Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 12 : Formule des résidus

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. **Calculer le résidu de $(\sin z)/z^5$ en $z = 0$.**

2. **Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer les pôles et les résidus en ces pôles :**
$$\frac{1}{(z^2-1)(z+3)}, \quad \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}, \quad \frac{\sin(z)}{z^3}, \quad \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

3. **On suppose que f possède une singularité isolée en z_0.**
   (a) **Montrer que la singularité en z_0 est un pôle simple si et seulement si**
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \neq 0$$
   (b) **Si $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, où p et q sont analytique en z_0, $p(z_0) \neq 0$ et $q(z)$ possède un zéro simple en z_0. Montrer que**
$$\operatorname{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}, z_0\right) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

4. Trouver et classifier toutes les singularités de
$$\frac{1}{z^3(e^z-1)} - \frac{5}{z}.$$

5. Soit f une fonction avec un pôle d'ordre $m \geq 1$ en z_0. Montrer que le residu de f en z_0 est donné par
$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$
où la derivée d'ordre 0 est la fonction elle-même.

6. Soit C le lacet rectangulaire reliant $(-1/2, -i/2)$, $(1/2, -i/2)$, $(1/2, 3i\pi/2)$ et $(-1/2, 3i\pi/2)$, soit
$$f(z) := \frac{z^2}{(z^2+\pi^2)^2 \sin z}$$
   (a) Calculer les résidus de $f(z)$ dans le lacet C.
   (b) Evaluer l'intégrale $\int_C f(z)dz$.

7. (Application du théorème des résidus).
   Soit U un domaine borné étoilé et γ son bord orienté dans le sens positif. Soit f holomorphe dans un voisinage de l'adhérence de U, sans zéros sur γ. Montrer que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$
   est égal au nombre de zéros de f dans U.