Note. $(\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a}$ ≡ como varía a en dirección de b

$\vec{a}(\nabla\cdot\vec{b})$ ≡ cómo varía $\vec{b}$ en la dirección de $\vec{a}$.

Note: $\cos K\theta + i\,\mathrm{sen}\,K\theta = e^{iK\theta} = (e^{i\theta})^K = (\cos\theta + i\sin\theta)^K$

propiedades.

3. Realice los ejercicios 3 y 4 de la sección 1.4.5 de las notas de clase.

- Demostrar que:

$$A^{i'}_{K}\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{K},$$

y además, como un caso especial, establecer la relación con los cosenos directores que satisfacen:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.$$

Solución:

Sea, por definición,

$$A^{i'}_{K} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{K}} \quad y \quad \tilde{A}^{j}_{i'} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}$$, entonces su producto

$$A^{i'}_{K}\tilde{A}^{j}_{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{K}}\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}}$$, usando la regla de la cadena

$$= \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{K}} = \delta^{j}_{K} \quad Q.E.D$$ Dado que son las mismas variables si $j=K$, de otro modo una no dependeró de la otra, por lo tanto:

$$\frac{\partial x^{j}}{\partial x^{K}} = 0 \quad , \quad j \neq K.$$

Dado que las matrices asociadas a las transformaciones cumplen con la condición de ortogonalidad,

$$\left(A^{i'}_{K}\tilde{A}^{j}_{i'} = \delta^{j}_{K} \right)$$ y preservan la magnitud bajo las rotaciones de los vectores.

Sea $A^i_j = \cos\theta_{ij}$, donde θ_{ij} es el angulo que forman el eje x^i con x_j. Si normalizamos la primera fila de la matriz asociada.

$$(A^1_1)^2 + (A^1_2)^2 + (A^1_3)^2 = 1,$$

$$= \cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$$ dado que los vectores son unitarios.

- Considere el radio vector posición $\mathbb{r} = x^i \hat{I}_i$ en 2 dimensiones. Dado el conjunto de transformaciones que se indican a continuación, demuestre en cuales casos las componentes de $\mathbb{r}$ transforman como verdaderas componentes de vectores.

$$(x,y) \to (-y,x), \quad (x,y) \to (x,-y), \quad (x,y) \to (x-y, x+y)$$

$$(x,y) \to (x+y, x-y)$$

Solucion:

La transformación de coordenadas a un nuevo sistema de coordenadas de un vector posición en 2D está dada por:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' &= -x\sin\theta + y\cos\theta, \end{aligned}\right\} \quad \mathbb{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath}.$$

Caso 1:

$\mathbb{r} = -y\hat{\imath}' + x\hat{\jmath}'$. La relacion de las bases es

$$\hat{\imath}' = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$

$$\hat{\jmath}' = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}, \quad \text{entonces}$$

$$\mathbb{r} = -y(\cos\hat{\imath} + \sin\theta\hat{\jmath}) + x(-\sin\theta\hat{\imath} + \cos\theta\hat{\jmath}),$$

$$= -y\cos\hat{\imath} - y\sin\theta\hat{\jmath} - x\sin\theta\hat{\imath} + x\cos\theta\hat{\jmath},$$

$$= -(x\sin\theta + y\cos\theta)\hat{\imath} + (x\cos\theta - y\sin\theta)\hat{\jmath} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath},$$

$$\Rightarrow \quad x = -x\sin\theta - y\cos\theta$$

$$y = x\cos\theta - y\sin\theta,$$ preserva la norma, si se cumple.

Caso 2:

$$x' = x \quad , \quad y' = -y$$

$\mathbf{r} = x'(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) + y'(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$,

$= x\cos\theta\,\hat{\imath} + x\sin\theta\,\hat{\jmath} + y\sin\theta\,\hat{\imath} - y\cos\theta\,\hat{\jmath}$,

$= (x\cos\theta + y\sin\theta)\hat{\imath} + (x\sin\theta - y\cos\theta)\hat{\jmath} = \mathbf{r}$

$\Rightarrow \quad x = x\cos\theta + y\sin\theta$

$\quad\;\; y = x\sin\theta - y\cos\theta$, preserva la norma, si se cumple.

Caso 3:

$$x' = x - y \quad , \quad y' = x + y$$

$\mathbf{r} = x'(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) + y'(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$,

$\mathbf{r} = (x-y)(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) + (x+y)(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath})$,

$= x\cos\theta\,\hat{\imath} + x\sin\theta\,\hat{\jmath} - y\cos\theta\,\hat{\imath} - y\sin\theta\,\hat{\jmath} - x\sin\theta\,\hat{\imath} + x\cos\theta\,\hat{\jmath} - y\sin\theta\,\hat{\imath}$

$+ y\cos\theta\,\hat{\jmath}$,

$= (x\cos\theta - y\cos\theta - x\sin\theta - y\sin\theta)\hat{\imath} +$

$(x\sin\theta\hat{\jmath} - y\sin\theta + x\cos\theta + y\cos\theta)\hat{\jmath}$,

$= [x(\cos\theta - \sin\theta) - y(\cos\theta + \sin\theta)]\hat{\imath} +$

$[x(\sin\theta + \cos\theta) + y(-\sin\theta + \cos\theta)]\hat{\jmath}$,

$\Rightarrow \quad x = x(\cos\theta - \sin\theta) - y(\cos\theta + \sin\theta)$

$\quad\;\; y = x(\sin\theta + \cos\theta) + y(\cos\theta - \sin\theta)$,

$|\mathbf{r}| = ((\cos\theta - \sin\theta)^2 + (-\cos\theta - \sin\theta)^2)^{1/2}$,

$= (\cancel{\cos^2\theta} + 2\cos\theta\sin\theta + \cancel{\sin^2\theta} + \cancel{\cos^2\theta} + 2\cos\theta\sin\theta + \cancel{\sin^2\theta})^{1/2}$,

$= (2 + 4\cos\theta\sin\theta)^{1/2} = \sqrt{2}\,(1 + 2\cos\theta\sin\theta)^{1/2} \Rightarrow$ no preserva la norma, no se cumple

Caso4:

$$x' = x + y$$

$$y' = x - y.$$

Tal como en el caso anterior la transfomación no mantiene la norma del vector posición.