Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Campus Campo Mourão
Wellington José Corrêa

1ª Prova de Cálculo Numérico

DAMAT, 2020

Nome: ____

Instruções:

(i) Em todas as páginas da avaliação a ser resolvida, tem que o nome do aluno no **início** e no **fim** de cada página;

(ii) A prova deve ser anexada no *Google Classroom* e a mesma deve ser escaneada em boa resolução e em **pdf**. Não serão aceitas imagens separadas do tipo jpg! (use um aplicativo do tipo *CamScanner* para celular);

(iii) A prova tem que ter **todos os passos apresentados na sala de aula e nas videoaulas**. Resoluções incompletas, apenas apresentando a resposta serão descontadas nota da questão;

(iv) Não esqueça de devolver a atividade no *Google Classroom*;

(v) O aluno precisará do seu R.A. para fazer sua prova. Os alunos devem fazer a seguinte correspondência entre os dígitos d_i's e os dígitos de seus R.A's. Por exemplo, um aluno com o R.A. dado por 002173581, deve fazer a seguinte correspondência:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	7	3	5	8	1

Assim, neste exemplo, $d_1 = 2, d_2 = 1, d_3 = 7, \ldots, d_7 = 1$ e o aluno deve substituir estes valores nas questões da prova;

(vi) Se as instruções (i),(ii), (iv) e (v) não forem obedecidas, a prova será anulada.

Do exposto, preencha a tabela abaixo colocando o seu R.A. **(Esta tabela deve estar no início de sua prova juntamente com seu nome)**:

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0							

Questões:

1 *(1,8) Considere*

$$S = (0, d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7 + 0, d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7 + 0, d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7)\,.$$

(a) Calcule o valor de S exatamente (o resultado na calculadora com 10 dígitos).

(b) Calcule o valor de S usando aritmética de ponto flutuante com **arredondamento** *empregando 5 casas decimais.*

(c) Vamos adotar que o valor exato (a_{ex}) de S com 10 casas decimais foi aquele obtido no item (a). Calcule o erro relativo do valor de S para o arredondamento feito no item (b).

2 *(1,8) Recorrendo ao método da secante com erro $\varepsilon \leqslant 10^{-2}$, determine uma raiz da equação*

$$f(x) = d_1\,\mathrm{tg}(x) - (d_5 + 1)\,x = 0\,.$$

3 *(1,8) Resolva o sistema abaixo pelo método de eliminação de Gauss com pivotamento parcial.*

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ d_7 & -d_3 & -d_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_6 \\ -d_4 \\ d_2 \end{pmatrix}.$$

4 *(1,0) Use o método do ponto fixo para encontrar uma raiz de* $f(x) = (d_7+1)\,x^3 - (d_7+1)\,x - d_7 - 1$ *com precisão de* $\varepsilon \leq 10^{-1}$.

5 *(1,8) Resolva o sistema abaixo pelo método de Gauss-Seidel com* $\varepsilon \leq 10^{-1}$ *e* $\overset{(0)}{X} = (0,0,0)^t$*:*

$$\begin{pmatrix} -20 & d_4 & -d_1 \\ -1 & -25\,(d_3+1) & 1 \\ 2 & 2 & 7\,d_6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_7 \\ -d_5 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Observação: *Faça no máximo,* $k = 3$ *iterações com todos os detalhes.*

6 (0,8) *Considere* $a = d_2\,d_4\,d_6$*. Calcule uma aproximação de* $1/a$ *recorrendo ao método de Newton-Raphson com precisão de 3 casas decimais (*$\varepsilon \leq 10^{-4}$*).*

Sugestão: *Considere* $f(x) = \frac{1}{x} - a$.

Sucesso!!!

Formulário

Método do Ponto Fixo

Considere o problema de resolver a equação $f(x) = 0$. Obtenha o problema de ponto fixo $x = F(x)$ satisfazendo as condições:

- $F(x)$ é contínua em $[a,b]$;
- $a \leq F(x) \leq b$ para todo $x \in [a,b]$;
- $|F'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in (a,b)$.

Sendo satisfeitas as condições acima, com $x_0 \in [a,b]$, use a fórmula de iteração:

$$\boxed{x_{k+1} = F(x_k)} \qquad (1)$$

Método de Eliminação de Gauss com pivotamento parcial

Considere o sistema linear $A\,X = B$ caracterizado matricialmente pela matriz aumentada:

$$\boxed{\left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \dots & a_{3n}^{(1)} & b_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right)} \qquad (2)$$

onde $i,j = 1,2,\dots,n$, $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ e $b_i^{(1)} = b_i$.

De modo geral, o k-ésimo passo do método da eliminação de Gauss é obtido por

$$\boxed{\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} & = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)}\,\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ k = 1,2,\dots,n-1; \\ & \qquad\qquad i = k+1,\dots,n; \\ b_i^{(k+1)} & = b_i^{(k)} - b_k^{(k)}\,\dfrac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}},\ j = k,k+1,\dots,n. \end{cases}} \qquad (3)$$

Método de Gauss-Seidel

Convergência: Ocorre nas seguintes situações:

1. O critério de Sanssenfeld for satisfeito, isto é, se

$$\boxed{\max_{1\leq i\leq n} \beta_i < 1,}$$

onde

$$\boxed{\beta_i = \sum_{j=1}^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|, \; i = 1, 2, \ldots, n.}$$

2. Se a matriz A do sistema $AX = B$ for estritamente diagonalmente dominante.

Algoritmo:

$$\boxed{\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}\left(b_1 - a_{12}\,x_2^{(k)} - a_{13}\,x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}\,x_n^{(k)}\right)\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}\,x_1^{(k+1)} - a_{23}\,x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}\,x_n^{(k)}\right)\\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}\left(b_3 - a_{31}\,x_1^{(k+1)} - a_{32}\,x_2^{(k+1)} - a_{34}\,x_4^{(k)} \ldots - a_{3n}\,x_n^{(k)}\right)\\
\vdots \quad & \;\vdots\\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}\left(b_n - a_{n1}\,x_1^{(k+1)} - a_{n2}\,x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{nn-1}\,x_{n-1}^{(k+1)}\right)
\end{aligned}}$$

Critério da Parada:

$$\boxed{\frac{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|_\infty}{\|X^{(k+1)}\|_\infty} < \varepsilon}$$

onde ε é a precisão pré-fixada.

Método de Newton- Raphson

Algoritmo:

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}.$$

Método da Secante

Considere $x_0 = a$ e $x_1 = b$.

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)\cdot(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}}$$

com o seguinte critério de parada:

$$\boxed{|x_{k+1} - x_k| \leqslant \varepsilon\,.}$$