395480 – Controle Robusto
Tema: Análise e Controle via LMIs
Seguimento de referência e restrições em sinais

Prof. Eduardo Stockler Tognetti

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Sistemas Eletrônicos e de Automação (PGEA)
Universidade de Brasília

2º Semestre 2014

Seguimento de referência

Problema de rastreamento

Seja a planta

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_2 u(t) + B_1 w(t) \\ z(t) &= C_2 x(t) + D_{12} u(t) + D_{22} w(t) \\ y(t) &= C_1 x(t) + D_{22} u(t) + D_{21} w(t) \end{aligned} \tag{1}$$

- **Objetivo:** A variável controlada $z(t)$ deve seguir a referência $r(t)$

Casos particulares:

- $r(t)$ constante: $z(t) \to r$, $t \to \infty$
- $z(t) = x(t) \to x_r(t)$
- Medição da variável controlada: $z(t) = y(t) \to y_r(t)$ ou $z(t) = Cy(t)$

- O problema de rastreamento envolve o seguimento de trajetórias (servo-mecanismo), funções no tempo (rastreamento) e saída de sistemas dinâmicos (seguimento de modelo)

Seguimento de referência

Referência constante: realimentação de estados

- Seja o problema de $z(t)$ seguir uma referência r constante (entrada degrau)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t) \end{aligned} \qquad x \in \mathbb{R}^{n_x}, \quad z \in \mathbb{R}^{n_z}, \quad u \in \mathbb{R}^{n_u}$$

- Em regime estacionário $x(t) \to x_{eq}$ e $u(t) \to u_{eq}$ quando $t \to \infty$

$$\begin{aligned} 0 &= Ax_{eq} + Bu_{eq} \\ r &= C_z x_{eq} + D_z u_{eq} \end{aligned} \quad \equiv \quad \underbrace{\begin{bmatrix} A & B \\ C_z & D_z \end{bmatrix}}_{\Psi} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{eq} \\ u_{eq} \end{bmatrix}}_{\xi_{eq}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix}}_{\rho}, \qquad \begin{cases} x_{eq} = Fr \\ u_{eq} = Nr \end{cases}$$

Casos:

- $n_u = n_z \Rightarrow \xi_{eq} = \Psi^{-1}\rho \quad \rightsquigarrow \exists\Psi^{-1}$ a menos que $G_{uz}(s)$ tenha zero na origem
- Sobre atuado: $n_u > n_z \Rightarrow \xi_{eq} = \Psi'(\Psi\Psi')^{-1}\rho$
- Sub-atuado: $n_u < n_z \rightsquigarrow$ solução só existe para valores específicos de r $(\rho \in \mathcal{R}\{\Psi\})$

Seguimento de referência

Referência constante: realimentação de estados

- Definindo

$$\tilde{z} = z - r, \quad \tilde{u} = u - u_{eq}, \quad \tilde{x} = x - x_{eq}$$

tem-se

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} + \underbrace{(Ax_{eq} + Bu_{eq})}_{0}, \qquad \tilde{z} = C_z\tilde{x} + D_z\tilde{u} + \underbrace{(C_z x_{eq} + D_z u_{eq} - r)}_{0}$$

- Lei de controle $\tilde{u} = K\tilde{x}$

$$\begin{aligned} u &= K(x - x_{eq}) + u_{eq} \\ &= K(x - Fr) + Nr \\ &= Kx + (N - KF)r \\ &= Kx + K_2 r \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = (A + BK)\tilde{x} = A_{mf}\tilde{x} \\ \tilde{z} = (C_z + D_z K)\tilde{x} = C_{mf}\tilde{x} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{mf}x + BK_2 r \\ z = C_{mf}x + D_z K_2 r \end{cases}$$

- No equilíbrio:

$$\begin{aligned} x_{eq} &= -A_{mf}^{-1}BK_2 r \\ z &= (-C_{mf}A_{mf}^{-1}B + D_z)K_2 r \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} K_2 &= (-C_{mf}A_{mf}^{-1}B + D_z)^{-1} \\ &= G_{mf}(0)^{-1} \end{aligned}$$

Seguimento de referência

Referência constante: realimentação de saída

- Seja o problema de $z(t)$ seguir uma referência r constante (entrada degrau)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_z u(t) \\ y(t) &= Cx \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Lei de controle:

$$\begin{aligned} u &= -K(\hat{x} - x_{eq}) + u_{eq} \\ &= -K\hat{x} + K_2 r \end{aligned}$$

- Estimador LQG:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= (A - LC)\hat{x} + Bu + Ly \\ &= (A - LC - BK)\hat{x} + BKx_{eq} + Bu_{eq} + Ly \end{aligned}$$

- Sistema em malha fechada, $\tilde{x} \triangleq \hat{x} - x_{eq}$,

$$\dot{\tilde{x}} = (A - LC - BK)\tilde{x} - L(y - \underbrace{Cx_{eq}}_{CFr}) \qquad u = -K\tilde{x} + \underbrace{u_{eq}}_{Nr}$$

- Sistema aumentado, $e \triangleq x - \hat{x}$,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BK_2 \\ 0 \end{bmatrix} r$$

$$z = \begin{bmatrix} C_z - D_z K & D_z K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + D_z K_2 r$$

Controle com ação integral

- Lei de controle $u = Kx + K_2 r$ não é robusta à incertezas de modelo ou distúrbios de entrada persistentes $\rightsquigarrow$ erro de regime estacionário

- Considere o problema de $z(t)$ ser medido ($z(t) = y(t)$ ou $z(t) = Ey(t)$) e seguir uma referência r constante (entrada degrau)

$\rightsquigarrow$ Sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1 w(t) \\ z(t) = C_z x(t) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Estado adicional $\dot{x}_I = r - z$ e lei de controle

$$u = -(Kx + K_2 x_I) = -\underbrace{\begin{bmatrix} K & K_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}$$

- Sistema aumentado:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix}}_{\dot{\xi}} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_z & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}}_{\xi} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} u + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{\tilde{r}}, \quad z = \underbrace{\begin{bmatrix} C_z & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}}_{\xi}$$

- Projetando a lei de controle $u = -\tilde{K}\xi$ tal que $\tilde{A}_{mf} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ seja estável, em regime estacionário tem-se

$$\xi = -\tilde{A}_{mf}^{-1}\tilde{B}_1\tilde{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_I = r - z = 0 \qquad \therefore z = r, \quad t \to \infty$$

- Obs.: caso x não seja medido usar observador para estimar o estado: $x \rightsquigarrow \hat{x}$
- Obs.: LQI: min $J = \int_0^\infty (\xi' Q \xi + u' R u + 2\xi' S u)\, dt$, $R > 0$, $Q - SR^{-1}S' \geq 0$

Controle com ação integral

- Seja o modelo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Bw(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad \text{deseja-se} \quad \begin{cases} y(t) \to r(t) \quad \text{(constante)} \\ \text{rejeitar} \quad w(t) \quad \text{(constante)} \end{cases}$$

- É possível escolher a lei de controle

$$u = K\tilde{x} - K_2 x_I$$

$$= -\begin{bmatrix} K & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix} + KFr$$

$$\begin{bmatrix} F \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I & B \\ C_r & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

$$C_r : \; y_r = C_r x = r$$

em que $\tilde{x} = x - x_r$, $x_r = Fr$, $\dot{x}_I = r - z$ $\quad$ ($r(t)$ constante)

- Sistema aumentado em malha fechada

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_I \end{bmatrix}}_{\dot{\xi}} = \left(\underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C_z & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \underbrace{\begin{bmatrix} K & K_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ x_I \end{bmatrix}}_{\xi} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_1 & BKF \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{\tilde{B}_1} \underbrace{\begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}}_{\tilde{r}}$$

- Projetando $\tilde{K}$ tal que $\tilde{A}_{mf} = \tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}$ seja estável, em regime estacionário tem-se

$$\xi = -\tilde{A}_{mf}^{-1}\tilde{B}_1\tilde{r} \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 0, \quad \dot{x}_I = r - z = 0, \qquad \therefore z = r, \quad t \to \infty$$

Controle com ação integral

Sinal de referência polinomial

- Considere o problema de $y(t) \to r(t)$, $t \to \infty$, em que

$$r(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{d-1} t^{d-1}$$

- Definindo $e = y - r$ e os seguintes estados adicionais

$$\dot{q}_1 = e, \quad \dot{q}_2 = q_1, \quad \cdots, \dot{q}_d = d_{d-1}$$

tem-se o sistema aumentado $\dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}u + \tilde{B}_1 r$

$$\begin{aligned} \xi &= \begin{bmatrix} x' & q_1' & \cdots & q_d \end{bmatrix}', \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} B & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ C & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Lei de controle $u = K\xi$ $\rightsquigarrow$ erro estacionário nulo pois

$$\dot{\xi}^{(d+1)} = (\tilde{A} + \tilde{B}K)\xi^{(d+1)} \quad \Rightarrow \quad \xi^{(d)} \to 0 \quad \Rightarrow \quad q^{(d)} = y - r \to 0, \quad t \to \infty$$

- Também é possível usar o estado estimado para realimentação & tratar caso incerto em que $A \to A(\alpha)$

Seguimento de modelo de referência com rejeição de distúrbio

- Considere o sistema abaixo e um dado modelo de referência

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_w w(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) \\ y_r(t) = C_r x_r(t) + r(t) \end{cases}$$

- Problema: projeto de lei de controle $u = K_1 x + K_2 x_r$ tal que $y(t) \to y_r(t)$ ou $e(t) = y(t) - y_r(t)$ menor possível segundo algum critério (ex.: $||e|| < \gamma ||\tilde{w}||$, $\tilde{w} = [w' \quad r']'$, $w \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$)

- Sistema aumentado

$$\dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}\tilde{w}$$
$$e = \tilde{C}\xi$$

em que

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{w} = \begin{bmatrix} w \\ r \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A + BK_1 & BK_2 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B_w & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix},$$
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} C + DK_1 & -C_r + DK_2 \end{bmatrix},$$

Seguimento de modelo de referência com de rejeição de distúrbio

- Considere o sistema abaixo e um dado modelo de referência

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad \dot{x}_r(t) = A_r x_r(t) + r(t)$$

- Problema: projeto de lei de controle $u = K(\hat{x} - x_r)$ tal que $x(t) \to x_r(t)$ ou $e(t) = x(t) - x_r(t)$ menor possível segundo algum critério

- Sistema aumentado $\dot{\xi} = \tilde{A}\xi + \tilde{B}r$ em que

$$\xi = \begin{bmatrix} e_o \\ e \\ x_r \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \left[\begin{array}{c:cc} A - LC & 0 & 0 \\ \hdashline -BK & A + BK & A - A_r \\ 0 & 0 & A_r \end{array}\right], \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & -I & I \end{bmatrix}$$

- Observador

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x}), \qquad e_o = x - \hat{x}$$

- Critério

$$\int_0^\infty e'Qedt \leq \gamma^2 \int_0^\infty r'rdt \Leftrightarrow \int_0^\infty \xi'\tilde{Q}\xi dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty r'rdt, \quad \tilde{Q} = diag(0, Q, 0)$$

garantido por $\dot{V} + \xi'\tilde{Q}\xi - \gamma^2 r'r < 0,\ V = \xi'\tilde{P}\xi,\ \tilde{P} = diag(P_1, P_2, P_2) \rightsquigarrow$ LMIs

Restrição no sinal de controle

- Deseja-se impor a restrição $||u(t)|| < \mu$

- Seja a lei de controle de realimentação de estados $u = Kx$, em que $K = ZW^{-1}$ tais que Z e W garantem $\dot{V}(x) < 0,\ V(x) = x'W^{-1}x$

- Considere um conjunto de condições iniciais tais que (elipsóide invariante)

$$x(0) \in \Gamma \triangleq \{x : x'W^{-1}x \leq 1\}$$

Então

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0} ||u|| = \max_{t\geq 0} ||ZW^{-1}x|| \leq \max_{x\in\Gamma} ||ZW^{-1}x|| \leq ||ZW^{-1/2}|| \max_{x\in\Gamma} ||W^{-1/2}x|| \\ \leq \sqrt{\lambda_{\max}(W^{-1/2}Z'ZW^{-1/2})} \leq \mu\end{aligned} \quad (2)$$

- A condição acima é garantido pelas LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)' \\ x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0, \qquad \begin{bmatrix} W & Z' \\ Z & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3)$$

$$AW + WA' + BZ + Z'B' < 0 \text{ (sist. contínuo) ; } \begin{bmatrix} W & \star \\ AW + BZ & W \end{bmatrix} > 0 \text{ (sist. discreto)}$$

Restrição no sinal de controle – Extensões

- Se $||x(0)|| < \varphi$ a condição esquerda de (3) é substituída por $W \geq \varphi^2 I$
- Restrição $|x_j(0)| \leq \varphi_j \rightsquigarrow$ politopo descrito por seus vértices

$$\mathcal{P} = \mathbf{Co}\{\vartheta_1, \dots, \vartheta_p\}$$

$\rightsquigarrow \mathcal{P} \subseteq \Gamma \iff \vartheta_j' W^{-1} \vartheta_j \leq 1,\ j = 1, \dots, p$, que é equivalente a (substituir a condição esquerda de (3))

$$\begin{bmatrix} 1 & \vartheta_j' \\ \vartheta_j & W \end{bmatrix} \geq 0, \qquad j = 1, \dots, p$$

- Para a restrição $||u(t)||_{\max} \triangleq \max_i |u_i(t)| < \mu$ a condição direita de (3) é substituída por

$$\begin{bmatrix} X & Z \\ Z' & W \end{bmatrix} \geq 0, \qquad X_{ii} \leq \mu^2$$

- Para a restrição $|u_i(t)| < \mu_i$ em (2) $Z \to Z_i$ pois $u_i = Z_i W^{-1}$ e a condição direita de (3) é substituída por

$$\begin{bmatrix} W & Z_i' \\ Z_i & \mu_i^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n, \qquad Z_i \text{ é a } i\text{–ésima linha de } Z$$

Restrição no sinal de saída

- De forma análoga, deseja-se impor a restrição $||y(t)|| < \varepsilon$, $y = Cx$
- Considere um conjunto de condições iniciais tais que (elipsóide invariante)

$$x(0) \in \Gamma = \{x : x' W^{-1} x \leq 1\}$$

Então

$$\max_{t\geq 0} ||y|| = \max_{t\geq 0} ||Cx|| \leq \max_{x\in\Gamma} ||Cx|| = \max_{x\in\Gamma} \sqrt{\lambda_{\max}(x'C'Cx)} \leq \varepsilon \tag{4}$$

- A condição acima é garantido pelas LMIs

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)' \\ x(0) & W \end{bmatrix} \geq 0, \qquad \begin{bmatrix} W & WC' \\ CW & \varepsilon^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \tag{5}$$

- Restrição sobre canal individual $|y_i(t)| < \varepsilon_i$ é obtida com

$$\begin{bmatrix} W & WC_i' \\ C_i W & \varepsilon_i^2 I \end{bmatrix} \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad C_i \text{ é a } i\text{−ésima linha de } C \tag{6}$$

- A dependência da condição inicial $x(0)$ pode ser eliminada da condição esquerda de (5) como mostrado anteriormente