선형대수학팀

3팀
이재현
김규범
김민지
이정우
조혜현

INDEX

1

선형대수의 기하학적 접근

노름(Norms)

노름(Norms)

벡터의 **"크기"**

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

노름(Norms)

노름의 종류 중 하나!

노름(Norms)

벡터의 "크기"

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

노름의 공식

$$L_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

p는 노름의 **차수**

ex. p가 1이면 L1 Norm, p가 2이면 L2 Norm

노름의 종류

맨허튼 노름(Manhattan Norm)

$$L_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$

좌표평면에서 각 좌표축을 따라 움직이는 거리

유클리드 노름(Euclidean Norm)

$$L_2 = \sqrt[2]{|x_1|^2 + +|x_2|^2 \ldots + |x_n|^2}$$

원점에서 X라는 벡터에 연결된 직선 거리

내적(Inner Products)

내적(Inner Products)

각 성분끼리의 곱의 합

$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n)$, $y = (y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n)$ 일 때,

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

내적(Inner Products)

각 성분끼리의 곱의 합

$x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_n),\ y = (y_1,\ y_2,\ \cdots\ y_n)$ 일 때,

$$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

두 벡터의 내적을

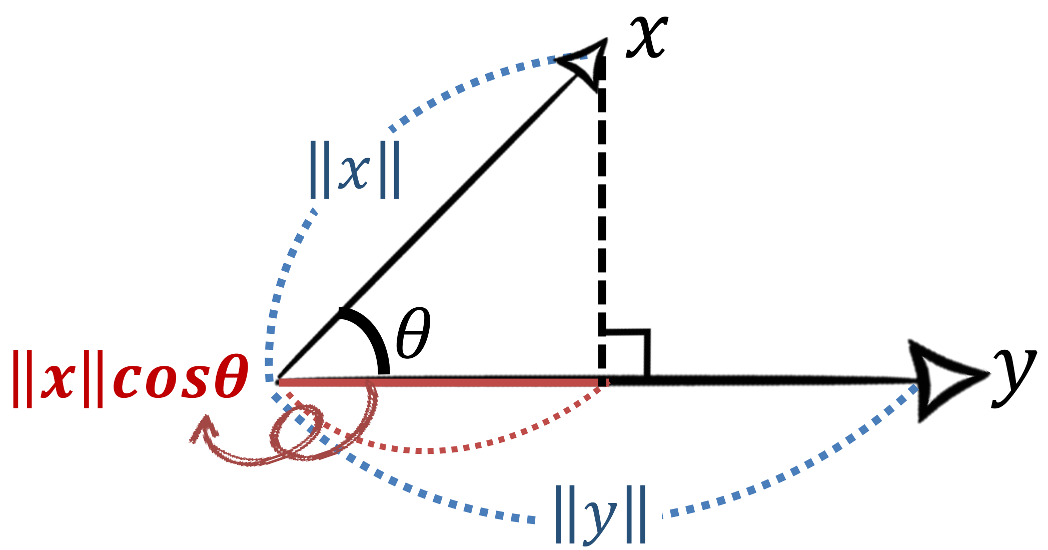
행렬의 곱연산으로 나타낼 수 있음

$$x \cdot y = x^T y$$

크기가 같은
두 벡터 중
앞 벡터를
Transpose!

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_yy_n$$

내적의 기하학적 해석

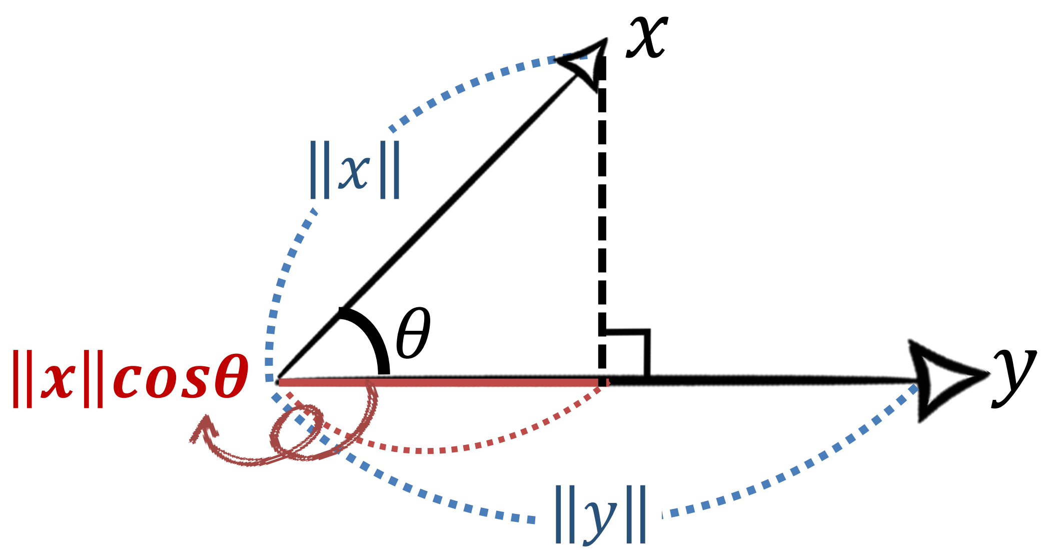


벡터 X를 벡터 Y에 투영시켰을 때의 크기

×

벡터 Y의 크기

내적의 기하학적 해석



$$x \cdot y = \|x\|\|y\|cos\theta$$

각도(Angle)

각도(Angle)

두 벡터 사이 각도

두 벡터가 어떤 모양을 가지고 있는지 아는게 필수적

$$cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|} \leftrightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}\right)$$

$x \cdot y$, $\|x\|$, $\|y\|$ 은 벡터의 성분을 알고 있으면 구할 수 있음

직교성(Orthogonality)

직교(Orthogonal)

두 벡터 사이의 각도가 **90°(직각)**

$$cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$$에서 $\theta = 90°$이면

$$" \boldsymbol{x \cdot y = 0} "$$

직교성(Orthogonality)

정규직교(Orthonormal)

직교(Orthogonal)

두 벡터 사이의 각도가 90°(직각)

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{0}$$

&

$\cos\theta = \dfrac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$ 에서 $\theta = 90$이면

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = \mathbf{1}$$

$$\text{“}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\text{”}$$

직교성(Orthogonality)

직교행렬(Orthogonal Matrix)

"$\mathbf{AA^T = A^TA = I}$", "$\mathbf{A^T = A^{-1}}$"를 만족하는 **정사각행렬**

열벡터들이 **정규직교**

직교행렬을 이용한 선형 변환은

input vector x의 크기가 변하지 않음

직교성(Orthogonality)

직교행렬(Orthogonal Matrix)

“$AA^T = A^T A = I$” ($A^T = A^{-1}$)를 만족하는 정방행렬

열벡터들이 정규직교

$$\|Ax\|^2 = (Ax)^T(Ax) = x^T A^T A x$$

$$= x^T I x = x^T x = \|x\|^2$$

직교행렬을 이용한 선형 변환은

input vector x의 크기가 변하지 않음

집합의 직교성

두 벡터의 직교성을 집합에 일반화

즉, 벡터들의 집합 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$에서 각 x_i가 서로 직교하는 집합

직교집합(Orthogonal Set)

$x_i \cdot x_j = 0$,

where $i \neq j$

정규직교집합(Orthonormal Set)

$x_i \cdot x_j = 0$, where $i \neq j$

&

$\|x_i\| = 1$

기저의 직교성

기저 $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$에서 기저벡터 b_i들이 서로 직교하는 기저

직교기저(Orthogonal Basis)

$b_i \cdot b_j = 0$,

where $i \neq j$

정규직교기저(Orthonormal Basis)

$b_i \cdot b_j = 0$, where $i \neq j$

&

$\|b_i\| = 1$

기저의 직교성

기저 $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$에서 기저벡터 b_i들이 서로 직교하는 기저

Standard Basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 는

정규직교기저!

직교기저(Orthogonal Basis)

$b_i \cdot b_j = 0$,

where $i \neq j$

정규직교기저(Orthonormal Basis)

$b_i \cdot b_j = 0$, where $i \neq j$

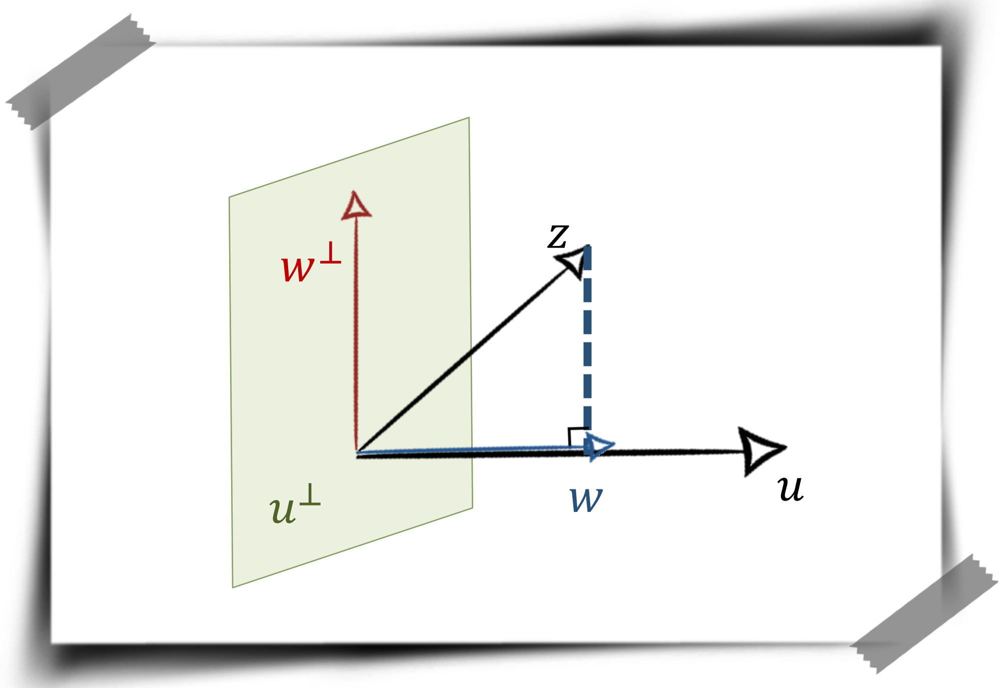
&

$\|b_i\| = 1$

직교여공간(Orthogonal complement)

직교여공간(Orthogonal Complement)

집합 S가 공집합이 아닌 R^n에 속하는 벡터의 집합일 때, S에 속하는 **모든 벡터들에 직교하는 벡터들의 집합**



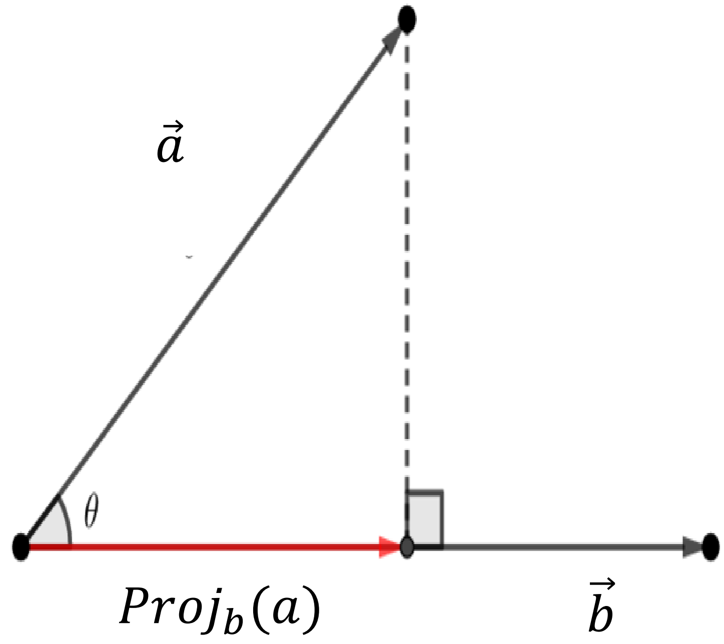
2

기하학적 접근의 응용

정사영

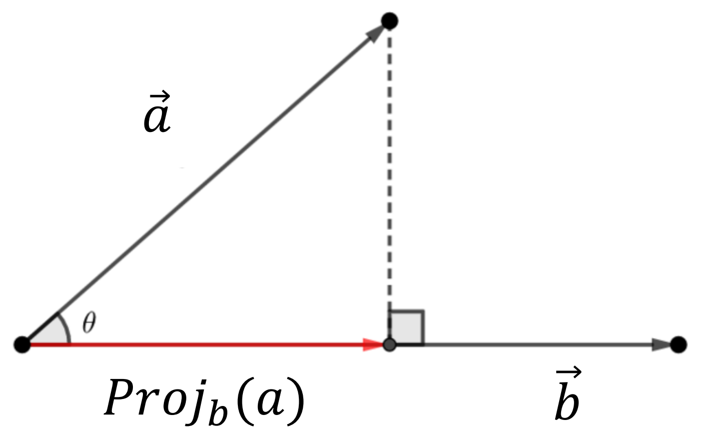
정사영

투영이란 어떤 벡터를
다른 벡터로 옮겨 표현하는 것
이때, 직각을 이루게 하여 투영하는
것을 정사영 이라고함



2 기하학적 접근의 응용

정사영

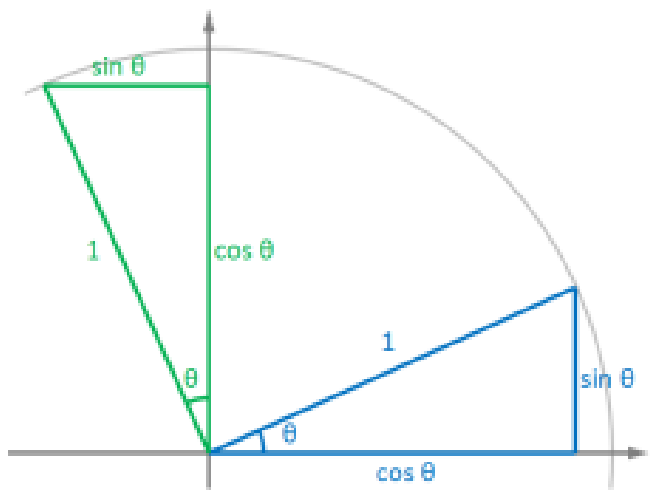


$$Proj_b(a)\text{의 } \color{red}{\text{크기}} = \|a\|cos\theta = \|a\| \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|a\|\|b\|} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|b\|}$$

$$Proj_b(a)\text{의 } \color{red}{\text{방향}} = \frac{\vec{b}}{\|b\|}$$

$$Proj_b(a) = \color{red}{\text{크기}} \cdot \color{red}{\text{방향}} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|b\|^2}\vec{b}$$

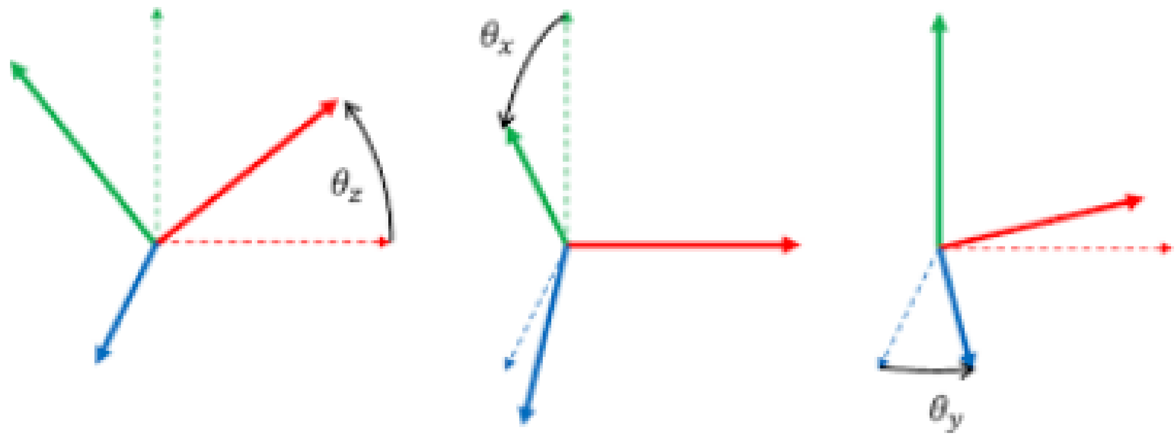
2차원에서의 회전



θ 가 회전하고 싶은 각도일 때, 회전은

행렬 R = $\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}$을 곱함으로써 구할 수 있음

3차원에서의 회전



$$\begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} cos\theta & 0 & sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -sin\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix}$$

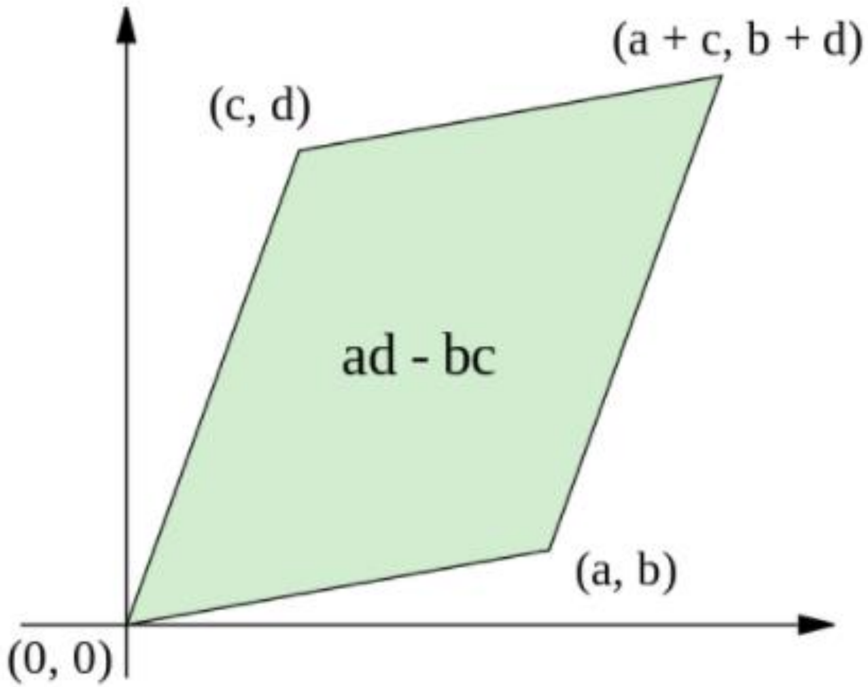
3차원에서의 회전은 어떤 평면을 회전하느냐에 따라

회전 방향이 달라짐!

3

행렬의 분해/인수화

행렬식(Determinant)



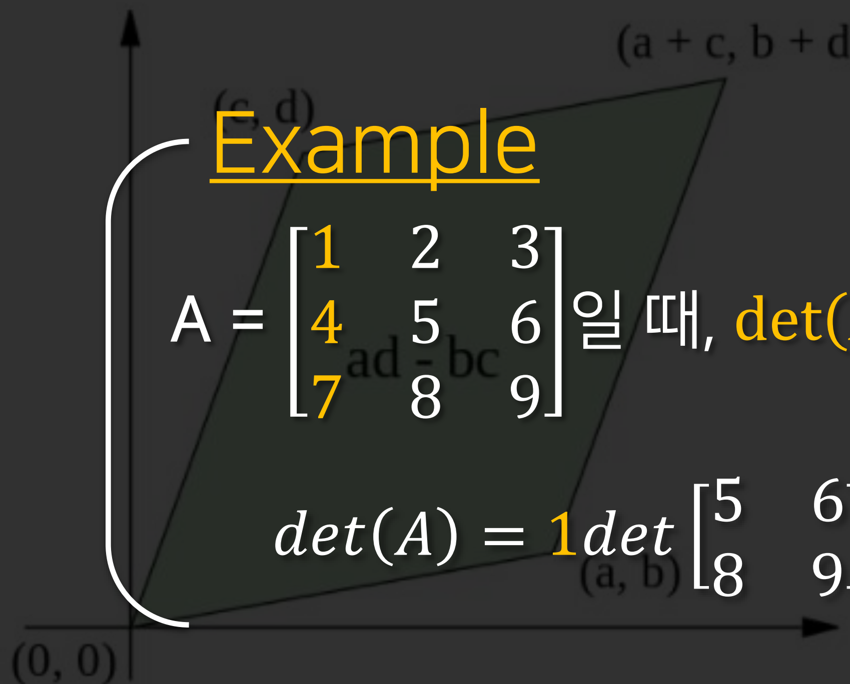
행렬식

- 정사각행렬이 실수에 대응되는 함수
  행렬 A에 대해 **det(A)**로 나타냄
- det(A) = 0 ↔ A의 역행렬이 존재하지 않음
- A = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 일 때, det(A) = $ad - bc$

행렬식(Determinant)

Laplace Expansion

n x n 행렬의 행렬식의 계산 방법



Example

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$일 때, $\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$

$$det(A) = 1det\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} - 4det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} + 7det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

행렬식

- 정사각행렬이 실수에 대응되는 함수
  행렬의 크기를 나타내며
  행렬 A에 대해 det(A)로 나타냄
- det(A) = 0 ↔ A의 역행렬이 존재하지 않음
- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 일 때, $\det(A) = ad - bc$

행렬식 및 대각합

대각합(Trace)

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 에 대해 tr(A) = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$
- 정사각행렬 A의 대각합(trace)은 대각성분의 합

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$ 일 때 tr(A) = 1+ 7 + 2 = 10

정사각행렬

고유값과 고유벡터

고유값과 고유벡터

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에 대해 영벡터를 제외한 $x \in \mathbb{R}^{n}$에서

$Ax = \lambda x$ 일 때, λ를 고유값, x를 고유벡터라고 함

n x n 정사각행렬

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

고유벡터 $(\neq \vec{0})$

$$A\,x = \lambda\,x$$

고유값

$$Ax = \lambda x = \lambda I x$$

$$Ax - \lambda I x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Ax = λx 에서
고유벡터 x가 존재하기 위한 조건?

$(A - \lambda I)x = 0$ 에서 영벡터가 아닌 x가 존재해야 함

만약 $(A - \lambda I)$의 역행렬이 존재한다면

$\mathrm{x} = (A - \lambda I)^{-1} 0$ 이 되므로 x는 영벡터가 되어

고유벡터라고 할 수 없음

이는 $\det(A - \lambda I) = 0$를 만족해야 함을 의미

고유값과 고유벡터

고유값과 고유벡터

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에 대해 영벡터를 제외한 $x \in \mathbb{R}^n$에서

$Ax = \lambda x$ 일 때, λ를 고유값, x를 고유벡터라고 함

Q $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때 고유값과 고유벡터를 구해보자

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$$

$\det(A - \lambda I) = 0$ 이용

$\therefore \lambda = 1 \text{ or } 3$

λ = 1 인 경우

고유값과 고유벡터

$$(A-\lambda I)x = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} = 0$$

고유값과 고유벡터

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$에 대해 영벡터를 제외한 $x \in \mathbb{R}^n$에서 $Ax = \lambda x$ 일 때, λ를 고유값, x를 고유벡터라고 함

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_2 = -x_1, \quad X = x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

고유값 λ = 1 에 대한 고유벡터 : $x_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ $(x_1 \neq 0)$

Q $A = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ 일 때 고유값과 고유벡터를 구해보자

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$$

$\det(A-\lambda I) = 0$ 이용

$\therefore \lambda = 1 \text{ or } 3$

$\lambda = 3$ 인 경우

고유값과 고유벡터

$$(A - \lambda I)x = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

고유값과 고유벡터

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$에 대해 영벡터를 제외한 $x \in \mathbb{R}^n$에서
$Ax = \lambda x$ 일 때, λ를 고유값, x를 고유벡터라고 함

$$x_1 - x_2 = 0\ , \quad x_2 = x_1\ , \quad \mathrm{x} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

고유값 $\lambda = 3$ 에 대한 고유벡터 : $x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(x_1 \neq 0)$

Q $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 일 때 고유값과 고유벡터를 구해보자

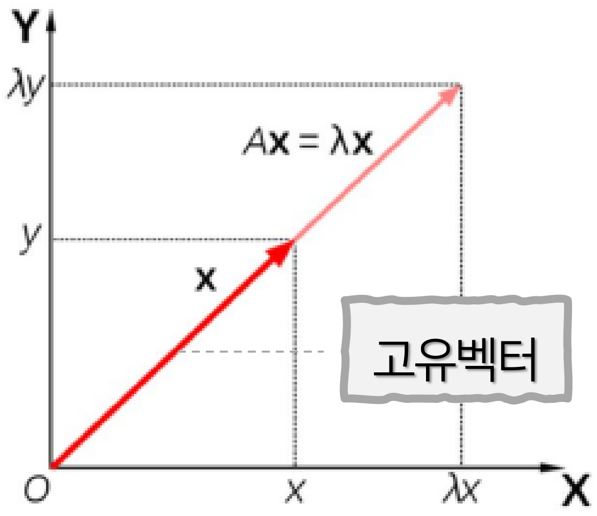
$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda - 3 = 0$$

$\det(A - \lambda I) = 0$ 이용

$\therefore \lambda = 1 \text{ or } 3$

고유값과 선형변환

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A \text{ (선형변환)}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{3}_{\lambda \text{ (크기변화 정도)}}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x}$$



- Ax = λx 는 **x의 A에 의한 선형변환**이 x의 **λ에 의한 상수배**와 같은 결과를 의미
  - X의 방향을 그대로 두고 **크기만을 변화시키는 선형 변환**으로 이해

양확정행렬 (Positive definite matrix)

양확정행렬

"양수를 확실히 만드는 행렬"에서 유래

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 영벡터를 제외한 임의의 $x \in \mathbb{R}^{n}$, $x^T Ax > 0$

Example

A = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix}$

x = $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$로 표기하면,

$$x^T Ax = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2x_1^2 + 12x_1x_2 + 20x_2^2$$

이 때, $2x_1^2 + 12x_1x_2 + 20x_2^2 = 2(x_1 + 3x_2)^2 + 2x_2^2 > 0$

따라서 A는 양확정행렬

촐레스키분해(Cholesky Decomposition)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L^T}$$

대칭 & 양확정 행렬인 행렬 A 에 대해 다음이 성립

1) 0이 아닌 성분이 양수로 구성된 하삼각 행렬 L에 대해 $A = LL^T$ 을 만족

2) 이때 L은 행렬 A에 대해 유일하게 존재하며 촐레스키 팩터라고 정의

촐레스키 분해 → 행렬식 계산을 간단화

촐레스키 분해 (Cholesky Decomposition)

$$\det(A) = \det(LL^T)$$

$$= \det(L)\det(L^T) = \det(L)^2$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

$A \qquad L \qquad L^T$

$\therefore \det(L)$ = **대각성분의 곱**이므로

대칭 & 양확정 행렬인 행렬 A 에 대해 다음이 성립

det(A)을 대각성분의 곱으로 구할 수 있음

1) ... 하삼각 행렬 L에 대해 $A = LL^T$ 을 만족

2) 이때 L은 행렬 A에 대해 유일하게 존재하며 촐레스키 팩터라고 정의

촐레스키 분해 → *행렬식 계산을 간단화*

대각행렬이란?

대각행렬(Diagonl Matrix)

대각선에만 0이 아닌 성분이 있고,
그 외의 성분은 모두 0인 행렬

$$D = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & C_n \end{pmatrix}$$

대각행렬은 **행렬식**, **거듭제곱**, **역행렬 계산** 등에서 굉장한 이점을 지님.

대각화(Diagonalization)

- 대각행렬 $D \in \mathbb{R}^{nxn}$, 어떤 행렬 $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ 에 대해

$D = \mathrm{P}^{-1}AP$인 역행렬이 존재하는 행렬 $\mathrm{P} \in \mathbb{R}^{nxn}$가 존재할 때,

A를 **대각화 가능(Diagonalizable)**하다고 하며,

위의 과정을 **대각화**라고 함.

고유값 분해란?

고유값 분해(EigenDecomposition; EVD)

어떤 정사각행렬 $D \in \mathbb{R}^{nxn}$에 대해

A의 고유벡터들이 $\mathbb{R}^{n}$의 기저를 형성할 때,

$A = PDP^{-1}$만들 수 있음

↓

$P \in \mathbb{R}^{nxn}$이며,

D는 각 대각 성분이 A의 고유값으로 구성된 대각행렬

위의 과정을 **고유값 분해**라고 부름

고유값 분해

고유값 분해가 이루어지는 과정

다음의 행렬을 예로 들어보자

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

고유값과 고유벡터

λ = 1일 때

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

λ = 3일 때

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

4

응용편

특이값 분해의 개념

특이값 분해
(Singular Value Decomposition)

- n x m 크기의 일반적인 행렬에 대해 분해가 가능
- 선형대수학에서 매우 중요한 분해 방법

" *Fundamental Method of Linear Algebra* "

특이값 분해의 개념

특이값 분해

- A : m x n 행렬이며 계수(rank)가 $0 \le \text{rank}(A) \le \min(m,n)$
- V^T : n x n 행렬, U : m x m 행렬, Σ : m x n 행렬
- U와 V는 직교행렬이며 Σ는 성분이 $\Sigma_{ii} \neq 0$, $\Sigma_{ij} = 0$ $(i \neq j)$인 행렬

$$\underset{m \times n}{A} = \underset{m \times m}{U} \times \underset{m \times n}{\Sigma} \times \underset{n \times n}{V^T}$$

특이값 분해

- 직교 행렬의 정의에 따라 $A = U\Sigma V^{T} = U\Sigma V^{-1}$
- Σ는 대각 행렬을 부분집합으로 가지는 m x n 크기의 행렬,

이는 성분이 $\Sigma_{ii} \neq 0$, $\Sigma_{ij} = 0$ (i≠j)인 행렬로 표현되기 때문임.

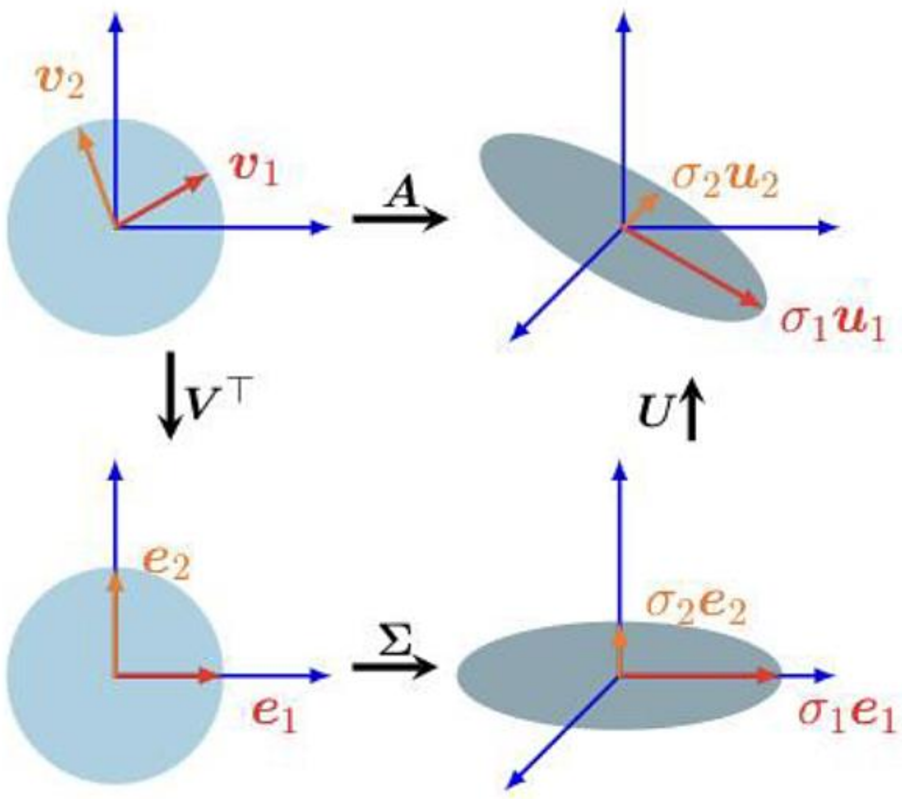
$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$m > n$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$m < n$

특이값 분해의 기하학적 해석



- V^T : Domain(정의역)에서 표준 기저에서 다른 기저로 변환 (Basis Change)
- Σ : 새로운 기저에서 값 스케일링
- U : 회전(Rotation)을 통해 Codomain(공역)에서 기저 변환

특이값 분해의 활용

특이값 분해 (Singular Value Decomposition)

지금까지 다룬 특이값 분해는

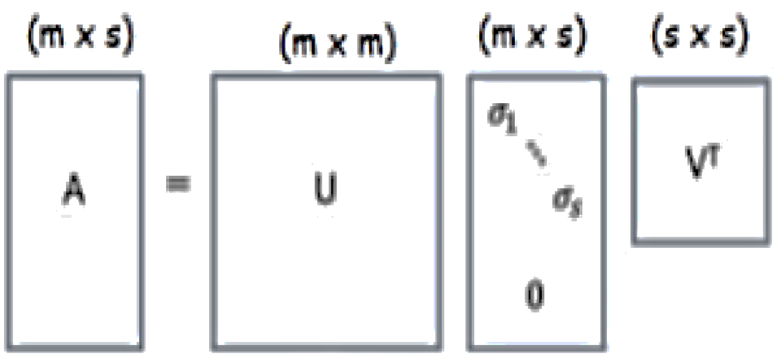
특이값 분해의 기본적인 개념이며, Full SVD라고 불림.

하지만 실제로는 축약된 버전인

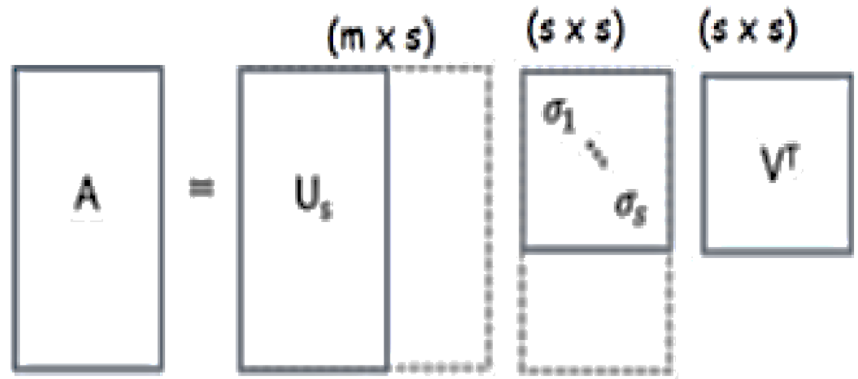
Reduced SVD를 더 많이 활용하는 편임.

Reduced SVD

Reduced SVD의 종류들

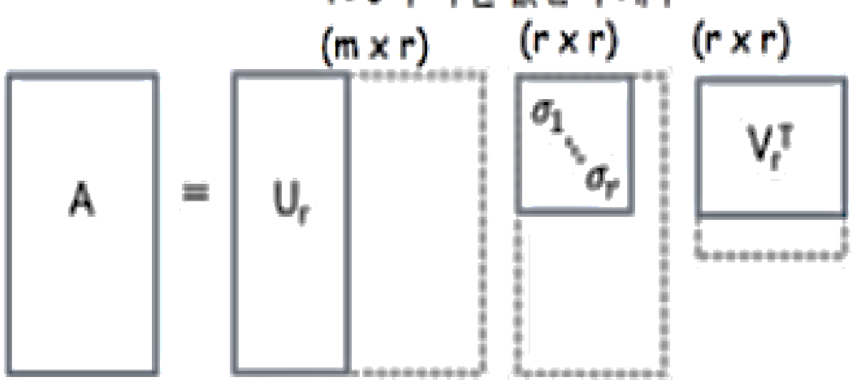


〈그림 2〉 full SVD



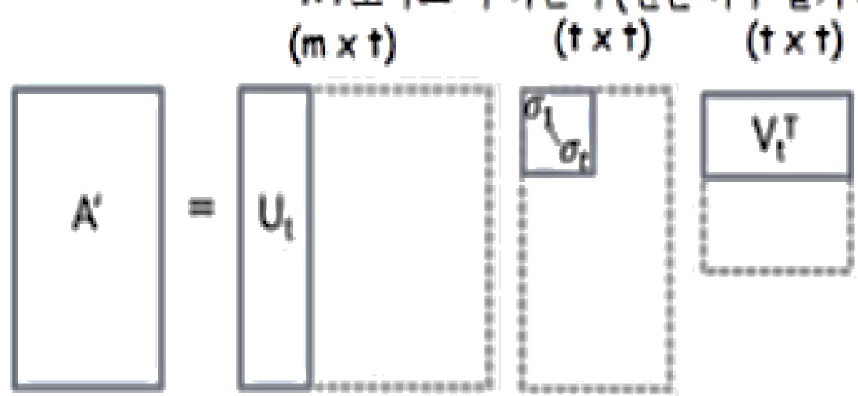
〈그림 3〉 thin SVD

r: 0이 아닌 값들의 개수



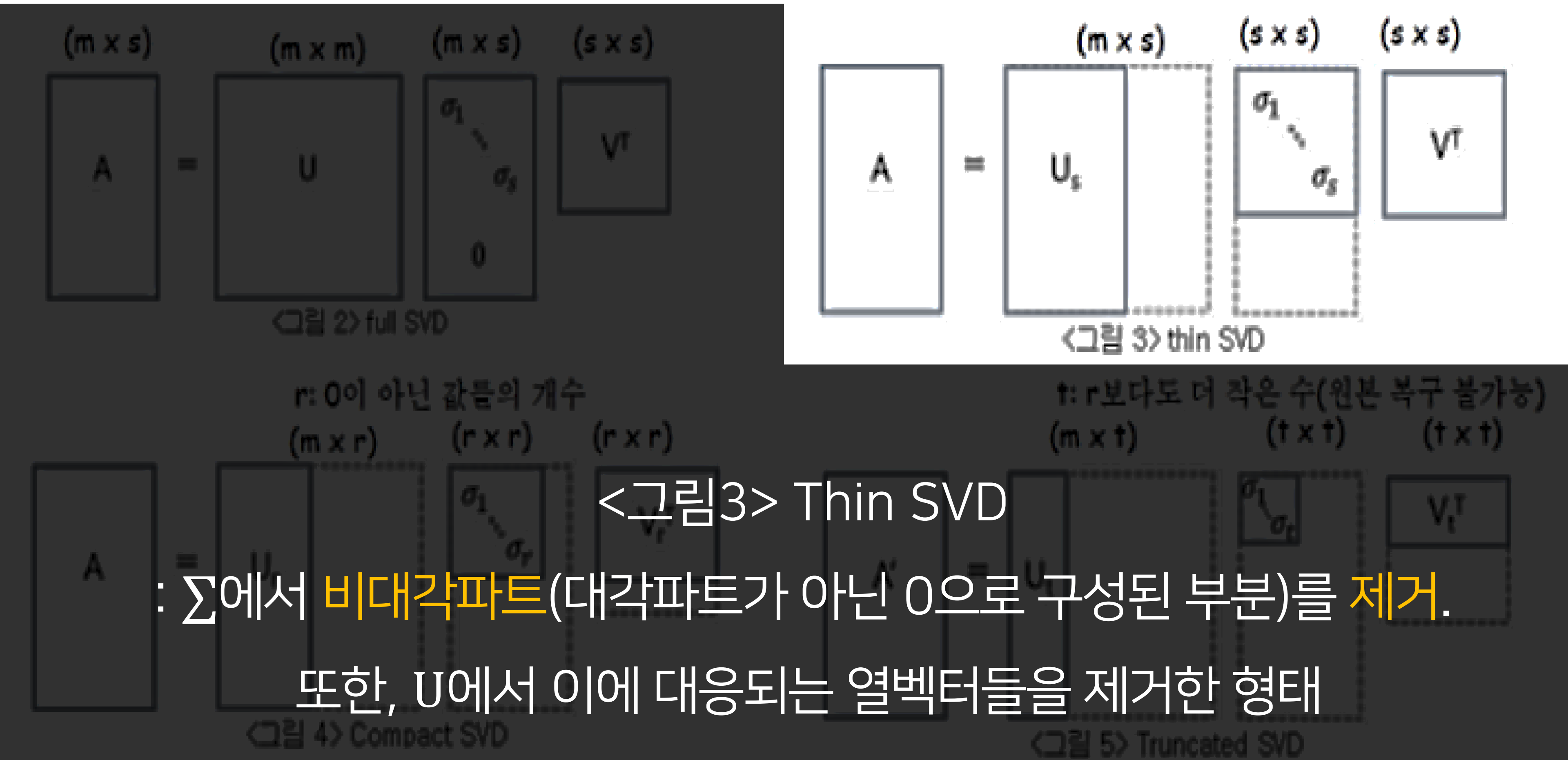
〈그림 4〉 Compact SVD

t: r보다도 더 작은 수(원본 복구 불가능)



〈그림 5〉 Truncated SVD

Reduced SVD



<그림3> Thin SVD

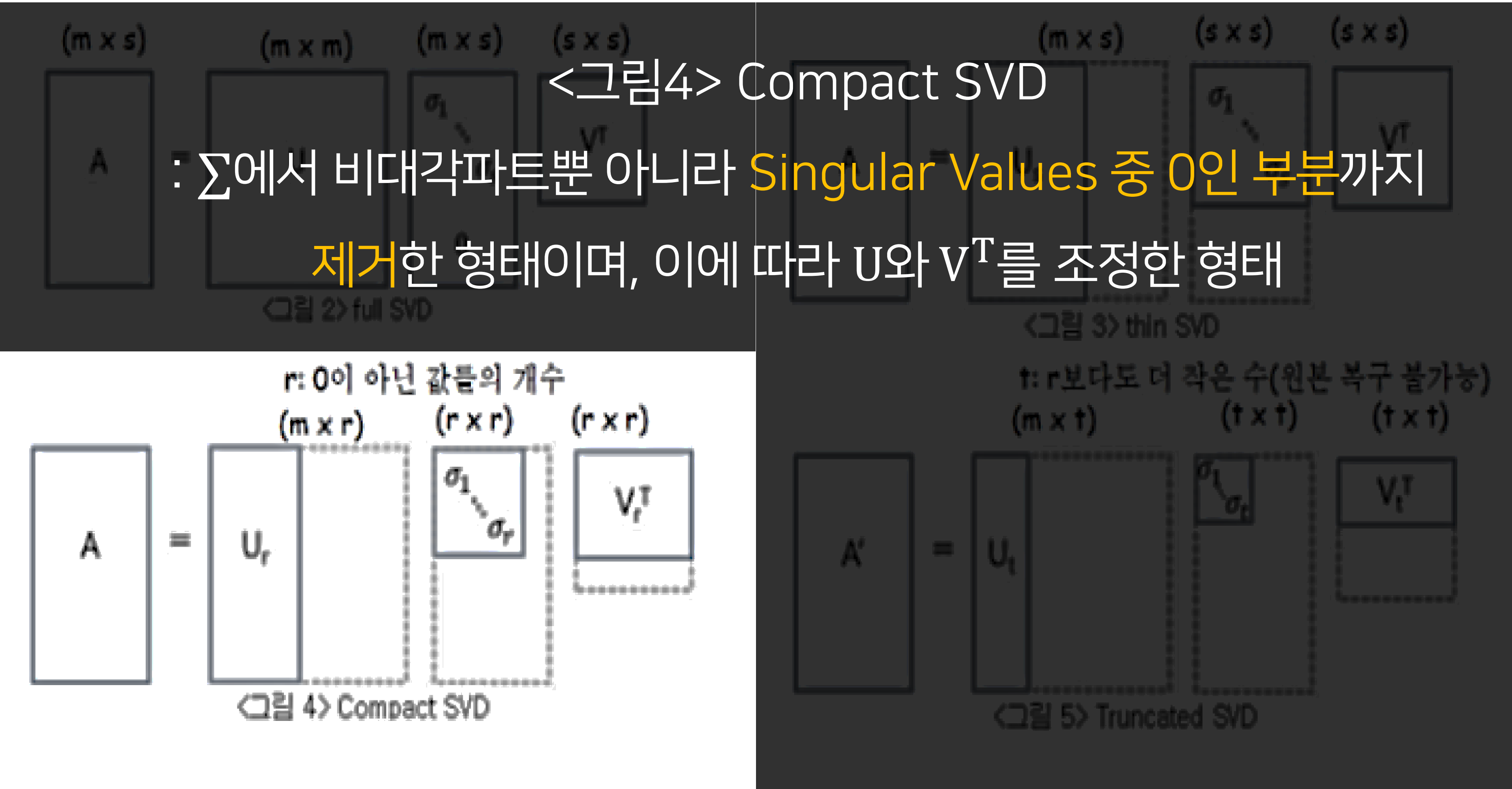
: ∑에서 비대각파트(대각파트가 아닌 0으로 구성된 부분)를 제거.

또한, U에서 이에 대응되는 열벡터들을 제거한 형태

Reduced SVD

<그림4> Compact SVD

: ∑에서 비대각파트뿐 아니라 Singular Values 중 0인 부분까지 제거한 형태이며, 이에 따라 U와 V^T를 조정한 형태



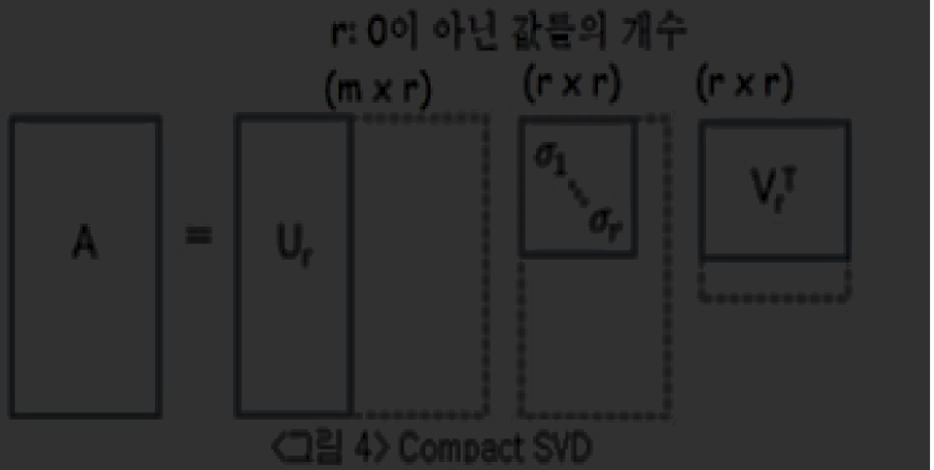
Reduced SVD

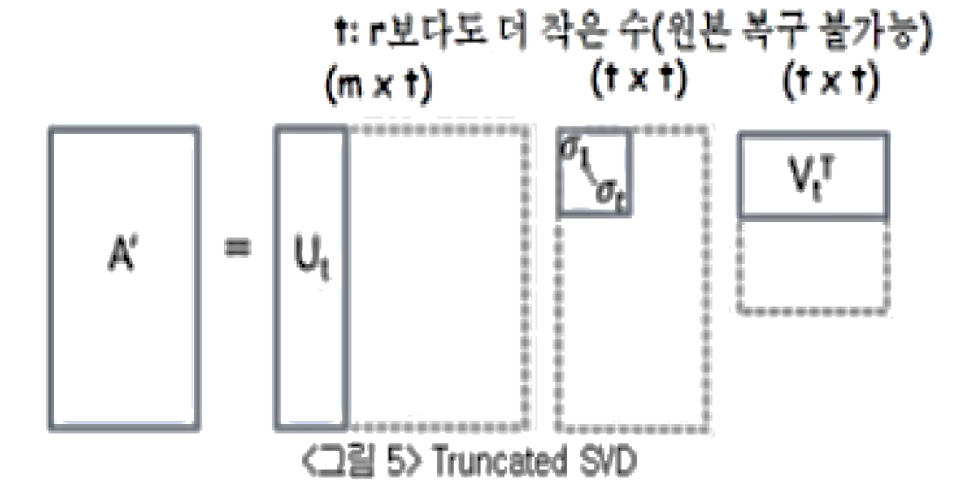
<그림5> Truncated SVD

: ∑에서 비대각파트와 0인 Singular Values 뿐 아니라

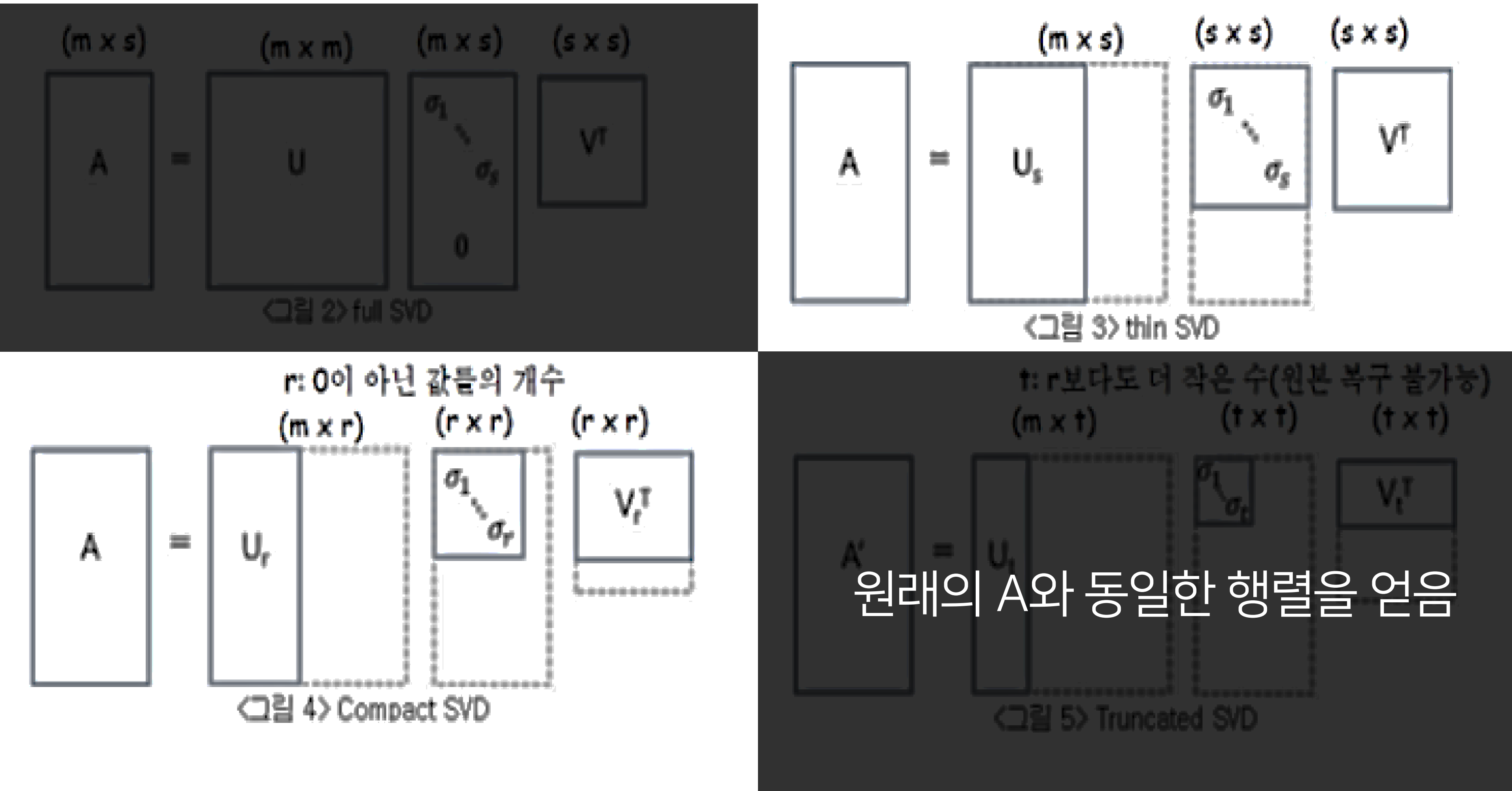
일부 Singular Values만 남기고 제거하는 방식이며,

이에 따라 U와 V^T를 조정한 형태





Reduced SVD



<그림 2> full SVD

<그림 3> thin SVD

<그림 4> Compact SVD

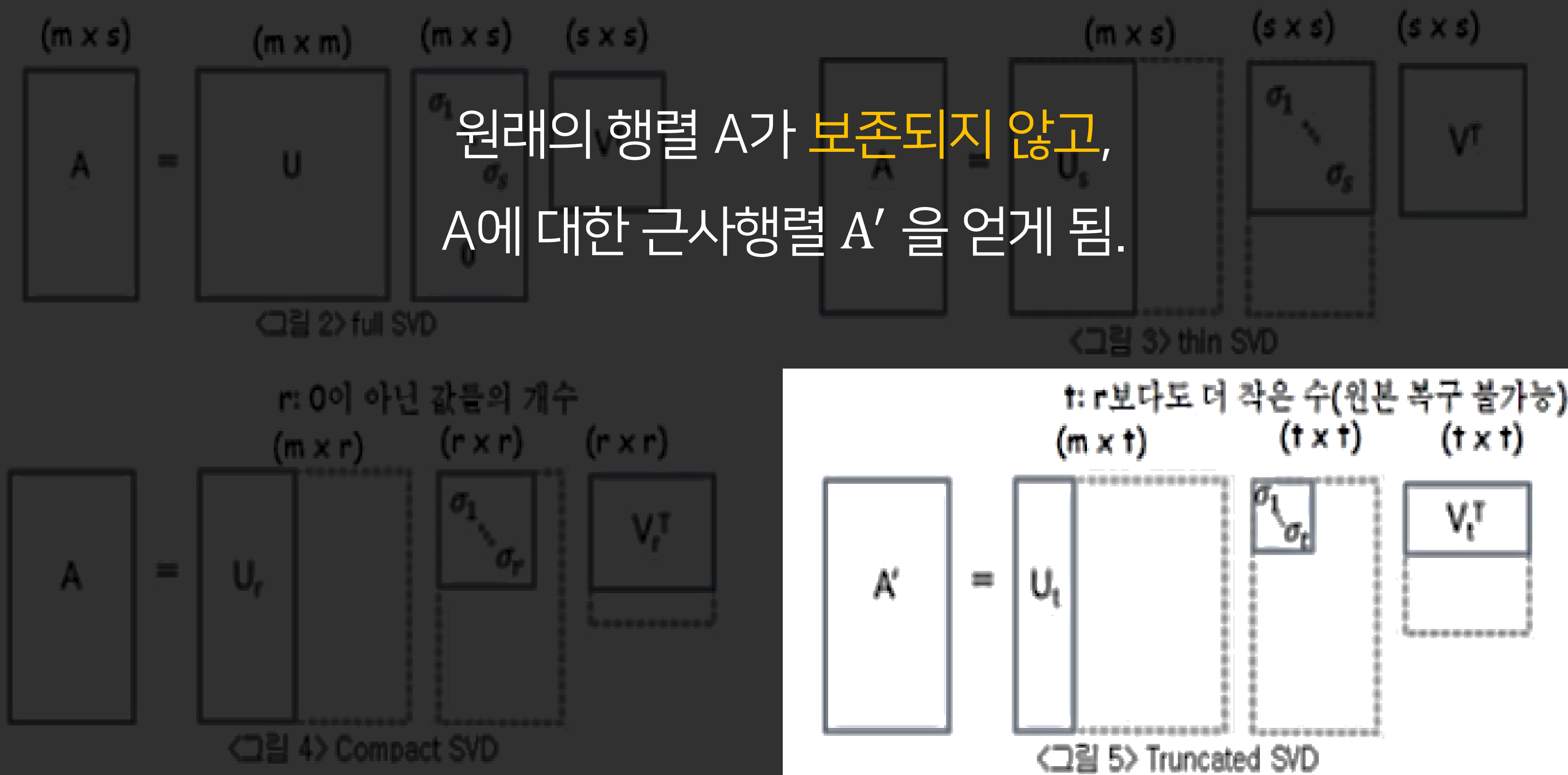
<그림 5> Truncated SVD

원래의 A와 동일한 행렬을 얻음

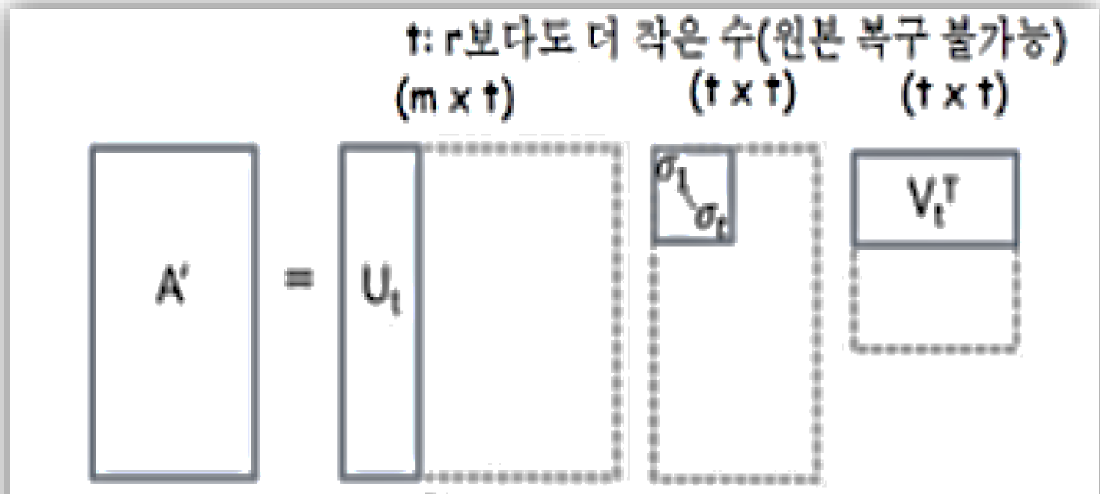
Reduced SVD

원래의 행렬 A가 보존되지 않고,

A에 대한 근사행렬 A′ 을 얻게 됨.



Truncated SVD



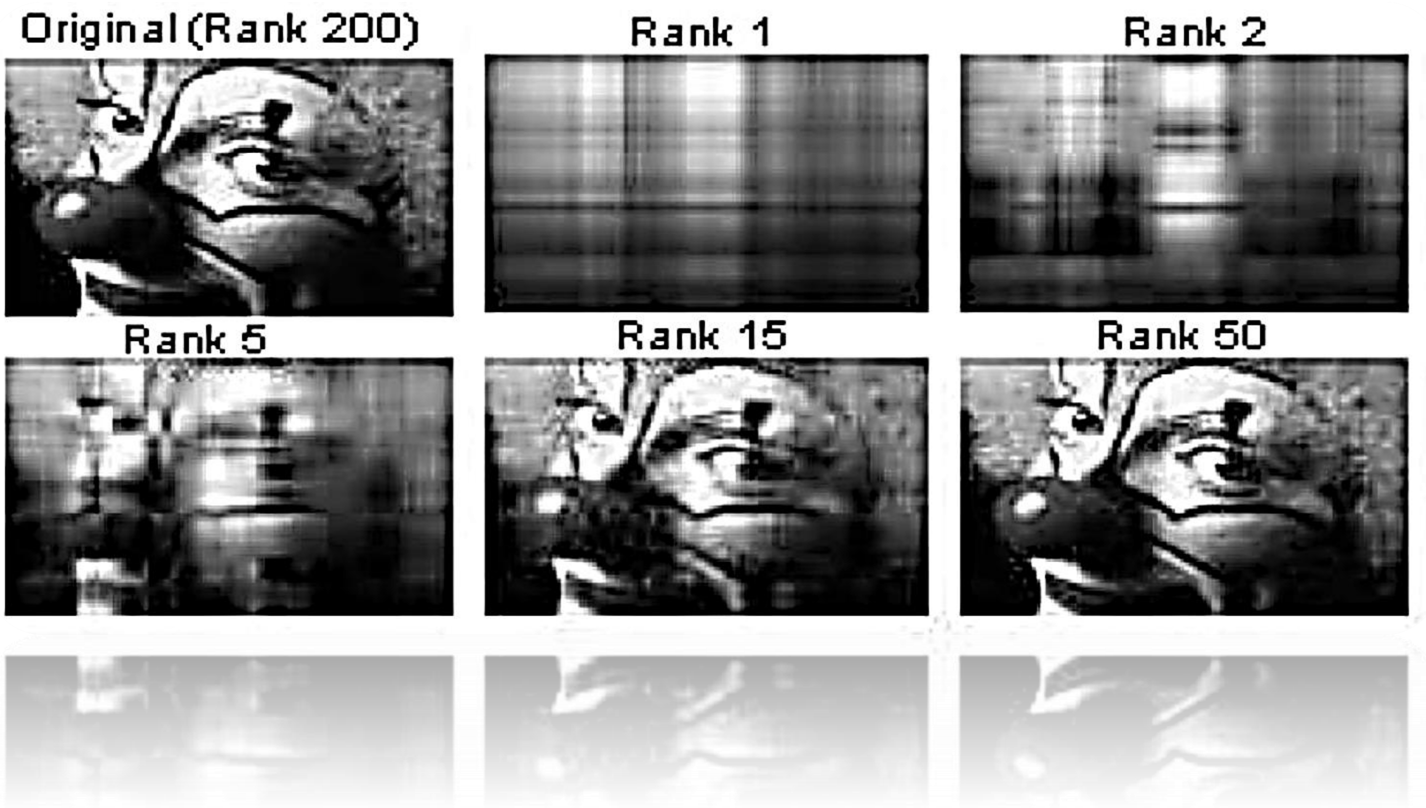
<그림 5> Truncated SVD

이렇게 얻게 된 A'은 Matrix Norm $\| A - A' \|$을

최소화시키는 rank t 행렬로

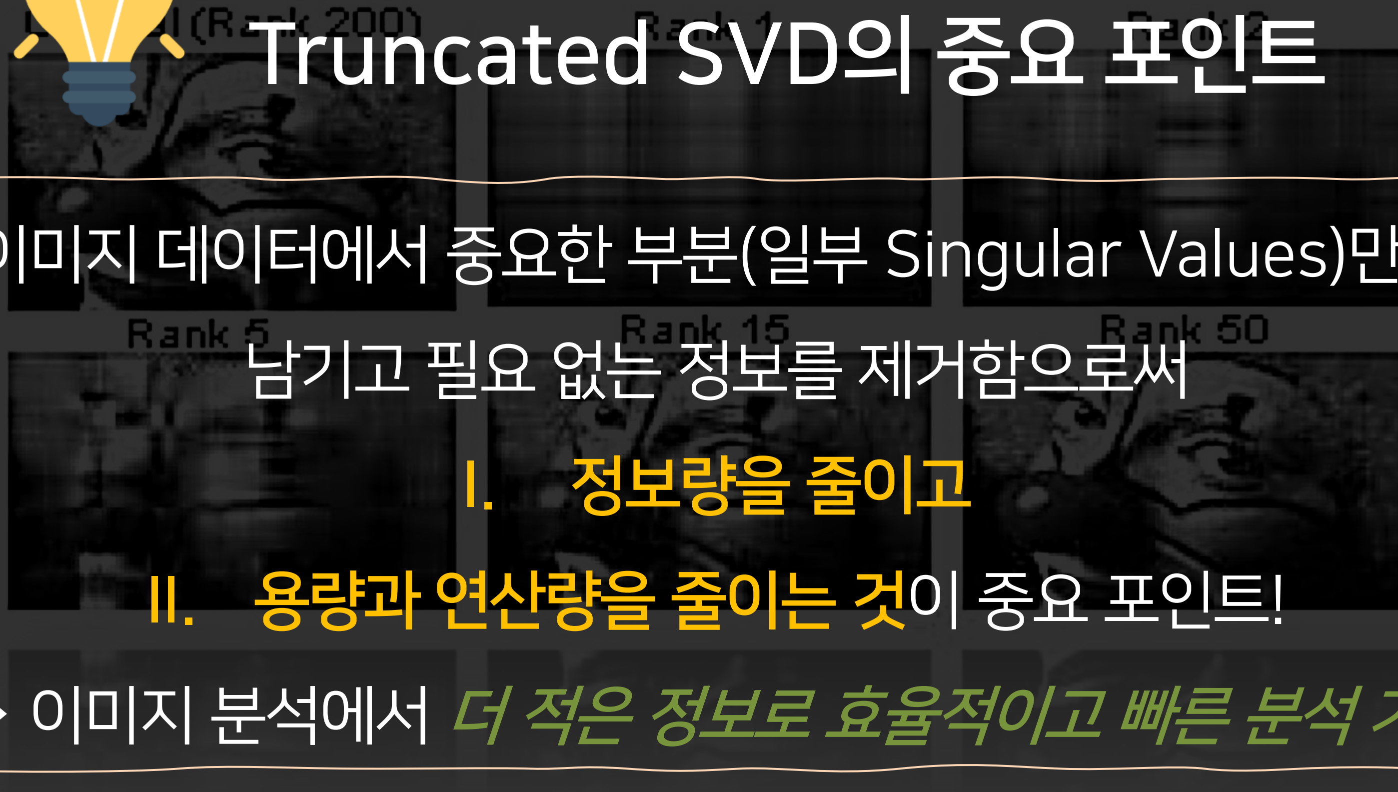
데이터 압축, 노이즈 제거 등에 활용됨.

Truncated SVD의 활용



Rank 50으로도 충분히 Original 그림을 나타낼 수 있는 이점이 있음.

Truncated SVD의 활용



Truncated SVD의 중요 포인트

이미지 데이터에서 중요한 부분(일부 Singular Values)만을

남기고 필요 없는 정보를 제거함으로써

I. **정보량을 줄이고**

II. **용량과 연산량을 줄이는 것**이 중요 포인트!

→ 이미지 분석에서 *더 적은 정보로 효율적이고 빠른 분석 가능*

Rank 50으로도 충분히 Original 그림을 나타낼 수 있는 이점이 있음.

다음 주 예고

1. 벡터 미적분학
2. 최적화
3. 주성분 분석