Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 15

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

1. On se place dans l'espace $\mathbb{C}([0, L], \mathbb{R})$, soit le produit scalaire suivant
$$\langle f, g\rangle = c_L \int_0^L f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$
Trouver c_L pour que les fonctions sur $[0, L]$,
$$f_k(x) = \sin(\frac{2\pi}{L}kx) \quad \text{et} \quad g_k(x) = \cos(\frac{2\pi}{L}kx)$$
forment une famille de fonctions orthonormales, où k est entier.

2. Soit $\Delta f(x) = -f''(x)$. Vérifier que $g_\omega(x) = \sin(\omega x)$ et $f_\omega(x) = \cos(\omega x)$ sont des fonctions propres, au sens de $\Delta g = \lambda g$ (et $\Delta f = \mu f$). Calculer les valeurs propres λ, μ correspondantes. Vérifier ensuite que les combinaisons linéaires de g_ω et f_ω sont aussi des valeurs propres. Qu'en est-il pour des combinaisons linéaires de g_ω et f_σ.

3. (a) Soit $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, l'équation des ondes (u_{tt} représente la dérivée deuxième en t, $\partial^2 u/\partial t^2$). Montrer que toute solution de cette équation peut s'écrire $u(x, t) = f(x + ct) + f(x - ct)$.
   (b) Montrer ensuite que l'onde stationnaire $u(x, t) = \sin(x)\sin(ct)$ est une solution de l'équation des ondes. Décomposer ensuite cette solution comme dans le point précédent.
   (c) Trouver une solution de l'équation $u_{tt} = 4u_{xx}$ valide pour tous x et t avec les conditions aux bords $u(x, 0) = x^2$ et $u_t(x, 0) = x$.

4. Calculer les coefficients de Fourier des fonctions suivantes
   (a) $f(\theta) = (\pi - \theta)^2/4$, où $0 \leq \theta \leq 2\pi$,
   (b) $f(\theta) = \theta(\theta^2 - \pi^2)$, où $-\pi \leq \theta \leq \pi$,
   (c) $f(\theta) = \cos(\theta)$, pour $-2\pi \leq \theta \leq 0$.