

# APLICAÇÃO DE MODELAGEM FUZZY TAKAGI-SUGENO À PLANTA QUATRO-TANQUES MULTIVARIÁVEL

JHONANTANS MORAES ROCHA, EDUARDO STOCKLER TOGNETTI\*

\* *Laboratório de Robótica e Automação (LARA)*  
*Departamento de Engenharia Elétrica - FT - UnB*  
*Caixa Postal 4.386 - Brasília - DF - Brasil*

Email: [jhmrocha@gmail.com](mailto:jhmrocha@gmail.com), [estognetti@ene.unb.br](mailto:estognetti@ene.unb.br)

**Abstract**— This work presents the non-linear modeling, linearization and fuzzy Takagi-Sugeno modeling for a four-tank plant, as a general example of multivariable processes. The goal is to compare the results obtained, demonstrating the increased efficiency of the fuzzy approach to linearization simultaneously to its simplicity.

**Keywords**— Fuzzy Modeling, Takagi Sugeno, Four tanks system, Multivariable process, Level control.

**Resumo**— Realiza-se neste trabalho a modelagem não-linear, linearizada e fuzzy Takagi-Sugeno de uma planta quatro-tanques, como um exemplo geral de processos multivariáveis. Objetiva-se a comparação dos resultados obtidos, demonstrando a maior eficiência da abordagem fuzzy sobre a linearização simultaneamente à sua simplicidade.

**Palavras-chave**— Modelagem Fuzzy, Takagi Sugeno, Sistema de quatro tanques, Processo multivariável, Controle de nível.

## 1 Introdução

Desenvolver controladores para sistemas não-lineares é quase sempre uma tarefa dispendiosa e complexa. Para plantas multivariáveis essa complexidade é ainda maior. É por esse motivo que é prática comum recorrer-se à linearização das equações que as descrevem, o que fornece uma aproximação do sistema inicial num formato que se encaixa às teorias de controle convencionais.

A linearização simples, realizada por meio da série de Taylor, resulta uma aproximação excelente localmente. No entanto, à medida que as variáveis controladas e manipuladas se afastam do ponto de operação, condição na qual foi realizada a linearização, o modelo passa a se afastar da planta real.

Neste cenário, a abordagem fuzzy figura como excelente ferramenta para solução destes desvios. Aparecendo pela primeira vez em (Takagi and Sugeno, 1985), foi aplicada à modelagem de sistemas em (Zadeh, 1965). Seus métodos consistem na linearização simples do sistema em mais de um ponto, baseados em um conjunto de métricas relevantes para o problema em questão. Desenvolve-se então um conjunto de regras para determinar o grau de pertinência do estado do sistema à cada um dos pontos pré-modelados. Utiliza-se então como modelo a soma ponderada das linearizações por estes coeficientes de pertinência.

O objeto de estudo deste trabalho será o sistema de quatro tanques, desenvolvido por (Johansson et al., 1999) com o objetivo didático de demonstrar de forma ilustrativa conceitos e propriedades de sistemas com múltiplas entradas e saídas (MIMO, do inglês *multiple input, multiple output*). Seu diagrama esquemático é apresen-

tado na Figura 1. Ele consiste em quatro tanques interconectados, um reservatório inferior, quatro válvulas esferas e duas bombas de corrente contínua que bombeiam o fluido do reservatório inferior para os tanques de forma cruzada, de acordo com a razão entre os fluxos definida pela posição das válvulas.

O sistema de quatro tanques é não linear. Seu modelo linearizado apresenta um zero multivariável que pode estar localizado tanto no semi-plano esquerdo quanto no semi-plano direito dependendo da configuração das válvulas. A abertura das válvulas determina se o sistema é de fase mínima ou de fase não-mínima afetando a estratégia de controle a ser adotada.

O objetivo é controlar os níveis do fluido nos tanques inferiores 1 e 2. As entradas do processo são as tensões de entrada das bombas, e as saídas são os níveis de fluido nos tanques 1 e 2. As demais variáveis de processo são os níveis do fluido nos tanques 3 e 4, os fluxos da bomba e a razão entre os fluxos para os tanques.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção 2 é feita a modelagem matemática do sistema não linear e sua linearização em torno do ponto de operação em estado estacionário. A Seção 3 apresenta os conceitos da modelagem fuzzy e sua aplicação na planta. Na seção seguinte é feita uma análise comparativa entre os modelos desenvolvidos. Por fim, algumas considerações finais e sugestões de trabalhos futuros são apresentadas na Seção 5.

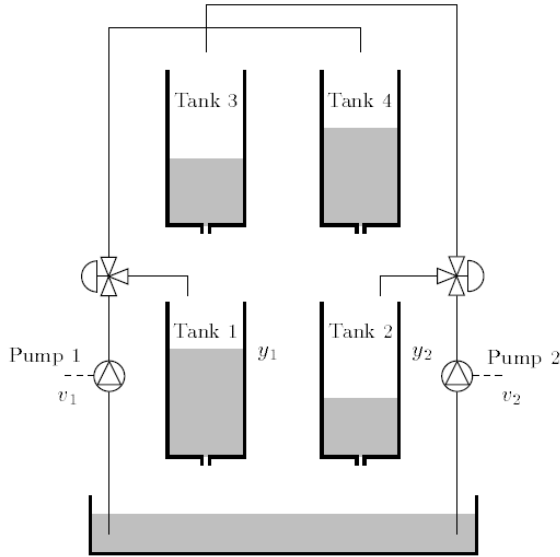


Figura 1: Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques e planta didática.

## 2 Modelagem Convencional

### 2.1 Modelo Não Linear

Baseado nos princípios de conservação de massa e na lei de Bernoulli para líquidos incompressíveis tem-se o seguinte sistema de equações não lineares que descrevem o processo.

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1}(a_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1 k_1 v_1 - a_1\sqrt{2gh_1}) \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2}(a_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2 k_2 v_2 - a_2\sqrt{2gh_2}) \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{A_3}((1 - \gamma_2)k_2 v_2 - a_3\sqrt{2gh_3}) \\ \dot{h}_4 = \frac{1}{A_4}((1 - \gamma_1)k_1 v_1 - a_4\sqrt{2gh_4}) \end{cases} \quad (1)$$

em que,  $h_i$ ,  $A_i$  e  $a_i$  são o nível de água, a área da seção transversal e a área de seção transversal do orifício de saída do tanque  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , respectivamente. A constante de fluxo e a tensão aplicada na bomba  $j$  são dadas respectivamente por  $k_j$  e  $v_j$ ,  $j = 1, 2$ . O parâmetro  $\gamma_1$  é a razão entre os fluxos para os tanques 1 e 4,  $\gamma_2$  é a razão entre os fluxos para os tanques 2 e 3 e  $g$  é a aceleração da gravidade.

### 2.2 Linearização

Linearizando o sistema em torno dos ponto de operação  $\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4)$  e  $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ , por expansão em série de Taylor, obtém-se a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \\ \Delta \dot{h}_3 \\ \Delta \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1\sqrt{2g}}{2A_1\sqrt{h_1}} & 0 & \frac{a_3\sqrt{2g}}{2A_1\sqrt{h_3}} & 0 \\ 0 & \frac{-a_2\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{h_2}} & 0 & \frac{a_4\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{h_4}} \\ 0 & 0 & \frac{-a_3\sqrt{2g}}{2A_3\sqrt{h_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_4\sqrt{2g}}{2A_4\sqrt{h_4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

em que  $y_i$  são as saídas medidas do sistema,  $\Delta h_i = h_i - \bar{h}_i$ ,  $\Delta v_i = v_i - \bar{v}_i$ , e  $i = 1, 2, 3, 4$ .

E por fim, a matriz função de transferência do sistema obtida é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{T_1 \gamma_1 k_1}{A_1(1+sT_1)} & \frac{T_1(1-\gamma_2)k_2}{A_1(1+sT_3)(1+sT_1)} \\ \frac{T_2(1-\gamma_1)k_1}{A_2(1+sT_4)(1+sT_2)} & \frac{T_2 \gamma_2 k_2}{A_2(1+sT_2)} \\ 0 & \frac{T_3(1-\gamma_2)k_2}{A_3(1+sT_3)} \\ \frac{T_4(1-\gamma_1)k_1}{A_4(1+sT_4)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que  $G(s) = \frac{\Delta h(s)}{\Delta v(s)}$  e  $T_i = \frac{2A_i\sqrt{h_i}}{a_i\sqrt{2g}}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

## 3 Modelagem Fuzzy

A Teoria Fuzzy tem seu princípio cunhado por (Takagi and Sugeno, 1985). Os trabalhos seguintes, como o (Zadeh, 1965) abordaram sua utilização para a modelagem de sistemas complexos por meio de aproximações, utilizando uma teoria de conjuntos diferente da convencional.

### 3.1 Conjuntos Fuzzy

A teoria de conjuntos convencional utiliza lógica booleana para definir os valores lógicos das funções de pertinências dos conjuntos. Assim, dado  $X$  o universo de discurso de um determinado conjunto  $C$ , um elemento genérico  $x$  tem sua função de pertinência ao conjunto  $C$  dado por:

$$f_C(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } x \in C \\ 0 & \text{se e somente se } x \notin C \end{cases}$$

Existem, no entanto, situações em que a definição dos conjuntos de seus limites se tornam muito subjetivos. Nestas situações, a utilização da lógica difusa apresenta vantagens para a modelagem de sistemas.

Considere-se como exemplo a temperatura de uma sala. Pode-se definir dois conjuntos de estados {quente, frio}. No entanto, torna-se um pouco confuso e arbitrário decidir em qual destes conjuntos um estado específico se encaixa. Utilizando funções de pertinências não binárias, observa-se o **quanto** determinada temperatura se encaixa em cada um dos conjuntos. Funções de pertinências fuzzy são definidas da forma:

$$f_C(x) : X \rightarrow [0, 1]$$

### 3.2 Funções De Pertinência

Existem várias normas e regras disponíveis para funções de pertinência. Este trabalho considera a norma triangular. Seguindo o exemplo dado, dada uma temperatura  $x$  verifica-se o quão pertencente aos conjuntos *quente* e *fria* ela é utilizando a função do gráfico a seguir:

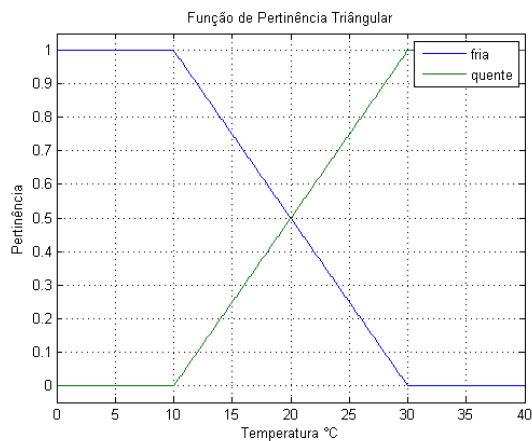


Figura 2: Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques e planta didática.

Nota-se que se escolhem limites para os conjuntos: toda temperatura abaixo de 10° é fria; toda temperatura acima de 30° é quente. As demais, pertencem mais ou menos à cada um dos conjuntos.

Em lógica Fuzzy, as variáveis definidas de forma subjetiva, com expressões para limites são chamadas variáveis linguísticas.

### 3.3 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

A abordagem proposta por (Zadeh, 1965) promove a utilização da lógica fuzzy na modelagem e controle de sistemas. As etapas deste processo são:

- **Fuzzificação:** Chamemos de  $x_i$  e  $C_i$ , onde  $i=1,2,3,...,n$ , as  $n$  variáveis medidas de um sistema e os conjuntos fuzzy aos quais podem ou não pertencer, respectivamente. No modelo de Takagi-Sugeno temos as regras dadas

da forma: SE  $x_1$  é  $A_1i$  e  $x_1$  é  $A_1i$  e  $x_1$  é  $A_1i$  e ... e  $x_1$  é  $A_1i$  ENTÃO  $y = f_i(x_1, x_2, ..., X_n)$

No objeto de estudos deste trabalho, as variáveis de entradas são os níveis  $h_1$  e  $h_2$ . Para cada um deles pode se definir os conjuntos {baixo, alto} e modelar o sistema nas quatro combinações possíveis:

- Se  $h_1$  é baixo e  $h_2$  é baixo, então  $\dot{x} = A_1x + B_1u$
- Se  $h_1$  é baixo e  $h_2$  é alto, então  $\dot{x} = A_2x + B_2u$
- Se  $h_1$  é alto e  $h_2$  é baixo, então  $\dot{x} = A_3x + B_3u$
- Se  $h_1$  é alto e  $h_2$  é alto, então  $\dot{x} = A_4x + B_4u$

Com a regras já definidas, realiza-se o próximo passo para inferir o quanto o estado atual pertence a cada um dos estados e o sistema resultante.

- **Inferência:** As variáveis  $h_1$  e  $h_2$  são chamadas variáveis premissas. Obtém-se então o grau de compatibilidade dos níveis em cada um dos quatro conjuntos anteriores utilizando funções de pertinências triangulares, como apresentado anteriormente. Para este tipo de função, o peso final da regra é dado pelo produto do grau de ativação das premissas em cada região. Ou seja, chamando de  $w_i(h_1, h_2)$  este peso, temos:

$$w_1(h_1, h_2) = f_{baixo}(h_1) * f_{baixo}(h_2)$$

$$w_2(h_1, h_2) = f_{baixo}(h_1) * f_{alto}(h_2)$$

$$w_3(h_1, h_2) = f_{alto}(h_1) * f_{baixo}(h_2)$$

$$w_4(h_1, h_2) = f_{alto}(h_1) * f_{alto}(h_2)$$

Assim, o modelo Takagi-Sugeno final é dado por:

$$\dot{h} = \frac{\sum_{i=1}^4 w_i(h)(A_i h + B_i u)}{\sum_{i=1}^4 w_i(h)}$$

Nota-se que o número de regras é obtido a partir da combinação simples entre as variáveis de discurso. Além disso, é importante notar que se tratam de linearizações, portanto as variáveis utilizadas são todas desvios de cada um dos respectivos pontos de linearização, que portanto precisam ser previamente calculados e inseridos no modelo.

## 4 Análise dos Resultados

Foram realizadas simulações de resposta ao degrau do sistema de quatro-tanques modelado seguindo as abordagens apresentadas. Por se tratar

de um problema multivariável com zeros alocáveis, simulou-se as respostas dos modelos para os casos de **fase-mínima** e de **fase não mínima**. Os resultados são observados nas seções a seguir.

#### 4.1 Fase Mínima

A tabela a seguir apresenta as especificações do sistema, nota-se por  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  que o sistema está em fase mínima.

Especificações Iniciais da Planta	
A1, A3	28
A2, A4	32
a1, a3	0.071
a2, a4	0.057
g	981
k1	3,33
k2	3.35
$\gamma_1$	0.70
$\gamma_2$	0.60

Realiza-se

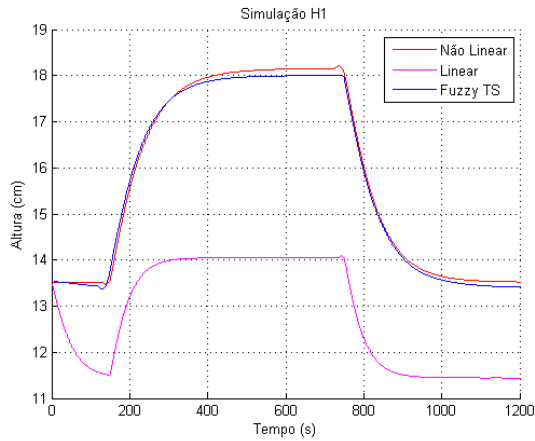


Figura 3: Linearização Convencional:  $\bar{h}_1 = 5, \bar{h}_2 = 5$ . Linearizações Fuzzy:  $\bar{h}_1 = [10 \ 15]$   $\bar{h}_2 = [10 \ 15]$

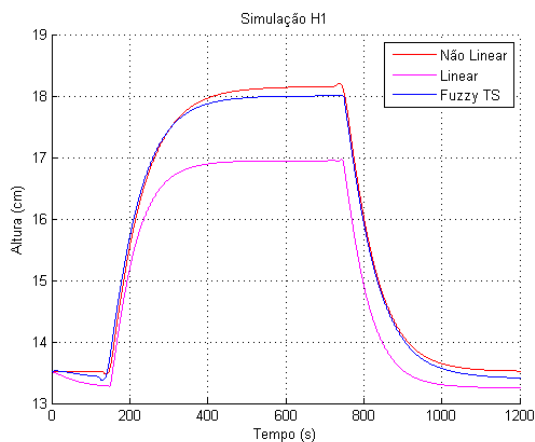


Figura 4: Linearização Convencional:  $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$ . Linearizações Fuzzy:  $\bar{h}_1 = [10 \ 15]$   $\bar{h}_2 = [10 \ 15]$

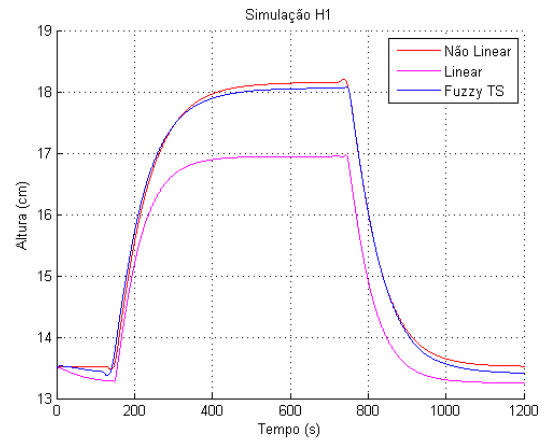


Figura 5: Linearização Convencional:  $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$ . Linearizações Fuzzy:  $\bar{h}_1 = [10 \ 15 \ 20]$   $\bar{h}_2 = [10 \ 15 \ 20]$

#### 4.2 Fase Não-Mínima

A tabela a seguir apresenta as especificações do sistema, nota-se por  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  que o sistema está em fase não mínima.

Especificações do sistema	
A1, A3	28
A2, A4	32
a1, a3	0.071
a2, a4	0.057
g	981
k1	3,14
k2	3.29
$\gamma_1$	0.43
$\gamma_2$	0.34

Nas figuras que se seguem apresentam-se as respostas dos modelos à degraus aplicados ao sistema. Observa-se que o modelo linear apresenta bons resultados quando o estado do sistema é próximo ao ponto de operação. Já para os modelos fuzzy, quanto mais pontos de linearização utilizados, melhor o resultado, embora mais complexo o custo computacional.

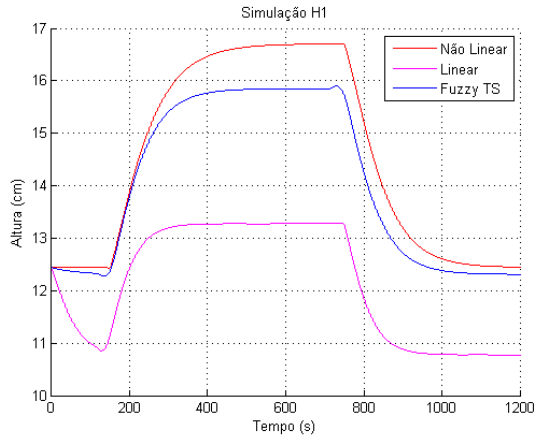


Figura 6: Linearização Convencional:  $\bar{h}_1 = 5, \bar{h}_2 = 5$ . Linearizações Fuzzy:  $\bar{h}_1 = [5 \ 10] \ \bar{h}_2 = [5 \ 10]$

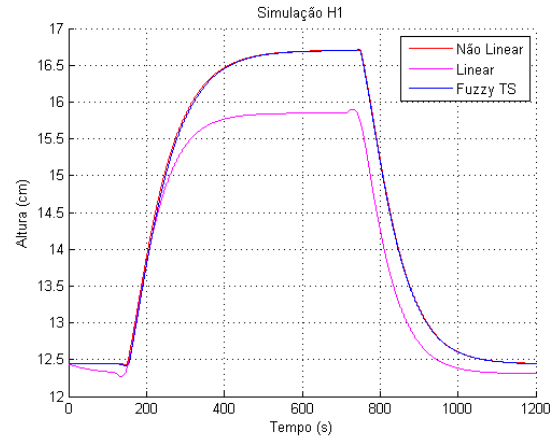


Figura 9: Linearização Convencional:  $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$ . Linearizações Fuzzy: uma linearização a cada 1 centímetro para ambos os níveis.

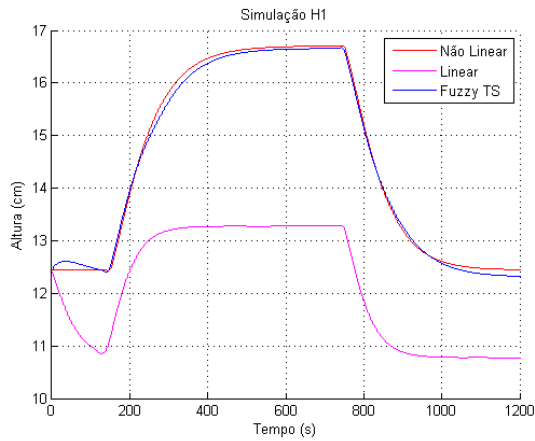


Figura 7: Linearização Convencional:  $\bar{h}_1 = 5, \bar{h}_2 = 5$ . Linearizações Fuzzy:  $\bar{h}_1 = [5 \ 10 \ 15] \ \bar{h}_2 = [5 \ 10 \ 15]$

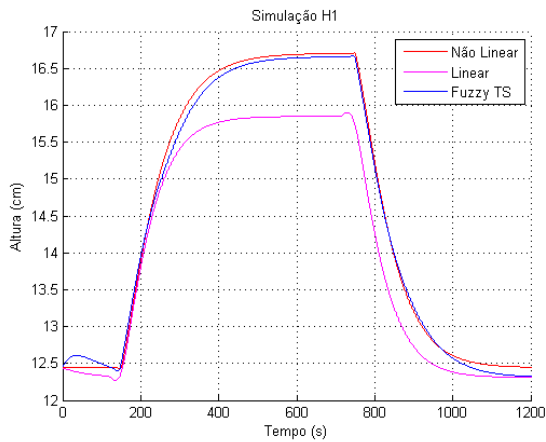


Figura 8: Linearização Convencional:  $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$ . Linearizações Fuzzy:  $\bar{h}_1 = [5 \ 10 \ 15] \ \bar{h}_2 = [5 \ 10 \ 15]$

Como explicado na seção anterior, o conjunto de regras é realizado a partir da combinação simples dos conjuntos de pontos das variáveis aferidas. Assim, na Figura 9 haverão 900 regras, uma combinação de 30 pontos para  $h_1$  e 30 pontos para  $h_2$ .

## 5 Conclusões

Neste trabalho foi realizada a comparação entre a modelagem fuzzy e a modelagem linearizada convencional. O objetivo final foi demonstrar a eficiência e aplicabilidade da abordagem proposta por Takagi-Sugeno em sistemas multivariáveis com diferentes níveis de acoplamento. A partir dos resultados obtidos, nota-se que esta abordagem proporciona uma aproximação tão boa quando se esteja disposto a dispendir em termos de custos computacionais. Possíveis desenvolvimentos futuros incluem a implementação de controladores desenvolvidos e a inclusão de incertezas nas especificações dos modelos.

## Referências

- Johansson, K. H., Horsch, A., Wijk, O. and Hansson, A. (1999). Teaching multivariable control using the quadruple-tank process.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116 – 132.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. information and control.