MBA USP ESALQ

SUPERVISED MACHINE LEARNING: MODELOS LOGÍSTICOS BINÁRIOS E MULTINOMIAIS

Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero

*A responsabilidade pela idoneidade, originalidade e licitude dos conteúdos didáticos apresentados é do professor.

MODELOS LOGÍSTICOS

Fundamentação teórica e conceitos

Especificação do modelo e funções de ligação canônica

Modelos logísticos binários e multinomiais

Estimação dos parâmetros por máxima verossimilhança

Cutoff, sensitividade, especificidade, curva ROC e índice GINI

Estimações em R

Modelos Lineares Generalizados (GLM)

$$\eta_i = \alpha + \beta_1 . X_{1i} + \beta_2 . X_{2i} + \ldots \beta_k . X_{ki}$$

Modelos lineares generalizados, características da variável dependente e funções de ligação canônica.

Modelo de Regressão	Característica da Variável Dependente	Distribuição	Função de Ligação Canônica (η)
Linear	Quantitativa	Normal	$\hat{Y}$
Com Transformação de Box-Cox	Quantitativa	Normal Após a Transformação	$\frac{\hat{Y}^{\lambda} - 1}{\lambda}$
Logística Binária	Qualitativa com 2 Categorias (*Dummy*)	Bernoulli	$\ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$
Logística Multinomial	Qualitativa *M* (*M* > 2) Categorias	Binomial	$\ln\left(\frac{p_m}{1-p_m}\right)$
Poisson	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson	$\ln(\lambda_{poisson})$
Binomial Negativo	Quantitativa com Valores Inteiros e Não Negativos (Dados de Contagem)	Poisson-Gama	$\ln(\lambda_{bneg})$

Regressão Logística

Binária

Regressão Logística Binária

- Técnica supervisionada de machine learning utilizada para explicar ou predizer a probabilidade de ocorrência de determinado evento em função de uma ou mais variáveis explicativas.

- **Variável dependente**: binária.
→ Resultados interpretados em termos de probabilidades.

- **Variáveis preditoras *X***: métricas ou não métricas.

Objetivos da Técnica

- **Atribuição de Probabilidades:**
  Estimar a probabilidade de ocorrência de determinando evento ou de que uma observação venha a se enquadrar nessa ou naquela categoria.

- **Classificação em categorias:**
  Classificar indivíduos ou observações em categorias específicas.

Conceitos:

Probabilidade

Chance (*odds*)

Logito

- **Conceito de Probabilidade**

  Seja *Y* a resposta a um estímulo (sim ou não) - pode ser a preferência por um produto, adimplência, aprovação em um curso, etc.

- ***p***: probabilidade da resposta "sim".

- **1 – *p***: probabilidade da resposta "não".

Conceito de Chance (*Odds*)

- **Chance (*odds*) de ocorrência de um evento:**

$$chance = \frac{p}{1-p}$$

(Evento)

(Não Evento)

Exemplos: se p = 0,50; chance = 1 (1 para 1)
se p = 0,75; chance = 3 (3 para 1)
se p = 0,25; chance = ⅓ (1 para 3)

Conceito de Logito

- **Logito: logaritmo natural da chance de ocorrência de uma resposta do tipo "sim".**

E, a partir do logito, define-se a expressão da probabilidade de ocorrência do evento em estudo, em função das variáveis explicativas.

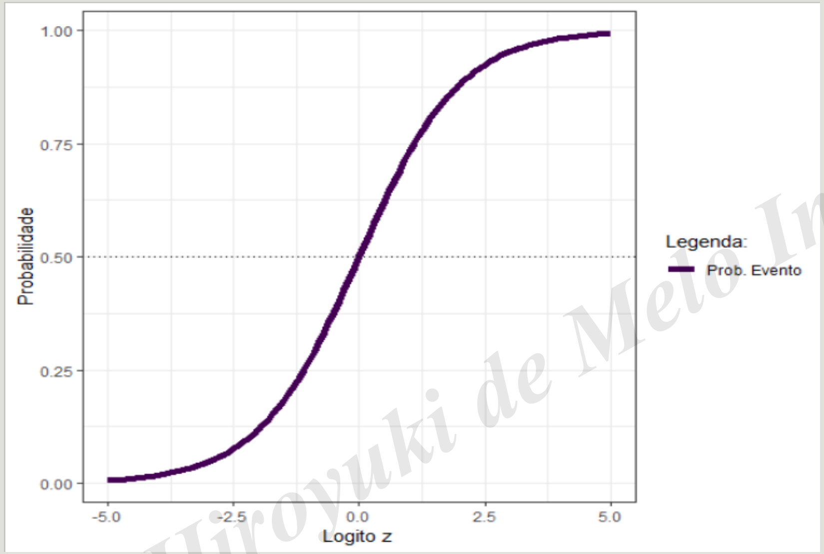
Vetor com variáveis explicativas

$$logito = Z = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right)$$

$$e^{logito} = e^{Z} = \frac{p}{1-p} = odds$$

$$p = \frac{e^{Z}}{1+e^{Z}} = \frac{1}{1+e^{-Z}}$$

O Modelo de Regressão Logística Binária



A curva logística, ou sigmóide, descreve a relação entre a probabilidade associada à ocorrência de determinando evento e um conjunto de variáveis preditoras.

A função logística assume valores entre 0 e 1 para qualquer Z entre $-\infty$ e $+\infty$

$$p_i = \frac{1}{1+e^{-Z_i}} = \frac{1}{1+e^{-(\alpha+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\dots\dots+\beta_k X_{ki})}}$$

Função Logística

$$p_i = \frac{1}{1+e^{-Z_i}} = \frac{1}{1+e^{-(\alpha+\beta_1 X_{1i}+\beta_2 X_{2i}+\dots\dots+\beta_k X_{ki})}}$$

- Definida para que se estabeleça a probabilidade de ocorrência de determinado evento e a importância das variáveis explicativas para esta ocorrência.

- **Estimação dos parâmetros:** processo iterativo para maximizar o acerto da probabilidade de ocorrência de um evento à sua real ocorrência (**Método de Máxima Verossimilhança**).

- Os **resultados** atribuíveis à variável dependente estarão entre 0 e 1.

- **Análise do ajuste do modelo:** testes de significância dos parâmetros e tabela de classificação (matriz de confusão).


EXCEL
R

Regressão Logística Multinomial

Regressão Logística Multinomial

- Variável dependente se apresenta na forma **qualitativa com mais de duas categorias**.
- Por exemplo, para três possíveis respostas (*labels* 0, 1 ou 2, por exemplo), e sendo 0 a categoria de referência escolhida, teremos duas outras possibilidades de evento em relação a esta categoria (1 ou 2).
- Dessa forma, são definidos dois vetores de variáveis explicativas, com os respectivos parâmetros estimados (dois logitos):

$$Z_{1i} = \alpha_1 + \beta_{11} X_{1i} + \ldots + \beta_{k1} X_{ki}$$
$$Z_{2i} = \alpha_2 + \beta_{12} X_{1i} + \ldots + \beta_{k2} X_{ki}$$

- Logo, **número de logitos estimados será (*M* – 1)**, sendo *M* o número de categorias de *Y*.

Funções Logísticas Multinomiais

- Sendo $p_i = \dfrac{e^{Z_i}}{1 + e^{Z_i}}$ a **probabilidade de ocorrência do evento, temos que**:

- **Probabilidade de ocorrência da categoria 0 (referência):** $P_{i_0} = \dfrac{1}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$

- **Probabilidade de ocorrência da categoria 1:** $P_{i_1} = \dfrac{e^{Z_{1i}}}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$

- **Probabilidade de ocorrência da categoria 2:** $P_{i_2} = \dfrac{e^{Z_{2i}}}{1 + e^{Z_{1i}} + e^{Z_{2i}}}$

Interpretação e Eficiência Global do Modelo Multinomial

- Como na regressão logística binária, deve-se avaliar o resultado do **teste** χ^2 para o modelo de regressão logística multinomial, bem como os resultados dos **testes *z*** para os parâmetros estimados das variáveis preditoras.

- **Interpretação:** os parâmetros das variáveis devem ser analisados em relação à categoria de referência da variável dependente.

- **Eficiência do modelo:** a classificação das observações deve ser realizada a partir da maior probabilidade estimada para cada observação (aqui, ao contrário da regressão logística binária, não faz sentido a definição de um *cutoff*).


EXCEL
R

MUITO OBRIGADO!

Prof. Dr. Luiz Paulo Fávero