Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 21 : Séparation de Variables

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

1. Calculer la série de cosinus de la fonction f définie sur l'intervalle $(-3\pi, 3\pi)$ par $f(x) = 1$ pour $-\pi < x < \pi$ et $f(x) = 0$ ailleurs.

2. Trouver la solution générale du problème de type Sturm-Liouville suivant : $0 < x < L$,
$$X'' + \lambda X = 0$$
et $X'(0) = 0$, $X'(L) = 0$, où X est une fonction à valeurs réelles.

3. Utiliser la méthode de séparation des variables pour séparer l'équation suivante :
$$tu_{xx} + xu_t = 0,$$
où $u = u(x,t)$ est une fonction de deux variables réelles à valeurs réelles. Puis trouver une solution à ces équations.

4. Soit $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}, (x,y) \mapsto u(x,y)$. Est-il possible de séparer l'équation
$$u_{xx} + (x+y)u_{yy} = 0\,?$$

5. Montrer que le Laplacien dand les coordonée polaire (r,θ) prend la forme suivante :
$$\Delta = \frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta^2}$$
Montrer ensuite que
$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial \theta}\right|^2$$

6. **Equation de la chaleur sur le disque.** On considère le disque unité et son bord (en coordonnée polaire)

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{C} : r < 1\} \quad \text{et} \quad C = \{(r, \theta) \in \mathbb{C} : r = 1\}.$$

On veut résoudre le problème de Dirichlet dans D avec conditions aux bords donnée par f sur C. On veut donc résoudre l'équation

$$\begin{cases} \Delta u(r, \theta) = 0 \text{ dans } D, \\ u(1, \theta) = f(\theta) \text{ sur } C. \end{cases}$$

(a) Utiliser l'exercice précédent pour effectuer une séparation de variables.

(b) Résoudre ces équations. On supposera que $u(0, 0)$ est borné.

(c) Pour quelle famille de fonctions f peut-on résoudre le problème de Dirichlet.