Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 19 :

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

Définition. *Pour (f_n) et f des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ où I est un intervalle dans $\mathbb{R}$, on dit que f_n converge vers f*
— simplement *si pour tout $x \in I$, on a $f_n(x) \to f(x)$;*
— uniformément *si $||f_n - f||_\infty \to 0$;*
— dans L^1 *si $\int_I |f_n - f| \to 0$;*
— dans L^p $\int_I |f_n - f|^p \to 0$.

1. Montrons que les notions définies ci-dessus ne sont pas équivalentes.
   (a) Montrer que la convergence uniforme implique la convergence simple. La réciproque ?
   (b) Soit $I = [0,1]$. Montrer que la convergence dans L^2 implique celle dans L^1. La réciproque ? Que se passe-t-il si $I = \mathbb{R}$?
   (c) Qu'en est-il pour la convergence simple et la convergence dans L^1 ?
   (d) Pour $I = [0,1]$, trouver une suite de fonctions qui converge dans L^2 mais ne converge en aucun point.

2. Soit $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ une suite de fonction Riemann intégrable sur l'intervalle $[0,1]$ et telle que
$$\int_0^1 |f_k(x) - f(x)| \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{pour } k \to \infty.$$
Montrer que $\hat{f}_k(n) \to \hat{f}(n)$ uniformément en n pour $k \to \infty$.

3. On a vu en cours que si f est une fonction intégrable, bornée, 2π-périodique, alors
$$(P_r \star f)(\theta) \to f(\theta) \quad \text{pour } r \to 1,$$
en tout point de continuité de f. Soit maintenant f (toujours intégrable, bornée, 2π-périodique) avec un saut en ϕ, ie :
$$f(\phi^+) = \lim_{h\to 0^+} f(\phi + h) \neq \lim_{h \to 0^-} f(\phi + h) = f(\phi^-)$$
où les deux limites existent. Montrer que
$$\lim_{r\to 1^-} (P_r \star f)(\phi) = \frac{f(\phi^+) + f(\phi^-)}{2}.$$
Indication : Montrer que $\int_0^\pi P_r(\theta)\mathrm{d}\theta = 1/2$ puis adapter la preuve vue en cours sur la convergence des bons noyaux.

4. Le but de l'exercice est de déterminer la somme des n^{-2k}, pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné. Les questions peuvent (presque) être traitées séparément, si vous n'arrivez pas une question vous pouvez utiliser la réponse pour la suite.

   (a) Soit $f(z) = \frac{\pi}{\tan(\pi z)}$. Déterminer pour $f(z)$ les pôles et les résidus en ces pôles si $\operatorname{Re} z \in [-1, 1]$.

   (b) Montrer que f est 2-périodique et en déduire pour $f(z)$ tous les pôles et tous les résidus en ces pôles.

   (c) Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ et Γ_n le rectangle passant par les sommets $\{-n-1/2-\mathrm{i}n, -n-1/2+\mathrm{i}n, +n+1/2-\mathrm{i}n, +n+1/2+\mathrm{i}n\}$. Dessiner grossièrement Γ_n. Montrer que pour $z \in \Gamma_n$ on a $|z|^{2k} > n^2$ et $|f(z)| < 2\pi$. Si on définit
   $$I_n = \int_{\Gamma_n} f(z)/z^{2k} \mathrm{d}z,$$
   montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.

   (d) Exprimer I_n avec le théorème des résidus et en déduire que
   $$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{2k}}, 0\right) = -2\sum_{j=1}^{\infty} j^{-2k}.$$

   (e) Montrer que $f(z) = \mathrm{i}\pi + \frac{2\pi\mathrm{i}}{e^{2\pi\mathrm{i}z}-1}$ puis calculer $\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z^{2k}}, 0\right)$ en utilisant l'exercice 5 de la série 5. Cela permet de conclure que
   $$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k} = \frac{(2\pi\mathrm{i})^{2k} B_{2k}}{-2(2k)!}.$$

   Pourquoi est-ce que l'argument ne marche pas si on essaie avec $2k+1$? On notera qu'actuellement on ne connaît même pas le résultat si on met 3 au lieu de $2k$.