Université de Genève
Section de Mathématiques
A. Karlsson

Analyse Complexe 2015 - 2016
Série d'exercices 9 : Petite révision et prolongement analytique

Si vous avez des questions ou des remarques, vous pouvez nous écrire à : `Maxime.Gagnebin@unige.ch` ou `Jhih-Huang.Li@unige.ch`. Les exercices en gras comptent pour le bonus et les séries sont à rendre avant le vendredi de chaque semaine dans le casier de votre assistant (à la section de maths).

1. **Soit f une fonction entière (*i.e.* holomorphe sur $\mathbb{C}$). Supposons que sa partie réelle est toujours positive ($\mathrm{Re} f \geq 0$). Montrer qu'elle est constante. En déduire que les seules fonctions harmoniques positives sur $\mathbb{R}^2$ sont les fonctions constantes.**
   Indication : **Considérer la fonction $g(z) = \exp(-f(z))$.**

2. **On définit la fonction suivante**
$$f(z) = \sum_{k \geq 0} k(k-1)(k-2)z^k$$
   sur le disque $B_1(0)$. Déterminer le domaine maximal où f peut être prolongée comme fonction analytique. Par abus de notation, on note ce prolongement f. Calculer $f(2)$.

3. **Soit $\Gamma(z)$ la fonction définie par la formule**
$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$
   où $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$. Cette fonction est appelée fonction gamma.
   (a) **Montrer que l'intégrale est bien définie sur $\{z, \mathrm{Re} z > 0\}$.**
   (b) **Démontrer la relation $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.** ***Indication :*** **Utiliser l'intégration par parties.**
   (c) **Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire les valeurs $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.**
   (d) **Calculer $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en se rappelant que**
$$\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$
   Indication : **Commencer par réécrire l'intégrale ci-dessus en fonction de $\Gamma(\frac{1}{2})$.**

4. Calculer $[(-1+i)^2]^i$ et $(-1+i)^{2i}$ à l'aide de la branche principale du logarithme. Qu'en tirez-vous comme conclusion ?

5. Soit f une fonction entière. Montrer que s'il existe $k > 0$ et $C > 0$ tels que
$$|f(z)| \leq C|z|^k, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$
   alors f est polynomiale de degré au plus $E(k)$ où
$$E(k) := \sup\{n \in \mathbb{N}, n \leq k\}$$
   est la partie entière de k.

6. *Théorème des trois cercles d'Hadamard.*
Soient r, R deux réels tels que $0 < r < R$. On considère la couronne fermée $C := \{z \in \mathbb{C}, r \leq |z| \leq R\}$. On prend f une fonction holomorphe sur U un ouvert contenant C. Pour $\rho \in [r, R]$, on pose
$$M_f(\rho) := \max\{|f(z)|, |z| = \rho\}.$$
   (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$ puis $\alpha \in \mathbb{R}$ on a
   $$\rho^\alpha M_f(\rho) \leq \max\{r^\alpha M_f(r), R^\alpha M_f(R)\}.$$
   (b) En déduire l'inégalité
   $$M_f(\rho) \leq M_f(r)^{\frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}} M_f(R)^{\frac{\ln \rho - \ln r}{\ln R - \ln r}}.$$

7. *Prolongement analytique de la fonction zêta.*
On rappelle que la fonction zêta de Riemann a été définie dans l'exercice 3 de la série 6 par
$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
sur $\{z, \mathrm{Re} z > 1\}$. Ici, on cherche à la prolonger analytiquement sur un domaine plus grand. Posons
$$\eta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^z}.$$
   (a) En utilisant le critère des séries alternées, justifier pourquoi η est bien définie pour $z > 0$. La même question pour $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re} z > 0$ en utilisant la sommation d'Abel.
   (b) Démontrer la relation entre ζ et η :
   $$\zeta(z) = \frac{\eta(z)}{1 - 2^{1-z}}$$
   pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re} z > 1$.
   (c) À l'aide de la relation précédente, sur quel domaine peut-on prolonger ζ ?
   (d) *(Pour aller plus loin.)* Comment prolonger ζ sur $\{z, \mathrm{Re} z > 0\}$?