Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 10 : Singularités et développements de Laurent

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. **Calculer les limites suivantes dans $\bar{\mathbb{C}}$ (si elles existent)**
$$\lim_{z\to\infty}(z^4+3z-4) \qquad \lim_{z\to\infty}\frac{2+z}{z^2-3} \qquad \lim_{z\to\infty}\bar{z}/z \qquad \lim_{z\to\infty}\tan(\frac{1}{z})$$

2. **Développer la fonction**
$$f(z)=\frac{6}{z(z+1)(z-2)}$$
dans une série de Laurent pour les régions $0<|z|<1$, $1<|z|<2$ et $2<|z|<\infty$.

3. **Les fonctions suivantes possèdent une singularité au point $z=0$. Décider s'il s'agit d'une singularité supprimable, d'un pôle (de quel ordre) ou d'une singularité essentielle :**
$$\frac{6+z}{z^3(4+3z^4)}, \quad \frac{1}{\tan(z)}, \quad \frac{\sin(z)}{z}, \quad \cos\left(\frac{1}{z}\right), \quad \frac{z^2}{e^z-1-z-z^2/2-z^3/6}.$$

4. Soit f méromorphe dans $\mathbb{C}$ mais non entière. Montrer que $g(z)=e^{f(z)}$ n'est pas méromorphe dans $\mathbb{C}$.

5. Soit f une fonction holomorphe sur $A=\{z \mid 0<|z-c|<1\}$, où $c\in\mathbb{C}$. Supposer qu'il y a des constantes $D>0$ et $k>0$ telles que $|f(z)|<\frac{D}{|z-c|^k}$ pour tout $z\in A$. Est-ce que c peut-être une singularité essentielle de f ?

6. Trouver les points de branchements de $f(z)=\sqrt{z^2+z(i-1)-i}$ et définir f comme fonction univaluée avec une coupure.