Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016

Série d'exercices 17 : Convolution et Approximation de l'unité

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

Définition. *On définit l'espace des fontions intégrables sur* $\mathbb{R}$ *par*

$$L^1(\mathbb{R}) = \{f : \int_{\mathbb{R}} |f|(x)\mathrm{d}x < \infty\}.$$

Pour deux fontions $f, g \in L^1(\mathbb{R})$*, on définit la convolution*

$$f \star g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y.$$

Un résultat classique (qui sera vu plus tard en classe) affirme que la convolution est une opération fermée dans $L^1(\mathbb{R})$*.*

1. Calculer le produit de convolution $f \star g$ pour les fonctions suivantes, faites également une esquisse de chaque fonction.

   (a) $f(x) = g(x) = \mathbb{1}_{\{-1 \leq x \leq 1\}}$;

   (b) $f(x) = \mathbb{1}_{\{-1 \leq x \leq 1\}}$, $g(x) = (1 - |x|)\, \mathbb{1}_{\{-1 \leq x \leq 1\}}$.

2. (a) Montrer que le produit ordinaire de fonctions n'est pas une opération fermée dans $L^1(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que les translations permutent avec la convolution, *i.e.* : $f \star (T_a g) = (T_a f) \star g = T_a(f \star g)$, où T_a est l'opérateur de translation, défini par $T_a f(x) = f(x-a)$.

   (c) Utiliser le point précédent pour exprimer la convolution comme un produit scalaire (entre des fonctions légèrement modifiées).

3. Trouver un contre-exemple à la proposition : « le produit de convolution de deux fonctions intégrables (sur $\mathbb{R}$) est toujours continu ».
   Indication : chercher une fonction intégrable dont le produit de convolution diverge en un point (par exemple en 0).

Définition. *Pour la suite, on se place dans $[-\pi, \pi]$. On dit qu'une suite de fontions $(F_n)_{n\geq 1}$ est une approximation (bornée) de l'unité si*

(1) pour tout $n \geq 1$, on a $\int F_n(x)\mathrm{d}x = 1$,

(2) il existe une constante M telle que $\int |F_n(x)|\mathrm{d}x \leq M$ pour tout $n \geq 1$,

(3) pour tout $\delta > 0$, on a $\int_{\delta<|x|<\pi} F_n(x)\mathrm{d}x \to 0$ pour $n \to \infty$.

4. Pour $x \in [-\pi, \pi]$ on définit

$$D_N(x) := \sum_{n=-N}^{N} e^{inx}.$$

   (a) Montrer que $D_N(x) = \frac{\sin((N+1/2)x)}{\sin(x/2)}$.
   Indication : Poser $\omega = e^{\mathrm{i}x}$ et considérer des séries géométriques en ω.

   (b) Est-ce que les D_N forment une famille d'approximation de l'unité ?
   Indication : Trouver le comportement de $\int_0^\pi |D_N(x)|$ lorsque $N \to \infty$.

5. Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ et $0 \leq r < 1$ on pose

$$P_r(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}.$$

   (a) (*) Vérifier que l'on peut réécrire

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

   (b) Vérifier que quand $r \to 1$ les fonctions $P_r(\theta)$ forment une approximation de l'unité (avec $r \to 1$ au lieu de $n \to \infty$).
   Indication : Il existe plusieurs façons de calculer $\int P_r(\theta)$ (au moins 3). L'une d'elle, particulièrement élégante, revient à poser $z = re^{\mathrm{i}\theta}$, puis calculer $\mathrm{Re}\,\frac{1+z}{1-z}$. Ensuite utiliser l'exercice 1 de la serie 8 pour calculer l'integrale.

   (c) Soit f une fonction entière et ∂D le bord du disque unité orienté positivement. Rappelons la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\partial D} \frac{f(w)}{w - z}\mathrm{d}w$$

   pour f holomorphe dans un voisinage de D. Si on écrit $F(\theta) = f(e^{\mathrm{i}\theta})$, alors démontrer que

$$f(re^{\mathrm{i}\phi}) = \frac{1}{2\pi}\big(F \star P_r\big)(\phi).$$

   (d) Soit $t : \partial D \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et posons $T(\theta) = t(e^{\mathrm{i}\theta})$. Montrer que $u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} T \star P_r(\theta)$ est l'unique fonction harmonique sur D qui coïncide avec T sur ∂D.
   Indication : Pour prouver l'existance, se rappeler du lien entre les fonctions harmoniques et les fonctions holomorphes. Pour l'unicité, utiliser le principe du maximum.