Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016

Série d'exercices 13 : Applications du théorème des résidus

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin(t)}$$

pour $a > 1$.

Indication : Poser $f(z) = \frac{1}{a+\sin(z)}$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et regarder le chemin $\gamma(t) = e^{it}$.

2. (Une identité magique de $\sqrt{5}$).

(a) Montrer que pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz$$

où D est le disque centré en 0 de rayon 1 et le bord ∂D est orienté positivement. En déduire que $\binom{2n}{n} \leq 4^n$.

(b) Calculer l'intégrale

$$\int_{\partial D} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}.$$

(c) En utilisant les deux points précédents, établir la formule

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot 5^{-n} = \sqrt{5}.$$

3. Soit $f = P/Q$ une fraction rationnelle sans pôle réel avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$.

(a) Expliquer brièvement pourquoi l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

est bien définie. Si c est une fonction définie sur $\mathbb{C}$ et bornée sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$, pourquoi

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(t) f(t) dt$$

est-elle aussi bien définie ?

(b) Pour $R > 0$, considérer Γ_R le chemin paramétré par $\gamma_R(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]$. Supposons que Γ_R n'intersecte pas les zéros de Q. Utiliser le théorème des résidus pour justifier

$$\int_{-R}^{R} c(t)f(t)dt + \int_{\Gamma_R} c(z)f(z)dz = 2\pi i \sum_{p \in \mathcal{P}_R} \mathrm{Res}(cf, p)$$

où $\mathcal{P}_R$ est l'ensemble des pôles de f dans $B(0, R) \cap \mathbb{H}$.

(c) Montrer que l'intégrale suivante tend vers 0 quand R tend vers ∞

$$\int_{\Gamma_R} c(z)f(z)dz.$$

En déduire la formule

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(t)f(t)dt = 2\pi i \sum_{p \in \mathcal{P}} \mathrm{Res}(cf, p)$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pôles dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$.

(d) Justifier l'existence des intégrales suivantes et calculer leurs valeurs.

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^4}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2},$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2 + x + 1} dx, \qquad I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1 + x^4} dx.$$