Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 5

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. **On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante à l'aide des séries entières :**
$$y'' - 2zy' - 2y = 0$$
où les dérivées sont par rapport à la variable z. Ses conditions initiales sont
$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$
   (a) **Supposons que la solution s'écrit sous la forme**
$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$
dont le rayon de convergence est strictement positif. Donner des relations (de récurrence) sur les coefficients.

   (b) **À l'aide des conditions initiales, déterminer les coefficients a_n.**

   (c) **Calculer son rayon de convergence pour conclure que la solution est définie sur $\mathbb{C}$ tout entier.**

   (d) **Reconnaissez-vous cette fonction ?**

2. **On considère une famille de chemins reliant 0 à $1+i$ sur lesquels on calcule quelques intégrales.**

   (a) **Pour tout $k > 0$, on définit**
$$\gamma_k(t) = t + it^k, \quad t \in [0, 1].$$
Vérifier que ce sont des chemins qui relient 0 à 1+i. Les représenter graphiquement.

   (b) **Calculer les intégrales suivantes le long des chemins γ_k :**
$$\int_{\gamma_k} dz, \quad \int_{\gamma_k} z dz.$$
   (c) **Que remarquez-vous ?**

3. La cardioïde est donnée par l'équation polaire

$$r(\theta) = 1 + \cos(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Quelle est la période de cette courbe ?

   (b) Calculer sa longueur sur une période.

   (c) Dessiner la courbe.

4. Soient $R > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons $\gamma_{R,n}$ un chemin qui fait n tours le long du bord du disque centré en 0, de rayon R et orienté positivement.

   (a) Donner une paramétrisation de $\gamma_{R,n}$.

   (b) Calculer pour chaque entier $k \in \mathbb{Z}$ l'intégrale

$$\int_{\gamma_{R,n}} z^k dz.$$

   (c) Que remarquez-vous ?

5. Les *nombres de Bernoulli* sont définis par la série formelle

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n \geq 0} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

   (a) Démontrer la formule de récurrence

$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k+1}{n} B_n = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   et calculer les B_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

   (b) Démontrer que $B_{2j+1} = 0$ pour $j > 0$.