

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**SISTEMAS MULTIVARIÁVEIS:  
Uma abordagem via LMIs  
Versão preliminar**

**Alexandre Trofino  
Daniel Coutinho  
Karina Acosta Barbosa**

**Florianópolis, agosto de 2003.**

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Obtenção de um modelo . . . . .	1
1.1.1 Modelo físico . . . . .	1
1.1.2 Modelo experimental . . . . .	2
1.2 Definição do ponto de equilíbrio . . . . .	2
1.3 Linearização . . . . .	3
1.3.1 Propriedades estruturais . . . . .	5
1.3.2 Pólos e zeros . . . . .	6
1.4 Análise de malha aberta . . . . .	8
1.4.1 Estabilidade . . . . .	8
1.4.2 Desempenho . . . . .	8
1.4.3 Robustez . . . . .	8
1.5 Especificação de desempenho desejado . . . . .	8
1.6 Projeto de controladores . . . . .	8
1.7 Análise de malha fechada . . . . .	8
1.8 Exemplos de problemas de controle . . . . .	9
<b>2 Sistemas Dinâmicos Multivariáveis</b>	<b>11</b>
2.1 Descrição de Sistemas Dinâmicos . . . . .	11
2.2 Sistemas Incertos . . . . .	12
2.3 Modelos Matemáticos Para Sistemas Incertos . . . . .	13
2.4 Exemplos de Sistemas com Incertezas . . . . .	14
2.4.1 Pêndulo Invertido . . . . .	14
2.4.2 Controle de Posição Longitudinal de uma Aeronave . . . . .	15
2.5 Descrição das incertezas . . . . .	17
2.6 Exercícios . . . . .	20
2.7 Referências Complementares . . . . .	21
<b>3 Estabilidade e Desempenho</b>	<b>23</b>
3.1 Estabilidade exponencial . . . . .	23
3.1.1 Sistemas lineares Variantes no tempo . . . . .	26
3.1.2 Sistemas lineares Invariantes no tempo . . . . .	28
3.2 Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs . . . . .	30
3.2.1 Definições e noções de análise convexa . . . . .	30

3.2.2	Estabilidade Quadrática . . . . .	31
3.2.3	Resolvendo LMIs simultâneas . . . . .	33
3.2.4	O conjunto de soluções de uma LMI é convexo . . . . .	33
3.2.5	LMIs para sistemas incertos . . . . .	34
3.2.6	Otimização com restrição LMI . . . . .	37
3.2.7	Complemento de Schur . . . . .	38
3.2.8	Lema de Finsler . . . . .	39
3.2.9	Procedimento-S . . . . .	41
3.2.10	Escalonamento D-G . . . . .	42
3.3	$\mathcal{D}$ -Estabilidade: pólos em regiões desejadas . . . . .	43
3.4	Norma $\mathcal{H}_2$ de Sistemas . . . . .	46
3.4.1	Determinação da Norma $\mathcal{H}_2$ via gramianos . . . . .	50
3.4.2	Determinação da Norma $\mathcal{H}_2$ via LMIs . . . . .	51
3.4.3	Limitantes da Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas incertos . . . . .	53
3.5	Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Sistemas . . . . .	54
3.5.1	Determinação da Norma $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótima . . . . .	57
3.5.2	Determinação da Norma $\mathcal{H}_\infty$ via LMI . . . . .	57
3.5.3	Limitante da Norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas incertos . . . . .	59
3.6	Notas e Referências . . . . .	61
3.7	Exercícios Propostos . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Controle via Realimentação de Estados</b>	<b>65</b>
4.1	Alocação de pólos: abordagem clássica . . . . .	66
4.1.1	Referência nula: regulação . . . . .	67
4.1.2	Referência constante: rastreamento . . . . .	71
4.2	Alocação de pólos via LMIs . . . . .	74
4.2.1	Estabilização . . . . .	74
4.2.2	Alocação de pólos via $\mathcal{D}$ -Estabilidade . . . . .	77
4.3	Controle LQR . . . . .	79
4.4	Controle a Custo Garantido . . . . .	82
4.5	Controle $\mathcal{H}_2$ . . . . .	86
4.6	Controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	88
4.7	Controle de sistemas incertos . . . . .	90
4.8	Notas e Referências . . . . .	92
4.9	Exercícios Propostos . . . . .	92
<b>5</b>	<b>Observadores de Estados e Filtragem</b>	<b>95</b>
5.1	Observador de ordem completa . . . . .	95
5.1.1	Técnicas para projeto do ganho do observador . . . . .	97
5.2	Observador de Ordem Reduzida . . . . .	101
5.3	Filtros $\mathcal{H}_2$ . . . . .	104
5.3.1	Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas estocásticos. . . . .	105
5.3.2	Projeto do filtro $\mathcal{H}_2$ : variância mínima. . . . .	110
5.4	Filtros $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	112
5.5	Filtragem para sistemas incertos . . . . .	115
5.6	Exercícios Propostos . . . . .	115

<b>6</b>	<b>Controle por realimentação de Saída</b>	<b>117</b>
6.1	Controle via observador de estados . . . . .	117
6.1.1	Princípio da Separação . . . . .	118
6.1.2	Efeito de ruídos e distúrbios externos . . . . .	120
6.1.3	Rastreamento . . . . .	121
6.2	Controlador LQG . . . . .	123
6.3	Controlador dinâmico de saída . . . . .	127
6.4	Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída . . . . .	129
6.5	Controle $\mathcal{H}_\infty$ com Realimentação de Saída . . . . .	131
6.6	Notas e Referências . . . . .	134
6.7	Exercícios . . . . .	134



# Lista de Figuras

1.1	Sistema de 4 tanques acoplados. . . . .	1
2.1	Diagrama de Blocos de um sistema de Controle Robusto . . . . .	13
2.2	Pêndulo invertido . . . . .	14
2.3	Definição das Variáveis para a dinâmica longitudinal para o F-8 . . . . .	16
2.4	Representação de um politopo . . . . .	18
2.5	Sistema LFT . . . . .	19
2.6	Sistema Massa-Mola-Amortecedor . . . . .	21
3.1	Combinação convexa dos pontos $g, h$ com $0 \leq \alpha \leq 1$ . . . . .	34
3.2	Interpretação gráfica. . . . .	37
3.3	Regiões LMIs - (a) semi-plano, (b) disco e (c) setor cônico. . . . .	45
3.4	Diagrama de Blocos para o sistema (3.80). . . . .	48
3.5	Energia do sistema (3.80) na faixa de frequência $-\omega_0, \omega_0$ . . . . .	49
3.6	Diagrama de Blocos para o sistema (3.80) com $n_w = 2$ e $n_z = 2$ . . . . .	49
3.7	Relação entrada/saída. . . . .	55
3.8	Diagrama de Bode . . . . .	55
3.9	Diagrama de Bode para o sistema (3.100). . . . .	58
4.1	Rastreamento com correção de ganho estático. . . . .	71
4.2	Diagrama para ajuste do ganho estático. . . . .	72
4.3	Rastreamento com integradores. . . . .	73
4.4	Trajетórias do sistema (4.21) em malha fechada. . . . .	77
4.5	Trajетórias do sistema (4.21) em malha fechada com alocação de pólos. . . . .	79
4.6	Sinais de controle para o sistema (4.21) em malha fechada com alocação de pólos. . . . .	80
4.7	Trajетórias $x_1$ e $x_2$ do sistema (4.43) em malha fechada com perturbações impulsivas em $t = 1$ . . . . .	88
4.8	Saída de desempenho do sistema (4.47) em malha fechada. . . . .	90
4.9	Diagrama de Bode do sistema (4.47) em malha fechada. . . . .	91
5.1	Diagrama de blocos de um estimador de estado. . . . .	96
5.2	Observador de ordem completa para o sistema (5.1). . . . .	97
5.3	Trajетória do sinal de erro de estimação, caso de alocação de pólos . . . . .	102
5.4	Diagrama de blocos de um estimador de estado genérico. . . . .	103
5.5	Trajетória de $z(t)$ e sua estimativa $z_f(t)$ . . . . .	112
5.6	Trajетória do sinal de erro $e = z(t) - z_f(t)$ . . . . .	114
5.7	Diagrama de bode(Módulo) do sistema não forçado (5.32) . . . . .	115

5.8	Trajectoria $z(t)$ e sua estimativa $z_f(t)$ . . . . .	116
6.1	Realimentação dos estados observados. . . . .	118
6.2	Controlador baseado num observador. . . . .	119
6.3	Rastreamento com correção de ganho estático e observador. . . . .	122
6.4	Rastreamento com integradores. . . . .	122
6.5	Trajetórias do sinal de erro $e(t) = x(t) - x_f(t)$ . . . . .	123
6.6	Trajetórias do sistema (4.21) em malha fechada com observador de estados. . . . .	124

# Notação

$\mathbb{R}^{n \times m}$	Espaço das matrizes reais de dimensão $n \times m$ .
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Espaço das matrizes complexas de dimensão $n \times m$ .
$A' \ (A^*)$	matriz transposta de $A$ (transposta conjugada).
$A > 0$	matriz simétrica, positiva definida.
$\det(A)$	determinante de $A$ . Corresponde ao produto dos autovalores de $A$ .
$LMI$	Linear Matrix Inequality.
$LQG$	Linear Quadratic Gaussian Control.
$LQR$	Linear Quadratic Regulator.
$\text{tr}\{A\} = \sum_{i=1}^n a_{ii}$	traço da matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ com elementos $a_{ij}$ .
$\mathbf{E}[\cdot]$	operador esperança matemática.
$\ v\  = (v^*v)^{\frac{1}{2}}$	norma euclidiana de vetores.
$\ A\  = (\bar{\sigma}(A))^{\frac{1}{2}}$	norma espectral de matrizes.
$\bar{\sigma}(A)$	valor singular máximo da matriz $A$ .
$\sigma_i(A) = (\lambda_i(A^*A))^{\frac{1}{2}}$	i-ésimo valor singular da matriz $A$ .
$\lambda_i(A)$	i-ésimo autovalor da matriz $A$ .
$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \star & A_{22} \end{bmatrix}$	matriz simétrica onde o elemento $\star$ se deduz por simetria.
$\text{Re}(\cdot)$	parte real de um número complexo.
$\mathcal{L}_2$	Espaço dos sinais quadraticamente integráveis
	com norma $\ v(t)\ _2 = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} v(t)'v(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}$ .
$e^{\{\cdot\}}$ ou $\exp\{\cdot\}$	Indicam função exponencial de $\{\cdot\}$ .
$\text{posto}(M)$	Maior número de linhas ou colunas linearmente independentes na matriz $M$ .





# Capítulo 1

## Introdução

Nas seções a seguir descrevemos as etapas a serem vencidas na resolução de um problemas de controle. A idéia é apresentar o problema de forma concisa e simples, indicando referências que tratam do tema, onde o tema é tratado no livro e possíveis extensões.

### 1.1 Obtenção de um modelo

#### 1.1.1 Modelo físico

Uma das formas de se obter um modelo matemático para representar a dinâmica do sistema consiste na utilização das leis da física. Por exemplo, considere o sistema de 4 tanques da figura 1.1 onde se deseja controlar os níveis dos tanques 1 e 2. As bombas (atuadores) são alimentadas com tensões  $v_1, v_2$  (vetor de controle) e produzem vazões  $k_i v_i$  ( $i = 1, 2$ ) onde  $k_i$  são os ganhos das bombas. A válvula 1 distribui a vazão da

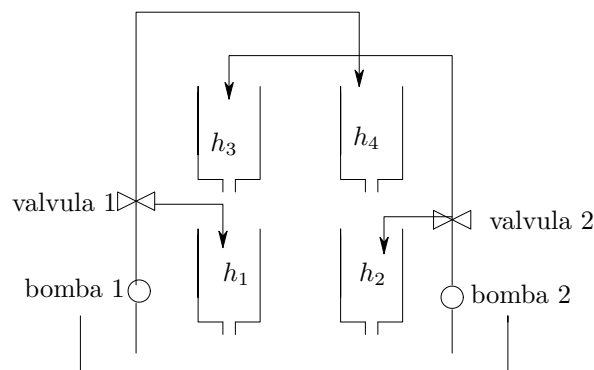


Figura 1.1: Sistema de 4 tanques acoplados.

bomba 1 entre os tanques 1 e 4, de acordo com o fator  $0 \leq \gamma_1 \leq 1$ , sendo que  $\gamma_1 k_1 v_1$  é a parcela da vazão que vai para o tanque 1 e  $(1 - \gamma_1) k_1 v_1$  a do tanque 4. Analogamente,  $\gamma_2 k_2 v_2$  é a percentagem da vazão jogada no tanque 2 e  $(1 - \gamma_2) k_2 v_2$  no tanque 3. As equações que descrevem a evolução do nível dos tanques podem ser obtidas fazendo-se

balanço de fluxo nos 4 tanques. A variação de volume no tanque 1 é dada por

$$\frac{dh_1}{dt}A_1 = -a_1\sqrt{2gh_1} + a_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1 k_1 v_1 \quad (1.1)$$

onde  $h_1$  é o nível de líquido no tanque,  $A_1$  é a seção do tanque 1. Assim o lado esquerdo da expressão acima é a variação de volume do tanque 1. O termo  $-a_1\sqrt{2gh_1}$  é a vazão de escoamento do tanque 1 para o reservatório através do orifício de seção  $a_1$  ( $g$  é a constante de aceleração gravitacional) e  $a_3\sqrt{2gh_3}$  é a vazão que o tanque 1 recebe do tanque 3 através do orifício de seção  $a_3$ . O termo  $\gamma_1 k_1 v_1$  é a parcela da vazão recebida da bomba 1. De forma análoga podemos obter a variação de volume dos demais tanques o que nos leva às seguintes equações de estado (Johansson, 2000):

$$\begin{aligned} \frac{dh_1}{dt} &= -\frac{a_1}{A_1}\sqrt{2gh_1} + \frac{a_3}{A_1}\sqrt{2gh_3} + \frac{\gamma_1 k_1}{A_1}v_1 \\ \frac{dh_2}{dt} &= -\frac{a_2}{A_2}\sqrt{2gh_2} + \frac{a_4}{A_2}\sqrt{2gh_4} + \frac{\gamma_2 k_2}{A_2}v_2 \\ \frac{dh_3}{dt} &= -\frac{a_3}{A_3}\sqrt{2gh_3} + \frac{1-\gamma_2}{A_3}k_2 v_2 \\ \frac{dh_4}{dt} &= -\frac{a_4}{A_4}\sqrt{2gh_4} + \frac{1-\gamma_1}{A_4}k_1 v_1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

No protótipo de laboratório descrito em (Johansson, 2000), apenas os níveis dos tanques 1 e 2 são medidos e o sinal de tensão na saída dos medidores é  $\eta_i = k_c h_i$  para  $i = 1, 2$ , sendo  $k_c$  o ganho dos medidores.

### 1.1.2 Modelo experimental

Fornecer algoritmo de mínimos quadrados e um exemplo.

## 1.2 Definição do ponto de equilíbrio

Grande parte dos problemas de controle consistem em manter o sistema operando com as variáveis oscilando numa estreita faixa de funcionamento chamada de regime permanente. Por esse motivo, dizemos que um sistema opera em regime permanente quando todas as variáveis de estado do sistema se mantêm constantes com o passar do tempo. Os valores constantes dessas variáveis são chamados de pontos de equilíbrio e são obtidos igualando-se as derivadas das equações acima a zero. Por exemplo, os pontos de equilíbrio ( $\bar{h}_i$ ) do sistema de 4 tanques em (1.2) são obtidos da condição  $\dot{h}_i = 0$  e são dados por :

$$\bar{h}_4 = \frac{1}{a_4^2 2g} (1 - \gamma_1)^2 k_1^2 \bar{v}_1^2 \quad (1.3)$$

$$\bar{h}_3 = \frac{1}{a_3^2 2g} (1 - \gamma_2)^2 k_2^2 \bar{v}_2^2 \quad (1.4)$$

$$\bar{h}_2 = \frac{1}{a_2^2 2g} [(1 - \gamma_1)k_1 \bar{v}_1 + \gamma_2 k_2 \bar{v}_2]^2 \quad (1.5)$$

$$\bar{h}_1 = \frac{1}{a_1^2 2g} [(1 - \gamma_2)k_2 \bar{v}_2 + \gamma_1 k_1 \bar{v}_1]^2 \quad (1.6)$$

No protótipo de laboratório descrito em (Johansson, 2000) os parâmetros do sistema são  $k_1 = 3.33$ ,  $k_2 = 3.35$ ,  $\gamma_1 = 0.7$  e  $\gamma_2 = 0.6$ . Observe que nessa configuração do sistema podemos encontrar tensões de controle  $v_1$  e  $v_2$  de forma a ajustar o nível de dois tanques no equilíbrio, porém não é possível ajustar os quatro níveis de forma independente.

Um ponto de equilíbrio é dito ser estável se, partindo de qualquer ponto próximo a esse equilíbrio, o sistema é capaz de retornar ao mesmo equilíbrio sem o auxílio de sinais externos (sinais externos nulos). Quando essa propriedade não se verifica podemos projetar um controlador para tornar o ponto de equilíbrio estável e ainda diminuir as oscilações provocadas por perturbações externas que estão presentes na quase totalidade das aplicações práticas. Como o objetivo é fazer com que o sistema funcione numa vizinhança próxima ao ponto de equilíbrio desejado podemos utilizar, para o projeto do controlador, um modelo mais simples baseado na linearização.

### 1.3 Linearização

Para que possamos linearizar um sistema  $\dot{x} = f(x)$  no entorno de um dado ponto de funcionamento  $\bar{x}$  precisamos que o modelo não linear tenha algumas características, como por exemplo a função  $f(x)$  deve ser analítica no ponto  $\bar{x}$ . Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é analítica num dado ponto  $a$  se ela pode ser representada por uma série de potências em torno de  $a$ . Tais funções possuem uma representação conhecida como expansão em série de Taylor, que é dada por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n \quad (1.7)$$

Funções analíticas em  $a$  são infinitamente diferenciáveis em  $a$ .

Muitas vezes basta considerar a expansão representada na equação (1.7) até  $n = 1$ , o que resulta na aproximação de  $f$  nas vizinhanças de  $a$  por uma reta tangente à  $f$  em  $a$ .

Para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciáveis em  $x_0 = [x_{10} \ x_{20} \ \cdots \ x_{n0}]'$ , a extensão do conceito de linearização do caso unidimensional é dada pela expressão:

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} (x_i - x_{i0}) \quad (1.8)$$

onde  $f$  representa agora uma hiper-superfície no espaço  $\mathbb{R}^{n+1}$  e sua aproximação, um hiperplano tangente à  $f$  no ponto  $x_0$ .

Para funções vetoriais  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , utiliza-se para a linearização em torno do ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  a chamada matriz jacobiana, aqui representada por  $J_{(f,x)}$  e definida como:

$$J_{(f,x)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad \text{para } x = \bar{x} \quad (1.9)$$

Assim, para a equação vetorial diferencial de primeira ordem não-linear:

$$\dot{h} = f(h, v) \quad (1.10)$$

onde  $v$  representa um sinal de atuação externo, a linearização em torno do ponto de equilíbrio  $(\bar{h}, \bar{v})$  é obtida fazendo-se:

$$f(h, v) \approx f(\bar{h}, \bar{v}) + J_{(f,h)}(h - \bar{h}) + J_{(f,v)}(v - \bar{v}) = J_{(f,h)}x + J_{(f,v)}u$$

onde o estado  $x = h - \bar{h}$  e controle  $u = v - \bar{v}$  do sistema linearizado indicam a variação do estado e controle não-lineares em relação ao equilíbrio. Note que o termo  $f(\bar{h}, \bar{v})$  da igualdade é nulo, pois por definição de ponto de equilíbrio do sistema dinâmico definido pela equação (1.10) temos  $\dot{h} = f(\bar{h}, \bar{v}) = 0$ . Como  $h = x + \bar{h}$  temos  $\dot{x} = \dot{h}$  pois  $\bar{h}$  é constante. De forma similar podemos linearizar a equação que define o vetor de medidas do sistema. Por exemplo, se denotarmos o vetor de medidas pela função  $\eta(h, v)$  a linearização desta é dada por  $\eta \approx \eta(\bar{h}, \bar{v}) + J_{(\eta,h)}(h - \bar{h}) + J_{(\eta,v)}(v - \bar{v})$ . Assim o sistema linearizado fica

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad \begin{matrix} x = h - \bar{h} \\ u = v - \bar{v} \\ y = \eta - \bar{\eta} \end{matrix} \quad \begin{matrix} A = J_{(f,h)} \\ B = J_{(f,v)} \\ C = J_{(\eta,h)} \\ D = J_{(\eta,v)} \end{matrix} \quad (1.11)$$

onde  $y = \eta - \bar{\eta}$  é a variação do sinal medido em relação ao seu valor no equilíbrio  $\bar{\eta} = \eta(\bar{h}, \bar{v})$ . A análise da estabilidade do sistema linearizado em torno de  $\bar{h}$  é feita olhando-se para os autovalores de  $J_{(f,h)}$ .

É importante salientar que o modelo linearizado é fruto de uma aproximação e que esta aproximação pode ser grosseira para trajetórias de estado não muito próximas do ponto de equilíbrio usado na linearização. Note que a estabilidade do sistema linear implica que na ausência de sinais externos, i.e.  $u = 0$ , o estado converge para a origem em regime permanente. Logo, para pequenas flutuações do ponto de equilíbrio provocadas por sinais externos, a estabilidade do sistema linearizado é uma garantia de que o estado do sistema não linear (sistema real) retorna ao equilíbrio usado na linearização quando os sinais externos cessarem. Observe que  $x = 0, v = 0$  implicam  $h = \bar{h}$  e  $v = \bar{v}$ .

Por exemplo, o sistema de 4 tanques (1.2) linearizado no ponto de equilíbrio  $\bar{h} = [\bar{h}_1 \ \cdots \ \bar{h}_4]'$ ,  $\bar{v} = [\bar{v}_1 \ \bar{v}_2]'$  é dado por (1.11) com

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 & \frac{A_3}{A_1 T_3} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{T_4} & 0 & \frac{A_4}{A_2 T_4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{T_4} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} k_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_c & 0 & 0 \end{bmatrix}, D = 0 \quad (1.12)$$

onde  $T_i$  são as constantes de tempo do sistema dadas por

$$T_i = \frac{A_i}{a_i} \sqrt{\frac{2\bar{h}_i}{g}} \quad i = 1, \dots, 4 \quad (1.13)$$

É importante observar que as constantes de tempo, e portanto as matrizes do modelo linearizado, são em geral diferentes para cada ponto de equilíbrio  $(\bar{h}, \bar{v})$  escolhido.

**Exercício 1.1** As condições para obtenção do modelo linear estão satisfeitas para  $\gamma_1 = 1$  ? Existe alguma explicação física para esse resultado?

### 1.3.1 Propriedades estruturais

Dentre as propriedades de um sistema linear de malha aberta, duas delas merecem destaque: controlabilidade e observabilidade. A primeira está associada ao número e localização dos atuadores do sistema enquanto a segunda ao número e localização dos sensores. Quando a estrutura do sistema apresenta essas propriedades temos garantia de poder projetar um controlador de tal forma que os pólos da malha fechada possam ser escolhidos de forma arbitrária pelo projetista.

Os conceitos de controlabilidade e observabilidade foram introduzidos por Kalman em 1960 (T.Kailath, 1980).

**Definição 1.1 (Controlabilidade)** *Um sistema é controlável num instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle sem restrições em seus elementos, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado em um intervalo finito de tempo.*

A controlabilidade do sistema (1.11) pode ser testada verificando se o posto da matriz de controlabilidade  $M_c$  abaixo é igual à dimensão do vetor de estado do sistema (T.Kailath, 1980).

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

Quando a matriz de controlabilidade possui posto  $r$ , inferior ao número de variáveis de estado, então existe uma transformação de similaridade  $T$  tal que

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} \\ 0 & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = TB = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1}, \quad \tilde{D} = D$$

onde  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e o par  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{B}_1)$  é controlável (Mackenroth, 2004).

**Definição 1.2 (Estabilizabilidade)** *O sistema é dito ser estabilizável quando os autovalores não controláveis são estáveis, isto é os autovalores de  $\tilde{A}_{22}$  possuem parte real negativa.*

**Definição 1.3 (Observabilidade)** *O sistema (1.11) é observável se todo estado inicial  $x(t_0)$  puder ser determinado a partir do conhecimento de  $y(t), u(t)$  durante um intervalo de tempo finito,  $t_0 \leq t \leq t_1$ .*

A observabilidade do sistema (1.11) pode ser testada verificando se o posto da matriz de observabilidade  $M_o$  abaixo é igual à dimensão do vetor de estado do sistema (T.Kailath, 1980).

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Quando a matriz de observabilidade possui posto  $r$ , inferior ao número de variáveis de estado, então existe uma transformação de similaridade  $T$  tal que

$$\tilde{A} = TAT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{C} = CT^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = TB, \quad \tilde{D} = D$$

onde  $\tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  e o par  $(\tilde{A}_{11}, \tilde{C}_1)$  é observável (Mackenroth, 2004).

**Definição 1.4 (Detectabilidade)** *O sistema é dito ser detectável quando os autovalores não observáveis são estáveis, isto é os autovalores de  $\tilde{A}_{22}$  possuem parte real negativa.*

### 1.3.2 Pólos e zeros

Como as matrizes do modelo linearizado são constantes, i.e. o sistema é linear invariante no tempo, podemos utilizar a transformada de Laplace para obter a matriz de transferência do sistema. Para isso basta supor condições iniciais nulas e a partir de (1.11) obtemos

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad , \quad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (1.16)$$

Para um sistema onde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  o vetor de saída,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  o sinal externo de entrada, teremos uma matriz de transferência  $G(s) \in \mathbb{C}^{n_y \times n_u}$ . Por linearidade concluímos que cada elemento  $G_{ij}(s)$  de  $G(s)$  representa a função de transferência da entrada  $j$  para a saída  $i$  do sistema.

**Definição 1.5 (Pólos)** *Um número complexo  $s$  é um pólo de  $G(s)$  se ele é um pólo de pelo menos uma das funções  $G_{ij}(s)$ .*

Todo pólo de  $G(s)$  é um autovalor de  $A$ , porém o contrário não é verdade em geral pois cancelamentos pólos/zeros podem ocorrer nas funções  $G_{ij}(s)$ . Podemos mostrar as seguintes relações (Mackenroth, 2004):

**Teorema 1.1** *Seja  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ . Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- a** *Se  $(A, B)$  é controlável e  $(A, C)$  observável então todos os autovalores de  $A$  são pólos de  $G(s)$ .*
- b** *Se  $(A, B)$  é estabilizável e  $(A, C)$  detectável então todos os autovalores de  $A$  localizados no semiplano complexo esquerdo são pólos de  $G(s)$ .*
- c** *Todos os autovalores de  $A$  que não são pólos de  $G(s)$  ou são não controláveis ou não observáveis.*

Para definir zeros de um sistema multivariável note que  $s_0 : G(s_0) = 0$  não é uma definição adequada pois dificilmente encontraríamos um valor de  $s_0$  com tal propriedade.

Assim precisaremos da seguinte definição (Mackenroth, 2004).

**Definição 1.6 (Posto normal)** Definimos posto normal de  $G(s)$  o maior posto de  $G(s)$  qualquer que seja o complexo  $s$ .

Por exemplo o posto normal de

$$G(s) = \frac{1}{-s+1} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ s+2 & 2 \end{bmatrix}$$

é 2, porém  $\text{posto}(G(0)) = 1$ . Assim o posto normal é o posto para a maior parte dos valores de  $s$ , excluindo-se apenas alguns valores para os quais existe redução do posto. Dizemos que  $G(s)$  possui posto normal completo se o posto normal de  $G(s)$  coincide com o número de linhas ou colunas (o que for menor), isto é se as linhas ou colunas de  $G(s)$  forem linearmente independentes para a maior parte dos valores de  $s$ .

**Definição 1.7 (Zeros de transmissão)** Seja  $G(s) \in \mathbb{C}^{r \times q}$  uma matriz de posto normal completo. Dizemos que  $s_0$  é um zero de transmissão de  $G(s)$  se uma das condições abaixo está satisfeita:

- (i) Posto normal de  $G(s)$  é igual à  $q$  e existe um vetor  $v \in \mathbb{C}^q$  tal que  $G(s_0)v = 0$ .
- (ii) Posto normal de  $G(s)$  é igual à  $r$  e existe um vetor  $w \in \mathbb{C}^r$  tal que  $w^*G(s_0) = 0$ .
- (iii)  $G(s)$  é quadrada e  $\det(G(s_0)) = 0$ .

Uma forma alternativa de se definir zeros de um sistema multivariável decorre diretamente de (1.11). Tomando a transformada de Laplace vemos que  $(sI - A)X(s) - BU(s) = 0$  e  $CX(s) + DU(s) = 0$  onde  $X(s), U(s)$  são as transformadas de  $x(t), u(t)$  respectivamente. De forma compacta temos

$$R(s) \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = 0, \text{ onde } R(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

**Definição 1.8 (Zero invariante)** Um número complexo  $s_0$  é chamado de zero invariante de uma representação de estados se  $\text{posto}(R(s_0))$  é inferior ao posto normal de  $R(s)$ .

Todo autovalor de  $A$  não controlável e todo não observável são zeros invariantes do sistema.

Num sistema controlável e observável os zeros invariantes e os zeros de transmissão coincidem.

Para  $G(s)$  quadrada e inversível todo zero invariante é um autovalor de  $A - BD^{-1}C$  e todo zero de transmissão é um pólo de  $G(s)^{-1}$ .

Por exemplo, o sistema (1.11) com as matrizes (1.12) possui a seguinte seguinte matriz de transferência

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 c_1}{1+sT_1} & \frac{(1-\gamma_2)c_1}{(1+sT_1)(1+sT_3)} \\ \frac{(1-\gamma_1)c_2}{(1+sT_2)(1+sT_4)} & \frac{\gamma_2 c_2}{1+sT_2} \end{bmatrix} \quad (1.17)$$



onde  $c_1 = T_1 k_1 k_c / A_1$  e  $c_2 = T_2 k_2 k_c / A_2$  e os pólos e zeros são dados por

$$\det(G(s)) = \frac{c_1 c_2}{\gamma_1 \gamma_2} \frac{(1 + sT_3)(1 + sT_4) - \beta}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)(1 + sT_4)} \quad (1.18)$$

onde  $\beta = (1 - \gamma_1)(1 - \gamma_2)/\gamma_1 \gamma_2$ . Veja que os pólos do sistema são os autovalores da matriz  $A$  e os pólos de cada um dos elementos da matriz  $G(s)$  são um subconjunto dos autovalores de  $A$ . Note ainda que que nenhum dos elementos de  $G(s)$  possui zeros, porém o sistema multivariável possui dois zeros que são as raízes da equação  $(1 + sT_3)(1 + sT_4) - \beta = 0$ . Através do lugar da raízes podemos verificar que o sistema será de fase não-mínima, isto é, pelo menos um dos zeros estará no semiplano direito, se  $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 1$  e será de fase mínima (nenhum zero no semiplano direito) se  $1 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$ . É interessante observar que a parcela da vazão da bomba 1 jogada no tanque 1 é  $\gamma_1 k_1 v_v$  e da bomba 2 para tanque 2 é  $\gamma_2 k_2 v_2$ . Assim quanto maior for a soma  $\gamma_1 + \gamma_2$  mais efetiva será a influência das bombas no controle dos níveis dos tanques 1 e 2. Daí concluímos que se o sistema for de fase não-mínima a influência das bombas no controle de nível dos tanques 1 e 2 será reduzida quando comparada com a situação de fase mínima. Em geral, a localização de zeros no semi-plano próximo ao eixo imaginário ou fora do semi-plano esquerdo limita o desempenho que podemos obter de um sistemas de controle.

## 1.4 Análise de malha aberta

### 1.4.1 Estabilidade

### 1.4.2 Desempenho

### 1.4.3 Robustez

Incertezas paramétricas

Dinâmicas não modeladas

## 1.5 Especificação de desempenho desejado

Limitação dos atuadores, imprecisão dos medidores (ruídos), conhecimento impreciso do sistema a ser controlado (incertezas, características dos ruídos e perturbações), limitação dos métodos de projeto, tipos de controladores adequados ao problema.

## 1.6 Projeto de controladores

## 1.7 Análise de malha fechada

Satisfação do desempenho desejado, respeito às limitações do sistema (atuadores e estado), simulações.

## 1.8 Exemplos de problemas de controle



## Capítulo 2

# Sistemas Dinâmicos Multivariáveis

Neste capítulo, apresenta-se de forma resumida alguns conceitos importantes sobre a representação matemática de sistemas dinâmicos multivariáveis. Vários conceitos utilizados na teoria clássica de controle para a análise e projeto de controladores para sistemas SISO (uma entrada e uma saída), não podem ser aplicados de forma direta a sistemas MIMO (várias entradas e várias saídas), pois geralmente existe um forte acoplamento entre os vários canais entrada-saída. Outro fator a ser levado em consideração na obtenção de um modelo matemático que descreva o comportamento dinâmico de um sistema é a possibilidade da existência de incertezas em alguns parâmetros do modelo. Estas incertezas podem existir devido aos mais diversos fatores, como imprecisão de alguns componentes do sistema, erros de linearização, entre outros. Esses são os aspectos a serem abordados nesse capítulo.

### 2.1 Descrição de Sistemas Dinâmicos

Os sistemas dinâmicos lineares e invariantes no tempo pela seguinte representação por variáveis de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema,  $x(0)$  é a condição inicial,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  são as entradas do sistema,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  são as saídas do sistema, e  $A, B, C, D$  são matrizes constantes com elementos reais de dimensões apropriadas.

Um sistema com  $n_u = n_y = 1$  é chamado de SISO, e em caso contrário de MIMO. Pode-se obter uma representação do ponto de vista entrada-saída, através da Matriz Função de Transferência do sistema. Desta forma, ao aplicar-se a transformada de Laplace na representação (2.1), supondo por simplicidade que  $x_0 = 0$ , obtém-se a seguinte descrição entrada-saída para o mesmo sistema dinâmico:

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = C(sI_n - A)^{-1}B + D \quad (2.2)$$

onde  $Y(s)$  e  $U(s)$  são as transformadas de Laplace dos sinais  $y(t)$  e  $u(t)$ , respectivamente, e  $G(s)$  é a matriz função de transferência do sistema cujos elementos são funções racionais na variável complexa  $s$ .

A análise de sistemas MIMO com base na localização de pólos e zeros é muito mais complexa do que no caso SISO. Para exemplificar, os pólos e zeros de um sistema onde  $G(s)$  é quadrada (número de entradas e saídas são iguais) são determinados a partir do denominador e numerador de  $\det G(s)$ , isto é, eles são determinados a partir das seguintes equações:

$$D(s) = 0, \quad N(s) = 0, \quad \det G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

Uma das grandes diferenças entre os sistemas SISO e MIMO é a interpretação física dos zeros multivariáveis, que dependem não somente da sua posição, mas também de sua direção, para maiores detalhes o leitor deve se referir a referência (?).

## 2.2 Sistemas Incertos

Em muitas situações práticas não é possível e/ou conveniente representar com precisão todas as dinâmicas de um sistema. Flutuações em parâmetros e dinâmicas muito rápidas são com frequência representadas como incertezas do modelo. No primeiro caso, a idéia é representar o parâmetro físico por um parâmetro incerto cujo valor não conhecemos precisamente, mas sabemos que se encontra em um intervalo conhecido. No segundo caso, as dinâmicas rápidas negligenciadas no modelo do sistema são representadas por um ou mais operadores não conhecidos precisamente, mas com ganho limitado por uma constante com valor conhecido. Em ambos os casos, parâmetros e operadores, os elementos parcialmente conhecidos recebem o nome de incerteza e o modelo do sistema que contém algum desses elementos é chamado de sistema incerto.

Desta forma, os modelos matemáticos utilizados para descrever a dinâmica de sistemas incertos representam de forma simplificada os fenômenos que dificilmente poderiam ser representados exatamente, seja porque o modelo completo seria muito complexo, ou ainda pela dificuldade de se conhecer e obter modelos para todos os fenômenos que ocorrem na prática. Deve-se salientar que geralmente modelos dinâmicos mais simples facilitam a fase de síntese de controladores e filtros, além de possibilitar a análise de estabilidade e desempenho utilizando métodos mais eficientes do ponto de vista numérico.

Os sistemas incertos podem ser variantes ou invariantes no tempo, dependendo se os elementos incertos variam ou não com o tempo. Por exemplo, um resistor pode não ter suas características alteradas com o tempo mas tipicamente o valor da sua resistência não é conhecido de forma precisa. Sabemos apenas que o valor se encontra dentro de uma determinada faixa em torno do valor nominal. Nesse caso, considera-se que o sistema é incerto e invariante no tempo. Caso as características do resistor mudem com o tempo, então o sistema incerto é considerado como variante no tempo. A seguir, nesse capítulo, descreve-se sucintamente algumas das mais utilizadas técnicas na descrição matemática de incertezas e suas implicações.

## 2.3 Modelos Matemáticos Para Sistemas Incertos

Todo modelo matemático pode ser considerado na prática como uma aproximação da dinâmica do processo físico real. Conseqüentemente, o modelo matemático obtido pode apresentar diferentes tipos de incertezas, decorrentes das dinâmicas não modeladas, variações paramétricas, presença de ruídos, ou até mesmo erros decorrentes da etapa de linearização, entre outros fatores. Dependendo da sua origem e de como elas são descritas matematicamente, as incertezas podem ser classificadas como estruturadas, não estruturadas, paramétricas ou não paramétricas.

Obviamente, é de grande importância que as incertezas sejam levadas em conta tanto na análise como síntese de controladores para sistema sujeitos a variações paramétricas. Para tal, é conveniente representar o modelo físico por um sistema incerto, constituído do modelo matemático (sistema nominal) mais incertezas em torno deste, sendo a análise ou projeto feita em torno do sistema incerto.

Várias dificuldades surgem ao se trabalhar com sistemas incertos. Uma das principais é como modelar e descrever as incertezas no problema. Incertezas descritas de forma genérica podem acarretar restrições na busca de soluções. A este processo de busca de solução de um problema de controle envolvendo o sistema nominal e uma família de incertezas em torno dele, chama-se de *Controle Robusto*. No Controle Robusto busca-se também minimizar o efeito sobre certas variáveis do sistema devido a perturbações externas ao sistema, como ruídos, mudanças de temperatura, rajadas de vento, etc. Um esquema geral de um sistema de Controle Robusto pode ser visto na Figura 2.1.

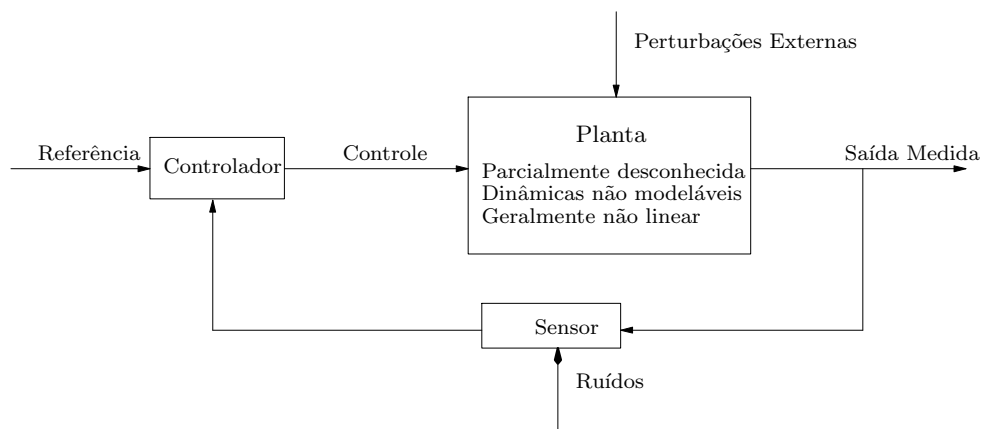


Figura 2.1: Diagrama de Blocos de um sistema de Controle Robusto

Logo a questão chave em Controle Robusto é minimizar a influência das incertezas e das perturbações que atuam no sistema. Este problema pode ser dividido em duas partes: um problema de estabilização robusta e outro de desempenho robusto. No primeiro caso, busca-se manter o sistema estável para uma dada classe de incertezas e, no segundo, minimizar a influência das perturbações externas em relação ao critério de desempenho escolhido.

## 2.4 Exemplos de Sistemas com Incertezas

Para ilustrar, como os sistemas dinâmicos podem ser modelados de maneira a representar incertezas e perturbações, apresentaremos a seguir dois exemplos. No primeiro, descreve-se matematicamente um sistema para o controle de posição em um pêndulo invertido, e no segundo descreve-se o comportamento de um sistema para controlar a posição longitudinal de um avião.

### 2.4.1 Pêndulo Invertido

O sistema mostrado na Figura 2.2 é constituído de um pêndulo invertido de massa uniforme  $m$  e de comprimento  $2l$  e de um carrinho de massa  $M$ . O movimento do sistema é definido pela posição  $z(t)$  do carrinho e o ângulo  $\theta(t)$  entre o pêndulo e o eixo vertical.

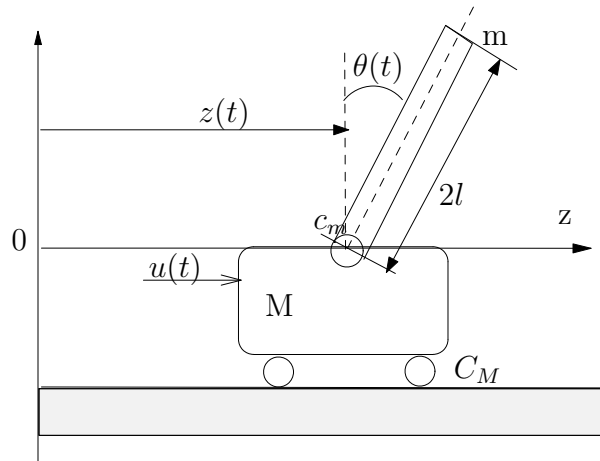


Figura 2.2: Pêndulo invertido

Na modelagem matemática deste sistema considera-se a presença de atrito entre o pêndulo e o carrinho  $c_m$ , na roda do carrinho  $C_M$ , e  $J_M$  que é momento de inércia. Para evitar a formulação não linear do sistema, vamos simplificá-la considerando que o ângulo  $\theta$  é pequeno tal que:

$$\cos(\theta) \cong 1 \quad \sin(\theta) \cong \theta \quad \dot{\theta}^2 \theta \cong 0$$

Considere que os estados do sistema são

$$x_p := [z, \theta, \dot{z}, \dot{\theta}]'$$

e a representação por variáveis de estados do sistema linearizado:

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix} x_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} x_p(t).\end{aligned}\quad (2.3)$$

onde  $x_p(t)$  é o vetor de estados,  $u(t)$  o vetor das variáveis de controle e  $y(t)$  o vetor de saída, e as variáveis escalares são dadas por

$$\begin{aligned}a_1 &= -\frac{1}{d}m^2gl^2, & a_2 &= -\frac{1}{d}c_M(J_m + ml^2) \\ a_3 &= \frac{1}{d}c_m l, & a_4 &= \frac{1}{d}mgl(M + m) \\ a_5 &= \frac{1}{d}c_M ml, & a_6 &= -\frac{1}{d}c_m(M + m) \\ b_1 &= \frac{1}{d}c_1(J_m + ml^2), & b_2 &= -\frac{1}{d}c_1 ml \\ d &= (M + m)J_m + mMl^2,\end{aligned}\quad (2.4)$$

Um conjunto de valores numéricos usado neste sistema pode ser encontrado, por exemplo em (?).

Na prática, os valores dos coeficientes de atrito  $c_m$  e  $C_M$  são incertos, ou seja tem-se apenas uma noção da faixa de valores às quais eles podem assumir. Desta forma, pode-se assumir que estes dois parâmetros são incertos com a seguinte variação :

$$c_m \cong (1 + \delta_1)c_m \text{ e } C_M \cong (1 + \delta_2)C_M$$

Com isso o sistema (2.3) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\dot{x}_p(t) &= A(\delta)x_p(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx_p(t)\end{aligned}\quad (2.5)$$

onde

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & (1 + \delta_1)a_2 & (1 + \delta_2)a_3 \\ 0 & a_4 & (1 + \delta_1)a_5 & (1 + \delta_2)a_6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (2.6)$$

## 2.4.2 Controle de Posição Longitudinal de uma Aeronave

O avião F-8 é um projeto antigo que tem sido utilizado pela NASA no seu projeto de pesquisa “*fly-by-wire*”, (?). Assumindo que a aeronave esteja voando a uma altitude constante em equilíbrio, podemos linearizar as equações aerodinâmicas não lineares. Desta forma, desacoplamos a dinâmica longitudinal da lateral, (Friedland, 1986).

Pode-se caracterizar a dinâmica longitudinal da aeronave pela seguinte escolha de variáveis , veja detalhes na figura (2.3).



- $v(t)$  é a velocidade horizontal;
- $\theta(t)$  é o ângulo de inclinação com a horizontal ( “*pitch angle*”);
- $q(t)$  é a taxa de variação de  $\theta(t)$ ;
- $\alpha(t)$  é o ângulo de ataque;
- $\beta(t) = \theta(t) - \alpha(t)$  é o ângulo de voo.

Para controlar o movimento longitudinal existem os “*elevators*”,  $u_e(t)$ , e os “*flap-erons*”,  $u_f(t)$ , que são iguais aos “*elevators*” exceto pelo movimento na mesma direção.

As variáveis mensuráveis são os ângulos de inclinação horizontal e de vôo  $y(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & \beta(t) \end{bmatrix}'$ .



Figura 2.3: Definição das Variáveis para a dinâmica longitudinal para o F-8

As rajadas de vento,  $w(t)$ , provocam distúrbios no movimento longitudinal do avião, afetando primeiro o ângulo de ataque  $\alpha(t)$ .

Outro problema a ser considerado é a dinâmica não modelada associada a flexibilidade da estrutura do avião ocasionando incertezas no modelo do movimento longitudinal do avião.

Considerando o seguinte vetor de estados

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) & \beta(t) & q(t) & v(t) \end{bmatrix}'$$

podemos modelar as equações linearizadas do movimento longitudinal do avião F-8 pela seguinte representação por variáveis de estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\delta) x(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ y(t) = C x(t) \end{cases} \quad (2.7)$$

com  $u(t) = \begin{bmatrix} u_e(t) & u_f(t) \end{bmatrix}'$  e

$$A(\delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ (1.5 + 0.1\delta) & -(1.5 + 0.5\delta) & 0 & 0.0057 \\ -(12 + 1\delta) & (12 + 1\delta) & -(0.6 + 0.06\delta) & -0.0344 \\ -(0.8520 + 0.1\delta) & (0.29 + 0.1\delta) & 0 & -0.014 \end{bmatrix}$$

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 1.71885 & -13.7508 & -0.332311 \end{bmatrix}' ; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.16 & 0.8 \\ -19 & -3 \\ -0.015 & -0.0087 \end{bmatrix}$$

A variação paramétrica  $\delta$  e sua taxa de variação ao longo do tempo,  $\dot{\delta}$ , estão limitadas as seguintes regiões:  $\delta \in \{-1, 1\}$  e  $\dot{\delta} \in \{-10, 10\}$ .

O objetivo de controle do sistema é diminuir os efeitos da perturbação do vento, apesar das variações no parâmetro  $\delta$  e das restrições nas entradas de controle (saturação):  $|u_e(t)| \leq \bar{u}_e$  e  $|u_f(t)| \leq \bar{u}_f$ .

## 2.5 Descrição das incertezas

Um grande problema ao se trabalhar com sistemas incertos é como tratar a incerteza na formulação final do problema, pois dependendo do tipo de incerteza, pode-se inserir mais restrição na busca de solução do problema.

Uma primeira alternativa seria descrever os possíveis valores que a matriz  $A(\delta)$  pode assumir através de uma combinação convexa dos valores extremos assumidos pelas incertezas. Supondo que:

$$\delta \in \mathcal{B}_\delta = \{ \delta_i : |\delta_i| \leq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, q \}$$

onde  $\mathcal{B}_\delta$  representa um politopo<sup>1</sup> com  $2^q$  vértices, onde  $q$  é o número de incertezas no problema.

Para o exemplo suponha que  $-\alpha_1 < \delta_1 < \alpha_1$  e  $-\alpha_2 < \delta_2 < \alpha_2$  e

$$A(\delta) = A_1 q_1 + A_2 q_2 + A_3 q_3 + A_4 q_4$$

Com  $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 1$  e  $q_i \geq 0$ , onde as matrizes  $A_i$  são construídas nos vértices

<sup>1</sup>Politopo é um conjunto convexo fechado, que pode ser representado pela combinação convexa dos vértices, ou por inequações matriciais, para mais detalhes sobre politopo veja (?)

do Politopo, mostrado na Figura 2.4.

$$\begin{aligned}
 A_1(\alpha_1, \alpha_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & (1 + \alpha_1)a_2 & (1 + \alpha_2)a_3 \\ 0 & a_4 & (1 + \alpha_1)a_5 & (1 + \alpha_2)a_6 \end{bmatrix} \\
 A_2(-\alpha_1, \alpha_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & (1 - \alpha_1)a_2 & (1 + \alpha_2)a_3 \\ 0 & a_4 & (1 - \alpha_1)a_5 & (1 + \alpha_2)a_6 \end{bmatrix} \\
 A_3(\alpha_1, -\alpha_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & (1 + \alpha_1)a_2 & (1 - \alpha_2)a_3 \\ 0 & a_4 & (1 + \alpha_1)a_5 & (1 - \alpha_2)a_6 \end{bmatrix} \\
 A_4(-\alpha_1, -\alpha_2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & (1 - \alpha_1)a_2 & (1 - \alpha_2)a_3 \\ 0 & a_4 & (1 - \alpha_1)a_5 & (1 - \alpha_2)a_6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

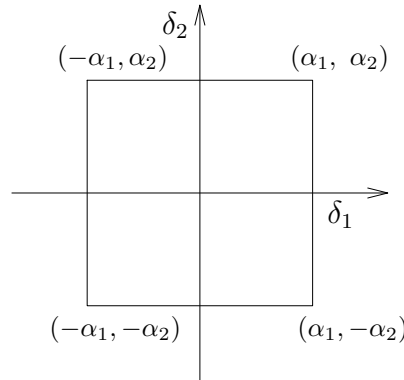


Figura 2.4: Representação de um politopo

Este tipo de abordagem para descrever as incertezas é conhecido como abordagem politópica e formalmente é enunciada a seguir.

**Definição 2.1** *A classe de matrizes  $\mathcal{A}(\delta)$  com incertezas na forma politópica pode ser descrita pelo conjunto*

$$\mathcal{A} = \left\{ A : A = \sum_{i=1}^j q_i A_i, \quad \sum_{i=1}^j q_i = 1, q_i \geq 0 \right\} \quad (2.8)$$

onde o conjunto  $\mathcal{A}$  é convexo, fechado e as matrizes  $A_i$  são conhecidas.

□ □ □

Uma característica importante deste tipo de abordagem para descrever as incertezas é a convexidade do conjunto resultante, isto é, tem-se pela propriedade de convexidade que se as condições estão satisfeitas nos vértices então garante-se que todas as condições também estarão satisfeitas no interior desta região. Entretanto, surge o problema da explosão exponencial das condições a serem testadas, pois para testarmos, por exemplo, as condições para um sistema com 3 elementos incertos, teremos que verificar  $2^3$  vértices, ou seja, tem-se que testar as condições 8 vezes.

Outra forma de declarar as incertezas, é representar o sistema por *LFT*<sup>2</sup> (Linear Fractional Transformation).

Basicamente, busca-se representar o sistema incerto através de um sistema invariante no tempo interconectado a um bloco incerto, como no sistema realimentado mostrado na Figura 2.5.

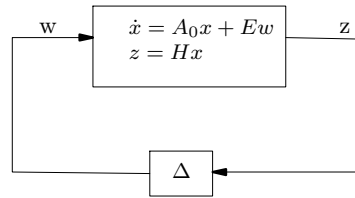


Figura 2.5: Sistema LFT

Assim pode-se descrever o sistema (2.5) não forçado, ou seja, somente a parte incerta, como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_0x + Ew \\ z &= Hx \\ w &= \Delta z \end{aligned} \tag{2.9}$$

onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 & a_6 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_2 & a_3 \\ a_5 & a_6 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{bmatrix}$$

Em geral, o bloco incerto  $\Delta$  é uma matriz bloco diagonal, limitada em norma. Com isso a incerteza na representação LFT é vista como uma restrição<sup>3</sup>.

Note que esta forma de representação é equivalente a redefinirmos a matriz incerta  $A(\delta)$  da seguinte forma:  $A(\delta) = A_0 + E\Delta H$ . Desta forma pode-se apresentar a seguinte definição

<sup>2</sup>Mais detalhes sobre sistemas na forma LFT podem ser obtidos em (Doyle et al., 1991; ??; ?).

<sup>3</sup>Veja exemplo (??).

**Definição 2.2** A classe de matrizes  $\mathcal{A}(\delta)$  com incerteza limitada em norma pode ser descrita pelo conjunto

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Delta) = \{A : A = A_0 + E\Delta H\} \quad (2.10)$$

onde  $\Delta = \text{diag}(I_i \delta_i) \quad i : 1, \dots, q$  e  $\|\Delta\| \leq \alpha$ .

□ □ □

## 2.6 Exercícios

- i. No exemplo (1) o efeito das perturbações externas não foi modelado. Mas na prática sabe-se que o sistema sempre sofre algum tipo de perturbação. Considere então que o sistema está sujeito a influência de uma rajada de vento, na base do carrinho de direção contrária à força aplicada e de intensidade de força  $b_w$ . Insira no modelo matemático esta perturbação.
- ii. Considerando o sistema do exemplo (2):
  - Obtenha a representação politópica.
  - Obtenha a descrição na forma **LFT**, abaixo descrita, com incerteza limitada em norma;
 
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_p p + B_u u + B_w w \\ q = C_q x + D_{qp} p + D_{qu} u + D_{qw} w \\ y = C_y x + D_{yp} p + D_{yw} w \\ p = \delta q, \quad |\delta| \leq \sigma \end{cases}$$
  - O modelo (2.7) é uma aproximação linear em torno do ponto de equilíbrio do sistema não linear real. Como poderíamos incluir neste sistema os erros entre o modelo linear e o não linear.
- iii. Para os artigos (??; ??; ??; ??; ??; ??; ??) analise os sistemas a serem controlados com relação aos seguintes itens:
  - Modelo Linear ou Não Linear;
  - Perturbações;
  - Incertezas;
  - Restrições no Controle;
  - Outras fontes de erro.
- iv. Considere o seguinte sistema mecânico, visto na figura (2.6).  
A equação dinâmica de movimento do sistema pode ser descrita por:

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{F}{m}$$

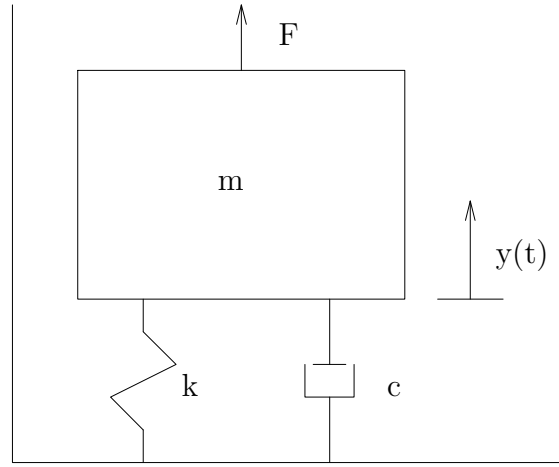


Figura 2.6: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

onde  $y$  é o deslocamento vertical,  $m$  é a massa do bloco,  $k$  é a constante da mola,  $c$  é o coeficiente de amortecimento e  $F$  é a força externa aplicada ao bloco.

Suponha que os parâmetros físicos  $k$ ,  $c$ , não são conhecidos exatamente, mas acredita-se pertencerem a um intervalo conhecido. Em particular, o coeficiente de amortecimento  $c$  encontra-se entre  $\pm 20\%$  do seu valor nominal  $c_0$ , e a constante da mola está entre  $\pm 30\%$  do seu valor nominal  $k_0$ . Introduzindo variáveis paramétricas  $\delta_c, \delta_k \in \mathcal{B}_\delta = \{-1, 1\}$ , podemos redefinir  $c$ ,  $k$  como

$$c = c_0 (1 + 0.2\delta_c), \quad k = k_0 (1 + 0.3\delta_k)$$

Para o sistema acima, determine as representações politópica e na forma LFT. Considere a seguinte definição de variáveis:  $x_1 = y$ ,  $x_2 = \dot{y}$ ,  $u = F$ ,  $\delta_c = \delta_1$  e  $\delta_k = \delta_2$ .

## 2.7 Referências Complementares

Além das referências já citadas, pode-se buscar mais informações a respeito de controle Robusto e sistemas com incertezas nos livros (Green and Limebeer, 1995; ?; Zhou, 1998), nas dissertações de mestrado (?; ?; Crusius, 1996) e nos exames de qualificação (de Oliveira, 1998; ?).



# Capítulo 3

## Estabilidade e Desempenho

### 3.1 Estabilidade exponencial

Estabilidade é o desempenho mínimo de todo sistema de controle. Por esse motivo a análise de estabilidade é o ponto de partida para o projeto de sistemas de controle.

Existem várias definições que nos permitem caracterizar a estabilidade de um sistema linear. Em linhas gerais, a estabilidade de sistemas pode ser caracterizada a partir da resposta de estado zero ou de entrada zero. A primeira explora o fato que todo sistema estável, com condições iniciais nulas, produz saídas limitadas sempre que as entradas forem limitadas. A segunda explora o fato que todo sistema estável sem excitação externa possui um transitório que desaparece qualquer que seja a condição inicial que lhe deu origem. Para sistemas lineares invariantes no tempo essas duas formas distintas de definir estabilidade são na realidade equivalentes aos critérios clássicos baseados na localização dos pólos do sistema. As definições que iremos utilizar ao longo de todo esse documento se baseiam na resposta de entrada nula.

Para caracterizar o conceito de estabilidade exponencial de sistemas algumas definições e resultados preliminares se fazem necessários.

**Definição 3.1** *Seja o sistema*

$$\dot{x} = f(t, x) \quad f(t, 0) = 0 \quad \forall t \in [0, \infty) \quad (3.1)$$

onde  $f : [0, \infty) \times \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$  é contínua por partes em  $t$  e localmente Lipschitz em  $x$ , sendo  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  uma dada vizinhança da origem. A origem é um ponto de equilíbrio exponencialmente estável se existem constantes positivas  $c, k, \lambda$  tais que

$$\|x(t)\| \leq k\|x(t_0)\|e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \forall \|x(t_0)\| < c \quad (3.2)$$

e globalmente exponencialmente estável se isto ocorre para toda condição inicial  $x(t_0)$  finita.  $\square$

Podemos testar se a origem de um sistema é exponencialmente estável através do seguinte resultado.



**Teorema 3.1** *Considere o sistema (3.1) e seja  $V : [0, \infty) \times \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável tal que*

$$k_1 \|x\|^a \leq V(t, x) \leq k_2 \|x\|^a \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) \leq -k_3 \|x\|^a \quad (3.4)$$

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall t \in [0, \infty)$$

onde  $a, k_i$  são constantes positivas. Então o equilíbrio  $x = 0$  de (3.1) é exponencialmente estável. Se além disso,  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  então a origem é globalmente exponencialmente estável.

**Prova:** Observe que

$$\dot{V}(t, x) \leq -k_3 \|x\|^a \leq -\frac{k_3}{k_2} V(t, x) \quad (3.5)$$

de onde concluímos pelo Lema da Comparação (Lemma 3.4 (Khalil, 1996)) que

$$V(t, x) \leq e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} V(t_0, x(t_0)) \quad (3.6)$$

Logo

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq (V(t, x(t))/k_1)^{\frac{1}{a}} \leq \left( e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} V(t_0, x(t_0))/k_1 \right)^{\frac{1}{a}} \\ &\leq \left( e^{-\frac{k_3}{k_2}(t-t_0)} k_2 \|x(t_0)\|^a / k_1 \right)^{\frac{1}{a}} = (k_2/k_1)^{\frac{1}{a}} \|x(t_0)\| e^{-\frac{k_3}{a k_2}(t-t_0)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

que mostra a estabilidade exponencial. Para estabilidade global basta que  $x(t_0)$  seja qualquer em  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$ .  $\square$

O teorema acima caracteriza a estabilidade de um sistema através de uma função  $V(t, x)$  que deve satisfazer algumas condições. Essa função, que recebe o nome de função de Lyapunov, deve ser determinada pelo projetista, porém o teorema não fornece nenhuma pista de como determiná-la. Para algumas classes de sistemas, como sistemas lineares por exemplo, já se conhece técnicas de determinação de funções de Lyapunov muito eficientes. Este é o tema das próximas duas seções. Antes porém, alguns resultados preliminares se fazem necessários, pois o método utiliza um tipo especial de função quadrática conhecida como forma quadrática.

### Formas Quadráticas

Uma forma quadrática é toda função  $V : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$  do tipo:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad , \quad a_{ij} = a_{ji}$$

onde  $x_i, x_j$  são duas componentes quaisquer da variável vetorial  $x$  e  $a_{ij}$  são constantes. A condição  $a_{ij} = a_{ji}$  é simplesmente uma normalização e pode ser feita sem perda de generalidade. Veja no exemplo

$$\begin{aligned} V(x) &= 2x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_1 + 10x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 10x_2^2 \\ &= 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_1 + 10x_2^2 \end{aligned}$$

Assim, toda forma quadrática pode ser representada em termos matriciais através de uma matriz simétrica cujos elementos são as constantes  $a_{ij}$ . Ainda no exemplo acima temos

$$V(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x'Ax$$

e note que a matriz  $A$  é simétrica. A mesma normalização acima pode ser feita em termos matriciais. Retornando ao exemplo, defina

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad A = (B + B')/2, \quad \tilde{A} = (B - B')/2$$

e note que  $B = A + \tilde{A}$ . Como  $x'B'x$  é um escalar real temos  $x'B'x = (x'B'x)' = x'Bx$ . Logo temos

$$x'Bx = x'Ax + x'\tilde{A}x = x'Ax + (x'Bx - x'B'x)/2 = x'Ax$$

Em situações particulares, tipicamente quando representamos o sistema por sua função de transferência, podemos precisar trabalhar com formas quadráticas complexas. Quando  $a_{ij}$  são constantes complexas, basta trocar a relação  $a_{ij} = a_{ji}$  por  $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$ , onde  $\bar{a}_{ji}$  é o conjugado complexo de  $a_{ji}$ . Nesse caso a matriz  $A$  recebe o nome de hermitiana e satisfaz a relação  $A = \bar{A}' = A^*$  onde o símbolo  $A^*$  representa o transposto conjugado complexo de  $A$ .

Podemos mostrar as seguintes propriedades:

- i. Toda matriz simétrica possui autovalores reais;
- ii. A função  $v(x) = x'Px$  é positiva para todo  $x \neq 0$  se, e somente se, os autovalores da matriz  $P$  são todos positivos. Nesse caso, dizemos que  $v(x)$  é uma função positiva definida (notação:  $v(x) > 0$ ), e  $P$  é uma matriz positiva definida (notação:  $P > 0$ );

		Nomenclatura	
Sinal de $v(x)$	autovalores de $P$	Função $v(x)$	Matriz $P$
positivo para todo $x \neq 0$	todos positivos	positiva definida $v(x) > 0$	positiva definida $P > 0$
positivo ou nulo para todo $x \neq 0$	todos positivos ou nulos	positiva semi-definida $v(x) \geq 0$	positiva semi-definida $P \geq 0$
negativa para todo $x \neq 0$	todos negativos	negativa definida $v(x) < 0$	negativa definida $P < 0$
negativa ou nula para todo $x \neq 0$	todos negativos ou nulos	negativa semi-definida $v(x) \leq 0$	negativa semi-definida $P \leq 0$

- iii. Uma matriz  $P$  é positiva definida ( $P > 0$ ) se, e somente se, os determinantes menores principais de  $P$  forem positivos. Esse resultado é conhecido como critério de Sylvester. Por exemplo para

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_6 \end{bmatrix}$$

os determinantes Menores Principais são:

- $P_1 > 0$
- $\begin{vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_4 \end{vmatrix} = P_1 P_4 - P_2^2 > 0$
- $\begin{vmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \\ P_2 & P_4 & P_5 \\ P_3 & P_5 & P_6 \end{vmatrix} = P_1 P_4 P_6 + 2 P_2 P_5 P_3 - P_3^2 P_4 - P_2^2 P_6 - P_1 P_5^2 > 0$

iv. A função  $v(x) = x'Px$  é uma medida de distância do ponto  $x$  à origem quando  $P$  é positiva definida.

Por exemplo, a seguinte função é positiva definida:

$$v(x) = x'Px, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 4x_2^2$$

- v. O conjunto de todos os vetores  $x$  tais que  $v(x) = c$ , onde  $c$  é uma constante positiva qualquer, formam uma elipse quando  $P > 0$ . Os semi-eixos da elipse são  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$  onde  $\lambda_i$  são os autovalores de  $P/c$ .
- vi. Todas as propriedades acima continuam válidas se  $x, P$  forem complexos e trocarmos  $x', P'$  por  $x^*, P^*$ . Em particular a matriz  $P$  deve ser hermitiana, isto é  $P = P^*$ .

### 3.1.1 Sistemas lineares Variantes no tempo

Para sistemas lineares variantes no tempo temos o seguinte resultado.

**Teorema 3.2** *O sistema linear variante no tempo*

$$\dot{x} = A(t)x \tag{3.8}$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $A(t)$  é contínua  $\forall t \geq 0$ , é globalmente exponencialmente estável se e somente se existe  $P(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ , simétrica positiva definida<sup>1</sup>, contínua e limitada  $\forall t \geq 0$ , que satisfaz a seguinte equação diferencial

$$\dot{P}(t) + A(t)'P(t) + P(t)A(t) + Q(t) = 0 \tag{3.9}$$

onde  $Q(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  é simétrica positiva definida, contínua e limitada  $\forall t \geq 0$  e pode ser arbitrariamente escolhida. Em caso afirmativo, a função  $V(t, x) = x'P(t)x$  é uma função de Lyapunov para o sistema.

<sup>1</sup>Uma matriz  $P(t)$  é positiva definida ( $P(t) > 0$ ) se todos seus autovalores são positivos  $\forall t \geq 0$ . Veja apêndice para detalhes.

**Prova:** Suponha que o sistema seja globalmente exponencialmente estável e defina

$$P(t) = \int_t^\infty \phi(\tau, t)' Q(\tau) \phi(\tau, t) d\tau \quad (3.10)$$

onde  $\phi(t, t_0)$  é a matriz de transição do sistema que satisfaz  $x(t) = \phi(t, t_0) x(t_0)$ . Como (3.2) deve estar satisfeito para toda condição inicial concluímos que  $\phi(t, t_0)$  possui norma limitada por uma exponencial decrescente. Logo para qualquer matriz  $Q(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  simétrica positiva definida, contínua e limitada  $\forall t \geq 0$ , temos que  $\phi(\tau, t)' Q(\tau) \phi(\tau, t)$  também simétrica positiva definida, contínua  $\forall t \geq 0$  e converge exponencialmente para zero quando  $\tau \rightarrow \infty$ . Daí concluímos com (3.10) que  $P(t)$  é simétrica positiva definida, contínua e limitada  $\forall t \geq 0$ . Portanto satisfaz a relação

$$\begin{aligned} k_1 \|x\|^2 &\leq \lambda_{\min}(P(t)) x'x \leq x'P(t)x \leq \lambda_{\max}(P(t)) x'x \leq k_2 \|x\|^2 \\ k_1 &= \min_{t \geq 0} \lambda_{\min}(P(t)) > 0 \quad k_2 = \max_{t \geq 0} \lambda_{\max}(P(t)) > 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Por outro lado sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\tau, t) = -\phi(\tau, t) A(t) \quad (3.12)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= \int_t^\infty \left( \dot{\phi}(\tau, t)' Q(\tau) \phi(\tau, t) + \phi(\tau, t)' Q(\tau) \dot{\phi}(\tau, t) \right) d\tau + \\ &\quad \phi(\infty, t)' Q(\infty) \phi(\infty, t) - \phi(t, t)' Q(t) \phi(t, t) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Com (3.12) e lembrando que  $Q(t)$  é limitada  $\forall t \geq 0$ ,  $\phi(\infty, t) = 0$  e  $\phi(t, t) = I_n$  a expressão acima se reescreve na forma

$$\dot{P}(t) = -A(t)' \int_t^\infty \phi(\tau, t)' Q(\tau) \phi(\tau, t) d\tau - \int_t^\infty \phi(\tau, t)' Q(\tau) \phi(\tau, t) d\tau A(t) - Q(t) \quad (3.14)$$

que nos leva à (3.9) com (3.10).

Suponha agora que existe  $P(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$ , simétrica positiva definida, contínua e limitada  $\forall t \geq 0$ , que satisfaz a equação diferencial (3.9) onde  $Q(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  é simétrica positiva definida, contínua e limitada  $\forall t \geq 0$  e pode ser arbitrariamente escolhida. Defina a função  $V(t, x) = x'P(t)x$  e observe que ela satisfaz (3.11). Calculando sua derivada temporal para o sistema (3.8) encontramos

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= \dot{x}'P(t)x + x'P(t)\dot{x} + x'\dot{P}(t)x \\ &= x'(\dot{P}(t) + A(t)'P(t) + P(t)A(t))x = -x'Q(t)x \leq -k_3 x'x \\ k_3 &= \min_{t \geq 0} \lambda_{\min}(Q(t)) \end{aligned}$$

Logo o sistema é globalmente exponencialmente estável pelo teorema 3.1.  $\square$

Para sistemas lineares invariantes no tempo, onde  $A(t) = A$ ,  $\forall t \geq 0$ , a estabilidade pode ser caracterizada em termos dos autovalores da matrix  $A$ . Assim poderíamos pensar que um sistema variante no tempo seria estável se os autovalores da matrix  $A(t)$  possuem parte real negativa  $\forall t \geq 0$ . No entanto isso não é verdade em geral como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 3.1 ((Khalil, 1996))** Considere o sistema linear (3.8) onde

$$A(t) = \begin{bmatrix} -1 + 1.5 \cos(t)^2 & 1 - 1.5 \sin(t) \cos(t) \\ -1 - 1.5 \sin(t) \cos(t) & -1 + 1.5 \sin(t)^2 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Os autovalores de  $A(t)$  são  $-0.25 \pm j0.25\sqrt{7} \forall t \geq 0$ . Logo a matriz  $A(t)$  possui todos os autovalores com parte real negativa o tempo todo. Porém a origem não é estável como podemos verificar pela matriz de transição indicada abaixo.

$$\phi(t, 0) = \begin{bmatrix} e^{0.5t} \cos(t) & e^{-t} \sin(t) \\ e^{0.5t} \sin(t) & e^{-t} \cos(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Observe que  $x(t) = \phi(t, 0)x(0)$  pode divergir dependendo da condição inicial.

É interessante notar que a matriz  $Q(t)$  em (3.9) pode ser arbitrariamente escolhida. A escolha mais simples é  $Q(t) = I_n$  porém podemos eliminar a matriz  $Q(t)$  da equação. Como  $Q(t) > 0$  a equação (3.9) é equivalente à desigualdade

$$\dot{P}(t) + A(t)'P(t) + P(t)A(t) < 0 \quad (3.17)$$

Para ver isso basta verificar que se (3.9) está satisfeita para alguma  $P(t)$ ,  $Q(t)$  então  $\dot{P}(t) + A(t)'P(t) + P(t)A(t) = -Q(t) < 0$ . Logo (3.17) também está satisfeita. Por outro lado se (3.17) está satisfeita para alguma  $P(t)$  então podemos definir  $Q(t)$  como sendo  $Q(t) = -(P(t) + A(t)'P(t) + P(t)A(t))$  e observe que  $Q(t) > 0$ . Logo (3.9) está satisfeita.

Se por um lado as expressões (3.9) e (3.17) são equivalentes, por outro elas possuem propriedades bem distintas. Em particular, as vantagens de (3.17) serão exploradas mais tarde na seção sobre LMIs.

### 3.1.2 Sistemas lineares Invariantes no tempo

Para sistemas lineares invariantes no tempo o teorema 3.2 pode ser simplificado tornando-se equivalente aos resultados clássicos de Routh-Hurwitz e Nyquist.

**Teorema 3.3** O sistema linear invariante

$$\dot{x} = Ax \quad (3.18)$$

é exponencialmente estável, isto é, os autovalores da matriz  $A$  possuem parte real estritamente negativa, se, e somente se, a solução  $P$  simétrica da equação matricial:

$$A'P + PA + Q = 0 \quad (3.19)$$

for positiva definida, onde  $Q$  é uma matriz positiva definida dada que pode ser arbitrariamente escolhida.

**Prova:** É um caso particular da prova do teorema 3.2. Se  $\exists P > 0$  solução de  $A'P + PA + Q = 0$  com  $Q > 0$  dada, então  $v(x) = x'Px$  é função de Lyapunov para o sistema  $\dot{x} = Ax$  pois para  $v(x) = x'Px$  temos:

$$\dot{v}(x) = \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(A'P + PA)x = -x'Qx < 0$$

e como  $v(x) > 0$  e  $\dot{v}(x) < 0$  para todo ponto  $x$  da trajetória do sistema  $\dot{x} = Ax$ , concluímos que o estado converge para a origem. A estabilidade exponencial se mostra como na prova do teorema 3.1.

Por outro lado, se o sistema é exponencialmente estável, então a matriz de transição de estados  $\Phi = e^{At}$  é limitada e converge para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Isto implica que, para qualquer matriz  $Q > 0$ , temos  $\Phi(t)'Q\Phi(t) = e^{A't}Qe^{At} > 0$ , também limitada e convergindo para zero quando  $t \rightarrow \infty$ .

Logo, a matriz

$$P = \int_0^\infty e^{A't}Qe^{At}dt \quad (3.20)$$

é positiva definida, finita e satisfaz a equação  $A'P + PA + Q = 0$ .  $\square$

**Exemplo 3.2** O sistema  $\dot{x} = Ax$  com:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

é estável pois  $\lambda(A) = \{-1, -1\}$ . Logo, devemos encontrar uma solução  $P > 0$  para  $A'P + PA + Q = 0$ , sendo  $Q > 0$  uma matriz positiva definida que podemos escolher de forma arbitrária. Escolhendo  $Q$  igual à identidade temos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

que resulta:

$$\begin{bmatrix} -P_2 & -P_3 \\ P_1 - 2P_2 & P_2 - 2P_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_2 & P_1 - 2P_2 \\ -P_3 & P_2 - 2P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

Logo:

$$\begin{cases} -2P_2 + 1 = 0 \\ -P_3 + P_1 - 2P_2 = 0 \\ 2P_2 - 4P_3 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_2 = 1/2 \\ P_3 = 1/2 \\ P_1 = 3/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \text{Menores Principais:} \\ P_1 = 1.5 > 0 \\ \det(P) = 1.5 \times 0.5 - 0.5^2 > 0 \end{cases}$$

Logo  $P > 0$ , pois seus menores principais são positivos<sup>2</sup>, e portanto o sistema é exponencialmente estável.

O teorema de Lyapunov pode ser usado se escolhermos  $Q \geq 0$  ao invés de  $Q > 0$ . Para esse fim, vamos decompor a matriz  $Q$  na forma  $Q = C'C$  onde  $C$  é uma matriz qualquer. Se  $C$  possuir posto completo, então  $Q = C'C$  é positiva definida. Caso contrário,  $Q = C'C$  será positiva semi-definida.

<sup>2</sup>Verifique que os autovalores de  $P$  são positivos.

Teremos uma solução  $P > 0$  para  $A'P + PA + C'C = 0$  se, e somente se, o sistema  $\dot{x} = Ax$  for exponencialmente estável, isto é,  $\lambda(A) \in \mathbb{C}^-$ , e o  $(A, C)$  for observável, isto é:

$$\text{Posto} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad C \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Para entender esse fato note que a trajetória do sistema  $\dot{x} = Ax$  para uma dada condição inicial  $x_0$  é  $x(t) = e^{At}x_0$ . Se o sistema é estável, a solução da equação  $A'P + PA + C'C = 0$  é dada por (3.20) e assim temos

$$x_0'Px_0 = \int_0^\infty x_0'e^{A't}C'Ce^{At}x_0dt = \int_0^\infty x_0'e^{A't}C'Ce^{At}x_0dt = \int_0^\infty y(t)'y(t)dt \quad (3.21)$$

onde  $y(t) = Cx(t) = Ce^{At}x_0$  é uma saída fictícia. Se o par  $(A, C)$  é observável então não existe nenhuma condição inicial que leva  $y(t)$  a ser nula o tempo todo. Logo temos  $P > 0$  pela expressão (3.21). Por outro lado, se o sistema é estável porém existe uma condição inicial  $x_0$  tal que  $y(t) = 0, \forall t \geq 0$  então o par  $(A, C)$  não é observável. Nessas condições temos pela expressão (3.21) que  $x_0'Px_0 = 0$ . Logo  $P$  possui algum autovalor nulo, isto é,  $P$  é positiva semi-definida.

A equação  $A'P + PA + Q = 0$  é conhecida como equação de Lyapunov e possui solução única para uma dada  $Q$  se os autovalores da matriz  $A$  satisfazem  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  para  $i \neq j = 1, \dots, n$ .

**Exemplo 3.3** *Determine a faixa de estabilidade para o ganho  $k$  do sistema abaixo:*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -k & 0 & -1 \end{bmatrix} x$$

□

O exemplo acima encontra-se resolvido em (Ogata, 1993) onde também se encontra uma lista de exercícios que recomendamos (B9-1 – B9.20).

## 3.2 Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs

A grande motivação para se trabalhar com LMIs é que estaremos trabalhando com problemas convexos que podem ser resolvidos de forma eficiente. Assim, antes de estudarmos as principais propriedades de uma LMI, apresentaremos uma breve seção sobre análise convexa.

### 3.2.1 Definições e noções de análise convexa

Definir função convexa, conjunto convexo e politopo. Usar (H.Hindi, 2004), seções II e III.

Uma LMI (*Linear Matrix Inequality*) é uma desigualdade matricial do tipo  $F(g) > 0$ , no qual  $F(g) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{q \times q}$  é simétrica e afim nas variáveis de busca que são

representadas pelo vetor  $g$ . Assim uma LMI pode ser genericamente representada na forma

$$F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^m g_i F_i > 0 \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{q \times q}$  são matrizes dadas e  $g_i$  são variáveis escalares a serem determinadas de forma a satisfazer a desigualdade (se possível). Quando existe uma solução  $g$  para  $F(g) > 0$  dizemos que a LMI é factível.

É importante enfatizar que uma LMI pode ser representada de várias formas e dificilmente aparece num problema na forma genérica afim (3.22). Por exemplo, dado uma matriz  $A$  e uma matriz  $Q > 0$ , a função matricial  $F(P) = A'P + PA + Q$ , que aparece em vários problemas de estabilidade, é afim na variável  $P$  e portanto a desigualdade  $F(P) < 0$  é uma LMI que pode ser facilmente reescrita na forma (3.22) onde  $g$  é o vetor contendo os elementos da matriz  $P$  a ser determinada. A vantagem da representação genérica afim (3.22) é que toda LMI pode ser reescrita dessa forma e por isso todos os algoritmos de resolução de LMIs são desenvolvidos para essa representação. No entanto a conversão de uma LMI para a forma afim é feita internamente nos pacotes e o usuário não precisa se preocupar com isso.

Inúmeros problemas em diferentes áreas do conhecimento podem ser reformulados e numericamente resolvidos através de LMIs (Boyd et al., 1994). Este é o caso por exemplo dos resultados de estabilidade apresentados nos teoremas 3.3 e 3.2 como veremos na seção a seguir.

### 3.2.2 Estabilidade Quadrática

Funções de Lyapunov quadráticas do tipo  $v(x) = x'Px$  são facilmente determinadas através de (3.19) para o caso de sistemas lineares invariantes no tempo e além disso fornecem condições necessárias e suficientes para a estabilidade. Para sistemas lineares variantes o método de Lyapunov requer a utilização de uma função  $v(t, x) = x'P(t)x$  que também varia no tempo e que satisfaz a equação diferencial matricial (3.9) cuja solução é mais complicada de ser obtida numericamente. Devido à sua simplicidade, é muito comum o estudo da estabilidade de um sistema através da função  $v(x) = x'Px$  onde  $P$  é constante. Para sistemas variantes no tempo ou ainda não-lineares este tipo de função de poder conduzir a resultados conservadores, pois sendo  $P$  constante a função de Lyapunov não consegue levar em conta a rapidez de variação da matriz  $A(t)$ . Já com a função  $v(t, x) = x'P(t)x$  essa taxa de variação é levada em consideração através do termo  $\dot{P}(t)$  presente nas condições de estabilidade (3.9). Assim, quando conseguimos mostrar a estabilidade de um sistema com uma função do tipo  $v(x) = x'Px$  onde  $P$  é constante, apenas os valores que a matriz  $A(t)$  assume com o passar do tempo é que são levados em consideração mas não a rapidez com que  $A(t)$  muda de valores. Logo estamos afirmando que o sistema é exponencialmente estável independentemente da taxa de variação de  $A(t)$ . Essa forma de mostrar a estabilidade de um sistema é conhecida na literatura como estabilidade quadrática e é bastante útil no estudo de estabilidade de sistemas incertos quando nenhuma informação sobre a taxa de variação



do parâmetro incerto está disponível.

**Definição 3.2 (Estabilidade Quadrática)** *O sistema (3.1) é quadraticamente estável se as condições do teorema 3.1 estão satisfeitas com  $V(t, x) = x'Px$ , sendo  $P$  uma matriz constante.*  $\square$

Observe que as condições para estabilidade quadrática de um sistema linear variante no tempo (3.8) são dadas pelas desigualdades matriciais

$$A(t)'P + PA(t) < 0 \quad P > 0 \quad (3.23)$$

que são obtidas diretamente da definição acima. Em particular temos (3.3) satisfeita com  $a = 2$ ,  $K_1 = \lambda_{\min}(P)$ ,  $K_2 = \lambda_{\max}(P)$  e (3.4) com  $K_3 = \min_{t \geq 0} \lambda_{\min}(-(A(t)'P + PA(t)))$ . Note que as condições acima são um caso particular de (3.19) correspondente à matriz  $P$  constante e portanto o resultado pode ser conservador. Além disso, quando o sistema é invariante no tempo, i.e.  $A(t) = A$ ,  $\forall t$ , então as desigualdades acima para estabilidade quadrática são equivalentes à equação de Lyapunov (3.19). Para ver isso basta verificar que se (3.19) está satisfeita para alguma  $P, Q$  então  $A'P + PA = -Q < 0$ . Logo  $A'P + PA < 0$  também está satisfeita. Por outro lado se  $A'P + PA < 0$  está satisfeita para alguma  $P$  então podemos definir  $Q$  como sendo  $Q = -(A'P + PA)$  e observe que  $Q > 0$ . Logo (3.19) está satisfeita e portanto os resultados são equivalentes.

**Exemplo 3.4** *A estabilidade quadrática do sistema  $\dot{x} = Ax$  é caracterizada pelas LMIs*

$$A'P + PA < 0, \quad P > 0 \quad (3.24)$$

onde  $P > 0$  é a solução que desejamos encontrar (se possível). Para verificar que (3.24) é uma LMI basta notar que as funções  $F(P) = A'P + PA$  e  $G(P) = P$  são afins em  $P$  e portanto podem ser reescritas como em (3.22). Para um sistema de dimensão 2 temos:

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = p_1 G_1 + p_2 G_2 + p_3 G_3 = G_0 + \sum_{i=1}^3 g_i G_i \quad (3.25)$$

$$g = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_0 = 0$$

$$A'P + PA = F_0 + \sum_{i=1}^3 g_i F_i \quad (3.26)$$

$$F_0 = 0, \quad F_1 = G_1 A + A' G_1, \quad F_2 = G_2 A + A' G_2 \quad F_3 = G_3 A + A' G_3$$

Assim a LMI  $P > 0$  pode ser representada como  $G(g) = G_0 + \sum_{i=1}^3 g_i G_i > 0$  e a LMI  $A'P + PA < 0$  como  $F(g) = F_0 + \sum_{i=1}^3 g_i F_i < 0$ .

A representação afim de uma LMI (3.22) será utilizada apenas para se deduzir propriedades que sejam genéricas e válidas para toda LMI. No entanto, sempre que estivermos trabalhando com um problema específico não nos preocuparemos em converter as LMIs para a representação afim.

A seguir apresentamos as principais propriedades de uma LMI.

### 3.2.3 Resolvendo LMIs simultâneas

A solução de LMIs simultâneas é equivalente à solução de uma única LMI bloco-diagonal de dimensão maior. Por exemplo, as duas LMIs  $F(g) < 0, G(g) > 0$  podem ser reescritas na forma  $\text{diag}\{-F(g), G(g)\} > 0$  onde  $\text{diag}\{.\}$  denota uma matriz bloco-diagonal formada com elementos indicados em  $\{.\}$ .

**Exemplo 3.5** As duas LMIs em (3.24) podem ser escritas com (3.25) na forma

$$H(g) = \begin{bmatrix} -A'P - PA & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(g) & 0 \\ 0 & G(g) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.27)$$

ou seja,  $H(g) = H_0 + \sum_{i=1}^3 H_i g_i > 0$  com

$$H_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_i = \begin{bmatrix} -F_i & 0 \\ 0 & G_i \end{bmatrix}$$

Esta propriedade permite a incorporação de novas restrições ao problema original desde que essas novas restrições se apresentem como novas LMIs a serem satisfeitas. Por exemplo, a restrição de que a curva de nível de  $v(x) = x'Px$  seja maior que a unidade para uma dada condição inicial  $x(0)$ , isto é,  $x(0)'Px(0) > 1$ , pode ser facilmente incorporada às condições originais (3.24), como indicado a seguir:

$$\begin{aligned} J(g) &= -1 + x(0)'Px(0) = -1 + \sum_{i=1}^3 g_i x(0)'G_i x(0) = J_0 + \sum_{i=1}^3 g_i J_i \\ J_i &= x(0)'G_i x(0), \quad J_0 = -1 \end{aligned} \quad (3.28)$$

Para obter

$$\begin{bmatrix} H_0 & 0 \\ 0 & J_0 \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^3 g_i \begin{bmatrix} H_i & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix} > 0$$

### 3.2.4 O conjunto de soluções de uma LMI é convexo

Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto de todas as soluções possíveis de uma dada LMI, i. e.,  $\mathcal{S} = \{g : F(g) > 0\}$ . É simples verificar que  $\mathcal{S}$  é um conjunto convexo. Note que se  $g, h$  são duas soluções quaisquer da LMI, i.e.,  $F(g) > 0$  e  $F(h) > 0$ , então qualquer combinação convexa de  $g$  e  $h$ , representada por  $\alpha g + (1 - \alpha)h$  sendo  $0 \leq \alpha \leq 1$  o coeficiente de combinação convexa, teremos  $F(\alpha g + (1 - \alpha)h) = \alpha F(g) + (1 - \alpha)F(h) > 0$  e portanto  $\alpha g + (1 - \alpha)h$  também é uma solução da LMI. Logo  $\mathcal{S}$  é convexo.

Esta propriedade é importante do ponto de vista numérico pois teremos garantia que o problema de encontrar uma solução qualquer de uma LMI consiste na busca de um elemento qualquer num conjunto convexo, problema que pode ser resolvido de forma eficiente, com convergência global e tempo polinomial. Detalhes sobre algoritmos e pacotes computacionais para resolução de LMIs podem ser encontrados em (Ghaoui and Niculescu, 2000).

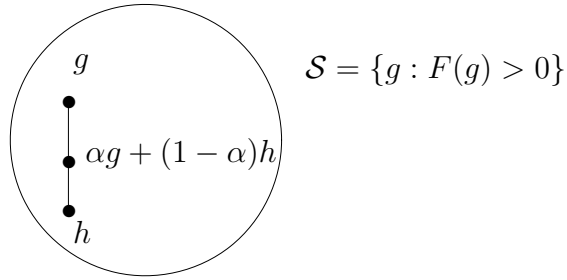


Figura 3.1: Combinação convexa dos pontos  $g, h$  com  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

### 3.2.5 LMIs para sistemas incertos

Em muitos sistemas podem ocorrer flutuações nos elementos das matrizes do sistema. Isto acarreta flutuações nas matrizes  $F_i$  da LMI  $F(g) > 0$  em (3.22). Por exemplo, considere um circuito RLC série cuja tensão de entrada é  $v_1(t)$  e tensão de saída (no capacitor) é  $v_2(t)$ . As equações são indicadas abaixo.

$$v_2 + RC\dot{v}_2 + L\ddot{v}_2 = v_1, \quad x = \begin{bmatrix} v_2 \\ v_1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\dot{x} = Ax + Bv_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & \frac{-R}{L} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}$$

Suponha que a resistência seja um parâmetro incerto que pode assumir qualquer valor no intervalo  $R_{min} \leq R \leq R_{max}$ . Podemos analisar a estabilidade de (3.29) diretamente com (3.25), no qual

$$F_i = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & 0 \end{bmatrix}' G_i + G_i \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{F}_{i1}} + R \underbrace{\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L} \end{bmatrix}' G_i + G_i \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{L} \end{bmatrix} \right)}_{\tilde{F}_{i2}} \quad (3.30)$$

$$F_i(R) = \tilde{F}_{i1} + R\tilde{F}_{i2}$$

Nesse caso, variações no parâmetro  $R$  ocasionam flutuações nas matrizes  $F_i(R)$ .

Um caso particular importante ocorre quando as flutuações nas matrizes  $F_i$  podem ser descritas na forma de combinações convexas de um conjunto fixo de dados  $\{F_{ij}\}$ , chamados de vértices.

$$F_i(\alpha) = \sum_{j=1}^r \alpha_j F_{ij}, \quad i = 0, \dots, m, \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1 \quad (3.31)$$

onde  $\alpha = [\alpha_1 \dots \alpha_r]'$  é o vetor de coeficientes de combinação convexa. Considere o problema de encontrar uma solução  $g$  para a LMI  $F(g) > 0$  em (3.22) que seja robusta para qualquer flutuação nas matrizes  $F_i$  dadas em (3.31), isto é, encontre  $g$  tal que

$$F(g, \alpha) = F_0(\alpha) + \sum_{i=1}^m g_i F_i(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha \text{ em } (3.31)$$

e como  $F(g, \alpha)$  é afim em  $\alpha$ , a LMI acima é equivalente à

$$F_{0j} + \sum_{i=1}^m g_i F_{ij} > 0, \quad \forall j = 1, \dots, r \quad (3.32)$$

Observe que  $F(g, \alpha) > 0$  não é numericamente tratável pois esta LMI depende de  $\alpha$  que não é conhecido. Porém (3.32) não depende de  $\alpha$  e pode ser resolvida. Para verificar a equivalência, suponha que (3.32) está satisfeita. Então

$$\begin{aligned} F(g, \alpha) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j (F_{0j} + \sum_{i=1}^m g_i F_{ij}) > 0 \quad \text{pois} \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\sum_{j=1}^r \alpha_j F_{0j}}_{F_0(\alpha)} + \sum_{i=1}^m g_i \underbrace{\sum_{j=1}^r \alpha_j F_{ij}}_{F_i(\alpha)} > 0 \\ &= F_0(\alpha) + \sum_{i=1}^m g_i F_i(\alpha) > 0 \quad \text{com } F_i \text{ em } (3.31) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Logo (3.32) implica  $F(g, \alpha) > 0, \forall \alpha$  em (3.31). E a solução  $g$  encontrada em (3.32) é robusta para as flutuações em (3.31). Por outro lado,  $F_i = F_{ij}$  é um dos valores possíveis da matriz  $F_i$  que ocorre para  $\alpha_j = 1$  (e portanto  $\alpha_i = 0, \forall i \neq j$ ), logo se existe uma solução  $g : F(g, \alpha) > 0, \forall \alpha$  em (3.31) as LMIs em (3.32) estão satisfeitas mostrando assim a equivalência.

**Exercício 3.1** Encontre as matrizes  $F_{ij}$  de (3.31) para as matrizes  $F_i$  dadas em (3.30) supondo  $R = \alpha R_{max} + (1 - \alpha) R_{min}$ .

**Exemplo 3.6** Considere o sistema linear incerto

$$\dot{x}(t) = A(\alpha) x(t) \quad \alpha \in \Delta \quad (3.34)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de parâmetros incertos,  $\Delta$  é um politopo conhecido representando os valores admissíveis de  $\alpha$  e  $A(\alpha)$  é uma função afim desses parâmetros. Sejam  $v_i, i = 1, \dots, 2^m$  os vértices conhecidos do politopo  $\Delta$  e note que podemos representá-lo na forma<sup>3</sup>  $\Delta = Co\{v_1, \dots, v_{2^m}\}$ . Queremos verificar a estabilidade do sistema incerto acima supondo que os valores admissíveis dos parâmetros incertos são definidos pelo politopo  $\Delta$  mas a taxa de variação desses parâmetros são

<sup>3</sup>Define-se "convex hull" de um conjunto de vetores  $\{v_1, \dots, v_q\}$  o politopo obtido pela combinação convexa de todos os elementos desse conjunto. Os elementos desse conjunto são chamados de vértices e o politopo obtido é denotado por  $Co\{v_1, \dots, v_q\}$ .

desconhecidas. Assim, a noção de estabilidade a ser empregada para estudar a estabilidade desse sistemas deve ser tal que não dependa da taxa de variação de  $\alpha$ , qualquer que seja ela. A noção de estabilidade que precisamos é a de estabilidade quadrática, definição 3.2, e as condições a serem satisfeitas são, de acordo com (3.23), a existência de uma matriz  $P$  definida positiva tal que

$$A(\alpha)'P + PA(\alpha) < 0 \quad P > 0 \quad \forall \alpha \in \Delta \quad (3.35)$$

As condições acima não podem ser numericamente testadas pois dependem do parâmetro incerto  $\alpha$  que pode assumir qualquer valor em  $\Delta$ . No entanto, como  $F(P, \alpha) = A(\alpha)'P + PA(\alpha)$  é afim em  $\alpha$  não é necessário resolver (3.35) para todo  $\alpha$  em  $\Delta$  mas apenas para  $\alpha$  nos vértices de  $\Delta$ , i.e. para  $\alpha = v_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^m$ . Assim resolver (3.35) para todo  $\alpha \in \Delta$  é equivalente a resolver o conjunto de  $2^m + 1$  LMIs simultâneas

$$A(v_i)'P + PA(v_i) < 0 \quad P > 0 \quad i = 1, \dots, 2^m \quad (3.36)$$

**Exemplo 3.7** Sejam  $A_1, \dots, A_r$  um conjunto de matrizes obtidas através da linearização de um sistema não linear em  $r$  pontos de funcionamento distintos. Suponha que o modelo do sistema entre os pontos de funcionamento possa ser aproximado por combinações convexas desse  $r$  modelos linearizados, isto é, o sistema será representado por

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathcal{A} := \left\{ A : A = \sum_{i=1}^r \alpha_i A_i, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 1, \quad \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\} \quad (3.37)$$

A condição de estabilidade para esse sistema pode ser expressa pela LMI

$$\exists P > 0 : A'P + PA < 0, \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (3.38)$$

Mesmo que  $A$  possa assumir infinitos valores no conjunto  $\mathcal{A}$ , a LMI (3.38) é equivalente à  $r$  LMIs simultâneas

$$\exists P > 0 : A_i'P + PA_i < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.39)$$

Observe que a equivalência entre (3.38) e (3.39) vem do fato que a função  $F(P) = A'P + PA$  é afim nos coeficientes  $\alpha_i$  que caracterizam o modelo do sistema por combinação convexa. A equivalência seria perdida se, por exemplo, a matriz  $P$  também fosse função desses coeficientes, isto é,

$$P(\alpha) > 0 : A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) < 0, \quad \forall A(\alpha) \in \mathcal{A}, \quad \alpha \text{ constante} \quad (3.40)$$

**Exercício 3.2** Seja  $P_i = P(\alpha)|_{\alpha_i=1}$ . Mostre que (3.40) implica

$$P_i > 0 : A_i'P_i + P_iA_i < 0, \quad i = 1, \dots, r \quad (3.41)$$

Porém (3.41) não implica (3.40), logo não é suficiente para mostrar a estabilidade do sistema linear invariante em (3.37).

### 3.2.6 Otimização com restrição LMI

Em muitos casos não basta encontrar uma solução qualquer do conjunto de soluções de uma LMI. Deseja-se encontrar uma solução que seja ótima segundo um dado critério. Em muitas situações a otimalidade pode ser expressa através de uma função linear dando assim origem ao seguinte problema de otimização

$$\begin{cases} \min_g d'g \\ \text{tal que } F(g) > 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

onde  $d$  é um vetor dado que define a direção de otimização e  $F(g) > 0$  é uma LMI como em (3.22). Como o conjunto de soluções de  $F(g) > 0$  é convexo o problema (3.42) consiste em encontrar uma solução factível  $g : F(g) > 0$  para o qual  $d'g$  tenha o menor valor possível. Observe que nessas condições a solução ótima do problema consiste em se aproximar com a precisão desejada da fronteira do conjunto de soluções.

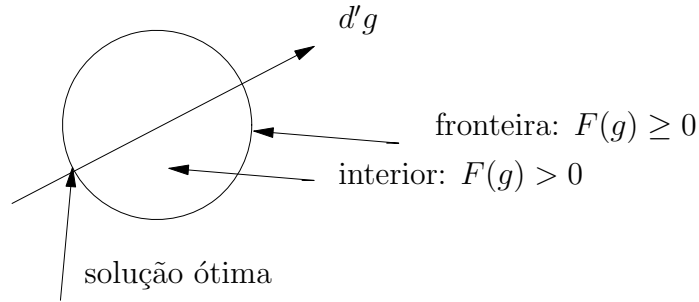


Figura 3.2: Interpretação gráfica.

Sob certas condições, ver livro (Ghaoui and Niculescu, 2000), é possível considerar restrições de igualdade no problema, isto é, pode-se considerar problemas do tipo  $F(g) \geq 0$  ou ainda  $F(g) > 0$  com  $G(g) = 0$ , sendo  $F$  e  $G$  funções afins. A idéia central é que as restrições de igualdade possam ser eliminadas dando origem a um problema com um número menor de variáveis e sujeitas apenas à restrições com desigualdades estritas.

**Exemplo 3.8** A solução  $P = P^*$  ótima do problema

$$\begin{cases} \min_P \text{Traço}(P) \\ \text{tal que } A'P + PA + Q < 0, \quad P > 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

para  $Q > 0$  dado, converge com a precisão desejada para  $P^* = P_0$  onde  $P_0$  é a solução da equação  $A'P_0 + P_0A + Q = 0$ .

Para ver isso, note que se  $P, Q$  são tais que  $A'P + PA + Q < 0$ , podemos definir a matriz  $Q_0 = -(A'P + PA + Q)$  que será positiva definida ( $Q_0 > 0$ ). Logo teremos  $A'P + PA + Q + Q_0 = 0$ . A solução desta equação de Lyapunov é

$$P = \int_0^\infty e^{A't}(Q + Q_0)e^{At}dt \quad (3.44)$$

E a solução da equação  $A'P_0 + P_0A + Q = 0$  é

$$P_0 = \int_0^\infty e^{A't} Q e^{At} dt \quad (3.45)$$

Resultando que  $P - P_0 = \int_0^\infty e^{A't} Q_0 e^{At} dt > 0$ , pois  $Q_0 > 0$ . Daí qualquer solução  $P$  da desigualdade  $A'P + PA + Q < 0$  satisfaz a relação  $P > P_0$ . Para  $Q_0$  arbitrariamente pequena, por exemplo  $\|Q_0\| = \epsilon$  com  $\epsilon \rightarrow 0$ , teremos  $P$  arbitrariamente próxima de  $P_0$ , isto é,  $P \cong P_0$ , onde a aproximação se dá com a precisão que desejarmos. Como a relação  $P > P_0$  implica  $\text{traço}(P) > \text{traço}(P_0)$ , conclui-se que a solução de menor traço é  $P^* \cong P_0$ .

Tanto a equação de Lyapunov  $A'P_0 + P_0A + Q = 0$  quanto o problema de otimização (3.43) podem ser resolvidos de forma eficiente. A vantagem de (3.43) é que este pode ser resolvido mesmo quando o sistema for incerto, o que não é o caso da equação. Além disso pode-se incorporar novas restrições no problema (3.43), como feito na seção 3.2.3, o que também não é possível na equação.

### 3.2.7 Complemento de Schur

Tipicamente, o problema de controle que queremos resolver não aparece naturalmente na forma de uma LMI. Algumas ferramentas matemáticas são bastantes úteis na tarefa de tentar reescrever o problema em questão através de LMIs. Se a natureza do problema original for convexa, muito provavelmente encontraremos uma forma de reescrevê-lo através de LMIs.

O complemento de Schur é uma ferramenta básica na manipulação de desigualdades matriciais.

**Lema 3.1** *Seja  $g \in \mathbb{R}^m$  o vetor de variáveis de decisão e  $M_1(g)$ ,  $M_2(g)$ ,  $M_3(g)$  funções afins de  $g$  com  $M_1(g)$ ,  $M_2(g)$  simétricas. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

$$a) M_1(g) - M_3(g)' M_2(g)^{-1} M_3(g) > 0 \text{ com } M_2(g) > 0 \quad (3.46)$$

$$b) \begin{bmatrix} M_1(g) & M_3(g)' \\ M_3(g) & M_2(g) \end{bmatrix} > 0 \quad (3.47)$$

□

Note que (a) não é uma LMI pois  $M(g) = M_1(g) - M_3(g)' M_2(g)^{-1} M_3(g)$  não é uma função afim em  $g$ . No entanto as desigualdades em (a) são equivalentes à (b), que é uma LMI. Note que para satisfazer (a), (b) devemos ter  $M_1(g) > 0$  e  $M_2(g) > 0$  como condições necessárias, porém não suficientes.

**Exemplo 3.9** *Sejam  $A, B, C, R$  matrizes dadas e note que*

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C < 0 \text{ com } P > 0, R > 0 \quad (3.48)$$

não é uma LMI na variável  $P$ , pois é quadrática em  $P$ . Nem tampouco o complemento de Schur pode ser aplicado para eliminar o termo quadrático, devido ao sinal deste termo. Note que invertendo o sinal da desigualdade em (3.48) obtém-se,

$$-(A'P + PA + C'C) + PBR^{-1}B'P > 0 \text{ com } P > 0, R > 0$$

Como  $R > 0$ , o termo quadrático é positivo, não sendo assim possível aplicar o complemento de Schur.

Seja então  $S = P^{-1}$ , o que implica que  $S > 0$ . Portanto (3.48) é equivalente à

$$S(A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'C)S < 0 \text{ com } S > 0 \quad (3.49)$$

Como  $S = P^{-1}$  tem-se

$$SA' + AS - BR^{-1}B' + SC'CS < 0 \text{ com } S > 0 \quad (3.50)$$

Agora (3.50) é quadrática em  $S$  e o sinal do termo não linear é coerente com o complemento de Schur, que ao ser aplicado fornece

$$\begin{bmatrix} -SA' - AS + BR^{-1}B' & SC' \\ CS & I \end{bmatrix} > 0 \text{ com } S > 0 \quad (3.51)$$

Note que (3.51) é uma LMI em  $S$  e que ao ser resolvida fornece  $P$ , pois  $P = S^{-1}$  e satisfaz (3.48).

A importância do sinal do termo não linear pode ser facilmente entendida no caso escalar.

Considere a função  $f(p) = 2ap - \frac{b^2}{r}p^2 + c^2$  com  $a, b, r, c$  constantes positivas dadas. É fácil perceber que esta função é côncava e que a função  $h(s) = 2as - \frac{b^2}{r} + s^2c^2$  é convexa em  $s$ . A relação é  $s = 1/p$  e  $h(s) = s^2f(p)$ .

Assim a desigualdade  $f(p) < 0$  tem um conjunto de solução não convexo mas  $h(s) < 0$  possui um conjunto de solução convexo (entre as raízes de  $h(s) = 0$ ). Logo o complemento de Schur se aplica em  $h(s) < 0$  mas não em  $f(p) < 0$ .

### 3.2.8 Lema de Finsler

Este lema é muito útil pois permite que restrições de igualdade sejam inseridas em uma única desigualdade que pode ser resolvida via LMI.

**Lema 3.2 (lema de Finsler)** *Seja  $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$  uma matriz dada e  $C_0$  uma base para o espaço nulo de  $C$ . Seja  $F(g)$  uma função afim em  $G \in \mathbb{R}^q$  com  $F(g) = F(g)' \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . As seguintes condições são equivalentes*

$$\begin{aligned} a) & \exists g : x'F(g)x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m : Cx = 0, \quad x \neq 0 \\ b) & \exists g, L : F(g) + LC + C'L' < 0 \quad L \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ c) & \exists g : C_0'F(g)C_0 < 0 \\ d) & \exists g, \alpha : F(g) - \alpha C'C < 0 \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.52)$$

□

Algumas relações são facilmente verificadas. Por exemplo a equivalência entre (c) e (a) é imediata uma vez que todo  $x : Cx = 0$  possui a forma  $x = C_0y$  para algum  $y$ .



Que (b) e (d) implicam em (a) também é imediato, uma vez que (b) e (d) implicam

$$\begin{cases} x'(F(g) - \alpha C'C)x < 0 \\ x'(F(g) + LC + C'L')x < 0 \end{cases} \quad \forall x \neq 0$$

Logo, para  $Cx=0$ , recuperamos (a). As demais relações possuem prova não trivial e podem ser encontradas em (de Oliveira and Skelton, 2001) e referências. Existem variações do Lema de Finsler conhecidas por outros nomes, como Lema da projeção, Lema da eliminação de variáveis, bastante conhecidos na teoria  $H_\infty$ .

**Lema 3.3 (lema da projeção)** *Sejam  $B, C$  matrizes dadas e  $B_0, C_0$  bases para os espaços nulos de  $B'$  e  $C$  respectivamente. Seja  $F(g)$  uma função afim em  $g$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes.*

$$\begin{aligned} a) & \exists g, L : F(g) + BLC + C'L'B' < 0 \\ b) & \exists g : C'_0 F(g) C_0 < 0 \quad e \quad B'_0 F(g) B_0 < 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

**Exemplo 3.10** *Considere o sistema Algébrico Diferencial*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + A_2 z \quad x \in \mathbb{R}^n \\ 0 &= A_3 x + A_4 z \quad z \in \mathbb{R}^m \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde  $A_i$  são matrizes dadas, com  $A_4$  inversível e  $z$  é um vetor de variáveis algébricas.

A estabilidade desse sistema pode ser analisada com o auxílio da função de Lyapunov  $v(x) = x'Px$  de duas formas equivalentes

a) com eliminação da variável algébrica

$$\dot{x} = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)x \quad (3.55)$$

que por sua vez leva às seguintes condições

$$\exists P > 0 : (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)'P + P(A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3) < 0 \quad (3.56)$$

Para sistemas incertos, onde as matrizes  $A_i$  possuem elementos incertos, a condição (3.56) é trabalhosa pois o termo  $A_2 A_4^{-1} A_3$  não é afim nos elementos incertos em geral.

b) sem eliminação da variável algébrica.

Tomando a derivada de  $v(x) = x'Px$  para o sistema (3.54) temos as seguintes condições

$$\begin{cases} v(x) = x'Px > 0, \quad \forall x \neq 0 \\ \dot{v}(x) = (A_1 x + A_2 z)'Px + x'P(A_1 x + A_2 z) < 0, \quad \forall x \neq 0 \text{ e } \forall z : A_3 x + A_4 z = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

Defina

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad C = [A_3 \quad A_4], \quad F(P) = \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} [A_1 \quad A_2] + \begin{bmatrix} A'_1 \\ A'_2 \end{bmatrix} [P \quad 0] \quad (3.58)$$

e reescreva (3.57) na forma

$$\begin{cases} P > 0 \\ \xi' F(P) \xi < 0 \quad \forall \xi : C\xi = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

que pelo lema de Finsler em (3.52) é equivalente à

$$\exists P, L : \{F(P) + LC + C'L' < 0, \quad P > 0\} \quad (3.60)$$

que é uma condição de estabilidade equivalente à (3.57) porém as matrizes  $A_i$  aparecem linearmente na expressão  $F(P) + LC + C'L'$  e o caso onde  $A_i$  possuem elementos incertos pode ser tratado como na seção 3.2.5.

### 3.2.9 Procedimento-S

A técnica que ficou conhecida como "S-Procedure" permite concatenar várias restrições escalares de desigualdade em uma única. Para reduzir o conservadorismo, a técnica introduz multiplicadores como fatores de ponderação a serem determinados.

Sejam  $T_i, \dots, T_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrizes simétricas dadas e  $F(g) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma função afim em  $g$ . Considere o seguinte problema: encontre  $g$ , se possível, tal que

$$\xi' F(g) \xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0 : \xi' T_i \xi \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.61)$$

É fácil perceber que se existem escalares  $\tau_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$  e algum  $g$  tais que

$$F(g) - \sum_{i=1}^p \tau_i T_i > 0 \quad (3.62)$$

então (3.61) está satisfeita. Porém não é trivial mostrar que (3.61) e (3.62) são equivalentes para  $p = 1$ . Existem variantes do procedimento  $\mathcal{S}$  (ver livro (Boyd et al., 1994)).

**Exemplo 3.11** Considere o sistema incerto

$$\dot{x} = (A_0 + \sum_{i=1}^q \delta_i b_i c_i) x \quad (3.63)$$

onde  $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b_i, c_i \in \mathbb{R}^n$  são conhecidos e  $\delta_i$  são parâmetros incertos tais que  $|\delta_i| \leq 1$ .

**Exercício 3.3** Suponha que os parâmetros  $\delta_i$  estejam no intervalo  $\delta_{\min} \leq \delta_i \leq \delta_{\max}$ . Redefina  $A_0, b_i, c_i$ , de forma a poder reescrever o sistema como em (3.63) onde  $|\delta_i| \leq 1$ .

□

Defina o vetor auxiliar  $z_i = \delta_i c_i x$  e note que a condição  $|\delta_i| \leq 1$  pode ser representada na forma

$$z_i' z_i \leq x' c_i' c_i x \quad (3.64)$$

Assim o sistema (3.63) pode ser reescrito como

$$\dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^q b_i z_i, \quad \|z_i\|^2 \leq \|c_i x\|^2 \quad (3.65)$$

A estabilidade deste sistema é garantida se existe uma função  $v(x) = x' P x > 0$ ,  $x \neq 0$ , tal que

$$\begin{aligned} \dot{v}(x) &= \dot{x}' P x + x' P \dot{x} \\ &= (A_0 x + \sum_{i=1}^q b_i z_i)' P x + x' P (A_0 x + \sum_{i=1}^q b_i z_i) < 0 \quad \forall x, z_i \neq 0 : z_i' z_i \leq x' c_i' c_i x \end{aligned} \quad (3.66)$$

Usando o procedimento-S tem-se (3.66) satisfeita se existem escalares  $\tau_i \geq 0$  e uma matriz  $P > 0$  tal que

$$(A_0 x + \sum_{i=1}^q b_i z_i)' P x + x' P (A_0 x + \sum_{i=1}^q b_i z_i) + \sum_{i=1}^q \tau_i (x' c_i' c_i x - z_i' z_i) < 0 \quad \forall x, z_i \neq 0 \quad (3.67)$$

A desigualdade acima, que é suficiente para (3.66), pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix}' \underbrace{\begin{bmatrix} [A_0' P + P A_0 + \sum_{i=1}^q \tau_i c_i' c_i] & P b_1 \dots P b_q \\ [P b_1 \dots P b_q]' & -\text{diag}\{\tau_i I_n\} \end{bmatrix}}_M \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} < 0, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} \neq 0 \quad (3.68)$$

que é equivalente à LMI:  $M < 0$  com  $P > 0$ .

O procedimento S tem seu conservadorismo aumentado à medida que o número de restrições  $p$  em (3.61) aumenta. Em alguns casos é possível atenuar esse aspecto conservador substituindo-se os multiplicadores usuais do procedimento-S por outros mais eficientes. Esse é o caso, por exemplo, de uma técnica que ficou conhecida como escalonamento  $D - G$ .

### 3.2.10 Escalonamento D-G

Esta técnica de escalonamento pode ser vista como uma variação do procedimento S.

Sejam  $V_i \in \mathbb{R}^{m_i \times n}$  matrizes dadas e  $F(g)$  uma função afim em  $g$ . Considere o problema de determinar, se possível, um vetor  $g$ , tal que

$$\xi F(g)\xi > 0, \quad \forall \xi = \begin{bmatrix} x \\ z_i \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} \neq 0 \text{ tal que } z_i = \delta_i V_i x, \quad i = 1, \dots, q, \quad |\delta_i| \leq 1, \quad \delta_i \in \mathbb{R} \quad (3.69)$$

Sejam  $D_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  matrizes simétricas definidas positivas e  $G_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$  matrizes anti-simétricas, isto é,  $G_i = -G_i'$ .

Observe que a condição  $|\delta_i| \leq 1$  pode ser representada por  $z_i' D_i z_i \leq x' V_i' D_i V_i x$  onde  $D_i$  é uma matriz positiva definida que pode ser arbitrariamente escolhida. Além disso,  $x' V_i' G_i z_i + z_i' G_i' V_i x = 0$ ,  $\forall z_i, x$  onde  $G_i$  é uma matriz anti-simétrica que também pode ser arbitrariamente escolhida. Assim se a seguinte condição for satisfeita

$$\exists g, G_i, D_i : \xi' F(g)\xi < 0 \quad \forall \xi = \begin{bmatrix} x \\ z_i \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix} : \xi' H \xi \geq 0 \quad (3.70)$$

$$H = \begin{bmatrix} [\sum_{i=1}^q V_i' D_i V_i] & [V_1' G_1 \dots V_q' G_q] \\ [V_1' G_1 \dots V_q' G_q]' & -diag\{D_i\} \end{bmatrix}$$

teremos (3.59) também satisfeita. Aplicando agora o procedimento S para  $p = 1$  obtemos  $\xi'(F(g) + H)\xi < 0 \quad \forall \xi$  que é equivalente à LMI

$$\exists g, D_i, G_i : F(g) + H < 0$$

Observe que esta desigualdade é equivalente à (3.70), pois o procedimento S é necessário e suficiente para  $p = 1$ . Porém (3.70) é apenas suficiente para (3.69). Quando  $m_i = 1$ , isto é,  $V_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  ( $z_i$  são escalares) temos  $D_i$  e  $G_i$  também escalares e nesse caso devemos ter  $D_i = \tau_i > 0$  e  $G_i = 0$ . Logo se aplicarmos o escalonamento  $D - G$  na resolução do Exemplo 3.11 encontraremos o mesmo resultado indicado em (3.68).

**Exercício 3.4** Aplique o escalonamento  $D - G$  para resolver o Exemplo 3.11

- com  $z_i = \delta_i C_i x$  ( $V_i = C_i$ )
- com  $z_i = \delta_i x$  ( $V_i = I$ )
- Em qual caso o número de variáveis a serem determinadas é menor? E quanto ao conservadorismo dos resultados no dois casos? Qual abordagem parece ser mais adequada?

### 3.3 $\mathcal{D}$ -Estabilidade: pólos em regiões desejadas

O sistema linear invariante (3.18) é exponencialmente estável se e somente se todos os autovalores da matriz  $A$  estão no semiplano esquerdo estrito. Um sistema que seja exponencialmente estável pode apresentar uma performance muito pobre se existirem

autovalores muito próximos do eixo imaginário ou ainda se a parte imaginária de algum autovalor for muito grande em relação à sua parte real (pólo oscilatório pouco amortecido). Por esse motivo é importante saber se os autovalores se encontram em sub-regiões do semiplano esquerdo que garantam ao sistema rapidez e poucas oscilações na resposta. Nesta seção apresenta-se critérios de estabilidade que garantem que os pólos do sistema nominal se encontram em uma dada região  $\mathcal{D}$  do plano Complexo, isto é, será determinado se todos os autovalores da matriz  $A$  pertencem a uma região  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ . Com esta finalidade, considere a seguinte definição:

**Definição 3.3** ( *$\mathcal{D}$ -Estabilidade*) *O sistema linear invariante  $\dot{x} = Ax$  é  $\mathcal{D}$ -estável se e somente se todos os autovalores da matriz  $A$  pertencem a sub-região  $\mathcal{D}$  do plano complexo, isto é:*

$$\lambda_i(A) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.71)$$

A noção de  $\mathcal{D}$ -estabilidade acima definida permite determinar não somente a sua estabilidade, mas também analisar o comportamento transitório do sistema  $\dot{x} = Ax$  visto que este comportamento está diretamente relacionado ao posicionamento dos pólos no plano complexo. Note também que a estabilidade quadrática pode ser vista como uma situação particular da  $\mathcal{D}$ -estabilidade quando  $\mathcal{D} = \mathbb{C}^-$ .

A seguir apresenta-se uma classe de regiões do plano complexo descritas em termos de LMIs, proposta inicialmente em (Chilali and Gahinet, 1996).

**Definição 3.4** (*Regiões LMIs*) *Um subconjunto  $\mathcal{D}$  do plano complexo é denominado de uma região LMI se existem matrizes  $L = L' \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  e  $M \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$  tais que:*

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C} : L + sM + s^*M' < 0 \right\} \quad (3.72)$$

onde  $s = \sigma + j\omega$ .

Note que uma região LMI é um subconjunto do plano complexo a qual é representada por uma LMI em  $s$  e  $s^*$ , ou equivalentemente, uma LMI em  $\sigma = \text{Re}(s)$  e  $\omega = \text{Im}(s)$ .

**Exemplo 3.12** (*Exemplos de Regiões LMIs*) *Considere as seguintes regiões LMIs (representadas na Figura 3.3):*

(a)  $\mathcal{D}_a$ , semi-plano com  $\text{Re}(s) < -\alpha$ . Esta região pode ser definida pela inequação  $s + s^* < -2\alpha$ , a qual pode ser representada na formulação LMI em (3.72) através das seguintes matrizes:

$$L = 2\alpha \quad e \quad M = 1.$$

(b)  $\mathcal{D}_b$ , disco com raio  $r$  centrado em  $(-c, 0)$ . Esta região pode ser definida pela seguinte relação  $(\sigma + c)^2 + \omega^2 < r^2$  ou equivalentemente por  $(s + c)r^{-1}(s^* + c) < r$  levando à seguinte definição das matrizes  $L$  e  $M$  em (3.72):

$$L = \begin{bmatrix} -r & c \\ c & -r \end{bmatrix} \quad e \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(c)  $\mathcal{D}_c$ , setor cônico com ângulo interno  $2\psi$ . Esta região pode ser definida por  $\sigma \sin \psi + \omega \cos \psi < 0$  levando às seguintes matrizes:

$$L = 0_2 \quad e \quad M = \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi \\ -\cos \psi & \sin \psi \end{bmatrix}.$$

PSfrag replacements

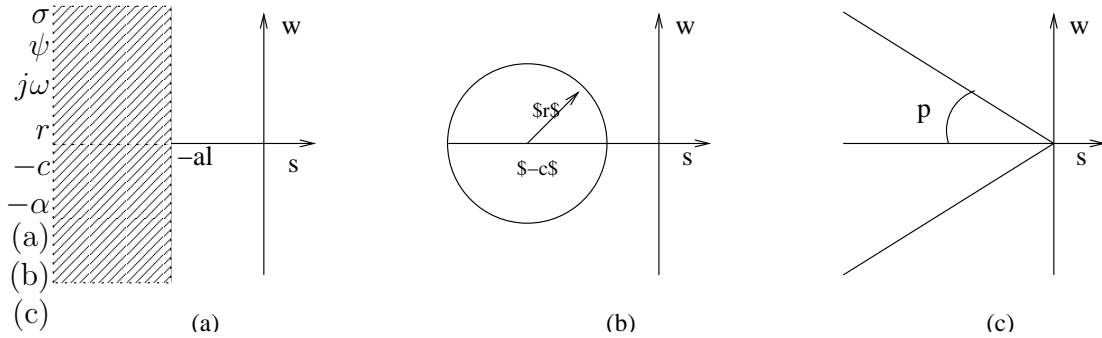


Figura 3.3: Regiões LMIs - (a) semi-plano, (b) disco e (c) setor cônico.

Utilizando o resultado proposto em (Chilali and Gahinet, 1996, Teorema 2.2), a  $\mathcal{D}$ -estabilidade pode ser determinada através do seguinte condição LMI.

**Teorema 3.4** *O sistema  $\dot{x} = Ax$  é  $\mathcal{D}$ -estável se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva  $P$  tal que:*

$$L \otimes P + M \otimes (PA) + M' \otimes (A'P) < 0 \quad (3.73)$$

onde a operação  $\otimes$  corresponde ao produto de Kronecker<sup>4</sup> de duas matrizes.

**Exemplo 3.13** *Determine se o seguinte sistema tem seus autovalores com parte real menor do que  $-1$ .*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -4 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Pelo Exemplo 3.12, a região com  $\text{Re}(\lambda_i(A)) < -1$  pode ser representada na forma (3.72) com  $L = 2$  e  $M = 1$ . Utilizando o Teorema 3.4, obtém-se a seguinte condição LMI:

$$\exists P > 0 : A'P + PA + 2P < 0$$

Através do LMITOOL do Scilab, tem-se o seguinte resultado:

```
-->[P]=d_est(); -->[P]=d_est();
Construction of canonical representation
Basis Construction
FEASIBILITY PHASE.
  primal obj.  dual obj.  dual. gap
    1.92e+001   -7.77e+003  7.79e+003
   -2.92e+001   -7.72e+003  7.69e+003
Target value reached
feasible solution found
-->P
P =
!   637.00835    35.231849 !
!   35.231849    31.286088 !
```

<sup>4</sup>Para duas matrizes  $A$  e  $B$ , o produto de Kronecker é dado por  $A \otimes B = [A_{ij}B]_{ij}$ .

Portanto, o sistema (3.74) é  $\mathcal{D}$ -estável onde a região  $\mathcal{D}$  é dada por:

$$\mathcal{D} = \{s \in \mathbb{C} : 2 + s + s^* < 0\}$$

Uma importante característica das regiões LMIs é a sua invariância com relação a operação de intersecção de conjuntos, como mencionado na seção 3.2.3. Por exemplo, considere duas regiões LMIs  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$ , a intersecção  $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$  também é uma região LMI representada por:

$$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \left\{ s \in \mathbb{C} : \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} M_1' & 0 \\ 0 & M_2' \end{bmatrix} s^* < 0 \right\} \quad (3.75)$$

Com o resultado acima pode-se determinar a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de um sistema nominal, onde  $\mathcal{D}$  é uma região LMI formada a partir da intersecção de outras regiões LMIs. Este resultado é resumido no seguinte corolário (Chilali and Gahinet, 1996, Corolário 2.3).

**Corolário 3.1** *Sejam  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_l$  regiões LMIs dadas, o sistema  $\dot{x} = Ax$  é  $\mathcal{D}_1 \cap \dots \cap \mathcal{D}_l$ -estável se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva  $P$  satisfazendo as seguintes restrições LMIs:*

$$L_i \otimes P + M_i \otimes (PA) + M_i' \otimes (A'P) < 0, \quad i = 1, \dots, l \quad (3.76)$$

onde  $\mathcal{D}_i = \{s \in \mathbb{C} : L_i + M_i s + M_i' s^* < 0\}$  para  $i = 1, \dots, l$ .

É importante observar que além da localização desejada dos autovalores a  $\mathcal{D}$ -estabilidade garante a estabilidade quadrática do sistema. Para sistemas lineares invariantes no tempo os autovalores estão diretamente ligados ao desempenho do sistema e as condições aqui apresentadas não são conservadoras. Porém é importante lembrar que para sistemas variantes no tempo a performance do sistema não pode ser caracterizada de forma simples em função da localização dos autovalores. Veja seção 3.1.1. Apesar desse inconveniente as condições aqui apresentadas ainda garantem estabilidade quadrática do sistema.

Finalmente note que para analisar a  $\mathcal{D}$ -estabilidade de um sistema incerto podemos utilizar as mesmas LMIs aqui apresentadas bastando apenas que a matriz de dinâmica do sistema  $\dot{x} = Ax$  possa ser representada como uma função afim dos parâmetros incertos. Veja seção 3.2.5.

## 3.4 Norma $\mathcal{H}_2$ de Sistemas

Em muitas aplicações é importante se ter garantias que possíveis perturbações ocorrendo num sistema de controle não afetam de maneira proibitiva as variáveis de interesse sob controle. A capacidade de um sistema de controle de limitar os efeitos indesejáveis dessas perturbações é denominada de rejeição de perturbações e pode ser quantificada de várias formas. Nesta seção aborda-se o uso de normas de sistemas (com relação ao ganho do operador entrada de perturbação - saída de interesse) como forma de medir o grau de influência das perturbações externas sobre as saídas de interesse.

Historicamente, as normas de sistemas são definidas a partir da resposta em frequência do sistema<sup>5</sup>. Por esse motivo estaremos supondo nesta seção que o sistema a ser analisado é exponencialmente estável. Caso isso não ocorra podemos primeiro projetar um controlador estabilizante e proceder a análise em questão para o sistema em malha fechada.

Norma de sistemas é uma extensão da idéia de norma de sinais que é uma medida de energia. A norma 2 de um sinal  $z(t)$  é definida como sendo

$$\|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^2 dt = \mathcal{E}, \quad (3.77)$$

A expressão acima é uma generalização da noção de energia dissipada, pois se  $z(t)$  fosse um sinal de tensão a expressão acima nos dá a energia dissipada num resistor unitário. O conjunto de todos os sinais que possuem energia finita, i.e. são quadraticamente integráveis, formam um espaço denominado  $\mathcal{L}_2$ .

A norma 2 de um sinal vetorial  $z(t) = [z_1(t) \ \dots \ z_n(t)]'$  é definida como sendo a soma das energias de todas as componentes do vetor<sup>6</sup>.

$$\|z(t)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \int_0^\infty z(t)_i^2 dt = \int_0^\infty z(t)' z(t) dt = \mathcal{E}, \quad (3.78)$$

O teorema de Parseval (abaixo) é um resultado importante pois permite relacionar energia de um sinal, definida no domínio do tempo, com a transformada de Fourier do sinal.

**Teorema 3.5** (*Teorema de Parseval*) *Seja  $f(t)$  um sinal real causal com energia limitada e  $F(jw)$  a sua transformada de Fourier. Então, a seguinte relação envolvendo a energia  $\mathcal{E}$  do sinal  $f(t)$  é verdadeira:*

$$\mathcal{E} = \int_0^\infty f(t)' f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(jw)^* F(jw) dw \quad (3.79)$$

A seguir, apresenta-se a definição da norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas nominais além dos métodos utilizados na sua determinação numérica.

Considere o seguinte sistema nominal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  a entrada de perturbações,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  as saídas de interesse, e  $A, B_w, C_z$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

<sup>5</sup>A resposta em frequência de um sistema linear invariante estável caracteriza a resposta de regime permanente para excitações senoidais de diversas frequências. Em resumo, para uma excitação  $w(t) = A \sin(w_0 t)$  a resposta em regime permanente do sistema  $Z(s) = H(s)W(s)$  é  $z(t) = B \sin(w_0 t + \phi)$  onde  $B = A |H(jw_0)|$  e  $\phi = \angle H(jw_0)$ .

<sup>6</sup>Note que  $z(t)' z(t) = \sum_{i=1}^n z_i(t)^2$ .



O sistema acima pode ser representado no domínio da frequência pela seguinte matriz de transferência:

$$H(s) = C_z(sI - A)^{-1}B_w \quad (3.81)$$

No caso SISO ( $n_w = n_z = 1$ ) norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser definida como a energia da saída quando o sistema é excitado por um impulso. Assim, considerando que no sistema (3.80)  $n_w = 1$  e  $n_z = 1$ , a relação entrada-saída pode ser representada pela função de transferência  $H(s) = H_{wz}(s)$ , conforme o diagramas de blocos visto na Figura 3.4.

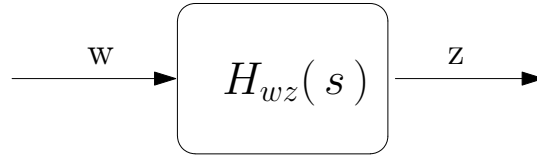


Figura 3.4: Diagrama de Blocos para o sistema (3.80).

A energia da resposta ao impulso é então dada por:

$$\|z(t)\|_2^2 = \int_0^\infty z(t)^2 dt = \mathcal{E}, \quad (3.82)$$

onde  $z(t)$  é o sinal de saída. Da figura 3.4, verifica-se que

$$Z(s) = H(s)W(s)$$

Como o sinal de entrada  $w(t)$  é um impulso na origem<sup>7</sup> tem-se que  $W(s) = 1$  e portanto  $z(t) = h(t)$ . Como  $h(t)$  representa o operador entrada-saída do sistema definimos como norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema a energia da resposta ao impulso

$$\|h(t)\|_2^2 = \int_0^\infty h(t)^2 dt \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (3.83)$$

ou de forma alternativa no domínio da frequência (veja teorema de Parseval)

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty H(jw)^* H(jw) dw = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty H(jw)^* H(jw) dw \quad (3.84)$$

Argumentos similares a esses podem ser usados para a definição da norma  $\mathcal{H}_2$  para sistema MIMO. Considere o caso de um sistema sujeito à duas entradas e duas saídas, descrito na Figura 3.6.

Perceba que agora o operador entrada-saída é representado pela matriz de transferência  $H(s)$  implicando que

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] = \begin{bmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t) \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

<sup>7</sup>Baseado na relação frequencial  $Z(jw) = H(jw)W(jw)$  podemos interpretar o sinal de entrada como uma ponderação que, ao ser aplicada no sistema, produz a saída. Como a transformada do impulso é uma constante dizemos que um impulso pondera igualmente todas as componentes de frequência do sistema. Nenhum outro sinal de entrada tem essa propriedade.

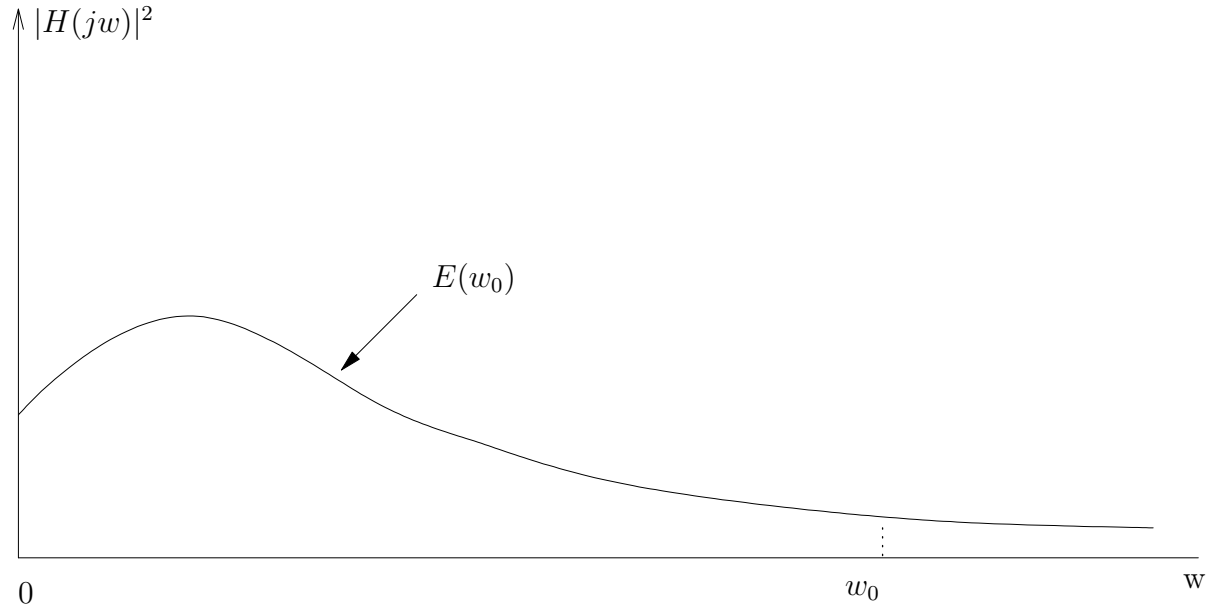


Figura 3.5: Energia do sistema (3.80) na faixa de frequência  $-\omega_0, \omega_0$ .

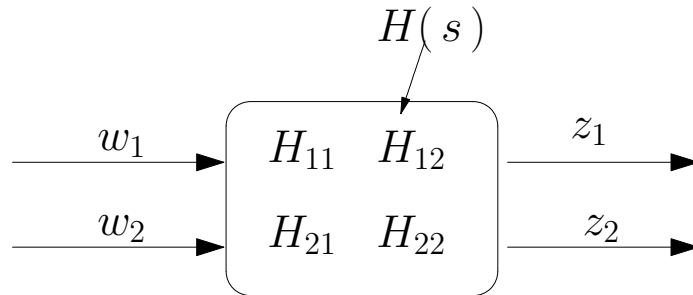


Figura 3.6: Diagrama de Blocos para o sistema (3.80) com  $n_w = 2$  e  $n_z = 2$ .

Neste caso a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema é definida como sendo a soma das energias de todas as funções  $h_{ij}(t)$ . Esta definição pode ser interpretada em termos da resposta ao impulso como segue.

Como o sistema é linear pode-se usar a idéia da superposição, e analisar de forma separada o efeito dos sinais de entrada  $w_1$  e  $w_2$ . Considerando primeiro que o sistema é afetado pelo sinal  $w(t) = w_a(t)$  correspondente à um impulso no canal  $w_1$  com  $w_2 = 0$ , o sinal de saída será dado por

$$z(t) = z_a(t) = \begin{bmatrix} h_{11}(t) \\ h_{21}(t) \end{bmatrix}$$

Considerando agora o sinal  $w(t) = w_b(t)$  correspondente à um impulso no canal  $w_2$  com  $w_1 = 0$ , o sinal de saída será dado por

$$z(t) = z_b(t) = \begin{bmatrix} h_{12}(t) \\ h_{22}(t) \end{bmatrix}.$$

Desta forma a energia total do sistema é expressa por

$$\mathcal{E}_{total} = \int_0^\infty z_a(t)' z_a(t) dt + \int_0^\infty z_b(t)' z_b(t) dt \quad (3.86)$$

que pode ser reescrita como<sup>8</sup>:

$$\mathcal{E}_{total} = \sum_{i,j} \int_0^\infty h_{ij}(t)^2 dt = \int_0^\infty \text{tr} \{h(t)' h(t)\} dt \quad (3.87)$$

Da mesma forma como a norma 2 de um sinal  $x(t)$  é obtida através da energia das componentes do vetor, i.e.  $\|x(t)\|_2^2 = \sum_i \int_0^\infty x_i(t)^2 dt$ , a norma 2 da matriz  $h(t)$  é obtida através da energia das componentes da matriz, i.e.  $\|h(t)\|_2^2 = \sum_{i,j} \int_0^\infty h_{ij}(t)^2 dt$ . Lembrando que a soma do quadrado dos elementos da matriz  $h(t)$  pode ser expressa como  $\text{tr} \{h(t)' h(t)\}$  tem-se que a norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas MIMO é dada por

$$\|h(t)\|_2^2 = \sum_{i,j} \int_0^\infty h_{ij}(t)^2 dt = \int_0^\infty \text{tr} \{h(t)' h(t)\} dt \quad h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (3.88)$$

Usando o teorema de Parseval a expressão acima pode ser reescrita na forma

$$\|H(s)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i,k} \int_{-\infty}^\infty H_{ik}(j\omega)^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \text{tr} \{H^*(j\omega) H(j\omega)\} d\omega \quad (3.89)$$

onde  $H_{ik}(j\omega)$  são os elementos de  $H(j\omega)$ .

Pela definição da norma  $\mathcal{H}_2$  em (3.89), observa-se que a norma será finita somente para sistemas estáveis e estritamente próprios, isto é,  $\lim_{w \rightarrow \infty} H(jw) = 0$ .

Baseado no fato que a norma 2 de um sistema representa a energia da resposta ao impulso, podemos também usar a norma 2 para obter a energia da resposta para um sinal qualquer conhecido de energia limitada. Seja  $W(s)$  a transformada do sinal de entrada para o qual queremos calcular a energia da resposta. O sinal de resposta é então  $Z(s) = H(s)W(s)$  que pode ser visto como a resposta impulsional de um sistema auxiliar cuja função de transferência é  $\tilde{H}(s) = H(s)W(s)$ . Assim basta incorporar a transformada do sinal de entrada na função de transferência e usar os mesmos resultados anteriores desenvolvidos para resposta ao impulso.

### 3.4.1 Determinação da Norma $\mathcal{H}_2$ via gramianos

A norma  $\mathcal{H}_2$  de um sistema genérico estritamente próprio e estável é obtida a partir da anti-transformada da função de transferência

$$h(t) = C_z e^{At} B_w = \mathcal{L}^{-1}[H(s)] \quad (3.90)$$

<sup>8</sup>O traço de uma matriz quadrada  $M$ , que será denotado por  $\text{tr}\{M\}$ , é por definição a soma dos elementos da diagonal principal de  $M$  e corresponde à soma dos autovalores de  $M$ . Além disso  $\text{tr}\{MM'\} = \text{tr}\{M'M\}$  e corresponde à soma do quadrado de todos os elementos de  $M$ .

Substituindo a expressão acima em (3.88) obtém-se:

$$\|H(s)\|_2^2 = \int_0^\infty \text{tr}\{B'_w e^{A't} C'_z C_z e^{At} B_w\} dt \quad (3.91)$$

$$= \text{tr}\left\{B'_w \left(\int_0^\infty e^{A't} C'_z C_z e^{At} dt\right) B_w\right\} \quad (3.92)$$

$$= \text{tr}\{B'_w P_o B_w\} \quad (3.93)$$

onde a matriz simétrica positiva definida

$$P_o = \int_0^\infty e^{A't} C'_z C_z e^{At} dt$$

é conhecida como gramiano de observabilidade, a qual pode ser obtida pela solução da seguinte equação de Lyapunov:

$$A' P_o + P_o A + C'_z C_z = 0 \quad (3.94)$$

Devido à comutatividade do operador  $\text{tr}\{\cdot\}$  é possível inverter os termos na expressão (3.88) levando à seguinte expressão dual da norma  $\mathcal{H}_2$ :

$$\|H(s)\|_2^2 = \text{tr}\left\{C_z \left(\int_0^\infty e^{At} B_w B'_w e^{A't} dt\right) C'_z\right\} \quad (3.95)$$

$$= \text{tr}\{C_z P_c C'_z\} \quad (3.96)$$

onde  $P_c$  é uma matriz simétrica definida positiva, conhecida como gramiano de controlabilidade, dada por:

$$P_c = \int_0^\infty e^{At} B_w B'_w e^{A't} dt$$

De maneira similar ao gramiano de observabilidade, a matriz  $P_c$  pode ser obtida através da resolução da seguinte equação de Lyapunov:

$$A P_c + P_c A' + B_w B'_w = 0 \quad (3.97)$$

Os gramianos de controlabilidade e observabilidade  $P_c, P_o$  podem ser facilmente calculados por métodos numéricos eficientes. No entanto, para sistemas incertos os gramianos acima são de pouca utilidade pois não podem ser obtidos numericamente. Para contornar essa dificuldade podemos utilizar LMIs para obter um limitante superior para a norma.

### 3.4.2 Determinação da Norma $\mathcal{H}_2$ via LMIs

Na seção 3.2.6 mostrou-se que toda solução  $P$  da desigualdade

$$A' P + P A + C'_z C_z < 0 \quad (3.98)$$

satisfaz a relação  $P > P_o$  e que podemos obter a igualdade  $P = P_o$  com a precisão desejada. Assim temos a seguinte relação

$$\text{tr}\{B'_w P B_w\} > \text{tr}\{B'_w P_o B_w\} = \|H(s)\|_2^2$$

e podemos resolver o problema de cálculo da norma  $\mathcal{H}_2$  através de um problema de otimização convexa

$$\|H(s)\|_2^2 = \min_P \left\{ \text{tr}\{B'_w P B_w\} : P > 0, A'P + PA + C'_z C_z < 0 \right\} \quad (3.99)$$

com a segurança de que a igualdade acima ocorre com a precisão desejada.

Do ponto de vista prático, a diferença entre o valor obtido por meio da LMI e a solução exata dada pelo gramiano pode ser controlada ajustando-se a precisão do algoritmo utilizado.

**Exemplo 3.14** *Considere o seguinte sistema nominal:*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w, \quad z = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.100)$$

O valor exato na norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema acima pode ser obtido através da expressão  $\|H(s)\|_2 = \sqrt{\text{tr}\{B'_w P_o B_w\}}$ , onde  $P_o$  satisfaz a equação (3.94). Utilizando a função `lyap(·)` do Scilab, obtém-se o seguinte resultado:

```
-->[Po]=lyap(A,-Cz'*Cz,'c')
Po =
!   0.5   0.5 !
!   0.5   0.5 !

-->norma_h2=trace(Bw'*Po*Bw)
norma_h2 =
0.5
```

Equivalentemente, pode-se determinar a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (3.100) através do seguinte problema de otimização:

$$\min_{P_o} \text{tr}\{B'_w P_o B_w\} : P_o > 0, A'P_o + P_o A + C'_z C_z < 0$$

Utilizando o `LMITool` do Scilab com uma precisão (`abstol = 1e-10`, `reltol = 1e-10`), obtém-se o mesmo resultado:

```
-->[Po,norma_h2]=H2()
```

Construction of canonical representation

Basis Construction

FEASIBILITY PHASE.

primal obj.	dual obj.	dual. gap
1.36e+00	-1.33e+03	1.33e+03
-8.69e+02	-1.32e+03	4.52e+02

Target value reached

feasible solution found

OPTIMIZATION PHASE.

primal obj.	dual obj.	dual. gap
2.77e+03	-1.51e+06	1.52e+06
2.83e+05	-1.50e+06	1.78e+06
.	.	.
.	.	.
-5.00e-01	-5.00e-01	5.72e-08
-5.00e-01	-5.00e-01	5.93e-09

optimal solution found

norma\_h2 =  
0.5

Po =  
! 0.5000000 0.5000000 !  
! 0.5000000 0.5 !

### 3.4.3 Limitantes da Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas incertos

Um sistema linear incerto pode ser genericamente representado por

$$\dot{x}(t) = A(\alpha)x(t) + B_w w(t) \quad z(t) = C_z x(t) \quad \alpha \in \Delta \quad (3.101)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $w(t) \in \mathbb{R}^r$  é o vetor de perturbação externa,  $z(t) \in \mathbb{R}^s$  é o vetor de performance,  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de parâmetros incertos,  $\Delta$  é um conjunto compacto conhecido representando os valores admissíveis de  $\alpha$  e  $A(\alpha)$  é uma função conhecida desses parâmetros. Por simplicidade na apresentação, assumiremos que  $\alpha$  é invariante no tempo e que  $B_w$  e  $C_z$  não dependem dos parâmetros incertos. Estas hipóteses podem ser removidas como veremos mais tarde.

Os gramianos para este sistema incerto podem ser obtidos diretamente da seção 3.4.1 e são indicados abaixo.

$$A(\alpha)'P_0(\alpha) + P_0(\alpha)A(\alpha) + C_z' C_z = 0 \quad (3.102)$$

$$A(\alpha)P_c(\alpha) + P_c(\alpha)A(\alpha)' + B_w B_w' = 0 \quad (3.103)$$

A norma  $\mathcal{H}_2$  desse sistema incerto é dada por

$$\|H(s, \alpha)\|_2^2 = \text{tr}\{B_w' P_o(\alpha) B_w\} = \text{tr}\{C_z P_c(\alpha) C_z'\} \quad (3.104)$$

e como  $\alpha$  não é conhecido não podemos utilizar a expressão acima para calcular a norma desse sistema incerto. Uma idéia natural nessa situação é calcular a norma para

o pior caso possível da incerteza, i.e. para o elemento de  $\Delta$  que provoca o maior valor da norma definida acima. Mesmo assim ainda não poderíamos obter o gramiano que corresponde ao pior caso pois teríamos que resolver um problema de dimensão infinita dado que  $\Delta$  possui infinitos elementos. Se ao invés de calcularmos o valor exato do pior caso da norma, nos contentarmos com um limitante superior do pior caso podemos utilizar os resultados da seção 3.4.2 para resolver numericamente esse problema.

Considere as desigualdades abaixo onde  $P, S$  são independentes de  $\alpha$ .

$$A(\alpha)'P + PA(\alpha) + C_z' C_z < 0 \quad (3.105)$$

$$A(\alpha)S + SA(\alpha)' + B_w B_w' < 0 \quad (3.106)$$

Como vimos na seção 3.2.6 as seguintes relações ocorrem  $P > P_0(\alpha)$  e  $S > P_c(\alpha) \forall \alpha \in \Delta$ . Logo, as desigualdades acima sugerem os seguintes limitantes superiores para o pior caso da norma  $\mathcal{H}_2$ :

$$\begin{aligned} \|H(s, \alpha)\|_2^2 &< \text{tr}\{B_w' P B_w\} \\ \|H(s, \alpha)\|_2^2 &< \text{tr}\{C_z' S C_z\} \end{aligned} \quad (3.107)$$

Infelizmente não é possível saber a priori qual dos dois limitantes é menos conservador (i.e. fornece o menor valor). Entretanto basta que  $A(\alpha)$  seja afim em  $\alpha$  e que  $\Delta$  seja um politopo podemos calcular os limitantes acima de forma bastante eficiente. Basta construir as LMIs (3.105) ou (3.106) para os vertices do politopo e minimizar  $\text{tr}\{B_w' P B_w\}$  ou  $\text{tr}\{C_z' S C_z\}$  respectivamente.

### 3.5 Norma $\mathcal{H}_\infty$ de Sistemas

Considere o seguinte sistema nominal

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{wz} w(t), \quad x(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  a entrada de perturbações,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  as saídas de interesse, e  $A, B_w, C_z, D_{wz}$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas. Este sistema pode ser representado no domínio da frequência pela seguinte matriz de transferência:

$$H_{wz}(s) = C_z(sI - A)^{-1}B_w + D_{wz}$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (3.108) é definida como o maior ganho da sua resposta em frequência<sup>9</sup>. Como na seção anterior, antes de apresentar a definição geral de norma  $\mathcal{H}_\infty$ , considera-se o caso de sistemas SISO onde a entrada  $w$ , a saída  $z$  e a função de transferência  $H_{wz}(s)$  indicados no diagrama 3.7 são escalares.

A Figura 3.8 mostra a resposta em frequência deste sistema, onde  $M_r$  representa o pico de ressonância e  $\omega_r$  é a frequência de ressonância.

<sup>9</sup>A resposta em frequência de um sistema linear invariante estável caracteriza a resposta de regime permanente para excitações senoidais de diversas frequências. Em resumo, para uma excitação  $w(t) = A \sin(w_0 t)$  a resposta em regime permanente é  $z(t) = B \sin(w_0 t + \phi)$  onde  $B = A |H_{wz}(jw_0)|$  e  $\phi = \angle H_{wz}(jw_0)$ .

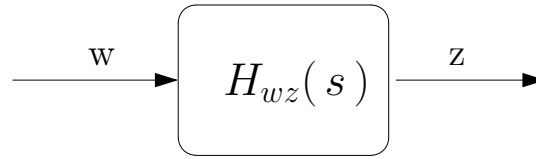


Figura 3.7: Relação entrada/saída.

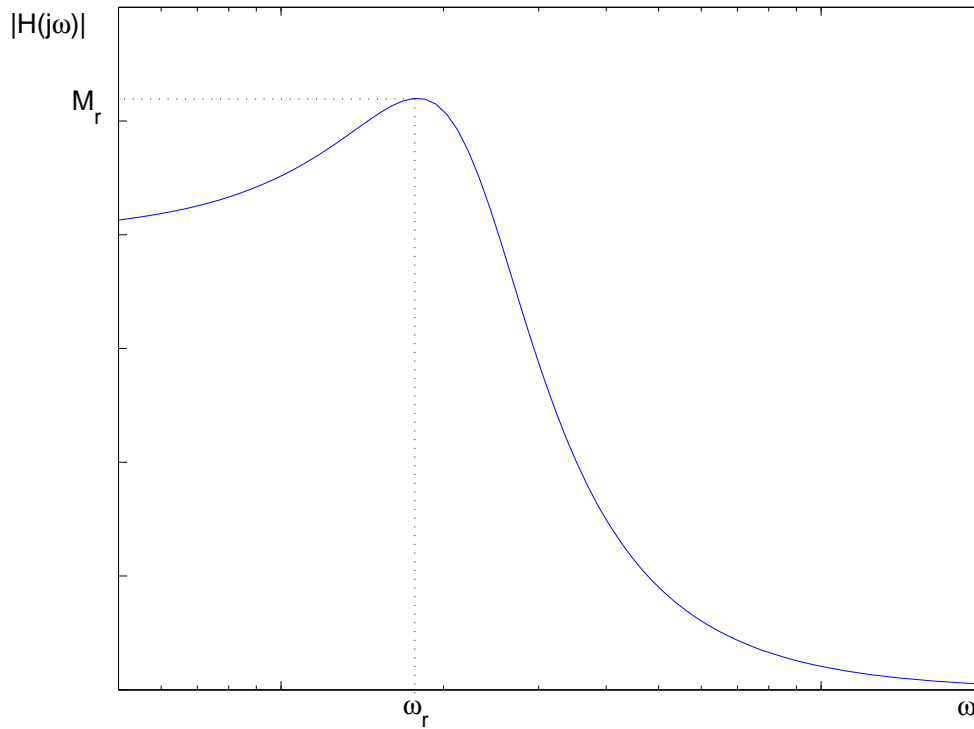


Figura 3.8: Diagrama de Bode

Note que o pico de ressonância é o maior ganho que o sistema é capaz de oferecer ao sinal de entrada. Desta forma, para o caso de sistemas SISO, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser descrita como

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \max_w |H(jw)| = M_r \quad (3.109)$$

No caso de sistemas MIMO a idéia de módulo não se aplica e deve ser substituída pela norma espectral da matriz de transferência<sup>10</sup>. Assim, um diagrama de Bode similar ao da figura 3.8 pode ser obtido para a função  $\|H_{wz}(j\omega)\| = \bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\}$  e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema corresponde ao pico de ressonância dessa função dando origem à definição

<sup>10</sup>A norma espectral é a norma de matrizes induzida pela norma Euclidiana de vetores, i.e. para vetores  $y, w$  e uma matriz  $M$  satisfazendo  $y = Mw$  temos  $\|y\| = \|Mw\| \leq \|M\| \|w\|$ . Ela é definida como sendo  $\|M\| = \bar{\sigma}\{M\}$  onde  $\bar{\sigma}\{M\}$  denota o valor singular máximo de  $M$ . Os valores singulares ( $\sigma_i$ ) de uma matriz  $M$  são definidos como sendo a raiz quadrada dos autovalores de  $M^*M$ , i.e.  $\sigma_i(M) = \sqrt{\lambda_i(M^*M)}$  onde  $M^*$  é matriz complexa conjugada transposta de  $M$ . Note que os valores singulares são reais e não negativos.



$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup_w \bar{\sigma}\{H_{wz}(jw)\} \quad (3.110)$$

Note que se  $H_{wz}(jw)$  for uma função escalar então  $\bar{\sigma}\{H_{wz}(jw)\} = |H_{wz}(jw)|$ , retornando à expressão (3.109) para o caso de sistemas SISO.

Como já foi salientado a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema representa o maior ganho da sua resposta em frequência e pode também ser vista como o maior ganho em termos de energia que o sistema pode oferecer a um sinal de entrada (Burl, 1999). Esta interpretação é bastante útil e fornece uma definição alternativa para a norma  $\mathcal{H}_\infty$ . Pelo teorema de Parseval temos

$$\|w(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega, \quad \|z(t)\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty Z(j\omega)^* Z(j\omega) d\omega$$

onde  $W(j\omega), Z(j\omega)$  são as transformadas de Fourier dos sinais  $w(t), z(t)$ . Como  $Z(j\omega) = H_{wz}(j\omega)W(j\omega)$  temos

$$\begin{aligned} \|z(t)\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(j\omega)^* H_{wz}(j\omega)^* H_{wz}(j\omega) W(j\omega) d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (\bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\})^2 W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega \\ &\leq (\sup_w \bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\})^2 \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty W(j\omega)^* W(j\omega) d\omega \end{aligned} \quad (3.111)$$

Esta última expressão pode ser reescrita na forma

$$\|z(t)\|_2 \leq \|H_{wz}(s)\|_\infty \|w(t)\|_2$$

onde se nota que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema pode também ser vista como o maior ganho em termos de energia que o sistema pode oferecer a um sinal de entrada. Se escolhermos o sinal de entrada  $W(j\omega)$  adequadamente<sup>11</sup> podemos ter a igualdade  $\|z(t)\|_2 = \|H_{wz}(s)\|_\infty \|w(t)\|_2$ . Para isso basta escolher  $w(t) = V_0 \text{sen}(\omega_0 t) G_T(t)$  onde  $V_0$  é o autovetor de  $H_{wz}(j\omega_0)^* H_{wz}(j\omega_0)$  correspondente ao seu maior autovalor,  $\omega_0$  é a frequência onde ocorre o  $\sup_w \bar{\sigma}\{H_{wz}(j\omega)\}$  e  $G_T(t)$  é a função porta<sup>12</sup> que define o truncamento do sinal para  $T$  suficientemente grande (veja nota de rodapé). Os elementos do vetor  $V_0$  são as amplitudes das senóides de cada componente do vetor  $w(t)$ . Um valor negativo de uma das componentes de  $V_0$  indica uma defasagem de 180 graus dado que  $-\text{sen}(\omega t) = \text{sen}(\omega t + \pi)$ .

A partir dessa relação pode-se definir a versão no domínio tempo da norma  $\mathcal{H}_\infty$  como:

$$\|H_{zw}(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} \quad (3.112)$$

<sup>11</sup>Note que sinais de entrada persistentes do tipo degrau ou senóides não possuem energia finita e portanto para eles não podemos calcular  $\|w(t)\|_2$  nem tampouco a norma da resposta do sistema  $\|z(t)\|_2$ . Para obter a resposta em frequência com sinais de energia finita basta considerar senóides truncadas num instante de tempo suficientemente grande de tal forma que o regime estacionário da resposta seja atingido com a precisão desejada.

<sup>12</sup>A função porta  $G_T(t)$  é definida como  $G_T(t) = 1$  para  $|t| < T$  e zero caso contrário.

### 3.5.1 Determinação da Norma $\mathcal{H}_\infty$ sub-ótima

Uma das maneiras de determinar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de um sistema nominal é através da sua resposta em frequência. Para sistemas com uma entrada e uma saída (SISO) pode-se utilizar o diagrama de Bode para obter o ganho máximo do sistema com relação a todas as frequências. Entretanto, o conceito de resposta em frequência para sistemas com múltiplas entradas e saídas (MIMO) é mais complexo e pode ser obtido através da noção da decomposição pelo valor singular (Burl, 1999; Zhou, 1998).

Ao invés de determinar o valor exato da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , uma idéia bastante comum consistem em se determinar numericamente um limitante superior  $\gamma$  para  $\|H_{wz}(s)\|_\infty$  utilizando a definição (3.112), em outras palavras, busca-se um escalar positivo tal que:

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty < \gamma \quad (3.113)$$

O problema de encontrar o limitante acima é conhecido como problema  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo. Para encontrar o valor exato da norma basta minimizar  $\gamma$  de forma iterativa.

Este problema pode ser resolvido de diversas maneiras, como por exemplo pela equação de Riccati (Zhou, 1998, Capítulo 12), pela matriz Hamiltoniana (Burl, 1999, Apêndice) ou por LMI (Boyd et al., 1994).

### 3.5.2 Determinação da Norma $\mathcal{H}_\infty$ via LMI

Primeiro observe que a condição desejada

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{w \neq 0} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = \sup_{w \neq 0} \sqrt{\frac{\int_0^\infty z(t)' z(t) dt}{\int_0^\infty w(t)' w(t) dt}} < \gamma \quad (3.114)$$

pode ser reescrita na forma

$$\int_0^\infty z(t)' z(t) dt < \gamma^2 \int_0^\infty w(t)' w(t) dt \quad (3.115)$$

Como o sistema é exponencialmente estável, i.e.  $x(\infty) = 0$  e as condições iniciais são nulas, i.e.  $x(0) = 0$ , considere o problema de determinar uma função  $V(x) = x(t)' P x(t)$ , onde  $P$  é uma matriz simétrica definida positiva, tal que

$$\dot{V}(x) + z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t) < 0 \quad (3.116)$$

onde  $\dot{V}(x)$  é a derivada de  $V(x)$  para as trajetórias do sistema. Observe que se encontramos  $V(x)$  que satisfaça a condição acima então teremos (3.115) e portanto (3.114) satisfeitas. Para recuperar (3.115) basta integrar (3.116) no intervalo  $t \in (0, T)$  com  $T \rightarrow \infty$ . O interesse da condição acima é que podemos expressá-la como uma LMI. Para isso basta notar que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) + z(t)' z(t) - \gamma^2 w(t)' w(t) = \\ \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} (A'P + PA + C_z' C_z) & (PB_w + C_z' D_{wz}) \\ (B_w' P + D_{wz}' C_z) & -\gamma^2 I_{n_w} + D_{wz}' D_{wz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

que nos leva à LMI

$$\begin{bmatrix} (A'P + PA + C'_z C_z) & (PB_w + C'_z D_{wz}) \\ (B'_w P + D'_{wz} C_z) & -\gamma^2 I_{n_w} + D'_{wz} D_{wz} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.117)$$

Este resultado, conhecido como “*Bounded Real Lemma*”, é na realidade uma condição necessária e suficiente para (3.114) (Boyd et al., 1994). Isto implica que o valor exato da norma pode ser obtido, com a precisão desejada, através do problema de otimização convexa:

$$\min_P \gamma^2 : \begin{cases} P > 0, \\ \begin{bmatrix} (A'P + PA + C'_z C_z) & (PB_w + C'_z D_{wz}) \\ (B'_w P + D'_{wz} C_z) & -\gamma^2 I_{n_w} + D'_{wz} D_{wz} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (3.118)$$

**Exemplo 3.15** Considere o sistema (3.100). O valor exato da norma  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser obtido diretamente do diagrama de Bode apresentado na Figura 3.9, onde conclui-se que  $\|H_{wz}(s)\|_\infty = 1.00$  (na frequência  $\omega = 0$ ).

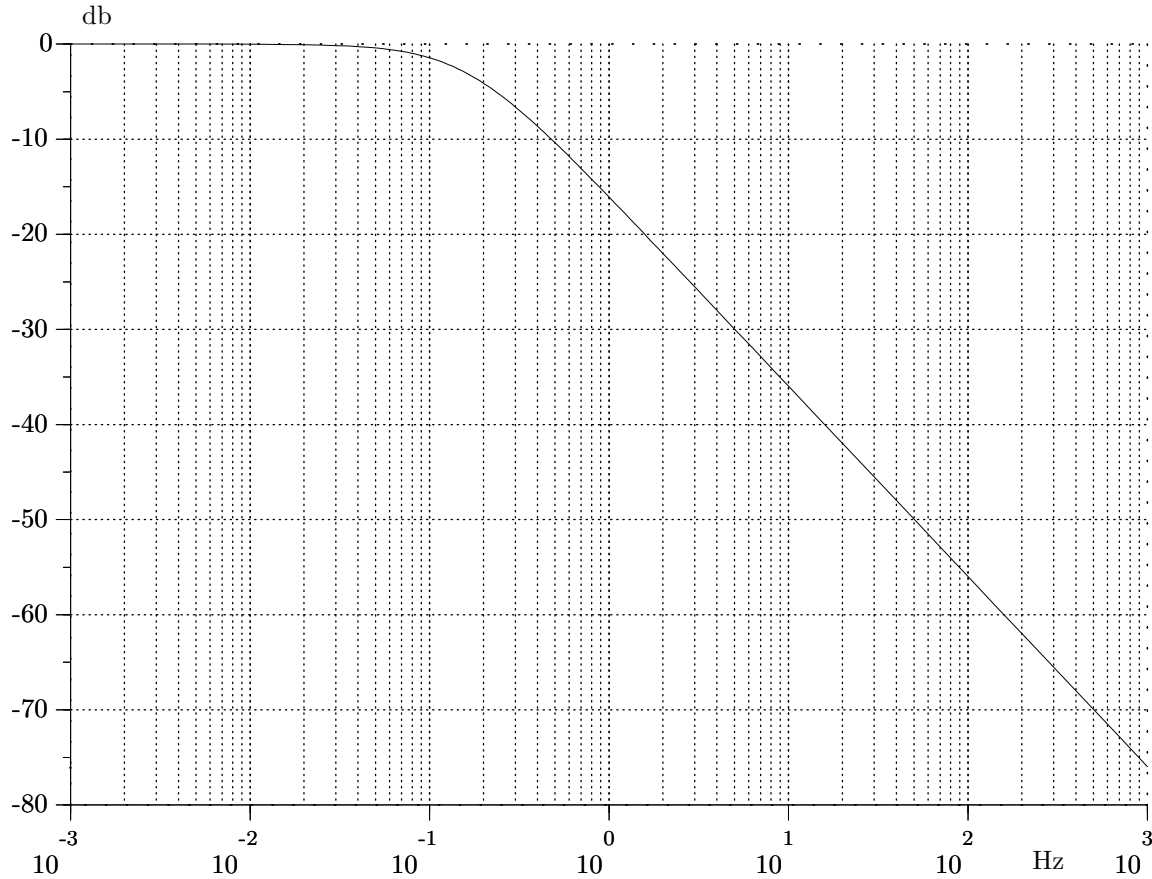


Figura 3.9: Diagrama de Bode para o sistema (3.100).

Alternativamente, pode-se obter uma estimativa da norma  $\mathcal{H}_\infty$  através do problema de otimização definido em (3.118). Utilizando o LMITOOL do Scilab, obtém-se:

```

-->[P,g]=Hinf()

Construction of canonical representation

Basis Construction

FEASIBILITY PHASE.

primal obj.  dual obj.  dual. gap

    1.39e+00    -1.56e+03    1.57e+03
   -1.25e+01    -1.56e+03    1.55e+03
        .          .          .
        .          .          .
        .          .          .
    9.35e-09    -5.39e-08    6.32e-08
    1.10e-09    -8.52e-09    9.62e-09

optimal solution found
g  =

    1.
P  =

!    0.9999670    1.000015  !
!    1.000015    2.3607682 !

-->norma_hinf=sqrt(g)
norma_hinf  =

    1.

```

### 3.5.3 Limitante da Norma $\mathcal{H}_\infty$ para sistemas incertos

Considere o seguinte sistema linear incerto

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_w w(t) & \alpha \in \Delta \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{wz} w(t), \quad x(0) = 0\end{aligned}\tag{3.119}$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  a entrada de perturbações,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  as saídas de interesse, e  $B_w, C_z, D_{wz}$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas,  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de parâmetros incertos,  $\Delta$  é um conjunto compacto conhecido representando os valores admissíveis de  $\alpha$  e  $A(\alpha)$  é uma função conhecida desses parâmetros. Por simplicidade na apresentação, assumiremos que  $\alpha$  é invariante no tempo e que  $B_w, C_z, D_{wz}$  não dependem dos parâmetros incertos. Estas hipóteses podem ser removidas como veremos mais tarde.

Este sistema incerto pode ser representado no domínio da frequência pela seguinte matriz de transferência:

$$H_{wz}(s, \alpha) = C_z(sI - A(\alpha))^{-1}B_w + D_{wz}$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema incerto (3.119) é definida como o máximo ganho do sistema com relação à todas as frequências e todos os possíveis valores de incerteza.

$$\|H_{wz}(s)\|_\infty = \sup_{\substack{w \neq 0 \\ \alpha \in \Delta}} \frac{\|z(t)\|_2}{\|w(t)\|_2} = \sup_{\substack{w \neq 0 \\ \alpha \in \Delta}} \sqrt{\frac{\int_0^\infty z(t)' z(t) dt}{\int_0^\infty w(t)' w(t) dt}} < \gamma \quad (3.120)$$

Procedendo de maneira análoga à seção anterior obtemos a seguinte condição para o cálculo exato da norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema incerto:

$$\min_{P(\alpha)} \gamma^2 : \begin{cases} P(\alpha) > 0, \\ \begin{bmatrix} (A(\alpha)'P(\alpha) + P(\alpha)A(\alpha) + C_z' C_z) & (P(\alpha)B_w + C_z' D_{wz}) \\ (B_w' P(\alpha) + D_{wz}' C_z) & -\gamma^2 I_{n_w} + D_{wz}' D_{wz} \end{bmatrix} < 0 \quad \forall \alpha \in \Delta \end{cases} \quad (3.121)$$

Observe que o problema acima não pode ser numericamente resolvido de forma eficiente porque a desigualdade matricial envolve uma função não afim nos parâmetros incertos devido ao produto  $A(\alpha)P(\alpha)$  e seu transposto. Esta não-linearidade causada pelo produto pode ser eliminada se nos contentarmos com um limitante superior para o valor exato da norma dado por (3.121). Por exemplo, restringindo-se a matriz  $P(\alpha)$  a ser a mesma para todo  $\alpha$ , i.e.  $P(\alpha) = P$  o produto indesejado é eliminado. Entretanto o menor valor de  $\gamma$  obtido de (3.121) com  $P(\alpha) = P$  é em geral maior que o valor exato obtido de (3.121) com  $P(\alpha)$  livre. Esse limitante superior, mesmo podendo ser conservador em geral, pode ser obtido numericamente de forma eficiente quando  $A(\alpha)$  é afim em  $\alpha$  e  $\Delta$  é um politopo de vértices  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^m$  conhecidos. Nessas condições basta resolver  $2^m$  LMIs simultâneas obtidas de (3.121) para  $\alpha = v_i$ ,  $i = 1, \dots, 2^m$ .

**Exercício 3.5** *Mostre através do complemento de Schur que a desigualdade (3.117) pode ser reescrita na forma*

$$\begin{bmatrix} A'P + PA & PB_w & C_z' \\ B_w' P & -\gamma^2 I_{n_w} & D_{wz}' \\ C_z & D_{wz} & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0$$

Suponha em seguida que  $A, B_w, C_z, D_{wz}$  sejam funções afins de um parâmetro incerto  $\alpha$  como em (3.119). Nessas condições, com  $P$  independente de  $\alpha$ , seria possível minimizando  $\gamma$  na desigualdade acima, obter o valor exato da norma em (3.121)? Seria possível encontrar um valor de  $\gamma$  menor que o exato? Supondo que a norma<sup>13</sup> da matriz  $D_{wz}$  seja  $\|D_{wz}\|_2 = \sigma$ , seria possível obter  $\gamma < \sigma$  na LMI acima?

**Exercício 3.6** *Mostre que a LMI do exemplo anterior, obtida de (3.117) para o sistema (3.108), pode ser reescrita na forma*

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ & B_w & QC_z' \\ B_w' & -\gamma I_{n_w} & D_{wz}' \\ C_z Q & D_{wz} & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0$$

*Sugestão: Use o fato de que uma matriz  $M$  é positiva definida se e somente se  $T'MT > 0$  para qualquer matriz  $T$  inversível. Em particular escolha  $T = \text{diag}\{\gamma^{\frac{1}{2}}P^{-1}, \gamma^{-\frac{1}{2}}I_{n_w}, \gamma^{\frac{1}{2}}I_{n_z}\}$  e faça a mudança de variável  $Q = \gamma P^{-1}$ .*

<sup>13</sup>Utilize como norma de matrizes a norma spectral que é a norma induzida da norma-2 e corresponde ao seu valor singular máximo

## 3.6 Notas e Referências

### Estabilidade

A condição de estabilidade quadrática (3.23) pode ser caracterizada na sua forma dual. Com este objetivo, considere a seguinte função de Lyapunov  $V(x) = x' P^{-1} x$ . Pré- e pós-multiplicando a LMI (3.23) por  $P^{-1}$  leva a seguinte expressão:

$$\exists Q > 0 : A(t)Q + QA(t)' < 0$$

onde  $Q = P^{-1}$ .

### Estabilidade- $\mathcal{D}$

Existem outras formas para representar-se sub-regiões do plano complexo como a classe de regiões polinomiais proposta em (Gutman and Jury, 1981) e definida a seguir:

$$\mathcal{D} = \left\{ s \in \mathbb{C} : \sum_{0 \leq (i,j) \leq n_d} a_{ij} s^i (s^*)^j < 0 \right\},$$

onde os coeficientes  $a_{ij}$  são reais satisfazendo  $a_{ij} = a_{ji}$ . Entretanto a classe acima definida não é suficientemente genérica para representar todas as regiões normalmente utilizadas em situações práticas, além de não ser adequada para a síntese de controladores com alocação de pólos (Chilali and Gahinet, 1996).

Recentemente em (Peaucelle, 2000) foi proposta uma extensão das regiões LMIs denominada de regiões EMI, na qual obtém-se uma caracterização compacta do resultado apresentado no Teorema 3.4.

### Norma $\mathcal{H}_2$

Uma outra interpretação para a norma  $\mathcal{H}_2$  pode ser obtida no contexto estocástico, onde considera-se um sistema sujeito a uma entrada com sinal ruído branco (Colaneri et al., 1997). Por exemplo, seja a entrada do sistema (3.80) um sinal ruído branco com média nula e variância  $\mathbf{E}[w(t)w'(t)] = I_{n_w}$ . O valor médio quadrático da potência do sinal de saída é dada por:

$$\mathbf{E}[y'(t)y(t)] = \text{tr} \left\{ B_w' \left( \int_0^\infty (e^{A't} C_z' I_{n_w} C_z e^{At}) dt \right) B_w \right\} = \text{tr} \{ B_w' P_o B_w \} = \|H_{wz}(s)\|_2^2$$

onde  $P_o$  é a solução da equação (3.94). De maneira similar a análise acima, a norma  $\mathcal{H}_2$  também pode ser vista como o custo quadrático de um sistema autônomo onde a condição inicial  $x(0) = x_0$  é uma variável aleatória com média zero e variância  $\mathbf{E}[x_0 x_0'] = B_w B_w'$ . Para demonstrar esta interpretação, considere o sistema (3.80) com  $n_z = n_w = 1$ ,  $w(t) \equiv 0$ ,  $x(0) = x_0$ , isto é,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax, x(0) = x_0 \\ z &= Cx \end{aligned} \tag{3.122}$$

e a seguinte função custo:

$$J = \mathbf{E} \left[ \int_0^\infty z'(t)z(t)dt \right]$$

Sabe-se da teoria de controle, veja por exemplo (Zhou, 1998, Capítulo 13), que:

$$\int_0^\infty z'(t)z(t)dt \leq x_0' P_o x_0$$

Portanto, a função custo  $J$  pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$J \leq \mathbf{E}[x_0' P_o x_0] = B_w' P_o B_w = \|H_{wz}(s)\|_2^2$$

Este resultado pode ser estendido para sistemas MIMO redefinindo a função custo da seguinte forma:

$$J = \sum_{i=1}^{n_z} \int_0^\infty \mathbf{E}[z_i'(t)z_i(t)]dt, \quad (3.123)$$

onde  $z_i(t)$  é a resposta de (3.80) para a condição inicial  $x_{0_i}$ , onde  $\mathbf{E}[x_{0_i}x_{0_i}'] = B_{w_i}' B_{w_i}$ .

Quando as matrizes  $B_w, C_z$  possuem elementos incertos os limitantes em (3.107) não podem ser calculados diretamente via LMIs pois as expressões  $B_w(\alpha)' P B_w(\alpha)$  e  $C_z(\alpha) S C_z(\alpha)'$  deixam de ser afins nos parâmetros incertos  $\alpha$ . Nos casos onde  $B_w(\alpha), C_z(\alpha)$  são afins em  $\alpha$  o seguinte artifício pode ser utilizado. Seja  $N$  uma matriz tal que  $N > B_w(\alpha)' P B_w(\alpha)$  e note que isto implica  $\text{tr}\{B_w(\alpha)' P B_w(\alpha)\} < \text{tr}\{N\}$ . Logo, devido à (3.107) concluímos que a matriz  $N$  define um limitante para a norma desejada, já que  $\|H_{wz}(s, \alpha)\|_2^2 < \text{tr}\{N\}$ . Para obter a matriz  $N$  via LMI basta aplicar o complemento de Schur na desigualdade acima o que nos leva à

$$\begin{bmatrix} N & B_w(\alpha)' P \\ P B_w(\alpha) & P \end{bmatrix} > 0$$

Um procedimento análogo se aplica para  $C_z(\alpha) S C_z(\alpha)'$ .

Quando o sistema varia no tempo o gramiano utilizado nas seções anteriores precisa ser redefinido. A expressão do gramiano nesses casos é do tipo (3.9) e pode ser encontrada em (Green and Limebeer, 1995).

## Norma $\mathcal{H}_\infty$

A inequação de Lyapunov em (3.116) utilizada na determinação de um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  implica, caso ela seja satisfeita, que o sistema é estável no sentido entrada-saída com ganho- $\mathcal{L}_2$  finito conforme a definição proposta em (Khalil, 1996, Capítulo 6).

## 3.7 Exercícios Propostos

**E 1.1** Determine numericamente a estabilidade assintótica e quando possível as normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  dos seguintes sistemas:

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - w \\ \dot{x}_2 = -3x_2 + 2w \\ z_1 = x_1 \\ z_2 = x_1 + x_2 \end{cases} \\
\text{(b)} \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 2x_2 + w \\ z = x_1 + w \end{cases} \\
\text{(c)} \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - 0.2x_3 + 0.2x_4 + w_1 \\ \dot{x}_4 = 0.5x_1 - 2.5x_2 + 0.1x_3 - 0.15x_4 + 0.5w_2 \\ z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

**E 1.2** Determine se o sistema (3.74) é  $\mathcal{D}$ -estável considerando a região na Figura 3.3(c) com  $\psi = 62.5^\circ$ .

**E 1.3** Mostre que para um sistema MIMO com condição inicial

$$x_{0R} = \sum_{i=1}^{n_z} x_{0_i}$$

onde cada  $x_{0_i}$  é uma variável aleatória com média zero e variância  $\mathbf{E}[x_{0_i}x'_{0_i}] = B'_{w_i}B_{w_i}$  a função custo quadrático  $J$  definida em (3.123) satisfaz

$$J \leq \text{tr}\{B'_w P_o B_w\},$$

onde  $P_o$  é a solução do gramiano de observabilidade e  $B_w = [B_{w_1} \cdots B_{w_{n_z}}]$ .





## Capítulo 4

# Controle via Realimentação de Estados

O projeto de controladores para sistemas dinâmicos visa estabilizar o sistema em malha fechada e, em geral, deve-se satisfazer restrições adicionais como, por exemplo, resposta transitória, rejeição de perturbações e limitações no sinal de controle. Podemos classificar as estruturas de controle de acordo com o tipo de informação que é injetado no controlador. Quando o sinal de controle é construído com informações dos medidores de todas as variáveis de estado dizemos que o controle é de realimentação de estados. Quando o sinal de controle é construído com informações dos medidores de um subconjunto das variáveis de estado, que chamaremos de variáveis de saída, dizemos que o controle é de realimentação de saída. Como na grande maioria dos casos não é possível (ou economicamente inviável) medir todas as variáveis de estados, a realimentação de saída é a solução mais comum na prática. No entanto a realimentação de estados possui propriedades importantes e, além disso, veremos nos próximos capítulos que podemos construir um controlador de saída a partir da realimentação de estados simplesmente estimando as variáveis de estado para as quais não temos medidores disponíveis.

Neste capítulo estudaremos várias técnicas de projeto de realimentação de estados. Para precisar o problema que gostaríamos de resolver, considere o seguinte sistema linear:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) \quad (4.1)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  o sinal de controle,  $A, B_u$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

Suponha que dispomos de medidores para todas as variáveis de estado. Gostaríamos de determinar uma lei de controle do tipo  $u(t) = Kx(t)$  onde  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  é a matriz de ganhos de realimentação a ser determinada de tal forma que o sistema em malha fechada satisfaça os seguintes requisitos: (i) o regime permanente seja atingido, isto é o sistema seja exponencialmente estável e (ii) que a resposta transitória satisfaça certos critérios de desempenho desejados.

Observe que a todo instante de tempo o valor das variáveis de estado  $x(t)$  está disponível na saída dos medidores e portanto o sinal de controle  $u(t) = Kx(t)$  pode ser aplicado instantaneamente nos atuadores do sistema. Por exemplo, para um sistema que possui dois atuadores com sinais de controle  $u_1$  e  $u_2$  e quatro estados com valores

medidos  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , teríamos

$$\begin{aligned} u_1 &= k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + k_{13}x_3 + k_{14}x_4 \\ u_2 &= k_{21}x_1 + k_{22}x_2 + k_{23}x_3 + k_{24}x_4 \end{aligned}$$

onde as constantes  $k_{ij}$  são os ganhos de realimentação a serem determinados. Na forma matricial  $u(t) = Kx(t)$  as expressões acima se tornam

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$

Observe que o sinal da realimentação está atrelado aos ganhos  $k_{ij}$  a serem determinados.

Observe ainda que o sistema (4.1) em malha fechada com a lei de controle  $u(t) = Kx(t)$  é dado por

$$\dot{x}(t) = (A + B_u K) x(t) \quad (4.2)$$

e para que ele seja exponencialmente estável todos os autovalores da matriz  $(A + B_u K)$  devem estar no semi-plano complexo esquerdo estrito, isto é devem ter parte real estritamente negativa.

Nas seções seguintes apresentamos vários métodos para determinação da matriz de ganhos  $K$  que estabiliza o sistema em malha fechada e que atende a um conjunto de critérios de desempenho que desejamos satisfazer.

## 4.1 Alocação de pólos: abordagem clássica

Queremos nesta seção desenvolver métodos de projeto para a determinação da matriz de ganhos  $K$  da realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$  de tal forma que os pólos do sistema realimentado (4.2) estejam localizados em posições do plano complexo que podem ser arbitrariamente escolhidas pelo projetista.

A motivação para resolver o problema acima, conhecido como alocação de pólos, vem do fato de que a localização dos pólos de malha fechada define a estabilidade e está fortemente ligada ao comportamento transitório do sistema. Assim, basta o projetista escolher adequadamente a localização dos pólos de malha fechada que o sistema de controle irá funcionar como desejado tanto em regime permanente como durante o transitório. Observe entretanto que o transitório depende também dos zeros do sistema e não apenas dos pólos. Para acomodar a influência dos zeros, o projeto de alocação de pólos é feito tipicamente de forma iterativa até que os requisitos de resposta durante o transitório sejam atingidos nas simulações.

Para que possamos projetar os ganhos de realimentação de forma a atingir o desempenho desejado (a ser definido pelo projetista através da escolha dos pólos de malha fechada) o sistema de malha aberta precisa apresentar uma propriedade que foi denominada controlabilidade por Kalman em 1960 (T.Kailath, 1980).

**Definição 4.1 (Controlabilidade)** *Um sistema é controlável num instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de controle sem restrições em seus elementos, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para qualquer outro estado em um intervalo finito de tempo.*

A controlabilidade do sistema (4.1) pode ser testada verificando se o posto da matriz de controlabilidade  $U_c$  abaixo é igual à dimensão do vetor de estado do sistema.

$$U_c = \begin{bmatrix} B_u & AB_u & \dots & A^{n-1}B_u \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

Quando o sistema de malha aberta é controlável podemos escolher a localização dos pólos de malha fechada de forma arbitrária que sempre podemos encontrar uma realimentação de estados que modifica os pólos da forma desejada. O projeto dos ganhos de realimentação é bastante simples no caso de sistemas com uma entrada, uma saída (SISO) e referência nula que apresentamos a seguir. O caso de sistemas com mais de uma entrada e saída (MIMO) e referência não nula serão tratados na sequência.

#### 4.1.1 Referência nula: regulação

Perturbações estão presentes em todo sistema de controle e ao ocorrer elas forçam o sistema a sair do ponto de operação desejado. Um ponto de equilíbrio é assintoticamente estável se as variáveis de estado retornam assintoticamente ao ponto de equilíbrio depois de cessarem as perturbações. Para garantir a estabilidade de um certo ponto de equilíbrio, tipicamente linearizamos o sistema em torno do ponto de equilíbrio desejado e projetamos um controlador para estabilizar o sistema linearizado. É importante lembrar que se  $(x, u)$  representam o estado e controle do sistema linearizado e  $(h, v)$  o estado e controle do sistema não linear então temos as relações  $x = h - \bar{h}$  e  $u = v - \bar{v}$ , isto é, o modelo linear descreve na realidade as variações do estado ( $h$ ) e do controle ( $v$ ) do sistema físico no entorno do ponto de equilíbrio desejado  $(\bar{h}, \bar{v})$ . Assim um controlador projetado para que o estado linear convirja para zero também faz com que o estado do sistema físico convirja para o ponto de equilíbrio desejado. O problema de determinar um controlador para que o estado do sistema linear convirja para zero é chamado de regulação e pode ser interpretado como um problema de controle onde a referência é nula. Este é problema que iremos estudar nesta seção. Começaremos com o caso de sistema SISO e na sequência veremos o caso MIMO.

##### Método para sistemas SISO: $u \in \mathbb{R}$

Para o sistema da equação (4.1) com  $u \in \mathbb{R}$ , seja uma mudança de coordenadas  $Tz(t) = x(t)$  tal que o sistema transformado se encontre na forma canônica de controlabilidade, ou seja:

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u(t) \quad (4.4)$$

$$A_c = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

$$B_c = T^{-1}B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} V_c &= \begin{bmatrix} B_c & A_c B_c & \cdots & A_c^{n-1} B_c \end{bmatrix} \\ U_c &= \begin{bmatrix} B_u & A B_u & \cdots & A^{n-1} B_u \end{bmatrix} \\ T &= U_c V_c^{-1} \end{aligned}$$

onde  $\det(sI - A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = 0$  é o polinômio característico de malha aberta do sistema SISO em questão<sup>1</sup>.

Supondo que os medidores nos fornecem em tempo real o vetor de estados  $x(t)$ , então conseguimos também obter o vetor de estados transformados  $z(t)$ . Logo, podemos implementar a seguinte lei de controle:

$$u(t) = -K_c z(t), \quad K_c = \begin{bmatrix} k_n & k_{n-1} & \cdots & k_1 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

O problema que devemos resolver agora é encontrar  $K_c$  de forma que o sistema em malha fechada dado por:

$$\dot{z}(t) = A_c z(t) + B_c u(t) = (A_c - B_c K_c) z(t) \quad (4.6)$$

seja estável.

Ora, a matriz  $A_c - B_c K_c$  está na forma companheira:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n - k_n & -a_{n-1} - k_{n-1} & -a_{n-2} - k_{n-2} & \cdots & -a_1 - k_1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\det(sI - (A_c - B_c K_c)) = s^n + (a_1 + k_1)s^{n-1} + \cdots + a_n + k_n = 0 \quad (4.8)$$

Como desejamos que, em malha fechada, o sistema seja estável e, ainda, atinja certas especificações de desempenho, queremos que os autovalores de malha fechada satisfaçam uma dada equação característica:

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \cdots + \alpha_n = 0 \quad (4.9)$$

Assim, das equações (4.8) e (4.9), temos que:

$$a_i + k_i = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.10)$$

Ou seja, o vetor de ganhos para o sistema na forma canônica controlável é:

$$K_c = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \cdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix}$$

Notemos, no entanto, que a lei de controle será implementada para o sistema original, e não para o sistema transformado. Como  $u(t) = -K_c z(t) = -Kx(t)$ , temos que:

$$K = K_c T^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_n - a_n & \cdots & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} V_c U_c^{-1}$$

<sup>1</sup>Para obter a relação  $T = U_c V_c^{-1}$  basta substituir  $A_c = T^{-1}AT$  e  $B_c = T^{-1}B_u$  em  $V_c$  que resulta  $V_c = T^{-1}U_c$ .

É importante notar que para que possamos calcular a matriz de ganhos acima, que aloca os pólos nas posições desejadas, é preciso que a matriz  $U_c$  seja inversível e isto ocorre se e somente se o sistema for controlável. Apesar da fórmula acima ser válida apenas para sistemas SISO, a controlabilidade ainda é requisito necessário e suficiente para alocação de pólos no caso MIMO tratado a seguir.

### Método para sistemas MIMO:

Consideremos agora o sistema em malha fechada:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u, \quad u = -Kx \quad \begin{cases} x \in \mathbb{R}^n \\ u \in \mathbb{R}^r \end{cases} \quad (4.11)$$

ou seja,  $\dot{x}(t) = (A - B_u K)x(t)$ . Queremos encontrar a matriz de ganhos  $K$  de tal forma que os autovalores de  $(A - B_u K)$  sejam  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ . Para isso, devemos ter:

$$(A - B_u K)v_i = \lambda_i v_i \quad (4.12)$$

sendo  $\lambda_i$  autovalores e  $v_i$  seus respectivos autovetores. Podemos reescrever a condição acima na forma:

$$(A - \lambda_i I)v_i - B_u K v_i = \begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ K v_i \end{bmatrix} = 0 \quad (4.13)$$

Observe que todos os elementos da matriz  $\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix}$  são conhecidos e desejamos encontrar  $v_i, K$  que satisfazem a relação acima. Lembrando que espaço nulo de uma dada matriz  $M$  é o conjunto de todos os vetores  $g \neq 0$  que satisfazem  $Mg = 0$ , o problema a ser resolvido consiste em encontrar  $v_i, K$  tal que o vetor  $\begin{bmatrix} v_i \\ K v_i \end{bmatrix}$  pertença ao espaço nulo da matriz  $\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix}$  para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Este problema pode ser facilmente resolvido pois a base  $Q_i$  do espaço nulo<sup>2</sup> da matriz  $\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix}$  pode ser facilmente determinada. Assim, qualquer vetor  $g_i$  obtido através da relação

$$g_i = Q_i f_i \quad (4.14)$$

é um elemento do espaço nulo de  $\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix}$ . O vetor  $f_i$  pode ser arbitrariamente escolhido<sup>3</sup> e representa uma combinação linear dos vetores da base, ou seja das colunas da matriz  $Q_i$ . Assim temos

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix} g_i = 0$$

Fazendo esta operação para todo  $i = 1, \dots, n$ , obtemos a igualdade:

$$\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ K v_1 & \cdots & K v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+r) \times n}$$

<sup>2</sup>A matriz  $Q_i$  tem em suas colunas os vetores  $q_i$  que formam uma base do espaço nulo de  $\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix}$ .

<sup>3</sup>O número de elementos do vetor  $f_i$  é igual ao número de colunas da matriz  $Q_i$ .

Se particionarmos a matriz  $\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix}$  de acordo com os vetores  $v_i$  e  $Kv_i$ , obtemos:

$$\begin{bmatrix} g_1 & \cdots & g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \\ Kv_1 & \cdots & Kv_n \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$G = \begin{bmatrix} Kv_1 & \cdots & Kv_n \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} = KV \in \mathbb{R}^{r \times n}$$

Supondo  $V$  inversível podemos obter a matriz de ganhos através da relação  $K = GV^{-1}$ .

Para que o método acima funcione a matriz  $V$  deve ser inversível. Se o sistema for controlável sempre podemos escolher vetores  $f_i$  em (4.14) tais que  $V$  seja inversível. Por exemplo podemos escolher  $f_i$  de forma aleatória ou ainda um vetor onde todas as componentes são unitárias.

Note que nas expressões acima fica implícito que os autovalores desejados  $\lambda_i$  devem ser reais e distintos. Existem variações deste método que permitem  $\lambda_i$  complexos ou ainda reais repetidos. No *Matlab* podemos determinar a matriz de ganhos usando o comando `place` que funciona para pólos reais ou complexos, repetidos ou não, e utiliza uma escolha dos vetores  $f_i$  já otimizada. Ver referências no manual do *Matlab*.

**Exemplo 4.1** *Seja o sistema  $\dot{x} = Ax + B_u u$ , com  $u = -Kx$ ,  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Queremos que os pólos de malha fechada do sistema sejam  $\{-1, -2\}$ . Calcularemos a matriz de ganho usando os métodos SISO e MIMO.*

#### ***Pelo método para sistemas SISO:***

*Equação característica desejada:*

$$(s+1)(s+2) = s^2 + 3s + 2 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 3 \\ \alpha_2 = 2 \end{matrix}$$

*Equação característica de malha aberta:*

$$\det(sI - A) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} = s^2 \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{matrix}$$

*Usando o método visto anteriormente, temos:*

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},$$

com  $T = I$ , pois o sistema já está na forma canônica de controlabilidade.

#### ***Pelo método para sistemas MIMO:***

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_i I & -B_u \end{bmatrix} g_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda_i & -1 \end{bmatrix} g_i = 0$$

Os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -2$  são  $g_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}'$  e  $g_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}'$ .

Desta forma, temos:

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ G \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } K = GV^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

#### 4.1.2 Referência constante: rastreamento

Outro problema importante na área de controle consiste em projetar controladores para que algumas variáveis importantes do sistema sejam mantidas em níveis constantes, mesmo na presença de distúrbios no sistema. Este problema é conhecido como rastreamento e pode ser visto como um problema de controle onde a referência é constante. Apresentaremos duas soluções para esse problema. Uma baseada na correção do ganho estático do sistema e outra baseada na introdução de integradores.

##### Rastreamento com correção de ganho estático

Seja o sistema

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + r(t)) \quad (4.15)$$

$$y(t) = Cx(t) + Dr(t) \quad (4.16)$$

$$u(t) = -Kx(t) \quad (4.17)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado;  $y, r, u \in \mathbb{R}^m$  são os sinais de medida, referência e controle, respectivamente;  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  é a matriz de ganhos de realimentação de estados que deve ser determinada de tal forma que o sistema em malha fechada seja estável, isto é, os autovalores da matriz  $A - BK$  devem estar no semi-plano complexo esquerdo. Como

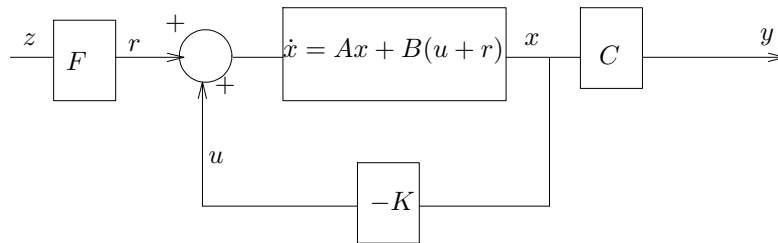


Figura 4.1: Rastreamento com correção de ganho estático.

no projeto da matriz de realimentação de estados  $K$  dificilmente conseguimos levar em consideração o requisito de erro nulo de regime permanente, vamos introduzir um novo sinal de referência  $z(t) \in \mathbb{R}^m$  dado por  $r(t) = Fz(t)$  onde  $F \in \mathbb{R}^{m \times m}$  é uma matriz de ganhos, cujo papel é corrigir o ganho estático do sistema de tal forma que o erro



de regime permanente entre  $z(t)$  e  $y(t)$  seja nulo. As equações de estado e matriz de transferência para o sistema em malha fechada são indicadas a seguir.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + r(t)) = (A - BK)x(t) + Br(t) \\ y(t) = Cx(t) + Dr(t) \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y(s) = G(s)R(s) \\ G(s) = C(sI - (A - BK))^{-1}B + D \\ R(s) = FZ(s) \end{cases}$$

Supondo que  $G(s)$  seja estável, a resposta em regime permanente para referências do

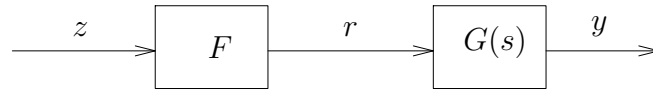


Figura 4.2: Diagrama para ajuste do ganho estático.

tipo degrau pode ser obtida pelo teorema do valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (z(t) - y(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(Z(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s(I - G(s)F)Z(s)$$

Como  $Z(s) = \frac{1}{s}v$ , onde  $v$  é um vetor contendo as amplitudes dos degraus de referência, e a condição  $(I - G(0)F)v = 0$  deve ser satisfeita quaisquer que sejam as amplitudes dos degraus no vetor  $v$ , devemos ter a relação  $G(0)F = I$ , ou seja, o ganho estático entre  $Z(s)$  e  $Y(s)$  deve ser unitário. Logo, o ajuste a ser feito é

$$F = G(0)^{-1}$$

Devido à sua simplicidade esse esquema não garante erro de regime permanente nulo para perturbações nos atuadores (sinal de controle) e medidores (sinal de medição) e também não é robusto em face à mudanças no ponto de operação do sistema físico (não linear).

### Rastreamento com integradores

Uma forma alternativa de um esquema de controle para seguimento de referência com erro de regime nulo consiste na utilização de integradores como ilustra a figura 4.3. As equações de estado associadas ao diagrama da figura 4.3 são

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = Ax(t) - B(K_e x(t) + K_i \xi(t)) \\ \dot{\xi}(t) &= r(t) - y(t) = r(t) - Cx(t) \end{aligned}$$

onde  $x$  é o estado do sistema,  $\xi$  o estado dos integradores e queremos determinar os ganhos  $K_i, K_e$  dos integradores e da realimentação de estados, respectivamente, de tal forma a ter erro nulo em regime permanente da referência  $r$  para a saída  $y$ .

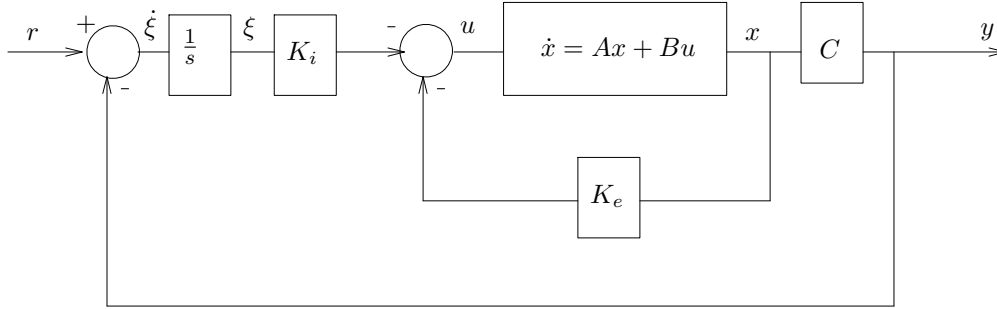


Figura 4.3: Rastreamento com integradores.

As equações de estado podem ser colocadas numa forma mais compacta indicada a seguir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix}}_{\dot{x}_a} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{A_a} - \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} \underbrace{\begin{bmatrix} K_e & K_i \end{bmatrix}}_{K_a} \right) \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix}}_{x_a} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}}_{E_a} r$$

Nessa representação o problema a ser resolvido consiste em se determinar a matriz  $K_a$  de tal forma que o sistema

$$\dot{x}_a = (A_a - B_a K_a) x_a + E_a r$$

seja estável. A matriz  $K_a$  pode ser determinada, por exemplo, com as técnicas de projeto de realimentação de estados já estudadas na seção 4.1.1. Neste caso podemos escolher os autovalores da matrix  $A_a - B_a K_a$  desde que o par  $(A_a, B_a)$  seja controlável. Quando isso ocorre, o sistema de malha fechada será estável e o estado  $\bar{x}_a$  no regime estacionário pode ser determinado através da expressão

$$\begin{aligned} 0 &= (A_a - B_a K_a) \bar{x}_a + E_a \bar{r} \\ \Rightarrow \bar{x}_a &= -(A_a - B_a K_a)^{-1} E_a \bar{r} \end{aligned}$$

O controle em regime é dado por

$$\bar{u} = -K_a \bar{x}_a = K_a (A_a - B_a K_a)^{-1} E_a \bar{r}$$

Note ainda que em regime  $\dot{\xi} = 0$ , logo  $\bar{r} = \bar{y}$  indicando que o erro de rastreamento é nulo em regime permanente.

Esse esquema de rastreamento é robusto em relação à mudanças no ponto de operação do sistema não linear e garante erro nulo para distúrbios constantes nos atuadores, porém não nos medidores.

**Exercício 4.1** Considere o sistema descrito em (Johansson, 2000). Verificar o erro de regime permanente para degraus de referência utilizando o ponto de equilíbrio  $G_+(s)$ . Projetar um ajuste de ganho estático para o sistema de malha aberta ( $u = 0$ ), isto é sem realimentação de estado, e verificar o erro de regime para:

- *Sistema linear;*
- *Sistema não-linear;*
- *Explicar porque o não-linear não possui erro nulo.*

**Exercício 4.2** *Para o mesmo sistema do exercício anterior, projetar um esquema de rastreamento com integrador para se ter erro nulo em regime. Verificar que o erro é nulo no sistema linear e no não-linear. Verifique através de simulações qual dos esquemas garante erro nulo para perturbações constantes no sinal de saída (medidores) e no sinal de controle (atuadores).*

## 4.2 Alocação de pólos via LMIs

Na seção anterior apresentamos os métodos clássicos para determinação da matriz de ganhos de realimentação de estados de tal forma que os pólos do sistema de malha fechada estejam localizados em pontos do plano complexo previamente escolhidos pelo projetista, i.e. sejam as raízes do polinômio característico desejado. Agora, ao invés de escolher a localização precisa dos pólos, apresentaremos uma forma mais flexível de projeto onde os pólos de malha fechada podem se encontrar em qualquer ponto dentro de uma região especificada pelo projetista. A motivação para isso são inúmeras, mas poderíamos destacar três principais. Primeiro, é que em geral o projetista deve procurar satisfazer vários critérios de desempenho desejados para sistema, porém cada critério está associado à uma localização diferente dos pólos. Como tipicamente existem várias localizações possíveis dos pólos que levam um dado critério de desempenho a ser satisfeito, seria interessante usar como critério de projeto uma região onde vários critérios de desempenho desejados estariam satisfeitos. Segundo, é que a escolha da localização dos pólos de malha fechada tem implicações na magnitude do sinal de controle. Como em geral o sinal de controle não pode exceder certos limites de magnitude, sob a pena de saturar os atuadores do sistema, seria interessante ter a flexibilidade de poder escolher, dentro na região onde os critérios de desempenho estão satisfeitos, uma localização dos pólos que evite a saturação. A terceira é que para sistemas incertos a metodologia clássica apresentada na seção anterior não pode ser aplicada pois a localização dos pólos de malha fechada mudam de acordo com os valores dos parâmetros incertos. Novamente a idéia de confinar os pólos numa região desejada se mostra interessante.

A primeira região desejada com a qual trabalharemos é o semi-plano complexo esquerdo estrito onde o único critério de desempenho que estaremos considerando é a estabilidade exponencial do sistema em malha fechada. Este é o assunto tratado a seguir.

### 4.2.1 Estabilização

Podemos precisar o problema a ser resolvido nesta seção da seguinte forma.

Suponha que dispomos de medidores para todas as variáveis de estado. Gostaríamos de determinar uma lei de controle do tipo  $u(t) = Kx(t)$  onde  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  é a matriz

de ganhos de realimentação a ser determinada de tal forma que o sistema em malha fechada seja exponencialmente estável. Note que não desejamos escolher a posição precisa dos pólos mas simplesmente que eles estejam em qualquer lugar do semi-plano esquerdo estrito.

Vimos na seção anterior que quando o sistema é controlável podemos determinar uma lei de controle tal que a localização dos pólos da malha fechada possa ser arbitrariamente escolhida. Quando o sistema não é controlável mas os modos não controláveis são estáveis ainda assim podemos determinar uma lei de controle que torne o sistema exponencialmente estável em malha fechada. Essa idéia nos leva à seguinte definição:

**Definição 4.2 (Estabilizabilidade)** *O sistema linear invariante (4.1) é estabilizável se os modos não controláveis (quando existirem) são estáveis.*

A controlabilidade de um sistema pode ser facilmente testada através do posto da matriz de controlabilidade. Porém como saber se os modos não controláveis, quando existirem, são estáveis? Na abordagem clássica isso pode ser testado com o auxílio de formas canônicas (T.Kailath, 1980), mas este método se torna inviável no caso de sistemas incertos. O resultado apresentado a seguir é baseado em LMIs e pode ser facilmente estendido para sistemas incertos.

**Teorema 4.1** *O sistema (4.1) é estabilizável se e somente se existem matrizes  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiva definida e  $L \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  tais que a seguinte LMI seja factível.*

$$AS + SA' + B_u L + L' B_u' < 0 \quad , \quad S > 0 \quad (4.19)$$

**Prova:** (Necessidade:) Se o sistema é estabilizável então todas as trajetórias  $x(t)$  não controláveis, i.e. não afetadas pelo sinal de controle, são estáveis. Assim, para todas essas trajetórias podemos encontrar uma função  $v(x(t)) = x(t)' P x(t)$  positiva definida tal que sua derivada para essas trajetórias satisfaça

$$\dot{v}(x(t)) = \dot{x}(t)' P x(t) + x(t)' P \dot{x}(t) = (Ax(t) + B_u u(t))' P x(t) + x(t)' P (Ax(t) + B_u u(t)) < 0 \quad (4.20)$$

Defina  $z(t) = P x(t)$  e  $S = P^{-1}$  e note que  $S > 0$ . Com isso podemos reescrever a expressão acima como

$$\dot{v}(x(t)) = z(t)' (AS + SA') z(t) + z(t)' B_u u(t) + u(t)' B_u' z(t) < 0 \quad , \quad z(t) = P x(t)$$

As trajetórias guiadas pelos modos não controláveis são aquelas cuja dinâmica não depende do sinal de controle e para elas  $\dot{v}(x(t))$  também não depende do sinal de controle  $u(t)$ . Para isso devemos ter  $B_u' z(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$  que nos leva à condição  $z(t)' (AS + SA') z(t) < 0$ ,  $\forall z(t) : B_u' z(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ . Pelo lema de Finsler (veja seção 3.2.8) esta condição é equivalente à (4.19).

(Suficiência:) Se (4.19) está satisfeita defina  $K = LS^{-1}$ . Logo temos  $(A + B_u K)S + S(A + B_u K)' < 0$  ou seja  $P(A + B_u K) + (A + B_u K)' P < 0$ . Como  $P > 0$  concluímos que o sistema em malha fechada é exponencialmente estável e portanto todos os modos de malha fechada são estáveis. Se existem modos não controláveis eles também são modos da malha fechada e portanto também são estáveis. Logo o sistema é estabilizável.  $\square$

Da prova deste teorema podemos enunciar o seguinte resultado:

**Corolário 4.1** *Existe uma realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$  que torna o sistema (4.1) exponencialmente estável com esta realimentação se e somente se o sistema (4.1) for estabilizável. Além disso, toda realimentação de estados  $u(t) = Kx(t)$  estabilizante pode ser decomposta como  $K = LS^{-1}$  onde  $L, S$  é uma das soluções de (4.19).  $\square$*

Para ilustrar os resultados acima, considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.2** *Considere o seguinte sistema multivariável:*

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Aplicando o Teorema 4.1, obtém-se os seguintes resultados

```
-->[S,L]=stab();
Construction of canonical representation
Basis Construction
WARNING: rank deficient problem
FEASIBILITY PHASE.
primal obj.  dual obj.  dual. gap
4.19e+00     -1.95e+03  1.96e+03
-1.78e+03    -1.93e+03  1.54e+02
Target value reached
feasible solution found
-->S
S =
! 2823.463 - 930.10203 0. ! ! - 930.10203 2823.463
0. ! ! 0. 0. 1977.8668 ! -->L
L =
! 4684.0357 - 8554.9861 988.9811 ! ! - 2821.042 -
989.12222 0. ! -->K=L*S^(-1)
K =
! 0.7412833 - 2.7857695 0.5000241 !
! - 1.2502147 - 0.7621667 0. !
```

A Figura 4.4 mostra as trajetórias do sistema em malha fechada (com  $u(t) = Kx(t)$ ) para uma condição inicial  $x(0) = [2 \ 1 \ -1]'$ .

Observa-se no exemplo acima que a resposta no tempo do sistema em malha fechada é bastante oscilatória com uma convergência lenta para o ponto de equilíbrio. Pode-se melhorar consideravelmente a resposta do sistema em malha fechada impondo restrições adicionais na lei de controle visando atender a algum critério de desempenho, como apresentado nas próximas seções deste capítulo.

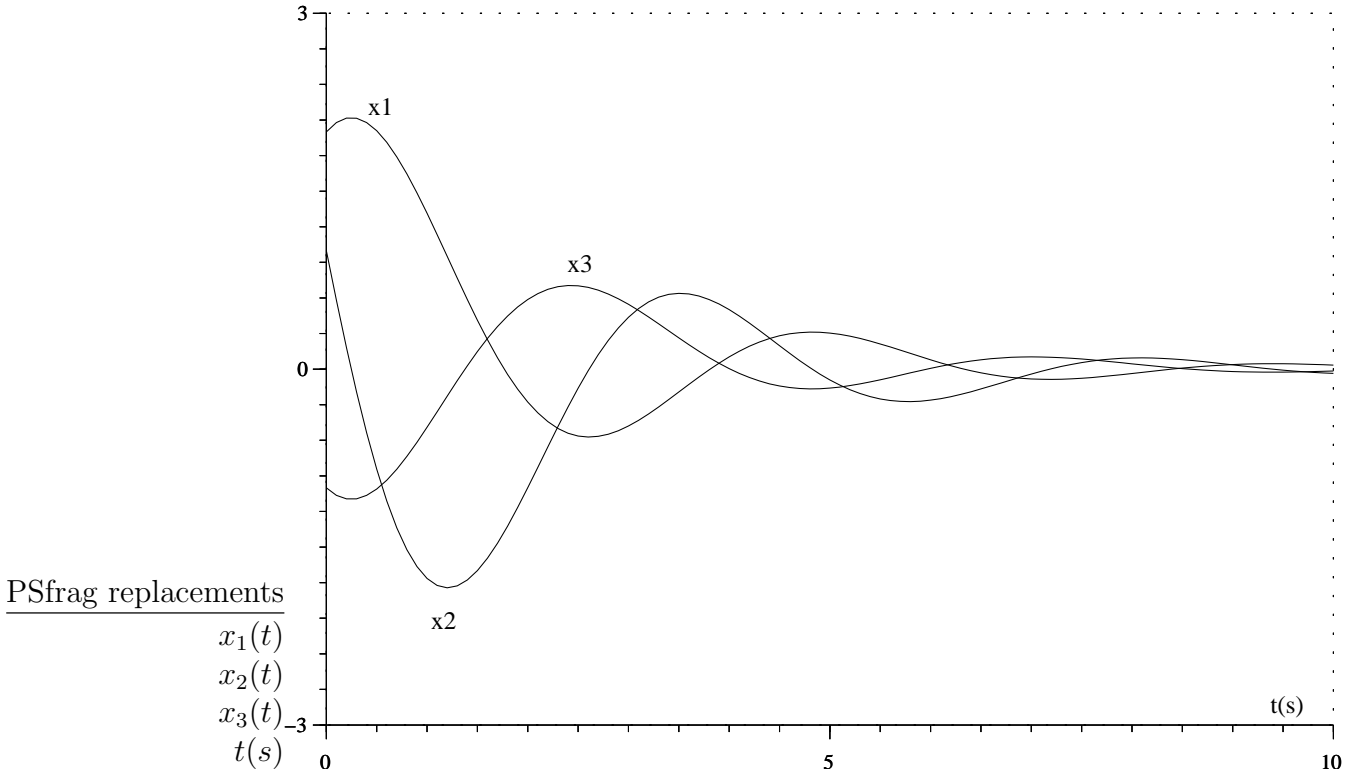


Figura 4.4: Trajetórias do sistema (4.21) em malha fechada.

#### 4.2.2 Alocação de pólos via $\mathcal{D}$ -Estabilidade

Estabilidade é um requisito fundamental de um sistema de controle mas não garante um bom desempenho da resposta transitória do sistema. Existem sub-regiões do semi-plano complexo esquerdo que além da estabilidade nos dá garantia de bom desempenho transitório. Nesta seção apresentamos métodos de projeto de uma realimentação de estados que nos oferece garantia de que os pólos do sistema de malha fechada estarão numa dada região escolhida pelo projetista.

Como ponto de partida considere a forma dual do Teorema 3.4, isto é<sup>4</sup>:

$$\exists Q > 0 : L \otimes Q + M \otimes (AQ) + M' \otimes (QA') < 0 \quad (4.22)$$

A formulação acima para a estabilidade- $\mathcal{D}$  permite a proposição do seguinte resultado.

**Teorema 4.2** *Considere o sistema (4.1) e uma região LMI  $\mathcal{D}$  contida em  $\mathbb{C}^-$ . Suponha que as matrizes  $Q$  e  $Y$  de dimensões apropriadas sejam uma solução do seguinte problema LMI:*

$$Y, Q > 0 : L \otimes Q + M \otimes (AQ + B_u Y) + M' \otimes (QA' + Y' B_u') < 0 \quad (4.23)$$

<sup>4</sup>Como os autovalores da matriz  $A$  são os mesmos de  $A'$ , o problema de alocação de pólos será definido aqui nesta seção em termos do sistema dual onde substituímos  $A, M$  por  $A', M'$  nas condições originais.

Então, o sistema (4.1) com  $K = YQ^{-1}$  é  $\mathcal{D}$ -estável. Em outras palavras:

$$\lambda_i(A + B_u Y Q^{-1}) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^-, \quad i = 1, \dots, n.$$

**Exemplo 4.3** Considere o sistema (4.21) e a região LMI definida na Figura 3.3(b) com raio 2 e centro em  $(-5, 0)$ . Para esta região a condição (4.23) é equivalente ao seguinte problema LMI:

$$\exists Y, Q > 0 : \begin{bmatrix} -2Q & (5Q + AQ + B_u Y) \\ (5Q + QA' + Y'B'_u) & -2Q \end{bmatrix} < 0$$

Aplicando o LMITOOL do Scilab, obtém-se o seguinte resultado:

```
-->Q
Q =
!   422.26907   - 1682.5827   - 11.057118 !
! - 1682.5827    7704.8599   - 4.4526817 !
! - 11.057118   - 4.4526817   6029.5974 !
-->Y
Y =
!   3797.1628   - 17054.426   - 23997.794 !
!   6445.6822   - 34895.535   - 5492.0118 !
-->K=Y*Q^(-1)
K =
!    .4549008   - 2.1164231   - 3.9807281 !
! - 21.636907   - 9.2546374   - .9573544 !
```

Note que os pólos em malha fechada para a matriz de controle acima definida são dados por:

$$\lambda_{1,2} = -4.6294267 \pm 0.4778254j \quad e \quad \lambda_3 = -4.9765121.$$

A Figura 4.5 mostra a resposta transitória do sistema em malha fechada para a mesma condição inicial utilizada no Exemplo 4.3, isto é,  $x(0) = [2 \ 1 \ -1]'$ .

Analisando as Figuras 4.4 e 4.5, observa-se que ocorreu uma melhora significativa no tempo de resposta do sistema em malha fechada com a restrição adicional da alocação de pólos. No entanto, a trajetória do estado  $x_2(t)$  apresenta um elevado sobre-sinal negativo devido a uma inadequada escolha da região  $\mathcal{D}$ . A escolha ideal desta região pode ser analiticamente determinada somente para sistemas de segunda ordem levando-se em conta os valores desejados para o tempo de estabilização, sobre-sinal, frequência de amortecimento, etc. Outro fator agravante no posicionamento de pólos é a tendência de produzir elevados sinais de controle, o que em situações práticas é pouco desejado. A Figura 4.6 mostra os sinais de controle  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  para o sistema em malha fechada no Exemplo 4.3 exemplificando uma elevada atuação do sinal de controle.

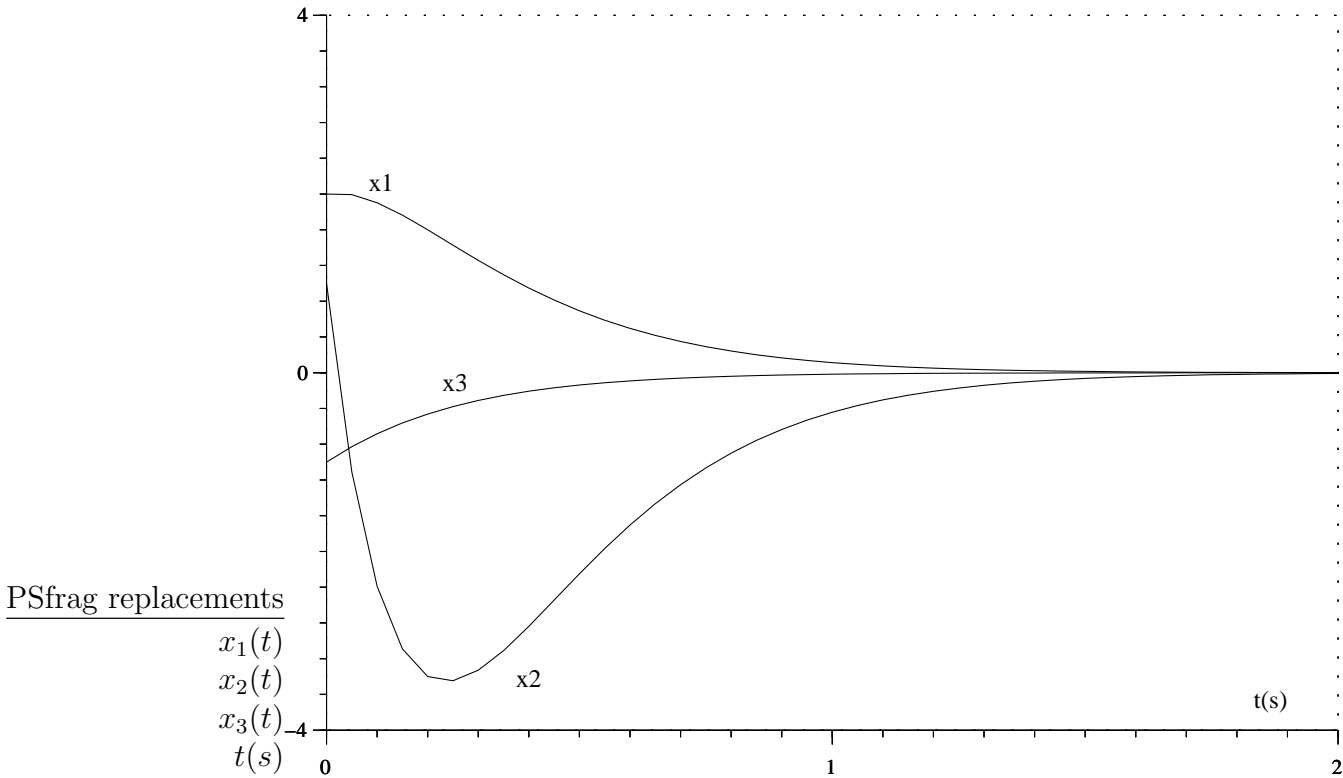


Figura 4.5: Trajetórias do sistema (4.21) em malha fechada com alocação de pólos.

### 4.3 Controle LQR

Os métodos de projeto estudados nas seções anteriores estão baseados na localização dos pólos que é fixada pelo projetista. Em muitos casos no entanto o desempenho da resposta do sistema é fortemente degradado pela presença de zeros na função de transferência. Nesses casos uma escolha adequada dos pólos de malha fechada não é trivial. O método que veremos nesta seção ficou conhecido na literatura com "regulador linear-quadrático" (LQR) pois ao invés de utilizar a localização dos pólos como critério de projeto, o LQR está baseado na minimização de um critério quadrático que está associado à energia das variáveis de estado e dos sinais de controle a serem projetados.

A energia de um sinal escalar  $s(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$  é definida por

$$\int_0^\infty s(t)^2 dt$$

Se  $s(t)$  é a tensão aplicada num resistor unitário a integral acima expressa a energia dissipada nesse resistor por esse sinal. Defini-se  $\mathcal{L}_2$  o espaço dos sinais que possuem energia finita.

A energia de um sinal vetorial  $x(t) : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^n$  é definida por

$$\int_0^\infty \sum_{i=1}^n x_i(t)^2 dt = \int_0^\infty x(t)'x(t) dt$$



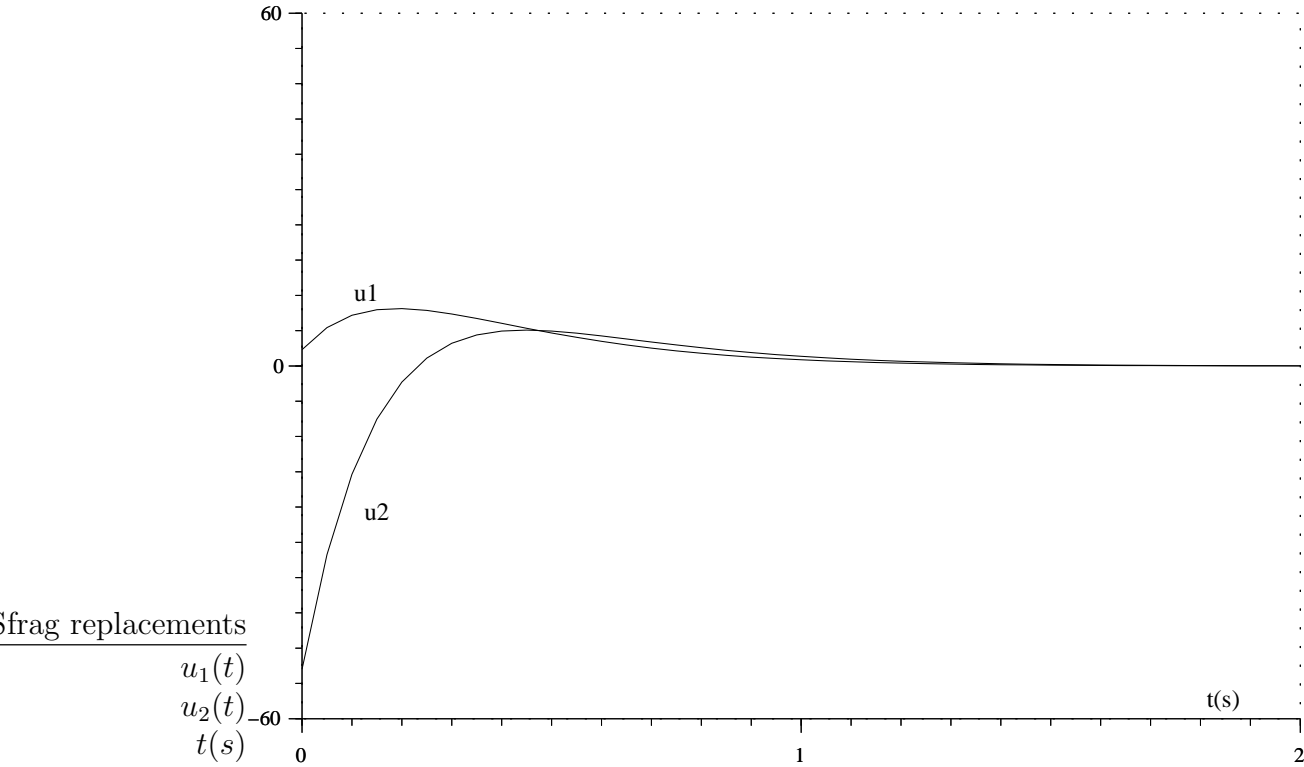


Figura 4.6: Sinais de controle para o sistema (4.21) em malha fechada com alocação de pólos.

e corresponde à soma das energias de cada componente  $x_i(t)$  do sinal  $x(t)$ . Assim quanto maior a amplitude e duração do sinal no tempo, maior será sua energia.

Considere o sistema de controle

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) \quad x(0) = x_0 \quad (4.24)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o estado e  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o controle. Baseado nas interpretações acima podemos afirmar que quanto maior for a energia do estado  $\int_{t=0}^{\infty} x(t)'x(t) dt$  mais oscilatório e/ou lento é o sistema. Por outro lado, quanto maior for a energia do controle  $\int_{t=0}^{\infty} u(t)'u(t) dt$  maior o esforço dos atuadores no sentido de que o sinal de controle possui maiores amplitudes e/ou os atuadores são excitados em regime transitório durante um tempo maior. Idealmente deveríamos ter pequena energia do estado e de controle mas isso não é possível pois o sistema se torna mais rápido (pólos mais à esquerda) graças a um esforço maior de controle. A filosofia de projeto do controlador LQR é estabelecer um compromisso entre as energias de estado e controle através do seguinte função custo a ser minimizada

$$J = \min_{u(t)} \int_0^{\infty} [x(t)'Q_0x(t) + u(t)'R_0u(t)] dt \quad (4.25)$$

onde  $Q_0 > 0, R_0 > 0$  são matrizes de ponderação dadas representando o compromisso desejado. Tipicamente  $Q_0, R_0$  são escolhidas diagonais e nesse caso  $x(t)'Q_0x(t) = \sum_{i=1}^n q_i x_i(t)^2$  e  $u(t)'R_0u(t) = \sum_{i=1}^{n_u} r_i u_i(t)^2$  onde  $q_i, r_i$  são os elementos positivos nas

diagonais das matrizes  $Q_0, R_0$ . Como o sinal de controle a ser projetado deve minimizar a função custo acima, o elemento  $q_i$  deve ser escolhido maior que  $q_j$  quando a minimização da energia da variável  $x_i$  é prioritária em relação à minimização da energia de  $x_j$ . Os elementos  $r_i$  de ponderação do controle são escolhidos de forma análoga.

**Teorema 4.3** *Suponha que o sistema (4.24) seja estabilizável e considere o critério quadrático (4.25) com  $Q_0 > 0, R_0 > 0$  dadas. A lei de controle que estabiliza o sistema e minimiza o critério (4.25) é  $u(t) = -Kx(t)$  onde  $K = R_0^{-1}B_u'P$  e  $P > 0$  é a solução da equação de Riccati abaixo.*

$$A'P + PA - PB_uR_0^{-1}B_u'P + Q_0 = 0 \quad (4.26)$$

**Prova:** Defina  $v(x(t)) = x(t)'Px(t)$  onde  $P > 0$  é a solução da equação de Riccati acima. Como o sistema deve ser estável em malha fechada devemos ter  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ . Logo  $v(x(\infty)) = 0$  e podemos reescrever o critério (4.25) na forma

$$J = \min_{u(t)} \int_0^\infty [x(t)'Q_0x(t) + u(t)'R_0u(t) + \dot{v}(x(t))] dt + v(x(0))$$

Defina  $\xi(t) = R_0^{-\frac{1}{2}}u(t) + R_0^{-\frac{1}{2}}B_u'Px(t)$  e reescreva o critério acima como

$$J = \min_{u(t)} \int_0^\infty [x(t)' [A'P + PA - PB_uR_0^{-1}B_u'P + Q_0] x(t) + \xi(t)'\xi(t)] dt + v(x(0)) \quad (4.27)$$

Para a lei de controle proposta no teorema temos  $J = v(x(0)) = x(0)'Px(0)$  pois  $A'P + PA - PB_uR_0^{-1}B_u'P + Q_0 = 0$  e  $u(t) = -R_0^{-1}B_u'Px(t)$  que implica  $\xi(t) = 0$ . Para qualquer outra lei de controle teremos um valor maior da função custo pois  $\xi(t)$  será não nulo. Para mostrar que o sistema em malha fechada é exponencialmente estável note que a equação de Riccati (4.26) pode ser reescrita na forma

$$(A - B_uK)'P + P(A - B_uK) + K'R_0K + Q_0 = 0$$

Como  $P > 0$  e  $K'R_0K + Q_0 > 0$ , pois  $Q_0 > 0$ , concluímos que o sistema é exponencialmente estável pois  $v(x(t))$  é uma função de Lyapunov para o sistema de malha fechada. Para completar a prova note que a solução do problema, quando existe, é uma realimentação de estados e portanto o sistema precisa ser estabilizável de acordo com o corolário 4.1.  $\square$

No teorema acima a matriz  $Q_0$  é positiva definida. Podemos relaxar essa hipótese para  $Q_0$  positiva semi-definida desde que possamos decompor  $Q_0 = C_0'C_0$  com o par  $(A, C_0)$  observável (Green and Limebeer, 1995).

O controlador LQR possui propriedades interessantes. Várias delas são apresentadas em (R.T.Stefani et al., 1994) para o caso SISO. Por exemplo, o LQR possui margem de ganho infinita e pode ser reduzido pela metade que o sistema continua estável. Além disso o LQR apresenta uma margem de fase de pelo menos 60 graus. Para sistemas MIMO com  $R_0 = I$  as mesmas propriedades se aplicam canal por canal no sinal de controle. No caso SISO o LQR apresenta uma atenuação de  $-20$  db/década nas altas frequências o que em muitos casos é insuficiente para uma boa supressão de ruídos.

## 4.4 Controle a Custo Garantido

Veremos nesta seção uma abordagem similar ao LQR da seção anterior onde uma função custo<sup>5</sup> é minimizada. Porém, ao invés de utilizar equações de Riccati para resolver o problema iremos utilizar LMIs.

De forma similar ao critério quadrático do LQR iremos aqui também explorar o compromisso que existe entre estabilizar o sistema rapidamente e a energia de controle utilizada.

Considere o sistema (4.1) reescrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{uz} u(t) \\ u(t) &= Kx(t)\end{aligned}\tag{4.28}$$

onde  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é um vetor auxiliar cuja energia queremos minimizar e  $C_z, D_{uz}$  são matrizes constantes de ponderação com dimensões apropriadas a serem escolhidas pelo projetista de forma similar às matrizes de ponderação  $Q_0, R_0$  do LQR. Considere ainda a seguinte função custo:

$$J = \min_{u(t)} \int_0^\infty z(t)' z(t) dt \tag{4.29}$$

Note que

$$z(t)' z(t) = x(t)' C_z' C_z x(t) + x(t)' C_z' D_{uz} u(t) + u(t)' D_{uz}' C_z x(t) + u(t)' D_{uz}' D_{uz} u(t)$$

e portanto a função custo acima se torna idêntica a do LQR se escolhermos  $C_z, D_{uz}$  de forma que  $C_z' D_{uz} = 0$  e  $C_z, D_{uz}$  de posto completo o que implica  $Q_0 = C_z' C_z > 0$  e  $R_0 = D_{uz}' D_{uz} > 0$ .

O problema de interesse nesta seção pode ser formalizado como se segue:

**Problema 4.1** *Determinar uma lei de controle  $u = Kx$  para o sistema (4.28) tal que a função custo definida em (4.29) seja minimizada para uma dada condição inicial  $x(0) = x_0$ .*

Uma solução para o problema acima pode ser facilmente obtida impondo-se a seguinte condição na inequação de Lyapunov (Boyd et al., 1994):

$$\dot{V}(x) + z' z < 0 \tag{4.30}$$

onde  $\dot{V}(x)$  é a derivada temporal da função de Lyapunov quadrática  $V(x) = x' P x$ .

Integrando-se (4.30) de 0 a  $T > 0$ , obtém-se:

$$V(x(T)) - V(x(0)) + \int_0^T z(t)' z(t) dt < 0$$

Supondo que o sistema (4.28) seja estável em malha fechada conclui-se que  $\lim_{T \rightarrow \infty} x(T) = 0$  e então  $\lim_{T \rightarrow \infty} V(x(T)) = 0$ . Desta forma, a expressão acima equivale à:

$$\int_0^\infty z(t)' z(t) dt < x_0' P x_0 = V(x_0) \quad x(0) = x_0 \tag{4.31}$$

---

<sup>5</sup>Um valor de custo pequeno indica um sistema com elevado desempenho.

Logo, minimizando o valor de  $x'_0 P x_0$  estamos minimizando um limitante superior de  $J$  que é a função custo em (4.29).

Por outro lado, como o sistema em malha fechada é dado por  $\dot{x} = (A + B_u K)x$  e  $z = (C_z + D_{uz} K)x$  a condição (4.30) pode se reescrita na forma

$$\dot{V}(x) + z'z = x'(A + B_u K)'Px + x'P(A + B_u K)x + x'(C_z + D_{uz} K)'(C_z + D_{uz} K)x < 0 \quad (4.32)$$

Definindo  $Q = P^{-1}$  e  $\lambda$  um escalar tal que  $\lambda > x'_0 P x_0$  obtemos as seguintes condições:

$$\begin{aligned} \lambda - x'_0 Q^{-1} x_0 &> 0 \\ Q[(A + B_u K)'P + P(A + B_u K) + (C_z + D_{uz} K)'(C_z + D_{uz} K)]Q &< 0 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Com o complemento de Schur e a mudança de variável  $Y = KQ$  podemos enunciar a seguinte solução em termos de LMIs para o Problema 4.1.

**Teorema 4.4** *Considere o sistema linear em (4.28) com uma dada condição inicial  $x(0) = x_0$ . Suponha que as matrizes  $Q = Q'$  e  $Y$  de dimensões apropriadas sejam a solução do seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} \min \quad & \lambda \quad \text{sujeito a:} \\ & \begin{bmatrix} \lambda & x'_0 \\ x_0 & Q \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} QA' + AQ + Y'B'_u + B_u Y & QC'_z + Y'D'_{uz} \\ C_z Q + D_{uz} Y & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

Então o sistema (4.28) com  $K = YQ^{-1}$  é assintoticamente estável e a função custo definida em (4.29) satisfaz  $J < x'_0 Q^{-1} x_0$ .

**Exemplo 4.4** *Considere o sistema linear (4.21), com a seguinte saída de desempenho:*

$$z(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u(t)$$

e uma condição inicial  $x_0 = [2 \quad 1 \quad -1]'$ .

Note que  $z(t) = [0.1 x_2(t) \quad 0.01 u_1(t) \quad u_2(t)]'$  e portanto as matrizes  $C_z, D_{uz}$  foram escolhidas para ponderar fortemente a entrada de controle  $u_2$ , evitando assim excessiva energia desse sinal. Aplicando a técnica de controle custo garantido pode-se projetar uma lei de controle  $u = Kx$  de maneira a minimizar a energia destes sinais de interesse.

Através do Teorema 4.4, obtém-se os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} Y &= \\ & \begin{bmatrix} 0.0051460 & -0.0112142 & -9999.9417 \\ 0.0000452 & -1.0000888 & 0.0004984 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Q =$$

```

! 859.46698 -199.99977 611.85185 !
! -199.99977 611.85235 - 1871.3175 !
! 611.85185 -1871.3175 8154.6886 !

```

```
lambda = 0.0101946
```

```

K =
! 0.0008478 -12.578844 -4.1129064 !
! -0.0004114 -0.0056159 -0.0012578 !

```

```
% código para implementação no scilab
```

```
% matrizes do sistema
```

```

A=[0 1 0;0 0 1;-1 2 -1]; B=[0 0;0 1;1 0]; C=[0 .1 0;0 0 0;0 0 0];
D=[0 0;.01 0;0 1]; X0=[2 1 -1]';

```

```
%função para solução do problema de custo garantido
```

```

function [P,K,lambda, Q, Y]=controle_ctgtdo(A,B,C,D,X0)
// Generated by lmitool on

```

```

Mbound = 1e3;
abstol = 1e-10;
nu = 10;
maxiters = 100;
reltol = 1e-10;
options=[Mbound,abstol,nu,maxiters,reltol];

```

```
//////////DEFINE INITIAL GUESS AND PRELIMINARY CALCULATIONS BELOW
```

```

lambda_init=0;
Q_init=eye(3,3)
Y_init=eye(2,3)
//////////

```

```

XLIST0=list(lambda_init, Q_init, Y_init)
XLIST=lmsolver(XLIST0,controle_ctgtdo_eval,options)
[lambda, Q, Y]=XLIST(:)
K=Y*inv(Q);
P=inv(Q);
endfunction

```

```
//////////EVALUATION FUNCTION//////////
```

```

function [LME,LMI,OBJ]=controle_ctgtdo_eval(XLIST)
[lambda, Q, Y]=XLIST(:)

```

```

//////////DEFINE LME, LMI and OBJ BELOW
LME=Q-Q';
LMI=list();
LMI(1)=[lambda X0';X0 Q];
LMI(2)=-[Q*A'+A*Q+Y'*B'+B*Y Q*C'+Y'*D';C*Q+D*Y -eye(3,3)];
OBJ=lambda
endfunction

```

Verifique que a segunda linha da matriz  $K$ , que defini o sinal de controle  $u_2(t)$ , possui elementos bastante pequenos indicando que o sinal de controle  $u_2(t)$  possui amplitudes bem menores que  $u_1(t)$  para o mesmo vetor de estado.

**Exercício 4.3** Verifique no exemplo acima que a função custo é idêntica a do LQR se escolhermos  $Q_0 = C_z' C_z > 0$  e  $R_0 = D_{uz}' D_{uz} > 0$ . Resolva o LQR com essas matrizes de ponderação e compare  $Q^{-1}, K$  obtidas no exemplo acima com  $P, -K$  obtidos no LQR. Qual o valor ótimo da função objetivo nos dois casos para a mesma condição inicial? Para uma outra condição inicial a matriz  $Q$  obtida seria diferente?

Utilizando a propriedade de convexidade das LMIs, pode-se resolver o problema de minimizar  $\lambda$  em (4.34) considerando qualquer condição inicial num dado conjunto politópico  $X_0$  com vértices conhecidos, isto é:  $\forall x_0 \in X_0$ . O próximo corolário formaliza este resultado.

**Corolário 4.2** Considere o sistema (4.28) e um conjunto  $X_0$  de condições iniciais, onde  $X_0$  é um politopo com vértices conhecidos. Suponha que existam matrizes  $Q = Q'$  e  $Y$  de dimensões apropriadas que solucionem o seguinte problema de otimização para todo  $x_0$  nos vértices do politopo  $X_0$ :

$$\min \lambda \quad \text{sujeito a: (4.34) e (4.35).} \quad (4.36)$$

Então o sistema (4.28) com  $K = YQ^{-1}$  é assintoticamente estável e a função custo definida em (4.29) satisfaz  $J < x_0' Q^{-1} x_0$  para qualquer  $x_0 \in X_0$ .

Freqüentemente, os sistemas reais estão sujeitos a perturbações externas e ruídos de medida que podem degradar o desempenho do sistema. Existem, na prática, várias formas de perturbações e ruídos, como, por exemplo, força da gravidade, pressão atmosférica, ventos, interferência eletromagnética, etc. Estas entradas não controláveis podem ser modeladas por diferentes tipos de sinais. Para perturbações de curta duração no tempo, por exemplo, pode-se utilizar o impulso como modelo para tal classe de sinais. Da mesma forma, sinais praticamente constantes (lentos) podem ser modelados pela função degrau. Equivalentemente, outras formas de entradas são modeladas por sinais normalmente utilizados na teoria de controle (sinais senoidais, ruído branco, etc.).

Portanto, para sistemas sujeitos a perturbações externas deve-se minimizar de alguma maneira a influência destes sinais nas saídas de interesse do sistema através de uma adequada lei de controle. Nas próximas seções serão considerados os projetos de controladores que atendam especificações de controle em termos das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas como forma de minimizar o problema de rejeição de perturbações.

## 4.5 Controle $\mathcal{H}_2$

Considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + B_u u + B_w w \\ z &= C_z x + D_{uz} u \\ u &= Kx\end{aligned}\tag{4.37}$$

onde  $w \in \mathbb{R}^{n_w}$  corresponde aos sinais de perturbação e  $B_w$  é uma matriz constante com dimensões apropriadas.

O problema a ser resolvido consiste em projetar um controlador que minimize a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada. Como visto no capítulo anterior, minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  corresponde a minimizar a energia da resposta impulsional do sistema de malha fechada cuja função de transferência é:

$$H(s) = (C_z + D_{uz}K)(sI - (A + B_u K))^{-1} B_w.$$

De forma similar as seções anteriores, pode-se obter uma formulação convexa para o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  através do gramiano de controlabilidade. Logo, a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (4.37) em malha fechada pode ser determinada através do seguinte problema de otimização:

$$\min_{Q,K} \text{tr}\{(C_z + D_{uz}K)Q(C'_z + K' D'_{uz})\} : Q > 0,\tag{4.38}$$

$$(A + B_u K)Q + Q(A' + K' B'_u) + B_w B'_w < 0.\tag{4.39}$$

Note que a parametrização  $Y = KQ$  utilizada nas seções anteriores para tornar as condições de estabilização convexas não pode ser aplicada diretamente na função objetivo. Para contornar este problema, considere a seguinte inequação matricial:

$$N - (C_z + D_{uz}K)QQ^{-1}Q(C'_z + K' D'_{uz}) > 0$$

Aplicando o complemento de Schur na inequação acima, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} N & (C_z + D_{uz}K)Q \\ Q(C_z + D_{uz}K)' & Q \end{bmatrix} > 0\tag{4.40}$$

Agora, um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada pode ser determinado através do seguinte problema de otimização<sup>6</sup>:

$$\min_{Q,K} \text{tr}\{N\} \quad \text{sujeito à: (4.40) e (4.39)}.$$

Portanto, uma solução convexa para o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  pode ser expressa através do seguinte teorema.

---

<sup>6</sup>Observe que nesse caso  $\text{tr}\{N\}$  tende a  $\text{tr}\{(C_z + D_{uz}K)Q(C'_z + K' D'_{uz})\}$ .

**Teorema 4.5** Considere o sistema linear em (4.37). Suponha que as matrizes  $Q = Q'$ ,  $N = N'$  e  $Y$  de dimensões apropriadas sejam a solução do seguinte problema de otimização:

$$\min \operatorname{tr}\{N\} \quad \text{sujeito à:} \quad \begin{bmatrix} N & C_z Q + D_{uz} Y \\ Q C'_z + Y' D'_{uz} & Q \end{bmatrix} > 0 \quad (4.41)$$

$$Q A' + A Q + Y' B'_u + B_u Y + B_w B'_w < 0 \quad (4.42)$$

Então o sistema (4.37) com  $K = Y Q^{-1}$  é assintoticamente estável e a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada satisfaz  $\|H_{wz}\|_2^2 \leq \operatorname{tr}\{N\}$ .

**Exemplo 4.5** Considere o seguinte sistema linear sujeito a perturbações impulsivas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (4.43)$$

O objetivo neste exemplo é determinar uma lei de controle  $u = Kx$  tal que o sistema seja assintoticamente estável em malha fechada e a sua norma  $\mathcal{H}_2$  seja minimizada.

Aplicando o teorema 4.5, obtém-se o seguinte resultado:

```
-->Q
Q =
!   0.5654039   - 0.0000050   - 0.2722405    0.0000049 !
! - 0.0000050    0.2722405   - 0.0000051   - 0.4854745 !
! - 0.2722405   - 0.0000051    0.4854763   - 0.5000153 !
!   0.0000049   - 0.4854745   - 0.5000153    1.6989597 !
-->Y
Y =
!   1.8675964    0.5590117   - 3.927422    1.7267448 !
-->K=Y*Q^(-1)
K =
! - 9.049563   - 19.572199   - 25.654583   - 12.126655 !
-->N
N =
!   0.5654039    0.1867646 !
!   0.1867646    2.5640558 !
-->trace(N)
ans =
3.1294597
```

A figura 4.7 mostra as trajetórias  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  do sistema em malha fechada considerando um sinal de perturbação na forma:

$$w(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \delta(t-1),$$



onde  $\delta(t - 1)$  representa um impulso unitário em  $t = 1s$ .

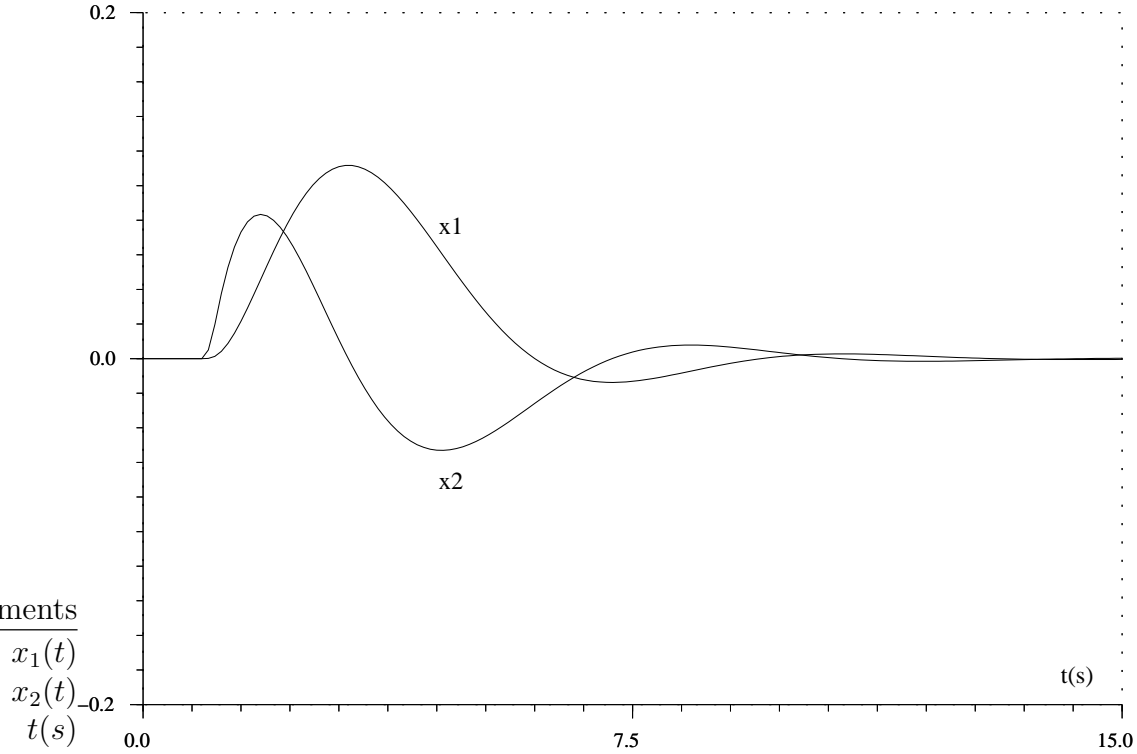


Figura 4.7: Trajetórias  $x_1$  e  $x_2$  do sistema (4.43) em malha fechada com perturbações impulsivas em  $t = 1$ .

## 4.6 Controle $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  representa o maior ganho que o sistema oferece para um dado sinal perturbação, qualquer que seja ele. Deste forma, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser visto, como um problema de otimização no qual deseja-se determinar uma lei de controle  $u(t)$  que minimiza o maior ganho que o sistema em malha fechada vai oferecer a um sinal perturbação qualquer.

Nesta seção apresenta-se uma formulação LMI para o problema de controle acima através de realimentação de estados. Para tal, considere o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) + D_{uz} u(t) + D_{wz} w(t) \\ u(t) &= Kx(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde  $D_{zw}$  é uma matriz constante com dimensões apropriadas.

Em malha fechada o sistema acima fica

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_u K)x(t) + B_w w(t) \\ z(t) &= (C_z + D_{uz} K)x(t) + D_{wz} w(t) \end{aligned} \quad (4.45)$$

Utilizando os resultados apresentados no exercício 3.6 para o sistema acima e a mudança de variável  $Y = KQ$  a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (4.44) é dada pelo seguinte problema de otimização:

$$\min_{Q,Y} \gamma : \begin{cases} Q > 0, \\ \begin{bmatrix} AQ + QA' + B_u Y + Y' B_u' & B_w & QC'_z + Y' D'_{uz} \\ B'_w & -\gamma I_{n_z} & D'_{wz} \\ C_z Q + D_{uz} Y & D_{wz} & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.46)$$

O resultado acima é resumido através do seguinte teorema.

**Teorema 4.6** *Considere o sistema linear em (4.44). Suponha que as matrizes  $Q = Q'$  e  $Y$  de dimensões apropriadas e o escalar positivo  $\gamma$  sejam a solução do problema de otimização definido em (4.46).*

*Então o sistema (4.44) com  $K = YQ^{-1}$  é assintoticamente estável e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada satisfaz  $\|H_{wz}\|_\infty \leq \sqrt{\gamma}$ .*

**Exemplo 4.6** *Considere o seguinte sistema linear instável em malha aberta:*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + u + 0.1w \end{aligned} \quad (4.47)$$

Para o sistema acima deseja-se projetar uma lei de controle  $u = Kx$  tal que o sistema seja estável em malha fechada e a norma  $\mathcal{H}_\infty$  seja minimizada.

Utilizando o teorema 4.6, obtém-se os seguintes resultados:

```
-->Q
Q =
!   332826.59   - 755359.88   1714312.4 !
! - 755359.88   1714312.6   - 3890685.2 !
!   1714312.4   - 3890685.2   8830029.9 !

-->Y
Y =
! - 332831.23   755370.37   - 1714338.8 !

-->K=Y*Q^(-1)
K =
! - 197.88367   - 827.88069   - 326.55643 !

-->norm_hinf
norm_hinf =
2.4519588
```

As figuras 4.8 e 4.9 mostram respectivamente a saída de desempenho  $z(t)$  para um de sinal perturbação na forma:

$$w(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1s \\ 0 & t > 1s \end{cases}$$

e o diagrama de Bode para o sistema em malha fechada.

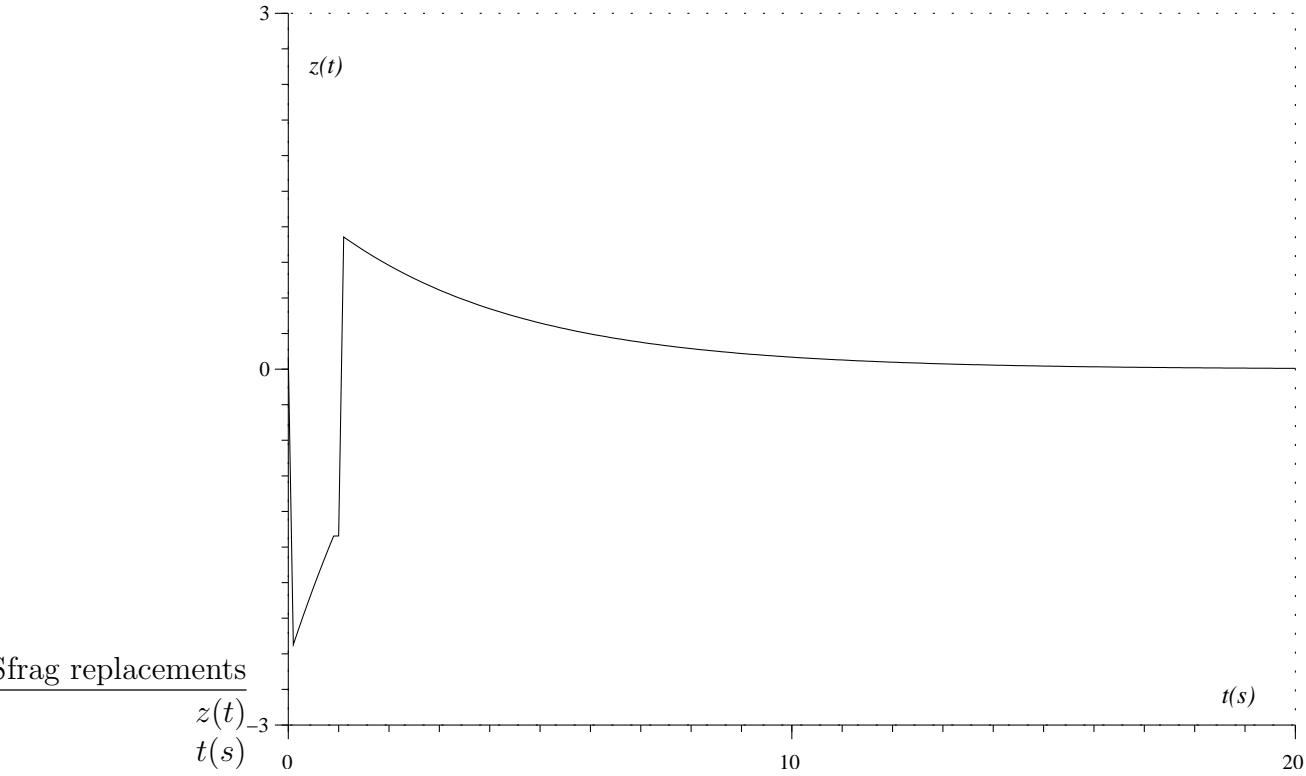


Figura 4.8: Saída de desempenho do sistema (4.47) em malha fechada.

## 4.7 Controle de sistemas incertos

Todos os resultados de projeto de realimentação de estados via LMIs apresentados neste capítulo se aplicam diretamente para a estabilização de sistemas incertos. Para isto basta que as incertezas estejam confinadas num politopo de vértices conhecidos, pois nas LMIs aqui apresentadas as matrizes do sistema aparecem de forma afim nas expressões. Este fato nos permite utilizar propriedades de convexidade para trabalhar com os vértices do politopo. Veja seções 3.2.5, 3.4.3 e 3.5.3.

A seguir apresentamos o caso de controle  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas com incertezas do tipo politopo.

Considere o sistema incerto

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\alpha)x(t) + B_u(\alpha)u(t) + B_w(\alpha)w(t) \\ z(t) &= C_z(\alpha)x(t) + D_{uz}(\alpha)u(t) + D_{wz}(\alpha)w(t) \\ u(t) &= Kx(t) \quad \alpha \in \Delta \end{aligned} \tag{4.48}$$

onde  $\alpha \in \mathbb{R}^q$  é o vetor de parâmetros incertos e  $\Delta = Co\{v_1, \dots, v_{2^q}\}$  é um politopo de vértices  $v_i$  conhecidos. As matrizes  $A(\alpha), B_u(\alpha), B_w(\alpha), C_z(\alpha), D_{uz}(\alpha), D_{wz}(\alpha)$  são funções afins de  $\alpha$ . Os demais vetores  $x(t), w(t), u(t), z(t)$  são os mesmos definidos em (4.44). De (4.46) temos

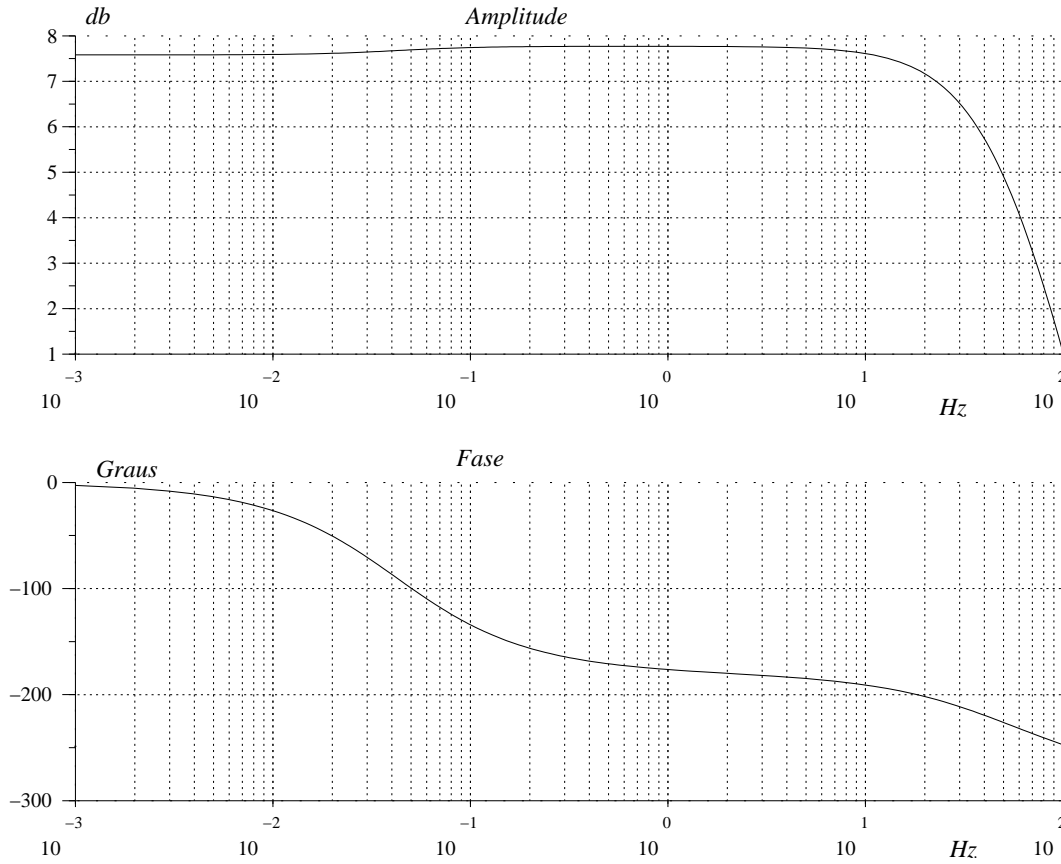


Figura 4.9: Diagrama de Bode do sistema (4.47) em malha fechada.

$$\min_{Q,Y} \gamma : \begin{cases} Q > 0, \\ \begin{bmatrix} A(\alpha)Q + QA(\alpha)' + B_u(\alpha)Y + Y'B_u(\alpha)' & \star & \star \\ B_w(\alpha)' & -\gamma I_{n_z} & \star \\ C_z(\alpha)Q + D_{uz}(\alpha)Y & D_{wz}(\alpha) & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

onde  $\gamma$  é um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  de forma idêntica à seção 3.5.3 e  $\star$  representa termos que podem ser deduzidos por simetria. Além disso, devido à convexidade as LMIs acima são equivalentes ao conjunto de  $2^q$  LMIs

$$\min_{Q,Y} \gamma : \begin{cases} Q > 0, \\ \begin{bmatrix} A(v_1)Q + QA(v_1)' + B_u(v_1)Y + Y'B_u(v_1)' & \star & \star \\ B_w(v_1)' & -\gamma I_{n_z} & \star \\ C_z(v_1)Q + D_{uz}(v_1)Y & D_{wz}(v_1) & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \\ \vdots \\ \begin{bmatrix} A(v_{2^q})Q + QA(v_{2^q})' + B_u(v_{2^q})Y + Y'B_u(v_{2^q})' & \star & \star \\ B_w(v_{2^q})' & -\gamma I_{n_z} & \star \\ C_z(v_{2^q})Q + D_{uz}(v_{2^q})Y & D_{wz}(v_{2^q}) & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \quad (4.50)$$

obtidos de (4.49) com  $\alpha = v_i$  para  $i = 1, \dots, 2^q$  onde  $v_i$  são os vértices do politopo  $\Delta$ .

Os resultados das seções 4.2, 4.6, 4.5, 4.4 são facilmente estendidos para o caso incerto de forma análoga.

## 4.8 Notas e Referências

Em geral, no projeto de controladores deseja-se um desempenho do sistema em malha fechada que atenda vários objetivos, por exemplo, obter uma boa resposta transitória (alocação de pólos) e ao mesmo tempo rejeitar perturbações com energia finita (controle  $\mathcal{H}_\infty$ ). Na teoria de controle, tal problema é denominado de controle multi-objetivo ou misto. Felizmente, técnicas de projeto de controladores baseadas em LMIs podem atender a uma grande variedade de especificações de desempenho dentro de um simples problema de otimização LMI (Scherer et al., 1997).

A idéia básica em problemas com vários objetivos é a de considerar a mesma parametrização (em outras palavras, a mesma função de Lyapunov) nas restrições LMIs (Chilali et al., 1999) ao custo de algum conservadorismo nos resultados<sup>7</sup>. A seguir, apresentam-se soluções para alguns problemas com múltiplos critérios de desempenho:

- **$\mathcal{H}_\infty$  com alocação de pólos** - minimizar um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  tal que os pólos em malha fechada pertençam a uma dada região  $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^-$ :

$$\min_{Y, Q} \gamma \quad \text{sujeito à (4.23) e (4.46)}. \quad (4.51)$$

- **Problema misto  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$**  - para um dado  $\gamma$  tal que  $\|H_{wz}\|_\infty < \gamma$  minimizar um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$  supondo que  $D_{wz} = 0$ :

$$\min_{N, Y, Q} \text{tr}(N) \quad \text{sujeito a (4.41) e a segunda LMI em (4.46)}. \quad (4.52)$$

## 4.9 Exercícios Propostos

**E 2.1** Considere o seguinte sistema linear instável em malha aberta:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 10 & -3 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u.$$

Para o sistema acima determinar uma lei de controle  $u = Kx$  tal que:

- os pólos em malha fechada tenham a parte real menor do que  $-2$ ;
- minimize a função custo  $J = \int_0^\infty (x_1^2 + u^2) dt$  para um conjunto de condições iniciais

$$X_0 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

<sup>7</sup>Note que neste caso a solução obtida será um limitante superior do valor ótimo (de Oliveira et al., 1999).

- (c) minimize um limitante superior da norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada e ao mesmo tempo tenha um ganho  $\mathcal{L}_2$  limitado por  $\|H_{wz}\|_\infty \leq 3$ , supondo que o sistema é perturbado por sinais  $w_1(t)$  (ruído branco com média nula e variância  $\mathbf{E}[w_1(t)^2] = 1$ ) e

$$w_2(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases},$$

onde

$$B_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad C_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{uz} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D_{wz} = 0.$$

**E 2.2** Demonstre que as condições do Teorema 4.4 implicam que  $J < x'_0 Q^{-1} x_0$  para uma dada condição inicial  $x(0) = x_0$ .

**E 2.3** Obtenha uma formulação convexa para o problema de controle  $\mathcal{H}_2$  utilizando o gramiano de observabilidade (dica: pré- e pós-multiplique as condições de estabilidade por  $Q = P^{-1}$ ).

**E 2.4** Demonstre que (4.46) implica em (3.116) para  $V(x) = x'Q^{-1}x$



## Capítulo 5

# Observadores de Estados e Filtragem

No capítulo anterior mostra-se que através do processo de realimentação dos estados é possível controlar as variáveis de saída de um sistema para efeito de estabilização ou desempenho. No entanto, na prática, nem sempre é possível medir fisicamente um sinal desejado, seja pela falta de equipamentos apropriados (sensores), ou mesmo por questões de economia, dado que a medida direta deste sinal pode tornar o projeto muito caro. Nesses casos é necessário estimar estes estados através das medidas disponíveis. Uma forma de fazer esta estimativa é o projeto de observadores de estados, ou seja, sistemas que são projetados a partir dos sinais dos medidores do sistema original, de forma que o erro entre o estado real e o estado estimado convirja para zero na ausência de ruídos externos.

Além de estimar as variáveis desejadas, para as quais não se tem medidores disponíveis, outro ponto importante é atenuar o máximo possível o efeito dos ruídos e perturbações externas nessas variáveis estimadas. Como será visto no decorrer deste capítulo, nesse caso o filtro a ser projetado irá depender das características do ruído e do sinal de perturbação aos quais o sistema está sujeito.

Neste capítulo apresenta-se o projeto de observadores de estados e filtros onde o efeito dos ruídos e perturbações são medidos através das normas  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Inicialmente apresenta-se os resultados clássicos de Luenberg e Kalman-Bucy e na sequência o projeto de filtro  $\mathcal{H}_\infty$ . Neste capítulo não estaremos considerando o projeto de controladores, mas sim o projeto de filtros para estimação de variáveis. O projeto de controladores que utilizam as variáveis estimadas será abordado no próximo capítulo.

### 5.1 Observador de ordem completa

Nesta seção consideraremos o problema de estimar todas as variáveis de estado de um sistema a partir dos sinais conhecidos disponíveis nesse sistema. Para isso consideraremos que o sistema seja descrito por

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t), & x(0) &= x_0 \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$



onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a variável de controle que suporemos conhecida<sup>1</sup> e  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o sinal de saída do sistema proveniente dos medidores e suporemos que não existe redundância nas variáveis medidas, isto é  $\text{posto}(C) = n_y$ .

Observe que se o número de sensores for igual ao número de variáveis de estado ( $n_y = n$ ) e as medidas efetuadas não são redundantes (a matriz  $C$  é inversível) então podemos determinar o estado através da relação algébrica  $x(t) = C^{-1}y(t)$ . No entanto na grande maioria dos casos não dispomos de sensores para todas as variáveis de estado e nesses casos temos  $n_y < n$  e portanto a matriz  $C$  não é mais inversível e não mais podemos encontrar o estado de através da relação algébrica acima. A solução nesses casos é obter uma estimativa  $x_f(t)$  do sinal  $x(t)$  através de um filtro dinâmico cujas entradas são os sinais conhecidos do sistema  $y(t), u(t)$  e cuja saída é a estimativa  $x_f(t)$ , como ilustra a figura 5.1. A representação de estados desse filtro é indicada abaixo.

$$\dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f u + K_f y(t) \quad (5.2)$$

onde as matrizes  $A_f, B_f, K_f$  devem ser determinadas tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) A estimativa  $x_f(t)$  deve convergir para  $x(t)$  em regime permanente, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_f(t)) = 0$$

- (ii) A dinâmica do erro de estimação  $e(t) = x(t) - x_f(t)$  deve depender apenas da condição inicial  $e(0) = x(0) - x_f(0)$ .

Um filtro que satisfaz as condições acima é denominado de observador de Luenberger e foi proposto originalmente em Luenberger (1966). O observador é denominado de ordem completa quando o estado  $x_f(t)$  do observador (5.2) possui dimensão igual a do estado  $x(t)$  que se deseja estimar.

O requisito (i) indica que não existe erro de estimação em regime permanente enquanto (ii) indica que o erro de estimação não depende dos sinais de entrada do filtro  $y(t), u(t)$  e portanto o projeto do observador e da lei de controle ficam independentes.

Para determinar as matrizes do filtro que satisfazem as condições acima basta calcular a dinâmica do erro de estimação  $e(t) = x(t) - x_f(t)$  que nos leva à:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{x}_f = Ax + B_u u - [A_f x_f + B_f u + K_f y] \\ &= (A - K_f C)x + (B_u - B_f)u - A_f x_f \\ &= (A - K_f C)(e + x_f) + (B_u - B_f)u - A_f x_f \\ &= (A - K_f C)e + (B_u - B_f)u + (A - K_f C - A_f)x_f \end{aligned} \quad (5.3)$$

<sup>1</sup>Como mencionado anteriormente os métodos de projeto de controladores que utilizam as variáveis de estado estimadas serão estudados no próximo capítulo.

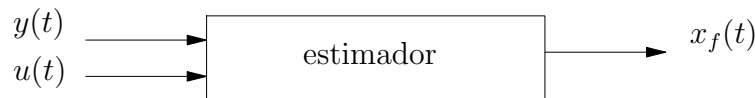


Figura 5.1: Diagrama de blocos de um estimador de estado.

Para que o requisito (i) seja atendido devemos escolher

$$A_f = A - K_f C \quad , \quad B_f = B_u \quad (5.4)$$

que resulta na seguinte dinâmica do erro de estimação

$$\dot{e} = (A - K_f C)e \quad (5.5)$$

e num filtro, conhecido como observador de Luenberger de ordem completa, dado por

$$\dot{x}_f(t) = (A - K_f C)x_f(t) + B_u u(t) + K_f y(t) \quad (5.6)$$

Por outro lado para que o requisito (ii) seja atendido devemos escolher a matriz  $K_f$ , conhecida como ganho do observador, de tal forma que os autovalores da matriz  $A - K_f C$ , que define a dinâmica do erro de acordo com (5.5), tenham todos parte real negativa, pois dessa forma teremos

$$e(t) = \exp\{At\}e(0) \quad \text{com} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0 \quad \forall e(0)$$

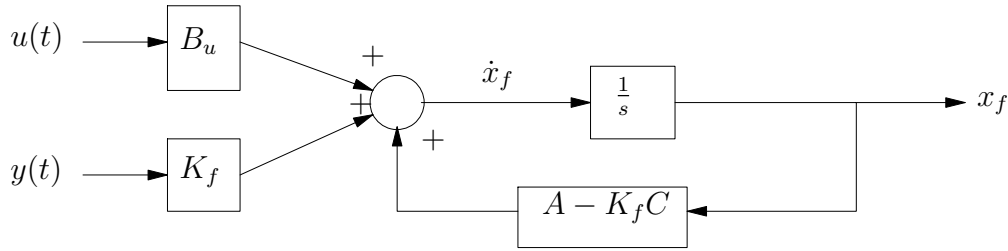


Figura 5.2: Observador de ordem completa para o sistema (5.1).

### 5.1.1 Técnicas para projeto do ganho do observador

O problema que estudaremos nesta seção consiste em projetar a matriz  $K_f$  de ganho do observador de tal forma que os autovalores da matriz  $A - K_f C$  estejam no semi-plano complexo esquerdo. Observe que este problema é similar ao problema de projeto de realimentação de estados estudado no capítulo anterior onde apresentamos técnicas para determinar uma matriz  $K$  tal que autovalores da matriz  $A - B_u K$  estejam no semi-plano complexo esquerdo. A única diferença é a localização das matrizes  $K$  e  $K_f$ , a serem determinadas, em relação às matrizes constantes  $B_u$  e  $C$  e isto impede que as mesmas técnicas do capítulo anterior sejam usadas diretamente. No entanto essa dificuldade pode ser eliminada notando que os autovalores de  $A - K_f C$  são os mesmos da sua transposta  $A' - C' K'_f$  onde agora  $K'_f$  e  $K$  aparecem na mesma posição. Portanto podemos estabelecer a seguinte correspondência:

<i>projeto de</i>	$\leftrightarrow$	<i>projeto de</i>
<i>controlador</i>		<i>observador</i>
$A$	$\leftrightarrow$	$A'$
$B_u$	$\leftrightarrow$	$C'$
$K$	$\leftrightarrow$	$K'_f$

A tabela acima indica que se definirmos um sistema de controle auxiliar fictício, chamado de sistema dual, na forma

$$\dot{e}_d = A'e_d + C'u_d \quad , \quad u_d = -K'_f e_d \quad (5.7)$$

onde  $e_d, u_d$  são o estado dual e controle dual, respectivamente, podemos utilizar as mesmas técnicas do capítulo anterior para encontrar a matriz de ganho  $K_f$  tal que o sistema dual acima em malha fechada  $A' - C'K'_f$  seja estável.

Note que controlabilidade no sistema dual (5.7) significa observabilidade do par  $(A, C)$  que indica observabilidade do sistema original (5.1). Isto decorre do fato de que a matriz de controlabilidade do par  $(A', C')$  é a transposta da matriz de observabilidade do par  $(A, C)$ .

### Projeto por abordagens clássicas.

Para determinação de  $K_f$  via alocação de pólos, temos da seção 4.1 que o par  $(A', C')$  precisa ser controlável, ou de forma equivalente  $(A, C)$  observável. Os resultados da seção 4.1 se aplicam diretamente para a solução do problema fictício de controle por realimentação de estados do sistema dual (5.7).

**Exemplo 5.1** Considere o problema de projetar um observador para o sistema  $\dot{x} = Ax + B_u u$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

. Queremos que os pólos de malha fechada do sistema sejam  $\{-3, -6\}$ . Calcularemos a matriz de ganho  $K_f$  do observador usando os métodos SISO e MIMO de forma análoga ao exemplo 4.1.

### Método para sistemas SISO:

*Equação característica desejada:*

$$(s + 3)(s + 6) = s^2 + 9s + 18 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = 9 \\ \alpha_2 = 18 \end{matrix}$$

*Equação característica de malha aberta:*

$$\det(sI - A') = \begin{vmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{vmatrix} = s^2 \Rightarrow \begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \end{matrix}$$

*Cálculo da matriz de ganho*

$$K'_f = \begin{bmatrix} \alpha_2 - a_2 & \alpha_1 - a_1 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} 18 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Note que  $A', C'$  não se encontram na forma canônica de controlabilidade  $A_c, B_c$  em (4.4) e por isso a transformação  $T = U_c V_c^{-1}$  se faz necessário. Note que  $V_c = I_2$  para este exemplo e a matriz  $U_c$  é a matriz de controlabilidade do par  $(A', C')$ .

**Método para sistemas MIMO:**

$$\begin{bmatrix} A' - \lambda I_2 & -C' \end{bmatrix} g_i = \begin{bmatrix} -\lambda_i & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda_i & 0 \end{bmatrix} g_i = 0$$

Os autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1 = -3$  e  $\lambda_2 = -6$  são  $g_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 3 \end{bmatrix}'$  e  $g_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1/6 & 6 \end{bmatrix}'$ .

Desta forma, temos:

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/3 & -1/6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \\ G \end{bmatrix}$$

$$\text{Assim, } K_f' = GV^{-1} = \begin{bmatrix} 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Os resultados da seção de controle via LQR também se aplicam diretamente.

**Exercício 5.1** Projete um observador de estados para o sistema do exemplo anterior usando LQR com o critério  $\int_0^\infty (e_d' Q e_d + u_d' R u_d) dt$  onde  $e_d, u_d$  são os vetores de estado e controle duais (5.7). Escolha  $Q, R$  de forma a ter rápida convergência dos estados observados. Verifique os autovalores de  $A - K_f C$  obtidos e compare com o desempenho do observador obtido no exemplo anterior.

**Projeto por abordagens baseadas em LMIs.**

Da seção 4.2.1 sabemos que quando o sistema dual (5.7) é controlável, isto é o sistema (5.1) é observável, podemos encontrar uma matriz de ganhos  $K_f$  tal que a localização dos autovalores de  $A' - C' K_f'$  possa ser arbitrariamente escolhida. Quando o sistema (5.1) não é observável não podemos mais escolher a localização dos autovalores de  $A' - C' K_f'$  de forma arbitrária, mas se os modos não observáveis são estáveis, ainda assim podemos determinar uma matriz de ganhos  $K_f$  tal que os autovalores de  $A' - C' K_f'$  estejam no semi-plano complexo esquerdo tornando estável a dinâmica do erro de estimação. Essa idéia nos leva à seguinte definição:

**Definição 5.1 (Detectabilidade)** O sistema linear invariante (5.1) é **detectável** se os modos não observáveis (quando existirem) são estáveis.

A observabilidade de um sistema pode ser facilmente testada através do posto da matriz de observabilidade. Porém como saber se os modos não observáveis, quando existirem, são estáveis? Na abordagem clássica isso pode ser testado com o auxílio de formas canônicas (T.Kailath, 1980), mas este método se torna inviável no caso de sistemas incertos. O resultado apresentado a seguir é baseado em LMIs e pode ser facilmente estendido para sistemas incertos.

**Teorema 5.1** O sistema (5.1) é detectável se e somente se existem matrizes  $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$  positiva definida e  $L \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  tais que a seguinte LMI seja factível.

$$A'S + SA + C'L' + LC < 0 \quad , \quad S > 0 \quad (5.8)$$

A prova deste teorema é idêntica à do teorema 4.1. Basta notar que provar a detectabilidade do par  $A, C$  no sistema (5.1) é idêntica a provar a estabilizabilidade do par  $(A', C')$  no sistema dual (5.7). Como fruto dessa analogia podemos enunciar a seguinte versão dual do corolário 4.1.

**Corolário 5.1** *Existe uma matriz de ganho  $K_f$  do observador (5.6) que torna a dinâmica do erro de estimação (5.5) exponencialmente estável se e somente se o sistema (5.1) for detectável. Além disso, toda matriz de ganhos  $K_f$  estabilizante pode ser decomposta como  $K_f = -S^{-1}L$  onde  $L, S$  é uma das soluções de (5.8).  $\square$*

**Exercício 5.2** *Encontre um observador de estados para o sistema dinâmico (5.1) onde*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -4 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0 \ 0]$$

O procedimento de alocação de pólos, visto na Seção 4.2.2, pode ser usado também no projeto de observadores para melhorar a convergência do erro de estimação. Neste caso, busca-se garantir que a convergência de  $x_f$  para o estado  $x$  ocorra com a rapidez desejada e isto se consegue através da alocação adequada dos pólos do sistema dinâmico do erro de estimação.

Para garantir que o erro de estimação tenda assintoticamente para zero com autovalores na região  $\mathcal{D}$ , aplica-se as condições do Teorema 3.4 à dinâmica do erro de estimação (5.5), obtendo-se:

$$L \otimes P + M \otimes (P(A + K_f C)) + M' \otimes ((A + K_f C)'P) < 0 \quad (5.9)$$

A expressão acima não é uma LMI em  $P$  e  $K_f$ , porém uma simples mudança de variável é suficiente para tornar estas condições convexas. Este resultado é apresentado no próximo teorema.

**Teorema 5.2** *Considere o sistema (5.1) e uma região LMI  $\mathcal{D}$  contida em  $\mathbb{C}^-$ . Suponha que as matrizes  $P$  e  $X$  de dimensões apropriadas sejam solução do seguinte problema LMI:*

$$L \otimes P + M \otimes (PA + XC) + M' \otimes (A'P' + C'X') < 0 \quad (5.10)$$

*então o sistema do erro de estimação (5.5) com  $K_f = P^{-1}X$  é  $\mathcal{D}$ -estável.*

Na seqüência apresenta-se um exemplo numérico.

**Exemplo 5.2** *Considere o sistema usado no Exemplo 5.2. Busca-se agora garantir que o sistema do erro de estimação tenha uma dinâmica mais rápida, restringindo que os seus autovalores pertençam a região LMI definida na Figura 3.3(b) com raio 2 e centro em  $(-4, 0)$ . Para esta região a condição (5.10) é equivalente ao seguinte problema LMI:*

$$\exists X, P > 0 : \begin{bmatrix} -2P & (4P + PA + XC) \\ (4Q + A'P' + C'X') & -2P \end{bmatrix} < 0$$

*Aplicando o LMITOOL do Scilab, obtém-se o seguinte resultado:*

X =

! - 22624.493 !

! 10382.626 !

! 18858.031 !

P =

! 5799.9469 - 1852.372 - 336.90558 !

! - 1852.372 962.98814 1020.2954 !

! - 336.90558 1020.2954 3534.4051 !

Kf =

! 6.7781018 !

! 10.408455 !

! - 7.6941234 !

*Note que, agora os autovalores do sistema do erro de estimação são dados por:*

$$\begin{aligned} & -4.16161 \\ & -3.3082459 \pm .2027620i \end{aligned}$$

*A Figura 5.3 apresenta as trajetórias do sistema do erro de estimação, considerando a mesma condição inicial  $[1 \ 1 \ 0]^T$  usada no Exemplo 5.2.*

O procedimento de alocação de pólos para o projeto de observadores é interessante dado que permite um maior controle da convergência do erro de estimação. Observa-se no entanto que, como no caso de realimentação de estados, uma escolha inadequada da região pode acarretar sobre-sinais elevados além de um ganho  $K_f$  muito elevado o que pode ocasionar amplificação de ruídos e excitar dinâmicas de altas frequências desprezadas no modelo.

## 5.2 Observador de Ordem Reduzida

Na seção anterior estudamos o observador de ordem completa, onde uma estimativa das variáveis de estado é obtida a partir de um filtro que possui a mesma dimensão do sistema cujo estado desejamos estimar. Como algumas variáveis de estado do sistema podem ser obtidas diretamente dos medidores, podemos pensar em estimar apenas aquelas variáveis para as quais não dispomos de medidores. Nesse caso o filtro que estima esse sub-conjunto de variáveis não medidas terá dimensão menor que a do sistema original e recebe o nome de observador de ordem reduzida. Para melhor formular o problema considere uma nova representação de estados para o sistema (5.1) tal que nessa nova representação as variáveis medidas  $y(t)$  façam parte do vetor de estados. Isto se consegue com a mudança de variável

$$z(t) = Tx(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} C \\ R \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (5.11)$$

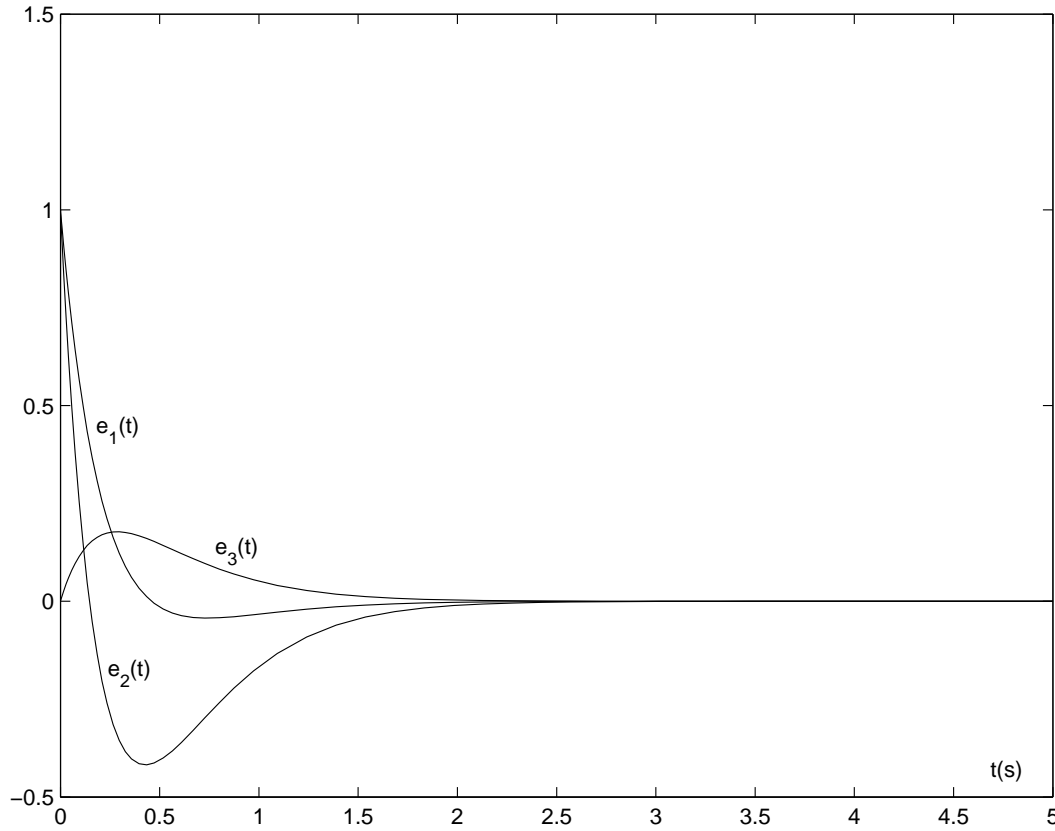


Figura 5.3: Trajetória do sinal de erro de estimação, caso de alocação de pólos

onde  $R$  pode ser arbitrariamente escolhida de tal forma que  $T$  seja inversível e  $w(t) = Rx(t) \in \mathbb{R}^{n-n_y}$  é a parte do vetor de estado contendo as variáveis para as quais não dispomos de medidores e portanto precisam ser estimadas. Aplicando a transformação de similaridade encontramos

$$\dot{z}(t) = TAT^{-1}z(t) + TB_u u(t) \quad , \quad y(t) = CT^{-1}z(t) \quad (5.12)$$

e para separar as dinâmicas das variáveis  $y(t)$  que medimos e  $w(t)$  que iremos estimar, consideraremos a seguinte partição:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, TB_u = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, CT^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Assim vemos que a dinâmica das variáveis que desejamos estimar é regida pela equação diferencial

$$\dot{w}(t) = A_{22}w(t) + A_{21}y(t) + B_2u(t) \quad (5.14)$$

Como em (5.1) os sinais  $y(t), u(t)$  são conhecidos porém agora desejamos obter uma estimativa  $w_f(t) \in \mathbb{R}^{n-n_y}$  do sinal  $w(t)$  através de um filtro dinâmico cujas entradas são os sinais conhecidos do sistema e cuja saída é a estimativa  $w_f(t)$ , como ilustra a figura 5.4. Uma representação de estados genérica desse filtro é indicada abaixo.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_f \xi(t) + B_f u(t) + C_f y(t) \\ w_f(t) &= F_f \xi(t) + H_f u(t) + G_f y(t) \end{aligned} \quad (5.15)$$

onde as matrizes  $A_f, B_f, C_f, G_f, H_f, F_f$  devem ser determinadas tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- (i) A estimativa  $w_f(t)$  deve convergir para  $w(t)$  em regime permanente, i.e.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (w(t) - w_f(t)) = 0$$

- (ii) A dinâmica do erro de estimação  $e(t) = w(t) - w_f(t)$  deve depender apenas da condição inicial  $e(0) = w(0) - w_f(0)$ .

Como visto na seção anterior, um filtro que satisfaz as condições acima é denominado de observador de Luenberger. O observador é denominado de ordem reduzida quando o estado  $\xi(t)$  do observador (5.15) possui dimensão inferior a do estado  $x(t)$  que se deseja estimar. Dizemos que o observador é de ordem mínima quando o estado  $\xi(t)$  do observador (5.15) possui dimensão igual à  $n - n_y$ .

O requisito (i) indica que não existe erro de estimação em regime permanente enquanto (ii) indica que o erro de estimação não depende dos sinais de entrada do filtro  $y(t), u(t)$  e portanto o projeto do observador e da lei de controle ficam independentes.

Observe que, no projeto de observadores de ordem completa, foi possível atender as condições de Luenberger com  $G_f = 0$ ,  $H_f = 0$ ,  $F_f = I$ , ou seja o estado do observador  $\xi(t)$  é a própria estimativa  $w_f(t) = x_f(t) \in \mathbb{R}^n$ . Mostraremos a seguir que para o caso de ordem reduzida podemos atender os requisitos acima com  $H_f = 0$ ,  $F_f = I$  que nos leva à seguinte expressão para a estimativa  $w_f(t)$ :

$$w_f(t) = G_f y(t) + \xi(t) \quad (5.16)$$

Para encontrar as demais matrizes do filtro observe que a dinâmica do erro  $e(t) = w(t) - w_f(t)$  é dada por

$$\dot{e}(t) = \dot{w}(t) - \dot{w}_f(t) = A_{21}y(t) + A_{22}w(t) + B_2u(t) - (G_f\dot{y}(t) + \dot{\xi}(t))$$

e como pode ser visto de (5.12) e (5.13) temos  $\dot{y}(t) = A_{11}y(t) + A_{12}w(t) + B_1u(t)$ .

Logo

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_{21}y(t) + A_{22}w(t) + B_2u(t) - G_f(A_{11}y(t) + A_{12}w(t) + B_1u(t)) \\ &\quad - A_f\xi(t) - C_fy(t) - B_fu(t) \end{aligned}$$

Como  $e(t) = w(t) - w_f(t) = w(t) - G_fy(t) - \xi$  temos

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= A_fe(t) + (A_{21} - G_fA_{11} - C_f + A_fG_f)y(t) + (A_{22} - G_fA_{12} - A_f)w(t) \\ &\quad + (B_2 - G_fB_1 - B_f)u(t) \end{aligned}$$

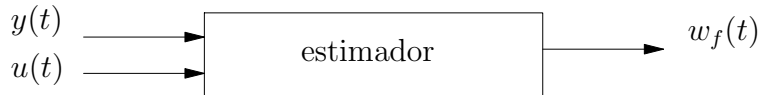


Figura 5.4: Diagrama de blocos de um estimador de estado genérico.



Para satisfazer o requisito (ii) devemos escolher

$$A_f = A_{22} - G_f A_{12} , \quad B_f = B_2 - G_f B_1 , \quad C_f = A_{21} - G_f A_{11} + A_f G_f \quad (5.17)$$

que resulta no seguinte observador de ordem mínima

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_f \xi(t) + (B_2 - G_f B_1)u(t) + (A_{21} - G_f A_{11} + A_f G_f)y(t) \\ w_f(t) &= G_f y(t) + \xi(t) \quad , \quad A_f = A_{22} - G_f A_{12} \end{aligned} \quad (5.18)$$

que fornece uma estimativa  $w_f(t)$  e cuja dinâmica de erro de estimação é dada por

$$\dot{e}(t) = (A_{22} - G_f A_{12})e(t) \quad , \quad e(t) = w(t) - w_f(t) \quad (5.19)$$

Para que o requisito (ii) seja atingido a matriz de ganho  $G_f$  do observador deve ser projetada de tal forma que os autovalores da matriz  $A_{22} - G_f A_{12}$  estejam todos no semi-plano complexo esquerdo. Na seção 5.1.1 foram apresentadas várias técnicas de projeto para esse fim.

Finalmente observe que o problema original era encontrar uma estimativa  $x_f(t)$  para o estado do sistema (5.1) estimando apenas as variáveis  $w(t)$  para as quais não dispomos de medidores. Usando a relação (5.11) temos

$$x_f(t) = T^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ w_f(t) \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

onde  $w_f(t) \in \mathbb{R}^{n-y}$  é a estimativa dada pelo observador de ordem mínima (5.18).

**Exercício 5.3** *Mostre que a estimativa acima não apresenta erro em relação às variáveis medidas, isto é  $Cx_f(t) = y(t)$  e além disso  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - x_f(t)) = 0$ .*

## 5.3 Filtros $\mathcal{H}_2$

O problema tratado nas seções precedentes trata da estimação das variáveis de estado de um sistema. Em muitas aplicações na área de tratamento de sinais temos um problema similar conhecido como filtragem de sinais que pode ser descrito da seguinte forma.

Considere um sinal  $y(t)$  gerado por um sistema com o seguinte modelo de estados

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) + D_w w(t) \\ z(t) &= C_z x(t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados do sistema de geração do sinal,  $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$  é a parcela conhecida do sinal gerado,  $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$  é a parcela não conhecida do sinal gerado e que desejamos estimar,  $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$  é um sinal de entrada conhecido, e  $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$  é um sinal de entrada não conhecido que pode ser representado por um ruído branco com média nula e covariância dada por:

$$\mathbf{E}[w(t)w(t)'] = W \delta(t)$$

sendo  $\delta(t)$  um impulso na origem e  $W$  uma matriz positiva definida (ou semi-definida) constante. Suponha também que o estado inicial de (5.21) seja uma variável aleatória de média nula e de matriz de covariância  $P_0$ , sendo não correlacionado com  $w(t)$ .

Na representação acima o mesmo ruído  $w(t)$  afeta a dinâmica do sistema e a variável de saída. Ruídos diferentes em cada uma das partes podem ser facilmente considerados bastando para isso particionar as matrizes  $B_w, D_w$  convenientemente como indicado abaixo.

- Com  $B_w = [B \ 0]$  e  $D_w = [0 \ D]$ , e  $w = [w_1 \ w_2]$ , o sinal  $w_1$  afeta a dinâmica e  $w_2$  o sinal de saída do sistema.
- Considerando  $C_z = I_n$ , busca-se estimar todo o vetor de estados.

Nesta seção desejamos estimar a variável  $z(t)$  através de um filtro que deve ser projetado de forma a minimizar o impacto que as diferentes realizações do ruído  $w(t)$  possa causar na estimação. Este problema foi resolvido no início da década de 60 por Kalman (1960), e Kalman and Bucy (1961) e a solução encontrada é aquela que minimiza a variância do erro de estimação para as diferentes realizações de  $w(t)$ . Veremos na sequência que isto corresponde a minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema que define a dinâmica do erro de estimação.

Para que possamos apresentar o projeto do filtro e definir norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas estocásticos alguns conhecimentos básicos de variáveis estocásticas se fazem necessários. Este é o objetivo da próxima seção.

### 5.3.1 Norma $\mathcal{H}_2$ para sistemas estocásticos.

Nesta seção apresentamos um resumo, extraído de (Friedland, 1986), sobre os principais tópicos relacionados à caracterização de variáveis estocásticas e veremos como podemos definir norma  $\mathcal{H}_2$  para sistemas estocásticos.

O termo variável estocástica pode ser interpretado como uma generalização do conceito de variável aleatória. Enquanto um processo estocástico gera resultados que são funções do tempo, que representamos por uma variável estocástica, um processo aleatório gera resultados que são números, representados por uma variável aleatória. Por exemplo, verificar o resultado num jogo de dados é um processo aleatório enquanto o processo de efetuar a medição de um sinal em cada realização de um certo experimento é estocástico. O sistema (5.21) é estocástico pois cada realização do sinal  $w(t)$  gera como resposta sinais  $y(t), z(t)$ .

As estatísticas de uma variável estocástica, como a média e variância por exemplo, são definidas a partir da função densidade de probabilidade (FDP) que representa estatisticamente o comportamento dessa variável.

A FDP representa a probabilidade da variável se encontrar num certo intervalo num dado instante, isto é, se  $F_{dp}(\cdot)$  é a FDP de uma certa variável então

$$F_{dp}(x_1, t_1) \Delta x_1 = \text{prob}[x_1 < x(t_1) < x_1 + \Delta x_1]$$

Por exemplo, se compararmos a FDP à densidade de um certo líquido, a probabilidade seria a massa desse líquido no volume em questão.

Na maior parte dos casos as variáveis estocásticas são caracterizadas pelas estatísticas de 1ª e 2ª ordem. As estatísticas de primeira ordem são indicativos dos desvios que esta variável pode sofrer num instante genérico de tempo ao longo das possíveis realizações da variável. As mais comuns são a média, a média quadrática e a variância definidas a seguir para o caso escalar.

$$\text{média} \quad \mu(t) = \mathbf{E}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x F_{dp}(x, t) dx$$

$$\text{média quadrática} \quad \mathbf{E}\{x^2(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 F_{dp}(x, t) dx$$

$$\text{variância} \quad \sigma^2(t) = \mathbf{E}\{(x - \mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 F_{dp}(x, t) dx$$

Observe que  $\sigma^2(t) = \mathbf{E}\{(x - \mu)^2\} = \mathbf{E}\{x^2 - 2x\mu + \mu^2\} = \mathbf{E}\{x^2\} - \mu^2$ .

As estatísticas de segunda ordem dizem respeito ao valor da variável em dois instantes de tempo distintos ao longo das possíveis realizações da variável. A mais comum é a correlação definida a seguir também para o caso escalar.

$$\text{correlação} \quad \rho(t, \tau) = \mathbf{E}\{x(t) x(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 F_{dp}(x_1, x_2; t, \tau) dx_1 dx_2$$

O símbolo  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  representa a esperança matemática do sinal  $\{\cdot\}$  e significa o valor médio de  $\{\cdot\}$  calculado no sentido probabilístico que é diferente do valor médio determinístico dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

Apesar da dupla integral que define a função de correlação ela se reduz à média quadrática quando  $t = \tau$ . Isto pode ser verificado da seguinte forma. Com  $t = \tau$  temos

$$\rho(t, t) = \mathbf{E}\{x(t) x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 F_{dp}(x_1, x_2; t, t) dx_1 dx_2 \quad (5.22)$$

Porém

$$F_{dp}(x_1, x_2; t, t) dx_1 dx_2 = \text{Prob}[x_1 < x(t) < x_1 + dx_1, x_2 < x(t) < x_2 + dx_2]$$

e como  $x(t)$  não pode estar nos intervalos  $x_1 < x(t) < x_1 + dx_1$  e  $x_2 < x(t) < x_2 + dx_2$  no mesmo instante a menos que  $x_1 = x_2$  temos

$$F_{dp}(x_1, x_2; t, t) dx_1 dx_2 = F_{dp}(x_1; t) \delta(x_1 - x_2) dx_1 dx_2$$

onde  $\delta(x_1 - x_2)$  denota um impulso para  $x_1 - x_2 = 0$ . Substituindo a expressão acima em (5.22) e integrando para o impulso temos o resultado desejado

$$\rho(t, t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1^2 F_{dp}(x_1; t) dx_1 = \mathbf{E}\{x(t)^2\}$$

Como a FDP dificilmente é conhecida na prática, as estatísticas exatas definidas através do operador  $\mathbf{E}\{\cdot\}$  possuem interesse apenas teórico. Do ponto de vista prático podemos obter aproximações das estatísticas do sinal através das suas amostras dando origem à estatísticas empíricas indicadas abaixo.

$$\text{média} \quad \bar{x}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$$

$$\text{média quadrática} \quad \overline{x^2}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2(t)$$

$$\text{variância} \quad v(t) = \overline{x^2}(t) - (\bar{x}(t))^2$$

$$\text{correlação} \quad r(t, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t) x_i(\tau)$$

Observe que nas definições empíricas acima a correlação para  $t = \tau$  coincide com a média quadrática e quando a média é nula a variância coincide com a média quadrática.

Para um sinal vetorial na forma

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ a média é dada por } \mathbf{E}\{x(t)\} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\{x_1(t)\} \\ \vdots \\ \mathbf{E}\{x_n(t)\} \end{bmatrix}$$

e a correlação é uma matriz simétrica dada por

$$R(t, \tau) = \mathbf{E}\{x(t)x(\tau)'\} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}\{x_1(t)x_1(\tau)\} & \dots & \mathbf{E}\{x_1(t)x_n(\tau)\} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}\{x_n(t)x_1(\tau)\} & \dots & \mathbf{E}\{x_n(t)x_n(\tau)\} \end{bmatrix}$$

Os elementos da diagonal  $\mathbf{E}\{x_i(t)x_i(\tau)\}$  são as funções de autocorrelação dos sinais  $x_i(t)$ .

Os elementos fora da diagonal  $\mathbf{E}\{x_i(t)x_j(\tau)\}$  são as funções de correlação cruzada.

Um caso especial importante ocorre quando  $t = \tau$ . A matriz  $R(t, t)$  é chamada de matriz de covariância do sinal e é positiva definida (ou semi-definida). Observe que se  $x(t)$  possui média nula então sua variância, definida por  $\mathbf{E}\{x(t)'x(t)\}$ , pode ser obtida através do traço da matriz de covariância  $R(t, t)$  da seguinte forma

$$\mathbf{E}\{x(t)'x(t)\} = \mathbf{E}\{\text{tr}\{x(t)x(t)'\}\} = \text{tr}\{\mathbf{E}\{x(t)x(t)'\}\} = \text{tr}\{R(t, t)\} \quad (5.23)$$

Quando  $\mathbf{E}\{x_i(t)x_j(\tau)\}$  é nula dizemos que os sinais  $x_i(t)$  e  $x_j(t)$  são não-correlacionados. Observe que isto não implica que eles sejam estatisticamente inde-

pendentes. Para que isto ocorra a FDP conjunta de  $x_i(t)$  e  $x_j(t)$  deve ser o produto das FDP individuais.

Um processo que dá origem à uma variável estocástica onde sua FDP satisfaz a relação

$$F_{dp}(x, t + \tau) = F_{dp}(x, t), \forall \tau$$

é chamado processo estacionário indicando que as estatísticas não se alteram com deslocamentos no tempo.

Quando as estatísticas tomadas sobre o conjunto dos resultados dos experimentos coincidem com as estatísticas temporais de cada experimento, dizemos que o processo que gera esses resultados é ergódico. Observe que um processo ergódico precisa ser estacionário. Num processo ergódico o resultado de um único experimento é representativo de todos os resultados possíveis de serem obtidos. Assim, num processo ergódico temos:

$$\text{média} \quad \mu(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) dt$$

$$\text{média quadrática} \quad \sigma^2(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} (x(t) - \mu(t))^2 dt$$

$$\text{correlação} \quad \rho(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) x(t + \tau) dt$$

Uma variável estocástica  $w(t)$  é chamada de ruído branco se ela possuir média nula ( $\mathbf{E}\{w(t)\} = 0$ ) e se sua matrix de correlação for dada por

$$R(\tau) = W\delta(\tau) = \mathbf{E}\{w(t)w(t + \tau)'\} \quad (5.24)$$

onde  $W > 0$  (ou  $W \geq 0$ ) é a matriz de covariância do ruído e  $\delta(\tau)$  é um impulso unitário na origem. Daí vemos que um ruído branco é um sinal não correlacionado no tempo pois  $\delta(\tau) = 0$  para  $\tau \neq 0$ . Além disso a transformada de Fourier da função de correlação<sup>2</sup> de um ruído branco é uma constante dada pela matriz  $W$ . Por ter uma função de correlação expressa através de um impulso, o ruído branco é um sinal que não existe no mundo real. Porém, devido às suas propriedades ele tem um papel fundamental na análise de sinais que é comparado ao papel do impulso na teoria de sistemas lineares.

Note que a resposta de um sistema linear invariante estável à um ruído branco também é um sinal de média nula<sup>3</sup>. Para verificar isso seja  $\phi(t)$  a matriz de transição de estados um sistema linear invariante causal. Assim sua resposta a um sinal  $w(t)$  com  $w(t) = 0, \forall t < 0$  é

$$y(t) = \int_0^t \phi(t - \tau)w(\tau) d\tau$$

<sup>2</sup>A transformada de Fourier da função de correlação é conhecida em tratamento de sinais como espectro de potência do sinal pois o módulo da transformada numa certa frequência indica a potência do sinal nessa frequência.

<sup>3</sup>Na realidade a saída terá média nula para qualquer sinal de entrada de média nula.

de onde obtemos<sup>4</sup>

$$\mathbf{E}\{y(t)\} = \mathbf{E}\left\{\int_0^t \phi(t-\tau)w(\tau) d\tau\right\} = \int_0^t \phi(t-\tau)\mathbf{E}\{w(\tau)\} d\tau$$

Logo se  $\mathbf{E}\{w(t)\} = 0$  temos  $\mathbf{E}\{y(t)\} = 0$ .

A variância do sinal de resposta a um ruído branco pode ser interpretada como a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema pois possui as mesmas propriedades da norma  $\mathcal{H}_2$  definida em (3.88). Para verificar essa analogia seja  $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[H(s)]$  a transformada inversa da matriz de transferência do sistema. Usando linearidade e superposição, vimos no final da seção 3.4 podemos interpretar a matriz  $h(t)$  como sendo a resposta impulsional do sistema. Observe ainda que  $h(t) = 0$  para  $t < 0$  pois  $h(t)$  representa a resposta de um sistema causal para um impulso na origem. Considere um ruído branco  $w(t)$  com  $w(t) = 0, \forall t < 0$  e covariância identidade, isto é satisfaz (5.24) com  $W = I$ . A resposta do sistema é dada pela integral de convolução

$$z(t) = \int_0^t h(t-\tau)w(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau) d\tau \quad (5.25)$$

e a variância da resposta  $z(t)$  é obtida a partir da expressão (5.23) de onde vem

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{z(t)'z(t)\} &= \mathbf{E}\{\text{tr}\{z(t)z(t)'\}\} \\ &= \mathbf{E}\left\{\text{tr}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)w(\tau)w(\sigma)'h(t-\sigma)' d\sigma d\tau\right\}\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{h(t-\tau)\mathbf{E}\{w(\tau)w(\sigma)'\}h(t-\sigma)'\} d\sigma d\tau \end{aligned}$$

Usando a propriedade (5.24) que caracteriza um ruído branco de covariância identidade temos  $\mathbf{E}\{w(\tau)w(\sigma)'\} = \delta(\tau - \sigma)I$  onde  $\delta(\tau - \sigma)$  representa um impulso em  $\tau = \sigma$ . Levando esta identidade na expressão acima e usando a propriedade do impulso  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$  temos

$$\mathbf{E}\{z(t)'z(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr}\{h(t-\tau)h(t-\tau)'\} d\tau$$

Com a mudança de variável  $\sigma = t - \tau$  temos  $d\sigma = -d\tau$  para qualquer instante de tempo  $t$  dado. Além disso, como  $h(\sigma) = 0, \forall \sigma < 0$  obtemos o resultado desejado

$$\mathbf{E}\{z(t)'z(t)\} = \int_0^{\infty} \text{tr}\{h(\sigma)h(\sigma)'\} d\sigma = \|h(t)\|_2^2 \quad (5.26)$$

de onde vemos que a variância da resposta ao ruído branco é a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema como definida em (3.88) através da resposta ao impulso.

É interessante notar que apesar da norma 2 ser uma medida da energia da resposta ao impulso, a variância do sinal de saída  $\mathbf{E}\{z(t)'z(t)\}$  não tem interpretação em termos de energia já que  $z(t)'z(t)$  está relacionado com o potência do sinal  $z(t)$ .

<sup>4</sup>Note que a esperança matemática  $\mathbf{E}\{.\}$  é tomada em relação às possíveis realizações de  $w(t)$  e  $\phi(t - \tau)$  é a mesma para todas as realizações. Logo  $\mathbf{E}\{\phi(t - \tau)w(\tau)\} = \phi(t - \tau)\mathbf{E}\{w(\tau)\}$ .

### 5.3.2 Projeto do filtro $\mathcal{H}_2$ : variância mínima.

Nesta seção desejamos projetar um filtro para estimar a variável  $z(t)$  no sistema (5.21) de tal forma que a variância do erro de estimação seja minimizada. Em outras palavras, desejamos encontrar uma estimativa  $z_f(t)$  da variável  $z(t)$  de tal forma que a função custo  $J$ , definida como a variância do erro de estimação

$$J = \mathbf{E}\{e(t)'e(t)\} \quad , \quad e(t) = z(t) - z_f(t)$$

seja minimizada.

A partir da identidade (5.26) vemos que este problema corresponde a minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema que define a dinâmica do erro de estimação. O filtro que procuramos tem a forma de um observador de Luenberger<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_f(t) &= Ax_f(t) + B_u u(t) + K_f(y(t) - Cx_f(t)) \\ z_f(t) &= C_z x_f(t) \end{aligned} \quad (5.27)$$

onde agora a matriz de ganho  $K_f$  deve ser escolhida de forma que a variância do erro de estimação seja minimizada.

A solução clássica para esse problema é dada em termos de equação de Riccati (Friedland, 1986), (Anderson and Moore, 1979), (Green and Limebeer, 1995). Na sequência apresentamos uma solução através de uma formulação LMI.

Considerando as equações que definem a dinâmica do sistema (5.21) e do filtro (5.27) e definindo a seguinte variável auxiliar  $x_a(t) = x(t) - x_f(t)$ , constrói-se o seguinte sistema do erro de estimação:

$$\begin{aligned} \dot{x}_a(t) &= (A - K_f C)x_a(t) + (B_w - K_f D_w)w(t), & x_a(t) &= x(t) - x_f(t) \\ e(t) &= C_z x_a(t) & e(t) &= z(t) - z_f(t) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Usando (5.26) e os resultados da seção 3.4 o filtro ótimo pode ser projetado através do seguinte problema de otimização:

$$\min_{P, K_f} J = \|H_{we}(s)\|_2^2 = \mathbf{E}[e'(t)e(t)] < \text{tr}\{(B_w - K_f D_w)' P (B_w - K_f D_w)\}$$

onde  $P > 0$ ,  $K_f$  são soluções da seguinte desigualdade:

$$A'P - C'K_f'P + PA - PK_fC + C_z'C_z < 0$$

Considerando a mudança de variável  $X = PK_f$ , pode-se transformar o problema acima numa LMI de maneira análoga aos resultados na seção 4.5. Assim procedendo obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 5.3** *Considere o sistema (5.21), com o par  $(A, C)$  detectável. Então existem matrizes  $P$ ,  $N$  e  $X$  que resolvem o seguinte problema*

<sup>5</sup>A prova completa que o filtro ótimo tem a estrutura indicada pode ser encontrada por exemplo em (Anderson and Moore, 1979), (Green and Limebeer, 1995).

$$\min_{N, P, X} \text{Tr}[N]; \quad (5.29)$$

$$\begin{bmatrix} N & B'_w P - D'_w X' \\ P B_w - X D_w & P \end{bmatrix} > 0; \quad P > 0; \quad (5.30)$$

$$A'P + PA - C'X' - XC + C'_z C_z < 0. \quad (5.31)$$

Com  $K_f = P^{-1}X$  o sistema do erro de estimação (5.28) é exponencialmente estável, a variância do erro de estimação (5.28) é minimizada e o valor mínimo é dado por  $\text{Tr}[N]$ .

A prova deste resultado pode ser obtida diretamente da definição da norma  $\mathcal{H}_2$  vista no Capítulo 3.

**Exemplo 5.3** Considere o modelo aproximado de um pêndulo invertido, descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} w, \quad x(0) = 0, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} w \\ z &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (5.32)$$

Onde  $x_1 = \theta$  é a posição angular e  $x_2 = \dot{\theta}$  é a velocidade angular. Assume-se neste exemplo que o sinal de perturbação  $w$  é do tipo ruído branco. Note que pela estrutura das matrizes  $B_w$  e  $D_w$ , o sinal de ruído afeta de forma distinta a dinâmica do sistema e o sinal de medida. O objetivo é projetar o filtro ótimo, de forma a estimar o vetor de estados  $z(t)$ , que no caso implica em estimar a posição angular do pêndulo.

Para projetar o filtro ótimo (5.27), aplica-se o Teorema 5.3 ao sistema do erro de estimação (5.28). Usando o LMITOOL obtém-se o seguinte ganho:

$$\mathbf{kf} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$$

$$\begin{aligned} ! & - 1.7989207 \quad ! \\ ! & - 1.6180146 \quad ! \end{aligned}$$

Sendo que a variância do erro de estimação é dada por

$$\begin{aligned} \text{-->J} &= \text{trace}(\mathbf{N}) \\ \text{ans} &= \end{aligned}$$

$$1.7989074$$



Observe que para o projeto do ganho  $K_f$  do filtro (5.27), não é levado em conta o sinal de controle  $u$ . Assumindo  $u = 0$ , é possível verificar que o sistema não forçado é instável com pólos em  $\pm 0.7071$ . A Figura 5.5 apresenta a trajetória do sinal  $z(t)$  para o sistema não forçado e a sua estimativa  $z_f(t)$ , onde o sistema é excitado por um sinal de ruído branco com variância de 0.2 na dinâmica do sistema e 0.4 no sinal de saída.

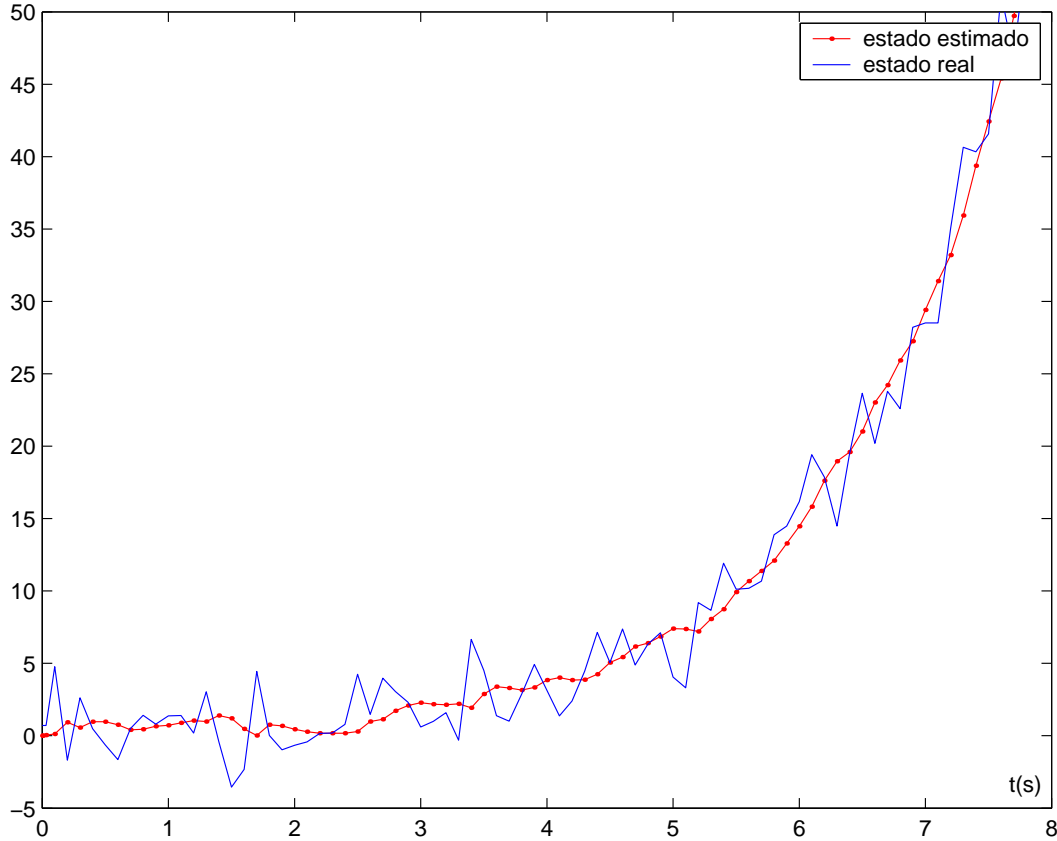


Figura 5.5: Trajetória de  $z(t)$  e sua estimativa  $z_f(t)$

Pode-se perceber pelo gráfico que o estado estimado  $z_f(t)$ , segue a trajetória instável do sinal original  $z(t)$ , amenizando o efeito dos ruídos.

## 5.4 Filtros $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção apresenta-se uma técnica baseada em LMIs para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$ . Diferentemente do caso  $\mathcal{H}_2$  onde o sinal de perturbação é um ruído branco, de covariância conhecida, e o objetivo é minimizar a variância do erro de estimação, considera-se agora que o sinal de perturbação é desconhecido, nem tampouco suas estatísticas são conhecidas, sabe-se apenas que possui energia limitada. O filtro deve ser projetado para minimizar a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema que define o erro de estimação. Para esse fim consideraremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_u u(t) + B_w w(t) & x(0) &= x_0 \\
y(t) &= Cx(t) + D_w w(t) \\
z(t) &= C_z x(t)
\end{aligned} \tag{5.33}$$

onde  $w$  é um processo com estatísticas desconhecidas, mas pertencente a  $\mathcal{L}_2$ . O objetivo é projetar um filtro  $\mathcal{F}$  para minimizar, no sentido da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , o efeito das perturbações  $w$  na dinâmica do erro de estimação  $e(t) = z(t) - z_f(t)$ , ou seja:

$$\min_{\mathcal{F}} (\max_w \|H_{we}(s)\|_\infty)$$

Assume-se uma estrutura para o filtro similar à utilizada no filtro  $\mathcal{H}_2$ , dada por:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_f(t) &= Ax_f(t) + B_u u(t) + K_f(y(t) - Cx_f(t)) \\
z_f(t) &= C_z x_f(t)
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Com a estrutura acima, o projeto do filtro se resume na determinação do ganho  $K_f$ . Da dinâmica do sistema (5.33) e do filtro (5.34), pode-se construir o sistema que define a dinâmica do erro de estimação  $x_a(t) =: x(t) - x_f(t)$ .

$$\begin{aligned}
\dot{x}_a(t) &= (A - K_f C)x_a(t) + (B_w - K_f D_w)w(t) \\
e(t) &= C_z x_a(t)
\end{aligned} \tag{5.35}$$

Note que este problema pode ser visto como um problema dual do problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  visto na Seção 4.6. Desta forma a busca de uma solução consiste em encontrar a matriz de ganho  $K_f$  juntamente com a matriz  $P$  de forma que a seguinte inequação seja satisfeita.

$$\min_{P, X} \gamma : \begin{cases} P > 0, \\ \begin{bmatrix} PA + A'P - XC - X'C' & PB_w - XD_w & C'_z \\ B'_w P - D'_w X' & -\gamma I_{n_z} & 0 \\ C_z & 0 & -\gamma I_{n_z} \end{bmatrix} < 0 \end{cases} \tag{5.36}$$

O próximo teorema apresenta a formalização para o projeto de filtros  $\mathcal{H}_\infty$  para o sistema (5.33).

**Teorema 5.4** *Dado um sistema (5.33), onde o par  $(A, C)$  é detectável. Suponha que existam matrizes  $P$ ,  $X$  e um escalar  $\gamma$  que seja solução do problema de otimização dado em (5.36).*

*Então o filtro (5.34) com  $K_f = P^{-1}X$ , assegura que a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema do erro de estimação (5.35) seja menor que  $\gamma$  para todo o sinal de perturbação  $w \in \mathcal{L}_2$ .*

**Exemplo 5.4** *Considere o sistema (5.32), assumindo agora que  $w$  é um sinal com estatística desconhecida, mas limitado pertencente a  $\mathcal{L}_2$ . O objetivo é projetar um filtro de forma a estimar o vetor de estados  $z(t)$ , garantindo que a norma  $\mathcal{H}_\infty$ , do sistema do erro de estimação seja menor que  $\gamma$ .*

*Aplicando o Teorema 5.4, limitando  $P > 1e - 3I$ , obtém-se  $\gamma = 1.0010634$ , com o seguinte ganho.*

```

optimal solution found
kf =
! 666.74715 !
! 471.96063 !

```

As Figuras 5.7 e 5.6 apresentam, respectivamente, o digrama de bode do sistema não forçado e a trajetória do sinal de erro quando o sinal de perturbação  $w = [w_1 \ w_2]$  é dado por:

$$w_1 = \begin{cases} 1 & 0 < t \leq 1s \\ 0 & t > 1s \end{cases}, \quad w_2 = \begin{cases} \text{sen}(0.1t) & 0 < t \leq 10s \\ 0 & t > 10s \end{cases}$$

Enquanto que a Figura 5.8 apresenta a trajetória do sinal  $z(t)$ , e sua estimativa  $z_f(t)$ , para o sistema não forçado.

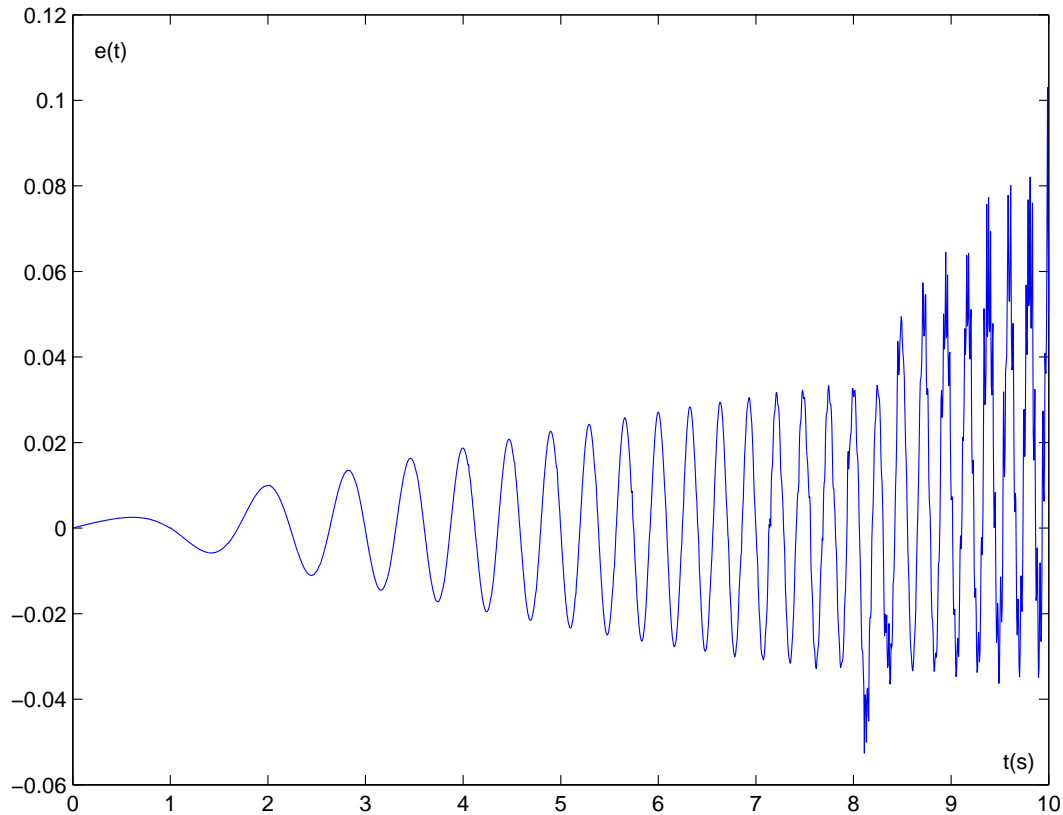


Figura 5.6: Trajetória do sinal de erro  $e = z(t) - z_f(t)$

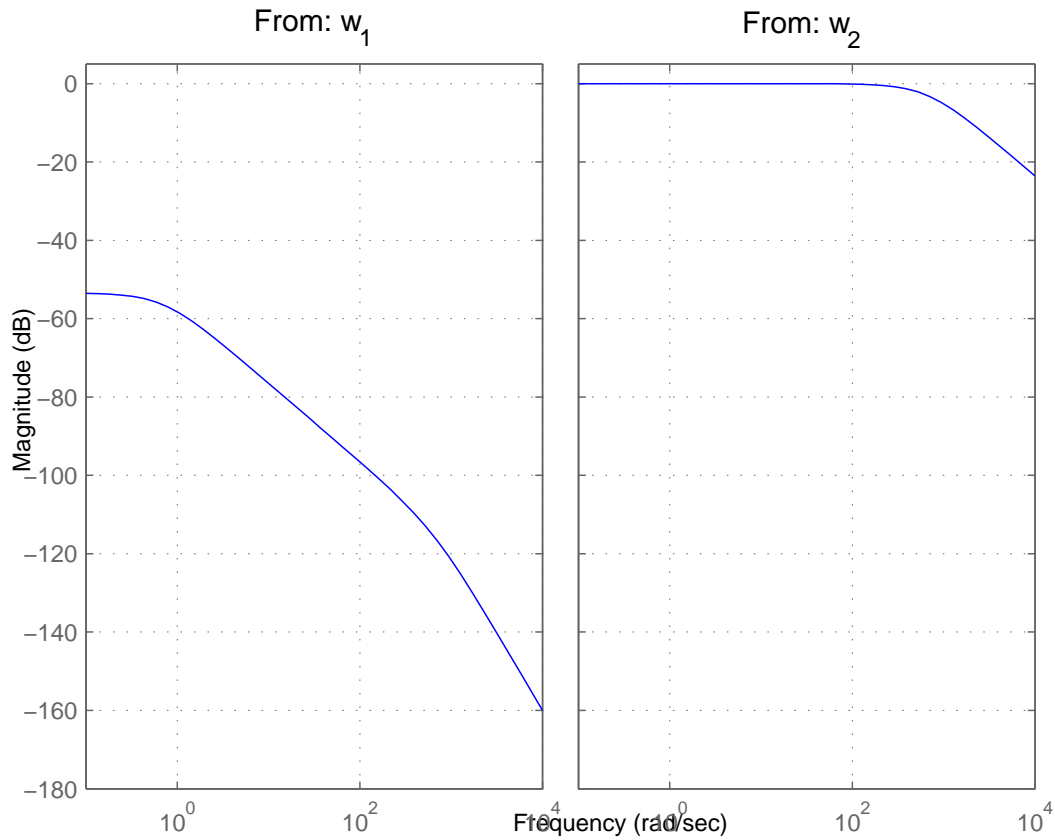


Figura 5.7: Diagrama de bode(Módulo) do sistema não forçado (5.32)

## 5.5 Filtragem para sistemas incertos

## 5.6 Exercícios Propostos

**E 3.1** Para o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (5.37)$$

Estime:

- (a) todos os estados do sistema
- (b) todos os estados do sistema de forma que erro de estimação tenha todos os autovalores menores que  $-3$ .
- (c) apenas as variáveis não mensuráveis de  $x$ , garantindo que os autovalores do erro de estimação estejam no semi-plano esquerdo do números complexos.

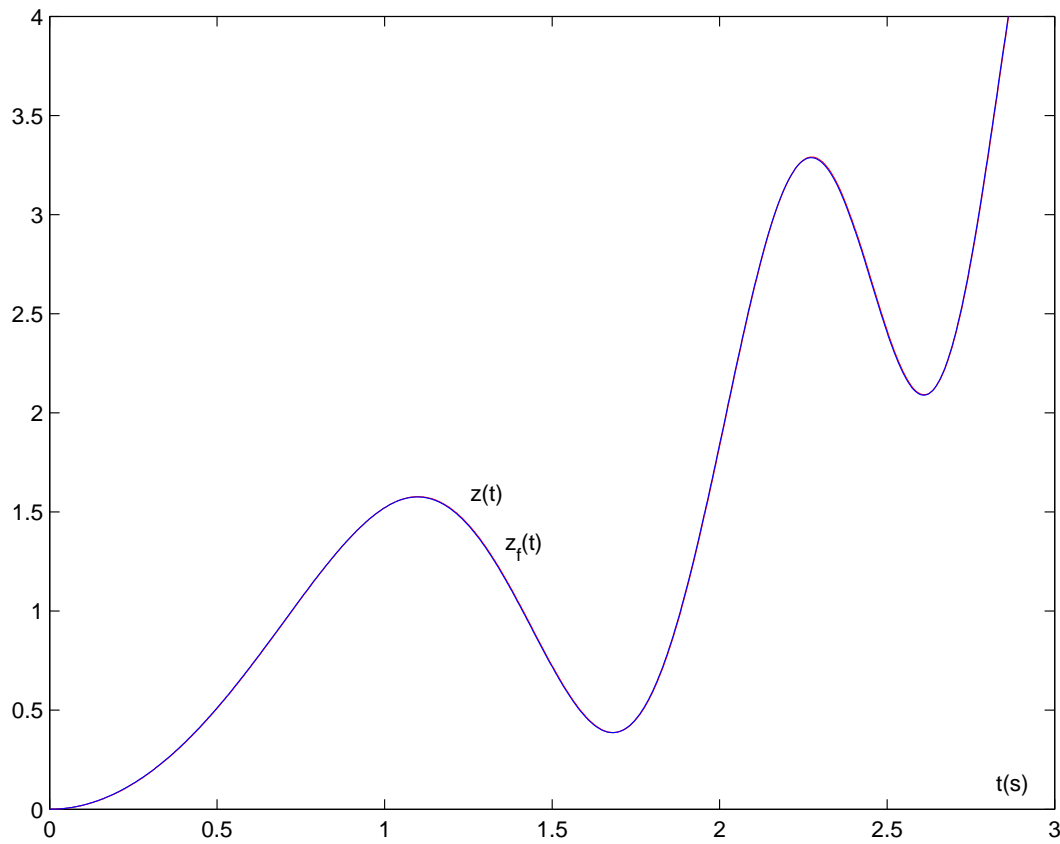


Figura 5.8: Trajetória  $z(t)$  e sua estimativa  $z_f(t)$

(d) apenas as variáveis não mensuráveis de  $x$ , garantindo agora que os autovalores do erro de estimação estejam num círculo de raio 2 e centro em  $(-3,1)$ .

**E 3.2** É possível fazer o projeto de observadores através da metodologia LMI usando a abordagem primal? Por que?

**E 3.3** Para o sistema (a) considerado no Exemplo **E 1.2** com  $y = [1 \ 0]x + 0.5w$  e  $z = [1 \ 0]$ , projete um filtro para os seguintes casos:

- (a) quando  $w$  for um sinal de ruído branco.
- (b) quando  $w$  for um sinal de estatísticas desconhecidas, mas limitado.

**E 3.3** Projete o filtro de Kalman para o sistema (c) considerado no Exercício **E 1.2**, quando  $y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + w_2$ .

## Capítulo 6

# Controle por realimentação de Saída

No capítulo 4, utilizou-se a realimentação de estados para o controle (estabilização e desempenho) de sistemas lineares invariantes no tempo. Entretanto, os resultados propostos necessitam da medição de todos os estados do sistema. Em geral nem todos os estados do sistema dinâmico estão disponíveis para realimentação. Por exemplo, para sistemas monovariáveis o único estado disponível para realimentação é a saída deste sistema. Nestes casos, a implementação de uma lei de controle por realimentação de estados necessita de sensores para as variáveis restantes o que em muitas situações é fisicamente impossível ou mesmo economicamente inviável.

Veremos neste capítulo que os mesmos ganhos de realimentação de estados apresentados no capítulo 4 podem ser usados para realimentar os estados estimados oriundos dos observadores do capítulo anterior eliminando-se assim a necessidade de medidores para todas as variáveis de estado. A estabilidade do sistema realimentado via observador será mostrada aqui através de um resultado que ficou conhecido como "princípio da separação".

Observe que uma lei de controle baseada em observadores é uma forma particular de realimentação dinâmica de saída onde o controlador possui a mesma ordem do sistema a ser controlado. Veremos ainda neste capítulo técnicas de projeto de controladores de mesma ordem do sistema que não utilizam de forma explícita um observador na malha de realimentação. Nesses casos o princípio da separação não se aplica e a estabilidade será mostrada de outra forma. Em primeiro lugar consideraremos leis de controle baseadas na realimentação dos estados estimados. Posteriormente, propõem-se soluções em termos de LMIs para o problema da realimentação dinâmica da saída considerando a estabilização, controle  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$ . Para simplificar a análise, considera-se por hipótese que o sistema seja controlável e observável.

### 6.1 Controle via observador de estados

Uma das formas de controle por realimentação de saída consiste em utilizar as variáveis medidas para estimar o estado através de um observador e construir o sinal de controle através de uma realimentação do estado estimado. O observador é projetado

com as técnicas do capítulo 5 e o ganho de realimentação de estados com as técnicas do capítulo 4. Nesta seção veremos sob que condições o sistema de malha fechada projetado dessa forma é estável. Em seguida veremos o efeito de ruídos e distúrbios nesse esquema de controle e finalmente veremos como esse esquema de controle pode ser usado para o rastreamento de referência.

### 6.1.1 Princípio da Separação

Considere o esquema de controle ilustrado no diagrama da Figura 6.1 e observe que

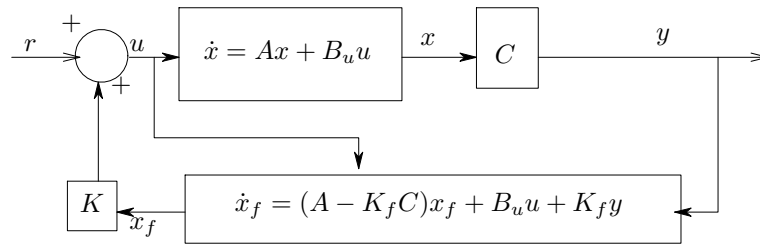


Figura 6.1: Realimentação dos estados observados.

podemos representá-lo pelo seguinte conjunto de equações:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t) \quad (6.1)$$

$$\dot{x}_f(t) = (A - K_f C)x_f(t) + B_u u(t) + K_f y(t) \quad , \quad u(t) = Kx_f(t) + r(t) \quad (6.2)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado do sistema a ser controlado,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  o vetor de medidas,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  o vetor de controle,  $x_f \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor dos estados estimados,  $r \in \mathbb{R}^{n_u}$  é a entrada de referência e  $A, B_u, C, K, K_f$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

Utilizando como variáveis de estado os vetores  $x(t)$  e o erro de estimação  $e(t) = x(t) - x_f(t)$ , o sistema (6.1) em malha fechada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_u K & -B_u K \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} r \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Os autovalores da matriz de dinâmica do sistema de malha fechada são dados pela equação característica indicada abaixo<sup>1</sup>.

$$ec(s) = \det \left( sI_{2n} - \begin{bmatrix} A + B_u K & -B_u K \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \right) \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} &= \det \left( \begin{bmatrix} sI_n - (A + B_u K) & B_u K \\ 0 & sI_n - (A - K_f C) \end{bmatrix} \right) \quad (6.5) \\ &= \det(sI_n - (A + B_u K)) \det(sI_n - (A - K_f C)) = 0 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>A notação  $I_m$  indica a matriz identidade de dimensão  $m \times m$ .

Assim vemos que a dinâmica do sistema de malha fechada é regida pelos autovalores das matrizes  $A + B_u K$  e  $A - K_f C$  que devem estar todos no semi-plano complexo esquerdo para que o sistema realimentado seja estável. Os autovalores de  $A - K_f C$  definem a dinâmica do erro de estimação de estados, como pode ser visto a partir de (6.3). Por outro lado, os autovalores de  $A + B_u K$  podem ser interpretados como os autovalores dominantes pois são esses autovalores que definem a dinâmica do sistema realimentado quando o erro de estimação de estados é nulo. Tipicamente a dinâmica do erro de estimação é escolhida de duas à cinco vezes mais rápida que a dinâmica dominante representada pelos autovalores de  $A + B_u K$ . Em resumo, o projeto de controladores baseados em observadores de estado pode ser realizado da seguinte maneira:

- i. Projetar a matriz de realimentação de estados  $K \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$  utilizando as técnicas propostas no Capítulo 4.
- ii. Projetar a matriz de ganhos do observador  $K_f \in \mathbb{R}^{n \times n_y}$  utilizando os resultados apresentados no Capítulo 5;
- iii. Utilizar a estrutura de controle proposta na Figura 6.1.

Observe que o projeto do ganho de controle e do observador são independentes. Esta propriedade é conhecida na literatura por "Princípio da Separação" (Friedland, 1986).

O princípio da separação também se aplica para observadores de ordem reduzida.

**Exercício 6.1** *Obtenha a representação de estados do sistema*

$$\dot{x} = Ax + B_u u \quad , \quad y = Cx \quad , \quad u = Kx_f + r$$

onde  $x_f$  é a estimativa de estado dada pelo observador de ordem reduzida (5.20). Utilizando como variáveis de estado  $x(t)$  e  $e(t) = w(t) - w_f(t)$ , mostre que

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + B_u K & -B_u K T^{-1} T_0 \\ 0 & A_{22} - G_f A_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_u \\ 0 \end{bmatrix} r$$

onde  $T_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_{n-n_y} \end{bmatrix}'$  e portanto o princípio da separação também se aplica nesse caso.

Veja na figura 6.2 que podemos interpretar o controle baseado em observador como um controlador de mesma ordem do sistema de malha aberta.

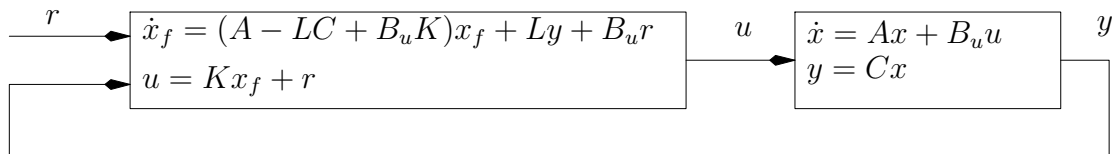


Figura 6.2: Controlador baseado num observador.



### 6.1.2 Efeito de ruídos e distúrbios externos

Ruídos de medida e distúrbios externos sempre estão presentes num problema prático. Nesta seção iremos verificar o efeito desses sinais indesejados no desempenho do sistema de controle baseado em observador.

Para esse fim considere o sistema de controle cuja representação de estados está indicada a seguir.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_u u(t) + B_d d(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t) + v(t) \quad (6.6)$$

$$\dot{x}_f(t) = (A - K_f C)x_f(t) + B_u u(t) + K_f y(t) \quad , \quad u(t) = Kx_f(t) \quad (6.7)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado do sistema a ser controlado  $x_f \in \mathbb{R}^n$  representa o vetor dos estados estimados,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  é o vetor de medidas,  $d \in \mathbb{R}^{n_d}$  é o vetor de distúrbios externos,  $v \in \mathbb{R}^{n_v}$  é o vetor de ruído de medida,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  é o vetor de controle, e  $A, B_u, B_d, C, K, K_f$  são matrizes constantes com dimensões apropriadas.

Utilizando como variáveis de estado os vetores  $x(t)$  e o erro de estimação  $e(t) = x(t) - x_f(t)$ , o sistema (6.6) em malha fechada tem a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_u K & -B_u K \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_d d \\ B_d d - K_f v \end{bmatrix} \\ y &= \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + v \end{aligned} \quad (6.8)$$

Da equação acima podemos verificar que a presença de ruídos e distúrbios não mudam a matriz de dinâmica do sistema e seus autovalores continuam sendo dados por (6.4). Como o sistema é projetado para ser estável, concluímos de (6.8) que ruídos e distúrbios funcionam como referências indesejadas que o sistema de malha fechada será forçado a seguir. Na presença de ruídos e distúrbios o erro de estimação não será nulo já que a dinâmica do erro é excitada pela condição inicial  $e(0)$  mas também por  $d(t)$  e  $v(t)$  como se vê na expressão abaixo.

$$\dot{e} = (A - K_f C)e + B_d d - K_f v \quad (6.9)$$

Observe ainda que a matriz  $K_f$  de ganho do observador é também a matriz de entrada do ruído de medida. Assim, se aumentamos o ganho  $K_f$  para acelerar a convergência do erro de estimação de estados, estamos também forçando o erro de estimação a seguir um ruído agora amplificado por  $K_f$ . Por esse motivo observadores de estados com ganhos elevados tem pouco interesse na prática.

Outro motivo para se evitar grandes ganhos no observador é que o sinal de controle, que é dado por  $u(t) = Kx_f(t) = K(x(t) - e(t))$ , pode saturar se o erro atingir valores elevados.

As mesmas conclusões acima se aplicam para observadores de ordem reduzida. Estes, porém, possuem uma dificuldade adicional. No observador de ordem completa, a função de transferência do ruído para o erro de estimação é estritamente própria.

$$E(s) = (sI_n - (A - K_f C))^{-1}(B_d D(s) - K_f V(s))$$

Isto implica que teremos uma atenuação nas altas frequências de no mínimo 20 dB/década. No observador de ordem reduzida pode ocorrer amplificação nas altas frequências já que o erro de estimação  $e(t) = w(t) - w_f(t)$  é dado por

$$\dot{e}(t) = A_f e(t) + (B_4 - G_f B_3) d(t) + A_f G_f v(t) - G_f \dot{v}(t) \quad , \quad T B_d = \begin{bmatrix} B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}$$

onde  $B_d$  é a matriz de entrada da perturbação  $d(t)$  como indicado em (6.6),  $T$  é a transformação em (5.11) e  $w(t)$  é a estimativa de ordem reduzida dada por (5.19). Da expressão acima obtemos a função de transferência

$$E(s) = (sI_{n-n_y} - A_f)^{-1} ((B_4 - G_f B_3) D(s) + A_f G_f V(s) - G_f s V(s))$$

de onde notamos que o termo  $-(sI_{n-n_y} - A_f)^{-1} G_f s V(s)$  pode provocar amplificações do ruído  $V(s)$  nas altas frequências. Isto é altamente indesejável na prática pois, ao aumentar a banda passante do sistema, estamos permitindo amplificações de dinâmicas não modeladas que podem causar deterioração no desempenho do sistema ou mesmo problemas de instabilidade. Por esses motivos a utilização de observadores de Luenberger de ordem reduzida para fins de controle tem aplicação limitada na prática.

Finalmente observe que se o distúrbio  $d(t)$  é conhecido em tempo real, por exemplo através de medições, então podemos interpretá-lo como um sinal de referência e incorporá-lo no observador. Este procedimento é análogo ao dado para o sinal  $r(t)$  na seção 6.1.1.

### 6.1.3 Rastreamento

Suponha agora que os ruídos e distúrbios sejam desprezíveis e que desejamos resolver o problema de rastreamento da seção 4.1.2, porém agora utilizando um controlador baseado em observador ao invés da realimentação de estados. A solução desse problema é imediata com o auxílio do princípio da separação.

No caso do rastreamento com ajuste de ganho estático basta projetar um observador e substituir a realimentação de estados  $u = -Kx$  pela realimentação de estados estimados  $u = -Kx_f$ , como indicado na figura 6.3. Nesse caso a inserção do observador não altera o ganho estático  $G(0)$ , calculado para realimentação de estados. Isso ocorre porque em regime permanente o erro de estimação de estados é nulo, isto é  $x = x_f$ . Assim a matriz  $F$  de ajuste é idêntica à obtida para realimentação de estados.

$$F = G(0)^{-1} \quad , \quad G(s) = C(sI - (A - BK))^{-1} B + D$$

No caso do rastreamento com integradores os argumentos são similares. Basta projetar um observador e substituir a realimentação de estados  $u = -K_e x$  pela realimentação de estados estimados  $u = -K_e x_f$ , como indicado na figura 6.4. Nesse caso, as equações do sistema de controle são dadas por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a - B_a K_a & B K_e \\ 0 & A - K_f C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_a \\ 0 \end{bmatrix} r$$

onde  $e = x - x_f$  é o erro de estimação de estados,  $K_f$  é o ganho do observador e

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad E_a = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad , \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \quad , \quad K_a = \begin{bmatrix} K_e & K_i \end{bmatrix}$$

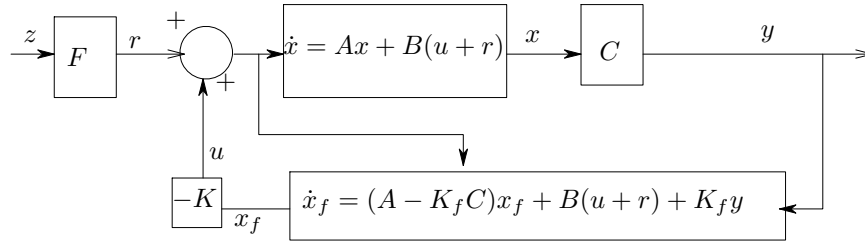


Figura 6.3: Rastreamento com correção de ganho estático e observador.

O problema a ser resolvido consiste então em determinar  $K_f$  e  $K_a$  de tal forma que os autovalores de  $A_a - B_a K_a$  e  $A - K_f C$  estejam no semi-plano complexo esquerdo. Com o princípio da separação podemos projetar o ganho  $K_f$  como no capítulo 5 e de forma independente projetar a matriz de ganhos  $K_a$  como na seção 4.1.2.

Observe que em regime permanente o erro de estimação de estados é nulo, isto é  $x = x_f$ . Logo o esquema de controle acima, baseado em observador, se torna em regime permanente, idêntico ao esquema baseado em realimentação de estados estudado na seção 4.1.2. Entretanto, devido à sensibilidade do observador em relação à mudanças no ponto de equilíbrio, podemos esperar um menor grau de robustez do esquema acima (em relação ao de realimentação de estados) para mudanças no ponto de equilíbrio.

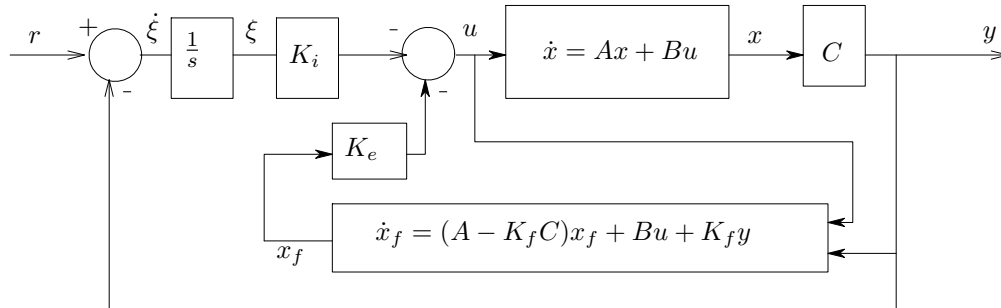


Figura 6.4: Rastreamento com integradores.

**Exemplo 6.1** Considere o sistema linear (4.21) com o seguinte sinal de saída:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (6.10)$$

Utilizando o Corolário 5.1, obtém-se a seguinte matriz de ganhos do observador:

$$K_f = \begin{bmatrix} .1118538 & .3880439 \\ .1481152 & .4449873 \\ -4.0504938 & 3.0257949 \end{bmatrix}$$

Considere a mesma matriz  $K$  obtida no exemplo 4.2 como a matriz de realimentação dos estados observados. As Figuras 6.5 e 6.6 mostram respectivamente as trajetórias

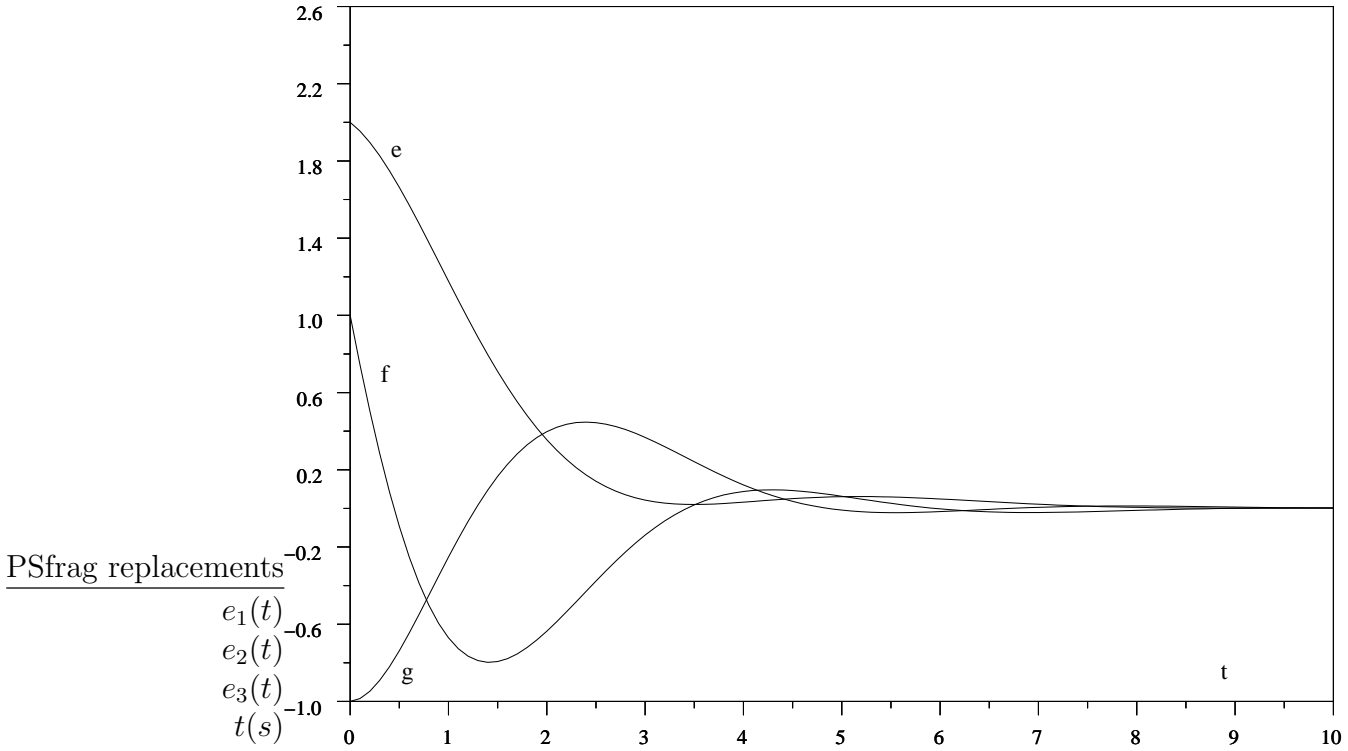


Figura 6.5: Trajetórias do sinal de erro  $e(t) = x(t) - x_f(t)$ .

do sinal de erro  $e(t) = x(t) - x_f(t)$  e do sistema em malha fechada para uma condição inicial  $x(0) = [2 \ 1 \ -1]'$  e  $x_f(0) = 0$  com  $r(t) = 0$ .

Comparando o resultado apresentado na figura 6.6 com o resultado obtido no exemplo 4.2, observa-se que ocorreu uma certa degradação na resposta transitória do sistema em malha fechada. Entretanto, pode-se melhorar a resposta em malha fechada através de uma adequada localização dos pólos do observador utilizando os resultados apresentados na seção 5.1. Em outras palavras, projeta-se a dinâmica do observador de maneira a não interferir na dinâmica do sistema em malha fechada com isso aproxima-se da resposta transitória obtida com realimentação de estados.

## 6.2 Controlador LQG

O controlador LQG é uma combinação do controlador LQR, que minimiza um critério quadrático, e de um observador particular, chamado de Filtro de Kalman, que é projetado para minimizar a variância do erro de estimação.

O sistema agora será descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + w \\ y = Cx + v \end{cases} \quad (6.11)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado do sistema,  $y \in \mathbb{R}^q$  é o vetor de medidas contaminado pelo ruído  $v \in \mathbb{R}^q$ ,  $u \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle a ser determinado,  $w \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de perturbação,  $A, B, C$  são matrizes dadas que definem o modelo do sistema. O ruído de

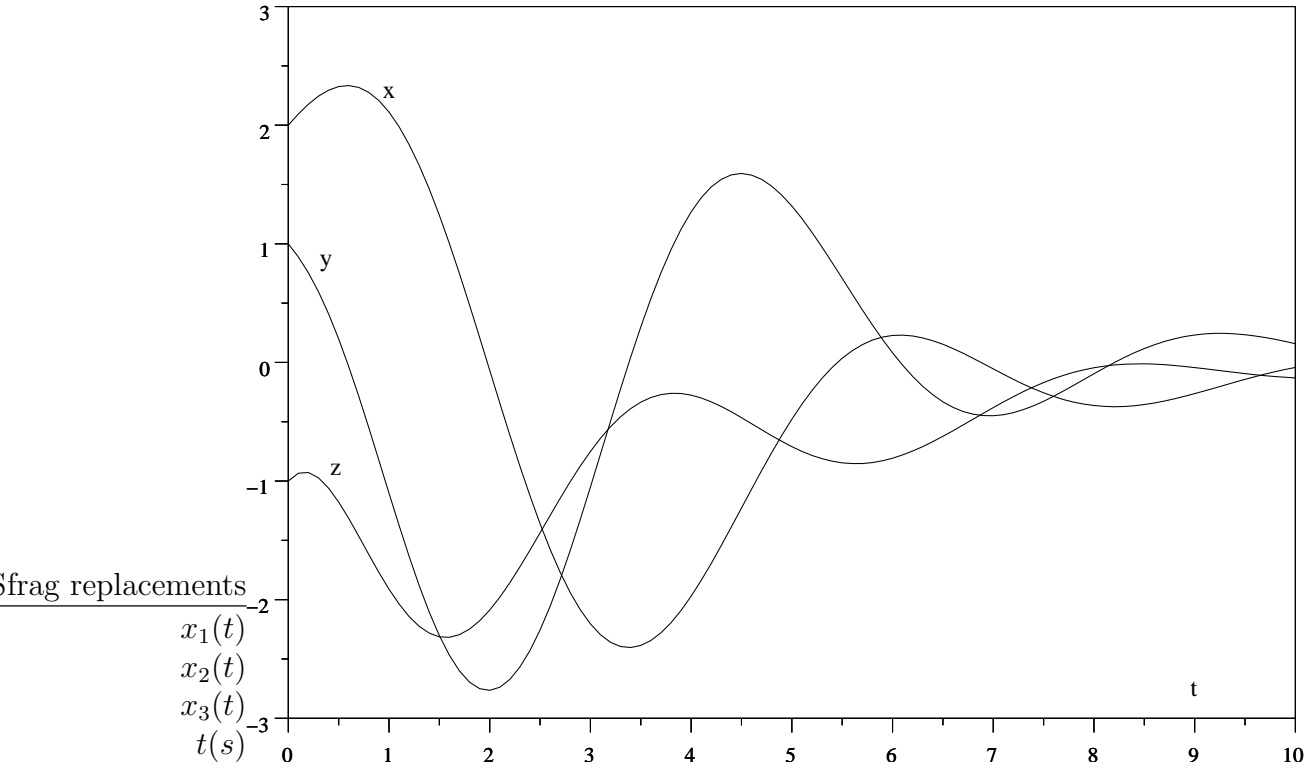


Figura 6.6: Trajetórias do sistema (4.21) em malha fechada com observador de estados.

medida  $v(t)$  e a perturbação  $w(t)$  serão considerados como variáveis estocásticas para as quais se conhece apenas a média e a variância<sup>2</sup>.

Em relação ao sistema (6.11) assumiremos:

- $v(t), w(t)$  são ruídos brancos, isto é, variáveis estocásticas de média nula ( $\mathbf{E}\{w(t)\} = 0$ ,  $\mathbf{E}\{v(t)\} = 0$ ) e não correlacionadas no tempo:

$$\mathbf{E}\{v(t) v(\tau)'\} = 0 \quad , \quad \mathbf{E}\{w(t) w(\tau)'\} = 0 \text{ para } t \neq \tau$$

- $v(t), w(t)$  são não correlacionadas entre si:

$$\mathbf{E}\{v(t) w(t)'\} = 0$$

- $v(t), w(t)$  possuem matrizes de covariância conhecidas:

$$\mathbf{E}\{w(t) w(t)'\} = Q_w \geq 0 \quad , \quad \mathbf{E}\{v(t) v(t)'\} = R_v > 0$$

Observe que a condição  $R_v > 0$  implica que todas as medidas são contaminadas por ruído. Por outro lado, a hipótese  $Q_w \geq 0$  nos permite considerar casos em que algumas componentes de  $w(t)$  são nulas o tempo todo.

<sup>2</sup>Veja seção 5.3.1 para um resumo sobre variáveis estocásticas.

**Problema:** Encontre uma lei de controle  $u(t)$  que, ao ser aplicada no sistema (6.11), minimiza a função custo.

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left\{ \int_0^T (x' Q x + u' R u) dt \right\}$$

onde  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$  são matrizes de ponderação dadas como no problema LQR estudado na seção 4.3.

A demonstração de como resolver este problema, conhecido como LQG, pode ser encontrada em vários livros como por exemplo (Green and Limebeer, 1995; Anderson and Moore, 1979; Burl, 1999; Friedland, 1986). A seguir mostramos a solução final do problema que pode ser apresentada em duas etapas usando um "Princípio da Separação" similar ao já estudado na seção 6.1.1. O princípio da separação é um resultado que nos permite encontrar a solução ótima do problema de controle acima através da solução ótima de dois sub-problemas: o primeiro corresponde a um problema de controle LQR já estudado e o segundo corresponde a um problema de projeto de um observador onde a variância do erro de estimação deve ser minimizada. O observador que possui variância mínima do erro de estimação é conhecido como filtro de Kalman (Green and Limebeer, 1995; Anderson and Moore, 1979; Friedland, 1986).

Assim, a solução do problema de controle LQG é encontrada adotando-se o seguinte procedimento.

Primeiro, obtenha a estimativa  $x_f$  ótima do estado  $x$ , onde ótima significa que a variância do erro de estimação  $\mathbf{E}\{(x - x_f)(x - x_f)'\}$  é minimizada.

Em seguida, use  $x_f$  como se fosse o estado verdadeiro e aplique a lei de controle  $u = -Kx_f$ , onde  $K$  é a solução de um problema de controle LQR que veremos a seguir. Observe portanto que a solução do problema de controle LQG resulta também num controlador baseado em observador, como já estudado na seção 6.1.

O Filtro de Kalman é um observador de estados do tipo Luenberger

$$\dot{x}_f(t) = (A - LC)x_f(t) + Bu(t) + Ly(t)$$

onde o ganho  $L$  do observador é projetado para minimizar a variância do erro de estimação  $\mathbf{E}\{e'e\}$ , e é dado pelas equações abaixo.

$$L = SC' R_v^{-1} \quad , \quad SA' + AS - SC' R_v^{-1} CS + Q_w = 0 \quad (6.12)$$

A equação acima, que é quadrática na matriz  $S$ , é conhecida como equação de Riccati. Ela possui solução  $S$  positiva definida se o par  $(A, C)$  é observável e o par  $(A, B_c)$  é controlável, onde  $B_c$  é qualquer matriz que satisfaz a decomposição  $Q_w = B_c B_c'$ .

A segunda parte do problema de controle LQG consiste em se resolver um problema LQR. Nesse caso procuramos uma lei de controle  $u = -Kx$  que minimiza a função custo

$$\int_0^\infty (x' Q x + u' R u) dt$$

para as trajetórias do sistema  $\dot{x} = Ax + Bu$  (observe que agora  $w(t) = 0$  e  $v(t) = 0$ ). O ganho ótimo do LQR é dado por:

$$K = R^{-1}B'P \quad , \quad A'P + PA - PBR^{-1}B'P + Q = 0 \quad (6.13)$$

A equação de Riccati acima possui solução  $P$  positiva definida se o par  $(A, B)$  é controlável e o par  $(A, C_o)$  é observável, onde  $Q = C_o' C_o$ .

Finalmente, a solução do LQG é  $u = -Kx_f$  que resulta no seguinte sistema de malha fechada:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + w \quad , \quad y = Cx + v \\ \dot{x}_f &= (A - LC)x_f + Bu + Ly \quad , \quad u = -Kx_f \end{aligned}$$

que pode ser representado pelas equações

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w \\ w - Lv \end{bmatrix}$$

onde  $e = x - x_f$  é o erro de estimação de estados. Observe que as equações acima são idênticas àsquelas da seção 6.1.2, e de forma análoga à seção 6.1.1, podemos notar que os autovalores da malha fechada são os autovalores das matrizes  $(A - BK)$  e  $(A - LC)$  que são dados por:

$$\det(sI - (A - BK)) \cdot \det(sI - (A - LC)) = 0$$

Para verificar a estabilidade do sistema em malha fechada vamos reescrever as equações (6.12) e (6.13) na forma

$$(A - BK)'P + P(A - BK) + K'RK + Q = 0 \quad (6.14)$$

$$(A - LC)S + S(A - LC)' + LR_v L' + Q_w = 0 \quad (6.15)$$

Comparando as expressões acima com a equação de Lyapunov do teorema 3.3 percebemos que os autovalores das matrizes  $(A - BK)$  e  $(A - LC)$  estão no semi-plano esquerdo se as matrizes  $P, S$  são positivas definidas. Isto ocorre quando:

- O par  $(A, C)$  é observável e o par  $(A, B_c)$  é controlável, para  $Q_w = B_c B_c'$ .
- O par  $(A, C_o)$  é observável, para  $Q = C_o' C_o$ , e o par  $(A, B)$  é controlável.

Se as condições acima não se verificam, porém os modos não controláveis e não observáveis são estáveis, o sistema em malha fechada ainda é estável. Nessas condições teremos  $P \geq 0$  e/ou  $S \geq 0$ . Veja seção 3.1.2 para mais detalhes sobre esse ponto.

O LQR possui propriedades de robustez interessantes. Escolhendo  $R = rI$ , mostra-se que o controle LQR possui pelo menos 60° de margem de fase em cada canal de controle, margem de ganho infinita em cada canal e admite uma redução de até de até 6dB simultaneamente em todos os canais. Já o Filtro de Kalman não possui nenhuma garantia de robustez e o LQG, que combina os dois (LQR e filtro) também não possui garantia de robustez.

### 6.3 Controlador dinâmico de saída

Nas seções anteriores vimos que o controle baseado em observador de ordem completa resulta num controlador dinâmico, de mesma ordem do sistema, e com uma estrutura particular como podemos notar na figura 6.2. Nesta seção apresentamos uma técnica de projeto de um controlador dinâmico de saída onde o controlador possui uma estrutura mais genérica, permitindo assim a incorporação de novos requisitos para o sistema em malha fechada. A técnica de projeto aqui apresentada é válida para controladores dinâmicos de mesma ordem do sistema, chamados de controladores de ordem completa. Outros tipos de controladores podem ser encontrados em (J.C.Geromel, 1999), (C.Scherer, 1997), (A.Trofino, 2002).

Considere o sistema

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (6.16)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$  é o estado,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  as variáveis medidas e  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  o sinal de controle. Para estabilizar o sistema (6.16) iremos utilizar um controlador do tipo

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f y(t) \\ u(t) = C_f x_f(t) \end{cases} \quad (6.17)$$

onde  $x_f \in \mathbb{R}^n$  é o estado do controlador e  $A_f, B_f, C_f$  as matrizes a serem determinadas.

O sistema em malha fechada, representado por  $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ , é dado por

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) : \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) \quad (6.18)$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A & BC_f \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad x_a = \begin{bmatrix} x \\ x_f \end{bmatrix}$$

Para que o sistema em malha fechada seja exponencialmente estável a seguinte condição deve ser satisfeita

$$\exists \mathcal{K}, P : A'_a P + P A_a < 0 \quad , \quad P > 0 \quad (6.19)$$

Como a desigualdade acima não é convexa em  $\mathcal{K}, P$  precisamos transformá-la adequadamente para que o problema possa ser resolvido como uma LMI.

Note que (6.19) é equivalente à

$$\exists \mathcal{K}, P, M : M(A'_a P + P A_a)M' < 0 \quad , \quad M P M' > 0 \quad (6.20)$$

onde  $M$  é qualquer matriz inversível. Em particular, definiremos  $M$  e uma matriz auxiliar  $Q$  da seguinte forma

$$P =: \begin{bmatrix} S & T \\ T' & R \end{bmatrix}, \quad M =: \begin{bmatrix} I_n & 0_n \\ I_n & -TR^{-1} \end{bmatrix}, \quad Q =: TR^{-1}T' \quad (6.21)$$

onde  $S, T, R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são as matrizes a serem determinadas. Como as desigualdades são estritas, podemos usar argumentos de pequenas perturbações para assumir sem perda



de generalidade que a matriz  $T$  é inversível. Além disso, a condição  $P > 0$  requer  $S > 0, R > 0$  e portanto são inversíveis também.

Após algumas manipulações algébricas a expressão (6.20) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\Psi &:= \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 - A_m \\ \star & \Psi_3 \end{bmatrix} < 0 \\ \Psi_P &:= \begin{bmatrix} S & S - Q \\ \star & S - Q \end{bmatrix} > 0 \\ \Psi_1 &= SA + B_m C + (SA + B_m C)' \\ \Psi_2 &= S(A - BC_q) + B_m C + A'(S - Q) \\ \Psi_3 &= (S - Q)(A - BC_q) + (A - BC_q)'(S - Q)\end{aligned}\quad (6.22)$$

onde  $A_m, B_m, C_q$  estão relacionadas com as matrizes do filtro através das transformações de variáveis

$$A_m = TA_f R^{-1} T', \quad B_m = TB_f, \quad C_q = C_f R^{-1} T' \quad (6.23)$$

Como as transformações são reversíveis, e lembrando que  $Q = TR^{-1}T'$ , as matrizes do filtro são dadas por

$$A_f = T^{-1}A_m Q^{-1}T, \quad B_f = T^{-1}B_m, \quad C_f = C_q Q^{-1}T \quad (6.24)$$

e a matriz  $P$  da função de Lyapunov fica

$$P = \begin{bmatrix} S & T \\ T' & T'Q^{-1}T \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Como a única restrição na matriz  $A_m$  é dada pela condição  $\Psi < 0$  podemos escolhê-la de tal forma que  $A_m = \Psi_2$ . Veja que isto pode ser feito sem perda de generalidade pois se existe uma solução  $A_m, B_m, C_q, Q, S$  qualquer para (6.22) então as mesmas matrizes  $B_m, C_q, Q, S$  com  $A_m = \Psi_2$  também levam (6.22) a ser satisfeita.

Com  $A_m = \Psi_2$  a condição  $\Psi < 0$  se reduz à  $\Psi_1 < 0$  que é uma LMI e  $\Psi_3 < 0$  é equivalente à  $(S - Q)^{-1}(\Psi_3)(S - Q)^{-1} < 0$  que pode ser transformada numa LMI com a mudança de variável  $W = (S - Q)^{-1}$  e  $C_q = C_m(S - Q)$ . Por outro lado  $\Psi_P > 0$  é equivalente à  $G'\Psi_P G > 0$  que também se torna uma LMI com  $G = \text{diag}\{I_n, W\}$ . Isso nos leva ao seguinte teorema:

**Teorema 6.1** *Existe um controlador  $\mathcal{K}$  que estabiliza o sistema  $\mathcal{S}$  se e somente se existem matrizes  $S, W, C_m, B_m$  que resolvem o seguinte problema convexo:*

$$\begin{aligned}SA + B_m C + (SA + B_m C)' &< 0 \\ AW - BC_m + WA' - C_m' B' &< 0\end{aligned} \quad \begin{bmatrix} S & I \\ I & W \end{bmatrix} > 0 \quad (6.26)$$

No caso afirmativo, as matrizes do controlador são dadas por

$$\begin{aligned}A_f &= T^{-1}(SA - SBC_m W^{-1} + B_m C + A'W^{-1})(S - W^{-1})^{-1}T, \\ B_f &= T^{-1}B_m, \quad C_f = C_m(SW - I)^{-1}T\end{aligned}\quad (6.27)$$

onde  $T$  é uma matriz inversível que pode ser arbitrariamente escolhida, e a função de Lyapunov que satisfaz (6.19) é  $v(x_a) = x_a' P x_a$  com

$$P = \begin{bmatrix} S & T \\ T' & T'(S - W^{-1})^{-1}T \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

**Prova:** Primeiro observe algumas condições de regularidade. Note que  $P > 0$  é equivalente à LMI da direita em (6.26) e que também implica que  $S, Q, S - Q, W$  são todas positivas definidas e portanto inversíveis. Assim todas as inversões em (6.28) e (6.27) estão garantidas pois  $Q = (S - W^{-1})$ . Além disso, a matriz inversível  $T$  pode ser arbitrariamente escolhida pois ela define a realização de espaço de estados do controlador e não afeta a função de transferência do mesmo. Para provar o teorema basta notar que a estabilidade da malha fechada é equivalente à condição (6.19) que por sua vez é equivalente à (6.22). Com a escolha  $A_m = \Psi_2$  e as transformações  $W = (S - Q)^{-1}$  e  $C_a = C_m(S - Q)$  esta última também é equivalente às LMIs em (6.26).  $\square$

É interessante notar que a matriz de dinâmica  $A_f$  do controlador depende das matrizes  $A, B, C$  do sistema  $\mathcal{S}$ . Este mesmo fato ocorre se construirmos o controlador utilizando um observador como pode ser visto na figura 6.2. Observe ainda que no controlador baseado em observador o ganho de controle  $K$  e do observador  $K_f$  podem ser projetados de forma independente e devem ser tais que os autovalores de  $A - K_f C$  e  $A + BK$  tenham parte real negativa. Veja que a solução de (6.26) também implica que os autovalores de  $A - K_f C$  e  $A + BK$  tenham parte real negativa com  $K_f = -S^{-1}B_m$  e  $K = -C_m W^{-1}$ . Isto é uma consequência das duas LMIs à esquerda de (6.26). A vantagem da abordagem do teorema acima em relação à clássica é que ela permite, por exemplo, o projeto de controladores robustos. Veja (J.C.Geromel, 1999), (A.Trofino, 2002) para mais detalhes.

**Exercício 6.2** *Determine uma realimentação de saída para o sistema do exemplo 6.1.*

## 6.4 Controle $\mathcal{H}_2$ por realimentação de saída

Nesta seção veremos uma técnica de projeto de controladores dinâmicos de saída que estende os resultados da seção anterior para o caso em que o controlador, além de estabilizar o sistema em malha fechada, deve minimizar um certo critério de desempenho baseado na norma 2 do sistema indicado abaixo.

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) + E_y d(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_z u(t) \end{cases} \quad (6.29)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  o vetor de medidas,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  o sinal de controle,  $d \in \mathbb{R}^{n_d}$  um sinal externo de perturbação,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  um sinal auxiliar cuja energia desejamos minimizar<sup>3</sup>,  $A, B, C, E_x, E_y, C_z, D_z$  são matrizes reais de dimensão compatíveis.

Para controlar o sistema (6.29) vamos considerar um controlador dinâmico do tipo

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f y(t) \\ u(t) = C_f x_f(t) \end{cases} \quad (6.30)$$

onde  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$  representa o estado do controlador e  $A_f, B_f, C_f$  são matrizes reais a serem determinadas.

<sup>3</sup>Na seção 4.5 um problema idêntico é formulado para o problema de realimentação de estados.

Denotaremos o sistema de malha fechada por  $\mathcal{S}(\mathcal{K}) : d \mapsto z$  e sua representação de estados é

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) : \begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a d(t) \\ z(t) = C_a x_a(t) \end{cases}, \quad x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_f(t) \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$A_a = \begin{bmatrix} A & BC_f \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} E_x \\ B_f E_y \end{bmatrix}, \quad C_a = [C_z \quad D_z C_f]$$

O problema a ser resolvido consiste em projetar um controlador que minimize a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema em malha fechada acima, isto é desejamos resolver  $\min_{\mathcal{K}} \|\mathcal{S}(\mathcal{K})\|_2$ . Como visto no capítulo 3, isto corresponde a minimizar a energia da resposta impulsionar desse sistema cuja função de transferência é:

$$H(s) = C_a (sI - A_a)^{-1} B_a \quad (6.32)$$

Do capítulo 3 sabemos que esse problema pode ser resolvido através do gramiano de observabilidade como indicado a seguir.

$$\min_{N, P, \mathcal{K}} \text{tr}\{N\} : A'_a P + P A_a + C'_a C_a < 0, \quad N - B'_a P B_a > 0, \quad P > 0 \quad (6.33)$$

Considerando as mesmas matrizes  $P, M, Q$  definidas em (6.21) podemos reescrever (6.33) como

$$\min_{N, P, \mathcal{K}} \text{tr}\{N\} : \begin{cases} M(A'_a P + P A_a + C'_a C_a)M' < 0, \quad MPM' > 0 \\ N - B'_a P M'(MPM')^{-1} M P B_a > 0 \end{cases}$$

Usando o complemento de Schur e algumas manipulações algébricas simples podemos reescrever as condições acima na forma

$$\min_{N, Q, S, A_m, B_m, C_q} \text{tr}\{N\} : \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \Psi &:= \begin{bmatrix} \Psi_1 + C'_z C_z & \Psi_2 - A_m + C'_z (C_z - D_z C_q) \\ \star & \Psi_3 + (C'_z - C'_q D'_z)(C_z - D_z C_q) \end{bmatrix} < 0 \\ \Psi_N &:= \begin{bmatrix} N & \star & \star \\ S E_x + B_m E_y & S & \star \\ (S - Q) E_x & S - Q & S - Q \end{bmatrix} > 0 \\ \Psi_1 &= S A + B_m C + (S A + B_m C)' \\ \Psi_2 &= S(A - B C_q) + B_m C + A'(S - Q) \\ \Psi_3 &= (S - Q)(A - B C_q) + (A - B C_q)'(S - Q) \end{aligned}$$

onde  $A_m, B_m, C_q$  estão relacionadas com as matrizes do controlador através de (6.23) ou equivalentemente (6.24) e a matriz  $P$  dada por (6.25).

Como a única restrição na matriz  $A_m$  é dada pela condição  $\Psi < 0$  podemos escolhê-la de tal forma que  $A_m = \Psi_2 + C'_z (C_z - D_z C_q)$ . Veja que isto pode ser feito sem perda de generalidade pois se existe uma solução  $N, A_m, B_m, C_q, Q, S$  qualquer para (6.34) então as mesmas matrizes  $N, B_m, C_q, Q, S$  com  $A_m = \Psi_2 + C'_z (C_z - D_z C_q)$  também levam (6.34) a ser satisfeita. Com esta escolha de  $A_m$  a condição  $\Psi < 0$  se torna equivalente às desigualdades  $\Psi_1 + C'_z C_z < 0$  e  $\Psi_3 + (C'_z - C'_q D'_z)(C_z - D_z C_q) < 0$ . A primeira é

uma LMI e a segunda é equivalente à  $W(\Psi_3 + (C'_z - C'_q D'_z)(C_z - D_z C_q))W < 0$  que pode ser transformada numa LMI com as mudanças de variáveis  $W = (S - Q)^{-1}$  e  $C_q = C_m(S - Q)$ . Por outro lado a condição  $\Psi_N < 0$  é equivalente à  $G'\Psi_N G < 0$  e também se torna uma LMI com  $G = \text{diag}\{I_{n_d}, W\}$ .

Isto nos leva ao seguinte teorema:

**Teorema 6.2** *Existe um controlador  $\mathcal{K}$  que minimiza a norma  $\mathcal{H}_2$  do sistema (6.32) se e somente se existe uma solução  $N, S, W, C_m, B_m$  para o problema convexo*

$$\min_{N, S, W, C_m, B_m} \text{tr}\{N\} : \quad (6.35)$$

$$\begin{bmatrix} SA + B_m C + (SA + B_m C)' & C'_z & \\ & C_z & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} AW - BC_m + (AW - BC_m)' & WC'_z - C'_m D'_z & \\ \star & & -I_{n_z} \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} N & \star & \star \\ SE_x + B_m E_y & S & \star \\ E_x & I_n & W \end{bmatrix} > 0$$

Em caso afirmativo, as matrizes do controlador são dadas por

$$\begin{aligned} A_f &= T^{-1}A_s(S - W^{-1})^{-1}T \\ A_s &= SA - SBC_m W^{-1} + B_m C + A'W^{-1} + C'_z(C_z - D_z C_m W^{-1}) \\ B_f &= T^{-1}B_m, \quad C_f = C_m(SW - I)^{-1}T \end{aligned} \quad (6.36)$$

onde  $T$  é uma matriz inversível que pode ser arbitrariamente escolhida. Além disso  $\min_{\mathcal{K}} \|\mathcal{S}(\mathcal{K})\|_2^2 = \text{tr}\{N\}$  e o gramiano de observabilidade  $P$  é dado por (6.28).  $\square$

**Prova:** As mesmas condições de regularidade apresentadas na prova do teorema 6.1 a respeito das inversões matriciais também se aplicam aqui. Observe ainda que a terceira LMI implica  $P > 0$ . Como (6.35) é equivalente à (6.33) o temos o resultado desejado através do gramiano de observabilidade apresentado na seção 3.4.1.  $\square$

## 6.5 Controle $\mathcal{H}_\infty$ com Realimentação de Saída

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  representa o maior ganho que o sistema oferece para um dado sinal perturbação, qualquer que seja ele. Deste forma, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  pode ser visto, como um problema de otimização no qual deseja-se determinar uma lei de controle  $u(t)$  que minimiza o maior ganho que o sistema em malha fechada vai oferecer a um sinal perturbação qualquer.

Nesta seção apresenta-se uma formulação LMI para o problema de controle acima através de realimentação dinâmica de saída. Para tal, considere o seguinte sistema linear:

$$\mathcal{S} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + E_x d(t) \\ y(t) = Cx(t) + E_y d(t) \\ z(t) = C_z x(t) + D_z u(t) + E_z d(t) \end{cases} \quad (6.37)$$

$x \in \mathbb{R}^n$  representa o estado,  $y \in \mathbb{R}^{n_y}$  o vetor de medidas,  $u \in \mathbb{R}^{n_u}$  o sinal de controle,  $d \in \mathbb{R}^{n_d}$  um sinal externo de perturbação,  $z \in \mathbb{R}^{n_z}$  um sinal auxiliar cuja energia desejamos minimizar<sup>4</sup>,  $A, B, C, E_x, E_y, C_x, D_z$  são matrizes reais de dimensão compatíveis.

Para controlar o sistema (6.37) vamos considerar um controlador dinâmico do tipo

$$\mathcal{K} : \begin{cases} \dot{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_f y(t) \\ u(t) = C_f x_f(t) + D_f y(t) \end{cases} \quad (6.38)$$

onde  $x_f \in \mathbb{R}^{n_f}$  representa o estado do controlador e  $A_f, B_f, C_f, D_f$  são matrizes reais a serem determinadas.

Denotaremos o sistema de malha fechada por  $\mathcal{S}(\mathcal{K}) : d \mapsto z$  e sua representação de estados é

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}) : \begin{cases} \dot{x}_a(t) = A_a x_a(t) + B_a d(t) \\ z(t) = C_a x_a(t) + D_a d(t) \end{cases}, \quad x_a(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_f(t) \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

$$\begin{aligned} A_a &= \begin{bmatrix} A + BD_f C & BC_f \\ B_f C & A_f \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} E_x + BD_f E_y \\ B_f E_y \end{bmatrix} \\ C_a &= \begin{bmatrix} C_z + D_z D_f C & D_z C_f \end{bmatrix}, \quad D_a = E_z + D_z D_f E_y \end{aligned}$$

O problema a ser resolvido consiste em projetar um controlador que minimize a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema em malha fechada acima, isto é desejamos resolver  $\min_{\mathcal{K}} \|\mathcal{S}(\mathcal{K})\|_\infty$ . Como visto na seção 3.5, isto corresponde a minimizar o pico de ressonância da resposta em frequência de  $\|H(j\omega)\|$  onde  $H(s)$  é a função de transferência de  $\mathcal{S}(\mathcal{K})$  dada por

$$H(s) = C_a (sI - A_a)^{-1} B_a + D_a \quad (6.40)$$

Dos exercícios 3.5 e 3.6 podemos mostrar que  $\|\mathcal{S}(\mathcal{K})\|_\infty < \gamma$  se e somente se as seguintes desigualdade estão satisfeitas:

$$A'_a P + P A_a + \begin{bmatrix} B'_a P \\ C_a \end{bmatrix}' \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} B'_a P \\ C_a \end{bmatrix} < 0, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma I_{n_d} & -D'_a \\ -D_a & \gamma I_{n_z} \end{bmatrix} > 0, \quad P > 0 \quad (6.41)$$

Seja  $M$  uma matriz inversível. Então as desigualdades acima são equivalentes à  $\Gamma > 0$  e

$$\Upsilon =: M(A'_a P + P A_a)M' + \begin{bmatrix} B'_a P M' \\ C_a M' \end{bmatrix}' \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} B'_a P M' \\ C_a M' \end{bmatrix} < 0, \quad \Upsilon_P =: M P M' > 0 \quad (6.42)$$

Com  $P, Q, M$  definidas em (6.21),  $A_m, B_m, C_q$  definidas em (6.23), (6.24) e algumas manipulações algébricas encontramos

$$M(A'_a P + P A_a)M' = \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 - A_m \\ \star & \Psi_3 \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

<sup>4</sup>Na seção 4.6 um problema idêntico é formulado para o problema de realimentação de estados.

onde

$$\begin{aligned}\Psi_1 &= S(A + BD_f C) + B_m C + (S(A + BD_f C) + B_m C)' \\ \Psi_2 &= S(A + BD_f C - BC_q) + B_m C + (A + BD_f C)'(S - Q) \\ \Psi_3 &= (S - Q)(A + BD_f C - BC_q) + (A + BD_f C - BC_q)'(S - Q)\end{aligned}$$

e

$$\begin{bmatrix} MPB_a & MC'_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_4 \\ \Psi_5 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

onde

$$\begin{aligned}\Psi_4 &= \begin{bmatrix} S(E_x + BD_f E_y) + B_m E_y & (C_z + D_z D_f C)' \\ (S - Q)(E_x + BD_f E_y) & (C_z + D_z D_f C)' - C'_q D'_z \end{bmatrix} \\ \Psi_5 &= \end{bmatrix}$$

Portanto ficamos com

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} \Psi_1 + \Psi_4 \Gamma^{-1} \Psi'_4 & \Psi_2 + \Psi_4 \Gamma^{-1} \Psi'_5 - A_m \\ \star & \Psi_3 + \Psi_5 \Gamma^{-1} \Psi'_5 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_P = \begin{bmatrix} S & S - Q \\ \star & S - Q \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

De forma análoga à seção anterior podemos, sem perda de generalidade, escolher a matriz  $A_m$  tal que  $\Psi_2 + \Psi_4 \Gamma^{-1} \Psi'_5 - A_m = 0$ . Com isto  $\Upsilon < 0$  se torna equivalente à  $\Psi_1 + \Psi_4 \Gamma^{-1} \Psi'_4 < 0$  e  $\Psi_3 + \Psi_5 \Gamma^{-1} \Psi'_5 < 0$ . A primeira se torna uma LMI com a mudança de variável  $B_m = B_s - SBD_f$ . A segunda, que é equivalente à  $W(\Psi_3 + \Psi_5 \Gamma^{-1} \Psi'_5)W < 0$  se torna uma LMI com as mudanças de variáveis  $W = (S - Q)^{-1}$  e  $C_q W = C_s + D_f C W$ . Por outro lado a condição  $\Upsilon_P > 0$  é equivalente à  $G' \Upsilon_P G > 0$  e também se torna uma LMI com  $G = \text{diag}\{I_n, W\}$ . Assim podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 6.3** *Existe um controlador  $\mathcal{K}$  que minimiza a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema (6.40) se e somente se existe uma solução  $\gamma, S, W, C_s, B_s, D_f$  para o problema convexo*

$$\min_{\gamma, S, W, C_s, B_s, D_f} \gamma : \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} SA + B_s C + (SA + B_s C)' & \Psi_6 \\ \star & -\Gamma \end{bmatrix} < 0 \\ & \begin{bmatrix} AW - BC_s + (AW - BC_s)' & \Psi_7 \\ \star & -\Gamma \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{bmatrix} S & I_n \\ \star & W \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Psi_6 &= \begin{bmatrix} SE_x + B_s E_y & (C_z + D_z D_f C)' \\ E_x + BD_f E_y & WC'_z - C'_s D'_z \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} \gamma I_{n_d} & -D'_a \\ -D_a & \gamma I_{n_z} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Em caso afirmativo, as matrizes do controlador são dadas por

$$\begin{aligned}A_f &= T^{-1} A_s (S - W^{-1})^{-1} T, \\ A_s &= SA - SBC_s W^{-1} + B_s C - SBD_f C + (A + BD_f C)' W^{-1} + \Psi_6 \Gamma^{-1} \Psi'_7 \\ B_f &= T^{-1} (B_s - SBD_f) \quad , \quad C_f = (C_s W^{-1} + D_f C) (S - W^{-1})^{-1} T\end{aligned} \quad (6.47)$$

onde  $T$  é uma matriz inversível que pode ser arbitrariamente escolhida. Além disso  $\min_{\mathcal{K}} \|\mathcal{S}(\mathcal{K})\|_\infty = \gamma$  e a matriz  $P$  que satisfaz (6.41) é dada por (6.28).  $\square$

**Prova:** As mesmas condições de regularidade apresentadas na prova do teorema 6.1 a respeito das inversões matriciais também se aplicam aqui. Como (6.46) fornece o menor valor de  $\gamma$  que satisfaz (6.41) temos o resultado desejado.  $\square$

## 6.6 Notas e Referências

### Controladores de Ordem Reduzida

O projeto de controladores dinâmicos de saída com ordem reduzida, isto é, a ordem do controlador  $n_f$  é menor que a ordem do sistema ainda é um problema não completamente resolvido na literatura. Veja por exemplo (?), (J.C.Geromel, 1999), (A.Trofino, 2002).

### Controle Multi-objetivo com Realimentação de Saída

O projeto de controladores dinâmicos de saída atendendo diferentes especificações, como, por exemplo, alocação de pólos e  $\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_\infty$  misto, pode ser realizado de maneira similar ao caso de realimentação de saída. Uma boa referência sobre este tema pode ser encontrada em (Scherer et al., 1997).

## 6.7 Exercícios

**E 4.1** Refaça os Exemplos 4.5 e 4.6 considerando uma realimentação dinâmica de saída. Compare os resultados.

# Referências Bibliográficas

- Anderson, B. D. and Moore, J. (1979). *Optimal Filtering*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- A.Trofino (2002). Robust, stable and reduced order dynamic output feedback controllers with guaranteed  $h_2$  performance, *IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, pp. 3470 – 3475.
- Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E. and Balakrishnan, V. (1994). *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM books.
- Burl, J. B. (1999). *Linear Optimal Control:  $H_2$  and  $H_\infty$  Methods*, Addison-Wesley.
- Chilali, M. and Gahinet, P. (1996).  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control* **41**(3): 358–367.
- Chilali, M., Gahinet, P. and Apkarian, P. (1999). Robust Pole Placement in LMI Regions, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(12): 2257–2270.
- Colaneri, P., Geromel, J. C. and Locatelli, A. (1997). *Control Theory and Design: An  $RH_2$ - $RH_\infty$  Viewpoint*, Academic Press.
- Crusius, C. A. R. (1996). Formulação LMI para problemas de performance e robustez. Dissertação de Mestrado, DAS, UFSC, Florianópolis, SC.
- C.Scherer (1997). Mixed  $H_2/H_\infty$  control for time varying and linear parametrically varying systems, *Int. Journal of Robust and Nonlinear Control* **6**: 929–952, 1996.
- de Oliveira, J. (1998). Controle Robusto de Sistemas Lineares com Parâmetros Variantes no Tempo: Técnicas de Análise e Síntese. Exame de Qualificação, DAS, UFSC, Florianópolis, SC.
- de Oliveira, M. C., Geromel, J. C. and Bernussou, J. (1999). An LMI optimization approach to multiobjective controller design for discrete-time systems, *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, Phoenix, pp. 3611–3616.
- de Oliveira, M. C. and Skelton, R. (2001). Stability tests for constrained linear systems, in S. O. R. Moheimani (ed.), *Lecture Notes in Control and Information Science*, Springer-Verlag.
- Doyle, J. C., Packard, A. and Zhou, K. (1991). Review of LFTs, LMIs and  $\mu$ , *Proceeding of the 30th Conference on Decision and Control*, Brighton, pp. 1227–1232.



- Friedland, B. (1986). *Control System Design: an Introduction to State Space Methods*, McGraw-Hill.
- Ghaoui, L. E. and Niculescu, S. (2000). *Advances in Linear Matrix Inequations Methods in Control*, SIAM.
- Green, M. and Limebeer, D. J. N. (1995). *Linear Robust Control*, Prentice-Hall.
- Gutman, S. and Jury, E. I. (1981). A General Theory for Matrix Root Clustering in Subregions of the Complex Plane, *IEEE Transactions on Automatic Control* **26**: 853–863.
- H.Hindi (2004). A tutorial on convex optimization, *Proceedings of American Control Conference*, Vol. ThP01.1, Boston, pp. 3252–3265.
- J.C.Geromel, J.Bernussou, M. O. (1999).  $h_2$  norm optimization with constrained dynamic output feedback controllers: decentralized and reliable control, *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(7): 1449–1454.
- Johansson, K. H. (2000). The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero, *IEEE Transactions on Control Systems Technology* **8**(3): 456–465.
- Kalman, R. E. (1960). A New approach to linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering* **82**: 34–45.
- Kalman, R. E. and Bucy, R. S. (1961). New results in linear filtering and prediction problems, *Transactions of the ASME Journal of Basic Engineering* **83**: 95–107.
- Khalil, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*, Prentice Hall.
- Luenberger, D. (1966). Observers for multivariable systems, *IEEE Transactions on Automatic Control* **11**: 190–197.
- Mackenroth, U. (2004). *Robust Control Systems*, Springer Verlag, Berlin.
- Ogata, K. (1993). *Engenharia de Controle Moderno, segunda edição*, Prentice Hall do Brasil.
- Peaucelle, D. (2000). Formulation Générique de Problèmes en Analyse et Commande Robuste par des Fonctions de Lyapunov Dépendent des Paramètres. Thèse, Rapport N. 00304, LAAS, Toulouse, France.
- R.T.Stefani, C.J.Savant, B.Shahian and G.H.Hostetter (1994). *Design of Feedback Control Systems*, Saunders College Publishing.
- Scherer, C., Gahinet, P. and Chilali, M. (1997). Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization, *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**: 896–911.
- T.Kailath (1980). *Linear Systems*, Prentice Hall.
- Zhou, K. (1998). *Essentials of Robust Control*, Prentice Hall.