando o triângulo retângulo da Fig. 4-17a, podemos substituir  $\sin \theta$  por  $y_p/r$  e  $\cos \theta$  por  $x_p/r$  e escrever

$$\vec{v} = \left( -\frac{vy_p}{r} \right) \hat{i} + \left( \frac{vx_p}{r} \right) \hat{j}. \quad (4-37)$$

Para determinar a aceleração  $\vec{a}$  da partícula  $p$ , devemos calcular a derivada dessa equação em relação ao tempo. Observando que a velocidade escalar  $v$  e o raio  $r$  não variam com o tempo, obtemos

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left( -\frac{v}{r} \frac{dy_p}{dt} \right) \hat{i} + \left( \frac{v}{r} \frac{dx_p}{dt} \right) \hat{j}. \quad (4-38)$$

Note que a taxa de variação com o tempo de  $y_p$ ,  $dy_p/dt$ , é igual à componente  $y$  da velocidade,  $v_y$ . Analogamente,  $dx_p/dt = v_x$ , e, novamente de acordo com a Fig. 4-17b,  $v_x = -v \sin \theta$  e  $v_y = v \cos \theta$ . Fazendo essas substituições na Eq. 4-38, obtemos

$$\vec{a} = \left( -\frac{v^2}{r} \cos \theta \right) \hat{i} + \left( -\frac{v^2}{r} \sin \theta \right) \hat{j}. \quad (4-39)$$

Este vetor e suas componentes aparecem Fig. 4-17c. De acordo com a Eq. 3-6, temos:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2} = \frac{v^2}{r} \sqrt{1} = \frac{v^2}{r},$$

como queríamos demonstrar. Para determinar a orientação de  $\vec{a}$ , calculamos o ângulo  $\phi$  da Fig. 4-17c:

$$\tan \phi = \frac{a_y}{a_x} = \frac{-(v^2/r) \sin \theta}{-(v^2/r) \cos \theta} = \tan \theta.$$

Assim,  $\phi = \theta$ , o que significa que  $\vec{a}$  aponta na direção do raio  $r$  da Fig. 4-17a, no sentido do centro da circunferência, como queríamos demonstrar.



### TESTE 5

Um objeto se move com velocidade escalar constante, ao longo de uma trajetória circular, em um plano  $xy$  horizontal com centro na origem. Quando o objeto está em  $x = -2$  m, a velocidade é  $-(4 \text{ m/s}) \hat{j}$ . Determine (a) a velocidade e (b) a aceleração do objeto em  $y = 2$  m.

### Exemplo

#### Pilotos de caça fazendo curvas

Os pilotos de caça se preocupam quando têm que fazer curvas muito fechadas. Como o corpo do piloto fica sujeito à aceleração centrípeta, com a cabeça mais próxima do centro de curvatura, a pressão sanguínea no cérebro diminui, o que pode levar à perda das funções cerebrais.

Os sinais de perigo são vários. Quando a aceleração centrípeta é  $2g$  ou  $3g$ , o piloto se sente pesado. Por volta de  $4g$ , a visão do piloto passa para preto e branco e se reduz à “visão de túnel”. Se a aceleração é mantida ou au-

mentada, o piloto deixa de enxergar e, logo depois, perde a consciência, uma situação conhecida como *g-LOC*, da expressão em inglês *g-induced loss of consciousness*, ou seja, “perda de consciência induzida por *g*”.

Qual é o módulo da aceleração, em unidades de  $g$ , para um piloto cuja aeronave inicia uma curva horizontal com uma velocidade  $\vec{v}_i = (400 \hat{i} + 500 \hat{j}) \text{ m/s}$  e, 24,0 s mais tarde, termina a curva com uma velocidade  $\vec{v}_f = (-400 \hat{i} - 500 \hat{j}) \text{ m/s}$ ? 24,0 s

**IDEIAS-CHAVE**

Supomos que o avião execute a curva com um movimento circular uniforme. Nesse caso, o módulo da aceleração centípeta é dado pela Eq. 4-34 ( $a = v^2/R$ ), onde  $R$  é o raio da curva. O tempo necessário para descrever uma circunferência completa é o período dado pela Eq. 4-35 ( $T = 2\pi R/v$ ).

**Cálculos** Como não conhecemos o raio  $R$ , vemos explicitar  $R$  na Eq. 4-35 e substituí-lo pelo seu valor na Eq. 4-34. O resultado é o seguinte:

$$a = \frac{2\pi v}{T}.$$

Nesta equação,  $v$  é o módulo (constante) da velocidade durante a curva. Vamos substituir as componentes da velocidade inicial na Eq. 3-6:

$$v = \sqrt{(400 \text{ m/s})^2 + (500 \text{ m/s})^2} = 640,31 \text{ m/s.}$$

Para determinar o período  $T$  do movimento, observamos que a velocidade final é igual ao negativo da velocidade inicial. Isso significa que a aeronave termina a curva no lado oposto da circunferência e completou metade de uma circunferência em 24,0 s. Assim, levaria  $T = 48,0$  s para descrever uma circunferência completa. Substituindo esses valores na equação de  $a$ , obtemos

$$a = \frac{2\pi(640,31 \text{ m/s})}{48,0 \text{ s}} = 83,81 \text{ m/s}^2 \approx 8,6g. \quad (\text{Resposta})$$

## 4-8 Movimento Relativo em Uma Dimensão

Suponha que você veja um pato voando para o norte a 30 km/h. Para um outro pato que esteja voando ao lado do primeiro, o primeiro parece estar parado. Em outras palavras, a velocidade de uma partícula depende do referencial de quem está observando ou medindo a velocidade. Para nossos propósitos, um referencial é um objeto no qual fixamos um sistema de coordenadas. No dia a dia, esse objeto é frequentemente o solo. Assim, por exemplo, a velocidade que aparece em uma multa de trânsito é a velocidade do carro em relação ao solo. A velocidade em relação ao guarda de trânsito será diferente se o guarda estiver se movendo enquanto mede a velocidade.

Suponha que Alexandre (situado na origem do referencial A da Fig. 4-20) esteja parado no acostamento de uma rodovia, observando o carro P (a “partícula”) passar. Bárbara (situada na origem do referencial B) está dirigindo um carro na rodovia com velocidade constante e também observa o carro P. Suponha que os dois meçam a posição do carro em um dado momento. De acordo com a Fig. 4-18, temos:

$$x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}. \quad (4-40)$$

Essa equação significa o seguinte: “A coordenada  $x_{PA}$  de P medida por A é igual à coordenada  $x_{PB}$  de P medida por B mais a coordenada  $x_{BA}$  de B medida por A”. Observe que esta leitura está de acordo com a ordem em que os índices foram usados.

Derivando a Eq. 4-40 em relação ao tempo, obtemos

$$\frac{d}{dt}(x_{PA}) = \frac{d}{dt}(x_{PB}) + \frac{d}{dt}(x_{BA}).$$

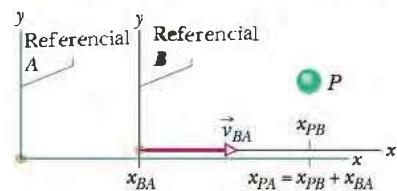
Assim, as componentes da velocidade estão relacionadas através da equação

$$v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}. \quad (4-41)$$

Esta equação significa o seguinte: “A velocidade  $v_{PA}$  de P medida por A é igual à velocidade  $v_{PB}$  de P medida por B mais a velocidade  $v_{BA}$  de B medida por A.” O termo  $v_{BA}$  é a velocidade do referencial B em relação ao referencial A.

Neste capítulo, estamos considerando apenas referenciais que se movem com velocidade constante um em relação ao outro. Em nosso exemplo, isso significa que Bárbara (referencial B) dirige com velocidade constante  $v_{BA}$  em relação a Alexandre (referencial A). Esta restrição não vale para o carro P (a partícula em movimento), cuja velocidade pode mudar de módulo e direção (ou seja, a partícula pode sofrer uma aceleração).

O referencial B se move em relação ao referencial A enquanto ambos observam P.



**Figura 4-18** Alexandre (referencial A) e Bárbara (referencial B) observam o carro P enquanto B e P se movem com velocidades diferentes ao longo do eixo x comum aos dois referenciais. No instante mostrado,  $x_{BA}$  é a coordenada de B no referencial A. A coordenada de P é  $x_{PB}$  no referencial B e  $x_{PA} = x_{PB} + x_{BA}$  no referencial A.

Para relacionar as acelerações de  $P$  medidas por Bárbara e por Alexandre em um mesmo instante, calculamos a derivada da Eq. 4-41 em relação ao tempo:

$$\frac{d}{dt}(v_{PA}) = \frac{d}{dt}(v_{PB}) + \frac{d}{dt}(v_{BA}).$$

Como  $v_{BA}$  é constante, o último termo é zero e temos

$$a_{PA} = a_{PB}. \quad (4-42)$$

Em outras palavras,



A aceleração de uma partícula medida por observadores em referenciais que se movem com velocidade constante um em relação ao outro é exatamente a mesma.

### Exemplo

#### Movimento relativo unidimensional: Alexandre e Bárbara

Na Fig. 4-18, suponha que a velocidade de Bárbara em relação a Alexandre seja  $v_{BA} = 52 \text{ km/h}$  (constante) e que o carro  $P$  esteja se movendo no sentido negativo do eixo  $x$ .

(a) Se Alexandre mede uma velocidade constante  $v_{PA} = -78 \text{ km/h}$  para o carro  $P$ , qual é a velocidade  $v_{PB}$  medida por Bárbara?

#### IDEIAS-CHAVE

Podemos associar um referencial  $A$  a Alexandre e um referencial  $B$  a Bárbara. Como os dois referenciais se movem com velocidade constante um em relação ao outro ao longo do eixo  $x$ , podemos usar a Eq. 4-41 ( $v_{PA} = v_{PB} + v_{BA}$ ) para relacionar  $v_{PB}$  a  $v_{PA}$  e  $v_{BA}$ .

**Cálculo** Temos

$$-78 \text{ km/h} = v_{PB} + 52 \text{ km/h}.$$

Assim,

$$v_{PB} = -130 \text{ km/h}. \quad (\text{Resposta})$$

**Comentário** Se o carro  $P$  estivesse ligado ao carro de Bárbara por um fio flexível enrolado em uma bobina, o fio se desenrolaria a uma velocidade de 130 km/h enquanto os dois carros estivessem se separando.

(b) Se o carro  $P$  freia com aceleração constante até parar em relação a Alexandre (e, portanto, em relação ao solo) no instante  $t = 10 \text{ s}$ , qual é a aceleração  $a_{PA}$  em relação a Alexandre?

#### IDEIAS-CHAVE

Para calcular a aceleração do carro  $P$  em relação a Alexandre, devemos usar a velocidade do carro em relação a Alexandre. Como a aceleração é constante, podemos usar

a Eq. 2-11 ( $v = v_0 + at$ ) para relacionar a aceleração às velocidades inicial e final de  $P$ .

**Cálculo** A velocidade inicial de  $P$  em relação a Alexandre é  $v_{PA} = -78 \text{ km/h}$ , enquanto a velocidade final é 0. Assim,

$$a_{PA} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{0 - (-78 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} = \frac{1 \text{ m/s}}{3,6 \text{ km/h}} = 2,2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

(c) Qual é a aceleração  $a_{PB}$  do carro  $P$  em relação a Bárbara durante a frenagem?

#### IDEIA-CHAVE

Para calcular a aceleração do carro  $P$  em relação a Bárbara, devemos usar a velocidade do carro em relação a Bárbara.

**Cálculo** A velocidade inicial de  $P$  em relação a Bárbara foi determinada na parte (a) ( $v_{PB} = -130 \text{ km/h}$ ). A velocidade final de  $P$  em relação a Bárbara é  $-52 \text{ km/h}$  (a velocidade do carro parado em relação à velocidade do carro de Bárbara). Assim,

$$a_{PB} = \frac{v - v_0}{t} = \frac{-52 \text{ km/h} - (-130 \text{ km/h})}{10 \text{ s}} = \frac{1 \text{ m/s}}{3,6 \text{ km/h}} = 2,2 \text{ m/s}^2. \quad (\text{Resposta})$$

**Comentário** Este resultado é previsível. Como Alexandre e Bárbara estão se movendo com velocidade constante um em relação ao outro, a aceleração do carro  $P$  medida pelos dois deve ser a mesma.

## 4-9 Movimento Relativo em Duas Dimensões

Nossos dois amigos estão novamente observando o movimento de uma partícula  $P$  a partir da origem dos referenciais  $A$  e  $B$ , enquanto  $B$  se move com velocidade constante  $\vec{v}_{BA}$  em relação a  $A$ . (Os eixos correspondentes aos dois sistemas de coordenadas permanecem paralelos.) A Fig. 4-19 mostra um certo instante durante o movimento. Nesse instante, o vetor posição da origem de  $B$  em relação à origem de  $A$  é  $\vec{r}_{BA}$ . Os vetores posição da partícula  $P$  são  $\vec{r}_{PA}$  em relação à origem de  $A$  e  $\vec{r}_{PB}$  em relação à origem de  $B$ . A posição das origens e extremidades desses três vetores mostra que estão relacionados através da equação

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} + \vec{r}_{BA}. \quad (4-43)$$

Derivando essa equação em relação ao tempo, encontramos uma equação que envolve as velocidades  $\vec{v}_{PA}$  e  $\vec{v}_{PB}$  da partícula  $P$  em relação aos nossos observadores:

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}. \quad (4-44)$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, obtemos uma equação que envolve as acelerações  $\vec{a}_{PA}$  e  $\vec{a}_{PB}$  da partícula  $P$  em relação aos nossos observadores. Note, porém, que, como  $\vec{v}_{BA}$  é constante, sua derivada em relação ao tempo é nula. Assim, obtemos

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \quad (4-45)$$

Assim, da mesma forma que no movimento unidimensional, temos a seguinte regra: a aceleração de uma partícula medida por observadores em referenciais que se movem com velocidade constante um em relação ao outro é exatamente a mesma.

### Exemplo

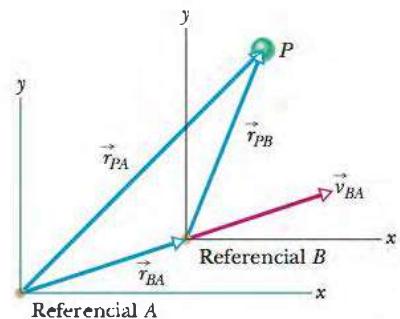
#### Movimento relativo bidimensional: aviões

Na Fig. 4-20a, um avião se move para leste enquanto o piloto direciona o avião ligeiramente para o sul do leste, de modo a compensar um vento constante que sopra para nordeste. O avião tem uma velocidade  $\vec{v}_{AV}$  em relação ao vento, com uma velocidade do ar (velocidade escalar em relação ao vento) de 215 km/h e uma orientação que faz um ângulo  $\theta$  ao sul do leste. O vento tem uma velocidade  $\vec{v}_{VS}$  em relação ao solo, com uma velocidade escalar de 65,0 km/h e uma orientação que faz um ângulo de  $20^\circ$  a leste do norte. Qual é o módulo da velocidade  $\vec{v}_{AS}$  do avião em relação ao solo e qual é o valor de  $\theta$ ?

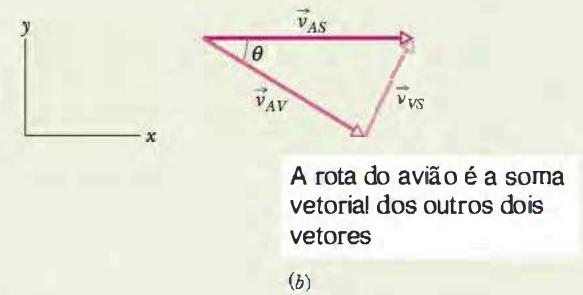
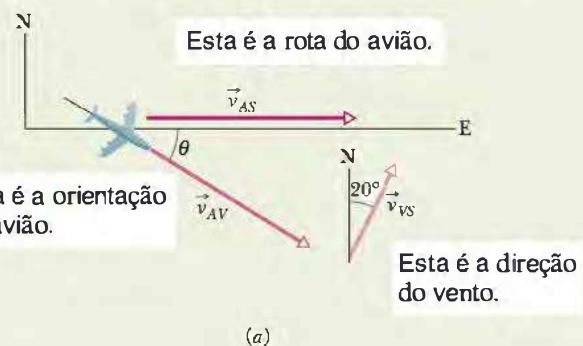
#### IDEIAS-CHAVE

A situação é semelhante à da Fig. 4-19. Nesse caso, a partícula  $P$  é o avião, o referencial  $A$  está associado ao solo (que chamaremos de  $S$ ) e o referencial  $B$  está associado ao vento (que chamaremos de  $V$ ). Precisamos construir um diagrama vetorial semelhante ao da Fig. 4-19, mas, dessa vez, usando os três vetores velocidade.

**Cálculos** Primeiro, escrevemos uma frase que expressa uma relação entre os três vetores da Fig. 4-20b:



**Figura 4-19** O referencial  $B$  possui uma velocidade bidimensional constante  $\vec{v}_{BA}$  em relação ao referencial  $A$ . O vetor posição de  $B$  em relação a  $A$  é  $\vec{r}_{BA}$ . Os vetores posição da partícula  $P$  são  $\vec{r}_{PA}$  em relação a  $A$  e  $\vec{r}_{PB}$  em relação a  $B$ .



**Figura 4-20** Efeito do vento sobre um avião.

$$\begin{array}{lcl} \text{velocidade do avião} & = & \text{velocidade do avião} + \text{velocidade do vento} \\ \text{em relação ao solo} & & \text{em relação ao vento} \\ (\text{AS}) & & (\text{AV}) \\ & & \text{em relação ao solo} \\ & & (\text{VS}) \end{array}$$

Em notação vetorial, esta relação se torna

$$\vec{v}_{\text{AS}} = \vec{v}_{\text{AV}} + \vec{v}_{\text{VS}} \quad (4-46)$$

Podemos determinar as componentes dos vetores no sistema de coordenadas da Fig. 4-20b e resolver a Eq. 4-46 eixo por eixo. No caso das componentes y, temos:

$$\vec{v}_{\text{AS},y} = \vec{v}_{\text{AV},y} + \vec{v}_{\text{VS},y}$$

ou  $0 = -(\text{215 km/h}) \text{sen } \theta + (\text{65,0 km/h})(\cos 20,0^\circ)$ .

Explicando  $\theta$ , obtemos

$$\theta = \text{sen}^{-1} \frac{(\text{65,0 km/h})(\cos 20,0^\circ)}{\text{215 km/h}} = 16,5^\circ. \quad (\text{Resposta})$$

No caso das componentes x, temos:

$$\vec{v}_{\text{AS},x} = \vec{v}_{\text{AV},x} + \vec{v}_{\text{VS},x}$$

Como  $\vec{v}_{\text{AS}}$  é paralela ao eixo x, a componente  $v_{\text{AS},x}$  é igual ao módulo  $v_{\text{AS}}$  do vetor. Substituindo  $v_{\text{AS},x}$  por  $v_{\text{AS}}$  e fazendo  $\theta = 16,5^\circ$ , obtemos

$$\begin{aligned} v_{\text{AS}} &= (\text{215 km/h})(\cos 16,5^\circ) + (\text{65,0 km/h})(\text{sen } 20,0^\circ) \\ &= \text{228 km/h}. \end{aligned} \quad (\text{Resposta})$$

## REVISÃO E RESUMO

**Vetor Posição** A localização de uma partícula em relação à origem de um sistema de coordenadas é dada por um *vetor posição*  $\vec{r}$ , que, em termos dos vetores unitários, assume a forma

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}. \quad (4-1)$$

onde  $x\hat{i}$ ,  $y\hat{j}$  e  $z\hat{k}$  são as componentes vetoriais do vetor posição  $\vec{r}$  e  $x$ ,  $y$  e  $z$  são as componentes escalares (e também as coordenadas da partícula). Um vetor posição pode ser descrito por um módulo e um ou dois ângulos, pelas componentes vetoriais ou pelas componentes escalares.

**Deslocamento** Se uma partícula se move de tal forma que o vetor posição muda de  $\vec{r}_1$  para  $\vec{r}_2$ , o *deslocamento*  $\Delta\vec{r}$  da partícula é dado por

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (4-2)$$

O deslocamento também pode ser escrito na forma

$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \quad (4-3)$$

$$= \Delta x\hat{i} + \Delta y\hat{j} + \Delta z\hat{k}. \quad (4-4)$$

**Velocidade Média e Velocidade Instantânea** Se uma partícula sofre um deslocamento  $\Delta\vec{r}$  em um intervalo de tempo  $\Delta t$ , a velocidade média  $\vec{v}_{\text{med}}$  nesse intervalo de tempo é dada por

$$\vec{v}_{\text{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (4-8)$$

Quando  $\Delta t$  na Eq. 4-8 tende a 0,  $\vec{v}_{\text{med}}$  tende para um limite  $\vec{v}$  que é chamado de *velocidade instantânea* ou, simplesmente, *velocidade*:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4-10)$$

Em termos dos vetores unitários, a velocidade instantânea assume a forma

$$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} + v_z\hat{k}, \quad (4-11)$$

onde  $v_x = dx/dt$ ,  $v_y = dy/dt$  e  $v_z = dz/dt$ . A velocidade instantânea  $\vec{v}$  de uma partícula é sempre tangente à trajetória da partícula na posição da partícula.

**Aceleração Média e Aceleração Instantânea** Se a velocidade de uma partícula varia de  $\vec{v}_1$  para  $\vec{v}_2$  no intervalo de tempo  $\Delta t$ ,

a aceleração média durante o intervalo  $\Delta t$  é

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \quad (4-15)$$

Quando  $\Delta t$  na Eq. 4-15 tende a zero,  $\vec{a}_{\text{med}}$  tende para um limite  $\vec{a}$  que é chamado de *aceleração instantânea* ou, simplesmente, *aceleração*:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4-16)$$

Na notação de vetores unitários,

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}, \quad (4-17)$$

onde  $a_x = dv_x/dt$ ,  $a_y = dv_y/dt$  e  $a_z = dv_z/dt$ .

**Movimento de Projéteis** *Movimento balístico* é o movimento de uma partícula lançada com uma velocidade inicial  $\vec{v}_0$ . Durante o percurso, a aceleração horizontal da partícula é zero e a aceleração vertical é a aceleração de queda livre,  $-g$ . (O deslocamento para cima é escolhido como sentido positivo.) Se  $\vec{v}_0$  é expressa através de um módulo (a velocidade escalar  $v_0$ ) e um ângulo  $\theta_0$  (medido em relação à horizontal), as equações de movimento da partícula ao longo do eixo horizontal  $x$  e do eixo vertical  $y$  são

$$x - x_0 = (v_0 \cos \theta_0)t, \quad (4-21)$$

$$y - y_0 = (v_0 \sin \theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (4-22)$$

$$v_x = v_0 \cos \theta_0, \quad (4-23)$$

$$v_y^2 = (v_0 \sin \theta_0)^2 - 2g(y - y_0). \quad (4-24)$$

A *trajetória* de uma partícula em movimento balístico tem a forma de uma parábola e é dada por

$$y = (\tan \theta_0)x - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \theta_0)^2}. \quad (4-25)$$

se  $x_0$  e  $y_0$  das Eqs. 4-21, 4-22, 4-23 e 4-24 forem nulos. O *alcance horizontal*  $R$  da partícula, que é a distância horizontal do ponto de lançamento ao ponto em que a partícula retorna à altura do ponto de lançamento, é dado por

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (4-26)$$

**Movimento Circular Uniforme** Se uma partícula descreve uma circunferência ou arco de circunferência de raio  $r$  com velocidade constante  $v$ , dizemos que se trata de um *movimento circular uniforme*. Nesse caso, a partícula possui uma aceleração  $\vec{a}$  cujo módulo é dado por

$$a = \frac{v^2}{r}. \quad (4-34)$$

O vetor  $\vec{a}$  aponta para o centro da circunferência ou arco de circunferência e é chamado de *aceleração centrípeta*. O tempo que a partícula leva para descrever uma circunferência completa é dado por

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (4-35)$$

O parâmetro  $T$  é chamado de *período de revolução* ou, simplesmente, *período*.

**Movimento Relativo** Quando dois referenciais  $A$  e  $B$  estão se movendo um em relação ao outro com velocidade constante, a velocidade de uma partícula  $P$ , medida por um observador do referencial  $A$ , é em geral diferente da velocidade medida por um observador do referencial  $B$ . As duas velocidades estão relacionadas através da equação

$$\vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} + \vec{v}_{BA}, \quad (4-44)$$

onde  $\vec{v}_{BA}$  é a velocidade de  $B$  em relação a  $A$ . Os dois observadores medem a mesma aceleração:

$$\vec{a}_{PA} = \vec{a}_{PB}. \quad (4-45)$$

## P E R G U N T A S

- 1** A Fig. 4-21 mostra o caminho seguido por um gambá à procura de comida no lixo, a partir do ponto inicial  $i$ . O gambá levou o mesmo tempo  $T$  para ir de cada um dos pontos marcados até o ponto seguinte. Ordene os pontos  $a$ ,  $b$  e  $c$  de acordo com o módulo da velocidade média do gambá para alcançá-los a partir do ponto inicial  $i$ , começando pelo maior.

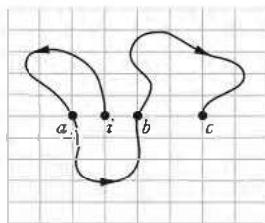


Figura 4-21 Pergunta 1.

- 2** A Fig. 4-22 mostra a posição inicial  $i$  e a posição final  $f$  de uma partícula. Determine (a) o vetor posição inicial  $\vec{r}_i$  e (b) o vetor posição final  $\vec{r}_f$  da partícula, ambos na notação de vetores unitários. (c) Qual é a componente  $x$  do deslocamento  $\Delta\vec{r}$ ?

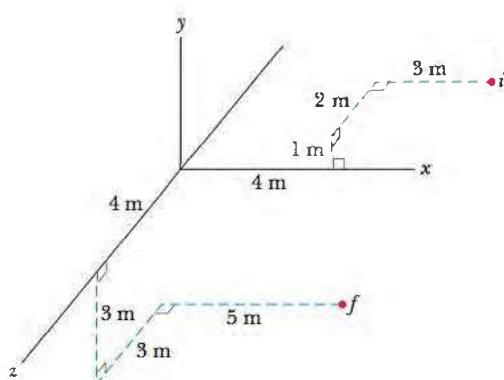


Figura 4-22 Pergunta 2.

- 3** Quando Paris foi bombardeada a mais de 100 km de distância na Primeira Guerra Mundial, por um canhão apelidado de "Big Bertha", os projéteis foram lançados com um ângulo maior que  $45^\circ$  para atingir uma distância maior, possivelmente até duas vezes maior que a  $45^\circ$ . Este resultado significa que a densidade do ar em grandes altitudes aumenta ou diminui?

- 4** Você tem que lançar um foguete, praticamente do nível do solo, com uma das velocidades iniciais especificadas pelos seguintes vetores: (1)  $\vec{v}_0 = 20\hat{i} + 70\hat{j}$ ; (2)  $\vec{v}_0 = -20\hat{i} + 70\hat{j}$ ; (3)  $\vec{v}_0 = 20\hat{i} - 70\hat{j}$ ; (4)  $\vec{v}_0 = -20\hat{i} - 70\hat{j}$ . No seu sistema de coordenadas,  $x$  varia ao longo do nível do solo e  $y$  cresce para cima. (a) Ordene os vetores de acordo com o módulo da velocidade de lançamento do projétil, começando pelo maior. (b) Ordene os vetores de acordo com o tempo de voo do projétil, começando pelo maior.

- 5** A Fig. 4-23 mostra três situações nas quais projéteis iguais são lançados do solo (a partir do mesmo nível) com a mesma velocidade escalar e o mesmo ângulo. Entretanto, os projéteis não caem no mesmo terreno. Ordene as situações de acordo com a velocidade escalar final dos projéteis imediatamente antes de aterrissarem, começando pela maior.

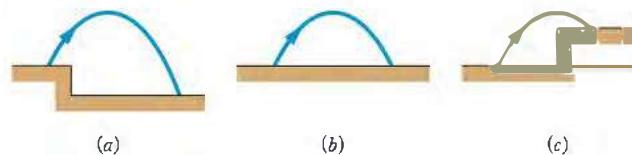


Figura 4-23 Pergunta 5.

- 6** O único uso decente de um bolo de frutas é na prática da catapulta. A curva 1 na Fig. 4-24 mostra a altura  $y$  de um bolo de frutas arremessado por uma catapulta em função do ângulo  $\theta$  entre o vetor velocidade e o vetor aceleração durante o percurso. (a) Qual dos pontos assinalados por letras nessa curva corresponde ao choque do bolo de frutas com o solo? (b) A curva 2 é um gráfico semelhante para a mesma velocidade escalar inicial, mas um ângulo de lançamento diferente. Nesse caso, o bolo de frutas vai cair em um ponto mais distante ou mais próximo do ponto de lançamento?

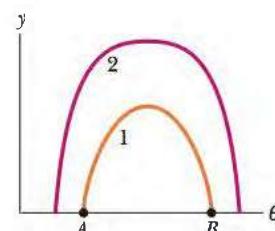


Figura 4-24 Pergunta 6.

**7** Um avião que está voando horizontalmente com uma velocidade constante de 350 km/h, sobrevoando um terreno plano, deixa cair um fardo com suprimentos. Ignore o efeito do ar sobre o fardo. Quais são as componentes iniciais (a) vertical e (b) horizontal da velocidade inicial do fardo? (c) Qual é a componente horizontal da velocidade imediatamente antes de o fardo se chocar com o solo? (d) Se a velocidade do avião fosse 450 km/h, o tempo de queda seria maior, menor ou igual?

**8** Na Fig. 4-25, uma tangerina é arremessada para cima e passa pelas janelas 1, 2 e 3, que têm o mesmo tamanho e estão regularmente espaçadas na vertical. Ordene essas três janelas de acordo (a) com o tempo que a tangerina leva para passar e (b) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

Na descida, a tangerina passa pelas janelas 4, 5 e 6, que têm o mesmo tamanho e não estão regularmente espaçadas na horizontal. Ordene essas três janelas de acordo (c) com o tempo que a tangerina leva para passar e (d) com a velocidade média da tangerina durante a passagem, em ordem decrescente.

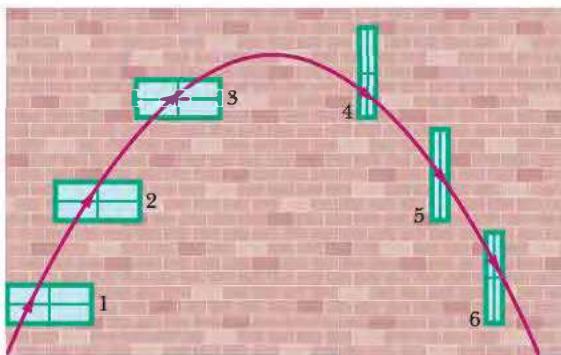


Figura 4-25 Pergunta 8.

**9** A Fig. 4-26 mostra três trajetórias de uma bola de futebol chutada a partir do chão. Ignorando os efeitos do ar, ordene as trajetórias de acordo (a) com o tempo de percurso, (b) com a componente vertical da velocidade inicial, (c) com a componente horizontal da velocidade inicial e (d) com a velocidade escalar inicial, em ordem decrescente.

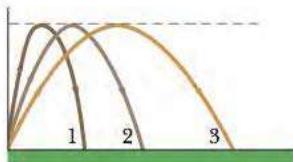


Figura 4-26 Pergunta 9.

**10** Uma bola é chutada a partir do chão, em um terreno plano, com uma certa velocidade inicial. A Fig. 4-27 mostra o alcance  $R$  da bola em função do ângulo de lançamento  $\theta_0$ . Ordene os três pontos identificados por letras no gráfico de acordo (a) com o tempo que a bola permanece no ar e (b) com a velocidade da bola na altura máxima, em ordem decrescente.

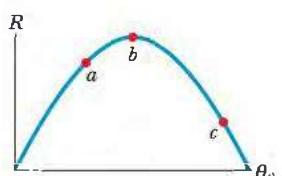


Figura 4-27 Pergunta 10.

**11** A Fig. 4-28 mostra quatro trilhos (semicírculos ou quartos de círculo) que podem ser usados por um trem, que se move com velocidade escalar constante. Ordene os trilhos de acordo com o módulo de aceleração do trem no trecho curvo, em ordem decrescente.

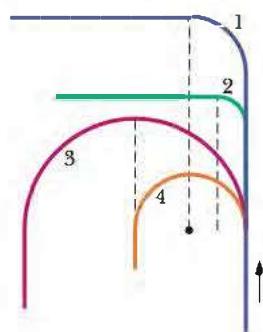


Figura 4-28 Pergunta 11.

**12** Na Fig. 4-29, a partícula  $P$  está em movimento circular uniforme sobre em torno da origem de um sistema de coordenadas  $xy$ . (a) Para que valores de  $\theta$  a componente vertical  $r_y$  do vetor posição possui maior módulo? (b) Para que valores de  $\theta$  a componente vertical  $v_y$  da velocidade da partícula possui maior módulo? (c) Para que valores de  $\theta$  a componente vertical  $a_y$  da aceleração da partícula possui maior módulo?

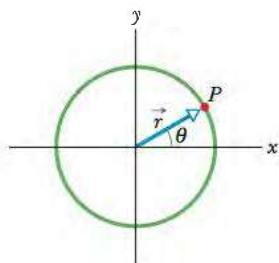


Figura 4-29 Pergunta 12.

**13** (a) É possível estar acelerando enquanto se viaja com velocidade escalar constante? É possível fazer uma curva (b) com aceleração nula e (c) com uma aceleração de módulo constante?

• • • O número de pontos indica o grau de dificuldade do problema

• Informações adicionais disponíveis em *O Circo Voador da Física* de Jean Walker, LTC, Rio de Janeiro, 2008.

## PROBLEMAS

### Seção 4-2 Posição e Deslocamento

**•1** O vetor posição de um elétron é  $\vec{r} = (5,0 \text{ m})\hat{i} - (3,0 \text{ m})\hat{j} + (2,0 \text{ m})\hat{k}$ . (a) Determine o módulo de  $\vec{r}$ . (b) Desenhe o vetor em um sistema de coordenadas dextrogiro.

**•2** Uma semente de melancia possui as seguintes coordenadas:  $x = -5,0 \text{ m}$ ,  $y = 8,0 \text{ m}$  e  $z = 0 \text{ m}$ . Determine o vetor posição da semente (a) na notação de vetores unitários e como (b) um módulo e (c) um ângulo em relação ao sentido positivo do eixo  $x$ . (d) Dese-