Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 26 : Transformée de Laplace

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Il n'y a pas de bonus, mais nous vous encourageons à faire les exercices et nous rendre dans nos casiers. Les exercices avec une étoile sont pour votre entraînement et ne seront pas corrigés.

Définition. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable, à support positif (f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$). Sa transformée de Laplace est définie pour $p > 0$, par*

$$F(p) = (\mathcal{L}f)(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t.$$

Cette intégrale ne fait sens que pour $\mathrm{Re}(p) > \alpha$ où α est l'abscisse de convergence. De manière générale, on a $-\infty \leqslant \alpha \leqslant +\infty$.

La tranformée de Laplace tient compte de la condition initiale (Exercice 1), ce qui est une propriété très pratique quant à la résolution des équations différentielles.

Comme la transformée de Fourier, celle de Laplace est aussi injective. Il est donc possible d'établir une formule pour la transformée inverse. Comme ceci demande un peu d'effort, on admettra l'injectivité de la transformée de Laplace et se contentera de consulter les tableaux établis ci-après lorsque l'on a besoin d'utiliser la transformée inverse, en particulier dans la résolution des équations différentielles.

1. Soit f une fonction localement intégrable à support positif. On note F sa transformée de Laplace. Utiliser la définition pour montrer les propriétés suivantes de la transformée de Laplace.

f	F
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(p)$
f'	$pF - f(0)$
$f^{(n)}$	$p^n F - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$

2. Établir le tableau suivant de la transformée de Laplace des fonctions usuelles.

fonction	1	$\frac{t^n}{n!}$	e^{at}	$\sin(\omega t)$	$\cos(\omega t)$	$\sinh(\alpha t)$	$\cosh(\alpha t)$
transformée	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^{n+1}}$	$\frac{1}{p-a}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$	$\frac{p}{p^2-\alpha^2}$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes avec conditions initiales. Utiliser les tableaux établis précédemment. Justifier les calculs.

   (a) $y'(t) - y(t) = e^t$, $y(0) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   (b) $y'(t) - y(t) = \sin(2t)$, $y(0) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   (c) $y''(t) + 4y(t) = \sin(2t)$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

   (d) $y^{(3)}(t) - y(t) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

   (e) $y^{(4)}(t) - 2y^{(2)}(t) + y(t) = 0$, $y(0) = y^{(2)}(0) = 0$, $y'(0) = y^{(3)}(0) = 1$.