Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 16

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

1. On se rappelle que si f est une fonction 2π-périodique, alors ses coefficients de Fourier sont définis par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt.$$

   (a) Monter que la série de Fourier formelle de f s'écrit comme

$$f(\theta) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n\geq 1}[\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)]\cos(n\theta) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)]\sin(n\theta)$$

   (b) Exprimer les coefficients devant cos et sin en termes d'intégrales. On les notera $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Exprimer $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (c) Montrer que si f est paire, alors $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Que peut-on dire sur sa série de Fourier ?

   (d) Montrer que si f est impaire, alors $\hat{f}(n) + \hat{f}(-n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Que peut-on dire sur sa série de Fourier ?

   (e) Montrer que si f est π-périodique, alors $\hat{f}(n) = 0$ pour tout n impair.

   (f) Montrer que f est réelle si et seulement si $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. Soit f une fonction 2π-périodique.

   (a) Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\widehat{f'}(n) = in \cdot \hat{f}(n)$$

   pour tout $n \in \mathbb{Z}$. (*Indication : intégration par partie.*)

   (b) Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 0$. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{C}{|n|^k}$$

   pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ceci montre en particulier que si f est 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$, sa série de Fourier converge uniformément et simplement vers f.

3. Soit $f(\theta) = |\theta|$ sur $[-\pi, \pi]$.
   (a) Dessiner le graphe de f.
   (b) Calculer ses coefficients de Fourier :
$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \pi/2 & \text{si } n = 0 \\ \dfrac{-1 + (-1)^n}{\pi n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$
   et donner la série de Fourier de f en termes de cos et sin.
   (c) Pourquoi la fonction f est égale à sa série de Fourier en tout point de $[-\pi, \pi]$?
   (d) Retrouver les égalités :
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

4. (*) Posons la fonction étagère suivante :
$$f(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \theta \leq \pi \\ 0 & \text{si } \theta = 0 \\ -1 & \text{si } -\pi \leq \theta < 0 \end{cases}$$
   (a) Montrer que ses coefficients de Fourier s'écrivent comme :
$$\hat{f}(n) = \frac{i}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{n}$$
   pour $n \neq 0$.
   (b) Donner la série de Fourier en termes de sin. Pourquoi le théorème du cours ne suffit pas pour justifier que la série converge simplement vers f ?
   (c) Avec un théorème plus fort, on a en fait la convergence simple (mais pas uniforme) de la série de Fourier vers la fonction. Retrouver *la formule de Leibniz*
$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

5. (*) Étudier la fonction f 2π-périodique définie par
$$f(\theta) = \begin{cases} \theta^2 - \pi\theta & \text{si } 0 \leq \theta \leq \pi \\ -\theta^2 - \pi\theta & \text{si } -\pi \leq \theta \leq 0 \end{cases}.$$
   (a) Calculer ses coefficients de Fourier : pour tout $n \neq 0$, on a
$$\hat{f}(n) = \frac{2}{i\pi} \cdot \frac{-1 + (-1)^n}{n^3}$$
   (b) Expliquer pourquoi f est continue, dérivable et de dérivée continue. Utiliser 2.(a) et 3.(b) pour retrouver ses coefficients de Fourier $\hat{f}(n)$.
   (c) Justifier pourquoi pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$f(\theta) = -\frac{8}{\pi} \sum_{k \geq 0} \frac{\sin((2k+1)\theta)}{(2k+1)^3}.$$
   (d) En déduire que
$$\sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$