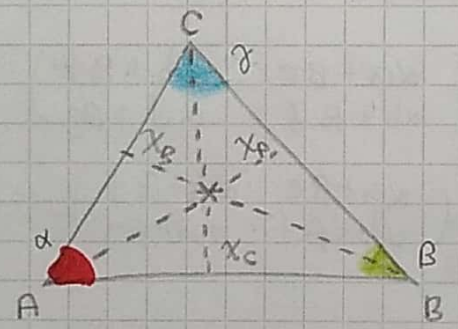
3.



*: Baricentro
$(A\alpha,\ B\beta,\ C\gamma)$

a) Construya la tabla de multiplicación para G_Δ

$$G_\Delta = \{ I,\ \underset{\text{horario}}{\{R_i\}},\ \underset{\text{antihorario}}{\{\bar{R}_j\}},\ \{X_k\} \}$$

$$G_\Delta = \{ I,\ R_{\frac{2\pi}{3}},\ R_{\frac{4\pi}{3}},\ \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}},\ \bar{R}_{\frac{4\pi}{3}},\ X_A,\ X_B,\ X_C \}$$

Observe que: $R_{\frac{4\pi}{3}} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ ^ $\bar{R}_{\frac{4\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$

No consideramos más rotaciones puesto que dejan igual a los tres colores o se repiten con las anteriores

Operación: concatenación '$\square$'

Tabla de multiplicar

$$G_\Delta = \{ I,\ R_{\frac{2\pi}{3}},\ \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}},\ X_A,\ X_B,\ X_C \}$$

Rotación de $4\pi/3$

- $(A\alpha,\ B\beta,\ C\gamma) \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (AB,\ B\gamma,\ C\alpha) \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\gamma,\ B\alpha,\ C\beta)$

$\Leftrightarrow (A\alpha,\ B\beta,\ C\gamma) \xrightarrow{\bar{R}_{2\pi/3}} (A\gamma,\ B\alpha,\ C\beta)$

$\hookrightarrow R_{2\pi/3} \square R_{2\pi/3} = R_{4\pi/3} = \bar{R}_{2\pi/3}$

De forma similar:

$R_{2\pi/3} \square \bar{R}_{2\pi/3} = I$ ^ $\bar{R}_{2\pi/3} \square R_{2\pi/3} = I$

$\bar{R}_{2\pi/3} \square \bar{R}_{2\pi/3} = R_{2\pi/3}$

Escaneado con CamScanner

Para las composiciones de rotación y reflexión se tiene:

- $R_{2\pi/3} \square \chi_K$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\beta, B\gamma, C\alpha) \begin{cases} \xrightarrow{\chi_A} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \leftrightarrow \chi_C \\ \xrightarrow{\chi_B} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \leftrightarrow \chi_A \\ \xrightarrow{\chi_C} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \leftrightarrow \chi_B \end{cases}$$

- $\bar{R}_{2\pi/3} \square \chi_K$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\bar{R}_{2\pi/3}} (A\gamma, B\alpha, C\beta) \begin{cases} \xrightarrow{\chi_A} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \leftrightarrow \chi_B \\ \xrightarrow{\chi_B} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \leftrightarrow \chi_C \\ \xrightarrow{\chi_C} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \leftrightarrow \chi_A \end{cases}$$

- $\chi_K \square R_i$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\chi_A} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \begin{cases} \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \leftrightarrow \chi_B \\ \xrightarrow{\bar{R}_{2\pi/3}} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \leftrightarrow \chi_C \end{cases}$$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\chi_B} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \begin{cases} \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \leftrightarrow \chi_C \\ \xrightarrow{\bar{R}_{2\pi/3}} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \leftrightarrow \chi_A \end{cases}$$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\chi_C} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \begin{cases} \xrightarrow{R_{2\pi/3}} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \leftrightarrow \chi_A \\ \xrightarrow{\bar{R}_{2\pi/3}} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \leftrightarrow \chi_B \end{cases}$$

Para las composiciones de reflexión con reflexión se tiene:

- $\chi_K \square \chi_K = I$ para $K = \{A, B, C\}$

- $\chi_A \square \chi_K$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\chi_A} (A\alpha, B\gamma, C\beta) \begin{cases} \xrightarrow{\chi_B} (A\beta, B\gamma, C\alpha) \leftrightarrow R_{2\pi/3} \\ \xrightarrow{\chi_C} (A\gamma, B\alpha, C\beta) \leftrightarrow \bar{R}_{2\pi/3} \end{cases}$$

- $\chi_B \square \chi_K$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\chi_B} (A\gamma, B\beta, C\alpha) \begin{cases} \xrightarrow{\chi_A} (A\gamma, B\alpha, C\beta) \leftrightarrow \bar{R}_{2\pi/3} \\ \xrightarrow{\chi_C} (A\beta, B\gamma, C\alpha) \leftrightarrow R_{2\pi/3} \end{cases}$$

- $\chi_C \square \chi_K$

$$(A\alpha, B\beta, C\gamma) \xrightarrow{\chi_C} (A\beta, B\alpha, C\gamma) \begin{cases} \xrightarrow{\chi_A} (A\beta, B\gamma, C\alpha) \leftrightarrow R_{2\pi/3} \\ \xrightarrow{\chi_B} (A\gamma, B\alpha, C\beta) \leftrightarrow \bar{R}_{2\pi/3} \end{cases}$$

Con lo cual, podemos escribir la tabla de multiplicar como

$\square$	I	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	χ_A	χ_B	χ_C
I	I	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	χ_A	χ_B	χ_C
$R_{2\pi/3}$	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	I	χ_C	χ_A	χ_B
$\bar{R}_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	I	$R_{2\pi/3}$	χ_B	χ_C	χ_A
χ_A	χ_A	χ_B	χ_C	I	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$
χ_B	χ_B	χ_C	χ_A	$\bar{R}_{2\pi/3}$	I	$R_{2\pi/3}$
χ_C	χ_C	χ_A	χ_B	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	I

$\Leftrightarrow$

$\square$	1	A	B	C	D	E
1	1	A	B	C	D	E
A	A	B	1	E	C	D
B	B	1	A	D	E	C
C	C	D	E	1	A	B
D	D	E	C	B	1	A
E	E	C	D	A	B	1

diagonal principal

donde: $R_{2\pi/3}$ es en sentido horario y $\bar{R}_{2\pi/3}$, en antihorario

Escaneado con CamScanner

Propiedades de grupo

1) Cerradura

Se cumple, como puede verse en la tabla de multiplicar

2) Asociativa

La demostración se hará por isomorfía con otro grupo que satisfaga la asociatividad y tenga una tabla de multiplicar igual a la de G_Δ.

Considerando al grupo de permutaciones de 3 objetos ($\mathbb{P}^3$) visto como ejemplo en clase, se mostrará su isomorfía con G_Δ

La tabla de multiplicar es:

$\odot$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_5	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

Cambiando

$P_0 = I$

$P_1 = E$

$P_2 = D$

$P_3 = C$

$P_4 = A$

$P_5 = B$

$\Leftrightarrow$

$\odot$	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

La cual es exactamente igual a la tabla de G_Δ

$\Rightarrow$ Como los elementos del grupo $\mathbb{P}^3$ se 'multiplican' de la misma forma que los de G_Δ, entonces es natural que G_Δ cumpla la ley asociativa si $\mathbb{P}^3$ la cumple tambien.

Como $\mathbb{P}^3$ es un grupo, cumple asociativa, y por tanto G_Δ también cumple asociativa.

Escaneado con CamScanner

3) Existencia elemento neutro

$\hat{g} = I$ operación identidad

4) Existencia elemento inverso

Queremos demostrar que si $g \in G \Rightarrow \exists\, g^{-1} : g \square g^{-1} = g^{-1} \square g = \hat{g}$

a) Para $g = R_{\frac{2\pi}{3}}$, $g^{-1} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ $\quad g \square g^{-1} = R_{\frac{2\pi}{3}} \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = I$

$g^{-1} \square g = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} R_{\frac{2\pi}{3}} = I$

→ Por lo tanto tambien se cumple que $(\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}})^{-1} = R_{\frac{2\pi}{3}}$

b) Para $g = X_K$ $\quad g^{-1} = X_K$

$g \square g^{-1} = X_K \square X_K = I$

c) Para $g = I$ es evidente que $g^{-1} = I$

5) Conmutatividad

Mostraremos un contraejemplo de esta propiedad

$X_A \square \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = X_C$, pero $\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \square X_A = X_B$

Como $X_C \neq X_B$, no se cumple la propiedad conmutativa

$\Rightarrow$ G es un grupo no abeliano

(b) ✓✓

(c) Identifique cada una de las R_i, $\bar{R}_j$ y muestre además que forman un subgrupo cíclico de orden 3. De igual modo muestre que...

Sea $S = \{\{R_i\}, \{\bar{R}_j\}\}$ el subconjunto de G que incluye solamente a las operaciones de rotación en sentido horario y antihorario.

Como el triángulo debe permanecer invariante, las rotaciones permitidas son

Escaneado con CamScanner

$S = \{ \mathcal{I}, R_{\frac{2\pi}{3}}, R_{\frac{4\pi}{3}}, R_{2\pi}, \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}, \bar{R}_{\frac{4\pi}{3}}, \bar{R}_{2\pi} \}$

↳ de estas podemos ver que $R_{2\pi} = \mathcal{I} = \bar{R}_{2\pi/3}$.

Y que al mismo tiempo:

$R_{\frac{4\pi}{3}} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$ $\quad (A\alpha, B\beta, C\gamma)$ $\quad R_{\frac{4\pi}{3}} \to (A\beta, B\gamma, C\alpha)$

$\bar{R}_{\frac{4\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$ $\quad \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \to (A\beta, B\gamma, C\alpha)$

$(A\alpha, B\beta, C\gamma)$ $\quad \bar{R}_{\frac{4\pi}{3}} \to (A\gamma, B\alpha, C\beta)$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \to (A\gamma, B\alpha, C\beta)$

Con lo cual S nos queda como

$S = \{ \mathcal{I}, R_{\frac{2\pi}{3}}, \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \}$

↳ Subgrupo bajo $\square$

1) Cerradura Se cumple por la tabla de multiplicar:

$\square$	$\mathcal{I}$	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$
$\mathcal{I}$	$\mathcal{I}$	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$
$R_{2\pi/3}$	$R_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	$\mathcal{I}$
$\bar{R}_{2\pi/3}$	$\bar{R}_{2\pi/3}$	$\mathcal{I}$	$R_{2\pi/3}$

2) Asociativa

$(R_i \square R_j) \square R_k$

$i=j=1$: $R_2 \square R_k$; $k=2$: R_1; $k=1$: $\mathcal{I}$

$i=j=2$: $R_1 \square R_k$; $k=1$: $\mathcal{I}$; $k=2$: R_1

$i \neq j$: $\mathcal{I} \square R_k$; $k=1$: R_k; R_2; $k=1$: R_1; $k=2$: R_2

$R_i \square (R_j \square R_k)$

$j \neq k$: $R_i \square \mathcal{I}$; R_i; $i=1$: R_1; $i=2$: R_2

$j=k=2$: $R_i \square R_1$; $i=1$: R_2

$j=k=1$: $R_i \square R_2$; $i=2$: $\mathcal{I}$; $i=1$: R_1

↳ Bajo las mismas suposiciones de índices, el resultado es igual en ambos casos

3) Existencia elemento neutro

$\hat{g} = \mathcal{I}$

4 Existencia elemento inverso

$(R_{\frac{2\pi}{3}})^{-1} = \bar{R}_{2\pi/3}$

$(\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}})^{-1} = R_{2\pi/3}$

5) Conmutativa

$R_{\frac{2\pi}{3}} \square \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = \mathcal{I}$

$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \square R_{\frac{2\pi}{3}} = \mathcal{I}$

$R_{\frac{2\pi}{3}} \square \mathcal{I} = \mathcal{I} \square R_{\frac{2\pi}{3}} = R_{\frac{2\pi}{3}}$

$\bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \square \mathcal{I} = \mathcal{I} \square \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$\Rightarrow$ S es un grupo abeliano

Escaneado con CamScanner

Si partimos de $g = R_{\frac{2\pi}{3}}$, $g^2 = g \square g = R_{\frac{2\pi}{3}} \square R_{\frac{2\pi}{3}} = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}}$

$g^3 = g^2 \square g = \bar{R}_{\frac{2\pi}{3}} \square R_{\frac{2\pi}{3}} = I$

$\rightarrow$ $S = \{I, R_{2\pi/3}, \bar{R}_{2\pi/3}\}$ es cíclico

2da parte.

$A = \{I, X_A\}$ $B = \{I, X_B\}$ $C = \{I, X_C\}$

demostraremos que A, B, C son, por separado, un subgrupo cíclico de orden 2

1) Cerradura
$I \square X_A = X_A$

2) Asociativa
$\rightarrow I \square (X_A \square X_A) = I \square I = I$
$\rightarrow (I \square X_A) \square X_A = X_A \square X_A = I$

3) Neutro I
4) Inverso $g = X_A$, $g^{-1} = X_A$ $X_A \square X_A = I$
5) Conmutativa

En general, para $K = \{A, B, C\}$ y el conjunto formado por $Y_K = \{I, X_K\}$

1) cerradura $I \square X_K = X_A$
2) Asociativa $I \square (X_K \square X_K) = I \square I = I$; $(I \square X_A) \square X_A = X_A \square X_A = I$
3) E. neutro $\hat{g} = I$
4). E. inverso $g = X_K \Rightarrow g^{-1} = X_A$ pues $g \square g^{-1} = X_A \square X_A = I$
5) Conmutativa $I \square X_K = X_K = X_K \square I$ $X_K \square X_K = I$

$\Rightarrow$ $Y_K = \{I, X_K\}$ es un grupo abeliano para $K = A, B, C$

Ahora, podemos demostrar que Y_K son un conjunto de subgrupos cíclicos de orden 2

Para $A = \{I, X_A\}$ partimos de $g = X_A \Rightarrow g^2 = g \square g = X_A \square X_A = I$, como $g^2 = I$ es también el elemento inicial, concluimos que A es cíclico, con orden 2.

↳ Igualmente para $B = \{I, X_B\}$. si $g = X_B \Rightarrow g^2 = g \square g = X_B \square X_B = I$

para $C = \{I, X_C\}$ si $g = X_C \Rightarrow g^2 = g \square g = X_C \square X_C = I$

(d)

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

Sea $H = \{ I, A, B, C, D, E \}$ el conjunto de matrices 2x2 denotadas antes. Mostraremos que H es un grupo, y que este es isomorfo a G_Δ.

Propiedades de grupo

1) Cerradura

$$AB = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$AC = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = E$$

$$CA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} = D$$

Observación: $AC \neq CA \rightarrow$ no conmutan

↳ De igual forma, continuamos con las demás matrices llegando a:

	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

↳ Se cumple cerradura

2) Asociativa

$A(BC) = (AB)C$ por propiedades de matrices

↳ como $I, A, B, C, D, E \in M_{2x2}$, cumplen la ley asociativa

3) E. neutro

I es el elemento neutro, pues coincide con el del espacio vectorial de matrices 2x2 M_{2x2}

4) E. inverso

Como vemos en la tabla de multiplicar, cada elemento de H tiene otro tal que $H_1 H_2 = I$, y este es único.
Por tanto, cada elemento en H tiene uno inverso.

Escaneado con CamScanner

Obs no se cumple la propiedad conmutativa pues, como se mostró antes, $AC \neq CA$

$\Rightarrow$ H es un grupo bajo el producto matricial.

Isomorfia

Como se mostró antes, la tabla de multiplicar de G_Δ es:

$\square$	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

$\rightarrow$ Con lo cual G_Δ es isomorfo a H, pues tienen la misma tabla de multiplicar.

e) En el caso del grupo de permutaciones de 3 objetos bajo la operación de composición de permutaciones la tabla de multiplicar es:

$\odot$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_0	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
P_1	P_1	P_0	P_5	P_4	P_3	P_2
P_2	P_2	P_4	P_0	P_5	P_1	P_3
P_3	P_3	P_5	P_4	P_0	P_2	P_1
P_4	P_4	P_2	P_3	P_1	P_5	P_0
P_5	P_5	P_3	P_1	P_2	P_0	P_4

$\rightarrow$ Cambiando:

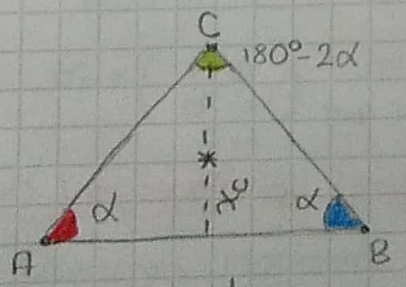
$P_0 = I$
$P_1 = E$
$P_2 = D$
$P_3 = C$
$P_4 = A$
$P_5 = B$

$\Longleftrightarrow$ $\rightarrow$

$\odot$	I	A	B	C	D	E
I	I	A	B	C	D	E
A	A	B	I	E	C	D
B	B	I	A	D	E	C
C	C	D	E	I	A	B
D	D	E	C	B	I	A
E	E	C	D	A	B	I

La cual posee la misma forma que la tabla de G_Δ. Por lo tanto, G_Δ es isomorfo al grupo de permutaciones de 3 objetos

f) Operaciones simétricas que dejan invariante a un triángulo isósceles



*: Baricentro

$G_2 = \{I, R_{2\pi}, \bar{R}_{2\pi}, X_c\}$

$\hookrightarrow$ Como $R_{2\pi} = I = \bar{R}_{2\pi}$

RTA: $G_2 = \{I, X_c\}$ son las únicas operaciones simétricas de un triángulo isósceles. Esto se explica porque este triángulo solo posee un eje de simetría a travéz de la mediana del vértice cuyo ángulo es $180° - 2\alpha$, siendo α el ángulo repetido

Escaneado con CamScanner

Ahora, $G_2 = \{ I, X_c \}$ forma un grupo como mostraremos a continuación:

Propiedades de grupo:

1) Cerradura

Se cumple pues las operaciones que podemos realizar son:

$I \square X_c = X_c \qquad X_c \square X_c = I \qquad I \square I = I$

2) Asociativa

$I \square (X_c \square X_c) = I \square I = I$ → Iguales

$(I \square X_c) \square X_c = X_c \square X_c = I$ →

$X_c \square (I \square X_c) = X_c \square X_c = I$

$(X_c \square I) \square X_c = X_c \square X_c = I$

Escaneado con CamScanner

$$I \square (I \square \chi_c) = I \square \chi_c = \chi_c$$
$$(I \square I) \square \chi_c = I \square \chi_c = \chi_c$$

$$I \square (\chi_c \square I) = I \square \chi_c = \chi_c$$
$$(I \square \chi_c) \square I = \chi_c \square I = \chi_c$$

↳ Se cumple la propiedad asociativa ✓

3) E. neutro

$\hat{g} = I$ operación identidad

4) E. inverso

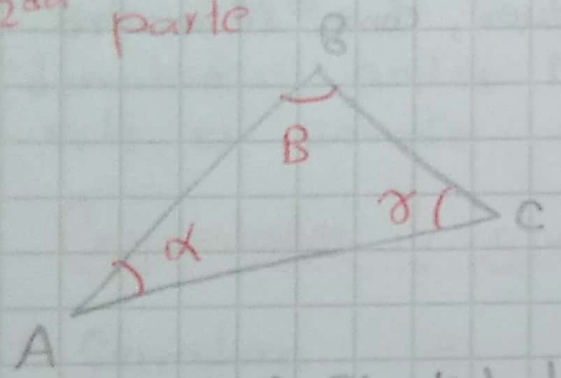
$g = \chi_c \Rightarrow g^{-1} = \chi_c$ pues $g \square g^{-1} = \chi_c \square \chi_c = I$

$g = I \Rightarrow g^{-1} = I$ pues $g \square g^{-1} = I \square I = I$

$\Rightarrow G_2$ forma un grupo bajo la operación de concatenación : '$\square$'

Escaneado con CamScanner

2da parte



α, β, γ distintos

RTA:

$G_3 = \{I\}$

Solamente la identidad es una operación de simetría, pues el triángulo escaleno no posee ningún eje de simetría sobre el cual realizar una rotación o reflexiones que no resulten ser la identidad.

Escaneado con CamScanner

#10 Sea P_n el conjunto de todos los polinomios de grado $\leq n$, en x, con coeficientes reales:

$$|p_n\rangle \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

a) $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $\quad |P_n\rangle \in V$

i) Sea $p(x)$ ^ $f(x) \in V$ $\quad p(x)+f(x) \in V$?

Si $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ ^ $f(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$

KeeperMate

Scanned with CamScanner

Es decir son polinomios de grado $\leq n$ y y sean p_i y $f_i \in \mathbb{R}$, entonces

$$p(x)+f(x)=\sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \sum_{i=0}^{n} f_i x^i$$

$$p(x)+f(x)=\sum_{i=0}^{n} \underbrace{(p_i+f_i)}_{H_i \in \mathbb{R} \text{ reales por propiedad de los reales}} x^i = H(x) \text{ cuyo grado es } \leq n$$

ii) Conmutatividad

$$p(x)+f(x)=\sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \sum_{i=0}^{n} f_i x^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f_i x^i + \sum_{i=0}^{n} p_i x^i}_{\text{Propiedades de } \Sigma}$$

$$= f(x)+p(x)$$

iii) Asociatividad:

$$p(x)+(f(x)+g(x))=\sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{n} f_i x^i + \sum_{i=0}^{n} g_i x^i\right)$$

Scanned with CamScanner

Propiedades de $\sum$

iii) Asociatividad:

$$p(x)+(f(x)+g(x)) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \left(\sum_{i=0}^{n} f_i x^i + \sum_{i=0}^{n} g_i x^i\right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \sum_{i=0}^{n} f_i x^i\right) + \sum_{i=0}^{n} g_i x^i}_{\text{Propiedades de } \sum} = (p(x)+f(x))+g$$

iv) Único elemento Neutro

Sea $0(x) = \sum_{i=0}^{n} 0_i x^i = 0$ con $0_i = 0$ entonces:

$$p(x)+0(x) = 0(x)+p(x) = \sum_{i=0}^{n} (p_i+0)x^i = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

$= p(x)$ $\Rightarrow$ Observese que es único porque si hubiera un $\theta(x)$ tal que

$p(x)+\theta(x) = p(x)$ entonces

$\theta(x) = 0(x)$

Scanned with CamScanner

$p(x) + \theta(x) = p(x) = p(x) + 0(x)$ y así que

$$\sum_{i=0}^{n} (p_i x^i) + \sum_{i=0}^{n} \theta_i x^i = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \sum_{i=0}^{n} 0 x^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} \theta_i x^i = \sum_{i=0}^{n} 0_i x^i \Rightarrow \theta_i = 0_i = 0$$

V) Elemento Simétrico:

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ entonces $p^{-1}(x) = -1 . \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$

$$\Rightarrow p(x) + p^{-1}(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \sum_{i=0}^{n} (-p_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} (p_i - p_i) x$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (0) . x^i = 0(x) = p^{-1}(x) + p(x)$$

$\Rightarrow$ Ahora propiedades de multiplicación por un escal

Vi) Cerradura bajo el producto de un Real

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \wedge \alpha \in \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow$ Ahora propiedades de multiplicación por un escalar

V i) Cerradura bajo el producto de un Real

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \wedge \alpha \in \mathbb{R}$

entonces: $\alpha p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(\alpha p_i)}_{\beta \in \text{Reales}} x^i = B(x)$

donde $B(x) \in V$

V ii) $\alpha . (\beta . p(x)) = (\alpha \beta) . p(x) \quad \forall p(x) \in V \wedge$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

$\alpha . (\beta . p(x)) = \alpha . \left(\beta \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \right) = (\alpha . \beta) \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$

$= \alpha \beta (p(x))$ ✓

V iii) $(\alpha + \beta) p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$?

$(\alpha + \beta) p(x) = (\alpha + \beta) \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{i=0}^{n} ((\alpha + \beta) p_i x^i)$ ✓

$= \sum^{n} \alpha p_i x^i + \beta p_i x^i = \alpha \sum^{n} p_i x^i + \beta \sum^{n} p_i x^i = \alpha p(x) + \beta p(x)$

Scanned with CamScanner

Producto de un Real

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i \wedge \alpha \in \mathbb{R}$

entonces: $\alpha p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{(\alpha p_i)}_{\beta \in \mathbb{R} \text{ cotes}} x^i = B(x)$

donde $B(x) \in V$

V ii) $\alpha.(\beta.p(x)) = (\alpha\beta).p(x) \quad \forall p(x) \in V \wedge$
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

$\alpha.(\beta.p(x)) = \alpha.\left(\beta \sum_{i=0}^{n} p_i x^i\right) = (\alpha.\beta) \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$

$= \alpha\beta(p(x))$ ✓

V iii) $(\alpha+\beta)p(x) = \alpha p(x) + \beta p(x)$?

$(\alpha+\beta)p(x) = (\alpha+\beta) \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{i=0}^{n} ((\alpha+\beta) p_i x^i)$

$= \sum_{i=0}^{n} \alpha p_i x^i + \beta p_i x^i = \alpha \sum_{i=0}^{n} p_i x^i + \beta \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \alpha p(x) + \beta p(x)$ ✓

KeeperMate

Scanned with CamScanner

ix) $\alpha(f(x)+g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x)$?

$$\alpha(f(x)+g(x)) = \alpha\left(\sum_{i=0}^{n}(p_i+g_i)x^i\right) = \sum_{i=0}^{n}(\alpha p_i + \alpha g_i)x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha p_i x^i + \sum_{i=0}^{n} \alpha g_i x^i = \alpha f(x) + \alpha g(x) \checkmark$$

x) $1 . p(x) = p(x) . 1 = p(x) \quad \forall p(x) \in V \wedge$
$1 \in \mathbb{R}$

$$1 . p(x) = 1 . \sum_{i=0}^{n} p_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (1 . p_i) x^i = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$$

$= p(x)$

así que $V = P_n$ es un espacio vectorial de la siguiente manera:

$(P_n, \mathbb{R}, +, \cdot)$

b) Si los $a_i \in \mathbb{Z}$ ¿P_n es espacio vectorial?

No, porque no se cumple propiedad de cerradura bajo la multiplicación ya que por ejemplo:

Scanned with CamScanner

$\sum p(x)$

así que $V = \mathcal{P}_n$ es un espacio vectorial de la siguiente manera:

$(\mathcal{P}_n, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) Si los $a_i \in \mathbb{Z}$ ¿$\mathcal{P}_n$ es espacio vectorial?

No, porque no se cumple propiedad de cerradura bajo la multiplicación ya que por ejemplo:

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es igual a π entonces:

$$\alpha p(x) = \alpha \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \alpha a_i x^i = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{\pi a_i}_{} x^i$$

esto coeficientes ya no son enteros así que no pertenecerían a $\mathbb{Z}$

c) ¿Cual de los siguientes subconjuntos de P_n es subespacio vectorial?

I.) Subconjunto conformado por $0(x)$ y los polinomios de grado $n-1$?

No, si $p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} p_i x^i \wedge g(x) = \sum_{i=0}^{n-1} g_i x^i$

tal que $g_i = \begin{cases} p_i & \text{si } 0 \leq i \leq n-2 \\ -p_i & \text{si } i = n-1 \end{cases}$

entonces $p(x) + g(x) = \underbrace{h(x)}$ cuyo grado es $< n-1$

ya que $p(n-1) - p(n-1) = 0$ así que se pierde grado $(n-1)$

II.) Subconjunto conformado por $0(x)$ y polinomios de grado par

No, ya que puede hacerse el mismo proceso anterior y disminuir una unidad el grado

pierde grado $(n-1)$

II. Subconjunto conformado por $0(x)$ y polinomios de grado par

No, ya que puede hacerse el mismo proceso anterior y disminuir una unidad el grado

ejemplo:

$$\underbrace{(x+2x^2)}_{\text{grado par}} + \underbrace{(x-2x^2)}_{\text{grado par}} = \underbrace{2x}_{\text{grado impar}}$$

III. todos los polinomios que tienen a x como un factor

No, $\underbrace{x^2}_{\text{tiene a } x \text{ como factor}} - \underbrace{x^2}_{\text{tiene a } x \text{ como factor}} = \underbrace{0}_{\text{no tiene } x \text{ como factor}}$

No tiene el elemento neutro

KeeperMate

Scanned with CamScanner

IV.) Polinomios que tienen a $(x-1)$ como un factor.

No ya que no tienen al elemento Neutro.

De manera adicional:

Un ejemplo de sub-espacio vectorial sería:

Polinomios de grado Menor o igual a $(n-1)$

Scanned with CamScanner

#6

Un cuaternión puede escribirse de manera análoga a los vectores cartesianos y vale decir:

$$|a\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = a^{0} + a^{i}|q_{i}\rangle = a^{0} + a^{1}\hat{i} + a^{2}\hat{j} + a^{3}\hat{k}$$

con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ e $i = 1, 2, 3$ con $a^{\alpha} \in \mathbb{R}$eales $a^{i} \rightarrow$ Serían las componentes vectoriales y $a^{0} \rightarrow$ componente escalar

$\Rightarrow$ Se puede definir la "tabla de multiplicación" de la siguiente manera

$\lvert q_i\rangle \odot \lvert q_j\rangle$	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
1	1	$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_3\rangle$
$\lvert q_1\rangle$	$\lvert q_1\rangle$	-1	$\lvert q_3\rangle$	$-\lvert q_2\rangle$
$\lvert q_2\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_3\rangle$	-1	$\lvert q_1\rangle$
$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_3\rangle$	$\lvert q_2\rangle$	$-\lvert q_1\rangle$	-1

Notese que:

$$|q_i\rangle \odot |q_i\rangle = -1$$

$\downarrow$

Así que se puede pensar que un cuaternión es la generalización de los números complejos a más de una dimensión

$\Rightarrow$ (Un número hipercomplejo) tiene la parte imaginaria en 3 dimensiones

$$|a\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = a^{0} + a^{1}|q_{1}\rangle + a^{2}|q_{2}\rangle + a^{3}|q_{3}\rangle$$

Scanned with CamScanner

D M A

⇒ Se define el conjugado del ket como:

$|b\rangle^* = b^0|q_0\rangle - b^j|q_j\rangle$ con $j = 1, 2, 3$

⇒ Es decir se le cambian los signos a la parte compleja

⇒ Se define la suma así:

$$\left.\begin{array}{l} |a\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle \\ |b\rangle = b^\alpha|q_\alpha\rangle \end{array}\right\} \Rightarrow |c\rangle = c^\alpha|q_\alpha\rangle = |a\rangle + |b\rangle$$

$\Rightarrow (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle$ y entonces $c^\alpha = (a^\alpha + b^\alpha)$

⇒ Es decir se suman componente a componente. Mientras que la multiplicación queda definida así:

$\alpha|c\rangle = \alpha c^\alpha|q_\alpha\rangle$ es decir se distribuye el escalar y en cada componente

$\alpha|\alpha\rangle = \alpha^{\alpha}|q_\alpha\rangle$, es decir se distribuye el escalar y en cada componente

a) Forma Los cuaternionis un espacio vectorial respecto a esa operación suma y esa multiplicación por escalares, así llega a la L las vectores en $\mathbb{R}^4$

$\Rightarrow$ Sí, Pues se comporta como $\mathbb{R}^4$

i) Cerradura bajo la suma

Sea $|a\rangle = a^{\alpha}|q_\alpha\rangle \wedge |b\rangle = b^{\alpha}|q_\alpha\rangle \in V$

entonces:

$$|a\rangle + |b\rangle = (a^{\alpha} + b^{\alpha})|q_\alpha\rangle \in V$$

$\hookrightarrow$ Sigue siendo un Real por propiedades de los reales

Scanned with CamScanner

D M A

ii) Conmutatividad

$|a\rangle + |b\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle = (b^\alpha + a^\alpha)|q_\alpha\rangle$

$= b^\alpha|q_\alpha\rangle + a^\alpha|q_\alpha\rangle = |b\rangle + |a\rangle$

iii) Asociatividad

$|a\rangle + (|b\rangle + |c\rangle) = a^\alpha|q_\alpha\rangle + ((b^\alpha + c^\alpha)|q_\alpha\rangle)$

$= (a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha)|q_\alpha\rangle = (a^\alpha + b^\alpha)|q_\alpha\rangle + c^\alpha|q_\alpha\rangle$

$= (|a\rangle + |b\rangle) + |c\rangle$

iv) Unico elemento neutro

Sea $|0\rangle = 0^\alpha|q_\alpha\rangle$ con $0^\alpha = 0$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$

entonces:

$|a\rangle + |0\rangle = (a^\alpha + 0^\alpha)|q_\alpha\rangle = (a^\alpha)|q_\alpha\rangle$

$= |a\rangle = |0\rangle + |a\rangle$

Scanned with CamScanner

iv) Unico elemento neutro

Sea $|0\rangle = \theta^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle$ con $\theta^{\alpha} = 0$ para $\alpha = 0, 1, 2, 3$

entonces:

$$|a\rangle + |0\rangle = (a^{\alpha} + \theta^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$$

$$= |a\rangle = |0\rangle + |a\rangle$$

$\Rightarrow$ Ahora supongase $|\theta\rangle$ tal que

$|a\rangle + |\theta\rangle = |a\rangle$, entonces:

$$|a\rangle + |\theta\rangle = |a\rangle = |a\rangle + |0\rangle$$

$$(a^{\alpha} + \theta^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = (a^{\alpha} + \theta^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$$

entonces $\Rightarrow$ $a^{\alpha} + \theta^{\alpha} = a^{\alpha} + \theta^{\alpha}$

$$\theta^{\alpha} = \theta^{\alpha}$$

y por ende

$|\theta\rangle = |0\rangle$ así que $|\theta\rangle$ es único

v) Elemento simétrico:

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow$ Ahora supongase $|e\rangle$ tal que $|a\rangle + |e\rangle = |a\rangle$ y entonces:

$$|a\rangle + |e\rangle = |a\rangle = |a\rangle + |0\rangle$$

$$(a^\alpha + e^\alpha)|q_\alpha\rangle = (a^\alpha + 0^\alpha)|q_\alpha\rangle$$

entonces $\Rightarrow$ $a^\alpha + e^\alpha = a^\alpha + 0^\alpha$

$$e^\alpha = 0^\alpha$$

y por ende $|e\rangle = |0\rangle$ así que $|0\rangle$ es único

Elemento simétrico:

Sea $|a\rangle = a^\alpha|q_\alpha\rangle$ entonces $|a\rangle^{-1} = (-a^\alpha)|q_\alpha\rangle$ ya que:

$$|a\rangle + |a\rangle^{-1} = (a^\alpha - a^\alpha)|q_\alpha\rangle = (0^\alpha)|q_\alpha\rangle = |0\rangle$$

Scanned with CamScanner

⇒ Ahora propiedades de multiplicación por un escalar:

vi) Cerradura bajo el producto de un Real

Sea $|a\rangle = a^\alpha |q_\alpha\rangle \in V \wedge \beta \in \mathbb{R}$

entonces:

$$\beta |a\rangle = \underbrace{(\beta a^\alpha)}_{\text{Real por propiedades de los reales}} |q_\alpha\rangle = c^\alpha |q_\alpha\rangle \in V$$

vii) $\gamma(\beta|a\rangle) = (\gamma\beta)|a\rangle \quad \gamma|a\rangle \in V \wedge \gamma, \beta \in$

$$\gamma(\beta|a\rangle) = \gamma((\beta a^\alpha)|q_\alpha\rangle) = (\gamma\beta a^\alpha)|q_\alpha\rangle$$
$$= (\gamma\beta)(a^\alpha |q_\alpha\rangle) = (\gamma\beta)|a\rangle$$

viii) $(\gamma+\beta)|a\rangle = \gamma|a\rangle + \beta|a\rangle$?

$$(\gamma+\beta)|a\rangle = (\gamma+\beta)a^\alpha|q_\alpha\rangle = (\gamma a^\alpha + \beta a^\alpha)|q_\alpha$$
$$= (\gamma a^\alpha|q_\alpha\rangle) + (\beta a^\alpha|q_\alpha\rangle) = \gamma|a\rangle + \beta|a\rangle$$

Scanned with CamScanner

viii) $(\gamma+\beta)|a\rangle = \gamma|a\rangle + \beta|a\rangle$?

$(\gamma+\beta)|a\rangle = (\gamma+\beta)\, a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = (\gamma a^{\alpha} + \beta a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$

$= (\gamma a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) + (\beta a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle) = \gamma|a\rangle + \beta|a\rangle$

ix) $\beta(|a\rangle + |b\rangle) = \beta|a\rangle + \beta|b\rangle$?

$\beta(|a\rangle + |b\rangle) = \beta(a^{\alpha} + b^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle$

$= \beta a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle + \beta b^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = \beta|a\rangle + \beta|b\rangle$

x) $1|a\rangle = |a\rangle \quad \forall\, |a\rangle \in V \wedge 1 \in \mathbb{R}$?

$1|a\rangle = (1\, a^{\alpha})|q_{\alpha}\rangle = a^{\alpha}|q_{\alpha}\rangle = |a\rangle$

$\Rightarrow (V, \mathbb{R}, +, \cdot)$ es un espacio vectorial lineal.

Scanned with CamScanner

b) dados 2 cuaternios $\Rightarrow |b\rangle \equiv (b^0, \vec{b})$ $\wedge$ $|r\rangle = (r_0, \vec{r})$ y su tabla de multiplicación y muestre que $|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle$ podrá representarse como:

$$|d\rangle = |b\rangle \odot |r\rangle \Leftrightarrow (d^0, \vec{d}) = (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}, r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

donde $\cdot$ y $\times$ son los productos escalares y vectoriales de siempre

Scanned with CamScanner

$$|d\rangle = (b^0 + b^i|q_i\rangle) \odot (r^0 + r^j|q_j\rangle) = b^0 r^0 + b^0 r^j|q_j\rangle$$

$$+ r^0 b^i|q_i\rangle + (b^i r^j)|q_i\rangle \odot |q_j\rangle = b^0 r^0 + b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b}$$

$$+ b^1 r^1 (-1) + b^2 r^2 |q_3\rangle + b^2 r^3 |-q_2\rangle + b^3 r^2 |-q_3\rangle$$

$$+ b^2 r^3 |q_1\rangle + b^3 r^2 |q_2\rangle + b^3 r^2 |-q_1\rangle$$

$$= b^0 r^0 - \vec{b} \cdot \vec{r} + r^0 \vec{b} + b^0 \vec{r} + (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_1\rangle$$

$$- (b^1 r^3 - b^3 r^1)|q_2\rangle + (b^1 r^2 - b^2 r^1)|q_3\rangle$$

observese que si $|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

entonces

$$\vec{b} \times \vec{r} = \det \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ \end{vmatrix} = (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_1\rangle$$

$$- (b^1 r^3 - b^3 r^1)|q_2\rangle$$

Scanned with CamScanner

$$|\phi\rangle = (b^0 + b^i|q_i\rangle)\otimes(r^0 + r^i|q_i\rangle)$$

$$+ r^0 b^i|q_i\rangle + (b^i r^j)|q_i\rangle\otimes|q_j\rangle = b^0 r^0 + b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b}$$

$$+ b^1 r^1(-1) + b^2 r^2|q_2\rangle + b^2 r^3|-q_2\rangle + b^3 r^2|-q_3\rangle$$

$$+ b^3 r^3|q_3\rangle + b^3 r^2|q_2\rangle + b^3 r^2|-q_2\rangle$$

$$= b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r} + r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_1\rangle$$

$$- (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_2\rangle + (b^2 r^2 - b^2 r^2)|q_3\rangle$$

observese que si $|q_1\rangle, |q_2\rangle, |q_3\rangle = \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$

entonces

$$\vec{b}\times\vec{r} = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ r^1 & r^2 & r^3 \end{vmatrix} = (b^2 r^3 - b^3 r^2)|q_1\rangle - (b^1 r^3 - b^3 r^1)|q_2\rangle + (b^1 r^2 - b^2 r^1)|q_3\rangle$$

entonces:

$$= b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r} + r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + (\vec{b}\times\vec{r})$$

$$= (b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}, r^0\vec{b} + b^0\vec{r} + \vec{b}\times\vec{r})$$

Scanned with CamScanner

c) $|b\rangle = b^\alpha |q_\alpha\rangle$ y $|r\rangle = r^\alpha |q_\alpha\rangle$ comprueba

si $|d\rangle = |b\rangle \otimes |r\rangle$ puede ser siempre escrito

de la forma:

$$|d\rangle = |b\rangle \otimes |r\rangle = \boxed{a\,|q_0\rangle} + \boxed{S^{(\alpha j)}\,\delta^0_\alpha\,|q_j\rangle} + \boxed{A^{[jk]i}\,b_j r_k\,|q_i\rangle} :$$

$$|d\rangle = \boxed{a\,|q_0\rangle} + \boxed{b^0 r^j\,|q_j\rangle + b^j r^0\,|q_j\rangle} + \boxed{(b^2 r^3 - b^3 r^2)\,|q_1\rangle - (b^1 r^3 - b^3 r^1)\,|q_2\rangle + (b^1 r^2 - b^2 r^1)\,|q_3\rangle}$$

$$|d\rangle = \boxed{b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}} + b^0 \vec{r} + r^0 \vec{b} + (b \times \vec{r})$$

d) $a = b^0 r^0 - \vec{b}\cdot\vec{r}$

$S^{(ij)} = S^{(0j)} = b^\alpha r^j$

$A^{[jk]i} = b^j r^k$

d) 2da parte

¿$|d\rangle = |a\rangle \odot |r\rangle$ será un vector, pseudovector o ninguna de las anteriores?

$$|d\rangle = (a^0, \vec{a}) \odot (r^0, \vec{r}) = (a^0 r^0 - \vec{a}\cdot\vec{r},\ a^0\vec{r} + r^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{r})$$

$$= (a^0 r^0 - \vec{a}\cdot\vec{r})\,|q_0\rangle + (a^0 r^1 + r^0 a^1 + a^2 r^3 - a^3 r^2)\,|q_1\rangle$$

$$+ (a^0 r^2 + r^0 a^2 - a^1 r^3 + a^3 r^1)\,|q_2\rangle$$

$$+ (a^0 r^3 + r^0 a^3 + a^1 r^2 - a^2 r^1)\,|q_3\rangle = (d^0, \vec{d})$$

Para determinar si $|d\rangle$ es un pseudovector o vector, realizaremos transformaciones del tipo $|q_i\rangle \to -|q_i\rangle$ para conocer las reglas de transformación

Tomamos a $|a\rangle = (a^0, \vec{a}) = a^0|q_0\rangle + a^1|q_1\rangle + a^2|q_2\rangle + a^3|q_3\rangle$ como caso base.

- $|q_0\rangle \to -|q_0\rangle$ $\quad (a^0, (a^1, a^2, a^3)) \to (-a^0, (a^1, a^2, a^3))$

$$(d^0, (d^1, d^2, d^3)) \to ??$$

$$|d'\rangle = |a'\rangle \odot |b'\rangle = (a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ -a^0\vec{b} - b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})$$

$$= (d^0, -\vec{d} + 2\vec{a}\times\vec{b})$$

$\Rightarrow$ $|q_0\rangle \to -|q_0\rangle$ $\quad (d^0, \vec{d}) \to (d^0, -\vec{d} + 2\vec{a}\times\vec{b})$

↳ Esto indica que al reflejar el cuaternion $|d\rangle$ cambiando $|q_0\rangle$ por $-|q_0\rangle$, llegamos a que el $|d\rangle$ no cambia solo la de la parte compleja, si no que, cambia en dirección y magnitud.

$\Rightarrow$ $|d\rangle = |a\rangle \odot |b\rangle$ no es ni vector ni pseudovector según la definición usual para vectores en $\mathbb{R}^3$

Scanned with CamScanner

(e) $\alpha_0 \sigma_0 + \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 + \alpha_3 \sigma_3 = 0$

i) $\alpha_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Al hacer RouRedice queda:

$\Downarrow$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$

Entonces cada σ_i es L.I.

KeeperMate

Scanned with CamScanner

D M A

Sea $|q_0\rangle = (a^0, 0, 0, 0)$, $|q_1\rangle = (0, a^1, 0, 0)$
$|q_2\rangle = (0, 0, a^2, 0)$ ∧ $|q_3\rangle = (0, 0, 0, a^3)$
entonces puedo ver en vez de vectores matrices con posición así:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad 0 = a^0,\ 1 = a^1,\ 2 = a^2,\ 3 = a^3$$

entonces:

$$\frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot a^0 = |q_0\rangle$$

entonces:

$$|q_0\rangle = \sigma_0 \quad |q_1\rangle = \sigma_1 \quad |q_2\rangle = \sigma_2 \quad |q_3\rangle = \sigma_3$$

ii)

$$|b\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} z & w \\ -w^* & z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+yi & a+bi \\ -a+bi & x-yi \end{pmatrix}$$

$$|b\rangle = x\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\sigma_0} + y\underbrace{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}}_{\sigma_1}$$

$$+ a\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}}_{\sigma_3}$$

KeeperMate

Scanned with CamScanner

$$\begin{array}{cccc|c} x & y & a & b & \\ \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 & i & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

→ Al hacer RenReduce $x=y=a=b=0$ Así que $\mathbb{O}_i$ → son L.I

⇒ Son una base pues

F

$$|q_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |q_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|q_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |q_3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entonces al hacer

$$\alpha_0|q_0\rangle + \alpha_1|q_1\rangle + \alpha_2|q_2\rangle + \alpha_3|q_3\rangle = 0$$

Se llega a:

$\alpha_0 = 0$ ya que en cada matriz
$\alpha_1 = 0$ los componentes $\neq 0$ están
$\alpha_2 = 0$ en una posición tal que
$\alpha_3 = 0$ en las otras matrices en esa misma posición el escalar es $= 0$ por ende

Son L.I

⇒ son una base

Scanned with CamScanner

D M A

9) $\langle a|b\rangle = |a\rangle^* \odot |b\rangle$

$\langle a|b\rangle = (a^0 + (-a^i|e_i\rangle)) \odot (b^0 + b^i|e_i\rangle)$

$= a^0 b^0 - (-\vec{a}\cdot\vec{b}) + b^0(-\vec{a}) + a^0\vec{b} + (-\vec{a}\times\vec{b})$

$= a^0 b^0 + \vec{a}\cdot\vec{b} + a^0\vec{b} - b^0\vec{a} + (\vec{b}\times\vec{a})$

$\Rightarrow$ No es un buen producto interno pues no asocia un escalar al par de vectores sino asocia otro vector

Scanned with CamScanner

i) Comprobe si la siguiente es una buena definición para la norma de los cuaterniones

$$n(|a\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{\langle a|a\rangle} = \sqrt{|a\rangle^{\dagger} \odot |a\rangle}$$

$$n(|a\rangle) = \sqrt{(a^0, \vec{a})^{\dagger} \odot (a^0, \vec{a})} = \sqrt{(a^0, -\vec{a}) \odot (a^0, \vec{a})}$$

$$= \sqrt{(a^0 a^0 + \vec{a}\cdot\vec{a} \quad a^0\vec{a} - a^0\vec{a} + \cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{\,0})}$$

$$= \sqrt{(a^\alpha a_\alpha, \vec{0})} = \sqrt{(a^\alpha a_\alpha)} \qquad \alpha = 0,1,2,3$$

$\Rightarrow$ Como es un escalar, puede ser una buena opción

Propiedades de norma:

1) $\| |a\rangle \| = \sqrt{(a^\alpha a_\alpha)} = \sqrt{(a^0)^2 + (a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2} \geq 0$ ✓

2) $\| \alpha |a\rangle \| = \sqrt{(\alpha a^\beta \alpha a_\beta)} = \sqrt{\alpha^2 (a^\beta a_\beta)} = |\alpha| \, \| |a\rangle \|$

3) Queremos mostrar si $\| |a\rangle + |b\rangle \| \leq \| |a\rangle \| + \| |b\rangle \|$ se cumple para todo $|a\rangle, |b\rangle$

Sean $|a\rangle = (a^0, \vec{a})$, $|b\rangle = (b^0, \vec{b})$ cuaterniones genéricos

1) $\| |a\rangle + |b\rangle \|^2 = \| (a^0 + b^0, \vec{a} + \vec{b}) \|^2$

$$= \sum_{i=1}^{3} (a^i + b^i)^2 = \sum_{i=1}^{3} ((a^i)^2 + (b^i)^2) + \sum_{i=1}^{3} 2a^i b^i$$

$$= a^i a_i + b^i b_i + 2a^i b_i \qquad \vec{b}' = (b^0, b^1, b^2, b^3)$$

$$= \| |a\rangle \|^2 + \| |b\rangle \|^2 + 2\, \vec{a}' \cdot \vec{b}'$$

Desigualdad Cauchy-Schwarz del producto escalar de vectores de $\mathbb{R}^n$

$$\leq \| |a\rangle \|^2 + \| |b\rangle \|^2 + 2\, |\vec{a}'|\, |\vec{b}'|$$

$$= \| |a\rangle \|^2 + \| |b\rangle \|^2 + 2\sqrt{a^\alpha a_\alpha}\sqrt{b^\beta b_\beta} \qquad \alpha = 0,1,2,3$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \quad \| |a\rangle + |b\rangle \|^2 \leq \| |a\rangle \|^2 + \| |b\rangle \|^2 + 2 \, \| |a\rangle \| \, \| |b\rangle \|$$

$$= (\| |a\rangle \| + \| |b\rangle \|)^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \| |a\rangle + |b\rangle \| \leq \| |a\rangle \| + \| |b\rangle \|$$

$\Rightarrow$ Como se cumplen las propiedades, $n(|a\rangle) = \| |a\rangle \|$ es una norma para cuaterniones

j) Compruebe si $\overline{|a\rangle} = \dfrac{|a\rangle^{\dagger}}{\| |a\rangle \|^2}$

puede considerarse como el elemento simétrico respecto a $\odot$

Si definimos la norma como en el inciso (i):

$$n(|a\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{|a\rangle^{\dagger} \odot |a\rangle}$$

Entonces

$$\overline{|a\rangle} \odot |a\rangle = \frac{|a\rangle^{\dagger}}{\| |a\rangle \|^2} \odot |a\rangle = \frac{\| |a\rangle \|^2}{\| |a\rangle \|^2} = 1$$

$\Rightarrow$ Entonces $\overline{|a\rangle}$ si es un elemento simetrico respecto a $\odot$. pues el elemento neutro en los cuaterniones es el 1:

Si $|b\rangle = (b^0, \vec{b})$ y $|1\rangle = (1, \vec{0})$

$$|b\rangle \odot |1\rangle = (b^0 1 - \vec{b} \cdot \cancel{\vec{0}}, \; 1 \vec{b} + b^0 \cancel{\vec{0}} + \vec{b} \cancel{\times \vec{0}})$$

$$= (b^0, \vec{b})$$

$$= |b\rangle$$

k) Compruebe si los cuaterniones $|a\rangle$ forman un grupo respecto a una operación multiplicación $\odot$

Mostraremos que los cuaterniones forman un grupo bajo la operación $\odot$:

$|a\rangle = (a^0, \vec{a})$, $|b\rangle = (b^0, \vec{b})$

$$|a\rangle \odot |b\rangle = (a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b}, \; a^0 \vec{b} + b^0 \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b})$$

Scanned with CamScanner

Propiedades de grupo

1) Cerradura

Como mostramos en el inciso c), dados dos cuaterniones $|a\rangle = (a^0, \vec{a})$, $|b\rangle = (b^0, \vec{b})$ su producto puede escribirse como

$$|a\rangle \odot |b\rangle = (a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ b^0\vec{a} + a^0\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b})$$

el cual tambien es un cuaternión, pues observe que la primera componente es escalar, y la segunda tiene las 3 componentes referidas a la parte compleja

$\Rightarrow$ Se cumple la cerradura

2) Asociativa

$$|a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle) = |a\rangle \odot (b^0c^0 - \vec{b}\cdot\vec{c},\ c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c})$$

$$= (a^0, \vec{a}) \odot (b^0c^0 - \vec{b}\cdot\vec{c},\ c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c})$$

$$= (a^0(b^0c^0 - \vec{b}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\cdot(c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}),$$
$$a^0(c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}) + (b^0c^0 - \vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + \vec{a}\times(c^0\vec{b} + b^0\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c}))$$

$$= (a^0b^0c^0 - a^0\vec{b}\cdot\vec{c} - c^0\vec{a}\cdot\vec{b} - b^0\vec{a}\cdot\vec{c} - \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}),$$
$$\boxed{a^0c^0\vec{b}} + a^0b^0\vec{c} + a^0\vec{b}\times\vec{c} + \boxed{b^0c^0\vec{a}} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a} + \boxed{c^0\vec{a}\times\vec{b}}$$
$$+ b^0\vec{a}\times\vec{c} + \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))$$

propiedad producto mixto

$$= ((a^0b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b})c^0 - (a^0\vec{b} + b^0\vec{a})\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}),$$
$$\boxed{(a^0\vec{b} + b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})}c^0 + a^0b^0\vec{c} + a^0\vec{b}\times\vec{c} + b^0\vec{a}\times\vec{c}$$
$$+ \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a})$$

$$= ((a^0b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b})c^0 - (a^0\vec{b} + b^0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},$$
$$(a^0\vec{b} + b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})c^0 + a^0b^0\vec{c} + a^0\vec{b}\times\vec{c} + b^0\vec{a}\times\vec{c} +$$
$$(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} - (\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a})$$

$$= ((a^0b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b})c^0 - (a^0\vec{b} + b^0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},\ (a^0\vec{b} + b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})c^0$$
$$\boxed{+a^0b^0\vec{c}} + \boxed{a^0\vec{b}\times\vec{c}} + \boxed{b^0\vec{a}\times\vec{c}} + \underbrace{[(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}]}_{\vec{c}\times(\vec{b}\times\vec{a})} - \boxed{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}$$

$$= -(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{c}$$
$$= \boxed{(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}}$$

Scanned with CamScanner

$\Rightarrow |a\rangle \odot (|b\rangle \odot |c\rangle) =$

$$= (a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b})c^0 - (a^0\vec{b} + b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},\ (a^0\vec{b} + b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})c^0$$

$$+ \boxed{(a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}} + \boxed{(a^0\vec{b} + b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}})$$

$$= (a^0 b^0 - \vec{a}\cdot\vec{b},\ a^0\vec{b} + b^0\vec{a} + \vec{a}\times\vec{b}) \odot (c^0, \vec{c})$$

$$= [(a^0, \vec{a}) \odot (b^0, \vec{b})] \odot |c\rangle$$

$$= (|a\rangle \odot |b\rangle) \odot |c\rangle$$

$\Rightarrow$ Se cumple la propiedad asociativa

3) Elemento neutro.

Como mostramos en el inciso anterior, el elemento neutro es $|1\rangle = (1, \vec{0})$

Sea $|a\rangle = (a^0, \vec{a})$

1) $|a\rangle \odot |1\rangle = (a^0 \cdot 1 - \cancel{\vec{a}\cdot\vec{0}}^{\,0},\ a^0\cancel{\vec{0}}^{\,0} + 1\vec{a} + \cancel{\vec{a}\times\vec{0}}^{\,0})$

$$= (a^0, \vec{a})$$

$$= |a\rangle$$

2) $|1\rangle \odot |a\rangle = (1\cdot a^0 - \cancel{\vec{0}\cdot\vec{a}}^{\,0},\ 1\vec{a} + a^0\cancel{\vec{0}}^{\,0} + \cancel{\vec{0}\times\vec{a}}^{\,0})$

$$= (a^0, \vec{a})$$

$$= |a\rangle$$

$\Rightarrow$ El cuaternion $|1\rangle = (1, \vec{0})$ es el elemento neutro

4) Elemento inverso

$$|a\rangle^{-1} = \overline{|a\rangle} = \frac{|a\rangle^{\dagger}}{a^\alpha a_\alpha}$$ donde $\dagger$: conjugado, $\alpha = 0, 1, 2, 3$

1) $$|a\rangle \odot |a\rangle^{-1} = \frac{|a\rangle \odot |a\rangle^{\dagger}}{a^\alpha a_\alpha} = \frac{1}{a^\alpha a_\alpha}(a^0, \vec{a}) \odot (a^0, -\vec{a})$$

$$= \frac{1}{a^\alpha a_\alpha}(a^0 a^0 + \vec{a}\cdot\vec{a},\ a^0\vec{a} - a^0\vec{a} + \cancel{\vec{a}\times(-\vec{a})}^{\,0})$$

Scanned with CamScanner

$$= \frac{1}{a^\alpha a_\alpha}(a^\alpha a_\alpha, \vec{0}) = \left(\frac{1}{a^\alpha a_\alpha}(a^\alpha a_\alpha), \vec{0}\right) \quad \text{con } \alpha = 0,1,2,3$$

$$= \left(\frac{1}{a^0a^0 + a^1a^1 + a^2a^2 + a^3a^3}(a^0a^0 + a^1a^1 + a^2a^2 + a^3a^3), \vec{0}\right)$$

$$= (1, \vec{0})$$

$$= |1\rangle$$

2) Igualmente

$$|a\rangle^{-1} \odot |a\rangle = \frac{|a\rangle^{\dagger} \odot |a\rangle}{a^\alpha a_\alpha} = \frac{(a^0, -\vec{a}) \odot (a^0, \vec{a})}{a^\alpha a_\alpha}$$

$$= \frac{1}{a^\alpha a_\alpha}(a^0a^0 + \vec{a}\cdot\vec{a}, \cancel{a^0\vec{a}} - \cancel{a^0\vec{a}} + \cancel{\vec{a}\times(-\vec{a})}^{\,0})$$

$$= \frac{1}{a^\alpha a_\alpha}(a^\alpha a_\alpha, \vec{0}) \quad \text{con } \alpha = 0,1,2,3, \text{ que indica sumatoria}$$

$$= (1, \vec{0})$$

$$= |1\rangle$$

$\Rightarrow$ Existe el elemento inverso

<u>Observación</u>: Si definimos la norma como en i)

$$n(|a\rangle) = \| |a\rangle \| = \sqrt{|a\rangle^{\dagger} \odot |a\rangle} = \sqrt{a^\alpha a_\alpha}$$

entonces $|a\rangle^{-1} = \overline{|a\rangle} = \dfrac{|a\rangle^{\dagger}}{\| |a\rangle \|^2}$

l) Compruebe si el siguiente producto conserva la norma

$$|v'\rangle = \overline{|a\rangle} \odot |v\rangle \odot |a\rangle$$

$$|v'\rangle = (\overline{|a\rangle} \odot |v\rangle) \odot |a\rangle = ((a^0, -\vec{a}) \odot (v^0, \vec{v})) \odot (a^0, \vec{a}) \cdot \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$= (a^0v^0 + \vec{a}\cdot\vec{v}, a^0\vec{v} - v^0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{v}) \odot (a^0, \vec{a}) \cdot \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$= ((a^0v^0 + \vec{a}\cdot\vec{v})a^0 - (a^0\vec{v} - v^0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{v})\cdot\vec{a}, (a^0v^0 + \vec{a}\cdot\vec{v})\vec{a} + a^0(a^0\vec{v} - v^0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{v}) + (a^0\vec{v} - v^0\vec{a} - \vec{a}\times\vec{v}) \times \vec{a}) \cdot \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$= (a^0a^0v^0 + \cancel{a^0\vec{a}\cdot\vec{v}} - \cancel{a^0\vec{a}\cdot\vec{v}} + v^0\vec{a}\cdot\vec{a} + \cancel{(\vec{a}\times\vec{v})\cdot\vec{a}}^{\,0}, \cancel{a^0v^0\vec{a}} + (\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{a} + a^0a^0\vec{v} - \cancel{a^0v^0\vec{a}} - a^0\vec{a}\times\vec{v} + a^0\vec{v}\times\vec{a} - v^0\cancel{\vec{a}\times\vec{a}}^{\,0} - \cancel{(\vec{a}\times\vec{v})\times\vec{a}}^{\,0}) \cdot \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

Scanned with CamScanner

$$|v'\rangle = \left(a^0 a^0 v^0 + v^0\, \vec{a}\cdot\vec{a},\ (\vec{a}\cdot\vec{v})\,\vec{a} + a^0 a^0 \vec{v} + 2a^0\, \vec{v}\times\vec{a}\right)\cdot \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$|v'\rangle^0 = \left[a^0 a^0 v^0 + v^0\, \vec{a}\cdot\vec{a}\right]\cdot \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$|v'\rangle^i = \left[\left((\vec{a}\cdot\vec{v})\,\vec{a}\right)^i + (a^0 a^0\, \vec{v})^i + (2a^0\, \vec{v}\times\vec{a})^i\right] \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$= \left[(\vec{a}\cdot\vec{v})\, a^i + a^0 a^0 v^i + 2a^0\, \varepsilon^{ijk} v_j a_k\right] 1/\| |a\rangle \|^2 \qquad i = 1,2,3$$

$$\Rightarrow \| |v'\rangle \|^2 = (|v'\rangle^0)^2 + (|v'\rangle^i |v'\rangle_i) \qquad \text{con } i = 1,2,3$$

$$= \Big\{ (a^0 a^0 v^0 + v^0\, \vec{a}\cdot\vec{a})^2$$

$$+ \left((\vec{a}\cdot\vec{v})\, a^i + a^0 a^0 v^i + 2a^0\, \varepsilon^{ijk} v_j a_k\right)$$

$$\left((\vec{a}\cdot\vec{v})\, a_i + a^0 a^0 v_i + 2a^0\, \varepsilon_{imn} v^m a^n\right) \Big\} \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

$$= \Big\{ (a^0 a^0 v^0)^2 + (v^0\, \vec{a}\cdot\vec{a})^2 + 2a^0 a^0 v^0 v^0\, \vec{a}\cdot\vec{a}$$

$$+ (\vec{a}\cdot\vec{v})^2 a^i a_i + a^0 a^0 (\vec{a}\cdot\vec{v})\, a^i v_i + 2a^0 (\vec{a}\cdot\vec{v})\, a^i\, \varepsilon_{imn} v^m a^n$$

$$+ a^0 a^0 (\vec{a}\cdot\vec{v})\, v^i a_i + (a^0)^4 v^i v_i + 2(a^0)^3 v^i\, \varepsilon_{imn} v^m a^n$$

$$+ 2a^0 (\vec{a}\cdot\vec{v})\, \varepsilon^{ijk} v_j a_k a_i + 2(a^0)^3\, \varepsilon^{ijk} v_j a_k v_i$$

$$+ 4(a^0)^2\, \underbrace{\varepsilon^{ijk}\, \varepsilon_{imn}}_{\delta^j_m \delta^k_n - \delta^j_n \delta^k_m} v_j a_k v^m a^n \Big\} \frac{1}{\| |a\rangle \|^2}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \| |a\rangle \|^2 \, \| |v'\rangle \|^2 = (a^0)^4 (v^0)^2 + (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})^2 + 2(a^0)^2 (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$$+ (\vec{a}\cdot\vec{v})^2 (\vec{a}\cdot\vec{a}) + (a^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{v})(\vec{a}\cdot\vec{v})$$

$$+ 2a^0 (\vec{a}\cdot\vec{v})(\vec{a}\cdot\cancelto{0}{(\vec{v}\times\vec{a})}) + (a^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{v})(\vec{a}\cdot\vec{v})$$

$$+ (a^0)^4 (\vec{v}\cdot\vec{v}) + 2(a^0)^3 \cancelto{0}{(\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{a}))} + 2a^0 (\vec{a}\cdot\vec{v})\cancelto{0}{(\vec{a}\cdot(\vec{v}\times\vec{a}))}$$

$$+ 2(a^0)^3 \cancelto{0}{(\vec{v}\cdot(\vec{v}\times\vec{a}))} + 4(a^0)^2 (\delta^j_m \delta^k_n - \delta^j_n \delta^k_m) v_j a_k v^m a^n$$

$$= \underline{((v^0)^2 + \vec{v}\cdot\vec{v})(a^0)^4} + (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})^2 + 2(a^0)^2 (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$$+ \underline{(\vec{a}\cdot\vec{v})^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})} + \underline{(a^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{v})^2} + \underline{(a^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{v})^2}$$

$$+ \underline{(a^0)^4 (\vec{v}\cdot\vec{v})} + 4(a^0)^2 (\delta^j_m \delta^k_n v_j a_k v^m a^n -$$

$$\delta^j_n \delta^k_m v_j a_k v^m a^n)$$

$$= ((v^0)^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{v})(a^0)^4 + (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})^2 + 2(a^0)^2 (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$$+ (\vec{a}\cdot\vec{a} + 2(a^0)^2)(\vec{a}\cdot\vec{v})^2 + 4(a^0)^2 (\underbrace{v_m a_n v^m a^n}_{(\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{a}\cdot\vec{a})}$$

$$- \underbrace{v_n a_m v^m a^n}_{(\vec{v}\cdot\vec{a})(\vec{a}\cdot\vec{v}) = (\vec{a}\cdot\vec{v})^2})$$

$$= ((v^0)^2 + 2\vec{v}\cdot\vec{v})(a^0)^4 + (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})^2 + 2(a^0)^2 (v^0)^2 (\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$$+ (\vec{a}\cdot\vec{a} + 6(a^0)^2)(\vec{a}\cdot\vec{v})^2 + 4(a^0)^2 (\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{a}\cdot\vec{a})$$

Recordando que $v^0 = 0$ y $\| |a\rangle \|^2 = a^\alpha a_\alpha$ $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$\| |a\rangle \|^2 \, \| |v'\rangle \|^2 = (2(\vec{v}\cdot\vec{v}))(a^0)^4 + (\vec{a}\cdot\vec{a} + 6(a^0)^2)(\vec{a}\cdot\vec{v})^2$$

$$+ 4(a^0)^2 (\vec{v}\cdot\vec{v})(\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$$= 2(\vec{v}\cdot\vec{v})(a^0)^2 ((a^0)^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{a})$$

$$+ (\vec{a}\cdot\vec{v})^2 (\vec{a}\cdot\vec{a} + 6(a^0)^2)$$

$$\Rightarrow \| |v'\rangle \|^2 = 2(\vec{v}\cdot\vec{v})(a^0)^2 \frac{(a^0 a_0 + \vec{a}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{a})}{a^\alpha a_\alpha} + (\vec{a}\cdot\vec{v})^2$$

$$\frac{(a^0 a_0 + \vec{a}\cdot\vec{a} + 5\vec{a}\cdot\vec{a})}{a^\alpha a_\alpha}$$

Scanned with CamScanner

$$\Rightarrow \quad \| |v'\rangle \|^2 = 2(\vec{v}\cdot\vec{v})(a^0)^2\left(1+\frac{\vec{a}\cdot\vec{a}}{\| |a\rangle \|^2}\right) + (\vec{a}\cdot\vec{v})^2\left(1+\frac{5\vec{a}\cdot\vec{a}}{\| |a\rangle \|^2}\right)$$

$\Rightarrow$ Como la expresión anterior es irreducible concluimos que $\| |v'\rangle \|$ no conserva la norma de $\| |v\rangle \|$ pues depende de $|a\rangle$.

Scanned with CamScanner

5

(a) Sea $P = \{ \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \}$ el conjunto de las matrices de Pauli

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Independencia lineal

Queremos mostrar que: $\alpha \sigma_0 + \beta \sigma_1 + \gamma \sigma_2 + \varepsilon \sigma_3 = 0_{2\times 2}$
se cumple sólo para $\alpha = \beta = \gamma = \varepsilon = 0$

Escaneado con CamScanner

$$\alpha \sigma_0 + \beta \sigma_1 + \gamma \sigma_2 + \varepsilon \sigma_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma \\ i\gamma & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \varepsilon = 0 & \rightarrow \quad \alpha = -\varepsilon \quad (1) \\ \beta - i\gamma = 0 & \rightarrow \quad \beta = i\gamma \quad (2) \\ \beta + i\gamma = 0 \\ \alpha - \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + i\gamma \overset{(1)}{=} (i\gamma) + i\gamma = 2i\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \alpha - \varepsilon \overset{(2)}{=} (-\varepsilon) - \varepsilon = -2\varepsilon = 0 \Rightarrow \varepsilon = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\varepsilon = 0 \\ \beta = i\gamma = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Como α ; $\beta, \gamma, \varepsilon$ son cero $\{\sigma_{\alpha_i}\}$ es linealmente independiente con $\alpha_i = 0, 1, 2, 3$

2) Conjunto generador

Queremos ver si todo elemento de H, el espacio vectorial de las matrices hermíticas puede verse como combinación lineal de $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

Sea $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} \in H \Rightarrow A = (A^T)^*$

entonces $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_3 & z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^* & z_3^* \\ z_2^* & z_4^* \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1^* = a \in \mathbb{R} \\ z_2 &= z_3^* = b - ci \in \mathbb{C} \qquad b, c \in \mathbb{R} \\ z_3 &= z_2^* = b + ci \in \mathbb{C} \\ z_4 &= z_4^* = d \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces

$$A = \begin{pmatrix} a & b - ci \\ b + ci & d \end{pmatrix}$$

Demostraremos que existen escalares $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ tales que $\alpha \sigma_0 + \beta \sigma_1 + \gamma \sigma_2 + \varepsilon \sigma_3 = A$

$\hookrightarrow$ El SEL asociado es:

$$\begin{cases} \alpha + \varepsilon = a & (1) \\ \beta - i\gamma = b - ci & (2) \\ \beta + i\gamma = b + ci & (3) \\ \alpha - \varepsilon = d & (4) \end{cases}$$

Escaneado con CamScanner

De (1) obtenemos: $\alpha = a - \varepsilon$
De (2) obtenemos: $\beta = b \wedge (-\gamma = -c \Leftrightarrow \gamma = c)$
De (3) obtenemos: $\beta = b \wedge \gamma = c$

Reemplazando $\alpha = a - \varepsilon$ en (4):

$$a - \varepsilon - \varepsilon = d \rightarrow a - d = 2\varepsilon$$

$$\rightarrow \tfrac{1}{2}(a-d) = \varepsilon$$

Ahora, $\alpha = a - \varepsilon = a - \frac{1}{2}(a-d) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}(a+d)$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(a+d), \quad \beta = b, \quad \gamma = c, \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(a-d)$

$\Rightarrow$ Como $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$ existen, entonces $\{\sigma_\alpha\}$ generan a H

RTA:
Como $P = \{\sigma_\alpha\}$ es un conjunto linealmente independiente, y generador de H, decimos que es una base para H

(b) Definimos el producto interno de H como:

$$\langle a | b \rangle \rightleftharpoons Tr(A^t B)$$

Queremos comprobar que la base $P = \{\sigma_\alpha\}$ $\alpha = 0,1,2,3$ es una base ortogonal para este espacio con el producto interno anterior.

Es decir, demostraremos que $\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = 0$ cuando $i \neq j$

1) $\langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle = Tr(\sigma_0^t \sigma_1) = Tr\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

$= Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 + 0 = 0$

$\hookrightarrow \langle \sigma_0 | \sigma_1 \rangle = 0$

2) $\langle \sigma_1 | \sigma_0 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0 + 0 = 0$

$\hookrightarrow$ Observe que como $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, $\sigma_0^t = \sigma_0 = I$

entonces

3) $\langle \sigma_0 | \sigma_2 \rangle = Tr(\sigma_2) = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$

4) $\langle \sigma_0 | \sigma_3 \rangle = Tr(\sigma_3) = Tr\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = 1 - 1 = 0$

Escaneado con CamScanner

Scribe

$(\sigma_2)^t = \sigma_2$ puesto que σ_2 es hermítica

5) $\langle \sigma_2 | \sigma_0 \rangle = Tr(\sigma_2 I) = Tr(\sigma_2) = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$

6) $\langle \sigma_3 | \sigma_0 \rangle = Tr(\sigma_3 I) = Tr(\sigma_3) = Tr\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = 1-1 = 0$

7) $\langle \sigma_1 | \sigma_2 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\}$

$= i - i = 0$

8) $\langle \sigma_2 | \sigma_1 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\right\}$

$= -i + i = 0$

9) $\langle \sigma_1 | \sigma_3 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$

10) $\langle \sigma_3 | \sigma_1 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$

11) $\langle \sigma_2 | \sigma_3 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$

12) $\langle \sigma_3 | \sigma_2 \rangle = Tr\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}\right\} = 0$

Como $i \neq j$ tenemos $\frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$ posibilidades totales

$\Rightarrow$ Como $\langle \sigma_i | \sigma_j \rangle = 0$ cuando $i \neq j$, demostramos que $P = \{\sigma_\alpha\}$ es una base ortogonal

(c) Queremos investigar subespacios vectoriales del espacio de matrices hermíticas con matrices unicamente reales o imaginarias.

i) El subconjunto de matrices de la forma

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ $a, b, d \in \mathbb{R}$

A es hermítica pues: $A^t = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$

Escaneado con CamScanner

Con lo cual $A = A^t$

→ Para demostrar que este es un subespacio, mostraremos que si $A \in S$ y $B \in S$ $\alpha A + \beta B \in S$ también.

→ Observación: los escalares deben ser reales, pues de lo contrario

$$(\alpha A)^t = (\alpha a_j^i)^t = (\alpha^* (a_i^j)^*) = \alpha^* A^t = \alpha^* A \neq \alpha A$$

DEMO:

Sean $A, B \in S$ y α, β escalares reales:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha b + \beta f & \alpha d + \beta g \end{pmatrix}$$

$$(\alpha A + \beta B)^t = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha b + \beta f & \alpha d + \beta g \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta e & \alpha b + \beta f \\ \alpha b + \beta f & \alpha d + \beta g \end{pmatrix}$$

$$= \alpha A + \beta B.$$

⇒ Por lo tanto, $\alpha A + \beta B$ hace parte de las matrices hermíticas y como sus entradas son reales, hace parte de S

⇒ S es un subespacio vectorial de H.

ii) En este caso, como queremos matrices imaginarias puras reemplazaremos en la definición general de una matriz hermíticas $a = b = d = 0$, es decir:

$$A = \begin{pmatrix} a & b - ci \\ b + ci & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix}$$

Subespacio: Sea S_2 el subconjunto de las matrices hermíticas de la forma $\begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix}$

Queremos demostrar que S_2 es un subespacio vectorial, para lo cual mostraremos que si $A, B \in S_2$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha A + \beta B \in S_2$

Sean $A, B \in S_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -di \\ di & 0 \end{pmatrix}$$

Escaneado con CamScanner

$$\alpha A + \beta B = \alpha \begin{pmatrix} 0 & -ci \\ ci & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -di \\ di & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha c + \beta d)i \\ (\alpha c + \beta d)i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (\alpha A + \beta B)^{*} = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha c + \beta d)i \\ -(\alpha c + \beta d)i & 0 \end{pmatrix}^{*} = \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha c + \beta d)i \\ (\alpha c + \beta d)i & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha A + \beta B$$

$\Rightarrow$ Entonces $\alpha A + \beta B$ es una matriz hermítica y como sus entradas son imaginarias completamente, $\alpha A + \beta B$ hace parte de S_2

$\Rightarrow$ S_2 es un subespacio vectorial de H.

Escaneado con CamScanner