Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 11 : Théorème de l'argument et singularités

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. **On se place dans $\overline{\mathbb{C}}$ (donc attention au point ∞). Déterminer les domaines de définition et les singularités des fonctions suivantes. Dire cas par cas de quel type de singularité il s'agit.**
$$\frac{\cosh(z)-1}{z^2}, \quad \frac{\sin(z)}{e^z-1}, \quad \frac{\sinh(z)}{e^z-1}.$$
Indication : Les identités suivantes sont parfois utiles :
$$\sinh(iz) = i\sin(z), \qquad \sin(iz) = i\sinh(z),$$
$$\cosh(iz) = \cos(z), \qquad \cos(iz) = \cosh(z).$$

2. (Preuve du théorème de Casorati-Weierstrass)
Vous allez démontrer le théorème dont vous n'avez pas eu le temps de voir la preuve en cours :
Soit f holomorphe dans un disque épointé $D^*_\rho(c)$. Si elle admet une singularité essentielle en c, alors pour tout $0 < r < \rho$, l'ensemble $f(D^*_r(c))$ est dense dans $\mathbb{C}$.
   (a) **Supposons qu'il exite $0 < r < \rho$ et $a \in \mathbb{C}$, $\epsilon > 0$ tels que $f(D^*_r(c)) \cap D_\epsilon(a) = \varnothing$. On introduit une nouvelle fonction**
   $$h(z) = \frac{1}{f(z)-a}, \quad \forall z \in D^*_r(c).$$
   Justifier pourquoi h est holomorphe. Quel type de singularité admet-elle en c ? Conclure que h admet un prolongement analytique en c. Par abus de notation, notons toujours h ce prolongement.
   (b) **Exprimer f en fonction de h. Si $h(c) \neq 0$, quel type de singularité f admet-elle en c ?**
   (c) **Si $h(c) = 0$, notons k l'ordre de ce zéro. Justifier pourquoi $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer ensuite que f admet un pôle d'ordre k en c.**
   (d) **Conclure.**

Rappel : Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un chemin fermé. Pour $a \in \mathbb{C}\backslash\Gamma$, on rappelle l'indice de Γ en a est donné par la formule

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z-a}.$$

Ceci compte le nombre de tours que fait le chemin Γ autour du point a.

3. (Théorème de l'argument)
Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet (*i.e.* chemin simple) $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
   (a) Justifier brièvement (avec un dessin) que le lacet γ partage le plan $\mathbb{C}$ en deux composantes connexes C_0 et C_1 où
   $$C_i = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Ind}_\gamma(z) = i\}, \quad i \in \mathbb{N}.$$
   Laquelle des composantes connexes est bornée ?
   (b) Posons $K = \gamma([a,b]) \cup C_1$. Montrer que K est compact.
   (c) Prenons U un ouvert contenant K et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe non constante qui ne s'annule pas sur $\gamma([a,b])$. Citer un théorème vu dans une série précédente pour dire que les zéros de f sont isolés et qu'ils sont tous de multiplicité finie.
   Notons désormais $(z_j)_{1\le j\le N}$ les zéros de f dans U et $(k_j)_{1\le j\le N}$ leur multiplicité.
   (d) Définissons une nouvelle fonction
   $$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^N (z-z_j)^{k_j}}.$$
   Sur quel domaine la fonction g est-elle bien définie ? Peut-on la prolonger analytiquement sur U tout entier ? Si oui, comment ? Justifier les réponses.
   (e) Expliquer pourquoi g ne s'annule pas sur U puis calculer (en justifiant) $\int_\gamma \frac{g'}{g}$?
   En déduire que
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f} = \sum_{j=1}^N \int_\gamma \frac{k_j}{z-z_j}\frac{dz}{2\pi}.$$
   (f) Montrer le théorème de l'argument qui donne le nombre de zéros (comptés avec multiplicité) de f dans K est
   $$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}.$$
   Penser à distinguer les zéros dans K de ceux dans $U\backslash K$.

4. (Théorème de Rouché)
Soient f, g deux fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{B}_r(0)$. Supposons que f ne s'annule pas sur $\partial B_r(0)$ et $|g| < |f|$ sur $\partial B_r(0)$. Le but de l'exercice est de montrer que f et $f+g$ possèdent le même nombre de zéros dans $B_r(0)$.
   (a) Pourquoi $f+g$ ne s'annule pas sur $\partial B_r(0)$ non plus ?
   (b) Montrer que sur $\partial B_r(0)$, on peut écrire
   $$\frac{f'+g'}{f+g} - \frac{f'}{f} = \frac{(g/f)'}{1+(g/f)} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \left(\frac{g}{f}\right)^k \left(\frac{g}{f}\right)'.$$
   (c) Appliquer le théorème de l'argument en justifiant soigneusement l'interversion série-intégrale pour conclure.