4. Existe el elemento inverso

5. Es conmutativa ya que las rotaciones no se afectan por el orden en que son producidas.

¿Si no conocemos la naturaleza del operador, cómo sabemos que es conmutativa?

¿Se define así inicialmente? ¿Es por la suma?

• Podemos decir que dos grupos son isomorfos porque tienen aspectos que comparten dentro de sus estructuras algebraicas.

---

1. De la sección 1.5.7 resuelva los ejercicios 2a, 2d y 2f y con Python/Sympy el ejercicio 13.

Considere que:

$$\mathbf{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = x^i \hat{I}_i,$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r}) = a^i(x,y,z)\hat{I}_i \quad y \quad \mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{r}) = b^i(x,y,z)\hat{I}_i,$$

$$\phi = \phi(\mathbf{r}) = \phi(x,y,z) \quad y \quad \psi = \psi(\mathbf{r}) = \psi(x,y,z)$$

2a) $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi.$

$$\nabla(\phi\psi) = \partial^i(\phi(x^j\hat{I}_j)\psi(x^j\hat{I}_j)),$$

$$= \partial^i\phi(x^i\hat{I}_i)\psi(x^i\hat{I}_i) + \phi(x^i\hat{I}_i)\partial^i\psi(x^i\hat{I}_i)$$

$$= (\nabla\phi)\psi + \phi\nabla\psi = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \;\blacksquare$$

2d) $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a})$ ¿Que puede decir de $\nabla\times(\nabla\cdot\mathbf{a})$?

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a} = \partial^i(\nabla\times\mathbf{a})_i = \partial^i(\varepsilon^{ijk}\partial^j a^k)_i$$

$$= \varepsilon^{ijk}\partial^i\partial^j a^k = -\varepsilon^{jik}\partial^j\partial^i a^k = -\varepsilon^{ijk}\partial^i\partial^j a^k,$$

$$= \varepsilon^{ijk}\partial^i\partial^j a^k = 0 \quad , \text{dado que } \varepsilon^{ijk}\partial^i\partial^j a^k = -\varepsilon^{ijk}\partial^i\partial^j a^k$$

por las propiedades de antisimetría de Levi-Civita

~~2f) $\nabla \times ($~~

$\nabla \times (\nabla \cdot a)^i = \varepsilon^{ijk} \partial^j (\nabla \cdot a)_k = \varepsilon^{ijk} \partial^j \partial^m a_m ,$

$= \varepsilon^{ijk} \partial^j (f) = \nabla \times (f) \rightarrow$ no tiene sentido ya que $f = f(x^i)$ es un campo escalar.

f) $\nabla \times (\nabla \times a) = \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a.$

$(\nabla \times (\nabla \times a))^i = \varepsilon^{ijk} \partial^j (\nabla \times a)^k = \varepsilon^{ijk} \partial^j \varepsilon^{kmn} \partial^m a^n$

$= \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{kmn} \partial^j \partial^m a^n = (\delta^i_m \delta^j_n - \delta^j_m \delta^i_n) \partial^j \partial^m a^n$

$= \delta^i_m \delta^j_m \partial^j \partial^m a^n - \delta^j_m \delta^i_n \partial^j \partial^m a^n$

$= \partial^i \partial_m a^n - \partial^j (\partial^j a^n) = \partial^i (\partial_m a^m) - \partial^j \partial^j a^n$

$= \nabla(\nabla \cdot a) - \nabla^2 a$