Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Prova 3

0	0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7
0	0	2	1	3	5	5	9	0

1) a)

$$\begin{cases} y'' = (d_5+2)y' + (d_3+2)y + (d_3+1)\cos x \\ y(0) = -d_1 - 0{,}3 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -d_1 - 0{,}1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'' = 7y' + 5y + 4\cos x \\ y(0) = -2{,}3 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2{,}1 \end{cases} \qquad x_0 = a = 0 \qquad x_m = b = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha = -2{,}3 \qquad \beta = -2{,}1 \qquad h = \frac{\pi}{2m}$$

Como $x_0 = 0$ e $x_i = x_0 + ih$, então $x_i = ih$, onde $i = 1, 2, \dots, m-1$

Como y_0 e y_m são conhecidos, as incógnitas calculadas serão $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$

Discretizando e.d.o

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = 7\left[\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right] + 5y_i + 4\cos x_i$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 3{,}5\frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{h} - 5y_i = 4\cos x_i$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h(3{,}5y_{i+1} - 3{,}5y_{i-1}) - 5y_ih^2}{h^2} = 4\cos ih$$

Passei multiplicando

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h(3{,}5y_{i+1} - 3{,}5y_{i-1}) - 5y_ih^2 = 4\cos(ih)\cdot h^2$$

$$(1 + 3{,}5h)y_{i-1} + (-2 - 5h^2)y_i + (1 - 3{,}5h)y_{i+1} = 4\cos(ih)\cdot h^2$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

$i = 1$

$$(1+3,5h)(-2,3) + (-2-5h^2)y_1 + (1-3,5h)y_2 = 4\cos(ih)\,h^2$$

$$(-2-5h^2)y_1 + (1-3,5h)y_2 = 4\cos(ih)\cdot h^2 + 2,3 + (8,05h)$$

$$(-2-5h^2)y_1 + (1-3,5h)y_2 = 4\cos(ih)\cdot h^2 + 2,3 + 8,05h$$

para $i = m-1$

$$(1+3,5h)\cdot y_{m-2} + (-2-5h^2)y_{m-1} + (1-3,5h)\cdot(-2,1) = 4\cos(ih)\,h^2$$

$$(1+3,5h)y_{m-2} + (-2-5h^2)y_{m-1} = 4\cos(ih)\cdot h^2 + 2,1 - 7,35h$$

Logo

$$\begin{cases} (-2-5h^2)y_1 + (1-3,5h)y_2 = 4\cos(ih)h^2 + 2,3 + 8,05h, & i = 1 \\ (1+3,5h)y_{i-1} + (-2-5h^2)y_i + (1-3,5h)y_{i+1} = 4\cos(ih)h^2, & 2 \leq i \leq m-2 \\ (1+3,5h)y_{m-2} + (-2-5h^2)y_{m-1} = 4\cos(ih)\cdot h^2 + 2,1 - 7,35h, & i = m-1 \end{cases}$$

b) $m = 4$ Considerando $m = 4$, temos $h = \frac{\pi}{2m} = 0,392699081 \rightarrow B$

Temos o seguinte sistema

$$\begin{bmatrix} (-2-5h^2) & (1-3,5h) & 0 \\ (1+3,5h) & (-2-5h^2) & (1-3,5h) \\ 0 & (1+3,5h) & (-2-5h^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\cos(h)h^2 + 2,3 + 8,05h \\ 4\cos(2h)\,h^2 \\ 4\cos(3h)h^2 + 2,1 - 7,35h \end{bmatrix}$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome = Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

$$\begin{bmatrix} -2{,}771062844 & -0{,}374446785 & 0 \\ 2{,}374446786 & -2{,}771062844 & -0{,}37444678 \\ 0 & 2{,}374446786 & -2{,}771062844 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6{,}031122951 \\ 0{,}936179012 \\ -0{,}55027987 \end{bmatrix}$$

Verificando Gauss-Seidel, se é edd

$|a_{12}| + |a_{13}| = 2{,}374446786 < |a_{11}|$

$|a_{21}| + |a_{23}| = 2{,}748893571 < |a_{22}|$

$|a_{31}| + |a_{32}| = 0{,}37444678 < |a_{33}|$

Logo a matriz é estritamente diagonalmente dependente, então o método de Gauss-Seidel converge.

As iterações tem forma ⇒

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{b_1}{a_{11}} - \dfrac{a_{12} x_2^{(k)}}{a_{11}} - \dfrac{a_{13} x_3^{(k)}}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{b_2}{a_{22}} - \dfrac{a_{21} x_1^{(k+1)}}{a_{22}} - \dfrac{a_{23} x_3^{(k)}}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{b_3}{a_{33}} - \dfrac{a_{31} x_1^{(k+1)}}{a_{33}} - \dfrac{a_{32} x_2^{(k+1)}}{a_{33}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -2{,}176465598 - 0{,}135127496\, x_2^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = -0{,}157404951 + 0{,}856872225\, x_1^{(k+1)} - 0{,}135127494\, x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 0{,}198580797 + 0{,}856872225\, x_2^{(k+1)} \end{cases}$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

■ $k=0$ A partir de $X^{(0)}=(0,0,0)^t$

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = -2{,}176465598 - 0{,}135127496\, x_2^{(0)} = -2{,}176465598 \\ x_2^{(1)} = -0{,}157404951 + 0{,}856872225\, x_1^{(1)} - 0{,}135127494\, x_3^{(0)} = -2{,}022357871 \\ x_3^{(1)} = 0{,}198580797 + 0{,}856872225\, x_2^{(1)} = -1{,}534321491 \end{cases}$$

Deste modo $X^{(1)} = (-2{,}176465598, -2{,}022357871, -1{,}534321491)^t$

Pelo critério de parada

$$\frac{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty}{X^{(1)}} = 1 > \xi$$

■ $k=1$

$$\begin{cases} x_1^{(2)} = -2{,}176465598 - 0{,}135127496\, x_2^{(1)} = -1{,}903189443 \\ x_2^{(2)} = -0{,}157404951 + 0{,}856872225\, x_1^{(2)} - 0{,}135127494\, x_3^{(1)} = -1{,}580866106 \\ x_3^{(2)} = 0{,}198580797 + 0{,}856872225\, x_2^{(2)} = -1{,}15601946 \end{cases}$$

Deste modo $X^{(2)} = (-1{,}903189443, -1{,}580866105, -1.15601946)^t$

Pelo critério da parada

$$\frac{\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty} = \frac{\|(0{,}273276155, 0{,}441491765, 0.378302031)\|_\infty}{\|X^{(2)}\|_\infty} = 0{,}23197468 > \xi$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

$k = 2$

$$x_1^{(3)} = -2,176465593 - 0,135127496\, x_2^{(k)} = -1,96284712$$

$$x_2^{(3)} = -0,157404951 + 0,856872225\, x_1^{(3)} - 0,135127494\, x_3^{(2)} = -1,683104117$$

$$x_3^{(3)} = 0,199580797 + 0,856872225\, x_2^{(3)} = -1,243624373$$

Deste modo $X^{(3)} = (-1.96284712, -1.683104117, -1.243624373)^t$

Pelo critério de parada

$$\frac{\|X^{(3)} - X^{(2)}\|_\infty}{\|X^{(3)}\|_\infty} = \frac{\|(-0,059657677, -0,102233012, -0,087604913)\|_\infty}{\|X^{(3)}\|_\infty}$$

$$= \frac{0,102233012}{1,96284712} = \boxed{0,052086589 \leq \varepsilon}$$

Portanto a solução do sistema é

$$X \approx X^{(3)} = (-1,96284712; -1.683104117; -1.243624373)^t$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

2)

$$\int_{d_6+2}^{d_6+4} e^{-x^2}\,dx \Rightarrow \int_{11}^{13} e^{-x^2}\,dx \quad , \; m = 6$$

Calculamos o h,

$$h = \frac{x_m - x_0}{m} = \frac{13-11}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Desta forma, escrevemos a tabela da $f(x) = e^{-x^2}$

x	11 (x_0)	$\frac{34}{3}$ (x_1)	$\frac{35}{3}$ (x_2)	12 (x_3)
$f(x)$	$2{,}820770038 \times 10^{-53}$	$1{,}649250205 \times 10^{-56}$	$7{,}721390532 \times 10^{-60}$	$2{,}894640312 \times 10^{-63}$

$\Rightarrow$

x	$\frac{37}{3}$ (x_4)	$\frac{38}{3}$ (x_5)	13 (x_6)
$f(x)$	$8{,}689280326 \times 10^{-67}$	$2{,}088637762 \times 10^{-70}$	$4{,}020060216 \times 10^{-74}$

Logo pela forma 3/8 de Simpson generalizada para $m = 6$, temos:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = \frac{3}{8} \cdot h \left[f(x_0) + 3\,(f(x_1) + f(x_2) + f(x_4) + f(x_5)) + 2f(x_3) + f(x_6) \right]$$

$$\int_{11}^{13} e^{-x^2}\,dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[2{,}820770038 \times 10^{-53} + 3 \cdot (1{,}649250205 \times 10^{-56} + 7{,}721390532 \times 10^{-60} + 8{,}689280326 \times 10^{-67} + 2{,}088637762 \times 10^{-70}) + (2 \cdot 2{,}894640312 \times 10^{-63}) + 4{,}0200602 \times 10^{-74} \right]$$

$$\int_{11}^{13} e^{-x^2}\,dx = 0{,}125 \cdot \left[2{,}820770039 \times 10^{-53} + 3 \cdot (1{,}650022344 \times 10^{-56}) \right]$$

$$\int_{11}^{13} e^{-x^2} \approx \boxed{3{,}532150395 \times 10^{-54}}$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Digitalizado com CamScanner

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Castro

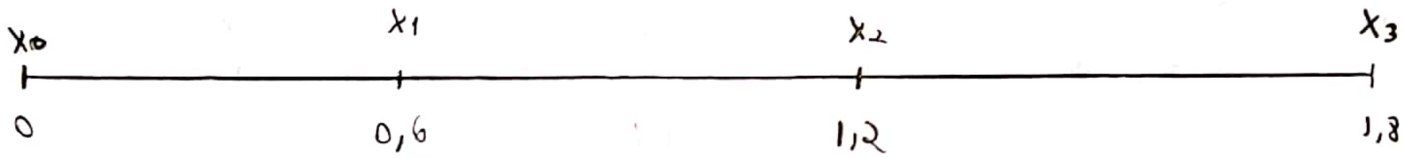
3) $h = 0,6$ e $x \in [0; 1,8]$

$$\begin{cases} y' = f(x,y) = (d_4+2)\,x^3 + \text{sen}((d_4+1)\cdot y) \\ y(0) = d_3+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = 7x^3 + \text{sen}(6y) \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Calculamos n já que sabemos que $h = 0,6$

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1,8-0}{0,6} = 3$$

Logo o intervalo $[0; 1,8]$ é discretizado por



Logo,

- Cálculo de y_1

Para $n = 0$, temos que $y(x_0) = y(0) = 5$, logo, $x_0 = 0$ e $y_0 = 5$, logo:

$$y_1 = y_0 + h\,f(x_0, y_0)$$

$$y_1 = 5 + 0,6 \cdot [7 \cdot 0^3 + \text{sen}(6 \cdot 5)]$$

$$y_1 = 4,407181026$$

- Cálculo de y_2

Para $n = 1$, temos que $x_1 = 0,6$ e $y_1 = 4,407181026$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1)$$

$$y_2 = 4,407181026 + 0.6 \cdot [7 \cdot (0,6)^3 + \text{sen}(6 \cdot 4,407181026)]$$

$$y_2 = 5,394145326$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Castro

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

- Calculo de y_3

Para $n=2$, temos que $x_2 = 1,2$ e $y_2 = 5,894145326$

$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2)$

$y_3 = 5,894145326 + 0,6 \cdot [7 \cdot (1,2)^3 + \operatorname{sen}(6 \cdot 5,894145326)]$

$y_3 = 12,7182697$

Logo

$x_0 = 0$ $y_0 = 5$

$x_1 = 0,6$ $y_1 = 4,0718.1026$

$x_2 = 1,2$ $y_2 = 5,894145326$

$x_3 = 1,8$ $y_3 = 12,7182697$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

4)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) = \frac{1}{10000} \cdot y \cdot (10000 - y) \\ y(0) = \cancel{}\ d7 + 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{10000} \cdot y \cdot (10000 - y) \\ y(0) = 2 \end{cases} \qquad m = 3 \qquad x \in [0, 15]$$

Note que $h = \frac{b-a}{m} = \frac{15-0}{3} = 5$

Logo, o intervalo $[0,15]$ é discretizado por

• Calculo de y_1, sabemos que $y_0 = 2$ e $x_0 = 0$

$$k_1 = f(x_0, y_0) = \frac{1}{10000} \cdot 2 \cdot (10000 - 2) = 1{,}9996$$

$$k_2 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} \cdot k_1) = \frac{1}{10000} \cdot 6.999 \cdot (10000 - 6.999) = 6{,}9941014$$

$$k_3 = f(x_0 + \tfrac{h}{2}, y_0 + \tfrac{h}{2} k_2) = \frac{1}{10000} \cdot 19{,}4852535 \cdot (10000 - 19{,}4852535) = 19{,}44728599$$

$$k_4 = f(x_0 + h, y_0 + h \cdot k_3) = \frac{1}{10000} \cdot 99{,}23642995 \cdot (10000 - 99{,}23642995) = 98{,}25164305$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_1 + 2k_2 + k_4)$$

$$= 129{,}6116815$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

• Calculando y_2, sabemos que $y_1 = 129,6116815$ e $x_1 = 5$

$k_1 = f(x_1, y_1) = \frac{1}{10000} \cdot 129,6116815 \cdot (10000 - 129,6116815) = 127,9317627$

$k_2 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot k_1) = \frac{1}{10000} \cdot 449,4410883 \cdot (10000 - 449,4410883) = 429,2413592$

$k_3 = f(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{h}{2} \cdot k_2) = \frac{1}{10000} \cdot 1202,71508 \cdot (10000 - 1202,71508) = 1058,062723$

$k_4 = f(x_1 + h, y_1 + h \cdot k_3) = \frac{1}{10000} \cdot 5419,925298 \cdot (10000 - 5419,925298) = 2482,366274$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4783,700182$

• Calculamos y_3, sabemos que $y_2 = 4783,700182$ e $x_2 = 10$

$k_1 = f(x_2, y_2) = \frac{1}{10000} \cdot 4783,700182 (10000 - 4783,700182) = 2495,321439$

$k_2 = f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2} \cdot k_1) = \frac{1}{10000} \cdot 11022,00378 \cdot (10000 - 11022,00378) = -1126,452952$

$k_3 = f(x_2 + \frac{h}{2}, y_2 + \frac{h}{2} k_2) = \frac{1}{10000} \cdot 1967,567803 \cdot (10000 - 1967,567803) = 1580,435497$

$k_4 = f(x_2 + h, y_2 + h \cdot k_3) = \frac{1}{10000} \cdot 12685,87767 (10000 - 12685,87767) = -3407,271552$

$y_3 = y_2 + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

$y_3 = 4780,37933$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Sabendo que nossa fake news é conhecida inicialmente por somente 2 pessoas, as mesma, sem checar as fontes, começam a propagar tal inverdade. Ao passar 5 dias, percebemos que temos um total aproximado de 129,6116815 (como não existe meia pessoa, iremos arredondar para cima, ou para baixo, dependendo de nosso objetivo) pessoas, ou seja, muitas pessoas não pesquisaram se a informação era verdadeira ou não.

No décimo dia temos o total aproximado de 4733,700182 pessoas que conhecem a fake news, analisando os dados obtidos até o momento, notamos que houve um crescimento bem alto da propagação da informação errada.

Em nosso último dia de análise, temos um novo total aproximado de 4730,37933 pessoas que sabem da fake news, temos algo de especial nesse dia, pois a quantidade de pessoas decaiu. Tal valor se deve ao fato de que algumas pessoas notaram que tal informação era falsa, deixando de acreditar e repassar a mesma.

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha

5) $n=3$

$$\int_{d_3+1}^{d_3+2} x^2 \, tg\, x \, dx \Rightarrow \int_4^5 x^2 \, tg\, x \, dx \qquad \begin{matrix} a=4 \\ b=5 \end{matrix} \qquad f(x)=x^2 \, tg\, x$$

Como no intervalo é arbitrario $[a,b]$, realizamos mudança de variavel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\frac{b-a}{2}\right) \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+a+b}{2}\right) dt$$

Logo:

$$\int_4^5 x^2 \, tg\, x \, dx = 0,5 \int_{-1}^{1} f\left(\frac{t+9}{2}\right) dt$$

$$\int_4^5 x^2 \, tg\, x \, dx = 0,5 \cdot \int_{-1}^{1} \left(\frac{t+9}{2}\right)^2 \cdot tg\left(\frac{t+9}{2}\right) dt$$

$$= 0,5 \cdot \left[c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)\right]$$

$$= 0,5 \cdot \left[0,5555555556 \cdot \left(\frac{0,7745966692+9}{2}\right)^2 \cdot tg\left(\frac{0,7745966692+9}{2}\right) + \ldots\right]$$

$$= 0,5 \left[-75,09161395 + 0,8888888889 \cdot \left(\frac{0+9}{2}\right)^2 \cdot tg\left(\frac{0+9}{2}\right) + \ldots\right]$$

$$= 0,5 \left[-75,09161395 + 83,47197698 + 0,5555555556 \cdot \left(\frac{-0,7745966692+9}{2}\right)^2 \cdot tg\left(\frac{-0,7745966692+9}{2}\right)\right]$$

$$= 0,5 \cdot \left[-75,09161395 + 83,47197698 + 13,74454558\right]$$

$$\int_4^5 x^2 \, tg\, x \, dx \approx 11,06245344$$

Nome: Jhonatan Guilherme de Oliveira Cunha