复习

- 回顾：麦克斯韦方程 (隐含电荷守恒) 和洛伦兹力
- 亥姆霍兹定理：如何确定一个矢量场
- 亥姆霍兹定理在电磁场中的应用：给出标势和矢势的定义
- 亥姆霍兹定理无法用来具体求解：矢量波动方程

第一章　麦克斯韦方程组

§1-1.　回顾麦克斯韦方程组与亥姆霍兹定理

§1-2.　标势、矢势以及规范自由度

上一节已经给出了标势和矢势的定义，虽然它们不能直接用来求解电磁场，却提供了解决问题的另一个思路，因为形式上由亥姆霍兹定理定义的标势和矢势自动满足了麦克斯韦方程组中两条无源的方程，即电场的旋度方程和磁场的散度方程。具体如下

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B} = \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0, \tag{2.1}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla\times\Big[-\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}\Big] + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{A}) = 0. \tag{2.2}$$

那么接下去的问题就是用 Φ 和 $\boldsymbol{A}$ 表达另外两条有源的麦克斯韦方程，即

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = -\nabla^2\Phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.3}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \frac{1}{c^2}\Big[-\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}\Big] = \mu_0\boldsymbol{j}. \tag{2.4}$$

重新整理上述两条方程可以得到

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.5}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A} - \nabla\Big(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\Big) = -\mu_0\boldsymbol{j}. \tag{2.6}$$

原则上来说，标势和矢势的引入将麦克斯韦方程对电磁场的求解变成了 (2.5) 和 (2.6) 两条略显丑陋的公式。这貌似简化了电磁场的求解，因为待解的自由度从 6 个变成了 4 个，但是公式 (2.5) 和 (2.6) 并不唯一确定标势和矢势，例如下面的变换 (规范变换)

$$\Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \nabla\Lambda. \tag{2.7}$$

容易验证，$(\Phi', \boldsymbol{A}')$ 不仅满足公式 (2.5) 和 (2.6)，而且和 $(\Phi, \boldsymbol{A})$ 给出一样的 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$。换言之，给定电荷和电流分布，$(\Phi, \boldsymbol{A})$ 的解并不唯一，但是最终的电磁场又是一致的。从物理理解和波动方程的角度上来

说，给定电荷和电流分布以及边界条件是能够唯一确定电磁场。因此合理的猜测是在 $(\Phi, \boldsymbol{A})$ 的引入过程中某些物理信息的丢失或者隐藏的对称性/守恒律才会导致它们的解不唯一确定。下面我们将从不同角度去分析这个问题。

我们先从求解方程的角度来思考。如果仅把 $(\Phi, \boldsymbol{A})$ 当作辅助变量，那么就可以通过附加方程来确定 $(\Phi, \boldsymbol{A})$，下面是使用最多的两种选择

$$\text{Coulomb gauge:} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0, \tag{2.8}$$

$$\text{Lorenz gauge:} \quad \nabla\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0. \tag{2.9}$$

前者称为库伦规范，后者称为洛伦兹规范 (注意：*Lorenz gauge is named after the Danish Ludvig Lorenz, not the Dutch Hendrik Lorentz.*)。从亥姆霍兹定理角度理解，需要唯一确定 $\boldsymbol{A}$ 的话公式 (2.5) 和 (2.6) 中缺少 $\boldsymbol{A}$ 的散度方程，因此上面两种规范变换均是给定某种特殊的 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$。在库伦规范下，标势 Φ_C 可以直接求得

$$\nabla^2\Phi_C = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r' \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \tag{2.10}$$

进而可以得到矢势 $\boldsymbol{A}_C$

$$\begin{aligned}
\nabla^2\boldsymbol{A}_C - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}_C &= -\mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\nabla\frac{\partial\Phi_C}{\partial t}, &(2.11)\\
&= -\mu_0\boldsymbol{j} + \frac{1}{c^2}\nabla\Big[\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\partial_t\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Big], &(2.12)\\
&= -\mu_0\boldsymbol{j} - \mu_0\nabla\Big[\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}^3r'\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Big], &(2.13)\\
&= -\mu_0\boldsymbol{j}_t, &(2.14)
\end{aligned}$$

其中最后一步运用了亥姆霍兹分解

$$\boldsymbol{j}_t = \nabla\times\Big[\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\frac{\nabla'\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\Big]. \tag{2.15}$$

可以看出，在库伦规范下，横向的电流分量才能产生推迟的矢势，进而产生磁场，但是标势是瞬时的，即无推迟势。

在洛伦兹规范下，标势 Φ_L 和矢势 $\boldsymbol{A}_L$ 的方程变得十分对称，即

$$\nabla^2\Phi_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi_L = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{2.16}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A}_L - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}_L = -\mu_0\boldsymbol{j}. \tag{2.17}$$

这两条方程具有波动方程的形式，因而在电磁波的辐射问题上被广泛使用。这说明标势和矢势的物理意义十分明确。除去上述两种规范之外，还有很多种规范变换，它们在特定情况下都可以简化方程的求解，同时提供便捷的物理理解。因此，$(\Phi, \boldsymbol{A})$ 的作用不仅仅是求解麦克斯韦方程的辅助变量，而具有着十分深刻的物理意义。

为了理解标势和矢势的物理意义，我们需要考虑洛伦兹力，因为它是经典电动力学的基础之一。简单起见，我们考虑一个孤立的质量为 m、带电量为 q 的电荷在电磁场 $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ 中以恒定速度 $\boldsymbol{v}$ $(|\boldsymbol{v}| \ll c)$ 运动，那么该电荷的运动方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = q\Big[-\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{A})\Big], \tag{2.18}$$

$$\overset{\mathrm{a}}{=} q\Big[-\nabla\Phi - \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} + \nabla(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{A}\Big], \tag{2.19}$$

$$\overset{\mathrm{b}}{=} q\Big[-\nabla(\Phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}\Big], \tag{2.20}$$

其中步骤的知识点

a. 运用到等式 $\nabla(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\nabla \times \boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b} \times (\nabla \times \boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a} \cdot \nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b} \cdot \nabla)\boldsymbol{a}$;

b. 运用到全微分 (total derivative) 和传递导数 (convective derivative)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A} = \Big[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla\Big]\boldsymbol{A}. \tag{2.21}$$

公式 (2.20) 可以重新写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}) = -q\nabla(\Phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}). \tag{2.22}$$

回顾经典力学

拉格朗日方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \tag{2.23}$$

其中 q_j 是广义坐标，$L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)$ 是拉格朗日量。一般来说，$L = T - U$，其中 T 是动能项 (kinetic energy)，U 是广义势能 (generalized potential or velocity-dependent potential)。进一步，引入正则动量 p_i(canonical or conjugate momentum)

$$p_i = \frac{\partial L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i}, \tag{2.24}$$

则可以通过勒让德变换 (Legendre transformation) 将拉格朗日量变成哈密顿量

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}, t) = \dot{q}_i p_i - L(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, t). \tag{2.25}$$

值得指出的是，上式将拉格朗日量中的变量广义速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ 变成了哈密顿量中的正则动量 $\boldsymbol{p}$。公式 (2.23) 则变成下面的哈密顿正则方程

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \tag{2.26}$$

基于以上的经典力学方程，不难证明公式 (2.22) 可以重新写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p} = -\nabla U \qquad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} \quad U = q(\Phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}), \tag{2.27}$$

其中 $\boldsymbol{p}$ 即为正则动量。粒子与电磁场相互作用对应的拉格朗日量可以写成

$$L(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v},t) = T - U = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - q\Phi + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}. \tag{2.28}$$

同时，粒子与电磁场相互作用对应的哈密顿量是

$$H(\boldsymbol{x},\boldsymbol{p},t) = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{p} - q\boldsymbol{A})^2 + q\Phi. \tag{2.29}$$

很明显，当矢势 $\boldsymbol{A} = 0$ 的时候，上面的公式回到静电场的结果。虽然上述的结果是在非相对论条件下得出的，但是 $\boldsymbol{p}$ 和 U 在考虑相对论效应时只需要将动能项 ($m\boldsymbol{v}$ 和 $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2$) 替换成相对论协变形式即可 (具体细节将在本课程第五章和第六章中讲述)。

至此，标势和矢势的物理意义变得很清楚，但是问题随之而来：拉格朗日量和哈密顿量中的标势和矢势是具有规范自由度的，但是在规范变换下，洛伦兹力是不变的，因此粒子的运动方程不变，那么问题是拉格朗日量在规范变换下是否不变？如果有变化，则说明上面给出的拉格朗日量存在问题；如果不变，则说明规范变换隐藏着某些物理规律。因此，我们来考察规范变换下的拉氏量

$$L(\boldsymbol{x},\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v};\Lambda,\nabla\Lambda,\dot{\Lambda};t) = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - q\Phi + q\frac{\partial\Lambda}{\partial t} + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} + q\boldsymbol{v}\cdot\nabla\Lambda, \tag{2.30}$$

其中 Λ 被当成独立变量来处理。物理系统的作用量是

$$S = \int L(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t)\,\mathrm{d}t. \tag{2.31}$$

根据最小作用量原理，我们可以求出作用量 S 对广义坐标 $\boldsymbol{q}$ 的泛函导数 (functional derivative)

$$\frac{\delta S}{\delta q_j} = \frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = -q\nabla(\Phi - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A}) = 0. \tag{2.32}$$

此即拉格朗日方程。具体到公式 (2.30) 定义的作用量，上式便给出公式 (2.22)。类似地，我们可以求出公式 (2.30) 定义的作用量 S 对规范变量 Λ 的泛函导数

$$\frac{\delta S}{\delta\Lambda} = \frac{\partial L}{\partial\Lambda} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial L}{\partial\dot{\Lambda}} - \nabla\cdot\frac{\partial L}{\partial\nabla\Lambda} = -\frac{\partial}{\partial t}q - \nabla\cdot(q\boldsymbol{v}) = 0. \tag{2.33}$$

这很显然是电荷守恒的条件。换句话说，由于电荷守恒的保证，拉氏量在规范变换下不变。因此，尽管标势和矢势并不唯一，但是作为物理学基础之一的拉格朗日量是不变的。这其中隐藏着电荷守恒定律，同时也是麦克斯韦方程隐含的结论。所有的这些均说明上述拉格朗日量的定义是完全合理的。更进一步，我们可以将规范变换当作诺特定理 (Noether's theorem) 的一个例子，类比于能量守恒是时间平移不变性的结果、某方向的动量守恒来自于该方向的平移不变性，那么电荷守恒就是规范不变性的结果。

§1-3. 电磁场在时空变换下的性质

物理量以及相关方程在坐标变换下的性质不仅直接联系到一般性的守恒定律，而且约束了物理量之间的关系。在这一小节中，我们将讨论电磁场在空间旋转 (rotation)、反射 (reflection)、倒反 (inversion) 和时间反演 (time reversal) 操作下的性质，从而为后续的电磁场的对称性分析提供基础，比如电磁本构关系的唯象理解、磁单极存在性的分析等等。考虑到经典力学中有过类似对力学量的分析，因此我们先简略地回顾一下这部分内容，然后再讨论电磁场部分。

空间旋转 — 假定 $\hat{\boldsymbol{e}}_{1,2,3}$ 和 $\hat{\boldsymbol{e}}'_{1,2,3}$ 是三维空间的两套完备正交基矢，它们之间的变换可以由正交变换矩阵 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}$，即 $\hat{\boldsymbol{e}}'_i = A_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}_j$ 来表示。这里运用了爱因斯坦求和规则，但由于本章处理的是平直空间，因此求和的指标不分协变和抗变。可以证明 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{-1} = \overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$，因为

$$\delta_{ij} = \hat{e}'_i\cdot\hat{e}'_j = A_{ik}\hat{e}_k A_{jl}\hat{e}_l = A_{ik}A_{jl}\delta_{kl} = A_{ik}A_{jk} = A_{ik}A^{\mathrm{T}}_{kj}. \tag{3.1}$$

由于矩阵的转置操作不改变矩阵的行列式，因此上述关系进一步可以给出 $|\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})|^2 = 1$。这就区分出两种不同的旋转操作，$\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}) = +1$ 的旋转操作称为真转动 (a proper rotation)，$\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}) = -1$ 的旋转操作称为非真转动 (an improper rotation，瑕旋转) 或称为旋转反射 (rotoreflection)。值得注意，非真转动有时也被称为旋转倒反 (rotoinversion)，这是因为旋转反射与旋转倒反是等价的，即空间倒反 (点反演) 可以拆分为空间反射和一个真转动的乘积。这两类旋转操作在后续物理量的对称性分析中会用到。

我们接下来考察坐标矢量 $\boldsymbol{r} = r_i\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 在旋转操作下的变换，即

$$\boldsymbol{r} = r_i\hat{\boldsymbol{e}}_i = r_i\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}^{-1}_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}'_j = r_i\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}_{ji}\hat{\boldsymbol{e}}'_j \Rightarrow r'_j = \overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}_{ji}r_i. \tag{3.2}$$

这说明坐标矢量的变换和基矢的变换一致。值得指出，上面的公式右手边的结论可以理解为该问题的被动观点 (passive view)：物理系统不动，而坐标系做旋转，即将 $\boldsymbol{r}$ 用 $\hat{\boldsymbol{e}}'_j$ 表示出来。另外一种等价的主动观点 (active view) 是坐标系不变，而物理系统进行转动。具体来说，就是在 $\hat{\boldsymbol{e}}_i$ 中将 $\boldsymbol{r}$ 变换成 $\boldsymbol{r}' = \overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{r}$。图 (1) 用二维旋转为例展示了这两者的对比。

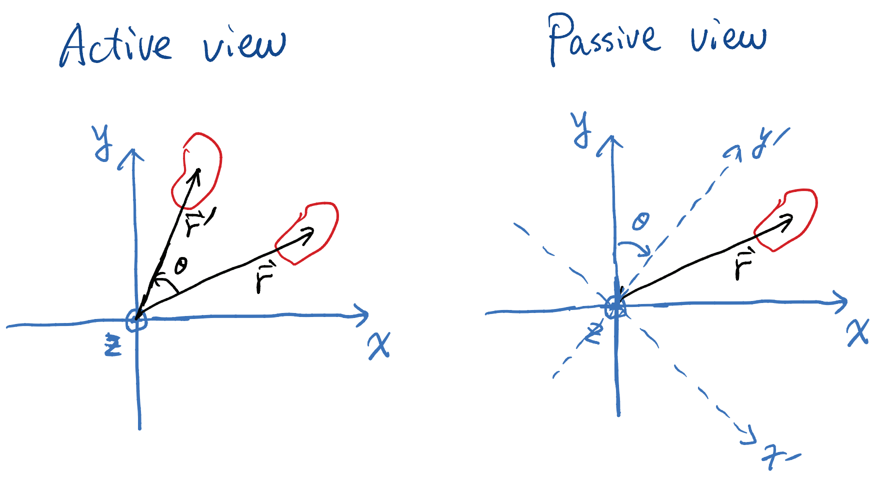

Figure 1. 二维转动的主动和被动观点。

有了上述的定义，物理量在旋转操作下的行为便决定了该物理量对应的旋转张量阶数 (rank of rotational tensors)，具体如下：

- **Rank 0**: 标量 (scalar)f(1-component quantity), $f'(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})$。
- **Rank 1**: 矢量 (vector)$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$(3-component quantity)，具有和公式 (3.2) 一样的变换性质，即 $v'_i(\boldsymbol{r})=A_{ij}v_j(\boldsymbol{r})$。
- **Rank 2**: 二阶张量 T_{ij}(9-component quantity), $T'_{ij}(\boldsymbol{r})=A_{ik}A_{jl}T_{kl}(\boldsymbol{r})$。
- **Rank N**: N 阶张量 $T_{i\cdots j}$，$T'_{i\cdots j}(\boldsymbol{r})=\underbrace{A_{ik}\cdots A_{jl}}_{N}T_{k\cdots l}(\boldsymbol{r})$。

按照上述定义，坐标矢量 $\boldsymbol{r}$ 显然是矢量。由于物理方程中通常是处理一系列的微积分算符和矢量运算，因此我们需要考察这些运算对张量的影响。

首先来考察微分算符。时间微分算符显然不改变张量在空间旋转下的性质，比如说动量 $\boldsymbol{p}$

$$\boldsymbol{p}'=m'\boldsymbol{v}'=m'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=m\frac{\mathrm{d}(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{r})}{\mathrm{d}t}=\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{p}, \tag{3.3}$$

其中运用到了质量 m 是标量。上述公式说明 $\boldsymbol{p}$ 是矢量。换言之，时间微分算符可以被当作标量来处理。接下去来考虑 ∇ 算符。为了讨论方便，我们将其作用在某个标量函数 f 上，即

$$\nabla' f=\hat{\boldsymbol{e}}'_i\frac{\partial f}{\partial r'_i}=\hat{\boldsymbol{e}}'_i\frac{\partial r_j}{\partial r'_i}\frac{\partial f}{\partial r_j}=\hat{\boldsymbol{e}}'_i\Big[A_{ij}\frac{\partial f}{\partial r_j}\Big], \tag{3.4}$$

$$\nabla f=\hat{\boldsymbol{e}}_j\frac{\partial f}{\partial r_j}=A_{ij}\hat{\boldsymbol{e}}'_i\frac{\partial f}{\partial r_j}=\hat{\boldsymbol{e}}'_i\Big[A_{ij}\frac{\partial f}{\partial r_j}\Big]. \tag{3.5}$$

公式 (3.4) 运用了 ∇ 的微分性质 (或者说主动观点)，公式 (3.5) 运用了 ∇ 的矢量性质 (或者说被动观点)，而两个公式相等可以证实 ∇ 算符可以被当作矢量来处理。

讨论：

1. 上面两个公式的证明局限于直角坐标系，拓展到正交曲线坐标系，比如说球坐标系和柱坐标系，需要引入度量，但是结论依然是成立的。
2. ∇ 既是矢量又是微分算符，所以实际计算时可以分为两步，(a) 先忽略 ∇ 的矢量特征，仅把其当做微分算符作用于函数或矢量，但要保持等式的运算顺序，(b) 再考虑 ∇ 是矢量，运用矢量公式进行计算，但要保证求导顺序的正确。

除去微分算符，麦克斯韦方程中还涉及不同的张量运算，因此下面我们来考察在这些运算。对于两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，它们的点乘为

$$\boldsymbol{a}'\cdot\boldsymbol{b}'=a'_ib'_i=A_{im}a_mA_{in}b_n=A^{\mathrm{T}}_{mi}A_{in}a_mb_n=\delta_{mn}a_mb_n=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}. \tag{3.6}$$

这说明两个矢量点乘的结果为标量。因此，$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}$、$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla$ 和 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}$ 均是标量，从而说明能量 E 是标量。下面考察叉乘 $\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Theta}'_k &= \varepsilon_{ijk}a'_i b'_j = \varepsilon_{ijl}\delta_{lk}A_{im}a_m A_{jn}b_n && (3.7)\\
&\overset{\mathrm{a}}{=} \varepsilon_{ijl}A_{ls}A_{ks}A_{im}a_m A_{jn}b_n && (3.8)\\
&\overset{\mathrm{b}}{=} [\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})]\varepsilon_{mns}A_{ks}a_m b_n && (3.9)\\
&\overset{\mathrm{c}}{=} [\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})]A_{ks}\boldsymbol{\Theta}_s && (3.10)
\end{aligned}$$

具体步骤中的知识点：

a. 运用到等式 $\delta_{lk}=A_{ls}A^{-1}_{sk}=A_{ls}A_{ks}$；

b. 运用到等式 $\varepsilon_{ijl}A_{im}A_{jn}A_{ls}=[\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})]\varepsilon_{mns}$；

c. 运用到等式 $\boldsymbol{\Theta}_s=\varepsilon_{mns}a_m b_n$。

对比矢量的定义，$\boldsymbol{\Theta}$ 在正交变换矩阵的基础上还有 $\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})$。对于真转动而言，$\boldsymbol{\Theta}$ 的变换和矢量一致，但是在非真转动下，$\boldsymbol{\Theta}$ 的变换比矢量多一个负号。以上说明矢量叉乘的结果并不遵守矢量的定义 (3.2)，但是有类似性，这自然引出了下面的张量在空间反射和倒反下的性质。

空间反射和倒反 — 从 $\boldsymbol{\Theta}$ 的分析可以看出，前述基于空间旋转操作定义的张量并不能完全描述三维空间中所有张量，因此需要单独讨论张量在空间反射和倒反下的行为。空间倒反 $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=-\boldsymbol{r}$ 对应 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}_{ij}=-\delta_{ij}$，公式 (3.2) 定义的矢量会改变符号，但是公式 (3.10) 说明矢量叉乘积不会改变符号。这导致我们必须区分在一般转动情况下的两种不同类型的矢量：

- *Polar vectors or just vectors*：遵循 $\boldsymbol{v}'=\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v}$，而且在空间倒反下

$$\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}'=-\boldsymbol{v}. \tag{3.11}$$

- *Axial vectors or pseudovectors*：遵循 $\boldsymbol{v}'=[\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})]\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{v}$，而且在空间倒反下

$$\boldsymbol{v}\to\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}. \tag{3.12}$$

基于叉乘的定义，并结合公式 (3.2) 和公式 (3.10)，我们不难证明

$$\begin{gathered}
\text{(polar vector)}\times\text{(polar vector)} = \text{axial vector},\\
\text{(polar vector)}\times\text{(axial vector)} = \text{polar vector},\\
\text{(axial vector)}\times\text{(axial vector)} = \text{axial vector}.
\end{gathered}$$

举例来说，坐标 $\boldsymbol{r}$、动量 $\boldsymbol{p}$ 和力 $\boldsymbol{F}$ 是矢量，从而角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 和力矩 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$ 均是赝矢量。为了说明它们之间的区别，我们在图 (2) 中展示了镜面对称操作下该过程。图 (2) 的操作对应的

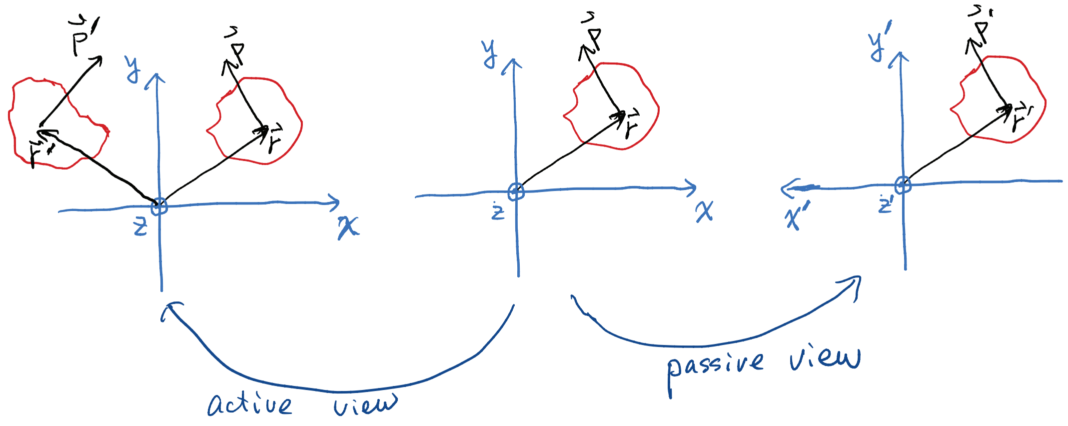

Figure 2. 镜面对称下角动量的主动和被动观点。

$\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}[-1,+1,+1]$，那么矢量的变换是 x 分量变符号，而其他分量不变，但是赝矢量是 x 分量不变符号，而其他分量改变符号。

从上图的分析可以看出，矢量和赝矢量之间的运算结果会有着不同的空间对称性，因此我们需要重新去审视点乘。假如我们将 $\boldsymbol{\Theta}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 和矢量 $\boldsymbol{c}$ 点乘

$$\boldsymbol{\Theta}'\cdot\boldsymbol{c}'=[\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})]A_{kj}\boldsymbol{\Theta}_jA_{ki}\boldsymbol{c}_i=[\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})]\boldsymbol{\Theta}_j\boldsymbol{c}_i\delta_{ij}=[\det(\overleftrightarrow{\boldsymbol{A}})]\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{c}. \tag{3.13}$$

这说明 $\boldsymbol{\Theta}\cdot\boldsymbol{c}$ 并不遵循标量的定义，因此我们同样需要对标量做下述区分：

- *Scalars:*：在空间倒反下 $f'(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r})$。
- *Pseudoscalars*：在空间倒反下 $f'(\boldsymbol{r})=-f(\boldsymbol{r})$。

类似可以得到下述点乘的性质：

$$\begin{aligned}
\text{(polar vector)}\cdot\text{(polar vector)}&=\text{scalar},\\
\text{(polar vector)}\cdot\text{(axial vector)}&=\text{pseudoscalar},\\
\text{(axial vector)}\cdot\text{(axial vector)}&=\text{scalar}.
\end{aligned}$$

更进一步，由于 N 阶张量可以通过低阶张量并矢运算得到，因此同样需要做区分 N 阶张量。在空间倒反下，如果 N 阶张量的变换前的因子是 $(-1)^N$ 的话，则称之为张量 (a true tensor or just a tensor)；如果变换因子是 $(-1)^{N+1}$ 的话，则称之为赝张量 (a pseudotensor)。关于矢量和赝矢量在复杂运算下的变换性质，比如说并矢、双点积、多重矢积等等，请大家自行推导。

前述的关于物理量在空间操作下的分类和性质是普适的，它们约束了物理方程的形式。首先，物理方程的两边张量的阶数需要一致，也就是说标量等于标量，矢量等于矢量。这可以说是空间真转动操作所要求的。其次，物理方程在非真转动下也需要保持不变，即 (赝) 张量需要等于 (赝) 张量。在经典物理中，上述约束总是成立的，大家可以自行验证。换言之，这可以说是对称性带来的对物理方程的基本要求，在人们试图猜测某些方程形式或者在物理量中添加新项时，该对称性要求是一定需要被检查的。

物理量/算符	空间旋转 (rank of tensor)	空间倒反 (name)	时间反演
∇	1	Odd (vector)	Even
$\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$	0	Even (scalar)	Odd
坐标 $\boldsymbol{r}$	1	Odd (vector)	Even
动量 $\boldsymbol{p}$	1	Odd (vector)	Odd
角动量 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$	1	Even (pseudovector)	Odd
力 $\boldsymbol{F}$	1	Odd (vector)	Even
力矩 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$	1	Even (pseudovector)	Even
能量 E	0	Even (scalar)	Even
电荷密度 ρ	0	Even (scalar)	Even
电流密度 $\boldsymbol{j}$	1	Odd (vector)	Odd
电场相关：$\boldsymbol{E},\boldsymbol{P},\boldsymbol{D}$	1	Odd (vector)	Even
磁场相关：$\boldsymbol{B},\boldsymbol{M},\boldsymbol{H}$	1	Even (pseudovector)	Odd
坡印亭矢量 $\boldsymbol{S}$	1	Odd (vector)	Odd
麦克斯韦应力张量 $\overleftrightarrow{\boldsymbol{T}}$	2	Even (tensor)	Even

Table I. 不同的物理量在旋转操作、空间倒反和时间反演操作下的性质。

值得指出的是，这里所说的对称性要求只是说物理规律或者说方程形式不变，区别于物理量本身在对称性下是否不变。如果被考察的物理系统本身拥有其他对称性，比如说二维正方晶格具有的 C_{4v} 对称性，那么该对称性要求物理量，比如说电磁场，在这个特定群定义的操作下不变。详细的内容请参考群论的相关内容。

截止到这里，所有的分析只是空间对称性对物理规律的约束，然而物理领域中大多数的方程均是运动方程，比如麦克斯韦方程就是电磁场的运动方程，因此这要求我们分析时间自由度在物理方程中的角色。

时间反演 — 时间维度是物理领域最为重要的概念之一。从自由度上说，时间只有一个维度，但是我们却不能直接套用一维空间的办法来处理时间维度。这一方面是由于物理体系运动方程的时间和空间依赖性并不是对称的，另一方面是因为真实的物理系统并不存在时间轴上的反射。因此，我们需要单独考虑物理方程在时间轴上的反演，即 $t\to t'=-t$。

基础物理规律的形式 (至少在经典层面) 是不依赖于时间方向的选取，或者说在时间反演下物理方程是不变的。这和前述的空间对称性类似，同时这也要求物理量在时间反演下必须满足特定的自洽关系才能保证方程的形式不变。举例来说，下述的牛顿方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=-\nabla U(\boldsymbol{r}). \tag{3.14}$$

如果在时间反演下，$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}$ 且 $\boldsymbol{p}\to\boldsymbol{p}'=-\boldsymbol{p}$，那么上面的牛顿方程保持不变。动量在时间反演下会变号是符合直觉的，因此速度是位置的时间求导。上述牛顿方程的时间反演不变性说明：给定一个多粒子系统的初态，让其在各种作用力下含时演化达到末态，如果此时我们对该末态做时间反演，即位置 $\boldsymbol{r}$ 不变但速度 $\boldsymbol{v}$ 改变符号，那么该系统会经历相反的时间路径回到系统时间反演的初态。类似的结论对于

波动方程同样适用，并已得到了广泛的实验证实。

根据上面的结论，可以很自然地得到角动量 $\boldsymbol{L}$ 在时间反演下是改变符号的 (标记为 TRS-odd)，而力 $\boldsymbol{F}$ 和力矩 $\boldsymbol{\tau}$ 在时间反演下都是不改变符号的 (标记为 TRS-even)。截止这里，我们已经完整回顾了物理方程在时空操作下的不变性，下面将之运用到麦克斯韦方程从而分析电磁场相关物理量的性质。

时空对称性角度分析麦克斯韦方程组 — 我们从电荷密度 ρ 出发。电荷的基本单位 e 是标量，这被实验多次证实，因此电荷密度 ρ 是标量且 TRS-even。根据电荷守恒定律，可以知道电流密度 $\boldsymbol{j}$ 是矢量且 TRS-odd。按照库伦定律，电场是矢量且 TRS-even。按照安培定律和法拉第定律，磁场是赝矢量且 TRS-odd。

下面我们从时空对称性的角度来理解麦克斯韦方程组。由于运动方程两边的张量的时空变化性质需要一致，所以我们需要列举所有的可能，如下所示

$$
\begin{aligned}
\text{scalar:}\quad & \rho, \nabla\cdot\boldsymbol{E} \\
\text{pseudoscalar:}\quad & \nabla\cdot\boldsymbol{B} \\
\text{vector:}\quad & \boldsymbol{j}, \boldsymbol{E}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \nabla\times\boldsymbol{B} \\
\text{pseudovector:}\quad & \boldsymbol{B}, \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \nabla\times\boldsymbol{E}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{TRS-even:}\quad & \rho, \boldsymbol{E}, \nabla\cdot\boldsymbol{E}, \nabla\times\boldsymbol{E}, \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\text{TRS-odd:}\quad & \boldsymbol{j}, \boldsymbol{B}, \nabla\cdot\boldsymbol{B}, \nabla\times\boldsymbol{B}, \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}
$$

这里我们只写下了 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的线性项和相应的一阶导数项，前者是因为实验上发现电磁场是满足线性叠加原理的，后者是因为多数物理系统的运动方程都含有一阶导数项而且亥姆霍兹定理只需要矢量场的散度与旋度。根据前述的时空变换对运动方程的约束关系，我们可以写下

$$
\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = a_1 \nabla\times\boldsymbol{B} + a_3 \boldsymbol{j}, \tag{3.15}
$$

$$
\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = a_2 \nabla\times\boldsymbol{E}. \tag{3.16}
$$

根据亥姆霍兹定理，我们同样需要散度方程

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{E} = a_4 \rho, \tag{3.17}
$$

$$
\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0, \tag{3.18}
$$

其中 $a_{1,2,3,4}$ 是常数，或者说是标量且 TRS-even。这里值得注意的是磁场的散度方程需要等于一个赝标量且 TRS-odd，这在我们目前学到的知识中并没有这样的量。不过作为理论，可以假定存在这样的量，然后去探索物理的后果，这个量就是磁单极或者叫磁荷。由于目前实验上并没有找到磁单极的存在，因此我们这里磁场的散度只能是零。

上面四条公式已经形式上给出了麦克斯韦方程组。关于电磁场相关物理量的时空对称性总结在了表格 I 中，请大家自行分析其他熟知的物理量。上述的推导充分说明了时空对称性对于物理方程的约束是可以预测方程或者物理量中可以存在哪些项的，这对于大家后续的研究和学习很有帮助。