Algoritmo de selección de fondos voluntarios para Protección

Juliana Henao Arroyave

Junio de 2022

Jefe inmediato: Juan Esteban Isaza

Universidad EAFIT

Departamento de Ciencias Matemáticas

Medellín

2022

Introducción

El problema de selección de portafolios consiste en elegir una estrategia para administrar o distribuir el capital de inversión entre un conjunto de activos. Este problema ha sido objeto de interés y de estudio para los inversionistas y gestores de cartera. Así, se ha llegado a muchas aproximaciónes de su solución a lo largo del tiempo. El modelo clásico para la optimización de portafolios fue propuesto por Harry Markowitz, más conocido como Media-Varianza. Este modelo busca la maximizar el retorno de la inversión minimizando el porcentaje de riesgo, es decir, dar prioridad a los activos que tengan mayor retorno esperado por unidad de riesgo.

Para la estimación de la rentabilidad y la varianza del portafolio se utilizan métodos de máxima verosimilitud; los cuales, a pesar de producir estimaciones insesgadas bajo el supuesto de normalidad (Sajesh & Srinivasan, 2012), presentan errores de estimación sustanciales en el caso de una distribución no normal. Por esta razón otros modelos han sido propuestos a lo largo del tiempo. Modelos que toman en cuenta otros parámetros y variables que son relevantes para la selección del portafolio, además de el uso de métodos mas robustos a la hora de estimar. Estas alternativas fueron estudiadas en este proyecto para elegir la mejor estrategia y aplicarla al problema que se presenta a continuación.

Protección es un Fondo de Pensiones y Cesantías que hace parte de las Administradoras de Fondos de Pensiones Privados (AFP) en Colombia. Los productos de esta empresa se pueden dividir en tres grupos, pensiones obligatorias, pensiones voluntarias y administración de cesantías. El objetivo principal de las AFP, como Protección, es maximizar el valor del ahorro de sus afiliados. Por ello, se realizan inversiones estratégicas en las que se busca la mejor relación riesgo/retorno (Protección, 2022).

Para aumentar la rentabilidad de los ahorros de los afiliados se construyen portafolios de inversión, los cuales son determindos por expertos para hacer la mejor selección de estos e invertir cierta cantidad de capital en cada activo, como se explicó anteriormente. Estos portafolios a su vez cuentan con un portentaje de capital que se le asignará a cada uno de ellos, así, se puede ver un problema similar al de optimización de portafolios al momento de elegir el porcentaje para cada alternativa o fondo de pensiones voluntarias ya construído. Este es el enfoque que se tomará en el proyecto presente.

En este trabajo se encuentra primero una motivación que lleva a la elaboración de la investigación, seguida de los objetivos generales y específicos del proyecto. Por último, se encuentra la metodología llevada a cabo durante el periodo de investigación y un resumen de los resultados y conclusiones obtenidos.

Justificación

El sentido de este proyecto, al igual que el de cualquier otro (o cualquier otra acción humana), es la nada. No hay una verdadera razón por la cual este proyecto deba ser desarrollado dada su inutilidad universal. Sin embargo, se puede dar una justificación del motivo que anima a realizar este proyecto.

Una de las principales motivaciones de este proyecto es brindar una herramienta automática y objetiva para la toma de decisiones de una de las áreas de mayor relevancia en la empresa. Los fondos voluntarios abarcan gran parte de los productos ofrecidos por Protección. La rentabilidad de cada fondo influye en los ahorros de los afiliados a estos. Por tanto, un buen estudio para la selección de los portafolios es una pieza clave para el cumplimiento efectivo de los objetivos y responsabilidades de la empresa.

En ciertos casos, la distribución del capital de inversión, tanto para un solo portafolio como para las alternativas de fondos voluntarios, puede llegar a tener un alto componente subjetivo. Con este proyecto se busca la mejora del proceso de toma de decisiones; brindando argumentos sólidos, objetivos y basados en los datos históricos.

Por otro lado, la elaboración de algoritmos de toma de decisiones automáticos para un sector de la empresa, puede dar pie a la aplicación de modelos similares o equivalentes en otras áreas que puedan ser de utilidad en los procesos de estas.

Objetivos

- Estudiar e investigar diferentes alternativas de solución al problema de optimización de portafolios.
- Diseñar un algoritmo automático y robusto que genere recomendaciones de vectores combinando portafolios de pensiones voluntarias.
- Validar el algoritmo comparando los resultados con otros modelos de la literatura.
- Comparar diferentes estrategias existentes para la solución del problema de selección de portafolios.
- Presentar el algortimo al equipo con la finalidad de productivizarlo en un futuro.

Método y marco teórico

0.1. Descarga y Pivotación de los datos

Para la elaboración del algoritmo de selección de fondos, los datos fueron descargados y organizados en una estructura de datos adecuada para su uso. Esto permitió que el algoritmo fuese completamente automático y parametrizado, puesto que el diseño de sus insumos era una etapa primaria de la construcción del algoritmo.

0.2. Elección del modelo

Uno de los objetivos de este proyecto es estudiar diferentes aproximaciones y compararlas, así poder validar el modelo seleccionado. Conociendo los diferentes modelos que existen, se quiere elegir uno que permita tomar en cuenta varias restricciones y parámetros que son importantes a la hora de elegir una combinación de fondos óptima.

Algunos de estos parámetros o variables a tomar en cuenta son:

- Restricciones de volatilidad.
- Restricción de soluciones de esquina.
- Elección de al menos dos alternativas.
- Resultado especifico para un rango de fechas especifico.
- Retorno esperado.
- Métricas de riesgo según el perfil.

Cabe añadir que el problema planteado para este proyecto, es decir la selección de fondos voluntarios, es equivalente al problema de selección de portafolios. Basta con asumir, en vez de activos, cada fondo, y así, el vector de pesos, sería el porcentaje de inversión que se le dará a cada portafolio.

A continuación se presentan varias aproximaciones que resultan importantes o interesantes en la literatura, los cuales se tomaron en cuenta tanto para la solución definitiva del problema como para la comparación y validación.

Modelo Media-varianza

El modelo propuesto por Markowitz en 1952 es descrito abajo (Ecuación 1). Este modelo sienta las bases de la optimización de portafolios, y consiste en distribuir el capital sobre los activos de manera que se maximize el retorno de la inversión mientras se minimiza el riesgo asociado, generando de esta forma carteras que son llamadas eficientes.

$$\text{Min}\left[w^t\hat{\Sigma}w - \frac{1}{\gamma}\hat{\mu}^T w\right] \tag{1}$$

Sujeto a

$$\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\hat{\mu} = r^*$$
$$\overrightarrow{1}^{\mathrm{T}}\mathrm{w} = 1$$
$$\mathrm{w_i} \geq 0; \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, N$$

Donde w es el vector de pesos del portafolio, $\hat{\mu}$ es el vector que estima la rentabilidad media de los activos, $\hat{\Sigma}$ es el estimador de la matriz de varianzas y covarianzas, N es el número de activos que conforman el portafolio, r^* es el rendimiento esperado del portafolio y γ indica el grado de aversión al riesgo del inversionista. (Markowitz, 1952)

Modelo Media-varianza con Restricciones de Riesgo

Este modelo tiene la misma función objetivo que el anterior 1, sin embargo, en este la restricción de rendimiento esperado se cambia por una restricción de riesgo dada por un perfil que es indicado según el cliente. Estos perfiles pueden ser conservador, moderado y crecimiento. Los cuales tienen de menor a mayor aversión al riesgo respectivamente. Tomando en cuenta esto, el modelo propuesto se define así.

$$\text{Min}\left[w^t\hat{\Sigma}w - \frac{1}{\gamma}\hat{\mu}^T w\right] \tag{2}$$

Sujeto a

$$\begin{gathered}\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\hat{\Sigma}\mathrm{w} \leq \lambda \\ \overrightarrow{1}^{\mathrm{T}}\mathrm{w} = 1 \\ \mathrm{w_i} \geq 0; \quad \mathrm{i} = 1, \ldots, N\end{gathered}$$

Donde λ es el riesgo dado de un portafolio balanciado según el perfil de riesgo del cliente. Estos portafolios balanceados son para perfiles de riesgo conservador, moderado y crecimiento, los cuales tienen una volatilidad de menor a mayor respectivamente. Así γ, que es la aversión al riego, está dado por.

$$\gamma = \frac{1}{\lambda}$$

Modelo Mínima varianza

Esta aproximación es equivalente a la de media varianza (Ecuación 1) cuando el parámetro de aversión al riesgo tiende a infinito, así se puede llegar al problema de optimización de las siguientes expresiones.

$$\text{Min}\left[w^T\hat{\Sigma}w\right] \tag{3}$$

Sujeto a

$$\overrightarrow{\mathbf{w}}^T\overrightarrow{\mathbf{1}} = 1$$

Donde $\overrightarrow{\mathrm{w}} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ es el vector de pesos del portafolio, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^N$ es la matriz de covarianza estimada, $\mathrm{w}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathrm{w}$ es la varianza del rendimiento de la cartera, $\overrightarrow{1} \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ es la vector de unos, y la restricción $\overrightarrow{\mathrm{w}}^{\mathrm{T}}\overrightarrow{1} = 1$ asegura que los pesos de la cartera sumen uno, es decir, indica que el inversionista gasta exactamente el capital disponible (Ángel Medina, 2003).

Modelo de máxima diversificación

Otra estrategia para estimación los pesos de cada activo es el modelo de máxima diversificación propuesto por Choueifaty & Coignard (2008)

$$\text{Min}\left[\frac{w^T\sigma}{\sqrt{w^T\sum w}}\right] \tag{4}$$

Sujeto a

$$\sum_{i=1\ldots l} w_i = 1, 1 \geq w \geq 0$$

Algoritmo de solución Knapsack

El problema de la mochila es un problema de optimización bastante famoso en la literatura. Consiste en un conjunto de items, en este caso dividibles, que deben ser seleccionados. Tomando en cuenta una restricción de peso de la mochila y que maximicen la ganancia. Si se toma en cuenta que el límite de peso es 1 y la función objetivo está ponderada según métricas financieras de cada activo; se puede trasladar fácilmente el modelo de la mochila a un problems de optimización de portafolios. De la siguiente manera.

$$\text{Max}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i w_i\right]$$

Sujeto A

$$\sum_{i=1}^{n} a_i w_i \leq b$$

$$w_i \in (0, 1)$$

Donde w_i son los pesos a asignar, $b = 1$ y $a_i = 1 \forall i$ ya que la suma de los pesos debe ser igual a uno. Y c_i será una medida financiera de cada activo, en este caso se utlizará el ratio de Sharpe.

$$c_i = \frac{\text{retorno esperado}_i}{\text{riesgo}_i}$$

Modelo de Ponderación Inversa al Riesgo (PIR)

Esta estrategia de selección de portafolios propuesta por Puerta & Laniado (2010) es una solución analítica que consiste en asignar una ponderación a cada activo que sea inversamente proporcional al riesgo individual del mismo (PIR). Los pesos propuestos por esta aproximación están dados por la siguiente definición.

$$w_i = \frac{\frac{1}{\rho(X_i)}}{\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\rho(X_j)}} \quad i = 1, \ldots\ldots, n$$

Donde ρ es una medida de riesgo positiva univariante.

Como ρ es cualquier medida de riesgo esta puede ser dada como la raíz n-ésima de la varianza, así se añade un parámetro que es de utilizada a la hora de la estimación de los pesos. Este parámetro es un α que indica la raíz de la varianza de la siguiente manera.

$$\rho = \sigma^{1/\alpha}$$

Resultados

Para evaluar y comparar el desempeño de cada método se utilizaron varias métricas que pueden evidenciar la eficacia de las soluciones.

Primero se hizo un análisis de sensibilidad al parámetro α del método PIR, para así elegir aquel que sea mas adecuado en este problema. En al Figura 1 se puede ver que para un α menor que 2, el Ratio de Sharpe es muy bajo, es decir no tiene una buena relación retorno-riesgo, sin embargo, para un número mayor este ratio empieza a estabilizarse. Para la ejecución de esta solución se eligieron dos alpha, de 2 y de 4, debido que a partir de este las ponderación empiezan a converger a una repartición equiponderada, lo cual no es el resultado esperado.

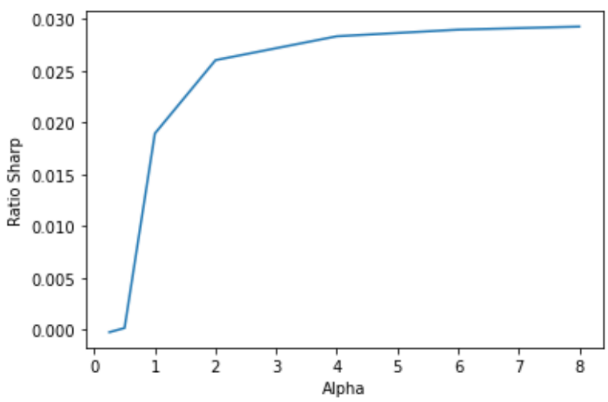


Figura 1: Cambio del Ratio de Sharpe respecto al parámetro alpha en método PIR

En el Cuadro 1, se puede ver una comparación de los 7 métodos implementados en Python. Entre todos los algoritmos el que genera mayor retorno es Markowitz con un 0.086 %. El que tiene menor volatilidad anual es la solución PIR con $\alpha = 2$, con una volatilidad del 15.9 %. Por último, el método con mejor ratio de Sharpe, que es la relación entre el retorno y la volatilidad, es Markowitz, con un ratio de 0.0023.

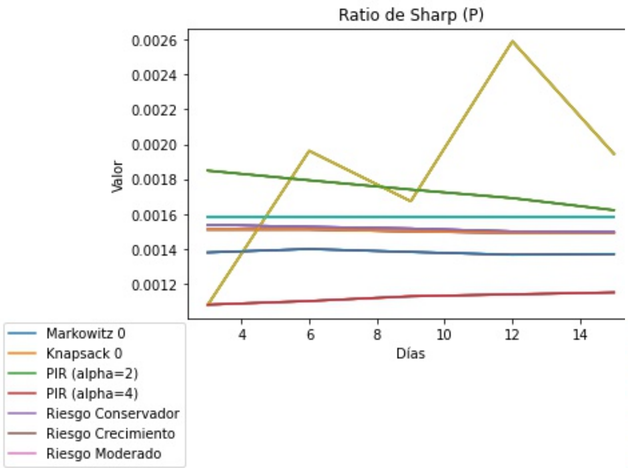
Las métricas de los métodos que toman en cuenta los 3 perfiles de riesgo demuestran coherencia con el tipo de perfil que se tiene. Pues, el algoritmo que tiene mayor retorno es aquel que asume un mayor riesgo, es decir, el perfil Crecimiento, con retorno de 0.042 %. Luego, el que tiene menor volatilidad es el perfil que asume menor riesgo, es decir el Conservador, con volatilidad anual de 17.1 %.

	Markowitz	**Knapsack**	**PIR (alpha=2)**	**PIR (alpha=4)**	**Riesgo Conservador**	**Riesgo Crecimiento**	**Riesgo Moderado**
Retorno (P)	0.000865	0.000392	0.000219	0.000305	0.000279	0.000428	0.000305
Volatildad anual (P)	0.369508	0.246991	0.159685	0.204079	0.171903	0.370772	0.204079
Ratio de Sharp (P)	0.00234	0.001586	0.001373	0.001494	0.001621	0.001156	0.001494

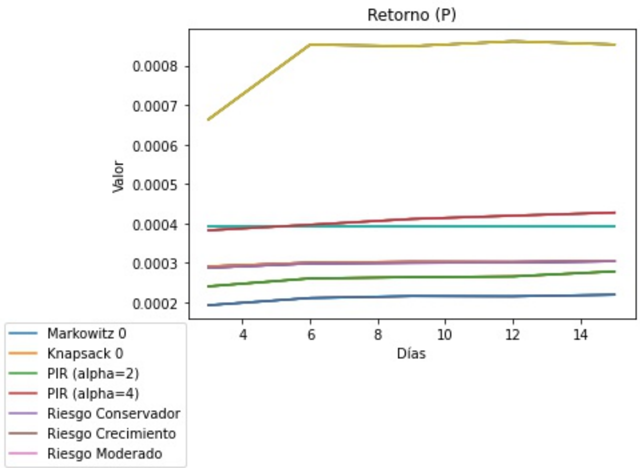
Cuadro 1: Tabla comparativa

Ahora, en la Figura 2, se pueden ver tres gráficas de como cambia el Ratio de Sharpe, el retorno y la volatilidad anual, según se toman más observaciones. En este caso se compararon todos los métodos para 3, 6, 9, 12 y 15 meses de observaciones.

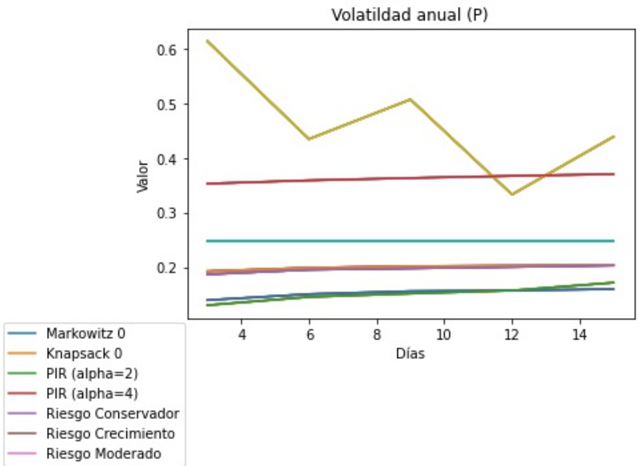
Se puede notar que todos los métodos suelen ser estables según el número de observaciones, sin embargo, el método Markowitz es sensible al número de observaciones que se toman. Como un trabajo futuro se pueden tomar más observaciones para ver si este método se estabiliza.



(a) Ratio de Sharp



(b) Retorno

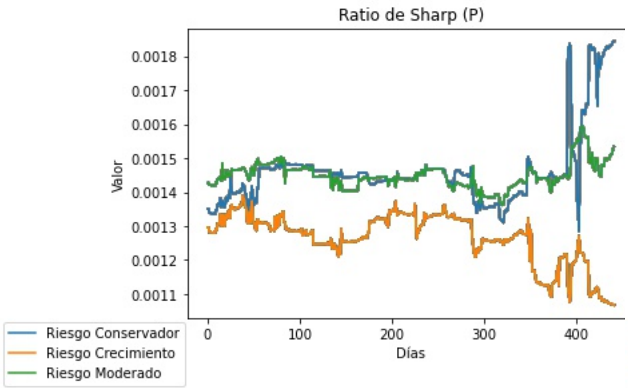


(c) Volatildad anual

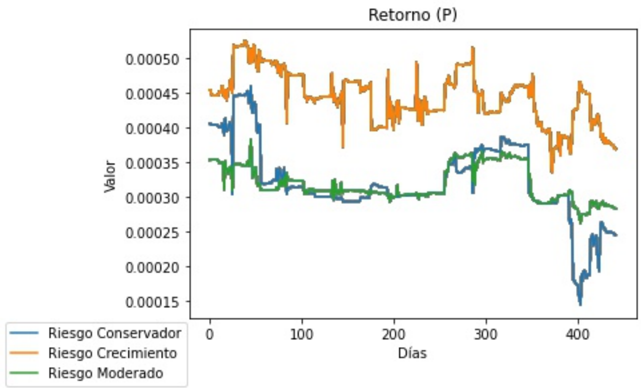
Figura 2: Todos los métodos al aumentar el número de observaciones

En la Figura 3 se puede ver una comparación de las métricas de los 3 perfiles de riesgo para diferentes ventanas de tiempo. Cada ventana tiene 30 observaciones, es decir un mes y se mueve cada día. Se nota que para los 3 métodos existe una sensibilidad al tiempo, es decir que sí toma en cuenta los movimientos del mercado para elegir los pesos, los cual se ve reflejado en el rendimiento de cada algoritmo sin dejar de lado una tendencia.

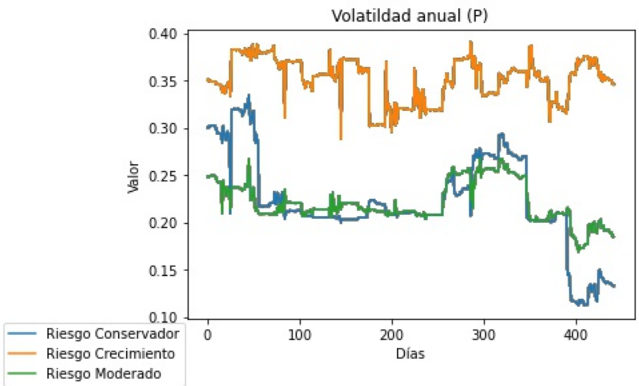
También se puede ver que tiene sentido que la volatilidad de los métodos con riesgo Conservador y Moderado sean menores que la del riesgo Crecimiento. Al igual que el retorno del riesgo Crecimiento mayor al de Conservador y Moderado.



(a) Ratio de Sharp



(b) Retorno

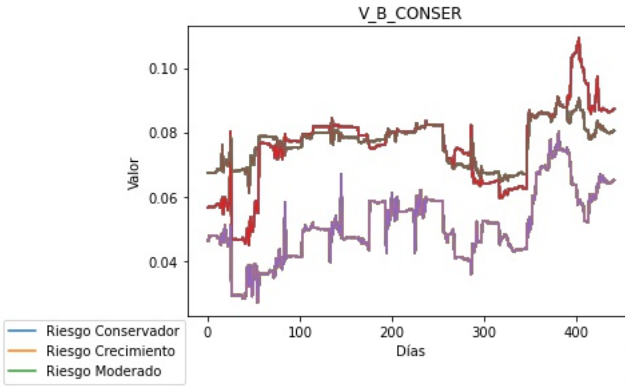


(c) Volatildad anual

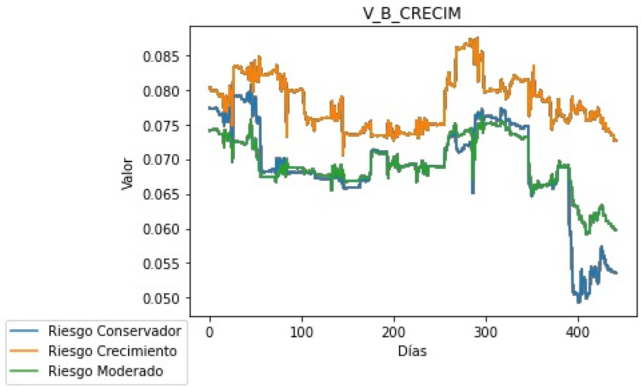
Figura 3: Markowitz con restricción de riesgo al aplicar una ventana de tiempo móvil

En la figura 4 se puede ver el cambio de las ponderaciones para los fondos balanceados Conservador, Crecimiento y Moderado. Estos tres fondos, son portafolios de activos ya balanceados según el perfil de riesgo. Por esto es interesante ver la posición que toma cada uno de estos fondos en los tres métodos que toman en cuenta los perfiles.

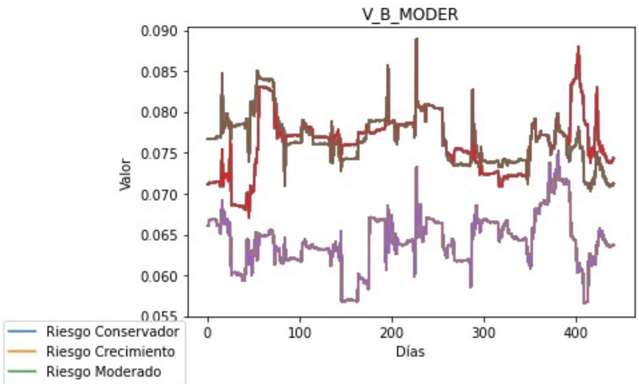
Los resultados muestran coherencia debido a que cada solución tiene la tendencia de tomar un mayor porcentaje del fondo respectivo a su perfil. También se observa que los tres métodos cambian con el paso del tiempo haciendo caso a los movimientos que tiene el mercado, retornando un resultado específico para un rango de fechas específico.



(a) Ponderación Balanceado Conservador



(b) Ponderación Balanceado Crecimiento



(c) Ponderación Balanceado Moderado

Figura 4: Cambio de los pesos asignados con ventana movil de 30 observaciones

Finalmente, se puede concluir que el método definitivo que será implementado para la selección de fondos es el Markowitz con restricción de riesgo para los tres perfiles. Esto se debe a que los resultados tienen sentido financiero y cumple con las características necesarias especificadas en la sección 0.2 de los Métodos de solución, tomando en cuenta los parámetros o variables más importantes.

Referencias

Choueifaty, Yves, & Coignard, Yves. 2008. Toward maximum diversification. *Journal of Portfolio Management*, **35**.

Markowitz, Harry. 1952. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**.

Protección. 2022. *¿En qué invierten los fondos de pensiones?*

Puerta, Andrés, & Laniado, Henry. 2010. Diseño de estrategias óptimas para la selección de portafolios, un análisis de la ponderación inversa al riesgo (PIR). *Lecturas de Economía*, **73**.

Sajesh, T. A., & Srinivasan, M. R. 2012. Outlier detection for high dimensional data using the Comedian approach. *Journal of Statistical Computation and Simulation*.

Ángel Medina, Luis. 2003. Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano. *Cuadernos de Economía*, **22**.