Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 25 : Echantillonnage et Formule Sommatoire de Poisson

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

1. Calculer les transformées de Fourier des deux fonctions suivantes, on suppose $\lambda > 1$:

$$\text{(a) } f_1(x) = (1-x^2)\mathbb{1}_{|x|\leqslant 1}, \quad \text{(b) } f_2(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } |x| > \lambda/2, \\ 1 \text{ pour } |x| \leqslant 1/2, \\ \frac{2}{\lambda-1}(x+\lambda/2) \text{ pour } x \in (-\lambda/2, -1/2), \\ \frac{2}{1-\lambda}(x-\lambda/2) \text{ pour } x \in (1/2, \lambda/2). \end{cases}$$

2. Soit $\alpha \in (0,1)$ un nombre non-entier.
   (a) Appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction
   $$g : x \mapsto \begin{cases} 1-|x| \text{ pour } |x| \leqslant 1 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
   pour obtenir
   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}.$$
   (b) Montrer qu'on peut en déduire que pour $\alpha \in (0, 1/2)$ on a
   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{n+\alpha} = \frac{\pi}{\tan \pi\alpha}.$$
   Quel est le sens de la convergence de cette somme ? *Indication* : considérer la somme de $-N$ à N, puis laisser N tendre vers l'infini.

3. Résolvez l'équation différentielle suivante en utilisant la transformé de Fourier,
$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} f(x) - x f(x) = 0$$

4. En remarquant l'apparition de transformées de Fourier, calculer les intégrales suivantes,
$$\text{(a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(ay)\cos(xy)}{y} \mathrm{d}y, \quad \text{(b) } \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} \mathrm{d}x$$

5. (Echantillonnage de Shannon) Soit f une fonction à décroissance modérée dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est supportée sur l'intervalle $I = [-1/2, 1/2]$. Nous allons montrer que f est entièrement définie par sa valeur sur les entiers $n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Prouver la formule suivante,

   $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)K(x-n) \quad \text{où } K(y) = \frac{\sin \pi y}{\pi y}.$$

   Indication : Noter que comme $\widehat{f}$ est à support fini, elle peut être écrite comme une série de Fourier sur son support. Comment peut-on l'écrire sur tout $\mathbb{R}$? Que pouvez-vous dire sur la décroissance de K et donc de la vitesse de convergence de cette série.

   (b) Soit $\lambda > 1$ et considérer la fonction définie dans l'exercice 1b. Nous allons appliquer un raisonnement similaire au point précédent pour trouver la formule suivante,

   $$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda} f(\frac{n}{\lambda}) K_\lambda \left(x - \frac{n}{\lambda}\right) \quad \text{où } K_\lambda(y) = \frac{\cos \pi y - \cos \pi\lambda y}{\pi^2(\lambda-1)y^2}$$

   Que peut-on dire cette fois sur la décroissance de K_λ ? Et sur la vitesse de convergence de la série.