Lógica Matemática

sábado, 26 de junio de 2021 18:57

La lógica es el estudio de los métodos y principios que nos permiten distinguir el razonamiento correcto del incorrecto.

El propósito de este capítulo es el estudio de las proposiciones, así como el de las reglas lógicas, mismas que nos permitirán establecer los diferentes razonamientos y métodos de

PROPOSICIONES SIMPLES
DEFINICION: PROPOSICIÓN
Una proposición es una afirmación sobre la cual se puede afirmar, sin ambigüedad, su verdad o falsedad.

Ejemplos:
1. Quito es capital del Ecuador V
2. El número 5 es par y el número 8 es impar F
3. "2<0"
4. Todos los hombres son mortales

NOTA: Existen ciertas proposiciones sobre las cuales no se puede juzgar su certeza o falsedad, es decir, no tiene sentido hablar de ellas como proposiciones.
Ejemplo:
1. "x > 0"
2. "¿Han tocado el timbre?"

NOTACIÓN: A las proposiciones las notaremos mediante letras minúsculas p, q, r, etc. Para indicar si las proposición es verdadera o falsa, se utilizan las letras mayúsculas V y F, re:

DEFINICIÓN: Valor de verdad
Se llama valor de verdad de una proposición a la verdad o falsedad de su contenido.

NOTACIÓN: AL valor de verdad se lo denota por $v(p) \to V$, $\to F$

NOTA: Para definir una proposición se utiliza el símbolo **::**, y se lee: "significa" o "representa"
Ejemplo:
p :: "Guayasamín fue un pintor"

CLASES DE PROPOSICIONES
- SIMPLES: aquellas que consta de una sola afirmación o expresión

- COMPUESTAS: aquellas que constan de 2 o más expresiones

$P_1 \; ? \; P_2 = P_3$

Al tener 2 o más proposiciones se pueden formar nuevas expresiones valiéndose de los *conectivos lógicos*.
Esto es lo que se conoce como Álgebra de proposiciones o Álgebra Proposicional.
Dentro de los operadores lógicos más comunes (más utilizados) tenemos los siguientes:
- **Negación** "no"
- **Conjunción** "y"
- **Disyunción** (inclusiva) "o"
- **Implicación** "si --------- entonces ------------"
- **Bicondicional o Equivalencia** "---------- si y solo si ------------"

$$\underbrace{\text{Prop.} + \text{O.L}}_{\text{Operación Lógica}} = \text{Prop. C.}$$

NEGACIÓN
DEFINICIÓN: La negación "no", es el conectivo lógico que a toda proposición "p" le asocia la proposición "no p", la cual es verdadera si "p" es falsa y falsa si "p" es verdadera.

NOTACIÓN: Se utilizan los símbolos

$\neg p, \bar{p}, \boxed{\sim p}$

Para representar la negación de p.

NOTA: Cuando negamos algo generalmente acoplamos al predicado la partícula "no" o la omitimos, si ya estaba presente
Ejemplo:
- "2 es par" -------------------------> "2 **no** es par" o "**No es cierto** que 2 es par"
- "no llueve" -----------------------> "llueve" o "**No es cierto** que no llueve"

NOTA: La negación es un operador lógico que no une dos proposiciones simples, si no que genera una nueva proposición simple.

1. Si p es V, ~p es F
2. Si p es F, ~p es V

p	~p
V	F
F	V

p y ~p son contradictorias

$v(p) = V$
$v(\neg p) = F$

Ejemplos:
- p :: "2 < 5"
- ~p :: "2 >= 5"

q :: "Los perros tienen 4 patas"
~q :: "No es cierto que los perros tienen cuatro patas"

r :: "Guayaquil es una provincia"
~r :: "No es cierto que Guayaquil es una provincia" o "Guayaquil no es una provincia"

s :: "El valor de pi=3.141516…."
~s :: "No es cierto que el valor de pi=3.141516…." o "El valor de pi no es igual a 3.141516…."

t :: "Estamos en clases"
~t :: "No es verdad que estamos en clases"

u :: "Matemática es fundamental"
~u :: "La Matemática no es fundamental"

CONJUNCIÓN
DEFINICIÓN: La conjunción es el conectivo lógico "y" que a todo par de proposiciones p, q asocia la nueva proposición "p y q", la misma que es verdadera si "p" y "q" lo son, y e
casos
NOTACIÓN: Se utiliza el símbolo ∧ para denotar la conjunción "y"

Ejemplo:
1. p :: "El número 3 es impar"
   q :: "El numero 4 es par"
   Se forma una nueva proposición
   p^q :: "El número 3 es impar y el número 4 es par"

p	q	p^q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$v(p) \to V$, $v(p) \to F$
$v(q) \to V$, $v(q) \to F$
$v(p \wedge q)$: V, F

2. p :: "La caja es de madera"
   q :: "La caja no es de metal"
   p^q :: "La caja es de madera y no es de metal"

3. p :: "Los días de la semana son 7"
   q :: "El sábado es fin de semana"
   p^q :: "Los días de la semana son 7 **y** el sábado es fin de semana"

p	q	p^q

V | F | F

p::"La caja es de madera"
~q::"La caja no es de metal"

Casos	p	q	~q	p ^ ~q
I	V	F	V	V
II	V	V	F	F
III	F	F	V	F
IV	F	V	F	F

Disyunción (inclusiva)
DEFINICIÓN: La disyunción es el conectivo lógico "o" (inclusivo) que a todo par de proposiciones *p, q* asocia la proposición "p o q", la misma que es verdadera si al menos ı proposiciones *p, q* lo son, y falsa si las dos son falsas.

NOTACIÓN: Se ocupa el símbolo ∨ para representar la disyunción "o", se escribe "p v q".

De manera tabular

p	q	p v q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

v(p) → V, F
v(q) → V, F
v(p v q) → V, F

p

OSERVACIÓN: La "o" en el sentido inclusivo, incluye el valor de verdad V para "p v q" cuando, tanto *p* como *q* son verdaderas.

Ejemplo:

1. p :: "Todo triángulo tiene 3 lados" V
   q :: "El rombo tiene 5 lados" F
   p v q :: "Todo triángulo tiene 3 lados **o** el rombo tiene 5 lados" V

2. p :: "Todas las fresas son rojas"
   q :: "Todos los plátanos son azules"
   p v q :: "Todas las fresas son rojas **o** todos los plátanos son azules"

3. p :: "Los insectos son artrópodos"
   q :: "Los pájaros son aves"
   p v q :: "Los insectos son artrópodos **o** los pájaros son aves"

4. p :: "Ecuador tiene 24 provincias"
   q :: "Guayaquil es capital de Guayas"
   p v q :: "Ecuador tiene 24 provincia **o** Guayaquil es capital de Guayas"

IMPLICACIÓN (CONDICIONAL)
DEFINICIÓN: Se llama implicación de las proposiciones *p, q* a la proposición "si *p* entonces *q*".

NOTACIÓN: Para representar la implicación se ocupa el símbolo ⇒ y se escribe "p => q".

La tabla de verdad para la implicación nos queda

p	q	p ⇒ q
V	V	V
V	F	
F	V	

F | F |

NOTA: A la proposición *p* se la llama "condición" y a la proposición *q* se la llama "conclusión"

Ejemplo:
"Si el número natural *n* es múltiplo de 4 entonces *n* es par"

Ejemplo

1. p :: "Yo estudio"
   q :: "Voy al cine"
   P => q :: "**Si** yo estudio **entonces** voy al cine"

2. p :: "1 > 0"
   q :: "1 es positivo"
   p => q :: **"Si** 1>0 **entonces** 1 es positivo**"**

3. p :: "2<0"
   q :: "La Tierra no es plana"
   p => q :: "**Si** 2<0 **entonces** la Tierra no es plana"

BICONDICIONAL (DOBLE IMPLICACIÓN o EQUIVALENCIA)
DEFINICIÓN: Sean *p, q* dos proposiciones. Se llama equivalencia de *p, q* a la proposición *"p* si y solo si *q"*, o también *"p* es equivalente a *q"*

NOTACIÓN: Para la equivalencia ocupamos el símbolo

La tabla de verdad para el bicondicional nos queda

Ejemplo

1. p :: "El número 3 es impar"
   q :: "3 = 2 + 1"
   p <=> q :: "El número 3 es impar **equivale a** 3 = 2+1" o "El número 3 es impar **si y solo si** 3 = 2+1"

2. p :: "Te llevaría a viajar"
   q :: "Tú estudias juiciosa"
   p <=> q :: "Te llevaría a viajar **si y solo si** estudias juiciosa"

EQUIVALENCIA ENTRE OPERADORES

1. Implicación

2. Bicondicional

TAUTOLOGÍAS
DEFINICIÓN: Se llaman tautologías a aquellas proposiciones compuestas que son siempre verdaderas sin importar cuales sean los valores de verdad de las proposiciones c

Ejemplo:
~(p v q) <=> (~p) ^ (~q)

CONTRADICCIÓN

DEFINICIÓN: Se llama contradicción a aquella proposición compuesta que es siempre falsa sin importar cuales sean los valores de verdad de las proposiciones que la comp

Ejercicio

~(p ^ ~p)

~[(p v q) v r] <=> [p v (q v r)]

LEYES DE LA LÓGICA MATEMÁTICA

Teorema: Sean *p, q, r* proposiciones. Las siguientes proposiciones compuestas son tautologías

1. **Propiedad de idempotencia (~, ^, v)**
- ~(~p) <=> p
- (p ^ p) <=> p
- (p v p) <=> p

2. **Propiedad conmutativa (v, ^)**
- p v q <=> q v p
- p ^ q <=> q ^ p

3. **Propiedad asociativa (v, ^)**
- (p v q) v r <=> p v (q v r)
- (p ^ q) ^ r <=> p ^ (q ^ r)

4. **Propiedad distributiva (v, ^)**
- p v (q ^ r) <=> (p v q) ^ (p v r)
- p ^ (q v r) <=> (p ^ q) v (p ^ r)

5. **Leyes de Morgan**
- ~ (p v q) <=> ~p ^ ~q
- ~(p ^ q) <=> ~p v ~q

6. **Leyes de absorción**
- p v (p ^ q) <=> p
- (p ^ q) => q
- (p ^ q) => p

7. **Ley de Identidad**
- p v V <=> V
- p v F <=> p
- p ^ V <=> p
- p ^ F <=> F

8. **Ley de Complemento**
- p v ~p <=> V
- p ^ ~p <=> F

TABLAS DE VERDAD

Las tablas de verdad se emplean para encontrar todas los posibles valores de verdad que puede tomar un proposición compuesta. Para ellos se tienen los siguientes pasos:

1. Se escriben todas las posibles combinaciones de valores de verdad que pueden tomar las proposiciones simples. Si en la proposición participan *n* proposiciones simples, entonces hay 2^n combinaciones de valores posibles.

2. Se ordenan cada una de las operaciones a efectuarse en orden creciente de complejidad.
3. Se efectúan las operaciones considerando los valores de verdad obtenidos en los pasos anteriores.
4. La columna que queda bajo la proposición compuesta que está siendo analizada contiene los valores de verdad buscados.

1. L equivale a (A ^ B)

Álgebra de Boole

Ejemplo de demostración con las Leyes de la Lógica Matemática

Demostrar mediante las leyes

Comprobar si la proposición compuesta es una tautología

TEMAS DE EXPOSICIÓN

Ejemplo: P. Conmutativa no válida