Conjuntos

jueves, 1 de julio de 2021 14:30

FUNCIÓN PROPOSICIONAL
Es una proposición que depende del valor de una o más variables para determinar su valor de verdad.

Ejemplo:
p(x) :: "x > 0", x elemento de los números enteros $\mathbb{Z}$

r(x,y) :: "x^2 + y^2 <= 1", x,y elementos de los número irracionales.

CUANTIFICADORES

Cuando una función proposicional se verifica para todos los valores de un conjunto, se tiene el cuantificador universal

$$(\forall x)\ p(x)$$

Cuando una función proposicional se verifica para *al menos un elementos* de los valores de un conjunto, se tiene el cuantificador existencial

$$(\exists x)\ p(x)$$

RELACIÓN ENTRE CUANTIFICADORES

$$\sim[(\forall x)] \equiv \exists x$$

$$\sim[(\exists x)] \equiv \forall x$$

NEGACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES

$$\sim[(\forall x)\ p(x)] \equiv (\exists x)[\sim p(x)]$$

$$\sim[(\exists x)\ p(x)] \equiv (\forall x)[\sim p(x)]$$

EJEMPLO:
1. p(gato) :: Todos los gatos tienen cola
   ~p(gato) :: Existe al menos un gato que no tiene cola

$$(\forall x)\, p(x),\ x \in G$$

$$\sim[(\forall x)\ p(x)],\ x \in G$$

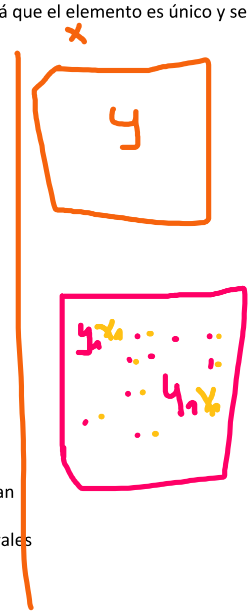
$$(\exists x)[\sim p(x)],\ x \in G$$

2. Para todo x elemento de los números reales, x^2 >= 0.
   q(x) :: "x^2 >= 0"
   $(\forall x)\, q(x),\ x \in \mathbb{R}.$

   ~q(x) :: "No es cierto que x^2 >= 0"
   ~q(x) :: "x^2 < 0"
   $(\exists x)\,[\sim q(x)],\ x \in \mathbb{R}.$

   Existe x elemento de los números reales tal que x^2<0.
   Al menos un x elemento de los números reales verifica x^2<0.

OBSERVACIÓN:
Si p(x) es verdadera para un único elemento de un cierto conjunto dado, se dirá que el elemento es único y se escribe *Existe un único elemento.* Se denota por el símbolo $\exists!$



Ejemplo
1. $$\underbrace{(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})}(x+y=y)$$
$$\#$$
$$\overbrace{(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})}(x+y=y)$$

2. Para todo n en los naturales tal que existe m en los naturales que verifican n + m = 12
   ~ : Existe al menos un n en los naturales tal que para todo m en los naturales se verifica n + m != 12

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n+m=12)$$
$$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(n+m\neq 12)$$

OBSERVACIÓN:
Se tienen las siguientes equivalencias
$$[(\forall x)(P(x) \wedge Q(x))] \Leftrightarrow \{[(\forall x)(P(x))] \wedge [(\forall x)(Q(x))]\}$$
$$[(\exists x)(P(x) \vee Q(x))] \Leftrightarrow \{[(\exists x)(P(x))] \vee [(\exists x)(Q(x))]\}$$

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN:

1. MÉTODO DIRECTO

$$\underset{H}{p} \Rightarrow \underset{T}{q}$$

Ejemplo:
Probar que si *n* es un número impar, entonces *n^2* es un número impar

$$n = \underline{2k+1}$$
$$n^2 = (2k+1)^2 = \underbrace{4k^2+4k}+1$$
$$= 2(2k^2+2k)+1$$

$$m$$

$$= 2m+1, \quad m = 2k^2 + 2k.$$

$$n^2 = 2m+1.$$

$$\therefore n^2 \text{ es impar}$$

2. MÉTODO DE REDUCCIÓN A LO ABSURDO

$$p \Rightarrow q$$

EJMPLO:
Probar que 1/0 no es un número real

$$\frac{1}{0} = a \Leftrightarrow 1 = a \cdot 0$$

$$\Rightarrow \boxed{1 = 0} \quad (\Rightarrow\Leftarrow)$$

3. MÉTODO DE CONTRAPOSICIÓN

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \Rightarrow \sim p$$

Ejemplo
Probar que si a^2 es impar, entonces a es impar

p: a^2 es impar (V)
q: a es impar

$\sim q \Rightarrow \sim p$ (V)

$\sim q$: a es par
$\sim p$: a^2 es par (V)

Deber: Hacer la demostración por contraposición

Observación:
Las demostraciones por inducción utilizan el método directo de demostración.

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para $n=1$, $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$$= \frac{1(\cancel{2})}{\cancel{2}} = 1 \qquad V$$

Para $n=2$, $1+2 = \frac{\cancel{2}(2+1)}{\cancel{2}}$

$$3 = 3 \qquad V$$

Se supone que el resultado se verifica para n. Mostremos que se verifica para n+1

$$\underbrace{1+2+\dots+n}+n+1=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2}+n+1$$

$$\frac{n(n+1)+2n+2}{2}$$

$$\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

CONJUTNOS

DEFINICIÓN: Un conjunto es una colección de elementos que verifican una propiedad (característica) en común.

NOTACIÓN: A los conjuntos se los escribe con letras mayúsculas, A, B, C, etc.

A los individuos que verifican la característica que determina un conjunto se los llama *elementos*.

OBSERVACIÓN: Diremos que un individuo pertenece a un conjunto si cumple con la característica del mismo y se escribe "a pertenece al conjunto A".

NOTACIÓN: Para escribir que un elemento pertenece a un conjunto, se utiliza el símbolo $\in$

Para escribir que un elemento no pertenece a un conjunto, se utiliza el símbolo $\notin$ y se lee "a *no pertenece* al conjunto A"

Ejemplos:

1. A = {a, e, i, o, u}; A es el conjunto de las vocales

$a\in A;\ e\in A;\ j\notin A;\ m\notin A$

2. $B=\{x\in\mathbb{R} : x^2+7x+6=0\}$

$B=\{-6,-1\}$

PROPOSICIÓN: Dos conjuntos son iguales cuando todos sus elementos son iguales. **(Axioma de extensión)**

Ejemplo: Supongamos que tenemos el conjunto A constituido por las letras de la palabra "careta" y un conjunto B constituido por las letras de la palabra "cartera", entonces A=B

A = {a, c, e, r, t} = B

c a r e t a

$A=\{c,a,r,e,t,a\}$

$=\{c,a,r,e,t\}$

c a r t e r a

$B = \{c, a, r, e, t\}$

$A = B$

DETERMINACIÓN DE CONJUNTOS

Diremos que un conjunto A está bien definido si dado cualquier objeto a, podemos afirmar sin ambigüedad que a es o no elemento de A. Existen tres formas de describir un conjunto:

1. **Por extensión:** también se conoce por enumeración o tabulación, consiste en enumerar todos los elementos de un conjunto dado. Se escriben todos y cada uno de los elementos entre llaves y separados por comas.

   Ejemplo:
   A es el conjunto formado por los números dígitos
   A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

2. **Por comprensión:** si se considera el conjunto de elementos que cumplen una función proposicional sobre un conjunto referencial. En el lenguaje familiar, las funciones proposicionales se conocen como propiedades (características).

   Observación: Un conjunto referencial, por lo general notado por E, es el conjunto sobre el cual se buscan los valores para que la función proposicional sea verdadera.

   Ejemplo:
   $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\} \equiv A = \{2, -2\}$

   $$A = \{x \in E : p(x)\}$$

   Se lee "A es el conjunto de todos los elementos x de E para los cuales es verdadera la proposición p(x)"

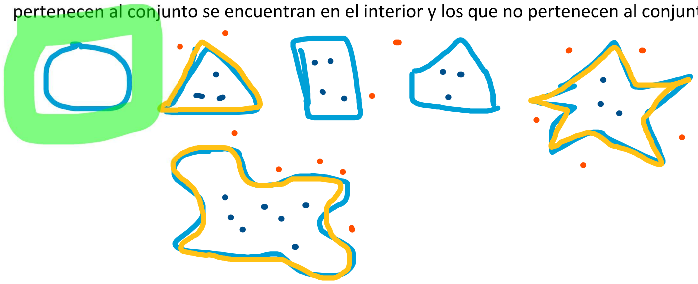
OBSERVACIONES:

a. Diremos que dos conjuntos A y B son iguales si y solamente si las funciones proposicionales sobre el conjunto E que las defines son equivalentes.

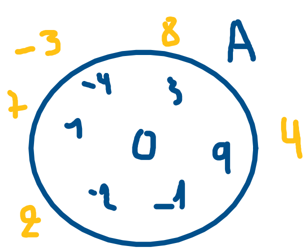
b. Un mismo ente matemático no puede ser a la vez un conjunto y un elemento de ese conjunto, es decir que excluimos la posibilidad de que *a sea elemento de a*. $a \in a$

c. La colección de todos los conjuntos imaginables no es un conjunto.

3. **Diagramas de Venn:** también conocidos como Diagramas de Venn-Euler. Consiste en la representación gráfica de los elementos de un conjunto dado. Por lo general, se ocupan figuras de área plana y limitadas por una curva cerrada. Todos los elementos que pertenecen al conjunto se encuentran en el interior y los que no pertenecen al conjunto se encuentran en el exterior.



Ejemplo:
Representar el siguiente conjunto con un diagrama de Venn
A = {-4, -2, -1, 0, 1, 3, 9}



CONJUNTOS INTERESANTES

1. **Conjunto Universo:** El conjunto universo es aquel que esta formado por la totalidad de los elementos de estudio. Al conjunto universo se lo denota por la letra **U.** U
2. **Conjunto Vacío:** El conjunto vacío es aquel que no tiene ningún elemento. Al conjunto vacío se lo nota con el símbolo. $\emptyset$
   Al conjunto vacío se lo puede definir de la siguiente manera: $\emptyset = \{x \in E : x \neq x\}$
3. **Conjunto unitario:** El conjunto unitario es aquel que posee un solo elemento. Se escribe de la siguiente manera **{a}**.

$$a \in \{a\}$$

$$x \in \{a\} \Rightarrow x = a.$$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

1. **IGUALDAD**: Decimos que dos conjuntos son iguales si sus elementos - o las funciones proposicionales que lo determinan - son equivalentes. Se utiliza el símbolo "=", para determinar la igualdad ente conjuntos.

   $A = B$ Cuando son iguales

   $A \neq B$ Cuando no son iguales o son diferentes

2. **INCLUSIÓN**
   DEFINICIÓN: Sean A y B dos conjuntos dados. Se dice que *A es subconjunto de B* si todo elementos del conjunto A es elemento del conjunto B. Se escribe de la siguiente manera

   $$A \subset B$$

   y se lee "A es subconjunto de B", o también "A está incluido en B".
   Ejemplo:
   A = {x : x es una vocal} y B = {x : x es una letra del abecedario}

$A \neq B$

$A \subset B \qquad B \subset A$

OBSERVACIONES:{
   a. Todo conjunto es subconjunto del conjunto universo
   b. El conjunto vacío es subconjunto de todo conjunto.

De forma abreviada se escribe la relación de inclusión

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$A \subset B \Leftrightarrow B \supset A$$

OBSERVACIÓN:
Para indicar que A no está contenido en B, se escribe

$$A \not\subset B$$

Y significa

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \neg(\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$$

$$\Leftrightarrow [\exists x : \neg(x \in A \Rightarrow x \in B)]$$

Deber: Terminar la demostración

$$\Leftrightarrow (\exists x : x \in A \wedge x \notin B)$$

Propiedades de la inclusión

i. **Propiedad Reflexiva:** Para todo conjunto A, se tiene que *A está contenido en A*

$$A \subset A$$

i. **Propiedad Transitiva:** Para los conjuntos A, B y C cualesquiera, se tiene que

$$A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

i. **Propiedad Antisimétrica:** Para dos conjuntos A y B, se tiene lo siguiente

$$A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$$

OBSERVACIÓN:
Para mostrar que dos conjuntos, A y B, son iguales, basta mostrar la doble contenencia, AcB y BcA

Partes de un conjunto y Conjunto de partes
DEFINICIÓN: Sea E un conjunto. Se llama *parte de* E a todo subconjunto A de E.

Ejemplo:
Tomemos E como el conjunto de los número naturales. A el conjunto de los números pares.
Entonces A es *parte de E.*

DEFINICIÓN: Sea A un conjunto cualquiera. El *conjunto de partes de* A es el conjunto formado por todos los subconjuntos de A. Se nota y escribe de la siguiente manera

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$$

i) $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subset A$

ii) $\{a\} \in \mathcal{P}(A) \iff a \in A$

a) $\emptyset \in \mathcal{P}(A) \iff \emptyset \subset A$

b) $A \in \mathcal{P}(A) \iff A \subset A$

Ejemplo:

$A = \{a\}$; $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$

$B = \{a, b\}$; $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, B, \{a\}, \{b\}\}$

Conjunto	Subconjuntos	#
$\emptyset$	$\emptyset$	
$\{a\}$	$\emptyset, \{a\}$	
$\{a, b\}$	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}$	
$\{a, b, c\}$	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$	
$\vdots$		

Ejemplo:

$A = \{2, \{3\}\}$; $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{\{3\}\}, A\}$

EJEMPLO PROPIEDAD ANTISIMÉTRICA

$A = \{n \in \mathbb{Z} : 7n + 2\}$; $B = \{n \in \mathbb{Z} : 7n - 5\}$

$\boxed{PD}$ $A = B$

i) $A \subset B$

$\forall x : x \in A \iff x = 7n + 2$

$x = 7n + 7 - 7 + 2$

$$x = 7\underbrace{(n+1)}_{p\in\mathbb{Z}} - 5$$

$$x = 7p - 5$$

$$\Rightarrow x \in B$$

$$\therefore A \subset B$$

ii) $B \subset A$

$$\forall x: \ x \in B \Leftrightarrow x = 7n - 5$$

$$x = 7n + 7 - 7 - 5$$

$$x = 7\underbrace{(n-1)}_{p\in\mathbb{Z}} + 2$$

$$x = 7p + 2$$

$$\Rightarrow x \in A$$

$$\therefore B \subset A$$

P.A se tiene A

EJEMPLO PROPIEDAD TRANSITIVA

PROPIEDADES DE LA IGUALDAD DE CONJUNTOS

1. **PROPIEDAD REFLEXIVA**

2. **PROPIEDAD SIMÉTRICA** Para todo par de conjunto A y B, se tiene

3. **PROPIEDAD TRANSITIVA** Para todos los conjuntos A, B y C cualesquiera se cumple

? **OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS (ÁLGEBRA DE CONJUNTOS)**

1. UNION DE CONJUNTOS

Definición: Sean A y B subconjuntos de U. Se denomina *unión* de A y B al subconjunto de U cuyos elementos pertenecen a A **o** (inclusivo) a B. Dicho conjunto se nota y se escribe de la siguiente manera

Propiedades de la Unión de conjuntos

1. A c A **U** B y B c A U B
2. A U B = B U A
3. A U A = A
4. A U 0 = A
5. **U** =A U **U**
6. A U (B U C) = (A U B) U C
7. A c B <=> A U B = B

2. INTERSECCIÓN DE CONJUNTOS

Definición: Sean A y B subconjuntos de **U**. Se denomina intersección de A y B al subconjunto de **U** cuyos elementos pertenecen a la vez a A **y** a B. Se denota y escribe de la siguiente maneta

Propiedades de la Intersección y la Unión

1. A ∩ A = A
2. A ∩ B = B ∩ A
3. A ∩ 0 = 0
4. A ∩ **U** = A
5. (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C)
6. A ∩ B c A y A ∩ B c B
7. A c B <=> A ∩ B = A
8. A ∩ (BUC) = (A ∩ B) U (A ∩ C)
9. A U (B ∩ C) = (AUB) ∩ (AUC)
10. A U (A ∩ B) = A
11. (AUB) ∩ A = A

3. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

Definición: Sea A y B subconjunto de **U**. La diferencia de A y B es el subconjunto formado por todos aquellos elementos que perteneces a A, **pero no** pertenecen a B. Se nota y se escribe como

Propiedades de la diferencia

1. $A \setminus B \subset A$
2. $(A \setminus B) \cap B = 0$
3. $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = 0$
4. $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
5. $A \setminus 0 = A$
6. $0 \setminus A = 0$
7. Si $A \cap B = 0$, entonces $A \setminus B = A$

4. COMPLEMENTARIO (COMPLEMENTO DE UN CONJUNTO)

Definición: Siendo E un conjunto referencial y A un subconjunto de E. Se llama *complementario* de A en E, al conjunto notado como

Propiedades del complemento

1. $A \setminus B = A \cap B^c$
2. $A \cap A^c = 0$
3. $(A^c)^c = A$
4. $A \cup A^c = E$
5. $0^c = E$; $E^c = 0$
6. LEYES DE MORGAN
    a. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
    b. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
7. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$
8. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
9. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

5. DIFERENCIA SIMÉTRICA

Definición: Sea A y B subconjuntos de un conjunto referencial E. Se denomina diferencia simétrica de A y B al siguiente conjunto, se nota por

Propiedades de la diferencia simétrica