Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016

Série d'exercices 8 : Principe du maximum et ses applications

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. **Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U (alors $\mathrm{Re}(f)$ est une fonction harmonique). Montrer que pour tout $z \in U$ et chaque petit cercle C de rayon $r > 0$ orienté positivement avec centre z, on a**

$$\mathrm{Re}(f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{Re}(f)(z + re^{is})ds$$

2. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et $c \in U$. Soit $f \colon U \to \mathbb{C}$ une fonction continue dans U et holomorphe dans $U \setminus \{c\}$. Démontrer que, f est holomorphe dans tout U. *Indication.* Démontrer que la fonction $g(z) = (z - c)f(z)$ est $\mathbb{C}$-différentiable en c et donc aussi dans U. Appliquer ensuite le théorème de Cauchy–Taylor.

   En utilisant le point ci-dessus, montrer que la fonction définie par l'équation

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{e^z - 1} & \textbf{pour } z \neq 0 \\ 1 & \textbf{pour } z = 0, \end{cases}$$

   est holomorphe dans $D(0, 2\pi)$.

3. **Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans $D(0,\rho)$ et soit $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ avec $0 < r < \rho$. Calculer**

$$\int_\gamma \frac{f(\eta)}{(\eta - a)(\eta - b)} d\eta$$

   pour différentes positions de a et b par rapport au cercle γ.

4. *Principe du maximum.* Nous allons faire une autre preuve du principe du maximum en se basant sur le théorème de l'application ouverte. Soit $U \subset \mathbb{C}$ un ouvert et f holomorphe.
   (a) Montrer que si $V \subset U$ est ouvert, alors $|f|(V)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.
   (b) Conclure que le f ne peut atteindre son maximum dans U.

5. Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que $|z| \leq 1 \Rightarrow |g(z)| \leq 1$ et telle que $g(0) = 0$ (c'est à dire que l'image du disque unité par g est dans le disque unité).
   (a) Trouver une constante c (dépendente de g) telle que

$$f(z) = \begin{cases} \frac{g(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ c & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

   est holomorphe sur $D = \{|z| \leq 1\}$. Cette constante est-elle unique ?
   (b) Appliquer le principe du maximum pour f sur D et en déduire que $|c| \leq 1$.

(c) Soit $0 < r < 1$. Appliquer le principe du maximum pour f sur $\{|z| \leq r\}$ pour montrer que sur D, on a $|g(z)| \leq |z|$.

(d) En supposant $|g(z)| = |z|$ pour tout $z \in D$, appliquer le principe du maximum pour f et en deduire que $g(z) = az$ avec a une constante satisfaisant $|a| = 1$.

6. Soit $D = D(0,1)$ le disque unité centré en l'origine, $f : D \to D$ holomorphe qui s'annule en $z_1, z_2, \cdots z_n$ (comptés avec multiplicité). Nous allons montrer que $|f(0)| \leq |z_1 z_2 \cdots z_n|$.

   (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas $0 < |z_i| < 1$ (a priori $|z_i|$ pourrait être 0 ou 1).

   (b) On suppose désormais que $0 < |z_i| < 1$. Montrer que l'application
   $$\Phi_{z_i} : \bar{D} \to \mathbb{C} \ , \ z \mapsto \frac{z - z_i}{1 - \overline{z_i} z}$$
   est holomorphe.

   (c) Montrer ensuite que l'image par Φ_{z_i} d'un point sur le bord de D reste sur le bord de D. Montrer que $|\Phi_{z_i}(z)| < 1$ pour tout $|z| < 1$.

   (d) Montrer que l'application
   $$\tilde{g} : D \setminus \{z_1, z_2, \cdots, z_n\} \to \mathbb{C} \ , z \mapsto f(z) \prod_{i=1}^{n} (\Phi_{z_i}(z))^{-1}$$
   peut être prolongée en une fonction holomorphe g sur tout le disque D (de la même façon que dans l'exercice 5). Attention toutefois lorsque le zéro n'est pas simple.

   (e) Montrer que $|g(z)| \leq 1$ sur le bord de D. En déduire que cette borne s'applique pour tout z dans D et donc à $z = 0$.

   (f) Conclure la preuve en explicitant la borne obtenue dans le point précédent.