Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 6

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un chemin fermé. Pour $a \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$, on définit l'indice du chemin Γ au point a comme :
$$\mathrm{Ind}_\Gamma : a \mapsto \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{z-a}dz \equiv \mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$
   (a) **Soit $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ un chemin C^1 paramétrisant Γ. Ecrire $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ comme $\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha^\beta f(s)ds$ pour un $f(s)$ bien choisi.**
   (b) **Pour $\alpha \leq t \leq \beta$, on définit $\phi(t) = \exp\left(\int_\alpha^t f(s)ds\right)$, où f est la fonction de la question précédente. Montrer que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ est un nombre entier si et seulement si $\phi(\beta) = 1$, puis montrer que $\phi'(t) = f(t)\phi(t)$**
   (c) **Montrer que $g(t) = \frac{\phi(t)}{\gamma(t)-a}$ est différentiable et que $g'(t) = 0$.**
   (d) Montrer que $\phi(t) = \frac{\gamma(t)-a}{\gamma(\alpha)-a}$ et en déduire que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$ est entier.
   (e) Montrer que Ind_Γ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Gamma$ et en déduire que Ind_Γ est constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \Gamma$.

2. Soit $R > 0$.
   (a) **Donner un exemple de deux suites $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ satisfaisant $\limsup |b_n|^{1/n} = \limsup |c_n|^{1/n} = 1/R$ et $\limsup |b_n c_n|^{1/n} = 0$. Quel est le rayon de convergence des séries correspondantes ?**
   (b) Soient $\{b_n\}$ et $\{c_n\}$ deux suites de réels <u>positifs</u> telles que $\lim b_n$ existe dans $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ et $\limsup c_n > 0$. Montrer que $\limsup b_n c_n = (\limsup b_n)(\limsup c_n)$.
   (c) **Soit $\{a_n\}$ une suite de complexes tel que $\limsup |a_n|^{1/n} = 1/R$. Utiliser le résultat du point précédent pour calculer le rayon de convergence de :**

   - $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$,
   - $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$,
   - $\sum_{n=0}^{\infty} n! a_n z^n$.

3. *La fonction zêta de Riemann.*
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$,
$$f_n : z \mapsto n^z$$
   est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ et que $|n^z| = n^{\mathrm{Re}(z)}$.
   (b) Pour $\epsilon > 0$, montrer que la série
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
   converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}(z) > 1 + \epsilon\}$ et converge absolument sur $\{z \in \mathbb{C} | \ \mathrm{Re}(z) > 1\}$.

4. Intégrer les fonctions suivantes

$$\text{a) } f(z) = e^z \qquad \text{b) } g(z) = |z|^2$$

sur les deux chemins $\gamma_1(t) = t + it^2$, $\gamma_2(t) = t^2 + it$ pour $t \in [0, 1]$.

5. Soient $U \subset \mathbb{C}$ un ensemble ouvert, $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et $\gamma_1 : [0, 1] \to U$, $\gamma_2 : [0, 1] \to U$ deux chemins composables (tels que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$). Démontrer la formule :

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

où

$$\begin{aligned} \gamma_1 \cup \gamma_2 : [0, 2] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto \gamma_1(t) 1_{t \in [0,1]} + \gamma_2(t - 1) 1_{t \in [1,2]} \end{aligned}$$