Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

2ª Prova de Cálculo Numérico
Curso: Bacharelado em Ciências da Computação

DAMAT, 2020

Nome: ____

Instruções:

(i) Em todas as páginas da avaliação a ser resolvida, tem que o nome do aluno no **início** e no **fim** de cada página;

(ii) A prova deve ser anexada no *Google Classroom* e a mesma deve ser escaneada em boa resolução e em **pdf**. Não serão aceitas imagens separadas do tipo jpg! (use um aplicativo do tipo *CamScanner* para celular);

(iii) A prova tem que ter **todos os passos apresentados na sala de aula e nas videoaulas**. Resoluções incompletas, apenas apresentando a resposta serão descontadas nota da questão;

(iv) Não esqueça de devolver a atividade no *Google Classroom*;

(v) O aluno precisará do seu R.A. para fazer sua prova. Os alunos devem fazer a seguinte correspondência entre os dígitos d_i's e os dígitos de seus R.A's. Por exemplo, um aluno com o R.A. dado por 002173581, deve fazer a seguinte correspondência:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	7	3	5	8	1

Assim, neste exemplo, $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 7, \ldots, d_7 = 1$ e o aluno deve substituir estes valores nas questões da prova;

(vi) Se as instruções (i),(ii), (iv) e (v) não forem obedecidas, a prova será anulada.

Do exposto, preencha a tabela abaixo colocando o seu R.A. **(Esta tabela deve estar no início de sua prova juntamente com seu nome)**:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0							

Questões:

1 (1,8) *Aproxime por uma spline cúbica natural a função dada pela tabela abaixo:*

x	$0, d_2d_6$	$0, d_2d_6$ +0,05	$0, d_2d_6$ +0,10	$0, d_2d_6$ +0,15	$0, d_2d_6$ +0,20
$f(x)$	0,12 $+d_3$	0,16 $+d_3$	0,19 $+d_3$	0,22 $+d_3$	0,25 $+d_3$

Avalie a spline em $x = 0, d_2 d_6 + 0,12$.

2 (1,8) *Aproxime a função* $f(x) = e^{-x^2}$ *por uma reta no intervalo* $[0, (d_1 + d_4 + .9)]$.

3 (1,8) *Dada a tabela*

x	(d_1+d_6)	(d_1+d_6)+1	(d_1+d_6)+2	(d_1+d_6)+3	(d_1+d_6)+4	(d_1+d_6)+5	(d_1+d_6)+6
$f(x)$	-1 +d_3	α	5 +d_3	β	7 +d_3	γ	13+d_3

calcule α, β e γ, sabendo-se que ela corresponde a um polinômio de grau 3 recorrendo à fórmula de Newton.

4 (1,8) *Considere a função $f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x+1}$ tabelada como segue:*

x	d_7	d_7+1	d_7+2
$f(x)$	$f(d_7)$	$f(d_7+1)$	$f(d_7+2)$

Obtenha um limitante superior do (usando os pontos da tabela x_0, x_1 e x_2) para $x = d_7 + 0,3$.

5 (1,8) *Use a porção dada a seguir de uma tabela de vapor d'água superaquecido em 200 MPa para encontrar o volume correspondente a uma entropia de 6,45 utilizando interpolação inversa com um polinômio de grau por qualquer método admissível:*

v, m^3/kg	$0, d_1d_2d_3d_4$	$0, d_1d_2d_3d_4 + 27 \times 10^{-3}$	$0, 0, d_1d_2d_3d_4 + 111 \times 10^{-3}$
s, KJ/(kg K)	6,4147	6,5453	6,7664

Sucesso!!!

Formulário

Fórmula Interpolatória de Newton - Grégory

Diferenças Finitas:

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & \Delta^0 f & \Delta^1 f & \Delta^2 f & \Delta^3 f \\
\hline
x_0 & \Delta^0 f(x_0) & & & \\
 & & \Delta^1 f(x_0) & & \\
x_1 & \Delta^0 f(x_1) & & \Delta^2 f(x_0) & \\
 & & \Delta^1 f(x_1) & & \Delta^3 f(x_0) \\
x_2 & \Delta^0 f(x_2) & & \Delta^2 f(x_1) & \\
 & & \Delta^1 f(x_2) & & \\
x_3 & \Delta^0 f(x_3) & & &
\end{array}
$$

onde

$$\boxed{\Delta^r f(x_i) = \Delta^{r-1} f(x_{i+1}) - \Delta^{r-1} f(x_i), r \geq 1\,.} \qquad (1)$$

Polinômio interpolador baseado nas diferenças finitas:

$$\boxed{\begin{aligned} P(x) = \Delta^0 f(x_0) + (x - x_0) \cdot \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1!h^1} \\ + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!h^2} \\ + ... + (x - x_0) \cdot (x - x_1) ... (x - x_{n-1}) \cdot \frac{\Delta^n f(x_0)}{n!h^n}\,. \end{aligned}} \qquad (2)$$

Spline Cúbica Natural

Neste caso, consideremos $\mu_0 = \mu_n = 0$ e devemos resolver o seguinte sistema de $(n-1)$ equações lineares:

$$
\begin{pmatrix}
2(h_0+h_1) & h_1 & & & \\
h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & & 0 \\
 & h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
0 & & & h_{n-2} & 2(h_{n-2}+h_{n-1})
\end{pmatrix}
\times
\begin{pmatrix}
\mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \vdots \\ \mu_{n-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
b_1 - b_0 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} - b_{n-2}
\end{pmatrix}
\tag{3}
$$

com

$$\boxed{b_i = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right).}$$

Os n polinômios de interpolação por spline para $i = 0, 1, \ldots, n-1$ são:

$$\boxed{p_i(x) = y_i + \alpha_i\,(x - x_i) + \beta_i\,(x - x_i)^2 + \gamma_i\,(x - x_i)^3} \tag{4}$$

onde

$$\boxed{\alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{\mu_{i+1}}{6}\,h_i - \frac{\mu_i}{3}\,h_i} \tag{5}$$

$$\boxed{\beta_i = \frac{\mu_i}{2}} \tag{6}$$

$$\boxed{\gamma_i = \frac{\mu_{i+1} - \mu_i}{6\,h_i}.} \tag{7}$$

Método dos Mínimos Quadrados: Caso Contínuo

Dada a função

$$\boxed{g(x) = \alpha_1\,g_1(x) + \alpha_2\,g_2(x) + \ldots + \alpha_n\,g_n(x),}$$

devemos resolver o seguinte sistema

$$
\begin{pmatrix}
\langle g_1, g_1\rangle & \langle g_1, g_2\rangle & \cdots & \langle g_1, g_n\rangle \\
\langle g_2, g_1\rangle & \langle g_2, g_2\rangle & \cdots & \langle g_2, g_n\rangle \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\langle g_n, g_1\rangle & \langle g_n, g_2\rangle & \cdots & \langle g_n, g_n\rangle
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\langle g_1, f\rangle \\ \langle g_2, f\rangle \\ \vdots \\ \langle g_n, f\rangle
\end{pmatrix}
\tag{8}
$$

cujo produto interno é definido como

$$\boxed{\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\,.} \tag{9}$$

Fórmula Interpolatória de Newton

Diferenças Divididas

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_1] = \dfrac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$	$f[x_0, x_1, x_2] = \dfrac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_2] = \dfrac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$	$f[x_1, x_2, x_3] = \dfrac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1}$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_3] = \dfrac{f[x_3] - f[x_2]}{x_3 - x_2}$	
x_3	$f[x_3]$		

Polinômio interpolador baseado nas diferenças divididas:

$$
\boxed{\begin{aligned}
P(x) &= f[x_0] + (x - x_0)\,f[x_0, x_1] + (x - x_0)\,(x - x_1)\,f[x_0, x_1, x_2] \\
&\quad + \ldots + (x - x_0)\,(x - x_1)\,\ldots\,(x - x_{n-1})\,f[x_0, x_1, \ldots, x_n]
\end{aligned}}
\tag{10}
$$

Estimativa do erro

$$\boxed{|E(x)| \leq \frac{|(x - x_0)\cdot(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdots(x - x_n)|\,M}{(n+1)!},} \tag{11}$$

onde

$$\boxed{M = \max\left\{|f^{(n+1)}(\xi)|;\ \xi \in\ [x_0, x_n]\right\}.}$$