Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 20 : Convergence et l'identité de Parseval

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

1. (*) Considérons la suite $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie par
$$c_k = \begin{cases} 1/k & \text{si } k \geq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$
La suite est-elle dans $l^2(\mathbb{Z})$? Existe-t-il une fonction intégrable dont les coefficients de Fourier sont donnés par (c_k) ?

2. (a) Montrer que la série trigonométrique
$$\sum_{n\geq 2} \frac{\sin(nx)}{\ln(n)}$$
converge pour tout x sans pour autant être la série de Fourier d'une fonction intégrable.

   (b) (*) Qu'en est-il pour la série
$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}$$
où $0 < \alpha \leq 1/2$?

3. L'exercice 3 de la série 16 nous donne les coefficients de Fourier de la fonction $f(\theta) = |\theta|$, $\theta \in [-\pi, \pi]$. Utiliser l'identité de Parseval (en justifiant) pour retrouver
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$
C'est une méthode sans utiliser les nombres de Bernoulli (cf. l'exercice 4 de la série 19).

4. (*) Utiliser l'exercice 5 de la série 16 et l'identité de Parseval pour calculer
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

5. Soit $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Montrer que la série de Fourier de

$$\frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{\mathrm{i}(\pi - x)\alpha}$$

sur $[0, 2\pi]$ est donnée par

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n+\alpha}.$$

En déduire l'égalité suivante

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}.$$

6. (Preuve de Riemann-Lebesgue) Le théorème de Riemann-Lebesgue dit que si une fonction f est intégrable sur un segment $[a, b]$, alors on a

$$\int_a^b f(t) e^{ist} \mathrm{d}t \longrightarrow 0 \quad \text{quand } s \to \infty.$$

Si on suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$, démontrer ce résultat à l'aide d'une intégration par parties. Si la fonction est seulement intégrable, quel argument faut-il utiliser ?

7. (Application de Riemann-Lebesgue) Soit I un segment de $\mathbb{R}$. On considère l'espace des fonctions intégrables E qu'on munit du produit de convolution $\star$. Montrer que ce produit n'admet pas d'élément neutre. (Ou montrer qu'il n'existe aucune fonction $f \in E$ telle que $f \star g = g$ pour toute $g \in E$.)