Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 7 : Théorème de Cauchy et ses applications

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

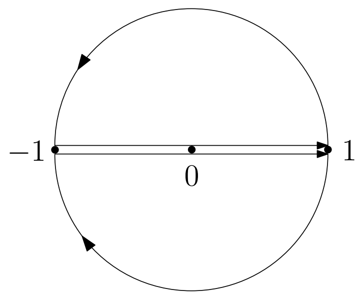
1. **Considérons $a > b > 0$ et l'éllipse donnée par l'équation suivante :**
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
   (a) **Donner un chemin γ simple et fermé paramétrisant cette ellipse.**
   (b) **En utilisant la formule de Cauchy pour l'intégrale curviligne $\int_\gamma \frac{dz}{z}$, montrer la formule**
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

2. **Les domaines suivants sont-ils étoilés ? Si oui, quels points sont des centres ? Si non, pourquoi ?**
   (a) $\mathbb{C}^*$;
   (b) $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$;
   (c) $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_+$;
   (d) $\overline{D}(0,1) \cup \overline{D}(2,1)$.

3. **Le but de cet exercice est de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre sans utiliser le théorème de Liouville. Considérons $P(z)$ un polynôme en z non constant qui n'admet pas de zéros.**
   (a) **Montrer qu'il existe $Q(z)$ un polynôme tel que $P(z) = c + zQ(z)$ où c est une constante. Que vaut c ? Si on divise tout par $zP(z)$, on obtient l'égalité entre franctions rationnelles**
$$\frac{1}{z} = \frac{c}{zP(z)} + \frac{Q(z)}{P(z)}.$$
   (b) **Donner une paramétrisation γ qui parcourt le contour du disque centré en 0, de rayon $R > 0$ et orienté positivement.**
   (c) **Que valent $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$ et $\displaystyle\int_\gamma \frac{Q(z)}{P(z)} dz$?**
   (d) **Justifier pourquoi la quantité suivante tend vers 0 lorsque R tend vers l'infini et conclure :**
$$\int_\gamma \frac{dz}{zP(z)}.$$

4. Soit $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ un polynôme de degré n.

   (a) Supposons que les c_k sont réels, montrer que
   $$\int_{-1}^{1} f(x)^2 dx \leq \pi \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \pi \sum_{k=0}^{n} c_k^2.$$
   Indication : Appliquer le théorème de Cauchy à la fonction $f(z)^2$ sur les demi-cercles supérieur et inférieur comme illustrés dans le dessin suivant.

   (b) Supposons que les c_k sont complexes, montrer que
   $$\int_{-1}^{1} |f(x)|^2 dx \leq \pi \int_0^{2\pi} \left| f(e^{i\theta}) \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \pi \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2.$$

   (c) Établir une variante de l'inégalité de Hilbert suivante :
   $$\left| \sum_{j,k=0}^{n} \frac{c_j c_k}{j+k+1} \right| \leq \pi \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2$$
   où l'inégalité est stricte sauf quand les c_k sont tous nuls.

5. Soit $f : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ par rapport à chacune des variables réelles. Considérons $a < c$ et $b < d$ et le rectangle $R = [a, b] \times [c, d]$. Notons ∂R son bord orienté positivement.

   (a) Justifier pourquoi on a l'égalité
   $$\int_{\partial R} f(z) dz = \int_a^b f(x, b) dx + i \int_c^d f(c, y) dy - \int_a^b f(x, d) dx - i \int_c^d f(a, y) dy.$$

   (b) Trouver g et h deux fonctions continues telles que
   $$f(x, b) - f(x, d) = \int_b^d g(x, y) dy \quad \text{et}$$
   $$f(c, y) - f(a, y) = \int_a^c h(x, y) dx.$$

   (c) La fameuse formule de Stokes (où K est un domaine compact et lisse) est
   $$\int_{\partial K} f = \int_K \left(i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy.$$
   Montrer cette formule pour un domaine rectangulaire.

   (d) En admettant la formule de Stokes pour K compact et lisse et en considérant $f(z) = \overline{z}$ (ou $f(x, y) = x - iy$), trouver une formule qui calcule l'aire de K.

   (e) Retrouver le théorème de Cauchy et sa réciproque à partir de la formule de Stokes.