Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 1

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

Rappel : L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$, et pour $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ avec a, b réels on définit $\mathrm{Re}(\alpha) = a$, $\mathrm{Im}(\alpha) = b$.

1. Exprimer les nombres complexes suivants sous la forme $x + iy$, avec x et y réels :

   (a) $(-1+3i)^{-1}$
   (b) $(1+i)(1-i)$
   (c) $(1+i)(2-i)$
   (d) $(1+i\sqrt{3})^3$
   (e) $\boldsymbol{(7+i\pi)(\pi+i)}$
   (f) $\boldsymbol{\sqrt{2}i(\pi+3i)}$
   (g) $\boldsymbol{(i+1)(i-2)(i+3)}$
   (h) $\boldsymbol{1+e^{2i\pi/3}+e^{-2i\pi/3}}$

2. Écrie chacun de ces nombres complexes en coordonnées polaires :

   (a) $4i$
   (b) $1+e^{2i\pi/3}$
   (c) $i\sqrt{3}+1$
   (d) $\boldsymbol{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$
   (e) $\boldsymbol{e^{-i\pi/2}}$
   (f) $\boldsymbol{5\cos\left(\frac{2}{7}\pi\right)+5i\sin\left(\frac{2}{7}\pi\right)}$

3. Écrire les nombres complexes suivants sous forme cartésienne $(x+iy)$:

   (a) $e^{3i\pi}$
   (b) $3e^{i\pi/4}$
   (c) $\pi e^{-i\pi/3}$
   (d) $e^{2i\pi/6}$
   (e) $e^{-i\pi/2}$
   (f) $e^{i\pi/7}+e^{-i\pi/7}$
   (g) $\boldsymbol{e^{-i\pi}}$
   (h) $\boldsymbol{e^{-5i\pi/4}}$
   (i) $\boldsymbol{e^{i\pi/9}+e^{-8i\pi/9}}$

4. Calculer les racines des polynômes suivants :

   (a) z^3-5
   (b) z^4+1
   (c) z^4+2z^2+2
   (d) $\boldsymbol{z^7-1}$
   (e) $\boldsymbol{z^2+3z+1}$
   (f) $\boldsymbol{z^6-3z^3+2}$

5. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Montrer que $\overline{\alpha}\overline{\beta} = \overline{\alpha\beta}$ et que $\overline{\alpha + \beta} = \overline{\alpha} + \overline{\beta}$.

6. Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$. Exprimer $\operatorname{Re}(\alpha)$ et $\operatorname{Im}(\alpha)$ en fonction de $\alpha, \overline{\alpha}$, puis montrer que $\operatorname{Im}(\alpha) \leq |\operatorname{Im}(\alpha)| \leq |\alpha|$.

7. Décrire géométriquement les ensemble de points z satisfaisant les conditions suivantes et dire lesquels sont ouverts, fermés, bornés, compacts :

   (a) $|z - i + 3| = 5$
   (b) $|z - i + 3| > 5$
   (c) $|z - i + 3| \leq 5$
   (d) $|z + 2i| \leq 1$
   (e) $|\arg z| \geq \pi/3$
   (f) $\operatorname{Im} z > 0$
   (g) $\operatorname{Im} z \geq 0$
   (h) $\operatorname{Re} z > 0$
   (i) $\operatorname{Re} z \geq 0$
   (j) $2\operatorname{Re} z + 3\operatorname{Im} z \geq 4$

8. (Formules trigonométriques) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de développer $\sin(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha + \beta)$.
   (a) Justifier $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$.
   (b) Transformer l'égalité précédente en coordonnées cartésiennes et simplifier. Que peut-on dire ?
   (c) En déduire une formule de $\tan(\alpha+\beta)$ en fonction de $\tan(\alpha)$ et $\tan(\beta)$.

9. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Montrer que l'équation $x^2 = \alpha$ admet deux solutions distinctes.

10. Décrire l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} | e^z = 1\}$, puis pour $\alpha \in \mathbb{C}$, trouvez les solutions $z \in \mathbb{C}$ de l'équation $e^z = \alpha$.

11. Soit $f(z) = 1/z$. Décrire l'action de f sur les points à l'intérieur, à l'extérieur puis sur le cercle unité. On appele cette application l'**invertion** par rapport au cercle unité.

12. Soit $f(z) = 1/\overline{z}$. Décrire l'action de f sur les points à l'intérieur, à l'extérieur puis sur le cercle unité. On appele cette application la **réflextion** par rapport au cercle unité.