

# Parcial 2: Señales y Sistemas 2025-II

Profesor: Andrés Marino Álvarez Meza, Ph.D.

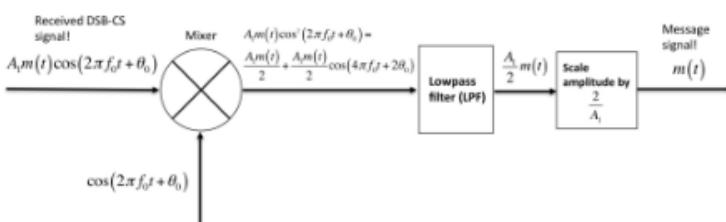
Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica, y Computación  
Universidad Nacional de Colombia - sede Manizales

## Instrucciones

- Para recibir crédito total por sus respuestas, estas deben estar claramente justificadas e ilustrar sus procedimientos y razonamientos (paso a paso) de forma concreta, clara y completa. El parcial es individual y deberá enviarse vía link de GitHub hasta el próximo 3 de diciembre a las 9:00 am.
- Los códigos deben estar debidamente comentados y discutidos/explicados en celdas de texto (markdown). Códigos no comentados ni discutidos no serán contabilizados en la nota.
- Las simulaciones de cada uno de los puntos deberán ser implementadas utilizando la herramienta Streamlit: <https://streamlit.io/>, mediante paneles interactivos tipo dashboard.

## Preguntas

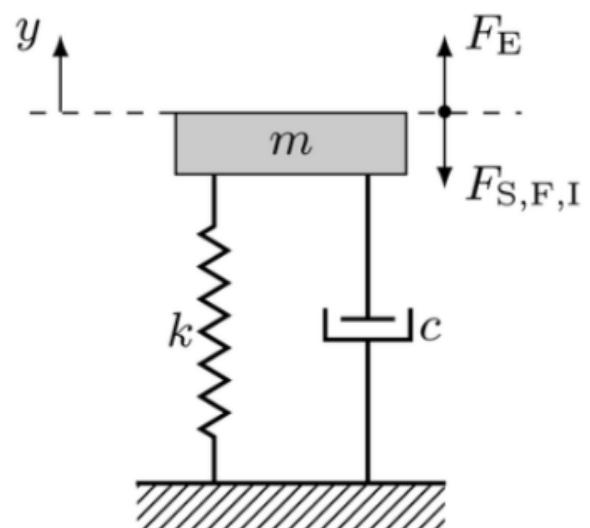
1. Sea el demodulador en amplitud presentado en la siguiente Figura:



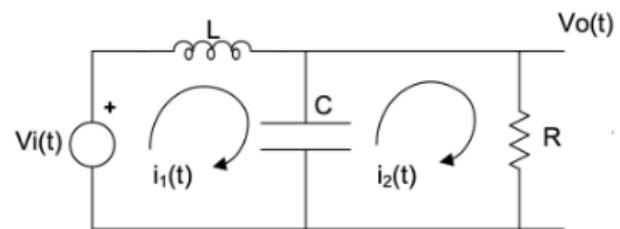
Asumiendo  $\theta_0 = 0$ , determine el espectro de Fourier (teórico) en cada una de las etapas del sistema. Luego, con base en la simulación de modulación en amplitud del Taller 2 y utilizando cinco segundos de una canción de Youtube como mensaje, grafique cada una de las etapas principales del proceso de modulación y demodulación en el tiempo y la frecuencia (reproduzca el segmento de la canción en cada etapa).

Nota: Para la etapa de filtrado pasa bajas, realice su implementación a partir de la transformada rápida de Fourier.

2. Encuentre la función de transferencia que caracteriza el sistema masa, resorte, amortiguador, presentado en la siguiente Figura (asuma condiciones iniciales cero):



Posteriormente, encuentre el sistema equivalente del modelo masa, resorte, amortiguador, a partir del siguiente circuito eléctrico:



Finalmente, proponga unos valores de  $m$ ,  $k$  y  $c$  y sus equivalentes  $R$ ,  $L$  y  $C$ , para simular un sistema subamortiguado, sobreamortiguado y de amortiguamiento crítico (determine el factor de amortiguamiento, la frecuencia natural amortiguada, la frecuencia natural no amortiguada, el tiempo pico, tiempo de levantamiento y el tiempo de establecimiento en cada caso). Para cada caso, grafique el diagrama de polos y ceros, el diagrama de Bode, la respuesta impulsiva, respuesta escalón y respuesta rampa. Repita el proceso para modo lazo cerrado.

Solución  
Punto #1

**Modulación:** Se puede hallar la transformada de Fourier de la señal modulada de la siguiente forma

$$y(w) = F\{y(t)\} = F\left\{ \left( 1 + \frac{m(t)}{A_c} \right) c(t) \right\} = F\{c(t)\} + \frac{1}{A_c} F\{m(t)c(t)\}$$

Usando la tabla de Fourier

$$C(w) = F\{c(t)\} = F\{A_c \cos(2\pi f_c t)\} = A_c F\left( \frac{e^{j2\pi f_c t}}{2} + \frac{e^{-j2\pi f_c t}}{2} \right)$$

$$F\{e^{jw_0 t}\} = 2\pi \delta(w - w_0)$$

Entonces:

$$C(w) = A_c \pi (\delta(w - 2\pi f_c) + \delta(w + 2\pi f_c))$$

$$\Rightarrow \frac{1}{A_c} F\{m(t)c(t)\} = \frac{1}{A_c} F\{m(t)A_c \cos(2\pi f_c t)\} = F\{m(t) \cos(2\pi f_c t)\}$$

$$= F\{m(t)e^{j2\pi f_c t} + m(t)e^{-j2\pi f_c t}\}$$

Teniendo en cuenta:  $F\{x(t)e^{\pm jw_0 t}\} = X(w \mp w_0)$

$$\text{Entonces: } \frac{1}{A_c} F\{m(t)c(t)\} = \frac{1}{2} (M(w - 2\pi f_c) + M(w + 2\pi f_c))$$

Entonces, el espectro de la señal modulada es:

$$y(w) = A_c \pi (\delta(w - 2\pi f_c) + \delta(w + 2\pi f_c)) + \frac{1}{2} (M(w - 2\pi f_c) + M(w + 2\pi f_c))$$

**Demodulación:**

Teniendo en cuenta que la señal modulada se expresa como  $y(t) = A_m(t) \cos(2\pi f_c t)$ , primero se debe multiplicar la  $y(t)$  con la portadora

$$y_d(t) = y(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

Utilizando la identidad

$$y_d(t) = A_m(t) \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$$

$$\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2} [\cos(A-B) + \cos(A+B)]$$

$$y_d(t) = \frac{1}{2} A_m(t) + \frac{1}{2} A_m(t) \cos(4\pi f_c t)$$

La salida del filtro pasa bajas se obtiene mediante la convolución

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y_d(\tau) h(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\tau) \cos(4\pi f_c \tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

dado la simetría de  $\cos(4\pi f_c \tau)$ , la expresión se reduce a

$$S(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\tau) \cdot h(t-\tau) d\tau$$

Suponiendo que  $h(t)$  es una función adecuada y que el término relacionado con la componente de frecuencia doble  $\cos(4\pi f_c \tau)$  se anula. También suponiendo que  $A_m(t)$  tiene una transformada de Fourier  $A_m(w)$

• Entonces  $S(w) = \frac{1}{2} Am(w) \cdot H(w)$ . Donde  $H(w)$  es la función de transferencia del filtro

• Aplicando transformada inversa a  $S(w)$ , es decir,  $F^{-1}\left\{\frac{1}{2} Am(w) H(w)\right\}$

Obtenemos  $\frac{1}{2} Am(t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} Am(t) \cdot \frac{2}{A} = \frac{1}{A} Am(t) = m(t)$$

para obtener  $m(t)$  se multiplica el resultado obtenido con el divisor bajos con una constante  $\frac{2}{A}$  de esta forma

## Punto #2

### ① Modelo mecánico Masa-resorte-Amortiguador

→ Ecuación diferencial

la masa  $m$  está siendo sometida a:

- Fuerza externa  $f(t)$  hacia arriba
- resorte de constante  $K$
- amortiguador de coeficiente  $C$

Si tomamos  $y(t)$  como desplazamiento de la masa ( $\uparrow$ ). Con la Segunda Ley de Newton

$$m \ddot{y}(t) + C \dot{y}(t) + Ky(t) = f(t)$$

Asumimos las condiciones iniciales cero, aplicamos la transformada de Laplace  $y(s)$ ,  $F_E(s)$

$$m s^2 y(s) + C s y(s) + K y(s) = F_E(s)$$

$$\Rightarrow y(s) (ms^2 + Cst + K) = F_E(s)$$

→ Función de transferencia en buzo abierto

Definimos la función de transferencia como:

$$G_{\alpha} = \frac{y(s)}{F_E(s)} = \frac{1}{ms^2 + Cst + K}$$

Forma canónica de segundo orden

$$ms^2 + Cst + K = m(s^2 + 2C/m s + \omega_n^2)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \omega_n = \frac{K}{m}$$

$$\zeta = \frac{C}{2m\omega_n} \quad C = 2\zeta m \omega_n$$

$$\text{Entonces } G_{\alpha}(s) = \frac{1/m}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

(2) Buzo cerrado

cerramos buzo con ganancia unitaria

Tenemos:

$$G_{cl}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$
$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + 2\omega_n^2}$$

### (3) Parámetros del sistema de segundo orden

para el sistema  $\omega_n$ ,  $\zeta$  en lazo cerrado

→ Subamortiguado ( $0 < \zeta < 1$ )

$$T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \rightarrow \text{tiempo de establecimiento (2%)} \quad (2%)$$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \text{Tiempo de pico}$$

$$M_p = 100 e^{\zeta\pi/\sqrt{1-\zeta^2}} \%, \Rightarrow \text{Sobreimpulso Máximo}$$

El tiempo de establecimiento  $T_s$  (10-40%) se obtiene numéricamente de la respuesta al escalón

→ críticamente amortiguado ( $\zeta=1$ ) y sobreamortiguado ( $\zeta>1$ )

No hay sobreimpulso ( $M_p=0$ ) ni pico definido ( $T_p$ )

$T_s$  y  $T_r$  se calculan numéricamente de la respuesta al escalón (criterio 2% y 10-40%)

### 4) Analogía eléctrica del sistema

Tenemos la función de transferencia eléctrica

$$G_{elec}(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1/L_C}{s^2 + R_L s + 1/C}$$

$$= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\text{donde: } \omega_n = \sqrt{\frac{1}{LC}}, \quad \zeta = \frac{R_L}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$L = \frac{1}{\omega_n^2 C}, \quad R_L = \frac{2\zeta}{\omega_n C}$$

