Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	3	5	5	9	0

1) Avalie em $x = 0{,}31$

x	x_0: 0,19	x_1: 0,24	x_2: 0,29	x_3: 0,34	x_4: 0,39
$f(x)$	y_0: 3,12	y_1: 3,16	y_2: 3,19	y_3: 3,22	y_4: 3,25

$n = 4$

Criamos tabela auxiliar

i	x_i	y_i	$h_i = x_{i+1} - x_i$	$b_i = 6 \cdot \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i}\right)$
0	0,19	3,12	0,05	4,8
1	0,24	3,16	0,05	3,6
2	0,29	3,19	0,05	3,6
3	0,34	3,22	0,05	3,6
4	0,39	3,25	—	—

Como temos $n = 4$, o sistema será de ordem $(n-1) = 3$, e spline natural, $u_0 = u_4 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & 0 \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 \\ 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - b_0 \\ b_2 - b_1 \\ b_3 - b_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}2 & 0{,}05 \\ 0 & 0{,}05 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para resolver o sistema iremos recorrer ao método de Cholesky

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0,2 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0,2 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1) $A = A^t$ e $\det(A_k)$ [redacted] $> 0 \quad \forall k$

Podemos notar claramente que $A = A^t$

$\det(A_1) = 0,2 > 0$

$\det(A_2) = 0,0375 > 0$

$\det(A_3) = \det(A) = 7 \times 10^{-3} > 0$

Pelo corolário 1.1, o método de Cholesky é assegurado, a matriz A é decomponível em $G \cdot G^t = A$

b) Encontrar G e G^t

$$\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ g_{21} & g_{22} & 0 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} \\ 0 & g_{22} & g_{32} \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Primeira coluna

$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{0,2} = 0,447213595$

$g_{21} = \dfrac{a_{21}}{g_{11}} = \dfrac{0,05}{g_{1}} = 0,118033399$

$g_{31} = \dfrac{a_{31}}{g_{11}} = \dfrac{0}{g_{11}} = 0$

Segunda coluna

$g_{22} = (a_{22} - g_{21}^2)^{\frac{1}{2}} = (0,2 - (0,118033399)^2)^{\frac{1}{2}} = 0,433012701$

$g_{32} = \dfrac{a_{32} - (g_{31} \cdot g_{21})}{g_{22}} = \dfrac{0,05 - (0 \cdot g_{21})}{g_{22}} = \dfrac{0,05}{g_{22}} = 0,115470053$

Terceira coluna

$g_{33} = (a_{33} - (g_{31}^2 + g_{32}^2))^{\frac{1}{2}} = (0,2 - (0^2 + (0,115470053)^2)^{\frac{1}{2}} = 0,432049338$

Nome: Jhonatan G. de O. Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Portanto teremos

$$G \cdot G^t$$

$$\begin{pmatrix} 0,447213595 & 0 & 0 \\ 0,11803399 & 0,433012701 & 0 \\ 0 & 0,115470053 & 0,43204938 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,447213595 & 0,11803399 & 0 \\ 0 & 0,433012701 & 0,115470053 \\ 0 & 0 & 0,43204938 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0,2 & 0,05 & 0 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0 & 0,05 & 0,2 \end{pmatrix}$$

c) $\det(A) = (g_{11} \ast g_{22} \cdot g_{33})^2 = 7 \times 10^{-3}$

d) Resolver sistema $AX = B$, porém primeiro resolvemos $\begin{cases} G \cdot Y = B \\ G^t \cdot X = Y \end{cases}$

$$G \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,447213595 & 0 & 0 \\ 0,11803399 & 0,433012701 & 0 \\ 0 & 0,115470053 & 0,43204938 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,447213595\, y_1 = -1,2 \Rightarrow y_1 = -2,6832815576 \\ 0,11803399\, y_1 + 0,433012701\, y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = 0,731429886 \\ 0,115470053\, y_2 + 0,43204938\, y_3 = 0 \Rightarrow y_3 = -0,19548285 8 \end{cases}$$

Logo a solução do sistema $G\,Y = B$ é $Y = (-2,6832815576, 0,731429886, -0,19548285...$

Retornando $G^t \cdot X = Y$, obtemos

$$\begin{pmatrix} 0,447213595 & 0,11803399 & 0 \\ 0 & 0,433012701 & 0,115470053 \\ 0 & 0 & 0,43204938 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2,6832815576 \\ 0,731429886 \\ -0,195482858 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,43204938\, x_3 = -0,195482858 \Rightarrow x_3 = -0,452454897 \\ 0,433012701\, x_2 + 0,115470053\, x_3 = 0,731429886 \Rightarrow x_2 = 1,809819608 \\ 0,447213595\, x_1 + 0,11803399\, x_2 = -2,6832815576 \Rightarrow x_1 = -6,477669326 \end{cases}$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan G de O Cunha

Logo a solução do sistema $G^t \cdot X = Y$, é $Y = (-6{,}477669326,\ 1{,}809819608,\ -0{,}462454897$

$u_1 = -6{,}477669326$

$u_2 = 1{,}809819608$

$u_3 = -0{,}462454897$

i	α	β	γ
0	0,853980577	β_0	-21,59223109
1	0,692879325	-3,238834663	27,62496311
2	0,57369013	0,904909804	-7,57424835
3	0,607707581	-0,231227448	1,54156323

$\alpha_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{u_{i+1}}{6} h_i - \frac{u_i}{3} h_i$ $\quad \gamma = \frac{u_{i+1} - u_i}{6 \cdot h_i}$

$\beta_i = \frac{u_i}{2}$

Após isso, obtemos $p_i(x)$, onde $i = 0, 1, 2, 3$

$p_i(x) = y_i + \alpha_i (x - x_i) + \beta_i (x - x_i)^2 + \gamma_i (x - x_i)^3$

$$g(x) = \begin{cases} P_0(x) = 3{,}12 + 0{,}853980577(x - 0{,}19) + 0 \cdot (x - 0{,}19)^2 - 21{,}59223109 \cdot (x - 0{,}19)^3 \\ P_1(x) = 3{,}16 + 0{,}692879325(x - 0{,}24) - 3{,}238834663(x - 0{,}24)^2 + 27{,}62496311 \cdot (x - 0{,}24)^3 \\ P_2(x) = 3{,}19 + 0{,}57369013(x - 0{,}29) + 0{,}904909804(x - 0{,}29)^2 - 7{,}57424835(x - 0{,}29)^3 \\ P_3(x) = 3{,}22 + 0{,}607707581(x - 0{,}34) - 0{,}231227448(x - 0{,}34)^2 + 1{,}54156323(x - 0{,}34)^3 \\ \text{Intervalos} \\ P_0 = [0.19; 0.24] \quad P_1 = [0.24, 0.29] \quad P_2 = [0.29, 0.34] \end{cases}$$

$P_3 = [0.34, 0.39]$

Queremos encontrar o valor de $x = 0{,}31$, então usaremos P_2

$f(0{,}31) \approx P_2(0{,}31) = 3{,}201775173$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

2) $f(x) = e^{-x^2}$ por uma reta intervalo $[0, (d_1 + d_4 + 0.9)]$

$[0; 7.9]$

Função da reta

$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$

donde,

$g_1(x) = 1 \qquad g_2(x) = x$

O sistema fica

$$\begin{pmatrix} \langle g_1, g_1 \rangle & \langle g_1, g_2 \rangle \\ \langle g_2, g_1 \rangle & \langle g_2, g_2 \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle g_1, f \rangle \\ \langle g_2, f \rangle \end{pmatrix}$$

Como

$$\langle g_1, g_1 \rangle = \int_0^{7,9} 1\, dx = 7,9$$

$$\langle g_1, g_2 \rangle = \langle g_2, g_1 \rangle = \int_0^{7,9} x \cdot 1\, dx = \Big|_0^{7,9} \frac{x^2}{2} = \frac{7,9^2}{2} = 31,205$$

$$\langle g_2, g_2 \rangle = \int_0^{7,9} x^2\, dx = \Big|_0^{7,9} \frac{x^3}{3} = \frac{7,9^3}{3} = 164,3463333$$

$$\langle g_1, f \rangle = \int_0^{7,9} e^{-x^2}\, dx = \Big|_0^{7,9} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 0,886226925$$

integral definida

$$\langle g_2, f \rangle = \int_0^{7,9} x\, e^{-x^2}\, dx$$

Usando integração $u \cdot du$

$u = -x^2$

$$dx = \frac{du}{-2x} \qquad \frac{du}{dx} = -2x$$

$$\int_0^{7,9} x\, e^{-2x}\, dx = \int_0^{7,9} \cancel{x}\, e^{u} \left(\frac{du}{-2\cancel{x}}\right) = \int_0^{7,9} e^{u} \left(\frac{du}{-2}\right) = -\frac{1}{2} \int_0^{7,9} e^{u}\, du$$

$$= -\frac{1}{2} \Big|_0^{7,9} e^{-7,9^2} - e^{0} = -\frac{1}{2} \cdot 7,864685936 \times 10^{-28} - 1 = 0,5$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Do exposto teremos o seguinte sistema

$$\begin{pmatrix} 7,9 & 31,205 \\ 31,205 & 164,3463333 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,886226925 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

Usaremos o método de Cholesky para solucionar o sistema

a) $A = A^t$ e $\det(A_k) > 0 \quad \forall k$

Podemos notar que $A = A^t$

$\det(A_1) = 7,9 > 0$

$\det(A_2) = \det(A) = 324,5840081$

Pelo corolário 1.1, o método de Cholesky é assegurado, a matriz A é decomponível em $G \cdot G^t = A$

b) Encontrar G e G^t

$$\overset{G}{\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,9 & 31,205 \\ 31,205 & 164,3463333 \end{pmatrix}$$

Primeira coluna

$$g_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{7,9} = 2,810693865$$

$$g_{21} = \frac{a_{21}}{g_{11}} = \frac{31,205}{g_{11}} = 11,10224076$$

Segunda coluna

$$g_{22} = (a_{22} - g_{21}^2)^{\frac{1}{2}} = (164,3463333 - g_{21}^2)^{0,5} = 6,409881692$$

Portanto teremos

$$\overset{G}{\begin{pmatrix} 2,810693865 & 0 \\ 11,10224076 & 6,409881692 \end{pmatrix}} \cdot \overset{G^t}{\begin{pmatrix} 2,810693865 & 11,10224076 \\ 0 & 6,409881692 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0,886226925 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

c) $\det(A) = (g_{11} \cdot g_{22})^2 = 324,5840082$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

d) Resolver $AX = B$, primeiro resolver dois sistemas $\begin{cases} G \cdot Y = B \\ G^t \cdot X = Y \end{cases}$

$$G \cdot Y = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 2,810693865 & 0 \\ 11,10224076 & 6,409881692 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,886226925 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2,810693865\, y_1 = 0,886226925 \Rightarrow y_1 = 0,315305389 \\ 11,10224076\, y_1 + 6,409881692\, y_2 = 0,5 \Rightarrow y_2 = -0,468120393 \end{cases}$$

Logo a solução do sistema $G \cdot Y = B$, é $Y = (0,315305389, -0,468120393)^t$

Retomando $G^t \cdot X = Y$, sistema

$$G^t \cdot X = Y \Rightarrow \begin{pmatrix} 2,810693865 & 11,10224076 \\ 0 & 6,409881692 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,315305389 \\ -0,468120393 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6,409881692\, x_2 = -0,468120393 \Rightarrow x_2 = -0,07303105 \\ 2,810693865\, x_1 + 11,10224076\, x_2 = 0,315305389 \\ x_1 = 0,400653272 \end{cases}$$

Doravante a solução do sistema $G^t \cdot X = Y$, é $X = (0,400653272, -0,07303105)$

Logo

$x_1 = \alpha_1 = 0,400653272$

$x_2 = \alpha_2 = -0,07303105$

Portanto a função da reta que melhor se encaixa na função $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[0; 7.9]$

$g(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x = 0,400653272 - 0,07303105\, x$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

3)

	x_0		x_1		x_2		x_3
x	11	12	13	14	15	16	17
$f(x)$	2	α	8	β	10	γ	16
	y_0		y_1		y_2		y_3

$h = 2$, obtemos o polinomio de grau 3, com a ajuda da tabela

X	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3
11	2			
		3		
13	8		-0,5	
		1		$\frac{1}{6}$
15	10		0,5	
		3		
17	16			

Logo o polinomio interpolador pela fórmula de Newton é

$P_3(x) = 2 + (x-11) \cdot 3 + (x-11) \cdot (x-13) \cdot (-0,5) + (x-11) \cdot (x-13) \cdot (x-15) \cdot \frac{1}{6}$

$P_3(x) = 2 + 3x - 33 + (x^2 - 24x + 143) \cdot (-0,5) + (x^2 - 24x + 143) \cdot (x-15) \cdot \frac{1}{6}$

$P_3(x) = 2 + 3x - 33 - 0,5x^2 + 12x - 71,5 + (x^3 - 15x^2 - 24x^2 + 360x + 143x - 2145) \cdot \frac{1}{6}$

$P_3(x) = -102,5 + 15x - 0,5x^2 + \frac{x^3}{6} - 2,5x^2 - 4x^2 + 60x + \frac{143}{6}x - 357,5$

$P_3(x) = \frac{x^3}{6} - 7x^2 + \frac{593}{6}x - 460$

Pelo fato que $P(x)$ é polinômio interpolador, temos que

$\alpha = f(12) \approx P(12) = \frac{12^3}{6} - 7 \cdot 12^2 + \frac{593}{6} \cdot 12 - 460 = 6$

$\beta = f(14) \approx P(14) = \frac{14^3}{6} - 7 \cdot 14^2 + \frac{593}{6} \cdot 14 - 460 = 9$

$\gamma = f(16) \approx P(16) = \frac{16^3}{6} - 7 \cdot 16^2 + \frac{593}{6} \cdot 16 - 460 = 12$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatam Guilherme de Oliveira Cunha

4) Considere $f(x) = e^x + \frac{1}{x+1}$, tabelada como segue

x	0 (x_0)	1 (x_1)	2 (x_2)
$f(x)$	2 (y_0)	$3{,}218281828$ (y_1)	$7{,}722389432$ (y_2)

Encontre limitante superior usando x_0, x_1, x_2 para $x = 0{,}3$

Obtendo polinomio $P(x)$ usando o método de Newton

$n = 2$

Construimos a tabela

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
0	2		
		$1{,}218281828$	
1	$3{,}218281828$		$1{,}642912888$
2	$7{,}722389432$	$4{,}504107604$	

$h = 1$

Logo obtemos $P(x)$

$P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0) \cdot f[x_0, x_1] + (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot f[x_0, x_1, x_2]$

$P_2(x) = 2 + (x - 0) \cdot 1{,}218281828 + (x - 0) \cdot (x - 1) \cdot 1{,}642912888$

$P_2(x) = 2 + 1{,}218281828x + (x^2 - x) \cdot 1{,}642912888$

$P_2(x) = 2 + 1{,}218281828x + 1{,}642912888x^2 - 1{,}642912888x$

$P_2(x) = 1{,}642912888x^2 - 0{,}42463106x + 2$

Assim

$f(0{,}3) \approx P_2(0{,}3) = 2{,}02472842$

Nome: Jhonatam Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha.

Agora obteremos a estimativa para o erro $E(x)$

Sabemos que $n = 2$, então.

$$|E(x)| \le \left|\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(n+1)!}\right| \cdot M$$

onde, $M = \text{máx}\{ f'''(\xi);\ \xi \in [0; 2] \}$

$f''' = e^x - \frac{6}{(x+1)^4}$, analisando a função, concluimos que a mesma é uma função crescente, assumimos que 2 é o máximo em $[0,2]$

$M = \text{máx}\,|f'''(2)| = e^2 - \frac{6}{3^4} = e^2 - 0{,}074074074 = 7{,}314982025$

Então

$$|E(0{,}3)| \le \left|\frac{(0{,}3-0)\cdot(0{,}3-1)\cdot(0{,}3-2)}{3!}\right| \cdot 7{,}314982025$$

$$|E(0{,}3)| \le \left|\frac{0{,}3\cdot(-0{,}7)\cdot(-1{,}7)}{6}\right| \cdot 7{,}314982025$$

$$|E(0{,}3)| \le |0{,}0595| \cdot 7.314982025$$

$$|E(0{,}3)| \le 0{,}43524143$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan G de O Cunha

5)

v, m^3/kg	0,2135	0,2405	0,3245
s, KJ/(kgK)	6,4147	6,5453	6,7664

Aplicamos técnica de inversão de Tabelamento

y	6,4147	6,5453	6,7664
x	0,2135	0,2405	0,3245

Utilizando diferenças divididas obtemos a seguinte Tabela

y	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2
6,4147	0,2135		
		0,206738131	
6,5453	0,2405		0,492409601
		0,379918588	
6,7664	0,3245		

Como $n = 2$, logo o polinomio interpolador será (Formula de Newton)

$P_2(y) = 0,2135 + (y - 6,4147) \cdot 0,206738131 + (y - 6,4147) \cdot (y - 6,5453) \cdot 0,492409601$

$P_2(y) = 0,2135 + 0,206738131y - 1,326163089 + (y^2 - 6,5453y - 6,4147y + 41,98613591) \cdot 0,492409601$

$P_2(y) = -1,112663089 + 0,20673813y + 0,492409601y^2 - 3,222968561y - 3,158659868y + 20,67437643$

$P_2(y) = 0,492409601y^2 - 6,174890299 + 19,56171334$

Donde

$f^{-1}(6,45) \approx P_2(y) = P_2(6,45) = 0,219141337$

Logo $x = 0,219141337$, onde $f(x) = 6,45$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha