Modelos Bayesianos Funcionales para Detección de Cambios en Series Temporales Múltiples

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ALTIPLANO

INGENERIA ESTADISTICA E INFORMATICA
Jhoseep Jhoel Condori Banegas

30 de diciembre de 2025

1 Introducción

La complejidad inherente a los sistemas modernos de recolección de datos plantea desafíos metodológicos que requieren herramientas estadísticas cada vez más sofisticadas. Cuando observamos múltiples series temporales de forma simultánea —pensemos en señales cerebrales registradas desde diferentes regiones durante una tarea cognitiva, o en indicadores económicos de diversos sectores durante periodos de crisis— nos enfrentamos a preguntas fundamentales: ¿Cuándo ocurren cambios significativos en el comportamiento del sistema? ¿Estos cambios son locales o afectan a múltiples componentes simultáneamente? ¿Cómo podemos detectarlos sin caer en el problema de identificar patrones espurios?

La literatura reciente en *Computational Statistics & Data Analysis* muestra avances prometedores en tres direcciones complementarias que, hasta ahora, han permanecido relativamente desconectadas. Por un lado, los modelos gráficos funcionales bayesianos ofrecen representaciones flexibles de dependencias temporales complejas [1, 2]. Por otro, las técnicas de detección de puntos de cambio han evolucionado para manejar escenarios multivariados [3, 4]. Finalmente, el control de la tasa de falsos descubrimientos (FDR) ha ganado terreno como alternativa pragmática al control tradicional del error tipo I cuando realizamos múltiples comparaciones [5, 6].

Este trabajo propone tender puentes entre estas tres líneas de investigación. Comenzaremos revisando contribuciones metodológicas clave, para luego argumentar que su integración no solo es posible sino necesaria para abordar problemas aplicados de relevancia contemporánea.

1.1 Modelos Gráficos Funcionales con Dinámica Temporal

El trabajo de Liu y colaboradores [1] introduce una extensión bayesiana de los modelos gráficos funcionales que incorpora explícitamente la posibilidad de cambios estructurales. La idea central es elegante: en lugar de asumir que las dependencias entre procesos funcionales permanecen estáticas, se permite que la estructura de la red cambie en puntos específicos del tiempo.

Concepto clave: Los modelos gráficos funcionales representan series temporales como funciones continuas y modelan sus dependencias condicionales mediante una estructura de red que puede cambiar en el tiempo.

La estrategia de modelamiento utiliza priors jerárquicos que penalizan el número de puntos de cambio, evitando así sobreajuste mientras mantienen flexibilidad. Los autores emplean algoritmos MCMC adaptativos para la inferencia [7, 8], lo cual representa un logro computacional considerable dado que el espacio de parámetros incluye tanto la topología de la red como las ubicaciones de los cambios.

Desde una perspectiva aplicada, este enfoque resulta particularmente atractivo para neurociencia, donde las redes funcionales cerebrales pueden reorganizarse en respuesta a estímulos o durante diferentes estados cognitivos. Sin embargo, queda abierta la pregunta de cómo extender estos métodos cuando trabajamos con decenas o cientos de series paralelas, escenario común en genómica funcional o monitoreo industrial [9].

1.2 Análisis Funcional Bayesiano para Datos Longitudinales

Trabajos complementarios han explorado el modelamiento jerárquico de datos funcionales longitudinales mediante marcos bayesianos no paramétricos [2, 10]. Estos enfoques permiten suavizar observaciones ruidosas mientras se estiman simultáneamente medias funcionales condicionales y superficies de covarianza. La capacidad de capturar características interpretables de baja dimensionalidad resulta particularmente valiosa cuando los datos provienen de múltiples sujetos observados a través del tiempo.

Nota importante: *La representación funcional de series temporales mediante bases de splines o procesos Gaussianos permite trabajar con curvas suaves en lugar de puntos discretos, facilitando el análisis de dependencias entre series.*

El uso de análisis de componentes principales funcionales dentro de un marco bayesiano proporciona estimaciones más estables que los métodos frecuentistas, especialmente en escenarios con muestras pequeñas o datos irregularmente observados [11]. Esta robustez computacional sugiere que los enfoques bayesianos son especialmente adecuados para el tipo de problemas que enfrentamos en esta propuesta.

1.3 Detección de Cambios con Control de FDR

El trabajo de Cui y colaboradores [3] representa un avance sustancial en la detección de puntos de cambio para datos multivariados. El problema que abordan es el siguiente: cuando analizamos muchas series temporales simultáneamente, cada una con posibles puntos de cambio, las pruebas individuales acumulan error. Una solución ingenua sería aplicar correcciones tipo Bonferroni, pero esto resulta excesivamente conservador.

Concepto clave: El control de FDR (False Discovery Rate) controla la proporción esperada de falsos positivos entre todos los descubrimientos declarados, ofreciendo un balance más pragmático entre potencia y control de error que métodos como Bonferroni.

Los autores proponen en cambio controlar el FDR mediante un procedimiento de ordenación que explota la estructura de dependencia entre las series. La metodología incluye estimadores adaptativos que no requieren conocimiento previo de la proporción de nulos verdaderos [12, 13]. Las simulaciones demuestran que el método mantiene el FDR nominal mientras preserva potencia estadística razonable.

Desarrollos más recientes han extendido estas ideas incorporando estadísticos basados en signos para mayor robustez ante datos con colas pesadas [4], y procedimientos generalizados tipo knockoff que garantizan control exacto de FDR incluso en muestras finitas [14]. Estos avances metodológicos demuestran la madurez alcanzada por las técnicas de control de multiplicidad en contextos estructurales complejos.

1.4 Inferencia de Redes Temporalmente Variables

La literatura sobre modelos gráficos temporalmente variables ha experimentado un desarrollo paralelo significativo. El enfoque de *graphical lasso* temporalmente variable (TVGL) [15] permite inferir redes dinámicas a partir de datos de series temporales crudos, estimando matrices de covarianza inversa escasas que varían con el tiempo. Estos métodos revelan redes dinámicas de interdependencias entre entidades, y han demostrado ser escalables mediante algoritmos basados en ADMM (*Alternating Direction Method of Multipliers*).

Nota importante: *Los métodos como TVGL son computacionalmente eficientes pero generalmente no incorporan control formal de error, lo que limita su aplicabilidad en contextos donde los falsos positivos tienen consecuencias importantes.*

La capacidad de modelar diferentes tipos de patrones evolutivos en redes —desde cambios locales en aristas específicas hasta reorganizaciones globales— resulta crucial para aplicaciones en finanzas, sensores automotrices, y sistemas biológicos. Sin embargo, estos enfoques típicamente no incorporan control formal de FDR, lo cual limita su aplicabilidad cuando la detección de cambios falsos tiene consecuencias prácticas importantes.

2 Síntesis Crítica: Hacia una Integración Metodológica

La revisión anterior revela una tensión productiva entre especialización y generalidad. Por un lado, cada contribución aborda problemas específicos con profundidad técnica considerable. Por otro, comparten temas recurrentes: flexibilidad bayesiana, atención a multiplicidad de pruebas, sensibilidad a cambios estructurales.

Vale la pena preguntarse por qué estos temas emergen de forma independiente en lugar de dentro de un marco unificado. Una explicación parcial es histórica: las comunidades que trabajan en datos funcionales, detección de cambios y corrección por multiplicidad han evolucionado algo separadamente. Pero existe también una razón práctica: integrar estas ideas requiere resolver desafíos computacionales y conceptuales no triviales.

Concepto clave: La integración metodológica requiere superar barreras disciplinares y desarrollar algoritmos eficientes que puedan manejar simultáneamente la complejidad de modelos funcionales, la incertidumbre en la detección de cambios y el control de error de multiplicidad.

Consideremos qué significaría combinar realmente estos enfoques. Necesitaríamos un modelo que:

1. Represente dependencias funcionales entre series múltiples
2. Permita que estas dependencias cambien en puntos desconocidos del tiempo
3. Detecte estos cambios mientras controla FDR a través de las series
4. Permanezca computacionalmente factible

Ninguno de los artículos revisados logra esto completamente, aunque cada uno aporta piezas del rompecabezas.

3 Propuesta de Investigación

3.1 Motivación y Planteamiento del Problema

Los sistemas biológicos, económicos e industriales contemporáneos se caracterizan por generar múltiples flujos de información temporal que están interrelacionados de formas complejas y cambiantes. Un ejemplo concreto: durante una cirugía cardiovascular, monitoreamos simultáneamente presión arterial, frecuencia cardíaca, saturación de oxígeno, actividad eléctrica cardíaca, entre otras señales. Estas variables no solo están correlacionadas sino que su patrón de dependencia puede cambiar abruptamente en respuesta a eventos clínicos críticos.

> **Ejemplo aplicado:** *En una UCI, la detección temprana de sepsis podría basarse no solo en cambios individuales en signos vitales, sino en cambios en cómo estos signos se relacionan entre sí. La pérdida de coordinación entre variables puede ser un indicador más sensible que cambios aislados.*

Los métodos existentes para analizar estos datos tienen limitaciones significativas. Los enfoques univariados que detectan cambios en cada serie por separado ignoran información crucial sobre coordinación entre variables. Los modelos multivariados tradicionales asumen estructura de dependencia constante, hipótesis frecuentemente violada. Y cuando intentamos detectar cambios en múltiples series mediante pruebas repetidas, enfrentamos el problema de inflación del error tipo I.

Proponemos desarrollar un marco metodológico que aborde estas limitaciones mediante la integración coherente de modelamiento funcional bayesiano, detección de cambios estructurales y control de FDR.

3.2 Objetivos de Investigación

El objetivo general es construir un modelo estadístico que detecte puntos de cambio simultáneos en múltiples series temporales funcionales relacionadas, manteniendo control formal sobre la tasa de falsos descubrimientos.

Este objetivo se desglosa en componentes específicos:

1. **Extender el marco de modelos gráficos funcionales bayesianos** para incorporar explícitamente priors que favorezcan estructuras de cambio escasas pero flexibles.

Esto implica ir más allá de los priors jerárquicos estándar para incluir mecanismos tipo *spike-and-slab* que permitan que algunos segmentos temporales compartan estructura mientras otros divergen.

2. **Desarrollar una estrategia inferencial** que estime simultáneamente las ubicaciones de puntos de cambio, la estructura de red en cada régimen temporal, y la incertidumbre asociada a estas estimaciones. Esto requerirá algoritmos MCMC eficientes o, alternativamente, aproximaciones variacionales que escalen razonablemente [7, 16].

3. **Incorporar control de FDR a nivel posterior**. La idea es traducir las probabilidades posteriores de cambio en cada serie a un procedimiento de decisión que garantice que la proporción esperada de falsos descubrimientos permanezca bajo un umbral especificado. Esto exige adaptar procedimientos como Benjamini-Hochberg al contexto bayesiano y a la dependencia entre series [5, 6].

4. **Validar el enfoque** mediante estudios de simulación exhaustivos que evalúen potencia estadística, control de error, y robustez ante violaciones de supuestos. Compararemos contra métodos alternativos incluyendo detección univariada con correcciones múltiples, modelos de cambio sin estructura de red, y enfoques frecuentistas.

5. **Demostrar utilidad aplicada** mediante análisis de datos reales procedentes de al menos dos dominios científicos distintos, idealmente neurociencia y finanzas o fisiología y monitoreo industrial.

3.3 Estrategia Metodológica

3.3.1 Arquitectura del modelo

La arquitectura del modelo se construye en capas. En la base, representamos cada serie temporal como un proceso funcional mediante expansiones en B-splines o, alternativamente, como proceso Gaussiano con núcleo apropiado. Esta representación funcional tiene ventajas sobre trabajar directamente con observaciones discretas: suaviza ruido, permite interpolación natural, y facilita definir nociones de dependencia entre funciones [2, 11].

Concepto clave: La representación funcional mediante bases de B-splines:

$$y_i(t) = \sum_{k=1}^{K} \beta_{ik} B_k(t) + \epsilon_i(t)$$

donde $B_k(t)$ son funciones base y β_{ik} coeficientes a estimar.

Sobre esta base funcional, imponemos una estructura de red que captura dependencias entre series. En lugar de una matriz de precisión constante, permitimos que esta estructura cambie en puntos desconocidos del tiempo [15]. Formalmente, segmentamos el dominio temporal en intervalos dentro de los cuales la red permanece estable. El número de segmentos, sus fronteras, y las redes específicas en cada uno son incógnitas a estimar.

3.3.2 Priors y regularización

Para regularizar este problema fundamentalmente mal planteado, empleamos priors jerárquicos cuidadosamente elegidos [8, 16]:

- **Prior para el número de puntos de cambio:** Distribución de Poisson con parámetro pequeño, reflejando la creencia de que los cambios estructurales son eventos raros.

$$K \sim \text{Poisson}(\lambda), \quad \lambda \text{ pequeño}$$

- **Priors para la estructura de red:** *Spike-and-slab* para cada entrada de la matriz de precisión $\Omega^{(m)}$ en el segmento m:

$$\Omega_{ij}^{(m)} \sim \pi_{ij}\delta_0 + (1 - \pi_{ij})N(0, \tau^2)$$

  donde δ_0 es una masa puntual en cero (spike) y π_{ij} es la probabilidad de que la conexión i-j exista.

- **Priors para parámetros funcionales:** Priors conjugados cuando sea posible para facilitar el cálculo.

3.3.3 Inferencia

La inferencia procede via MCMC con movimientos *reversible-jump* que añaden, eliminan o mueven puntos de cambio [7]. Dentro de cada configuración de cambios, actualizamos estructuras de red mediante Gibbs sampling. Movimientos de Metropolis-Hastings sobre parámetros funcionales completan el esquema.

Algoritmo de inferencia: *El algoritmo propuesto alterna entre:*

1. *Actualización de ubicaciones de puntos de cambio (movimientos reversible-jump)*
2. *Actualización de estructura de red dentro de cada segmento (Gibbs sampling)*
3. *Actualización de parámetros funcionales (Metropolis-Hastings)*

3.3.4 Control de FDR a posteriori

Una vez obtenidas muestras posteriores, construimos probabilidades posteriores de cambio en cada serie y tiempo:

$$\pi_{it} = P(\text{cambio en serie } i \text{ en tiempo } t \mid \text{datos})$$

Estas probabilidades alimentan un procedimiento de control de FDR que umbraliza decisiones de forma que garantice la tasa de falsos descubrimientos esperada bajo un nivel nominal [3, 12]. Adaptamos el procedimiento de Benjamini-Hochberg para trabajar con probabilidades posteriores en lugar de p-valores, aprovechando que estas ya incorporan dependencias entre series.

3.4 Resultados Anticipados y Validación

Esperamos que el modelo propuesto supere métodos existentes en escenarios donde:

- Los cambios estructurales son relativamente escasos pero coordinados entre subconjuntos de series

- La estructura de red aporta información útil sobre patrones de dependencia
- El control de FDR es prioritario sobre potencia estadística maximal

Las simulaciones se diseñarán para explorar sistemáticamente el espacio de configuraciones incluyendo diferentes números de series, longitudes temporales, intensidades de señal, patrones de dependencia, y sincronías de cambio.

> **Concepto clave:** [Escenarios de simulación]
>
> - **Escenario 1:** Cambios sincronizados en todas las series
> - **Escenario 2:** Cambios en subgrupos correlacionados
> - **Escenario 3:** Cambios independientes entre series
> - **Escenario 4:** Sin cambios (evaluación de FDR empírico)

Más allá de la validación numérica, el verdadero test será la aplicabilidad práctica. Planeamos colaboraciones con neurocientíficos trabajando en conectividad cerebral dinámica y con economistas interesados en correlaciones cambiantes entre mercados financieros. El objetivo no es solo mostrar que el método "funciona"según métricas técnicas sino que aporta *insights* científicos genuinos en problemas reales.

3.5 Implementación Computacional

Todo el desarrollo metodológico será acompañado de implementación en software abierto, probablemente como paquete de R con núcleo computacional en C++ para eficiencia. La documentación incluirá:

- Viñetas extensas con ejemplos reproducibles
- Discusión de elección de priors y diagnósticos de convergencia
- Guías para interpretación de resultados
- Tutoriales para aplicaciones en dominios específicos

Esta transparencia computacional es crucial no solo para reproducibilidad sino para facilitar adopción por practicantes no especializados en metodología estadística avanzada.

4 Relevancia y Proyecciones

La propuesta aquí esbozada responde a una necesidad metodológica genuina en el análisis de sistemas dinámicos complejos. La convergencia entre datos funcionales, modelamiento de redes, y control de multiplicidad no es meramente técnica sino que refleja la naturaleza de problemas científicos contemporáneos.

> **Impacto potencial:**
>
> - ***Medicina:*** *Detección temprana de deterioro en pacientes críticos mediante cam-*

bios en patrones de coordinación entre signos vitales

- ***Neurociencia:*** *Identificación precisa de transiciones entre estados cerebrales basada en cambios en conectividad funcional*
- ***Finanzas:*** *Alertas tempranas de cambios estructurales en mercados financieros*
- ***Monitoreo industrial:*** *Detección predictiva de fallas en sistemas complejos*

Desde una perspectiva académica, el trabajo contribuiría avanzando la frontera en estadística computacional bayesiana para datos estructurados. Las innovaciones metodológicas específicas —priors para cambios de red, algoritmos MCMC eficientes, control de FDR posterior— tienen potencial de impacto más allá de la aplicación inmediata propuesta.

Por supuesto, subsisten desafíos importantes. La escalabilidad computacional limitará el número de series analizables simultáneamente. La elección de priors, aunque guiada por principios, retendrá inevitablemente elementos subjetivos. Y la interpretabilidad de modelos complejos permanece como preocupación práctica válida.

Estas limitaciones no invalidan la propuesta sino que delimitan su alcance y sugieren direcciones para refinamiento futuro. El progreso científico procede mediante aproximaciones sucesivas, cada una mejorando sobre limitaciones de predecesoras mientras introduciendo sus propios compromisos.

5 Conclusión

Este trabajo ha argumentado que la integración de modelos funcionales bayesianos, detección de cambios estructurales, y control de FDR representa una dirección prometedora para el análisis de datos temporales multivariados. La revisión de literatura mostró que, si bien estos temas han avanzado considerablemente de forma independiente, su síntesis metodológica permanece incompleta.

La propuesta de investigación presentada busca llenar este vacío mediante un marco coherente que combine las fortalezas de enfoques existentes mientras aborda sus limitaciones individuales. El éxito de esta empresa dependerá tanto de innovación técnica como de validación empírica rigurosa y colaboración interdisciplinaria genuina.

Referencias

[1] Liu, X., Kowal, D. R., Doss-Gollin, J., & Vannucci, M. (2025). Bayesian functional graphical models with change-point detection. *Computational Statistics & Data Analysis*, 201, 108019.

[2] Zhu, H., Morris, J. S., Wei, F., & Cox, D. D. (2020). Bayesian analysis of longitudinal and multidimensional functional data. *Biostatistics*, 21(4), 771–788.

[3] Cui, Y., Kosorok, M. R., Sverdrup, E., Wager, S., & Zhu, R. (2023). Change-point testing for parallel data sets with FDR control. *Computational Statistics & Data Analysis*, 179, 107645.

[4] Chen, Y., Wang, Y., & Yao, Q. (2025). Robust selection of the number of change-points via FDR control. *Computational Statistics & Data Analysis*, 202, 108083.

[5] Benjamini, Y., & Hochberg, Y. (1995). Controlling the false discovery rate: A practical and powerful approach to multiple testing. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 57(1), 289–300.

[6] Benjamini, Y., & Yekutieli, D. (2001). The control of the false discovery rate in multiple testing under dependency. *Annals of Statistics*, 29(4), 1165–1188.

[7] Gelfand, A. E., & Smith, A. F. M. (1990). Sampling-based approaches to calculating marginal densities. *Journal of the American Statistical Association*, 85(410), 398–409.

[8] Chib, S., & Carlin, B. P. (1999). On MCMC sampling in hierarchical longitudinal models. *Statistics and Computing*, 9(1), 17–26.

[9] Nolan, T. H., Richardson, S., & Ruffieux, H. (2024). Efficient Bayesian functional principal component analysis of irregularly-observed multivariate curves. *Computational Statistics & Data Analysis*, 198, 107856.

[10] Montesinos-López, O. A., Montesinos-López, A., Crossa, J., Cuevas, J., Montesinos-López, J. C., Gutiérrez, Z. S., & Lillemo, M. (2018). Bayesian functional regression as an alternative statistical analysis of high-throughput phenotyping data of modern agriculture. *Plant Methods*, 14, 46.

[11] Lovelace, T., & Kowal, D. R. (2022). Efficient Bayesian hierarchical functional data analysis with basis function approximations using Gaussian-Wishart processes. *Biometrics*, 78(3), 1073–1085.

[12] Hao, N., Niu, Y. S., & Zhang, H. (2013). Multiple change-point detection via a screening and ranking algorithm. *Statistica Sinica*, 23(4), 1553–1572.

[13] Li, H., Munk, A., & Sieling, H. (2016). FDR-control in multiscale change-point segmentation. *Electronic Journal of Statistics*, 10(1), 918–959.

[14] Ke, Z. T., Shi, J., & Wen, X. M. (2022). A generalized knockoff procedure for FDR control in structural change detection. *Journal of Econometrics*, 230(2), 438–463.

[15] Hallac, D., Park, Y., Boyd, S., & Leskovec, J. (2017). Network inference via the time-varying graphical lasso. In *Proceedings of the 23rd ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining* (pp. 205–213).

[16] Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., & Rubin, D. B. (2013). *Bayesian Data Analysis* (3rd ed.). Chapman and Hall/CRC.