Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	3	5	5	9	0

1) Considere $S = (0,d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 + 0,d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 + 0,d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 d_7)$

$S = (0,2135590 + 0,2135590 + 0,2135590)$

a) Calcule S exatamente

$S = 0,6406770000$

b) Calcule S usando aritmética de ponto flutuante com arredondamento empregado 5 casas decimais.

Temos que;

$$S = (\underbrace{0,2135590 \times 10^0 + 0,2135590 \times 10^0} + 0,2135590 \times 10^0)$$

$0,427118 \times 10^0$ → Arredondamos somando $5 \times 10^{e-(p+1)} \to 5 \times 10^{-6}$

$+ \; 0,000005 \times 10^0$

$0,427123 \times 10^0$ → Agora cortamos em 5 casas $= 0,42712 \times 10^0$

Continuamos a soma

$S = 0,42712 \times 10^0 + 0,2135590 \times 10^0 = 0,640679 \times 10^0$ → Adicionamos 5×10^{-6} para arredondar

$+ \; 0,000005 \times 10^0$

$0,640684 \times 10^0$

→ Agora cortamos em 5 casas

$S = 0,64068$

Nome: Jhonatan G de O Cunha

Nome: Jhonatan G de I Cunha

c)

a ex = 0, 640677

a prox = 0, 64068

$E_{abs} = |a_{ex} - a_{prox}| = 3 \times 10^{-6}$

$E_{rel} = \dfrac{E_{abs}}{a_{prox}} = \dfrac{3 \times 10^{-6}}{0{,}64068} = 4{,}6825241817 \times 10^{-6}$

Jhonatan G de I Cunha

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

2) $\xi \leq 10^{-2}$

$f(x) = d_1\, tg(x) - (d_5 + 1)x = 0$

$f(x) = 2\, tg(x) - 6x = 0$

Escolhendo a e b

$a = -0.01$ $\Rightarrow$ $f(a) = 0.039999333$ $\Rightarrow$ Logo $f(a) \cdot f(b) < 0$

$b = 0.01$ $\quad f(b) = -0.039999333$

Pelo metodo do secante, automaticamente temos que $x_0 = a = -0.01$ e $x_1 = b = 0.01$

Usaremos o seguinte formulo de iteração $\Rightarrow$ $x_{k+1} = \dfrac{f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

• $k = 1$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 0.01 - \frac{f(0.01) \cdot (0.01 + 0.01)}{f(0.01) - f(-0.01)}$$

$$x_2 = 0.01 - \left(\frac{-0.039999333 \cdot 0.02}{-0.039999333 - 0.039999333}\right) = 0.01 - \left(\frac{-7.9998666 \times 10^{-4}}{-0.079998666}\right)$$

$x_2 = 0.01 - 0.01 = 0$

Pelo criterio do parada

$|x_2 - x_1| = |0 - 0.01| = +0.01 = \boxed{\xi = 10^{-2}}$

Doravante

$\xi \cong x_2 = 0$

Nome: Jhonatan G de O Cunha

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

3) $\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_4 & d_5 & d_6 \\ d_7 & -d_3 & -d_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_6 \\ -d_4 \\ d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 9 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

Escrevemos a matriz aumentada

$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 1 & 3 & 9 \\ 5 & 5 & 9 & -5 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right] \rightarrow$ Como $|5|$ é maior que $|2|$, trocamos a linha 2 pela 1. Logo teremos a seguinte matriz aumentada

$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 9 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right]$ (1) → Agora usamos o algoritmo de Gauss.

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{kj}^{(k)} \cdot \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

- $k=1;\ i=2;\ j=1$

$$a_{21}^{(2)} = a_{21}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \cdot \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} = 2 - 5 \cdot \frac{2}{5} = 0$$

- $k=1;\ i=2;\ j=2$

$$a_{22}^{(2)} = a_{22}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}} = 1 - 5 \cdot \frac{2}{5} = 1 - 2 = -1$$

- $k=1;\ i=2;\ j=3$

$$a_{23}^{(2)} = a_{23}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \cdot \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}} = 3 - 9 \cdot \frac{2}{5} = -0,6$$

Como $j = n = 3$, então calculamos b_i → $b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - b_k^{(k)} \cdot \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$

- $k=1;\ i=2$

$$b_2^{(2)} = b_2^{(1)} - b_1^{(1)} \cdot \frac{a_{21}^{(1)}}{a_{11}} = 9 - (-5) \cdot \frac{2}{5} = 11$$

Agora continuaremos o ~~cod~~ algoritmo na outra página.

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

Nome: Jhonatan G de J. Cunha

Agora com $i = 3$

• $k = 1;\ i = 3;\ j = 1$

$$a_{31}^{(2)} = a_{31}^{(1)} - a_{11}^{(1)} \cdot \frac{a_{31}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} = 0 - 5 \cdot \frac{0}{5} = 0$$

• $k = 1;\ i = 3;\ j = 2$

$$a_{32}^{(2)} = a_{32}^{(1)} - a_{12}^{(1)} \cdot \frac{a_{31}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} = -3 - 5 \cdot \frac{0}{5} = -3$$

• $k = 1;\ i = 3;\ j = 3$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - a_{13}^{(1)} \cdot \frac{a_{31}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} = -5 - 9 \cdot \frac{0}{5} = -5$$

Como $j = n = 3$, calculamos b_i

• $k = 1;\ i = 3$

$$b_3^{(2)} = b_3^{(1)} - b_1^{(1)} \cdot \frac{a_{31}^{(k)}}{a_{11}^{(k)}} = 1 + 5 \cdot \frac{0}{5} = 1$$

Agora teremos a seguinte matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 9 & -5 \\ 0 & \boxed{-1} & -0{,}6 & 11 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

→ Como $|-3|$ é maior que $|-1|$ então fazemos o pivotamento, trocamos a linha 3 pela 2. Logo nossa matriz aumentada ficará da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & +9 & -5 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -0{,}6 & 11 \end{array}\right]^{(2)}$$

→ Aplicamos novamente o algoritmo de Gauss

Nome: Jhonatan G de J Cunha

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

- $k=2;\ i=3;\ j=1$

$$a_{31}^{(3)} = a_{31}^{(2)} - a_{21}^{(2)} \cdot \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = 0 - 0 \cdot \frac{(-1)}{-3} = 0$$

- $k=2;\ i=3;\ j=2$

$$a_{32}^{(3)} = a_{32}^{(2)} - a_{22}^{(2)} \cdot \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -1 + 3 \cdot \frac{(-1)}{-3} = 0$$

- $k=2;\ i=3;\ j=3$

$$a_{33}^{(3)} = a_{33}^{(2)} - a_{23}^{(2)} \cdot \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = -0{,}6 + 5 \cdot \frac{(-1)}{-3} = 1.06666667$$

Como $j = n = 3$, calculamos b_i

- $k=2;\ i=3$

$$b_3^{(3)} = b_3^{(2)} - b_2^{(2)} \cdot \frac{a_{32}^{(2)}}{a_{22}^{(2)}} = 11 - 1 \cdot \frac{(-1)}{-3} = 10.66666667$$

Logo teremos a seguinte matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & +9 & -5 \\ 0 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1.06666667 & 10.66666667 \end{array}\right]$$

→ Tal matriz resulta em um sistema Triangular superior

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 & +9 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1.06666667 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 10.66666667 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 1.06666667\, x_3 = 10.66666667 & \Rightarrow x_3 = 10 \\ -3x_2 - 5x_3 = 1 & \Rightarrow x_2 = -17 \\ 5x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -5 & \Rightarrow x_1 = -2 \end{cases}$$

Doravante, a solução do sistema $AX = B$ é

$$X = (-2, -17, 10)^t$$

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

Digitalizado com CamScanner

Nome: Jhonatan G. de O. Cunha

4) $f(x) = (d7+1)x^3 - (d7+1)x - d7 - 1$ com $\xi \leq 10^{-1}$

$f(x) = x^3 - x - 1$

Escolhendo a e b

$a = 1.324$ $\quad f(a) = -3.059776 \times 10^{-3}$

$b = 1.325$ $\quad f(b) = 1.203125 \times 10^{-3}$

$\Rightarrow$ Logo $f(a) \cdot f(b) < 0$, então a raiz $\xi \in [1.324, 1.325]$.

Escolhendo a $F(x)$, isolamos x^3

$x^3 = x + 1$

$x = (x+1)^{1/3} = F(x)$

1) Mostrar que $F(x)$ é contínua em $[a, b]$

Como o Dom $(F) = \mathbb{R}$ então podemos afirmar que $F(x)$ é contínua

2) $1.324 \leq F(x) \leq 1.325 \quad \forall x \in [1.324, 1.325]$

Como $F(x) = (x+1)^{1/3}$

Então:

$F'(x) = \frac{1}{3} \cdot (x+1)^{-2/3} \cdot 1 \rightarrow \boxed{F'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}}}$

Achando máximo e mínimo da função

$F'(x) = \frac{1}{3(x+1)^{2/3}} \times \frac{0}{1}$

$\Rightarrow \boxed{1 = 0} \rightarrow$ Falso

Logo, pelo Teorema dos Valores extremos os máximos e mínimos estão nos extremos de $a = 1.324$ e $b = 1.325$ da $F(x)$

x	F(x)
1.324	$(1.324+1)^{1/3} = 1.32458157 \in [1.324, 1.325]$
1.325	$(1.325+1)^{1/3} = 1.32477158 \in [1.324, 1.325]$

Então provamos que $1.324 \leq F(x) \leq 1.325 \quad \forall x \in [1.324, 1.325]$

Nome: Jhonatan G. de O. Cunha

Nome: Jhonatan G de J. Cunha

3) $|F'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [1.324, 1.325]$

$$\left| \frac{1}{\underbrace{3\underbrace{(x+1)^{2/3}}_{1}}_{3}} \right| < 1 \Rightarrow$$

Podemos afirmar que o valor no denominador sempre será maior que 1. Então quando temos 1 dividido por um valor maior, sempre será menor que 1 o resultado.

Afirmamos que $|F'(x)| < 1 \; ; \; \forall x \in [1.324, 1.325]$

Então escolhemos $x_0 = 1.324 \in [1.324, 1.325]$, usando o modo iterativo $x_{k+1} = F(x_k) = (x_k + 1)^{1/3}$

$k = 0$

$x_1 = (x_0 + 1)^{1/3} = (1.324 + 1)^{1/3} = 1.32458157$

Pelo critério de parada $|x_1 - x_0| = D$

$|1.32458157 - 1.324| = 5.8157 \times 10^{-4} \leq \boxed{\varepsilon = 10^{-3}}$

Doravante,

$\varepsilon \cong x_1 = 1.32458157$

Nome: Jhonatan G de J Cunha

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

5) $\varepsilon \leq 10^{-1}$ e $X^{(0)} = (0,0,0)^t$

$$\begin{pmatrix} -20 & d4 & -d1 \\ -1 & -25\cdot(d3+1) & 1 \\ 2 & 2 & 7\cdot d6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d7 \\ -d5 \\ d3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -20 & 5 & -2 \\ -1 & -100 & 1 \\ 2 & 2 & 63 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Verificando Gauss Seidel

Verificando se é edd

$$|a_{12}| + |a_{13}| = 7 < |a_{11}| = 7 < 20$$
$$|a_{21}| + |a_{23}| = 2 < |a_{22}| = 2 < 100$$
$$|a_{31}| + |a_{32}| = 4 < |a_{33}| = 4 < 63$$

Logo a matriz é estritamente diagonalmente dominante, então o metodo de Gauss-Seidel converge.

As iterações tem a forma $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(k)} - \dfrac{a_{13}}{a_{11}} x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} \; \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{23}}{a_{22}} x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3}{a_{33}} - \dfrac{a_{31}}{a_{33}} x_1^{(k+1)} - \dfrac{a_{32}}{a_{33}} x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.25 x_2^{(k)} - 0.1 x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 0.05 - 0.01 x_1^{(k+1)} + 0.01 x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{21} - \frac{2}{63} x_1^{(k+1)} - \frac{2}{63} x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Nome: Jhonatan G de O Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de O Cunha

A partir de $X^{(0)} = (0,0,0)^t$

$k=0$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = 0.25 \cdot x_2^{(0)} - 0.1 \cdot x_3^{(0)} = 0 \\ x_2^{(1)} = 0.05 - 0.01 x_1^{(1)} + 0.01 \cdot x_3^{(0)} = 0.05 \\ x_3^{(1)} = \frac{1}{21} - \frac{2}{63} \cdot x_1^{(1)} - \frac{2}{63} \cdot x_2^{(1)} = \frac{1}{21} - \left(\frac{2}{63} \cdot 0{,}05\right) = 0.04603174b \end{cases}$$

Deste modo $X^{(1)} = (0,\ 0.05,\ 0.04603174b)$

Pelo critério de parada

$$\frac{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty}{\|X^{(1)}\|_\infty} = \frac{\|X^{(1)}\|_\infty}{\|X^{(1)}\|_\infty} = 1 > \varepsilon$$

$k=1$

$$x_1^{(2)} = 0.25 x_2^{(1)} - 0.1 x_3^{(1)} = 0.25 \cdot 0.05 - 0.1 \cdot 0.046031746 = 7.8968254 \times 10^{-3}$$

$$x_2^{(2)} = 0.05 - 0.01 x_1^{(2)} + 0.01 \cdot x_3^{(1)} = 0.05 - (0.01 \cdot 7.8968254 \times 10^{-3}) + 0.01 \cdot 0.046031746 =$$

$$= 0.05 - 7.8968254 \times 10^{-5} + 4.6031746 \times 10^{-4}$$

$$x_2^{(2)} = 0.050381349$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{21} - \frac{2}{63} x_1^{(2)} - \frac{2}{63} x_2^{(2)} = \frac{1}{21} - \left(\frac{2}{63} \cdot 7{,}8968254 \times 10^{-3}\right) - \left(\frac{2}{63} \cdot 0{,}050381349\right) =$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{21} - 2.506928698 \times 10^{-4} - 1.599407905 \times 10^{-3}$$

$$x_3^{(2)} = 0.045768946$$

Deste modo $X^{(2)} = (7.8968254 \times 10^{-3},\ 0{,}050381349,\ 0{,}045768946)$

Pelo critério de parada

$$\frac{\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty} = \frac{\|(7.8968254 \times 10^{-3}, 0.050381349, 0.045768946) - (0, 0.05, 0.046031746)\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty}$$

$$= \frac{\|(7{,}8968254 \times 10^{-3}, 3.81349 \times 10^{-4}, -2.628 \times 10^{-4})\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty}$$

$$= \frac{7.8968254 \times 10^{-3}}{0.050381349} = 0.156741047 > \varepsilon$$

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

$k = 2$

$$x_1^{(3)} = 0.25x_2^{(2)} - 0.1x_3^{(2)} = (0.25 \cdot 0.05038134\text{9}) - (0.1 \cdot 0.045768946) =$$
$$= 0.01259533\text{7} - 4.5768946 \times 10^{-3}$$
$$x_1^{(3)} = 8.0184424 \times 10^{-3}$$

$$x_2^{(3)} = 0.05 - 0.01x_1^{(3)} + 0.01 \cdot x_3^{(1)} = 0.05 - (0.01 \cdot 8{,}0184424 \times 10^{-3}) + (0.01 \cdot 0.045768946)$$
$$= 0.05 - 8{,}0184424 \times 10^{-5} + 4.5768946 \times 10^{-4}$$
$$x_2^{(3)} = 0.050377505$$

$$x_3^{(3)} = \frac{1}{21} - \frac{2}{63} \cdot x_1^{(3)} - \frac{2}{63} \cdot x_2^{(3)} = \frac{1}{21} - \left(\frac{2}{63} \cdot 8.0184424 \times 10^{-3}\right) - \left(\frac{2}{63} \cdot 0.050377505\right) =$$
$$= \frac{1}{21} - 2.5455372\text{7} \times 10^{-4} - 1.59928587\text{3} \times 10^{-3}$$
$$x_3^{(3)} = 0.045765208$$

Deste modo $X^{(3)} = (8.0184424 \times 10^{-3}, 0.050377505, 0.045765208)^t$

Pelo criterio de parada

$$\frac{\|X^{(3)} - X^{(2)}\|_\infty}{\|X^{(3)}\|_\infty} = \frac{\|(8.0184424 \times 10^{-3}, 0.050377505, 0.045765208) - (7.8968254 \times 10^{-3}, 0.050381349, 0.04576\ldots\|}{\|X^{(3)}\|_\infty}$$

$$= \frac{\|(1.21617 \times 10^{-4}, -3.844 \times 10^{-6}, -3.738 \times 10^{-6})\|_\infty}{\|X^{(3)}\|_\infty}$$

$$= \frac{1.216 \times 10^{-4}}{0.050377505} = 2.41377575\text{2} \times 10^{-3} < \xi$$

Portanto a solução do sistema $AX = B$ é

$$X \cong X^{(3)} = (8.0184424 \times 10^{-3}, 0.050377505, 0.045765208)^t.$$

Nome: Jhonatan G de O. Cunha

Nome: Jhonatan G de O Cunha

6) $\xi \leq 10^{-4}$

Calcular aproximação de $\frac{1}{a}$ com Newton - Raphson

$a = d_2 d_4 d_6$ $\qquad \frac{1}{a} = 6{,}289308176 \times 10^{-3}$

$a = 159$

Considere a $f(x) = \frac{1}{x} - a$

$f(x) = \frac{1}{x} - 159$

Escolhendo a e b

$a = 0.006$ $\Rightarrow$ $f(a) = 7.66666667$ $\Rightarrow$ Logo $f(a) \cdot f(b) < 0$

$b = 0.007$ $\quad f(b) = -16.14285714$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Agora devemos saber quem é X_0

$f(a) \cdot f''(a) > 0$, então $X_0 = a$, senão, $X_0 = b$ $\Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$f(0.006) \cdot f''(0.006) = 70.937.654{,}32 > 0$

Logo $X_0 = a = 0{,}006$

Usando a formula de recorrencia $\rightarrow X_{k+1} = X_k - \frac{f(X_k)}{f'(X_k)}$

• $k=0$

$x_1 = X_0 - \frac{f(X_0)}{f'(X_0)} = 0.006 - \frac{f(0.006)}{f'(0.006)}$

$x_1 = 0.006 - \frac{\frac{23}{3}}{-\frac{250000}{9}} = 6.276 \times 10^{-3}$

Pelo criterio de parada

$|X_1 - X_0| = |6.276 \times 10^{-3} - 0.006| = 2{,}76 \times 10^{-4} > \xi$

Nome: Jhonatan G de O Cunha

Nome: Jhonatan G de O Cunha

Logo devemos calcular x_2

$$x_2 = x_1 - \left(\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}\right) = 6,276 \times 10^{-3} - \left(\frac{f(6,276 \times 10^{-3})}{f'(6,276 \times 10^{-3})}\right)$$

$$x_2 = 6,276 \times 10^{-3} - \left(\frac{\frac{529}{1569}}{-25\,388,32974}\right)$$

$$x_2 = 6,276 \times 10^{-3} + 1,328\,00016 \times 10^{-5}$$

$$x_2 = 6,28928\,0016 \times 10^{-3}$$

Pelo critério de parada

$$|x_2 - x_1| = 1,3280016 \times 10^{-5} < \xi$$

Doravante

$$\xi \cong x_2 = 6,289280016 \times 10^{-3}$$

Nome: Jhonatan G de O Cunha