



# Основы электромагнитного поля

тоэ (СПБГЭТУ ЛЭТИ)



Escanea para abrir en Studocu

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

---

Санкт-Петербургский государственный  
электротехнический университет «ЛЭТИ»

---

В. В. ФЕДОРОВ    М. С. ПОРТНОЙ

## **ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Лабораторный практикум по теоретической электротехнике

Санкт-Петербург  
Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
2012

УДК 537.86 (075)

ББК В 336я7

Ф 33

**Федоров В. В, Портной М. С.**

Ф 33 Основы электромагнитного поля: Лабораторный практикум по теоретической электротехнике. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012. 53 с.

ISBN 978-5-7629-1194-8

Содержит описание комплекса лабораторных работ по второй части курса теоретических основ электротехники ТОЭ, теории электромагнитного поля, по темам: теоретические основы электродинамики, потенциальные поля и методы их расчета, переменные электромагнитные поля, их распространение, излучение и экранирование.

Посвящен студентам технических специальностей для использования при работе в лаборатории электромагнитного поля кафедры ТОЭ, а также может быть полезен инженерно-техническим работникам, специалистам по электронике, радиотехнике, электрическим машинам.

УДК 537.86 (075)

ББК В 336я7

Рецензенты: кафедра электротехники и технической диагностики СПбГУАП; д-р техн. наук, проф. С. А. Башарин (СПбГУКиТ).

Утверждено

редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного пособия

ISBN 978-5-7629-1194-8

© СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012

## **Предисловие**

Настоящее издание кафедры ТОЭ предназначено для студентов Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» и включает девять лабораторных работ по основным разделам теории электромагнитного поля. Лабораторный практикум по ТОЭ «Теория электромагнитного поля» разработан на основе учебных пособий [1], [2].

Лаборатория электромагнитного поля кафедры ТОЭ оснащена современными приборами, позволяющими студентам и магистрам проводить измерение напряженности электрического и магнитного поля реальных физических моделей в широком диапазоне частот от 0.1 Гц до 10 ГГц.

Оборудование лаборатории электромагнитного поля кафедры ТОЭ может быть использовано для выполнений аналогичных исследований тепловых, гравитационных и других видов полей.

## **Требования к оформлению отчетов**

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен в формате А4. Титульный лист должен содержать название факультета и кафедры, название и номер лабораторной работы, номер группы, ФИО студента и преподавателя.

В отчет должен быть включен протокол исследований, подписанный преподавателем, с указанием даты и фамилии студента.

При оформлении отчета необходимо указать цель работы; в каждом пункте исследований должна быть изображена выполненная по ГОСТу принципиальная схема установки, приведены таблицы наблюдений и полученных результатов, а также расчетные формулы с их теоретическим обоснованием. Там, где это необходимо, должны быть построены картины поля, по ним выполнен расчет параметров электромагнитного поля и исследуемого устройства.

В конце отчета требуется сделать заключение с оценкой полученных результатов исследований и письменно ответить на все приведенные вопросы. Заключение должно содержать краткие выводы о соответствии экспериментальных данных исследований с теоретическими расчетами.

# Лабораторная работа 1

## ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МЕТОДОМ ЭЛЕКТРОМОДЕЛИРОВАНИЯ

**Цель работы:** исследование полей двухпроводной линии и электронной линзы на моделях в электролитической ванне.

### 1.1. Основные теоретические положения

В основе электро моделирования лежит математическая аналогия различного рода физических полей и поля электрического тока в проводящей среде. В качестве примера рассмотрим электростатическое поле в однородном диэлектрике при отсутствии свободных зарядов ( $\rho_{эл} = 0$ ) и поле постоянного тока в однородной проводящей среде.

Основные дифференциальные уравнения этих полей:

$$\operatorname{rot} \bar{E}_{эл} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{D}_{эл} = \varepsilon_{эл} \operatorname{div} \bar{E}_{эл} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \bar{E}_{эл} = 0, \quad \operatorname{div} \bar{J}_{эл} = \gamma_{эл} \operatorname{div} \bar{E}_{эл} = 0.$$

Электрические поля потенциальны, причем потенциалы  $U_{эл}$  удовлетворяют уравнению Лапласа  $\nabla^2 U_{эл} = 0$  и граничным условиям:

$$D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{пов}; \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}.$$

При совпадении (подобии) граничных условий решения уравнения Лапласа для обеих сред совпадают (подобны), т. е. структуры полей, характеризуемые графическими картинками, одинаковы. Это позволяет исследовать электростатическое поле на его модели в проводящей среде, например, в электролитической ванне. Такой метод особенно плодотворен в тех случаях, когда краевые условия настолько сложны, что их нельзя сформулировать аналитически.

Электролитическая ванна представляет собой сосуд из изоляционного материала, наполненной проводящей жидкостью (водой). Электроды установлены на дне ванны так, что их верхний край совпадает с уровнем воды. Элек-

троды ограничены сверху и снизу (воздух и дно ванны); их удельная проводимость значительно меньше удельной проводимости воды, поэтому ток, стекающий с электродов, зеркально отображается в границах раздела с сохранением знака и величины. Таким образом, поле отрезков электродов совпадает с плоскопараллельным полем бесконечно длинных электродов. Для исследования аксиально-симметричных полей необходимо установить электроды так, чтобы ось симметрии находилась на поверхности воды. Размеры ванны должны быть достаточно большими, чтобы стенки не влияли на исследуемое поле. На электроды подается переменное напряжение низкой частоты 50–100 Гц. Перемещая зонд в ванне, можно определить положение эквипотенциальных линий. Перпендикулярно полученным эквипотенциальным линиям следует построить векторные линии электростатического поля так, чтобы поток вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}_{эл}$  во всех векторных трубках был одинаков.

Метод электролитической ванны – один из способов графического решения уравнения Лапласа. Картина поля – совокупность эквипотенциальных и векторных линий напряженности электрического поля.

Метод моделирования полей, различных по физической природе, основан на аналогии их дифференциальных уравнений и заключается в экспериментальном снятии картины электрического поля в проводящей среде, как наиболее легко воспроизводимого и измеряемого. Полученная картина поля позволяет найти значения напряженности электрического и магнитного поля в каждой точке, значения интегральных характеристик моделируемых устройств: емкости, индуктивности, электрического и магнитного сопротивления.

Для моделирования плоскопараллельных полей применяют проводящий лист, для моделирования любых полей, плоскопараллельных и трехмерных, – электролитическую ванну.

В электролитической ванне лаборатории поля при соответствующей замене электродов двухпроводной линии могут быть исследованы электромагнитные поля других направляющих систем, основной волной в которых является поперечная электромагнитная волна типа «Т»: симметричной и несимметричной полосковых линий, коаксиального кабеля, однопроводной линии. Графические картины потенциальных электрических и магнитных полей (рис. 1.1) строят по одним определённым правилам, соответствующим трём аналогичным дифференциальным уравнениям при построении:

– электростатического поля:

$$\operatorname{div} \bar{D}_{\text{эл}} = \rho_{\text{эл}}, \quad \bar{E}_{\text{эл}} = -\operatorname{grad} U_{\text{эл}}, \quad \nabla^2 U_{\text{эл}} = 0;$$

– электрического поля в проводящих средах:

$$\operatorname{div} \bar{J}_{\text{эл}} = 0, \quad \bar{E}_{\text{эл}} = -\operatorname{grad} U_{\text{эл}}, \quad \nabla^2 U_{\text{эл}} = 0;$$

– магнитного поля:

$$\operatorname{div} \bar{B}_{\text{эл}} = 0, \quad \bar{H}_{\text{эл}} = -\operatorname{grad} U_{\text{м}}, \quad \nabla^2 U_{\text{м}} = 0.$$

При построении картины поля следует руководствоваться следующими правилами:

1. Векторные силовые линии электрического поля  $\bar{E}_{\text{эл}}$  должны быть непрерывными, начинаться и заканчиваться на зарядах при исследовании электростатических полей  $\operatorname{div} \bar{D}_{\text{эл}} = \rho_{\text{эл}}$  или на электродах при исследовании

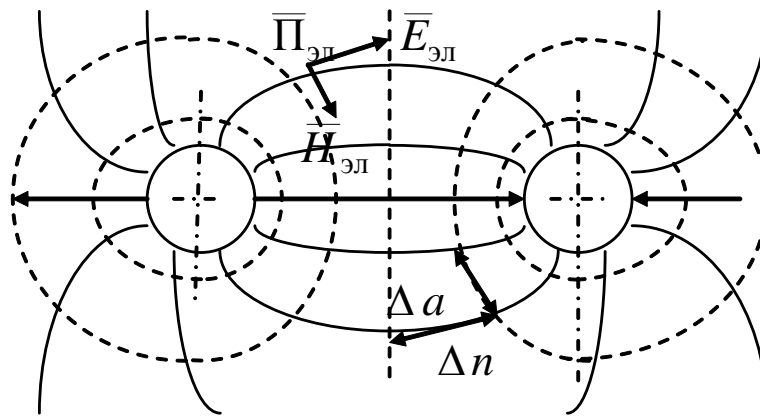


Рис. 1.1.

электрических полей в проводящих средах  $\operatorname{div} \bar{J}_{\text{эл}} = 0$ . Векторные линии напряженности магнитного поля  $\bar{H}_{\text{эл}}$  должны быть замкнутыми  $\operatorname{div} \bar{H}_{\text{эл}} = 0$ .

2. Векторные линии электрического и магнитного поля должны быть перпендикулярны эквипотенциальным линиям, т. е. линиям равного потенциала, так как  $\bar{E}_{\text{эл}} = -\operatorname{grad} U_{\text{эл}}$ ,  $\bar{H}_{\text{эл}} = -\operatorname{grad} U_{\text{м}}$ .

3. Ячейки, полученные при пересечении эквипотенциальных и векторных линий напряженности поля, должны быть подобными, т. е. отношение линейных размеров двух прилегающих сторон каждой ячейки  $\Delta a / \Delta n$  должно быть постоянным для всей картины поля, где  $\Delta a$  – расстояние между двумя ближайшими векторными линиями электрического поля, а  $\Delta n$  – расстояние между двумя ближайшими эквипотенциальными линиями. При этом обеспе-

чиваются условия Коши-Римана, потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа, а напряженность поля может быть определена из отношения  $\Delta U / \Delta n$ .

Проводники имеют один и тот же электрический потенциал, поэтому векторные линии электрического поля  $\vec{E}_{эл}$  должны быть перпендикулярными к контурам, ограничивающим сечение проводников.

Графическую картину рисуют вначале ориентировочно, стремясь удовлетворить ортогональность векторных и эквипотенциальных линий, а также векторных линий к поверхности проводника, затем исправляют её так, чтобы удовлетворить подобие ячеек, т. е.  $\Delta a / \Delta n = \text{const}$ . Обычно для облегчения построения картины поля выбирают отношение  $\Delta a / \Delta n = 1$ .

По картине поля рассчитывают в любой точке модели напряженность электрического и магнитного поля, величину вектора Пойнтинга, мощность электромагнитного потока энергии, идущей вдоль линии. По картине поля определяют её емкость, внешнюю индуктивность и сопротивление утечки.

В качестве примера приведём расчет поля в воздухе и параметров двухпроводной линии (рис. 1.1):

$$E_{элA} = \frac{\Delta U_{эл}}{\Delta n} = \frac{U_{эл}}{n \Delta n}; \quad H_{элA} = \frac{I}{\Delta a m}; \quad P_{элA} = \frac{IU_{эл}}{mn \Delta n \Delta a};$$

$$P_{ячA} = \frac{IU_{эл}}{mn}; \quad P_{трA} = \frac{IU_{эл}}{m}; \quad P_{лин} = IU_{эл},$$

где  $n$  – число эквипотенциальных промежутков;  $m$  – число токовых трубок.

При расчете принято во внимание то, что в двухпроводной линии распространяется поперечная электромагнитная волна типа «Т», у которой векторы  $\vec{E}_{эл}$ ,  $\vec{H}_{эл}$  и  $\vec{P}_{эл}$  взаимно перпендикулярны  $\vec{E}_{эл} \perp \vec{H}_{эл} \perp \vec{P}_{эл}$  и векторные линии напряженности магнитного поля совпадают с эквипотенциалами.

Для определения емкости электродов на единицу длины полезно использовать представление о дискретной модели, построенной из параллельно и последовательно включенных емкостей. Ёмкость ячейки определяется как емкость плоского конденсатора  $C_{яч} = \epsilon_{эл} l \frac{\Delta a}{\Delta n}$ , емкость токовой трубки как емкость  $n$  последовательно соединённых одинаковых ячеек  $C_{тр} = \epsilon_{эл} l \frac{\Delta a}{n \Delta n}$ , а



емкость линии – емкость  $m$  параллельно соединённых одинаковых трубок

$$C = \epsilon_{\text{эл}} l \frac{m \Delta a}{n \Delta n}.$$

Для определения поверхностной плотности зарядов на электродах используется граничное условие  $D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{пов}}$ . Так как электростатическое поле в проводниках отсутствует  $\sigma_{\text{пов}} = D_n = \epsilon_{\text{эл}} E_n$ .

Сопротивление утечки линии определяют по аналогии с ёмкостью  $R_{\text{ут}} = \frac{1}{\gamma_{\text{эл}}} \frac{n \Delta n}{l m \Delta a}$ , а внешнюю индуктивность – через магнитный поток, проходящий между проводами линии  $L = \mu_{\text{эл}} l \frac{n \Delta n}{m \Delta a}$ .

На рис. 1.2–1.4 приведены картины электромагнитного поля двухпроводной линии, коаксиального кабеля и несимметричной полосковой линии,

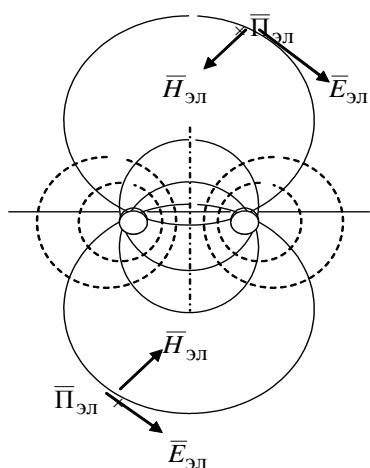


Рис. 1.2

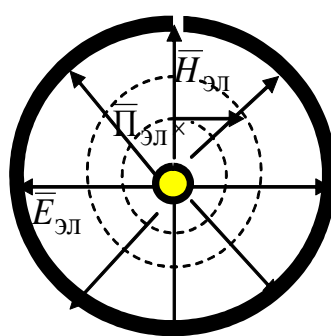


Рис. 1.3

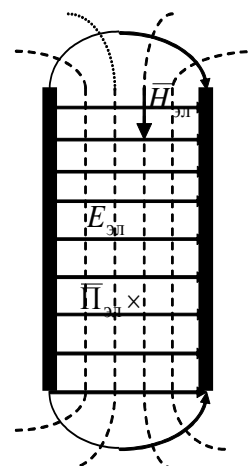


Рис. 1.4

построенные по правилам графического метода.

При построении векторных линий поля электронной линзы (рис. 1.5)

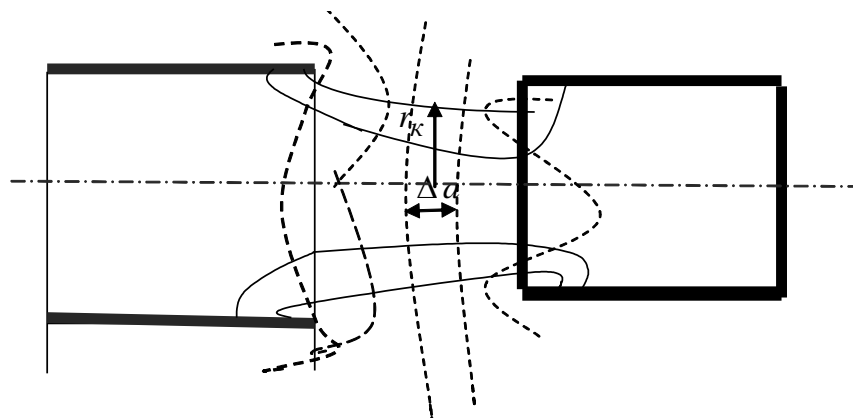


Рис. 1.5

первые два правила сохраняются, а требование постоянства потока в векторной трубке электрического поля выполняется при условии:  $\Delta a \cdot r_k / \Delta n = \text{const}$ , где  $r_k$  – расстояние от центра ячейки до оси. Постоянная  $\Delta a \cdot r_k / \Delta n$  вычисляется после построения трубки поля, которая образуется линией, совпадающей с осью симметрии, и первой векторной линией.

## 1.2. Экспериментальная установка

Схема для исследования поля моделей состоит из генератора синусоидального напряжения 1, электролитической ванны 2, вольтметра 3, двух металлических цилиндров, двух соосных цилиндров 4 и зонда 5 (рис. 1.6).

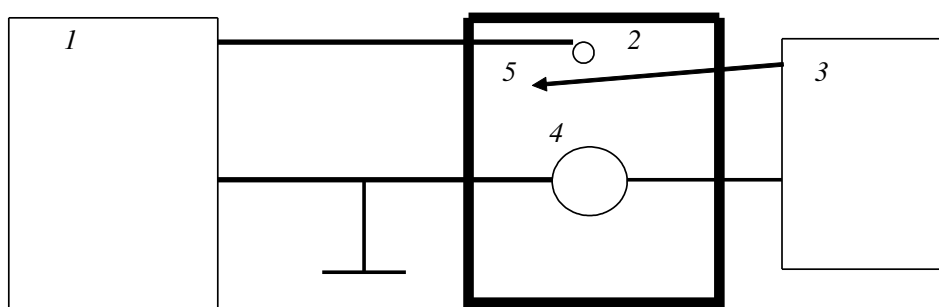


Рис. 1.6

В работе исследуются двухпроводная линия с проводами разного диаметра и электронная линза. В первом случае модель представляет собой два металлических цилиндра конечной длины, во втором случае – два соосных полуцилиндра.

Распределение потенциала поля моделей находится с помощью зонда, подключенного к потенциальному зажиму вольтметра. Эквипотенциали  $U_{эл} = 0$  и  $U_{эл} = U_0$  совпадают с электродами. Остальные эквипотенциали определяются с заранее выбранным шагом  $\Delta U_{эл} = U_0 / n$ .

## 1.3. Порядок проведения исследований

1. Укрепить на крышке ванны лист бумаги.
2. Построить эквипотенциали поля модели двухпроводной линии, установив предварительно потенциал первого электрода 1 В. При числе потенци-

альных перепадов  $n = 10$  шаг  $0.1 \text{ В}$ , а число эквипотенциалей –  $n + 1 = 11$ . Две эквипотенциали совпадают с электродами модели.

3. Построить эквипотенциали поля модели электронной линзы, приняв по-прежнему шаг  $0.1 \text{ В}$ .

#### 1.4. Содержание отчета

1. Цель работы, схема установки.
2. Картина плоскопараллельного поля двухпроводной линии, построенная в соответствии с тремя сформулированными правилами.
3. Расчет максимальной и минимальной поверхностной плотности заряда на одном из проводов линии.
4. Расчет погонной емкости, индуктивности и сопротивления утечки двухпроводной воздушной линии.
5. Расчет и определение направления векторов напряженности электрического и магнитного поля, вектора Пойнтинга в заданной преподавателем точке двухпроводной линии. Расчет потока электромагнитной мощности, проходящей через ячейку, трубку и все сечение двухпроводной линии.
6. Картина аксиально-симметричного поля электронной линзы.
7. Выводы.

#### Контрольные вопросы

1. Как выполняется условие подобия клеток в картине электрического и магнитного потенциального поля?
2. Каким уравнениям удовлетворяют скалярные потенциалы электрического и магнитного поля?
3. На чем основано моделирование различных потенциальных полей?
4. Какие правила должны выполняться при построении картины поля графическим методом?

#### Лабораторная работа 2

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ЧИСЛЕННЫМ МЕТОДОМ С ПОМОЩЬЮ КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ ELCUT

**Цель работы:** построение картины плоскопараллельного низкочастотного электромагнитного поля одной из направляющих систем численным методом с помощью программного комплекса ELCUT.

Студент самостоятельно выбирает вид, размеры, входные токи и напряжения одной из направляющих систем: двухпроводной линии, однопроводной линии, коаксиального кабеля, несимметричной или симметричной полосковой линии. Преподаватель уточняет геометрию электродов модели.

## 2.1. Основные теоретические положения

Численные методы [3], лежащие в основе специальных математических программ, позволяют достаточно быстро решать сложные полевые задачи на компьютерах с наглядным представлением результатов расчета и картин поля.

Специфика работы компьютера требует замены операций дифференцирования в уравнениях Лапласа операциями над числами и перехода от бесконечной совокупности чисел к конечной совокупности. Поэтому необходим переход от исходных непрерывных дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений. Переход осуществляется составлением разностного уравнения, являющегося дискретным аналогом соответствующего дифференциального уравнения.

Для получения разностных уравнений выбирается система узлов, заполняющих одно-, двух- или трёхмерную расчётную область. Выбор сетки, т. е. конфигурации дискретных областей, и определяемой ими системы узлов и ячеек, осуществляют исходя из условий получения возможно меньших погрешностей при переходе от непрерывного уравнения к дискретному и представления границ расчетной области и поверхностей раздела сред с различными свойствами. В практических задачах часто выбирают сетки, имеющие плоские, цилиндрические или сферические поверхности сторон ячеек, заменяя при этом граничные поверхности совокупностью таких же плоских и криволинейных поверхностей. При расчете двумерных полей узлы сетки могут образовывать ячейки различной формы (прямоугольной, треугольной, шестиугольной) с прямолинейными сторонами либо криволинейными (две стороны – прямые линии, две другие – дуги окружностей). При расчете трёхмерных полей узлы сетки образуют пирамиды, призмы с плоскими, цилиндрическими или сферическими гранями.

Замене непрерывных функций дискретными (сеточными) функциями соответствует замена области непрерывного изменения аргумента дискретным множеством точек (узлов), образующих сетку или решетку. Поэтому при аппроксимации исходных дифференциальных уравнений в частных производных алгебраическими зависимостями прежде всего задают систему уз-

лов – сетку. Пусть плоскопараллельное электростатическое поле в области  $S$ , заполненной однородной средой, описывается потенциалом, удовлетворяющим уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Рассмотрим прямоугольную сетку с неравными шагами по координатам, аппроксимируя уравнение Лапласа в узле 0 (рис. 2.1). Используя разложение потенциала в ряд Тейлора в точке 0, получаем для потенциалов узлов 1...4:

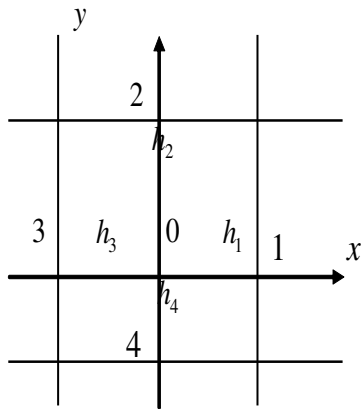


Рис. 2.1

$$U_1 = U_0 + \frac{\partial U}{\partial x} h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h_1^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} h_1^4 + \dots;$$

$$U_2 = U_0 + \frac{\partial U}{\partial y} h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} h_2^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} h_2^4 + \dots;$$

$$U_3 = U_0 - \frac{\partial U}{\partial x} h_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} h_3^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} h_3^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} h_3^4 - \dots;$$

$$U_4 = U_0 - \frac{\partial U}{\partial y} h_4 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} h_4^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} h_4^3 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} h_4^4 - \dots$$

Суммы значений  $Uh$  составят:

$$U_1 h_3 + U_3 h_1 = U_0 (h_1 + h_3) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} (h_1^2 h_3 + h_3^2 h_1) + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} (h_1^3 h_3 - h_3^3 h_1) + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} (h_1^4 h_3 + h_3^4 h_1) \dots;$$

$$U_2 h_4 + U_4 h_2 = U_0 (h_2 + h_4) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} (h_2^2 h_4 + h_4^2 h_2) + \\ + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} (h_2^3 h_4 - h_4^3 h_2) + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} (h_2^4 h_4 + h_4^4 h_2) \dots$$

Пренебрегая в последних двух выражениях членами, содержащими производные потенциала выше второй, определяем:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \approx \frac{2U_1}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{2U_3}{h_3(h_1 + h_3)} - \frac{2U_0}{h_1 h_3};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \approx \frac{2U_2}{h_2(h_2 + h_4)} + \frac{2U_4}{h_4(h_2 + h_4)} - \frac{2U_0}{h_2 h_4}.$$

После сложения вторых производных получаем:

$$\frac{2U_1}{h_1(h_1 + h_3)} + \frac{2U_3}{h_3(h_1 + h_3)} + \frac{2U_2}{h_2(h_2 + h_4)} + \frac{2U_4}{h_4(h_2 + h_4)} - \left( \frac{2}{h_1 h_3} + \frac{2}{h_2 h_4} \right) U_0 \approx 0.$$

Данное выражение связывает значения потенциалов в пяти узлах  $0 \dots 4$  и является разностной аппроксимацией уравнения Лапласа. Равенство приближенное, так как не содержит отброшенные производные потенциала выше второй. Погрешность аппроксимации определяется значениями высших производных потенциала, шагов сетки и их соотношениями.

В случае численного решения уравнения Пуассона  $\nabla^2 U_{\text{эл}} = -\frac{\rho_{\text{эл}}}{\epsilon_{\text{эл}}}$  методом конечных разностей выражения разностной аппроксимации совпадают с выражениями уравнения Лапласа за исключением правой части, где вместо нуля подставляется  $(-\frac{\rho_{\text{эл}}}{\epsilon_{\text{эл}}})$ .

Полученные уравнения являются линейными алгебраическими уравнениями, связывающие потенциалы узлов. Число уравнений равно сумме внутренних узлов области и узлов её границы.

Системы конечно-разностных уравнений можно решать прямыми и итерационными методами, а также комбинированными, основанными на их совместном использовании. Например, методом прогонки, являющимся модификацией метода исключения Гаусса, методом простой итерации, методами треугольной итерации (Зейделя, верхней релаксации, Ричардсона), вариационного типа.

Аппроксимация поверхностей тел, граничных и краевых условий, особенно при криволинейных поверхностях, представляет собой сложную задачу при использовании метода сеток. Эта задача решается проще, если расчетная область разбивается на элементы конечного размера, т. е. используется метод конечных элементов. В пределах любого элемента потенциал выражается через полином степени  $n$  от координат  $x, y, z$  с коэффициентами, связанными с потенциалами узлов, обеспечивающие условие минимума энергии поля, достаточного для соответствия искомого распределения потенциала уравнениям Максвелла.

Исследование потенциальных полей в лаборатории поля осуществляется численными методами с использованием комплекса программ ELCUT для моделирования физических полей и Mathcad 2001i Professional.

## 2.2. Экспериментальная установка

Экспериментальная установка для решения задач потенциального поля численным методом состоит из персонального компьютера с программным комплексом ELCUT и принтера для распечатки картин поля.

## 2.3. Порядок проведения исследований

1. На персональном компьютере открыть программу **ELCUT**, нажав в рабочем поле на соответствующий ярлык и внимательно ознакомиться с описанием программы **ELCUT**, с последовательностью операций.

2. Создать новую задачу: **Файл: Создать: Задача ELCUT.**

3. Ввести параметры задачи: **Правка: Свойства.** Имя файла, тип задачи.

4. Задать геометрию модели, метки объектов и построить сетку: **Правка: Геометрическая модель.**

5. Ввести данные о материалах, нагрузках и граничных условиях: **Правка: Физические свойства.**

6. Решить задачу; **Правка: Решить задачу.**

7. Просмотр результатов и вычисление интегральных величин: **Правка: Анализ результатов.**

Анализ результатов позволяет определить как параметры поля в любой точке модели, так и погонные параметры системы: погонные емкость, индуктивность и сопротивление утечки линии.

Полученную картину поля модели направляющей системы вместе с данными характеристиками её в выбранной точке следует распечатать на принтере или сфотографировать на мобильный телефон.

## 2.4. Содержание отчета

1. Цель работы.

2. Картина плоскопараллельного поля направляющей системы.

3. Аналитический расчет напряженностей электрического, магнитного поля и вектора Пойнтинга в выбранной точке линии.

4. Расчет емкости, индуктивности и сопротивления утечки линии.

5. Расчет потока электромагнитной мощности проходящей через ячейку, трубку и все сечение линии.

6. Сравнение результатов расчета модели и её параметров с численным и аналитическим методами.

7. Выводы.

## Контрольные вопросы

1. Чем отличаются решения уравнения Пуассона методом конечных разностей от решения уравнения Лапласа?
2. Каким уравнениям удовлетворяют скалярные потенциалы электрического и магнитного поля?
3. На чем основано моделирование различных потенциальных полей?
4. Почему точность графического метода зависит от размеров сетки?

## Лабораторная работа 3 ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ

**Цель работы:** измерение составляющих вектора магнитной индукции цилиндрической катушки, построение картины магнитного поля.

### 3.1. Основные теоретические положения

Цилиндрические катушки широко применяются во многих электроизмерительных приборах, электрических машинах, установках для высокочастотного нагрева металлов и диэлектриков, в электрических цепях приёмопередающей аппаратуры связи, навигации, точного времени и др. В этих случаях интерес представляют величина и распределение в пространстве вектора магнитной индукции  $\vec{B}_{эл}$  или вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}_{эл}$ .

Уравнения Максвелла для магнитного поля постоянного тока имеют вид

$$\text{I. } \text{rot } \vec{H}_{эл} = \vec{J}_{эл}; \quad \text{IV. } \text{div } \vec{B}_{эл} = 0,$$

где  $\vec{J}_{эл}$  – вектор плотности тока проводимости.

Для переменного поля относительно низкой частоты (квазистационарного поля) эти уравнения имеют такой же вид.

Из этих уравнений Максвелла в интегральной форме получают следующие граничные условия:  $H_{1\tau} - H_{2\tau} = i_{пов}$ ;  $B_{1n} = B_{2n}$ ,

где  $H_{1\tau}$  и  $H_{2\tau}$  – касательные составляющие вектора  $\vec{H}_{эл}$  на границе раздела двух сред;  $i_{пов}$  – модуль вектора поверхностной плотности тока  $B_{1n}$  и  $B_{2n}$  – нормальные составляющие вектора  $\vec{B}_{эл}$ .

Из I уравнения Максвелла очевидно, что вектор напряжённости магнитного поля  $\vec{H}_{эл}$  не может иметь составляющих, параллельных току, а из IV



уравнения Максвелла – что линии вектора индукции магнитного поля  $\vec{B}_{эл}$  всегда замкнуты. Для поля цилиндрической катушки это означает, что вектор  $\vec{B}_{эл}$  имеет лишь осевую  $B_z$  и радиальную  $B_r$  составляющие. Простое выражение для вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}_{эл}$  можно получить лишь для точек, расположенных на оси катушки. Покажем это при следующих данных модели:  $r_0, W, L_0, I$  – соответственно радиус, число витков, длина и ток соленоида (совокупности последовательно соединённых витков).

Вначале определим  $H_z$  – напряженность магнитного поля на оси одного витка (рис. 3.1).

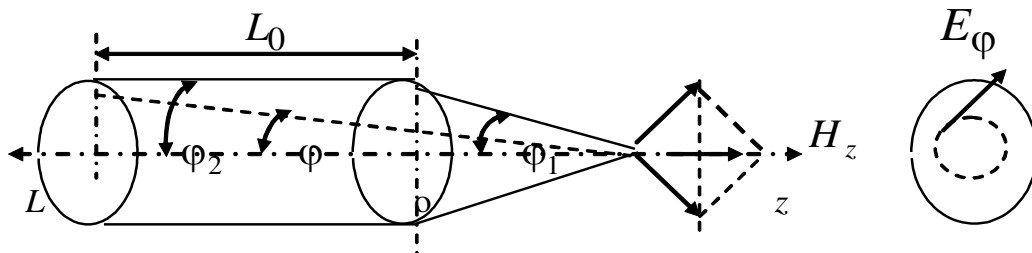


Рис. 3.1

Из закона Био-Савара на расстоянии  $z$  от центра витка результирующий вектор напряженности магнитного поля от двух противоположно лежащих элементов тока витка равен сумме горизонтальных составляющих векторов  $d\vec{H}$ , так как нормальные составляющие векторов, одинаковые по величине, противоположны по направлению:

$$dH_z = 2 \frac{Idl}{4\pi r^2} \cos\alpha = \frac{Idl}{2\pi r^2} \frac{r_0}{r} = \frac{Idl r_0}{2\pi r^3}.$$

Интегрируя  $dH_z$  по половине периметра витка, определяем напряженность магнитного поля на оси одного витка:

$$H_z = \frac{I r_0}{2\pi r^3} \int_0^{\pi} dl = \frac{I r_0^2}{2r^3}. \quad (3.10)$$

С учетом полученного решения для одного витка определяем магнитное поле на оси соленоида.

Магнитное поле бесконечно малого элемента соленоида определяем как произведение напряженности магнитного поля одного витка на число витков в этом элементе:

$$dH_z = \frac{I r_0^2}{2r^3} \frac{W}{L_0} dL.$$

После интегрирования этого выражения по всей длине соленоида получаем

$$H_z = \frac{IW}{2L_0} \int_0^{L_0} \frac{r_0^2}{r^3} dL.$$

Для решения интеграла воспользуемся подстановкой  $\operatorname{ctg} \varphi = \frac{L+z}{r_0}$  и перейдём к новой переменной  $\varphi$ , принимая во внимание равенство дифференциала от котангенса угла:  $d \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{1}{\sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{dL}{r_0}$  и отношения  $\frac{r_0}{r} = \sin \varphi$ .

Интегрируя по переменной  $\varphi$  от одного края соленоида  $\varphi_1$  до другого  $\varphi_2$ , определяем  $H_z$  напряженность магнитного поля на оси соленоида:

$$H_z = \frac{IW}{2L_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r_0^2}{r^3} \left( -\frac{r_0}{\sin^2 \varphi} \right) d\varphi = \frac{IW}{2L_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (-\sin \varphi) d\varphi = \frac{IW}{2L_0} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1).$$

Определим магнитный поток сцепления соленоида без учета краевого эффекта.

При  $r_0 \ll L_0$  в центре соленоида напряженность магнитного поля на оси соленоида приближенно составит

$$H_z = \frac{IW}{2L_0} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \cong \frac{IW}{2L_0} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{IW}{L_0}.$$

В этом случае поле однородно, и магнитный поток, проходящий внутри соленоида, ориентировочно может быть определён как произведение магнитной индукции на его сечение:  $\Phi = \frac{IW}{L_0} \mu \pi r_0^2$ , а магнитный поток сцепления – как произведение числа витков соленоида на магнитный поток:

$$\psi = W \Phi = \frac{IW^2}{L_0} \mu \pi r_0^2.$$

Определим индуктивность соленоида, которая равна величине отношения магнитного потока сцепления к току в нём:  $L_c = \frac{\psi}{I} = \frac{W^2}{L_0} \mu \pi r_0^2$ .

При переменном токе в соленоиде на основании закона электромагнитной индукции кроме магнитного поля возникает вихревое электрическое поле.

В интегральной форме закон электромагнитной индукции формулируется как: циркуляция вектора напряженности электрического поля по любой за-

мкнутой регулярной кривой равна уменьшению во времени магнитного потока через любую поверхность, опирающуюся на эту кривую:

$$\oint_L \bar{E}_{\text{эл}} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}_{\text{эл}}}{\partial t} d\bar{S}.$$

Полный поток может меняться во времени, а также из-за деформации контура и изменения магнитной проницаемости.

В дифференциальной форме закон электромагнитной индукции  $\text{rot } \bar{E}_{\text{эл}} = - \frac{\partial \bar{B}_{\text{эл}}}{\partial t}$  определяет вихревой характер электрического поля, возникающего при изменении во времени индукции магнитного поля.

Так, напряженность электрического поля внутри соленоида определяется из закона электромагнитной индукции в дифференциальной форме, который в цилиндрической системе координат для однородного магнитного поля, имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_{\varphi}) = -\mu \frac{dH_{mz} \cos \omega t}{dt} = \mu \omega H_{mz} \sin \omega t.$$

Умножим левую и правую части равенства на  $rdr$  и возьмем неопределённые интегралы

$$\int d(rE_{\varphi}) = \mu \omega H_{mz} \sin \omega t \int r dr.$$

Получаем равенство  $(rE_{\varphi}) = \mu \omega H_{mz} \sin \omega t \left( \frac{r^2}{2} + C \right).$

Принимая постоянную  $C$  равной нулю, так как величина напряженности электрического поля на оси соленоида не может быть бесконечно большой, находим  $E_{\varphi} = \mu \omega H_{mz} \sin \omega t \frac{r}{2}.$

Вектор напряженности вихревого электрического поля внутри соленоида направлен по касательной к окружности с центром на его оси. Силовые линии электрического поля образуют замкнутые концентрические окружности вокруг магнитного потока (см. рис. 3.1).

Вектор Пойнтинга внутри соленоида направлен по радиусу:

$$\bar{\Pi}_{\text{эл}2} = [E_{\varphi} \bar{e}_{\varphi} \times H_z \bar{e}_z] = E_{\varphi} H_z \bar{e}_r.$$

Его мгновенное значение:

$$\Pi_{\text{эл}r} = E_{\varphi} H_z = \mu \omega H_{mz} \sin \omega t \frac{r}{2} H_{mz} \cos \omega t = \mu \omega H_{mz}^2 \frac{r}{4} \sin 2 \omega t.$$

Вектор пульсирует с удвоенной частотой.

Поток реактивной мощности, идущий с внутренней боковой поверхности к оси соленоида для создания электромагнитного поля в нём, а также для изменения этого поля во времени, прямо пропорционален индуктивному сопротивлению соленоида:

$$P = \mu \omega H_{mz}^2 \frac{r}{4} \sin 2\omega t L_0 2\pi r = \frac{I_m^2 W^2}{L_0^2} \mu \omega \frac{\pi r^2 L_0}{2} \sin 2\omega t = \omega L_c \frac{I_m^2}{2} \sin 2\omega t.$$

Итак, переменный ток в катушке соленоида образует внутри неё и во внешней среде переменное магнитное поле. Вокруг этого магнитного поля на основании закона электромагнитной индукции возникает вихревое электрическое поле, совместно с магнитным полем образующее радиально пульсирующий с удвоенной частотой поток реактивной мощности.

### 3.2. Экспериментальная установка

Схема для исследования магнитного поля катушки состоит из генератора синусоидального напряжения, подключенного к последовательной цепи из исследуемой катушки  $L$ , конденсатора  $C$  и резистора 50 Ом (рис. 3.2).

Резистор включен в цепь для определения тока в ней, конденсатор – для согласования генератора с нагрузкой. Емкость подобрана так, чтобы на частоте 2000 Гц в цепи устанавливался резонанс напряжений и ток был максимальным.

В установке на рейке смонтированы две взаимно перпендикулярные рамки. Одна из них измеряет осевую составляющую  $B_z$ , а другая – радиальную  $B_r$  составляющую вектора индукции магнитного поля.

На основании закона электромагнитной индукции электродвижущая сила, наводимая в проводящем контуре измерительной рамки, равна отрицательной скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур:

$$\dot{U} = \frac{d\dot{\Psi}}{dt} = j\omega \dot{\Psi} = j\omega W \dot{\Phi} = j\omega \mu W \dot{H} S.$$

Действующее значение напряженности магнитного поля, поэтому определяется из выражения:

$$H = \frac{U}{2\pi f \mu W S},$$

где  $W$  – число витков измерительной катушки;  $S$  – площадь измерительной катушки.

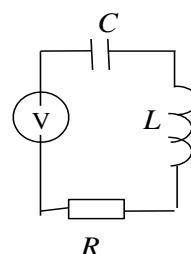


Рис. 3.2

### 3.3. Порядок проведения исследований

1. Установить частоту 2000 Гц, ток в катушке 0.1 А (напряжение на резисторе 5 В).

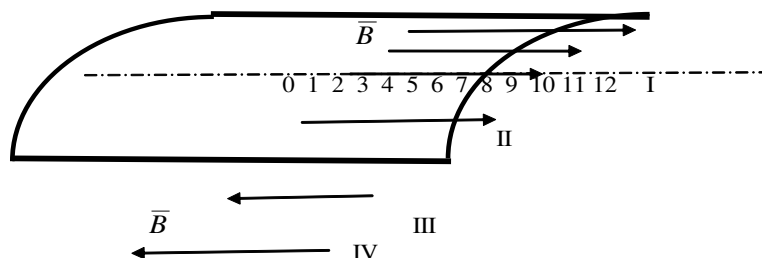


Рис. 3.3

2. Снять зависимости  $\dot{U}_{\text{прод}}$  и  $\dot{U}_{\text{рад}}$  (соответствующих напряжений) вдоль направлений I, II, III и IV (рис. 3.3). Расстояние изменять от 0 до 24 см через 2 см, не пропуская характерных точек кривой. Особое внимание следует обратить на точки при положениях рейки III и IV у края катушки, где меняет знак продольная составляющая вектора напряженности магнитного поля.

3. Составить таблицы данных.

### 3.4. Содержание отчета

1. Цель работы, схема установки.
2. Таблицы экспериментальных данных.
3. Примеры численных расчетов вектора Пойнтинга внутри соленоида. Опытные и экспериментальные значения собственной индуктивности цилиндрической катушки.
5. Графики экспериментальных значений.
6. Поле вектора в продольном сечении катушки, построенное по экспериментальным значениям его составляющих. Заштриховать область, в которой с точностью до 10 % поле можно считать однородным.
7. Проверка выполнения граничных условий для тангенциальных составляющих вектора напряженности магнитного поля на поверхности катушки в средней её части. Использовать измеренные значения. Поверхностная плотность тока  $i_{\text{пов}} = IW/L_0$ . При вычислениях учесть знаки касательных составляющих и взять абсолютную величину их разности.
8. Выводы.

## Контрольные вопросы

1. Из каких уравнений определяются граничные условия для векторов напряженности и индукции магнитного поля?
2. Какую составляющую не может иметь вектор напряженности магнитного поля соленоида?
3. Из каких соображений определяется величина ёмкости в цепи питания соленоида?
4. Какая формула используется при экспериментальном определении составляющих вектора индукции магнитного поля катушки?

## Лабораторная работа 4 ИЗМЕРЕНИЕ ИНДУКТИВНОСТЕЙ

**Цель работы:** измерение собственной и взаимной индуктивности воздушных катушек и катушек с ферромагнитным сердечниками.

### 4.1. Основные теоретические положения

Индуктивность является одним из основных параметром любой электро-технической установки. Ее определение представляет собой важнейшую задачу.

В системе из несколько индуктивно связанных контуров собственной индуктивностью  $k$  контура называется отношение магнитного потока к току

$$L_{kk} = \frac{\Phi_{kk}}{I_k},$$

где  $\Phi_{kk}$  – магнитный поток, созданный током  $I_k$  данного контура, пронизывающий  $k$ -й контур к величине этого тока;  $I_k$  – ток, протекающий в  $k$ -м контуре.

Взаимной индуктивностью  $i$ -го и  $k$ -го контуров называется отношение

$$L_{ik} = \frac{\Phi_{ik}}{I_i},$$

где  $I_i$  – ток, протекающий в  $i$ -м контуре;  $\Phi_{ik}$  – магнитный поток, созданный током  $I_i$ , пронизывающий  $k$ -й контур.

Из теоремы взаимности следует, что  $L_{ik} = L_{ki}$ .

Если по  $k$ -му контуру протекает синусоидальный ток с действующим значением  $I_k$ , а токи в остальных контурах равны нулю, то напряжение на нем

$U_k = \omega L_{kk} I_k$ . Отсюда  $L_{kk} = \frac{U_k}{2\pi f I_k}$ . При этом напряжение на разомкнутых

выводах  $i$ -го контура  $U_i = \omega L_{ki} I_k$  и, следовательно,

$$L_{ik} = \frac{U_i}{2\pi f I_k}.$$

Из полученных формул следует, что для экспериментального определения индуктивностей нужно измерить напряжение на выводах контура и  $I_k$  – ток, протекающий в  $k$ -м контуре.

В работе исследуются три системы, состоящие из двух индуктивно связанных катушек: эталонный соленоид без сердечника с намотанной на него катушкой (рис. 4.1), две плоские катушки без сердечника (рис. 4.2) и две катушки на ферритовом тороидальном сердечнике прямоугольного сечения (рис. 4.3).

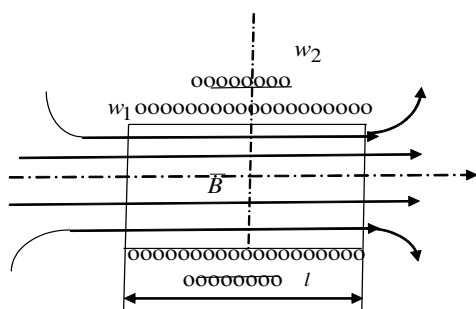


Рис. 4.1

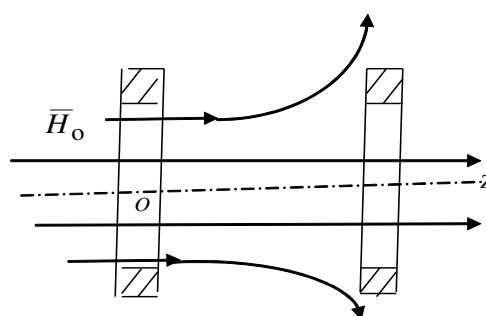


Рис. 4.2

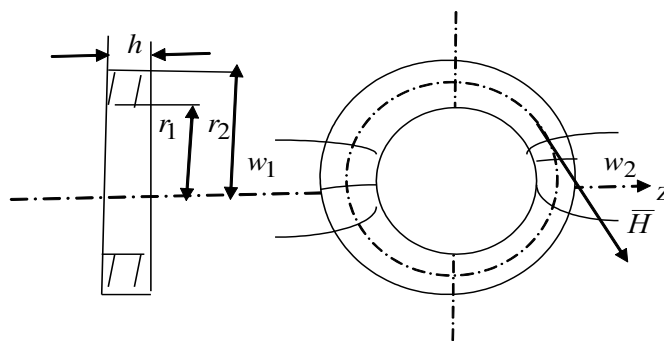


Рис. 4.3

Для этих систем можно вывести приближенные теоретические формулы:

1. Собственная индуктивность эталонного соленоида и взаимная индуктивность соленоида и катушки

$$L_{11} = \frac{\mu_0 w_1^2 S}{l}; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 w_1 w_2 S}{l},$$

где  $\mu_0$  – магнитная проницаемость воздуха;  $S$  и  $l$  – площадь сечения и длина соленоида;  $w_1$  и  $w_2$  – число витков соленоида и катушки.

2. Взаимная индуктивность двух плоских катушек

$$L_{12} = L_{21} = \mu_0 w_1 w_2 \sqrt{r_1 r_2} f(k),$$

где  $w_1, w_2, r_1, r_2$  – число витков и радиусы катушек;  $f(k)$  – функция, определяемая через эллиптические интегралы первого и второго рода модуля

$$k = \sqrt{\frac{4r_1 r_2}{x^2 + (r_1 + r_2)^2}},$$

где  $x$  – расстояние между плоскими параллельными катушками.

Функция  $f(k) = \frac{2}{k} \left[ \left( 1 - \frac{k^2}{2} \right) K + E \right]$ , где  $K$  – полный эллиптический интеграл первого рода;  $E$  – полный эллиптический интеграл второго рода. Величины интегралов  $K$  и  $E$  могут быть найдены для соответствующих  $k$  в математических справочниках [4].

3. Собственная и взаимная индуктивности катушек на ферромагнитном сердечнике

$$L_{11} = \frac{\mu w_1^2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}; \quad L_{12} = \frac{\mu w_1 w_2 h}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $h$  – высота тороида;  $r_1$  и  $r_2$  – его радиусы;  $\mu$  – магнитная проницаемость феррита;  $w_1$  и  $w_2$  – число витков катушек.

Собственная и взаимная индуктивности зависят лишь от геометрических размеров системы, числа витков катушек и от магнитной проницаемости сердечника. Однако, если сердечник изготовлен из нелинейного магнитного материала, у которого магнитная проницаемость зависит от величины напряженности магнитного поля  $\mu = f(H)$ , то при разных токах может получиться разная индуктивность. В работе определяются значения магнитной проницаемости феррита для двух диапазонов изменения напряженности магнитного поля. Среднее значение напряженности магнитного поля в тороидальном сердечнике при токе  $I$  и числе витков  $w$  равно:



$$H = \frac{Iw}{2\pi r_{\text{ср}}},$$

где  $r_{\text{ср}} = \frac{r_1 + r_2}{2}$  – средний радиус сердечника.

## 4.2. Экспериментальная установка

Схема для измерения собственной и взаимной индуктивности состоит из генератора синусоидального напряжения, вольтметра и резисторов (шунтов сопротивлением 10 Ом), которые включаются последовательно с исследуемой катушкой для определения тока в ней.

Для определения собственной индуктивности катушки необходимо измерить ток в катушке, поделив напряжение на шунте на 10 Ом, и измерить напряжение на этой же катушке. Отношение напряжения на катушке к току в ней по закону Ома равно ее индуктивному сопротивлению, а отношение индуктивного сопротивления к круговой частоте тока – собственной индуктивности катушки.

Для определения взаимной индуктивности следует измерить ток в первой катушке и напряжение на разомкнутых выводах второй катушки, разделить напряжение на ток и на круговую частоту.

## 4.3. Порядок проведения исследований

1. Установить в генераторе частоту 1 кГц.
2. Определить собственную и взаимную индуктивности соленоида и катушки при двух величинах тока в соленоиде: 20 мА и 40 мА.
3. Определить зависимость взаимной индуктивности двух плоских катушек от расстояния между ними от 3 до 21 см через 3 см при двух токах первой катушки 25 мА и 50 мА.
4. Определить собственную индуктивность первой катушки на ферритовом сердечнике и взаимную индуктивность при двух токах первой катушки 25 мА и 1 мА.
5. Определить собственную индуктивность второй катушки на ферритовом сердечнике и взаимную индуктивность при двух токах второй катушки 50 мА и 2 мА.
6. Составить таблицы данных.

#### 4.4. Содержание отчета

1. Цель работы, эскизы катушек, схемы измерений.
2. Таблицы опытных и теоретических данных.
3. Примеры численных расчетов. Опытные значения собственных и взаимных индуктивностей катушек.
4. График  $L_{12}(x)$  для плоских катушек, построенный по опытным и теоретическим данным.
5. Выводы.

#### Контрольные вопросы

1. Назовите магнитные потоки, определяющие собственную и взаимную индуктивности катушек.
2. Каким уравнениям удовлетворяют скалярные потенциалы поля?
3. Как определяется напряженность магнитного поля тороида?
4. Зависимость между векторами индукции и напряженности поля?

#### Лабораторная работа 5

### ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН И ПАРАМЕТРОВ ВЕЩЕСТВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРФЕРОМЕТРА МАЙКЕЛЬСОНА

**Цель работы:** исследование явлений интерференции, дифракции и поляризации электромагнитных волн.

#### 5.1. Основные теоретические положения

В 1881 г. американский физик А. Майкельсон впервые поставил эксперимент с целью определения влияния движения Земли на скорость распространения света в её атмосфере. Его отрицательный результат был одним из важнейших экспериментальных факторов. Для достижения своей цели Майкельсон использовал созданный им оптический интерферометр.

В 1958 г. К. И. Крылов и В. Н. Рудаков применили радиоволновой аналог интерферометра Майкельсона для измерения диэлектрической проницаемости и тангенса угла электрических потерь различных материалов в сверхвысокочастотном диапазоне электромагнитных волн.

С помощью интерферометра Майкельсона можно довольно точно определить длину электромагнитных волн, характер их поляризации, наблюдать структуру дифракционных полей.

При изменении векторов поля во времени по гармоническому закону (в комплексной форме как  $e^{j\omega t}$ ) система уравнений Максвелла в дифференциальной форме может быть приведена к комплексному виду:

$$\begin{aligned} \text{I. rot } \vec{H}_{\text{эл}} &= j\omega \epsilon_{\text{эл}} \vec{E}_{\text{эл}}; \quad \text{II. rot } \vec{E}_{\text{эл}} = -j\omega \mu_{\text{эл}} \vec{H}_{\text{эл}}; \\ \text{III. div } \vec{D}_{\text{эл}} &= 0; \quad \text{IV. div } \vec{B}_{\text{эл}} = 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $\dot{\epsilon} = \epsilon - j\gamma_{\text{эл}}/\omega$  – комплексная диэлектрическая проницаемость среды.

В этом случае векторы напряженности поля удовлетворяют волновому уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{E}_{\text{эл}} + \kappa^2 \vec{E}_{\text{эл}} = 0; \quad \nabla^2 \vec{H}_{\text{эл}} + \kappa^2 \vec{H}_{\text{эл}} = 0, \quad (5.2)$$

где  $\kappa = \omega \sqrt{\mu_{\text{эл}}(\epsilon_{\text{эл}} - j\gamma_{\text{эл}}/\omega)}$  – комплексное волновое число.

При решении конкретной задачи, как и в случае потенциальных полей из бесчисленного множества решений уравнения Гельмгольца выбирают то, которое удовлетворяет условиям на границе раздела сред, на бесконечно больших и нулевых расстояниях.

Переменное во времени электромагнитное поле распространяется в пространстве в виде плоских, цилиндрических, сферических, эллиптических, сфероидальных и других типов волн. Любая сложная волна может быть

представлена в виде суммы плоских волн.

Плоской называют волну, распространяющуюся вдоль какой-либо линейной координаты и неизменную в каждый фиксированный момент времени в плоскости, перпендикулярной этой координате.

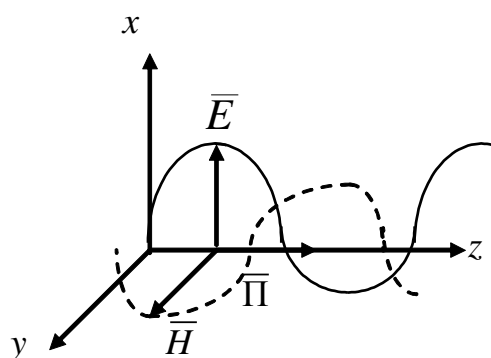


Рис. 5.1

Предположим, что плоская волна распространяется вдоль оси  $z$  декартовой системы координат (рис. 5.1), а вектор напряженности электрического поля направлен по оси  $x$ , т. е.

$$\dot{E}_x = E_{mx} e^{j(\omega t - kz)}; \quad E_y = 0; \quad E_z = 0.$$

Отметим основные свойства и характеристики плоских волн:

1. Вектор напряженности электрического поля удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца (5.2):

$$\nabla^2 \dot{E}_x = \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} = E_{mx} e^{j\omega t} \frac{\partial^2 e^{-jkz}}{\partial z^2} = -k^2 \dot{E}_x.$$

2. Вектор напряженности магнитного поля перпендикулярен вектору напряженности электрического поля  $\vec{H}_{\text{эл}} \perp \vec{E}_{\text{эл}}$ .

Из II уравнения Максвелла (5.1) находим:

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} \vec{e}_y = -jk \dot{E}_x \vec{e}_y = -j\omega \mu_{\text{эл}} \dot{H}_y \vec{e}_y,$$

или

$$E_{mx} \sqrt{\dot{\epsilon}_{\text{эл}}} = H_{my} \sqrt{\mu_{\text{эл}}}.$$

3. Отношение  $\dot{E}_x / \dot{H}_y \rightarrow [B]/[A] = [\text{Ом}]$  называется волновым или характеристическим сопротивлением среды, определяющим связь между векторами электрического и магнитного поля в плоской волне:

$$Z_c = \frac{\dot{E}_x}{\dot{H}_y} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{эл}}}{\dot{\epsilon}_{\text{эл}}}} = \sqrt{\frac{\mu_{\text{эл}}}{\epsilon_{\text{эл}} - j\gamma_{\text{эл}} / \omega}} = |Z| e^{j\varphi_z}. \quad (5.3)$$

Волновое сопротивление среды, а, следовательно, взаимная связь между векторами поля определяются параметрами пространства, в которой распространяется плоская волна, и её частотой.

Для воздуха  $Z_c = 377 \text{ Ом}$ , для проводящих сред  $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_{\text{эл}} \omega}{\gamma_{\text{эл}}}} e^{j\frac{\pi}{4}}$ , т. е. в

проводящих средах вектор напряженности электрического поля опережает вектор напряженности магнитного поля по фазе на угол  $\pi/4$ .

4. Векторы  $\vec{E}_{\text{эл}}$ ,  $\vec{H}_{\text{эл}}$  и  $\vec{\Pi}_{\text{эл}}$  взаимно перпендикулярны  $\vec{E}_{\text{эл}} \perp \vec{H}_{\text{эл}} \perp \vec{\Pi}_{\text{эл}}$ .

5. Комплексное волновое число, равное

$$\kappa = \omega \sqrt{\mu_{\text{эл}} (\epsilon_{\text{эл}} - j\gamma_{\text{эл}} / \omega)} = \beta - j\alpha,$$

где  $\beta$  – коэффициент фазы;  $\alpha$  – постоянная затухания, определяет характер изменения амплитуды и фазы напряженности плоской волны с расстоянием:

$$\dot{E}_x = E_{\text{mx}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}; \quad \dot{H}_y = H_{\text{my}} e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - \beta z)}.$$

6. Фазовая скорость волны – скорость перемещения фронта волны, фиксированного значения фазы  $\omega t - \beta z = \text{const}$  вдоль направления распространения

волны, т. е.  $v_{\phi} = \frac{dz}{dt}$  или  $\omega dt - \beta dz = 0$ :

$$v_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}.$$

7. Длина волны  $\lambda$  – расстояние, на котором фаза волны изменяется на  $2\pi$ , т. е.  $\beta\lambda = 2\pi$ , или

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{v_{\phi}}{f}.$$

В линейно поляризованной волне вектор  $\vec{E}_{\text{эл}}$  находится в одной фиксированной плоскости (плоскости поляризации).

Если распределение поля зависит только от одной координаты  $z$ , волновое уравнение в частных производных переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Его решение – сумма прямой и обратной волн, распространяющихся в направлениях  $\pm z$ .

## 5.2. Экспериментальная установка

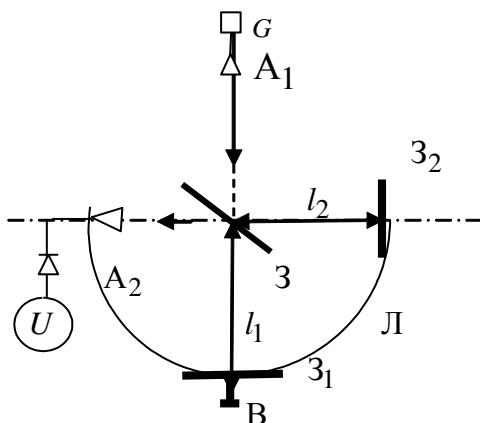


Рис. 5.2

Схема интерферометра приведена на рис. 5.2, где:  $G$  – СВЧ генератор с блоком питания;  $A_1$  – излучающая рупорная антенна;  $3$  – полупрозрачное зеркало (лист из диэлектрика);  $3_1$  – подвижное металлическое зеркало;  $В$  – винт для его передвижения;  $3_2$  – неподвижное металлическое зеркало;  $A_2$  – приемная рупорная антенна, соединенная с детектором и милливольтметром  $U$ ;  $Л$  –

либ со шкалой в градусах, по которому можно передвигать приемную антенну;  $l_1$  и  $l_2$  – плечи интерферометра.

Рупорная антенна  $A_1$ , питаемая от СВЧ-генератора через волновод прямоугольного сечения, излучает монохроматическую линейно поляризованную волну:

$$\dot{E}_x = E_{mx} e^{j(\omega t - kz)},$$

где  $E_{mx}$  – амплитуда волны;  $(\omega t - kz)$  – фаза волны ( $k$  – волновое число воздуха;  $z$  – направление распространения волны).

Полупрозрачное зеркало, когда нормаль к нему образует угол  $45^\circ$  с направлением распространения падающей волны, разделяет ее на две волны с равными амплитудами.

Одна волна движется вдоль плеча  $l_1$  и, отразившись от зеркала  $Z_1$ , возвращается обратно. Вторая волна совершает аналогичный путь вдоль плеча  $l_2$ .

Первая волна, отразившись от зеркала  $Z$ , и вторая волна, пройдя сквозь него, поступают с практически равными амплитудами в приемную антенну  $A_2$ .

Так как волны когерентные, т. е. разность фаз между ними не зависит от времени, то напряженность электрического поля в приемной антенне определяется результатом их интерференции и будет пропорциональна:

$$\dot{E}_{\text{пр}} = E_{\text{м пр}} e^{j(\omega t - kz)} (1 + e^{jk\Delta}),$$

где  $\Delta$  – разность фаз двух волн. Она возникает из-за различных длин плеч интерферометра. Так как каждая из волн проходит вдоль соответствующего плеча дважды, то

$$\Delta = 2k(l_1 - l_2) = 4\pi(l_1 - l_2)/\lambda.$$

Напряжение  $U$ , измеряемое милливольтметром после детектирования принятого сигнала, пропорционально мощности результирующей волны:

$$\begin{aligned} U = k \dot{E}_{\text{пр}} \ddot{E}_{\text{м пр}} = k \dot{E}_{\text{пр}} = E_{\text{м пр}} e^{j(\omega t - kz)} (1 + e^{jk\Delta}) E_{\text{м пр}} e^{-j(\omega t - kz)} (1 + e^{-jk\Delta}) = 2kE_{\text{пр}}^2 (1 + \cos k\Delta) = 4kE_{\text{пр}}^2 \cos^2 0.5k\Delta. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Таким образом,  $U$  – периодическая функция разности длин плеч  $\Delta = 2k(l_1 - l_2) = 4\pi(l_1 - l_2)/\lambda$  с периодом  $\lambda/2$ .

Если, вращая винт  $B$ , передвигать зеркало  $Z_1$  и тем самым изменять плечо  $l_1$ , то можно построить график  $U = f(\partial l_1)$ . В соответствии с (5.4) расстояния между соседними максимумами или минимумами на этом графике равны  $\lambda/2$ .

Если на пути волны, движущейся вдоль плеча  $l_2$ , поставить лист толщиной  $h$  из материала, диэлектрическую проницаемость которого необходимо измерить, то разность фаз двух волн  $\Delta$  в приёмной рупорной антенне изменится на величину

$$4\pi(n-1)h/\lambda,$$

где  $n = \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$  – показатель преломления контролируемого материала. При этом изменение фазы будет равняться удвоенному набегу фазы в листе диэлектрика за вычетом удвоенного набегу фазы на протяжении вытесненного им воздушного слоя той же толщины. Поэтому на новом графике  $U = f(\partial l_1)$  максимумы и минимумы  $U$  сместятся на величину  $x = (n-1)h$ . Отсюда найдем диэлектрическую проницаемость контролируемого материала

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + x/h)^2. \quad (5.5)$$

С помощью радиоволнового аналога интерферометра Майкельсона можно исследовать структуру дифракционных полей и характер поляризации волн, излучаемых антенной. Установим вместо полупрозрачного зеркала металлический экран с двумя щелями так, чтобы нормаль к экрану совпадала с осью излучающей антенны.

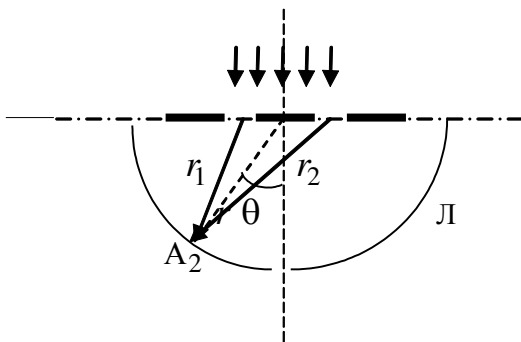


Рис. 5.3

Тогда на экран будет падать практически плоская волна. В этом случае по принципу Гюйгенса щели можно считать источниками когерентных волн. В результате их интерференции в приемной антенне (рис. 5.3) напряженность электрического поля результирующей волны равна

$$\dot{E}_{\text{пр}} = \frac{A}{r_1} e^{j(\omega t - kr_1)} + \frac{A}{r_2} e^{j(\omega t - kr_2)}. \quad (5.6)$$

Геометрическая разность хода волн

$$r_2 - r_1 = (a + d)\sin\theta = \Delta r,$$

где  $a$  – ширина щели;  $d$  – расстояние между щелями.

В первом приближении в знаменателях амплитуд можно положить  $r_1 \approx r_2 \approx r$ . В фазах волн этого сделать нельзя. Тогда из (5.6) следует:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{\text{пр}} &= \frac{A}{r} e^{j(\omega t - k r_1 - k \Delta r / 2)} (e^{jk \Delta r / 2} + e^{-jk \Delta r / 2}) = \\ &= 2 \frac{A}{r} e^{j(\omega t - k r_1 - k \Delta r / 2)} \cos k \Delta r / 2.\end{aligned}$$

Напряжение  $U$ , измеряемое милливольтметром и равное

$$\begin{aligned}U &= k \dot{E}_{\text{пр}} \ddot{E}_{\text{м пр}} = k 4 \frac{A^2}{r^2} \cos^2 k \Delta r / 2 = U_0 \cos^2 k \Delta r / 2 = \\ &= U_0 \cos^2 k(a + d) \sin \theta,\end{aligned}\quad (5.7)$$

является периодической функцией  $\sin \theta$ .

Поляризация электромагнитной волны определяется поведением вектора напряженности электрического поля по мере ее распространения. Волна называется линейно поляризованной, если вектор  $\vec{E}$ , изменяясь во времени, остается параллельным некоторому направлению, которое и является направлением поляризации волны.

В интерферометре рупорная антенна  $A_1$  излучает, а аналогичная антенна  $A_2$  принимает линейно поляризованные волны. Поэтому, если направление поляризации приемной антенны образует с направлением поляризации излучающей антенны  $A_2$  угол  $\eta$ , а напряженность электрического поля излученной волны  $\vec{E}$ , то  $E_{\text{пр}} = E \cos \eta$ . Напряжение  $U$ , измеряемое милливольтметром, равно:

$$U = U_0 \cos^2 \eta. \quad (5.8)$$

При  $U = U_0$  направления поляризации антенн параллельны, при  $U = 0$  — скрещены.

### 5.3. Порядок проведения исследований

1. Установить приборы интерферометра так, как показано на рис. 5.3. Провести измерение напряжения  $U$  по показаниям милливольтметра через каждые два миллиметра перемещения подвижного металлического зеркала  $Z_1$  с помощью винта В и построить график  $U = f(\partial l_1)$ .

Особо отметить положения максимумов и минимумов  $U$ . Их должно быть не менее трех.

Из графика определить длину электромагнитной волны, равную расстоянию между тремя максимумами или минимумами напряжения  $U$ .



2. Установить вплотную к зеркалу  $З_2$  лист контролируемого диэлектрика. Прodelать те же операции, что и в п. 1. По смещению максимумов (минимумов) вычислить диэлектрическую проницаемость листа (5.5).

3. Вместо полупрозрачного зеркала установить металлический экран с двумя щелями. Передвигая приемную антенну по круговому лимбу, провести измерение напряжения  $U$  по показаниям милливольтметра через  $2...5^\circ$  в пределах  $0...90^\circ$ .

В соответствии с (5.7) график должен иметь одинаковые амплитуды при  $r = \text{const}$ . Однако этого не наблюдается из-за неодинаковой направленности приема.

4. Убрать экран со щелями и установить приемную антенну напротив излучающей антенны так, чтобы их оси совпадали. Вращая приемную антенну вокруг ее собственной оси, провести измерение напряжения  $U$  по показаниям милливольтметра через  $5...10^\circ$  в пределах  $0...90^\circ$  и убедиться в справедливости (5.8).

#### 5.4. Содержание отчета

1. Цель работы, схема радиоволнового аналога интерферометра Майкельсона.
2. Кривые  $U = f(\partial l_1)$  на одном графике.
3. Расчет длины волны и диэлектрической проницаемости контролируемого материала.
4. Схема для исследования структуры дифракционного поля от экрана с двумя щелями; кривая измерений дифракционного поля.
5. Теоретическая кривая  $U = f(\theta)$  (5.8) и экспериментальная кривая, построенные на одном графике.

#### Контрольные вопросы

1. Какие явления можно исследовать на электромагнитном аналоге интерферометра Майкельсона?
2. Каким уравнениям удовлетворяют переменное во времени электрическое и магнитное поле?
3. Как устроен электромагнитный аналог интерферометра Майкельсона?
4. Как определяется диэлектрическая проницаемость диэлектрика на электромагнитном аналоге интерферометра Майкельсона?

## Лабораторная работа 6

### ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

**Цель работы:** исследование экранирующего действия проводящих коротких тонкостенных цилиндров и прямоугольных пластин в переменном электромагнитном поле.

#### 6.1. Основные теоретические положения

Электромагнитные экраны применяют как для защиты отдельных элементов, блоков, устройств и целых комплексов различных электротехнических систем от внешнего переменного электромагнитного поля, так и для ослабления внешнего поля самих устройств. В качестве экранов используют металлические оболочки. Общий метод расчета экранов состоит в определении электрического и магнитного поля во внешней среде, стенке оболочки и внутри неё и относится к числу труднейших задач электродинамики. В аналитическом виде решение возможно только для оболочек, совпадающих по конфигурации с одной из известных координатных систем [1]. Экранирование электромагнитного поля  $\vec{H}_0$  открытыми проводящими оболочками (рис. 6.1) возможно за счет возбуждения в них вихревых токов  $\vec{J}$ , создающих встречные компенсирующие поля  $\vec{H}_i$ . На основании закона электромагнитной индукции электродвижущая сила, наводимая в проводящем контуре, равна отрицательной скорости изменения магнитного потока, пронизывающего этот контур. Данный факт говорит о том, что возникающая в проводящем контуре ЭДС вызывает в нём ток такого направления, при котором создаваемый им вокруг контура вторичный магнитный поток препятствует изменению первичного магнитного поля. В результате внутри контура внешний магнитный поток ослабляется встречным вторичным магнитным потоком. Ослабление поля зависит от сопротивления контура. В разомкнутом контуре ток отсутствует, а, следовательно, и эффект экранирования. Поэтому оболочки должны быть замкнутыми, в них могут быть окна, отвер-

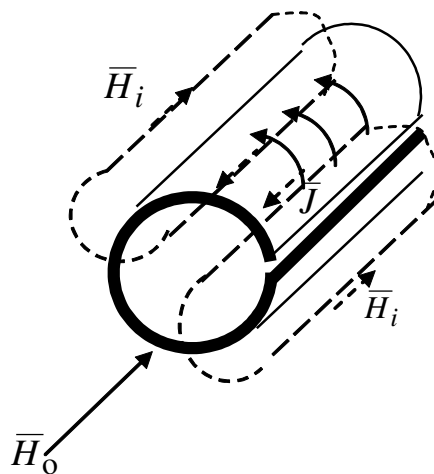


Рис. 6.1

ствия, вырезы различной конфигурации, не нарушающие замкнутость контуров. Поперечные и продольные размеры отверстий должны быть малы по сравнению с длиной волны. Этому требованию, в частности, удовлетворяют металлические сетки, широко используемые на практике для экранирования помещений.

На высоких частотах сопротивление проводящего контура практически равно его реактивной части, т. е. индуктивному сопротивлению, пропорциональному частоте. С ростом частоты увеличивается сопротивление контура, но пропорционально частоте увеличивается и величина ЭДС. Поэтому на высоких частотах ослабление поля слабо зависит от частоты.

Коэффициент экранирования  $S$  определяется как отношение напряженности магнитного поля внутри экрана  $H$  к напряженности внешнего магнитного поля  $H_0$ :

$$S = \frac{\dot{H}}{\dot{H}_0}.$$

На высоких частотах коэффициент экранирования стремится к нулю. В этом случае встречный магнитный поток внутри экрана полностью компенсирует внешний магнитный поток.

С уменьшением частоты внешнего электромагнитного поля реактивное индуктивное сопротивление контура становится соизмеримым с активной составляющей сопротивления, определяемой тепловыми потерями в контуре. В результате ЭДС с понижением частоты уменьшается быстрее, чем сопротивление контура, вихревые токи и, следовательно, встречный магнитный поток ослабляются, а коэффициент экранирования стремится к единице.

В закрытых проводящих оболочках коэффициент экранирования существенно зависит от соотношения её толщины и глубины проникновения волны. За счет поверхностного эффекта внешнее поле дополнительно ослабляется. Расстояние, на котором амплитуда вектора  $\vec{E}_{эл}$  или  $\vec{H}_{эл}$  волны в проводящих средах уменьшается в  $e = 2,71$  раз, называется глубиной проникновения и обозначается символом  $\Delta$ :

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} \cong \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{эл} \gamma_{эл}}}.$$

## 6.2. Экспериментальная установка

На установке (рис. 6.2) с двумя коаксиальными плоскими катушками Гельмгольца исследуется экранирующее действие незамкнутого на торцах

латунного цилиндра, такого же цилиндра с продольным разрезом и двух параллельных прямоугольных пластин на частотах 10... 200 кГц.

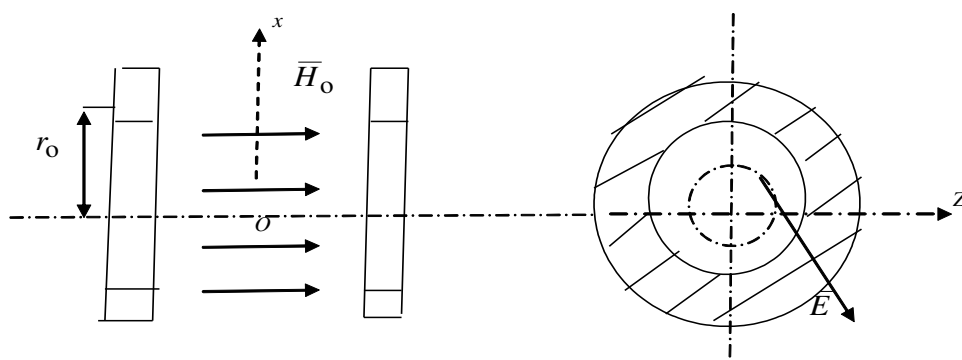


Рис. 6.2

Студенты по экспериментальным данным измерений ЭДС, пропорциональной напряженности магнитного поля, строят графики амплитудно-частотных характеристик коэффициента экранирования моделей и показывают возможность экранирования электромагнитного поля открытыми проводящими оболочками за счет индуцированных вихревых токов, создающих встречные компенсирующие поля.

Однородное магнитное поле в ограниченной области пространства создается между двух коаксиальных плоских катушек Гельмгольца, расположенных на расстоянии, равном их радиусу, при одинаковом направлении токов в их обмотках (см. рис. 6.2).

Напряженность магнитного поля в центре данного устройства  $\bar{H}_0$  может быть определена из (3.10). Напряженность магнитного поля в центре равна

$$H_0 = 0,7Iw/r_0,$$

где  $I$  – действующее значение тока;  $w=10$  – число витков катушки;  $r_0 = 0,15$  м – средний радиус обмотки.

В области  $x = y = z = r_0/3$  поле можно считать однородным, совпадающим с  $\bar{H}_0$  с точностью до 1,5 %.

Последовательно соединенные катушки Гельмгольца подключены к генератору. Экраны, укрепленные на специальных стержневых подставках, вносятся в область однородного магнитного поля. При этом отдельно исследуются два режима, когда вектор  $\bar{H}_0$  параллелен стенкам экрана (продольное поле) и перпендикулярен им (поперечное поле).

Для измерения напряженности магнитного поля используются две миниатюрные плоские катушки  $K_1$  и  $K_2$ , расположенные во взаимно перпендикулярных плоскостях. Катушки вмонтированы в цилиндрический держатель из оргстекла. На его корпусе нанесена шкала, позволяющая определять расстояние от точки 0 (центр экрана) до точки наблюдения. Катушка  $K_1$  измеряет составляющую вектора напряженности магнитного поля, направленную параллельно оси цилиндрического держателя, катушка  $K_2$  – вдоль его радиуса.

Индукцированные в измерительных катушках напряжения регистрируются милливольтметрами.

При измерении магнитного поля с помощью катушки  $K_2$  необходимо так повернуть держатель, чтобы показания индикатора вольтметра были максимальными.

### 6.3. Порядок проведения исследований

1. Включить генератор и настроить его на частоту 100 кГц.

На генераторе ручку «Ослабление» поставить в положение “+30”, а ручку «Выходная мощность» – в крайнее правое положение.

2. Произвести проверку однородности магнитного поля катушек Гельмгольца. Для этой цели нужно использовать параллелепипед из оргстекла с цилиндрическим каналом, куда помещается держатель с измерительными катушками. Перемещая держатель через 1 см вдоль оси  $z$  (при  $y = 0$ ), измерить напряжение  $U_1(z)$ , пропорциональное составляющей  $H_{oz}$ . Затем, повернув параллелепипед с держателем в плоскости  $yz$  на  $90^\circ$ , измерить напряжение  $U_2(y)$  через 1 см вдоль оси  $y$  (при  $z = 0$ ), так как именно это напряжение в данном случае пропорционально  $H_{oz}$ .

3. Исследовать экранирующие свойства цилиндрического экрана в продольном и поперечном поле. В первом случае снять зависимость  $U_1(z)$  через 1 см вдоль оси  $z$  внутри экрана и за его пределами. Во втором случае снять зависимость  $U_2(y)$ . Рекомендуется показания снимать через 1 см вдоль всей шкалы, нанесенной на поверхности держателя. Составить таблицы данных.

4. Исследовать по такой же программе экранирующие свойства цилиндрического экрана с тонким разрезом и двух прямоугольных пластин в продольном и поперечном поле.

5. Снять амплитудно-частотные характеристики коэффициента экранирования  $S(f)$  цилиндрического экрана в продольном поле, определяя его как отношение продольной составляющей вектора напряженности магнитного поля в центре внутри экрана (точка 0), т. е.  $U_1(z)$ , пропорциональное составляющей  $H_z$ , к напряженности магнитного поля катушек Гельмгольца вне экрана, т. е.  $U_2(z)$ , пропорциональное составляющей  $H_{oz}$ .

Частоты принять равными 100, 50, 30, 20, 10 и 2 кГц. При каждом изменении частоты следует подбирать выходное сопротивление генератора так, чтобы показания вольтметра были наибольшими.

#### 6.4. Содержание отчета

1. Цель работы, электрическая схема установки, эскизы катушек Гельмгольца и исследуемых экранов с векторными линиями магнитного поля.
2. Таблицы опытных данных  $U_1(z)$  и  $U_2(z)$ , а также соответствующие графики.
3. АЧХ коэффициента экранирования  $S(f)$ .

#### Контрольные вопросы

1. За счет каких токов возможно экранирование электромагнитного поля открытыми проводящими оболочками?
2. В виде какого отношения определяется коэффициент экранирования?
3. Как устроена экспериментальная установка для исследования экранирования открытыми проводящими оболочками?
4. Как определяется амплитудно-частотная характеристика коэффициента экранирования открытыми проводящими оболочками?

#### Лабораторная работа 7

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ МАГНИТНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ

**Цель работы:** экспериментальное исследование диаграммы направленности магнитного осциллятора на реальных физических устройствах; экспериментальное исследование зависимости электромагнитного поля магнитного осциллятора в ближней зоне от расстояния до точки наблюдения; исследование частотного спектра принимаемого сигнала при токе в осцилляторе произвольной формы.

## 7.1. Основные теоретические положения

При подготовке к выполнению лабораторной работы необходимо изучить основные свойства и параметры электромагнитного поля, создаваемого элементарными осцилляторами (рис. 7.1) [1].

Следует обратить внимание на то, что элементарные осцилляторы являются идеализированными излучающими системами, удобными для теоретического анализа.

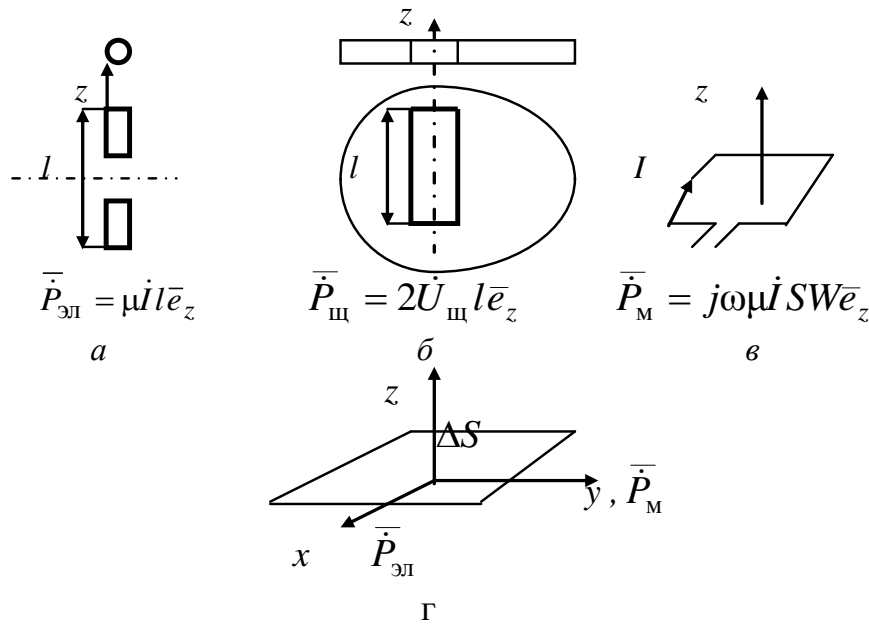


Рис. 7.1

К элементарным осцилляторам (рис. 7.1) относятся электрический диполь в виде круглого плоского проводника бесконечно малой длины, магнитные диполи – одно- или многовитковые рамки, узкая щель в проводящем бесконечно протяженном экране, элемент Гюйгенса – элемент поверхности плоской площадки волнового фронта, с одинаковыми величинами амплитуд и фаз возбуждающих их токов.

Предполагается, что геометрические размеры элементарных осцилляторов малы по сравнению с длиной волны образованного ими в окружающем пространстве электромагнитного поля.

Электромагнитное поле элементарных осцилляторов в сферической системе координат определяется через векторные  $\vec{A}_{эл}$  и  $\vec{A}_{эл}^*$  потенциалы:

$$\vec{A}_{эл} = \vec{P}_{эл} \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \quad \text{и} \quad \vec{A}_{эл}^* = \vec{P}_м \frac{e^{-jk r}}{4\pi r}, \quad \text{где } \vec{P}_{эл} - \text{электрический момент; } \vec{P}_м - \text{магнитный момент осцилляторов.}$$

С учётом условий Лоренца векторы  $\vec{E}_{эл}$  и  $\vec{H}_{эл}$  в комплексной форме равны:

$$\vec{B}_{эл} = \text{rot } \vec{A}_{эл} ; \vec{E}_{эл} = -j\omega \left( \vec{A}_{эл} + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{A}_{эл} \right);$$

$$\vec{E}_{эл} = \text{rot } \vec{A}_{эл}^* ; \vec{H}_{эл} = j\omega \epsilon_{эл} \left( \vec{A}_{эл}^* + \frac{1}{k^2} \text{grad div } \vec{A}_{эл}^* \right).$$

В сферической системе координат при вертикальной ориентации моментов осцилляторов по направлению оси  $z$ , после подстановки векторных потенциалов  $\vec{A}_{эл}$  и  $\vec{A}_{эл}^*$  в выражения вектора  $\vec{E}_{эл}$  и  $\vec{H}_{эл}$  и дифференцирования их, получаем:

– для элементарного электрического осциллятора:

$$\vec{B}_{эл} = \frac{1 + jkr}{r} \sin \vartheta \dot{A}_{zэл} \vec{e}_\varphi;$$

$$\vec{E}_{эл} = j\omega \sin \vartheta \dot{A}_{zэл} \vec{e}_\vartheta + \frac{1 + jkr}{j\omega \epsilon_{эл} \mu_{эл} r^2} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \dot{A}_{zэл};$$

– для элементарного магнитного осциллятора:

$$\vec{H}_{эл} = -j\omega \epsilon_{эл} \sin \vartheta \dot{A}_{zэл}^* \vec{e}_\vartheta + \frac{1 + jkr}{j\omega \mu_{эл} r^2} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \dot{A}_{zэл}^*;$$

$$\vec{E}_{эл} = \frac{1 + jkr}{r} \sin \vartheta \dot{A}_{zэл}^* \vec{e}_\varphi.$$

Любую реальную излучающую систему можно представить в виде эквивалентных элементарных осцилляторов.

Рассмотрим основные свойства электромагнитного поля магнитного осциллятора.

1. Векторы  $\vec{E}_{эл}$  и  $\vec{H}_{эл}$  в любой точке пространства взаимно перпендикулярны:  $\vec{H}_{эл} = H_{rэл} \vec{e}_r + H_{\vartheta эл} \vec{e}_\vartheta$ ;  $\vec{E}_{эл} = E_{\varphi эл} \vec{e}_\varphi$ .

2. Составляющие  $H_{rэл}$ ,  $H_{\vartheta эл}$  и  $E_{\varphi эл}$  не зависят от координаты  $\varphi$ , т. е. поле является симметричным относительно оси  $z$ , проходящей через ось осциллятора.

3. Фазы  $j\beta r$  составляющих векторов поля не зависят от полярного угла  $\vartheta$ , а только от расстояния  $r$ , поэтому поверхностями равных фаз являются сферические поверхности с центром в середине осциллятора.



4. Векторными линиями напряженности электрического поля  $\vec{E}_{эл} = E_{фэл} \vec{e}_\varphi$  являются концентрические окружности, параллельные экваториальной плоскости  $xOy$ , с центрами на оси осциллятора.

5. Векторные линии напряженности магнитного поля лежат в меридиональных плоскостях  $\vec{H}_{эл} = H_{rэл} \vec{e}_r + H_{\vartheta эл} \vec{e}_\vartheta, H_{\varphi эл} = 0$ .

Зависимость  $\vec{E}_{эл}$  и  $\vec{H}_{эл}$  от направления изображается полярными диаграммами направленности, длина радиуса-вектора на них равна отношению напряженности в направлении  $\vartheta$  к направлению, перпендикулярному оси осциллятора.

Ближняя зона соответствует расстояниям, малым по сравнению с длиной электромагнитной волны. В этой зоне можно пренебречь запаздыванием.

В ближней зоне  $\beta r \ll 1$  напряженность электрического поля аналогична закону Био-Савара  $\vec{E}_{эл} = \frac{\vec{P}_M}{4\pi r^2} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi = \frac{[\vec{P}_M \times \vec{e}_r]}{4\pi r^2}$ , а магнитного поля – полю магнитного диполя постоянного тока

$$\vec{H}_{эл} = \frac{iSW}{4\pi r^3} (2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta).$$

При синусоидальном токе в диполе, исходя из приближенных выражений напряженности, векторы  $\vec{E}_{эл}$  и  $\vec{H}_{эл}$ , имеют сдвиг по фазе на  $\pi/2$ , определяя только реактивную мощность. Среднее за период значение вектора Пойнтинга равно нулю; поэтому принимают, что в ближней зоне электромагнитное поле носит реактивный характер.

Мгновенное значение удельной электромагнитной мощности изменяется по гармоническому закону с удвоенной частотой

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}(t) &= \frac{1}{2} [\vec{E}_{эл} \times \vec{H}_{эл}] = \\ &= \frac{1}{2} \frac{P_{Mm}^2}{\omega \mu_{эл} 32 \pi^2 r^5} [(2 \cos \vartheta \vec{e}_r + \sin \vartheta \vec{e}_\vartheta) \times \sin \vartheta \vec{e}_\varphi] \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Поток мощности пульсирует в ближней зоне не отрываясь от осциллятора.

## 7.2. Экспериментальная установка

Экспериментальные исследования проводятся на лабораторной установке, состоящей из генератора сигналов произвольной формы серии AFG 3000, ис-

следуемого магнитного осциллятора (рамки диаметром 0,134 м с 180 витками) и селективного измерителя внешнего магнитного и электрического поля INTERFERENCE METER типа NLMZ-4/50 с рабочим диапазоном частот 10...150 кГц.

### **7.3. Порядок проведения исследований**

#### ***7.3.1. Исследование диаграммы направленности рамки***

1. Настроить генератор на одну из частот рабочего диапазона 10...150 кГц селективного измерителя внешнего поля. Выбрать синусоидальную форму сигнала.
2. Совместить плоскости исследуемой рамки и рамки селективного измерителя внешнего поля в одной вертикальной плоскости.
3. Поворачивая рамку измерителя вместе с прибором, установленным на вращающейся вокруг вертикальной оси стойке, снять показания индикаторов измерителя через  $10^\circ$  изменения полярного угла  $\vartheta$  в интервале  $0^\circ \dots 180^\circ$ . Стойка имеет лимб для отсчета величины угла поворота.
4. Повторить действия предыдущего пункта, поворачивая исследуемую рамку в интервале  $0^\circ \dots 180^\circ$  при неподвижной рамке измерителя.

#### ***7.3.2. Исследование зависимости напряженности магнитного поля рамки в ближней зоне от расстояния***

1. К входу измерителя подсоединить его «ручную» рамку.
2. Перемещая «ручную» рамку снять показания индикаторов измерителя через 2 см изменения расстояния от центра исследуемой рамки до 30 см в двух взаимно перпендикулярных направлениях при полярных углах  $\vartheta = 0^\circ$  и  $90^\circ$ .

#### ***7.3.3. Исследование частотного спектра принимаемого сигнала***

1. Настроить генератор на частоту 15 кГц. Выбрать прямоугольную форму сигнала.
2. Снять показания индикаторов измерителя на кратных 15 кГц частотах от первой до девятой гармоник принимаемого сигнала.

## 7.4. Содержание отчета

1. Цель работы, схема лабораторной установки.
2. Таблицы опытных данных, графики.
3. Ответы на все вопросы.
4. Выводы.

## Контрольные вопросы

1. Что такое элементарный магнитный осциллятор?
2. Чему равен магнитный момент магнитного осциллятора?
3. Какие составляющие векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  характеризуют электромагнитное поле элементарного магнитного излучателя в ближней зоне? Напишите эти составляющие в сферической системе координат.

## Лабораторная работа 8 ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ДЛИННЫХ ЛИНИЯХ

**Цель работы:** экспериментальное исследование электромагнитного поля двухпроводной длинной линии на реальном физическом макете.

### 8.1. Основные теоретические положения

При подготовке к выполнению лабораторной работы необходимо изучить основные свойства и параметры электромагнитного поля направляющих систем [1].

Передача электромагнитной энергии на расстояние осуществляется по направляющим системам, отличающимся между собой конструкцией, типом волн и диапазоном частот.

По конструкции направляющие системы подразделяются на системы открытого типа, к которым относятся двухпроводные (рис. 1.2) и однопроводные линии, диэлектрические волноводы и системы закрытого типа – коаксиальные линии (рис. 1.3), полосковые линии (рис. 1.4), металлические волноводы и световоды.

В направляющих системах распространяются волны типа «Т», «Е» и «Н».

При рассмотрении в цилиндрической системе координат распространения электромагнитной волны вдоль круглого радиуса  $r_0$  бесконечно длинного

проводника, по которому протекает переменный ток, предполагают, что составляющие векторов поля из-за его осевой симметрии относительно центра проводника не зависят от угла  $\varphi$ , а также изменяются с расстоянием как  $e^{-jk_z z + j\omega t}$ , где  $k_z$  – продольное комплексное волновое число волны.

В этом случае волновое уравнение Гельмгольца для продольной составляющей вектора электрического поля с учетом вторых производных  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} = 0$  и  $\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} = -k_z^2 \dot{E}_z$  преобразуется в уравнение Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} \right) - (k_z^2 - k^2) \dot{E}_z = 0.$$

Решением уравнение Бесселя являются модифицированные функции Бесселя первого рода нулевого порядка от аргумента  $r\sqrt{k_z^2 - k_1^2}$  для проводника и второго рода нулевого порядка от аргумента  $r\sqrt{k_z^2 - k_2^2}$  для внешней среды:

$$\dot{E}_{z1} = AI_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})e^{-jk_z z + j\omega t}; \quad \dot{E}_{z2} = BK_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})e^{-jk_z z + j\omega t}.$$

Из I уравнения Максвелла  $-\frac{\partial \dot{H}_{\varphi \text{ эл}}}{\partial z} = j\omega \dot{\epsilon}_{\text{эл}} \dot{E}_{r \text{ эл}}$  после дифференцирования его по  $z$  находят  $\dot{E}_{r \text{ эл}} = \frac{k_z}{\omega \dot{\epsilon}_{\text{эл}}} \dot{H}_{\varphi \text{ эл}}$ , а из II уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{\dot{E}}_{\text{эл}} = -j\omega \mu \vec{\dot{H}}_{\text{эл}} \quad - \quad \dot{H}_{\varphi \text{ эл}} = \frac{j\omega \dot{\epsilon}_{\text{эл}}}{k_z^2 - k^2} \frac{\partial \dot{E}_{z \text{ эл}}}{\partial r}.$$

В результате общее решение приводится к виду

– внутри проводника:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z1} &= AI_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})e^{-jk_z z + j\omega t}; \\ \dot{H}_{\varphi 1 \text{ эл}} &= \frac{j\omega \dot{\epsilon}_{1 \text{ эл}}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} AI'_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})e^{-jk_z z + j\omega t}; \\ \dot{E}_{r 1 \text{ эл}} &= \frac{k_z}{\omega \dot{\epsilon}_{1 \text{ эл}}} \dot{H}_{\varphi 1 \text{ эл}}; \end{aligned}$$

– во внешней среде:

$$\dot{E}_{z2} = BK_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})e^{-jk_z z + j\omega t};$$

$$\dot{H}_{\varphi 2\text{эл}} = \frac{j\omega\dot{\epsilon}_{2\text{э}}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}} BK'_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})e^{-jk_z z + j\omega t};$$

$$\dot{E}_{r 2\text{эл}} = \frac{k_z}{\omega\dot{\epsilon}_{2\text{э}}} \dot{H}_{\varphi 2\text{эл}}.$$

На поверхности проводника при  $r = r_0$  на основании граничных условий должны быть равными тангенциальные составляющие векторов электрического и магнитного полей:

$$AI_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) = BK_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2});$$

$$\frac{j\omega\dot{\epsilon}_{1\text{э}}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} AI'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) = \frac{j\omega\dot{\epsilon}_{2\text{э}}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}} BK'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2}).$$

Одно равенство делят на другое, предварительно умножив второе равенство на внешний периметр проводника. Левая часть полученного равенства равна погонному сопротивлению провода

$$\dot{R} = \frac{\dot{E}_{z1\text{эл}}}{\dot{I}} = \frac{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})\sqrt{k_z^2 - k_1^2}}{j2\pi\dot{\epsilon}_{1\text{эл}}\omega r_0 I'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})},$$

так как на основании закона полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна току, проходящему через контур.

Правую часть равенства определяют через погонную ёмкость линии

$$\dot{C} = \frac{2\pi \cdot r_0 \int_{r_0}^{\infty} \dot{\epsilon}_{2\text{эл}} \dot{E}_{r 2\text{эл}} dr}{\int_{r_0}^{\infty} \dot{E}_{r 2\text{эл}} dr} = \frac{2\pi r_0 \dot{\epsilon}_{2\text{э}} K'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})\sqrt{k_z^2 - k_2^2}}{-K_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} \text{ в виде } -\frac{k_z^2 - k_2^2}{j\omega\dot{C}}.$$

Из полученного равенства  $\dot{R} = -\frac{k_z^2 - k_2^2}{j\omega\dot{C}}$  находят продольное волновое

число электромагнитной волны  $k_z = \sqrt{k_2^2 - j\omega\dot{R}\dot{C}}$ .

Значение продольного комплексного волнового числа  $k_z$  определяется не только параметрами внешней среды, но и параметрами самого проводника, его внутренним сопротивлением, ёмкостью и частотой переменного тока.

Постоянные коэффициенты  $A$  и  $B$  определяют из закона полного тока:

$$\frac{j\omega\dot{\epsilon}_{1\text{э}}}{(k_z^2 - k_1^2)^{1/2}} AI'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2}) = \frac{j\omega\dot{\epsilon}_{2\text{э}}}{(k_z^2 - k_2^2)^{1/2}} BK'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2}) = \frac{I_m}{2\pi r_0};$$

$$A = \frac{\dot{R}I_m}{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}; \quad B = \frac{\dot{R}I_m}{K_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})},$$

где  $I_m$  – амплитудное значение тока в проводнике.

В результате получают следующие решения для электромагнитного поля:

– внутри проводника:

$$\dot{E}_{z1} = \dot{R} \frac{I_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} I_m e^{-jk_z z + j\omega t}; \quad \dot{H}_{\varphi 1\text{эл}} = \frac{1}{2\pi r_0} \frac{I'_0(r\sqrt{k_z^2 - k_1^2})}{I'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_1^2})} I_m e^{-jk_z z + j\omega t};$$

$$\dot{E}_{r 1\text{эл}} = \frac{k_z}{\omega \dot{\epsilon}_{1\text{э}}} \dot{H}_{\varphi 1\text{эл}};$$

– во внешней среде:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{z 2\text{эл}} &= \dot{R} \frac{K_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} I_m e^{-jk_z z + j\omega t}; \\ \dot{H}_{\varphi 2\text{эл}} &= \frac{1}{2\pi r_0} \frac{K'_0(r\sqrt{k_z^2 - k_2^2})}{K'_0(r_0\sqrt{k_z^2 - k_2^2})} I_m e^{-jk_z z + j\omega t}; \\ \dot{E}_{r 2\text{эл}} &= \frac{k_z}{\omega \dot{\epsilon}_{2\text{э}}} \dot{H}_{\varphi 2\text{эл}}. \end{aligned}$$

Внешняя индуктивность и погонное сопротивление излучения проводника в этом случае составляют:

$$\begin{aligned} \dot{L} &= -\frac{\mu_2}{2\pi} \ln(r_0\sqrt{-j\omega\dot{C}\dot{R}}) = -\frac{\mu_{2\text{э}}}{2\pi} \ln(r_0\sqrt{\omega\dot{C}\dot{R}}) - j\frac{3}{8}\mu_{2\text{эл}}; \\ R_{\text{изл}} &= j\omega \text{Im}\dot{L} = \frac{3\omega\mu_{2\text{эл}}}{8}. \end{aligned}$$

Квадрат волнового числа внешней среды выражают через ёмкость и внешнюю индуктивность проводника  $k_2^2 = \omega^2 \dot{C} \dot{L}$ , так как  $\dot{C} \dot{L} = \dot{\epsilon}_2 \mu_2$  и подставляют его в выражение для продольного волнового числа

$$k_z = \sqrt{k_2^2 - j\omega\dot{R}\dot{C}} = \sqrt{-(\dot{R} + j\omega\dot{L})j\omega\dot{C}}.$$

Вдоль проводника распространяется поперечная электромагнитная волна типа «Т».

В длинной линии, при распространении одной прямой волны, сопротивление, в любом её сечении равно волновому сопротивлению  $Z_c = \sqrt{\frac{\dot{R} + j\omega\dot{L}}{j\omega\dot{C}}}$ .

Одиночный проводник имеет большую погонную индуктивность и малую ёмкость, а, следовательно, высокие характеристическое и входное сопротивления, поэтому направляющие системы (двухпроводная линия, коаксиальный кабель, полосковая линия и др.) состоят из двух проводников, при этом уменьшается внешняя индуктивность линии и возрастает ёмкость за счёт концентрации поля между проводниками. Основной поток активной мощности распространяется вдоль проводника во внешней диэлектрической среде и только часть её идёт внутрь проводника для компенсации тепловых потерь в нём.

В линии конечной длины (рис. 8.1) при выходном сопротивлении, не равном волновому сопротивлению, за счёт отраженной волны возникает режим стоячих волн с образованием пучностей и узлов напряжения и тока.

Ток на расстоянии  $z$  от конца линии длиной  $l$  равен сумме токов прямой и отраженной волн:  $\dot{I} = \dot{I}_{\text{пр}} e^{-jk_z(l-z)} + \dot{I}_{\text{отр}} e^{-jk_z(l+z)}$ , а напряжение – неопределённому интегралу из произведения полного сопротивления бесконечно малого элемента линии на ток:

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \int (\dot{R} + j\omega \dot{L}) \dot{I} dz = \frac{\dot{R} + j\omega \dot{L}}{jk_z} (\dot{I}_{\text{пр}} e^{-jk_z(l-z)} - \dot{I}_{\text{отр}} e^{-jk_z(l+z)}) = \\ &= Z_c (\dot{I}_{\text{пр}} e^{-jk_z(l-z)} - \dot{I}_{\text{отр}} e^{-jk_z(l+z)}). \end{aligned}$$

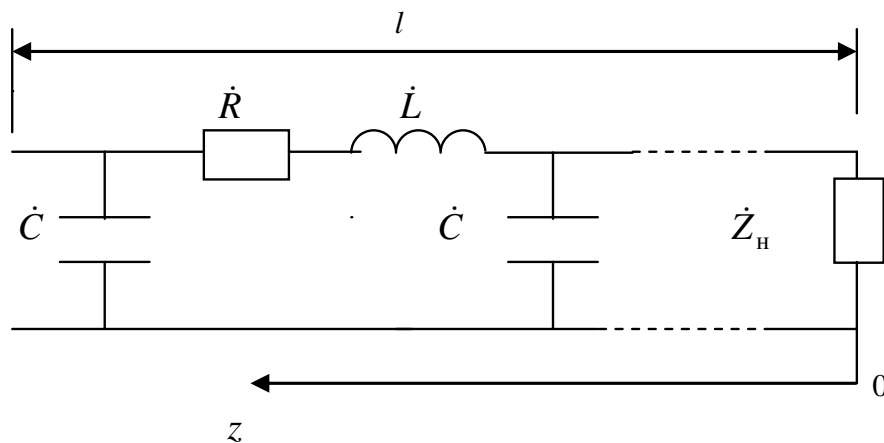


Рис. 8.1

Токи прямой и отраженной волн определим через значения тока и напряжения на конце линии при  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{I}_{\text{вых}} &= \dot{I}_{\text{пр}} e^{-jk_z l} + \dot{I}_{\text{отр}} e^{-jk_z l}; \quad \dot{U}_{\text{вых}} = Z_c (\dot{I}_{\text{пр}} e^{-jk_z l} - \dot{I}_{\text{отр}} e^{-jk_z l}); \\ \dot{I}_{\text{пр}} e^{-jk_z l} &= \frac{\dot{U}_{\text{вых}} + Z_c \dot{I}_{\text{вых}}}{2Z_c}; \quad \dot{I}_{\text{отр}} e^{-jk_z l} = -\frac{\dot{U}_{\text{вых}} - Z_c \dot{I}_{\text{вых}}}{2Z_c}. \end{aligned}$$

После подстановки их в выражения для тока и напряжения на расстоянии  $z$  от конца линии получаем

$$\dot{I} = \frac{1}{Z_c} \dot{U}_{\text{ВЫХ}} \operatorname{sh} jk_z z + \dot{I}_{\text{ВЫХ}} \operatorname{ch} jk_z z;$$

$$\dot{U} = \dot{U}_{\text{ВЫХ}} \operatorname{ch} jk_z z + Z_c \dot{I}_{\text{ВЫХ}} \operatorname{sh} jk_z z; \quad \dot{E}_z = \frac{\partial \dot{U}}{\partial z} = jk_z (\dot{U}_{\text{ВЫХ}} \operatorname{sh} jk_z z + Z_c \dot{I}_{\text{ВЫХ}} \operatorname{ch} jk_z z).$$

Ток в проводах определяет распределение вдоль линии магнитного поля, напряжение – поперечную составляющую, а его производная по  $z$  – продольную составляющую вектора электрического поля. Исследование электромагнитного поля в длинной линии студенты проводят на реальном макете двухпроводной линии. Макет линии отличается от классической длинной линии. Макет расположен на деревянном столе.

## 8.2. Экспериментальная установка

В состав лабораторной установки входят:

- генератор сигналов Agilent №9310A RF Signal Generator 9 kHz – 3 GHz;
- закороченная исследуемая двухпроводная линия (длиной 2 м, проложенная по лабораторному столу медным проводом диаметром 0,5 мм);
- малогабаритный микропроцессорный измеритель ИПМ-101 с рабочими диапазонами частот от 30 кГц до 1,2 ГГц и от 2,4 до 2,5 ГГц.

По показаниям измерителя ИПМ-101 студенты строят графики изменения поперечной и продольной составляющих вектора напряженности электрического поля вдоль оси двухпроводной линии и по ним определяют расстояния между узлами и пучностями тока, длину волны.

## 8.3. Порядок проведения исследований

Настроить генератор и измеритель ИПМ-101 на частоту 1 ГГц. На столе под проводами двухпроводной линии положить два листа бумаги А4. По центральной оси двухпроводной линии на бумаге нанести шкалу расстояния через 1 см.

Электрический диполь измерителя ИПМ-101 расположить поперек оси линии в её центре. Перемещая диполь через 2 см от 0 до 60 см вдоль оси двухпроводной линии провести измерения поперечной составляющей вектора напряженности электрического поля. Результаты занести в таблицу.

Электрический диполь измерителя ИПМ-101 расположить вдоль оси линии в её центре и для определения продольной составляющей вектора



напряженности электрического поля повторить действия предыдущего пункта.

Эти измерения составляющих вектора напряженности электрического поля для определения уровня внешних помех повторить при отключенной от генератора закороченной исследуемой двухпроводной линии.

#### **8.4. Содержание отчета**

1. Цель работы, эквивалентная электрическая схема макета длинной двухпроводной линии, картина поля двухпроводной линии.
2. Таблицы опытных данных продольной и поперечной составляющих вектора напряженности электрического поля, а также соответствующие графики.
3. Ответы на контрольные вопросы.
4. Выводы.

#### **Контрольные вопросы**

1. В каких случаях в длинной линии возникают режимы стоячих и бегущих волн?
2. Чему равно расстояние между узлами и пучностями в длинной линии?
3. Как влияет подстилающая поверхность деревянного стола, на котором расположен макет длинной двухпроводной линии на длину её волны?
4. Какие резонансные волны устанавливаются в исследуемом макете линии при открытом её входе и замкнутом выходе?

### **Лабораторная работа 9 ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ ПОСТОЯННОГО ТОКА**

**Цель работы:** изучение эффекта Холла, измерение магнитной индукции цилиндрической катушки постоянного тока, проверка граничных условий.

#### **9.1. Основные теоретические положения**

При подготовке к выполнению лабораторной работы необходимо изучить основные законы и уравнения магнитного поля постоянного тока [1] и озна-

комиться с основными теоретическими положениями работы 3 настоящего лабораторного практикума.

В работе для измерения магнитной индукции постоянного тока используется эффект Холла.

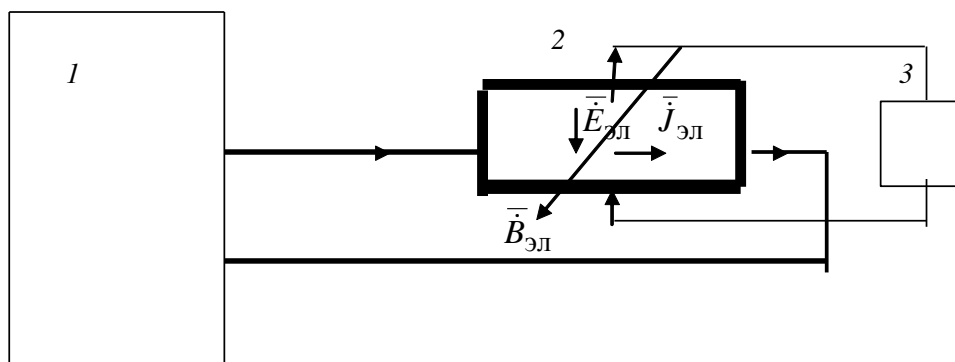


Рис. 9.1

Полупроводящая пластина 2 (рис. 9.1), по которой в продольном направлении протекает электрический ток устройства 1 с удельной плотностью  $\vec{J}_{эл}$ , помещается в однородное магнитное поле  $\vec{B}_{эл}$ , перпендикулярное плоскости пластины. Согласно закону Ампера, движущиеся электрические заряды за счет магнитного поля приобретают ускорение в поперечном направлении, образуя разность потенциалов поперек пластины

$$U = \frac{R}{t} I_{пл} B \cos \alpha,$$

где  $R$  – постоянная Холла;  $I_{пл}$  – ток через пластину;  $B$  – магнитная индукция;  $t$  – толщина пластины;  $\alpha$  – угол между вектором магнитной индукции и нормалью к пластине.

В датчиках Холла по разности потенциалов устройства 3 при  $\alpha = 0$  определяют индукцию магнитного поля из формулы

$$B = \frac{U}{I_{пл}} K,$$

где  $K$  – параметр преобразователя Холла, определяемый его материалом и размерами.

Проверка граничных условий производится из условий, определяющих поведение векторов магнитного поля на границе раздела сред.

Они находятся из I и IV уравнений Максвелла в интегральной форме:

$$H_{1\tau} - H_{2\tau} = i_{\text{пов}}; \quad B_{1n} = B_{2n},$$

где  $i_{\text{пов}}$  – поверхностный ток.

## 9.2. Экспериментальная установка

Экспериментальные исследования проводятся на лабораторной установке, в которую входят:

- источник постоянного стабилизированного напряжения серии НУ 3020;
- исследуемый соленоид диаметром 0,114 м длиной  $l = 0,3$  м с  $W = 1980$  витками и плоские намагниченные стальные пластины;
- измеритель магнитной индукции РШ-10 с двумя зондами «С» (зонд соленоида) и «М» (зонд магнитов).

По экспериментальным данным студенты строят картину магнитного поля исследуемых моделей, определяют влияние стального стакана на внутреннее поле соленоида, а также численно, как и в лабораторной работе 3, проверяют выполнение граничных условий на его поверхности.

## 9.3. Порядок проведения исследований

1. В исследуемом соленоиде установить с помощью источника постоянного стабилизированного напряжения ток  $I = 0,1$  А.
2. Зонд «С» вынуть из металлического защитного чехла и поместить его внутрь соленоида вдоль центральной оси.
3. Перемещая зонд «С» вдоль оси соленоида, провести измерения магнитной индукции  $B_{\tau}(z)$  через 2 см по всей его длине внутри и в пределах 0,1 м во внешней среде. Результаты занести в таблицу.
4. Аналогичные измерения  $B_{\tau}(z)$  повторить вдоль образующих цилиндрической катушки внутри и вне соленоида у его корпуса вдоль направлений II и III (рис. 9.2).

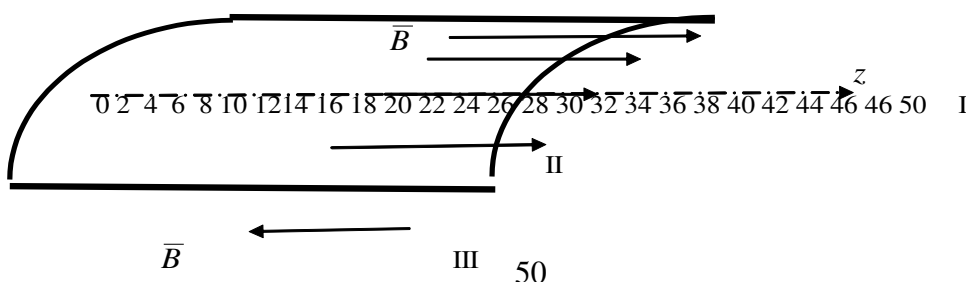


Рис. 9.2

5. Численно проверить выполнение граничных условий: сумма тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля в средней части внутри и вне соленоида у его корпуса должна равняться поверхностному току

$$i_{\text{пов}} = \frac{IW}{l}.$$

6. Внутри катушки поместить стальной стакан и провести измерения  $B_T(z)$  вдоль направлений I (см. рис. 9.2).

#### 9.4. Содержание отчета

1. Цель работы, схема установки, эскизы катушки с векторными линиями магнитного поля.
2. Таблицы опытных данных  $B_T(z)$ , а также соответствующие графики.
3. Оценка влияния стального стакана на магнитное поле внутри катушки.

#### Контрольные вопросы

1. В чем заключается эффект Холла?
2. Можно ли измерить магнитную индукцию постоянного тока магнитным диполем?
3. Почему при проверке граничных условий берётся сумма магнитных индукций внутри соленоида и во внешней среде?
4. В каком случае происходит размагничивание металлической сферы в постоянном магнитном поле?

#### Список литературы

1. Башарин С. А., Федоров В. В. Теоретические основы электротехники. Теория электрических цепей и электромагнитного поля: Учеб. пособие. М.: Академия, 2010. 340 с.
2. Лабораторный практикум по ТОЭ. Теория электромагнитного поля / Под ред. В. Н. Рудакова. СПб., 1991. 76 с.
3. Демирчян К. С., Чечурин В. Л. Машинные расчеты электромагнитных полей. М.: Высш. Шк., 1986.
4. Янке У., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1977.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Требования к оформлению отчетов .....	3
<b>Лабораторная работа 1.</b> Исследование электромагнитного поля методом электро моделирования.....	4
<b>Лабораторная работа 2.</b> Моделирование электромагнитного поля численным методом с помощью комплекса программ ELCUT .....	10
<b>Лабораторная работа 3.</b> Исследование магнитного поля цилиндрической катушки.....	15
<b>Лабораторная работа 4.</b> Измерение индуктивностей .....	21
<b>Лабораторная работа 5.</b> Исследование характеристик электромагнитных волн и параметров веществ с помощью интерферометра Майкельсона.....	25
<b>Лабораторная работа 6.</b> Электромагнитное экранирование .....	33
<b>Лабораторная работа 7.</b> Исследование электромагнитного поля магнитного осциллятора в ближней зоне .....	37
<b>Лабораторная работа 8.</b> Исследование электромагнитного поля в длинных линиях.....	42
<b>Лабораторная работа 9.</b> Исследование магнитной индукции цилиндрической катушки постоянного тока.....	48
Список литературы .....	51

Федоров Виктор Викторович,  
Портной Марк Саулович

**Основы электромагнитного поля**

Лабораторный практикум по теоретической электротехнике

Публикуется в авторской редакции

---

Подписано в печать 15.03.2011. Формат 60×84 1/16.  
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 3,3.  
Гарнитура «Times New Roman». Тираж 125 экз. Заказ 18.

---

Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ»  
197376, С.-Петербург, ул. Проф. Попова, 5