De la sección 2.1.5 desarrollar el ejercicio 10

10. Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado n, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \rightleftharpoons p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

a) Demostrar que P_n es un espacio vectorial respecto a la suma de polinomios y a la multiplicación de polinomios por un número (número real)

Sean $q(x)$ y $p(x) \in P_n$ se define $q(x) + p(x)$ como

$$(q+p)(x) = (q+p)_0 + (q+p)_1 x + (q+p)_2 x^2 + \cdots$$
$$+ (q+p)_{n-1} x^{n-1} = q_0 + p_0 + q_1 x + p_1 x + \cdots + q_{n-1} x^{n-1} + p_{n-1} x^{n-1}$$
$$= p(x) + q(x)_\blacksquare$$

Sea α y $\beta \in \mathbb{R}$ se define que: $\alpha p(x) = p(\alpha x)$, se cumple que:

- $\alpha p(x) + \beta q(x) = p(\alpha x) + q(\beta x) = q(\beta x) + p(\alpha x)$
- $p(x) + (q(x) + K(x)) = p_i x^i + (q_i x^i + K_i x^i) = (p_i x^i + q_i x^i) + K_i x^i$
- $\exists\ \hat{O}(x)$ tal que $p(x) + \hat{O}(x) = p_i x^i + O_i x^i = (p+O)_i x^i$
  $= p_i x^i = p(x)_\blacksquare$
- $\exists -p(x) \mid p(x) - p(x) = p_i x^i - p_i x^i = (p-p)_i x^i = O_i x^i$
  $= \hat{O}(x)_\blacksquare$
- $\alpha(\beta p(x)) = \alpha(\beta p_i x^i) = \alpha\beta(p_i x^i) = \alpha\beta p(x)_\blacksquare$
- $(\alpha+\beta) p(x) = (\alpha+\beta) p_i x^i = \alpha p_i x^i + \beta p_i x^i = \alpha p(x) + \beta p(x)_\blacksquare$

b) Si los coeficientes a_i son enteros ¿P_n sera un espacio vectorial? ¿Por que?

Debemos demostrar que se cumplen todas las propiedades anteriores:

Si, ya que se garantiza la existencia del elemento neutro y el resto de propiedades.

c) ¿Cuál de los siguientes subconjuntos de P_n es un subespacio vectorial?

I) El polinomio cero y todos los polinomios de grado $n-1$.

El subconjunto es cerrado bajo la suma, existe un elemento neutro.

II) El polinomio cero y todos los polinomios de grado par.

El subconjunto es cerrado bajo la suma, existen elementos inversos para cada elemento y un elemento neutro.

III) Todos los polinomios que tienen a x como factor. (grado $n > 1$)

$$p(x) \Rightarrow x(p(x)) = x(a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) =$$

$a_0 x + a_1 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^n$. Existe $\hat{0}(x) = 0_i x^i = 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$, Existen elementos tal que $q(x) + p(x) = \hat{0}(x)$. ✓
Es un subespacio.

IV) Todos los polinomios que tienen $x-1$ como un factor.

Polinomios de la forma:

$$p(x) \Rightarrow (x-1)p(x) = (x-1)p_i x^i = p_i x^{i+1} - p_i x^i$$
$$= p_i(x^{i+1} - x^i) = p_0 x + p_1(x^2 - x) + p_2(x^3 - x^2) + \cdots$$
$$+ p_{n-1}(x^n - x^{n-1}).$$ Es cerrado bajo la suma.

Si $p(x)$ y $q(x) \in P_n$ entonces $p(x) + q(x)$
$= (x-1)(q+p) \in P_n$.

Contiene al elemento neutro $\hat{0}(x) = (x-1)(\hat{0}(x)) = \hat{0}$.