

APLICAÇÃO DE MODELAGEM FUZZY TAKAGI-SUGENO À PLANTA QUATRO-TANQUES MULTIVARIÁVEL

JHONANTANS MORAES ROCHA, EDUARDO STOCKLER TOGNETTI*

* *Laboratório de Robótica e Automação (LARA)*
Departamento de Engenharia Elétrica - FT - UnB
Caixa Postal 4.386 - Brasília - DF - Brasil

Email: jhmrocha@gmail.com, estognetti@ene.unb.br

Abstract— This work presents the non-linear modeling, linearization and fuzzy Takagi-Sugeno modeling for a four-tank plant, as a general example of multivariable processes. The goal is to compare the results obtained, demonstrating the increased efficiency of the fuzzy approach to linearization simultaneously to its simplicity.

Keywords— Fuzzy Modeling, Takagi Sugeno, Four tanks system, Multivariable process, Level control.

Resumo— Realiza-se neste trabalho a modelagem não-linear, linearizada e fuzzy Takagi-Sugeno de uma planta quatro-tanques, como um exemplo geral de processos multivariáveis. Objetiva-se a comparação dos resultados obtidos, demonstrando a maior eficiência da abordagem fuzzy sobre a linearização simultaneamente à sua simplicidade.

Palavras-chave— Modelagem Fuzzy, Takagi Sugeno, Sistema de quatro tanques, Processo multivariável, Controle de nível.

1 Introdução

Desenvolver controladores para sistemas não-lineares é quase sempre uma tarefa dispendiosa e complexa. Para plantas multivariáveis essa complexidade é ainda maior. É por esse motivo que é prática comum recorrer-se à linearização das equações que as descrevem, o que fornece uma aproximação do sistema inicial num formato que se encaixa às teorias de controle convencionais.

A linearização simples, realizada por meio da série de Taylor, resulta uma aproximação excelente localmente. No entanto, à medida que as variáveis controladas e manipuladas se afastam do ponto de operação, condição na qual foi realizada a linearização, o modelo passa a se afastar da planta real.

Neste cenário, a abordagem fuzzy figura como excelente ferramenta para solução destes desvios. Aparecendo pela primeira vez em (Takagi and Sugeno, 1985), foi aplicada à modelagem de sistemas em (Zadeh, 1965). Seus métodos consistem na linearização simples do sistema em mais de um ponto, baseados em um conjunto de métricas relevantes para o problema em questão. Desenvolve-se então um conjunto de regras para determinar o grau de pertinência do estado do sistema à cada um dos pontos pré-modelados. Utiliza-se então como modelo a soma ponderada das linearizações por estes coeficientes de pertinência.

O objeto de estudo deste trabalho será o sistema de quatro tanques, desenvolvido por (Johansson et al., 1999) com o objetivo didático de demonstrar de forma ilustrativa conceitos e propriedades de sistemas com múltiplas entradas e saídas (MIMO, do inglês *multiple input, multiple output*). Seu diagrama esquemático é apresen-

tado na Figura 1. Ele consiste em quatro tanques interconectados, um reservatório inferior, quatro válvulas esferas e duas bombas de corrente contínua que bombeiam o fluido do reservatório inferior para os tanques de forma cruzada, de acordo com a razão entre os fluxos definida pela posição das válvulas.

O sistema de quatro tanques é não linear. Seu modelo linearizado apresenta um zero multivariável que pode estar localizado tanto no semi-plano esquerdo quanto no semi-plano direito dependendo da configuração das válvulas. A abertura das válvulas determina se o sistema é de fase mínima ou de fase não-mínima afetando a estratégia de controle a ser adotada.

O objetivo é controlar os níveis do fluido nos tanques inferiores 1 e 2. As entradas do processo são as tensões de entrada das bombas, e as saídas são os níveis de fluido nos tanques 1 e 2. As demais variáveis de processo são os níveis do fluido nos tanques 3 e 4, os fluxos da bomba e a razão entre os fluxos para os tanques.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Na Seção 2 é feita a modelagem matemática do sistema não linear e sua linearização em torno do ponto de operação em estado estacionário. A Seção 3 apresenta os conceitos da modelagem fuzzy e sua aplicação na planta. Na seção seguinte é feita uma análise comparativa entre os modelos desenvolvidos. Por fim, algumas considerações finais e sugestões de trabalhos futuros são apresentadas na Seção 5.

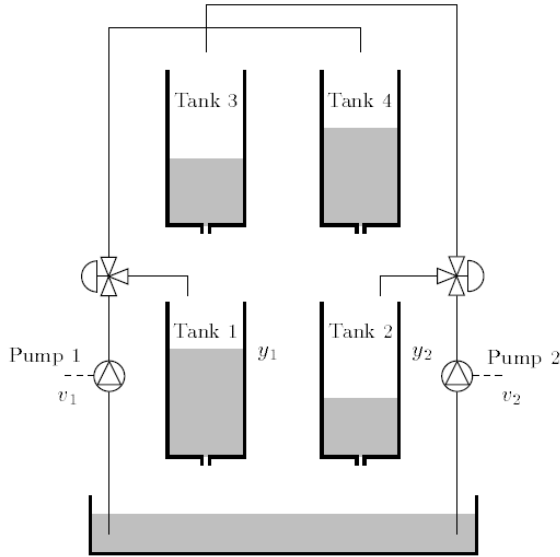


Figura 1: Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques e planta didática.

2 Modelagem Convencional

2.1 Modelo Não Linear

Baseado nos princípios de conservação de massa e na lei de Bernoulli para líquidos incompressíveis tem-se o seguinte sistema de equações não lineares que descrevem o processo.

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = \frac{1}{A_1}(a_3\sqrt{2gh_3} + \gamma_1 k_1 v_1 - a_1\sqrt{2gh_1}) \\ \dot{h}_2 = \frac{1}{A_2}(a_4\sqrt{2gh_4} + \gamma_2 k_2 v_2 - a_2\sqrt{2gh_2}) \\ \dot{h}_3 = \frac{1}{A_3}((1 - \gamma_2)k_2 v_2 - a_3\sqrt{2gh_3}) \\ \dot{h}_4 = \frac{1}{A_4}((1 - \gamma_1)k_1 v_1 - a_4\sqrt{2gh_4}) \end{cases} \quad (1)$$

em que, h_i , A_i e a_i são o nível de água, a área da seção transversal e a área de seção transversal do orifício de saída do tanque i , $i = 1, 2, 3, 4$, respectivamente. A constante de fluxo e a tensão aplicada na bomba j são dadas respectivamente por k_j e v_j , $j = 1, 2$. O parâmetro γ_1 é a razão entre os fluxos para os tanques 1 e 4, γ_2 é a razão entre os fluxos para os tanques 2 e 3 e g é a aceleração da gravidade.

2.2 Linearização

Linearizando o sistema em torno dos ponto de operação $\bar{h} = (\bar{h}_1, \bar{h}_2, \bar{h}_3, \bar{h}_4)$ e $\bar{v} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$, por expansão em série de Taylor, obtém-se a seguinte representação no espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1 \\ \Delta \dot{h}_2 \\ \Delta \dot{h}_3 \\ \Delta \dot{h}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1\sqrt{2g}}{2A_1\sqrt{h_1}} & 0 & \frac{a_3\sqrt{2g}}{2A_1\sqrt{h_3}} & 0 \\ 0 & \frac{-a_2\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{h_2}} & 0 & \frac{a_4\sqrt{2g}}{2A_2\sqrt{h_4}} \\ 0 & 0 & \frac{-a_3\sqrt{2g}}{2A_3\sqrt{h_3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-a_4\sqrt{2g}}{2A_4\sqrt{h_4}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\gamma_1 k_1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{\gamma_2 k_2}{A_2} \\ 0 & \frac{(1-\gamma_2)k_2}{A_3} \\ \frac{(1-\gamma_1)k_1}{A_4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = I \begin{bmatrix} \Delta h_1 \\ \Delta h_2 \\ \Delta h_3 \\ \Delta h_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

em que y_i são as saídas medidas do sistema, $\Delta h_i = h_i - \bar{h}_i$, $\Delta v_i = v_i - \bar{v}_i$, e $i = 1, 2, 3, 4$.

E por fim, a matriz função de transferência do sistema obtida é:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{T_1 \gamma_1 k_1}{A_1(1+sT_1)} & \frac{T_1(1-\gamma_2)k_2}{A_1(1+sT_3)(1+sT_1)} \\ \frac{T_2(1-\gamma_1)k_1}{A_2(1+sT_4)(1+sT_2)} & \frac{T_2 \gamma_2 k_2}{A_2(1+sT_2)} \\ 0 & \frac{T_3(1-\gamma_2)k_2}{A_3(1+sT_3)} \\ \frac{T_4(1-\gamma_1)k_1}{A_4(1+sT_4)} & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

em que $G(s) = \frac{\Delta h(s)}{\Delta v(s)}$ e $T_i = \frac{2A_i\sqrt{h_i}}{a_i\sqrt{2g}}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

3 Modelagem Fuzzy

A Teoria Fuzzy tem seu princípio cunhado por (Takagi and Sugeno, 1985). Os trabalhos seguintes, como o (Zadeh, 1965) abordaram sua utilização para a modelagem de sistemas complexos por meio de aproximações, utilizando uma teoria de conjuntos diferente da convencional.

3.1 Conjuntos Fuzzy

A teoria de conjuntos convencional utiliza lógica booleana para definir os valores lógicos das funções de pertinências dos conjuntos. Assim, dado X o universo de discurso de um determinado conjunto C , um elemento genérico x tem sua função de pertinência ao conjunto C dado por:

$$f_C(x) : X \rightarrow \{0, 1\}$$

$$f_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se e somente se } x \in C \\ 0 & \text{se e somente se } x \notin C \end{cases}$$

Existem, no entanto, situações em que a definição dos conjuntos de seus limites se tornam muito subjetivos. Nestas situações, a utilização da lógica difusa apresenta vantagens para a modelagem de sistemas.

Considere-se como exemplo a temperatura de uma sala. Pode-se definir dois conjuntos de estados {quente, frio}. No entanto, torna-se um pouco confuso e arbitrário decidir em qual destes conjuntos um estado específico se encaixa. Utilizando funções de pertinências não binárias, observa-se o **quanto** determinada temperatura se encaixa em cada um dos conjuntos. Funções de pertinências fuzzy são definidas da forma:

$$f_C(x) : X \rightarrow [0, 1]$$

3.2 Funções De Pertinência

Existem várias normas e regras disponíveis para funções de pertinência. Este trabalho considera a norma triangular. Seguindo o exemplo dado, dada uma temperatura x verifica-se o quão pertencente aos conjuntos *quente* e *fria* ela é utilizando a função do gráfico a seguir:

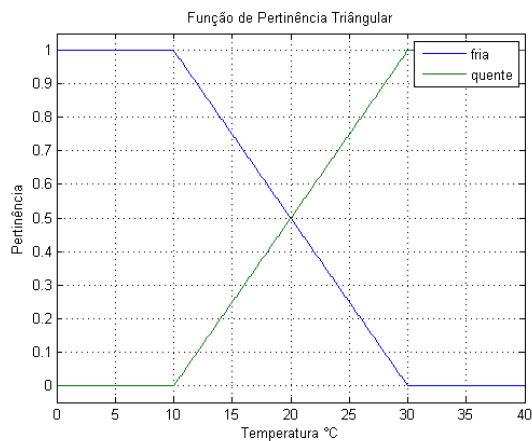


Figura 2: Diagrama esquemático do sistema de quatro tanques e planta didática.

Nota-se que se escolhem limites para os conjuntos: toda temperatura abaixo de 10° é fria; toda temperatura acima de 30° é quente. As demais, pertencem mais ou menos à cada um dos conjuntos.

Em lógica Fuzzy, as variáveis definidas de forma subjetiva, com expressões para limites são chamadas variáveis linguísticas.

3.3 Modelo Fuzzy Takagi-Sugeno

A abordagem proposta por (Zadeh, 1965) promove a utilização da lógica fuzzy na modelagem e controle de sistemas. As etapas deste processo são:

- **Fuzzificação:** Chamemos de x_i e C_i , onde $i=1,2,3,...,n$, as n variáveis medidas de um sistema e os conjuntos fuzzy aos quais podem ou não pertencer, respectivamente. No modelo de Takagi-Sugeno temos as regras dadas

da forma: SE x_1 é A_1i e x_1 é A_1i e x_1 é A_1i e ... e x_1 é A_1i ENTÃO $y = f_i(x_1, x_2, ..., X_n)$

No objeto de estudos deste trabalho, as variáveis de entradas são os níveis h_1 e h_2 . Para cada um deles pode se definir os conjuntos {baixo, alto} e modelar o sistema nas quatro combinações possíveis:

- Se h_1 é baixo e h_2 é baixo, então $\dot{x} = A_1x + B_1u$
- Se h_1 é baixo e h_2 é alto, então $\dot{x} = A_2x + B_2u$
- Se h_1 é alto e h_2 é baixo, então $\dot{x} = A_3x + B_3u$
- Se h_1 é alto e h_2 é alto, então $\dot{x} = A_4x + B_4u$

Com a regras já definidas, realiza-se o próximo passo para inferir o quanto o estado atual pertence a cada um dos estados e o sistema resultante.

- **Inferência:** As variáveis h_1 e h_2 são chamadas variáveis premissas. Obtém-se então o grau de compatibilidade dos níveis em cada um dos quatro conjuntos anteriores utilizando funções de pertinências triangulares, como apresentado anteriormente. Para este tipo de função, o peso final da regra é dado pelo produto do grau de ativação das premissas em cada região. Ou seja, chamando de $w_i(h_1, h_2)$ este peso, temos:

$$w_1(h_1, h_2) = f_{baixo}(h_1) * f_{baixo}(h_2)$$

$$w_2(h_1, h_2) = f_{baixo}(h_1) * f_{alto}(h_2)$$

$$w_3(h_1, h_2) = f_{alto}(h_1) * f_{baixo}(h_2)$$

$$w_4(h_1, h_2) = f_{alto}(h_1) * f_{alto}(h_2)$$

Assim, o modelo Takagi-Sugeno final é dado por:

$$\dot{h} = \frac{\sum_{i=1}^4 w_i(h)(A_i h + B_i u)}{\sum_{i=1}^4 w_i(h)}$$

Nota-se que o número de regras é obtido a partir da combinação simples entre as variáveis de discurso. Além disso, é importante notar que se tratam de linearizações, portanto as variáveis utilizadas são todas desvios de cada um dos respectivos pontos de linearização, que portanto precisam ser previamente calculados e inseridos no modelo.

4 Análise dos Resultados

Foram realizadas simulações de resposta ao degrau do sistema de quatro-tanques modelado seguindo as abordagens apresentadas. Por se tratar

de um problema multivariável com zeros alocáveis, simulou-se as respostas dos modelos para os casos de **fase-mínima** e de **fase não mínima**. Os resultados são observados nas seções a seguir.

4.1 Fase Mínima

A tabela a seguir apresenta as especificações do sistema, nota-se por γ_1 e γ_2 que o sistema está em fase mínima.

Especificações Iniciais da Planta	
A1, A3	28
A2, A4	32
a1, a3	0.071
a2, a4	0.057
g	981
k1	3,33
k2	3.35
γ_1	0.70
γ_2	0.60

Realiza-se

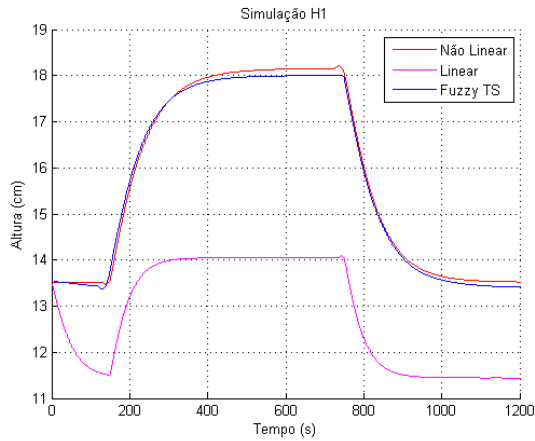


Figura 3: Linearização Convencional: $\bar{h}_1 = 5, \bar{h}_2 = 5$. Linearizações Fuzzy: $\bar{h}_1 = [10 \ 15]$ $\bar{h}_2 = [10 \ 15]$

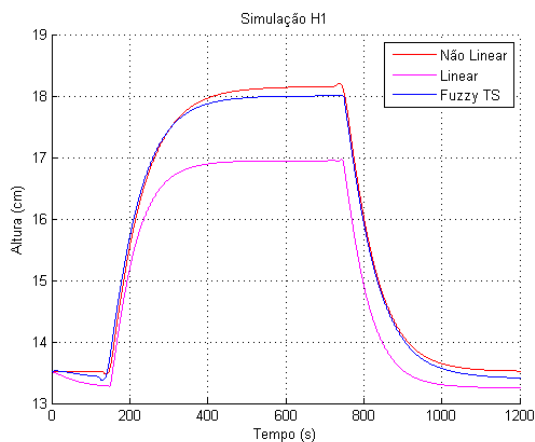


Figura 4: Linearização Convencional: $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$. Linearizações Fuzzy: $\bar{h}_1 = [10 \ 15]$ $\bar{h}_2 = [10 \ 15]$

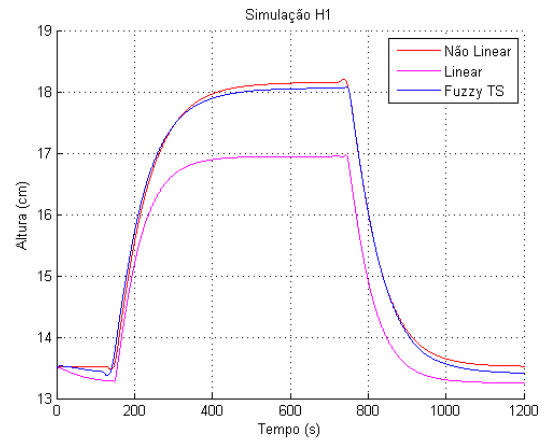


Figura 5: Linearização Convencional: $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$. Linearizações Fuzzy: $\bar{h}_1 = [10 \ 15 \ 20]$ $\bar{h}_2 = [10 \ 15 \ 20]$

4.2 Fase Não-Mínima

A tabela a seguir apresenta as especificações do sistema, nota-se por γ_1 e γ_2 que o sistema está em fase não mínima.

Especificações do sistema	
A1, A3	28
A2, A4	32
a1, a3	0.071
a2, a4	0.057
g	981
k1	3,14
k2	3.29
γ_1	0.43
γ_2	0.34

Nas figuras que se seguem apresentam-se as respostas dos modelos à degraus aplicados ao sistema. Observa-se que o modelo linear apresenta bons resultados quando o estado do sistema é próximo ao ponto de operação. Já para os modelos fuzzy, quanto mais pontos de linearização utilizados, melhor o resultado, embora mais complexo o custo computacional.

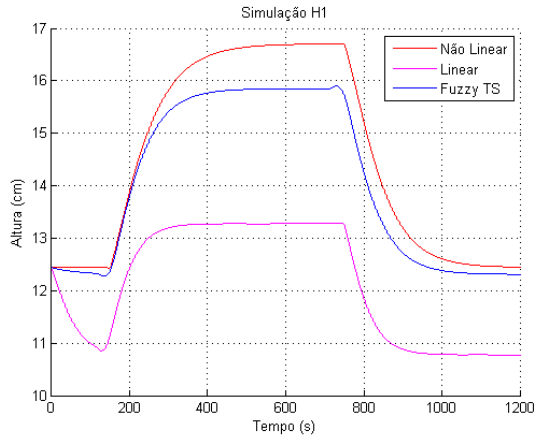


Figura 6: Linearização Convencional: $\bar{h}_1 = 5, \bar{h}_2 = 5$. Linearizações Fuzzy: $\bar{h}_1 = [5 \ 10] \ \bar{h}_2 = [5 \ 10]$

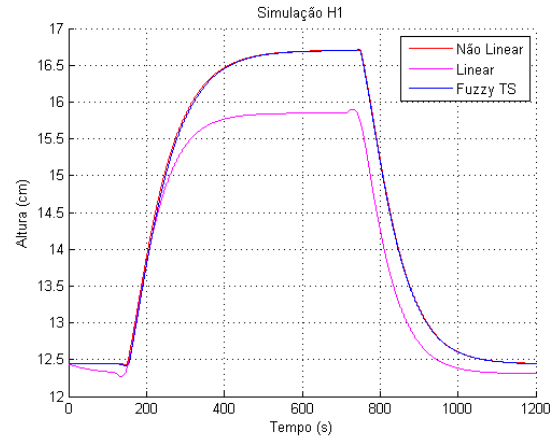


Figura 9: Linearização Convencional: $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$. Linearizações Fuzzy: uma linearização a cada 1 centímetro para ambos os níveis.

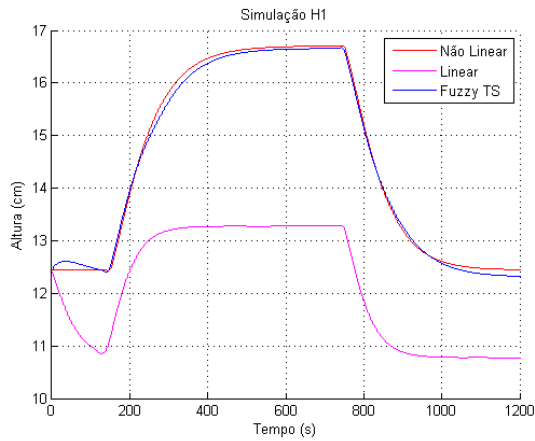


Figura 7: Linearização Convencional: $\bar{h}_1 = 5, \bar{h}_2 = 5$. Linearizações Fuzzy: $\bar{h}_1 = [5 \ 10 \ 15] \ \bar{h}_2 = [5 \ 10 \ 15]$

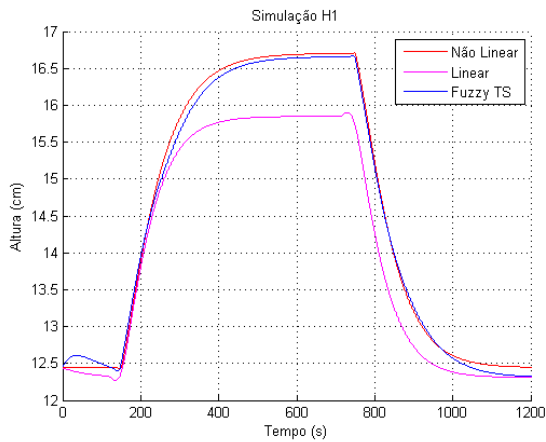


Figura 8: Linearização Convencional: $\bar{h}_1 = 10, \bar{h}_2 = 10$. Linearizações Fuzzy: $\bar{h}_1 = [5 \ 10 \ 15] \ \bar{h}_2 = [5 \ 10 \ 15]$

Como explicado na seção anterior, o conjunto de regras é realizado a partir da combinação simples dos conjuntos de pontos das variáveis aferidas. Assim, na Figura 9 haverão 900 regras, uma combinação de 30 pontos para h_1 e 30 pontos para h_2 .

5 Conclusões

Neste trabalho foi realizada a comparação entre a modelagem fuzzy e a modelagem linearizada convencional. O objetivo final foi demonstrar a eficiência e aplicabilidade da abordagem proposta por Takagi-Sugeno em sistemas multivariáveis com diferentes níveis de acoplamento. A partir dos resultados obtidos, nota-se que esta abordagem proporciona uma aproximação tão boa quando se esteja disposto a dispendar em termos de custos computacionais. Possíveis desenvolvimentos futuros incluem a implementação de controladores desenvolvidos e a inclusão de incertezas nas especificações dos modelos.

Referências

- Johansson, K. H., Horsch, A., Wijk, O. and Hansson, A. (1999). Teaching multivariable control using the quadruple-tank process.
- Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics* **15**(1): 116 – 132.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. information and control.