Processus stochastiques en temps discret

TD 7 - Marches aléatoires et réseaux électriques

A rendre pour le 28 novembre 2013

Si vous repérez des erreurs dans les feuilles d'exercices ou si vous avez des questions, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante : jhihhuang.li@gmail.com

Dans cette série, on s'intéressera aux marches aléatoires pondérées en les associant à des réseaux électriques. C'est une technique de physique qui sera rigoureusement justifiée par la suite et qui permettra, d'une part, de retrouver des résultats classiques, et d'autre part, montrer des énoncés qui ne sont a priori pas évidents.

La série est composée d'un seul problème et de plusieurs parties. Les parties n'étant pas tout à fait indépendantes les unes des autres et la difficulté étant croissante, il est conseiller de **traiter les questions dans l'ordre**. Par contre, si vous n'avez pas réussi à démontrer certains résultats, vous pourrez quand même les utiliser pour la suite de la série. Les preuves devront être soigneusement justifiées et accompagnées des calculs nécessaires.

Pour commencer, on prend $G = (V, E)$ un graphe, où V désigne l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes. Une arête (orientée) est donnée par un couple (x, y) et ici, le graphe est toujours non-orienté, c'est-à-dire $(x, y) \in E \Leftrightarrow (y, x) \in E$. Pour la suite, on suppose également que le graphe est *simple* (aucun sommet n'est relié à lui-même), *connexe* (entre deux sommets quelconques il existe toujours un chemin les reliant) et *localement fini* (chaque sommet n'a qu'un nombre fini de voisins). Le graphe est a priori infini (dénombrable).

Une fonction positive c sur $V \times V$ est appelée *conductance* si elle est symétrique et s'annule en (x, y) si et seulement si $(x, y) \notin E$. Ce graphe pondéré (les poids sont les conductances) sera noté par $(G, c) = (V, E, c)$. Pour finir, on définit les poids des sommets par

$$\forall x \in V,\ \pi(x) = \sum_{y \in V} c(x, y) = \sum_{y \sim x} c(x, y).$$

Etant donné un graphe pondéré (G, c), on définit une marche aléatoire pondérée $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dont la probabilité de transition est proportionnelle à la conductance, à savoir

$$\forall x, y \in V,\ p(x, y) = \frac{c(x, y)}{\pi(x)}.$$

On note $\mathbb{P}_x$ et $\mathbb{E}_x$ la probabilité et l'espérance associée à (X_n) avec $X_0 = x$ p.s. On peut définir ensuite τ_A et τ_A^+ pour A un sous-ensemble de V :

$$\begin{aligned} \tau_A &= \inf\{n \in \mathbb{N}, X_n \in A\} \\ \tau_A^+ &= \inf\{n \in \mathbb{N}^*, X_n \in A\} \end{aligned}.$$

Quand A est réduit à un singleton $\{a\}$, on peut noter τ_a au lieu de $\tau_{\{a\}}$.

Partie A - Fonctions harmoniques

Soit W un sous-ensemble de V. Une fonction $f : V \to \mathbb{R}$ est dite harmonique sur $V \backslash W$ si

$$\forall x \in V \backslash W,\ f(x) = \sum_{y \sim x} \frac{c(x, y)}{\pi(x)} f(y).$$

On désigne par H_W l'ensemble de telles fonctions.

Un problème important dans l'analyse harmonique est d'étendre une fonction définie sur un sous-ensemble à l'ensemble tout entier de manière harmonique. Ceci est connu sous le nom de *problème de Dirichlet* :

Problème de Dirichlet discret : Etant donnés W un sous-ensemble de V tel que $V \backslash W$ soit fini et g une fonction bornée sur W, existe-t-il une fonction f définie sur V tout entier, qui coïncide avec g sur W et harmonique sur $V \backslash W$? La fonction g est appelée *condition au bord.*

1. Vérifier rapidement que H_W est un espace vectoriel.
   Solution : La formule définissant une fonction harmonique étant linéaire, H_W est un espace vectoriel. ◀

   A partir de maintenant, on considère (X_n) la marche aléatoire définie au début de l'énoncé.

2. En remarquant que $\pi(x)p(x, y) = \pi(y)p(y, x)$ pour tous $x, y \in V$, donner une mesure réversible si G est un graphe fini. La mesure réversible est-elle stationnaire ?
   Solution : On note le poid total

   $$Z = \sum_{x \in V \backslash (A \cup Z)} \pi(x).$$

   Et on définit la mesure suivante :

   $$\forall x \in V,\ \Pi(x) = \frac{\pi(x)}{Z}.$$

On vérifie facilement que Π est une mesure réversible par la relation $\pi(x)p(x,y) = \pi(y)p(y,x)$. Pour le dernier point, une mesure réversible est toujours stationnaire. ◀

3. On considère un problème de Dirichlet avec la condition au bord g sur W. Montrer que $f(x) = \mathbb{E}_x[g(X_{\tau_W})]$ est une solution.
Solution : On décompose l'espérance en fonction de la valeur de X_1 puis utilise la propriété de Markov. ◀
4. On suppose que la condition au bord est nulle dans le problème de Dirichlet. Montrer qu'une solution f est identiquement nulle sur V. En déduire que la solution au problème de Dirichlet est unique quelle que soit la condition au bord.
Solution : Comme $V \backslash W$ est fini, f atteint ses maximum et minimum. Si f n'est pas identiquement nulle, on peut supposer que son maximum est strictement positive quitte à changer f en $-f$. Notons $x \in V \backslash W$ un point où f atteint son max. Par la définition de l'harmonicité, $f > 0$ en un voisin de x. Ainsi peut-on construire $x = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_k \in W$ un chemin pour lequel $f(x_i) > 0$ pour tout i et $x_k \in W$. Contradiction.
Si on considère un problème de Dirichlet général, on prend f_1 et f_2 deux solutions. Par conséquent, $f := f_1 - f_2$ est la solution du problème de Dirichlet dont la condition au bord est nulle. On vient de montrer que f ne peut qu'être identiquement nulle, d'où l'unicité. ◀
On considère désormais A et Z deux sous-ensembles de V disjoints tels que $V \backslash (A \cup Z)$ soit fini.
5. Exprimer l'espérance $\mathbb{E}_x[\tau_A < \tau_Z]$ en tant que la solution d'un problème de Dirichlet bien choisi.
Solution : On vérifie tout d'abord que $x \mapsto \mathbb{E}_x[\tau_A < \tau_Z]$ est harmonique sur $V \backslash (A \cup Z)$. Elle vaut 1 sur A et 0 sur Z. Donc elle correspond au problème de Dirichlet dont la condition au bord est donnée par $g \equiv 1$ sur A et $g \equiv 0$ sur Z. ◀

Partie B - Réseaux électriques

On peut voir le graphe pondéré (G, c) comme un réseau électrique. Un réseau électrique est caractérisé par des résistances, inverses des conductances : $r(x,y) = c(x,y)^{-1}$. En particulier, la résistance est infinie entre deux sommets qui ne sont pas voisins.

Lorsque l'on met un potentiel v_A sur A et le potentiel $v_Z = 0$ sur Z, un courant i circule dans le réseau. Ce courant est déterminé par les deux lois de physique suivantes :

- **Loi d'Ohm :** Pour tout $(x,y) \in V^2$,
$$v(x) - v(y) = i(x,y)r(x,y) = \frac{i(x,y)}{c(x,y)}.$$
- **Loi des mailles :** Pour tout $x \in V \backslash (A \cup Z)$,
$$i_x := \sum_{y \in V} i(x,y) = \sum_{y \sim x} i(x,y) = 0.$$

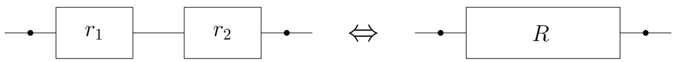
1. Etant données v_A et v_Z, montrer qu'un potentiel v défini comme ci-dessus est harmonique sur $V \backslash (A \cup Z)$. En déduire qu'il est la solution d'un certain problème de Dirichlet. Ainsi, le potentiel et le courant sont bien définis et uniques.
Solution : On utilise d'abord la loi des mailles puis la loi d'Ohm. Prenons $x \in V \backslash (A \cup Z)$,
$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{y \sim x} i(x,y) \\ &= \sum_{y \sim x} (v(x) - v(y))c(x,y) \\ &= v(x)\pi(x) - \sum_{y \sim x} v(y)c(x,y). \end{aligned}$$
Donc
$$v(x) = \sum_{y \sim x} \frac{c(x,y)}{\pi(x)} v(y).$$
◀
2. Reexprimer $\mathbb{E}_x[\tau_A < \tau_Z]$ en fonction du potentiel v.
Solution : La fonction $x \mapsto \mathbb{P}_x(\tau_A < \tau_Z)$ est la solution au problème de Dirichlet avec la condition au bord $v_a = 1$ sur A et $v_z = 0$ sur Z. Par conséquent,
$$\mathbb{P}_x(\tau_A < \tau_Z) = \frac{v(x)}{v_a}.$$
◀

On introduit maintenant une notion assez importante qui est celle de la résistance et la conductance équivalentes. Elle permettra de réduire un réseau compliqué en un réseau simple à décrire. On pensera aussi à identifier les sommets ayant le même potentiel.

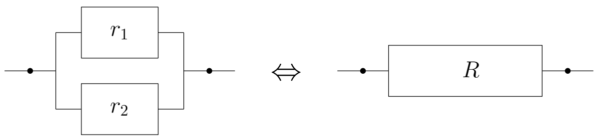
Deux circuits électriques délimités par des bornes sont dits équivalents si les courants passant par les bornes sont les mêmes lorsque les mêmes tensions (différences de potentiels) sont imposés aux bornes. Ainsi, on peut remplacer l'un par l'autre. Ceci est une manière de réduire les réseaux électriques.

3. Montrer que les trois transformations figurant ci-dessous sont valides. (*Indication : on impose les mêmes tensions aux bornes et montre que les courants passant par les bornes sont les mêmes.*)

   (a) Résistances en série : $R = r_1 + r_2$.

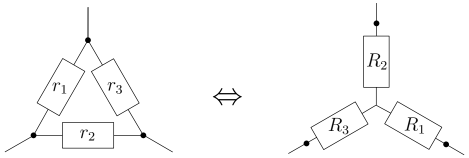


   (b) Résistances en parallèle : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r_1} + \dfrac{1}{r_2}$.



   (c) (*difficile*) Transformation triangle-étoile : $r_1 R_1 = r_2 R_2 = r_3 R_3 = \gamma$ où

$$\gamma = \frac{r_1 r_2 r_3}{r_1 + r_2 + r_3} = R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1.$$



   Le théorème d'Epifanov nous dit que si le réseau est planaire, on peut le réduire en utilisant uniquement ces trois transformations.

4. Pour tout $a \in V$, on définit $\mathbb{P}(a \to Z) := \mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+)$. Montrer l'égalité suivante :

$$\forall a \in V,\ \mathbb{P}(a \to Z) = \frac{1}{\pi(a)v(a)} \sum_{y \sim a} i(a,y) = \frac{i_a}{\pi(a)v_a}.$$

Solution : On utilise la propriété de Markov.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(a \to Z) &= \mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+) \\
&= \sum_{y \in V} \mathbb{P}_a(\tau_Z < \tau_a^+ \mid X_1 = y)\mathbb{P}_a(X_1 = y) \\
&= \sum_{y \in V} \mathbb{P}_y(\tau_Z < \tau_a)p(a,y) \\
&= \sum_{y \in V} \left(1 - \frac{v(y)}{v_a}\right) \frac{c(a,y)}{\pi(a)} \\
&= \frac{1}{\pi(a)v_a} \sum_{y \in V} (v_a - v(y))c(a,y) \\
&= \frac{1}{\pi(a)v_a} \sum_{y \in V} i(a,y)
\end{aligned}$$

◀

On pourra alors définir la conductance et la résistance équivalentes entre a et Z par

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(a \leftrightarrow Z) &:= \pi(a)\mathbb{P}(a \to Z), \\
\mathcal{R}(a \leftrightarrow Z) &= \mathcal{C}(a \leftrightarrow Z)^{-1}.
\end{aligned}$$

5. On note N_a le nombre de passages en a d'une marche aléatoire (X_n) arrêtée au temps τ_Z, autrement dit,

$$N_a = \sum_{n=0}^{\tau_Z} \mathbf{1}_{X_n = a}.$$

Exprimer $\mathbb{E}_a[N_a]$ en fonction de $\mathbb{P}(a \to Z)$.
Solution : On définit une suite de temps d'arrêt $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{aligned}
T_0 &= 0 \\
T_{k+1} &= \inf\{T_k < n \leq \tau_Z, X_n = a\}, k \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

la convention étant $\inf \varnothing = \infty$.

Ainsi, on réécrit N_a comme :

$$\begin{aligned} N_a &= \sum_{n=0}^{\tau_Z} \mathbf{1}_{X_n=a} \\ &= \sum_{n=0}^{\tau_Z}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n=a}\mathbf{1}_{T_k=n} \\ &= \sum_{n=0}^{\tau_Z}\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{T_k=n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\tau_Z} \mathbf{1}_{T_k=n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{T_k<\infty}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E}_a[N_a] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}_a(T_k < \infty).$$

On peut montrer (en utilisant la propriété de Markov) que les $T_{k+1} - T_k$ sachant que $T_k < \infty$ sont i.i.d. On a alors,

$$\mathbb{P}_a(T_k < \infty) = \mathbb{P}_a(T_1 < \infty)^k = \mathbb{P}_a(\tau_a^+ < \tau_Z)^k = (1 - \mathbb{P}(a \to Z))^k.$$

La somme donne donc

$$\mathbb{E}_a[N_a] = \sum_{k=0}^{\infty}(1 - \mathbb{P}(a \to Z))^k = \mathbb{P}(a \to Z)^{-1}.$$

◀

Dans ce qui précède, on avait une marche aléatoire sur un graphe infini, mais qui était arrêtée lorsqu'elle sortait d'un domaine fini. Afin d'étudier la récurrence ou la transience de la *vraie* marche aléatoire, on va faire tendre ce domaine borné vers le graphe entier.

Pour cela, on considère (V_n) une suite de sous-ensemble des sommets de G croissante, *i.e.* $V_n \subset V_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que V_n tend vers V, dans le sens où pour chaque sommet $x \in V$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in V_n$. L'ensemble des arêtes E_n est E restreint à $V_n \times V_n$. Sous ces hypothèses, on dit que la suite de sous-graphes obtenue $(G_n = (V_n, E_n))_{n\in\mathbb{N}}$ *exhauste* G. On définit ensuite une autre suite $(\tilde{G}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

- l'ensemble des sommets : $V(\tilde{G}_n) = V_n \cup \{z_n\}$, où z_n est un sommet supplémentaire et
- l'ensemble des arêtes :

$$E(\tilde{G}_n) = E_n \cup \{(x, z_n), (z_n, x), x \in V_n, \exists y \in V\backslash V_n, x \sim y \text{ dans } G\}.$$

Pour clarifier les idées, on peut penser que le graphe $\tilde{G}_n$ est le graphe G dont on identifie les sommets qui ne sont pas dans G_n.

6. Pourquoi la limite suivante est-elle bien définie ?

$$\mathcal{C}_a := \lim_{n\to\infty} \mathcal{C}(a \leftrightarrow z_n).$$

En déduire un critère de récurrence / transience de la marche aléatoire pondérée dans G à l'aide de la conductance équivalente $\mathcal{C}_a$.
Solution : La suite $(\mathcal{C}(a \leftrightarrow z_n) = \pi(a)\mathbb{P}(a \to z_n \text{ dans } \tilde{G}_n)$ est décroissante et est bornée par 0, donc elle converge. La quantité $\mathbb{P}(a \to z_n)$ converge vers $\mathbb{P}_a(\tau_a^+ = \infty)$, qui vaut 0 si la marche est récurrente et strictement positive si elle est transiente. Le critère est alors le suivant : la marche est récurrente si et seulement si $\mathcal{C}_a = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}_a = \infty$. ◀

7. Montrer que la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}$ est récurrente.
Solution : On pose $c(x, x+1) = c(x, x-1) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ pour avoir une marche aléatoire simple symétrique. La marche part de $a = 0$. Par la question précédente, il faut montrer que $\mathcal{R}_a = \infty$. Pour ce faire, on identifie n et $-n$ car ils ont le même potentiel par la symétrie du réseau. Entre deux sites voisins on obtient une résistance équivalente valant $1/2$. La somme d'une infinité de $1/2$ est infinie. ◀

Partie C - Principe de monotonie de Rayleigh

Ici, on note toujours $G = (V, E)$ un graphe simple, connexe et localement fini. On se donne en plus les ensembles A et Z, appelés *source* et *puits*. Une fonction j sur $V \times V$ qui vérifie les conditions suivantes est un *flux* :

- si $(x, y) \notin E$, alors $j(x, y) = 0$,
- pour tout $(x, y) \in E$, $j(x, y) = -j(y, x)$,
- pour tout $x \in V\backslash(A \cup Z)$, $\sum_{y\sim x} j(x, y) = 0$.

En particulier, un courant est un flux.

A un flux j une puissance est associée. Elle est donnée par

$$\mathcal{P}(j) = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E} j(x, y)^2 r(x, y).$$

On met un facteur 1/2 parce que les arêtes sont comptées deux fois.

Soit j un flux sur $V \times V$.

1. On définit
$$\begin{aligned} j_A &= \sum_{(a,y)\in A\times V} j(a,y) \\ j_Z &= \sum_{(z,y)\in Z\times V} j(z,y) \end{aligned}.$$
Montrer que $j_A + j_Z = 0$.
On dit un flux j est unitaire si $j_A = 1$.
Solution : On remarque d'abord l'identité suivante :
$$\frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in V^2}(j(x,y)+j(y,x)) = \sum_{(x,y)\in V^2} j(x,y).$$
Le terme de gauche vaut 0 car j est antisymétrique. On évalue le terme de droite :
$$\begin{aligned} \sum_{(x,y)\in V^2} j(x,y) &= \sum_{(x,y)\in A\times V} j(x,y) + \sum_{(x,y)\in Z\times V} j(x,y) + \sum_{(x,y)\in (V\setminus(A\cup Z))\times Z} j(x,y) \\ &= j_A + j_Z + 0. \end{aligned}$$
Par conséquent, $j_A + j_Z = 0$. ◀

2. (*Conservation de l'énergie*) Soit W une fonction définie sur V qui vaut W_A sur A et W_Z sur Z. Montrer la relation suivante :
$$(W_A - W_Z) j_A = \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in E}(W(x)-W(y))j(x,y)$$
Solution : Le flux j étant antisymétrique, le terme de gauche vaut
$$\begin{aligned} \sum_{(x,y)\in V^2} W(x)j(x,y) &= \sum_{x\in V} W(x)\sum_{y\in V} j(x,y) \\ &= \sum_{x\in V} W(x) j_x \\ &= W_A j_A + W_Z j_Z \\ &= (W_A - W_Z) j_A. \end{aligned}$$
◀
Cette relation dit que l'énergie est conservée dans le sens où, si on remplace W par le potentiel v, le terme de gauche représente l'énergie globale dissipée par le réseau (entre la source et le puits) et le terme de droite la somme de l'effet de Joule de chacune des résistances.

3. Montrer que si i est le courant unitaire, alors $\mathcal{P}(i) = \mathcal{R}(A \leftrightarrow Z)$.
Solution : On utilise la conservation de l'énergie.
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(i) &= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in V^2} i(x,y)^2 r(x,y) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{(x,y)\in V^2}(v(x)-v(y))i(x,y) \\ &= (v_A - v_Z) i_A \\ &= i_A^2 \mathcal{R}(A\leftrightarrow Z) = \mathcal{R}(A\leftrightarrow Z). \end{aligned}$$
◀

4. (*Principe de Thomson*) On met un potentiel positif v_A sur A et $v_Z = 0$ sur Z. Le courant associé est noté i. On ne considère que les flux j pour lesquels $j_A = i_A$. Montrer que $\mathcal{P}(j) \geq \mathcal{P}(i)$ et que l'égalité est satisfaite si et seulement si $i = j$.
Solution : On pose $k := j - i$.
$$\begin{aligned} \mathcal{P}(j) &= \mathcal{P}(i+k) \\ &= \mathcal{P}(i) + \mathcal{P}(k) + \sum_{(x,y)\in V^2} i(x,y)k(x,y)r(x,y) \\ &= \mathcal{P}(i) + \mathcal{P}(k) + \sum_{(x,y)\in V^2} k(x,y)(v(x)-v(y)) \\ &= \mathcal{P}(i) + \mathcal{P}(k) + v_A k_A \\ &= \mathcal{P}(i) + \mathcal{P}(k) \geq \mathcal{P}(i). \end{aligned}$$
On a l'égalité si et seulement si $\mathcal{P}(k) = 0$, *i.e.* $k \equiv 0$. ◀

5. (*Principe de monotonie de Rayleigh*) En déduire que la résistance équivalente $\mathcal{R}(A \leftrightarrow Z)$ est une fonction croissante de chaque résistance du réseau.
Solution : Prenons les notations habituelles. Prenons $r' \geq r$ deux configurations de résistances du graphe. On note i' et i les deux courants associés.
$$\mathcal{R}' = \mathcal{P}'(i') \geq \mathcal{P}(i') \geq \mathcal{P}(i) = \mathcal{R},$$
où les inégalités utilisent successivement $r' \geq r$ et le principe de Thomson. ◀

Partie D - Transience et récurrence des marches aléatoires

On a rassemblé assez d'outils pour montrer le théorème de Pólya, qui dit que la marche aléatoire simple symétrique sur $\mathbb{Z}^d$ est transiente si et seulement si $d \geq 3$.

1. Justifier les deux points suivants :
   – rajouter des courts-circuits dans un réseau ne peut que diminuer la résistance équivalente ;
   – enlever des résistances à un réseau ne peut qu'augmenter la résistance équivalente.

   On peut utiliser le principe de Rayleigh.

   Solution : Rajouter des courts-circuits diminue la résistance de $+\infty$ à 0, la résistance équivalente est aussi diminuée par le principe de Rayleigh. Enlever des résistances augmente la résistance à $+\infty$, la résistance équivalente est alors augmentée. ◀
2. Montrer que la marche aléatoire simple symétrique dans $\mathbb{Z}^2$ est récurrente. (*Indication : court-circuiter les sommets qui sont à la même distance de l'origine.*)

   Solution : On pose $r \equiv 1$ pour avoir une marche aléatoire simple symétrique. Par l'indication, on court-circuite les sommets qui sont à la même distance. Ainsi, entre l'origine et l'infini, on obtient $\mathbb{N}$ avec $8n+4$ arêtes multiples entre n et $n+1$. Et la somme des $(8n+4)^{-1}$ diverge. La résistance équivalente entre l'origine et l'infini vaut alors $+\infty$. La marche est récurrente. ◀
3. On veut montrer que la marche aléatoire simple symétrique est transiente sur $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 3$.
   (a) Pourquoi suffit-il de traiter le cas $d = 3$?

   Solution : Le graphe $\mathbb{Z}^3$ peut être vu comme $\mathbb{Z}^d$ auquel on enlève des arêtes. En l'occurrence, la résistance équivalente sur $\mathbb{Z}^3$ est plus grande que celle sur $\mathbb{Z}^d$ pour $d \geq 3$. Si on arrive à montrer que la résistance équivalente sur $\mathbb{Z}^3$ est finie, on aura terminé. ◀

   (b) On veut montrer que la MASS est transiente sur $\mathbb{Z}^3$. Pour ce faire, on cherche un sous-graphe pour lequel la résistance équivalente entre l'origine et l'infini est facile à calculer. En particulier, on peut penser à la structure d'un arbre. Calculer la résistance équivalente entre l'origine et l'infini de l'arbre suivant, l'identifier comme un sous-graphe de $\mathbb{Z}^3$ (on devra identifier certains sommets aussi) et en déduire le résultat voulu.

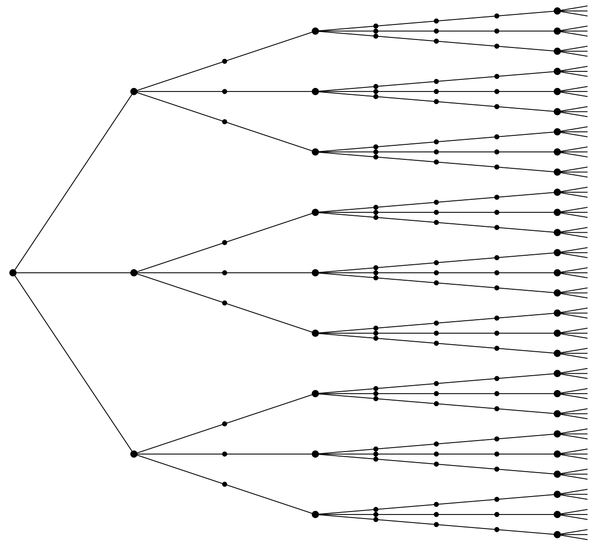
   

   FIGURE – Ceci est un graphe infini. L'origine se trouve à la génération 0. Les branches se divisent en trois à la génération $2^k - 1$ pour $k \in \mathbb{N}$ et les arêtes sont toutes de résistance 1.

   Solution : Bureau 609. ◀

Partie E - Aller plus loin...

Dans cette partie, on se contente de mentionner quelques résultats intéressants déduits de cette technique. Les étudiants intéressés sont invités à consulter le livre écrit par Lyons et Peres, *Probability on Trees and Networks* (téléchageable en ligne).

1. Si G est un graphe quasi-isométrique à un espace hyperbolique $\mathbb{H}^d$ avec $d \geq 2$, la marche aléatoire simple symétrique sur G est transiente.
2. On considère G un graphe fini. Un arbre couvrant de G est un sous-graphe contenant tous les sommets et ayant la structure d'un arbre. A chaque arbre couvrant, on associe un poid, défini par le produit des conductances des arêtes formant l'arbre. On note T une variable aléatoire qui choisit un arbre couvrant avec la probabilité proportionnelle à son poid. Pour toute arête $e \in E$, on a

$$\mathbb{P}(e \in T) = c(e)\mathcal{R}(e^- \leftrightarrow e^+).$$

   Cette notion peut être généralisée à un graphe infini (il faut montrer la comptabilité des mesures emboîtées). On arrive à montrer qu'une arête quelconque de $\mathbb{Z}^2$ a probabilité 1/2 d'être dans l'arbre couvrant uniforme (dans le sens où c est une constante partout, et donc T est une mesure uniforme sur tous les arbres couvrants possibles de $\mathbb{Z}^2$).

3. Un rectangle de côtés a et b peut être découpé en carrés si et seulement si le rapport a/b est rationnel.

- Fin -