1. Úlohy na absolutní a relativní chybu výpočtu

c) Určete výkon $P = U{\cdot}I$ a elektrický odpor $R = \frac{U}{I}$ topné spirály, jestliže bylo naměřeno napětí $U = (230 \pm 5)\ V$ a elektrický proud $I = (5 \pm 0,4)\ A$. V obou případech určete také relativní chybu.

Výkon P [W]

$$P = U{\cdot}I + \epsilon(P) = U{\cdot}I \pm (|U|{\cdot}\epsilon(I) + |I|{\cdot}\epsilon(U))$$

$$\begin{aligned} P &= 230 \cdot 5 \pm (|230|{\cdot}0,4 + |5|{\cdot}5) \\ &= 1150 \pm (92 + 25) \\ &= \underline{\underline{1150 \pm 117\ W}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon(U) &= 5\ V \\ \epsilon(I) &= 0,4\ A \\ \delta U &= \tfrac{5}{230} \cdot 100 = 2,17\ \% \\ \delta I &= \tfrac{0,4}{5} \cdot 100 = 8\ \% \end{aligned}$$

Relativní chyba výkonu P

$$\begin{aligned} \delta P &= \tfrac{\epsilon(P)}{P} \cdot 100 \\ &= \tfrac{117}{1150} \cdot 100 \\ &= \underline{\underline{10,17\ \%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta P &= \delta U + \delta I \\ &= 2,17 + 8 \\ &= \underline{\underline{10,17\ \%}} \end{aligned}$$

Elektrický odpor R [Ω]

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{U}{I} + \epsilon(R) = \tfrac{U}{I} \pm \left(\tfrac{\epsilon(U)}{|I|} + \tfrac{|U|}{I^2}{\cdot}\epsilon(I)\right) \\ &= \tfrac{U}{I} \pm \tfrac{|I|{\cdot}\epsilon(U) + |U|{\cdot}\epsilon(I)}{I^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R &= \tfrac{230}{5} \pm \tfrac{|5|{\cdot}5 + |230|{\cdot}0,4}{5^2} \\ &= 46 \pm \tfrac{25 + 92}{25} = 46 \pm \tfrac{117}{25} \\ &= \underline{\underline{46 \pm 4,68\ \Omega}} \end{aligned}$$

Relativní chyba odporu R

$$\begin{aligned} \delta R &= \tfrac{\epsilon(R)}{R} \cdot 100 \\ &= \tfrac{4,68}{46} \cdot 100 \\ &= \underline{\underline{10,17\ \%}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta R &= \delta U + \delta I \\ &= 2,17 + 8 \\ &= \underline{\underline{10,17\ \%}} \end{aligned}$$

2. Pomocí Gaussovy eliminační metody a Gaussovy eliminační metody s částečnou pivotací řešte soustavy lineárních algebraických rovnic

$$a)\ \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & -13 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Jsou použity funkce z `N:\UKAZKY\Prazak\NUMA\B_cviceni\cv02\matlab`.

Zadání matice A:

```
>> A = [[1, -1, -1, 2, 6]; [0, 4, 4, -1, -13]; [2, 2, 1, -3, -6]; [1, 0, -2, 1, 4]]

A =

     1    -1    -1     2     6
     0     4     4    -1   -13
     2     2     1    -3    -6
     1     0    -2     1     4
```

$$A = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & -1 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -1 & -13 \\ 2 & 2 & 1 & -3 & -6 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

Čtvercová matice U:

```
>> U = A(1:4, 1:4)

U =

     1    -1    -1     2
     0     4     4    -1
     2     2     1    -3
     1     0    -2     1
```

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran:

```
>> y = A(1:4, 5)

y =

     6
   -13
    -6
     4
```

$$y = \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2.1 Eliminace GEM

```
>> [U1, y1] = eliminace1(U, y)

U1 =

    1.0000   -1.0000   -1.0000    2.0000
         0    4.0000    4.0000   -1.0000
         0         0   -1.0000   -6.0000
         0         0         0   11.2500
```

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 11,25 \end{pmatrix}$$

```
y1 =

    6.0000
  -13.0000
   -5.0000
   11.2500
```

$$y_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -13 \\ -5 \\ 11,25 \end{pmatrix}$$

Zpětné dosazení:

```
>> [x1] = back(U1, y1)

x1 =

     1
    -2
    -1
     1
```

$$\overline{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.2 Eliminace GEM s částečnou pivotací

```
>> [U2, y2] = eliminace2(U, y)

U2 =

    2.0000    2.0000    1.0000   -3.0000
         0    4.0000    4.0000   -1.0000
         0         0   -1.5000    2.2500
         0         0         0    3.7500
```

$$U_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1,5 & 2,25 \\ 0 & 0 & 0 & 3,75 \end{pmatrix}$$

```
y2 =

   -6.0000
  -13.0000
    3.7500
    3.7500
```

$$y_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ -13 \\ 3,75 \\ 3,75 \end{pmatrix}$$

Zpětné dosazení:

```
>> [x2] = back(U2, y2)

x2 =

     1
    -2
    -1
     1
```

$$\overline{x_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Pomocí Jacobiovy nebo Gauss-Seidelovou metodou řešte soustavy lineárních algebraických rovnic. Ověřujte podmínky konvergence a soustavu případně upravte tak, aby byla použitá metoda konvergentní.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & -2 \\ 9 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & -8 \end{array}\right)$

Jsou použity funkce z `N:\UKAZKY\Prazak\NUMA\B_cviceni\cv04\matlab`.

Zadání matice A:

```
>> A = [[1, 5, 7, -2]; [9, 5, 3, 2]; [2, 7, 4, -8]]

A =

     1     5     7    -2
     9     5     3     2
     2     7     4    -8
```

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & -2 \\ 9 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

Byla zvolena Gauss-Seidelova metoda. Čtvercová matice U je regulární, nesymetrická, v tomto tvaru není diagonálně dominantní. Záměnou řádků 1 a 2 a následnou záměnou řádků 2 a 3 původní matice A se matice U stává ostře řádkově diagonálně dominantní. Tato vlastnost je postačující pro splnění podmínek konvergence iterační metody.

```
>> A([ 1 2 ], :) = A([ 2 1 ], :)
>> A([ 2 3 ], :) = A([ 3 2 ], :)

A =

     9     5     3     2
     2     7     4    -8
     1     5     7    -2
```

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & -8 \\ 1 & 5 & 7 & -2 \end{array}\right)$$

Čtvercová matice:

```
>> U = A([1:3],[1:3])

U =

     9     5     3
     2     7     4
     1     5     7
```

$$U = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Vektor pravých stran:

```
>> b = A([1:3], 4)

b =

     2
    -8
    -2
```

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Použití Gauss-Seidelovy iterační metody s maximálním počtem 50 iterací a prázdným počátečním výsledkem:

```
>> x0 = zeros(3, 1)
>> x = gauss_seidel(U, b, x0, 50)


x =

     1
    -2
     1
```

$$\overline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. Použijte *LU* rozklad matice a nalezněte determinant matice i matici inverzní.

$c)\begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

Jsou použity funkce z `N:\UKAZKY\Prazak\NUMA\B_cviceni\cv03\matlab\LU`.

Zadání matice A:

```
>> A = [[-8, 1, -2]; [2, -6, -1]; [-3, -1, 7]]


A =

    -8     1    -2
     2    -6    -1
    -3    -1     7
```

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Provedení LU rozkladu matice A:

```
>> [L, U] = LU_rozklad(A)


L =

    1.0000         0         0
   -0.2500    1.0000         0
    0.3750    0.2391    1.0000

U =

   -8.0000    1.0000   -2.0000
         0   -5.7500   -1.5000
         0         0    8.1087
```

$$A_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0,25 & 1 & 0 \\ 0,375 & 0,2391 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_U = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 0 & -5,75 & -1,5 \\ 0 & 0 & 8,1087 \end{pmatrix}$$

Výpočet determinantu matice A:

```
>> detA = determinant(A)


detA =

  373.0000
```

$$\det\ A = \begin{vmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 0 & -5,75 & -1,5 \\ 0 & 0 & 8,1087 \end{vmatrix} = 373$$

Inverze matice A:

```
>> invA = inv(A)


invA =

   -0.1153   -0.0134   -0.0349
   -0.0295   -0.1662   -0.0322
   -0.0536   -0.0295    0.1233
```

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -0,1153 & -0,0134 & -0,0349 \\ -0,0295 & -0,1662 & -0,0322 \\ -0,0536 & -0,0295 & 0,1233 \end{pmatrix}$$