**Université de Genève**
**Section de Mathématiques**
A. Karlsson

## Analyse Complexe 2015 - 2016
## Série d'exercices 14 : Révisions

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

### Examen et révisions du premier semestre.

1. Soient $a, b > 0$ deux nombres positifs. Soit $G(z)$ une fonction telle que $G(z + a) = G(z)$ et $G(z + ib) = G(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Supposer que $G(0) = 0$ et $G(a/2) = 1$. Démontrer que $G$ ne peut pas être analytique dans le rectangle $\{z \in \mathbb{C}, -a < \mathrm{Re}(z) < a, -b < \mathrm{Im}(z) < b\}$.

2. Calculer l'inégrale suivante
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(x)}{(x^2+1)(x^2+4)} dx.$$

3. Montrer les égalités suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$, pour $a \in \mathbb{R}$ ;
   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi m/n)}$ pour $0 < m < n$ en utilisant le chemin ci-dessous ;
   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2(a-b)}$ ;

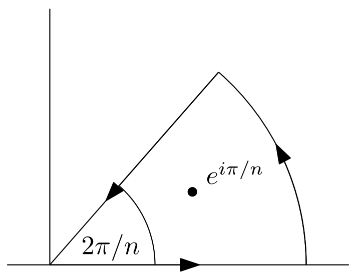


FIGURE 1. Chemin pour la question (b).

**Un peu d'algèbre linéaire...**

4. Soit $L > 0$. Posons $E = \mathcal{C}([0, L], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions complexes continues sur l'intervalle $[0, L]$.

   (a) Montrer que $E$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

   (b) Pour $f, g \in E$, on définit
   $$\langle f, g \rangle := \int_0^L f(x)\overline{g(x)}dx.$$
   Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur $E$. On obtient alors $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace hermitien.

   (c) Rappeler l'inégalié de Cauchy-Schwarz.

   Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

   (d) Expliquer pourquoi $(F, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est encore un espace hermitien.

   (e) On suppose que $F$ est de dimension finie, admettant une base orthonormale $(f_i)_{1 \leqslant i \leqslant m}$. Donner une formule (faisant intervenir les $f_i$) pour $P_F(f)$, la projection orthogonale de $f$ sur l'espace $F$.

   (f) Posons $L = 1$ et $F = \mathrm{Vect}(1, x)$. Donner une base orthonormale de $F$. Minimiser la quantité suivante
   $$\int_0^1 (\sin(\pi x) - a - bx)^2 dx$$
   où $a, b \in \mathbb{R}$.

   On suppose que $E$ est de dimension $n \in \mathbb{N}$ et note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{C})$ l'espace des formes linéaires sur $E$.

   (g) Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une base de $E$. Donner une base de $E^*$. En déduire la dimension de $E^*$.

   (h) Établir un isomorphisme entre $E$ et $E^*$.

   (i) Calculer la dimension $\dim_{\mathbb{R}} E$ quand $E$ est vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.