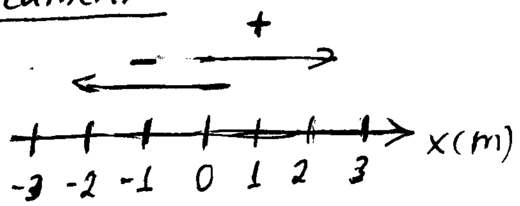
Movimento Retilíneo

Estudaremos o movimento da partícula em uma única dimensão (unidimensional) sem levarmos em conta as suas causas.

- Posição e deslocamento

O: origem.



Representamos a posição na reta por x (x_1, x_2, etc.). Se uma partícula encontrava-se inicialmente na posição $x_1 = -1m$ e agora encontra-se na posição $x_2 = 3m$, dizemos que ela se deslocou de

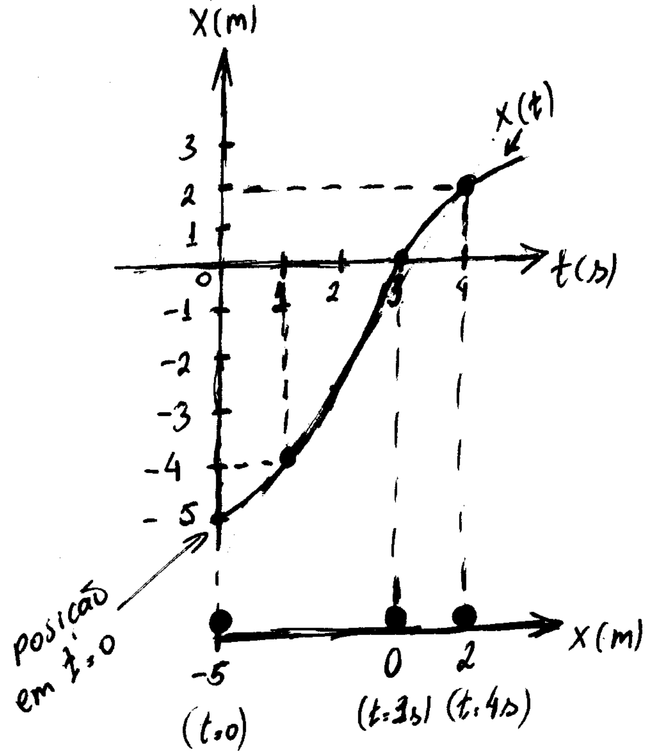
$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1} \text{ (definição de deslocamento)}$$

$$\Delta x = 3 - (-1) \Rightarrow \Delta x = 4m,$$

o que significa que sofreu um deslocamento positivo. Caso o deslocamento fosse contrário, $\Delta x = -4m$. Definimos distância d como o módulo do deslocamento Δx. Portanto, $|\Delta x| \equiv d$.

- Velocidade média e velocidade escalar média

Podemos representar a evolução da posição de uma partícula no tempo através de um gráfico $x(t)$. Por exemplo:



(gráfico $x(t)$)

(trajetória).

Dessa forma, se faz necessária a definição de uma quantidade que esteja associada a uma ideia de "rapidez". Vamos, então, começar com a definição da velocidade média V_m, que é a razão entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo gasto Δt:

$$\boxed{V_m \equiv \frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

($\Delta t \equiv t_2 - t_1$ e $\Delta x \equiv x_2 - x_1$)

V_m é uma grandeza vetorial, ou seja, precisa de orientação!

A velocidade média V_m é a inclinação da reta que liga os dois pontos representados pelos pares ordenados (t, x). Por exemplo, se $(t_1 = 1\,s,\ x_1 = -4\,m)$ e $(t_2 = 4\,s,\ x_2 = 2\,m)$, temos que

$$V_m = \frac{2-(-4)}{4-1} \Rightarrow V_m = 2\ m/s$$ (ver gráfico acima)

Podemos definir também a velocidade escalar média (s_m) como sendo

$$\boxed{s_m \equiv \frac{d}{\Delta t}},$$

onde $\underline{d}$ é a distância total percorrida. No movimento retilíneo, é importante quando temos mudança no sentido do movimento!

Exemplo. 1. Depois de dirigir uma van em uma estrada retilínea por 8,4 Km a 70Km/h, você para por falta de gasolina. Nos 30 min seguintes você caminha por mais 2,0Km ao longo da estrada até chegar ao posto de gasolina mais próximo.

a) Qual é o deslocamento total, desde o início da viagem até chegar ao posto de gasolina? (R: 10,4 Km)

b) Qual é o intervalo de tempo Δt entre o início da viagem e o instante em que você chega ao posto? (R: 0,62h)

c) Qual a velocidade média V_m do início da viagem até a chegada ao posto de gasolina? Determine a solução numericamente e graficamente. (R: 16,8Km/h $\approx$ 17Km/h)

d) Suponha que para encher um bujão de gasolina, pagar e caminhar de volta para a van, você leve 45 min. Qual é sua velocidade escalar média S_m do início da viagem até o momento em que chega de volta ao lugar onde deixou a van? (R: 9,1 Km/h)

- Velocidade instantânea e velocidade escalar instantânea

Os dois tipos de "rapidez" que definimos até agora foram sempre associadas a intervalos de tempo $\Delta t > 0$. Porém, intuitivamente, pensamos em "rapidez" como algo associado a um certo instante, ou seja, matematicamente, quando $\Delta t \to 0$ (lê-se "Δt tende a zero"); nesse caso, estamos falando essencialmente da velocidade instantânea (ou velocidade) $\underline{v}$.

Matematicamente, definimos:

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}}\,.$$

lê-se "derivada de x em relação a t".

lê-se "limite de Δx quando Δt tende a zero"

Em palavras, dizemos que v é a taxa com a qual a posição x está variando com o tempo t em um dado instante. A velocidade v também é uma grandeza vetorial e possui direção e sentido. No S.I, $[v] = m/s$ (lê-se $[v]$ como "unidade de v")

Já a velocidade escalar instantânea $\underline{s}$ (ou velocidade escalar) é definida como o módulo de v:

$$\boxed{s = |v|}\,.$$

É essa a velocidade indicada pelo velocímetro !!

Se a velocidade é constante, temos que

$$v = v_m \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0}$$

$$x(t) - x_0 = v(t - t_0)$$

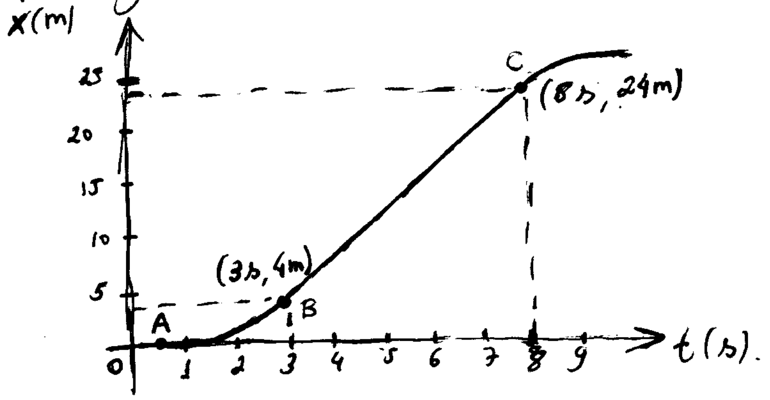
$$\boxed{x(t) = vt + (x_0 - vt_0)}$$

funções do 1º grau em t!

Se $t_0 = 0$: $\boxed{x(t) = vt + x_0}$ (Movimento Retilíneo Uniforme!)

Logo, o gráfico $x(t)$ é uma reta inclinada, quando $v = cte.$!

Exemplo 2. A figura abaixo mostra o gráfico $x(t)$ de um elevador que, depois de passar algum tempo parado, começa a se mover para cima (que tomamos como sendo o sentido positivo de x) e depois para novamente. Faça o gráfico $v(t)$.



(Dica: Entre 1 e 3s, temos $x(t) = t^2 - 2t + 1$; entre 3 e 8s, $x(t) = 4t - 8$; e entre 8 e 9s, $x(t) = -2t^2 + 36t - 136$).

Exemplo 3.

- Aceleração

Quando a velocidade da partícula varia, dizemos que ela sofreu uma aceleração. Podemos definir a aceleração média como

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}} \qquad \left(\Delta v = v_2 - v_1 \text{ e } \Delta t = t_2 - t_1\right)$$

A aceleração instantânea (ou, somente, aceleração) é dada por

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}}.$$

Podemos dizer que a aceleração é a derivada segunda da posição $x(t)$ em relação ao tempo, pois:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) \Rightarrow \boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2}}.$$

No S.I, a unidade de aceleração é o m/s^2.

Exemplo 4. Faça o gráfico de $a(t)$ relativo ao exemplo 2.

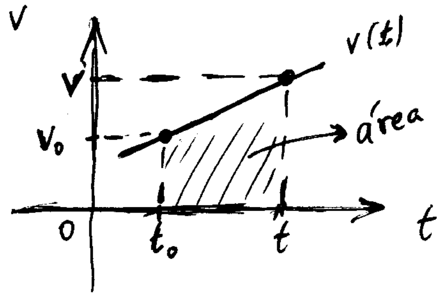
Um caso particularmente interessante ocorre quando a aceleração é constante ($a = cte.$). Nesse caso, podemos escrever

$$a = a_m \Rightarrow a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}$$

$$\boxed{v(t) = at + (v_0 - at_0)}. \qquad \text{(função do 1º grau!)}$$

Se $t_0 = 0$: $\boxed{v(t) = at + v_0}$ (Movimento Retilíneo Uniformemente Variado!).

Podemos obter a função $X(t)$ para o movimento com $a = cte$. através do gráfico de $v(t)$ (que é uma reta inclinada!):



A área formada abaixo de $v(t)$ e limitada por retas verticais que passam por t_0 e t é numericamente igual a Δx. Logo:

$$\text{área} = \frac{(v+v_0).\Delta t}{2} = \Delta x \qquad (\Delta t = t - t_0 \text{ e } \Delta x = x(t) - x_0).$$

Mas sabemos que $v = v_0 + a.t$. Logo:

$$\Delta x = \frac{(v_0 + at + v_0).\Delta t}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2} v_0 \Delta t}{\cancel{2}} + \frac{a\,\Delta t^2}{2} \Rightarrow \Delta x = v_0 \Delta t + \frac{a}{2}\Delta t^2$$

Portanto:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t-t_0) + \frac{a}{2}(t-t_0)^2}$$

(Função do 2º grau!).

Ou, quando $t_0 = 0$:

$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2}$$

O gráfico de $x(t)$ é uma parábola!

Portanto, para o movimento com <u>aceleração constante</u>, temos (para $t_0 = 0$):

$$\boxed{v = v_0 + at}$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2}$$

Combinando essas duas equações podemos obter (fazendo $t = (v - v_0)/a$ e substituindo na equação de x):

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)}$$

Um exemplo comum de movimento com aceleração constante é o de corpos lançados verticalmente (para cima ou para baixo ou a queda livre, nas proximidades da superfície da Terra, quando é possível desprezar efeitos do ar sobre o movimento. A aceleração da gravidade, nesse caso, é constante e orientada sempre verticalmente para baixo, de modo que, tipicamente, podemos utilizar $\boxed{a = -g}$,

Onde $\underline{g = 9{,}8 \text{ m/s}^2}$.

Exemplo **5**. Uma lançadora arremessa uma bola de beisebol para cima, ao longo do eixo y, com velocidade inicial de 12 m/s.

a) Quanto tempo a bola leva para atingir a altura máxima?

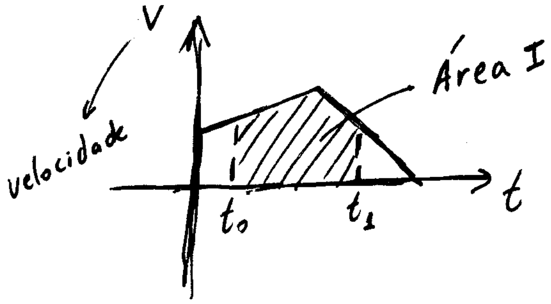
b) Qual é a altura máxima alcançada pela bola em relação ao ponto de lançamento?

c) Quanto tempo a bola leva para atingir um ponto 5,0 m acima do ponto inicial? Qual a velocidade da bola nesse ponto?

– Obtenção de Δx e Δv a partir de gráficos.

Como foi mencionado na seção anterior, podemos encontrar a quantidade $\Delta x = x_1 - x_0$ através do cálculo da área entre a curva de velocidade e o eixo dos tempos, entre t_0 e t_1. Isso significa integrar o gráfico da velocidade entre t_0 e t_1. Logo:

$$\boxed{x_1 - x_0 = \text{Área I}}$$



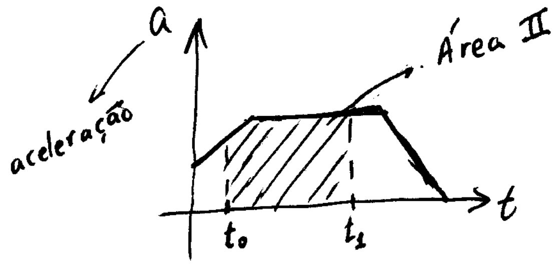
Em notação de integral:

$$x_1 - x_0 = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

lê-se "integral de v em t entre t_0 e t_1"

Analogamente, podemos obter $\Delta v = v_1 - v_0$ através do cálculo da área entre a curva de aceleração e o eixo dos tempos, entre t_0 e t_1:

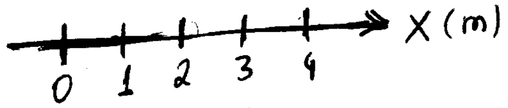
$$\boxed{v_1 - v_0 = \text{Área II}}$$



Em notação integral:

$$v_1 - v_0 = \int_{t_0}^{t_1} a(t)\,dt$$

Apêndice (Movimento Retilíneo).



A velocidade em um dado instante $\underline{v}$ é obtida a partir da velocidade média reduzindo o intervalo de tempo Δt até torná-lo próximo de zero. Nesse caso, Δx também tende a tornar-se pequeno.

Sabemos que é possível representar a posição de uma partícula no tempo como uma função $x(t)$ (por exemplo, $x(t) = 3t - 2$). Desse modo, para t_1, temos $x_1 = x(t_1)$ e para t_2 (posterior), temos $x_2 = x(t_2)$. Logo:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \Rightarrow \Delta x = x(t_2) - x(t_1).$$

Se considerarmos que $t_1 = t$ e $t_2 = t + \Delta t$, podemos escrever

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t).$$

Quando $\Delta t \to 0$ (Δt tende a zero), sabemos que podemos definir matematicamente a velocidade v como

limite de Δx quando Δt tende a zero

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \equiv \frac{dx}{dt}$$

derivada de x em relação a t.

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Ou seja, se conhecemos a função $x(t)$, podemos encontrar a função $v(t)$ calculando o limite acima (que é o equivalente a "derivar a função $x(t)$ em relação a t").

Vamos fazer um exemplo simples considerando a função
$\underline{x(t) = at + b}$. (onde a e b são constantes)

Nesse caso:

$$x(t+\Delta t) = a(t+\Delta t) + b = at + a\Delta t + b$$

Logo:

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) =$$
$$\Delta x = (\cancel{at} + a\Delta t \cancel{+b}) - (\cancel{at+b})$$
$$\Delta x = a\Delta t$$

Portanto, v é:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a\cancel{\Delta t}}{\cancel{\Delta t}} \Rightarrow \boxed{v = a}$$.

Ou seja, v é constante! A função x(t) acima descreve uma partícula em movimento retilíneo uniforme!