Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 3

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. Le développement en série de e^x et $\ln(x)$ est donné par

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

Calculer les quatre premiers termes (jusqu'à l'ordre x^3) de la série

$$\frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

2. Trouver une solution $u(x,y)$ du problème de Dirichlet suivant :

$$\begin{aligned} &\Delta u = 0 \text{ sur } \Omega = [0,1] \times [0,1], \\ &u(x,0) = u(0,y) = 0, \quad \text{pour } x, y \in [0,1], \\ &u(x,1) = x, \quad \text{pour } x \in [0,1], \\ &u(1,y) = y, \quad \text{pour } y \in [0,1]. \end{aligned}$$

Indication : **Considérer la partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe (polynomiale très simple).**

3. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ où :

1) $a_n = (n \log n)^2$
2) $a_n = n!$
3) $a_n = \frac{1}{n!}$
4) $a_n = \frac{3^n + n^2}{4^n + 3n}$.
5) **Déterminer le domaine de définition de la fonction de Bessel d'indice r définie par la série suivante**

$$J_r(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^r \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k k!(k+r)!} z^{2k}.$$

4. (Estimation numérique de π à l'aide de la formule de Leibniz.)
Le but de cet exercice est de démontrer la formule de Leibniz suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

(1) Rappeler la définition de la fonction arctan. Calculer sa dérivé à partir de celle de tan.

(2) Donner le développement en série de $\arctan(x)$ autour de $x = 0$. Quel est son rayon de convergence ?

(3) Démontrer la formule de Leibniz.

(4) Si l'on cherche à calculer π avec une précision de 10^{-5}, comment faire à l'aide de cette formule ?

5. Déterminer les coefficients de la série

$$f(z) = \frac{z^2 + 11z - 2}{(2z-1)(z^2-4)} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

et calculer son rayon de convergence. Pour une fraction rationnelle arbitraire, deviner une formule pour le rayon de convergence. Quel est le rayon de convergence de la série qu'on obtient si l'on développe la fonction $f(z)$ autour du point $c = 1$?
Indication : Décomposer en fractions simples.

6. Soient $\{a_n\}_{n=1}^N$ et $\{b_n\}_{n=1}^N$ deux suites finies de nombres complexes. Soit $B_k = \sum_{n=1}^k b_n$ et par convention on pose $B_0 = 0$. Démontrer l'égalité suivante (la sommation d'Abel) :

$$\sum_{n=M}^{N} a_n b_n = a_N B_N - a_M B_{M-1} - \sum_{n=M}^{N-1} (a_{n+1} - a_n) B_n.$$

Démontrer les résultats suivants sur le bord du disque de convergence (qui vaut 1) :

1) La série $\sum nz^n$ ne converge en aucun point du cercle unité.

2) La série $\sum z^n/n^2$ converge en tout point du cercle unité.

3) La série $\sum z^n/n$ converge en tout point du cercle unité, sauf en $z = 1$ (utiliser la sommation d'Abel).