

RELAZIONE (FONDAMENTI DI AUTOMATICA)

A.A 2020-2021



Jhenalyn SUBOL
213485

Sommario

Esercizio A: Analisi di un Sistema LTI-TC	2
1. Funzione di Trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri	2
2. Modi di evoluzione libera del sistema	3
3. Risposta all'impulso del sistema.....	4
4. Grafico della risposta al gradino	6
5. Risposta alla Rampa.....	8
6. Un possibile modello I-U la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio	9
7. Tenendo conto del modello determinato al punto precedente, valutare la risposta all'ingresso $u(t)=1(-t)$	10
Esercizio B: Diagramma di Bode	15
B.0 Premessa	15
B.1 Poli e Zeri di $G(s)$	16
B.2 Forma di Bode della $G(s)$	17
B.3 Diagramma di Bode	18
Diagramma dei Moduli (Vero e Approssimato)	18
Diagramma delle Fasi (Vero e Approssimato).....	20
B.4 Pendenza Iniziale e Pendenza Finale, Fase Iniziale e Fase Finale, Sfasamento Relativo	21
B.5 Pendenze Intermedie	22
Esercizio C: Regolatore $C(s)$ di un Sistema di Controllo in Retroazione Algebrica ed Unitaria	26
1. Errore sull'uscita per un disturbo di carico al gradino non superiore al 5%	26
2. Massima sovraelongazione $S\% \leq 20\%$, tempo di assestamento $t_s \leq 1.2 \text{ sec}$	28
Compensatore	29
Sistema effettivo vs Sistema ridotto	33

Esercizio A: Analisi di un Sistema LTI-TC

a. Si consideri un sistema lineare e stazionario a tempo continuo descritto dalla seguente risposta al gradino

$$y(t) = \left(\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{3e^{-2t}}{40} - \frac{1}{20}e^{-t}\sin(3t) - \frac{1}{20}e^{-t}\cos(3t) - \frac{1}{40} \right) 1(t)$$

L'equazione $y(t)$ è una funzione a tratti definita per $t \geq 0$, grazie alla presenza del termine $1(t)$ noto anche come funzione di *Heaviside*. Per poter analizzare la risposta al gradino, dobbiamo trasformare l'equazione dal dominio del tempo al dominio di Laplace dove l'analisi matematica è più semplice.

1. Funzione di Trasferimento del sistema ed i suoi poli e zeri

La funzione di trasferimento di un sistema dinamico è una funzione di variabile complessa Real-razionale che definisce il rapporto tra la trasformata di Laplace della risposta forzata e la trasformata di Laplace dell'ingresso del sistema:

$$G(s) = \frac{Y_f(s)}{U(s)}.$$

Data la seguente *risposta al gradino*

$$y := t \mapsto \left(\frac{e^{-2 \cdot t} \cdot t}{4} + \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot t}}{40} - \frac{e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)}{20} - \frac{e^{-t} \cdot \cos(3 \cdot t)}{20} - \frac{1}{40} \right) \cdot \text{Heaviside}(t)$$

la sua trasformata di Laplace è pari a

$$Y_{step}(s) := \text{laplace}(y(t), t, s)$$

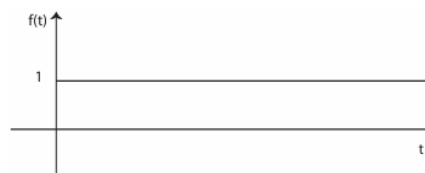
$$Y_{step} := s \mapsto \text{laplace}(y(t), t, s)$$

$$Y_{step}(s)$$

$$\frac{2s - 1}{(s + 2)^2 s ((s + 1)^2 + 9)}$$

L'ingresso al gradino è definito dal segnale

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$



La trasformata di Laplace dell'ingresso al gradino è

$$U_{step} := s \mapsto \frac{1}{s}$$

A questo punto, possiamo definire la funzione di trasferimento considerando la relazione ingresso-uscita:

$$G(s) := \frac{Y_{step}(s)}{U_{step}(s)} :$$

$$G(s)$$

$$\frac{2s - 1}{(s + 2)^2 ((s + 1)^2 + 9)}$$

Poli e Zeri

Per calcolare i poli e gli zeri della FdT, poniamo il denominatore e numeratore, rispettivamente, uguale a 0 e otteniamo

$$\text{solve}(\text{denom}(G(s)) = 0, s)$$

$$-2, -2, -1 + 3I, -1 - 3I$$

$$\text{solve}(\text{numer}(G(s)) = 0, s)$$

$$\frac{1}{2}$$

Osservazioni:

- Notiamo che il numero di poli ($n_p = 4$) è maggiore del numero di zeri ($n_z = 1$), per cui il sistema è detto **PROPRIO**.
- L'ordine del sistema dinamico è quattro ed è pari al *grado del denominatore* (nell'ipotesi che non sono presenti fattori in comune fra numeratore e denominatore di $G(s)$).
- Possiamo determinare l'ascissa di convergenza di $G(s)$:

$$\max(\text{Re}(\{poli\}))$$

$$-1$$

Ciò vuol dire che la regione di convergenza è costituita da tutti quei numeri complessi aventi parte reale strettamente maggiore di -1

2. Modi di evoluzione libera del sistema

L'evoluzione libera si riferisce all'evoluzione di un sistema dinamico a partire di uno stato iniziale e in assenza di forzamenti esterni o input. Sono quelle componenti presenti nella risposta transitoria, nella risposta in evoluzione libera e nella risposta all'impulso.

Essi sono legati ai poli della funzione di trasferimento, in quanto, per ogni polo, vi è un modo di evoluzione libera; perciò, il numero di essi è pari all'ordine del sistema.

Per i poli reali con molteplicità unitaria ($v = 1$), il modo associato è:

$$(s - p_i) \Leftrightarrow e^{p_i t} \cdot 1(t)$$

Per i poli reali con molteplicità algebrica maggiore di 1 ($v > 1$), abbiamo i seguenti modi associati:

$$(s - p_i) \Leftrightarrow t \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t)$$

$$(s - p_i)^2 \Leftrightarrow \frac{t^2}{2} \cdot e^{p_i t} \cdot 1(t)$$

...

$$(s - p_i)^v \Leftrightarrow \frac{t^{v-1}}{(v-1)!} e^{p_i t} \cdot 1(t)$$

Per i poli complessi e coniugati, abbiamo una coppia di modi associati:

$$(s^2 + a_1 s + a) \Leftrightarrow e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \cdot 1(t), e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \cdot 1(t)$$

Nel caso in analisi, la nostra funzione di trasferimento è

$$G(s) = \frac{2s - 1}{(s + 2)^2 ((s + 1)^2 + 9)}$$

Applichiamo l'anti trasformata di Laplace a $G(s)$

$$\text{invlaplace}(G(s), s, t) = -\frac{e^{-2t}(-1 + 5t)}{10} + \frac{(-\cos(3t) + 2\sin(3t))e^{-t}}{10}$$

Ora, andiamo a spacchettare la funzione:

$$\text{expand}((11), \text{exp}, \text{sin}, \text{cos}) = \frac{e^{-2t}}{10} - \frac{e^{-2t}t}{2} - \frac{e^{-t}\cos(3t)}{10} + \frac{e^{-t}\sin(3t)}{5}$$

Otteniamo quindi **quattro** modi di evoluzione libera pari al numero di poli della funzione di trasferimento

$$\text{modes} := \{e^{-2t}t, e^{-t}\cos(3t), e^{-t}\sin(3t), e^{-2t}\}$$

- Poli reali $s_{1,2} = -2$ con molteplicità $\mu = 2$
 - Il doppio polo contribuisce con termini della forma $C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$ dove C_1 e C_2 sono costanti determinate dalle condizioni iniziali del sistema. Questi termini rappresentano un decadimento esponenziale. La presenza del polo ripetuto in $s = -2$ introduce un termine dipendente da t , il che porta a un decadimento più lento rispetto a un singolo polo.
- Poli complessi coniugati $s_3 = -1 + 3i$ e $s_4 = -1 - 3i$
 - I poli contribuiscono con un termine oscillatorio della forma $e^{-t}(A\cos(3t) + B\sin(3t))$ dove A e B sono costanti legati alle condizioni iniziali del sistema. Questi termini descrivono oscillazioni con una frequenza di $\omega = 3\text{rad/s}$, la cui ampiezza decresce esponenzialmente con una costante di tempo pari a 1 secondo.

3. Risposta all'impulso del sistema

Sappiamo dalla teoria che la risposta all'impulso è la derivata temporale della risposta al gradino

$$y_{\text{impulse}}(t) = \frac{d}{dt} y_{\text{step}}(t)$$

Questo deriva direttamente dalle proprietà delle funzioni di ingresso in cui l'impulso unitario è la derivata del gradino unitario nel dominio del tempo.

Applicando la trasformata di Laplace alla relazione sopra e sfruttando il teorema della derivata sempre nel dominio di Laplace, si ottiene:

$$Y_{\text{impulse}}(s) = s \cdot Y_{\text{step}}(s).$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema è definita anche come la risposta forzata $Y_{\text{forzata}}(s)$ nel caso in cui l'ingresso $U(s)$ sia unitario:

$$G(s) = Y_{\text{forzata}}(s)|_{U(s)=1}$$

Utilizziamo questa informazione e la sostituiamo al posto della trasformata di Laplace dell'impulso nella relazione impulso-gradino, per cui otteniamo

$$G(s) = s \cdot Y_{step}(s)$$

Ora, riprendiamo la \mathcal{L} -trasformata della risposta al gradino

$$Y_{step} := s \mapsto \frac{2 \cdot s - 1}{(s + 2)^2 \cdot s \cdot ((s + 1)^2 + 9)}$$

La funzione di trasferimento della risposta all'impulso è data da

$$G(s) := s \cdot Y_{step}(s)$$

$$G := s \mapsto s \cdot Y_{step}(s)$$

Otteniamo

$$G(s) := \frac{2s - 1}{(s + 2)^2 ((s + 1)^2 + 9)}$$

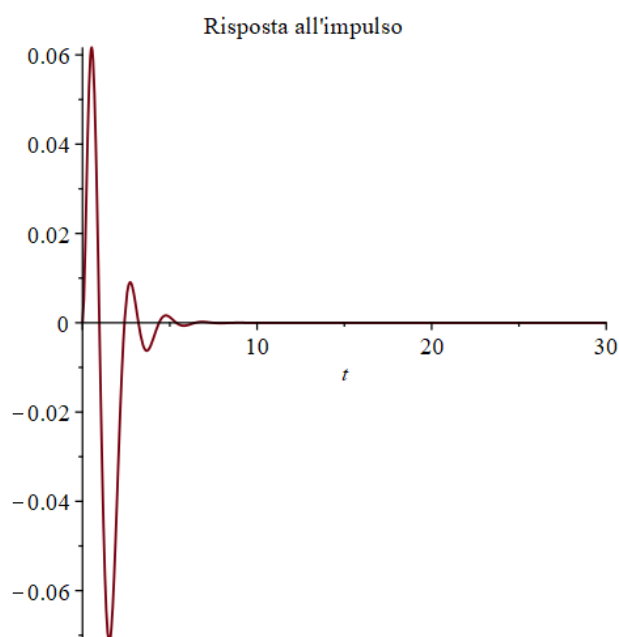
Ora, calcoliamo la risposta all'impulso nel dominio del tempo utilizzando l'anti-trasformata di Laplace

$$y_{imp} := t \mapsto \text{invlaplace}(G(s), s, t) :$$

$$y_{imp}(t)$$

$$-\frac{e^{-2t}(5t - 1)}{10} + \frac{(-\cos(3t) + 2\sin(3t))e^{-t}}{10}$$

Rappresentazione grafica della risposta del sistema all'impulso:



Osservazioni:

- La risposta all'impulso è la risposta del sistema a un ingresso impulsivo (un colpo istantaneo). Osserviamo come il sistema reagisce bruscamente all'impulso iniziale e poi torna all'equilibrio.
- La risposta all'impulso parte con un valore positivo alto e poi scende rapidamente sottozero seguito da qualche oscillazione la cui ampiezza diminuisce nel tempo. Il sistema, quindi "si calma" e la risposta tende a zero ovvero ritorna a uno stato di equilibrio. Questo conferma che il sistema è stabile.

4. Grafico della risposta al gradino

Riprendo la risposta al gradino nel dominio del tempo

$$y_{step}(t) := \left(\frac{e^{-2 \cdot t} \cdot t}{4} + \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot t}}{40} - \frac{e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)}{20} - \frac{e^{-t} \cdot \cos(3 \cdot t)}{20} - \frac{1}{40} \right)$$

$$y_{step} := t \mapsto \frac{e^{-2 \cdot t} \cdot t}{4} + \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot t}}{40} - \frac{e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)}{20} - \frac{e^{-t} \cdot \cos(3 \cdot t)}{20} - \frac{1}{40}$$

La risposta può essere scomposta in due componenti principali:

1. Componente a regime- la parte della risposta che rimane costante nel tempo dopo che la componente transitoria si è annullata. È il valore costante che la risposta al gradino raggiunge per $t \rightarrow \infty$

$$comp_{regime} := t \mapsto \lim_{t \rightarrow \infty} (y_{step}(t)) :$$

$$comp_{regime}(t) = -\frac{1}{40}$$

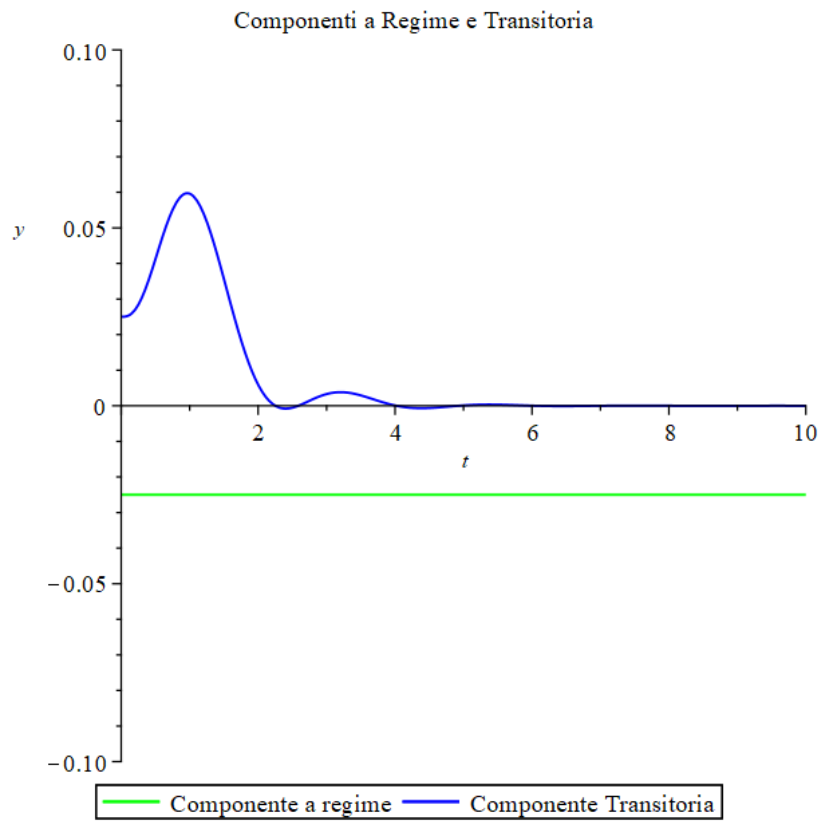
Ricordiamo che il sistema esiste solo per tempi positivi (grazie alla presenza della funzione di Heaviside), quindi anche la componente a regime va moltiplicata per $1(t)$. Questo implica che anche la risposta a regime è "attivata" solo a partire da $t=0$.

2. Componente transitoria- è data dai termini che tendono a zero nel tempo $t \rightarrow \infty$ per cui è espressa tipicamente come somme di esponenziali decrescenti o oscillazioni smorzate.

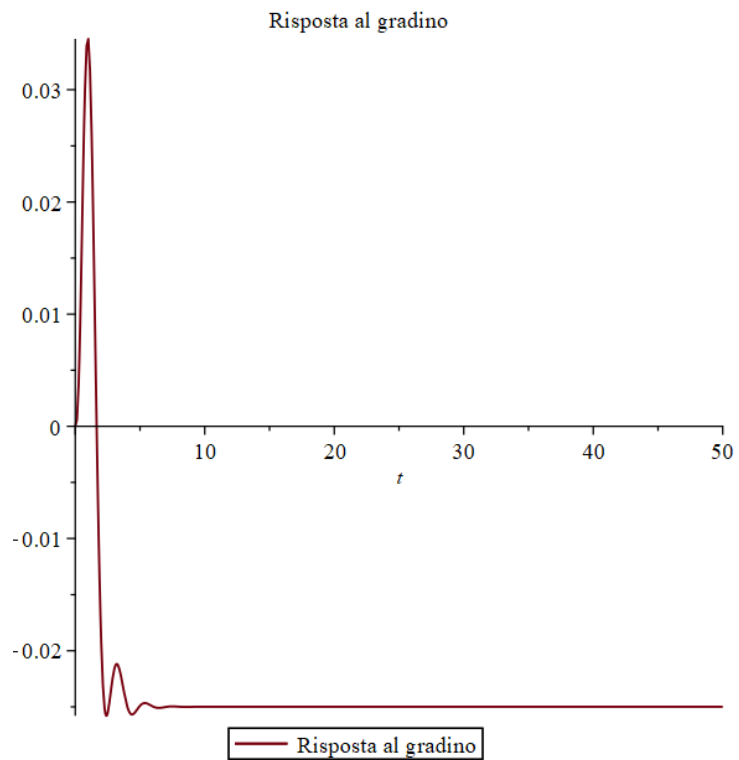
$$comp_{transitoria}(t) := y_{step}(t) - comp_{regime}(t) :$$

$$comp_{transitoria}(t) = \frac{e^{-2 \cdot t} \cdot t}{4} + \frac{3 \cdot e^{-2 \cdot t}}{40} - \frac{e^{-t} \cdot \sin(3 \cdot t)}{20} - \frac{e^{-t} \cdot \cos(3 \cdot t)}{20}$$

Rappresentazione grafica della Componente a Regime e Componente Transitoria della risposta del sistema al gradino



Rappresentazione grafica della risposta al gradino:



- Osserviamo che il sistema presenta un picco iniziale positivo seguito da oscillazioni che si attenuano progressivamente.
- Quando il sistema raggiunge un valore finale di $-\frac{1}{40}$, il sistema si stabilizza

5. Risposta alla Rampa

La funzione rampa si esprime nel seguente modo:

$$u_{rampa}(t) := \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

La trasformata di Laplace della rampa vale:

$$U_{rampa} := s \mapsto \frac{1}{s^2}$$

Riprendendo la funzione di trasferimento $G(s)$ ottenuta in precedenza, posso utilizzare la relazione tra ingresso e uscita del sistema per determinare la risposta del sistema a un segnale d'ingresso di tipo rampa.

$$\frac{Y_{rampa}(s)}{U_{rampa}(s)} := G(s) \cdot U_{rampa}(s) :$$

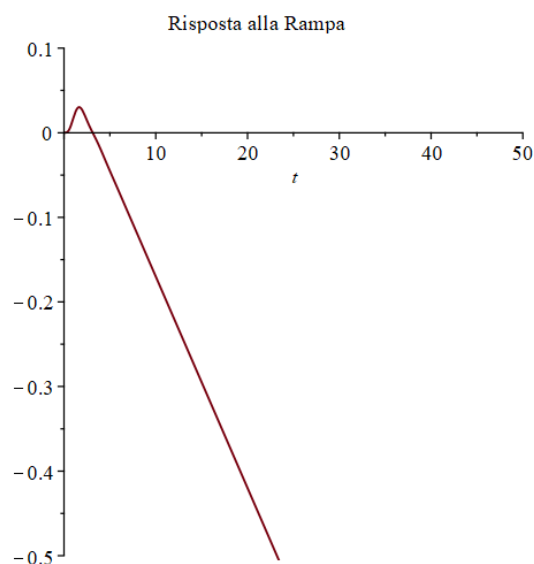
$$\frac{2s-1}{(s+2)^2((s+1)^2+9)s^2}$$

Ora, applico l'anti trasformata per calcolare la risposta alla rampa nel dominio del tempo

$$y_{rampa}(t) := t \rightarrow \text{invlaplace}(Y_{rampa}(s), s, t) :$$

$$\frac{2}{25} - \frac{t}{40} - \frac{e^{-2t}(4+5t)}{40} + \frac{e^{-t}(2\cos(3t) - \sin(3t))}{100}$$

Rappresentazione grafica della risposta del sistema alla rampa



Osserviamo dal grafico che la rampa presenta una velocità in discesa. Verifichiamolo calcolando il limite.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y_{rampa}(t) = -\infty$$

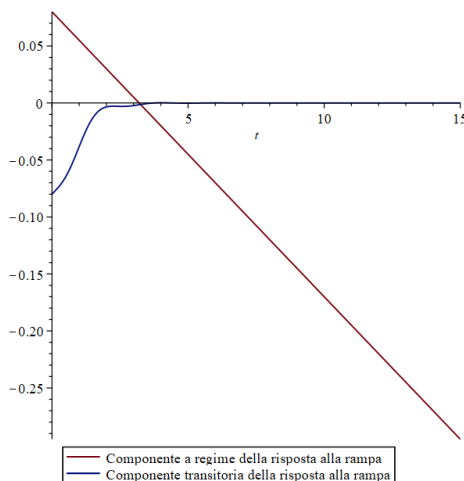
Componente a regime della risposta alla rampa

$$comp_regime_rampa := t \mapsto \frac{2}{25} - \frac{t}{40}$$

Componente transitoria della risposta alla rampa

$$comp_transitoria_rampa := -\frac{e^{-2t}(4+5t)}{40} + \frac{e^{-t}(2\cos(3t) - \sin(3t))}{100}$$

Rappresentazione grafica delle componenti a regime e transitoria della risposta alla rampa



6. Un possibile modello I-U la cui funzione di trasferimento è quella ottenuta nel primo punto dell'esercizio

La rappresentazione I-U di un sistema dinamico è una rappresentazione mediante un'equazione differenziale a coefficienti reali del tipo:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + ay^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1}y'(t) + a_n y(t) \\ = \beta_0 u^{(m)}(t) + \beta_1 u^{(m-1)}(t) + \dots + \beta_{m-1}u'(t) + \beta_m u(t) \end{aligned}$$

Dove $m \leq n$. Infatti, per il Principio di Causalità, affinché l'uscita dipenda dalla storia passata dell'ingresso o al massimo dal suo valore corrente, il secondo membro dell'equazione differenziale non deve presentare termini derivativi dell'ingresso superiori al massimo ordine di derivazione dell'uscita.

Data la risposta forzata, possiamo ricavare il modello I-U considerando la relazione tra l'ingresso $U(s)$ e l'uscita $Y(s)$

$$Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} \cdot U(s)$$

dove la funzione di trasferimento $G(s)$ si può esprimere come rapporto tra due polinomi $n_g(s)$ e $d_g(s)$.

Quindi, vale la seguente relazione:

$$Y(s) = \frac{n_g(s)}{d_g(s)} \cdot U(s)$$

$$d_g(s) \cdot Y(s) = n_g(s) \cdot U(s)$$

Prendiamo la funzione di trasferimento

$$G(s) := \frac{2s - 1}{(s + 2)^2 ((s + 1)^2 + 9)}$$

E calcoliamo il polinomio al numeratore e al denominatore

$$\text{num_Gs} := \text{numer}(G(s))$$

$$\text{num_Gs} := 2s - 1$$

$$\text{denom_Gs} := \text{denom}(G(s))$$

$$\text{denom_Gs} := (s + 2)^2 (s^2 + 2s + 10)$$

Utilizzando la relazione ottenuto precedentemente, possiamo scrivere il modello I-U nel seguente modo

$$Y_{IU}(s) \cdot \text{denom_Gs} = \text{num_Gs} \cdot U_{IU}(s)$$

$$Y_{IU}(s) (s + 2)^2 (s^2 + 2s + 10) = U_{IU}(s) (2s - 1)$$

Applichiamo l'anti-trasformata di Laplace per poter portare il sistema nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(Y_{IU}(s) s^4, s, t) + 6 \mathcal{L}^{-1}(Y_{IU}(s) s^3, s, t) + 22 \mathcal{L}^{-1}(Y_{IU}(s) s^2, s, t) \\ + 48 \mathcal{L}^{-1}(Y_{IU}(s) s, s, t) + 40 \mathcal{L}^{-1}(Y_{IU}(s), s, t) = 2 \mathcal{L}^{-1}(U_{IU}(s) s, s, t) \\ - \mathcal{L}^{-1}(U_{IU}(s), s, t) \end{aligned}$$

Per rendere tutto più leggibile, effettuiamo una sostituzione dei simboli

$$\text{subs}(\{ \text{invlaplace}(Y_{IU}(s) \cdot s^4, s, t) = y^{(4)}(t), \text{invlaplace}(Y_{IU}(s) \cdot s^3, s, t) = y^{(3)}(t), \text{invlaplace}(Y_{IU}(s) \cdot s^2, s, t) = y^{(2)}(t), \\ \text{invlaplace}(Y_{IU}(s) \cdot s, s, t) = y'(t), \text{invlaplace}(Y_{IU}(s), s, t) = y(t), \text{invlaplace}(U_{IU}(s) \cdot s, s, t) = u'(t), \text{invlaplace}(U_{IU}(s), s, t) = u(t) \}, (32))$$

$$D^{(4)}(y)(t) + 6 D^{(3)}(y)(t) + 22 D^{(2)}(y)(t) + 48 D(y)(t) + 40 y(t) = 2 D(u)(t) - u(t) \quad (33)$$

Infine, otteniamo un possibile modello I-U:

$$\text{model} := \frac{d^4}{dt^4} y(t) + 6 \frac{d^3}{dt^3} y(t) + 22 \frac{d^2}{dt^2} y(t) + 48 \frac{d}{dt} y(t) + 40 y(t) = 2 \frac{d}{dt} u(t) - u(t)$$

7. Tenendo conto del modello determinato al punto precedente, valutare la risposta all'ingresso $u(t)=1(-t)$

Analizziamo l'ingresso del sistema:

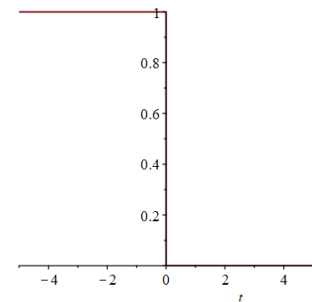
$$u(t) = 1(-t):$$

L'ingresso $1(-t)$, ci ricorda una funzione di Heaviside, ma con il suo argomento invertito. Più precisamente, $1(-t)$ può essere espresso come

$$1(-t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Questo significa che il segnale è uguale a 1 per tutti i valori di t minori di zero ed è uguale a 0 per tutti i valori di t maggiori e uguale di zero (ovvero non presenta ingressi).

`plot(u(t), t=-5..5, size=[300, 300])`



Possiamo considerare l'uscita come una funzione piecewise ovvero possiamo effettuare una composizione di due uscite:

$$y(t) = \begin{cases} y_-(t) & \text{per } t < 0 \\ y_+(t) & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

Quando $t < 0$, il sistema riceve un ingresso costante $u(t)=1$ ovvero un gradino di ampiezza unitario. Abbiamo quindi che l'uscita è continua ed in zero vale la seguente proprietà:

$$\begin{cases} y_-(0^-) = y_+(0^+) \\ \dot{y}_-(0^-) = \dot{y}_+(0^+) \\ \dots \\ y_-^{(n-1)}(0^-) = y_+^{(n-1)}(0^+) \end{cases} \quad \text{dove } n \text{ è l'ordine del sistema.}$$

In un sistema BIBO stabile, l'ingresso $1(-t)$ è applicato in corrispondenza di un istante di tempo collocato nel passato remoto rispetto a t (ovvero per $t \rightarrow -\infty$). Quindi, l'uscita $y(t)$ per $t < 0$ finito conterrà solo le componenti della risposta a regime mentre la risposta transitoria non ci sarà più.

In questo caso, per un ingresso $1(-t)$, l'uscita $y(t)$ per $t < 0$ coincide con l'uscita a regime (guadagno statico del sistema) per un gradino di ampiezza unitaria, ovvero:

$$y_-(t) = G(0) \cdot U$$

Siccome l'ampiezza dell'ingresso vale 1, abbiamo che l'uscita per $t < 0$ vale esattamente il guadagno statico $G(0)$:

$$y(t) = G(0).$$

Invece per $t > 0$, il sistema non riceve alcun ingresso $u(t)=0$. Questo significa che il sistema non ha più una "spinta esterna" che lo guida e quindi si evolve in risposta libera, cioè, continua a comportarsi basandosi esclusivamente sul proprio stato iniziale $y(t) = y_+(t)$

Per capire quali sono le condizioni iniziali da associare nell'ingresso $1(-t)$, partiamo da questa proprietà (uscita continua):

$$\begin{cases} y_-(0^-) = y_+(0^+) \\ \dot{y}_-(0^-) = \dot{y}_+(0^+) \\ \dots \\ y_-^{(n-1)}(0^-) = y_+^{(n-1)}(0^+) \end{cases}$$

In questo caso, abbiamo che

$$\begin{cases} y(0^-) = y_-(0^-) = G(0) = y_+(0^+) \\ \dot{y}(0^-) = \dot{y}_-(0^-) = 0 = \dot{y}_+(0^+) \\ \dots \\ y_-^{(n-1)}(0^-) = 0 = y_+^{(n-1)}(0^+) \end{cases}$$

In altre parole, il sistema parte da $G(0)$ e si evolve liberamente verso il proprio stato finale.

Consideriamo ora il modello I-U ottenuto al punto precedente ed effettuo la trasformata di Laplace:

$$\begin{aligned} model &:= (34) \\ model &:= D^{(4)}(y_{in})(t) + 6D^{(3)}(y_{in})(t) + 22D^{(2)}(y_{in})(t) + 48D(y_{in})(t) + 40y_{in}(t) = 2D(u_{in})(t) - u_{in}(t) \\ laplace(model, t, s) \\ s^4 \mathcal{L}(y_{in}(t), t, s) - D^{(3)}(y_{in})(0) - sD^{(2)}(y_{in})(0) - s^2D(y_{in})(0) - s^3y_{in}(0) + 6s^3 \mathcal{L}(y_{in}(t), t, s) - 6D^{(2)}(y_{in})(0) \\ - 6sD(y_{in})(0) - 6s^2y_{in}(0) + 22s^2 \mathcal{L}(y_{in}(t), t, s) - 22D(y_{in})(0) - 22sy_{in}(0) + 48s \mathcal{L}(y_{in}(t), t, s) - 48y_{in}(0) \\ + 40 \mathcal{L}(y_{in}(t), t, s) = 2s \mathcal{L}(u_{in}(t), t, s) - 2u_{in}(0) - \mathcal{L}(u_{in}(t), t, s) \end{aligned}$$

Annullo l'ingresso iniziale e successivamente effettuo una sostituzione dei simboli:

$$\begin{aligned} u_{in}(0) &:= 0 \\ u_{in}(0) &:= 0 \\ subs(\{ laplace(y_{in}(t), t, s) = Y_{in}(s), laplace(u_{in}(t), t, s) = U_{in}(s) \}, (36)) \\ s^4 Y_{in}(s) - D^{(3)}(y_{in})(0) - sD^{(2)}(y_{in})(0) - s^2D(y_{in})(0) - s^3y_{in}(0) + 6s^3 Y_{in}(s) - 6D^{(2)}(y_{in})(0) - 6sD(y_{in})(0) \\ - 6s^2y_{in}(0) + 22s^2 Y_{in}(s) - 22D(y_{in})(0) - 22sy_{in}(0) + 48s Y_{in}(s) - 48y_{in}(0) + 40 Y_{in}(s) = 2s U_{in}(s) - U_{in}(s) \end{aligned}$$

Determino la risposta del sistema $Y(s)$:

$$\begin{aligned} solve((38), Y_{in}(s)) \\ \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 22s^2 + 48s + 40} (s^3y_{in}(0) + s^2D(y_{in})(0) + 6s^2y_{in}(0) + 2sU_{in}(s) + sD^{(2)}(y_{in})(0) + 6sD(y_{in})(0) \\ + 22sy_{in}(0) - U_{in}(s) + D^{(3)}(y_{in})(0) + 6D^{(2)}(y_{in})(0) + 22D(y_{in})(0) + 48y_{in}(0)) \end{aligned}$$

La risposta di un sistema dinamico può essere analizzata separando i suoi contributi in due parti principali: la *risposta forzata* e la *risposta in evoluzione libera*

$$\begin{aligned} collect((39), U_{in}(s)) \\ \frac{(2s - 1) U_{in}(s)}{s^4 + 6s^3 + 22s^2 + 48s + 40} + \frac{1}{s^4 + 6s^3 + 22s^2 + 48s + 40} (s^3y_{in}(0) + s^2D(y_{in})(0) + 6s^2y_{in}(0) + sD^{(2)}(y_{in})(0) \\ + 6sD(y_{in})(0) + 22sy_{in}(0) + D^{(3)}(y_{in})(0) + 6D^{(2)}(y_{in})(0) + 22D(y_{in})(0) + 48y_{in}(0)) \end{aligned}$$

1. Risposta Forzata (primo addendo) – è la parte della risposta del sistema che dipende direttamente dall'ingresso applicato $1(-t)$.
2. Risposta in Evoluzione Libera (secondo addendo)- è la parte della risposta che dipende esclusivamente dalle condizioni iniziali del sistema, indipendentemente dall'ingresso

Vado a ricavare la funzione di trasferimento

$$G_{in} := s \rightarrow eval(op(1, (40)), U_{in}(s) = 1) :$$

$$G_{in}(s)$$

$$\frac{2s - 1}{s^4 + 6s^3 + 22s^2 + 48s + 40}$$

Osserviamo che il sistema è BIBO stabile:

$$solve(denom(G_{in}(s)), s)$$

$$-2, -2, -1 - 3I, -1 + 3I$$

Vado a calcolare la componente dell'uscita per $t < 0$

$$eval(G_{in}(s), s = 0)$$

$$-\frac{1}{40}$$

$$y_{neg} := t \mapsto (43)$$

$$y_{neg} := t \mapsto -\frac{1}{40}$$

Ora, per calcolare la componente per $t > 0$, consideriamo le seguenti condizioni iniziali:

$$y_{in}(0) := y_{neg}(0)$$

$$y_{in}(0) := -\frac{1}{40}$$

$$D(y_{in})(0) := eval\left(\frac{d}{dt}(y_{neg}(t)), t=0\right)$$

$$D(y_{in})(0) := 0$$

$$D^{(2)}(y_{in})(0) := eval\left(\frac{d^2}{dt^2}(y_{neg}(t)), t=0\right)$$

$$D^{(2)}(y_{in})(0) := 0$$

$$D^{(3)}(y_{in})(0) := eval\left(\frac{d^3}{dt^3}(y_{neg}(t)), t=0\right)$$

$$D^{(3)}(y_{in})(0) := 0$$

Valutiamo la risposta libera del sistema considerando le condizioni iniziali

$$op(2, (47))$$

$$\frac{-\frac{1}{40}s^3 - \frac{6}{5} - \frac{3}{20}s^2 - \frac{11}{20}s}{s^4 + 6s^3 + 22s^2 + 48s + 40}$$

Ed effettuando l'anti-trasformata di Laplace, otteniamo l'uscita per $t > 0$

$$y_{pos} := t \mapsto \text{invlaplace}((49), s, t) :$$

$$y_{pos}(t)$$

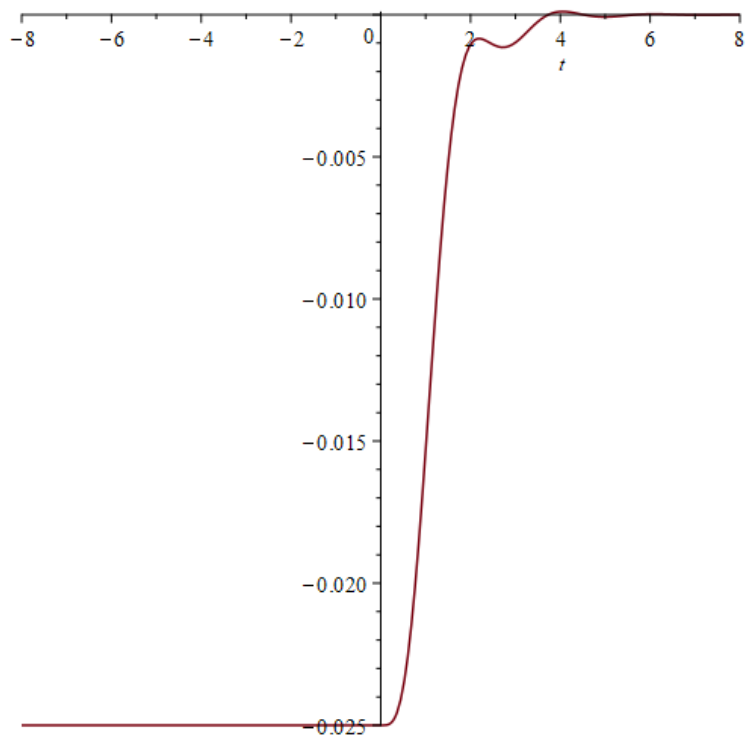
$$- \frac{e^{-2t} (10t + 7)}{200} + \frac{e^{-t} (3 \cos(3t) - \sin(3t))}{300}$$

A questo punto arrivati, possiamo costruire tutta la soluzione con l'operazione piecewise:

$$y_{tot} := t \mapsto \begin{cases} y_{neg}(t) & t < 0 \\ y_{pos}(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$y_{tot} := t \mapsto \begin{cases} y_{neg}(t) & t < 0 \\ y_{pos}(t) & 0 \leq t \end{cases}$$

Rappresentazione grafica della risposta all'ingresso $u(t)=1(-t)$



- Per $t < 0$, il livello è costante (risposta a regime)
- A $t > 0$, l'ingresso commuta ovvero non è più presente. Osserviamo quindi che dall'istante 0 in poi, abbiamo una risposta libera che essendo BIBO stabile, converge a 0.

Esercizio B: Diagramma di Bode

b. Disegnare e discutere il Diagramma di Bode per la seguente funzione di trasferimento

$$G(s) = \frac{128 \left(s - \frac{1}{2}\right)}{s (s^2 + 16s + 64)}$$

B.0 Premessa

Un sistema dinamico può essere espresso in termini di filtro tramite la risposta in frequenza $G(j \cdot \omega)$. Questo ultimo è direttamente correlata al modo in cui il sistema modifica i segnali sinusoidali e descrive:

- il modulo $|G(j \cdot \omega)|$ - indica quanto il sistema amplifica o attenua un segnale a una data frequenza ω
- la fase $\angle G(j \cdot \omega)$ - indica il ritardo temporale (sfasamento) introdotto a quella frequenza.

Per poter tracciare il diagramma di Bode della risposta in frequenza $G(j \cdot \omega)$ di un sistema lineare e stazionario, è necessario manipolare la funzione di trasferimento $G(s)$ da cui scaturisce la risposta armonica trasformandola in una forma particolare detta Forma di Bode.

Nel diagramma di Bode, la risposta in frequenza viene rappresentata sulla scala logaritmica. Essa ci consente di rappresentare col dovuto dettaglio grandezze che variano in campi notevolmente estesi (nel caso di alte frequenze), o estremamente ridotti (nel caso di basse frequenze). Un diagramma di Bode consiste in due grafici distinti:

- Diagramma del modulo
 - Rappresenta il modulo (in deciBel, dB) in funzione della frequenza (in scala logaritmica)
 - Mostra come il sistema amplifica o attenua i segnali a diverse frequenze
 - Il punto è costituito dalla pulsazione in ascissa e il modulo nell'asse dell'ordinata $(\omega, |G(\omega)|)$
- Diagramma della fase
 - Rappresenta lo sfasamento (in gradi) introdotto dal sistema in funzione della frequenza
 - Indica il ritardo o l'anticipo tra l'ingresso e l'uscita del sistema per diverse frequenze
 - Il punto è costituito dalla pulsazione nell'asse dell'ordinata e la funzione argomento in ascissa $(\omega, \angle G(j\omega))$

Il punto di partenza consiste nel valutare la funzione di trasferimento lungo il semi-asse immaginario per poter ottenere la sua risposta in frequenza. Data quindi una funzione di trasferimento nella sua forma fattorizzata:

$$G(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

la sua forma di Bode è data da:

$$G(s) = K_b \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \left(1 + \operatorname{sgn}(-z_i) \cdot \frac{s}{\Omega_i}\right)}{s^\mu \cdot \prod_{i=1}^r \left(1 + \operatorname{sgn}(-p_i) \cdot \frac{s}{\omega_i}\right)}$$

Con $\mu + r = n$

Notazioni:

- K_b è il Guadagno di Bode $K_b = \lim_{s \rightarrow 0} s^\mu G(s)$
- $\Omega_i = |z_i|$ e $\omega_i = |p_i|$ denotano la pulsazione di taglio (rottura) di poli e zeri reali al netto degli effetti integrali
- L'operatore segno tiene conto della locazione dello zero e del polo reale (nell'origine) rispetto all'asse immaginario.

B.1 Poli e Zeri di G(s)

I poli e zeri della funzione di trasferimento fornita dalla traccia sono:

$$zeri := [solve(numer(G(s)), s)]$$

$$zeri := \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$poli := [solve(denom(G(s)), s)]$$

$$poli := [0, -8, -8]$$

Eliminiamo i poli nell'origine dalla lista dei poli (per poter calcolare le pulsazioni di taglio)

$$poliG := remove(x \rightarrow x = 0 \text{ or } \text{Im}(x) \neq 0, poli)$$

$$poliG := [-8, -8]$$

$$zeriG := remove(x \rightarrow x = 0 \text{ or } \text{Im}(x) \neq 0, zeri)$$

$$zeriG := \left[\frac{1}{2} \right]$$

Calcoliamo il numero di occorrenze dei poli nell'origine, dei poli reali e degli zeri reali:

-numeri di effetti integrali (poli nell'origine):

$$\mu := \text{numboccur}(poli, 0)$$

$$\mu := 1$$

-numeri di poli e zeri reali (al netto degli effetti integrali):

$$n_p := \text{numelems}(poliG)$$

$$n_p := 2$$

$$n_z := \text{numelems}(zeriG)$$

$$n_z := 1$$

Calcoliamo anche le pulsazioni di taglio di G(s) ovvero i valori assoluti dei poli e degli zeri:

$$\Omega_t := \text{abs} \sim (zeriG)$$

$$\Omega_t := \left[\frac{1}{2} \right]$$

$$\omega_t := \text{abs} \sim (poliG)$$

$$\omega_t := [8, 8]$$

Osservazioni:

- ZERI:
 - Abbiamo uno zero reale nel semipiano destro in corrispondenza di $z_1 = \frac{1}{2}$
 - Costante di tempo: $T_1 = \frac{1}{|z_1|} = \frac{1}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 2 \text{ sec}$

- Pulsazione di rottura: $\Omega_1 = \left| \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \text{ rad/sec}$

Lo zero $z_1 = \frac{1}{2}$ si trova nel semipiano destro e indica un comportamento a fase non minima

- POLI:

Abbiamo tre poli:

- $p_1 = 0$ -> Polo in origine (effetto integrale). Ciò vuol dire che il sistema non ha smorzamento (natural damping) e potrebbe avere o una crescita costante oppure uno stato stazionario
- $p_2 = -8, p_3 = -8$ due poli stabili coincidenti
 - Costanti di tempo: $\tau_1 = \tau_2 = \frac{1}{|p_1|} = \frac{1}{|p_2|} = \frac{1}{|-8|} = \frac{1}{8} \text{ sec}$
 - Pulsazione di rottura: $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2 = |-8| = 8 \text{ rad/sec}$

B.2 Forma di Bode della $G(s)$

Per poter scrivere la forma di Bode, occorre calcolare i seguenti parametri:

- **Guadagno di Bode K_b :**

$$K_b = \lim_{s \rightarrow 0} s^\mu G(s)$$

dove μ è pari a:

$$\mu := \text{numboccur}(\text{poli}, 0)$$

$$\mu := 1$$

Per cui:

$$K_b := \lim_{s \rightarrow 0} (s^\mu \cdot G(s))$$

$$K_b := -1$$

- **Forma di Bode di $G(s)$**

Otteniamo infine

$$G(s) = K_b \cdot \frac{(1+T_1s)}{s^\mu \cdot (1+\tau_1s) \cdot (1+\tau_2s)} = -1 \cdot \frac{(1-2s)}{s \cdot \left(1+\left(\frac{s}{8}\right)\right) \left(1+\left(\frac{s}{8}\right)\right)} = -\frac{(1-2s)}{s \cdot \left(1+\frac{s}{8}\right)^2}$$

E quindi per valutare i diagrammi di Bode dobbiamo valutare la risposta in frequenza $G(j\omega)$

$$G(j\omega) = -\frac{(1-2j\omega)}{j\omega \cdot \left(1+\frac{j\omega}{8}\right)^2}$$

I cui componenti elementari sono:

- Elemento guadagno: $K_b = -1$
- Poli nell'origine: $\frac{1}{j\omega}$ con molteplicità $\mu = 1$
- Zero reale con pulsazione di rottura Ω_i : $(1-2j\omega)$
- Poli reali con pulsazioni di rottura $\bar{\omega}_i$: $\frac{1}{\left(1+\frac{j\omega}{8}\right)^2}$

B.3 Diagramma di Bode

Costruiamo delle funzioni “prototipo” che permettono di calcolare il contributo, approssimato e vero, di poli e zeri sia al diagramma dei moduli che al diagramma delle fasi.

- Funzione che **approssima** il contributo sui moduli per poli e zeri reali

$$f_{approx} := (\omega, \omega_c) \mapsto \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < 1 \\ 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) & 1 \leq \frac{\omega}{\omega_c} \end{cases}$$

Argomenti delle funzioni:

pulsazione ω - variabile
indipendente

pulsazione di taglio ω_c

- Funzione che fornisce il **vero** contributo sui moduli per poli e zeri reali

$$f_{vera} := (\omega, \omega_c) \mapsto 20 \cdot \log_{10} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \right)$$

$$f_{vera} := (\omega, \omega_c) \mapsto 20 \cdot \log_{10} \left(\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \right)$$

- Funzione che **approssima** il contributo sulle fasi per poli e zeri reali

$$g_{approx} := (\omega, \omega_c) \mapsto \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi}{4} \cdot \log_{10} \left(\frac{\omega}{\frac{\omega_c}{10}} \right) & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & \frac{\omega}{\omega_c} \geq 10 \end{cases}$$

$$g_{approx} := (\omega, \omega_c) \mapsto \begin{cases} 0 & \frac{\omega}{\omega_c} < \frac{1}{10} \\ \frac{\pi \cdot \log_{10} \left(\frac{10 \cdot \omega}{\omega_c} \right)}{4} & \frac{1}{10} \leq \frac{\omega}{\omega_c} < 10 \\ \frac{\pi}{2} & 10 \leq \frac{\omega}{\omega_c} \end{cases}$$

- Funzione che fornisce il **vero** contributo sulle fasi per poli e zeri reali

$$g_{vera} := (\omega, \omega_c) \mapsto \arg \left(1 + I \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right)$$

$$g_{vera} := (\omega, \omega_c) \mapsto \arg \left(1 + \frac{I \cdot \omega}{\omega_c} \right)$$

Diagramma dei Moduli (Vero e Approssimato)

Valutiamo il diagramma dei moduli

$$|G(j\omega)|_{dB} = |-1|_{dB} + |(1 - 2j\omega)|_{dB} + \left| \frac{1}{j\omega} \right|_{dB} + \left| \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{8}\right)^2} \right|_{dB}$$

Calcoliamo la funzione modulo complessiva, utilizzando le approssimazioni asintotiche:

$$modulo_{approx} := \omega \mapsto 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - 20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega) + \left(\sum_{i=1}^{n_z} f_{approx}(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left(\sum_{i=1}^{n_p} f_{approx}(\omega, \omega_{t_i}) \right)$$

Dove

- $|K_b|_{dB} = 20 \log_{10}(|K_b|)$ Contributo del guadagno di Bode K_b sul diagramma dei moduli
- $\left| \frac{1}{j\omega} \right|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\left| \frac{1}{j\omega} \right| \right) = -20 \log_{10}(\omega)$ Contributo dei poli nell'origine
- $\sum_{i=1}^{n_z} f_{approx}(\omega, \Omega_{t_i})$ Contributo degli zeri
- $-\sum_{i=1}^{n_p} f_{approx}(\omega, \omega_{t_i})$ Contributo dei poli reali

Ora, calcoliamo la funzione modulo vera

$$modulo_{vero} := \omega \mapsto 20 \cdot \log_{10}(|K_b|) - 20 \cdot \mu \cdot \log_{10}(\omega) + \left(\sum_{i=1}^{n_z} f_{vera}(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left(\sum_{i=1}^{n_p} f_{vera}(\omega, \omega_{t_i}) \right)$$

Prima di rappresentare il diagramma, vado a determinare le pulsazioni di taglio più a bassa frequenza e ad alta frequenza sui moduli

$$omLModulo := \min(\min(\Omega_t), \min(\omega_t))$$

$$omLModulo := \frac{1}{2}$$

$$omRModulo := \max(\max(\Omega_t), \max(\omega_t))$$

$$omRModulo := 8$$

DIAGRAMMA DI MODULI APPROSSIMATO E VERO

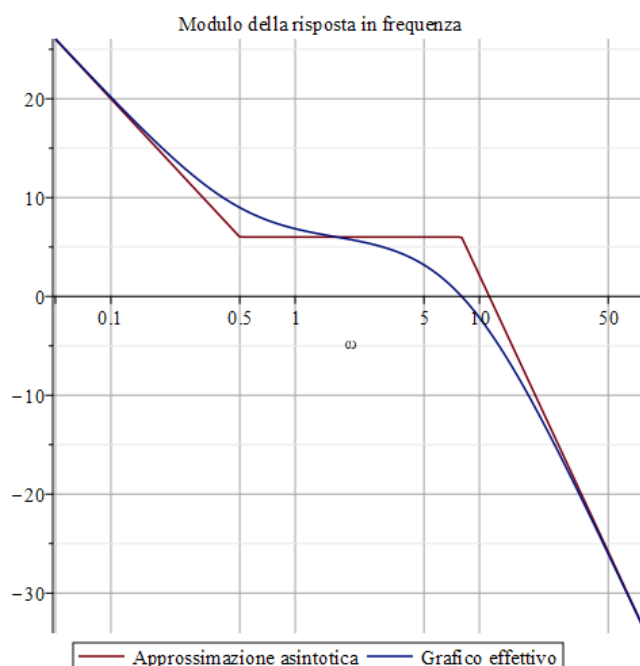


Diagramma delle Fasi (Vero e Approssimato)

Valutiamo il diagramma delle fasi

$$\angle(G(j\omega)) = \angle(-1) + \angle((1 - 2j\omega)) + \angle\left(\frac{1}{j\omega}\right) + \angle\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{8}\right)^2}\right)$$

Calcoliamo la funzione complessiva della fase, utilizzando le approssimazioni asintotiche

$$fase_{approx} := \omega \mapsto \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{signum}(K_b)}{2} \right) \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \left(\sum_{i=1}^n \text{signum}(-zeriG_i) \cdot g_{approx}(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left(\sum_{i=1}^p \text{signum}(-poliG_i) \cdot g_{approx}(\omega, \omega_{t_i}) \right)$$

Dove

- $\angle(-1) = -180^\circ$ Contributo del Guadagno di Bode K_b sul diagramma delle fasi: Un guadagno di Bode negativo $K_b < 0$ introduce uno sfasamento di -180° in tutto il diagramma di fase, indipendentemente dalla frequenza.
- $\angle\left(\frac{1}{j\omega}\right) = -\angle(j\omega) = -90^\circ = -\frac{\pi}{2}$ Contributo dei poli nell'origine: La fase cambiata di segno di un numero puramente immaginario, con parte immaginaria positiva è pari a -90°
- $\sum_{i=1}^{n_z} \text{signum}(-zeriG_i) \cdot g_{approx}(\omega, \Omega_{t_i})$ Contributo degli zeri
- $-\sum_{i=1}^{n_p} \text{signum}(-poliG_i) \cdot g_{approx}(\omega, \omega_{t_i})$ Contributo dei poli reali

Mentre la funzione vera della fase è data da

$$fase_{vera} := \omega \mapsto \left(\frac{1}{2} - \frac{\text{signum}(K_b)}{2} \right) \cdot \pi - \frac{\mu \cdot \pi}{2} + \left(\sum_{i=1}^n \text{signum}(-zeriG_i) \cdot g_{vera}(\omega, \Omega_{t_i}) \right) - \left(\sum_{i=1}^p \text{signum}(-poliG_i) \cdot g_{vera}(\omega, \omega_{t_i}) \right)$$

Prima di rappresentare il diagramma, vado a determinare le pulsazioni di taglio più a bassa frequenza e ad alta frequenza sulle fasi

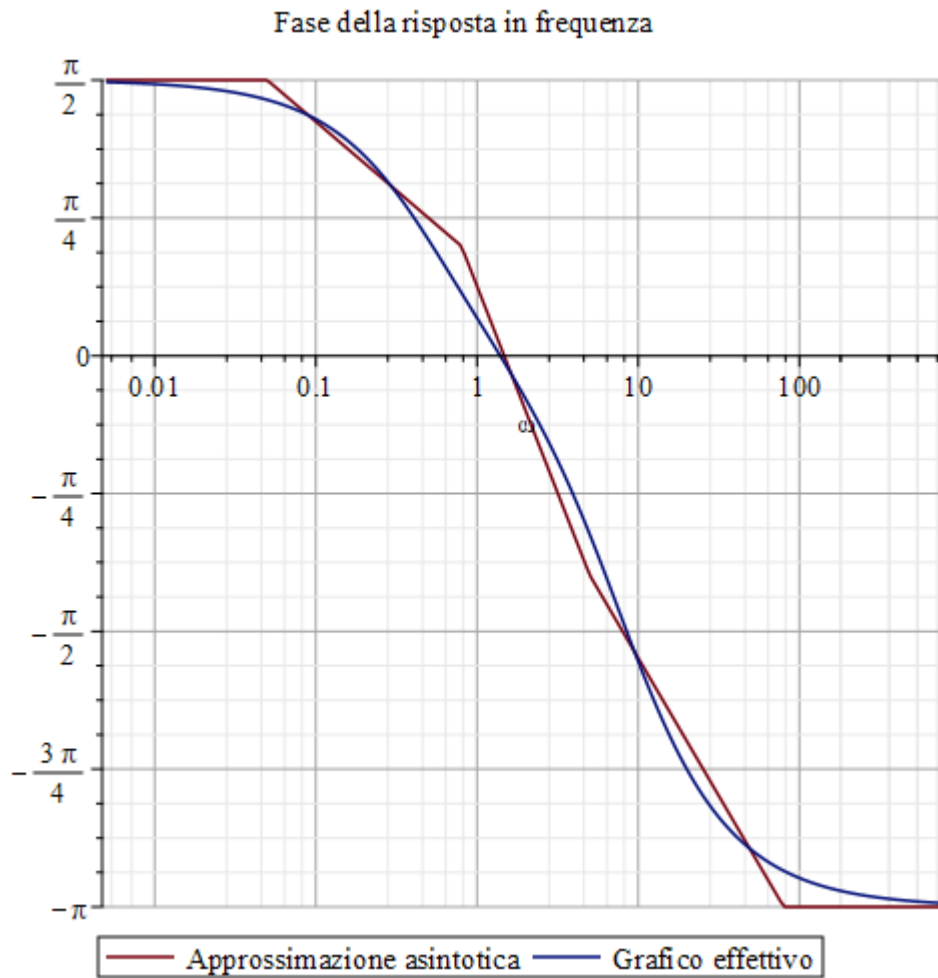
$$omLfase := \min\left(\min\left(\frac{\Omega_t}{10}\right), \min\left(\frac{\omega_t}{10}\right)\right)$$

$$omLfase := \frac{1}{20}$$

$$omRfase := \max\left(\max\left(\Omega_t \cdot 10\right), \max\left(\omega_t \cdot 10\right)\right)$$

$$omRfase := 80$$

DIAGRAMMA DELLE FASI APPROSSIMATO E VERO



- Osserviamo che nella bassa e alta frequenza della fase approssimata, abbiamo due curve asintotiche (asintoti orizzontali)

B.4 Pendenza Iniziale e Pendenza Finale, Fase Iniziale e Fase Finale, Sfasamento Relativo

Andiamo a valutare la pendenza “iniziale” e la pendenza “finale” sul diagramma dei moduli (misurati in dB/decade).

$$Pendenza_iniziale := -20 \cdot \mu$$

$$Pendenza_iniziale := -20$$

$$Pendenza_finale := -20 \cdot \mu + 20 \cdot (n_z - n_p)$$

$$Pendenza_finale := -40$$

A questo punto arrivati, posso calcolare la fase iniziale e la fase finale separando i poli (al netto dei poli nell'origine) e gli zeri fra i fattori che si trovano nel semipiano sinistro ed i fattori che si trovano nel semipiano destro.

Mi calcolo il numero di zeri che si trovano a destra del semipiano

$$nz_{dx} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{zeri}))$$

$$nz_{dx} := 1$$

e quelli che si trovano a sinistra del semipiano

$$nz_{sx} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{zeri}))$$

$$nz_{sx} := 0$$

Ora, mi calcolo il numero di poli che si trovano a destra del semipiano

$$np_{dx} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) < 0, \text{poliG}))$$

$$np_{dx} := 0$$

E quelli che si trovano a sinistra del semipiano

$$np_{sx} := \text{numelems}(\text{remove}(x \rightarrow \text{Re}(x) > 0, \text{poliG}))$$

$$np_{sx} := 2$$

Possiamo, ora, calcolare la fase iniziale e la fase finale utilizzando le seguenti formule:

$$Fase_iniziale := \left(\frac{(1 - \text{signum}(K_b))}{2} \cdot \text{Pi} \right) - \left(\frac{\mu \cdot \text{Pi}}{2} \right)$$

$$Fase_iniziale := \frac{\pi}{2}$$

$$Fase_finale := Fase_iniziale + \frac{(nz_{sx} - nz_{dx}) \cdot \text{Pi}}{2} - \frac{(np_{sx} - np_{dx}) \cdot \text{Pi}}{2}$$

$$Fase_finale := -\pi$$

Lo sfasamento relativo è pari a

$$Sfasamento_relativo := Fase_finale - Fase_iniziale$$

$$Sfasamento_relativo := -\frac{3\pi}{2}$$

Questo vuol dire che il diagramma delle fasi, dalla bassa frequenza (data da tutte le pulsazioni che sono a sinistra di $omLfase$) all'alta frequenza (data da tutte le pulsazioni che sono a destra di $omRfase$) perde $-\frac{3}{2}\pi$ rad (ritardo).

B.5 Pendenze Intermedie

Vogliamo capire come calcolare le pendenze dei moduli e delle fasi negli intervalli “intermedi”. Per fare questo, dobbiamo accoppiare e mettere in ordine le pulsazioni in corrispondenza delle quali il diagramma dei moduli ed il diagramma delle fasi cambiano pendenze.

Utilizzo una funzione generica per calcolare la pendenza intermedia tra le pulsazioni di taglio sui moduli e sulle fasi:

$$f_intSlope := (func, \omega 1, \omega 2) \mapsto evalf\left(\frac{func(\omega 2) - func(\omega 1)}{\log 10(\omega 2) - \log 10(\omega 1)}\right)$$

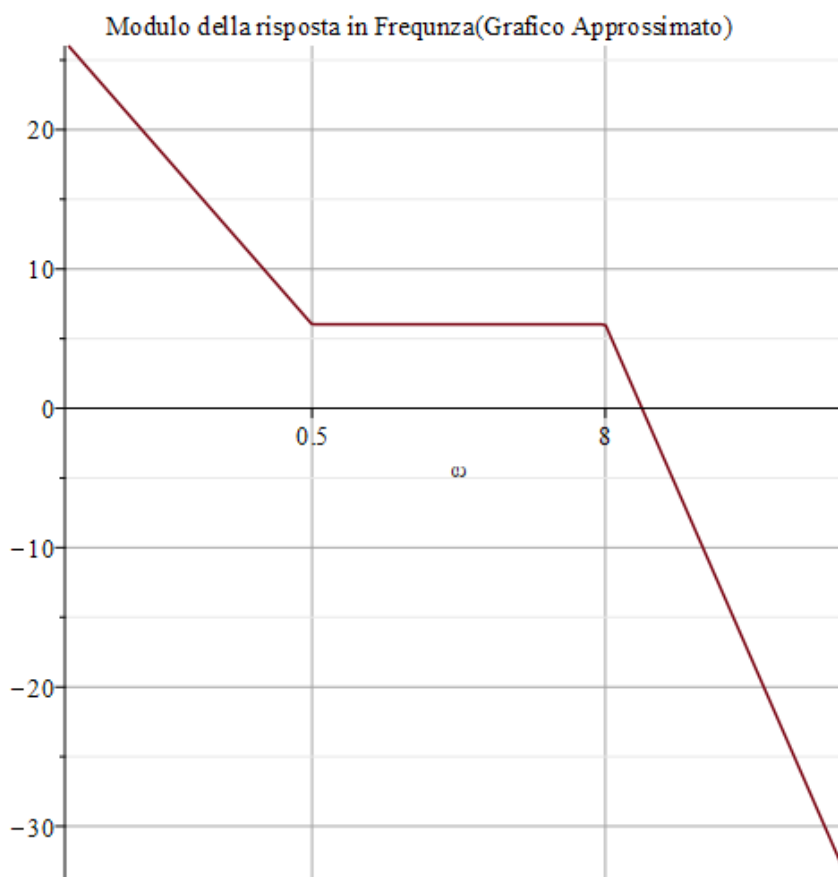
MODULO

Mi calcolo le pulsazioni di taglio sui moduli:

$$Puls_taglio_moduli := sort\left(convert\left(convert\left(\Omega_r, set\right) \mathbf{union} convert\left(\omega_r, set\right), list\right)\right)$$

$$Puls_taglio_moduli := \left[\frac{1}{2}, 8\right]$$

Rappresentazione Grafica:



- Abbiamo 3 fasce dove la pendenza è costante:
 1. Bassa frequenza (0-0.5)
 2. Intervallo tra 0.5 e 8
 3. Alta frequenza (8 in poi)

Osservo che tra $\frac{1}{2}$ e 8, abbiamo una retta orizzontale. Infatti, se prendo ad esempio un intervallo tra 1 e 2, il coefficiente angolare (pendenza logaritmica) è pari a: (misurata in dB/decade)

$$f_intSlope(modulo_{approx}, 1, 2)$$

0.

Se ad esempio, consideriamo le pulsazioni a sinistra di $\frac{1}{2}$ (intervallo tra 0.2 e 0.5), la pendenza logaritmica è pari a

$$f_intSlope(modulo_{approx} 0.2, 0.5) \\ -20.00000001$$

Invece tra l'intervallo 9 e 10, la pendenza intermedia è

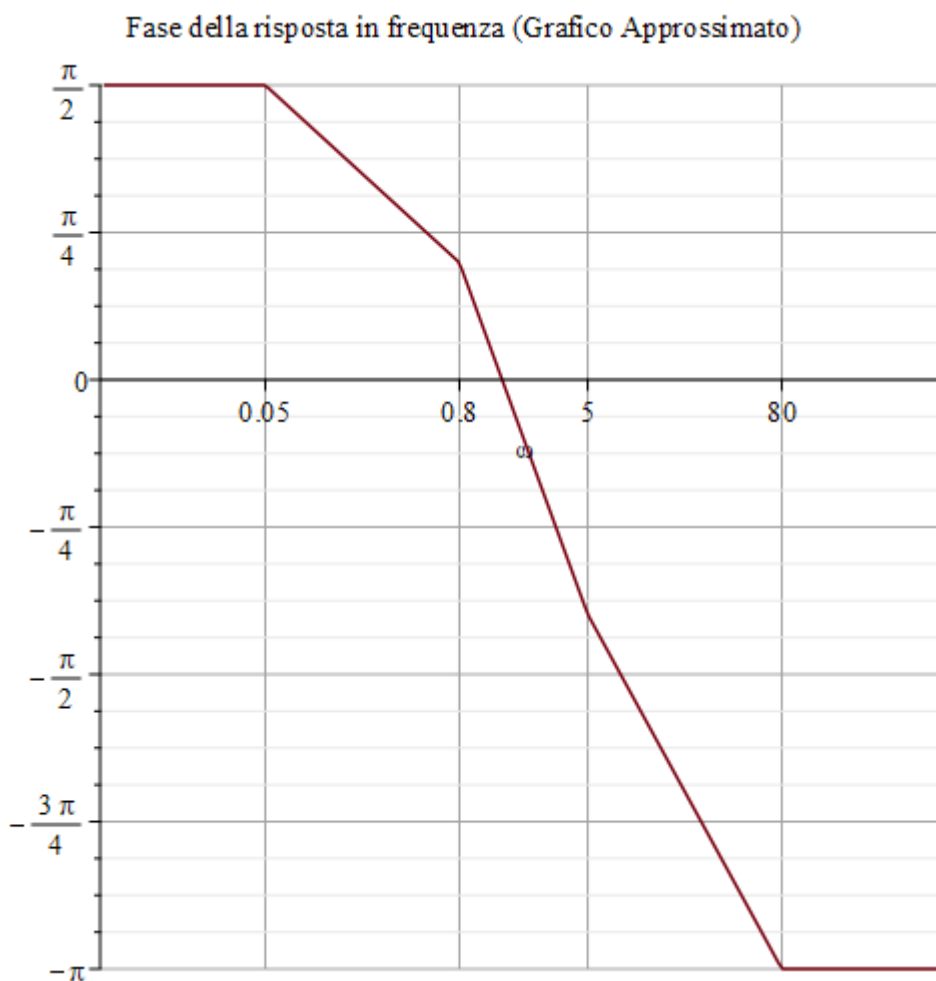
$$f_intSlope(modulo_{approx} 9, 10) \\ -39.99999985$$

FASI

Mi calcolo le pulsazioni di Taglio sulle fasi:

$$Puls_taglio_fasi := sort \left(convert \left(convert \left(\frac{\Omega_t}{10}, set \right) \text{union} convert \left(\frac{\omega_t}{10}, set \right) \text{union} convert(10 \cdot \Omega_r, set) \text{union} convert(10 \cdot \omega_r, set), list \right) \right) \\ Puls_taglio_fasi := \left[\frac{1}{20}, \frac{4}{5}, 5, 80 \right]$$

Grafico Approssimato della fase della risposta in frequenza



Considero di nuovo la funzione $f_intSlope$ per calcolare le pendenze intermedie sulle fasi ma vado anche a convertirlo in gradi per semplicità utilizzando la seguente funzione:

$$f_phaseSlope_DEG := (\omega_1, \omega_2) \mapsto \frac{180 \cdot f_intSlope(fase_{approx} \omega_1, \omega_2)}{\pi}$$

Considero gli intervalli tra 0.05 e 0.08 e prendo 0.4 e 0.5. Ottengo una pendenza pari a

$$f_phaseSlope_DEG(0.4, 0.5) \\ -44.99999993$$

Se considero l'intervallo tra 0.8 e 4

$$f_phaseSlope_DEG(0.8, 4) \\ -135.0000000$$

Se invece considero l'intervallo tra 6 e 10, ottengo

$$f_phaseSlope_DEG(6, 10) \\ -90.00000023$$

NB: le pendenze intermedie in fasi sono misurate in gradi/decade

Esercizio C: Regolatore C(s) di un Sistema di Controllo in Retroazione Algebrica ed Unitaria

c. Si consideri il seguente schema di controllo in retroazione algebrica ed unitaria.

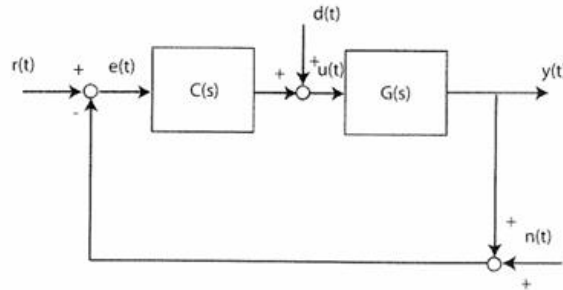


Figure 1:

dove $G(s)$ rappresenta la f.d.t. del processo

$$G(s) = \frac{\frac{s}{35} + 1}{\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \frac{s}{5} + 1}$$

Si chiede di determinare un regolatore $C(s)$ di struttura semplice che garantisca il soddisfacimento delle seguenti specifiche:

1. errore sull'uscita per un disturbo di carico al gradino non superiore al 5%;
2. massima sovraelongazione $S\% \leq 20\%$, tempo di assestamento $t_s \leq 1.2$ sec

1. Errore sull'uscita per un disturbo di carico al gradino non superiore al 5%

La prima richiesta riguarda l'analisi del problema di *precisione statica* che consiste nell'analizzare le prestazioni dello schema di controllo valutando gli andamenti delle uscite dello schema a transitorio o, che è lo stesso, in condizione di funzionamento da regime a fronte di ingressi test detti *segnali canonici*.

Nel nostro caso, abbiamo un sistema di tipo 0, in quanto non ci sono poli in origine. Sulla catena diretta del sistema, è presente un disturbo costante di ampiezza D ($d(t) = D \cdot 1(t)$), la cui influenza sull'uscita regolata è data da:

$$Y_d(s) = \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} D(s)$$

$$\text{dove } G(s) = \frac{\frac{s}{35} + 1}{\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \frac{s}{5} + 1} = \frac{s + 35}{s^2 + 20s + 100}.$$

Voglio fare il modo che l'effetto del disturbo costante sia al di sotto di 5%, ovvero

$$e_{\infty,d} \leq 0.05 = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$$

Per determinare l'errore a regime dovuto al disturbo gradino costante $d(t)$, utilizziamo il *teorema del valore finale* applicato a $Y_d(s)$

$$e_{\infty,d} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot Y_d(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \cdot D(s)$$

Poiché il disturbo è un gradino unitario, allora $D(s) = \frac{1}{s}$

$$e_{\infty,d} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

Per avere un errore finito, è sufficiente scegliere un controllore di tipo proporzionale $C(s) = K$.
L'errore, per cui, diventa

$$e_{\infty,d} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} G(s)}{1 + K \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

Il guadagno statico del sistema vale

$$G(0) = \frac{\frac{s}{35} + 1}{\left(\frac{s}{10}\right)^2 + \frac{s}{5} + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ricaviamo K dal disturbo costante:

$$e_{\infty,d} = \frac{1}{1+K} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow 1 + K \geq 20 \Rightarrow K \geq 20 - 1 \Rightarrow K \geq 19$$

Scelgo $K \geq 19.1$ quindi il controllore sarà **$C(s)=19.1$**

Definiamo dunque la funzione di anello L(s):

$$L_{old}(s) := C(s) \cdot G(s)$$

$$L_{old} := s \mapsto C(s) \cdot G(s)$$

$$L_{old}(s)$$

$$\frac{19.1 \left(\frac{s}{35} + 1 \right)}{\frac{1}{100} s^2 + \frac{1}{5} s + 1}$$

Osservazioni:

- Zeri e Poli della funzione di anello

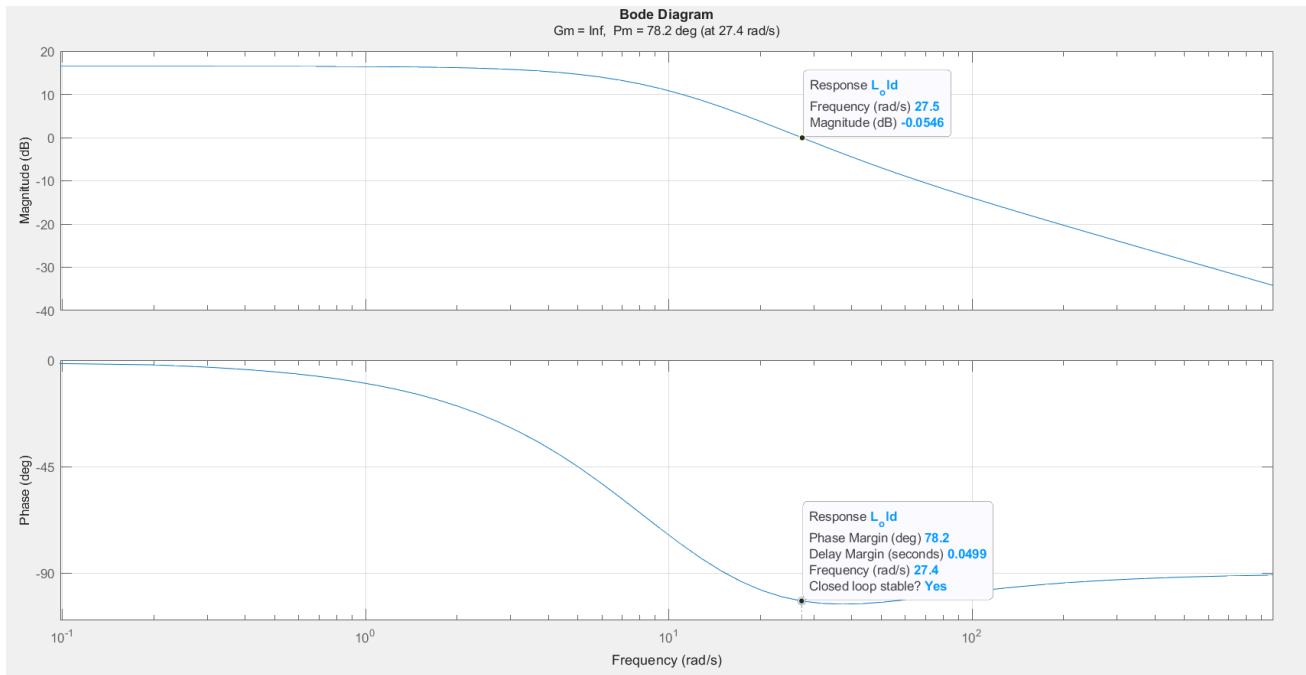
$$zeri := solve(numer(L_{old}(s)))$$

$$zeri := -35.00000000$$

$$poli := solve(denom(L_{old}(s)))$$

$$poli := -10, -10$$

- I poli si trovano nel semipiano sinistro $\text{Re}(s) < 0$, quindi il sistema è stabile in anello aperto.
- Diagramma di Bode della funzione in anello L(s):



- Ottengo un margine di fase $\phi_m = 78.2^\circ$ e una pulsazione di attraversamento $\omega_c = 27.4 \frac{rad}{s}$.
- In bassa frequenza, il modulo parte da circa 20dB e si riduce man mano che aumenta la frequenza.
- Per quanto riguarda la fase, in bassa frequenza, parte vicino a 0° e decrementa fino a circa -90° poi sale leggermente in alta frequenza.
- Il margine di guadagno della funzione di anello è pari all'infinito. Vuol dire che il sistema può tollerare un incremento arbitrariamente grande del open-loop gain senza verificarsi l'instabilità.

2. Massima sovraelongazione $S_{\%} \leq 20\%$, tempo di assestamento $t_s \leq 1.2 \text{ sec}$

MASSIMA SOVRAELONGAZIONE:

Dobbiamo ora valutare le prestazioni dinamiche, ovvero bisogna analizzare la funzione di sensibilità complementare: $T(s) = \frac{L(s)}{1+L(s)}$.

Faccio un'ipotesi sul sistema retroazionato:

$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La massima sovraelongazione del sistema retroazionato è legato allo smorzamento δ dei poli complessi e coniugati:

$$S = e^{-\pi \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

Andiamo a ricercare lo smorzamento critico δ_{cr} in corrispondenza del quale la massima sovraelongazione è minore del 20% ovvero,

$$S_{cr} = 0.2 = e^{-\pi \frac{\delta_{cr}}{\sqrt{1-\delta_{cr}^2}}}$$

Utilizzo la funzione **smorz_s** su MatLab per poter ottenere il valore del delta critico

$$\delta_{cr} = 0.4559$$

Inoltre, sappiamo che in un sistema di secondo ordine ad anello chiuso vale la relazione approssimativa $\delta \approx \frac{\phi_m}{100}$. Quindi un margine di fase $\phi_m > 100 \cdot \delta_{cr} = 45.59^\circ$ assicura che la sovraelongazione rimanga sotto il 20%.

TEMPO DI ASSESTAMENTO:

La relazione tra il tempo di assestamento $t_{s,5\%}$, lo smorzamento δ , e la pulsazione naturale ω_n , è data da:

$$t_{s,5\%} = \frac{3}{\delta \cdot \omega_n}$$

Posso ricavare la pulsazione naturale critica attraverso la formula inversa:

$$\omega_{n,cr} = \frac{3}{t_{s,5\%} \cdot \delta_{cr}} = \frac{3}{1.2 \cdot 0.4559} = 5.4831 \frac{rad}{s}$$

Utilizziamo ora lo smorzamento critico e la pulsazione naturale critica che abbiamo ricavato per calcolare la pulsazione della banda passante critico:

$$\omega_{BW} = \omega_{n,cr} \cdot \sqrt{(1 - 2\delta_{cr}^2) + \sqrt{(1 - 2\delta_{cr}^2)^2 + 1}}$$

Usando la funzione **wBwn** su matlab, ricavo che $w_{BW} = 7.2376 \frac{rad}{s}$.

In un sistema di controllo, sappiamo che la pulsazione di attraversamento è un minorante della pulsazione di banda passante: $\omega_c \leq \omega_{BW}$. Questo perché il sistema deve prima raggiungere il guadagno di 0dB (crossover) e poi attenuare il segnale fino a raggiungere il punto di -3dB (frequenza di banda). Quindi, se scegliamo una nuova pulsazione di attraversamento maggiore di $w_{BW} = 7.2376 \frac{rad}{s}$, il sistema può mantenere il tempo di assestamento sotto 1.2 secondi, ma con una risposta più rapida.

Compensatore

Ora, vogliamo migliorare le prestazioni dinamiche del sistema in modo che la massima sovraelongazione e il tempo di assestamento rispettino i vincoli imposti.

Scelgo nuovi valori della pulsazione di taglio e margine di fase:

$$\omega_{c,new} = 7.5 \frac{rad}{s}, \phi_{m,new} = 56^\circ$$

Da questi nuovi dati, ottengo i seguenti risultati dal diagramma di Bode:

- Modulo=4.3755
- Argomento = -61.6450

Quindi avrò che

$$\begin{cases} |L(j\omega_{c,new})| = 4.1812 > 1 \\ \pi - |\arg(L(j\omega_{c,new}))| = 118.3550 \geq \phi_{m,new} \end{cases}$$

Questa situazione richiede una *rete attenuatrice* perché il $|L(j\omega_{c,new})|$ è maggiore dell'unità, e quindi occorre attenuare nell'intorno della pulsazione di attraversamento di progetto per abbassare il guadagno. Mentre la distanza goniometrica $\pi - |\arg(L(j\omega_{c,new}))|$ è maggiore di $\phi_{m,new}$, perciò dovrò trascurare la fase per lasciare intatto il margine di fase.

La generica rete attenuatrice presenta la seguente struttura:

$$C_{lag}(s) = \frac{1 + s\tau_z}{1 + s\tau_p}$$

A questo punto, determino i parametri m e ϑ per tarare le costanti di tempo della rete attenuatrice. In particolare:

- $m = \frac{1}{\text{modulo}} = 0.2285$
- $\vartheta = 56^\circ - (180^\circ - |\arg(\text{argomento})|) = -62.3550^\circ$

La rete attenuatrice dovrà attenuare di 0.2285 e dovrà fornire un decremento in fase di 62.3550° nell'intorno di $\omega_{c,new} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Si possono ricavare τ_z e τ_p utilizzando le seguenti formule:

$$\tau_p = \frac{m \cos(\vartheta) - 1}{\omega_{c,new} m \sin(\vartheta)}$$

$$\tau_z = \frac{m - \cos(\vartheta)}{\omega_{c,new} \sin(\vartheta)}$$

Con $m < 1$ e $\vartheta < 0$.

Usando la funzione **generica** su matlab, ottengo che

- $\tau_p = 0.5888$
- $\tau_z = 0.0354$

La rete attenuatrice avrà questa struttura:

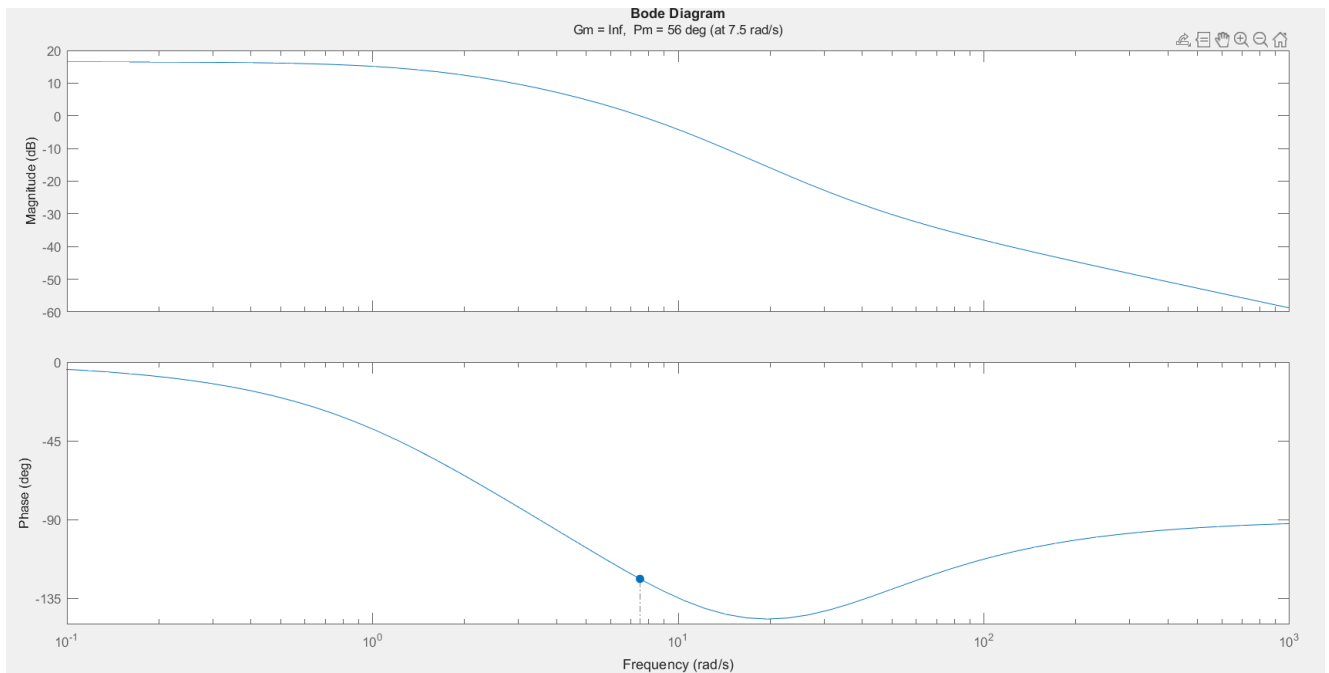
$$C_{lag} = \frac{0.060193 (s+28.22)}{(s+1.699)}$$

Arrivati a questo punto, posso determinare la funzione di anello compensata

L =

$$\frac{1.1497 (s+35) (s+28.22)}{(s+10)^2 (s+1.699)}$$

Avendo un controllore $C(s) = 19.1$, una rete attenuatrice $C_{lag} = \frac{0.060193(s+2822)}{s+1.699}$ e funzione di trasferimento ad anello aperto $G(s)$, abbiamo questa rappresentazione grafica:



- La rete attenuatrice garantisce il margine di fase abbondantemente al di sopra di 45.59° di richiesta.

A questo punto, posso chiudere la retroazione e andare ad analizzare il grafico della risposta al gradino la cui funzione di trasferimento è:

T =

$$\frac{1.1497 (s+35) (s+28.22)}{(s+14.85) (s^2 + 7.997s + 87.89)}$$

- Al numeratore, abbiamo la presenza di due zeri in

$$zeriT := \text{solve}(\text{numer}(T(s)))$$

$$zeriT := -35., -28.22000000$$

Essi influenzano il guadagno e la risposta transitoria, ma non la dinamica dominante.

- I poli di T sono

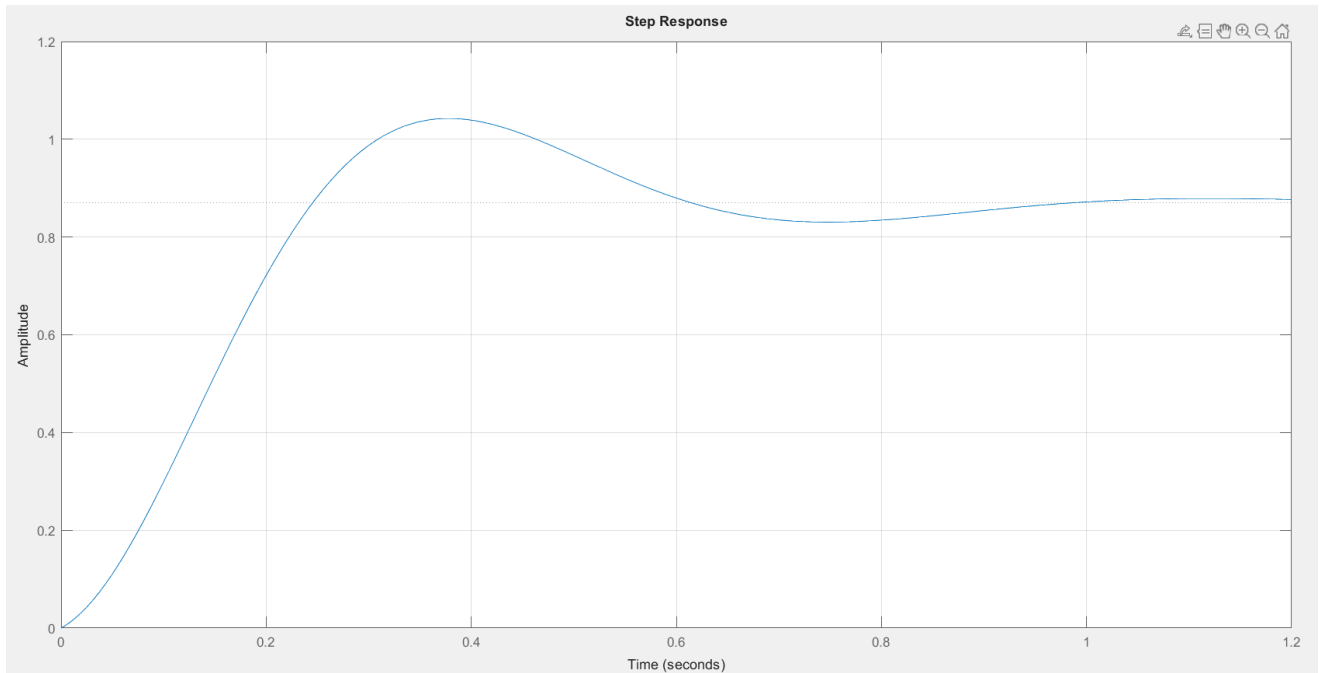
$$poliT := \text{solve}(\text{denom}(T(s)))$$

$$poliT := -14.85000000, -3.998500000 + 8.479504570I, -3.998500000 - 8.479504570I$$

$s = -14.85$ reale, lento rispetto ai poli complessi; è più lontano dall'origine e ha un effetto trascurabile sulla dinamica del sistema (infatti si comporta come un termine “rapidamente decadente”)

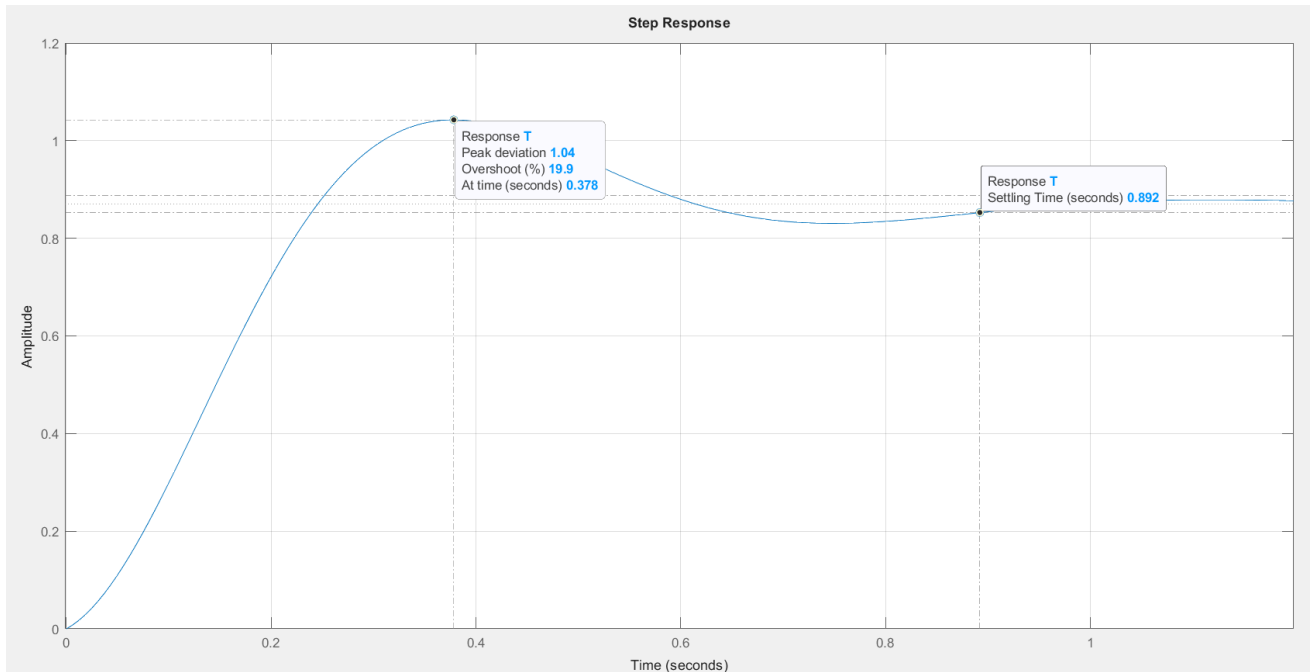
$s = -3.998 \pm 8.48i$ poli complessi e coniugati; questi poli complessi sono quelli dominanti e determinano la dinamica principale del sistema perché sono vicini all'origine rispetto agli altri poli e zeri. Infatti, il trinomio $s^2 + 7.997s + 87.89$ è il trinomio per cui abbiamo progettato la risposta al gradino compensata.

- Grafico della risposta al gradino:



Prestazioni

dinamiche:

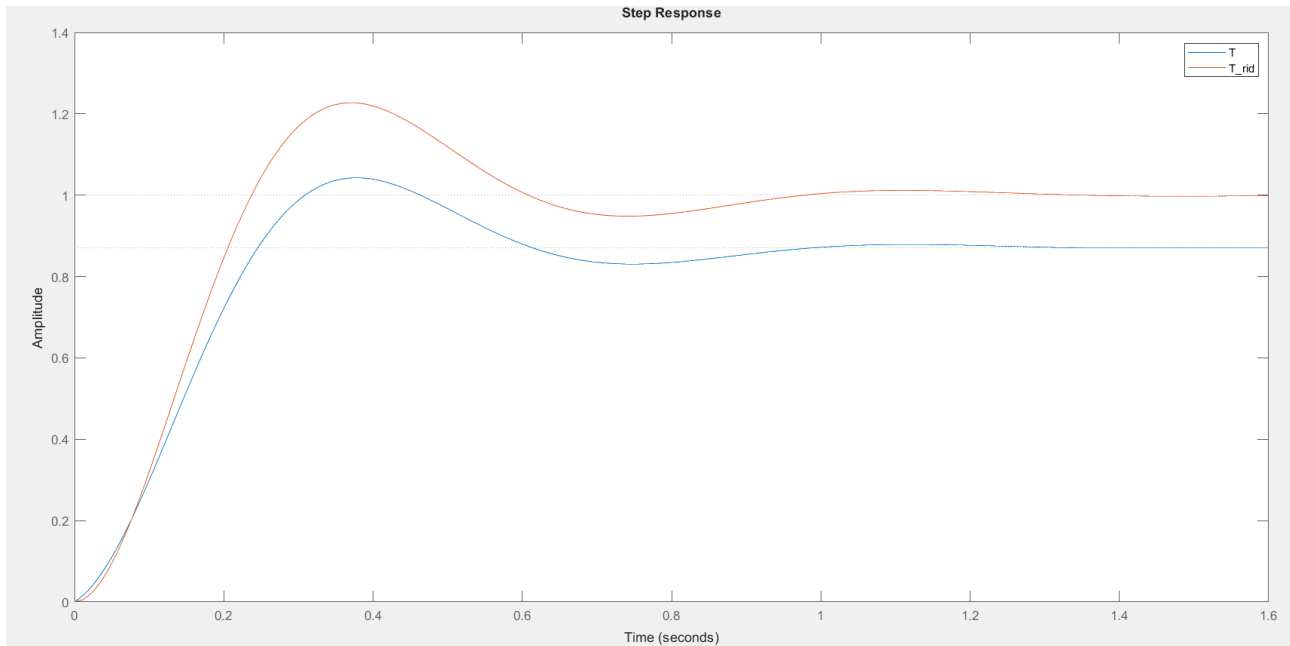


- Il sistema compensata ha una massima sovraelongazione pari a 19.9% che è minore di 20% mentre il tempo di assestamento è pari a 0.892s minore di 1.2s.

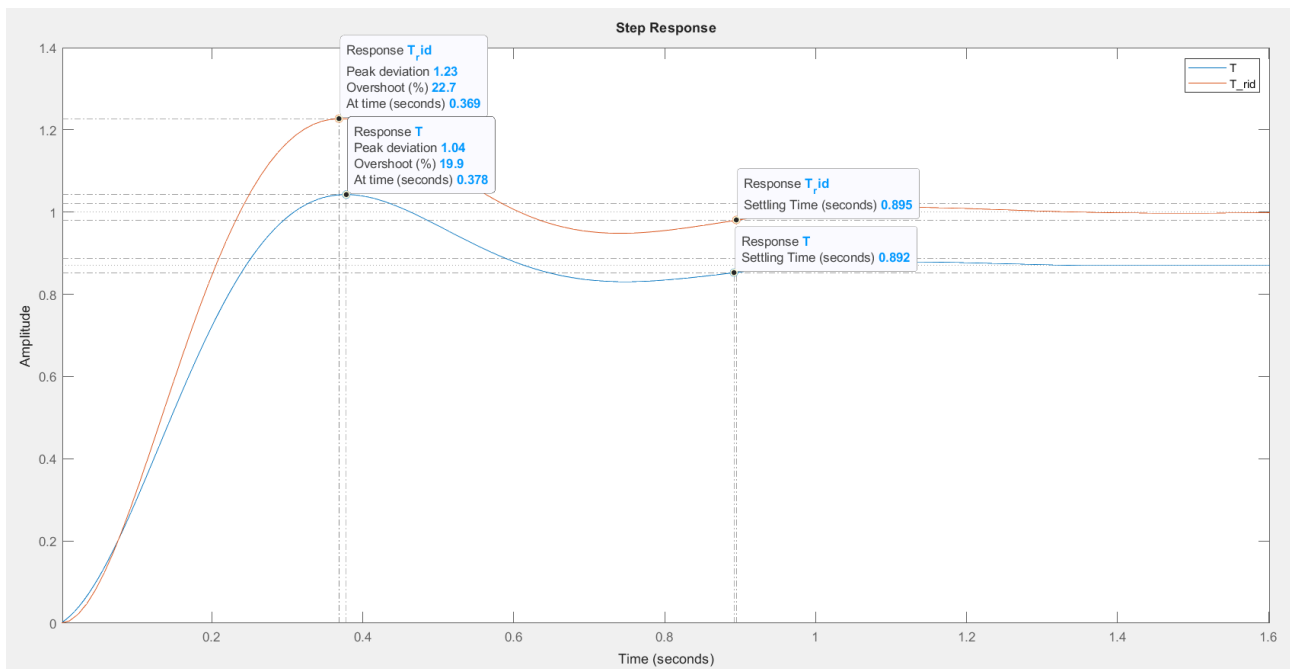
Sistema effettivo vs Sistema ridotto

Calcoliamo ora la funzione di trasferimento ridotta, trascurando i poli e zeri che hanno un effetto trascurabile sulla dinamica complessa del sistema.

$$T_{rid} = \frac{87.89}{s^2 + 7.997s + 87.89}$$



Prestazioni Dinamiche:



Osserviamo che la massima sovraelongazione del sistema effettivo è più basso rispetto a quella del sistema ridotto. Quindi la risposta al gradino del sistema effettivo si ritarda rispetto alla risposta al gradino del sistema ideale. Questo è un effetto distorsivo dovuto al fatto che il polo è più vicino all'asse immaginario rispetto allo zero. Mentre il tempo di assestamento rimane quasi lo stesso.