**1. Řešte úlohy týkající se interpolace.**

Zvoleno zadání a) Napište Lagrangerův interpolační polynom $L(x)$, který interpoluje hodnoty

| $x$ | 1,2 | 1,8 | 2,5 |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 2,847 | 1,680 | 0,039 |

a použijte ho pro odhad $f(1,5)$ a $f(2,0)$.

Lagrangerova metoda konstrukce interpolačního polynomu sestává z dílčích konstrukcí fundamentálních polynomů $n$-tého stupně $l_i(x), i = 0, \dots, n$, pro které platí

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Kořeny každého takového fundamentálního polynomu $l_i(x)$ jsou pak $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$, tedy platí

$$l_i(x) = C_i \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n), \tag{1}$$

přičemž podmínka $l_i(x_i) = 1$ bude splněna, pokud

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n-1})(x_i - x_n)}. \tag{2}$$

Potom je fundamentální polynom $l_i(x)$

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_{n-1})(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x_i - x_{n-1})(x_i - x_n)}. \tag{3}$$

Tento polynom nabývá nulové hodnoty ve všech uzlech, kromě jediného, ve kterém nabývá hodnoty 1. Celková hodnota lineární kombinace fundamentálních polynomů v $i$-tém uzlu je určena pouze odpovídajícím $i$-tým fundamentálním polynomem $l_i(x)$, zbylé polynomy výsledek neovlivní. Lagrangerův interpolační polynom $L_n(x)$ má potom tvar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x). \tag{4}$$

## 1.1 Konstrukce Lagrangerova polynomu

Vytvoření odpovídajících fundamentálních polynomů ze zadané tabulky lze realizovat dosazením do rovnice (3):

$$\begin{aligned}
l_0(x) &= \frac{(x - 1,8)(x - 2,5)}{(1,2 - 1,8)(1,2 - 2,5)} = \frac{5}{39} \cdot (10x^2 - 43x + 45) \\
l_1(x) &= \frac{(x - 1,2)(x - 2,5)}{(1,8 - 1,2)(1,8 - 2,5)} = -\frac{50}{21} \cdot (x^2 - 3,7x + 3) \\
l_2(x) &= \frac{(x - 1,2)(x - 1,8)}{(2,5 - 1,2)(2,5 - 1,8)} = \frac{4}{91} \cdot (25x^2 - 75x + 54)
\end{aligned}$$

a jejich následné dosazení do vztahu (4) vede k získání výsledného Lagrangerova polynomu stupně $n = 2$:

$$L_2 = 2,847 \cdot l_0(x) + 1,680 \cdot l_1(x) + 0,039 \cdot l_2(x)$$

$$L_2 = 2,847 \cdot \frac{5 \cdot (10x^2 - 43x + 45)}{39} + 1,680 \cdot \frac{-50 \cdot (x^2 - 3,7x + 3)}{21} + 0,039 \cdot \frac{4 \cdot (25x^2 - 75x + 54)}{91}$$

Hledaný Lagrangerův interpolační polynom je $\underline{\underline{L_2(x) = -0,307143x^2 - 1,02357x + 4,51757}}$.

### 1.2 Odhad podle získaného Lagrangerova polynomu

Výpočet $L_2(x)$ pro zadané hodnoty $f(1,5)$ a $f(2,0)$:

$L_2(1,5) = -0,307143 \cdot (1,5)^2 - 1,02357 \cdot (1,5) + 4,51757 = \underline{\underline{2,29114}}$

$L_2(2,0) = -0,307143 \cdot (2)^2 - 1,02357 \cdot (2) + 4,51757 = \underline{\underline{1,24186}}$

Ověření v prostředí `MATLAB` s využitím funkce `lagrange.m` z `N:\UKAZKY\Prazak\NUMA\B_cviceni\cv05\matlab`:

```
>> x = [ 1.2 1.8 2.5 ];
>> y = [ 2.847 1.680 0.039 ];
>> u = [ 1.5 2.0 ];
>> v = lagrange(x, y, u)

v =
    2.2911    1.2419
```

**2. Řešte úlohy týkající se numerické integrace.**

Zvoleno zadání c) Pomocí lichoběžníkového i Simpsonova pravidla určete aproximaci určitého integrálu

$$\int_0^1 \sqrt{\cos x}\ \mathrm{d}x$$

Použijte $n = 10$ a pro lichoběžníkové pravidlo odhadněte chybu.

Pomocné derivace:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos x}} \cdot (-\sin x) = -\frac{\sin x}{2 \cdot \sqrt{\cos x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\cos x}(\sin x)' - \sin x(\sqrt{\cos x})'}{\cos x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\cos x} \cdot (-\sin x) - \left(\frac{(\cos x)'}{2 \cdot \sqrt{\cos x}}\right)}{\cos x} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\sin x \cdot (-\sin x)}{2 \cdot \sqrt{\cos x}} - (\cos x)^{\frac{3}{2}}}{\cos x} = \frac{\sin^2 x - 2}{4 \cdot \cos^{\frac{3}{2}} x}$$

**2.1 Lichoběžníkové pravidlo**

Lichoběžníkové pravidlo nahrazuje na každém podintervalu $\langle x_{i-1}, x \rangle$ integrand $f(x)$ Lagrangerovým polynomem tak, jak bylo popsáno v příkladě 1. Při $h = x_i - x_{x-1}$ pak pro každý subinterval platí

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{i,1}(x)\ \mathrm{d}x, \tag{1}$$

po patřičné úpravě

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x)\right). \tag{2}$$

Pro celý interval $\langle a, b \rangle$ lze aproximaci vyjádřit ve tvaru

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\ \mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{i,1}(x)\ \mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + 2 \cdot \sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] \tag{4}$$

Obecná chyba takto získané aproximace je rovna

$$R_{i,1}(f) = \frac{f''(\eta)}{2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x - x_i)\ \mathrm{d}x \tag{5}$$

pro určitá $\eta_i \in \langle x_{x-1}, x_i \rangle$. Pro celkový odhad chyby lze použít vztah

$$|\bar{R}_1(f)| \leq n\frac{h^3}{12}\bar{M}_2 = \frac{\bar{M}_2}{12n^2}(b-a)^3. \tag{6}$$

### 2.1.1 Aproximace určitého integrálu lichoběžníkovou metodou

Pro provedení výpočtu je třeba sestavit tabulku uzlů a funkčních hodnot v těchto uzlech. Uvažujeme-li lichoběžníkovou metodu jako ekvidistantní kvadraturní formuli, potom konstantní krok $h = \frac{b-a}{n}$ bude při $n = 10$ na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ $h = \frac{1-0}{10} = 0,1$.

| $i$ | $x_i$ | $f(x) = \sqrt{\cos x}$ | $f(x_i)$ | $f''(x_i)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\sqrt{\cos 0}$ | 1 | $-0,5$ |
| 1 | 0,1 | $\sqrt{\cos 0,1}$ | 0,997499 | $-0,5012599$ |
| 2 | 0,2 | $\sqrt{\cos 0,2}$ | 0,9899831 | $-0,5051615$ |
| 3 | 0,3 | $\sqrt{\cos 0,3}$ | 0,9774132 | $-0,5120885$ |
| 4 | 0,4 | $\sqrt{\cos 0,4}$ | 0,9597192 | $-0,5227481$ |
| 5 | 0,5 | $\sqrt{\cos 0,5}$ | 0,9367938 | $-0,5382926$ |
| 6 | 0,6 | $\sqrt{\cos 0,6}$ | 0,9084798 | $-0,5605419$ |
| 7 | 0,7 | $\sqrt{\cos 0,7}$ | 0,8745526 | $-0,592389$ |
| 8 | 0,8 | $\sqrt{\cos 0,8}$ | 0,8346896 | $-0,63857$ |
| 9 | 0,9 | $\sqrt{\cos 0,9}$ | 0,7884225 | $-0,7072147$ |
| 10 | 1 | $\sqrt{\cos 1}$ | 0,7350526 | $-0,8132473^{*}$ |

Získané výsledky je možné dosadit do vztahu (4):

$$\int_0^1 \sqrt{\cos x}\,\mathrm{d}x \approx \frac{0,1}{2}\left[f(0) + 2\cdot\sum_{i=2}^{9} f(x_i) + f(10)\right]$$

$$= 0,05\cdot[1 + 2\cdot(0,997499 + 0,9899831 + \cdots + 0,8346896 + 0,7884225) + 0,7350526] = \underline{\underline{0,9135079 \pm R_1(f)}}$$

Ověření v prostředí R:

```
> x <- seq(0, 1, 0.1)
> fx <- sqrt(cos(x))
> 0.1/2*(fx[1]+2*sum(fx[c(2:10)])+fx[11])
[1] 0.9135079
```

### 2.1.2 Odhah chyby u lichoběžníkové metody

Odhad chyby dosazením do vztahu (6):

$$R_1(f) = \frac{\max(|f''(x_i)|)}{12\cdot 10^2}(1-0)^3 = \frac{0,8132473}{120} = \underline{\underline{\pm 0,006777061}}$$

Ověření v prostředí R:

```
> M2 <- max(abs(((sin(x))^2-2)/(4*(cos(x))^(3/2))))
> R1 <- (M2/(12*10^2))*(1-0)^3
> R1
[1] 0.0006777061
```

### 2.2 Simpsonovo pravidlo

Simpsonova metoda pracuje s parabolami, spočívá tedy v nahrazení integrandu $f(x)$ v každém svém subintervalu polynomem druhého stupně. K sestavení každého takového polynomu je třeba znát právě tři body. Jako třetí bod je obyčejně použit střed každého subintervalu.

$$\int_i^j f(x)\ \mathrm{d}x \approx \int_i^j L_2(x)\ \mathrm{d}x \tag{1}$$

Při označení $i = s_0$, $\frac{j-i}{2} = s_1$, $j = s_2$ lze získat tvar

$$\int_i^j L_2(x)\ \mathrm{d}x = \int_i^j \left[ f(s_0)\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{(s_0-s_1)(s_0-s_2)} + f(s_1)\frac{(x-s_0)(x-s_2)}{(s_1-s_0)(s_1-s_2)} + f(s_2)\frac{(x-s_0)(x-s_1)}{(s_2-s_0)(s_2-s_1)} \right] \mathrm{d}x \tag{2}$$

A po odpovídajících úpravách při $h = s_1 - s_0$

$$\int_i^j f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(s_0) + 4\cdot f(s_1) + f(s_2)\right] \tag{3}$$

Z uvedeného vztahu vyplývá, že interval $\langle a, b\rangle$ složeného pravidla musí být rozdělen na $2n$ stejných částí s podintervaly definovanými jako $\langle x_{2i-2}, x_{2i}\rangle$ se středem $s_i = x_{2i-1}$ pro $i = 1, \dots, n$, přičemž $h = \frac{b-a}{2n}$.

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} L_{i,2}(x)\ \mathrm{d}x = \frac{h}{3}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right)\right] \tag{4}$$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + f(x_{2n})\right] \tag{5}$$

#### 2.2.1 Aproximace určitého integrálu Simpsonovým pravidlem

Určení kroku $h = \frac{b-a}{2n}$ pro $n = 10$: $h = \frac{1-0}{2\cdot 10} = 0,05$.

| $x_{2i}$ | $f(x_{2i}) = \sqrt{\cos x_{2i}}$ | $x_{2i-1}$ | $f(x_{2i-1}) = \sqrt{\cos x_{2i-1}}$ |
|---|---|---|---|
| $x_0 = 0$ | 1 | $x_1 = 0,05$ | 0,9993749 |
| $x_2 = 0,1$ | 0,9974990 | $x_3 = 0,15$ | 0,9943697 |
| $x_4 = 0,2$ | 0,9899831 | $x_5 = 0,25$ | 0,9843335 |
| $x_6 = 0,3$ | 0.9774132 | $x_7 = 0,35$ | 0,9692124 |
| $x_8 = 0,4$ | 0,9597192 | $x_9 = 0,45$ | 0,9489189 |
| $x_{10} = 0,5$ | 0,9367938 | $x_{11} = 0,55$ | 0,9233225 |
| $x_{12} = 0,6$ | 0,9084798 | $x_{13} = 0,65$ | 0,8922353 |
| $x_{14} = 0,7$ | 0,8745526 | $x_{15} = 0,75$ | 0,8553881 |
| $x_{16} = 0,8$ | 0,8346896 | $x_{17} = 0,85$ | 0,8123935 |
| $x_{18} = 0,9$ | 0,7884225 | $x_{19} = 0,95$ | 0,7626815 |
| $x_{20} = 1$ | 0,7350526 | | |

Po dosazení hodnot do vztahu (5):

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{0,05}{3}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{9} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{10} f(x_{2i-1}) + 0,7350526\right]$$

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x \approx \frac{0,05}{3}\left[1 + 2\cdot 8,267553 + 4\cdot 9,14223 + 0,7350526\right] = \underline{\underline{0,9139847}}$$

Ověření v prostředí R:

```
> x <- seq(0, 1, 0.05)
> fx <- sqrt(cos(x))
> (0.05/3)*(fx[1]+2*sum(fx[seq(3,19,2)])+4*sum(fx[seq(2,20,2)])+fx[21])
[1] 0.9139847
```

**3. Metodou nejmenších čtverců hledejte aproximační polynomy pro určené stupně.**

Zvoleno zadání a) $n = 2$

| $x$ | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 0,837 | 0,192 | -0,950 | -1,095 | 1,344 |

Hledaný polynom bude ve tvaru $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ a odpovídajcí systém normálních rovnic v zápisu skalárního součinu

$$\begin{aligned} (y,1) &= a_0(1,1) &+ a_1(x,1) &+ a_2(x^2,1) \\ (y,x) &= a_0(1,x) &+ a_1(x,x) &+ a_2(x^2,x) \\ (y,x^2) &= a_0(1,x^2) &+ a_1(x,x^2) &+ a_2(x^2,x^2) \end{aligned} \tag{1}$$

bude nabývat hodnot z tabulky:

$$\begin{aligned} (y,1) &= 0,837 + 0,192 - 0,950 - 1,095 + 1,344 &= 0,328 \\ (y,x) &= 0,837 + 0,288 - 1,9 - 2,7375 + 4,032 &= 0,5195 \\ (y,x^2) &= 0,837 + 0,432 - 3,8 - 6,84375 + 12,096 &= 2,72125 \\ (1,1) &= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 &= 5 \\ (x,1) &= (1,x) = 1 + 1,5 + 2 + 2,5 + 3 &= 10 \\ (x^2,1) &= (1,x^2) = (x,x) = 1 + 2,25 + 4 + 6,25 + 9 &= 22,5 \\ (x,x^2) &= (x^2,x) = 1 + 3,375 + 8 + 15,625 + 27 &= 55 \\ (x^2,x^2) &= 1 + 5,0625 + 16 + 39,0625 + 81 &= 142,125 \end{aligned}$$

Výsledná soustava normálních rovnic tedy bude mít po dosazení do (1) následující podobu:

$$\begin{aligned} 0,328 &= a_0 \cdot 5 &+ a_1 \cdot 10 &+ a_2 \cdot 22,5 \\ 0,5195 &= a_0 \cdot 10 &+ a_1 \cdot 22,5 &+ a_2 \cdot 55 \\ 2,72125 &= a_0 \cdot 22,5 &+ a_1 \cdot 55 &+ a_2 \cdot 142,125 \end{aligned} \tag{2}$$

Soustavu lienárních algebraických rovnic (2) lze vyřešit například užitím Cramerova pravidla. Uvažujme následující funkci v prostředí MATLAB, která realizuje výpočet neznámých podle Cramerova pravidla a pracuje s předanou maticí $A$ a sloupcovým vektorem pravých stran $b$.

```
function x = cramerSolve(A, b)
[m n] = size(b);
v = zeros(m,1);
Ai = A;

for k=1:m
    Ai(:,k) = b;
    v(k) = det(Ai);
    Ai(:,k) = A(:,k);
end

detA = det(A);
x = v / detA;
```

A její následné zavolání s odpovídajícími argumenty:

```
>> A = [ 5 10 22.5; 10 22.5 55; 22.5 55 142.125 ]
>> b = [ 0.328 0.5195 2.72125 ]'
>> a = cramerSolve(A, b)
a =

    7.3398
   -8.2432
    2.0471
```

Hledaný polynom je tedy $\underline{\underline{P_2 = 7,3398 - 8,2432x + 2,0471x^2}}$.

Ověření funkcí `polynomFit2.m` z `N:\UKAZKY\Prazak\NUMA\B_cviceni\cv06\matlab`:

```
>> x = [ 1 1.5 2 2.5 3 ];
>> y = [ 0.837 0.192 -0.95 -1.095 1.344 ];
>> ap = PolynomFit2(x, y, 2)
ap =

    7.3398
   -8.2432
    2.0471
```