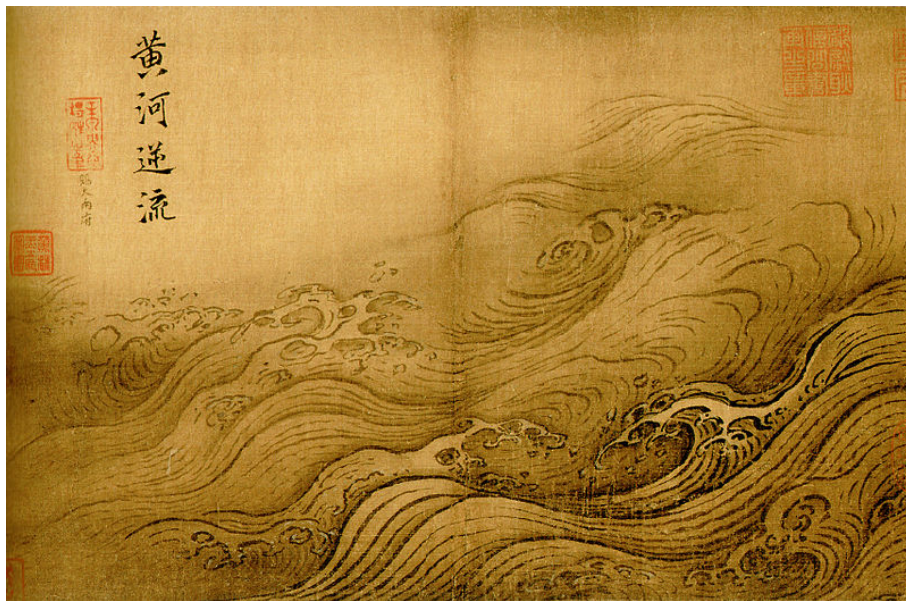


Comportement d'un fluide autour d'un petit
obstacle, problèmes de convections et dynamique
chaotique des films liquides



Jiao HE

Thèse de doctorat

Université Claude Bernard Lyon 1
École doctorale InfoMaths (ED 512)
Spécialité : Mathématiques
n°. d'ordre : 2019LYSE1131

Comportement d'un fluide autour d'un petit obstacle, problèmes de convections et dynamique chaotique des films liquides

Thèse présentée en vue d'obtenir le diplôme de
Doctorat de l'Université de Lyon

soutenue publiquement le 20 septembre 2019 par
Jiao He

devant le jury composé de :

Sylvie Benzoni-Gavage	(Université Lyon 1)	Examinatrice
Lorenzo Brandolese	(Université Lyon 1)	Directeur de thèse
Dragoş Iftimie	(Université Lyon 1)	Directeur de thèse
Grzegorz Karch	(Université de Wrocław)	Rapporteur
Evelyne Miot	(Université Grenoble-Alpes)	Examinatrice
Sylvie Monniaux	(Université Aix-Marseille)	Examinatrice
Denis Serre	(ENS de Lyon)	Examineur
Takéo Takahashi	(Université de Lorraine)	Rapporteur

Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier mes directeurs de thèse Lorenzo Brandolese et Dragos Iftimie. Je vous remercie tout particulièrement de m'avoir fait découvrir le monde de la recherche et proposé tout au long de ces trois années des sujets passionnants. Je vous remercie chaleureusement pour votre disponibilités, votre enseignements et votre confiances.

Je tiens à remercier mes rapporteurs, Grzegorz Karch et Takéo Takahashi d'avoir accepté de rapporter sur ma thèse. J'ai connu Grzegorz, il y a presque un an. J'ai par ailleurs beaucoup appris lors des discussions que j'ai eues avec Grzegorz. Également, j'aimerais remercier Sylvie Benzoni-Gavage, Evelyne Miot, Sylvie Monniaux et Denis Serre d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je leur suis reconnaissant !

Je souhaiterais remercier toutes les personnes avec qui j'ai eu des discussions mathématiques pendant ces trois ans. Tout d'abord, j'aimerais remercier mon co-auteur : Rafael Granero-Belinchón, pour sa gentillesse, pour les discussions partagées et pour m'inviter à séjourner à Santander afin de travailler ensemble. Je pense ensuite à Francesco Fanelli, qui est toujours de bons conseils, concernant les mathématiques. Merci à Didier Bresch de m'inviter à Chambéry. Je tiens à remercier Valentina Busuioc, qui est toujours là et m'a encouragé beaucoup pendant cette thèse. Je remercie également Christophe Lacave, Pierre-Damien Thizy, Alexandre Boritchev, Lingmin Liao, Aihua Fan...Merci à eux pour leur gentillesse et pour les discussions partagées. Je tiens à remercier Youcef Mammeri d'avoir encadré mon stage de master. Je remercie par ailleurs Diego Chamorro d'avoir participé à mon "suivi de thèse" et accepté d'être mon referee. Un grand merci aussi à mes amis Maxime H, Xian Liao, Yuexun Wang, Jiqiang Zheng, qui m'a fortement encouragé, Chengjie Liu, qui m'inviter à séjourner à Shanghai. Je remercie les personnes avec qui j'ai parlé des enseignements. Je pense en particulièrement à Ivan Gentil et Louis Dupaigne. Enfin, merci à tous les membres de l'équipe Analyse-EDP.

Pendant ces trois années j'ai bénéficié d'une atmosphère extraordinaire à l'ICJ. Je tiens à remercier tous les membres de l'ICJ. Un grand merci à mes co-bureaux. Ça fait très agréable de partager le bureau avec Marion (merci! tu es toujours là), Mickaël, Gwladys, Antoine (merci pour votre aide indispensable pour la rédaction de l'introduction de cette thèse), Olga, Tingxiang (qui m'ont dit mille gentillesse), Félix et Caius. Merci aussi à la fille de Tingxiang, Shiqi. Je remercie par ailleurs Qiongqiong, qui montre son intérêt pour mes travaux et qui est toujours là pour m'encourager, me soutenir. Je voudrais remercier les autres camarades thésards à l'ICJ, qui m'ont accompagné pendant ces années. Un grand merci à Caterina, Simon Z, qui travaillent aussi sur les EDPs, pour nos discussions toujours intéressantes. Un merci chaleureux à Simon A (grâce à qui j'ai appris que j'aimais bien l'escalade), Octave (merci pour ton petit pot), Hugo (merci pour ton template LaTeX de cette thèse), Melanie, Lola (merci pour votre gentillesse), Ariane (avec qui j'ai le plaisir de pratiquer ma date de soutenance), Eduard, Benjamin C, Benjamin D, Christian, Quentin, Samuel, Vincent, Théo, Khanh, Marina, Daniel,

Jorge, Patricia, Bin

Un grand merci aussi à mes amis chinois en France. La thèse, ce n'est pas que des maths. Je pense en premier lieu à toutes les personnes avec qui j'ai fait du sport régulièrement à Lyon : Jihua Hao, Renbiao Tao, Weidong Zhang, Bo Li, Xing Wang...Merci aussi, Min Xu (et ton fils), Yan Zhao, Bomin FU...pour cette année passée ensemble. Un grand merci en particulièrement à toutes les personnes de Résidence du Tonkin : merci aux papi et mamie qui sont toujours là m'écoutent et m'encouragent. Je tiens à remercier mes amis avec qui j'ai passé de bon moments à Nice : Qian Dong, Sijie Fu, Pengfei Huang, Jing Li, Kuijie Li, Jie Liu, Zhenjian Wang, Zhixin Xie, Jiaying Yue, Chaoen Zhang, Zhiyan Zhao, Haroune...Un grand merci aussi à mes amis chinois à Grenoble. Je remercie Jian pour ton amitié, pour les discussions mathématiques et pour ton accueil à chaque fois que je suis venu à Grenoble. Je remercie également Zhizhong Huang, Peng Du, Xiaolin Zeng, Wenjie Fang, Ruxi Shi, Ruoci Sun, Changzhen Sun, Yuzhe Zhu, Bo Xia...

Je remercie les personnes avec qui j'ai rencontrées pendant le CEMRACS 2019 au CIRM. Tout d'abord, j'aimerais remercier les organisateurs et les autres chercheurs, Frédéric Lagoutière, qui m'a proposé de participer à cette école, Arnaud Duran et Benoit Fabréges, qui ont eu ses gentillesse et sa patience de répondre à mes nombreuses questions, Roland Denis, Fabien Marche, Martin Parisot, Yohan Penel et Frédéric Rousset...Je voudrais remercier mes co-auteurs : Edoardo et Gaston, pour ses compagnies, ses gentillesse et les discussions partagées. Merci aussi à David Lannes pour sa disponibilité et sa gentillesse. De plus, j'ai eu la chance de rencontrer de nombreux autres doctorants et post-docs durant cette école d'été. Ça fait très agréable de partager la salle de travail avec Émilie, Sergey et Firas, qui m'a dit mille gentillesse. Enfin, merci à Pei Su, Louis, Xavier, Abraham, Sébastien, Jules, Meissa, Khawla, Duc, Krisztian, Ayoub, Jean-Jérôme, Kevin, Bilal, avec qui j'ai eu l'occasion de parler de mathématiques, de se baigner et de jouer de Ping-Pong...

Je voudrais finir ces remerciements en pensant à mes parents et mon conjoint. Merci à mes parents : tout aurait été compliqué si vous n'aviez pas été toujours là pour me soutenir. Merci à Chenmin. Tu es toujours là me soutenir, m'écouter, m'encourager et t'intéresser à mes travaux.

1	Introduction	1
1.1	Fluides Incompressibles	2
1.2	Le système fluide-solide	4
1.2.1	Présentation du système	4
1.2.2	Travaux Précédents	8
1.2.3	Résultats de la thèse sur le système fluide-solide	10
1.2.4	Directions futures et perspectives	16
1.3	Système de Boussinesq	16
1.3.1	Présentation du système de Boussinesq	16
1.3.2	Travaux précédents	17
1.3.3	Résultats de la thèse sur l'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq	20
1.4	Les films liquides en 3D	24
1.4.1	Motivation et travaux précédents	24
1.4.2	Résultats de la thèse sur les films liquides en 3D	26
I	Fluid-solid system	31
2	Small moving rigid body into a 2D fluid	33
2.1	Introduction	34
2.2	Notation and preliminary results	39
2.3	Cut-off near the rigid body	41
2.4	Temporal estimate and strong convergence	45
2.5	Passing to the limit	48
3	Small moving rigid body into a 3D fluid	51
3.1	Introduction and Statement of results	52
3.2	Notation and Preliminary results	57
3.3	Cut-off near the rigid body	59
3.4	Temporal estimate and strong convergence	61
3.5	Passing to the limit	65

II	Boussinesq system	71
4	Uniqueness of mild solutions of the Boussinesq system	73
4.1	Introduction	74
4.2	Proof of the main theorems	77
4.2.1	Preliminary estimates	77
4.2.2	The proof of Theorem 4.1.3.	80
4.2.3	Existence theorems.	82
4.2.4	The end of the proof of Theorem 4.1.2	85
III	3D Falling films	87
5	On the dynamics of 3D electrified falling films	89
5.1	Introduction	90
5.1.1	Notation	92
5.2	Rescaling of the equation	92
5.3	Global existence of strong solutions	92
5.4	Large time dynamics	96
5.5	Analyticity	101
5.6	Existence of attractor and the number of peaks	105

Résumé

Cette thèse est consacrée à trois différentes équations d'évolution non-linéaires rencontrées dans la mécanique des fluides : le système fluide-solide, le système de Boussinesq et les films liquides. Cette introduction comporte quatre parties. Dans la première partie, nous rappelons le modèle des équations de Navier-Stokes, décrivant le mouvement des fluides visqueux incompressibles. La seconde partie est consacrée à l'évolution d'un solide en mouvement dans un fluide incompressible. En supposant que la densité du solide tend vers l'infini quand le diamètre du solide tend vers 0, nous montrons la convergence des solutions du système fluide-solide vers une solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^d , avec $d = 2$ et 3 . La troisième partie est consacrée à l'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq et généralise de plusieurs manières différentes des résultats classiques d'unicité pour les équations de Navier-Stokes. Enfin nous exposons nos contributions à l'étude des films liquides : l'existence d'un borné absorbant, l'analyticité, l'existence d'un attracteur global et l'oscillation spatiale des solutions. Dans chaque partie, nous détaillons la formulation du système étudié, les travaux précédents associés et puis nous énonçons les théorèmes ainsi que les idées principales des démonstrations.

Cette thèse regroupe quatre articles : [HI18] accepté dans JOURNAL OF DYNAMICS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS ; [BH18] accepté dans TOHOKU MATHEMATICAL JOURNAL ; [HI19] soumis ; puis un dernier concernant le film liquide qui est en cours de rédaction [HGB19].

1.1 Fluides Incompressibles

Un fluide est un milieu matériel continu et déformable (liquides, gaz et plasmas). La mécanique des fluides s'intéresse au comportement macroscopique des fluides par rapport à la distance entre les molécules. Les fluides que nous considérons dans cette thèse seront isotropes, visqueux et incompressibles. Un fluide est dit isotrope lorsque ses propriétés sont identiques dans toutes les directions.

Il y a deux descriptions possibles pour un fluide en mouvement. Dans la représentation de Lagrange, le référentiel se déplace avec le fluide. Dans la représentation d'Euler, le référentiel est fixe pendant que le fluide se déplace. Cette méthode permet de décrire le champ de vitesse en tout point de l'espace et à chaque instant. On utilise le plus souvent la description eulérienne pour étudier le comportement du fluide.

Les chapitres 2 et 3 de cette thèse consistent à étudier le comportement asymptotique des solutions du système fluide-solide. Plus précisément, nous étudions l'évolution d'un petit solide dans un fluide newtonien incompressible en supposant que l'obstacle en mouvement se contracte vers un point. Le chapitre 2 de cette thèse concerne le cas de la dimension deux, tandis que le chapitre 3 concerne le cas de la dimension trois. Le chapitre 4 étudie l'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq en dimension trois. Le système de Boussinesq est composé de l'équation d'un fluide visqueux incompressible et de l'équation de la température. Dans le dernier chapitre on aborde un problème différent : celui de la dynamique chaotique des films liquides.

Tous ces problèmes ont un fil conducteur commun : les équations de Navier-Stokes incompressibles. Nous allons rappeler tout d'abord quelques propriétés classiques des équations de Navier-Stokes posées dans \mathbb{R}^d . Même si ce cas particulier n'est pas abordé directement dans mes travaux, ces quelques propriétés joueront un rôle important dans ce qui suit.

Considérons l'évolution d'un fluide visqueux incompressible dans l'espace tout entier en étudiant son champ de vitesse $u(t, x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, qui est un vecteur à d composantes, dépendant de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^d$ et du temps $t \geq 0$. Son évolution est décrite par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p = 0 \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u(0) = u_0 \end{cases} \quad (\text{NS})$$

où

$$\operatorname{div} u = \sum_{j=1}^d \partial_j u^j, \quad (u \cdot \nabla)u = \sum_{j=1}^d u^j \partial_j u, \quad \Delta u = \sum_{j=1}^d \partial_j^2 u.$$

Au-dessus p désigne la pression du fluide. Souvent une force extérieure agit sur le fluide et dans ce cas un terme supplémentaire figure à droite dans le système mais nous supposons pour simplifier que la force est nulle. Un fluide est dit incompressible lorsque sa masse volumique ne dépend pas de la pression ou de la température. Généralement, les liquides sont considérés comme incompressibles et les gaz sont compressibles. La divergence nulle du champ de vitesse équivaut à l'incompressibilité du fluide. En mécanique des fluides, la loi de conservation de la masse peut se traduire par l'équation de continuité. L'incompressibilité du fluide et la conservation de la masse impliquent que la densité ρ du fluide est constante si elle l'est à l'instant initial. Un fluide est dit visqueux lorsque la déformation s'accompagne d'une résistance. Sinon, le fluide est dit parfait. Dans le premier cas, le fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes, où la viscosité est strictement positive, dans le second, lorsque la viscosité ν est nulle, les équations se réduisent aux équations d'Euler.

L'énergie du fluide à l'instant t est donnée par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |u(t, x)|^2 dx = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2.$$

En multipliant formellement l'équation de Navier-Stokes par u , en intégrant par parties, nous pouvons obtenir l'estimation d'énergie bien connue suivante

$$\frac{1}{2} \|u(t)\|_{L^2}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla u(s)\|_{L^2}^2 ds = \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L^2}^2.$$

On sait que l'énergie est conservée au cours du temps en l'absence de viscosité. Sinon, elle est décroissante en temps car le terme de Laplace conduit à une dissipation de l'énergie. Cette estimation d'énergie conduit à l'existence des solutions faibles de Leray des équations de Navier-Stokes [Ler34]. De même, dans les chapitres 2 et 3 une estimation d'énergie similaire nous permettra de montrer la convergence des solutions faibles du système fluide-solide.

L'estimation d'énergie nous donne un espace de résolution naturel pour les équations de Navier-Stokes :

$$L^\infty([0, t]; L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2([0, t]; \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$$

où l'espace de Sobolev homogène \dot{H}^1 est muni de la norme

$$\|u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)} = \| |\xi| \hat{u}(\xi) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Une autre propriété importante des équations de Navier-Stokes est l'invariance par changement d'échelle. Plus précisément, soit u_0 un champ de vitesse de divergence nulle et supposons qu'il existe une solution $(u(t, x), p(t, x))$ des équations de Navier-Stokes de donnée initiale u_0 . Alors la quantité définie par

$$(u_\lambda(t, x), p_\lambda(t, x)) = (\lambda u(\lambda^2 t, \lambda x), \lambda^2 p(\lambda^2 t, \lambda x))$$

est une solution des mêmes équations avec donnée initiale $u_{0,\lambda}(x) = \lambda u_0(\lambda x)$. Il est donc naturel d'étudier les espaces qui laissent invariante la norme de la donnée initiale par ce changement de variables.

Un espace de Banach X est dit critique pour l'équation de Navier-Stokes s'il vérifie la propriété d'invariance $\|f(\cdot)\|_X = \|\lambda f(\lambda \cdot)\|_X$ pour tout $\lambda > 0$. Pour les espaces de Sobolev, l'espace critique est $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)$; pour les espaces de Lebesgue, l'espace critique est $L^d(\mathbb{R}^d)$. L'invariance d'échelle nous permet de trouver beaucoup d'espaces de résolution des équations, par exemple, $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^d(\mathbb{R}^d))$. Nous allons voir que le système de Boussinesq a aussi cette propriété d'invariance par changement d'échelle. Cela nous aidera à choisir les espaces de résolution dans le chapitre 4.

Une autre caractéristique importante des équations de Navier-Stokes est qu'il existe une formule explicite pour la pression en termes du champ de vitesse. En prenant la divergence de la première équation de (NS), on obtient que

$$p = (-\Delta)^{-1} \operatorname{div}(u \cdot \nabla u).$$

Nous pouvons définir le projecteur de Leray \mathbb{P} par

$$\mathbb{P} = \operatorname{Id} - \nabla \Delta^{-1} \operatorname{div}.$$

C'est un opérateur pseudo-différentiel non-local, et son multiplicateur de Fourier $m(\xi)$ est donné par

$$m(\xi)_{kj} = \delta_{kj} - \frac{\xi_k \xi_j}{|\xi|^2}, \quad 1 \leq k, j \leq d.$$

où δ est le symbole de Kronecker. Le projecteur de Leray peut être vu comme une projection sur les champs de vecteurs à divergence nulle. On peut l'utiliser pour éliminer la pression dans les équations de Navier-Stokes. Après application du projecteur de Leray, (NS) devient

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u). \\ \operatorname{div} u = 0, \quad u(0) = u_0. \end{cases} \quad (\text{NS-1})$$

La formule de Duhamel nous permet alors de réécrire ces équations sous la forme intégrale suivante :

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + B(u, u) \quad \text{avec} \quad B(u, u) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds \quad (1.1.1)$$

Les solutions obtenues par cette formule ont été appelées solutions ‘mild’ par Fujita et Kato en 1964 [FK64]. De même, on peut appliquer le projecteur de Leray au système de Boussinesq pour éliminer la pression dans l'équation de la vitesse, et on peut appliquer la formule de Duhamel pour réécrire le système de Boussinesq sous une forme intégrale comme au-dessus. Nous étudierons ensuite cette forme intégrale pour obtenir des résultats d'unicité pour ce système dans le chapitre 4.

1.2 Le système fluide-solide

Dans le chapitre 2 et le chapitre 3, nous considérons l'évolution d'un petit solide en mouvement dans un fluide visqueux newtonien incompressible. Dans cette section nous précisons les modèles étudiés, nous présentons les travaux précédents sur le sujet et nous énonçons nos résultats.

Le mouvement du fluide est décrit par les modèles classiques en mécanique des fluides, alors que le mouvement du solide est décrit par la loi de conservation du moment linéaire et angulaire. C'est ce qui s'appelle le système fluide-solide. Comme nous nous intéressons au cas visqueux, le fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Le solide se déplace sous l'influence du fluide et il est supposé imperméable et indéformable.

1.2.1 Présentation du système

Nous commençons par présenter les équations d'un solide en mouvement, puis les équations du fluide et les conditions aux limites, et enfin les estimations d'énergie du système.

Équations de mouvement du solide

En dimension 2 :

Initialement, le solide occupe le domaine $\mathcal{S}_0^\varepsilon$ qui est un petit sous-ensemble non vide fermé borné et simplement connexe de \mathbb{R}^2 . On note $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$ le domaine occupé par le solide au temps t . L'évolution du solide $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$ est décrite par $h_\varepsilon(t)$, la position du centre de masse, et par $\theta_\varepsilon(t)$, l'angle de rotation du solide par rapport à la position initiale. Nous avons

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = h_\varepsilon(t) + \mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}(t)x_0, \quad x_0 \in \mathcal{S}_0^\varepsilon\},$$

où $\mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}(t) \in SO(2)$ est la matrice de rotation du solide qui a la forme suivante :

$$\mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta_\varepsilon(t) & -\sin \theta_\varepsilon(t) \\ \sin \theta_\varepsilon(t) & \cos \theta_\varepsilon(t) \end{pmatrix}.$$

Cette matrice fait tourner le solide d'un angle θ_ε . On voit que $\mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}(0) = I$, $\mathcal{R}_{\theta_\varepsilon} \mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}^T = I = \mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}^T \mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}$ et $\mathcal{R}'_{\theta_\varepsilon} \mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}^T$ est antisymétrique. Nous définissons la vitesse de rotation $\omega_\varepsilon(t) = \theta'_\varepsilon(t)$ et nous

remarquons que

$$\mathcal{R}'_{\theta_\varepsilon}(t)\mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}(t)^T x = \omega_\varepsilon(t)x^\perp, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

L'orthogonal x^\perp désigne $x^\perp := (-x_2, x_1)$. La vitesse du solide est donnée par

$$\begin{aligned} h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'_{\theta_\varepsilon}(t)x_0 &= h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'_{\theta_\varepsilon}(t)\mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}(t)^{-1}(x - h_\varepsilon(t)) \\ &= h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'_{\theta_\varepsilon}(t)\mathcal{R}_{\theta_\varepsilon}(t)^T(x - h_\varepsilon(t)) \\ &= h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t)(x - h_\varepsilon(t))^\perp \quad \text{pour } t > 0, x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Nous supposons que la densité du solide ρ_ε est homogène. Notant m^ε la masse du solide, alors $m^\varepsilon = \rho_\varepsilon|\mathcal{S}_0^\varepsilon|$ où $|\mathcal{S}_0^\varepsilon|$ est le volume du solide. On note aussi J^ε le moment d'inertie du solide. En dimension deux, J^ε est un scalaire indépendant du temps t (comme on peut le voir par un changement de variables immédiat), qui s'écrit sous la forme

$$J^\varepsilon := \rho_\varepsilon \int_{\mathcal{S}^\varepsilon} |x - h_\varepsilon(t)|^2 dx$$

L'énergie cinétique totale du solide s'exprime sous la forme

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}^\varepsilon}(t) = \frac{1}{2}m^\varepsilon|h'_\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{2}J^\varepsilon|\theta'_\varepsilon(t)|^2.$$

En dimension 3 :

Nous utilisons des notations similaires dans le cas de la dimension 3. La position du centre de masse $h_\varepsilon(t)$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 et la matrice de rotation $\mathcal{R}(t)$ est un élément de $SO(3)$. L'évolution du solide peut être décrite par la composition entre une translation et une rotation. Nous avons

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = h_\varepsilon(t) + \mathcal{R}(t)x_0, x_0 \in \mathcal{S}_0^\varepsilon\}.$$

La vitesse du solide $x(t) = h_\varepsilon(t) + \mathcal{R}(t)x_0$ est donnée par

$$\begin{aligned} h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'(t)x_0 &= h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^{-1}(x - h_\varepsilon(t)) \\ &= h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^T(x - h_\varepsilon(t)) \quad \text{pour } t > 0, x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \end{aligned}$$

Comme $\mathcal{R}(t) \in SO(3)$, la matrice $\mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^T$ est antisymétrique. Donc elle est associée à un vecteur de rotation que l'on désigne par $\omega_\varepsilon(t)$:

$$\mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^T z = \omega_\varepsilon(t) \times z, \quad z \in \mathbb{R}^3,$$

où le symbole \times désigne le produit vectoriel des vecteurs dans \mathbb{R}^3 . Par conséquent, la vitesse du solide est donnée par

$$h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)), \quad x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t).$$

En dimension trois, la matrice d'inertie J^ε est une matrice qui dépend du temps t et non plus un scalaire. Elle s'écrit sous la forme :

$$J^\varepsilon(t) = \rho_\varepsilon \int_{\mathcal{S}^\varepsilon} (|x - h_\varepsilon(t)|^2 \text{Id}_3 - (x - h_\varepsilon(t)) \otimes (x - h_\varepsilon(t))) dx,$$

où Id_3 est la matrice identité. Nous avons que

$$(J^\varepsilon a) \cdot b = \rho_\varepsilon \int_{\mathcal{S}^\varepsilon} (a \times (x - h_\varepsilon(t)) \cdot (b \times (x - h_\varepsilon(t)))) dx, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^3,$$

(voir [GLS00]).

L'énergie cinétique totale du solide s'exprime sous la forme

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}_\varepsilon}(t) = \frac{1}{2} m^\varepsilon |h'_\varepsilon(t)|^2 + \frac{1}{2} (J^\varepsilon \omega_\varepsilon(t)) \cdot \omega_\varepsilon(t).$$

Dans cette thèse, nous supposons que la seule force agissant sur le solide est la force exercée par le fluide. Cette force agit sur la surface du solide. Selon la loi de Newton, nous avons que

$$\begin{aligned} m^\varepsilon h''_\varepsilon(t) &= - \int_{\partial \mathcal{S}^\varepsilon(t)} \sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon ds \quad \text{pour } t > 0, \\ J^\varepsilon \theta''_\varepsilon(t) &= - \int_{\partial \mathcal{S}^\varepsilon(t)} (\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) \cdot (x - h_\varepsilon)^\perp ds \quad \text{pour } t > 0 \end{aligned}$$

en dimension deux, et

$$\begin{aligned} m^\varepsilon h''_\varepsilon(t) &= - \int_{\partial \mathcal{S}^\varepsilon(t)} \sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon ds \quad \text{pour } t > 0, \\ (J^\varepsilon \omega_\varepsilon)'(t) &= - \int_{\partial \mathcal{S}^\varepsilon(t)} (x - h_\varepsilon) \times (\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) ds \quad \text{pour } t > 0 \end{aligned}$$

en dimension trois.

Équations du fluide

Dans ce travail, nous supposons que le système fluide-solide occupe \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 tout entier. Nous allons présenter les équations du fluide. Notons par $\mathcal{F}_0^\varepsilon = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}_0^\varepsilon$ le domaine occupé par le fluide au moment initial, et par $\mathcal{F}^\varepsilon(t) = \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{S}^\varepsilon(t)$ le domaine occupé par le fluide visqueux au temps t .

Nous supposons que la densité du fluide est homogène de constante 1. Pour décrire les équations du fluide, nous introduisons $u_\varepsilon(t, x) : [0, +\infty) \times \mathcal{F}^\varepsilon(t) \rightarrow \mathbb{R}^3$ la vitesse du fluide et $p_\varepsilon(t, x) : [0, +\infty) \times \mathcal{F}^\varepsilon(t) \rightarrow \mathbb{R}$ la pression du fluide. Nous ne considérons pas de force extérieure dans notre modèle. Ainsi les forces de contact entre les éléments fluides ne comprennent que les forces de pression et de viscosité. Nous notons $\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ le tenseur des contraintes du fluide

$$\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = 2\nu D(u_\varepsilon) - p_\varepsilon \text{Id}_3,$$

où ν est la viscosité du fluide et $D(u_\varepsilon)$ est le tenseur de déformation

$$D(u_\varepsilon) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\varepsilon,j}}{\partial x_i} \right)_{i,j} \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Le fluide considéré dans cette thèse est décrit par les équations de Navier-Stokes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= 0 \quad \text{pour } x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t). \\ \text{div } u_\varepsilon &= 0 \quad \text{pour } x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t). \end{aligned}$$

L'énergie cinétique du fluide est donnée par

$$\mathcal{E}_{\mathcal{F}^\varepsilon}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{F}^\varepsilon(t)} |u_\varepsilon(t, x)|^2 dx.$$

Conditions aux limites

Pour définir un problème il faut se donner les conditions aux limites et les conditions initiales. Tout d'abord, nous supposons que le fluide est au repos à l'infini :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_\varepsilon(t, x) = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

Il nous faut rajouter une condition sur l'interface entre le fluide et le solide. Pour un solide en mouvement sous l'influence du fluide, une condition naturelle est la condition de Dirichlet :

$$u_\varepsilon(t, x) = h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t)(x - h_\varepsilon(t))^\perp, \quad x \in \partial\mathcal{S}^\varepsilon(t),$$

si on est en dimension deux, et

$$u_\varepsilon(t, x) = h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)), \quad x \in \partial\mathcal{S}^\varepsilon(t),$$

si on est en dimension trois.

Pour résoudre un système, nous avons besoin non seulement des conditions aux limites, mais aussi des conditions initiales. Notons par u_ε^0 le champ de vitesse initial :

$$u_\varepsilon(0, x) = u_\varepsilon^0, \quad h_\varepsilon(0) = 0, \quad h'_\varepsilon(0) = l_\varepsilon^0, \quad \omega_\varepsilon(0) = \omega_\varepsilon^0.$$

Les données initiales doivent vérifier les conditions de compatibilité suivantes :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^0 &\in L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon), \quad \operatorname{div} u_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}_0^\varepsilon, \\ u_\varepsilon^0 \cdot n_\varepsilon &= (l_\varepsilon^0 + \omega_\varepsilon^0 x^\perp) \cdot n_\varepsilon \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}_0^\varepsilon \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

si on est en dimension deux, et

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^0 &\in L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon), \quad \operatorname{div} u_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{F}_0^\varepsilon, \\ u_\varepsilon^0 \cdot n_\varepsilon &= (l_\varepsilon^0 + \omega_\varepsilon^0 \times x) \cdot n_\varepsilon \quad \text{sur } \partial\mathcal{S}_0^\varepsilon \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

si on est en dimension trois (voir [DE99]). Ici, n_ε désigne la normale unitaire sortante du fluide. La deuxième condition au-dessus est une version faible de la condition de Dirichlet dans laquelle seules les composantes normales de la vitesse du fluide et de la vitesse du solide doivent être égales au bord de l'obstacle. Ceci est en accord avec la théorie habituelle des solutions de Leray des équations de Navier-Stokes dans laquelle la vitesse initiale est supposée être uniquement tangente au bord.

Estimation d'énergie

Pour les équations de Navier-Stokes, nous savons que la norme L^2 de la vitesse décroissante. En fait, le système couplé aussi satisfait une estimation d'énergie L^2 au moins par un calcul formel. Plus précisément, en multipliant l'équation de la vitesse du fluide par u_ε , en intégrant par parties et en utilisant les équations du solide, on obtient les estimations d'énergie suivantes :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 + m_\varepsilon |h'_\varepsilon(t)|^2 + J_\varepsilon |\theta'_\varepsilon(t)|^2 + 4\nu \int_0^t \|D(u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 \\ \leq \|u_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 + m_\varepsilon |h'_\varepsilon(0)|^2 + J_\varepsilon |\theta'_\varepsilon(0)|^2, \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

si on est en dimension deux, et

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathcal{F}^\varepsilon(t))}^2 + m^\varepsilon |h'_\varepsilon(t)|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon(t)) \cdot \omega_\varepsilon(t) + 4\nu \int_0^t \|D(u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathcal{F}^\varepsilon(t))}^2 \\ \leq \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)}^2 + m^\varepsilon |l_\varepsilon^0|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0, \quad (1.2.4) \end{aligned}$$

si on est en dimension trois (voir [GLS00]).

La somme des trois premiers termes du côté gauche des inégalités au-dessus est l'énergie du système total à l'instant t . Cette énergie se décompose en deux parties : l'énergie du fluide et l'énergie du solide. Évidemment l'énergie cinétique initiale du système est le terme de droite des inégalités (1.2.3) et (1.2.4). Cette estimation d'énergie joue un rôle primordial dans nos travaux.

1.2.2 Travaux Précédents

Lorsque le système occupe un ouvert borné de \mathbb{R}^d , avec $d = 2$ ou 3 , les solutions sont construites sous certaines contraintes sur les collisions entre le solide et le bord du domaine. Lorsque le domaine est \mathbb{R}^d tout entier, avec $d = 2$ ou 3 , il n'y a pas de telle contrainte. Dans cette thèse, nous considérons le deuxième cas. Comme pour les solutions de Leray du système de Navier-Stokes classique, l'estimation d'énergie mentionnée au-dessus nous permet de construire des solutions faibles pour le système fluide-solide.

Avant d'introduire cette notion de solution faible, nous définissons d'abord la densité globale et la vitesse globale dans \mathbb{R}^d . Plus précisément, le fluide est homogène de densité constante 1, alors que le solide est de densité ρ_ε , donc nous pouvons définir la densité globale $\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x)$ suivante :

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x) = \chi_{\mathcal{F}^\varepsilon(t)}(x) + \rho_\varepsilon \chi_{\mathcal{S}^\varepsilon(t)}(x), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^d$$

où l'on note χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A . De plus, nous prolongeons la vitesse par :

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} u_\varepsilon(t, x) & \text{si } x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t) \\ h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) (x - h_\varepsilon(t))^\perp & \text{si } x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \end{cases}$$

si on est en dimension deux, et

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} u_\varepsilon(t, x) & \text{si } x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t) \\ h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)) & \text{si } x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \end{cases}$$

si on est en dimension trois, de sorte que $\tilde{u}_\varepsilon(t, x)$ est défini sur \mathbb{R}^d tout entier. La vitesse globale est continue, car nous supposons la condition de non-glissement sur l'interface. Par les conditions de compatibilité sur les données initiales (1.2.2), nous avons que

$$\tilde{u}_\varepsilon^0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{div} \tilde{u}_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^d.$$

En utilisant la vitesse globale \tilde{u}_ε et la densité globale $\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x)$ au-dessus, nous pouvons donner une formulation faible globale qui englobe les équations du fluide et du solide. Nous introduisons la définition des solutions faibles du système fluide-solide en dimension trois suivante (voir [Jud74], [Ser87]) et [GLS00]) :

Définition 1.2.1. *On dit qu'un triplet $(\tilde{u}_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ est une solution faible de Leray du système fluide-solide, si*

- $\tilde{u}_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon$ vérifient

$$\begin{aligned} h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3), \quad \omega_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3), \\ u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathcal{F}^\varepsilon)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathcal{F}^\varepsilon)), \quad \tilde{u}_\varepsilon \in C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)); \end{aligned}$$

- \tilde{u}_ε est de divergence nulle dans \mathbb{R}^3 avec $D\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = 0$ dans $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$;
- \tilde{u}_ε vérifie l'équation au sens suivant :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \cdot (\partial_t \varphi_\varepsilon + (\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi_\varepsilon) + 2\nu \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} D(\tilde{u}_\varepsilon) : D(\varphi_\varepsilon) \\
& \qquad \qquad \qquad = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon(0) \tilde{u}_\varepsilon^0 \cdot \varphi_\varepsilon(0)
\end{aligned}$$

pour toute fonction test $\varphi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; H_\sigma^1(\mathbb{R}^3))$ à support compact dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ telle que $D\varphi_\varepsilon(t, x) = 0$ dans $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$.

Nous pouvons définir de la même manière la notion de solution faible en dimension deux. Dans la définition au-dessus, nous avons noté par $C_w(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ l'espace des fonctions continues en temps à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ muni de la topologie faible.

Pour le problème de Cauchy du système fluide-solide en domaine non borné, l'existence de solutions faibles de Leray a été établie dans [Ser87] et [GLS00]. Nous citons [TT04] où les auteurs ont montré un résultat d'existence et d'unicité des solutions fortes en dimension deux en supposant que le solide est un cylindre infini. Ensuite, Cumsille et Takahashi [CT08] ont généralisé au cas d'un solide de forme arbitraire. Dans le cas d'un domaine borné, on peut également trouver des résultats d'existence pour des solutions faibles dans les articles [SMST02] et [CJSMT00] dans le cas de dimension deux et le cas de dimension trois, respectivement. Dans [DE00] les auteurs ont considéré l'interaction entre un fluide et des solides dans le cas d'un domaine borné occupé par un fluide incompressible et compressible en dimension deux et trois (voir aussi [Fei03a] et [Fei03b]).

Dans cette thèse, nous ne considérons pas un fluide parfait, mais citons aussi quelques résultats dans le cas où le mouvement du fluide est décrit par les équations d'Euler : les articles d'Ortega, Rosier et Takahashi [ORT07], [ORT05] en dimension deux ; les articles de Rosier et Rosier [RR09] en dimension trois ; les articles de Houot, San Martin et Tucsnak [HSMT10] dans les deux cas. Récemment, Wang et Zang [WZ12] ont considéré le cas sans aucune restriction sur la forme du solide.

Nous énonçons le résultat d'existence de solutions faibles du système fluide-solide suivant (voir théorème 4.5 de [Ser87]) :

Théorème 1.2.2. *Soit $\tilde{u}_\varepsilon^0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs de divergence nulle et tel que $D\tilde{u}_\varepsilon^0 = 0$ dans $\mathcal{S}_0^\varepsilon$. Il existe au moins une solution faible globale $(\tilde{u}_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ du système fluide-solide au sens de la Définition 1.2.1. De plus, \tilde{u}_ε satisfait l'estimation d'énergie suivante :*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon(t)|^2 + 4\nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |D(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon(0) |\tilde{u}_\varepsilon^0|^2 \quad \forall t > 0. \quad (1.2.5)$$

Le théorème au-dessus est en dimension trois mais un résultat similaire est valable en dimension deux. En fait, en dimension deux nous avons aussi que cette solution satisfait l'égalité d'énergie comme pour les équations de Navier-Stokes classiques. Nous citons les résultats suivants dans le cas de la dimension deux : [DE99], [HS99]. De plus, Tucsnak et Takahashi [TT04] ont établi un résultat d'existence et d'unicité de solutions fortes en supposant que le solide est un cylindre infini avec condition de Dirichlet au bord.

Dans le chapitre 2 et le chapitre 3 de cette thèse, nous considérons l'évolution d'un petit solide dans un fluide newtonien incompressible. La littérature dans ce domaine est nombreuse. Citons quelques résultats significatifs. Nous commençons par présenter des résultats concernant le système Euler-solide, autrement dit, le cas d'un obstacle dans un fluide parfait. L'étude de l'évolution du système fluide-solide a été démarrée par Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [ILN03] en 2003. Ces auteurs ont considéré le comportement d'un fluide à l'extérieur d'un solide fixe quand ce solide se contracte vers un point, i.e. la taille de ce solide converge vers zéro.

Dans leur article, ils ont obtenu à la limite une solution des équations d'Euler dans l'espace tout entier avec un terme de force qui est un multiple d'une masse de Dirac fixe correspondant à la circulation autour de l'obstacle. Ensuite, Lacave [Lac09a] a étudié le cas où le solide se contracte vers un arc de Jordan et a déduit la convergence vers une solution des équations d'Euler à l'extérieur de l'arc par des outils d'analyse complexe. Dans ces deux résultats le solide est fixe, i.e. la position du solide ne dépend pas du temps. Récemment, Glass, Lacave et Sueur ont considéré le cas où le solide bouge sous l'influence du fluide et se contracte vers une particule dans [GLS14] et dans [GLS16] dans le cas d'une particule massive ($m_\varepsilon = m_1$) et le cas d'une particule sans masse ($m_\varepsilon = \varepsilon^\alpha m_1$), respectivement. Nous mentionnons aussi un résultat récent de Glass, Munnier et Sueur [GMS18] sur le mouvement d'un solide immergé dans un fluide dans le cas irrotationnel.

Pour un solide fixe dans un fluide visqueux en dimension deux, Iftimie, Lopes Filho et Nussenzveig Lopes [ILN06] ont montré que, si la circulation initiale γ autour de l'obstacle est petite, la solution converge vers une solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 avec une vitesse initiale associée au tourbillon $\omega_0 + \gamma\delta$. Nous soulignons qu'il n'y a plus de terme singulier dans l'équation limite, il y a une singularité seulement dans la donnée initiale. Cela constitue une grande différence par rapport aux travaux [ILN03] pour les équations d'Euler, où l'effet du petit obstacle apparaît dans l'équation limite et non seulement dans les données initiales. Cela signifie que la dynamique limite du système Navier-Stokes-solide est beaucoup moins singulière que la dynamique limite du système Euler-solide lorsque l'obstacle fixe se contracte vers un point. De plus, Lacave [Lac09b] a considéré le cas où l'obstacle se rétrécit vers une courbe au lieu d'un point. Il a montré que le champ de vitesse converge vers une solution des équations de Navier-Stokes à l'extérieur d'un arc.

Récemment, Lacave et Takahashi [LT17] ont considéré un petit disque se déplaçant sous l'influence du fluide incompressible visqueux en deux dimensions. En supposant que la densité du solide est indépendante de ε et que les données initiales sont suffisamment petites, ils ont utilisé les estimations $L^p - L^q$ du semi-groupe associé au système de fluide-solide pour en déduire la convergence vers la solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 . Dans le chapitre 2, nous étendons le résultat de [LT17] au cas d'un solide de forme arbitraire et sans restriction quant à la taille des données initiales, mais en supposant que la densité du solide est grande.

En 2009, Iftimie and Kelliher [IK09] ont généralisé leur résultat précédent [ILN06] à la dimension trois. Ils ont montré la convergence vers les équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3 dans le cas où le solide est fixe. Lacave [Lac15] a considéré des obstacles plus généraux, par exemple des obstacles se rétrécissant en une courbe, mais restant fixes. Nous mentionnons que pour un petit solide en mouvement dans un fluide visqueux en dimension trois, il n'y a pas de résultat disponible. Dans le chapitre 3 nous montrons le premier résultat de convergence en dimension trois lorsque le solide se déplace sous l'influence du fluide. Nous énonçons les résultats principaux des chapitres 2 et 3 dans la section suivante.

1.2.3 Résultats de la thèse sur le système fluide-solide

Dans les chapitres 2 et 3, nous étudions le comportement d'un petit solide en mouvement dans un fluide visqueux incompressible dans le cas où l'obstacle se contracte vers un point. Nous montrons la convergence des solutions construites dans le théorème 1.2.2 vers une solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^d , avec $d = 2$ et 3 , en supposant que les données initiales \tilde{u}_ε^0 sont bornées dans L^2 et que la densité du solide tend vers l'infini.

Nous énonçons d'abord le résultat en dimension deux.

Résultat dans le cas de la dimension deux

Comme nous l'avons mentionné dans la section précédente, Lacave et Takahashi [LT17] ont récemment considéré l'évolution d'un petit disque en mouvement dans un fluide incompressible

visqueux, et ont montré que la solution converge vers l'unique solution des équations de Navier-Stokes dans tout le plan \mathbb{R}^2 . Dans leur article, la difficulté est d'obtenir une estimation uniforme pour la vitesse du disque $h'_\varepsilon(t)$. Ils supposent que la densité du disque est indépendante de la taille ε . Dans ce cas la masse du disque tend vers 0 et les estimations d'énergie ne sont pas suffisantes pour obtenir une estimation uniforme de $h'_\varepsilon(t)$. Pour surmonter cette difficulté, ces auteurs utilisent des estimations du semi-groupe de Stokes obtenues dans un travail antérieur [EHL14]. Par une méthode de point fixe, Lacave et Takahashi obtiennent une borne uniforme sur $h'_\varepsilon(t)$ ce qui leur permet ensuite d'obtenir facilement la convergence voulue. La méthode de point fixe utilisée exige la condition de petitesse des données initiales et les estimations dans [EHL14] exigent que l'obstacle soit un disque. En effet, la preuve de [EHL14] repose largement sur le fait que l'obstacle est un disque car elle utilise des formules explicites valables uniquement dans le cas d'un disque.

Dans le chapitre 2, nous considérons le même problème que [LT17]. Le théorème 1.2.3 ci-dessus n'a pas besoin d'imposer aucune condition de petitesse sur les données initiales, ni aucune restriction sur la forme du solide. Plus précisément, en supposant que la taille du solide tend vers zéro et que la densité du solide tend vers l'infini, nous prouvons que la solution du système fluide-solide converge vers une solution des équations de Navier-Stokes sans solide. Nous montrons essentiellement que si la densité du solide tend vers l'infini, les estimations d'énergie sont suffisantes pour passer à la limite dans la formulation faible en utilisant une procédure de troncature spéciale.

Voici notre résultat principal en dimension deux :

Théorème 1.2.3. *Soit $u_\varepsilon(0, x) \in L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)$ de divergence nulle. On suppose que*

- $\mathcal{S}_0^\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$;
- $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ converge faiblement vers $u_0(x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$;
- la masse du solide m^ε vérifie
$$\frac{m^\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \tag{1.2.6}$$
- $u_\varepsilon(0, x)$ est borné indépendamment de ε dans $L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)$ et $\sqrt{m^\varepsilon}h'_\varepsilon(0)$ et $\sqrt{J_\varepsilon}\theta'_\varepsilon(0)$ sont bornés indépendamment de ε ;

Soit $(u_\varepsilon, h_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ une solution faible globale du système. Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, \tilde{u}_ε converge faible $$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ vers la solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 avec la donnée initiale u_0 .*

En réalité, pour obtenir la convergence annoncée, nous n'avons pas besoin ni des conditions aux limites sur \mathcal{S}^ε ni de la condition $D\tilde{u}_\varepsilon = 0$ sur \mathcal{S}^ε . Nous avons seulement besoin du fait que la vitesse \tilde{u}_ε soit bornée dans l'espace d'énergie et qu'elle vérifie les équations de Navier-Stokes (sans aucune condition au limite) à l'extérieur du disque $D(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$. Nous énonçons maintenant un résultat plus général.

Théorème 1.2.4. *Soit v_ε un champ de vitesse de divergence nulle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ appartenant à l'espace*

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(h_\varepsilon(t), \varepsilon)))$$

et soit $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2)$. De plus, supposons que

- v_ε est borné indépendamment de ε dans l'espace d'énergie $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$;
- $v_\varepsilon(0, x)$ converge faiblement vers $v_0(x)$ dans L^2 quand $\varepsilon \rightarrow 0$;

- v_ε vérifie les équations de Navier-Stokes :

$$\partial_t v_\varepsilon - \nu \Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon = -\nabla \pi_\varepsilon \quad \text{dans } \{(t, x) ; t > 0 \text{ et } |x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon\} \quad (1.2.7)$$

avec les données initiales $v_\varepsilon(0, x)$ au sens des distributions.

- la vitesse du centre du disque vérifie la condition $\varepsilon |h'_\varepsilon(t)| \rightarrow 0$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soit v la solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^2 associée à la donnée initiale v_0 . Alors, v_ε converge vers v quand $\varepsilon \rightarrow 0$ faible * dans $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$.

Observons que le théorème 1.2.4 implique le théorème 1.2.3 en l'appliquant à $v_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon$. En effet, nous rappelons que nous avons l'estimation d'énergie (1.2.3) sur \tilde{u}_ε . Nous observons que $v_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon$ vérifie les hypothèses du théorème 1.2.4. L'hypothèse sur la masse du solide (1.2.6) dans le théorème 1.2.3 signifie essentiellement que $\varepsilon |h'_\varepsilon(t)| \rightarrow 0$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}_+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ceci s'obtient facilement à partir de l'estimation d'énergie ci-dessus. En effet, les hypothèses du théorème 1.2.3 implique que si les membres de droite de (1.2.3) sont bornés uniformément en ε alors $\sqrt{m_\varepsilon} h'_\varepsilon$ est borné uniformément en t et ε . Le fait que $\frac{m_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty$ et que $\sqrt{m_\varepsilon} h'_\varepsilon$ est borné impliquent $\varepsilon h'_\varepsilon \rightarrow 0$ uniformément en temps quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

La preuve du théorème 1.2.4 est complètement différente de la preuve dans [LT17]. Dans la suite, nous donnons quelques éléments de notre démonstration. La première étape consiste à construire une fonction test s'annulant sur le disque $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ en tronquant la fonction courant.

Soit $\varphi \in C^1_b(\mathbb{R}_+; C^\infty_{0,\sigma})$. La fonction courant de φ est définie par

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y)^\perp}{2\pi |x - y|^2} \cdot \varphi(t, y) dy.$$

Nous savons que $\psi \in C^1_b(\mathbb{R}_+; C^\infty)$ et $\nabla^\perp \psi = \varphi$. Mais nous avons besoin d'une fonction test qui s'annule sur l'obstacle. Nous définissons alors une fonction courant modifiée qui s'annule au centre de l'obstacle $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$:

$$\psi_\varepsilon(t, x) = \psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t)).$$

Notons que φ est constante en temps, alors que la fonction courant modifiée $\psi_\varepsilon(t, x)$ dépend du temps via h_ε et $\nabla^\perp \psi_\varepsilon = \varphi$.

Nous voulons tronquer la fonction courant modifiée $\psi_\varepsilon(t, x)$ par une fonction de troncature au voisinage de l'obstacle. Plus précisément, nous introduisons une fonction de troncature particulière f_ε qui minimise la norme L^2 du gradient, qui vaut 0 pour tout $|x| \leq \varepsilon$ et qui vaut 1 pour tout $|x| \geq \varepsilon \alpha_\varepsilon$, où α_ε vérifie certaines conditions. En fait, sous les hypothèses du théorème de 1.2.4, nous avons

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[0, T]} \varepsilon |h'_\varepsilon(t)| = 0. \quad (1.2.8)$$

Nous supposons que $\varepsilon \leq 1/100$ et choisissons α_ε telle que

$$100 \leq \alpha_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon = \infty \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \alpha_\varepsilon (1 + |h'_\varepsilon(t)|) = 0 \quad (1.2.9)$$

uniformément sur $t \in [0, T]$. La relation (1.2.8) assure l'existence d'un tel α_ε . En effet, nous pouvons choisir par exemple $\alpha_\varepsilon = \max\left(100, \frac{1}{\sup_{[0, T]} \sqrt{\varepsilon + \varepsilon |h'_\varepsilon(t)|}}\right)$.

Nous définissons $\eta_\varepsilon(t, x)$ par

$$\eta_\varepsilon(t, x) = f_\varepsilon(x - h_\varepsilon(t))$$

qui est une fonction de troncature au voisinage de l'obstacle $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$. La fonction courant modifiée $\psi_\varepsilon(t, x)$ et la fonction de troncature $\eta_\varepsilon(t, x)$ nous permettent de construire une fonction test φ_ε qui est une approximation de la fonction test φ dans l'ensemble $|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon$:

$$\varphi_\varepsilon = \nabla^\perp(\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon). \quad (1.2.10)$$

Nous pouvons déduire quelques propriétés de φ_ε , par exemple, $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ fortement dans $L^\infty(0, T; H^1)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ceci est un ingrédient important pour faire le passage à la limite dans la suite.

La deuxième étape consiste à passer à la limite dans la formulation faible par une méthode de compacité classique. La difficulté est que non seulement la fonction courant dépend du temps mais la fonction de troncature en dépend également. Les estimations de la dérivée en temps de v_ε ne sont pas évidentes. De plus, le passage à la limite des termes $\partial_t v$ et Δv n'est pas évident : le premier est difficile car la dérivée en temps est délicate à contrôler et le second est difficile car la fonction de troncature introduit des puissances négatives de ε .

La borne de v_ε dans $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ permet d'avoir une limite faible $*$, c'est-  dire qu'il existe $v \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ et une sous-suite v_{ε_k} tels que $v_{\varepsilon_k} \rightharpoonup v$ faible $*$ dans $L^\infty(0, T; L^2)$ et $v_{\varepsilon_k} \rightharpoonup v$ faiblement dans $L^2(0, T; H^1)$. En multipliant l'équation (1.2.7) par la fonction test φ_{ε_k} qu'on a construit précédemment (voir (1.2.10)), intégrant par parties en temps et en espace, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi_{\varepsilon_k} + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_{\varepsilon_k} : \nabla \varphi_{\varepsilon_k} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} \\ = \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k}(0) \cdot \varphi_{\varepsilon_k}(0). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

Pour montrer que le champ de vitesse vérifie l'équation de Navier-Stokes, nous devons passer à la limite dans les quatre termes. La convergence forte de φ_ε dans $L^\infty(0, T; H^1)$ et la convergence faible de v_{ε_k} dans $L^2(0, T; H^1)$ permettent de passer à la limite dans le second terme. Nous traitons la convergence du membre de droite de (1.2.11)    l'aide de la convergence dans L^2 de la donnée initiale. Pour passer à la limite dans les termes non-linéaires, il est naturel de considérer une convergence forte de v_{ε_k} . Nous utilisons une estimation temporelle pour montrer que

$$v_{\varepsilon_k} \rightarrow v \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}).$$

Plus précisément soit $\varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^2)$ une fonction test ne dépendant pas du temps. Nous montrons qu'il existe une suite $\Xi_\varepsilon(t) \in H^{-2}_\sigma$ telle que

$$\langle \Xi_\varepsilon(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \quad \forall \varphi \in H^2_\sigma.$$

Nous allons voir que la suite $\Xi_\varepsilon(t)$ est bornée indépendamment de ε dans $L^\infty(0, T; H^{-2}_\sigma)$ et équicontinue en temps à valeurs dans H^{-3}_σ , ce qui permet d'utiliser le théorème d'Ascoli. Nous déduisons ensuite que la suite $\Xi_\varepsilon(t)$ est précompacte dans $C^0([0, T]; H^{-4}_{\text{loc}})$, c'est-  dire qu'il existe une sous-suite de $\Xi_\varepsilon(t)$ qui converge fortement dans $C^0([0, T]; H^{-4}_{\text{loc}})$. Comme $\Xi_\varepsilon(t)$ et v_ε sont proches dans H^{-2} , nous obtenons la convergence forte d'une sous-suite de v_ε dans H^{-2} , puis dans $L^2(0, T; L^2_{\text{loc}})$ par interpolation.

Finalement il reste à traiter le terme avec dérivée en temps. Par définition de la fonction de troncature η_{ε_k} , nous savons qu'elle s'annule au voisinage de l'obstacle $B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k)$. Puisque les supports de $\partial_t \eta_{\varepsilon_k}$ et $\eta_{\varepsilon_k} - 1$ sont contenus dans l'ensemble $\{|x - h_{\varepsilon_k}(t)| \leq \varepsilon_k \alpha_{\varepsilon_k}\}$, le terme avec dérivée en temps peut être estimé en écrivant

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot (\partial_t \varphi_{\varepsilon_k} - \partial_t \varphi) dx \right| \leq C \max \left(\frac{\varepsilon_k^2 \alpha_{\varepsilon_k}^2}{\ln \alpha_{\varepsilon_k}}, \frac{\varepsilon_k \alpha_{\varepsilon_k}}{\sqrt{\ln \alpha_{\varepsilon_k}}} |h'_{\varepsilon_k}(t)| \right) \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0,$$

où nous avons utilisé (1.2.9) pour ε_k assez petit, ce qui conclut notre preuve.

Résultat dans le cas de la dimension trois

Pour autant que nous le sachions, le théorème 1.2.5 ci-dessous est le premier résultat sur la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ en dimension trois pour un obstacle en mouvement dans un fluide incompressible visqueux. Comme dans la section précédente, nous n'avons pas besoin d'imposer aucune condition de petitesse des données initiales, ni aucune restriction sur la forme du solide. Nous prouvons que la solution du système fluide-solide converge vers une solution des équations de Navier-Stokes sans solide en supposant que la densité du solide tend vers l'infini.

Théorème 1.2.5. *Soit $u_\varepsilon(0, x) \in L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)$ de divergence nulle. On suppose que*

- $\mathcal{S}_0^\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$;
- $\tilde{u}_\varepsilon(0, x) \rightharpoonup u_0(x)$ faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^3)$;
- la masse du solide m^ε vérifie

$$\frac{m^\varepsilon}{\varepsilon^3} \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0; \quad (\rho_\varepsilon \rightarrow \infty, \quad \varepsilon \rightarrow 0) \quad (1.2.12)$$

- $m^\varepsilon |h'_\varepsilon(0)|^2$ et $(J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0$ sont bornés indépendamment de ε ;

Soit $(u_\varepsilon, h_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ une solution faible du système. Alors il existe une sous-suite convergente

$$\tilde{u}_\varepsilon \xrightarrow{*} u \quad \text{dans} \quad L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$$

vers une solution des équations de Navier-Stokes au sens des distributions dans \mathbb{R}^3 avec donnée initiale $u_0(x)$.

Supposons de plus que, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ converge fortement vers $u_0(x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ et que $\sqrt{m^\varepsilon} h'_\varepsilon(0)$ et $(J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0$ tendent vers 0. Alors la solution limite u vérifie l'inégalité d'énergie classique

$$\forall t \geq 0 \quad \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Nous faisons quelques remarques sur les hypothèses du théorème précédent. Tout d'abord, si le solide se réduit de manière isotrope en un point, l'hypothèse (1.2.12) signifie que la densité du solide ρ_ε tend vers l'infini quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Si le solide ne se contracte pas de manière isotrope en un point, la condition (1.2.12) est plus forte que de simplement dire que la densité tend vers l'infini. En effet, $\mathcal{S}_0^\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ nous permet d'obtenir que $|\mathcal{S}_0^\varepsilon| \leq \frac{4\pi}{3} \varepsilon^3$, donc $\rho_\varepsilon = \frac{m^\varepsilon}{|\mathcal{S}_0^\varepsilon|} \geq \frac{3m^\varepsilon}{4\pi\varepsilon^3} \rightarrow \infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Nous savons que l'unicité des solutions du problème limite n'est pas connue. Pour cette raison nous n'obtenons que la convergence d'une sous-suite et non de toute la suite.

La convergence faible de \tilde{u}_ε^0 dans $L^2(\mathbb{R}^3)$ implique qu'elle est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^3)$. Les estimations d'énergie (1.2.4) impliquent alors que

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) \text{ est borné dans } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3)).$$

Nous verrons que c'est tout ce dont nous avons besoin pour passer à la limite. Il n'est pas nécessaire d'avoir les conditions de Dirichlet au bord du solide ou une forme spéciale de \tilde{u}_ε à l'intérieur du solide. Nous avons seulement besoin du fait que \tilde{u}_ε est bornée dans l'espace d'énergie et du fait que les équations de Navier-Stokes sont vérifiées à l'extérieur de la boule $B(0, \varepsilon)$. Comme dans le cas de la dimension deux, nous montrons le résultat plus général suivant :

Théorème 1.2.6. Soit $v_\varepsilon(t, x)$ un champ de vitesse à divergence nulle borné indépendamment de ε dans

$$L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

On suppose que

- v_ε vérifie l'équation de Navier-Stokes

$$\partial_t v_\varepsilon - \nu \Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon = -\nabla \pi_\varepsilon \quad (1.2.13)$$

à l'extérieur de la boule $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ avec les données initiales $v_\varepsilon(0, x)$ au sens suivant :

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \partial_t \varphi + \nu \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(0) \cdot \varphi(0) \quad (1.2.14)$$

pour toute fonction test $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ à divergence nulle et à support compact dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ telle que pour tout temps t la fonction $x \mapsto \varphi(t, x)$ est lisse et à support compact dans $\{|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon\}$.

- la donnée initiale à divergence nulle $v_\varepsilon(0, x)$ est de carré intégrable et converge faiblement vers $v_0(x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^3)$.
- le centre de la boule vérifie $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3)$ et $\varepsilon^{\frac{3}{2}} h'_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ fortement dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Alors il existe une sous-suite de v_ε qui converge faible $*$ dans $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ et faiblement dans $L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$ vers une solution v de l'équation de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3 au sens des distributions avec donnée initiale $v_0(x)$.

De plus, si on suppose que $v_\varepsilon(0, x)$ converge fortement vers $v_0(x)$ dans L^2 et que l'estimation d'énergie suivante :

$$\forall t \geq 0 \quad \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(v_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 \leq \|v_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + o(1)$$

est vraie pour v_ε lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, alors la solution limite v vérifie l'inégalité d'énergie classique

$$\forall t \geq 0 \quad \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (1.2.15)$$

Nous allons esquisser la preuve du théorème 1.2.6. La première étape consiste à construire une fonction test s'annulant sur le disque $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ en tronquant la fonction courant. Soit $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$. La fonction courant de φ est

$$\psi(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{4\pi|x - y|^3} \times \varphi(t, y) dy$$

Nous avons $\text{curl } \psi = \varphi$ et $\psi = \text{curl } \Delta^{-1} \varphi$. De plus, $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C^\infty)$. Nous définissons alors une fonction courant modifiée qui s'annule au centre de l'obstacle $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$:

$$\psi_\varepsilon(t, x) = \psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t)).$$

Nous introduisons une fonction de troncature au voisinage de l'obstacle plus générale que dans le cas de la dimension deux :

$$\eta_\varepsilon(t, x) = \eta\left(\frac{x - h_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x - h_\varepsilon(t)| \leq \frac{3}{2}\varepsilon \\ 1 & \text{si } |x - h_\varepsilon(t)| \geq 2\varepsilon. \end{cases}$$

En utilisant la fonction courant $\psi_\varepsilon(t, x)$ et la fonction de troncature $\eta_\varepsilon(t, x)$, nous construisons une fonction test

$$\varphi_\varepsilon = \text{curl}(\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon).$$

Pour montrer le théorème 1.2.6 nous utilisons la même stratégie que dans le cas de la dimension deux, qui consiste à obtenir une convergence forte de v_ε par une estimation temporelle, puis à faire un passage à la limite dans la formulation faible par des méthodes de compacité classique. Finalement, nous complétons la preuve de ce théorème par un argument classique \liminf pour montrer l'inégalité d'énergie (1.2.15) sous l'hypothèse que $v_\varepsilon(0, x)$ converge fortement vers $v_0(x)$ dans L^2 .

1.2.4 Directions futures et perspectives

Une perspective naturelle est de prolonger les travaux présentés dans les chapitres 2 et 3. Plus précisément, nous avons supposé que la densité du solide tend vers l'infini quand la taille de l'obstacle tend vers 0. En fait, un cas plus physique serait de supposer que la densité du solide est indépendante de la taille de l'obstacle. Dans ce cas, notre approche ne fonctionne pas. Le résultat de [LT17] s'applique mais avec une condition de petitesse. Nous aimerions enlever cette condition de petitesse. Une autre perspective concerne l'étude asymptotique de la trajectoire de l'obstacle. Dans [LT17], nous avons bien la convergence des trajectoires vers une trajectoire limite, mais nous ne savons pas l'équation de cette trajectoire limite. Une question intéressante serait de déterminer cette équation limite pour la trajectoire.

1.3 Système de Boussinesq

Le système de Boussinesq (1903) est un modèle hydrodynamique pour décrire le phénomène de convection dans un fluide visqueux incompressible. Plus précisément, il est composé des équations de Navier-Stokes incompressibles avec un terme de température et une équation de convection-diffusion. Une exposition mathématique rigoureuse du système de Boussinesq a été établie dans [Mih62], où l'auteur a développé un système applicable à une couche mince de fluide. Le système de Boussinesq et les comportements de ses solutions jouent un rôle important dans le cadre de l'hydrodynamique. En fait, de nombreux problèmes de convection thermique sont analytiquement insolubles sans l'approximation de Boussinesq. C'est aussi la raison pour laquelle nous nous intéressons à ce système. Dans le chapitre 4, nous établissons certains résultats sur l'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq en dimension trois. Nous commençons par présenter ce système.

1.3.1 Présentation du système de Boussinesq

Le système s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = \Delta \theta \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u + \theta e_3 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}_+ \quad (\text{BNS})$$

Ici, $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ désigne la vitesse, $p: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la pression et $\theta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ la température du fluide. De plus, $e_3 = (0, 0, 1)$ est le vecteur vertical unitaire. Ce système se réduit aux équations de Navier-Stokes dans le cas où $\theta \equiv 0$.

Par analogie avec la démarche illustrée dans le cas des équations de Navier-Stokes, la première étape sera de ramener ce système à la forme intégrale suivante, faisant intervenir trois

opérateurs bilinéaires

$$\begin{cases} u(t) = e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3] + B_1(u, u) + B_2(u, \theta) \\ \theta(t) = e^{t\Delta}\theta_0 + B_3(u, \theta) \\ \nabla \cdot u_0 = 0, \end{cases} \quad (\text{BNS-1})$$

avec

$$\begin{aligned} B_1(u, \tilde{u}) &= - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes \tilde{u})(s) \, ds \\ B_2(u, \theta) &= - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \theta e_3)(s) \, ds \\ B_3(u, \theta) &= - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u \theta)(s) \, ds. \end{aligned}$$

À l'aide du projecteur de Leray, on voit que la pression n'apparaît plus dans le système. Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes, les solutions obtenues par cette formule intégrale s'appellent solutions 'mild' du système de Boussinesq.

L'invariance par changement d'échelle pour ce système est

$$u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{et} \quad \theta_\lambda(x, t) = \lambda^3 \theta(\lambda x, \lambda^2 t)$$

et les données initiales correspondantes sont $u_{0,\lambda}(x) = \lambda u_0(\lambda x)$ et $\theta_\lambda(x) = \lambda^3 \theta_0(\lambda x)$. Nous remarquons que les espaces critiques pour le champ de vitesse sont les mêmes que pour les équations de Navier-Stokes, par contre, la température a un scaling différent.

1.3.2 Travaux précédents

Avant de présenter les travaux précédents sur le système de Boussinesq, nous introduisons d'abord quelques résultats classiques pour les solutions 'mild' à la Kato des équations de Navier-Stokes que nous allons utiliser dans le chapitre 4 pour notre système.

Solutions 'mild' des équations de Navier-Stokes.

L'idée pour trouver une solution à la Kato est de chercher un point fixe de l'équation intégrale

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + B(u, u)$$

via un schéma itératif. Ici, $B(u, u)$ est l'opérateur bilinéaire défini dans (1.1.1). Il s'agit de la méthode de Picard, qui avait été utilisée par Oseen pour établir l'existence d'une solution classique avec donnée initiale régulière [Ose11]. La difficulté est de trouver un espace de Banach E dans lequel le lemme du point fixe puisse s'appliquer. Lorsque la donnée initiale est dans l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, Fujita et Kato [FK64] ont établi l'existence et l'unicité des solutions 'mild' par des méthodes de semi-groupes. Pour les espace de Lebesgue, l'espace critique est $L^3(\mathbb{R}^3)$. Lorsque la donnée initiale u_0 est dans $L^3(\mathbb{R}^3)$, un espace qu'il serait naturel de considérer est $L^\infty([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$ ou mieux encore $C([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$. En fait, Oru [Oru98] a montré que l'opérateur bilinéaire $B(u, v)$ n'est pas borné dans $L^\infty([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$, donc on ne peut plus obtenir un résultat de bien-posé par un argument de point fixe dans cet espace. Néanmoins, avant le résultat d'Oru en 1998, Kato [Kat84] avait pu contourner cette obstruction, en introduisant un espace plus petit dans lequel la méthode de Picard peut être appliquée. Plus précisément, l'espace de Kato X_T est défini par

$$X_T = \left\{ u \in C([0, T]; L^3) : \sup_{0 < t \leq T} \sqrt{t} \|u(t)\|_{L^\infty} < \infty \text{ et } \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = 0 \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{X_T} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^3} + \sup_{0 < t \leq T} \sqrt{t} \|u(t)\|_{L^\infty}.$$

Le lemme 5.6 dans l'annexe garantit que l'opérateur bilinéaire $B(u, v)$ est bicontinu dans X_T :

$$\|B(u, v)\|_{X_T} \leq C \|u(t)\|_{X_T} \|v(t)\|_{X_T},$$

pour tout $u, v \in X_T$. Ceci signifie que l'espace de Kato X_T est un bon espace de résolution de la forme intégrale. Kato a établi le théorème suivant concernant l'existence et l'unicité des solutions 'mild' :

Théorème 1.3.1. (*[Kat84]*) Soit $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ un champ de divergence nulle. Alors il existe un temps $T > 0$ et une solution $u \in C([0, T]; L^3)$ associée à u_0 tel que

$$\sup_{(0, T]} \sqrt{t} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} < \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|u(t, \cdot)\|_{L^\infty} = 0 \quad (1.3.1)$$

Avec ces conditions sur la norme L^∞ , une telle solution est unique.

Une fois la continuité de l'opérateur $B(u, v)$ dans X_T établie, on obtient l'existence et l'unicité de la solution dans X_T en appliquant un lemme standard de point fixe, à condition que

$$4C_0 \|e^{t\Delta} u_0\|_{X_T} < 1.$$

En effet, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} u_0\|_{L^\infty} = 0$ par des propriétés du noyau de la chaleur et de la densité de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ dans les espaces de Lebesgue. Cette limite nous permet de garantir la validité de (1.3.1) et on peut conclure à l'existence et l'unicité de la solution. Ensuite, comme nous le verrons dans le chapitre 4, ce théorème se généralise aisément au cas du système de Boussinesq. Il y a des estimations supplémentaires à prendre en compte pour traiter les termes avec la température, mais cela n'introduit pas de difficulté majeure.

Pour les équations de Navier-Stokes, l'existence des solutions 'mild' dans $C([0, T]; L^3)$ étant établie sous la seule hypothèse que la donnée initiale soit dans L^3 , il est naturel de se demander si $C([0, T]; L^3)$ est aussi un espace d'unicité pour ces solutions. En fait, il est clair que cette méthode de Kato fournit l'unicité de la solution 'mild' seulement dans X_T et non dans l'espace $C([0, T]; L^3)$. L'unicité de la solution 'mild' dans l'espace $C([0, T]; L^3)$ a été établie dans [FLRT97] par Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo (voir aussi [Mey96], [Mon99]).

Théorème 1.3.2. Soient u et v deux solutions 'mild' des équations de Navier-Stokes associées à $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ telles que u et v appartiennent à $C([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$. Alors, $u = v$.

Dans le paragraphe ci-après, nous allons présenter quelques méthodes pour montrer des résultats d'unicité de la solution forte à la Kato des équations de Navier-Stokes que nous allons utiliser au chapitre 4. Pour montrer que deux solutions sont identiques, on estime la différence entre ces deux solutions, i.e. $w = u - v$. Les équations peuvent s'écrire sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + B(u, u) \quad \text{et} \quad v(t) = e^{t\Delta} u_0 + B(v, v),$$

où $B(u, u)$ est l'opérateur bilinéaire défini dans (1.1.1). Alors,

$$\begin{aligned} w &= u - v = B(u, u) - B(v, v) = B(u, w) + B(w, v) \\ &= B(e^{t\Delta} u_0, w) + B(u - e^{t\Delta} u_0, w) + B(w, e^{t\Delta} u_0) + B(w, v - e^{t\Delta} u_0). \end{aligned}$$

Il nous faut estimer les quatre termes ci-dessus pour montrer que $w = 0$. L'idée est d'estimer w dans un espace $C([0, T]; F)$, pour un espace F "proche" de l'espace L^3 . Furioli, Lemarié-Rieusset et Terraneo [FLRT00] ont choisi pour F un espace de Besov et achevé la démonstration par des

méthodes d'analyse microlocale. Meyer [Mey96] a utilisé une méthode plus simple consistant à choisir pour F l'espace de Lorentz $L^{3,\infty}$ (voir l'annexe pour plus de détails sur l'espace de Lorentz).

Nous allons esquisser la preuve de Meyer, puisque quelques estimations clés de cette démonstration nous seront utiles dans le chapitre 4. Il suffira de démontrer que, sous les hypothèses du théorème 1.3.2, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $u = v$ sur $[0, \epsilon]$. Nous utilisons les propriétés de régularisation du noyau de chaleur pour traiter le terme $B(e^{t\Delta}u_0, w)(t)$. Pour les deux autres termes, nous utilisons le lemme suivant dont on omettra la preuve ici (voir l'annexe pour plus de détails).

Lemme 1.3.3. (*[Mey96]*) Soit $u \in L^\infty((0, \infty); L^{3,\infty})$, Alors

$$\int_0^\infty e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} u^2(s, \cdot) ds \in L^{3,\infty}.$$

Après application du lemme ci-dessus, nous obtenons que

$$\sup_{0 < t < \tau} \|B(u - e^{t\Delta}u_0, w)\|_{L^{3,\infty}} \leq \sup_{0 < t < \tau} \|u - e^{t\Delta}u_0\|_{L^3} \|w(t)\|_{L^{3,\infty}}$$

Nous pouvons démontrer la même estimation pour le terme $\|B(v - e^{t\Delta}u_0, w)\|_{L^{3,\infty}}$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t < \tau} \|w\|_{L^{3,\infty}} &\leq C \sup_{0 < t < \tau} (\|u - e^{t\Delta}u_0\|_{L^3} + \|v - e^{t\Delta}u_0\|_{L^3} + t^{\frac{1}{4}} \|e^{t\Delta}u_0\|_{L^6}) \sup_{0 < t < \tau} \|w\|_{L^{3,\infty}} \\ &= CA(\tau) \sup_{0 < t < \tau} \|w\|_{L^{3,\infty}}. \end{aligned}$$

On conclut la démonstration du théorème 1.3.2 par le fait que $\lim_{\tau \rightarrow 0} A(\tau) = 0$.

Comme nous le verrons plus loin, cet important théorème d'unicité admet plusieurs généralisations possibles, non triviales, au cas du système de Boussinesq. Dans le théorème 1.3.6 de la section 1.3.3, nous établissons l'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq par la méthode de Meyer ci-dessus. Plus précisément, nous établissons d'abord quelques estimations bilinéaires dans les espaces de Lorentz pour $B_1(u, \tilde{u})$, $B_2(u, \theta)$ et $B_3(u, \theta)$ et montrons que l'unicité des solutions peut être garantie dans $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q,\infty}$, où $Y_{q,\infty}$ est un sous-espace de $L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3))$ avec $\frac{3}{2} < q < 3$.

Pour conclure cette section, mentionnons qu'il y a d'autres résultats d'unicité de la solution à la Kato pour les équations de Navier-Stokes. Par exemple, Monniaux [Mon99] a retrouvé l'unicité dans L^3 avec une démonstration reposant sur la régularité maximale L^p du Laplacien ; Lions et Masmoudi [LM98] ont établi une démonstration d'unicité par une décomposition des solutions et un argument de 'bootstrap'. De plus, nous remarquons aussi que la démonstration de Kato n'utilise pas l'estimation d'énergie comme la construction des solutions faibles. L'unicité 'forte-faible' est une idée pour interpoler les différents types de solutions ensemble. Plus précisément, on peut utiliser l'estimation d'énergie et une méthode de compacité pour obtenir une solution faible d'énergie finie, alors qu'on peut aussi appliquer une méthode de point fixe comme expliqué ci-dessus pour obtenir une solution forte d'énergie infinie. Le but de l'unicité 'forte-faible' est de montrer l'unicité des solutions faibles en utilisant l'existence de solutions fortes. Cette méthode a été introduite par Calderón ([Cal90]) pour construire une solution de Leray associée à une donnée initiale $u_0 \in L^3$. L'unicité 'forte-faible' donne une réponse partielle au problème d'unicité des solutions des équations de Navier-Stokes en dimension supérieure (voir aussi [GP02]).

Travaux précédents sur le problème bien-posé du système de Boussinesq.

Le problème bien-posé du système de Boussinesq a été étudié par beaucoup de mathématiciens. Nous commençons par rappeler certains résultats importants d'existence et d'unicité des

solutions du système de Boussinesq.

Le premier résultat d'existence et d'unicité des solutions faibles du système de Boussinesq en \mathbb{R}^d pour des données initiales dans l'espace de Lebesgue L^p est due à Cannon et DiBenedetto dans [CD80]. Dans cet article, les auteurs ont établi un résultat d'existence locale et d'unicité de la solution faible par un argument de contraction et un résultat d'existence globale sous les conditions de petitesse. Sawada et Taniuchi [ST04] ont établi un résultat d'existence locale et d'unicité des solutions 'mild' pour le système de Boussinesq en dimension d avec des données initiales non décroissantes à l'infini. De plus, ils ont montré que la solution est globale en temps sans condition de petitesse.

Lorsque le système de Boussinesq est partiellement visqueux, c'est-à-dire, le terme diffusion n'apparaît plus dans l'équation de transport, le problème devient beaucoup plus difficile. Nous présentons quelques résultats pour le système de Boussinesq partiellement visqueux en dimension deux. Hou et Li [HL05], et Chae [Cha06] ont montré indépendamment l'existence globale des solutions classiques pour des données initiales (u_0, θ_0) appartiennent à l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^2)$, $s \geq 3$. Ensuite, Hmidi et Keraani [HK07] ont construit des solutions faibles de Leray pour des données initiales dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ par un calcul para-différentiel et un argument de compacité. De plus, ils ont montré l'unicité de ces solutions faibles sous d'autres hypothèses pour les données initiales et amélioré les résultats précédents dans le cas où les données initiales ne sont pas nécessairement Lipschitz. Récemment un résultat sur l'existence globale et l'unicité des solutions du système de Boussinesq pour des données initiales plus générales, i.e. $(u_0, \theta_0) \in L^2(\mathbb{R}^2) \cap B_{\infty,1}^{-1}(\mathbb{R}^2) \times B_{2,1}^0(\mathbb{R}^2)$, a été établi par Abidi et Hmidi [AH07]. Lorsque l'équation de la vitesse comporte un terme de diffusion non-linéaire et l'équation de transport est sans diffusion, Abidi a démontré que le système est globalement bien posé dans certains espaces critiques [Abi09].

Mentionnons aussi l'article de Danchin et Paicu [DP08b] dans lequel ils ont considéré le système de Boussinesq partiellement visqueux en dimension deux et en dimension supérieure. Ils ont montré que de nombreux résultats classiques pour les équations de Navier-Stokes sont encore vrais pour le système de Boussinesq. Par exemple, comme le théorème de Leray, ils ont développé l'existence des solutions faibles globales en n'importe quelle dimension et l'unicité des solutions en dimension deux. De plus, en dimension trois ou supérieur, ils ont montré l'existence et l'unicité des solutions fortes globales pour des données initiales petites. De plus, les mêmes auteurs ont étudié l'existence globale et l'unicité des solutions dans l'espace de Lorentz pour le système tridimensionnel de Boussinesq sous les conditions de petitesse [DP08a].

Pour le système sans terme de diffusion dans l'équation de transport en dimension trois, Abidi, Hmidi et Keraani [AHK11] ont étudié l'existence globale des solutions avec des données initiales axisymétriques. Dans le cas de la dimension trois, il n'y a pas beaucoup de résultats sur le système de Boussinesq avec le terme de diffusion dans l'équation de transport. Hmidi et Rousset [HR10] ont établi un résultat global pour des données initiales à la structure particulière, plus précisément, des données initiales axisymétriques.

1.3.3 Résultats de la thèse sur l'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq

Dans cette thèse, nous travaillons sur l'unicité des solutions du système de Boussinesq en généralisant le résultat d'unicité sur $C([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$ pour les solutions des équations de Navier-Stokes (voir le chapitre 4).

Observons que

$$\|u_{0,\lambda}\|_{L^3} = \|u_0\|_{L^3} \quad \text{et} \quad \|\theta_{0,\lambda}\|_{L^1} = \|\theta_0\|_{L^1}.$$

Après invariance par changement d'échelle, l'espace de résolution naturel du système de Bous-

sinesq, au moins dans le cadre des espaces de Lebesgue est l'espace critique

$$C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3)).$$

En s'inspirant de la méthode de Kato, nous allons d'abord montrer l'existence de solutions dans cet espace, en appliquant l'algorithme de point fixe dans un sous-espace de celui-ci. Nous introduisons d'abord X , un sous-espace de $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$ muni de la norme

$$\|u\|_X \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{L^3} + \sup_{0 < t \leq T} \sqrt{t} \|u(t)\|_{L^\infty},$$

tel que $\|u\|_X < \infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|u(t)\|_{L^\infty} = 0$. De la même manière, nous introduisons Y , un sous-espace de $C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$ muni de la norme

$$\|\theta\|_Y = \sup_{t \in [0, T]} \|\theta(t)\|_{L^1} + \sup_{0 < t \leq T} t^{3/2} \|\theta(t)\|_{L^\infty},$$

tel que $\|\theta\|_Y < \infty$ et $\lim_{t \rightarrow 0} t^{3/2} \|\theta(t)\|_{L^\infty} = 0$.

Dans ce cadre, l'analogie du théorème 1.3.1 est la proposition suivante :

Proposition 1.3.4. *Soient $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs de divergence nulle, $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Alors il existe un temps $T > 0$ et une solution 'mild' unique $(u, \theta) \in X \times Y$ de (BNS-1).*

L'approche pour démontrer cette proposition est exactement la même que celle du théorème 1.3.1 pour les équations de Navier-Stokes. Mais l'inconvénient est que cette proposition n'assure l'unicité de la solution que dans la classe plus petite $X \times Y$, et non dans l'espace naturel $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$. C'est loin être optimal. En effet, aucun résultat de régularité des solutions du système de Boussinesq ne semble connu dans cette classe. En supposant seulement que $u \in L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\theta \in L^1(\mathbb{R}^3)$, nous ne pouvons pas, *a priori*, définir le produit $u\theta$ au sens de distribution, et donc l'un des termes nonlinéaires n'aurait pas de sens dans ce cadre. Le but principal de cette partie est alors d'établir l'unicité des solutions du système de Boussinesq dans un espace plus large que $X \times Y$, et plus "proche" de l'espace $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$.

Nous allons utiliser un sous-espace de $L^1_{\text{loc}}((0, T), L^p)$ tel que $\|u\|_{X_p} < \infty$, X_p muni de la norme

$$\|u\|_{X_p} = \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{1}{2}(1-3/p)} \|u(t)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

En particulier, si $p = 3$, on a $X_3 = L^\infty((0, T), L^3(\mathbb{R}^3))$. Concernant la température, nous considérons le sous-espace de $L^1_{\text{loc}}((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$ tel que $\|\theta\|_{Y_q} < \infty$, Y_q muni de la norme

$$\|\theta\|_{Y_q} = \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{3}{2}(1-1/q)} \|\theta(t)\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Remarquons que $Y_1 = L^\infty((0, T), L^1(\mathbb{R}^3))$.

En utilisant ces deux espaces, nous pouvons établir d'abord un résultat plus général sur l'existence des solutions.

Théorème 1.3.5. *Soient $3/2 < q < 3$ et θ_0 dans l'adhérence de la classe Schwartz dans l'espace Besov inhomogène $B_{q, \infty}^{-3(1-1/q)}(\mathbb{R}^3)$. Soit $p > 3$ tel que $\frac{2}{3} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ et u_0 un champ de vecteurs de divergence nulle dans l'adhérence de la classe de Schwartz dans $B_{p, \infty}^{-(1-3/p)}(\mathbb{R}^3)$.*

(i) *Alors il existe un temps $T > 0$ et un couple de solutions (u, θ) de (BNS-1), tel que $(u, \theta) \in X_p \times Y_q$ et $\|u\|_{X_p} \rightarrow 0$, $\|\theta\|_{Y_q} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow 0$. De plus, il existe $R > 0$ ne dépendant que de p et q , tel que (u, θ) est l'unique solution satisfaisant $\|u\|_{X_p} < R$ et $\|\theta\|_{Y_q} < R$.*

(ii) (Régularité) La solution ci-dessus appartient à $(X_p \cap X_\infty) \times (Y_q \cap Y_\infty)$. De plus, $\|u\|_{X_\infty} \rightarrow 0$ et $\|\theta\|_{Y_\infty} \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow 0$.

(iii) - Sous la condition plus stricte, $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, on a $u \in X \subset X_3 \cap X_\infty$.
- Sous la condition plus stricte, $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, on a $\theta \in Y \subset Y_1 \cap Y_\infty$.

Sous les deux conditions, $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, u est continue en temps à valeur de $L^3(\mathbb{R}^3)$ et θ est continue en temps à valeur de $L^1(\mathbb{R}^3)$.

Le système de Boussinesq peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ \nabla \cdot u_0 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3] \\ e^{t\Delta}\theta_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} B_1(u, \tilde{u}) + B_2(u, \tilde{\theta}) \\ B_3(u, \tilde{\theta}) \end{pmatrix}.$$

En utilisant le lemme de point fixe à l'espace de Banach $E = X_p \times Y_q$ nous obtenons l'existence et l'unicité de la solution. Il nous faut d'abord établir la continuité de l'opérateur bilinéaire $\mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})$ pour tout $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in E$:

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})\|_E \leq C_0 \|\mathbf{v}\|_E \|\tilde{\mathbf{v}}\|_E, \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}_0\|_E < 1/(4C_0),$$

ce qui peut être fait par des applications judicieuses des inégalités de Hölder et Young dans les différents termes. Ensuite, les techniques de bootstrap nous permettent de prouver la régularité de la solution. Enfin (iii) est obtenu par interpolation.

Le premier résultat important de cette partie de la thèse est l'unicité de la solution dans l'espace $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q, \infty}$ (voir la définition ci-dessous). En effet, nous avons déjà évoqué l'obstruction que l'on rencontre pour établir l'unicité dans l'espace critique $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$. L'idée de l'espace $Y_{q, \infty}$ est d'imposer une condition de régularité supplémentaire sur la température permettant de définir le produit θu au sens des distributions. Observons que la solution obtenue dans le théorème 1.3.5 satisfait, pour tout $1 < q < \infty$,

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} < \infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} = 0. \quad (1.3.2)$$

Dans la suite, nous considérons l'espace $Y_{q, \infty}$ associé à (1.3.2). Plus précisément, $Y_{q, \infty} = Y_{q, \infty, T}$ est un sous-espace de $L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q, \infty}(\mathbb{R}^3))$ tel que

$$\|\theta\|_{Y_{q, \infty}} = \|\theta\|_{Y_{q, \infty, T}} \equiv \text{ess sup}_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} < +\infty$$

et

$$\|\theta\|_{Y_{q, \infty, T'}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T' \rightarrow 0.$$

Nous allons montrer que si la température est limitée dans $Y_{q, \infty}$, l'unicité peut être garantie dès que la vitesse est dans $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$.

Théorème 1.3.6. *Soit un temps $T > 0$ et (u, θ) une solution 'mild' du système de Boussinesq (BNS-1), telle que*

$$(u, \theta) \in C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q, \infty}, \quad (1.3.3)$$

pour $3/2 < q < 3$. Alors les données initiales (u_0, θ_0) appartiennent à $L^3(\mathbb{R}^3) \times B_{q, \infty, \infty}^{-3(1-1/q)}$ et déterminent uniquement (u, θ) .

Nous avons besoin de plusieurs ingrédients ici, et le plus important est d'établir les estimations bilinéaires dans les espaces de Lorentz dans le même esprit que celles de Meyer, comme

dans lemme 1.3.3 :

$$\begin{aligned} \|B_1(u, v)\|_{X_{3,\infty}} &\leq C\|u\|_{X_{3,\infty}}\|v\|_{X_{3,\infty}}, & \|B_1(u, v)\|_{X_{3,\infty}} &\leq C\|u\|_{X_{3,\infty}}\|v\|_{X_\infty}, \\ \|B_2(u, \theta)\|_{X_{3,\infty}} &\leq C\|u\|_{X_{3,\infty}}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}}, & \|B_2(u, \theta)\|_{X_{3,\infty}} &\leq C\|u\|_{X_{p_1}}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}}, \\ \|B_3(u, \theta)\|_{Y_{q,\infty}} &\leq C\|u\|_{X_p}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}}. \end{aligned}$$

quand p_1, p, q vérifient certains conditions (voir le chapitre 4 pour plus de détails).

Une fois ces estimations bilinéaires établies, nous pouvons montrer l'unicité des solutions par la même méthode que la démonstration du théorème 1.3.2. Nous remarquons qu'ici nous n'avons pas besoin que θ appartienne à $C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$ dans le théorème 1.3.6.

Le second théorème important de ce chapitre est le théorème d'unicité suivant :

Théorème 1.3.7. *Soient $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs de divergence nulle, $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et $T > 0$. Soient (u, θ) , $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ deux solutions 'mild' du système de Boussinesq (BNS-1) associées à (u_0, θ_0) telles que*

$$u, \tilde{u} \in C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \quad \text{et} \quad \theta, \tilde{\theta} \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3)),$$

pour $q > 3/2$. Alors $(u, \theta) = (\tilde{u}, \tilde{\theta})$.

La preuve de ce théorème s'appuie sur le résultat du théorème 1.3.6. Il s'agit d'enlever la restriction $\theta \in Y_{q,\infty}$: ceci sera fait en prouvant que toute solution 'mild' appartenant à $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3))$ doit être en accord avec la solution de la proposition 1.3.4. Cette dernière étape utilise un argument de compacité inspiré d'un théorème d'unicité de Ben Artzi dans [BA94] et H. Brézis dans [Bre94] sur l'équation du tourbillon. Dans la proposition 1.3.4, le temps d'existence $T > 0$ ne dépend pas seulement de $\|u_0\|_3$ et $\|\theta_0\|_1$, mais également de u_0 et θ_0 eux-mêmes. Cependant, si nous nous limitons à une classe de données initiales $(u_0, \theta_0) \in H \times K$, où H est précompact dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et K est précompact dans $L^1(\mathbb{R}^3)$, alors le temps d'existence T dépend uniquement de H et K . De plus, cette proposition permet de définir deux semi-groupes

$$R(t) : L^3(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \quad \text{et} \quad S(t) : L^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^3)$$

tel que $(R(t)u_0, S(t)\theta_0)$ est l'unique solution dans $X \times Y$ du système de Boussinesq (BNS-1). Supposons que (u, θ) est une solution du système de Boussinesq (BNS-1) satisfaisant toutes les conditions du théorème 1.3.7, alors notre but est de montrer que

$$u(t) = R(t)u_0 \quad \text{et} \quad \theta(t) = S(t)\theta_0.$$

La preuve se déroule de la manière suivante : tout d'abord, θ est bornée sur $(0, T)$ à valeurs de $L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3)$. Soit $0 < s < \delta$ où $0 < \delta < T/2$. Après l'application du théorème 1.3.6 avec les données initiales $(u(s), \theta(s))$, nous avons

$$u(t+s) = R(t)u(s) \quad \text{et} \quad \theta(t+s) = S(t)\theta(s)$$

pour tout $t \in [0, \delta]$. Ensuite, soit $K = \theta((0, T])$. Observons que K est précompact dans $L^1(\mathbb{R}^3)$, parce que θ est continue de 0 à T à valeurs dans $L^1(\mathbb{R}^3)$. Le temps d'existence dépend uniquement de K et on a donc

$$\sup_{s \in (0, \delta)} t^\sigma \|\theta(t+s)\|_{L^q} \leq \sup_{\theta_0 \in K} t^\sigma \|S(t)\theta_0\|_{L^q} \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow 0.$$

On retrouve la condition de la limite $\lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|\theta(t)\|_{L^{q,\infty}} = 0$ et $\theta \in Y_{q,\infty}$. D'autre part, on a obtenu que $S(t)\theta_0 \in Y_q \subset Y_{q,\infty}$ par le théorème 1.3.5. On conclut la preuve en utilisant une fois encore le théorème 1.3.6.

Remarque 1.3.8. Le théorème 1.3.7 ne comprend pas le cas $q = 3/2$. En effet, nous ne savons pas si $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^{3/2}(\mathbb{R}^3))$ ou $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{3/2, \infty}$ est une classe d'unicité pour les solutions 'mild' du système de Boussinesq.

Dans le théorème 1.3.7, il est possible d'améliorer l'espace de u par $C([0, T], D)$, où D est la fermeture dans $L^{3, \infty}(\mathbb{R}^3)$ de $\{f \in L^{3, \infty} : -\Delta f \in L^{3, \infty}\}$. Plus précisément, l'espace D a été caractérisé par Lunardi [Lun12] comme le sous-espace maximal dans $L^{3, \infty}$ où le semi-groupe de Stokes est C_0 -continu (Voir [OT18] pour plus de détails). Soit $u_0 \in L^{3, \infty}(\mathbb{R}^3)$ un champ de divergence nulle et $u \in D$, alors notre preuve marche. Nous obtenons ainsi l'unicité dans l'espace plus grand $C([0, T], D) \times Y_{q, \infty}$, avec $3/2 < q < 3$. Remarquons que D est strictement plus grand que $L^3(\mathbb{R}^3)$, et également plus grand que la fermeture des fonctions régulières avec support compact de $L^{3, \infty}$.

1.4 Les films liquides en 3D

1.4.1 Motivation et travaux précédents

La dynamique des films liquides minces soulève de nombreux problèmes classiques et importants en mécanique des fluides et attire beaucoup l'attention des chercheurs. En 1967, Shkadov [Shk67] a établi une équation pour décrire l'évolution d'un film liquide s'écoulant sur une plaque sous l'influence de la gravité. Ensuite, en 1976, Kuramoto & Tsuzuki [KT76] ont retrouvé cette équation en considérant les instabilités possibles d'un système de réaction-diffusion. De plus, en 1977, Sivashinsky [Siv77] a aussi obtenu cette équation en étudiant les instabilités thermo-diffusives pour des fronts de flammes laminares. C'est la raison pour laquelle cette équation porte le nom de Kuramoto-Sivashinsky. En dimension 1, cette équation s'écrit sous la forme suivante :

$$\eta_t + \eta\eta_x = -\eta_{xx} - \eta_{xxx} \quad (\text{KS})$$

Plus tard, Sivashinsky & Michelson [SM80] ont lié l'équation de Kuramoto-Sivashinsky à l'évolution d'un film liquide visqueux s'écoulant sur une plaque verticale. Citons d'autres travaux concernant cette équation : Topper & Kawahara [TK78], Lee & Chen [LC82], Coward & Hall [CH93], Frenkel & Indreshkumar [FI99] et James & Wilczek [JW18] pour les cas suivants : la chute de films fluides, turbulence plasmatique et suspensions cellulaires.

L'équation de Kuramoto-Sivashinsky a une dynamique très riche. En effet, après application de la transformation de Fourier à la partie linéaire de (KS), on obtient

$$\partial_t \hat{\eta}(\xi) = (\xi^2 - \xi^4) \hat{\eta}(\xi),$$

et il en résulte la stabilité des hautes fréquences ($|\xi| > 1$) et l'instabilité des basses fréquences ($0 < |\xi| < 1$). Plus précisément, le terme η_{xx} conduit à une instabilité à grande échelle; le terme dissipatif η_{xxx} est responsable de l'amortissement à petite échelle. Le problème linéaire est instable et conduit à une croissance exponentielle de certaines fréquences pour des données initiales générales. Lorsque le terme non linéaire $\eta\eta_x$ est pris en compte, la stabilisation se produit lorsque ce terme transfère de l'énergie des grandes longueurs d'onde aux courtes longueurs d'onde et équilibre la croissance exponentielle due aux parties linéaires. Cette interaction entre une partie linéaire instable et une partie non-linéaire qui transporte de l'énergie entre les fréquences permet à la solution de (KS) de développer une dynamique chaotique pour certaines valeurs des paramètres.

Nous rappelons tout d'abord un résultat d'existence et d'unicité pour l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Dans [Tad86], Tadmor a montré que le problème de Cauchy est bien posé : l'équation de Kuramoto-Sivashinsky admet une unique solution régulière, qui dépend continûment des

données initiales (voir aussi [NS84]). Ensuite, dans le cas des conditions aux limites périodiques de période L

$$\eta(x + L, t) = \eta(x, t), \quad \forall x, t,$$

la stabilisation non-linéaire de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky a été étudiée par Nicolaenko, Scheurer & Temam dans [NST85] à condition que les données initiales soient impaires $\eta_0(x) = -\eta_0(-x)$. Ensuite, Ilyashenko [Il'92], Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe [CEES93b] et Goodman [Goo94] ont amélioré les estimations de la norme de L^2 des solutions de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky sans supposer que les données initiales sont impaires. Le fait que les solutions soient bornées uniformément dans L^2 nous amène à la question de l'estimation optimale pour le rayon du borné absorbant dans L^2 pour une période L arbitrairement grande. Par exemple, une borne connue est

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^L u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq O(L^p),$$

où $p = 5/2$. Cette borne a été établie dans [NST85], puis améliorée à $p = 8/5$ dans [CEES93b], et enfin $p = 3/2$ dans [BG06]. Récemment, Giacomelli & Otto [GO05] ont obtenu

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^L u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq o(L^{\frac{3}{2}}).$$

L'analyticité des solutions est intéressante non seulement pour l'équation de Kuramoto-Sivashinsky, mais également pour d'autres équations aux dérivées partielles non-linéaires. Par exemple, Foias & Temam ont montré dans un article fondamental [FT89] que les solutions des équations de Navier-Stokes sont analytiques en temps à valeurs dans la classe de Gevrey. Cette stratégie a été largement étendue à d'autres équations paraboliques non-linéaires, en particulier, Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe [CEES93a] ont étudié l'analyticité spatiale des solutions de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky en dimension un (interface 1D). Dans leur article, ils ont montré que les solutions sont analytiques dans une bande autour de l'axe réel dont la largeur est indépendante de la période L et ont également donné une borne inférieure rigoureuse pour cette largeur. En utilisant une technique de classe de Gevrey, Grujić [Gru00] a montré l'existence d'un voisinage, dans l'attracteur global, de l'ensemble de toutes les solutions stationnaires dans lequel le rayon d'analyticité est indépendant de la période L . En dimension supérieure, citons les articles de Pinto [Pin99, Pin01] où l'auteur a considéré le problème de l'analyticité pour une version de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky bidimensionnelle.

Dans le chapitre 5, nous nous intéressons à la version de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky en dimension deux (interface 2D) suivante :

$$\eta_t + \eta \eta_x + (\beta - 1) \eta_{xx} - \eta_{yy} - \gamma \Lambda^3 \eta + \Delta^2 \eta = 0. \quad (1.4.1)$$

Cette équation a été dérivée par Tomlin, Papageorgiou & Pavliotis dans le cas où le fluide est situé au-dessus d'une plaque (films superposés) dans [TPP17]. La constante $\beta > 0$ désigne le nombre de Reynolds, γ ($0 \leq \gamma \leq 2$) mesure le champ électrique et Λ est un opérateur non-local correspondant à l'effet du champ électrique. Son multiplicateur de Fourier $m(\xi)$ est donné par

$$m(\xi) = |\xi| = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Observons que le terme correspondant au champ électrique, $-\gamma \Lambda^3(\eta)$, a toujours un effet déstabilisateur, alors que le terme $(\beta - 1) \eta_{xx}$ peut être stabilisant ou déstabilisant selon la valeur du nombre de Reynolds. Plus précisément, lorsque $0 < \beta < 1$, c'est-à-dire dans le cas du nombre de Reynolds sous-critique, $(\beta - 1) \eta_{xx}$ est un terme stabilisant ; lorsque $1 < \beta$, c'est-à-dire dans le cas du nombre de Reynolds supercritique, $(\beta - 1) \eta_{xx}$ est un terme déstabilisant.

Le premier résultat sur l'analogue de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (1.4.1) en dimension un (interface 1D) a été étudié par González & Castellanos [GC96]. Plus tard, Tseluiko & Papageorgiou ont également considéré le cas de la dimension un (interface 1D). En particulier, Tseluiko & Papageorgiou ont effectué une étude numérique de l'analogue 1D de (1.4.1) et ont trouvé des attracteurs pour les solutions en supposant certaines valeurs pour les paramètres physiques [TP06a]. Les mêmes auteurs fournissent des bornes sur l'énergie de la solution et sur la dimension de l'attracteur [TP06b] (voir aussi [TP10] dans le cas d'un film vertical). Nous énonçons les résultats principaux du chapitre 5 dans la section suivante.

1.4.2 Résultats de la thèse sur les films liquides en 3D

Le but de cette partie est d'étudier la dynamique d'un analogue de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky (1.4.1) en dimension deux (interface 2D) avec des données initiales de moyenne nulle

$$\int_0^L \int_0^L \eta_0(x, y) dx dy = 0.$$

Nous supposons que η est L -périodique

$$\eta(x + L, y) = \eta(x, y), \quad \eta(x, y + L) = \eta(x, y),$$

et on note $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi]^2$. Après un changement d'échelle, l'équation (1.4.1) devient

$$\eta_t + \eta\eta_x + (\beta - 1)\eta_{xx} - \eta_{yy} - \delta\Lambda^3(\eta) + \varepsilon\Delta^2\eta = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2, t > 0 \quad (1.4.2)$$

avec condition initiale

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2.$$

Nous allons travailler dans le cadre $H^2(\mathbb{T}^2)$. Soit $\eta_0 \in H^2(\mathbb{T}^2)$. L'utilisation d'un théorème de point fixe et des estimations d'énergie *à priori* nous permettent d'obtenir une unique solution $\eta \in C([0, T]; H^2(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(0, T; H^4(\mathbb{T}^2))$ de l'équation (1.4.2) pour tout $T > 0$. Nous allons considérer la dynamique chaotique de l'équation (1.4.2) en donnant une estimation du nombre d'oscillations spatiales des solutions.

Introduisons d'abord $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$, un sous-espace de $H^2(\mathbb{T}^2)$:

$$H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2) = \{\eta \in H^2(\mathbb{T}^2) : -\eta(-x, y) = \eta(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}$$

Voici notre résultat principal :

Théorème 1.4.1. *Soient η la solution du système (1.4.2) associée à la donnée initiale $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$ et $T_0 = K(1 + \|\eta_0\|_{L^2}^2)$ où K est une constante dépendant de $\varepsilon, \delta, \beta$. Alors, $\mathbb{T} = I \cup R$, où I est union d'intervalles de \mathbb{T} de longueur au plus $[\frac{4\pi}{\tanh(\frac{T_0}{2})}]$ tels que pour tout $t \geq \frac{T_0}{2}$*

$$|\partial_x \eta(x, y, t)| \leq 1, \quad \text{pour tout } x \in I, y \in \mathbb{T}$$

et le nombre d'oscillations spatiales est estimé par :

$$\text{card}\{x \in R : |\nabla \eta(x, y, t)| = 0\} \leq \frac{4\pi}{\log 2} \frac{\log C_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}}{\tanh(\frac{T_0}{2})}.$$

où $C_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}$ est une constante qui dépend de $\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0$.

Pour obtenir ce résultat, nous procédons de la manière suivante :

- 1). Par une méthode de Lyapunov, on montre qu'il existe un borné absorbant des solutions de l'équation (1.4.2) ;

- 2). On montre que le système admet une solution analytique par une technique de classe de Gevrey ;
- 3). On établit que le système admet un attracteur compact, connexe, maximal dans $H^2(\mathbb{T}^2)$;
- 4). Nous en déduisons une majoration du nombre d'oscillations spatiales des solutions en utilisant les arguments de [Gru00].

Nous commençons donc par montrer l'existence d'un borné absorbant des solutions :

Théorème 1.4.2. *Soit $\eta_0 \in H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$. Alors la solution η du problème de Cauchy (1.4.2) vérifie*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} < \infty.$$

Une fois établie l'existence d'un borné absorbant dans L^2 , on peut ensuite montrer qu'il existe un borné absorbant dans des normes de Sobolev supérieures par un argument 'bootstrap'.

L'étape clé du théorème 1.4.2 consiste à montrer l'existence d'un borné absorbant dans L^2 , c'est-à-dire qu'il nous faut d'abord montrer que les solutions de l'équation (1.4.2) sont bornées uniformément dans L^2 , i.e.

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \beta, \delta}. \quad (1.4.3)$$

La démonstration de (1.4.3) repose sur la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov. Cette idée a été utilisée pour la première fois par Nicolaenko, Scheurer, & Temam [NST85] et puis améliorée par Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe [CEES93b], Goodman [Goo94] et Bronski & Gambill [BG06]. Nous récrivons l'équation (1.4.2) sous la forme

$$\partial_t \eta + \eta \eta_x + \mathcal{L} \eta = 0$$

où $\mathcal{L} = (\beta - 1)\partial_{xx} - \partial_{yy} - \delta \Lambda^3 + \varepsilon \Delta^2$. Nous considérons le cas où les données initiales sont impaires. On établit un ansatz $\mathcal{F}(t) = \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2$, où ϕ est une fonction bien choisie, indépendante du temps et on montre qu'il existe une constante $R_{\varepsilon, \beta, \delta}$ telle que

$$\|\eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \beta, \delta}.$$

En effet, on montre que $\mathcal{F}(t)$ est une fonction bornée en temps vérifiant

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq 0, \quad \text{si } \mathcal{F}(t) \geq R_{\varepsilon, \beta, \delta}.$$

Ceci implique l'existence d'un borné absorbant dans L^2 .

Ensuite, nous allons étudier l'analyticité des solutions de l'équation (1.4.2) par une méthode développée par Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe dans [CEES93a] (voir aussi [FT89]). Notre preuve est basée sur des estimations *a priori* pour des fonctions dans certaines classes de Gevrey. Avant d'introduire le résultat d'analyticité, nous devons d'abord introduire la classe de Gevrey. Étant donnée une fonction $\sigma(t)$ positive, nous considérons l'opérateur exponentiel à poids suivant :

$$e^{\sigma(t)\Lambda} \eta = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \hat{\eta}(\xi) e^{\sigma(t)|\xi|} e^{i\xi \cdot x}$$

qui s'applique à des fonctions dans l'espace

$$G := \{\eta \in L^2(\mathbb{T}^2) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\hat{\eta}(\xi)|^2 < \infty\},$$

muni de la norme

$$\|\eta\|_{\sigma(t)}^2 = \left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta \right\|_{L^2}^2.$$

Voici notre résultat d'analyticité des solutions correspondant à l'étape 2) :

Théorème 1.4.3. *Soit $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Alors il existe un temps $T_0 > 0$ dépendant de $\eta_0, \varepsilon, \beta, \delta$, tel que :*

$$\left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 1 + 2C_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}^2, \quad \forall t > 0$$

où $\sigma(t) = \min\{\tanh(t), \tanh(\frac{T_0}{2})\}$. En particulier, elle est analytique pour $t > 0$.

En multipliant l'équation (1.4.2) par $\eta(t)$, en intégrant par parties et en utilisant les inégalités de Hölder et Young, nous obtenons l'inégalité différentielle suivante

$$\frac{d}{dt} \left(1 + \|\eta\|_{\sigma(t)}^2 \right) \leq K \left(1 + \|\eta\|_{\sigma(t)}^2 \right)^2,$$

où K est une constante qui dépend des paramètres β, δ et ε . En remarquant que la donnée initiale est $1 + \|\eta(0)\|_{\sigma(0)}^2 = 1 + \|\eta_0\|_{L^2}^2$, nous obtenons que

$$\|\eta(t)\|_{\sigma(t)}^2 \leq 1 + 2\|\eta_0\|_{L^2}^2 \quad \text{pour } t \in (0, T_0].$$

Comme nous l'avons expliqué, la solution reste dans une boule de rayon $R_{\varepsilon, \beta, \delta}$ une fois qu'elle y est entrée, i.e. $\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \beta, \delta}$. Ainsi nous obtenons l'analyticité locale de $\eta(t)$. Un argument de 'bootstrap' et la structure spéciale de la fonction $\sigma(t)$ nous permettent de rendre l'analyticité globale, ce qui conclut la preuve du théorème 1.4.3.

Remarque 1.4.4. Nous mentionnons que l'analyticité globale que nous obtenons ici est meilleure que le résultat obtenu par Granero-Belinchón et Hunter dans [GBH15]. L'argument avancé par ces auteurs peut être étendu pour prouver l'analyticité globale des solutions de l'équation Kuramoto-Sivashinsky seulement en dehors d'un ensemble de temps de mesure nulle.

Venons-en à l'étape 3). Soit $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Nous définissons $S(t)\eta_0 := \eta(x, y, t)$ où $\eta(x, y, t)$ est une solution associée à la donnée initiale η_0 et la famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un système dynamique sur $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. En fait, par l'existence d'un borné absorbant et par l'analyticité globale des solutions, nous savons que $S(\cdot)\eta_0 \in \mathcal{C}([0, T]; H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2))$ définit un semigroupe compact dans $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Enfin nous montrons que le système dynamique $S(t)$ admet un attracteur maximal, connexe et compact dans $H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$ à l'aide d'un théorème fondamental d'existence d'un attracteur global compact (voir le théorème 1.1 dans [Tem97]).

Finalement, nous allons estimer le nombre des pics des solutions $\eta(t)$. Un lemme établi par Grujić dans [Gru00] nous donne une méthode efficace pour étudier le nombre de pics (voir aussi [GBH15, BGB16]). Nous ne pouvons pas utiliser directement la méthode de [Gru00], parce qu'elle est adaptée au cas de la dimension un mais pas au cas des dimensions supérieures. Nous observons que le terme non-linéaire $\eta\eta_x$ ne dépend pas de y , donc on peut d'abord considérer le cas où y est fixe. Nous rappelons que si $\eta(x, y, t)$ est analytique dans une bande complexe

$$\mathbb{S}_{\sigma(t)} = \{(x, y) + i(\tilde{x}, \tilde{y}) : (x, y) \in \mathbb{T}^2, |(\tilde{x}, \tilde{y})| < \sigma(t)\},$$

alors $f_y(x, t) := \eta(x, y, t)$ est analytique dans $\mathbb{S}'_{\sigma(t)} = \{x + i\tilde{x} : x \in \mathbb{T}, |\tilde{x}| < \sigma(t)\}$ pour y fixé. Nous pouvons appliquer le résultat de [Gru00] à la fonction f_y pour établir une borne pour le nombre d'oscillations spatiales. De plus, nous savons que

$$\text{card}\{x \in R : |\nabla \eta(x, y, t)| = 0\} \leq \text{card}\{x \in R : \partial_x \eta = 0\},$$

où R est défini dans l'énoncé du théorème 1.4.1. Ceci nous permet de finir la démonstration du théorème 1.4.1 et de mettre ainsi en évidence un phénomène chaotique pour l'équation (1.4.2).

Première partie

Fluid-solid system

Small moving rigid body into a 2D fluid

In collaboration with Dragoş Iftimie.

Abstract. In this article, we consider a small rigid body moving in a viscous fluid filling the whole \mathbb{R}^2 . We assume that the diameter of the rigid body goes to 0, that the initial velocity has bounded energy and that the density of the rigid body goes to infinity. We prove that the rigid body has no influence on the limit equation by showing convergence of the solutions towards a solution of the Navier-Stokes equations in the full plane \mathbb{R}^2 .

2.1 Introduction

In this paper, we consider a fluid-solid system consisting in a small smooth rigid body Ω_ε of size ε evolving in a viscous fluid filling the whole of \mathbb{R}^2 . Our aim is to determine the limit of this coupled system when the size of the rigid body ε goes to 0.

Let us describe now the fluid solid system of equations. To do that, we need to introduce some notation. We denote by u_ε , respectively p_ε , the velocity, respectively the pressure, of the fluid; they are defined on $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon$, the exterior of the smooth rigid body Ω_ε . The evolution of the rigid body $\Omega_\varepsilon(t)$ is described by h_ε , the position of its center of mass, and by θ_ε , the angle of rotation of the rigid body compared with the initial position. We have that

$$\Omega_\varepsilon(t) = h_\varepsilon(t) + \begin{pmatrix} \cos \theta_\varepsilon(t) & -\sin \theta_\varepsilon(t) \\ \sin \theta_\varepsilon(t) & \cos \theta_\varepsilon(t) \end{pmatrix} (\Omega_\varepsilon(0) - h_\varepsilon(0)).$$

The velocity of the fluid verifies the incompressible Navier-Stokes equations in the exterior of the rigid body :

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon = 0, \quad \operatorname{div} u_\varepsilon = 0 \quad \text{for } t > 0 \text{ and } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(t). \quad (2.1.1)$$

On the boundary of the rigid body we assume no-slip boundary conditions :

$$u_\varepsilon(t, x) = h'_\varepsilon(t) + \theta'_\varepsilon(t)(x - h_\varepsilon(t))^\perp \text{ for } t > 0 \text{ and } x \in \partial\Omega_\varepsilon(t). \quad (2.1.2)$$

Moreover, the velocity is assumed to vanish at infinity :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_\varepsilon(t, x) = 0 \text{ for } t \geq 0. \quad (2.1.3)$$

Now we write down the equations of motion of the solid body. Let us denote by m_ε the mass of the solid and by J_ε the momentum of inertia of the solid. We also denote by $\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ the stress tensor of the fluid :

$$\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = 2\nu D(u_\varepsilon) - p_\varepsilon I_2$$

where I_2 is the identity matrix and $D(u_\varepsilon)$ is the deformation tensor

$$D(u_\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\varepsilon,j}}{\partial x_i} \right)_{i,j}.$$

Then the solid body $\Omega_\varepsilon(t)$ evolves according to Newton's balance law for linear and angular momenta :

$$m_\varepsilon h''_\varepsilon(t) = - \int_{\partial\Omega_\varepsilon(t)} \sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon \quad \text{for } t > 0, \quad (2.1.4)$$

and

$$J_\varepsilon \theta''_\varepsilon(t) = - \int_{\partial\Omega_\varepsilon(t)} (\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) \cdot (x - h_\varepsilon)^\perp \text{ for } t > 0. \quad (2.1.5)$$

Above n_ε denotes the unit normal to $\partial\Omega_\varepsilon$ which points to the interior of the rigid body Ω_ε , the orthogonal x^\perp is defined by $x^\perp = (-x_2, x_1)$ and $\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon$ denotes the matrix $\sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ applied to the vector n_ε .

One can obtain energy estimates for this system of equations. If we formally multiply the equation of u_ε by u_ε , do some integrations by parts using also the equations of motion of the

rigid body, we get the following energy estimate :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 + m_\varepsilon |h'_\varepsilon(t)|^2 + J_\varepsilon |\theta'_\varepsilon(t)|^2 + 4\nu \int_0^t \|D(u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 \\ \leq \|u_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)}^2 + m_\varepsilon |h'_\varepsilon(0)|^2 + J_\varepsilon |\theta'_\varepsilon(0)|^2. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

To solve the system of equations (2.1.1)–(2.1.5), we need to impose the initial data. For the fluid part of the system we need to impose the initial velocity $u_\varepsilon(0, x)$. The two equations describing the evolution of the rigid body are second-order in time, so we need to know $h_\varepsilon(0)$, $h'_\varepsilon(0)$, $\theta_\varepsilon(0)$ and $\theta'_\varepsilon(0)$. The system of equations being translation invariant, we can assume without loss of generality that the initial position of the center of mass of the rigid body is in the origin : $h_\varepsilon(0) = 0$. Moreover, from the definition of the angle of rotation θ_ε we obviously have that $\theta_\varepsilon(0) = 0$. So we only need to impose $u_\varepsilon(0, x)$, $h'_\varepsilon(0)$ and $\theta'_\varepsilon(0)$. The initial velocity will be assumed to be square integrable only. As such, its trace on the boundary is not well-defined. Only its normal trace is defined thanks to the divergence free condition. Therefore, we need to impose the following compatibility condition on the initial velocity :

$$u_\varepsilon(0, x) \cdot n_\varepsilon = [h'_\varepsilon(0) + \theta'_\varepsilon(0)(x - h_\varepsilon(0))^\perp] \cdot n_\varepsilon \quad \text{on } \partial\Omega_\varepsilon(0). \quad (2.1.7)$$

In conclusion, to solve the system of equations (2.1.1)–(2.1.5), we need to impose that $u_\varepsilon(0, x) \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(0))$, that $\operatorname{div} u_\varepsilon(0, x) = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(0)$ and the compatibility condition (2.1.7). There is no condition required on $h'_\varepsilon(0)$ and $\theta'_\varepsilon(0)$ while $h_\varepsilon(0) = 0$ and $\theta_\varepsilon(0) = 0$.

To state the classical result of existence and uniqueness of solutions of (2.1.1)–(2.1.5), it is practical to extend the velocity field u_ε inside the rigid body as follows :

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} u_\varepsilon(t, x) & \text{if } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(t) \\ h'_\varepsilon(t) + \theta'_\varepsilon(t)(x - h_\varepsilon(t))^\perp & \text{if } x \in \Omega_\varepsilon(t). \end{cases} \quad (2.1.8)$$

The conditions imposed on the initial data ensure that $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ belongs to $L^2(\mathbb{R}^2)$ and is divergence free in \mathbb{R}^2 .

Let us denote by ρ_ε the density of the rigid body Ω_ε . We extend ρ_ε in the fluid region $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon$ by giving it value 1 :

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(t) \\ \rho_\varepsilon, & x \in \Omega_\varepsilon(t). \end{cases}$$

Due to the energy estimates (2.1.6), global existence of finite energy solutions of (2.1.1)–(2.1.5) have been proved in a variety of settings. The literature is vast, we give here just a few references dealing with the dimension two : in [DE99], [HS99] and [SMST02] the authors consider the case of one or several rigid bodies moving in a bounded domain filled with a viscous fluid while in [TT04] the authors consider a single disk moving in a fluid filling the whole plane. The existence for the problem we are considering here was not explicitly studied in these works (because we do not assume the rigid body to be a disk), but more complicated cases have been considered in the literature : the case of a 2D bounded domain where collisions with the boundary must be taken into account (see [DE99], [HS99] and [SMST02]) and the case of \mathbb{R}^3 with a rigid body of arbitrary shape (see for example [Jud74] and [Ser87]). From these results we can extract the following statement about the existence of solutions of (2.1.1)–(2.1.5). We use the notation $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ and emphasize that the endpoint 0 belongs to \mathbb{R}_+ . This is important when we write local spaces in \mathbb{R}_+ like for instance $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+) = \{f ; f \text{ square integrable on any interval } [0, t]\}$. We will give a formulation of the PDE in terms of the extended velocity \tilde{u}_ε .

Theorem 2.1.1. *Let $u_\varepsilon(0, x) \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(0))$ be divergence free and verifying the compatibility condition (2.1.7). We assume that $h_\varepsilon(0) = 0$ and $\theta_\varepsilon(0) = 0$ and we extend $u_\varepsilon(0, x)$ to $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$*

as in (2.1.8). Then $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ is divergence free and square integrable on \mathbb{R}^2 and there exists a global weak solution $(u_\varepsilon, h_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ of (2.1.1)–(2.1.5) in the following sense :

- $u_\varepsilon, h_\varepsilon, \theta_\varepsilon$ satisfy

$$u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon)),$$

$$h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2), \quad \theta_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R});$$

- if we define \tilde{u}_ε as in (2.1.8) then \tilde{u}_ε is divergence free with $D\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = 0$ in $\Omega_\varepsilon(t)$ and the equations of motion are verified in the sense of distributions under the following form

$$- \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\rho}_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \cdot (\partial_t \varphi_\varepsilon + (\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi_\varepsilon) + 2\nu \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^2} D(\tilde{u}_\varepsilon) : D(\varphi_\varepsilon) = \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\rho}_\varepsilon(0) \tilde{u}_\varepsilon(0) \cdot \varphi_\varepsilon(0).$$

for any divergence free test function $\varphi_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$ compactly supported in time and such that $D\varphi_\varepsilon(t, x) = 0$ in $\Omega_\varepsilon(t)$;

Moreover, \tilde{u}_ε satisfies the following energy inequality :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\rho}_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon|^2 + 4\nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} |D(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{\rho}_\varepsilon(0) |\tilde{u}_\varepsilon(0)|^2 \quad \forall t > 0. \quad (2.1.9)$$

As mentioned before, we are interested in describing the asymptotic behavior of this fluid-solid system when the diameter of the rigid body Ω_ε goes to 0. There are several papers dealing with this issue when the rigid body does not move with the fluid. Ifitimie, Lopes Filho and Nussenzveig Lopes [ILN06] have treated the asymptotic behavior of viscous incompressible 2D flow in the exterior of a small fixed rigid body as the size of the rigid body becomes very small, see also [CJG⁺14] for the case of the periodic boundary conditions. Moreover, Lacave [Lac09b] considered a two-dimensional viscous fluid in the exterior of a thin fixed rigid body shrinking to a curve and proved convergence to a solution of the Navier-Stokes equations in the exterior of a curve.

Although we are dealing here only with viscous fluids, let us mention that the case of a perfect incompressible fluid governed by the Euler equations also makes sense and the literature is richer. Let us mention a few results. Ifitimie, Lopes Filho and Nussenzveig Lopes [ILN03] have studied the asymptotic behavior of incompressible, ideal two-dimensional flow in the exterior of a small fixed rigid body when the size of the rigid body becomes very small. Recently, Glass, Lacave and Sueur [GLS14] have studied the case when the solid body shrinks to a point with fixed mass and circulation and is moving with the fluid. The same three authors also consider in [GLS16] the case when the body shrinks to a massless pointwise particle with fixed circulation. In that case, the fluid-solid system converges to the vortex-wave system. In addition, Glass, Munnier and Sueur [GMS18] considered the case of a bounded domain.

As far as we know, there is only one result dealing with the case of a small rigid body moving in a viscous fluid in dimension two. More precisely, Lacave and Takahashi [LT17] considered a small moving disk in a two-dimensional viscous incompressible fluid. They used a fixed-point type argument based on previously known $L^p - L^q$ decay estimates of the linear semigroup associated to the fluid-solid system (see [EHL14]). They proved convergence towards the solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 under the assumption that the rigid body is a disk of radius ε , that the density ρ_ε is constant plus some smallness assumptions on the initial data (including the smallness of the L^2 norm of the initial fluid velocity). More precisely, their result is the following.

Theorem 2.1.2 ([LT17]). *There exists a constant $\lambda_0 > 0$ such that if*

- $u_\varepsilon(0, x) \in L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(0))$ is divergence free and verifies the compatibility condition (2.1.7) ;

- the rigid body is the disk $\Omega_\varepsilon = D(h_\varepsilon, \varepsilon)$;
- the density ρ_ε is assumed to be independent of ε ;
- $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ converges weakly in $L^2(\mathbb{R}^2)$ to some $u_0(x)$;
- we have the following smallness of the initial data

$$\|u_\varepsilon(0, x)\|_{L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(0))} + \varepsilon|h'_\varepsilon(0)| + \varepsilon^2|\theta'_\varepsilon(0)| \leq \lambda_0 \quad (2.1.10)$$

then the global solution \tilde{u}_ε given by Theorem 2.1.1 converges weak* in $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ towards the weak solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 with initial data u_0 .

Although they state their result for constant density, presumably the proof can be adapted to the case where $\rho_\varepsilon \geq \rho_0$ for some $\rho_0 > 0$ independent of ε . On the other hand, the hypothesis that Ω_ε is a disk seems to be essential in the result of [LT17]. Indeed, a key ingredient are the estimates of [EHL14] and the proof of that result relies heavily on the fact that Ω_ε is a disk because it uses explicit formulae valid only for the case of a disk. Moreover, it is also hard to see how the smallness condition (2.1.10) could be removed in their argument. Indeed, they use a fixed point argument and that requires smallness at some point. Let us observe that in [LT17] the authors also obtain uniform bounds in ε for the velocity of the disk. Therefore, they can prove that the center of mass of the disk converges to some trajectory. However, nothing can be said about this limit trajectory.

Here, we improve the result of [LT17] in two respects. First, the rigid body does not need to be a disk. It does not even need to be shrinking homothetically to a point like in [LT17]. We only assume that the diameter of the rigid body goes to 0. Second, we require no smallness assumption on the initial fluid velocity $u_\varepsilon(0, x)$. On the other hand, we need to assume that the density of the rigid body goes to infinity and we are not able to prove uniform bounds on the motion of the rigid body as in [LT17]. More precisely, we will prove the following result.

Theorem 2.1.3. *We assume the hypothesis of Theorem 2.1.1 and moreover*

- $\Omega_\varepsilon(0) \subset D(0, \varepsilon)$;
- the mass m_ε of the rigid body verifies that

$$\frac{m_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (2.1.11)$$

- $u_\varepsilon(0, x)$ is bounded independently of ε in $L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(0))$ and $\sqrt{m_\varepsilon}h'_\varepsilon(0)$ and $\sqrt{J_\varepsilon}\theta'_\varepsilon(0)$ are bounded independently of ε ;
- $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ converges weakly in $L^2(\mathbb{R}^2)$ to some $u_0(x)$ where $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ is constructed as in (2.1.8).

Let $(u_\varepsilon, h_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ be a global solution of the system (2.1.1)–(2.1.5) given by Theorem 2.1.1. Then \tilde{u}_ε converges weak* in $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ towards the solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 with initial data u_0 .

It will be clear from the proof that the convergence of \tilde{u}_ε is stronger than stated. For instance, we shall prove that \tilde{u}_ε converges strongly in L^2_{loc} (see Section 2.4).

Let us remark that if the measure of Ω_ε is of order ε^2 (something which is true if the rigid body shrinks homothetically to a point, *i.e.* if $\Omega_\varepsilon(0)$ is ε times a fixed rigid body) then the hypothesis (2.1.11) means that the density ρ_ε of the rigid body goes to ∞ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observe next that the boundedness of $u_\varepsilon(0, x)$ in $L^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon(0))$ and the boundedness of $\sqrt{m_\varepsilon} h'_\varepsilon(0)$ and $\sqrt{J_\varepsilon} \theta'_\varepsilon(0)$ imply the boundedness of $\sqrt{\tilde{\rho}_\varepsilon(0, x)} \tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Since $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty$ this implies that $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ is bounded in $L^2(\mathbb{R}^2)$. Therefore, the weak convergence of $\tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ to $u_0(x)$ is not really a new hypothesis.

Moreover, the boundedness of $\sqrt{\tilde{\rho}_\varepsilon(0, x)} \tilde{u}_\varepsilon(0, x)$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ and the energy inequality (2.1.9) imply that $\sqrt{\tilde{\rho}_\varepsilon} \tilde{u}_\varepsilon$ is bounded independently of ε in the space $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$. Using again that $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty$ we deduce that \tilde{u}_ε is also bounded independently of ε in $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$. And this is all we need to prove the convergence of \tilde{u}_ε towards a solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 . Our proof does not require that \tilde{u}_ε verifies the boundary conditions on Ω_ε , nor do we need that $D\tilde{u}_\varepsilon = 0$ in Ω_ε . We only need the above mentioned boundedness of \tilde{u}_ε and the fact that it verifies the Navier-Stokes equations (without any boundary condition) in the exterior of the disk $D(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$. We state next a more general result.

Theorem 2.1.4. *Let v_ε be a time-dependent divergence free vector field defined on $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ belonging to the space*

$$L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}(h_\varepsilon(t), \varepsilon))) \quad (2.1.12)$$

and let $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2)$. Assume moreover that

- v_ε is bounded independently of ε in $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$;
- $v_\varepsilon(0, x)$ converges weakly in L^2 as $\varepsilon \rightarrow 0$ to some $v_0(x)$;
- v_ε verifies the Navier-Stokes equations in the exterior of the disk $\overline{D}(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$:

$$\partial_t v_\varepsilon - \nu \Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon = -\nabla \pi_\varepsilon \quad \text{in the set } \{(t, x) ; t > 0 \text{ and } |x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon\} \quad (2.1.13)$$

with initial data $v_\varepsilon(0, x)$ in the sense of distributions.

- *the velocity of the center of the disk verifies that $\varepsilon |h'_\varepsilon(t)| \rightarrow 0$ in $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Let v be a solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 with initial data v_0 . Then v_ε converges to v as $\varepsilon \rightarrow 0$ weak in the space $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^2))$.*

Theorem 2.1.4 with $v_\varepsilon = \tilde{u}_\varepsilon$ implies Theorem 2.1.3. Indeed, we already observed above that \tilde{u}_ε has all the properties required from v_ε in Theorem 2.1.4. And the hypothesis made on the mass of the rigid body, see relation (2.1.11), in Theorem 2.1.3 implies that $\varepsilon |h'_\varepsilon(t)| \rightarrow 0$ in $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. This can be easily seen from the energy estimate (2.1.6). Indeed, the hypothesis of Theorem 2.1.3 implies that the right-hand side of (2.1.6) is bounded uniformly in ε so $\sqrt{m_\varepsilon} h'_\varepsilon$ is uniformly bounded in t and ε . The fact that $\frac{m_\varepsilon}{\varepsilon^2} \rightarrow \infty$ and the boundedness of $\sqrt{m_\varepsilon} h'_\varepsilon$ implies that $\varepsilon h'_\varepsilon \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$ uniformly in time.

The idea of the proof of Theorem 2.1.4 is completely different from the proof given in [LT17]. We multiply (2.1.13) with a cut-off vanishing on the disk $D(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ constructed in a very particular manner. We then pass to the limit with classical compactness methods. The difficulty here is that the cut-off function itself depends on the time, so time-derivative estimates of v_ε are not so easy to obtain. Also, passing to the limit in the terms $\partial_t v$ and Δv is not obvious : the first is difficult because the time derivative is hard to control and the second one is difficult because the cut-off introduces negative powers of ε in this term.

The plan of the paper is the following. In the following section we introduce some notation and prove some preliminary results. In Section 2.3 we construct the special cut-off near the rigid body. The required temporal estimates are proved in Section 2.4. Finally, we pass to the limit in Section 2.5.

2.2 Notation and preliminary results

We use the classical notation C^m for functions with m continuous derivatives and H^m the Sobolev space of functions with m square-integrable weak derivatives. The notation C_b^m stands for functions in C^m with bounded derivatives up to order m . All function spaces and norms are considered to be taken on \mathbb{R}^2 in the x variable unless otherwise specified. We define $C_{0,\sigma}^\infty$ to be the space of smooth, compactly supported and divergence free vector fields on \mathbb{R}^2 . The derivatives are always taken with respect to the variable x unless otherwise specified. The double dot product of two matrices $M = (m_{ij})$ and $N = (n_{ij})$ denotes the quantity $M : N = \sum_{i,j} m_{ij}n_{ij}$. We denote by C a generic universal constant whose value can change from one line to another.

Let $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$. The classical stream function ψ of φ is defined by

$$\psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x - y)^\perp}{2\pi|x - y|^2} \cdot \varphi(t, y) dy.$$

It is well-known that $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C^\infty)$ and $\nabla^\perp \psi = \varphi$, see [MB02, page 45]. However, we need to have a stream function which is small in the neighborhood of the rigid body. We define now a modified stream function, denoted by ψ_ε , which vanishes at the center of the disk $D(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$:

$$\psi_\varepsilon(t, x) = \psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t)). \quad (2.2.1)$$

Observe that even if φ is constant in time, the modified stream function still depends on the time through h_ε . We collect some properties of the modified stream function in the following lemma.

Lemma 2.2.1. *Let $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$ and $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$. Then the modified stream function ψ_ε of φ has the following properties :*

i. *We have that $\psi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C^\infty)$ and $\nabla^\perp \psi_\varepsilon = \varphi$.*

ii. *For all $t, R \geq 0$ and $x \in \mathbb{R}^2$ we have that*

$$\|\psi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), R))} \leq R \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \quad (2.2.2)$$

and

$$\|\partial_t \psi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), R))} \leq R \|\partial_t \varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty} + |h'_\varepsilon(t)| \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \quad (2.2.3)$$

with the remark that the last relation holds true only almost everywhere in time.

Proof. Clearly $\nabla^\perp \psi_\varepsilon = \nabla^\perp \psi = \varphi$. Since $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$ and $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C^\infty)$ we immediately see that $\psi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C^\infty)$ which proves (i).

By the mean value theorem

$$|\psi_\varepsilon(t, x)| = |\psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t))| \leq |x - h_\varepsilon(t)| \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{L^\infty} = |x - h_\varepsilon(t)| \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty}. \quad (2.2.4)$$

Relation (2.2.2) follows. To prove (2.2.3) we recall that h_ε is Lipschitz in time so it is almost everywhere differentiable in time. Let t be a time where h_ε is differentiable. We write

$$\begin{aligned} \partial_t \psi_\varepsilon(t, x) &= \partial_t (\psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t))) \\ &= \partial_t \psi(t, x) - \partial_t \psi(t, h_\varepsilon(t)) - h'_\varepsilon(t) \cdot \nabla \psi(t, h_\varepsilon(t)) \end{aligned}$$

so

$$\begin{aligned}
\|\partial_t \psi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), R))} &\leq \|\partial_t \psi(t, x) - \partial_t \psi(t, h_\varepsilon(t))\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), R))} + |h'_\varepsilon(t)| \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \\
&\leq R \|\partial_t \nabla \psi(t, \cdot)\|_{L^\infty} + |h'_\varepsilon(t)| \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \\
&= R \|\partial_t \varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty} + |h'_\varepsilon(t)| \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

This completes the proof of the lemma. \square

We will need to define a cut-off function near the rigid body with L^2 norm of the gradient as small as possible. This will be done in the next section. For the moment, let us recall that the function that minimizes the L^2 norm of the gradient, that vanishes for $|x| = A$ and is equal to 1 for $|x| = B$ is harmonic. So it is given by the explicit formula

$$f_{A,B} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1], \quad f_{A,B}(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| < A \\ \frac{\ln |x| - \ln A}{\ln B - \ln A} & \text{if } A < |x| < B \\ 1 & \text{if } |x| > B. \end{cases}$$

This special cut-off has the following properties.

Lemma 2.2.2. *We have that $f_{A,B} \in W^{1,\infty}$. Moreover,*

$$\begin{aligned}
\|f_{A,B}(x) - 1\|_{L^2}^2 &= \pi A^2 \left(\frac{\alpha^2}{2 \ln^2 \alpha} - \frac{1}{2 \ln^2 \alpha} - \frac{1}{\ln \alpha} \right), \\
\|\nabla f_{A,B}\|_{L^2}^2 &= \frac{2\pi}{\ln \alpha}
\end{aligned}$$

and

$$\| |x| \nabla^2 f_{A,B} \|_{L^2(A < |x| < B)}^2 = \frac{4\pi}{\ln \alpha}$$

where $\alpha = \frac{B}{A}$.

Proof. The Lipschitz character of $f_{A,B}$ is obvious once we remark that $f_{A,B}$ is smooth for $|x| \neq A$ and $|x| \neq B$ and continuous across $|x| = A$ and $|x| = B$.

Next, we have that

$$\begin{aligned}
\|f_{A,B}(x) - 1\|_{L^2}^2 &= \int_{|x| < A} 1 \, dx + \int_{A < |x| < B} \left| \frac{\ln |x| - \ln B}{\ln B - \ln A} \right|^2 dx \\
&= \pi A^2 + \frac{B^2}{(\ln B - \ln A)^2} \int_{A/B < |y| < 1} \ln^2 |y| \, dy \\
&= \pi A^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\ln^2 \alpha} \int_{1/\alpha}^1 \ln^2 r \, 2r \, dr \right) \\
&= \pi A^2 \left(\frac{\alpha^2}{2 \ln^2 \alpha} - \frac{1}{2 \ln^2 \alpha} - \frac{1}{\ln \alpha} \right).
\end{aligned}$$

From the definition of $f_{A,B}$, we compute for $A < |x| < B$

$$\nabla f_{A,B} = \frac{x}{|x|^2 \ln \alpha} \quad \text{and} \quad |\nabla^2 f_{A,B}| = \frac{\sqrt{2}}{|x|^2 \ln \alpha}.$$

So

$$\|\nabla f_{A,B}\|_{L^2}^2 = \frac{1}{\ln^2 \alpha} \int_{A < |x| < B} \frac{1}{|x|^2} \, dx = \frac{2\pi}{\ln \alpha}$$

and

$$\| |x| \nabla^2 f_{A,B} \|_{L^2(A < |x| < B)}^2 = \frac{2}{\ln^2 \alpha} \int_{A < |x| < B} \frac{1}{|x|^2} dx = \frac{4\pi}{\ln \alpha}.$$

This completes the proof of the lemma. \square

2.3 Cut-off near the rigid body

We begin now the proof of Theorem 2.1.4. It suffices to prove the following statement.

Proposition 2.3.1. *For all finite times $T > 0$ there exists a subsequence v_{ε_k} which converges weak* in $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ towards a solution $v \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ of the Navier-Stokes equations on $[0, T) \times \mathbb{R}^2$ with initial data v_0 .*

Indeed, let us assume that Proposition 2.3.1 is proved. We know that the Navier-Stokes equations in dimension two have a unique global solution v in the space $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+; H^1)$, see for example [Lio69]. The solution v from Proposition 2.3.1 is necessarily the restriction to $[0, T]$ of this unique global solution. Since we have uniqueness of the limit, we deduce that the whole sequence v_ε converges weak* in $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ towards v . Since T is arbitrary, Theorem 2.1.4 follows.

The rest of this paper is devoted to the proof of Proposition 2.3.1. Let $T > 0$ be fixed. From now on the time t is assumed to belong to the interval $[0, T]$. The constant K will denote a constant which depends only on ν and

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)}$$

and whose value may change from one line to another. In particular, the constant K does not depend on ε .

By hypothesis we know that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{[0, T]} \varepsilon |h'_\varepsilon(t)| = 0. \quad (2.3.1)$$

We assume that $\varepsilon \leq 1/100$ and we choose α_ε such that

$$100 \leq \alpha_\varepsilon \leq \frac{1}{\varepsilon}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha_\varepsilon = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \alpha_\varepsilon (1 + |h'_\varepsilon(t)|) = 0 \quad (2.3.2)$$

uniformly in $t \in [0, T]$. The existence of such an α_ε follows from (2.3.1). Indeed, we could choose for instance

$$\alpha_\varepsilon = \max\left(100, \frac{1}{\sup_{[0, T]} \sqrt{\varepsilon + \varepsilon |h'_\varepsilon(t)|}}\right).$$

We construct in the following lemma a special cut-off function f_ε near the disk $D(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ such that $f_\varepsilon(x) = 0$ for all $|x| \leq \varepsilon$ and $f_\varepsilon(x) = 1$ for all $|x| \geq \varepsilon \alpha_\varepsilon$.

Lemma 2.3.2. *There exists a smooth cut-off function $f_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^2; [0, 1])$ such that*

i. f_ε vanishes in the neighborhood of the disk $\overline{D}(0, \varepsilon)$ and $f_\varepsilon = 1$ for $|x| \geq \varepsilon \alpha_\varepsilon$;

ii. there exists a universal constant C such that

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} = 1, \quad \|\nabla f_\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}}, \quad \| |x| \nabla^2 f_\varepsilon \|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \quad \text{and} \quad \|f_\varepsilon - 1\|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\ln \alpha_\varepsilon}.$$

Proof. From Lemma 2.2.2 we observe that the function

$$\tilde{f}_\varepsilon = f_{\varepsilon, \varepsilon\alpha_\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| < \varepsilon \\ \frac{\ln(|x|/\varepsilon)}{\ln \alpha_\varepsilon} & \text{if } \varepsilon < |x| < \varepsilon\alpha_\varepsilon \\ 1 & \text{if } |x| > \varepsilon\alpha_\varepsilon \end{cases}$$

satisfies

$$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L^\infty} = 1, \quad \|\nabla \tilde{f}_\varepsilon\|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}}, \quad \| |x| \nabla^2 \tilde{f}_\varepsilon \|_{L^2(\varepsilon < |x| < \varepsilon\alpha_\varepsilon)} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}}$$

and

$$\|\tilde{f}_\varepsilon - 1\|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{\ln \alpha_\varepsilon}$$

so it has all the required properties except smoothness. More precisely, \tilde{f}_ε is not smooth across $|x| = \varepsilon$ and $|x| = \varepsilon\alpha_\varepsilon$. To obtain a smooth function f_ε from \tilde{f}_ε we need to cut-off in the neighborhood of these two circles.

Let $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2; [0, 1])$ be such that $g(x) = 0$ for $|x| < 2$ and $g(x) = 1$ for $|x| > 4$. We define

$$g_\varepsilon^1(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 0, & |x| < 2\varepsilon \\ 1, & |x| > 4\varepsilon \end{cases}$$

and

$$g_\varepsilon^2(x) = 1 - g\left(\frac{8x}{\varepsilon\alpha_\varepsilon}\right) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4} \\ 0, & |x| > \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2}. \end{cases}$$

With the help of all the auxiliary functions above, we define a new function

$$f_\varepsilon = 1 + g_\varepsilon^2(g_\varepsilon^1 \tilde{f}_\varepsilon - 1) = \begin{cases} 1, & |x| > \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2} \\ 1 + g_\varepsilon^2(\tilde{f}_\varepsilon - 1), & \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4} < |x| < \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2} \\ \tilde{f}_\varepsilon, & 4\varepsilon < |x| < \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4} \\ g_\varepsilon^1 \tilde{f}_\varepsilon, & 2\varepsilon < |x| < 4\varepsilon \\ 0, & |x| < 2\varepsilon. \end{cases}$$

Clearly f_ε satisfies (i) and is smooth across $|x| = \varepsilon$ and $|x| = \varepsilon\alpha_\varepsilon$, so it remains to prove (ii). From the definition of f_ε , we immediately see that $\|f_\varepsilon\|_{L^\infty} = 1$. To simplify the write-up, we use the notation $L^p(a, b) = L^p(a < |x| < b)$. Clearly g_ε^1 and g_ε^2 are uniformly bounded in L^∞ and ∇g_ε^1 and ∇g_ε^2 are uniformly bounded in L^2 . Using these observations we estimate

$$\begin{aligned} \|\nabla f_\varepsilon\|_{L^2} &\leq \left\| \nabla(g_\varepsilon^1 \tilde{f}_\varepsilon) \right\|_{L^2(2\varepsilon, 4\varepsilon)} + \left\| \nabla \tilde{f}_\varepsilon \right\|_{L^2(4\varepsilon, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4})} + \left\| \nabla(g_\varepsilon^2(\tilde{f}_\varepsilon - 1)) \right\|_{L^2(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2})} \\ &\leq C \left(\left\| \nabla \tilde{f}_\varepsilon \right\|_{L^2} + \left\| \tilde{f}_\varepsilon \right\|_{L^\infty(2\varepsilon, 4\varepsilon)} + \left\| \tilde{f}_\varepsilon - 1 \right\|_{L^\infty(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2})} \right) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} + \frac{C}{\ln \alpha_\varepsilon} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \end{aligned}$$

where we used the bounds

$$\left\| \tilde{f}_\varepsilon \right\|_{L^\infty(2\varepsilon, 4\varepsilon)} = \left\| \frac{\ln(|x|/\varepsilon)}{\ln \alpha_\varepsilon} \right\|_{L^\infty(2\varepsilon, 4\varepsilon)} \leq \frac{C}{\ln \alpha_\varepsilon}$$

and

$$\left\| \tilde{f}_\varepsilon - 1 \right\|_{L^\infty(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2})} = \left\| \frac{\ln(|x|/(\varepsilon\alpha_\varepsilon))}{\ln \alpha_\varepsilon} \right\|_{L^\infty(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2})} \leq \frac{C}{\ln \alpha_\varepsilon}.$$

Similarly, using in addition that $\| |x| \nabla g_\varepsilon^i \|_{L^\infty}$ and $\| |x| \nabla^2 g_\varepsilon^i \|_{L^2}$ are bounded independently of ε for $i = 1, 2$, we can estimate

$$\begin{aligned} \| |x| \nabla^2 f_\varepsilon \|_{L^2} &\leq \| |x| \nabla^2 (g_\varepsilon^1 \tilde{f}_\varepsilon) \|_{L^2(2\varepsilon, 4\varepsilon)} + \| |x| \nabla^2 \tilde{f}_\varepsilon \|_{L^2(4\varepsilon, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4})} \\ &\quad + \| |x| \nabla^2 (g_\varepsilon^2 (\tilde{f}_\varepsilon - 1)) \|_{L^2(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2})} \\ &\leq C (\| |x| \nabla^2 \tilde{f}_\varepsilon \|_{L^2} + \| \nabla \tilde{f}_\varepsilon \|_{L^2} + \| \tilde{f}_\varepsilon \|_{L^\infty(2\varepsilon, 4\varepsilon)} + \| \tilde{f}_\varepsilon - 1 \|_{L^\infty(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2})}) \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} + \frac{C}{\ln \alpha_\varepsilon} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Finally,

$$\begin{aligned} \| f_\varepsilon - 1 \|_{L^2} &\leq \| g_\varepsilon^1 \tilde{f}_\varepsilon - 1 \|_{L^2(2\varepsilon, 4\varepsilon)} + \| \tilde{f}_\varepsilon - 1 \|_{L^2(4\varepsilon, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4})} + \| g_\varepsilon^2 (\tilde{f}_\varepsilon - 1) \|_{L^2(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{4}, \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{2})} + \| 1 \|_{L^2(|x| < 2\varepsilon)} \\ &\leq C (\| \tilde{f}_\varepsilon - 1 \|_{L^2} + \| 1 \|_{L^2(|x| < 4\varepsilon)}) \\ &\leq C \left(\frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{\ln \alpha_\varepsilon} + \varepsilon \right) \\ &\leq C \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{\ln \alpha_\varepsilon}. \end{aligned}$$

This completes the proof of the lemma. \square

The function f_ε is a cut-off in the neighborhood of the disk $D(0, \varepsilon)$. We define now a cut-off in the neighborhood of the disk $D(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ by setting

$$\eta_\varepsilon(t, x) = f_\varepsilon(x - h_\varepsilon(t)).$$

Lemma 2.3.2 immediately implies that η_ε has the following properties :

Lemma 2.3.3. *We have that*

- i. $\eta_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C_0^\infty)$;
- ii. η_ε vanishes in the neighborhood of the disk $\overline{D}(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ and $\eta_\varepsilon = 1$ for $|x - h_\varepsilon(t)| \geq \varepsilon\alpha_\varepsilon$;
- iii. there exists a universal constant C such that

$$\| \eta_\varepsilon \|_{L^\infty} = 1, \quad \| \nabla \eta_\varepsilon \|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}}, \quad \| |x - h_\varepsilon(t)| \nabla^2 \eta_\varepsilon \|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \quad (2.3.3)$$

and

$$\| \eta_\varepsilon - 1 \|_{L^2} \leq C \frac{\varepsilon\alpha_\varepsilon}{\ln \alpha_\varepsilon}. \quad (2.3.4)$$

Given a test function $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$ we construct a test function φ_ε on the set $|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon$ by setting

$$\varphi_\varepsilon = \nabla^\perp(\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) \quad (2.3.5)$$

where ψ_ε was defined in Section 2.2 (see relation (2.2.1)). We state some properties of φ_ε in the following lemma :

Lemma 2.3.4. *The test function φ_ε has the following properties :*

- i. $\varphi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$ and is supported in the set $|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon$;
- ii. $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ strongly in $L^\infty(0, T; H^1)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$;
- iii. there exists a universal constant C such that

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq C \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^3)}. \quad (2.3.6)$$

Proof. Since η_ε and ψ_ε are $W^{1,\infty}$ in time and smooth in space, so is φ_ε . The compact support in x of φ_ε in the set $|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon$ follows from the compact support of φ and the localization properties of η_ε . Obviously φ_ε is also divergence free so claim (i) follows.

Recalling that $\nabla^\perp \psi_\varepsilon = \varphi$ we write

$$\varphi_\varepsilon - \varphi = \nabla^\perp(\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) - \varphi = \nabla^\perp \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon + \eta_\varepsilon \nabla^\perp \psi_\varepsilon - \varphi = \nabla^\perp \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon + (\eta_\varepsilon - 1)\varphi.$$

Using the bound (2.2.2) and recalling that $\nabla \eta_\varepsilon$ is supported in $D(h_\varepsilon(t), \varepsilon \alpha_\varepsilon)$ we can estimate

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^2} &\leq \|(\eta_\varepsilon - 1)\varphi\|_{L^2} + \|\nabla \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), \varepsilon \alpha_\varepsilon))} \\ &\leq \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \varepsilon \alpha_\varepsilon \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} \\ &= \|\varphi\|_{L^\infty} (\|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} + \varepsilon \alpha_\varepsilon \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2}). \end{aligned}$$

Taking the supremum on $[0, T]$ and using (2.3.2), (2.3.3) and (2.3.4) we deduce that

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq C \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \|\varphi\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad (2.3.7)$$

Next,

$$\begin{aligned} \|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi)\|_{L^2} &= \|\nabla \nabla^\perp((\eta_\varepsilon - 1)\psi_\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\leq \|\nabla \nabla^\perp \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon\|_{L^2} + C \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \psi_\varepsilon\|_{L^\infty} + \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\nabla^2 \psi_\varepsilon\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

We bound the first term on the right-hand side using (2.2.4) and (2.3.3) :

$$\|\nabla \nabla^\perp \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon\|_{L^2} \leq C \|\varphi\|_{L^\infty} \| |x - h_\varepsilon(t)| \nabla^2 \eta_\varepsilon \|_{L^2} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

Recalling that $\nabla^\perp \psi_\varepsilon = \varphi$ and using again Lemma 2.3.3 we infer that

$$\begin{aligned} \|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi)\|_{L^2} &\leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \|\varphi\|_{L^\infty} + C \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^\infty} \\ &\leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \|\varphi\|_{W^{1,\infty}}. \end{aligned}$$

Combining this bound with (2.3.7) implies that

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq \frac{C}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;W^{1,\infty})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

In addition, we obtain that there exists a universal constant $C > 0$ such that

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H^1)} \leq C \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^1 \cap W^{1,\infty})}.$$

Using the Sobolev embedding $H^3 \hookrightarrow W^{1,\infty}$ completes the proof of the lemma. \square

We end this section with an estimate on the H^{-1} norm of the time-derivative of φ_ε .

Lemma 2.3.5. *Let w be an H^1 vector field. There exists a universal constant $C > 0$ such that for all times $t \geq 0$ where h_ε is differentiable we have that*

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} w(x) \cdot (\partial_t \varphi_\varepsilon(t, x) - \partial_t \varphi(t, x)) dx \right| &\leq C \|\operatorname{curl} w\|_{L^2} \left(\frac{\varepsilon^2 \alpha_\varepsilon^2}{\ln \alpha_\varepsilon} \|\partial_t \varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} |h'_\varepsilon(t)| \|\varphi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \right). \end{aligned}$$

Proof. Let t be a time where h_ε is differentiable. We use (2.3.5) to write

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} w(x) \cdot (\partial_t \varphi_\varepsilon(t, x) - \partial_t \varphi(t, x)) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} w \cdot \partial_t \nabla^\perp((\eta_\varepsilon - 1)\psi_\varepsilon) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{curl} w \partial_t((\eta_\varepsilon - 1)\psi_\varepsilon) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{curl} w \partial_t \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon - \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{curl} w (\eta_\varepsilon - 1) \partial_t \psi_\varepsilon. \end{aligned}$$

Clearly

$$\partial_t \eta_\varepsilon = \partial_t (f_\varepsilon(x - h_\varepsilon(t))) = -h'_\varepsilon(t) \cdot \nabla f_\varepsilon(x - h_\varepsilon(t))$$

is supported in the set $\{|x - h_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \alpha_\varepsilon\}$. We can therefore bound

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{curl} w \partial_t \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon \right| &\leq C |h'_\varepsilon(t)| \int_{|x - h_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \alpha_\varepsilon} |\operatorname{curl} w| |\nabla f_\varepsilon(x - h_\varepsilon(t))| |\psi_\varepsilon| \\ &\leq C |h'_\varepsilon(t)| \|\operatorname{curl} w\|_{L^2} \|\nabla f_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), \varepsilon \alpha_\varepsilon))} \\ &\leq C \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} |h'_\varepsilon(t)| \|\operatorname{curl} w\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

where we used (2.2.2) and Lemma 2.3.2.

Similarly, $\eta_\varepsilon - 1$ is supported in the set $\{|x - h_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \alpha_\varepsilon\}$ so we can use (2.2.3) and (2.3.4) to deduce that

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \operatorname{curl} w (\eta_\varepsilon - 1) \partial_t \psi_\varepsilon \right| &\leq \|\operatorname{curl} w\|_{L^2} \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\partial_t \psi_\varepsilon\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), \varepsilon \alpha_\varepsilon))} \\ &\leq C \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\ln \alpha_\varepsilon} \|\operatorname{curl} w\|_{L^2} (\varepsilon \alpha_\varepsilon \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty} + |h'_\varepsilon(t)| \|\varphi\|_{L^\infty}). \end{aligned}$$

The conclusion follows putting together the above relations. \square

2.4 Temporal estimate and strong convergence

The aim of this section is to prove the strong convergence of some sub-sequence of v_ε . More precisely, we will prove the following result.

Lemma 2.4.1. *There exists a sub-sequence v_{ε_k} of v_ε which converges strongly in $L^2(0, T; L^2_{loc})$.*

To prove this lemma we first show some time-derivative estimates and then use the Ascoli theorem.

Let $\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty(\mathbb{R}^2)$ be a test function which does not depend on the time. Even though φ does not depend on t , we can still perform the construction of the cut-off φ_ε as in Section 2.3 (see relation (2.3.5)) and all the results of that section remain valid. Observe that even though φ does not depend on the time, the modified test function φ_ε is time-dependent.

Let us denote by H_σ^s the space of H^s divergence free vector fields on \mathbb{R}^2 . We endow H_σ^s with the H^s norm. The dual space of H_σ^s is H_σ^{-s} . We have that $C_{0,\sigma}^\infty$ is dense in H_σ^s for all $s \in \mathbb{R}$.

Let $t \in [0, T]$ be fixed. We use Lemma 2.3.3 and relation (2.2.2) to bound

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \nabla^\perp(\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot (\nabla^\perp \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon + \eta_\varepsilon \varphi) dx \right| \\ &\leq \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), \varepsilon \alpha_\varepsilon))} + \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq C \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} \\ &\leq K_1 \|\varphi\|_{H^2} \end{aligned}$$

for some constant K_1 independent of ε and t . We used above the Sobolev embedding $H^2 \hookrightarrow L^\infty$, the boundedness of v_ε in $L^\infty(0, T; L^2)$ and relations (2.3.2) and (2.3.3). We infer that, for fixed t , the map

$$C_{0,\sigma}^\infty \ni \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \in \mathbb{R}$$

is linear and continuous for the H^2 norm. Since the closure of $C_{0,\sigma}^\infty$ for the H^2 norm is H_σ^2 , the above map can be uniquely extended to a continuous linear mapping from H_σ^2 to \mathbb{R} . Therefore it can be identified to an element of the dual of H_σ^2 which is H_σ^{-2} . We conclude that there exists some $\Xi_\varepsilon(t) \in H_\sigma^{-2}$ such that

$$\langle \Xi_\varepsilon(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \quad \forall \varphi \in H_\sigma^2.$$

Above $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the duality bracket between H_σ^{-2} and H_σ^2 which is the extension of the usual L^2 scalar product. In addition, we have that $\|\Xi_\varepsilon(t)\|_{H^{-2}} \leq K_1$, so Ξ_ε belongs to the space $L^\infty(0, T; H_\sigma^{-2})$ and is bounded independently of ε in this space.

Because φ_ε is compactly supported in $\{|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon\}$ it can be used as test function in (2.1.13). In fact, φ_ε is not C^∞ in time (it is only Lipschitz in time) but the multiplication of (2.1.13) by φ_ε can be justified with classical arguments. The simplest way to do that is to make the change of variables $y = x - h_\varepsilon(t)$ to find the following PDE

$$\partial_t \tilde{v}_\varepsilon + h'_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nu \Delta \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon = -\nabla \tilde{\pi}_\varepsilon \quad \text{for } |y| > \varepsilon.$$

This PDE holds true on a domain which does not depend on the time anymore and the multiplication by a test function which is only Lipschitz in time can be justified with a classical regularization in time by convolution like in the book of Temam [Tem79, pages 311-312]. Using this argument we can multiply (2.1.13) by v_ε and integrate in space and time from s to t . We obtain

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau \varphi_\varepsilon + \nu \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi_\varepsilon + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi_\varepsilon \\ = \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(s, x) \cdot \varphi_\varepsilon(s, x) dx. \end{aligned}$$

We deduce that

$$\langle \Xi_\varepsilon(t) - \Xi_\varepsilon(s), \varphi \rangle = \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau \varphi_\varepsilon - \nu \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi_\varepsilon - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi_\varepsilon. \quad (2.4.1)$$

We bound first

$$\begin{aligned} \left| \nu \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi_\varepsilon \right| &\leq \nu \int_s^t \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq C \nu (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^3} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \\ &\leq K (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^3} \end{aligned}$$

where we used (2.3.6) and the hypothesis that v_ε is bounded in $L^2(0, T; H^1)$.

To estimate the last term in (2.4.1) we use the Gagliardo-Nirenberg inequality $\|f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$, the boundedness of v_ε in the space displayed in (2.1.12) and relation (2.3.6) :

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi_\varepsilon \right| &= \left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon \cdot v_\varepsilon \right| \\ &\leq \int_s^t \|v_\varepsilon\|_{L^4}^2 \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq \int_s^t \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi_\varepsilon\|_{H^1} \\ &\leq C (t-s)^{\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \|\varphi\|_{H^3} \\ &\leq K (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^3}. \end{aligned}$$

It remains to estimate the first term on the right-hand side of (2.4.1). To do that, we use Lemma 2.3.5. Recalling that φ does not depend on the time, we can write

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau \varphi_\varepsilon \right| &\leq C \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \int_s^t \|\operatorname{curl} v_\varepsilon\|_{L^2} |h'_\varepsilon| \|\varphi\|_{L^\infty} \\ &\leq C \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \|\varphi\|_{H^2} \int_s^t \|\operatorname{curl} v_\varepsilon\|_{L^2} |h'_\varepsilon| \\ &\leq C (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2} \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \sup_{[0,T]} |h'_\varepsilon| \|\operatorname{curl} v_\varepsilon\|_{L^2([0,T] \times \mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Due to the hypothesis imposed on α_ε , see (2.3.2), we know that $\frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \sup_{[0,T]} |h'_\varepsilon|$ goes to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$. In particular it is bounded uniformly in ε .

Recalling again the boundedness of v_ε in the space $L^2(0, T; H^1)$, we infer from the above relations that

$$|\langle \Xi_\varepsilon(t) - \Xi_\varepsilon(s), \varphi \rangle| \leq K (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^3}$$

where the constant K does not depend on ε and φ . By density of $C_{0,\sigma}^\infty$ in H_σ^3 we infer that $\|\Xi_\varepsilon(t) - \Xi_\varepsilon(s)\|_{H^{-3}} \leq K (t-s)^{\frac{1}{2}}$. The functions $\Xi_\varepsilon(t)$ are therefore equicontinuous in time with values in H_σ^{-3} . They are also bounded in H_σ^{-3} because we already know that they are bounded in H_σ^{-2} . Since the embedding $H^{-3} \hookrightarrow H_{\text{loc}}^{-4}$ is compact, the Ascoli theorem implies that there exists a subsequence Ξ_{ε_k} of Ξ_ε which converges strongly in $C^0([0, T]; H_{\text{loc}}^{-4})$.

Recalling the definition of Ξ_ε and using Lemma 2.3.3 we can write

$$\begin{aligned}
|\langle \Xi_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot (\nabla^\perp \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon + \eta_\varepsilon \varphi) dx - \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \varphi \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot (\nabla^\perp \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon + (\eta_\varepsilon - 1)\varphi) dx \right| \\
&\leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(D(h_\varepsilon(t), \varepsilon \alpha_\varepsilon))} + C \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} \\
&\leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} \left(\frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} + \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\ln \alpha_\varepsilon} \right) \\
&\leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^2} \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Hence

$$\|\Xi_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{H^{-2}} \leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2} \frac{\varepsilon \alpha_\varepsilon}{\sqrt{\ln \alpha_\varepsilon}} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

uniformly in time. Recalling that Ξ_{ε_k} converges strongly in H_{loc}^{-4} uniformly in time we infer that v_{ε_k} also converges strongly in $L^\infty(0, T; H_{\text{loc}}^{-4})$. The interpolation inequality $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^{-4}}^{\frac{1}{5}} \|\cdot\|_{H^1}^{\frac{4}{5}}$ and the boundedness of v_ε in $L^2(0, T; H^1)$ finally imply that v_{ε_k} converges strongly in $L^{\frac{5}{2}}(0, T; L_{\text{loc}}^2) \hookrightarrow L^2(0, T; L_{\text{loc}}^2)$. This completes the proof of Lemma 2.4.1.

2.5 Passing to the limit

In this section we complete the proof of Theorem 2.1.4. It is now only a matter of putting together the results proved in the previous sections.

Given the boundedness of v_ε in $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ and Lemma 2.4.1, we know that there exists some $v \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ and some sub-sequence v_{ε_k} such that

$$\begin{aligned}
v_{\varepsilon_k} &\rightharpoonup v \quad \text{weak* in } L^\infty(0, T; L^2) \\
v_{\varepsilon_k} &\rightharpoonup v \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H^1)
\end{aligned} \tag{2.5.1}$$

and

$$v_{\varepsilon_k} \rightarrow v \quad \text{strongly in } L^2(0, T; L_{\text{loc}}^2). \tag{2.5.2}$$

Let $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ be a divergence-free vector field. We construct φ_{ε_k} as in Section 2.3, see relation (2.3.5). Since φ_{ε_k} is compactly supported in the set $\{|x - h_{\varepsilon_k}(t)| > \varepsilon_k\}$, we can use it as test function in (2.1.13) written for ε_k . We multiply (2.1.13) by φ_{ε_k} and integrate by parts in time and space to obtain that

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi_{\varepsilon_k} + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_{\varepsilon_k} : \nabla \varphi_{\varepsilon_k} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} \\
& \qquad \qquad \qquad = \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k}(0) \cdot \varphi_{\varepsilon_k}(0). \tag{2.5.3}
\end{aligned}$$

We will pass to the limit $\varepsilon_k \rightarrow 0$ in each of the terms above.

First, we know by hypothesis that $v_{\varepsilon_k}(0) \rightharpoonup v_0$ weakly in L^2 . From Lemma 2.3.4 we also have that $\varphi_{\varepsilon_k}(0) \rightarrow \varphi(0)$ strongly in L^2 , so

$$\int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k}(0) \cdot \varphi_{\varepsilon_k}(0) \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} v(0) \cdot \varphi(0). \tag{2.5.4}$$

Next, we also know from Lemma 2.3.4 that $\nabla \varphi_{\varepsilon_k} \rightarrow \nabla \varphi$ strongly in $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$. Given

that $\nabla v_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \nabla v$ weakly in $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$, see relation (2.5.1), we infer that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_{\varepsilon_k} : \nabla \varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v : \nabla \varphi. \quad (2.5.5)$$

The nonlinear term also passes to the limit quite easily. We decompose

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi).$$

We know from (2.5.2) that $v_{\varepsilon_k} \rightarrow v$ strongly in $L^2(0, T; L^2_{\text{loc}})$, from (2.5.1) that $\nabla v_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \nabla v$ weakly in $L^2(0, T; L^2)$. Recalling that φ is compactly supported and since we obviously have that φ is uniformly bounded in space and time we can pass to the limit in the first term on the right-hand side :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla v \cdot \varphi.$$

To pass to the limit in the second term we make an integration by parts and use the Hölder inequality, the Gagliardo-Nirenberg inequality $\|f\|_{L^4} \leq C \|f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla f\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$ and Lemma 2.3.4

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi) \right| &= \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \otimes v_{\varepsilon_k} : \nabla (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi) \right| \\ &\leq \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^4}^2 \|\nabla (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi)\|_{L^2} \\ &\leq C \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\nabla v_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\nabla (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi)\|_{L^2} \\ &\leq CT^{\frac{1}{2}} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2(0, T; H^1)} \|\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi\|_{L^\infty(0, T; H^1)} \\ &\xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

We infer that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla v \cdot \varphi. \quad (2.5.6)$$

The last term we need to pass to the limit is the term with the time-derivative. Thanks to Lemma 2.3.5 we can bound

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot (\partial_t \varphi_{\varepsilon_k} - \partial_t \varphi) dx \right| &\leq C \int_0^T \|\text{curl } v_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \left(\frac{\varepsilon_k^2 \alpha_{\varepsilon_k}^2}{\ln \alpha_{\varepsilon_k}} \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty} + \frac{\varepsilon_k \alpha_{\varepsilon_k}}{\sqrt{\ln \alpha_{\varepsilon_k}}} |h'_{\varepsilon_k}(t)| \|\varphi\|_{L^\infty} \right) \\ &\leq CT^{\frac{1}{2}} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2(0, T; H^1)} \|\varphi\|_{W^{1, \infty}(0, T; L^\infty)} \max \left(\frac{\varepsilon_k^2 \alpha_{\varepsilon_k}^2}{\ln \alpha_{\varepsilon_k}}, \frac{\varepsilon_k \alpha_{\varepsilon_k}}{\sqrt{\ln \alpha_{\varepsilon_k}}} |h'_{\varepsilon_k}(t)| \right) \\ &\xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

where we used (2.3.2). But we also have that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \partial_t \varphi$$

so we can conclude that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v_{\varepsilon_k} \partial_t \varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \partial_t \varphi. \quad (2.5.7)$$

Gathering (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5), (2.5.6) and (2.5.7), we conclude that

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \partial_t \varphi + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v : \nabla \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} v \cdot \nabla v \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^2} v(0) \cdot \varphi(0)$$

which is the weak formulation of Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 . This completes the proof of Proposition 2.3.1.

Small moving rigid body into a 3D fluid

In collaboration with Dragoş Iftimie.

Abstract. We consider the evolution of a small rigid body in an incompressible viscous fluid filling the whole space \mathbb{R}^3 . The motion of the fluid is modelled by the Navier-Stokes equations, whereas the motion of the rigid body is described by the conservation law of linear and angular momentum. Under the assumption that the diameter of the rigid body tends to zero and that the density of the rigid body goes to infinity, we prove that the solution of the fluid-rigid body system converges to a solution of the Navier-Stokes equations in the full space without rigid body.

3.1 Introduction and Statement of results

The motion of one or several rigid bodies in a liquid is a classical topic in fluid mechanics. We consider here the motion of an incompressible viscous fluid and a small smooth moving rigid body in the three-dimensional space. In this fluid-rigid body system, we will not take into account the gravity, and we suppose that the rigid body moves under the influence of the fluid. We study the asymptotic behavior of the fluid-rigid body system as the diameter of the rigid body tends to zero.

Assume that the whole three-dimensional space is occupied by an incompressible viscous fluid of viscosity $\nu > 0$ and by a rigid body of size ε . At the initial time, the domain of the rigid body $\mathcal{S}_0^\varepsilon$ is a small non-empty smooth compact simply-connected subset of \mathbb{R}^3 included in the ball $B(0, \varepsilon)$ and $\mathcal{F}_0^\varepsilon = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}_0^\varepsilon$ is the domain of the fluid. We also denote by $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$ the region occupied by the rigid body and by $\mathcal{F}^\varepsilon(t) = \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S}^\varepsilon(t)$ the region occupied by the viscous fluid at time t .

In order to describe the motion of the rigid body, we need to specify its center of mass, that we denote by $h_\varepsilon(t)$ and a rotation matrix $\mathcal{R}(t) \in SO(3)$ which describes how the body rotates compared to the initial position. In other words, we have that

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = h_\varepsilon(t) + \mathcal{R}(t)x_0, x_0 \in \mathcal{S}_0^\varepsilon\}.$$

The velocity of the solid particle $x(t) = h_\varepsilon(t) + \mathcal{R}(t)x_0$ is given by

$$\begin{aligned} x'(t) &= h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'(t)x_0 \\ &= h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^{-1}(x - h_\varepsilon(t)) \\ &= h'_\varepsilon(t) + \mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^T(x - h_\varepsilon(t)) \end{aligned}$$

where the superscript T denotes the transpose. Since $\mathcal{R}(t) \in SO(3)$, the matrix $\mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^T$ is skew-symmetric and can therefore be identified to a three-dimensional rotation vector $\omega_\varepsilon(t)$:

$$\mathcal{R}'(t)\mathcal{R}(t)^T z = \omega_\varepsilon(t) \times z, \quad z \in \mathbb{R}^3$$

where \times denotes the standard cross product of vectors in \mathbb{R}^3 . Therefore the velocity of the solid particle x is given by

$$h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)), \quad x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \quad (3.1.1)$$

We assume that the rigid body is homogeneous of density ρ_ε . We denote its total mass by m_ε so that $m^\varepsilon = \rho_\varepsilon |\mathcal{S}_0^\varepsilon|$ where $|\mathcal{S}_0^\varepsilon|$ is the volume of the rigid body. We also introduce J^ε the matrix of inertia of the rigid body defined by

$$(J^\varepsilon a) \cdot b = \rho_\varepsilon \int_{\mathcal{S}^\varepsilon} (a \times (x - h_\varepsilon(t)) \cdot (b \times (x - h_\varepsilon(t))) dx, \quad \text{for any } a, b \in \mathbb{R}^3,$$

(see [GLS00]).

We assume that the fluid is governed by the classical Navier-Stokes equations with no-slip boundary conditions on the boundary of the rigid body, and the dynamics of the rigid body is described by the equations of the balance of linear and angular momentum. We suppose that the fluid is homogeneous of constant density 1 to simplify the notations and we denote by $u_\varepsilon(t, x)$ the velocity of the fluid and by $p_\varepsilon(t, x)$ the pressure of the fluid. Moreover, we also denote by $\Sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ the stress tensor of the fluid

$$\Sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) = 2\nu D(u_\varepsilon) - p_\varepsilon I_3,$$

where I_3 is identity matrix of order 3 and $D(u_\varepsilon)$ is the deformation tensor

$$D(u_\varepsilon) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\varepsilon,j}}{\partial x_i} \right)_{i,j} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (3.1.2)$$

With the notation introduced above, we have the following mathematical formulation for the fluid-rigid body system (see [DE99], [GLS00] and [Ser87]) :

- Fluid equations :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + (u_\varepsilon \cdot \nabla) u_\varepsilon - \nu \Delta u_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon &= 0 \quad \text{for } t \in (0, +\infty), x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t). \\ \operatorname{div} u_\varepsilon &= 0 \quad \text{for } t \in (0, +\infty), x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t). \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

- Rigid body equations :

$$m^\varepsilon h_\varepsilon''(t) = - \int_{\partial \mathcal{S}^\varepsilon(t)} \Sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon ds \quad \text{for } t \in (0, +\infty). \quad (3.1.4)$$

$$(J^\varepsilon \omega_\varepsilon)'(t) = - \int_{\partial \mathcal{S}^\varepsilon(t)} (x - h_\varepsilon) \times (\Sigma(u_\varepsilon, p_\varepsilon) n_\varepsilon) ds \quad \text{for } t \in (0, +\infty). \quad (3.1.5)$$

- Boundary conditions :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t, x) &= h_\varepsilon'(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)), \quad \text{for } t \in (0, +\infty), x \in \partial \mathcal{S}^\varepsilon(t). \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} u_\varepsilon(t, x) &= 0 \quad \text{for } t \in [0, +\infty). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

In the above system, we have denoted by $n_\varepsilon(t, x)$ the unit normal vector to $\partial \mathcal{S}^\varepsilon$ pointing outside the fluid domain \mathcal{F}^ε . The first line in (3.1.6) is the Dirichlet boundary condition : the fluid velocity and the solid velocity must agree on the boundary of the body.

The system (3.1.3)-(3.1.6) should be completed by some initial conditions. As mentioned at the beginning, we assume that the initial position of the center of mass of the rigid body is in the origin. We denote by u_ε^0 the initial fluid velocity :

$$u_\varepsilon(0, x) = u_\varepsilon^0, \quad h_\varepsilon(0) = 0, \quad h_\varepsilon'(0) = l_\varepsilon^0, \quad \omega_\varepsilon(0) = \omega_\varepsilon^0. \quad (3.1.7)$$

The coupled system satisfies some L^2 energy estimates at least at the formal level. Taking the inner product of (3.1.3) with u_ε , integrating the result by parts and using the equations (3.1.4) and (3.1.5), we get the following energy estimate (see [GLS00]) :

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathcal{F}^\varepsilon(t))}^2 + m^\varepsilon |h_\varepsilon'(t)|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon(t)) \cdot \omega_\varepsilon(t) + 4\nu \int_0^t \|D(u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathcal{F}^\varepsilon(t))}^2 \\ \leq \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon)}^2 + m_\varepsilon |l_\varepsilon^0|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

The sum of the first three terms on the left-hand side of (3.1.8) is called the kinetic energy of the system at time t , while the forth term is called viscous dissipation. Obviously the initial kinetic energy is the right-hand side of (3.1.8).

Over the last few years, there were a lot of works dealing with the well-posedness of the fluid-rigid body system by using energy estimates. Both weak finite energy solutions (Leray solutions) and strong H^1 solutions were constructed. When the fluid is enclosed in a bounded region, the existence of solutions is proved under some constraints on the collisions between the rigid body and the boundary of the domain. When the domain of motion is the whole of \mathbb{R}^3 there is of course no such constraint. We give some references below but we would

like to say that this list is not exhaustive. The existence of weak Leray solutions have been proved in [CJSMT00], [DE00], [GLS00] and [Ser87] (see also the references therein). We refer to [CT08], [DE99] and [GS02] for results about strong H^1 solutions. The vanishing viscosity limit was considered in [Sue12]. Let us also mention that the case of the dimension two was also considered in the literature, see for example [DE99], [HS99], [SMST02] and [TT04].

The initial conditions should satisfy the following compatibility conditions (see [DE99]) :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^0 &\in L^2(\mathcal{F}_0^\varepsilon), \quad \operatorname{div} u_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{in } \mathcal{F}_0^\varepsilon, \\ u_\varepsilon^0 \cdot n_\varepsilon &= (l_\varepsilon^0 + \omega_\varepsilon^0 \times x) \cdot n_\varepsilon \quad \text{on } \partial \mathcal{S}_0^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

The second condition above is a weak version of the Dirichlet boundary condition in which only the normal components of the fluid velocity and of the solid velocity must agree on the boundary of the obstacle. This is in agreement with the usual theory of Leray solutions of the Navier-Stokes equations where the initial velocity is assumed to be only tangent to the boundary.

Before stating a result of existence of weak solutions for the motion of a rigid body in a fluid, let us introduce the global density and the global velocity, defined on the whole of \mathbb{R}^3 . The fluid is homogeneous of constant density 1 while the rigid body is of density ρ_ε , so we can define the global density $\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x)$ as follows :

$$\tilde{\rho}_\varepsilon(t, x) = \chi_{\mathcal{F}^\varepsilon(t)}(x) + \rho_\varepsilon \chi_{\mathcal{S}^\varepsilon(t)}(x), \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^3$$

where we denote χ_A denotes the characteristic function of the set A . Moreover, recalling the formula for the velocity of the rigid body, see (3.1.1), one may define a global velocity \tilde{u}_ε by

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = \begin{cases} u_\varepsilon(t, x) & \text{if } x \in \mathcal{F}^\varepsilon(t) \\ h'_\varepsilon(t) + \omega_\varepsilon(t) \times (x - h_\varepsilon(t)) & \text{if } x \in \mathcal{S}^\varepsilon(t). \end{cases}$$

Clearly, by conditions (3.1.9), we know that

$$\tilde{u}_\varepsilon^0 \in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{div} \tilde{u}_\varepsilon^0 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3.$$

Motivated by the energy estimates (3.1.8) and by the construction of $\tilde{\rho}_\varepsilon$ and \tilde{u}_ε we introduce the following notion of weak solution (see [CJSMT00], [DE00], [GLS00] and [Ser87]).

Definition 3.1.1. A triplet $(\tilde{u}_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ is a weak Leray solution of (3.1.3)–(3.1.7), if

- $\tilde{u}_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon$ satisfying

$$\begin{aligned} h_\varepsilon &\in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3), \quad \omega_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3), \\ u_\varepsilon &\in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathcal{F}^\varepsilon)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathcal{F}^\varepsilon)), \quad \tilde{u}_\varepsilon \in C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)); \end{aligned}$$

- \tilde{u}_ε is divergence free in the whole of \mathbb{R}^3 with $D\tilde{u}_\varepsilon(t, x) = 0$ in $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$;
- \tilde{u}_ε verifies the equation in the following sense :

$$\begin{aligned} - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon \tilde{u}_\varepsilon \cdot (\partial_t \varphi_\varepsilon + (\tilde{u}_\varepsilon \cdot \nabla) \varphi_\varepsilon) + 2\nu \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} D(\tilde{u}_\varepsilon) : D(\varphi_\varepsilon) \\ = \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon(0) \tilde{u}_\varepsilon^0 \cdot \varphi_\varepsilon(0). \end{aligned}$$

for any test function $\varphi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; H_\sigma^1(\mathbb{R}^3))$, compactly supported in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ such that $D\varphi_\varepsilon(t, x) = 0$ in $\mathcal{S}^\varepsilon(t)$.

One has the following result of existence of weak solutions of the initial-boundary value problem (3.1.3)–(3.1.7) in the sense defined above (see [CJSMT00], [DE00], [GLS00] and [Ser87]).

Theorem 3.1.2. *Let $\tilde{u}_\varepsilon^0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ be divergence free and such that $D\tilde{u}_\varepsilon^0 = 0$ in $\mathcal{S}_0^\varepsilon$. Then, there exists at least one global weak solution $(\tilde{u}_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ of the initial-boundary value problem (3.1.3)–(3.1.7) in the sense of Definition 3.1.1. Moreover, \tilde{u}_ε satisfies the following energy estimate :*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon |\tilde{u}_\varepsilon(t)|^2 + 4\nu \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} |D(\tilde{u}_\varepsilon)|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\varepsilon(0) |\tilde{u}_\varepsilon^0|^2 \quad \forall t > 0. \quad (3.1.10)$$

We now let $\varepsilon \rightarrow 0$ and wish to find the limit of the solution given in Theorem 3.1.2. Let us first review the literature available on related results.

In dimension two the literature is richer. Iftimie, Lopes Filho and Nussenzweig Lopes [ILN06] proved convergence towards the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 in the case when the rigid body does not move. Lacave [Lac09b] considered the case of a thin obstacle tending to a curve. Recently, Lacave and Takahashi [LT17] considered a small disk moving under the influence of a two-dimensional viscous incompressible fluid. Under the condition that the density of the solid is independent of ε and assuming that the initial data is sufficiently small, they used the $L^p - L^q$ decay estimates of the semigroup associated to the fluid-rigid body system to deduce the convergence towards the solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^2 . In [HI18], the authors extended the result of [LT17] to the case of arbitrary shape of the body and with no restriction on the size of the initial data but assuming that the density of the obstacle is large.

In dimension three, Iftimie and Kelliher [IK09] considered the case of a fixed obstacle and proved convergence towards the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 . Lacave [Lac15] considered more general shrinking obstacles (for instance shrinking to a curve) but still fixed. When the obstacle is moving with the fluid, the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ was considered in [ST14] in the case when the rigid body is a ball. Unfortunately, the elliptic estimates in that paper, see [ST14, Theorem 3.1], are not correct as was observed in [CJG⁺14, Subsection 2.1].

As far as we know, Theorem 3.1.3 below is the first result on the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ in dimension three for a moving obstacle. We will essentially show that if the density of the rigid body goes to infinity, then the energy estimates are sufficient to pass to the limit in the weak formulation by using a truncation procedure. We obtain then the convergence of the solutions constructed in Theorem 3.1.2 to a solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 under the assumption that the initial data \tilde{u}_ε^0 is bounded in L^2 . We do not need to impose any small data condition or any restriction on the shape of the body.

Let us now state the main result of this paper.

Theorem 3.1.3. *Let $\tilde{u}_\varepsilon^0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ be divergence free and such that $D\tilde{u}_\varepsilon^0 = 0$ in $\mathcal{S}_0^\varepsilon$. We assume that*

- $\mathcal{S}_0^\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$;
- the mass m^ε of the rigid body satisfies that

$$\frac{m^\varepsilon}{\varepsilon^3} \rightarrow \infty \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (3.1.11)$$

- \tilde{u}_ε^0 converges weakly in $L^2(\mathbb{R}^3)$ towards some u_0 .
- $\sqrt{m^\varepsilon} h'_\varepsilon(0)$ and $(J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0$ are bounded uniformly in ε .

Let $(\tilde{u}_\varepsilon, h_\varepsilon, \omega_\varepsilon)$ be a global solution of the system (3.1.3)–(3.1.7) given by Theorem 3.1.2. Then there exists a subsequence $\tilde{u}_{\varepsilon_k}$ of \tilde{u}_ε which converges

$$\tilde{u}_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \quad \text{weak* in } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \quad \text{and weakly in } L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$$

towards a solution u of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 in the sense of distributions with initial data $u_0(x)$.

Moreover, suppose in addition that \tilde{u}_ε^0 converges strongly in $L^2(\mathbb{R}^3)$ to $u_0(x)$ and that both $\sqrt{m^\varepsilon}h'_\varepsilon(0)$ and $(J^\varepsilon\omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0$ converge to 0 as $\varepsilon \rightarrow 0$. Then the limit solution u satisfies the energy estimate

$$\forall t \geq 0 \quad \|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2.$$

Let us give a few remarks on the hypotheses of the Theorem above. First, if the rigid body shrinks isotropically to a point, then hypothesis (3.1.11) means that the density ρ_ε of the rigid body tends to infinity as $\varepsilon \rightarrow 0$. If the rigid body does not shrink isotropically to a point, then condition (3.1.11) is stronger than simply saying that the density of the rigid body goes to infinity. Indeed, since $\mathcal{S}_0^\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ we have that $|\mathcal{S}_0^\varepsilon| \leq \frac{4\pi}{3}\varepsilon^3$ so $\rho_\varepsilon = \frac{m^\varepsilon}{|\mathcal{S}_0^\varepsilon|} \geq \frac{3m^\varepsilon}{4\pi\varepsilon^3} \rightarrow \infty$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Next, the weak convergence of \tilde{u}_ε^0 in $L^2(\mathbb{R}^3)$ implies its boundedness in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Together with the hypothesis that $\sqrt{m^\varepsilon}h'_\varepsilon(0)$ and $(J^\varepsilon\omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0$ are bounded uniformly in ε this implies that the right-hand side of (3.1.8) is bounded. Then (3.1.10) implies that $\sqrt{\tilde{\rho}_\varepsilon}\tilde{u}_\varepsilon$ is bounded in $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ and $D(\tilde{u}_\varepsilon)$ is bounded in $L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$. We observed above that $\rho_\varepsilon \rightarrow \infty$ so we can assume that $\rho_\varepsilon \geq 1$. Then we have that $\tilde{\rho}_\varepsilon \geq 1$ (recall that $\tilde{\rho}_\varepsilon = 1$ in the fluid region and $\tilde{\rho}_\varepsilon = \rho_\varepsilon$ in the solid region) so \tilde{u}_ε is bounded in $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$. We infer that

$$\tilde{u}_\varepsilon(t, x) \text{ is bounded in } L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3)) \quad (3.1.12)$$

and we will see that this is all we need to pass to the limit in our PDE. We require neither the Dirichlet boundary conditions nor the special form of \tilde{u}_ε inside the rigid body. All we need is the above boundedness and the fact that the Navier-Stokes equations are satisfied in the exterior of the ball $B(0, \varepsilon)$. More precisely, we can prove the following more general statement.

Theorem 3.1.4. *Let $v_\varepsilon(t, x)$ be a divergence free vector field bounded independently of ε in*

$$L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3)) \cap C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)).$$

We make the following assumptions :

- *The vector field v_ε verifies the Navier-Stokes equations*

$$\partial_t v_\varepsilon - \nu \Delta v_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon = -\nabla \pi_\varepsilon \quad (3.1.13)$$

in the exterior of the ball $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ with initial data $v_\varepsilon(0, x)$ in the following sense :

$$-\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \partial_t \varphi + \nu \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(0) \cdot \varphi(0) \quad (3.1.14)$$

for every test function $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ which is divergence free, compactly supported in $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ and such that for all t the function $x \mapsto \varphi(t, x)$ is smooth and compactly supported in the set $\{|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon\}$.

- *The initial data $v_\varepsilon(0, x)$ is divergence free, square integrable and converges weakly to some $v_0(x)$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$.*
- *The center of the ball verifies $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^3)$ and $\varepsilon^{\frac{3}{2}}h'_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ strongly in $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Then there exists a subsequence of v_ε which converges weak in $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ and weakly in $L_{loc}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$ to a solution v of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 in the sense of distributions with initial data $v_0(x)$.*

Moreover, if we assume in addition that $v_\varepsilon(0, x)$ converges strongly in L^2 to $v_0(x)$ and that the following energy estimate holds true for v_ε

$$\forall t \geq 0 \quad \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(v_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 \leq \|v_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + o(1) \quad (3.1.15)$$

as $\varepsilon \rightarrow 0$, then the limit solution v satisfies the following energy estimate

$$\forall t \geq 0 \quad \|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(v)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|v_0\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (3.1.16)$$

Let us observe that Theorem 3.1.3 follows from Theorem 3.1.4 applied for $v_\varepsilon(t, x) = \tilde{u}_\varepsilon(t, x)$. Indeed, from (3.1.12) we have that v_ε is bounded in $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$. Next we obviously have that \tilde{u}_ε verifies the Navier-Stokes equations in the exterior of the ball $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ and so does v_ε . We observed that the right-hand side of (3.1.8) is bounded so $\sqrt{m_\varepsilon} h'_\varepsilon$ is bounded. From (3.1.11) we infer that $\varepsilon^{\frac{3}{2}} h'_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ strongly in $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ when $\varepsilon \rightarrow 0$. Then all the hypothesis of the first part of Theorem 3.1.4 is verified and the first part of Theorem 3.1.3 follows.

Let us now assume in addition the L^2 strong convergence of \tilde{u}_ε^0 towards u_0 and let us prove (3.1.15). We have the L^2 strong convergence of $v_\varepsilon(0, x)$ to v_0 . Recalling that the matrix of inertia is non-negative we can ignore the second and the third terms in (3.1.8) to estimate

$$\begin{aligned} & \|v_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(v_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 \\ &= \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_\varepsilon(t), \varepsilon))}^2 \\ &\leq \|u_\varepsilon(t)\|_{L^2(\mathcal{F}^\varepsilon(t))}^2 + 4\nu \int_0^t \|D(u_\varepsilon)\|_{L^2(\mathcal{F}^\varepsilon(t))}^2 \\ &\leq \|u_\varepsilon^0\|_{L^2(\mathcal{F}^\varepsilon(t))}^2 + m_\varepsilon |l_\varepsilon^0|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0 \\ &\leq \|v_\varepsilon(0)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 + m_\varepsilon |l_\varepsilon^0|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0. \end{aligned}$$

By hypothesis $m_\varepsilon |l_\varepsilon^0|^2 + (J^\varepsilon \omega_\varepsilon^0) \cdot \omega_\varepsilon^0 \rightarrow 0$ so (3.1.15) follows.

The passing to the limit stated in Theorem 3.1.4 uses the boundedness of v_ε in the energy space $L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$ and the construction of a cut-off φ_ε supported in the exterior of the ball $\overline{B}(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$. We multiply (3.1.13) with the cut-off φ_ε , and then pass to the limit by means of classical compactness methods. The main obstruction is that, when the rigid body moves under the influence of the fluid, not only the velocity depends on time, but also the cut-off function. Time derivative estimates for v_ε are not easy to obtain and, once obtained, it is not easy to pass to the limit in the term with the time derivative.

The paper is organized as follows. In Section 3.2, we introduce some notation and present some preliminary results. The construction of the cut-off near the rigid body is given in Section 3.3. We show the strong convergence by means of temporal estimates in Section 3.4 and pass to the limit to conclude our proof in Section 3.5.

3.2 Notation and Preliminary results

In this section, we will introduce some notations and preliminary results.

For a sufficiently regular vector field $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, we denote by ∇u the second order tensor field whose components $(\nabla u)_{ij}$ are given by $\partial u_j / \partial x_i$, and by $D(u)$ the symmetric part of ∇u (see (3.1.2)). The double dot product $M : N$ of two matrices $M = (m_{ij})$ and $N = (n_{ij})$ denotes the quantity $\sum_{i,j} m_{ij} n_{ij}$.

For function spaces, we shall use standard notations L^p and H^m to denote the usual Lebesgue and Sobolev spaces. C_b^m denotes the set of bounded functions whose first m derivatives are bounded functions. We add subscripts 0 and σ to these spaces to specify that their elements are compactly supported and divergence free, respectively. For instance, the notation $C_{0,\sigma}^\infty$ defines the space of smooth, compactly supported and divergence free vector fields on \mathbb{R}^3 .

In addition, unless we specify the domain, all function spaces and norms are considered to be taken on \mathbb{R}^3 in the x variable. For the t variable, we use the notation $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ and emphasize that the endpoint 0 belongs to \mathbb{R}_+ . Throughout this article, we denote by C a generic constant whose value can change from one line to another.

Let $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$. The stream function ψ of φ is defined by the following formula :

$$\psi(t, x) = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{x - y}{4\pi|x - y|^3} \times \varphi(t, y) dy$$

where \times denotes the standard cross product of vectors in \mathbb{R}^3 (see [MB02, Proposition 2.16]).

Because φ is divergence free, we have that $\text{curl } \psi = \varphi$ and $\psi = \text{curl } \Delta^{-1} \varphi$. Furthermore, ψ is smooth, $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C^\infty)$, and vanishes at infinity. Moreover, we have the following well-known estimate :

$$\|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{H^2} \leq C \|\varphi(t, \cdot)\|_{H^2}. \quad (3.2.1)$$

Indeed, we have that $\nabla \psi = \nabla \text{curl } \Delta^{-1} \varphi$ and the operator $\nabla \text{curl } \Delta^{-1}$ is obviously bounded in H^2 .

In our case, in order to deal with the singularity in h_ε , we need to have a stream function vanishing in h_ε . The stream function ψ defined above has no reason to vanish in h_ε , so we are led to introduce a modified stream function ψ_ε . We define

$$\psi_\varepsilon(t, x) = \psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t)). \quad (3.2.2)$$

Clearly $\psi_\varepsilon(t, h_\varepsilon(t)) = 0$. We collect in the following lemma some useful properties of the modified stream function.

Lemma 3.2.1. *Let $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$ and define the modified stream function ψ_ε as in (3.2.2). We have that :*

(i) $\psi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C^\infty)$ and $\text{curl } \psi_\varepsilon = \varphi$.

(ii) *There exists a universal constant $C > 0$ such that for all $R > 0$ we have that*

$$\|\psi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), R))} \leq CR \|\varphi(t, \cdot)\|_{H^2} \quad (3.2.3)$$

for all $t \geq 0$ and

$$\|\partial_t \psi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), R))} \leq C (R \|\partial_t \varphi(t, \cdot)\|_{H^2} + |h'_\varepsilon(t)| \|\varphi(t, \cdot)\|_{H^2})$$

for almost all $t \geq 0$.

Proof. We observe first that $\text{curl } \psi_\varepsilon = \text{curl } \psi = \varphi$. Moreover, $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C^\infty)$ and $h_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+)$ imply that $\psi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C^\infty)$. This proves part (i).

Next, to prove (ii) we use the mean value theorem to estimate

$$\begin{aligned} \|\psi_\varepsilon(t, x)\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), R))} &= \|\psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t))\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), R))} \\ &\leq |x - h_\varepsilon(t)| \|\nabla \psi(t, x)\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), R))} \\ &\leq R \|\nabla \psi\|_{H^2} \\ &\leq CR \|\varphi\|_{H^2} \end{aligned}$$

where we used relation (3.2.1). This proves (3.2.3).

We recall now that h_ε is Lipschitz in time so it is almost everywhere differentiable in time. Let t be a time where h_ε is differentiable. We write

$$\begin{aligned}\partial_t \psi_\varepsilon(t, x) &= \partial_t(\psi(t, x) - \psi(t, h_\varepsilon(t))) \\ &= \partial_t \psi(t, x) - \partial_t \psi(t, h_\varepsilon(t)) - h'_\varepsilon(t) \cdot \nabla \psi(t, h_\varepsilon(t)).\end{aligned}$$

We can bound

$$\begin{aligned}\|\partial_t \psi_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), R))} &\leq \|\partial_t \psi(t, x) - \partial_t \psi(t, h_\varepsilon(t))\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), R))} + |h'_\varepsilon(t)| \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \\ &\leq |x - h_\varepsilon(t)| \|\partial_t \nabla \psi(t, \cdot)\|_{L^\infty} + |h'_\varepsilon(t)| \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{L^\infty} \\ &\leq C (R \|\partial_t \nabla \psi(t, \cdot)\|_{H^2} + |h'_\varepsilon(t)| \|\nabla \psi(t, \cdot)\|_{H^2}) \\ &\leq C (R \|\partial_t \varphi(t, \cdot)\|_{H^2} + |h'_\varepsilon(t)| \|\varphi(t, \cdot)\|_{H^2}).\end{aligned}$$

This completes the proof of the lemma. \square

3.3 Cut-off near the rigid body

In this section, we will construct a cut-off φ_ε near the rigid body, which will be used as a test function in the procedure of passing to the limit in Section 3.5.

Firstly, we construct a cut-off function $\eta_\varepsilon(t, x)$ near the ball $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$. Let $\eta(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^3; [0, 1])$ be a function such that

$$\eta(x) : \mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 1], \quad \eta(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| \leq \frac{3}{2} \\ 1 & \text{if } |x| \geq 2 \end{cases}$$

The function $\eta(x)$ is a cut-off function in the neighborhood of the unit ball $B(0, 1)$. A cut-off $\eta_\varepsilon(t, x)$ in the neighborhood of the domain $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$ is the following function

$$\eta_\varepsilon(t, x) = \eta\left(\frac{x - h_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x - h_\varepsilon(t)| \leq \frac{3}{2}\varepsilon \\ 1 & \text{if } |x - h_\varepsilon(t)| \geq 2\varepsilon. \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Notice that $\eta_\varepsilon(t, x)$ is a space-time function while the function $\eta(x)$ only has a space variable. We state some properties of this new cut-off in the following lemma.

Lemma 3.3.1. *The cut-off function η_ε satisfies*

- (i) $\eta_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C^\infty)$;
- (ii) η_ε vanishes in the neighborhood of the ball $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$;
- (iii) For any real number $q \geq 1$ there exists a constant $C = C(q)$ such that

$$\|\eta_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty} = 1, \quad \|\eta_\varepsilon(t, \cdot) - 1\|_{L^q} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{q}}, \quad \|\nabla \eta_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^q} \leq C\varepsilon^{\frac{3-q}{q}}, \quad \|\nabla^2 \eta_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^q} \leq C\varepsilon^{\frac{3-2q}{q}}.$$

Proof. Since h_ε is Lipschitz part (i) follows immediately. Part (ii) is also obvious. We prove now part (iii).

Clearly $\|\eta_\varepsilon(t, \cdot)\|_{L^\infty} = 1$. Next

$$\|\eta_\varepsilon(t, x) - 1\|_{L^q} = \left\| \eta\left(\frac{x - h_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) - 1 \right\|_{L^q} = \varepsilon^{\frac{3}{q}} \|\eta(x) - 1\|_{L^q} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{q}}.$$

Notice that $\nabla\eta(x)$ and $\nabla^2\eta(x)$ are bounded functions supported in the annulus $\{\frac{3}{2} < |x| < 2\}$. So

$$\begin{aligned}\|\nabla\eta_\varepsilon(t, x)\|_{L^q} &= \left\| \frac{1}{\varepsilon} \nabla\eta\left(\frac{x - h_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^q} = \varepsilon^{\frac{3-q}{q}} \|\nabla\eta(x)\|_{L^q} \leq C\varepsilon^{\frac{3-q}{q}}, \\ \|\nabla^2\eta_\varepsilon(t, x)\|_{L^q} &= \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla^2\eta\left(\frac{x - h_\varepsilon(t)}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^q} = \varepsilon^{\frac{3-2q}{q}} \|\nabla^2\eta(x)\|_{L^q} \leq C\varepsilon^{\frac{3-2q}{q}}.\end{aligned}$$

This completes the proof of the lemma. \square

Given a test function $\varphi \in C_b^1(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$, we use the cutoff η_ε and the modified stream function ψ_ε defined in Section 3.2 (see relation (3.2.2)) to construct a new test function φ_ε which vanishes in the neighborhood of the ball $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$. We define

$$\varphi_\varepsilon = \text{curl}(\eta_\varepsilon\psi_\varepsilon). \quad (3.3.2)$$

We notice that this new test function φ_ε depends on time even if φ is assumed to be constant in time. We state some properties of φ_ε in the following lemma :

Lemma 3.3.2. *The test function φ_ε has the following properties :*

- (i) $\varphi_\varepsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; C_{0,\sigma}^\infty)$ and φ_ε vanishes in the neighborhood of $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$;
- (ii) for all $T > 0$ we have that $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$ strongly in $L^\infty(0, T; H^1)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (iii) there exists a universal constant C such that for all $T > 0$

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H^1)} \leq C\|\varphi\|_{L^\infty(0, T; H^2)}.$$

Proof. The various norms used below are in the x variable unless otherwise stated.

Clearly, η_ε and ψ_ε are $W^{1,\infty}$ in time and smooth in space, so φ_ε has the same properties. The function φ_ε is a curl so it is divergence free. Because η_ε vanishes in the neighborhood of $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$, so is φ_ε . The compact support in space follows immediately once we recall that $\text{curl}\psi_\varepsilon = \varphi$ and observe that

$$\varphi_\varepsilon = \text{curl}(\eta_\varepsilon\psi_\varepsilon) = \eta_\varepsilon\varphi + \nabla\eta_\varepsilon \times \psi_\varepsilon$$

Claim (i) is proved.

To prove (ii), we observe that $\text{supp } \nabla\eta_\varepsilon \subset \{|x - h_\varepsilon(t)| \leq 2\varepsilon\}$ and we estimate

$$\begin{aligned}\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^2} &\leq \|(\eta_\varepsilon - 1)\varphi\|_{L^2} + \|\nabla\eta_\varepsilon \times \psi_\varepsilon\|_{L^2} \\ &\leq \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla\eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), 2\varepsilon))} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\varphi\|_{H^2} \right) \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\varphi\|_{H^2}\end{aligned}$$

where we used Lemmas 3.2.1 and 3.3.1.

Taking the supremum on $[0, T]$ we infer that

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; H^2)}. \quad (3.3.3)$$

Next, by the Sobolev embedding $H^2(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow W^{1,6}(\mathbb{R}^3)$ and by Lemma 3.3.1 we estimate

$$\begin{aligned} \|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi)\|_{L^2} &= \|\nabla((\eta_\varepsilon - 1)\varphi + \nabla\eta_\varepsilon \times \psi_\varepsilon)\|_{L^2} \\ &\leq \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^3} \|\nabla\varphi\|_{L^6} + \|\nabla\eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \|\nabla\eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla\psi_\varepsilon\|_{L^\infty} \\ &\quad + \|\nabla^2\eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), 2\varepsilon))} \\ &\leq C \left(\varepsilon \|\varphi\|_{W^{1,6}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\nabla\psi_\varepsilon\|_{L^\infty} + C\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), 2\varepsilon))} \right). \end{aligned}$$

From relations (3.2.2) and (3.2.1) we get that

$$\|\nabla\psi_\varepsilon\|_{L^\infty} = \|\nabla\psi\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla\psi\|_{H^2} \leq C \|\varphi\|_{H^2}.$$

From Lemma 3.2.1 we have that

$$\|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), 2\varepsilon))} \leq C\varepsilon \|\varphi\|_{H^2}.$$

We conclude from the above relations that

$$\|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi)\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2}.$$

Taking the supremum on $[0, T]$ we deduce that

$$\|\nabla(\varphi_\varepsilon - \varphi)\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; H^2)}. \quad (3.3.4)$$

We conclude from (3.3.3) and (3.3.4) that

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty(0, T; H^1)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; H^2)} \rightarrow 0 \quad \text{as } \varepsilon \rightarrow 0.$$

This proves (ii). To prove (iii) we simply bound

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H^1)} \leq \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; H^1)} + \|\varphi_\varepsilon - \varphi\|_{L^\infty(0, T; H^1)} \leq C \|\varphi\|_{L^\infty(0, T; H^2)}.$$

This completes the proof of the lemma. \square

3.4 Temporal estimate and strong convergence

The aim of this section is to derive a temporal estimate and to prove the strong convergence of some sub-sequence of v_ε in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$. We will prove the following result.

Proposition 3.4.1. *There exists a sub-sequence v_{ε_k} of v_ε which converges strongly in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$.*

It suffices to prove that for any $T > 0$ there exists a sub-sequence v_{ε_k} of v_ε which converges strongly in $L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))$. A diagonal extraction then allows to choose the same subsequence for all times T . We choose some finite time T and for the rest of this section we assume that $t \in [0, T]$.

The main idea is to use the Arzelà–Ascoli theorem. Let $\varphi \in C^\infty_{0,\sigma}(\mathbb{R}^3)$ be a test function which does not depend on the time. By the definition of the modified stream function, we observe that even if φ is constant in time, $\psi_\varepsilon(t, x)$ still depends on the time through $h_\varepsilon(t)$. We construct a family of φ_ε as in Section 3.3, so that φ_ε is time-dependent and satisfies Lemma 3.3.2.

We first bound

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \operatorname{curl}(\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot (\eta_\varepsilon \varphi + \nabla \eta_\varepsilon \times \psi_\varepsilon) dx \right| \\
&\leq \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \|\varphi\|_{L^2} + \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon(t), 2\varepsilon))} \\
&\leq C \left(\|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^2} \right) \\
&\leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

where we used Lemma 3.2.1 and Lemma 3.3.1. The boundedness of v_ε in $L^2(\mathbb{R}^3)$ implies that there exists a constant C_1 independent of ε and t such that

$$\left| \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \right| \leq C_1 \|\varphi\|_{H^2}.$$

We infer that, for t fixed and $\varphi \in C_{0,\sigma}^\infty$, the map

$$\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \in \mathbb{R}$$

is linear and continuous for the H^2 norm. Then, there exists some $\Xi_\varepsilon(t) \in H_\sigma^{-2}$ such that

$$\langle \Xi_\varepsilon(t), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx \quad \forall \varphi \in H_\sigma^2.$$

Moreover

$$\|\Xi_\varepsilon(t)\|_{H^{-2}} \leq C_1 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.4.1)$$

From Lemma 3.3.2, we know that φ_ε vanishes in the neighborhood of $B(h_\varepsilon(t), \varepsilon)$, so it is compactly supported in the exterior of this ball. Therefore we can multiply (3.1.13) by φ_ε and integrate in space and in time from s to t , see page 46 for a short justification. We obtain that

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau \varphi_\varepsilon + \nu \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi_\varepsilon + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi_\varepsilon \\
= \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon(s, x) \cdot \varphi_\varepsilon(s, x) dx.
\end{aligned}$$

Then we obtain that

$$\langle \Xi_\varepsilon(t) - \Xi_\varepsilon(s), \varphi \rangle = \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau \varphi_\varepsilon - \nu \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi_\varepsilon - \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi_\varepsilon. \quad (3.4.2)$$

To bound the second term in the right-hand side above, we recall that v_ε is bounded independently of ε in $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$. Thus, by the Hölder inequality and by Lemma 3.3.2, we deduce that

$$\begin{aligned}
\left| \nu \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_\varepsilon : \nabla \varphi_\varepsilon \right| &\leq \nu \int_s^t \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \varphi_\varepsilon\|_{L^2} \\
&\leq C \nu (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2} \|v_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^1)} \\
&\leq C \nu (t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2}.
\end{aligned}$$

Next, we estimate the non-linear term in (3.4.2) by the Hölder inequality and by the

Gagliardo-Nirenberg inequality $\|v_\varepsilon\|_{L^3} \leq C \|v_\varepsilon\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}$,

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon \cdot \varphi_\varepsilon \right| &\leq \int_s^t \|v_\varepsilon\|_{L^3} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi_\varepsilon\|_{L^6} \\
&\leq C \int_s^t \|v_\varepsilon\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|\varphi_\varepsilon\|_{H^1} \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{4}} \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^{\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1)}^{\frac{3}{2}} \|\varphi\|_{H^2} \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{4}} \|\varphi\|_{H^2}
\end{aligned}$$

It remains to estimate the term with the time-derivative. Notice that since φ does not depend on time, we have that $\partial_t \varphi = \partial_t \operatorname{curl} \psi_\varepsilon = 0$. Several integrations by parts give us

$$\begin{aligned}
\int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau \varphi_\varepsilon &= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \operatorname{curl} \partial_\tau (\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) \\
&= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau (\eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) \\
&= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_\varepsilon \cdot (\partial_\tau \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_\varepsilon \cdot (\eta_\varepsilon \partial_\tau \psi_\varepsilon) \\
&= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_\varepsilon \cdot (\partial_\tau \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \operatorname{curl} (\eta_\varepsilon \partial_\tau \psi_\varepsilon) \\
&= \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_\varepsilon \cdot (\partial_\tau \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) + \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot (\nabla \eta_\varepsilon \times \partial_\tau \psi_\varepsilon)
\end{aligned}$$

We estimate the two terms in the right-hand side of the equality above by using Lemmas 3.2.1 and 3.3.1 and recalling that $\varepsilon^{\frac{3}{2}} |h'_\varepsilon|$ is bounded in $L^\infty(0,T)$ independently of ε :

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_\varepsilon \cdot (\partial_\tau \eta_\varepsilon \psi_\varepsilon) \right| &\leq \int_s^t \frac{|h'_\varepsilon|}{\varepsilon} \|\operatorname{curl} v_\varepsilon\|_{L^2} \left\| \nabla \eta \left(\frac{x - h_\varepsilon}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon, 2\varepsilon))} \\
&\leq C \int_s^t \varepsilon^{\frac{3}{2}} |h'_\varepsilon| \|\operatorname{curl} v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^2} \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1)} \|\varphi\|_{H^2} \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot (\nabla \eta_\varepsilon \times \partial_\tau \psi_\varepsilon) \right| &\leq \int_s^t \|v_\varepsilon\|_{L^6} \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{5}}} \|\partial_\tau \psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon, 2\varepsilon))} \\
&\leq C \int_s^t \varepsilon^{\frac{3}{2}} |h'_\varepsilon| \|v_\varepsilon\|_{L^6} \|\varphi\|_{H^2} \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1)} \|\varphi\|_{H^2} \\
&\leq C(t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2}
\end{aligned}$$

where we used the Sobolev embedding $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.

Gathering the two estimates above, we infer that

$$\left| \int_s^t \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot \partial_\tau \varphi_\varepsilon \right| \leq C(t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2}.$$

Putting together all the estimates above yields the following bound for Ξ_ε :

$$\begin{aligned} |\langle \Xi_\varepsilon(t) - \Xi_\varepsilon(s), \varphi \rangle| &\leq C\nu(t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2} + C(t-s)^{\frac{1}{4}} \|\varphi\|_{H^2} + C(t-s)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{H^2} \\ &\leq C(t-s)^{\frac{1}{4}} \|\varphi\|_{H^2} \end{aligned}$$

where the constant C above depends on T and ν .

By density of $C_{0,\sigma}^\infty$ in H_σ^2 , we then obtain that $\Xi_\varepsilon(t)$ is equicontinuous in time with value in H_σ^{-2}

$$\|\Xi_\varepsilon(t) - \Xi_\varepsilon(s)\|_{H^{-2}} \leq C(t-s)^{\frac{1}{4}}.$$

On the other hand, $\Xi_\varepsilon(t)$ is also bounded in H_σ^{-2} , see relation (3.4.1). So the compact embedding $H^{-2} \hookrightarrow H_{\text{loc}}^{-3}$ and the Arzelà-Ascoli theorem enable us to extract a subsequence Ξ_{ε_k} of Ξ_ε converging to some Ξ strongly in H_{loc}^{-3} :

$$\Xi_{\varepsilon_k} \rightarrow \Xi \quad \text{in } C^0(0, T; H_{\text{loc}}^{-3}). \quad (3.4.3)$$

We now use Lemmas 3.2.1 and 3.3.1 to estimate

$$\begin{aligned} |\langle \Xi_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) - \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi(t, x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot (\eta_\varepsilon \varphi + \nabla \eta_\varepsilon \times \psi_\varepsilon) - \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi(t, x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} (\eta_\varepsilon - 1) v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi + \int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon \cdot (\nabla \eta_\varepsilon \times \psi_\varepsilon) \right| \\ &\leq \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\eta_\varepsilon - 1\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^2} \|\psi_\varepsilon\|_{L^\infty(B(h_\varepsilon, 2\varepsilon))} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^\infty} + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^2} \right) \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|\varphi\|_{H^2} \|v_\varepsilon\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Using again the density of $C_{0,\sigma}^\infty$ in H_σ^2 , the above estimate implies that

$$\|\Xi_\varepsilon(t) - v_\varepsilon(t)\|_{H^{-2}} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}} \|v_\varepsilon\|_{L^2}.$$

So $\Xi_\varepsilon - v_\varepsilon \rightarrow 0$ in $L^\infty(0, T; H^{-2})$. In particular $\Xi_\varepsilon - v_\varepsilon \rightarrow 0$ in $L^\infty(0, T; H_{\text{loc}}^{-3})$. Recalling (3.4.3) and relabelling $\Xi = v$ we infer that

$$v_{\varepsilon_k} \rightarrow v \quad \text{in } L^\infty(0, T; H_{\text{loc}}^{-3}). \quad (3.4.4)$$

Let $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. We have the interpolation inequality

$$\|f(v_{\varepsilon_k} - v)\|_{L^2} \leq C \|f(v_{\varepsilon_k} - v)\|_{H^{-3}}^{\frac{1}{4}} \|f(v_{\varepsilon_k} - v)\|_{H^1}^{\frac{3}{4}}$$

so

$$\|f(v_{\varepsilon_k} - v)\|_{L^{\frac{8}{3}}(0, T; L^2)} \leq C \|f(v_{\varepsilon_k} - v)\|_{L^\infty(0, T; H^{-3})}^{\frac{1}{4}} \|f(v_{\varepsilon_k} - v)\|_{L^2(0, T; H^1)}^{\frac{3}{4}}.$$

Given relation (3.4.4) and the boundedness of v_ε in $L^2(0, T; H^1)$ we observe that the right-hand side above goes to 0 as $\varepsilon_k \rightarrow 0$. We deduce that

$$v_{\varepsilon_k} \rightarrow v \quad \text{strongly in } L^{\frac{8}{3}}(0, T; L_{\text{loc}}^2).$$

The embedding $L^{\frac{8}{3}}(0, T; L_{\text{loc}}^2) \subset L^2(0, T; L_{\text{loc}}^2)$ completes the proof of Proposition 3.4.1.

3.5 Passing to the limit

In this section we are going to complete the proof of Theorem 3.1.4 by passing to the limit with compactness methods.

Let $T > 0$ be finite and fixed. We will pass to the limit only on the time interval $[0, T]$. A diagonal extraction allows us to find a subsequence which converges to the expected limit for all $t \geq 0$.

Thanks to the assumptions on v_ε , we know that

$$v_\varepsilon \text{ is bounded in } L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1).$$

This implies that there exists some $v \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$ and some sub-sequence v_{ε_k} of v_ε such that

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon_k} &\rightharpoonup v \quad \text{weak* in } L^\infty(0, T; L^2), \\ v_{\varepsilon_k} &\rightharpoonup v \quad \text{weakly in } L^2(0, T; H^1). \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

Moreover, using Proposition 3.4.1, we can further assume that

$$v_{\varepsilon_k} \rightarrow v \quad \text{strongly in } L^2(0, T; L^2_{\text{loc}}).$$

The main goal of this Section is to prove that the limit v is the solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 with initial data $v_0(x)$.

Let $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ be a divergence-free vector field. We construct the family of vector fields φ_{ε_k} as in Section 3.3 (see relation (3.3.2)). These vector fields are compactly supported in the exterior of the ball $B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k)$, so they can be used as test functions in (3.1.13). Multiplying (3.1.13) by φ_{ε_k} and integrating by parts in time and space yields

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi_{\varepsilon_k} + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_{\varepsilon_k} : \nabla \varphi_{\varepsilon_k} + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} \\ = \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k}(0) \cdot \varphi_{\varepsilon_k}(0). \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

We will pass to the limit $\varepsilon_k \rightarrow 0$ in each of the term in the equation above. First, from Lemma 3.3.2, we have that

$$\varphi_{\varepsilon_k}(0) \rightarrow \varphi(0) \text{ strongly in } L^2(\mathbb{R}^3).$$

We also know by hypothesis that $v_\varepsilon(0, x)$ converges weakly to $v_0(x)$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$. We infer that

$$\int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k}(0) \cdot \varphi_{\varepsilon_k}(0) \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} v(0) \cdot \varphi(0). \quad (3.5.3)$$

Next, we also know from Lemma 3.3.2 that

$$\nabla \varphi_{\varepsilon_k} \rightarrow \nabla \varphi \text{ strongly in } L^\infty(0, T; L^2).$$

Recalling that $\nabla v_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \nabla v$ weakly in $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$, see relation (3.5.1), we deduce that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v_{\varepsilon_k} : \nabla \varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v : \nabla \varphi. \quad (3.5.4)$$

We decompose the non-linear term in the left-hand of (3.5.2) as follows :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi).$$

To treat the first term on the right-hand side, we know that φ is compactly supported, that $\nabla v_{\varepsilon_k} \rightharpoonup \nabla v$ weakly in $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^3)$ and that $v_{\varepsilon_k} \rightarrow v$ strongly in $L^2(0, T; L^2_{\text{loc}})$. These observations enable us to pass to the limit :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \nabla v \cdot \varphi.$$

For the second term, we make an integration by parts to get that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi) = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \otimes v_{\varepsilon_k} : \nabla (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi).$$

By the Hölder inequality, the Gagliardo-Nirenberg inequality $\|v_{\varepsilon_k}\|_{L^4} \leq C \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2}^{\frac{1}{4}} \|\nabla v_{\varepsilon_k}\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}$ and the strong convergence of φ_{ε_k} in $L^\infty(0, T; H^1)$ stated in Lemma 3.3.2, we obtain that

$$\begin{aligned} \left| - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \otimes v_{\varepsilon_k} : \nabla (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi) \right| &\leq \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^4}^2 \|\nabla (\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi)\|_{L^2} \\ &\leq C \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla v_{\varepsilon_k}\|_{L^2}^{\frac{3}{2}} \|\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi\|_{H^1} \\ &\leq CT^{\frac{1}{4}} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^{\frac{1}{2}} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2(0, T; H^1)}^{\frac{3}{2}} \|\varphi_{\varepsilon_k} - \varphi\|_{L^\infty(0, T; H^1)} \\ &\xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

where we also used the boundedness of v_{ε_k} in $L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H^1)$.

Combining the relations above, we deduce that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \nabla v \cdot \varphi. \quad (3.5.5)$$

Now, it remains to pass to the limit in the first term on the left-hand side of (3.5.2).

Integrating by parts twice allows us to decompose this term into three parts as follows :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi_{\varepsilon_k} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \operatorname{curl} \partial_t (\eta_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t (\eta_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_{\varepsilon_k} \cdot (\partial_t \eta_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_{\varepsilon_k} \cdot (\eta_{\varepsilon_k} \partial_t \psi_{\varepsilon_k}) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_{\varepsilon_k} \cdot (\partial_t \eta_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \operatorname{curl} (\eta_{\varepsilon_k} \partial_t \psi_{\varepsilon_k}) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_{\varepsilon_k} \cdot (\partial_t \eta_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot (\nabla \eta_{\varepsilon_k} \times \partial_t \psi_{\varepsilon_k}) \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot (\eta_{\varepsilon_k} \operatorname{curl} \partial_t \psi_{\varepsilon_k}) \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_{\varepsilon_k} \cdot (\partial_t \eta_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot (\nabla \eta_{\varepsilon_k} \times \partial_t \psi_{\varepsilon_k}) \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot (\eta_{\varepsilon_k} \partial_t \varphi)
\end{aligned}$$

where we used the fact that $\operatorname{curl} \psi_{\varepsilon_k} = \varphi$ (see Lemma 3.2.1).

We will treat the three terms in the right-hand side of the relation above. For the first term, we use the Hölder inequality twice, the definition of η_ε (see relation (3.3.1)) and Lemma 3.2.1 to bound

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \operatorname{curl} v_{\varepsilon_k} \cdot (\partial_t \eta_{\varepsilon_k} \psi_{\varepsilon_k}) \right| \\
& \leq \int_0^T \frac{|h'_{\varepsilon_k}(t)|}{\varepsilon_k} \|\operatorname{curl} v_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \left\| \nabla \eta \left(\frac{x - h_{\varepsilon_k}(t)}{\varepsilon_k} \right) \right\|_{L^2} \|\psi_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(B(h_{\varepsilon_k}(t), 2\varepsilon_k))} \\
& \leq C \int_0^T \varepsilon_k^{3/2} |h'_{\varepsilon_k}(t)| \|\operatorname{curl} v_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\varphi\|_{H^2} \\
& \leq CT^{\frac{1}{2}} \varepsilon_k^{3/2} \|h'_{\varepsilon_k}(t)\|_{L^\infty(0,T)} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2(0,T;H^1)} \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \\
& \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

where we used the hypothesis $\varepsilon_k^{3/2} h'_{\varepsilon_k}(t) \rightarrow 0$ in $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ when $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

To bound the second term, we use again the Hölder inequality, Lemmas 3.2.1 and 3.3.1 and the hypothesis on $\varepsilon_k^{3/2} h'_{\varepsilon_k}$:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot (\nabla \eta_{\varepsilon_k} \times \partial_t \psi_{\varepsilon_k}) \right| \leq \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^6} \|\nabla \eta_{\varepsilon_k}\|_{L^{\frac{6}{5}}} \|\partial_t \psi_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(B(h_{\varepsilon_k}(t), 2\varepsilon_k))} \\
& \leq C \int_0^T \varepsilon_k^{3/2} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^6} (\varepsilon_k \|\partial_t \varphi\|_{H^2} + |h'_{\varepsilon_k}(t)| \|\varphi\|_{H^2}) \\
& \leq C \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{H^1} \left(\varepsilon_k^{5/2} \|\partial_t \varphi\|_{H^2} + \varepsilon_k^{3/2} |h'_{\varepsilon_k}(t)| \|\varphi\|_{H^2} \right) \\
& \leq CT^{\frac{1}{2}} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2(0,T;H^1)} \left(\varepsilon_k^{5/2} \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon_k^{3/2} \|h'_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(0,T)} \|\varphi\|_{L^\infty(0,T;H^2)} \right) \\
& \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

where we also used the Sobolev embedding $H^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$.

For the third term, we shall write $v_{\varepsilon_k} \eta_{\varepsilon_k} = v_{\varepsilon_k}(\eta_{\varepsilon_k} - 1) + (v_{\varepsilon_k} - v) + v$ to get that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot (\eta_{\varepsilon_k} \partial_t \varphi) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\eta_{\varepsilon_k} - 1) v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (v_{\varepsilon_k} - v) \cdot \partial_t \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \partial_t \varphi$$

Recalling that $v_{\varepsilon_k} \rightarrow v$ strongly in $L^2(0, T; L_{\text{loc}}^2)$, we observe that the second term in the right-hand side of the equality above converges to 0. We estimate the first term by the Hölder inequality and by Lemma 3.3.1

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} (\eta_{\varepsilon_k} - 1) v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi \right| &\leq \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\eta_{\varepsilon_k} - 1\|_{L^2} \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty} \\ &\leq C \varepsilon_k^{\frac{3}{2}} \int_0^T \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^2} \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty} \\ &\leq CT \varepsilon_k^{\frac{3}{2}} \|v_{\varepsilon_k}\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \|\partial_t \varphi\|_{L^\infty(0, T; L^\infty)} \\ &\xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

We infer that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot (\eta_{\varepsilon_k} \partial_t \varphi) \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \partial_t \varphi,$$

which implies that

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v_{\varepsilon_k} \cdot \partial_t \varphi_{\varepsilon_k} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \partial_t \varphi. \quad (3.5.6)$$

Gathering (3.5.2), (3.5.3), (3.5.4), (3.5.5) and (3.5.6), we conclude that

$$- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \partial_t \varphi + \nu \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \nabla v : \nabla \varphi + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \nabla v \cdot \varphi = \int_{\mathbb{R}^3} v(0) \cdot \varphi(0)$$

which is the weak formulation of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 . This completes the proof that v is a solution of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 in the sense of distributions.

In order to complete the proof of Theorem 3.1.4, it remains to prove the energy inequality (3.1.16) under the additional assumption that $v_\varepsilon(0)$ converges strongly to v_0 in L^2 .

Let us observe first that $v \in C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$. This follows from the fact that $v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ is a solution in the sense of distributions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^3 . The argument is classical, but let us recall it for the benefit of the reader. We apply the Leray projector \mathbb{P} in \mathbb{R}^3 to the Navier-Stokes equations verified by v to obtain that

$$\partial_t v - \nu \Delta v + \mathbb{P} \operatorname{div}(v \otimes v) = 0.$$

Because $v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ we have that $v \otimes v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^3)) \subset L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-2}(\mathbb{R}^3))$. We also have that $\Delta v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-2}(\mathbb{R}^3))$, so $\partial_t v \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-2}(\mathbb{R}^3))$. We infer that v is Lipschitz in time with values in $H^{-2}(\mathbb{R}^3)$; in particular it is strongly continuous in time with values in $H^{-2}(\mathbb{R}^3)$. This strong continuity in time together with the boundedness of the L^2 norm implies the weak continuity of v in time with values in L^2 . In particular, we have that $v(t)$ is well-defined and belongs to $L^2(\mathbb{R}^3)$ for all times $t \geq 0$ (and not only for almost all times).

Let us observe now that for all $t \geq 0$ we have that $v_{\varepsilon_k}(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $L^2(\mathbb{R}^3)$. Indeed, we know from relation (3.4.4) that $v_{\varepsilon_k}(t) \rightarrow v(t)$ strongly in $H_{\text{loc}}^{-3}(\mathbb{R}^3)$, so $\langle v_{\varepsilon_k}(t), \varphi \rangle \rightarrow \langle v(t), \varphi \rangle$ for all test functions φ . The boundedness of $v_{\varepsilon_k}(t)$ in L^2 and the density of the test functions in L^2 imply that $\langle v_{\varepsilon_k}(t), \varphi \rangle \rightarrow \langle v(t), \varphi \rangle$ for all $\varphi \in L^2$, that is $v_{\varepsilon_k}(t) \rightharpoonup v(t)$ weakly in $L^2(\mathbb{R}^3)$.

Let us denote by χ_A the characteristic function of the set A . We prove now that for all $t \geq 0$

$$v_{\varepsilon_k}(t)\chi_{B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k)} \rightharpoonup 0$$

weakly in L^2 . Indeed, let $g \in L^2$. Then

$$|\langle v_{\varepsilon_k}(t)\chi_{B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k)}, g \rangle| = \left| \int_{B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k)} v_{\varepsilon_k}(t)g \right| \leq \|v_{\varepsilon_k}(t)\|_{L^2} \|g\|_{L^2(B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k))} \xrightarrow{\varepsilon_k \rightarrow 0} 0$$

because $\|v_{\varepsilon_k}(t)\|_{L^2}$ is bounded and $\|g\|_{L^2(B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k))}$ goes to 0 as $\varepsilon_k \rightarrow 0$.

We infer that

$$v_{\varepsilon_k}(t)\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k)} \rightharpoonup v(t) \quad \text{weakly in } L^2(\mathbb{R}^3).$$

By the weak lower semi-continuity of the L^2 norm we infer that

$$\|v(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leq \liminf_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \|v_{\varepsilon_k}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k))}. \quad (3.5.7)$$

Similarly, from the weak convergence

$$D(v_{\varepsilon_k}) \rightharpoonup D(v) \quad \text{weakly in } L^2((0, t) \times \mathbb{R}^3)$$

we infer that

$$\chi_{\mathbb{R}^3 \setminus B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k)} D(v_{\varepsilon_k}) \rightharpoonup D(v) \quad \text{weakly in } L^2((0, t) \times \mathbb{R}^3)$$

so by lower semi-continuity

$$\|D(v)\|_{L^2((0, t) \times \mathbb{R}^3)}^2 \leq \liminf_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \int_0^t \|D(v_{\varepsilon_k})\|_{L^2(\mathbb{R}^3 \setminus B(h_{\varepsilon_k}(t), \varepsilon_k))}^2. \quad (3.5.8)$$

We also observe at this point that the strong L^2 convergence of $v_\varepsilon(0)$ towards v_0 gives that

$$\|v_0\|_{L^2} = \liminf_{\varepsilon_k \rightarrow 0} \|v_{\varepsilon_k}(0)\|_{L^2}. \quad (3.5.9)$$

Finally, taking the $\liminf_{\varepsilon_k \rightarrow 0}$ in (3.1.15) and using (3.5.7), (3.5.8) and (3.5.9) implies the required energy inequality (3.1.16). This completes the proof of Theorem 3.1.4.

Remark 3.5.1. We end this paper with a final remark about the weak time continuity assumed in Theorem 3.1.4 : $v_\varepsilon \in C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$. We know that $\tilde{v}_\varepsilon \in C_w^0(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3))$ so we made this hypothesis for the sake of simplicity, but it is in fact not necessary to make such an assumption. Indeed, we used it to make sense of the various terms of the form $\int_{\mathbb{R}^3} v_\varepsilon(t, x) \cdot \varphi_\varepsilon(t, x) dx$, see for instance on page 62. But the Navier-Stokes equation itself implies a time-continuity property allowing to make sense of such terms. More precisely, let us make a change of variables to go to a fixed domain. The vector field $\tilde{v}_\varepsilon(t, x) = v_\varepsilon(t, x - h_\varepsilon(t))$ verifies the following PDE :

$$\partial_t \tilde{v}_\varepsilon + h'_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nu \Delta \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon = -\nabla \tilde{\pi}_\varepsilon \quad \text{for } |x| > \varepsilon \quad (3.5.10)$$

where $\tilde{\pi}_\varepsilon(t, x) = \pi_\varepsilon(t, x - h_\varepsilon(t))$. Since $v_\varepsilon \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$ we also have that $\tilde{v}_\varepsilon \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}_+; H^1(\mathbb{R}^3))$. Recalling that h_ε is Lipschitz, we infer by classical estimates that $h'_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nu \Delta \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon \in L_{\text{loc}}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\mathbb{R}^3))$. So, if we choose some $\Phi \in C_{0,\sigma}^\infty(|x| > \varepsilon)$ and we multiply (3.5.10) by Φ , the pressure goes away and we obtain that

$$|\langle \partial_t \tilde{v}_\varepsilon, \Phi \rangle| = |\langle h'_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nu \Delta \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon, \Phi \rangle| \leq \|h'_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nu \Delta \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon\|_{H^{-1}} \|\Phi\|_{H^1}.$$

If we denote by X the dual of $C_{0,\sigma}^\infty(|x| > \varepsilon)$ for the H^1 norm, the relation above implies that

$$\|\partial_t \tilde{v}_\varepsilon\|_X \leq \|h'_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon - \nu \Delta \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon \cdot \nabla \tilde{v}_\varepsilon\|_{H^{-1}}$$

so $\partial_t \tilde{v}_\varepsilon \in L_{\text{loc}}^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+; X)$. In particular $\tilde{v}_\varepsilon \in C^0(\mathbb{R}_+; X)$. We infer that $\int \tilde{v}_\varepsilon(t, \cdot) \cdot \Phi$ is well-defined for all $t \geq 0$ and $\Phi \in C_{0,\sigma}^\infty(|x| > \varepsilon)$. Going back to the original variables, we infer that if $\varphi_\varepsilon \in C_{0,\sigma}^\infty(|x - h_\varepsilon(t)| > \varepsilon)$ then $\int v_\varepsilon(t, \cdot) \cdot \varphi_\varepsilon$ is well-defined.

Deuxième partie

Boussinesq system

Uniqueness of mild solutions of the Boussinesq system

In collaboration with Lorenzo Brandolese

Abstract. We address the uniqueness problem for mild solutions of the Boussinesq system in \mathbb{R}^3 . We provide several uniqueness classes on the velocity and the temperature, generalizing in this way the classical $C([0, T]; L^3(\mathbb{R}^3))$ -uniqueness result for mild solutions of the Navier-Stokes equations.

4.1 Introduction

The incompressible Boussinesq system describes the dynamics of a viscous incompressible fluid with heat exchanges. This system arises from an approximation on a system coupling the classical Navier-Stokes equations and the equations of thermodynamics. In this approximation, the variations of the density due to heat transfers are neglected in the continuity equation, but are taken into account in the equation of the motion through an additional buoyancy term proportional to the temperature variations.

This paper deals with the uniqueness problems for mild solutions of the Boussinesq system. With a minor loss of generality, and just to simplify the presentation, we will assume in the sequel that the physical constant are all equal to one. In this case, the Boussinesq system can be written as the following form,

$$\begin{cases} \partial_t \theta + u \cdot \nabla \theta = \Delta \theta \\ \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p = \Delta u + \theta e_3 \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0. \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}_+ \quad (4.1.1)$$

Here $u: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ is the velocity field. The scalar fields $p: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ and $\theta: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ denote respectively the pressure and the temperature of the fluid. Moreover, $e_3 = (0, 0, 1)$ is the unit vertical vector.

In the case $\theta \equiv 0$, this system reduces to the classical Navier-Stokes equations.

The integral formulation of the Boussinesq system reads :

$$\begin{cases} \theta(t) = e^{t\Delta} \theta_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (\theta u)(s) \, ds \\ u(t) = e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes u)(s) \, ds + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \theta(s) e_3 \, ds. \\ \nabla \cdot u_0 = 0 \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Here \mathbb{P} denotes the projector on the space of divergence-free fields, which is also called Leray's projector. In this paper, we will work directly with the integral form (4.1.2) rather than the original system (4.1.1). The solutions of (4.1.2) are usually called *mild solutions*. The equivalence between the two systems is not only formal, but can be established rigorously in quite general functional settings. We refer to the book of Lemarié-Rieusset (see Theorem 1.2 in [LR02]), for this issue in the particular case of the Navier-Stokes equations.

To write our system in a more compact form, we can replace the equation of θ inside the last integral and we get

$$\int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \theta(s) e_3 \, ds = t e^{t\Delta} \mathbb{P} \theta_0 e_3 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \theta e_3)(s) \, ds.$$

Next, let us introduce the three bilinear maps

$$B_1(u, \tilde{u}) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes \tilde{u})(s) \, ds, \quad (4.1.3a)$$

$$B_2(u, \theta) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} (t-s) \mathbb{P} \nabla \cdot (u \theta e_3)(s) \, ds, \quad (4.1.3b)$$

$$B_3(u, \theta) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \nabla \cdot (u \theta)(s) \, ds, \quad (4.1.3c)$$

Then our system (4.1.2) can be rewritten as

$$\begin{cases} u(t) = e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3] + B_1(u, u) + B_2(u, \theta) \\ \theta(t) = e^{t\Delta}\theta_0 + B_3(u, \theta) \\ \nabla \cdot u_0 = 0. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

This system is left invariant by the natural scaling $(u, \theta) \mapsto (u_\lambda, \theta_\lambda)$, with $\lambda > 0$ and

$$u_\lambda(x, t) = \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t) \quad \text{and} \quad \theta_\lambda = \lambda^3 \theta(\lambda x, \lambda^2 t),$$

and with the initial data transformation $u_{0,\lambda}(x) = \lambda u_0(\lambda x)$ and $\theta_\lambda(x) = \lambda^3 \theta_0(\lambda x)$. Notice that,

$$\|u_{0,\lambda}\|_3 = \|u_0\|_3 \quad \text{and} \quad \|\theta_{0,\lambda}\|_1 = \|\theta_0\|_1,$$

where $\|\cdot\|_p$ denotes the L^p -norm, and these scaling relations motivate the choice of the space

$$C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3)) \quad (4.1.5)$$

for solving the Boussinesq equations. The unboundedness of the bilinear operator B_1 in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$ leads to construct solutions of (4.1.4) applying the usual fixed point not directly in the space (4.1.5), but in a Kato's-type smaller space, respecting the same scaling properties as in (4.1.5). For this reason, let us denote by X the subspace of $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$, normed by

$$\|u\|_X \equiv \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_3 + \sup_{0 < t \leq T} \sqrt{t} \|u(t)\|_\infty, \quad (4.1.6)$$

and consisting of all divergence-free vector fields in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$ such that $\|u\|_X < \infty$ and $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} \|u(t)\|_\infty = 0$. Similarly, let us denote by Y the subspace of $C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$, normed by

$$\|\theta\|_Y = \sup_{t \in [0, T]} \|\theta(t)\|_1 + \sup_{0 < t \leq T} t^{3/2} \|\theta(t)\|_\infty, \quad (4.1.7)$$

and consisting of all functions $\|\theta\|_Y < \infty$ and $\lim_{t \rightarrow 0} t^{3/2} \|\theta(t)\|_\infty = 0$. Then, when $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ is divergence-free and $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, it is easy to establish, just by suitably adapting classical Kato's method [Kat84] for the Navier–Stokes equations, the following basic existence and uniqueness result in the space $X \times Y$:

Proposition 4.1.1. *Let $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ be a divergence-free vector field and let $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. Then there exists $T > 0$ and a unique mild solution $(u, \theta) \in X \times Y$ of (4.1.2).*

The above solution is global-in-time when, e.g., $\|u_0\|_3 + \|\theta_0\|_1$ is small enough. We refer in this case to [BM17], [BS12] for the study of their long time behavior, which strikingly differs from the usual behavior as $t \rightarrow +\infty$ of solutions of the Navier–Stokes equations.

One can establish several variants of Proposition 4.1.1. For example, we will state a much more general local existence result in Theorem 4.2.4, where the $L^3(\mathbb{R}^3)$ and $L^1(\mathbb{R}^3)$ will be replaced by considerably larger Besov spaces.

The main drawback of Proposition 4.1.1 is that *the uniqueness of the solution is not ensured in the natural class* (4.1.5), but only in the considerably smaller class $X \times Y$. In this sense, the uniqueness result of the above theorem looks far from being optimal.

In fact, in the case of the Navier–Stokes equations, *i.e.* when $\theta \equiv 0$, Kato's existence result of solutions in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$ is completed by the well-known uniqueness theorem of Furioli, Lemarié-Rieusset, Terraneo [FLRT00], stating that, for $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, there is *only one mild solution* of the Navier–Stokes equations in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$, such that $u(0) = u_0$. See also [Mey96], [Mon99] for simpler proofs of this important result. Unfortunately, in the case of the

Boussinesq system, it seems difficult to establish the uniqueness of mild solutions in the natural class (4.1.5). Indeed, no specific regularity result is available for solutions in such class : if we put no additional condition on the regularity of u or θ then the term θu appearing in the equation of the temperature is not even a distribution, so that giving a sense to the term $B_3(u, \theta)$ would be problematic.

The purpose of this paper is to put in evidence alternative uniqueness classes for the solutions of the Boussinesq equations. In this direction, our first main uniqueness result is the following theorem :

Theorem 4.1.2 (Uniqueness). *Let $T > 0$, $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ and $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, with $\nabla \cdot u_0 = 0$. Let $(u, \theta), (\tilde{u}, \tilde{\theta})$ be two mild solutions of the Boussinesq system (4.1.2) with the same data (u_0, θ_0) , such that*

$$u, \tilde{u} \in C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)), \quad \text{and} \quad \theta, \tilde{\theta} \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q, \infty}(\mathbb{R}^3)). \quad (4.1.8)$$

for some $q > 3/2$. Then, $(u, \theta) = (\tilde{u}, \tilde{\theta})$.

Here, $L^{q, \infty}$ is the Lorentz space (see Appendix). Theorem 4.1.2 ensures that the uniqueness holds in a space considerably larger than $X \times Y$. In particular, the vanishing of the $L^{q, \infty}$ -norm of $\theta(t)$ as $t \rightarrow 0$ is not required for the uniqueness.

Let us recall that, if $\sigma > 0$ and $1 \leq q \leq \infty$, then a tempered distribution f satisfies

$$\sup_{0 < t < T} t^{\sigma/2} \|e^{t\Delta} f\|_q < \infty \quad (4.1.9)$$

for all $0 < T < \infty$ if and only if $f \in B_{q, \infty}^{-\sigma}(\mathbb{R}^3)$. For different values of T , all these expressions are equivalent to the usual inhomogeneous Besov norm $\|\cdot\|_{B_{q, \infty}^{-\sigma}}$. If (4.1.9) holds with $T = \infty$, then f belongs to the smaller homogeneous Besov space $\dot{B}_{q, \infty}^{-\sigma}(\mathbb{R}^3)$ and the converse is also true. See [LR02]. By analogy, we define $B_{q, \infty, \infty}^{-\sigma}(\mathbb{R}^3)$ as the space of tempered distributions f such that, for some $T > 0$, $\sup_{0 < t < T} t^{\sigma/2} \|e^{t\Delta} f\|_{L^{q, \infty}} < \infty$. Before stating our next theorem, let us observe that the solution obtained in Proposition 4.1.1 satisfies, for all $1 < q < \infty$, by interpolation,

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} < \infty, \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} = 0. \quad (4.1.10)$$

In the sequel, we will denote by $Y_{q, \infty}$ the space of functions related to (4.1.10). More precisely, $Y_{q, \infty} = Y_{q, \infty, T}$ is the subspace of $L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q, \infty}(\mathbb{R}^3))$ made of functions such that

$$\|\theta\|_{Y_{q, \infty}} = \|\theta\|_{Y_{q, \infty, T}} \equiv \text{ess sup}_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} < +\infty$$

and

$$\|\theta\|_{Y_{q, \infty, T'}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T' \rightarrow 0.$$

When restricting to temperatures in $Y_{q, \infty}$ the uniqueness can be granted as soon as the velocity is in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$, in this case it is no longer needed to require that θ belongs to $C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$. More precisely we have the following variant of our uniqueness result :

Theorem 4.1.3. *Let $T > 0$ and (u, θ) a mild solution of the Boussinesq system (4.1.2), such that*

$$(u, \theta) \in C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q, \infty}, \quad (4.1.11)$$

for some $3/2 < q < 3$. Then the data (u_0, θ_0) belong to $L^3(\mathbb{R}^3) \times B_{q, \infty, \infty}^{-3(1-1/q)}$ and uniquely determine (u, θ) .

In Section 4.2 we prove Theorem 4.1.3, after establishing the relevant bilinear estimates in Lorentz spaces, extending those of Y. Meyer in [Mey96]. The proof of Theorem 4.1.2 will rely

on the result of Theorem 4.1.3. Next step consists in establishing some fine existence results of solutions, encompassing Proposition 4.1.1, in the same spirit as Cannone's [Can04]. The last step of the proof of Theorem 4.1.2 consists in removing the restriction $\theta \in Y_{q,\infty}$: this will be done by proving that any mild solution in the class $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q,\infty}(\mathbb{R}^3))$, must agree with the solution of Proposition 4.1.1. This last step makes use of a compactness argument inspired an earlier uniqueness theorem by H. Brezis on the vorticity equation [Bre94].

Our estimates break down in the case $q = 3/2$. For this reason, we do not know, for example, if $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^{3/2}(\mathbb{R}^3))$, or $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{3/2,\infty}$ are uniqueness classes for mild solutions of the Boussinesq system.

On the other hand, in our uniqueness results, it seems possible to relax a little bit the $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$ -condition on the velocity, and to replace it by a weaker condition of the form $u \in C([0, T], D)$, where D is the closure in $L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ of $\{f \in L^{3,\infty} : -\Delta f \in L^{3,\infty}\}$. See Remark 4.2.3 below. In the case of the Navier–Stokes equations, an even finer uniqueness result is contained in the recent preprint by T. Okabe and Y. Tsutsui [OT18].

While there exists a rich literature on the uniqueness of solutions of the Navier–Stokes equations, (see, e.g., [Che99], [FLRT00], [LM01], [FNT15], [OT18] for a small sample of the available results), only few earlier papers dealt with the uniqueness problem for the Boussinesq equations in scale-invariant spaces. Moreover, such papers study, in fact, more or less different versions of the original system (4.1.1) (a system with no diffusivity for the temperature in [DP08a], or a nonlinear diffusivity in [Abi09], etc.), so that the uniqueness results therein are not comparable to ours.

4.2 Proof of the main theorems

4.2.1 Preliminary estimates

To establish Theorem 4.1.3, inspired by [Koz95], [Mey96], we will make use of the Banach space $X_{3,\infty} = L^\infty((0, T), L^{3,\infty})$, normed by

$$\|u\|_{X_{3,\infty}} = \sup_{t \in (0, T)} \|u(t)\|_{L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)}.$$

We will make use also of the space X_p , consisting of the subspace of $L_{\text{loc}}^1((0, T), L^p)$ made of the vector fields u such that $\|u\|_{X_p} < \infty$, where the X_p -norm is defined as

$$\|u\|_{X_p} = \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{1}{2}(1-3/p)} \|u(t)\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Of special importance will be the space the case $p = 3$: in this case $X_3 = L^\infty((0, T), L^3(\mathbb{R}^3))$. Concerning the temperature, we will often work in the space Y_q of all the $L_{\text{loc}}^1((0, T), L^q(\mathbb{R}^3))$ functions such that $\|\theta\|_{Y_q} < \infty$, where

$$\|\theta\|_{Y_q} = \sup_{t \in (0, T)} t^{\frac{3}{2}(1-1/q)} \|\theta(t)\|_q, \quad 1 \leq q \leq \infty.$$

Notice that $Y_1 = L^\infty((0, T), L^1(\mathbb{R}^3))$.

The kernel $K(x, t)$ of the operator $e^{t\Delta} \mathbb{P}$ satisfies

$$K(x, t) = t^{-3/2} K\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right), \quad \text{and} \quad |K(x, 1)| \leq C(1 + |x|)^{-3}. \quad (4.2.1)$$

See [Bra09]. In particular, $K(\cdot, 1) \in \bigcap_{1 < p \leq \infty} L^p(\mathbb{R}^3)$ and

$$\|e^{t\Delta} \mathbb{P} \theta_0 e_3\|_s \leq C t^{-\frac{3}{2}(\frac{1}{r} - \frac{1}{s})} \|\theta_0\|_r, \quad 1 \leq r < s \leq \infty. \quad (4.2.2)$$

On the other hand, the kernel $F(x, t)$ of the operator $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}$ satisfies

$$F(x, t) = t^{-2} F\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right), \quad \text{and} \quad |F(x, 1)| \leq C(1 + |x|)^{-4}. \quad (4.2.3)$$

See [Miy00]. In particular, $F(\cdot, 1) \in L^1 \cap L^\infty$ and

$$\|F(t)\|_\beta = C t^{-2+3/(2\beta)}, \quad 1 \leq \beta \leq \infty. \quad (4.2.4)$$

The following estimates are well known to Navier–Stokes specialists, see [Mey96]. Only the first one is subtle, the second one being just an application of Hölder and Young inequality in Lorentz spaces :

$$\|B_1(u, v)\|_{X_{3,\infty}} \leq C \|u\|_{X_{3,\infty}} \|v\|_{X_{3,\infty}}, \quad (4.2.5a)$$

$$\|B_1(u, v)\|_{X_{3,\infty}} \leq C \|u\|_{X_{3,\infty}} \|v\|_{X_\infty}. \quad (4.2.5b)$$

The counterpart of (4.2.5a) for the operator B_3 is stated below. With slightly abusive notation we will denote in the same way, by $F(x, t)$ the kernel of the operators $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}$ and $e^{t\Delta} \operatorname{div}$. Distinguishing these two kernels is unimportant in this paper because both kernels satisfy properties (4.2.3) and (4.2.4), that are the only properties that we will need.

Lemma 4.2.1. *Let $3/2 < q < 3$. If $u \in X_{3,\infty}$ and $\theta \in Y_{q,\infty}$, then $B_3(u, \theta) \in Y_q$. Moreover, there exists a constant $C > 0$, depending only on q , such that, for all u and θ ,*

$$\|B_3(u, \theta)\|_{Y_{q,\infty}} \leq C \|u\|_{X_{3,\infty}} \|\theta\|_{Y_{q,\infty}}. \quad (4.2.5c)$$

Proof. Let us recall that the quasi-norm

$$f \mapsto \sup_{\lambda > 0} \lambda \left| \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : |f(x)| > \lambda \right\} \right|^{1/q}$$

is equivalent to a norm that makes $L^{q,\infty}$ a Banach space. Here $|A|$ denotes the Lebesgue measure of the set A . With slightly abusive notation we denote $\|f\|_{L^{q,\infty}}$ the right-hand side of the above expression, and treat it as a norm. Let us set $\sigma = \frac{3}{2}(1 - 1/q)$. Without loss of generality, we can assume that $\|u\|_{X_{3,\infty}} = 1$ and $\|\theta\|_{Y_{q,\infty}} = 1$. In the computations below, C will denote absolute constants. We start splitting

$$t^\sigma B_3(u, \theta) = -t^\sigma \left(\int_0^{t/2} + \int_{t/2}^t \right) F(t-s) * (u\theta)(s) ds \equiv \text{(I)} + \text{(II)}.$$

To treat (I) we only need to apply the standard convolution and Hölder inequality in Lorentz spaces, see [LR02]. Using (4.2.4) with $\beta = 3/2$ we obtain

$$\| \text{(I)} \|_{L^{q,\infty}} \leq C t^\sigma \int_0^{t/2} (t-s)^{-1} s^{-\frac{3}{2}(1-1/q)} ds \leq C.$$

The estimate for (II) is less immediate. Fix a threshold $\lambda > 0$ and let $\tau > 0$ to be chosen later. We now write

$$\begin{aligned} \text{(II)} &= -t^\sigma \int_{-\infty}^{t-\tau} F(t-s) * (u\theta 1_{[\frac{t}{2}, t]})(s) ds - t^\sigma \int_{t-\tau}^t F(t-s) * (u\theta 1_{[\frac{t}{2}, t]})(s) ds \\ &\equiv J_1(t) + J_2(t). \end{aligned}$$

We estimate $\|J_1(t)\|_\infty$ by applying (4.2.4) with $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{3} - \frac{1}{q}$. We obtain

$$\begin{aligned}\|J_1(t)\|_\infty &\leq C \int_{-\infty}^{t-\tau} (t-s)^{-1-3/(2q)} ds \\ &= C\tau^{-3/(2q)} = \lambda/2.\end{aligned}$$

The choice of $\tau > 0$ is made in order to ensure the validity of the last equality.

The two relations above imply that $|(\text{II})(x, t)| \leq \frac{\lambda}{2} + |J_2(x, t)|$. Hence, for $\frac{1}{r} = \frac{1}{3} + \frac{1}{q}$,

$$\begin{aligned}\left| \{x \in \mathbb{R}^3 : |(\text{II})(x, t)| > \lambda\} \right| &\leq \left| \{x \in \mathbb{R}^3 : |J_2(x)| > \lambda/2\} \right| \\ &\leq \left(\frac{2\|J_2(t)\|_{L^{r,\infty}}}{\lambda} \right)^r,\end{aligned}$$

where the second inequality follows from the definition of $\|\cdot\|_{L^{r,\infty}}$. On the other hand,

$$\begin{aligned}\|J_2(t)\|_{L^{r,\infty}} &\leq t^\sigma \int_{t-\tau}^t \|F(t-s)\|_1 \|(u\theta 1_{[\frac{t}{2}, t]})(s)\|_{L^{r,\infty}} ds \\ &\leq C\tau^{1/2} = C\lambda^{-q/3}.\end{aligned}$$

From the last two inequalities we deduce that

$$\lambda \left| \{x \in \mathbb{R}^3 : |(\text{II})(x, t)| > \lambda\} \right|^{1/q} \leq C,$$

where C is independent on λ . This gives estimate (4.2.5c). \square

Lemma 4.2.2. *Let $1 \leq p_0, p_1, p_2 \leq \infty$, and $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$. Then the following estimates hold, for some constant $C > 0$ depending only on the above parameters (in particular, C is independent on T) :*

$$\|B_1(u, v)\|_{X_{p_0}} \leq C\|u\|_{X_{p_1}}\|v\|_{X_{p_2}} \quad \left(\frac{1}{p_0} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \leq 1, \quad 0 < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} < \frac{1}{3} + \frac{1}{p_0}\right), \quad (4.2.5d)$$

$$\|B_2(u, \theta)\|_{X_{p_0}} \leq C\|u\|_{X_{p_1}}\|\theta\|_{Y_{q_1}} \quad \left(\frac{1}{p_0} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1, \quad \frac{2}{3} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} < 1 + \frac{1}{p_0}\right), \quad (4.2.5e)$$

$$\|B_3(u, \theta)\|_{Y_{q_0}} \leq C\|u\|_{X_{p_1}}\|\theta\|_{Y_{q_1}} \quad \left(\frac{1}{q_0} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} \leq 1, \quad \frac{2}{3} < \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} < \frac{1}{3} + \frac{1}{q_0}\right). \quad (4.2.5f)$$

Proof. The proof just consists in applying Young and Hölder inequality. For (4.2.5d), one uses (4.2.4) with $1 + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{p_0} + (\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2})$ (obvious modification of the choice of β for the two other estimates). By the definition of the X_p and the Y_q norms, one ends up with integrals of the form $\int_0^t (t-s)^\alpha s^\beta ds$, that are all finite because our restrictions on the parameters imply $\alpha, \beta > -1$. One concludes observing that these integrals are equal to $Ct^{\alpha+\beta+1}$, with $C > 0$ independent on t . Let us mention that estimate (4.2.5d) already appears in the Navier-Stokes literature, see [BCD11]. \square

Let us observe that in the last estimate of Lemma 4.2.2 the limit case $q_0 = q_1$ and $p_1 = 3$ is forbidden. Lemma 4.2.1, however, provides a substitute of this estimate for corresponding the weak norms. In the same way, the first estimate of Lemma 4.2.2 in the limit case $p_0 = p_1 = p_2 = 3$ is forbidden. But this estimate has a substitute for the corresponding weak norms, given by (4.2.5a).

We will make use of weak variants of estimates (4.2.5e), namely

$$\|B_2(u, \theta)\|_{X_{3,\infty}} \leq C\|u\|_{X_{3,\infty}}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}}, \quad \text{if } \frac{1}{3} < \frac{1}{q} < \frac{2}{3}, \quad (4.2.5g)$$

$$\|B_2(u, \theta)\|_{X_{3,\infty}} \leq C\|u\|_{X_{p_1}}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}}, \quad \text{if } \frac{2}{3} \leq \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q} \leq 1, \quad (4.2.5h)$$

$$\|B_3(u, \theta)\|_{Y_{q,\infty}} \leq C\|u\|_{X_p}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}}, \quad \text{if } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1, \quad \frac{2}{3} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{3} + \frac{1}{q}. \quad (4.2.5i)$$

The proof is essentially the same as in Lemma 4.2.2. Notice that the case $\frac{1}{q} = \frac{2}{3}$ in the former estimate and the case $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ in the latter have to be excluded.

4.2.2 The proof of Theorem 4.1.3.

We are now in the position of establishing Theorem 4.1.3.

Proof of Theorem 4.1.3. Consider a solution (u, θ) satisfying the conditions of Theorem 4.1.3. We have of course $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$. By the equation satisfied by θ in (4.1.4) and Lemma 4.2.1 we have $\|e^{t\Delta}\theta_0\|_{Y_{q,\infty}} \leq \|\theta\|_{Y_{q,\infty}} + C\|u\|_{X_{3,\infty}}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}}$. Recalling the observation right after (4.1.9), we see that $\theta_0 \in B_{q,\infty,\infty}^{-3(1-1/q)}$.

Now let $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ be another solution in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q,\infty}$ arising from the same data. Let $w = u - \tilde{u}$ and $\phi = \theta - \tilde{\theta}$. Then,

$$\begin{aligned} w &= B_1(w, u) + B_1(\tilde{u}, w) + B_2(w, \theta) + B_2(\tilde{u}, \phi), \\ \phi &= B_3(u, \phi) + B_3(w, \tilde{\theta}). \end{aligned}$$

Adding/subtracting to u and \tilde{u} the linear quantity $v_0 = e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3]$, we find by estimates (4.2.5a)-(4.2.5b),

$$\|B_1(w, u) + B_1(\tilde{u}, w)\|_{X_{3,\infty}} \leq C\|w\|_{X_{3,\infty}} \left(\|u - v_0\|_{X_{3,\infty}} + 2\|v_0\|_{X_\infty} + \|\tilde{u} - v_0\|_{X_{3,\infty}} \right). \quad (4.2.6a)$$

Recall that, by our assumption, $\frac{1}{3} < \frac{1}{q} < \frac{2}{3}$. Hence, we can apply (4.2.5g)-(4.2.5h) choosing p_1 in a such way that $p_1 > 3$. Then we get :

$$\|B_2(w, \theta) + B_2(\tilde{u}, \phi)\|_{X_{3,\infty}} \leq C\|w\|_{X_{3,\infty}}\|\theta\|_{Y_{q,\infty}} + C\|\phi\|_{Y_{q,\infty}} \left(\|\tilde{u} - v_0\|_{X_{3,\infty}} + \|v_0\|_{X_{p_1}} \right). \quad (4.2.6b)$$

Combining the two last estimates we get

$$\begin{aligned} \|w\|_{X_{3,\infty}} &\leq C\|w\|_{X_{3,\infty}} \left(\|u - v_0\|_{X_{3,\infty}} + 2\|v_0\|_{X_\infty} + \|\tilde{u} - v_0\|_{X_{3,\infty}} + \|\theta\|_{Y_{q,\infty}} \right) \\ &\quad + C\|\phi\|_{Y_{q,\infty}} \left(\|\tilde{u} - v_0\|_{X_{3,\infty}} + \|v_0\|_{X_{p_1}} \right). \end{aligned} \quad (4.2.7a)$$

We estimate $\|\phi\|_{Y_{q,\infty}}$ by applying Lemma 4.2.1 and estimate (4.2.5i) with $3/2 < q < 3$ and $p = q^*$,

$$\begin{aligned} \|\phi\|_{Y_{q,\infty}} &= \|B_3(u - v_0 + v_0, \phi)\|_{Y_{q,\infty}} + \|B_3(w, \tilde{\theta})\|_{Y_{q,\infty}} \\ &\leq C\|\phi\|_{Y_{q,\infty}} \left(\|u - v_0\|_{X_{3,\infty}} + \|v_0\|_{X_{q^*}} \right) + C\|w\|_{X_{3,\infty}}\|\tilde{\theta}\|_{Y_{q,\infty}} \end{aligned} \quad (4.2.7b)$$

where $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{q})$. This choice of q^* ensures that (4.2.5i) holds and $3 < q^* < \infty$. In (4.2.7), the constants $C > 0$ depends only on q .

On the other hand all the norms in (4.2.7a) depend on T . We claim that

$$\|v_0\|_{X_\infty} \rightarrow 0, \quad \text{as } T \rightarrow 0.$$

This can be seen as follows : first of all by our assumption $(u, \theta) \in X_3 \times Y_{q,\infty} \subset X_{3,\infty} \times Y_{q,\infty}$, and so $B_3(u, \theta) \in Y_{q,\infty}$ by Lemma 4.2.1. In particular, because of the definition of $Y_{q,\infty}$ (see (4.1.10)), $\|e^{t\Delta}\theta_0\|_{Y_{q,\infty}} \leq \|\theta(t)\|_{Y_{q,\infty}} + \|B_3(u, \theta)\|_{Y_{q,\infty}} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. Leray's projector \mathbb{P} being bounded on $L^{q,\infty}$ (see Appendix) we deduce $\|e^{t\Delta}\mathbb{P}\theta_0 e_3\|_{Y_{q,\infty}} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. Applying the semigroup property $e^{t\Delta} = e^{t\Delta/2}e^{t\Delta/2}$ and using the boundedness properties of $e^{t\Delta/2}$ in Lorentz spaces, we deduce $\|te^{t\Delta}\mathbb{P}\theta_0 e_3\|_{X_\infty} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. Moreover, $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, hence for any $\epsilon > 0$, we can find $u_{0,\epsilon}$ in the Schwartz class, such that $\|u_0 - u_{0,\epsilon}\|_3 < \epsilon$, and $\|u_{0,\epsilon}\|_3 \leq \|u_0\|_3$. Writing

$$v_0 = e^{t\Delta}[(u_0 - u_{0,\epsilon})] + e^{t\Delta}u_{0,\epsilon} + te^{t\Delta}\mathbb{P}\theta_0 e_3$$

we deduce from Young inequality that $\|v_0\|_{X_\infty} \leq 2\epsilon$ for $T > 0$ small enough and our claim follows.

With a very similar proof (using $q < 3 < q^*$ and $p_1 > 3$) we see that

$$\|v_0\|_{X_{q^*}} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \|v_0\|_{X_{p_1}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T \rightarrow 0.$$

Next we claim that

$$\|u - v_0\|_{X_{3,\infty}} + \|\tilde{u} - v_0\|_{X_{3,\infty}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T \rightarrow 0. \quad (4.2.8)$$

Indeed, we use the inequality

$$\|u - v_0\|_{X_{3,\infty}} + \|\tilde{u} - v_0\|_{X_{3,\infty}} \leq \|u - e^{t\Delta}u_0\|_{X_3} + \|\tilde{u} - e^{t\Delta}u_0\|_{X_3} + 2\|te^{t\Delta}\mathbb{P}\theta_0 e_3\|_{X_{3,\infty}}.$$

Next, we use the fact that, as $t \rightarrow 0$, $u(t) \rightarrow u_0$ and $\tilde{u}(t) \rightarrow u_0$ in L^3 (because of the continuity of the two solutions u and \tilde{u} from $[0, T]$ to $L^3(\mathbb{R}^3)$), and also that $e^{t\Delta}u_0 \rightarrow u_0$ in $L^3(\mathbb{R}^3)$. Next we observe that $\|te^{t\Delta}\mathbb{P}\theta_0 e_3\|_{X_{3,\infty}} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. (The last fact is proved applying the semigroup properties of the heat kernel and the fact that $\|e^{t\Delta}\mathbb{P}\theta_0 e_3\|_{Y_{q,\infty}} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$). This implies our claim (4.2.8).

On the other hand, our assumptions on θ and $\tilde{\theta}$ ensure that,

$$\|\theta\|_{Y_{q,\infty,T'}} \rightarrow 0 \quad \text{and} \quad \|\tilde{\theta}\|_{Y_{q,\infty,T'}} \rightarrow 0, \quad \text{as } T' \rightarrow 0.$$

Summarizing, we can now deduce from estimates (4.2.6) that there exists $\delta > 0$ (depending only on the data (u_0, θ_0) and on q), such that, if $0 < T < \delta$, then $\|w\|_{X_{3,\infty}} < \|\phi\|_{Y_{q,\infty}}$ and $\|\phi\|_{Y_{q,\infty}} < \|w\|_{X_{3,\infty}}$. This implies $w = \phi = 0$, and so $u(t) = \tilde{u}(t)$, $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ for all $t \in [0, T]$.

When $T \geq \delta$, the above argument implies only that $u(t) = \tilde{u}(t)$ and $\theta(t) = \tilde{\theta}(t)$ for all $t \in [0, \delta]$. But, if $\tau > 0$ is the supremum of $t \in [0, T]$ such that (u, θ) and $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ agree on $[0, t]$, then $u(\tau) = \tilde{u}(\tau)$ and $\theta(\tau) = \tilde{\theta}(\tau)$ by the time-continuity assumption on the solutions. Then $\tau = T$, as otherwise considering the new data at the time τ , we could apply the above uniqueness result in some interval $[\tau, \tau + \delta')$. This is indeed possible, since it is obvious by Lemma 4.2.1 that the solutions remain in the space $X_{3,\infty} \times Y_{q,\infty}$ after the time translation. We thus would contradict, the definition of τ . The assertion of Theorem 4.1.3 follows. \square

Remark 4.2.3. The above proof shows that the uniqueness for mild solutions of the Boussinesq system holds, in fact, in a class that is larger than $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times Y_{q,\infty}$. Indeed, let D be the closure in $L^{3,\infty}$ of $\{f \in L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3) : \Delta f \in L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)\}$. The space D was characterized by Lunardi [Lun12] to be the maximal subspace in $L^{3,\infty}$ where the Stokes semigroup is C_0 -continuous, i.e., D is the space of all the $L^{3,\infty}$ functions f such that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \|e^{\epsilon\Delta}f - f\|_{L^{3,\infty}} = 0. \quad (4.2.9)$$

See also [OT18] for a direct proof of this fact. If $u_0 \in L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ is divergence free and sa-

tisfy (4.2.9) with u_0 instead of f , then our proof goes through. We thus obtain the uniqueness in the larger class $C([0, T], D) \times Y_{q, \infty}$, with $3/2 < q < 3$. Notice that D is strictly larger than $L^3(\mathbb{R}^3)$, and it is larger also than the closure of smooth compactly supported functions in $L^{3, \infty}$ as, for example, smooth functions decaying like $\sim |x|^{-1}$ at infinity do belong to D .

4.2.3 Existence theorems.

We start by establishing a quite general local existence result.

Theorem 4.2.4. *Let $3/2 < q < 3$ and θ_0 be in the closure of the Schwartz class in $B_{q, \infty}^{-3(1-1/q)}(\mathbb{R}^3)$. Let $p > 3$ such that $\frac{2}{3} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ and u_0 a divergence-free vector field in the closure of the the Schwartz class in the inhomogeneous Besov space $B_{p, \infty}^{-(1-3/p)}(\mathbb{R}^3)$.*

- (i) *Then there exists $T > 0$ and a solution (u, θ) of (4.1.2), such that $(u, \theta) \in X_p \times Y_q$ and $\|u\|_{X_p} \rightarrow 0$, $\|\theta\|_{Y_q} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. Moreover there exists $R > 0$, depending only on p and q , such that (u, θ) is the only solution satisfying $\|u\|_{X_p} < R$ and $\|\theta\|_{Y_q} < R$.*
- (ii) *(Regularity) The above solution belongs in fact to $(X_p \cap X_\infty) \times (Y_q \cap Y_\infty)$. Moreover, $\|u\|_{X_\infty} \rightarrow 0$ and $\|\theta\|_{Y_\infty} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$.*
- (iii)
 - Under the more stringent condition $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, we have $u \in X \subset X_3 \cap X_\infty$.
 - Under the more stringent condition $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, we have $\theta \in Y \subset Y_1 \cap Y_\infty$.
 - If $(u_0, \theta_0) \in L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3)$, then $(u, \theta) \in C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3)) \times C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$.

Proof of Theorem 4.2.4. To prove the assertion (i), let us write the unknown of the integral Boussinesq equation (4.1.4) as $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ \theta \end{pmatrix}$. Let also

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3] \\ e^{t\Delta}\theta_0 \end{pmatrix}, \quad (4.2.10)$$

and

$$\mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} B_1(u, \tilde{u}) + B_2(u, \tilde{\theta}) \\ B_3(u, \tilde{\theta}) \end{pmatrix}.$$

Then we see that an equivalent way of writing (4.1.4) is

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \quad (4.2.11)$$

complemented with $\operatorname{div} u_0 = 0$. We will apply the standard fixed point Lemma (see [Mey96]) to this equation in the Banach space $E = X_p \times Y_q$. To achieve this, we only need to prove the existence of a constant $C_0 > 0$ such that the following estimate holds for all \mathbf{v} and $\tilde{\mathbf{v}}$ in E :

$$\|\mathbf{B}(\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}})\|_E \leq C_0 \|\mathbf{v}\|_E \|\tilde{\mathbf{v}}\|_E, \quad (4.2.12)$$

and such that

$$\|\mathbf{v}_0\|_E < 1/(4C_0). \quad (4.2.13)$$

If that is the case, then the fixed point lemma provides the existence of a solution \mathbf{v} to the abstract equation (4.2.11), such that

$$\|\mathbf{v}\|_E \leq 2\|\mathbf{v}_0\|_E < \frac{1}{2C_0}. \quad (4.2.14)$$

The uniqueness of this solution is a priori ensured only under the condition $\|\mathbf{v}\|_E < \frac{1}{2C_0}$.

In fact, we already established estimate (4.2.12) : it is an immediate consequence of Lemma 4.2.2, applied with $p_0 = p_1 = p_2 = p$ and $q_0 = q_1 = q$. The constant C_0 can be taken independent

on T . On the other hand, by the characterization of the non-homogeneous Besov space (4.1.9), the condition $(u_0, \theta_0) \in B_{p,\infty}^{-(1-3/p)} \times B_{q,\infty}^{-3(1-1/q)}(\mathbb{R}^3)$ precisely means $\mathbf{a} \in E$. But in fact the data belong to closure of the Schwartz class in their respective spaces, thus by the usual approximation argument we have $\|\mathbf{v}_0\|_E \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. Indeed, if $\theta_0 \in B_{q,\infty}^{-3(1-1/q)}(\mathbb{R}^3)$, then for any positive ϵ , there exists a function $\varphi \in \mathcal{S}$ such that $\|\theta_0 - \varphi\|_{B_{q,\infty}^{-3(1-1/q)}(\mathbb{R}^3)} \leq \epsilon$, i.e.

$$\sup_{0 < t < T} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|e^{t\Delta}(\theta_0 - \varphi)\|_{L^q} \leq \epsilon.$$

Then, by the property of Heat equation, we have that

$$\begin{aligned} t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|e^{t\Delta}\theta_0\|_{L^q} &\leq t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|e^{t\Delta}(\theta_0 - \varphi)\|_{L^q} + t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|e^{t\Delta}\varphi\|_{L^q} \\ &\leq \epsilon + t^{\frac{3}{2}(1-\frac{1}{q})} \|\varphi\|_{L^q} \rightarrow 0, \quad \text{as } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

So we have $\|e^{t\Delta}\theta_0\|_{Y_q} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. By the same argument, we can prove that $\|e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3]\|_{Y_q} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$. In conclusion, (4.2.13) holds true if $T > 0$ is small enough. Recalling (4.2.14), we get the first item of Theorem 4.2.4, with $R = 1/(2C_0)$.

To prove the assertion (ii), let us apply the first two estimates of Lemma 4.2.2 with $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q$ and $\frac{2}{p} - \frac{1}{3} < \frac{1}{p_0} < \frac{1}{p}$. We obtain in this way $B_1(u, u) \in X_{p_0}$ and $B_2(u, \theta) \in X_{p_0}$. On the other hand, we know that $e^{t\Delta}v_0 \in X_p$, but as $p_0 > p$ we have also $e^{t\Delta}v_0 \in X_{p_0}$, by the usual L^p - L^{p_0} heat estimates. Summing these three terms we find $u \in X_{p_0}$. Observe that if $p > 6$, then we can directly take $p_0 = \infty$, otherwise we proceed by bootstrapping. After finitely many iterations we find $u \in X_\infty$.

Let us now apply the third estimate of Lemma 4.2.2 with $q_1 = q$, and $p_1 = p$, and $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{3} < \frac{1}{q_0} < \frac{1}{q}$. Then $B_3(u, \theta) \in Y_{q_0}$. Moreover, since $q_0 > q$, $e^{t\Delta}\theta_0 \in Y_{q_0}$ by the usual $L^q - L^{q_0}$ heat kernel estimates. This implies $\theta \in Y_{q_0}$. If $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{3} < 0$ then we can take directly $q_0 = \infty$. Otherwise we proceed by bootstrapping and after finitely many steps we find $\theta \in Y_\infty$.

Recalling that $\|u\|_{X_p} \rightarrow 0$ and $\|\theta\|_{Y_q} \rightarrow 0$, as $T \rightarrow 0$ the above applications of Lemma 4.2.2 show that $\|u\|_{X_{p_0}}$ and $\|\theta\|_{Y_{q_0}}$ also go to zero with T . So at the end of the above bootstrapping procedures we find $\|u\|_{X_\infty} \rightarrow 0$ and $\|\theta\|_{Y_\infty} \rightarrow 0$, as $T \rightarrow 0$.

Let us now prove the assertion (iii). If $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, then for all $3 < p \leq \infty$ we do have $u_0 \in B_{p,\infty}^{-(1-3/p)}(\mathbb{R}^3)$. We can apply the first two estimates of Lemma 4.2.2 with $p_0 = 3$, $p_1 = p_2 = p$, $q_1 = q$, provided $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{p} < \frac{2}{3}$ and $\frac{2}{3} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{4}{3}$. This is indeed possible choosing $p > 3$ close enough to 3. This shows that both $B_1(u, u)$ and $B_2(u, \theta)$ belong to X_3 . Moreover, $e^{t\Delta}u_0 \in X_3$ by the usual heat kernel estimates. We conclude that if $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ then the solutions constructed before belongs to X_3 .

If we now assume $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$, then $\theta_0 \in B_{q,\infty}^{-3(1-1/q)}(\mathbb{R}^3)$ for all $1 < q \leq \infty$. Hence, by what we already proved, we have $(u, \theta) \in (X_3 \cap X_\infty) \times (Y_q \cap Y_\infty)$, for all $q > 3/2$. In particular, $(u, \theta) \in X_6 \times Y_{12/7}$. Let us apply the last estimate of Lemma 4.2.2 with $p_1 = 6$, $q_1 = 12/7$ and $q_0 = 4/3$: then we get $B_3(u, \theta) \in Y_{4/3}$. But $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$ implies also $e^{t\Delta}\theta_0 \in Y_1 \cap Y_\infty \subset Y_{4/3}$. Therefore, $(u, \theta) \in X_4 \times Y_{4/3}$. We now apply the last estimate of Lemma 4.2.2 with $p_1 = 4$, $q_1 = 4/3$ and $q_0 = 1$: we get in this way $B_3(u, \theta) \in Y_1$. As we already know that $e^{t\Delta}\theta_0 \in Y_1$, we conclude that $\theta \in Y_1$.

Assume now that we have both conditions $u_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ and $\theta_0 \in L^1(\mathbb{R}^3)$. According to the definition of X and Y , it only remain to prove that the maps $t \mapsto u(t)$ and $t \mapsto \theta(t)$ are continuous from $[0, T]$ respectively to $L^3(\mathbb{R}^3)$ and $L^1(\mathbb{R}^3)$. This is quite standard. Let us sketch the proof for the time continuity of temperature. We have of course $e^{t\Delta}\theta_0 \in C([0, T], L^1(\mathbb{R}^3))$. Moreover, recalling that $\|u\|_{X_\infty} \rightarrow 0$ as $T \rightarrow 0$, and applying the third inequality of Lemma 4.2.2 with $q_0 = q_1 = 1$ and $p_1 = \infty$ we see that $\lim_{t \rightarrow 0} \|B_3(u, \theta)(t)\|_1 \rightarrow 0$. Hence $t \mapsto \theta(t)$ is continuous at $t = 0$ in $L^1(\mathbb{R}^3)$. If $0 < t \leq T$, we consider the expression $\|B_3(u, \theta)(t+h) - B_3(u, \theta)(t)\|_1$.

This can be bounded by the sum of $\|u\|_{X^\infty}\|\theta\|_{Y_1}\int_0^t\|F(t+h-s)-F(t-s)\|_1s^{-1/2}ds$ and $\|u\|_{X^\infty}\|\theta\|_{Y_1}\int_t^{t+h}\|F(t+h-s)\|_1s^{-1/2}ds$. Both terms are easily proved to converge to 0 as $h \rightarrow 0$, using properties (4.2.3)-(4.2.4) of the kernel F . This establishes the continuity of θ from $[0, T]$ to $L^1(\mathbb{R}^3)$. The continuity of u from $[0, T]$ to $L^3(\mathbb{R}^3)$ is treated in the same way. \square

Proof to Proposition 4.1.1. This is now immediate. If u_0 is divergence-free and $(u_0, \theta_0) \in L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3)$, then the existence of a local-in time solution $(u, \theta) \in X \times Y$ is already established in Theorem 4.2.4. If $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ is another solution in $X \times Y$ starting from the same data, then there is $\delta > 0$ such that $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$ and (u, θ) agree on $[0, \delta]$. Indeed, using the definition of X and Y we find by interpolation $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{1}{2}(1-3/p)}\|u(t)\|_p = 0$ for all $p > 3$ and $\lim_{t \rightarrow 0} t^{\frac{3}{2}(1-3/q)}\|\theta(t)\|_q = 0$ for all $q > 1$. Moreover, the same property holds for $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$. Then, multiplying the two solutions by the indicator function of the interval $[0, \delta]$, we see that $\|(u, \theta)1_{[0, \delta]}\|_E < R$ and $\|(\tilde{u}, \tilde{\theta})1_{[0, \delta]}\|_E < R$. The first statement of Theorem 4.2.4 then implies that $(u, \theta)1_{[0, \delta]}$ and $(\tilde{u}, \tilde{\theta})1_{[0, \delta]}$ agree. It is now obvious that the supremum on $[0, T]$ of the times t , such that the two solutions agree on $[0, t]$, must be equal to T . In conclusion, there is only one solution in $X \times Y$ arising from (u_0, θ_0) . \square

Proposition 4.1.1 allows us to define a semigroup $(R, S)(t): L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3)$ such that $(R, S)(t)(u_0, \theta_0)$ is the unique solution in $X \times Y$ of the Boussinesq system (4.1.2).

Remark 4.2.5. The present useful remark is inspired from Ben Artzi's paper [BA94]. In Proposition 4.1.1, the existence time $T > 0$ a priori does not only depend on $\|u_0\|_3$ and $\|\theta_0\|_1$, but also on u_0 and θ_0 themselves. However, if we restrict to a class of data $(u_0, \theta_0) \in H \times K$, where $H \times K$ is precompact in $L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3)$, then the existence time T depends only on $H \times K$. Indeed, an elementary property of the heat equation is that, as $t \rightarrow 0$,

$$\sup_{\theta_0 \in K} \left(t^{\frac{3}{2}(1-1/q)} \|e^{t\Delta}\theta_0\|_q \right) \rightarrow 0, \quad (4.2.15)$$

for $1 < q \leq \infty$. To see this, fix $\epsilon > 0$: the family of open balls in $L^1(\mathbb{R}^3)$ of radius ϵ and centered in functions $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ cover the whole $L^1(\mathbb{R}^3)$. Finitely many of such balls cover K . Therefore, we find finitely many smooth and compactly supported functions such that, for any $\theta_0 \in K$, there is at least one of such functions ϕ such that $\|u_0 - \phi\|_1 < \epsilon$. But $t^{\frac{3}{2}(1-1/q)}\|e^{t\Delta}\theta_0\|_q \leq \epsilon + t^{\frac{3}{2}(1-1/q)}\|e^{t\Delta}\phi\|_q$. Hence, there exists $t_0 > 0$ depending on $\epsilon > 0$ and K , but not on θ_0 , such that for all $0 \leq t < t_0$ the above expression is less than 2ϵ . This yields (4.2.15).

In the same way, we obtain, as $t \rightarrow 0$,

$$\sup_{u_0 \in H, \theta_0 \in K} \left(t^{\frac{1}{2}(1-3/p)} \|e^{t\Delta}[u_0 + t\mathbb{P}\theta_0 e_3]\|_p \right) \rightarrow 0,$$

for all $1 < p \leq \infty$. Now fix $3/2 < q < 3$ and $p > 3$, such that $\frac{2}{3} < \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Hence, there exists $\eta = \eta(H, K) > 0$ such that, multiplying \mathbf{v}_0 by the indicator function of the time interval $[0, \eta]$, we get, for all $(u_0, \theta_0) \in H \times K$,

$$\|\mathbf{v}_0 1_{[0, \eta]}\|_E < 1/(4C_0).$$

The notations here are the same as in (4.2.10) and (4.2.13), and $E = X_p \times Y_q$. We deduce from Theorem 4.2.4 that the solutions $(R, S)(t)(u_0, \theta_0)$, when (u_0, θ_0) vary in $H \times K$, are all defined

at least on the time interval $[0, \eta]$. Moreover, owing to (4.2.14),

$$\begin{aligned} \sup_{(u_0, \theta_0) \in H \times K} t^{\frac{1}{2}(1-3/p)} \|R(t)(u_0, \theta_0)\|_p &\rightarrow 0, \\ \sup_{(u_0, \theta_0) \in H \times K} t^{\frac{3}{2}(1-1/q)} \|S(t)(u_0, \theta_0)\|_q &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

4.2.4 The end of the proof of Theorem 4.1.2

Proof of Theorem 4.1.2. The proof relies on Proposition 4.1.1, on the uniqueness Theorem 4.1.3 and on the adaptation of ideas introduced by Ben Artzi [BA94], already revisited in (4.2.16), and H. Brezis [Bre94] in the context of the two-dimensional vorticity equation.

Without loss of generality, by interpolation, we can assume $3/2 < q < 3$. As in Theorem 4.1.3, it is sufficient to prove that, given two solutions (u, θ) and $(\tilde{u}, \tilde{\theta})$, these agree on some small time interval $[0, \delta]$, for some $\delta > 0$. Moreover, in the uniqueness class for the temperature, we can replace the weak space $L^{q, \infty}(\mathbb{R}^3)$ with the smaller space $L^q(\mathbb{R}^3)$. Indeed, as $\theta, \tilde{\theta}$ are assumed to belong to $C([0, \delta], L^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^\infty((0, \delta), L^{q, \infty}(\mathbb{R}^3))$, by the reiteration theorem of interpolation, we have that $\theta, \tilde{\theta} \in C([0, \delta], L^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^\infty((0, \delta), L^r(\mathbb{R}^3))$ for all $1 < r < q$. So, we reduced the proof of Theorem 4.1.2 to prove that, for some $\delta > 0$ and some $3/2 < q < 3$, the uniqueness hold in the class $C([0, \delta], L^3(\mathbb{R}^3)) \times (C([0, \delta], L^1(\mathbb{R}^3)) \cap L_{\text{loc}}^\infty((0, \delta), L^q(\mathbb{R}^3)))$.

Let

$$(R, S)(t): L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3) \rightarrow L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3)$$

be the semigroup of the solution to (4.1.2) constructed in Proposition 4.1.1. The proof will consist in showing that, if (u, θ) is a solution satisfying the conditions in Theorem 4.1.2, then $u(t) = R(t)(u_0, \theta_0)$ and $\theta(t) = S(t)(u_0, \theta_0)$.

Let us fix $0 < s < \delta$, where $0 < \delta < T/2$. Recalling that θ is assumed to be locally L^∞ on $(0, T)$ with values in L^q , we see that, denoting as usual $\sigma = \frac{3}{2}(1 - 1/q)$,

$$\sup_{t \in [0, \delta]} t^\sigma \|\theta(t + s)\|_{L^q} < \infty, \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|\theta(t + s)\|_{L^q} = 0. \quad (4.2.17a)$$

Here the use of the usual supremum instead of the essential supremum is not abusive¹. Similarly, the zero-limit can also be understood in the usual sense.

On the other hand, applying Proposition 4.1.1 with the new initial data $(u(s), \theta(s))$, that belongs to $L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3)$, we get

$$\sup_{t \in [0, \delta]} t^\sigma \|S(t)(u(s), \theta(s))\|_{L^q} < \infty, \quad \text{and} \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|S(t)(u(s), \theta(s))\|_{L^q} = 0. \quad (4.2.17b)$$

Of course, (4.2.17), remains true if we use the weak norm $L^{q, \infty}$ instead of the usual L^q -norm. This allows us to apply the uniqueness result of Theorem 4.1.3 with the initial data $(u(s), \theta(s))$ and in the time interval $[s, s + \delta]$: hence,

$$u(t + s) = R(t)(u(s), \theta(s)), \quad \text{and} \quad \theta(t + s) = S(t)(u(s), \theta(s)),$$

for all $0 < s < \delta$ and all $t \in [0, \delta]$.

Let $H = u((0, T])$ and $K = \theta((0, T])$. Notice that $H \times K$ is precompact in $L^3 \times L^1(\mathbb{R}^3)$,

¹Indeed, as $\theta \in L^\infty(0, \delta), L^\infty(\mathbb{R}^3)$, for all $0 < a < b < \delta$, there exists $C_{a,b} > 0$ such that $\text{ess sup}_{t \in [a,b]} \|\theta(t)\|_{L^q} \leq C_{a,b}$. But θ also belongs to $C([0, \delta], L^1(\mathbb{R}^3))$, so we claim that θ is well defined for all $t \in [0, \delta]$ and $\sup_{t \in [a,b]} \|\theta(t)\|_{L^q} \leq C_{a,b}$. This can be seen as follows: fix an arbitrary $t^* \in [a, b]$. As $C_{a,b}$ is an essential upper bound for $\|\theta(t)\|_{L^q}$ in $[a, b]$, we can find a sequence $t_n \rightarrow t^*$ such that $\|\theta(t_n)\|_{L^q} \leq C_{a,b}$. But $\theta(t_n) \rightarrow \theta(t^*)$ in L^1 , so that, upon extracting, $\theta(t_n) \rightarrow \theta(t^*)$ a.e. in \mathbb{R}^3 . By Fatou's Lemma, $\|\theta(t^*)\|_{L^q}^q \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int |\theta(t_n, x)|^q dx \leq C_{a,b}^q$. So any essential upper bound for $\|\theta(t)\|_{L^q}$ turns out to be a usual upper bound.

because (u, θ) is continuous from $[0, T]$ with values in $L^3(\mathbb{R}^3) \times L^1(\mathbb{R}^3)$. But then

$$\begin{aligned} \sup_{s \in (0, \delta)} t^\sigma \|\theta(t+s)\|_{L^q} &= \sup_{s \in (0, \delta)} t^\sigma \|S(t)(u(s), \theta(s))\|_{L^q} \\ &\leq \sup_{(u_0, \theta_0) \in H \times K} t^\sigma \|S(t)(u_0, \theta_0)\|_q \rightarrow 0 \quad \text{as } t \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.2.18)$$

Indeed, we applied here Remark 4.2.5, and more specifically (4.2.16).

From (4.2.18) we get $\lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|\theta(t)\|_{L^q} = 0$. So, in particular, $\lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} = 0$. More precisely, we have

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|\theta(t)\|_{L^{q, \infty}} = 0 \quad \text{and} \quad \theta \in Y_{q, \infty},$$

owing to the assumption $\theta \in L_{\text{loc}}^\infty((0, T), L^{q, \infty}(\mathbb{R}^3))$.

On the other hand, we also know by Theorem 4.2.4 that

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\sigma \|S(t)\theta_0\|_{L^q} = 0 \quad \text{and} \quad S(t)\theta_0 \in Y_q.$$

Moreover, both u and $R(t)u_0$ are in $C([0, T], L^3(\mathbb{R}^3))$. This is more than needed to apply the uniqueness Theorem 4.1.3. Hence, $u(t) = R(t)u_0$ and $\theta(t) = S(t)\theta_0$. \square

Troisième partie

3D Falling films

On the dynamics of 3D electrified falling films

In collaboration with Rafael Granero-Belinchón.

Abstract. In this article, we consider a non-local variant of the Kuramoto-Sivashinsky equation in three dimensions (2D interface). Besides showing the global wellposedness of this equation we also obtain some qualitative properties of the solutions. In particular, we prove that the solutions become analytic in the spatial variable for positive time, the existence of a compact global attractor and an upper bound on the number of spatial oscillations of the solutions. We observe that such a bound is particularly interesting due to the chaotic behavior of the solutions.

5.1 Introduction

The present work is concerned with the full 3D dynamics of a thin fluid film falling along with a flat inclined plate. Besides gravitational effects, we consider the action of an electric field acting normal to the plate. In particular, for the case where the fluid lies on top of the plate (overlying films), the following equation was derived by Tomlin, Papageorgiou & Pavliotis [TPP17] :

$$\eta_t + \eta\eta_x + (\beta - 1)\eta_{xx} - \eta_{yy} - \gamma\Lambda^3\eta + \Delta^2\eta = 0 \quad (5.1.1)$$

where $\beta > 0$ is the Reynolds number, $0 \leq \gamma \leq 2$ measures the electric field strength and Λ is a non-local operator corresponding to the electric field effect given on the Fourier variables as

$$\widehat{\Lambda u} = |\xi| \hat{u}(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{0.5} \hat{u}(\xi).$$

We observe that the term corresponding to the electric field, $-\gamma\Lambda^3(\eta)$, always has a destabilizing effect, while the term $(\beta - 1)\eta_{xx}$ can be stabilizing or destabilizing depending on the value of the Reynolds number. Namely, for subcritical Reynolds numbers $0 < \beta < 1$, $(\beta - 1)\eta_{xx}$ is a stabilizing term, while for supercritical Reynolds numbers $1 < \beta$, it has a destabilizing effect.

Since falling films have received much attention from many authors, a wide variety of results about their nonlinear stability can be found. In particular, the 2D case (1D interface) was first studied by González & Castellanos [GC96]. These authors identified a critical electric field strength for sub-critical Reynolds number flows above which instability was found. Later on, Tseluiko & Papageorgiou also considered the 2D case (1D interface). In particular, Tseluiko & Papageorgiou performed a numerical study of the 1D analog of (5.1.1) and found attractors for the dynamics for certain values of the physical parameters [TP06a]. The same authors provided analytical bounds on the energy of the solutions and the dimension of the attractor [TP06b] (see also [TP10] for the case of vertical film flow). Compared with the case of 1D interface, equation (5.1.1) generalizes previous works by taking transverse dynamics into consideration.

Equation (5.1.1) is similar to the well-known Kuramoto-Sivashinsky equation in one dimension,

$$\eta_t + \eta\eta_x = -\eta_{xx} - \eta_{xxxx} \quad (\text{KS})$$

which is a model appearing in several applications. For instance, LaQuey, Mahajan, Rutherford & Tang [LMRT75] obtained (KS) as a model of collisional trapped-ion mode in tokamak geometry (see also Cohen, Krommes, Tang & Rosenbluth [CKTR76]), Kuramoto & Tsuzuki [KT76] considered the possible instabilities of a two components reaction-diffusion system and also recovered (KS). Furthermore, Sivashinsky [Siv77] (see also the companion paper by Michelson & Sivashinsky [MS77]) derived (KS) as a model of the evolution of a disturbed plane flame front. Later on, Sivashinsky & Michelson [SM80] linked (KS) to the evolution of a film of viscous liquid flowing down a vertical plane. Several equations sharing some similarities were obtained by Topper & Kawahara [TK78], Lee and Chen [LC82], Coward & Hall [CH93], Frenkel & Indreshkumar [FI99] and by James & Wilczek [JW18] when considering falling fluid films, plasma turbulence and cellular suspensions.

Equation (KS) has rich dynamics. Indeed, applying the Fourier transformation to the linear part of (KS),

$$\partial_t \hat{\eta}(\xi) = (\xi^2 - \xi^4) \hat{\eta}(\xi),$$

it results in the stability of high frequencies ($|\xi| > 1$) and instability of low frequencies ($0 < |\xi| < 1$). Specifically, the term η_{xx} leads to instability at large scales; the dissipative term η_{xxxx} is responsible for damping at small scales. Then we see that for general initial data, the linear problem is unstable and leads to an exponential growth of certain frequencies. When the nonlinear term $\eta\eta_x$ is added, stabilization occurs as this term transfers energy from the long

wavelengths to the short wavelengths and balances the exponential growth due to the linear parts. This interaction between the unstable linear parts and a nonlinearity who carries energy between frequencies makes the solution of (KS) to develop chaotic dynamics for certain values of the parameters.

This nonlinear stabilization of the Kuramoto-Sivashinsky equation with L -periodic boundary conditions,

$$\eta(x + L, t) = \eta(x, t), \text{ for all } x \text{ and } t,$$

was considered mathematically by Nicolaenko, Scheurer & Temam in [NST85] under the hypothesis that the initial data has odd symmetry : $\eta_0(x) = -\eta_0(-x)$. After that, Ilyashenko [Il'92], Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe [CEES93b] and Goodman [Goo94] found new bounds for the L^2 -norm of the solution of the KS equation without oddness condition for the initial data. The fact that the solutions are uniformly bounded leads us to the question of the optimal bound for the radius of the absorbing set in L^2 for arbitrarily large periods L . In that regards, the known bounds are

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^L u^2 dx \right)^{0.5} \leq O(L^p)$$

where the original $p = 5/2$ [NST85] was later improved to $p = 8/5$ [CEES93b] and finally to $p = 3/2$ [BG06]. The global bound has been upgraded recently by Giacomelli & Otto [GO05], where they proved the bound

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^L u^2 dx \right)^{0.5} \leq o(L^{1.5}).$$

We observe that the conjectured bound is $O(L^{0.5})$.

The analyticity of solutions is of great interest not only for KS equation, but also for other nonlinear partial differential equations. For instance, we refer the reader to the seminar paper by Foias & Temam [FT89] where they show that solutions of the Navier-Stokes equations are analytic in time with values in a Gevrey class of functions (in space). This technique has been extended largely to other nonlinear parabolic equations and, in particular, Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe [CEES93a] addressed the spatial analyticity of solutions of one-dimensional Kuramoto-Sivashinsky equation. They showed that at large time the solutions are analytic in a strip around the real axis and also gave a rigorous lower bound for its width, i.e. the radius of analyticity is proportional to $L^{-16/25}$. Grujić [Gru00] used a Gevrey class technique to obtain a neighborhood in the global attractor of the set of all stationary solutions in which the radius of analyticity is independent of L . This latter result shed some light on a conjecture in [CEES93a] that asks whether there is a $\alpha > 0$, independent of L , such that the solutions of the KS equation are analytic in space in the complex strip $\{x + is, s < \alpha\}$ for sufficiently large time. In higher dimensions, the literature on estimating the radius of analyticity for the Kuramoto-Sivashinsky-type equations is more scarce. For example, we refer to the works by Pinto [Pin99, Pin01] where, among other properties, the author studied the time analyticity of a variant of the two-dimensional KS equation. More recently, Ioakim & Smyrlis [IS14] also studied the analyticity properties of solutions of Kuramoto-Sivashinsky type equations and some related systems.

The goal of the present work is to mathematically study the initial value problem for nonlocal two-dimensional Kuramoto-Sivashinsky-type equation with periodic boundary conditions and initial data with zero mean

$$\int_0^L \int_0^L \eta_0(x, y) dx dy = 0.$$

Of course, the zero average condition is propagated by the PDE. We organize this paper as follows. In section 2, we give some notations, definitions and classical results. In section 3, we show the global existence of solutions to initial value problem (5.1.1) and in section 4, we prove

the existence of an absorbing set in L^2 and in higher Sobolev norms. In section 5, we prove that these solutions are analytic in a strip based on *a priori* estimates in a Gevrey class. Finally, in section 6, we establish a bound for the number of spatial oscillations which are a manifestation of the spatial chaos that this PDE evidences.

5.1.1 Notation

We will use C to denote a universal constant that can change from one line to another. We will make frequent use of the usual homogeneous Sobolev spaces \dot{H}^s :

$$\dot{H}^s(\mathbb{T}^2) = \left\{ \eta \in L^2(\mathbb{T}^2) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} |\xi|^{2s} |\hat{\eta}(\xi)|^2 < \infty \right\}$$

where $\hat{\eta}(\xi)$ is the Fourier series of η :

$$\hat{\eta}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-2} \int_{\mathbb{T}^2} e^{-i\xi_1 x - i\xi_2 y} \eta(x, y) dx dy, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

5.2 Rescaling of the equation

We assume that η is L -periodic,

$$\eta(x + L, y) = \eta(x, y), \quad \eta(x, y + L) = \eta(x, y),$$

and define $\mathbb{T}^2 = [0, 2\pi]^2$ and $\lambda = \frac{2\pi}{L}$. We rescale our variables according to

$$\tilde{x} = \lambda x, \quad \tilde{y} = \lambda y, \quad \tilde{\eta} = \lambda^{-1} \eta, \quad \tilde{t} = \lambda^2 t,$$

which gives

$$\lambda^3 \tilde{\eta}_t + \lambda^3 \tilde{\eta} \tilde{\eta}_x + (\beta - 1) \lambda^3 \tilde{\eta}_{xx} - \lambda^3 \tilde{\eta}_{yy} - \gamma \lambda^4 \Lambda^3(\tilde{\eta}) + \lambda^5 \Delta^2 \tilde{\eta} = 0.$$

Then we obtain

$$\tilde{\eta}_t + \tilde{\eta} \tilde{\eta}_x + (\beta - 1) \tilde{\eta}_{xx} - \tilde{\eta}_{yy} - \gamma \lambda \Lambda^3(\tilde{\eta}) + \lambda^2 \Delta^2 \tilde{\eta} = 0. \quad (5.2.1)$$

Denoting $\delta = \gamma \lambda$ and $\varepsilon = \lambda^2$, we can equivalently consider the following initial-value problem

$$\eta_t + \eta \eta_x + (\beta - 1) \eta_{xx} - \eta_{yy} - \delta \Lambda^3(\eta) + \varepsilon \Delta^2 \eta = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2, t > 0 \quad (5.2.2)$$

with initial data

$$\eta(x, y, 0) = \eta_0(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{T}^2.$$

In what follows, we will drop the tilde notation.

5.3 Global existence of strong solutions

In this section, we will state the global well-posedness result of the initial-value problem (5.2.2) :

Theorem 5.3.1. *If $\eta_0 \in H^2(\mathbb{T}^2)$, then for every $0 < T < \infty$ the initial value problem (5.2.2) has a unique solution*

$$\eta \in C([0, T]; H^2(\mathbb{T}^2)) \cap L^2(0, T; H^4(\mathbb{T}^2)).$$

Proof. Step 1 : L^2 estimate. We multiply (5.2.2) by η and integrate by parts to obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_{L^2}^2 &= (\beta - 1) \|\eta_x\|_{L^2}^2 - \|\eta_y\|_{L^2}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|\Delta \eta\|_{L^2}^2 \\ &\leq C(\beta, \delta) \|\eta\|_{H^{\frac{3}{2}}}^2 - \varepsilon \|\eta\|_{H^2}^2 \\ &\leq C(\beta, \delta) \|\eta\|_{H^2}^{3/2} \|\eta\|_{L^2}^{1/2} - \varepsilon \|\eta\|_{H^2}^2 \end{aligned}$$

By Young's inequality, we find that

$$\frac{d}{dt} \|\eta\|_{L^2}^2 \leq -\varepsilon \|\Delta \eta\|_{L^2}^2 + C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\eta\|_{L^2}^2$$

where $C(\varepsilon, \beta, \delta)$ is a constant depending on $\varepsilon, \beta, \delta$ and may change line by line. An application of Gronwall's inequality leads us to

$$\|\eta\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)(t-s)) \|\Delta \eta\|_{L^2}^2 ds \leq C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\eta_0\|_{L^2}^2 e^t.$$

Hence,

$$\|\eta\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\eta\|_{H^2}^2 ds \leq C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\eta_0\|_{L^2}^2 e^t.$$

Step 2 : H^1 estimate. Now we multiply (5.2.2) by $-\Delta \eta$ and integrate by parts to obtain that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^1}^2 = (\beta - 1) \|\eta_x\|_{H^1}^2 - \|\eta_y\|_{H^1}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{H^1}^2 - \varepsilon \|\Delta \eta\|_{H^1}^2 + \|\eta\|_{L^\infty} \|\eta\|_{H^1} \|\Delta \eta\|_{L^2}.$$

Using the same method as in step 1, we get

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^1}^2 &\leq -\frac{3\varepsilon}{4} \|\Delta \eta\|_{H^1}^2 + C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\eta\|_{H^1}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \|\eta\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta \eta\|_{L^2}^2 \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{4} \|\Delta \eta\|_{H^1}^2 + \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) + \frac{1}{2\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\eta\|_{H^1}^2, \end{aligned}$$

which implies

$$\frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^1}^2 \leq -\frac{\varepsilon}{2} \|\Delta \eta\|_{H^1}^2 + \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) + \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\eta\|_{H^1}^2.$$

Using Gronwall's inequality, we find that

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \exp \left(C(\varepsilon, \beta, \delta)(t-s) + \int_s^t \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\Delta \eta\|_{H^1}^2 ds \\ \leq \|\eta_0\|_{H^1}^2 \exp \left(C(\varepsilon, \beta, \delta)t + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right). \end{aligned}$$

From step 1, we already have that

$$\varepsilon \int_0^t \|\eta\|_{H^2}^2 ds \leq C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\eta_0\|_{L^2}^2 e^t.$$

Using the Sobolev embedding, we get that

$$\varepsilon \int_0^t \|\eta\|_{L^\infty}^2 ds \leq C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\eta_0\|_{L^2}^2 e^t.$$

Inserting this into the inequality above, we obtain

$$\begin{aligned}
& \|\eta\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \exp \left(C(\varepsilon, \beta, \delta)(t-s) + \int_s^t \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\Delta\eta\|_{H^1}^2 ds \\
& \leq \|\eta_0\|_{H^1}^2 \exp \left(C(\varepsilon, \beta, \delta)t + \frac{1}{\varepsilon^2} \|\eta_0\|_{L^2}^2 \exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)t) \right) \\
& \leq \|\eta_0\|_{H^1}^2 \exp(\exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)\|\eta_0\|_{H^1})t).
\end{aligned}$$

Hence, we conclude that

$$\begin{aligned}
& \|\eta\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \exp(\exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)\|\eta_0\|_{H^1})(t-s)) \|\Delta\eta\|_{H^1}^2 ds \\
& \leq \|\eta_0\|_{H^1}^2 \exp(\exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)\|\eta_0\|_{H^1})t).
\end{aligned}$$

In particular,

$$\|\eta\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \|\Delta\eta\|_{H^1}^2 ds \leq \|\eta_0\|_{H^1}^2 \exp(\exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)\|\eta_0\|_{H^1})t).$$

Step 3 : H^2 estimate. We multiply (5.2.2) by $\Delta^2\eta$ and integrate by parts to obtain that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^2}^2 = (\beta - 1) \|\eta_x\|_{H^2}^2 - \|\eta_y\|_{H^2}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{H^2}^2 - \varepsilon \|\Delta\eta\|_{H^2}^2 + \|\eta\|_{L^\infty} \|\eta\|_{H^1} \|\Delta^2\eta\|_{L^2}.$$

Using the same method as in step 1 and step 2, we can obtain

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^2}^2 & \leq -\frac{\varepsilon}{2} \|\Delta\eta\|_{H^2}^2 + \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) + \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\eta\|_{H^1}^2 \\
& \leq -\frac{\varepsilon}{2} \|\Delta\eta\|_{H^2}^2 + \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) + \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\eta\|_{H^2}^2,
\end{aligned}$$

Using Gronwall's inequality again, we obtain that

$$\begin{aligned}
& \|\eta\|_{H^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \exp \left(C(\varepsilon, \beta, \delta)(t-s) + \int_s^t \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\Delta\eta\|_{H^2}^2 ds \\
& \leq \|\eta_0\|_{H^2}^2 \exp \left(C(\varepsilon, \beta, \delta)t + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right).
\end{aligned}$$

Then, the Sobolev embedding implies that

$$\begin{aligned}
& \|\eta\|_{H^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \exp(\exp(C(\varepsilon, \beta, \delta, \|\eta_0\|_{H^2}))(t-s)) \|\Delta\eta\|_{H^2}^2 ds \\
& \leq \|\eta_0\|_{H^2}^2 \exp(\exp(C(\varepsilon, \beta, \delta, \|\eta_0\|_{H^2})t)).
\end{aligned}$$

Finally, we have

$$\|\eta\|_{H^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^t \|\Delta\eta\|_{H^2}^2 ds \leq \|\eta_0\|_{H^2}^2 \exp(\exp(C(\varepsilon, \beta, \delta, \|\eta_0\|_{H^2})t)).$$

Step 4 : Existence of solution We consider a positive, symmetric mollifier $J_{\varepsilon'}$ (such as the periodic heat kernel), to approximate the initial value problem (5.2.2) by the regularized

problem

$$\begin{aligned} \partial_t \eta_{\varepsilon'} + J_{\varepsilon'} * \frac{\partial_x \left((J_{\varepsilon'} * \eta_{\varepsilon'})^2 \right)}{2} \\ = J_{\varepsilon'} * \left((1 - \beta) \partial_{xx} (J_{\varepsilon'} * \eta_{\varepsilon'}) + \partial_{yy} (J_{\varepsilon'} * \eta_{\varepsilon'}) + \delta \Lambda^3 (J_{\varepsilon'} * \eta_{\varepsilon'}) - \varepsilon \Delta^2 (J_{\varepsilon'} * \eta_{\varepsilon'}) \right), \end{aligned}$$

with initial data

$$\eta_{\varepsilon'}(0) = J_{\varepsilon'} * \eta_0.$$

By the Picard's theorem, these sequence of regularized problems have a unique solution $\eta_{\varepsilon'} = C^1([0, T_{\varepsilon'}], H^2(\mathbb{T}^2))$. Moreover, these problems verify the same energy estimates as in steps 1-3 and, as a consequence, we can take $T = T(\eta_0)$ independent of ε' . Passing to the limit we conclude the existence of at least one solution in

$$\eta \in L^\infty(0, T; H^2) \cap L^2(0, T; H^4)$$

and since we have *a priori* estimates, these solutions exist for arbitrary long time T .

Step 5 : Uniqueness. We can prove the uniqueness of the solutions by contradiction, i.e. assuming that there exists two solutions of the problem (5.2.2), η_1 and η_2 , corresponding to the same initial data η_0 . We denote their difference by $\underline{\eta}$. Then we have

$$\underline{\eta}_t + \frac{1}{2} (\eta_1^2 - \eta_2^2)_x + (\beta - 1) \underline{\eta}_{xx} - \underline{\eta}_{yy} - \delta \Lambda^3(\underline{\eta}) + \varepsilon \Delta^2 \underline{\eta} = 0. \quad (5.3.1)$$

As the proof of L^2 estimate in step 1, we multiply (5.3.1) by $\underline{\eta}$ and integrate by parts :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 &= (\beta - 1) \|\underline{\eta}_x\|_{L^2}^2 - \|\underline{\eta}_y\|_{L^2}^2 + \delta \|\Lambda^{\frac{3}{2}}(\underline{\eta})\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|\Delta \underline{\eta}\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{1}{2} (\eta_1^2 - \eta_2^2)_x \underline{\eta} \\ &\leq C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta \underline{\eta}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\eta_1 + \eta_2\|_{L^\infty} \|\underline{\eta}\|_{H^1} \|\underline{\eta}\|_{L^2} \\ &\leq C(\varepsilon, \beta, \delta) \|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{4} \|\Delta \underline{\eta}\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{4} \|\underline{\eta}\|_{H^1}^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \|\eta_1 + \eta_2\|_{L^\infty}^2 \|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) + \frac{1}{4\varepsilon} \|\eta_1 + \eta_2\|_{L^\infty}^2 \right) \|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 \\ &\leq \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) + \frac{1}{2\varepsilon} (\|\eta_1\|_{L^\infty}^2 + \|\eta_2\|_{L^\infty}^2) \right) \|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

Using Gronwall's inequality, we have that

$$\|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 \leq \|\eta_0\|_{L^2}^2 \exp \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) t + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \|\eta_1\|_{L^\infty}^2 + \|\eta_2\|_{L^\infty}^2 ds \right).$$

From step 1, we already have that

$$\varepsilon \int_0^t \|\eta_1\|_{H^2}^2 ds \leq \|\eta_0\|_{L^2}^2 \exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)t),$$

and

$$\varepsilon \int_0^t \|\eta_2\|_{H^2}^2 ds \leq \|\eta_0\|_{L^2}^2 \exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)t).$$

Thus, the uniqueness of solution follows from the inequality

$$\|\underline{\eta}\|_{L^2}^2 \leq \|\eta_0\|_{L^2}^2 \exp(\exp(C(\delta, \varepsilon, \beta, \|\eta_0\|_{L^2}))t).$$

Step 6 : Endpoint continuity in time. To conclude the endpoint continuity, we can perform a standard argument using the parabolic gain of regularity $L^2(0, T; H^4)$. Indeed, we can take $0 < \sigma \ll 1$ as small as desired and there exists a $0 < \sigma' < \sigma$ such that $u(\sigma') \in H^4$. Repeating the same argument as before, we find a solution

$$\eta_\sigma \in L^\infty(\sigma', T; H^4) \cap C([\sigma', T], H^2).$$

Because of the uniqueness of solution we obtain the continuity of the original solution

$$\eta \in C((0, T], H^2).$$

Finally, the continuity at the origin is a consequence of the energy estimates. \square

5.4 Large time dynamics

The goal of this section is to prove uniform boundedness of solutions $\eta \in L^\infty([0, \infty); L^2(\mathbb{T}^2))$. In other words, we establish the existence of an absorbing ball in L^2 by collecting global bounds showing the dissipative character of the equation. We start by proving the following two Gagliardo-Nirenberg inequalities

Lemma 5.4.1. *For smooth enough periodic functions with zero mean, we have that the following two inequalities hold true*

$$\|\nabla \eta\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^2 \leq C \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|\Delta \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)},$$

$$\|\Delta \eta^2\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq C \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|\Delta \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}.$$

proof. We start proving the first inequality :

$$\begin{aligned} \|\nabla \eta\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^4 &= \int_{\mathbb{T}^2} (\nabla \eta \cdot \nabla \eta)^2 \\ &= - \int_{\mathbb{T}^2} \eta \nabla \cdot (\nabla \eta |\nabla \eta|^2) \\ &= - \int_{\mathbb{T}^2} \eta \Delta \eta |\nabla \eta|^2 + \eta \nabla \eta \cdot \nabla |\nabla \eta|^2 \\ &\leq C \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|\Delta \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|\nabla \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \\ &\leq C \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|\Delta \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \|\nabla \eta\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^2. \end{aligned}$$

Therefore, we conclude our result by noticing that

$$\begin{aligned} \|\Delta \eta^2\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} &\leq C \|\eta \Delta \eta + |\nabla \eta|^2\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \\ &\leq C \|\eta \Delta \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \| |\nabla \eta|^2 \|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \\ &\leq C \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|\Delta \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \|\nabla \eta\|_{L^4(\mathbb{T}^2)}^2 \\ &\leq C \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} \|\Delta \eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}. \end{aligned}$$

\square

Remark 5.4.2. We observe that the previous constants C can be computed explicitly.

The rest of this section is devoted to prove that the solutions of problem (5.2.2) remain uniformly bounded in L^2 . The following background flow method was first used by Nicolaenko, Scheurer, & Temam [NST85] and then improved by Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe

[CEES93b], Goodman [Goo94] and Bronski & Gambill [BG06]. Before stating the main result of this section, let us first define the following subspace of $H^2(\mathbb{T}^2)$:

$$H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2) = \{\eta \in H^2(\mathbb{T}^2) : -\eta(-x, y) = \eta(x, y), \forall (x, y) \in \mathbb{T}^2\}$$

In terms of the rigorous results, a global bound on the solution is given by the following theorem :

Theorem 5.4.3. *Let $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$. Then the solution η of the initial-value problem (5.2.2) satisfies*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \delta, \beta}. \quad (5.4.1)$$

where $R_{\varepsilon, \delta, \beta}$ depends on $\varepsilon, \delta, \beta$.

proof. The proof is based on the construction of a Lyapunov functional, $\mathcal{F}(t)$, such that

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t) \leq 0,$$

if

$$\mathcal{F}(t) \geq R_{\varepsilon, \delta, \beta},$$

i.e. implying the existence of an absorbing set in L^2 . We first let ϕ be a smooth, 2π -periodic function, which we will choose later. Then, we multiply equation (5.2.2) by $\eta - \phi$, and integrate by parts :

$$\int \int ((\eta - \phi)_t + \eta \eta_x + (\beta - 1) \eta_{xx} - \eta_{yy} - \delta \Lambda^3(\eta) + \varepsilon \Delta^2 \eta) (\eta - \phi) = 0,$$

thus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta - \phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^2} \phi_x \eta^2 - (\beta - 1) \|\eta_x\|_{L^2}^2 + \|\eta_y\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\Delta \eta\|_{L^2}^2 \\ - \int_{\mathbb{T}^2} (\beta - 1) \eta_{xx} \phi + \int_{\mathbb{T}^2} \eta_{yy} \phi - \delta \int_{\mathbb{T}^2} \Lambda^3 \eta (\eta - \phi) - \int_{\mathbb{T}^2} \varepsilon \Delta \eta \Delta \phi = 0. \end{aligned}$$

For the term corresponding to the nonlocal self-adjoint operator Λ , we have that

$$\int_{\mathbb{T}^2} \Lambda \eta \phi = \int_{\mathbb{T}^2} \eta \Lambda \phi.$$

Hence, by the Young's inequality and the Hölder inequality, we have that,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta - \phi\|_{L^2}^2 &= - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\phi_x}{2} \eta^2 + (\beta - 1) \|\eta_x\|_{L^2}^2 - \|\eta_y\|_{L^2}^2 - \varepsilon \|\Delta \eta\|_{L^2}^2 + \delta \int_{\mathbb{T}^2} \Lambda^3 \eta \eta \\ &\quad + (1 - \beta) \int_{\mathbb{T}^2} \eta_x \phi_x + \int_{\mathbb{T}^2} \eta_y \phi_y - \delta \int_{\mathbb{T}^2} \Lambda^3 \eta \phi + \int_{\mathbb{T}^2} \varepsilon \Delta \eta \Delta \phi \\ &\leq - \int_{\mathbb{T}^2} \frac{\phi_x}{2} \eta^2 + 2|\beta - 1| \|\eta_x\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2} \|\eta_y\|_{L^2}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta \eta\|_{L^2}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\eta\|_{L^2}^2 + |\beta - 1| \|\phi_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\phi_y\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta \phi\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\phi\|_{H^3}^2 \end{aligned} \quad (5.4.2)$$

Now, we define the following function

$$f(|\xi|) = f(z) := \frac{1}{2} + 2(\beta + 2)z^2 + \delta z^3 - \frac{\varepsilon}{4} z^4, \quad z \geq 0.$$

Observe that $f(z)$ has at most three zeros. Since $\varepsilon > 0$, we find that $f(z)$ is bounded and has

global maximum $\frac{1}{2} + (8(\beta + 2)\varepsilon + 4\delta^2)\delta^2/\varepsilon^3$ at point $z_1 = 2\delta/\varepsilon$. Then we have the following inequality

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + 2|\beta - 1||\xi_1|^2 - \frac{1}{2}|\xi_2|^2 + \delta|\xi|^3 - \frac{\varepsilon}{4}|\xi|^4 &\leq f(z_1) = \frac{1}{2} + (8(\beta + 2)\varepsilon + 4\delta^2)\delta^2/\varepsilon^3 \\ &:= C(\beta, \delta, \varepsilon). \end{aligned}$$

Inserting this relation into (5.4.2), we obtain that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 = -\frac{\varepsilon}{4} \|\Delta\eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\eta\|_{L^2}^2 + \int_{\mathbb{T}^2} \left(\lambda - \frac{\phi_x}{2} \right) \eta^2 + F(\phi), \quad (5.4.3)$$

where

$$\lambda = C(\beta, \delta, \varepsilon) + 1,$$

and

$$F(\phi) = |\beta - 1| \|\phi_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\phi_y\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\phi\|_{H^3}^2.$$

Now, we choose $\phi(x, y)$ such that

$$\frac{\phi_x}{2} = -\lambda \sum_{0 < |\xi_1| \leq A/\varepsilon} e^{-ix\xi_1},$$

which is possible since the right-hand side has zero horizontal mean value. Here, A is a constant independent of ε , which will be determined later.

Then we claim that

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} \left(\lambda - \frac{\phi_x}{2} \right) \eta^2 \right| \leq \frac{\varepsilon}{8} \|\Delta\eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \quad (5.4.4)$$

Indeed, with the choice of ϕ , we have that

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^2} \left(\lambda - \frac{\phi_x}{2} \right) \eta^2 &= \int_{\mathbb{T}^2} \lambda \left(1 + \sum_{0 < |\xi_1| \leq A/\varepsilon} e^{-ix\xi_1} \right) \eta^2 \\ &= \lambda \sum_{|\xi_1| \leq A/\varepsilon} \int_{\mathbb{T}^2} e^{-ix\xi_1} \eta^2 \\ &= \lambda \sum_{|\xi_1| \leq A/\varepsilon} \hat{\eta}^2(\xi_1, 0). \end{aligned}$$

Since the odd symmetry in the x -direction is preserved by the equation and $\eta_0 \in H_{\text{od}}^2(\mathbb{T}^2)$, we have the fact that $\eta^2(0, y, t) = 0$ for any $y \in \mathbb{T}$ and $t \geq 0$, so that

$$\sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}} \hat{\eta}^2(\xi_1, 0) = 0,$$

which implies

$$\sum_{|\xi_1| \leq A/\varepsilon} \hat{\eta}^2(\xi_1, 0) = - \sum_{|\xi_1| > A/\varepsilon} \hat{\eta}^2(\xi_1, 0). \quad (5.4.5)$$

Then, by Cauchy-Schwartz, we bound

$$\begin{aligned}
|(5.4.5)| &\leq \sum_{|\xi_1| > A/\varepsilon} |\xi_1|^2 \left| \widehat{\eta^2}(\xi_1, 0) \right| \frac{1}{|\xi_1|^2} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{A} \sum_{|\xi_1| > A/\varepsilon} |\xi_1|^2 \left| \widehat{\eta^2}(\xi_1, 0) \right| \frac{1}{|\xi_1|} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{A} \left(\sum_{|\xi_1| > A/\varepsilon} |\xi_1|^4 \left| \widehat{\eta^2}(\xi_1, 0) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|\xi_1| > A/\varepsilon} \frac{1}{|\xi_1|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C\varepsilon}{A} \left(\sum_{\xi_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{\xi_1 \in \mathbb{Z}} (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^2 \left| \widehat{\eta^2}(\xi_1, \xi_2) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C\varepsilon}{A} \|\Delta(\eta^2)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq \frac{C\varepsilon}{A} \|\Delta\eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2,
\end{aligned}$$

where we have used Lemma 5.4.1 in the last step as well as the Sobolev embedding $H^2(\mathbb{T}^2)$ into $L^\infty(\mathbb{T}^2)$. Hence,

$$\left| \int_{\mathbb{T}^2} \left(\lambda - \frac{\phi_x}{2} \right) \eta^2 \right| \leq \lambda \frac{C\varepsilon}{A} \|\Delta\eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2$$

The choice $A > 8C\lambda$ justifies the claim (5.4.4).

We consider the functional

$$\mathcal{F}(t) = \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2.$$

Inserting this into (5.4.3), we obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq -\frac{\varepsilon}{8} \|\Delta\eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\eta\|_{L^2}^2 + F(\phi)$$

Hence

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq -\|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \|\phi\|_{L^2}^2 + F(\phi), \quad (5.4.6)$$

or, equivalently,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathcal{F} \leq -\mathcal{F} + \|\phi\|_{L^2}^2 + F(\phi),$$

which allows us to conclude the uniform boundedness of \mathcal{F} . Indeed, using Gronwall inequality, we immediately obtain

$$\|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq (\|\eta_0 - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 - \|\phi\|_{L^2}^2 - F(\phi)) e^{-2t} + \|\phi\|_{L^2}^2 + F(\phi).$$

where

$$F(\phi) = |\beta - 1| \|\phi_x\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\phi_y\|_{L^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\Delta\phi\|_{L^2}^2 + \frac{\delta^2}{2} \|\phi\|_{H^3}^2.$$

Thus, if $1 \ll \|\eta(t)\|_{L^2}$, we conclude that

$$\begin{aligned}
\|\eta\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} &\leq \|\eta - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} + \|\phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \\
&\leq \left(\|\eta_0 - \phi\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 + \|\phi\|_{L^2}^2 + F(\phi) \right)^{\frac{1}{2}} e^{-t} + 2\|\phi\|_{L^2} + F(\phi)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\|\eta_0\|_{L^2} + 2\|\phi\|_{L^2} + (\beta + 2)\|\phi\|_{H^1} + \sqrt{\varepsilon}\|\phi\|_{H^2} + \delta\|\phi\|_{H^3}) e^{-t} \\
&\quad + 2\|\phi\|_{L^2} + (\beta + 2)\|\phi\|_{H^1} + \sqrt{\varepsilon}\|\phi\|_{H^2} + \delta\|\phi\|_{H^3} \\
&:= R_{\varepsilon, \delta, \beta}.
\end{aligned}$$

This completes the proof of Theorem 5.4.3. \square

Similarly as we have obtained that there exists an absorbing set in L^2 , we can conclude the existence of an absorbing set in higher Sobolev norms.

Theorem 5.4.4. *Let $\eta_0 \in H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$. Then the solution η of the initial-value problem (5.2.2) satisfies*

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\eta(t)\|_{H^2(\mathbb{T}^2)} \leq R'_{\varepsilon, \delta, \beta}.$$

where $R'_{\varepsilon, \delta, \beta}$ is a constant depending on $\varepsilon, \delta, \beta$.

proof. Recalling the existence of an absorbing set in the L^2 -norm and the regularity results in Theorem 5.3.1, so the proof is straightforward by using a bootstrap argument.

We first show that there exists an absorbing set in the H^1 -norm. Inequality (5.4.1) implies that for a $T > 0$ large enough, we have

$$\|\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \beta, \delta} + 1, \quad \forall t > T.$$

Combining this inequality with the L^2 energy estimate in the proof of Theorem 5.3.1, we obtain that

$$\|\eta\|_{L^\infty([0, T]; L^2)}^2 \leq \|\eta_0\|_{L^2}^2 \exp(C(\varepsilon, \beta, \delta)T),$$

which results in that there exists a constant depending on initial data, δ and ε such that

$$\max_{0 \leq t < \infty} \|\eta(t)\|_{L^2(\mathbb{T}^2)}^2 \leq C(\|\eta_0\|_{L^2}, \varepsilon, \beta, \delta).$$

We multiply (5.2.2) by $-\Delta\eta$ and integrate by parts to obtain that

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^1}^2 &\leq (\beta - 1) \|\eta_x\|_{H^1}^2 - \|\eta_y\|_{H^1}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{H^1}^2 - \varepsilon \|\Delta\eta\|_{H^1}^2 + \|\eta\|_{L^4}^4 \|\Delta\eta_x\|_{L^2} \\ &\leq c_\varepsilon \|\eta\|_{L^4}^4 - \frac{\varepsilon}{2} \|\eta\|_{H^3}^2 + |\beta - 1| \|\eta_x\|_{H^1}^2 - \|\eta_y\|_{H^1}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{H^1}^2 \\ &\leq C_{\varepsilon, \delta, \eta_0} \|\eta\|_{H^1}^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\eta\|_{H^3}^2 + |\beta - 1| \|\eta_x\|_{H^1}^2 - \|\eta_y\|_{H^1}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{H^1}^2, \\ &\leq C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0} \|\eta\|_{H^1}^2 - \frac{\varepsilon}{4} \|\eta\|_{H^3}^2 + C_{\varepsilon, \delta} \|\eta\|_{L^2}^2 \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{8} \|\eta\|_{H^3}^2 + C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0} \\ &\leq -\frac{\varepsilon}{16} \|\eta\|_{H^1}^2 - \frac{\varepsilon}{16} \|\eta\|_{H^3}^2 + C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}. \end{aligned}$$

where we used the Plancherel Theorem, the Poincaré inequality and the Sobolev inequality

$$\|\eta\|_{L^4} \leq C \|\eta\|_{H^{1/2}} \leq C \|\eta\|_{L^2}^{1/2} \|\eta\|_{H^1}^{1/2}.$$

It follows that

$$\frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^1}^2 + \frac{\varepsilon}{8} \|\eta\|_{H^1}^2 \leq C(\|\eta_0\|_{L^2}, \varepsilon, \beta, \delta).$$

Using the Gronwall inequality, we immediately obtain the uniform bound

$$\|\eta(t)\|_{H^1}^2 \leq C(\|\eta_0\|_{H^1}, \varepsilon, \beta, \delta).$$

Recall that the H^2 energy estimate is

$$\frac{d}{dt} \|\eta\|_{H^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\eta\|_{H^4}^2 \leq \left(C(\varepsilon, \beta, \delta) + \frac{1}{\varepsilon} \|\eta\|_{L^\infty}^2 \right) \|\eta\|_{H^1}^2,$$

so we can mimic the previous proof to obtain that there exists an absorbing set in H^2 . The proof is completed. \square

5.5 Analyticity

The aim of this section is to show instant analyticity for the solutions of (5.2.2). We shall prove that the solutions of (5.2.2) are analytic in a strip. In order to do this, we use the method developed by Collet, Eckmann, Epstein & Stubbe in [CEES93a] (see also [FT89]). Roughly speaking, our proof is based on *a priori* estimates for functions in certain Gevrey class.

Given a function $\sigma(t)$ positive (see its formula explicit below), we consider the weighted exponential operators

$$e^{\sigma(t)\Lambda} \eta = \sum_{\xi \in \mathbb{T}^2} \hat{\eta}(\xi) e^{\sigma(t)|\xi|} e^{i\xi \cdot x}$$

for functions in the space

$$G := \{ \eta \in L^2(\mathbb{T}^2) : \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\hat{\eta}(\xi)|^2 < \infty \}.$$

We observe that the functions in G are analytic. We also define the inner product and norm on this Hilbert space by

$$\langle \mu, \eta \rangle_{\sigma(t)} = \int_{\mathbb{T}^2} e^{\sigma(t)\Lambda} \mu \overline{e^{\sigma(t)\Lambda} \eta} = 4\pi^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\ell|} \widehat{\mu}(\ell) \overline{\widehat{\eta}(\ell)},$$

$$\|\eta\|_{\sigma(t)}^2 = \left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta \right\|_{L^2}^2.$$

With these previous definitions, we can state the main result of this section.

Theorem 5.5.1. *Let η_0 be given in $H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$. Then, there exists T_0 depending on $\eta_0, \varepsilon, \beta, \delta$ such that the solution of (5.2.2) satisfies*

$$\left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta(t) \right\|_{L^2}^2 \leq 1 + 2C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}^2, \quad \forall t > 0$$

where $\sigma(t) = \min\{\tanh(t), \tanh(\frac{T_0}{2})\}$. In particular, it becomes analytic for $t > 0$.

Before proving theorem 5.5.1, we first state some auxiliary lemmas :

Lemma 5.5.2. *For every $b > a \geq 0$,*

$$\left\| \Lambda^{\frac{a}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 \leq \left\| \Lambda^{\frac{b}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^{\frac{2a}{b}} \|\eta\|_{\sigma(t)}^{2 - \frac{2a}{b}}.$$

proof.

$$\begin{aligned}
\left\| \Lambda^{\frac{a}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 &= \left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \Lambda^{\frac{a}{2}} \eta \right\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\xi|^a |\hat{\eta}(\xi)|^2 \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{\sigma(t)|\xi|^{\frac{2a}{b}}} |\xi|^a |\hat{\eta}(\xi)|^{\frac{2a}{b}} e^{\sigma(t)|\xi|(2-\frac{2a}{b})} |\hat{\eta}(\xi)|^{2-\frac{2a}{b}} \\
&\leq \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left(e^{\sigma(t)|\xi|^{\frac{2a}{b}}} |\xi|^a |\hat{\eta}(\xi)|^{\frac{2a}{b}} \right)^{\frac{b}{a}} \right)^{\frac{a}{b}} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} \left(e^{\sigma(t)|\xi|(2-\frac{2a}{b})} |\hat{\eta}(\xi)|^{2-\frac{2a}{b}} \right)^{\frac{b}{b-a}} \right)^{\frac{b-a}{b}} \\
&\leq \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\xi|^b |\hat{\eta}(\xi)|^2 \right)^{\frac{a}{b}} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^2} e^{2\sigma(t)|\xi|} |\hat{\eta}(\xi)|^2 \right)^{\frac{b-a}{b}} \\
&\leq \left\| \Lambda^{\frac{b}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^{\frac{2a}{b}} \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^{2-\frac{2a}{b}}.
\end{aligned}$$

□

And an auxiliary lemma estimating the nonlinear term :

Lemma 5.5.3. $|\langle \eta \eta_x, \eta \rangle_{\sigma(t)}| \leq c \|\Lambda \eta\|_{\sigma(t)} \left\| \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^2.$

proof. We first denote $\eta^* = e^{\sigma(t)\Lambda} \eta$, then

$$\widehat{\eta^*(j)} = e^{\sigma(t)|j|} \hat{\eta}(j).$$

By the definition of Fourier series, we have

$$\eta = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \hat{\eta}(j) e^{ij \cdot x}, \quad e^{\sigma(t)\Lambda} \eta = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \hat{\eta}(j) e^{ij \cdot x} e^{\sigma(t)|j|}.$$

In fact,

$$\begin{aligned}
\langle \eta \eta_x, \eta \rangle_{\sigma(t)} &= (2\pi)^2 i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} (\hat{\eta}(j) \hat{\eta}(\ell - j) j_1 \bar{\hat{\eta}}(\ell) e^{2\sigma(t)|\ell|}) \\
&= (2\pi)^2 i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(\widehat{\eta^*}(j) \widehat{\eta^*}(\ell - j) \right) j_1 \overline{\widehat{\eta^*}(\ell)} e^{\sigma(t)(|\ell| - |j| - |\ell - j|)}.
\end{aligned}$$

Since $|\ell| \leq |j| + |\ell - j|$ leads to $|\ell| - |j| - |\ell - j| \leq 0$, we have that

$$e^{\sigma(t)(|\ell| - |j| - |\ell - j|)} \leq 1.$$

Moreover,

$$\begin{aligned}
|\langle \eta \eta_x, \eta \rangle_{\sigma(t)}| &\leq (2\pi)^2 \left| i \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(\widehat{\eta^*}(j) \widehat{\eta^*}(\ell - j) \right) j_1 \widehat{\eta^*}(\ell) e^{\sigma(t)(|\ell| - |j| - |\ell - j|)} \right| \\
&\leq (2\pi)^2 \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{\eta^*}(j)| |\widehat{\eta^*}(\ell - j)| |j| |\widehat{\eta^*}(\ell)| \\
&= (2\pi)^2 \sum_{k+j=\ell} |\widehat{\eta^*}(j)| |j| |\widehat{\eta^*}(k)| |\widehat{\eta^*}(\ell)| \\
&= \int_{\mathbb{T}^2} \phi(x) \theta(x) \overline{\psi}(x) dx
\end{aligned}$$

where

$$\phi(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{\eta^*}(j)| |j| e^{ijx}, \quad \theta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{\eta^*}(k)| e^{ikx}, \quad \psi(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}^2} |\widehat{\eta^*}(\ell)| e^{i\ell x}.$$

Notice that $|\hat{\phi}(j)| = |j| |\hat{\eta^*}(j)|$ and $|\hat{\theta}(k)| = |\hat{\eta^*}(k)|$. We now bound the last integral by the Hölder inequality,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^2} \phi(x) \theta(x) \overline{\psi}(x) dx &\leq \|\phi(x)\|_{L^2} \|\theta(x)\|_{L^4} \|\psi(x)\|_{L^4} \\
&\leq c \|\phi(x)\|_{L^2} \|\theta(x)\|_{H^{\frac{1}{2}}}^2 \\
&= c \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |\hat{\phi}(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(|k|^{\frac{1}{2}} |\hat{\theta}(k)| \right)^2 \\
&= c \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^2} |j|^2 |\hat{\eta^*}(j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j \in \mathbb{Z}^2} \left(|k|^{\frac{1}{2}} |\hat{\eta^*}(k)| \right)^2 \\
&= c \|\Lambda \eta^*\|_{L^2} \left\| \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta^* \right\|_{L^2}^2 \\
&\leq c \left\| \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 \|\Lambda \eta\|_{\sigma(t)}
\end{aligned}$$

where we used the Sobolev embedding $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^2) \hookrightarrow L^4(\mathbb{T}^2)$ and the Plancherel theorem in the computation above. \square

We begin now the proof of theorem 5.5.1 :

Proof of Theorem 5.5.1. We first take inner product of (5.2.2) with $\eta(t)$ in Gevrey class G ,

$$\langle \eta_t, \eta \rangle_{\sigma(t)} + \langle \eta \eta_x, \eta \rangle_{\sigma(t)} + \langle (\beta - 1) \eta_{xx} - \eta_{yy} - \delta \Lambda^3(\eta) + \varepsilon \Delta^2 \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)} = 0 \quad (5.5.1)$$

Note that

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)} = \sigma'(t) \Lambda \langle \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)} + \langle \eta_t, \eta \rangle_{\sigma(t)}$$

then we have

$$\langle \eta_t, \eta \rangle_{\sigma(t)} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)} - \sigma'(t) \Lambda \langle \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)}.$$

Substituting this into (5.5.1),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)} &= \sigma'(t) \langle \Lambda \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)} - \langle (\beta - 1) \eta_{xx} - \eta_{yy} - \delta \Lambda^3(\eta) + \varepsilon \Delta^2 \eta, \eta \rangle_{\sigma(t)} - \langle \eta \eta_x, \eta \rangle_{\sigma(t)} \\
&\leq \sigma'(t) \left\| \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 + \beta \left\| \Lambda \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 + \delta \left\| \Lambda^{\frac{3}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 - \varepsilon \left\| \Lambda^2 \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 + c \left\| \Lambda \eta \right\|_{\sigma(t)} \left\| \Lambda^{\frac{1}{2}} \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 \\
&\leq \sigma'(t) \left\| \Lambda^2 \eta \right\|_{\sigma(t)}^{\frac{1}{2}} \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^{\frac{3}{2}} + \beta \left\| \Lambda^2 \eta \right\|_{\sigma(t)} \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)} + \delta \left\| \Lambda^2 \eta \right\|_{\sigma(t)}^{\frac{3}{2}} \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \varepsilon \left\| \Lambda^2 \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 + c \left\| \Lambda^2 \eta \right\|_{\sigma(t)} \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^2.
\end{aligned}$$

By the Young inequality, we have

$$\frac{d}{dt} \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 \leq \left(D_1 (\sigma'(t))^{\frac{4}{3}} + D_2 + D_3 \right) \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 + D_4 \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^4 \quad (5.5.2)$$

where $D_1 = (\frac{3}{2\varepsilon})^{1/3}$, $D_2 = \frac{9}{4\varepsilon} \beta^2$, $D_3 = (\frac{27}{4\varepsilon})^3 \delta^4$, $D_4 = \frac{9}{4\varepsilon} c^2$.

By the definition of $\sigma(t) = \min\{\tanh(t), \tanh(\frac{T_0}{2})\}$, we have

$$\sigma'(t) \leq 1.$$

Inserting this into (5.5.2), we obtain

$$\frac{d}{dt} \left(1 + \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 \right) \leq K \left(1 + \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^2 \right)^2$$

with

$$K = D_1 + D_2 + D_3 + D_4.$$

Define $y_1(t) = 1 + \left\| \eta \right\|_{\sigma(t)}^2$, it turns out to deal with the following ordinary differential inequality

$$\begin{cases} y_1'(t) \leq K y_1(t)^2 \\ y_1(0) = 1 + \left\| \eta_0 \right\|_{L^2}^2. \end{cases}$$

After solving this ODI, we obtain

$$\left\| \eta(t) \right\|_{\sigma(t)}^2 \leq 1 + 2 \left\| \eta_0 \right\|_{L^2}^2 \text{ for } t \in (0, T_0],$$

where

$$T_0 = \frac{1}{2K \left(1 + \left\| \eta_0 \right\|_{L^2}^2 \right)}.$$

Moreover, according to theorem 5.3.1 and theorem 5.4.3, we know that the solution is unique, global in time and stays in a ball of Radius $R_{\varepsilon, \beta, \delta}$ once it has entered it, that is to say, $\left\| \eta(t) \right\|_{L^2}$ remains bounded for all time,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left\| \eta(t) \right\|_{L^2(\mathbb{T}^2)} \leq R_{\varepsilon, \beta, \delta}.$$

So up to now, we already prove local analyticity of $\eta(t)$

$$\left\| \eta(t) \right\|_{\sigma(t)}^2 \leq 1 + 2C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}^2 \text{ for } t \in (0, T_0]. \quad (5.5.3)$$

In order to obtain global analyticity, we follow the previous idea and repeat the argument above starting at $\frac{T_0}{2}$. We consider time $t \in [\frac{T_0}{2}, \frac{3T_0}{2}]$, and let $y_2(t) = 1 + \left\| \eta(t) \right\|_{\sigma(t - \frac{T_0}{2})}^2$, so

$y_2\left(\frac{T_0}{2}\right) = 1 + \left\|\eta\left(\frac{T_0}{2}\right)\right\|_{L^2}^2$. Thus, solving the following ordinary differential inequality

$$\begin{cases} y_2'(t) \leq K y_2(t)^2 \\ y_2\left(\frac{T_0}{2}\right) = 1 + \left\|\eta\left(\frac{T_0}{2}\right)\right\|_{L^2}^2, \end{cases}$$

we have that,

$$\left\|\eta(t)\right\|_{\sigma\left(t-\frac{T_0}{2}\right)}^2 \leq 1 + 2 \left\|\eta\left(\frac{T_0}{2}\right)\right\|_{L^2}^2 \leq 1 + 2C_{\varepsilon,\beta,\delta,\eta_0}^2,$$

for time $t \in [\frac{T_0}{2}, \frac{3T_0}{2}]$.

By the definition of $\sigma(t)$ and observe that $\tanh(t)$ is strictly increasing, we know that $\sigma(t)$ remains being a constant after time $\frac{T_0}{2}$, and this constant is $\sigma\left(\frac{T_0}{2}\right) = \tanh\left(\frac{T_0}{2}\right)$, so we choose $t = T_0$ in the inequality above, then

$$\left\|\eta(t)\right\|_{\sigma\left(\frac{T_0}{2}\right)}^2 \leq 1 + 2C_{\varepsilon,\beta,\delta,\eta_0}^2 \text{ for } t \in [T_0, \frac{3T_0}{2}].$$

We mimic this argument by adding $\frac{T_0}{2}$ each time, so we obtain that $\eta(t)$ is analytic in the time intervals $[\frac{3T_0}{2}, 2T_0], [2T_0, \frac{5T_0}{2}] \dots$ Recalling local analyticity (5.5.3), we finally obtain

$$\left\|\eta(t)\right\|_{\sigma(t)}^2 \leq 1 + 2C_{\varepsilon,\beta,\delta,\eta_0}^2 \text{ for any } t > 0.$$

This completes our proof. \square

Remark 5.5.4. It is of interest to point out that the global analyticity of the solution which we show here is better than the result in [GBH15], where the argument given by the authors can be extended to prove the global analyticity of solutions of the Kuramoto-Sivashinsky equation, outside a set of time instants with zero measure.

5.6 Existence of attractor and the number of peaks

In this section, we are interested in the existence of the attractor and its properties. By applying the Theorem 1.1 in [Tem97], we can prove that the initial value problem (5.2.2) possesses a compact global attractor in $H^2(\mathbb{T}^2)$. First, we denote by $S(t)$ the solution operator, where $S(t)\eta_0 = \eta(x, y, t)$.

Definition 5.6.1. The solution operator $S(t)\eta_0 = \eta(x, y, t)$ defines a compact semiflow in H^2 , if for every initial data $\eta_0 \in H^2$, the following four statements holds :

- (i) $S(0)\eta_0 = \eta_0$;
- (ii) $S(t+s)\eta_0 = S(t)S(s)\eta_0$, for all t, s ;
- (iii) For every $t > 0$,

$$S(t)(\cdot) : H^2 \rightarrow H^2$$

is continuous ;

- (iv) There exists $T^* > 0$ such that $S(T^*)$ is a compact operator, i.e. for every bounded set $B \subset H^2$, $S(T^*)B \subset H^2$ is a compact set.

Definition 5.6.2. An attractor $\mathcal{A} \subset H^2$ is a set that satisfies the following properties :

- (i) \mathcal{A} is an invariant set, i.e., $S(t)\mathcal{A} = \mathcal{A}, \forall t \geq 0$;
- (ii) there is an open neighborhood $\mathcal{B} \subset H^2$ of \mathcal{A} such that, for every η_0 in \mathcal{B} , $S(t)\eta_0$ converges to \mathcal{A} as $t \rightarrow \infty$:

$$\text{dist}(S(t)\eta_0, \mathcal{A}) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty.$$

We shall need the following lemma :

Lemma 5.6.3. *Let $\eta_0 \in H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$ be the initial data. Then $S(\cdot)\eta_0 \in \mathcal{C}([0, T]; H_{od}^2(\mathbb{T}^2))$ defines a compact semiflow in $H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$.*

proof. In order to show that $S(t)\eta_0 = \eta(\cdot, \cdot, t)$ defines a compact semiflow, we must verify (i)-(iv) in definition 5.6.1. If we fix a t_0 , the continuity of $S(t_0)(\cdot)$ from H_{od}^2 to H_{od}^2 is straightforward by energy estimates. Then, as in Theorem 5.4.4, we have the existence of an absorbing set in H_{od}^2 -norm, so there exists T^* such that

$$\|\eta(t)\|_{H_{od}^2} \leq R'_{\varepsilon, \delta, \beta, \eta_0}, \quad \forall t \geq T^*.$$

Since (i) and (ii) are obvious, we conclude our proof by invoking the analyticity of solutions. \square

Theorem 5.6.4. *The system (5.2.2) has a maximal, connected, compact attractor in the space $H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$.*

proof. By applying Theorem 1.1 in [Tem97] and Lemma 5.6.3. \square

The rest of this section is devoted to studying a particular feature of the chaotic behavior of (5.2.2), namely, the number of spatial oscillations. We shall need the lemma proved by Grujić in [Gru00], which gives us an effective method to study the number of peaks (see also [GBH15, BGB16]). We cannot use directly the method in [Gru00], mainly because Lemma 8.1 in [Gru00] is quite suitable to bound the number of peaks in one space dimension, but not appropriate for our two-dimensional model.

We first let $\eta(x, y) = f_y(x)$, where $f_y(x)$ depends on both x and y . Then our original problem (5.2.2) deduces to

$$\partial_t f_y + f_y \partial_x f_y + (\beta - 1) \partial_x^2 f_y + F_y(x) = 0, \quad (5.6.1)$$

where $F_y(x) = -\eta_{yy}(x, y) - \delta \Lambda^3(\eta)(x, y) + \varepsilon \Delta^2 \eta(x, y)$ can be seen as a forcing term.

In the previous section, we have shown that $\eta(x, y, t)$ is analytic in a growing complex strip

$$\mathbb{S}_{\sigma(t)} = \{(x, y) + i(\tilde{x}, \tilde{y}) : (x, y) \in \mathbb{T}^2, |(\tilde{x}, \tilde{y})| < \sigma(t)\}.$$

Recalling that $\eta(x, y, t) = f_y(x, t)$, then $f_y(x, t)$ is analytic in

$$\mathbb{S}'_{\sigma(t)} = \{x + i\tilde{x} : x \in \mathbb{T}, |\tilde{x}| < \sigma(t)\}.$$

Now we use the following Lemma (from [Gru00]) :

Lemma 5.6.5. *Fix y in problem (5.6.1). Let $\sigma > 0$, and let $f_y(x)$ be analytic in the neighbourhood of $\{z = x + i\tilde{x} : |\Im z| \leq \sigma\}$ and be 2π -periodic in x -direction. Then, for any $\mu > 0$, $\mathbb{T} = I_\mu \cup R_\mu$, where I_μ is a union of at most $\lceil \frac{4\pi}{\sigma} \rceil$ intervals open in \mathbb{T} , and*

- $|\partial_x f_y(x)| \leq \mu$, for all $x \in I_\mu$;
- $\text{card} \{x \in R_\mu : \partial_x f_y(x) = 0\} \leq \frac{2}{\log 2} \frac{2\pi}{\sigma} \log \left(\frac{\max_{|\Im z| \leq \sigma} |\partial_x f_y(z)|}{\mu} \right).$

With the help of the lemma above, we have our main result.

Theorem 5.6.6. *Let η be a solution of system (5.2.2) for initial data $\eta_0 \in H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$ and define T_0 as in Theorem 5.5.1. Then, $\mathbb{T} = I \cup R$, where I is a union of at most $\lceil \frac{4\pi}{\tanh(\frac{T_0}{2})} \rceil$ open intervals in \mathbb{T} and the following estimates hold for $t \geq \frac{T_0}{2}$,*

$$|\partial_x \eta(x, y, t)| \leq 1, \quad \text{for all } x \in I, y \in \mathbb{T}$$

and

$$\text{card}\{x \in R : |\nabla \eta(x, y, t)| = 0\} \leq \frac{4\pi}{\log 2} \frac{\log C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}}{\tanh\left(\frac{T_0}{2}\right)}.$$

where $C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}$ is a constant depending on $\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0$.

proof. From the results of Theorem 5.5.1 and Theorem 5.6.4, we know that the system has an attractor and the solution η is analytic at least in the strip of width $\sigma(t)$.

Now, we can apply Lemma 5.6.5 with $\mu = 1$ and bound

$$\begin{aligned} \text{card}\{x \in R : |\nabla \eta(x, y, t)| = 0\} &\leq \text{card}\{x \in R : \partial_x \eta = 0\} \\ &\leq \frac{2}{\log 2} \frac{2\pi}{\sigma} \log \left(\frac{\max_{|\Im z| \leq \sigma} |\partial_x \eta(z, y, t)|}{\mu} \right) \\ &\leq \frac{4\pi}{\log 2} \frac{1}{\sigma} \log \left(C \left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta \right\|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

In the last inequality above, we used the following estimate

$$\begin{aligned} \left\| \partial_x \eta(z, y, t) \right\|_{L^\infty(|\Im z| \leq \frac{\sigma}{2})} &= \left\| \partial_x \eta(x + i\tilde{x}, y, t) \right\|_{L^\infty(|\Im z| \leq \frac{\sigma}{2})} \\ &\leq \left\| \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2} |\xi_1| \hat{\eta}(\xi_1, \xi_2, t) e^{i(x\xi_1 + y\xi_2)} e^{-\tilde{x}\xi_1} \right\|_{L^\infty(|\Im z| \leq \frac{\sigma}{2})} \\ &\leq \left\| \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2} |\xi| |\hat{\eta}(\xi_1, \xi_2, t)| e^{|\tilde{x}||\xi|} \right\|_{L^\infty(|\Im z| \leq \frac{\sigma}{2})} \\ &\leq \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2} |\xi| |\hat{\eta}(\xi_1, \xi_2, t)| e^{\frac{\sigma(t)}{2}|\xi|} \\ &\leq \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2} |\xi|^3 |\hat{\eta}(\xi_1, \xi_2, t)| e^{\frac{\sigma(t)}{2}|\xi|} \frac{1}{|\xi|^2} \\ &\leq \sum_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2} \hat{\eta}(\xi_1, \xi_2, t) e^{\sigma(t)|\xi|} \frac{1}{|\xi|^2} \\ &\leq \left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta \right\|_{L^2} \left(\sum_{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{Z}^2} \frac{1}{|\xi|^4} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta \right\|_{L^2} \end{aligned}$$

where we used the fact that

$$|\xi|^3 e^{\frac{\sigma(t)}{2}|\xi|} \leq C e^{\sigma(t)|\xi|}.$$

Since η has global analyticity

$$\left\| e^{\sigma(t)\Lambda} \eta(t) \right\|_{L^2} \leq 1 + 2C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}, \quad \forall t \geq 0,$$

we can conclude that for $t \geq \frac{T_0}{2}$

$$\text{card}\{x \in R : |\nabla \eta(x, y, t)| = 0\} \leq \frac{4\pi}{\log 2} \frac{\log C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}}{\tanh\left(\frac{T_0}{2}\right)}.$$

where $C_{R_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}}$ depends on $R_{\varepsilon, \delta, \beta}$ and η_0 . □

Theorem 5.6.6 gives us a bound of the number of wild spatial oscillations of the solution, then the following corollary is a direct result of it.

Corollary 5.6.7. *Let η be a solution corresponding to the initial data $\eta_0 \in H_{od}^2(\mathbb{T}^2)$, then for $t \geq \frac{T_0}{2}$, the number of peaks for η can be bounded as*

$$\text{card} \{ \text{peaks for } \eta \} \leq \frac{4\pi}{\log 2} \frac{\log C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}}{\tanh\left(\frac{T_0}{2}\right)}.$$

where $C_{\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0}$ depends on $\varepsilon, \beta, \delta, \eta_0$ and T_0 is defined as before.

Function spaces

Let us recall some basic properties of function spaces. Let (X, μ) be a measure space. For $0 < p < \infty$, we define the L^p norm of a function f by

$$\|f\|_{L^p(X, \mu)} = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

and for $p = \infty$ by

$$\|f\|_{L^\infty(X, \mu)} = \text{ess sup } |f(x)| = \inf\{B > 0 : \mu(\{x : |f(x)| > B\}) = 0\}.$$

Theorem (Hölder inequality [Gra08]). *Assume that $f \in L^p$ and $g \in L^{p'}$ with $1 \leq p \leq \infty$. Then $fg \in L^1$ and*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Theorem (Young's inequality [Gra08]). *Assume that $f \in L^p$ and $g \in L^r$ with $1 \leq p, q, r \leq \infty$ satisfying $\frac{1}{q} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$. Then*

$$\|f * g\|_{L^q} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^r}.$$

In the chapter 4, we make extensive use of the Lorentz spaces $L^{p,q}$. For completeness, let us recall their definition and some properties in this section. Suppose that f is a measurable function on a measure space (X, μ) . For any $0 < p < \infty$, the weak- $L^p(X, \mu)$ space is defined to consist of all functions $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ so that

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \lambda\})^{\frac{1}{p}} < +\infty$$

If $p = \infty$, then we set $L^{\infty,\infty} := L^\infty$. We know that L^p spaces are strictly contained in weak- L^p spaces. The boundedness of Leray's projector \mathbb{P} on L^p implies that it is also a bounded operator on $L^{p,\infty}$.

The Lorentz space with indices $0 < p, q \leq \infty$ is defined as

$$\|f\|_{L^{p,q}} := \left\| \lambda \mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \lambda\})^{\frac{1}{p}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^+; \frac{d\lambda}{\lambda})}.$$

The Hölder inequality in Lorentz spaces can be stated as the following :

Theorem (Hölder inequality in Lorentz spaces [LR02]). *Suppose that*

$$1 < p_1, p_2, p < \infty, \quad 1 < q_1, q_2, q \leq \infty, \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Then the pointwise product is a bounded bilinear operator from $L^{p_1, q_1} \times L^{p_2, q_2}$ to $L^{p, q}$, from $L^{p, q} \times L^\infty$ to $L^{p, q}$, from $L^{p, q} \times L^{p', q'}$ to L^1 where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

Theorem (Convolution in Lorentz spaces [LR02]). *Suppose that*

$$1 < p_1, p_2, p < \infty, \quad 1 < q_1, q_2, q \leq \infty, \quad 1 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Then the convolution is a bounded bilinear operator from $L^{p_1, q_1} \times L^{p_2, q_2}$ to $L^{p, q}$, from $L^{p, q} \times L^1$ to $L^{p, q}$, from $L^{p, q} \times L^{p', q'}$ to L^∞ where $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ and $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$.

In the chapter 4, we also work with functions that are only locally in some L^p space. We denote $L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d)$ the space of functions that lie in $L^p(K)$ for any compact set K in \mathbb{R}^d . The union of all $L^p(\mathbb{R}^d)$ spaces for $1 \leq p \leq \infty$ is contained in $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$. More generally, for $0 < p < q < \infty$ we have the following :

$$L^q(\mathbb{R}^d) \subseteq L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^d) \subseteq L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^d).$$

Kato's space

We give in this Appendix the following results to complete the proof of Chapter 4. For Navier-Stokes equations, Kato [Kat84] defined a space in which the iterative schema can be applied. For $p \in [3, \infty]$ and $T \in (0, \infty)$, define $K_p(T)$ by

$$K_p(T) := \left\{ u \in C((0, T]; L^p) : \|u\|_{K_p(T)} = \sup_{(0, T]} t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2p}} \|u\|_{L^p} < \infty \right\}.$$

The following result shows that bilinear operator $B_1(u, v)$ is continuous (see its definition (4.1.3a)).

Lemma. ([LR16]) *Let $1 \leq p, q, r \leq \infty$ be such that*

$$\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{3} + \frac{1}{r}.$$

For any $T > 0$, the bilinear transform $B_1(u, v) : K_p(T) \times K_q(T) \rightarrow K_r(T)$ is continuous and bilinear.

Proof. We write $B_1(u, v)$ as

$$B_1(u, v) = - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes v)(s) ds = - \int_0^t K_{t-s} * (u \otimes v)(s) ds.$$

where K_{t-s} is the kernel of the convolution operator $e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla$ and satisfies

$$\|K_{t-s}(\cdot)\|_{L^b} \leq C(t-s)^{\frac{3}{2b}-2}.$$

By Young's inequality for the convolution of two functions and Hölder inequality, we estimate

$$\begin{aligned}
\|B_1(u, v)\|_{L^r} &\leq \int_0^t \|K_{t-s} * (u \otimes v)(s)\|_{L^r} ds \\
&\leq \int_0^t \|K_{t-s}\|_{L^b} \|u(s)v(s)\|_{L^a} ds \\
&\leq \int_0^t \|K_{t-s}\|_{L^b} \|u(s)\|_{L^p} \|v(s)\|_{L^q} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2b}-2} \|u(s)\|_{L^p} \|v(s)\|_{L^q} ds \\
&\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2b}-2} s^{\frac{3}{2p}-\frac{1}{2}} s^{\frac{3}{2q}-\frac{1}{2}} \sup_{(0,T]} s^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2p}} \|u(s)\|_{L^p} \sup_{(0,T]} s^{\frac{1}{2}-\frac{3}{2q}} \|v(s)\|_{L^q} ds
\end{aligned}$$

where $a, b, r \in [1, \infty]$ satisfy

$$1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \quad \text{and} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{a} \in [0, 1].$$

Hence,

$$\begin{aligned}
\|B_1(u, v)\|_{L^r} &\leq C \int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2b}-2} s^{\frac{3}{2a}-1} ds \|u(t)\|_{K_p(T)} \|v(t)\|_{K_q(T)} \\
&\leq C t^{\frac{3}{2r}-\frac{1}{2}} \|u(t)\|_{K_p(T)} \|v(t)\|_{K_q(T)}
\end{aligned}$$

where we used

$$\int_0^t (t-s)^{\frac{3}{2b}-2} s^{\frac{3}{2a}-1} ds \leq \int_0^1 t^{\frac{3}{2r}-\frac{1}{2}} (1-z)^{\frac{3}{2b}-2} z^{\frac{3}{2a}-1} dz \leq C t^{\frac{3}{2r}-\frac{1}{2}}$$

The last inequality follows by

$$\int_0^1 (1-z)^{\frac{3}{2b}-2} z^{\frac{3}{2a}-1} dz \leq C$$

provided $-1 < \frac{3}{2b} - 2 \leq -\frac{1}{2}$.

By the definition of Kato space $K_p(T)$, we have

$$\|B_1(u, v)\|_{K_r(T)} \leq C \|u(t)\|_{K_p(T)} \|v(t)\|_{K_q(T)}.$$

This completes the proof of the lemma. \square

The following lemma is given firstly by Meyer [Mey96], which is the key ingredient for the Lorentz approach in the proof of uniqueness in L^3 of the ‘mild’ solutions of Navier-Stokes equations.

Lemma. ([Mey96]) For $u \in L^\infty((0, \infty); L^{3,\infty})$, then,

$$\int_0^\infty e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} u^2(s, \cdot) ds \in L^{3,\infty}.$$

Proof. Set $f = u^2 \in L^\infty((0, \infty); L^{\frac{3}{2},\infty})$. We split the integral $\int_0^\infty e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) ds$ into $G_\tau + H_\tau$, with

$$G_\tau = \int_0^\tau e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) ds \quad \text{and} \quad H_\tau = \int_\tau^\infty e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) ds.$$

We estimate

$$\begin{aligned}
\|H_\tau\|_{L^\infty} &= \int_\tau^\infty \left\| e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) \right\|_{L^{\infty,\infty}} ds \\
&\leq C \int_\tau^\infty s^{-\frac{3}{2}} ds \sup_{s>0} \|f(s)\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} \\
&\leq C \tau^{-\frac{1}{2}} \sup_{s>0} \|f(s)\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} \\
&\leq C' \tau^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Let $C' \tau^{-\frac{1}{2}} = \frac{\lambda}{2}$, thus

$$\|H_\tau\|_{L^\infty} \leq \frac{\lambda}{2}.$$

If $|\int_0^\infty e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} (u^2)(s) ds| > \lambda$, we have

$$|G_\tau| = \left| \int_0^\tau e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) ds \right| > \frac{\lambda}{2}.$$

We estimate

$$\begin{aligned}
\|G_\tau\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} &\leq \int_0^\tau \left\| e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) \right\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} ds \\
&\leq \int_0^\tau C s^{-\frac{1}{2}} \|f(s)\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} ds \\
&\leq C \tau^{\frac{1}{2}} \sup_{s>0} \|f(s)\|_{L^{\frac{3}{2},\infty}} \\
&\leq C' \tau^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

By definition of $L^{\frac{3}{2},\infty}$,

$$\sup_{\lambda>0} \frac{\lambda}{2} \mu \left\{ x : \left| \int_0^\tau e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) ds \right| > \frac{\lambda}{2} \right\}^{\frac{2}{3}} \leq C' \tau^{\frac{1}{2}}.$$

Thus,

$$\sup_{\lambda>0} \lambda^3 \mu \left\{ x : \left| \int_0^\infty e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} f(s) ds \right| > \lambda \right\} \leq C.$$

We conclude that

$$\int_0^\infty e^{s\Delta} \sqrt{-\Delta} u^2(s, \cdot) ds \in L^{3,\infty}.$$

□

Fractional Laplacian

In chapter 5, we use the nonlocal operator Λ . Let us introduce some preliminary properties about fractional laplacian.

The fractional Laplacian $(-\Delta)^s$ is a classical operator which gives the standard Laplacian when $s = 1$. One can think of $(-\Delta)^s$ as the most basic elliptic linear integro-differential operator of order $2s$ and can be defined in several equivalent ways. As a Fourier multiplier, the fractional Laplacian is the operator with symbol $|\xi|^{2s}$. In other words, the following formula

holds

$$\widehat{(-\Delta)^s \eta}(\xi) = |\xi|^{2s} \hat{\eta}(\xi).$$

for any function for which the right hand side makes sense.

When $s = 1/2$, it is the nonlocal operator we used in chapter 5. We define the operator Λ to be the square root of the positive operator $-\Delta$:

$$\widehat{\Lambda \eta}(\xi) = |\xi| \hat{\eta}(\xi).$$

Since the operator $-\Delta$ is a self-adjoint positive operator, Λ is also self-adjoint. More properties for Λ , see [CC04].

- [Abi09] Hammadi Abidi. Sur l'unicité pour le système de Boussinesq avec diffusion non linéaire. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 91(1) :80–99, 2009.
- [AH07] Hammadi Abidi and Taoufik Hmidi. On the global well-posedness for Boussinesq system. *Journal of Differential Equations*, 233(1) :199–220, 2007.
- [AHK11] Hammadi Abidi, Taoufik Hmidi, and Sahbi Keraani. On the global regularity of axisymmetric Navier-Stokes-Boussinesq system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S*, 29(3) :737–756, 2011.
- [BA94] Matania Ben-Artzi. Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 128(4) :329–358, 1994.
- [BCD11] Hajer Bahouri, Jean-Yves Chemin, and Raphaël Danchin. *Fourier analysis and nonlinear partial differential equations*, volume 343. Springer Science & Business Media, 2011.
- [BG06] Jared C Bronski and Thomas N Gambill. Uncertainty estimates and L^2 bounds for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Nonlinearity*, 19(9) :2023, 2006.
- [BGB16] Jan Burczak and Rafael Granero-Belinchón. On a generalized doubly parabolic Keller–Segel system in one spatial dimension. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 26(01) :111–160, 2016.
- [BH18] Lorenzo Brandolese and Jiao He. Uniqueness theorems for the boussinesq system. *arXiv preprint arXiv :1810.13154*, 2018.
- [BM17] Lorenzo Brandolese and Charafeddine Mouzouni. A short proof of the large time energy growth for the Boussinesq system. *Journal of Nonlinear Science*, 27(5) :1589–1608, 2017.
- [Bra09] Lorenzo Brandolese. Fine properties of self-similar solutions of the navier–stokes equations. *Archive for rational mechanics and analysis*, 192(3) :375–401, 2009.
- [Bre94] Haïm. Brezis. Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi : “Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations”. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 128(4) :359–360, 1994.
- [BS12] Lorenzo Brandolese and Maria Schonbek. Large time decay and growth for solutions of a viscous Boussinesq system. *Transactions of the American Mathematical Society*, 364(10) :5057–5090, 2012.
- [Cal90] Calixto P Calderón. Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p . *Transactions of the American Mathematical Society*, 318(1) :179–200, 1990.
- [Can04] Marco Cannone. Harmonic analysis tools for solving the incompressible Navier-Stokes equations. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, 3 :161–244, 2004.
- [CC04] Antonio Córdoba and Diego Córdoba. A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations. *Communications in mathematical physics*, 249(3) :511–528, 2004.

- [CD80] JR Cannon and Emmanuele DiBenedetto. The initial value problem for the Boussinesq equations with data in L^p . In *Approximation methods for Navier-Stokes problems*, pages 129–144. Springer, 1980.
- [CEES93a] Pierre Collet, J-P Eckmann, Henri Epstein, and Joachim Stubbe. Analyticity for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 67(4) :321–326, 1993.
- [CEES93b] Pierre Collet, Jean-Pierre Eckmann, Henri Epstein, and Joachim Stubbe. A global attracting set for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Communications in Mathematical Physics*, 152(1) :203–214, 1993.
- [CH93] Adrian V Coward and Philip Hall. On the nonlinear interfacial instability of rotating core-annular flow. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 5(6) :269–289, 1993.
- [Cha06] Dongho Chae. Global regularity for the 2D Boussinesq equations with partial viscosity terms. *Advances in Mathematics*, 203(2) :497–513, 2006.
- [Che99] Jean-Yves Chemin. Théorèmes d’unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel. *Journal d’analyse mathématique*, 77(1) :27–50, 1999.
- [CJG⁺14] Michel Chipot, Droniou Jerome, Planas Gabriela, Robinson James C., and Xue Wei. Limits of the Stokes and Navier-Stokes equations in a punctured periodic domain. *arXiv preprint arXiv :1407.69427*, 2014.
- [CJSMT00] Carlos Conca, H Jorge San Martin, and Marius Tucsnak. Existence of solutions for the equations modelling the motion of a rigid body in a viscous fluid. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(5-6) :1019–1041, 2000.
- [CKTR76] Bruce Ira Cohen, JA Krommes, WM Tang, and MN Rosenbluth. Non-linear saturation of the dissipative trapped-ion mode by mode coupling. *Nuclear fusion*, 16(6) :971, 1976.
- [CT08] Patricio Cumsille and Takéo Takahashi. Well posedness for the system modelling the motion of a rigid body of arbitrary form in an incompressible viscous fluid. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 58(4) :961–992, 2008.
- [DE99] Benoît Desjardins and Maria J. Esteban. Existence of weak solutions for the motion of rigid bodies in a viscous fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 146(1) :59–71, 1999.
- [DE00] Benoît Desjardins and Maria J. Esteban. On weak solutions for fluid-rigid structure interaction : Compressible and incompressible models. *Communications in Partial Differential Equations*, 25(7-8) :263–285, 2000.
- [DP08a] Raphaël Danchin and Marius Paicu. Existence and uniqueness results for the Boussinesq system with data in Lorentz spaces. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 237(10-12) :1444–1460, 2008.
- [DP08b] Raphaël Danchin and Marius Paicu. Les théorèmes de Leray et de Fujita-Kato pour le système de Boussinesq partiellement visqueux. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 136(2) :261–309, 2008.
- [EHL14] Sylvain Ervedoza, Matthieu Hillaire, and Christophe Lacave. Long-time behavior for the two-dimensional motion of a disk in a viscous fluid. *Communications in Mathematical Physics*, 329(1) :325–382, 2014.
- [Fei03a] Eduard Feireisl. On the motion of rigid bodies in a viscous compressible fluid. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 167(4) :281–308, 2003.
- [Fei03b] Eduard Feireisl. On the motion of rigid bodies in a viscous incompressible fluid. *J. Evol. Equ.*, 3(3) :419–441, 2003. Dedicated to Philippe Bénilan.
- [FI99] AL Frenkel and K Indireskumar. Wavy film flows down an inclined plane : perturbation theory and general evolution equation for the film thickness. *Physical Review E*, 60(4) :4143, 1999.
- [FK64] Hiroshi Fujita and Tosio Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Archive for rational mechanics and analysis*, 16(4) :269–315, 1964.

- [FLRT97] Giulia Furioli, Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, and Elide Terraneo. Sur l'unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions «mild» des équations de Navier-Stokes. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 325(12) :1253–1256, 1997.
- [FLRT00] Giulia Furioli, Pierre-Gilles Lemarié-Rieusset, and Elide Terraneo. Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16 :269–315, 2000.
- [FNT15] Reinhard Farwig, Tomoyuki Nakatsuka, and Yasushi Taniuchi. Existence of solutions on the whole time axis to the Navier-Stokes equations with precompact range in L^3 . *Archiv der Mathematik*, 104(6) :539–550, 2015.
- [FT89] CIPRIAN Foias and ROGER Temam. Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations. *Journal of Functional Analysis*, 87(2) :359–369, 1989.
- [GBH15] Rafael Granero-Belinchón and John K Hunter. On a nonlocal analog of the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Nonlinearity*, 28(4) :1103, 2015.
- [GC96] A Gonzalez and A Castellanos. Nonlinear electrohydrodynamic waves on films falling down an inclined plane. *Physical Review E*, 53(4) :3573, 1996.
- [GLS00] Max D Gunzburger, H-C Lee, and Gregory A Seregin. Global existence of weak solutions for viscous incompressible flows around a moving rigid body in three dimensions. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2(3) :219–266, 2000.
- [GLS14] Olivier Glass, Christophe Lacave, and Franck Sueur. On the motion of a small body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid. *Bulletin de la société mathématique de France*, 142(3) :489–536, 2014.
- [GLS16] Olivier Glass, Christophe Lacave, and Franck Sueur. On the motion of a small light body immersed in a two dimensional incompressible perfect fluid with vorticity. *Communications in Mathematical Physics*, 341(3) :1015–1065, 2016.
- [GMS18] Olivier Glass, Alexandre Munnier, and Franck Sueur. Point vortex dynamics as zero-radius limit of the motion of a rigid body in an irrotational fluid. *Invent. Math.*, 214(1) :171–287, 2018.
- [GO05] Lorenzo Giacomelli and Felix Otto. New bounds for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58(3) :297–318, 2005.
- [Goo94] Jonathan Goodman. Stability of the Kuramoto–Sivashinsky and related systems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 47(3) :293–306, 1994.
- [GP02] Isabelle Gallagher and Fabrice Planchon. On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations in two dimensions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 161(4) :307–337, 2002.
- [Gra08] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*, volume 2. Springer, 2008.
- [Gru00] Zoran Grujić. Spatial analyticity on the global attractor for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 12(1) :217–228, 2000.
- [GS02] Giovanni P Galdi and Ana L Silvestre. Strong solutions to the problem of motion of a rigid body in a Navier-Stokes liquid under the action of prescribed forces and torques. *Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, I*, 1 :121–144, 2002.
- [HGB19] Jiao He and Rafael Granero-Belinchón. On the dynamics of 3d electrified falling films, 2019. en cours.
- [HI18] Jiao He and Dragoş Iftimie. A small solid body with large density in a planar fluid is negligible. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, pages 1–18, 2018.
- [HI19] Jiao He and Dragoş Iftimie. On the small rigid body limit in 3d incompressible flow, 2019. Submitted.
- [HK07] Taoufik Hmidi and Sahbi Keraani. On the global well-posedness of the two-dimensional Boussinesq system with a zero diffusivity. *Advances in Differential Equations*, 12(4) :461, 2007.

- [HL05] Thomas Y Hou and Congming Li. Global well-posedness of the viscous Boussinesq equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 12(1) :1–12, 2005.
- [HR10] Taoufik Hmidi and Frédéric Rousset. Global well-posedness for the Navier–Stokes–Boussinesq system with axisymmetric data. *Annales de l’IHP Analyse non linéaire*, 27(5) :1227–1246, 2010.
- [HS99] Karl-Heinz Hoffmann and VN Starovoitov. On a motion of a solid body in a viscous fluid : two-dimensional case. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 9(2) :633–648, 1999.
- [HSMT10] Jean Gabriel Houot, Jorge San Martin, and Marius Tucsnak. Existence of solutions for the equations modeling the motion of rigid bodies in an ideal fluid. *J. Funct. Anal.*, 259(11) :2856–2885, 2010.
- [IK09] Dragoş Iftimie and James Kelliher. Remarks on the vanishing obstacle limit for a 3D viscous incompressible fluid. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(2) :685–694, 2009.
- [Il’92] Ju S Il’Yashenko. Global analysis of the phase portrait for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 4(4) :585–615, 1992.
- [ILN03] Dragoş Iftimie, Filho Milton C Lopes, and Lopes HJ Nussenzveig. Two dimensional incompressible ideal flow around a small obstacle. *Communications in Partial Differential Equations*, 2003.
- [ILN06] Dragoş Iftimie, Filho Milton C Lopes, and Lopes HJ Nussenzveig. Two-dimensional incompressible viscous flow around a small obstacle. *Mathematische Annalen*, 336(2) :449–489, 2006.
- [IS14] Xenakis Ioakim and Yiorgos-Sokratis Smyrlis. Analyticity for Kuramoto–Sivashinsky type equations and related systems. *Procedia IUTAM*, 11 :69–80, 2014.
- [Jud74] NV Judakov. The solvability of the problem of the motion of a rigid body in a viscous incompressible fluid. *Dinamika Splošn. Sredy*, 18 :249–253, 1974.
- [JW18] Martin James and Michael Wilczek. Vortex dynamics and lagrangian statistics in a model for active turbulence. *The European Physical Journal E*, 41(2) :21, 2018.
- [Kat84] Tosio Kato. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, 187(4) :471–480, 1984.
- [Koz95] Hideo Kozono. Local and global solvability of the Navier-Stokes exterior problem with cauchy data in the space $L^{n,\infty}$. *Houston J. Math.*, 21 :755–799, 1995.
- [KT76] Yoshiki Kuramoto and Toshio Tsuzuki. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium. *Progress of theoretical physics*, 55(2) :356–369, 1976.
- [Lac09a] Christophe Lacave. Two dimensional incompressible ideal flow around a thin obstacle tending to a curve. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 26(4) :1121–1148, 2009.
- [Lac09b] Christophe Lacave. Two-dimensional incompressible viscous flow around a thin obstacle tending to a curve. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics*, 139(06) :1237–1254, 2009.
- [Lac15] Christophe Lacave. 3D viscous incompressible fluid around one thin obstacle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 143(5) :2175–2191, 2015.
- [LC82] YC Lee and HH Chen. Nonlinear dynamical models of plasma turbulence. *Physica Scripta*, 1982(T2A) :41, 1982.
- [Ler34] J Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, 63(1) :193–248, 1934.
- [Lio69] Jacques-Louis Lions. *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod ; Gauthier-Villars, Paris, 1969.

- [LM98] Pierre-Louis Lions and Nader Masmoudi. Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans $L^N(\Omega)$. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics*, 327(5) :491–496, 1998.
- [LM01] Pierre-Louis Lions and Nader Masmoudi. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes system in L^N . *Communications in Partial Differential Equations*, 26(11-12) :2211–2226, 2001.
- [LMRT75] Robert Eugene LaQuey, SM Mahajan, PH Rutherford, and WM Tang. Nonlinear saturation of the trapped-ion mode. *Physical Review Letters*, 34(7) :391, 1975.
- [LR02] Pierre Gilles Lemarié-Rieusset. *Recent developments in the Navier-Stokes problem*. CRC Press, 2002.
- [LR16] Pierre Gilles Lemarié-Rieusset. *The Navier-Stokes problem in the 21st century*. Chapman and Hall/CRC, 2016.
- [LT17] Christophe Lacave and Takéo Takahashi. Small moving rigid body into a viscous incompressible fluid. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 223(3) :1307–1335, 2017.
- [Lun12] Alessandra Lunardi. *Analytic semigroups and optimal regularity in parabolic problems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [MB02] Andrew J Majda and Andrea L Bertozzi. *Vorticity and incompressible flow*, volume 27. Cambridge university press, 2002.
- [Mey96] Yves Meyer. Wavelets, paraproducts, and Navier-Stokes equations. *Current developments in mathematics*, 1996(1) :105–212, 1996.
- [Mih62] John M. Mihaljan. A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid. *Astrophys. J.*, 136 :1126–1133, 1962.
- [Miy00] Tetsuro Miyakawa. On space-time decay properties of nonstationary incompressible Navier-Stokes flows in \mathbb{R}^n . *Funkcialaj Ekvacioj Serio Internacia*, 43(3) :541–558, 2000.
- [Mon99] Sylvie Monniaux. Uniqueness of mild solutions of the Navier-Stokes equation and maximal L^p -regularity. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(8) :663–668, 1999.
- [MS77] DM Michelson and GI Sivashinsky. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—II. numerical experiments. *Acta Astronautica*, 4(11-12) :1207–1221, 1977.
- [NS84] Basil Nicolaenko and Bruno Scheurer. Remarks on the kuramoto-sivashinsky equation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 12(1-3) :391–395, 1984.
- [NST85] Basil Nicolaenko, Bruno Scheurer, and Roger Temam. Some global dynamical properties of the Kuramoto-Sivashinsky equations : nonlinear stability and attractors. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 16(2) :155–183, 1985.
- [ORT05] Jaime H Ortega, Lionel Rosier, and Takéo Takahashi. Classical solutions for the equations modelling the motion of a ball in a bidimensional incompressible perfect fluid. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39(1) :79–108, 2005.
- [ORT07] Jaime Ortega, Lionel Rosier, and Takéo Takahashi. On the motion of a rigid body immersed in a bidimensional incompressible perfect fluid. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 24(1) :139–165, 2007.
- [Oru98] Frédérique Oru. Rôle des oscillations dans quelques problèmes d’analyse non linéaire. 1998.
- [Ose11] Carl Wilhelm Oseen. Sur les formules de green généralisées qui se présentent dans l’hydrodynamique et sur quelquesunes de leurs applications. *Acta Mathematica*, 34(1) :205–284, 1911.
- [OT18] Takahiro Okabe and Yohei Tsutsui. Remark on the strong solvability of the Navier–Stokes equations in the weak $L^{n,\infty}$ space. *preprint, arXiv :1711.08741v2*, 2018.
- [Pin99] Fred C Pinto. Nonlinear stability and dynamical properties for a Kuramoto-Sivashinsky equation in space dimension two. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 5(1) :117–136, 1999.

- [Pin01] Fred C Pinto. Analyticity and gevrey class regularity for a Kuramoto-Sivashinsky equation in space dimension two. *Applied mathematics letters*, 14(2) :253–260, 2001.
- [RR09] Carole Rosier and Lionel Rosier. Smooth solutions for the motion of a ball in an incompressible perfect fluid. *J. Funct. Anal.*, 256(5) :1618–1641, 2009.
- [Ser87] Denis Serre. Chute libre d’un solide dans un fluide visqueux incompressible. existence. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, 4(1) :99–110, 1987.
- [Shk67] V Ya Shkadov. Wave flow regimes of a thin layer of viscous fluid subject to gravity. *Fluid Dynamics*, 2(1) :29–34, 1967.
- [Siv77] GI Sivashinsky. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames—i. derivation of basic equations. *Acta astronautica*, 4(11-12) :1177–1206, 1977.
- [SM80] GI Sivashinsky and DM Michelson. On irregular wavy flow of a liquid film down a vertical plane. *Progress of Theoretical Physics*, 63(6) :2112–2114, 1980.
- [SMST02] Jorge Alonso San Martín, Victor Starovoitov, and Marius Tucsnak. Global weak solutions for the two-dimensional motion of several rigid bodies in an incompressible viscous fluid. *Archive for Rational Mechanics and analysis*, 161(2) :113–147, 2002.
- [ST04] Okihito Sawada and Yasushi Taniuchi. On the Boussinesq flow with nondecaying initial data. *Funkcialaj Ekvacioj*, 47(2) :225–250, 2004.
- [ST14] Ana Leonor Silvestre and Takéo Takahashi. The motion of a fluid-rigid ball system at the zero limit of the rigid ball radius. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 211(3) :991–1012, 2014.
- [Sue12] Franck Sueur. A kato type theorem for the inviscid limit of the navier-stokes equations with a moving rigid body. *Communications in Mathematical Physics*, 316(3) :783–808, 2012.
- [Tad86] Eitan Tadmor. The well-posedness of the Kuramoto–Sivashinsky equation. *SIAM Journal on Mathematical analysis*, 17(4) :884–893, 1986.
- [Tem79] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, Amsterdam, 1979.
- [Tem97] Roger Temam. *Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics*, volume 68. Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, 1997.
- [TK78] Jeffrey Topper and Takuji Kawahara. Approximate equations for long nonlinear waves on a viscous fluid. *Journal of the Physical society of Japan*, 44(2) :663–666, 1978.
- [TP06a] Dmitri Tseluiko and Demetrios T Papageorgiou. A global attracting set for nonlocal Kuramoto–Sivashinsky equations arising in interfacial electrohydrodynamics. *European Journal of Applied Mathematics*, 17(6) :677–703, 2006.
- [TP06b] Dmitri Tseluiko and Demetrios T Papageorgiou. Wave evolution on electrified falling films. *Journal of Fluid Mechanics*, 556 :361–386, 2006.
- [TP10] Dmitri Tseluiko and Demetrios T Papageorgiou. Dynamics of an electrostatically modified Kuramoto–Sivashinsky–Korteweg–de Vries equation arising in falling film flows. *Physical Review E*, 82(1) :016322, 2010.
- [TPP17] RJ Tomlin, Demetrios T Papageorgiou, and GA Pavliotis. Three-dimensional wave evolution on electrified falling films. *Journal of Fluid Mechanics*, 822 :54–79, 2017.
- [TT04] Takéo Takahashi and Marius Tucsnak. Global strong solutions for the two-dimensional motion of an infinite cylinder in a viscous fluid. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 6(1) :53–77, 2004.
- [WZ12] Yun Wang and Aibin Zang. Smooth solutions for motion of a rigid body of general form in an incompressible perfect fluid. *J. Differential Equations*, 252(7) :4259–4288, 2012.

Comportement d'un fluide autour d'un petit obstacle, problèmes de convections et dynamique chaotique des films liquides

Résumé. Cette thèse est consacrée à trois différentes équations d'évolution non-linéaires dans le cadre de mécanique des fluides : le système fluide-solide, le système de Boussinesq et un modèle de films liquides. Pour le système fluide-solide, nous étudions l'évolution d'un petit solide en mouvement dans un fluide newtonien incompressible dans le cas où l'obstacle se contracte vers un point. En supposant que la densité du solide tend vers l'infini, nous montrons la convergence des solutions du système fluide-solide vers une solution des équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^d , avec $d = 2$ et 3 . Pour le problème de convection, nous travaillons sur l'unicité des solutions 'mild' du système de Boussinesq et généralise de plusieurs manières différentes des résultats classiques d'unicité pour les équations de Navier-Stokes. Dans la dernière partie, nous exposons nos contributions à l'étude des interface 2D de films liquides en dimension trois. Nous montrons qu'une variante 2D, non-local, de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky admet un attracteur globale compact et obtenons enfin une majoration du nombre d'oscillations spatiales des solutions.

Mots-clés : Les équations de Navier-Stokes ; Le système fluide-solide ; Petit obstacle ; Limite singulière ; Le système de Boussinesq ; Les films liquides.

Motion of a small rigid body in an incompressible viscous fluid, convection problems and dynamics of falling films.

Abstract. This thesis is devoted to three different non-linear evolution equations in fluid mechanics : the fluid-solid system, the Boussinesq system and a falling films model. For the fluid-solid system, we study the evolution of a small moving solid in incompressible viscous fluid in the case the obstacle converges to a point. Assuming that the density of the solid tends to infinity, we prove that the rigid body has no influence on the limit equation by showing the convergence of solutions of the fluid-solid system towards to a solution of the Navier-Stokes equations in the full \mathbb{R}^d , with $d = 2$ and 3 . For the convection problem, we provide several uniqueness classes on the velocity and the temperature and generalize some classical uniqueness result for 'mild' solutions of the Navier-Stokes equations. We then work on a falling films model in three dimensions (2D interface). We show that a non-local variant of the Kuramoto-Sivashinsky equation admits a compact global attractor and we study the number of spatial oscillations of the solutions.

Keywords: Navier-Stokes equations; Fluid-solid system; Small obstacle; Singular limit; Boussinesq system; Falling films.

Image de couverture: *Rapides sur le fleuve Jaune*, peinture de Yuan MA (1160-1225). Chinois. Peintre.



ED 512



Ecole doctorale

