Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 24 : Principe d'incertitude et noyau de Poisson

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

1. (Principe d'incertitude.) Soit une fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x = 1$.
   (a) Utiliser $1 = \int |\varphi|^2$ et commencer par une intégration par partie, montrer
   $$1 \leqslant 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}.$$
   (b) Utiliser le théorème de Plancherel pour montrer l'inégalité suivante
   $$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x)|^2 \mathrm{d}x \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \right) \geqslant \frac{1}{16\pi^2}.$$
   (c) Quand a-t-on l'égalité ?
   (d) (Pour les physiciens.) Dans quelle mesure cette inégalité peut être interprétée comme le principe d'incertitude ?

2. (Problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur.) On se place ici dans le demi-plan supérieur $\mathbb{H} = \{z, \mathrm{Im}(z) > 0\}$. Le problème de Dirichlet consiste à résoudre l'equation différentielle (dans la classe des fonctions à décroissance modérée)
   $$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{(D)}$$
   dans $\mathbb{H}$ avec condition au bord $u(x, 0) = f(x)$ où f est une fonction à décroissance modérée.

   (a) Établir l'équation différentielle suivante vérifiée par $\widehat{f}$, la transformée de Fourier par rapport à la première coordonnée
   $$-4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, y) + \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = 0. \qquad \text{(D')}$$
   Quelle est la condition au bord pour $\widehat{u}$?
   (b) Sachant que la solution de (D) est à décroissance modérée, montrer que la solution générale de (D') s'écrit
   $$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}.$$
   Que peut-on dire sur A avec la condition au bord de $\widehat{u}$?
   (c) On va étudier les propriétés de la fonction $h_y : \xi \mapsto e^{-2\pi|\xi|y}$ avec $y > 0$. Expliquer pourquoi si on peut écrire h_y comme la transformée de Fourier d'une certaine fonction, alors on a une formule pour la solution du problème de Dirichlet (D).

(d) Vérifier le calcul d'intégrale

$$P_y(x) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi|\xi|y} e^{2\pi \mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}. \tag{P}$$

On appelle $P_y(x)$ le *noyau de Poisson* sur le demi-plan supérieur. Quelle est la transformée de Fourier de P_y ? Pourquoi ? Écrire la solution u du problème de Dirichlet (D) sous forme de convolution.

(e) Vérifier que le noyau de Poisson est un bon noyau (ou une approximation de l'unité) lorsque $y \to 0$.

3. (Noyau de Poisson.) Soient D et D' deux domaines (*i.e.* ouverts et simplement connexes) dans $\mathbb{C}$. Un théorème de Riemann (admis ici) donne l'existence d'une application holomorphe $f : D \to D'$, inversible et d'inverse holomorphe. Une telle fonction est dite *conforme.*

   (a) Si $u : D' \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique (*i.e.* $\Delta u \equiv 0$ sur D'), montrer que $u \circ f$ est harmonique sur D.

   Le noyau de Poisson sur un domaine D est une fonction harmonique sur D qui est nulle sur le bord et admet une singularité en un point. La solution d'un problème de Dirichlet avec condition au bord peut être vue comme une « superposition infinitésimale » de telles fonctions, dont la singularité est associée à la condition au bord via convolution.

   (b) Montrer que le noyau de Poisson dans l'équation (P) est harmonique. *Indication* : Si $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels, montrer $P_y(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{i}}{\pi z}\right)$.

   (c) Montrer que l'application $f : z \mapsto \mathrm{i}\frac{1-z}{1+z}$ est conforme et envoie le disque unité $\mathbb{D}$ sur le demi-plan supérieur $\mathbb{H}$. Quelle est son application réciproque ?

   (d) Pourquoi la composition $P \circ f$ devrait donner le noyau de Poisson (à une constante multiplicative près) sur le disque unité où $P(z) = P(x + iy) = P_y(x)$ pour $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$? Vérifier le calcul.

   (e) (Un peu plus difficile) Qu'est-ce qui nous empêche d'avoir le noyau de Poisson avec la bonne constante multiplicative ?