선형대수학팀

3팀
이재현
김규범
김민지
이정우
조혜현

INDEX

1. 선형대수학의 시작

2. 선형 방정식과 선형 변환

3. 선형 독립

4. 공간에서의 선형대수학

5. 응용편

1

선형대수학의 시작

선형대수학 소개

선형대수학 (Linear Algebra)

대수학의 한 분야

선형공간 및 1차 변환에
관한 이론 연구

통계 분석의 시작점

데이터 분석에서
고차원 데이터의
효율적 연산 가능

문제의 공간적 이해

행렬, 벡터를 활용하여
선형방정식의 해를 구함

기본 개념

벡터(Vector)

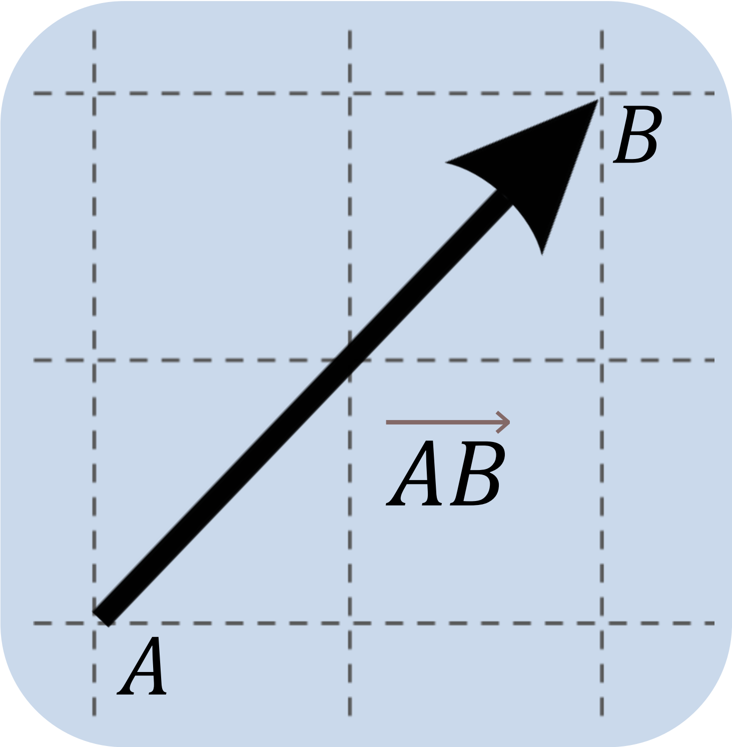
"**크기**"와 "**방향**"을 가진 단위

공간에서 화살표로 표기

방향 : 끝 부분을 가리키는 방향

크기 : 시작 지점과 끝 지점까지의 거리

cf. 스칼라(Scalar) - 크기만 가짐



기본 개념

행렬(Matrix)

수나 식을 직사각형 모양의 행과 열로 배열

행(m)과 열(n)의 개수로 크기($m \times n$) 표현

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

원소(element)

또는 성분(entry)

기본 개념

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

원소(element)
또는 성분(entry)

행과 열의 크기가 같은 $n \times n$ 행렬은

“정사각행렬”
(Square Matrix)

2

선형 방정식과 선형 변환

선형 방정식이란?

선형 방정식

최고 차수의 항의 차수가 1을 넘지 않는 다항식

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 의 형태

선형방정식의 집합 → **연립선형방정식** 혹은 **선형시스템**

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b
\end{aligned}
$$

선형시스템 나열

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}
\end{pmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}
$$

A = m x n, **x** = n x 1, **b** = m x 1

$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

m x n   n x 1   m x 1

Ax = b 판별 및 해 구하기

문자의 개수가 많거나 일반화된 해를 찾기 힘들 때
행렬과 벡터를 이용한 선형방정식의 꼴로 만들어 해결 가능!

"*Gauss-Jordan Elimination*"

Carl Friedrich Gauss

Wilhelm Jordan

계수만으로 행렬을 생성한 후
Elementary Row Operation을
이용하여
Reduced Row Echelon Form으로
만들어 연립선형방정식의 해를 구함

Ax = b 해 구하기

Elementary Row Operations(ERO)

미지수의 개수가 많더라도 쉽게 해를 구할 수 있는 방법

행 간의 연산을 통하여 연립방정식의 해를 구함

1) 두 행을 교환하기

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Elementary Row Operations(ERO)

미지수의 개수가 많더라도 쉽게 해를 구할 수 있는 방법

행 간의 연산을 통하여 연립방정식의 해를 구함

2) 한 행에 0이 아닌 실수배 하기

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to 2R_1]{\times 2} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Elementary Row Operations(ERO)

미지수의 개수가 많더라도 쉽게 해를 구할 수 있는 방법

행 간의 연산을 통하여 연립방정식의 해를 구함

3) 한 행에 0이 아닌 실수배를 하여 다른 행에 더하기

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 2R_1 + R_2]{\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Row Echelon Form(REF)

다음과 같은, (1) ~ (3)을 만족하는 행렬

1) 한 행에서 제일 처음 나타나는 0이 아닌 수는 1이며,

이를 leading 1 혹은 pivot 이라고 함

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Row Echelon Form(REF)

다음과 같은, (1) ~ (3)을 만족하는 행렬

2) 모든 수가 **0**으로 이루어진 행은 **가장 아래 행**으로 위치

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Row Echelon Form(REF)

다음과 같은, (1) ~ (3)을 만족하는 행렬

3) (i+1) 행의 pivot은 i 행의 pivot보다 **오른쪽**에 위치

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Reduced Row Echelon Form(RREF)

(1) ~ (4)을 모두 만족하는 행렬

4) 모든 열에는 **한 개의 pivot**만 존재하며, pivot을 제외한 수는 **0**

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Gauss Elimination

Elemantary Row Operations 를 통해
REF로 만들어
연립방정식의 해를 구하는 방법

다음 연립방정식의 해를 구해보자

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 3x - 2y + 3z = -4 \end{cases}$$

Augmented Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Gauss Elimination

Elemantary Row Operations 를 통해
REF로 만들어
연립방정식의 해를 구하는 방법

$$
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \times 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}
$$

Ax = b 해 구하기

Gauss Elimination

Elemantary Row Operations 를 통해
REF로 만들어
연립방정식의 해를 구하는 방법

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 3 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{R}_3 - 3\text{R}_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Gauss Elimination

Elamantary Row Operations 를 통해
REF로 만들어
연립방정식의 해를 구하는 방법

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & -5 & -6 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -41 & 41 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Gauss Elimination

Elemantary Row Operations 를 통해
REF로 만들어
연립방정식의 해를 구하는 방법

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & -41 & 41 \end{pmatrix} \xrightarrow{\div -41} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ax = b 해 구하기

Gauss – Jordan Elimination

Elemantary Row Operations 를 통해
RREF로 만들어
연립방정식의 해를 구하는 방법

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 10 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

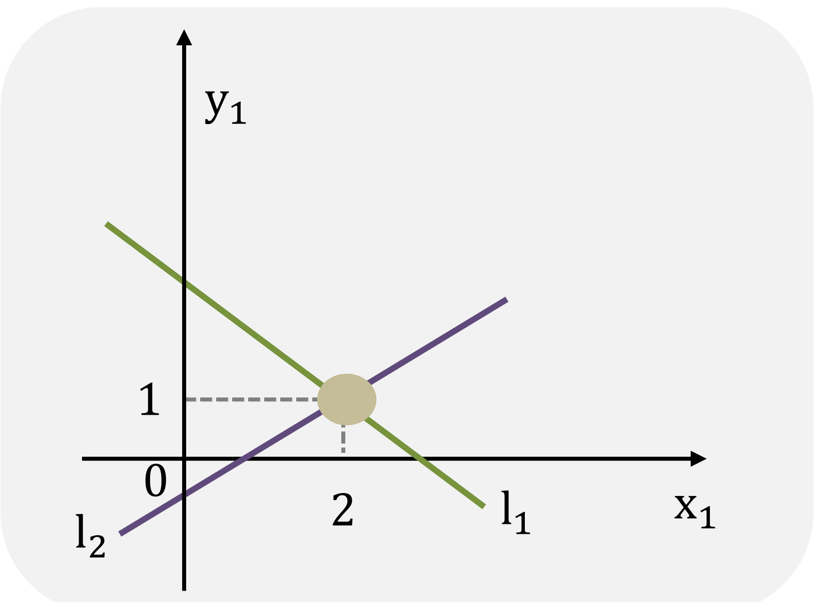
x = 1, y = 2, z = -1

선형시스템에서 해집합

1) 유일한 해가 존재

2) 해가 무수히 많음

3) 해가 존재하지 않음



(1) 두 직선이 한 점에서 만나는 경우

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

모든 열에 pivot이 존재할 때,

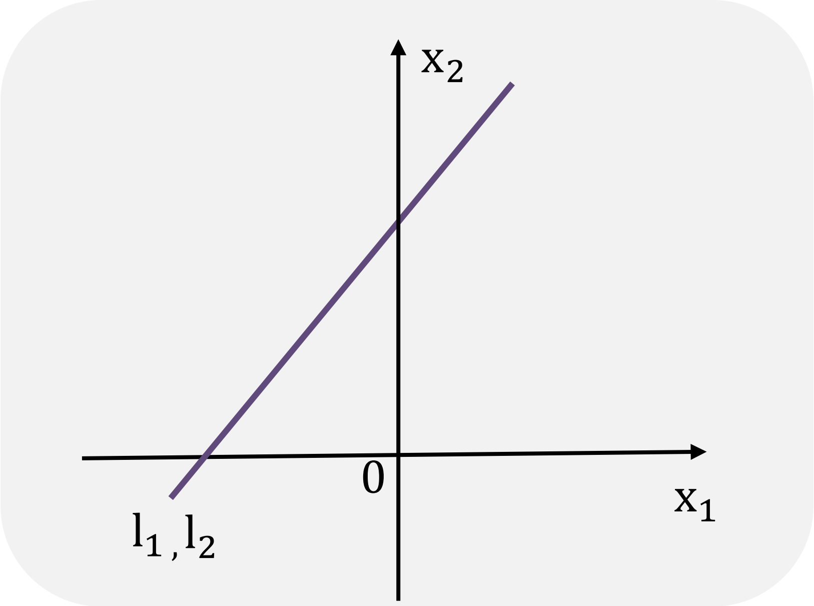
유일한 해가 존재함

선형시스템에서 해집합

1) 유일한 해가 존재

2) 해가 **무수히 많음**

3) 해가 존재하지 않음



(2) 두 직선이 일치하는 경우

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

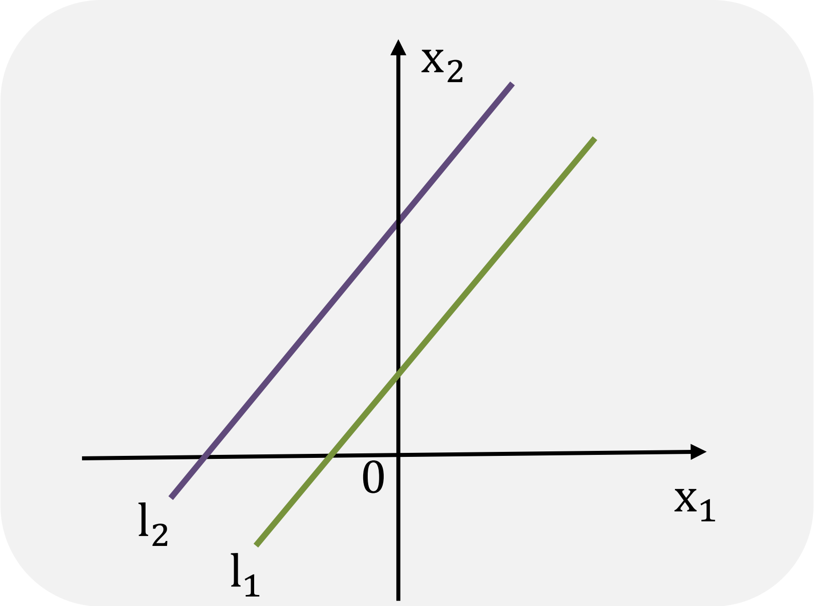
일부 열에 pivot이 존재하지 않고
그 행에 대응하는 값이 0일 때,
해가 무수히 많이 존재함

선형시스템에서 해집합

1) 유일한 해가 존재

2) 해가 무수히 많음

3) 해가 **존재하지 않음**



(3) 두 직선이 평행한경우

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

일부 열에 pivot이 존재하지 않고,

그 행에 대응하는 값이 **0이 아닐 때**

해가 존재하지 않음

선형 변환이란?

선형 변환
(Linear Transformation)

$Ax = b$를 살펴보면, 열 벡터 x가 행렬A을 곱해서 열 벡터 b로 변형됨
즉, x가 b로 mapping 되었다고 할 수 있음

$$\underset{\mathbf{A}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}}$$

$\boldsymbol{x}$라는 input에 $\boldsymbol{A}$라는 변환을 거쳐 $\boldsymbol{b}$라는 새로운 output 반환

선형 변환이란?

선형 변환
(Linear Transformation)

$Ax = b$를 살펴보면, 열 벡터 x가 행렬A을 곱해서 열 벡터 b로 변형됨
즉, x가 b로 mapping 되었다고 할 수 있음

T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$일 때,

임의의 벡터 u, v , 스칼라 a, b에 대해

$$\left[\begin{array}{c} ① \ T(au) = aT(u) \\ ② \ T(u+v) = T(u) + T(v) \end{array}\right]$$

를 만족하는 경우, **선형변환**이라고 함

기저 변환이란?

기저 변환 (Basis Change)

x가 b로 변하는 선형 변환을 x를 이루고 있는 **기저 벡터공간 B**에서 **다른 기저 벡터공간 $\tilde{B}$로 의 변환**으로 생각할 수 있음

즉, 좌표축을 변환하는 것

Example

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이 행렬 A에 의해 $\begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$로 변환

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

선형변환 $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$에 의해 기저 $B = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \}$에서

기저 $\tilde{B} = \{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \}$으로 변환

3

선형 독립

선형 결합(Linear Combination)

상수배와 **벡터합**의 연산 결과물

벡터

$$\alpha_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = [a_1 \quad a_2 \cdots \quad a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

상수

선형 종속(Linear Dependent)

$\exists \boldsymbol{a_i} \neq \mathbf{0}$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

계수가 0이 아닌 어떤 벡터가 존재

$$x_1 = -\frac{1}{a_1}(a_2 x_2 + a_3 x_3 + \cdots + a_n x_n)$$

계수가 0이 아닌 벡터가 다른 벡터들의 **선형 결합으로 표현됨**

선형 종속(Linear Dependent)

∃a_i

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

계수가 0이 아닌 어떤 벡터가 존재

$$x_1 = -\frac{1}{a_1}(a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n)$$

계수가 0이 아닌 벡터가 다른 벡터들의 선형 결합으로 표현됨

선형 독립

: 선형 종속의

"반대 개념"

선형 독립(Linear Independent)

$\forall \boldsymbol{a_i} = \mathbf{0}$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0$$

선형 방정식이 trivial solution만 가짐

벡터 $x_1, x_2, \cdots x_n$이 **선형 독립**이면,

어떤 벡터도 다른 벡터들의 **선형 결합으로 표현될 수 없음**

4

공간에서의 선형대수학

벡터공간

“벡터공간(Vector Spaces)”

: 벡터들의 **연산이 잘 정의된**, 벡터들을 모아놓은 집합

벡터공간의 엄밀한 정의

벡터 공간

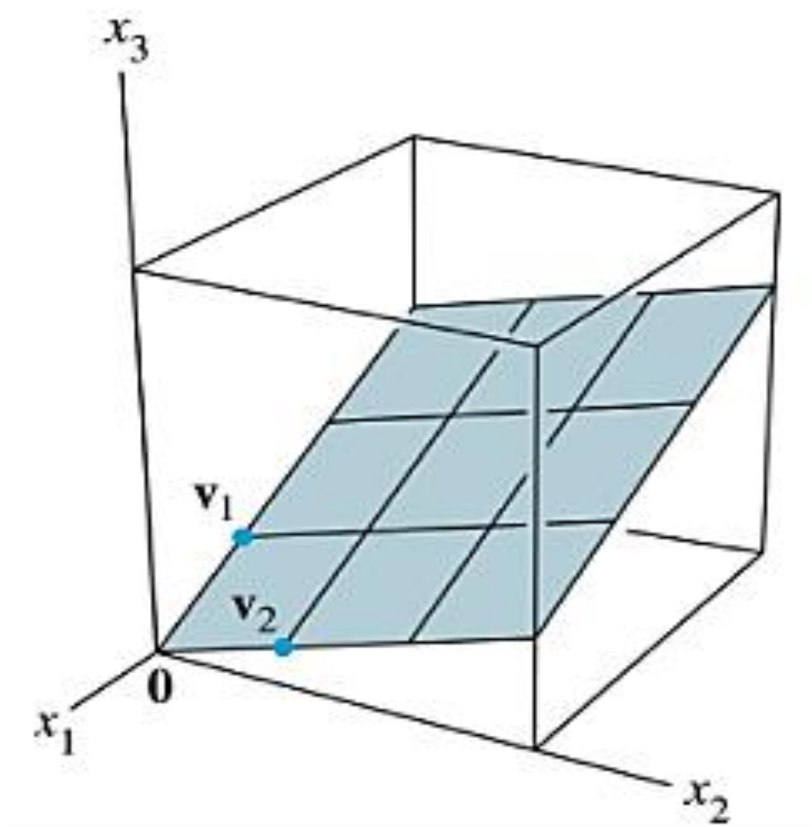
벡터의 합과 상수배에 대해 닫혀 있으며,
다음과 같은 성질을 만족함

$+ : V \times V \rightarrow V$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$

벡터의 합			상수배
$a + b = b + a$	교환법칙	분배법칙	$c(a + b) = ca + cb$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	결합법칙	결합법칙	$c(ka) = (ck)a$
$a + 0 = a$	항등원		$(c + k)a = ca + ka$
$a + (-a) = 0$	역원	항등원	$1a = a$

벡터공간

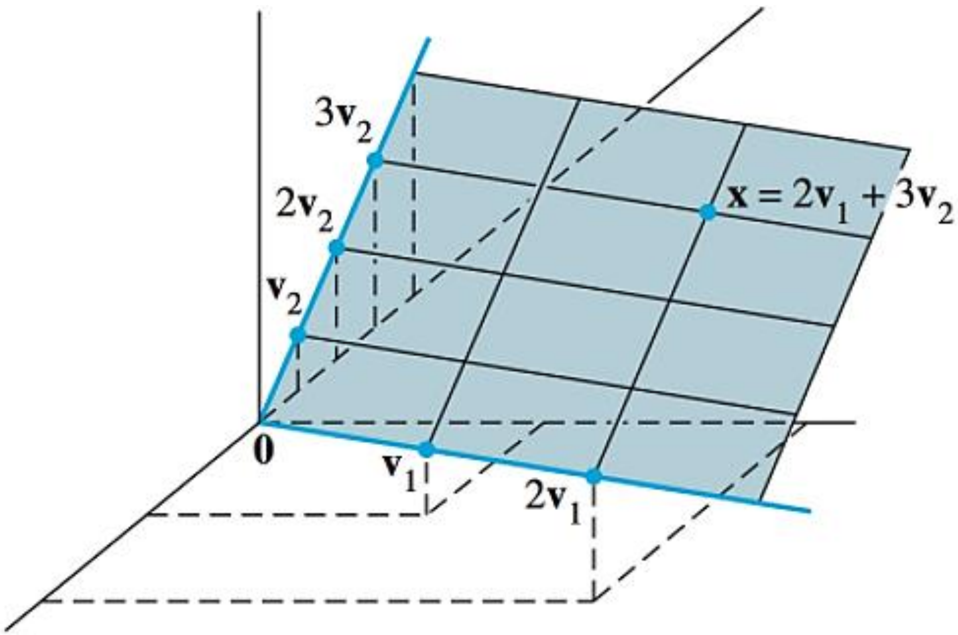


벡터 부분공간
(Vector Subspaces)

벡터 공간의 부분집합 중

벡터 공간의 조건을 만족하는 집합

Span



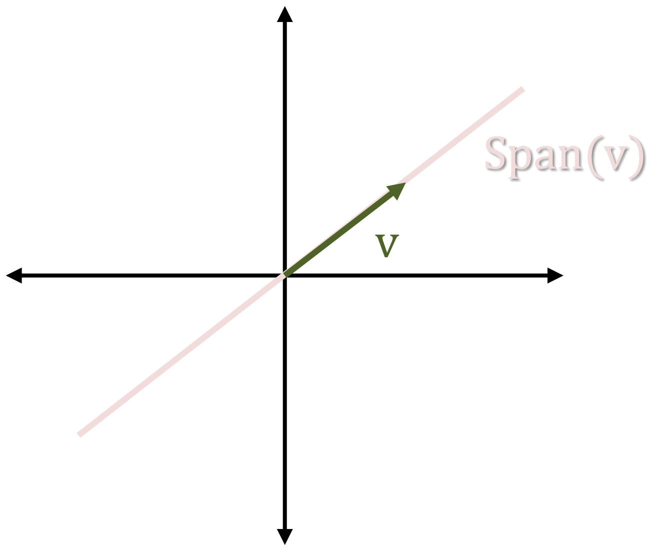
Span

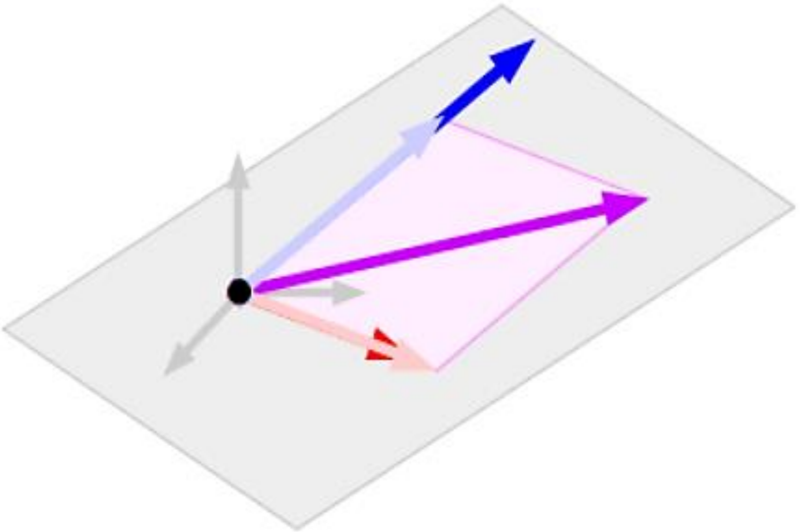
벡터들의 선형결합에 의해 만들어지는 벡터공간

Span$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

: 벡터 $v_1, v_2, \ldots, v_n$이 만들어내는 벡터공간

Span

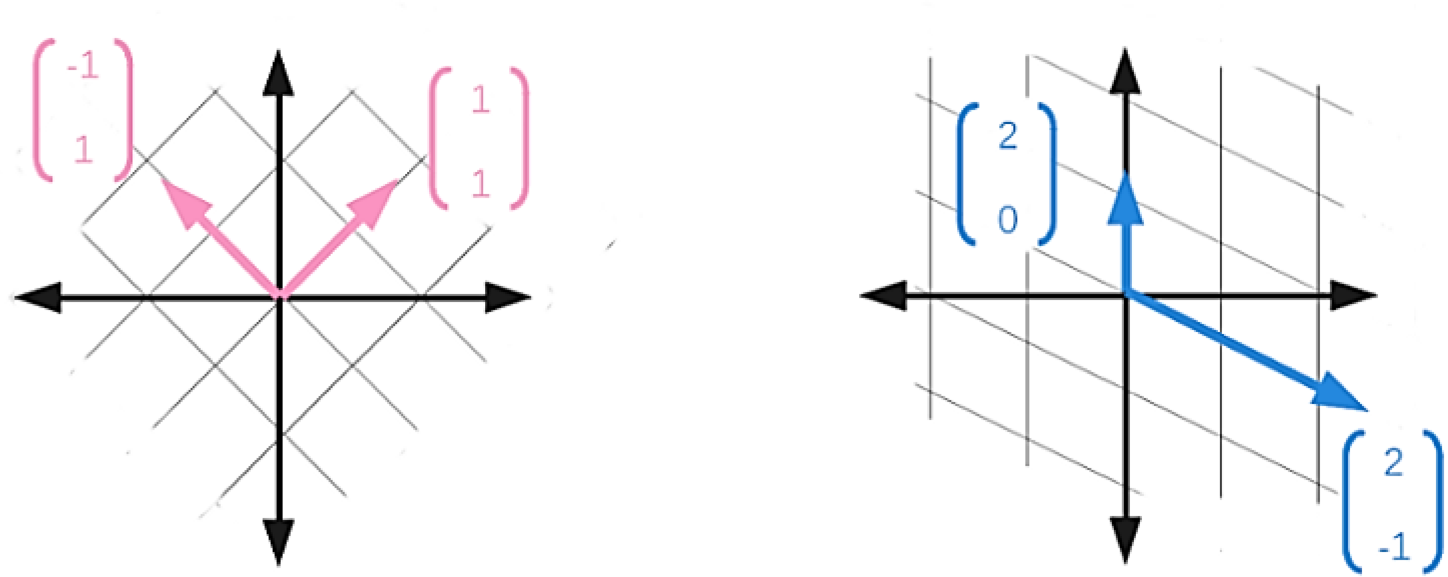




한 개 벡터의 Span인 Span(v)는 원점을 지나고 v의 상수배로 표현될 수 있는 **직선**으로 표현됨

두 개 벡터의 Span인 Span(u, v)는 원점을 지나고 상수배로 형성되는 **평면**으로 표현됨

기저



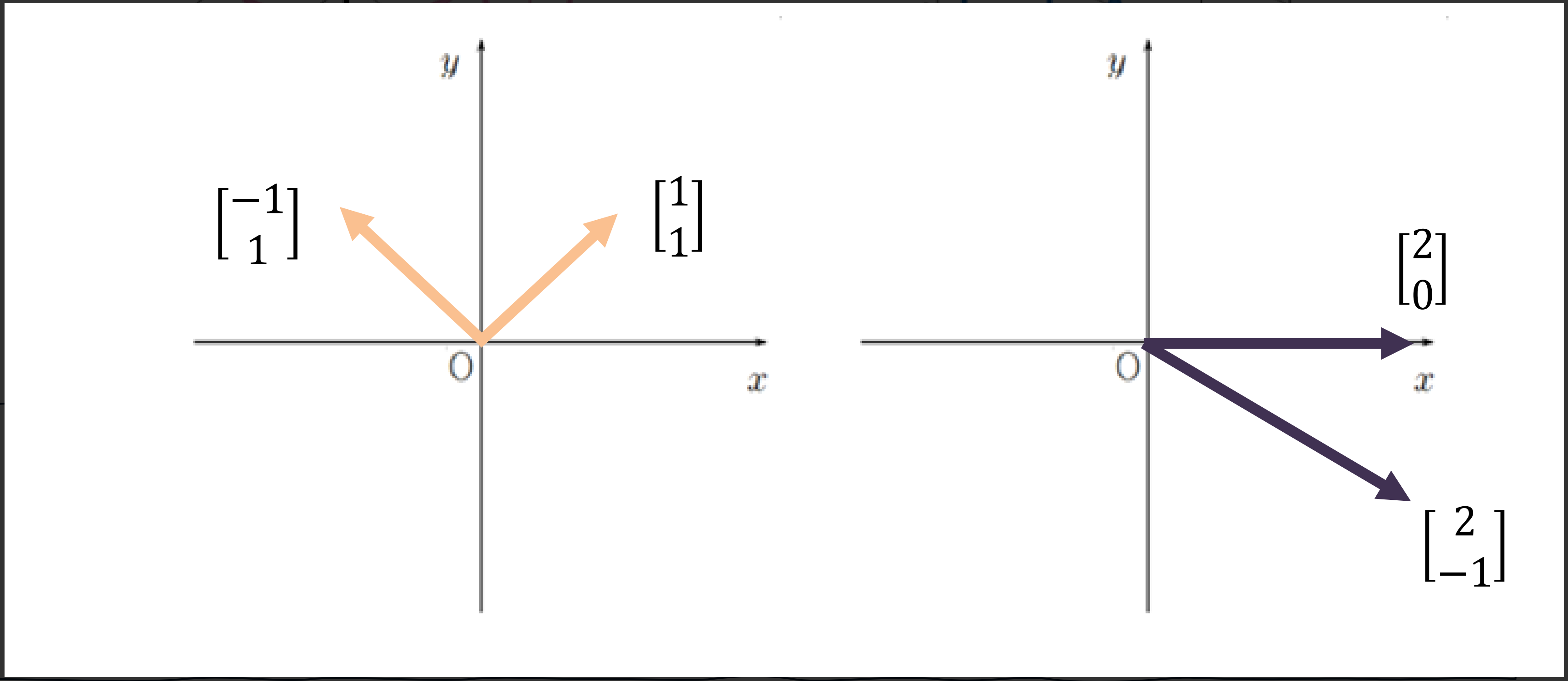
- 기저 : 어떤 벡터공간 V를 span하는 **가장 작은** 집합
- 벡터 v_1 ,v_2, … , v_n 가 **선형 독립**이며,

벡터공간 V를 **Span**할 경우 v_1 ,v_2, … , v_n은 벡터공간 V의 기저가 됨

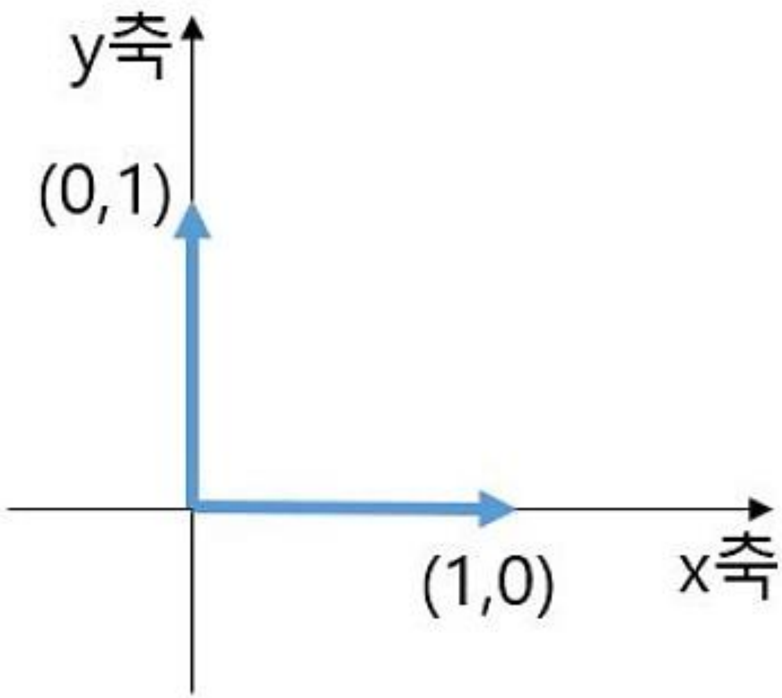
기저

기저는 유일하지 않음

ex) 2차원 평면을 $\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$로 표현할 수 있고 $\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$로도 표현 가능



기저



표준 기저
(Standard Basis)

- $\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \ldots, \begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$ 로 표현되는 기저

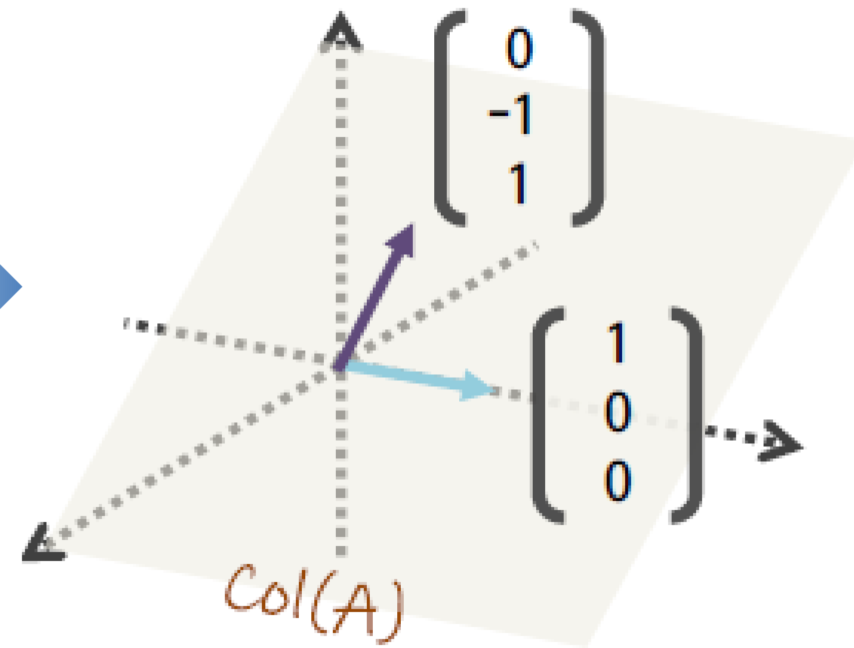
- 표준 기저는 **서로 직교**하며 크기가 **1**임

열공간

열공간 (Column Spaces)

행렬 A의 **열벡터의 span**으로 만들어지는 벡터 공간

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



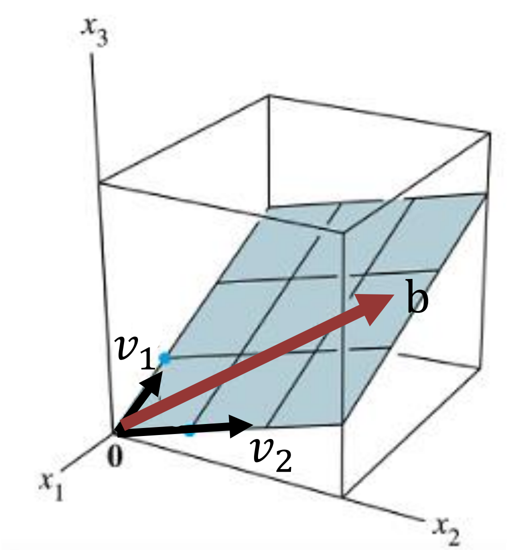
선형 시스템에서의 열공간의 의미

Ax = b 에서

해가 존재하는 경우

Ax = b 에서

해가 존재하지 않는 경우



행렬 A가 열벡터 v_i 에 의해

$[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n]$ 으로 표현될 때,

벡터 b가 span$\{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n\}$에

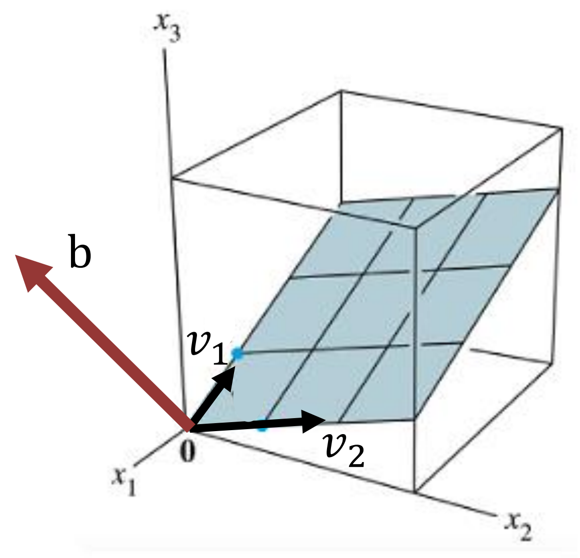
의해 만들어지는 **벡터공간에 속함**.

선형 시스템에서의 열공간의 의미

Ax = b 에서
해가 존재하는 경우

Ax = b 에서
해가 존재하지 않는 경우

행렬 A가 열벡터 v_i 에 의해
$[v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n]$ 으로 표현될 때,
벡터 b가 span$\{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n\}$에
의해 만들어지는 **벡터공간에 속하지 않음**



선형시스템 Ax = b가 **모든 벡터 b**에 대해서 **해를 가진다**는 것의 의미?

열벡터를 v_i 라고 할 때,

b는 span$\{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n\}$에 속해야 하므로,

span$\{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n\}$는

모든 벡터를 표현할 수 있어야함

Span$\{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \cdots \quad v_n\}$가 **$\mathbb{R}^n$을 형성함!**

열공간의 기저 탐색

열공간의 기저

피벗 컬럼에 해당하는 **열의 집합**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ERO}} \cdots \xrightarrow{\text{ERO}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

1) 주어진 행렬을 REF로 만든다

2) Pivot Column을 찾는다

3) 그 Column들을 모아 놓은 집합이 **열공간의 기저**

열공간의 기저 탐색

따라서 $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ 의 기저는 $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

열공간의 기저

피벗 컬럼에 해당하는 열의 집합

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ERO}} \cdots \xrightarrow{\text{ERO}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

REF

1) 주어진 행렬을 REF로 만든다

2) Pivot Column을 찾는다

3) 그 Column들을 모아 놓은 집합이 **열공간의 기저**

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$가 아님에 주의

영공간

영공간 (Null Space)

- 영공간은 **Ax = 0의 해공간**을 의미
- 즉 Ax = 0를 만족하는 벡터 x들에 의해 생성되는 **벡터공간**
- 영벡터는 항상 영공간에 포함됨

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$A \quad x \quad = 0$$

영공간의 기저 탐색

영공간의 기저

자유변수를 계수로 두는 선형결합을 표현할 때,
존재하는 벡터들의 집합

Q *다음 행렬의 영공간의 기저를 구해보자*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ERO}} \cdots \xrightarrow{\text{ERO}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Augmented Matrix *RREF*

$x_1 = -x_2 - 2x_4,\ x_3 = x_4$가 되므로, 벡터로 표현하면

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - 2x_4 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

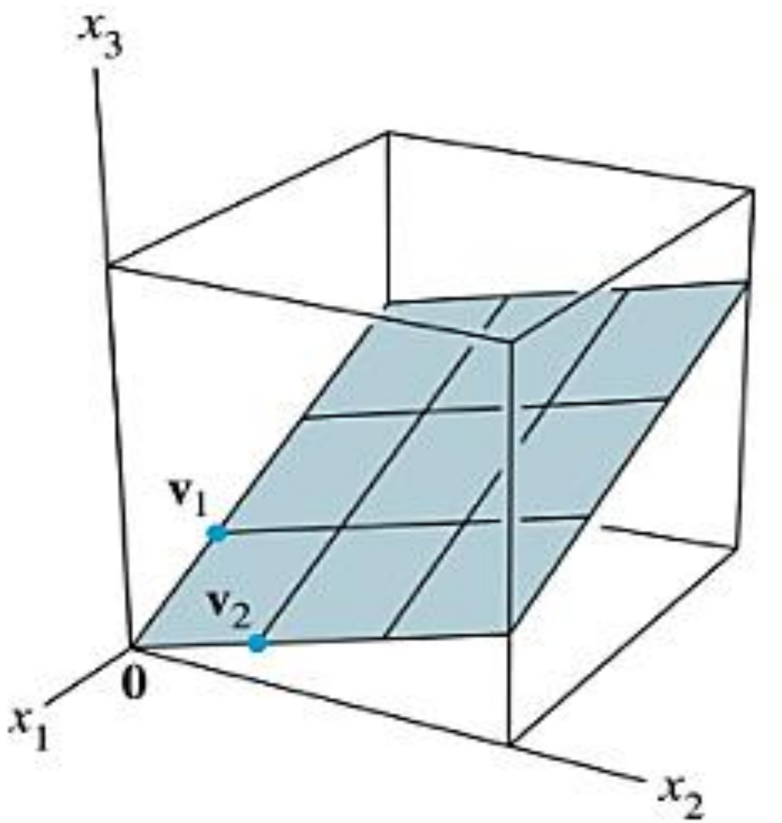
(여기서 $s = x_2$, t = x_4이고 s, t는 실수 x_2)

따라서 영공간의 기저는 $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & -1 & 9 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{ERO}} \cdots \xrightarrow{\text{ERO}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Augmented Matrix *RREF*

차원과 행렬의 계수



차원 (Dimensions)

벡터 공간의 **기저**를 이루는

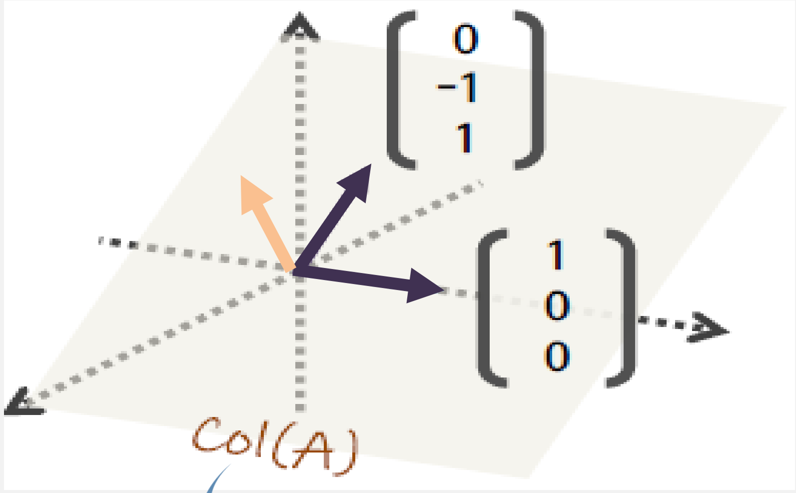
벡터의 개수

차원과 행렬의 계수

열공간의 차원

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot column : 2개



2차원 열공간

"열공간의 차원은 pivot column의 개수와 같음"

차원과 행렬의 계수

행렬의 계수 (Rank)

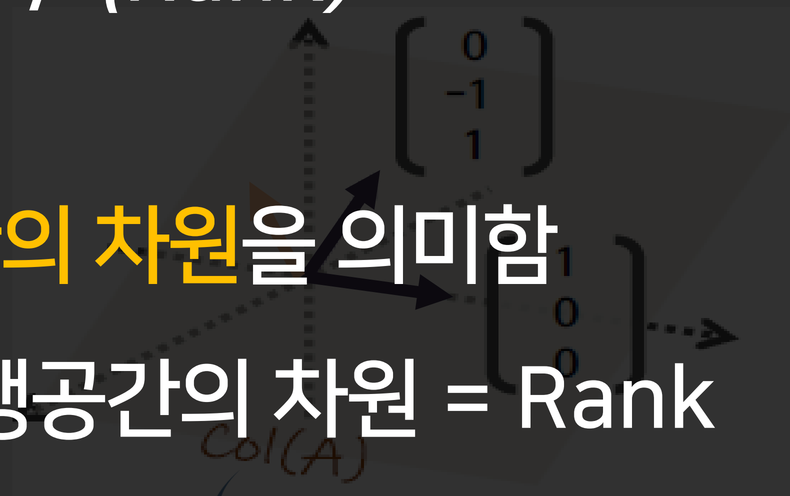
- Rank는 열공간의 차원을 의미함

열공간의 차원 = 행공간의 차원 = Rank

열공간의 차원

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pivot column : 2개



2차원 열공간

열공간의 차원은 pivot column의 개수와 같음

차원과 행렬의 계수

영공간의 차원

- 영공간의 차원은 **자유변수의 개수**와 같다.
- 열공간의 차원과 영공간의 차원을 더하면 열의 개수가 된다

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

자유 변수: 1개

1차원 영공간

5

응용편

아핀 공간과 아핀 변환

아핀 공간 (Affine Spaces)

어떤 벡터 공간 V의 **부분 공간** U와 V에 속하는 **벡터** x_0가 결합한 공간

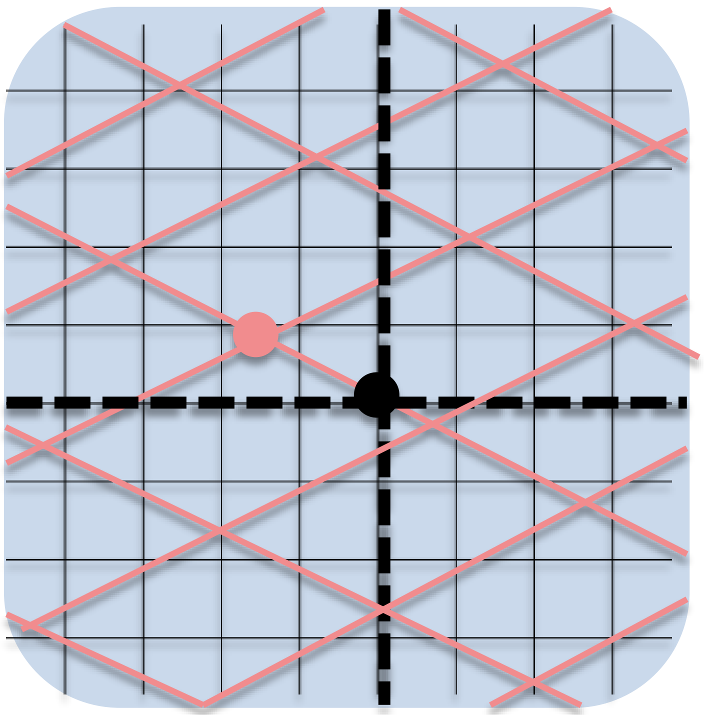
$$L = x_0 + U$$

$$y = Ax + b$$

선형 변환

평행이동

(선형성X)



평행이동 때문에 선형 변환의 조건 만족 X

$$T(x) = Ax + k \text{일때,}$$

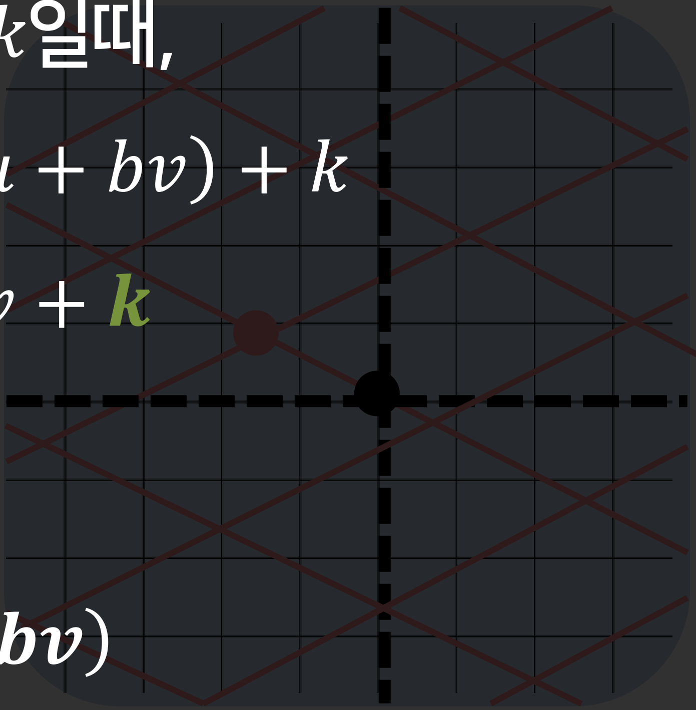
$$T(au + bv) = A(au + bv) + k$$

$$= Aau + Abv + \boldsymbol{k}$$

$$\neq$$

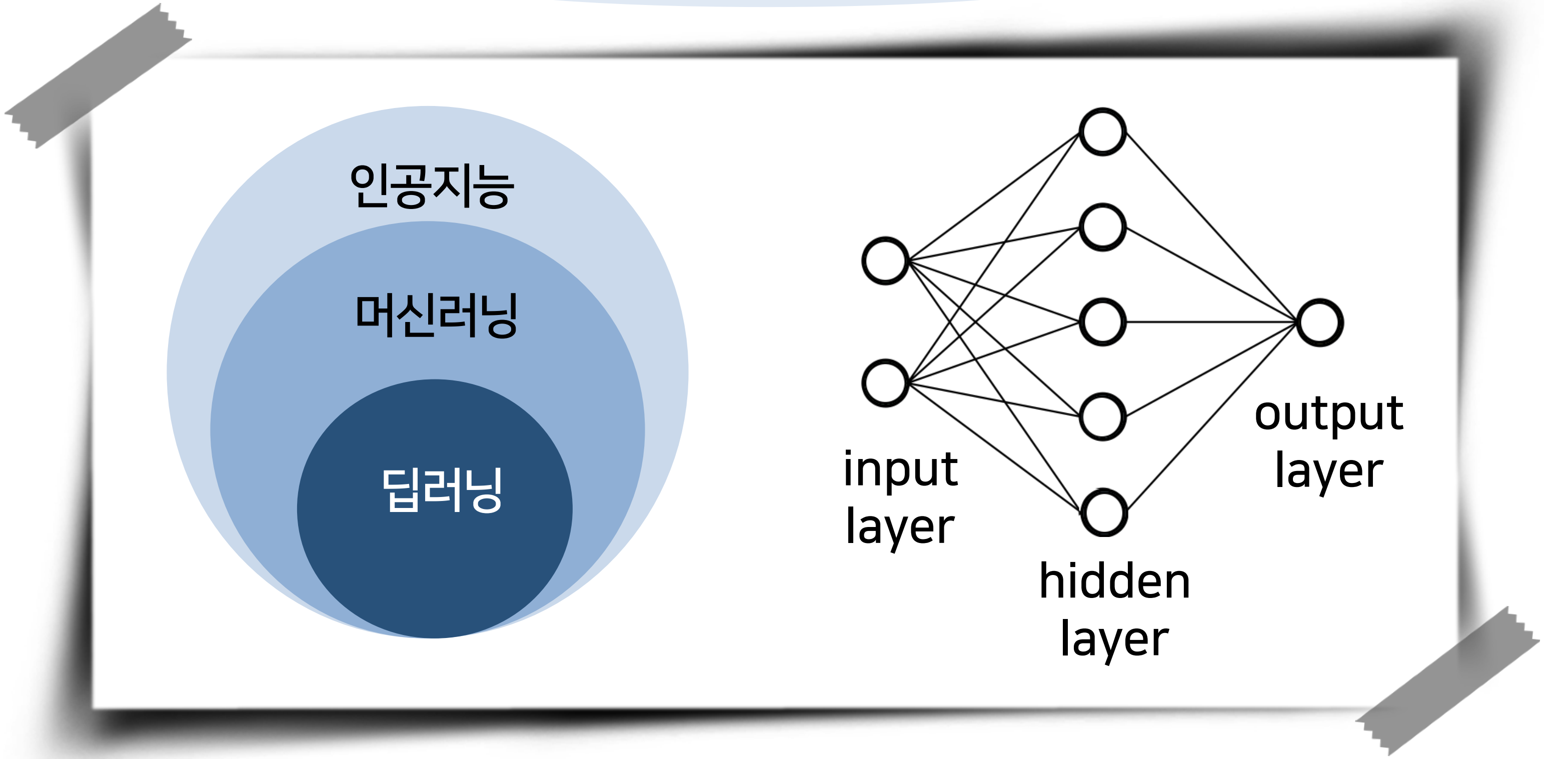
$$\boldsymbol{T(au) + T(bv)}$$

$$= (\boldsymbol{Aau} + \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{Abv} + \boldsymbol{k})$$



딥러닝

딥러닝 (Deep Learning)



머신러닝의 일종으로, **"인공신경망"** 개념 사용

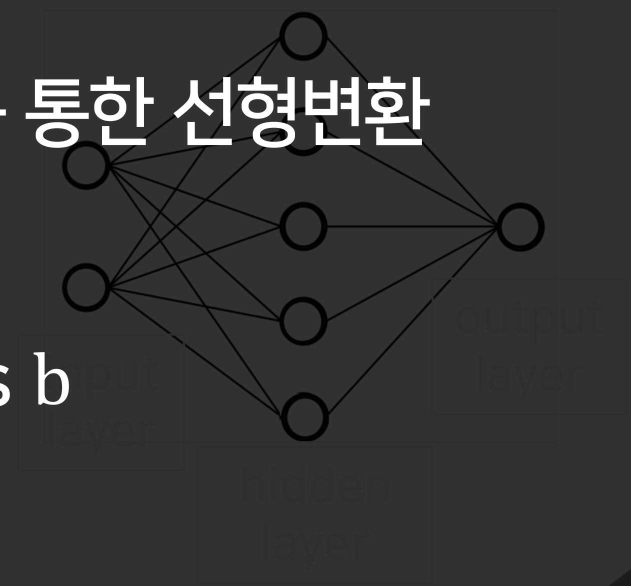
input layer와 **hidden layer**를 거치면서 학습

Affine과 Deep Learning

가중치 행렬 W를 통한 선형변환

\+

bias b



"$\boldsymbol{Wx + b}$는 아핀 변환의 $\boldsymbol{Ax + b}$ 구조와 유사"

다음 주 예고

1. 선형대수의 기하학적 접근
2. 기하학적 접근의 응용
3. 행렬의 분해/인수화
4. 응용편