

Mini-mémoire

Notes articles HMM

Jérôme HELLINCKX

17 novembre 2015

Table des matières

1	<i>Hidden Markov Models and their Applications in Biological Sequence Analysis</i>	2
1.1	Définition d'un MMC	2
1.2	Les 3 problèmes basiques d'un MMC	3
1.2.1	Problème d'évaluation	3
1.2.2	Problème de décodage	4
1.2.3	Problème d'entraînement	4
1.3	Variantes	4

Glossaire

chaîne de Markov Processus stochastique subissant des transitions d'un état à l'autre dans l'espace des états et où la probabilité d'entrer à l'état suivant j dépend uniquement de l'état courant i .

probabilité d'émission Probabilité qu'un état i émette un symbole x . C'est donc la distribution des probabilités pour chaque symbole par état. Dénotté $e(x | i)$.

probabilité de l'état initial Pour tout état i , probabilité que y_1 prenne i comme valeur. Dénotté $\pi(i)$.

probabilité de transition Probabilité de faire une transition d'un état i à un état j . Dénotté $t(i, j)$.

symbole Événement observable d'un MMC.

état Facteur interne non-observable d'un MMC.

Article 1: *Hidden Markov Models and their Applications in Biological Sequence Analysis*

1.1 Définition d'un MMC

Un *modèle de Markov caché* est un modèle statistique qui peut être utilisé pour décrire l'évolution d'événements observables qui sont dépendants de facteurs internes non-observables. On appelle l'événement observé un *symbole* et le facteur invisible sous-jacent l'observation un *état*.

Un MMC consiste donc en deux processus stochastiques, d'une part un processus invisible d'états cachés, d'autre part un processus visible de symboles observables. Les états cachés forment une *chaîne de Markov* et la distribution de probabilité des symboles observés dépend de l'état sous-jacent.

Formellement, on dénote la séquence de symboles observés par $\mathbf{x} = x_1 x_2 \dots x_L$ et la séquence d'états sous-jacents par $\mathbf{y} = y_1 y_2 \dots y_L$ où y_n est l'état sous-jacent de la n -ième observation x_n . Chaque symbole x_n prend un nombre fini de valeurs possibles de l'ensemble d'observations $O = \{O_1, O_2, \dots, O_N\}$, et chaque état y_n prend une valeur de l'ensemble d'états $S = \{1, 2, \dots, M\}$, où N et M dénotent respectivement le nombre d'observations distinctes et le nombre d'états distincts.

On suppose que la séquence d'états finis est une *chaîne de Markov en temps homogène de premier ordre*, ce qui implique que la probabilité d'entrer à l'état j en y_{n+1} dépend uniquement de l'état courant i en y_n et que cette probabilité ne change pas au cours du temps. Ainsi, on a

$$P\{y_{n+1} = j \mid y_n = i\} = t(i, j) \quad (1)$$

$\forall i, j \in S, \forall n \geq 1$. La probabilité de faire une transition d'un état i à un état j est appelée *probabilité de transition* qu'on dénote $t(i, j)$. À l'état initial y_1 , on dénote la *probabilité de l'état initial* par $\pi(i) = P\{y_1 = i\}, \forall i \in S$. La probabilité que la n -ième observation soit $x_n = x$ dépend uniquement de l'état sous-jacent y_n , par conséquent

$$P\{x_n = x \mid y_n = i\} = e(x \mid i) \quad (2)$$

$\forall x \in O, \forall i \in S, \forall n \geq 1$. C'est ce qu'on appelle la *probabilité d'émission* de x à l'état i , et on la dénote par $e(x \mid i)$.

Ces trois mesures de probabilités $t(i, j)$, $\pi(i)$, et $e(x \mid i)$ spécifient complètement un MMC. On dénote l'ensemble de ces paramètres par Θ .

On peut dès lors calculer la probabilité que le MMC générera la séquence d'observations $\mathbf{x} = x_1 x_2 \dots x_L$ avec la séquence d'états sous-jacente $\mathbf{y} = y_1 y_2 \dots y_L$. On a donc une probabilité jointe $P\{\mathbf{x}, \mathbf{y} \mid \Theta\}$ qui peut être calculée par

$$P\{\mathbf{x}, \mathbf{y} \mid \Theta\} = P\{\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \Theta\} P\{\mathbf{y} \mid \Theta\} \quad (3)$$

où

$$P\{\mathbf{x} \mid \mathbf{y}, \Theta\} = e(x_1 \mid y_1) e(x_2 \mid y_2) e(x_3 \mid y_3) \dots e(x_L \mid y_L) \quad (4)$$

$$P\{\mathbf{y} \mid \Theta\} = \pi(y_1) t(y_1, y_2) t(y_2, y_3) \dots t(y_{L-1}, y_L). \quad (5)$$

1.2 Les 3 problèmes basiques d'un MMC

1.2.1 Problème d'évaluation

Comment calculer la probabilité d'observation $P\{\mathbf{x} \mid \Theta\}$ en se basant sur un MMC donné ? On pourrait considérer toutes les séquences d'états \mathbf{y} possibles pour \mathbf{x} donné et additionner les probabilités

$$P\{\mathbf{x} \mid \Theta\} = \sum_{\mathbf{y}} P\{\mathbf{x}, \mathbf{y} \mid \Theta\}. \quad (6)$$

Ceci est cependant très coûteux en calcul puisqu'il existe M^L séquences d'états possibles.

Le *forward algorithm* est un algorithme de programmation dynamique calculant efficacement $P\{\mathbf{x} \mid \Theta\}$. Cet algorithme définit une *forward variable* $\alpha(n, i)$ déterminant la probabilité d'observer la séquence partielle de symboles $x_1 \dots x_n$ et d'arriver à l'état i pour y_n , étant donné Θ

$$\alpha(n, i) = P\{x_1 \dots x_n, y_n = i \mid \Theta\}. \quad (7)$$

En $n = 1$, $\alpha(1, i) = P\{x_1, i \mid \Theta\}$. Or cette probabilité d'observer x_1 avec $y_1 = i$ revient à joindre la probabilité d'émission de x_1 par i et la probabilité initiale de l'état i . Ensuite, pour $n = 2, \dots, L$, afin de calculer la probabilité d'observer x_1, \dots, x_{n-1}, x_n et d'arriver à l'état i , il suffit, pour chaque j en $n - 1$, de récupérer son $\alpha(n - 1, j)$ associé (probabilité d'observer x_1, \dots, x_{n-1} et d'arriver à j) en y joignant la probabilité de transition $t(j, i)$ puisqu'on passe de j à i ainsi que la probabilité d'émission $e(x_n \mid i)$ étant donné qu'on observe x_n avec i , et de tous les additionner. On en déduit la formule récursive

$$\alpha(n, i) = \begin{cases} \pi(i)e(x_1 \mid i), & n = 1. \\ \sum_{j=1}^M [\alpha(n - 1, j)t(j, i)e(x_n \mid i)], & n = 2, \dots, L. \end{cases} \quad (8)$$

On finit par trouver la probabilité d'observation de \mathbf{x} en additionnant les probabilités d'observer x_1, \dots, x_L et d'arriver à chaque état i

$$P\{\mathbf{x} \mid \Theta\} = \sum_{i=1}^M \alpha(L, i). \quad (9)$$

La complexité de cet algorithme est seulement $\mathcal{O}(LM^2)$.

Les mêmes résultats peuvent être obtenus en utilisant un algorithme fonctionnant dans l'autre sens, appelé *backward algorithm*. Cet algorithme définit une *backward variable* donnant la probabilité d'observer la séquence de symbole $x_{n+1} \dots x_L$ après être arrivé à un état i en n

$$\beta(n, i) = P\{x_{n+1} \dots x_L \mid y_n = i, \Theta\}. \quad (10)$$

Cette variable $\beta(n, i)$ peut être calculée récursivement comme suit

$$\beta(n, i) = \begin{cases} 1, & n = L. \\ \sum_{j=1}^M [t(i, j)e(x_{n+1} \mid j)\beta(n + 1, j)], & n = L - 1, L - 2, \dots, 1. \end{cases} \quad (11)$$

On obtient alors la probabilité d'observation de \mathbf{x}

$$P\{\mathbf{x} \mid \Theta\} = \sum_{i=1}^M \beta(1, i)\pi(i)e(x_1 \mid i). \quad (12)$$

1.2.2 Problème de décodage

Étant donné une séquence de symbole \mathbf{x} et un modèle Θ , quelle est la séquence d'états \mathbf{y} qui explique au mieux la séquence de symboles observés ? On recherche donc le chemin [d'états] optimal \mathbf{y}^* qui maximise la probabilité d'observation de la séquence de symbole \mathbf{x} . Soit formellement

$$\mathbf{y}^* = \max_{\mathbf{y}} P\{\mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \Theta\}. \quad (13)$$

L'algorithme de Viterbi permet de trouver un tel chemin. Cet algorithme définit la variable $\gamma(n, i)$ qui est le score maximum le long d'un chemin d'état $y_1 \dots y_{n-1}$ arrivant à l'état i en y_n et émettant les symboles $x_1 \dots x_n$. C'est-à-dire formellement

$$\gamma(n, i) = \max_{y_1, \dots, y_{n-1}} P\{x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_{n-1} y_n = i \mid \Theta\}, \quad (14)$$

calculée récursivement selon la formule

$$\gamma(n, i) = \begin{cases} \pi(i)e(x_1 \mid i), & n = 1. \\ \max_j [\gamma(n-1, j)t(j, i)e(x_n \mid i)], & n = 2, \dots, L. \end{cases} \quad (15)$$

On conclut en obtenant la probabilité d'observation maximale comme suit

$$P^* = \max_{\mathbf{y}} P\{\mathbf{x}, \mathbf{y} \mid \Theta\} = \max_i \gamma(L, i), \quad (16)$$

et on retrouve le chemin d'états optimal \mathbf{y}^* en remontant les récursions qui ont menées à la probabilité maximale. L'algorithme de Viterbi trouve la séquence d'états optimale en un temps $\mathcal{O}(LM^2)$.

Il est à noter que les probabilités peuvent devenir de très petits nombres *float* pour de longues séquences, menant potentiellement à des problèmes pour la représentation machine. Ceci peut être résolu en changeant les probabilités en logarithmes de probabilités.

1.2.3 Problème d'entraînement

Soit un ensemble de séquences de symboles observés $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_T\}$ qu'on souhaite représenter par un MMC. Comment peut-on choisir de manière raisonnable et adéquate les paramètres $\Theta = (\pi(i), t(i, j), e(x \mid i))$ du MMC en se basant sur ces observations ? Bien qu'il n'existe pas de manière optimale d'estimer les paramètres à partir d'un nombre limité de séquences finies de symboles, il est possible de trouver des paramètres maximisant localement la probabilité d'observation (*Baum-Welch*, *Monte Carlo EM*).

1.3 Variantes