ELÉMENTS DE CORRECTION POUR LES EXERCICES VUS EN COURS

1. Mesure intégration

Exercice 1.1

Soit $(E, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < +\infty$. Soit $f : E \to E$ une application mesurable. On dit que f préserve la mesure si $\forall A \in \mathcal{T}, \mu(f^{-1}(A)) = \mu(A)$, et on supposera dans la suite que f vérifie cette propriété. Enfin, on notera, pour $n \geq 1$ et $A \subset E$: $f^{-n}(A) = \{x \in E \,|\, f^n(x) \in A\}$ avec $f^n = \underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{n}$.

(1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\forall A \in \mathcal{T}, \mu(f^{-n}(A)) = \mu(A)$.

(2) Pour $A \in \mathcal{T}$, on pose :
$$H_A = \{x \in A \,|\, \forall n \geq 1, f^n(x) \notin A\}$$
Montrer que H_A est mesurable.

(3) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $f^{-n}(H_A) \cap H_A = \emptyset$.

(4) En déduire que pour tout couple d'entiers $(m, n), m \neq n$, on a :
$$f^{-n}(H_A) \cap f^{-m}(H_A) = \emptyset$$

(5) Evaluer :
$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(H_A)\right)$$
et en déduire que $\mu(H_A) = 0$. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de récurrence de Poincaré.

(1) Le plus simple est de raisonner par récurrence. La propriété est vraie au rang 1 par hypothèse. Supposons qu'elle soit vraie jusqu'au rang n. On a :
$$\mu\left(f^{-n+1}(A)\right) = \mu\left(f^{-1}\left(f^{-n}(A)\right)\right) = \mu\left(f^{-n}(A)\right)$$
en appliquant l'hypothèse de récurrence, $\mu\left(f^{-n}(A)\right) = \mu(A)$ ce qui prouve le résultat demandé.

(2) On remarque que :
$$H_A = A \cap \bigcap_{n\geq 1} f^{-n}\left({}^cA\right)$$

On sait que ${}^cA$ est mesurable car A l'est et donc $f^{-n}\left({}^cA\right)$ est mesurable par mesurabilité de l'application f. Finalement, toute intersection dénombrable de parties mesurables étant mesurable, on a H_A mesurable.

(3) Supposons l'existence de $x \in f^{-n}(H_A) \cap H_A$. Comme $x \in H_A$, on a $f^n(x) \notin A$. Par ailleurs, $x \in f^{-n}(H_A)$, donc $f^n(x) \in H_A \subset A$, qui est contradictoire.

(4) On peut supposer que $n > m$, ce qui permet d'écrire :

$$f^m\left(f^{-n}(H_A) \cap f^{-m}(H_A)\right) = f^{-n+m}(H_A) \cap H_A = \emptyset$$

La proposition s'en déduit.

(5) La famille $f^{-n}\left(H_A\right), n \geq 0$ est formée d'ensembles mesurables disjoints en vertu des questions précédentes. En application du second axiome des mesures :

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(H_A)\right) = \sum_{n\geq 0} \mu\left(f^{-n}(H_A)\right) = \sum_{n\geq 0} \mu\left(H_A\right)$$

Comme la mesure de E est finie, la série précédente doit l'être également, ce qui implique $\mu\left(H_A\right) = 0$.

Exercice 1.2

On se place dans $\mathbb{N}$ que l'on munit de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(1) Montrer que l'application $\mu\colon A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mapsto \#A$, avec $\#A$ le cardinal de A, est une mesure sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

(2) Montrer que les applications mesurables positives sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ sont les suites de réels positifs.

(3) Soit $f = (f(0), f(1), \dots)$ une application mesurable positive sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$g_n = (f(0), f(1), \dots, f(n), 0, \dots)$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est une application étagée positive et que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, de limite simple f.

(4) En déduire que :

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$$

(1) On vérifie tout d'abord que $\mu(\emptyset) = \#\emptyset = 0$. Soit $A_n, n \in \mathbb{N}$ une famille dénombrable de parties de $\mathbb{N}$ disjointes deux à deux. Si l'une des parties est de cardinal infini, alors la réunion l'est

également et on a de façon triviale :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = +\infty$$

Si maintenant toutes les parties sont de cardinal fini, soit il en existe un nombre infini qui soient non vides, auquel cas le cardinal de la réunion est infini, soit tous les A_n sont vides au delà d'un certain rang, auquel cas on a directement le fait que le cardinal de la réunion soit somme des cardinaux. Dans ces deux cas on a encore :

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

prouvant que μ est une mesure.

(2) Comme la tribu choisie est $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, toutes les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ sont mesurables. Une suite de réels étant précisément une telle application, la propriéte demandée s'en déduit.

(3) g_n est une application mesurable ne prenant qu'un nombre fini de valeurs distinctes, elle est donc étagée. La suite des applications g_n est bien évidemment croissante de limite simple f.

(4) C'est la définition de l'intégrale d'une application mesurable positive à partir des suites croissantes d'applications étagées (voir cours).

Exercice 1.3

(1) Soit la suite d'applications (f_n) définies sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$$

Déterminer la limite simple de cette suite. Conclure quant à la limite de :

$$\int_{[0,1]} f_n(x)d\lambda(x)$$

(2) On considère maintenant la suite (g_n), applications définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{1}{n}1_{[0,n]}$$

Déterminer la limite simple de cette suite. Peut-on appliquer le théorème de convergence dominée à :

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)d\lambda(x)$$

(1) On a clairement $\forall x \in [0,1], \lim_n f_n(x) = 0$. Par ailleurs, vérifiant que l'application :

$$u \to \frac{u}{1+u^2}$$

atteint son maximum en 1, on montre que :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) \leq \frac{1}{2}$$

Comme l'application constante $\frac{1}{2}$ est sommable sur le compact $[0,1]$, le théorème de convergence dominée s'applique et :

$$\lim_n \int_{[0,1]} f_n(x) d\lambda(x) = 0$$

(2) Dans le deuxième cas, on a aussi convergence simple vers 0 (écrire la définition !). Cependant, on n'a manifestement pas :

$$\lim_n \int_{\mathbb{R}} g_n(x) dx = 0$$

chaque intégrale valant 1 ! Soit g application telle que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq g_n(x)$. Il est clair que sur chaque intervalle $]n, n+1]$ on doit avoir $g(x) \geq (n+1)^{-1}$. L'intégrale de g sera donc minorée par les sommes partielles de la série harmonique qui est divergente : il est impossible (heureusement !) d'appliquer la convergence dominée.

Exercice 1.4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application sommable. On définit l'application $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \phi(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i2\pi\xi t} d\lambda(t)$$

(1) Montrer que ϕ est bien définie et est continue sur $\mathbb{R}$.

(2) On suppose maintenant que f est telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} |tf(t)| d\lambda(t) < +\infty$$

Montrer que ϕ est dérivable et calculer sa dérivée.

(1) L'existence de l'intégrale ne pose pas de problèmes : $exp(-i2\pi\xi t)$ est continue, donc mesurable. Le produit $f(t)exp(-i2\pi\xi t)$ est mesurable. Par ailleurs, $|f(t)exp(-i2\pi\xi t)| = |f(t)|$, d'où :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)exp(-i2\pi\xi t)| d\lambda(t) = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| d\lambda(t) < +\infty$$

par hypothèse. La continuité découle de l'application immédiate du théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre vu en cours (reprendre les hypothèses).

(2) Pour la dérivabilité, il convient d'écrire la forme la plus générale du théorème de dérivation des intégrales dépendant d'un paramètre. Soit $\xi_0 \in \mathbb{R}$:
- L'application $F(t,\xi) = f(t)exp(-i2\pi\xi t)$ est sommable en t pour tout ξ réel.
- Elle est dérivable en ξ_0.
- On calcule :

$$\begin{aligned}|f(t)e^{-i2\pi\xi t} - f(t)e^{-i2\pi\xi_0 t}| &= |f(t)||e^{-i2\pi(\xi-\xi_0)t-1} \\ &\leq 2\pi|tf(t)||\xi-\xi_0|\end{aligned}$$

Comme $|tf(t)|$ est supposée sommable, les hypothèses du théorème sont vérifiées ; la dérivée de l'intégrale en ξ_0 existe et vaut :

$$-i2\pi\int_{\mathbb{R}} tf(t)e^{-i2\pi x_0 t}d\lambda(t)$$

Exercice 1.5

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est localement intégrable si elle est sommable sur tout compact de $\mathbb{R}$. Soient f, g localement intégrables. On pose :

$$F : x \to \int_0^x f(t)d\lambda(t), \quad G : x \to \int_0^x g(t)d\lambda(t)$$

(1) Montrer, en utilisant l'application :

$$h : (x,y) \to 1_{x\leq y}g(x)f(y)$$

que pour tout intervalle borné $[a,b]$:

$$\int_{[a,b]} f(t)(G(t)-G(a))d\lambda(t) = \int_{[a,b]} g(t)(F(b)-F(t))d\lambda(t)$$

(2) En déduire la formule d'intégration par parties :

$$\int_{[a,b]} F(t)g(t)d\lambda(t) = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_{[a,b]} f(t)G(t)d\lambda(t)$$

La question 2) est une conséquence immédiate de la 1). On ne détaillera que cette derniére. h est mesurable. En effet l'application :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x \mapsto f(x)$$

est mesurable comme composée de la projection canonique sur la première composante et de f. De même pour l'application :

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y \mapsto g(y)$$

Le produit de deux applications mesurables étant mesurable, on en déduit la mesurabilité de h. L'application h est sommable sur $[a,b]^2$ car, par application du théorème de Tonnelli :

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]^2} |h(x,y)| d\lambda \times d\lambda &\leq \int_{[a,b]^2} |f(x)g(y)| d\lambda \times d\lambda \\ &\leq \int_{[a,b]} |f| d\lambda \int_{[a,b]} |g| d\lambda < +\infty\end{aligned}$$

Le théorème de Fubini s'applique alors à h et :

$$\int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} f(x,y) d\lambda(x) \right) d\lambda(y) = \int_{[a,b]} \left(\int_{[a,b]} f(x,y) d\lambda(y) \right) d\lambda(x)$$

ce qui est précisément l'égalité demandée.

Exercice 1.6

Soit $a > 0, b > 0$ deux réels strictement positifs.

(1) Montrer que les deux intégrales suivantes sont bien définies :

$$\Gamma(a) = \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x} x^{a-1} d\lambda(x) \, , \, B(a,b) = \int_{[0,1]} x^{a-1}(1-x)^{b-1} d\lambda(x)$$

(2) Montrer que :

$$\Gamma(a) = 2 \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2} x^{2a-1} d\lambda(x)$$

(3) Justifier avec précision que :

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4 \int_{\mathbb{R}^{+2}} e^{-(x^2+y^2)} x^{2a-1} y^{2b-1} d\lambda(x) d\lambda(y)$$

(4) En utilisant le changement de variable de l'exercice précédent, en déduire :

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = B(a,b)\Gamma(a+b)$$

(1) Les applications intégrées sont mesurables car continues et positives, les intégrales existent donc. Elles sont toutes les deux finies : au voisinage de 0 et 1 la sommabilité de $e^{-x}x^{a-1}$ (resp. $x^{a-1}(1-x)^{b-1}$) s'obtient par application de l'échelle de comparaison de Riemann. La sommabilité au voisinage de $+\infty$ de $e^{-x}x^{a-1}$ est un résultat classique. En voici une preuve possible. On note tout d'abord que $e^{-x}x^{a-1} = \exp\left((a-1)\ln x - x\right)$. Le logarithme étant concave sur $\mathbb{R}^+$, son graphe est situé en dessous de toute tangente. Pour tout réel $x > 0$, on a donc :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+, \, \ln y < \ln x + \frac{y-x}{x}$$

Soit :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ (a-1)\ln y - y < (a-1)(\ln x - 1) + y\left(\frac{a-1}{x} - 1\right)$$

Si $x = 2(a-1)$, la majoration devient :

$$\forall y \in \mathbb{R}^+,\ e^{-y}y^{a-1} < \exp\left((a-1)(\ln x - 1)\right)\exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

qui est sommable au voisinage de $+\infty$.

(2) Le changement de variable $x \mapsto x^2$ est un difféomorphisme de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En appliquant la formule du cours, on obtient directement :

$$\Gamma(a) = 2\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}x^{2a-1}d\lambda(x)$$

(3) L'application :

$$(x,y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}x^{2a-1}y^{2a-1}$$

est continue sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, donc mesurable. Etant positive, on peut appliquer Tonnelli :

$$\int_{\mathbb{R}^{+2}} e^{-(x^2+y^2)}x^{2a-1}y^{2b-1}d\lambda(x)d\lambda(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^+} e^{-x^2}x^{2a-1}d\lambda(x)\int_{\mathbb{R}^+} e^{-y^2}y^{2b-1}d\lambda(y)$$

Ce qui prouve l'égalité demandée.

(4) Le changement de variable en question utilise les coordonnées polaires (exercice 16 du cours). C'est un difféomorphisme de classe C^∞ de $\mathbb{R}^{*+}\times]0,\frac{\pi}{2}$ sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*}$, d'expression :

$$(\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

Le jacobien du changement de variable est ρ, ce qui donne, en application de la formule du cours :

$$\int_{\mathbb{R}^{+2}} e^{-(x^2+y^2)}x^{2a-1}y^{2b-1}d\lambda(x)d\lambda(y) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^{*+}\times]0,\frac{\pi}{2}[} e^{-\rho^2}\rho^{2(a+b)-1}\cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta d\rho d\theta$$

En appliquant à nouveau Tonnelli, on peut intégrer par rapport à ρ pour faire apparaître $\gamma(a+b)$. Pour la seconde intégrale, on pose $t = \cos^2\theta$, la formule du changement de variable donne :

$$2\int_{]0,\frac{\pi}{2}[} \cos^{2a-1}\theta\sin^{2b-1}\theta d\theta = \int_{]0,1[} t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = B(a,b)$$

Soit finalement :

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = \Gamma(a+b)B(a,b)$$

Exercice 1.7

Déterminer les transformées de Fourier des applications suivantes :

$$f_1 \colon x \to e^{-|x|}$$
$$f_2 \colon x \to (1 - |x|)1_{[-1,1]}$$

Les deux applications sont sommables, on utilise la formule du cours.

$$\begin{aligned}\widehat{f_1}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|-i\xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} e^{-x-i\xi x} dx + \int_{\mathbb{R}^+} e^{x-i\xi x} dx\end{aligned}$$

En utilisant une primitive pour les deux intégrales, il vient :

$$\widehat{f_1}(\xi) = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}$$

On vérifie la continuité et la décroissance à l'infini de l'application obtenue. Pour f_2, on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\widehat{f_2}(\xi) &= \int_{[0,1]} (1-x)e^{-i\xi x} dx + \int_{[-1,0]} (1+x)e^{-i\xi x} dx \\ &= \left[-\frac{(1-x)}{i\xi}e^{-i\xi x}\right]_0^1 + \left[-\frac{(1+x)}{i\xi}e^{-i\xi x}\right]_{-1}^0 + \\ &\int_{[0,1]} \frac{-1}{i\xi}e^{-i\xi x} dx + \int_{[-1,0]} \frac{1}{i\xi}e^{-i\xi x} dx\end{aligned}$$

Le terme intégré s'annule. Les deux intégrales restantes se calculent avec une primitive. On obtient après simplification :

$$\widehat{f_2}(\xi) = \frac{2}{\xi^2}(1 - \cos\xi)$$

On vérifie continuité et décroissance en l'infini.

Exercice 1.8

(1) Déterminer la transformation de Fourier inverse dans $L^2(\mathbb{R})$ de l'application $1_{[-1,1]}$.

(2) En déduire la transformation de Fourier de l'application sinc :

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \mathrm{sinc}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

(3) Pouvez-vous en déduire que sinc $\notin L^1(\mathbb{R})$?

(1) L'application proposée est sommable, on peut utiliser une intégrale pour calculer sa transformée de Fourier inverse :

$$f\colon x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{[-1,1]} e^{i\xi x}d\xi = \frac{1}{\pi}\operatorname{sinc} x$$

(2) La transformée de Fourier étant inversible dans L^2, on en déduit immédiatement que la transformée de Fourier de sinc est $\pi 1_{[-1,+1]}$.

(3) La transformée trouvée n'est pas égale presque partout à une application continue, elle ne peut donc être obtenue à partir d'une application sommable.

Exercice 1.9

Soit l'application :

$$f : x \to \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(1) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et calculer $\widehat{f}$ (on pourra utiliser la transformation inverse de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$ de l'application $\pi 1_{[-1,+1]}$ vue dans l'exercice précédent et le produit de convolution).

(2) En déduire la valeur des l'intégrales :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2 x}{x^2} d\lambda(x)$$

et

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 x}{x^4} d\lambda(x)$$

(1) Comme sinc $\in L^2(\mathbb{R})$, $f = \operatorname{sinc}^2 \in L^1(\mathbb{R})$. La transformée de Fourier de f s'obtient en utilisant la relation entre produit de convolution et transformée de Fourier :

$$\widehat{f} * \widehat{g} = 2\pi \widehat{fg}$$

d'où :

$$\widehat{f} = \frac{\pi}{2} 1_{[-1,+1]} * 1_{[-1,+1]}$$

soit :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{2} 1_{[-2,+2]}(\xi)(2 - |\xi|)$$

(2) La première intégrale est la valeur de $\widehat{f}$ en 0, soit π. Pour la deuxième, on utilise la formule de Plancherel :

$$2\pi \|f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2$$

Le membre de droite se calcule aisément comme :

$$\frac{\pi^2}{2}\int_{[0,2]}(2-|\xi|)^2 d\lambda(\xi) = \frac{4\pi^2}{3}$$

soit :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 x}{x^4} d\lambda(x) = \frac{2\pi}{3}$$

2. Fonctions de la variable complexe

Exercice 2.10

Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{C}$ et soit f application holomorphe sur Ω. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) f est constante sur Ω.

(b) $\Re(f)$ est constante sur Ω.

(c) $\Im(f)$ est constante sur Ω.

(d) $|f|$ est constante sur Ω.

On séparera partie réelle et partie imaginaire de f en posant $f = P+iQ$ Il est clair que (a) implique les autres conditions. Si on suppose (b), par application des conditions de Cauchy et en utilisant que P est constant :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

Ω étant connexe, on en déduit Q constante. Il s'agit en fait d'une équivalence $(b) \Leftrightarrow (c)$, le même raisonnement s'appliquant à Q. On montre donc en sus que $|f|^2 = P^2 + Q^2$ est aussi une constante. Finalement, si l'on suppose $P^2 + Q^2$ constant, les dérivées partielles de cette application par rapport à x, y donnent ;

$$P\frac{\partial P}{\partial x} + Q\frac{\partial Q}{\partial x} = 0,\ P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

En utilisant les conditions de Cauchy :

$$P\frac{\partial P}{\partial x} - Q\frac{\partial P}{\partial y} = 0,\ P\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial x} = 0$$

Il s'agit d'un système linéaire homogène de déterminant $P^2+Q^2 = |f|^2$. Si cette quantité est nulle, alors f est nulle et (a) est vérifiée. Sinon :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

prouvant que P est une constante et donc aussi Q car $(b) \Leftrightarrow (c)$, soit f constante.

Exercice 2.11

Soit la série entière :

$$f : z \mapsto \sum_{n>0} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$$

(1) Déterminer son rayon de convergence ;
(2) Montrer que pour tout réel $x \in]0,2[$, $f(x) = \log(x)$;
(3) En déduire que f est l'unique application analytique prolongeant le logarithme réel sur le disque ouvert $B(1,1)$;
(4) Vérifier que sur $B(1,1)$, on a $\exp \circ f = Id$.

(1) On utilise le critère de d'Alembert. Le rapport de deux termes consécutifs est $n/(n+1)$, de limite 1 à l'infini. Le rayon de convergence est donc 1.

(2) Résultat classique de classes préparatoires. On peut dériver terme à terme la série dans son disque ouvert de convergence, qui donne la série :

$$\sum_{n>0} (-1)^n (z-1)^n = \frac{1}{1+(z-1)}$$

La valeur particulière $f(1) = 0$ permet alors de conclure.

(3) f coïncide avec log sur une partie possèdant un point d'accumulation (en fait, tout le segment réel $]0,2[$). Par le principe du prolongement analytique, elle est unique.

(4) Toujours sur le segment $]0,2[$, $\exp \circ f = \exp \circ \log = Id$. Par prolongement analytique de l'application $\exp \circ f$, cette égalité est vraie sur $B(1,1)$.

Exercice 2.12

Soit l'application $f\colon z \mapsto \exp(iz^2)$.

(1) Montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et vérifier que sa dérivée est continue.

(2) Pour tout réel $r > 0$, le contour γ_r est défini selon la figure 1. Proposer une écriture de γ_r sous la forme d'une courbe de Jordan régulière de classe C^1 par morceaux.

(3) Que vaut l'intégrale :

$$\int_{\gamma_r} f(z)dz$$

(4) Ecrire cette intégrale sous la forme d'une somme de trois intégrales de chemin et montrer que l'intégrale correspondant à l'arc de cercle tend vers 0 lorsque $r \to +\infty$.

(5) En déduire les valeurs des intégrales généralisées suivantes, dites intégrales de Fresnel :

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{[-r,r]} \cos(x^2)dx, \quad \lim_{r\to+\infty}\int_{[-r,r]} \sin(x^2)dx$$

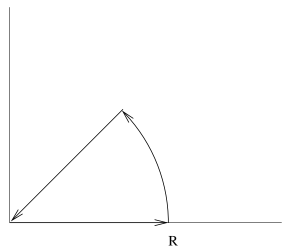

FIGURE 1. Contour γ_r

(1) L'application f est holomorphe comme composée d'applications holomorphes. Sa dérivée est $f'(z) = 2izf(z)$, qui est continue.

(2) Par la formule de Cauchy, on a :

$$\int_{\gamma_3\cdot\gamma_2\cdot\gamma_1} f(z)dz = 0$$

Par ailleurs :

$$\int_{[0,R]} e^{ix^2} d\lambda(x) = \int_{\gamma_1} f(z)dz$$

En choisissant pour γ_2 le paramètrage :

$$t \in [0, \frac{\pi}{4}] \to \gamma_2(t) = e^{it}$$

on obtient :

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_{[0,\frac{\pi}{4}]} e^{-R^2\sin(2t)+iR^2\cos(2t)} iRe^{it} d\lambda(t)$$

On peut majorer le module de $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ par :

$$\int_{[0,\frac{\pi}{4}]} e^{-R^2\sin(2t)} R d\lambda(t)$$

Comme l'application sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, sur cet intervalle on a : $\sin(t) \geq \frac{2t}{\pi}$, ce qui donne la majoration :

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)dz\right| \leq \int_{[0,\frac{\pi}{4}]} e^{-\frac{R^2 4t}{\pi}} Rdt = \frac{(\pi)(1-e^{-R^2})}{4R}$$

(3)

$$\int_{\gamma_3} f(z)dz = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{[0,R]} e^{-t^2} d\lambda(t)$$

d'où en passant à la limite et en remarquant que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0$:

$$I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Exercice 2.13

Soit $f\colon z \in \mathbb{C} \mapsto \exp(-z^2)$.

(1) Montrer que f est holomorphe dans $\mathbb{C}$, de dérivée continue.
(2) En utilisant le contour γ_r donné figure 2, déterminer, pour $\omega \in \mathbb{R}$ fixé, la valeur de l'intégrale :

$$\int_{\gamma_r} \exp(-z^2)dz$$

(3) En faisant tendre r vers $+\infty$ et en faisant un raisonnement similaire à celui de l'exercice précédent, déterminer la transformée de Fourier de l'application $x \mapsto \exp(-x^2)$.

(1) Même raisonnement que dans l'exercice précédent.
(2) L'application intégrée est holomorphe, la formule de Cauchy s'applique :

$$\int_{\gamma_r} \exp(-z^2)dz = 0$$

(3) L'intégrale sur l'axe réel est :

$$\int_{[-r,r]} \exp(-x^2)dx$$

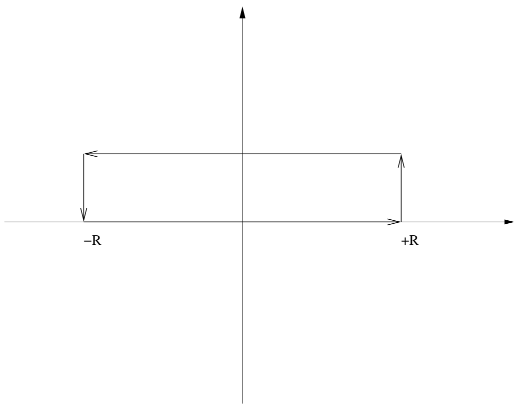

FIGURE 2. Contour γ_r

de limite $\sqrt{\pi}$ pour $r \to +\infty$. Le segment supérieur se paramètre par :

$$t \in [-r, r] \mapsto -t + i\frac{\omega}{2}$$

L'intégrale le long de ce chemin est donc :

$$-\int_{[-r,r]} e^{-t^2+it\omega+\frac{\omega^2}{4}} dt$$

La limite lorsque $r \to +\infty$ est :

$$-e^{\frac{\omega^2}{4}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2+it\omega} dt$$

Finalement, l'intégrale sur les segments verticaux aura pour limite 0 si $r \to +\infty$. Un paramétrage possible du segment situé en r est :

$$t \in [0, \frac{\omega}{2}] \mapsto r + it$$

conduisant à l'intégrale :

$$i \int_{[0,\frac{\omega}{2}]} e^{-(r+it)^2} dt$$

son module se majore par :

$$\frac{\omega}{2} e^{-r^2+\frac{\omega^2}{4}}$$

qui a bien pour limite 0 lorsque $r \to +\infty$. Le second segment vertical se traite de la même façon. En regroupant les termes et en remarquant que la transformée de Fourier est une application paire, on en déduit finalement qu'il s'agit de l'application :

$$\xi \mapsto \sqrt{\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Exercice 2.14

Soit f l'application définie par :

$$f\colon z \mapsto \frac{\exp(iaz)}{1+z^2}$$

avec $a > 0$ réel.

(1) En utilisant la première formule de Cauchy, évaluer l'intégrale de f le long du contour donné figure 3 et sous l'hypothèse $R > 1$.

(2) Par passage à la limite $R \to +\infty$, en déduire la transformée de Fourier de l'application $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$.

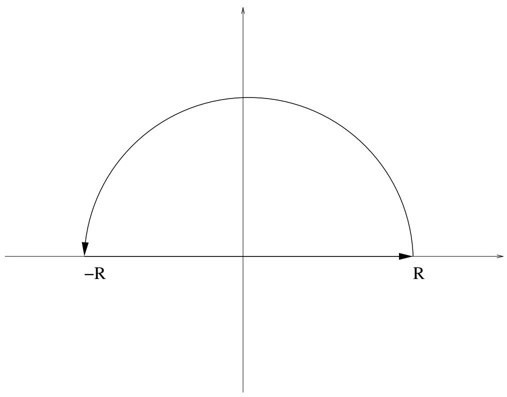

FIGURE 3. Contour d'intégration

(1) Pour $R > 1$, le point i se trouve à l'intérieur du contour d'intégration γ. On a donc :

$$\int_\gamma \frac{\exp(iaz)}{z+i}\frac{dz}{z-i} = i2\pi\frac{\exp(-a)}{2i} = \pi\exp(-a)$$

(2) On applique le lemme de Jordan :

$$\left| z\frac{\exp(iaz)}{z^2+1} \right| = \frac{|z|\exp(-a\Im(z))}{|1+z^2|}$$

Sur le demi-cercle, $\Im(z) \leq 0$, d'où :

$$\frac{|z|\exp(-a\Im(z))}{|1+z^2|} \leq \frac{R}{R^2-1}$$

qui a pour limite 0 lorsque $R \to +\infty$.

(3) On obtient immédiatement que pour $\xi > 0$, la transformée de Fourier a pour valeur $\pi\exp(-\xi)$. Par parité, elle vaut donc sur tout $\mathbb{R}$, $\pi\exp(-|\xi|)$.

Exercice 2.15

Calculer les intégrales généralisées suivantes :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^2\cos(ax)}{1+x^4}dx, \quad a \in \mathbb{R}$$
$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}dx$$

L'intégrale I_1 est absolument convergente :

$$\left|\frac{x^2\cos(ax)}{1+x^4}\right| \leq \frac{x^2}{1+x^4}$$

On supposera $a \geq 0$ en toute généralité puisque le cosinus est une application paire. Soit $f_1 : z \to \frac{z^2e^{iaz}}{1+z^4}$ que l'on intégre sur le contour de l'exercice précédent. Le lemme de Jordan s'applique directement sur le demi-cercle :

$$\left|\frac{z^3e^{iaz}}{1+z^4}\right| \leq \frac{|z|^3e^{-a\Im(z)}}{|1-|z|^4|}$$

Les pôles de f dans le domaine intérieur au contour sont, pour R assez grand :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}},\ z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

On utilise la formule du cours pour calculer le résidu d'une fraction rationnelle en un pôle simple :

$$Res(z_k) = \frac{z_k^2e^{iaz_k}}{4z_k^3}$$

On en déduit après calculs :

$$I_1 = \frac{4\pi e^{-a/\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{a}{\sqrt{2}} - \cos\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

Pour la seconde intégrale, On utilise l'application $g : z \to \frac{e^{iz}}{z}$ et le contour donné en figure 4. Elle est holomorphe dans le domaine intérieur au contour. Par continuité de g, la limite de l'intégrale sur le demi-cercle intérieur lorsque le rayon tend vers 0 est π. Sur le demi-cercle extérieur (de rayon R), on majore l'intégrale par :

$$2\int_{[0,\frac{\pi}{2}]} e^{-\frac{2Rt}{\pi}}d\lambda(t)$$

qui tend vers 0 pour $R \to +\infty$. On en déduit que la valeur de l'intégrale généralisée demandée est $\frac{\pi}{2}$.

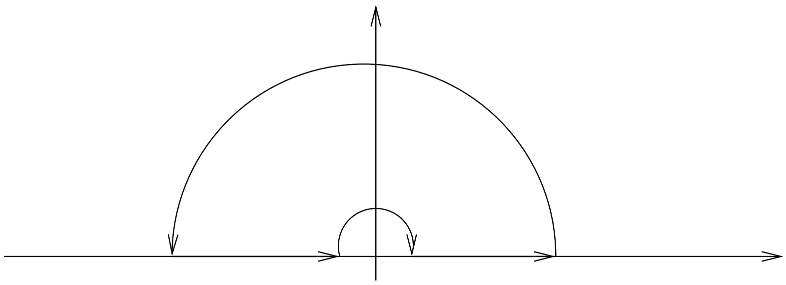

FIGURE 4. Contour d'intégration