

Comportement d'un fluide autour d'un petit obstacle, problèmes de convections et dynamique chaotique des films liquides

Jiao HE

Soutenance de la thèse

supervisée par Lorenzo Brandolese et Dragoş Iftimie

20 septembre, 2019



Plan de l'exposé

- I). Comportement d'un fluide autour d'un petit obstacle
- II). L'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq
- III). Dynamique des films liquides

Comportement d'un fluide autour d'un petit obstacle

Le système Fluide-Solide

$\mathcal{F}^\varepsilon(t)$ et $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$ sont les domaines occupés par le fluide et par le solide à l'instant t , respectivement.

$$\mathbb{R}^d = \mathcal{F}^\varepsilon(t) \cup \overline{\mathcal{S}^\varepsilon(t)}, \quad d = 2 \text{ ou } 3$$

On note par ε la diamètre de l'obstacle.

Le fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = 0, & t > 0, x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t). \\ \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Le fluide est au repos à l'infini et on suppose la condition Dirichlet au bord du solide $\partial\mathcal{S}^\varepsilon(t)$:

$$\begin{cases} u_\varepsilon(t, x) = h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t)(x - h_\varepsilon(t))^\perp, & d = 2 \\ u_\varepsilon(t, x) = h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)), & d = 3 \end{cases}$$

où l'on note $h_\varepsilon(t)$ la position du centre de masse du solide et $\omega_\varepsilon(t)$ la vitesse angulaire. Ici, on note $x^\perp = (-x_2, x_1)$ et \times le produit vectoriel de \mathbb{R}^3 .

Notations :

- m^ε : la masse de l'obstacle
- J^ε : la matrice d'inertie de l'obstacle
- n_ε : la normale unitaire sortant du $\partial\mathcal{F}^\varepsilon$

Équations de l'obstacle :

$$m^\varepsilon h_\varepsilon''(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon \quad d = 2 \text{ ou } 3$$

$$\begin{cases} J^\varepsilon \omega_\varepsilon'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^\varepsilon(t)} (\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) \cdot (x - h_\varepsilon)^\perp ds, & d = 2 \\ (J^\varepsilon \omega_\varepsilon)'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^\varepsilon(t)} (x - h_\varepsilon) \times (\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) ds, & d = 3 \end{cases}$$

Ici, $\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est le tenseur des contraintes du fluide.

$$\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = 2\nu D(u_\varepsilon) - p_\varepsilon I_n$$

$D(u_\varepsilon)$ est la partie symétrique du gradient

$$D(u_\varepsilon) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\varepsilon,j}}{\partial x_i} \right)_{i,j}$$

Notations :

- m^ε : la masse de l'obstacle
- J^ε : la matrice d'inertie de l'obstacle
- n_ε : la normale unitaire sortant du $\partial\mathcal{F}^\varepsilon$

Équations de l'obstacle :

$$m^\varepsilon h_\varepsilon''(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^\varepsilon} \sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon \quad d = 2 \text{ ou } 3$$

$$\begin{cases} J^\varepsilon \omega_\varepsilon'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^\varepsilon(t)} (\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) \cdot (x - h_\varepsilon)^\perp ds, & d = 2 \\ (J^\varepsilon \omega_\varepsilon)'(t) = - \int_{\partial\mathcal{S}^\varepsilon(t)} (x - h_\varepsilon) \times (\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) ds, & d = 3 \end{cases}$$

Ici, $\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ est le tenseur des contraintes du fluide.

$$\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = 2\nu D(u_\varepsilon) - p_\varepsilon I_n$$

$D(u_\varepsilon)$ est la partie symétrique du gradient

$$D(u_\varepsilon) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\varepsilon,j}}{\partial x_i} \right)_{i,j}$$

L'objectif est d'étudier l'influence d'un obstacle en mouvement sur le fluide visqueux incompressible quand la diamètre de l'obstacle $\varepsilon \rightarrow 0$. Cela signifie que l'obstacle se contracte vers un point.

Soit \tilde{u}^ε la vitesse globale,

$$3D : \quad \tilde{u}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} u_\varepsilon(t, x) & \text{si } x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t) \\ h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)) & \text{si } x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \end{cases}$$

$$2D : \quad \tilde{u}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} u_\varepsilon(t, x) & \text{si } x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t) \\ h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t)(x - h_\varepsilon(t))^\perp & \text{si } x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \end{cases}$$

Soit $\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x)$ la densité globale,

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x) = \chi_{\mathcal{F}^\varepsilon(t)}(x) + \rho_\varepsilon \chi_{\mathcal{S}^\varepsilon(t)}(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d.$$

Nous avons l'estimation d'énergie suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon|^2 + 4\nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |D(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon(0)|^2$$

où

$$3D : \quad \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon|^2 = \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + m^\varepsilon |h'_\varepsilon(t)|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon(t)) \cdot \omega_\varepsilon(t)$$

$$2D : \quad \int_{\mathbb{R}^d} \tilde{\rho}_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon|^2 = \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + m^\varepsilon |h'_\varepsilon(t)|^2 + J^\varepsilon |\omega_\varepsilon(t)|^2$$

Dans la littérature (fluide visqueux):

- Théorème d'existence d'une solution faible ¹ :
- Dans le cas d'un obstacle immobile : 2D ², 3D ³
- Dans le cas d'un obstacle en mouvement : Lacave.C., Takahashi.T. ⁴

Obstacle en mouvement		
	$m^\varepsilon \rightarrow m > 0$	$m^\varepsilon \rightarrow 0$
2D	forme arbitraire, nombreux	disque, petitesse, ρ_ε constante

Ils ont montré la convergence des solutions du système fluide-disque vers une solution des équations de Navier-Stokes. Dans leur preuve, ils ont utilisé une estimation de semi-groupe de Stokes et un argument de point fixe pour obtenir une estimation uniforme de la vitesse du disque $h'_\varepsilon(t)$.

¹ Serre.D. Japan J. Appl. Math, 1987

² Iftimie.D, Lopes Filho.M, Nussenzveig Lopes.H. Math. Ann, 2006

³ Iftimie.D, Kelliher.J. Proc. Amer. Math. Soc, 2009

⁴ Lacave. C., Takahashi.T. Small moving rigid body into a viscous incompressible fluid. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2017

Dans la littérature (fluide visqueux):

- Théorème d'existence d'une solution faible ¹ :
- Dans le cas d'un obstacle immobile : 2D ², 3D ³
- Dans le cas d'un obstacle en mouvement : Lacave.C., Takahashi.T. ⁴

Obstacle en mouvement		
	$m^\varepsilon \rightarrow m > 0$	$m^\varepsilon \rightarrow 0$
2D	forme arbitraire, nombreux	disque, petitesse, ρ_ε constante

Ils ont montré la convergence des solutions du système fluide-disque vers une solution des équations de Navier-Stokes. Dans leur preuve, ils ont utilisé une estimation de semi-groupe de Stokes et un argument de point fixe pour obtenir une estimation uniforme de la vitesse du disque $h'_\varepsilon(t)$.

Question :

- sans supposer la condition de petitesse et la forme du solide ?
- le cas de 3D ?

¹ Serre.D. Japan J. Appl. Math, 1987

² Iftimie.D, Lopes Filho.M, Nussenzveig Lopes.H. Math. Ann, 2006

³ Iftimie.D, Kelliher.J. Proc. Amer. Math. Soc, 2009

⁴ Lacave. C., Takahashi.T. Small moving rigid body into a viscous incompressible fluid. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2017

Résultats principaux

Nous montrerons la convergence des solutions du système fluide-solide vers une solution des équations de Navier-Stokes sans obstacle dans le cas où la densité du solide tend vers l'infini (2D et 3D) **sans condition de petitesse** et **pour n'importe quelle forme de solide**.

Dans notre preuve, nous n'avons pas besoin des estimations uniformes de la vitesse du solide $h'_\varepsilon(t)$. Nous montrons que l'estimation d'énergie est suffisante pour passer à la limite.

Obstacle en mouvement	
2D	forme arbitraire ; $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$
3D	forme arbitraire ; $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$

Théorème (en dimension 2)

Soit $u_\varepsilon(0, x) \in L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)$ de divergence nulle. On suppose que

- $S_0^\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$;
- $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ converge faiblement vers $u_0(x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$;
- la densité du solide ρ_ε vérifie

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \infty, \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0;$$

- $u_\varepsilon(0, x)$ est borné indépendamment de ε dans $L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)$ et $\sqrt{m^\varepsilon} h'_\varepsilon(0)$ et $\sqrt{J_\varepsilon} \omega_\varepsilon(0)$ sont bornés indépendamment de ε ;

Soit $(u_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ une solution faible globale du système. Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, \tilde{u}_ε converge faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ vers la solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 avec la donnée initiale u_0 .

Remarque 1 : $m^\varepsilon / \varepsilon^2 \rightarrow \infty$ implique $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty$.

Théorème (en dimension 2)

Soit $u_\varepsilon(0, x) \in L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)$ de divergence nulle. On suppose que

- $\mathcal{S}_0^\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$;
- $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ converge faiblement vers $u_0(x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$;
- la densité du solide ρ_ε vérifie

$$\rho_\varepsilon \rightarrow \infty, \quad \text{si } \varepsilon \rightarrow 0;$$

- $u_\varepsilon(0, x)$ est borné indépendamment de ε dans $L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)$ et $\sqrt{m^\varepsilon} h'_\varepsilon(0)$ et $\sqrt{J_\varepsilon} \omega_\varepsilon(0)$ sont bornés indépendamment de ε ;

Soit $(u_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ une solution faible globale du système. Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, \tilde{u}_ε converge faible $*$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ vers la solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 avec la donnée initiale u_0 .

Remarque 1 : $m^\varepsilon / \varepsilon^2 \rightarrow \infty$ implique $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty$.

Remarque 2 : Nous n'avons pas besoin des conditions aux bord. Nous pouvons travailler avec une suite de vitesses u_ε qui vérifient les équations de Navier-Stokes à l'extérieur d'un disque $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ tel que u_ε est bornée dans

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$$

Théorème (en dimension 2)

Soit v_ε un champ de vitesses de divergence nulle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ appartenant à l'espace

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(h_\varepsilon(t), \varepsilon)))$$

et soit $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2)$. De plus, supposons que

- v_ε est borné indépendamment de ε dans l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$;
- $v_\varepsilon(0, x)$ converge faiblement vers $v_0(x)$ dans L^2 quand $\varepsilon \rightarrow 0$;
- v_ε vérifie les équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t v_\varepsilon - \nu \Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon = -\nabla \pi_\varepsilon \quad \text{dans } \{(t, x) ; t > 0 \text{ et } |x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon\} \quad (1)$$

avec les données initiales $v_\varepsilon(0, x)$.

- la vitesse du centre du disque vérifie la condition $\varepsilon |h'_\varepsilon(t)| \rightarrow 0$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soit v la solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 associée à la donnée initiale v_0 . Alors, v_ε converge faible * vers v quand $\varepsilon \rightarrow 0$ dans

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)).$$

Idée de la preuve:

Le champ $v_\varepsilon(t, x)$ est borné indépendamment de ε dans $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$, donc il existe une sous-suite v_{ε_k} qui converge **faiblement** vers certain v dans

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)).$$

Le but est de montrer que v est la solution des équations de Navier-Stokes. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^2)$ une fonction test à divergence nulle, on veut montrer que

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \partial_t \varphi + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v : \nabla \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla v \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} v(0) \cdot \varphi(0).$$

Idee de la preuve:

Le champ $v_\varepsilon(t, x)$ est borné indépendamment de ε dans $L_t^\infty L_x^2 \cap L_t^2 H_x^1$, donc il existe une sous-suite v_{ε_k} qui converge **faiblement** vers certain v dans

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)).$$

Le but est de montrer que v est la solution des équations de Navier-Stokes. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^2)$ une fonction test à divergence nulle, on veut montrer que

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \partial_t \varphi + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v : \nabla \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla v \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} v(0) \cdot \varphi(0).$$

- 1.) Construisons une fonction test propre φ_ε qui s'annule au voisinage de l'obstacle $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ en tronquant la fonction courant. Soit φ une fonction test à divergence nulle. La fonction courant de φ est définie par

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y)^\perp}{2\pi |x - y|^2} \cdot \varphi(t, y) dy.$$

Nous définissons alors une fonction courant modifiée $\psi_\varepsilon(t, x)$ qui s'annule au centre de l'obstacle. Soit $\eta_\varepsilon(t, x)$ une **fonction troncature particulière** au voisinage de l'obstacle $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$. Nous construisons la fonction test φ_ε qui est une approximation de φ

$$\varphi_\varepsilon = \nabla^\perp(\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) = \eta_\varepsilon \varphi + \text{correcteur}.$$

2.) On passe à la limite par des méthodes de compacité.

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi_{\varepsilon_k} + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_{\varepsilon_k} : \nabla \varphi_{\varepsilon_k} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} \\
 = \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k}(0) \cdot \varphi_{\varepsilon_k}(0).
 \end{aligned}$$

Difficultés :

- Convergence forte est nécessaire pour passer à la limite ;
- Lorsque l'obstacle peut bouger dans un fluide, non seulement la fonction courant dépend du temps mais la fonction de troncature $\eta_\varepsilon(t, x)$ en dépend également. Il faut toujours considérer la vitesse de l'obstacle $h'_\varepsilon(t)$, quand on fait une estimation de la dérivée en temps ;
- Nous ne pouvons pas passer à la limite directement, parce que nous ne savons pas si h'_ε est bornée, nous savons seulement que $m^\varepsilon |h'_\varepsilon(t)|^2$ est bornée. De plus, le passage à la limite du terme ∇v_{ε_k} est délicat car la fonction de troncature introduit des puissances négatives de ε .

Nous utilisons **une estimation temporelle** pour montrer une convergence forte, i.e.

$$v_{\varepsilon_k} \rightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}).$$

Soit $\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction test ne dépendant pas du temps. Nous définissons une suite $\Xi_\varepsilon(t) \in H_\sigma^{-2}$ telle que

$$\langle \Xi_\varepsilon(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \quad \forall \varphi \in H_\sigma^2.$$

En utilisant le théorème d'Ascoli, nous montrons la convergence forte d'une sous-suite de $\Xi_\varepsilon(t)$. Comme $\Xi_\varepsilon(t)$ et v_ε sont proches dans H^{-2} , nous obtenons la **convergence forte** d'une sous-suite de v_ε dans $L^2(0, T; L^2_{\text{loc}})$ par interpolation.

Nous utilisons **une estimation temporelle** pour montrer une convergence forte, i.e.

$$v_{\varepsilon_k} \rightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}).$$

Soit $\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction test ne dépendant pas du temps. Nous définissons une suite $\Xi_\varepsilon(t) \in H_\sigma^{-2}$ telle que

$$\langle \Xi_\varepsilon(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \quad \forall \varphi \in H_\sigma^2.$$

En utilisant le théorème d'Ascoli, nous montrons la convergence forte d'une sous-suite de $\Xi_\varepsilon(t)$. Comme $\Xi_\varepsilon(t)$ et v_ε sont proches dans H^{-2} , nous obtenons la **convergence forte** d'une sous-suite de v_ε dans $L^2(0, T; L^2_{\text{loc}})$ par interpolation.

La convergence forte dans L^2 permet de passer à la limite au prix d'une estimation supplémentaire du terme dérivée en temps.

Le cas de la dimension trois

Dans le cas de la dimension trois, on obtient un théorème similaire.

Comme dans le théorème précédent, sans imposer des conditions de petitesse ni de restriction sur la forme du solide, nous pouvons montrer qu'il existe une sous-suite convergente

$$\tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$$

vers une solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3 avec donnée initiale $u_0(x)$.

L'unicité des solutions “mild” du système de Boussinesq

L'unicité des solutions “mild” du système de Boussinesq

Le système de Boussinesq décrit le phénomène de convection dans un fluide incompressible et visqueux. Le but principal est de démontrer l'unicité des solutions “mild” du système de Boussinesq.

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = \Delta \theta \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u + \theta e_3 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \theta|_{t=0} = \theta_0 \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}_+$$

Le champ de vecteurs $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ et le scalaire $\theta : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ désignent la vitesse et la température du fluide, respectivement.

Notons que dans le cas particulier $\theta \equiv 0$, on retrouve les équations de Navier Stokes.

On considère ici le système de Boussinesq sous forme intégrale :

$$\begin{cases} \theta(t) = e^{t\Delta}\theta_0 + B_3(u, \theta) \\ u(t) = e^{t\Delta}(u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3) + B_2(u, \theta) + B_1(u, u) \\ \nabla \cdot u_0 = 0. \end{cases}$$

où $B_1(u, u)$, $B_2(u, \theta)$, $B_3(u, \theta)$ sont trois opérateurs bilinéaires :

$$B_1(u, \tilde{u}) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes \tilde{u})(s) \, ds$$

$$B_2(u, \theta) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \theta e_3)(s) \, ds$$

$$B_3(u, \theta) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u \theta)(s) \, ds.$$

Théorème (Résultat basique d'existence)

Soit $(u_0, \theta_0) \in (L^3 \times L^1)(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$. Alors il existe un temps $T > 0$ et le système de Boussinesq avec donnée initiale (u_0, θ_0) admet une solution mild $(u, \theta) \in C([0, T]; L^3) \times C([0, T]; L^1)$.

Théorème (Résultat basique d'existence)

Soit $(u_0, \theta_0) \in (L^3 \times L^1)(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$. Alors il existe un temps $T > 0$ et le système de Boussinesq avec donnée initiale (u_0, θ_0) admet une solution mild $(u, \theta) \in C([0, T]; L^3) \times C([0, T]; L^1)$.

Question : A-t-on unicité ?

Théorème (Résultat basique d'existence)

Soit $(u_0, \theta_0) \in (L^3 \times L^1)(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$. Alors il existe un temps $T > 0$ et le système de Boussinesq avec donnée initiale (u_0, θ_0) admet une solution mild $(u, \theta) \in C([0, T]; L^3) \times C([0, T]; L^1)$.

Question : A-t-on unicité ?

On envisage d'établir l'unicité des solutions "mild" du système de Boussinesq dans un espace plus petit que $C([0, T]; L^3) \times C([0, T]; L^1)$ en mettant des conditions sur la température θ .

Théorème (Résultat basique d'existence)

Soit $(u_0, \theta_0) \in (L^3 \times L^1)(\mathbb{R}^3)$ avec $\nabla \cdot u_0 = 0$. Alors il existe un temps $T > 0$ et le système de Boussinesq avec donnée initiale (u_0, θ_0) admet une solution mild $(u, \theta) \in C([0, T]; L^3) \times C([0, T]; L^1)$.

Question : A-t-on unicité ?

On envisage d'établir l'unicité des solutions "mild" du système de Boussinesq dans un espace plus petit que $C([0, T]; L^3) \times C([0, T]; L^1)$ en mettant des conditions sur la température θ .

Dans l'esprit de celui de Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo pour le système de Navier-Stokes, nous établissons un théorème d'unicité suivant :

Théorème (L.Brandolese, J.H.)

Soient $T > 0$, $q > \frac{3}{2}$ et $(u_0, \theta_0) \in (L^3 \times L^1)(\mathbb{R}^3)$ telle que $\nabla \cdot u_0 = 0$. Soient (u, θ) et $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ deux solutions "mild" du système de Boussinesq avec donnée initiale (u_0, θ_0) telles que

$$u, \tilde{u} \in C([0, T]; L^3) \quad \theta, \tilde{\theta} \in C([0, T]; L^1) \cap L_{loc}^\infty((0, T); L^{q, \infty}).$$

Alors, $(u, \theta) = (\tilde{u}, \tilde{\theta})$.

Dans le même esprit que Kato pour le système de Navier-Stokes, nous utilisons un espace $X_p(T)$ muni de la norme

$$\|u\|_{X_p(T)} = \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{1}{2}(1-3/p)} \|u(t)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Concernant la température, nous considérons l'espace $Y_q(T)$ muni de la norme

$$\|\theta\|_{Y_q(T)} = \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{3}{2}(1-1/q)} \|\theta(t)\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Proposition

Soient $3/2 < q < 3$ et θ_0 dans l'adhérence de la classe Schwartz dans l'espace Besov inhomogène $B_{q,\infty}^{-3(1-1/q)}(\mathbb{R}^3)$. Soit $p > 3$ tel que $\frac{2}{3} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle dans l'adhérence de la classe de Schwartz dans $B_{p,\infty}^{-(1-3/p)}(\mathbb{R}^3)$. Alors il **existe** un temps $T > 0$ et un couple de solutions (u, θ) , tel que

$$(u, \theta) \in X_p(T) \times Y_q(T), \text{ et, } \|u\|_{X_p(T)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0, \|\theta\|_{Y_q(T)} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0.$$

De plus, il existe $R > 0$ ne dépendant que de p et q , tel que (u, θ) est **l'unique solution** satisfaisant $\|u\|_{X_p(T)} < R$ et $\|\theta\|_{Y_q(T)} < R$.

Le système de Boussinesq peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ \nabla \cdot u_0 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3] \\ e^{t\Delta}\theta_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} B_1(u, \tilde{u}) + B_2(u, \tilde{\theta}) \\ B_3(u, \tilde{\theta}) \end{pmatrix}.$$

Nous établissons d'abord la continuité de l'opérateur bilinéaire $\mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$ pour tout $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in E = X_p \times Y_q$:

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})\|_E \leq C_0 \|\mathbf{v}\|_E \|\tilde{\mathbf{v}}\|_E, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_0\|_E < 1/(4C_0).$$

En utilisant le lemme de point fixe dans l'espace de Banach E , nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution.

Remarque : Dans la proposition précédente, si on suppose de plus que $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, on a alors $u \in X_3(T) \cap X_\infty(T)$, u est continue en temps à valeurs de $L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\theta \in Y_1(T) \cap Y_\infty(T)$, θ est continue en temps à valeurs de $L^1(\mathbb{R}^3)$.

La solution obtenue ci-dessus satisfait, pour tout $1 < q < \infty$,

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} = 0. \quad (2)$$

Dans la suite, nous considérons l'espace $Y_{q,\infty}$ associé à (2) tel que

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty}} = \|\theta\|_{Y_{q,\infty,T}} \equiv \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < +\infty$$

et

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty,T'}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T' \rightarrow 0.$$

La solution obtenue ci-dessus satisfait, pour tout $1 < q < \infty$,

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} = 0. \quad (2)$$

Dans la suite, nous considérons l'espace $Y_{q,\infty}$ associé à (2) tel que

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty}} = \|\theta\|_{Y_{q,\infty},T} \equiv \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < +\infty$$

et

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty},T'} \rightarrow 0, \quad \text{as } T' \rightarrow 0.$$

Nous montrons que si $\theta \in Y_{q,\infty}$, l'unicité peut être garantie dès que la vitesse est dans $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$.

La solution obtenue ci-dessus satisfait, pour tout $1 < q < \infty$,

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} = 0. \quad (2)$$

Dans la suite, nous considérons l'espace $Y_{q,\infty}$ associé à (2) tel que

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty}} = \|\theta\|_{Y_{q,\infty,T}} \equiv \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < +\infty$$

et

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty,T'}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T' \rightarrow 0.$$

Nous montrons que si $\theta \in Y_{q,\infty}$, l'unicité peut être garantie dès que la vitesse est dans $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$.

Théorème (L.Brandolese, J.H.)

Soit un temps $T > 0$ et (u, θ) une solution 'mild' du système de Boussinesq, telle que

$$(u, \theta) \in C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q,\infty},$$

pour $3/2 < q < 3$. Alors les données initiales (u_0, θ_0) appartiennent à $L^3(\mathbb{R}^3) \times B_{q,\infty,\infty}^{-3(1-1/q)}$ et déterminent uniquement (u, θ) .

La solution obtenue ci-dessus satisfait, pour tout $1 < q < \infty$,

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} = 0. \quad (2)$$

Dans la suite, nous considérons l'espace $Y_{q,\infty}$ associé à (2) tel que

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty}} = \|\theta\|_{Y_{q,\infty,T}} \equiv \operatorname{ess\,sup}_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} < +\infty$$

et

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty,T'}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T' \rightarrow 0.$$

Nous montrons que si $\theta \in Y_{q,\infty}$, l'unicité peut être garantie dès que la vitesse est dans $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$.

Théorème (L.Brandolese, J.H.)

Soit un temps $T > 0$ et (u, θ) une solution 'mild' du système de Boussinesq, telle que

$$(u, \theta) \in C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q,\infty},$$

pour $3/2 < q < 3$. Alors les données initiales (u_0, θ_0) appartiennent à $L^3(\mathbb{R}^3) \times B_{q,\infty,\infty}^{-3(1-1/q)}$ et déterminent uniquement (u, θ) .

Nous remarquons qu'ici nous n'avons pas besoin que θ appartienne à $C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$.

Comment montrer l'unicité dans

$$C([0, T]; L^3) \times \left(C([0, T]; L^1) \cap L_{loc}^\infty((0, T); L^{q, \infty}) \right) ? \quad (*)$$

⁵Ben Artzi, M. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations

⁶Brézis, H. Remarks on the preceding paper by Ben-Artzi, M : “Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations”

Comment montrer l'unicité dans

$$C([0, T]; L^3) \times \left(C([0, T]; L^1) \cap L_{loc}^\infty((0, T); L^{q, \infty}) \right) ? \quad (*)$$

Idée de la preuve : On utilise un argument de compacité inspiré d'un théorème d'unicité de Ben Artzi ⁵ et Brézis ⁶. On définit deux semi-groupes

$$R(t): L^3(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad S(t): L^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^3)$$

tel que $(R(t)u_0, S(t)\theta_0)$ est la solution de Kato. Supposons que (u, θ) est une solution vérifiée (*) associées à $(u_0, \theta_0) \in L^3 \times L^1$, notre but est de montrer que

$$u(t) = R(t)u_0 \quad \text{et} \quad \theta(t) = S(t)\theta_0.$$

Soit $0 < s < \delta$ où $0 < \delta < T/2$. On observe que

$$u(t+s) = R(t)u(s) \quad \text{et} \quad \theta(t+s) = S(t)\theta(s), \quad \text{si } t \in [0, \delta]$$

Soit $K = \theta((0, T])$. Le temps d'existence dépend uniquement de K et on a

$$\sup_{s \in (0, \delta)} t^\sigma \|\theta(t+s)\|_{L^q} \leq \sup_{\theta_0 \in K} t^\sigma \|S(t)\theta_0\|_{L^q} \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow 0.$$

⁵Ben Artzi, M. [Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations](#)

⁶Brézis, H. [Remarks on the preceding paper by Ben-Artzi, M : "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations"](#)

On obtient

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} = 0,$$

ceci implique $\theta \in Y_{q,\infty}$.

De plus, on peut montrer que la solution de Kato vérifie $S(t)\theta_0 \in Y_{q,\infty}$.
On conclut la démonstration en utilisant le théorème d'unicité précédant.

Les films liquides en 2D

Nous nous intéressons à une équation dérivée par Tomlin, Papageorgiou & Pavliotis⁷ dans le cas où le fluide est situé au-dessus d'une plaque :

$$\eta_t + \eta\eta_x + (\beta - 1)\eta_{xx} - \eta_{yy} - \gamma\Lambda^3\eta + \Delta^2\eta = 0, \quad (\text{TPP})$$

où la constante $\beta > 0$ désigne le nombre de Reynolds, γ ($0 \leq \gamma \leq 2$) mesure le champ électrique et Λ est un opérateur non-local défini par

$$\widehat{\Lambda\eta} = |k|\hat{\eta}(k) = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(k).$$

⁷Tomlin, Papageorgiou, Pavliotis. [Three-dimensional wave evolution on electrified falling films](#). *J. Fluid Mech.* 2017

Nous nous intéressons à une équation dérivée par Tomlin, Papageorgiou & Pavliotis ⁷ dans le cas où le fluide est situé au-dessus d'une plaque :

$$\eta_t + \eta\eta_x + (\beta - 1)\eta_{xx} - \eta_{yy} - \gamma\Lambda^3\eta + \Delta^2\eta = 0, \quad (\text{TPP})$$

où la constante $\beta > 0$ désigne le nombre de Reynolds, γ ($0 \leq \gamma \leq 2$) mesure le champ électrique et Λ est un opérateur non-local défini par

$$\widehat{\Lambda\eta} = |k|\hat{\eta}(k) = (k_1^2 + k_2^2)^{\frac{1}{2}}\hat{\eta}(k).$$

Nous supposons que η est L périodique. Après un changement d'échelle, l'équation devient

$$\eta_t + \eta\eta_x + (\beta - 1)\eta_{xx} - \eta_{yy} - \delta\Lambda^3(\eta) + \varepsilon\Delta^2\eta = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2, t > 0 \quad (3)$$

avec $\beta > 0$, $0 \leq \delta \leq 2\sqrt{\varepsilon}$.

Supposons que les données initiales sont de moyenne nulle

$$\int_{\mathbb{T}^2} \eta_0(x, y) = 0.$$

⁷Tomlin, Papageorgiou, Pavliotis. [Three-dimensional wave evolution on electrified falling films](#). *J. Fluid Mech.* 2017

Motivation

L'équation est analogue à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky :

$$\eta_t + \eta\eta_x = -\eta_{xx} - \eta_{xxxx} \quad (\text{KS})$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$

non-linéarité instabilité dissipation

Motivation

L'équation est analogue à l'équation de Kuramoto-Sivashinsky :

$$\eta_t + \eta\eta_x = -\eta_{xx} - \eta_{xxxx} \quad (\text{KS})$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$

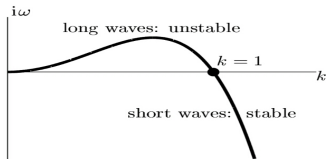
non-linéarité instabilité dissipation

En prenant la transformée de Fourier en x de la partie linéaire de (KS), on obtient

$$\partial_t \hat{\eta}(k) = (k^2 - k^4) \hat{\eta}(k).$$

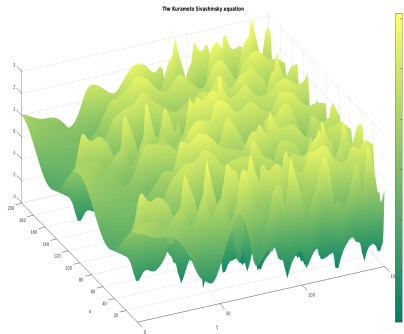
Le terme η_{xx} conduit à une instabilité à grande échelle ; le terme dissipatif η_{xxxx} est responsable de l'amortissement à petite échelle. $\eta\eta_x$ transfère l'énergie des grandes longueurs d'onde aux courtes longueurs d'onde et équilibre la croissance exponentielle à cause de la partie linéaire.

L'équation de KS est connue pour avoir des solutions instables.

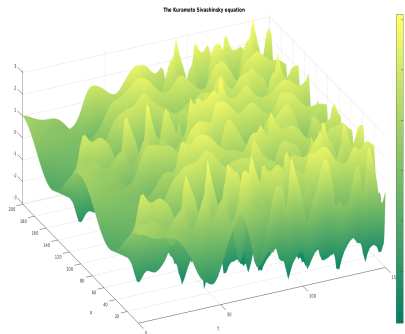


Motivation

Simulation de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (1D)



Simulation de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (1D)



Nous considérons l'équation

$$\eta_t + \eta\eta_x + (\beta - 1)\eta_{xx} - \eta_{yy} - \delta\Lambda^3(\eta) + \varepsilon\Delta^2\eta = 0, (x, y) \in \mathbb{T}^2, t > 0$$

avec les données initiales de moyenne nulle.

But :

- Existence d'un attracteur
- Majoration du nombre des pics des solutions

Existence globale. Soit $\eta_0 \in H^2(\mathbb{T}^2)$. L'utilisation d'un théorème de point fixe et des estimations d'énergie *à priori* nous permettent d'obtenir une unique solution

$$\eta \in C([0, T]; H^2(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(0, T; H^4(\mathbb{T}^2)), \text{ pour tout } T > 0.$$

Existence globale. Soit $\eta_0 \in H^2(\mathbb{T}^2)$. L'utilisation d'un théorème de point fixe et des estimations d'énergie *à priori* nous permettent d'obtenir une unique solution

$$\eta \in C([0, T]; H^2(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(0, T; H^4(\mathbb{T}^2)), \text{ pour tout } T > 0.$$

Introduisons un sous-espace de $H^2(\mathbb{T}^2)$:

$$H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2) = \{\eta \in H^2(\mathbb{T}^2) : -\eta(-x, y) = \eta(x, y), \forall (x, y)\}$$

Theorem (R.Granero-Belinchón, J.H.)

Soient η la solution du système associée à la donnée initiale $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$ et $T_0(\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0)$ une constante dépendant de $\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0$. Alors, pour tout $t \geq T_0/2$, le nombre d'oscillations spatiales des solutions de (TPP) est estimé par :

$$\text{card}\{|\nabla\eta(x, y, t)| = 0\} \leq C_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}$$

où $C_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}$ dépend de $\varepsilon, \beta, \delta$ et la norme de η_0 (explicitement).

Étape 1 : Existence d'un borné absorbant des solutions

Théorème Soit $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Alors la solution η du problème de Cauchy vérifie

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0},$$

où $R_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}$ est une constante dépendant de $\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0$.

Étape 1 : Existence d'un borné absorbant des solutions

Théorème Soit $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Alors la solution η du problème de Cauchy vérifie

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0},$$

où $R_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}$ est une constante dépendant de $\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0$.

Dém. On établit une fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{F}(t) = \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2$, où ϕ est une fonction indépendante du temps définie par

$$\phi_x = -2\lambda \sum_{0 < |\xi_1| \leq A/\varepsilon} e^{-ix\xi_1}.$$

On montre que

$$\frac{d}{dt} \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq -\|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + F_{\varepsilon, \beta, \delta}(\phi),$$

où $F_{\varepsilon, \beta, \delta}(\phi)$ dépend de $\varepsilon, \beta, \delta$ et la norme de ϕ (explicitement).

Une fois établie l'existence d'un borné absorbant dans L^2 , on peut ensuite montrer qu'il existe un borné absorbant dans les espaces de Sobolev supérieurs par un argument 'bootstrap'.

Étape 2 : (TPP) admet une solution analytique

Nous introduisons d'abord la classe de Gevrey. Étant donnée une fonction $\sigma(t)$ positive, nous considérons l'espace

$$G := \{\eta \in L^2(\mathbb{T}^2) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\hat{\eta}(\xi)|^2 < \infty\},$$

muni de la norme $\|\eta\|_{\sigma(t)}^2 = \|e^{\sigma(t)\Lambda} \eta\|_{L^2}^2$.

Étape 2 : (TPP) admet une solution analytique

Nous introduisons d'abord la classe de Gevrey. Étant donnée une fonction $\sigma(t)$ positive, nous considérons l'espace

$$G := \{\eta \in L^2(\mathbb{T}^2) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\hat{\eta}(\xi)|^2 < \infty\},$$

muni de la norme $\|\eta\|_{\sigma(t)}^2 = \|e^{\sigma(t)\Lambda} \eta\|_{L^2}^2$.

Théorème Soit $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Alors il existe un temps $T_0 > 0$ dépendant de $\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0$, tel que :

$$\|\eta\|_{\sigma(t)}^2 \leq C'_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}, \quad \forall t > 0$$

où $\sigma(t) = \min\{\tanh(t), \tanh(T_0/2)\}$. En particulier, pour tout $t > 0$, elle est analytique.

Étape 2 : (TPP) admet une solution analytique

Nous introduisons d'abord la classe de Gevrey. Étant donnée une fonction $\sigma(t)$ positive, nous considérons l'espace

$$G := \{\eta \in L^2(\mathbb{T}^2) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\hat{\eta}(\xi)|^2 < \infty\},$$

muni de la norme $\|\eta\|_{\sigma(t)}^2 = \|e^{\sigma(t)\Lambda} \eta\|_{L^2}^2$.

Théorème Soit $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Alors il existe un temps $T_0 > 0$ dépendant de $\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0$, tel que :

$$\|\eta\|_{\sigma(t)}^2 \leq C'_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}, \quad \forall t > 0$$

où $\sigma(t) = \min\{\tanh(t), \tanh(T_0/2)\}$. En particulier, pour tout $t > 0$, elle est analytique.

Dém. En prenant le produit scalaire de $\eta(t)$ dans la classe de G , nous obtenons que

$$\|\eta(t)\|_{\sigma(t)}^2 \leq 1 + 2 \|\eta_0\|_{L^2}^2 \quad \text{pour } t \in (0, T_0].$$

Ceci implique l'analyticité locale de $\eta(t)$. Un argument de 'bootstrap' et la structure spéciale de la fonction $\sigma(t)$ nous permettent de rendre l'analyticité globale.

Étape 3 : Existence d'un attracteur.

Théorème L'équation (TPP) admet un attracteur compact, connexe, maximal dans $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$.

Par l'existence d'un borné absorbant et par l'analyticité globale des solutions, en utilisant un théorème de Teman⁸, nous montrons que l'équation (TPP) admet un attracteur dans $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$.

⁸Teman, R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, 1997

⁹Grujić, Z. Spatial analyticity on the global attractor for the Kuramoto-Sivashinsky equation. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2000

Étape 3 : Existence d'un attracteur.

Théorème L'équation (TPP) admet un attracteur compact, connexe, maximal dans $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$.

Par l'existence d'un borné absorbant et par l'analyticité globale des solutions, en utilisant un théorème de Teman⁸, nous montrons que l'équation (TPP) admet un attracteur dans $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$.

Étape 4 : Estimation du nombre des pics des solutions.

Nous en déduisons une majoration du nombre d'oscillations spatiales des solutions en utilisant les arguments de Grujić⁹.

$$\text{card}\{\text{pics des } \eta\} \leq C_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}$$

⁸Teman, R. Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, 1997

⁹Grujić, Z. Spatial analyticity on the global attractor for the Kuramoto-Sivashinsky equation. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2000

quelques points techniques à améliorer et perspectives

- Le système fluide-solide :
 - ↪ Pour le cas où la densité du solide est indépendante de la taille de l'obstacle (sans condition de petitesse)
 - ↪ Déterminer l'équation limite pour la trajectoire
- Le système de Boussinesq :
 - ↪ Le comportement asymptotique de ce système.
- Les films liquides :
 - ↪ Comment montrer l'existence d'un borné absorbant sans supposer que les données initiales sont impaires dans la direction x ?

Merci pour votre attention !