Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 22 : Transformée de Fourier

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

On rappelle quelques définitions vues en cours.

— Une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ est dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^k |f^{(l)}(x)| < \infty \text{ pour tous } k, l \geqslant 0.$$

— Soit f est intégrable, alors sa transformée de Fourier est définie par

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\mathrm{i}\pi\xi x} \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

De plus, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ alors $\widehat{f}$ l'est aussi.

1. Calculer la transformée de Fourier des fonctions suivantes : (pour $a > 0$)

   (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (la fonction carré),

   (b) $f(x) = \begin{cases} 1 - |x/a| & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (la fonction triangulaire),

   (c) $f(x) = e^{-\pi(x-a)^2}$ pour $a > 0$,

   (d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$,

   (e) $f(x) = e^{-a|x|}$.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$. On cherche les solutions de l'équation suivante dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

   $$-\Phi''(y) + y^2\Phi(y) = c\Phi(y). \tag{*}$$

   Et dans cet exercice, on définit la transformée de Fourier sans le facteur 2π (pour éviter de l'avoir partout), *i.e.* pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

   $$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}x, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

   (a) Notons S l'ensemble des solutions dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Vérifier que c'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est une solution de l'équation (*) pour un certain c, alors $\widehat{\varphi}$ l'est aussi pour le même c.

   (c) Vérifier que $\varphi_0(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$ est une solution de (*). Que vaut c ?

   (d) On introduit deux opérateurs qui agissent sur l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

   — $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}$, la dérivation par rapport à y et

   — y, la multiplication par y.

En d'autres termes, si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $y \in \mathbb{R}$, alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(y) = f'(y)$ et $(y \cdot f)(y) = yf(y)$. On définit ensuite $D_- = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y$ et $D_+ = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y$. Vérifier que l'équation différentielle (*) se réécrit

$$D_- D_+ \Phi = (c-1)\Phi.$$

(e) Soit $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Calculer $D_+ D_- \Phi$. Que fait le commutateur $[D_+, D_-] := D_+ D_- - D_- D_+$?

(f) Définir $\varphi_n := D_-^n \varphi_0 = \left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} + y\right)^n \varphi_0$. Montrer que φ_n est aussi une solution de (*). Exprimer c en fonction de n.

(g) Montrer que les φ_n sont des vecteurs propres de l'opérateur « transformée de Fourier » : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe λ_n tel que $\widehat{\varphi_n} = \lambda_n \varphi_n$. Déterminer λ_n.

(h) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\varphi_n(y) = P_n(y)\varphi_0(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Montrer de plus que la suite (P_n) satisfait

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= 2XP_n - P_n', \quad \forall n \in \mathbb{N}, \\ P_0 &= 1. \end{aligned}$$

(i) Posons $Q_n(y) = \frac{1}{2^{n/2}} P_n\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$. Montrer que les polynômes Q_n sont exactement les polynômes d'Hermite. (Voir la série 18.)

(j) Réécrire les vecteurs propres de la transformée de Fourier à l'aide des polynômes d'Hermite.