

Preguntas

1. La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 dt.$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = Ae^{-jnw_0t}$$

$$x_2(t) = Be^{jm\omega_0 t}$$

con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. Compruebe sus resultados con Python.

$A, B \in \mathbb{R}^+$ (pertenece los numeros reales)

$n, m \in \mathbb{Z}$ (enteros)

$$\omega_0 = 2\pi/T_0$$

To periods fundamental

$$x_1(t) - x_2(t) = A e^{-j\omega_{n1}t} - B e^{j\omega_{n2}t}$$

$$|X_1(t) - X_2(t)|^2 = |Ae^{-jn\omega t} - Be^{jn\omega t}|^2$$

$$Z = Ae^{-j\omega_0 t} - Be^{j\omega_0 t}$$

$$Z^* = Ae^{j\omega t} - Be^{-j\omega t}$$

$$|X_1 - X_2|^2 = (A e^{-jn\omega t} - B e^{jm\omega t})(A e^{jn\omega t} - B e^{-jm\omega t})$$

$$= A^2 - ABe^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega_0 t} - ABe^{j\omega_0 t} e^{j\omega_0 t} + B^2$$

$$= A^2 + B^2 - AB \left(e^{j(n+m)\omega_0 t} + e^{-j(n+m)\omega_0 t} \right)$$

$$e^{-j(n+m)w_0 t} - e^{-jn w_0 t} - e^{jm w_0 t}$$

$$d^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (p^L + B^L - 2AB\cos((n+m)\omega_0 t))^2 dt$$

$$d^2 = A^2 + B^2 - \frac{2AB}{T} \int_0^T \cos(ntm) w_0(t) dt$$

$$\beta x_1 - x_2 = \frac{1}{T_0} \left(\int_0^{T_0} (A^2 + B^2) dt - 2AB \int_0^{T_0} \cos((\kappa)t) w(t) \right)$$

$$S_1 \times 0 \quad (n+m=0)$$

$$\cos(0) = 1 - \frac{1}{T} \int_0^T dt = \frac{1}{T} = 1$$

$$\text{Si } K \neq 0 \int_0^T \cos\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) Kt\right) dt = \frac{T}{2\pi K} [\sin(2\pi K) - \sin(0)] = \frac{T}{2\pi K} \cdot 0 = 0$$

$$S_1 \quad n+m=0 \quad d^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot 1 = (A-B)^2$$

$$\text{Si } n+m \neq 0 \quad d^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot 0 = A^2 + B^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A-B \\ \sqrt{A^2 + B^2} \end{array} \right.$$

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de 5kHz y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3 \cos(1000\pi t) + 5 \sin(3000\pi t) + 10 \cos(11000\pi t).$$

Realizar la simulación del proceso de discretización (incluyendo al menos tres períodos de $x(t)$). En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

$$\omega_1 = 1000\pi$$

$$\omega_2 = 3000\pi$$

$$\omega_3 = 11000\pi$$

$$F_1 = 1000\pi/2\pi = 500\text{Hz}$$

$$F_2 = 3000\pi/2\pi = 1500\text{Hz}$$

$$F_3 = 11000\pi/2\pi = 5500\text{Hz}$$

$$\text{Frecuencia de muestreo} \Rightarrow f_s = 5\text{kHz} = 5000\text{Hz}$$

→ Segun Nyquist $f_s > 2F_{\text{max}}$ → Frecuencia máxima de la señal

$$2F_{\text{max}} = 1000\text{Hz} > f_s = 5000\text{Hz}$$

No cumple Nyquist

Despues del muestreo

$$f_c = |f - k f_s|$$

$$f_c = |5500\text{Hz} - 5000\text{Hz}| = 500\text{Hz}$$

$$x[n] = 3 \cos\left(2\pi \cdot \frac{500}{5000} n\right) + 5 \sin\left(2\pi \cdot \frac{1500}{5000} n\right) + 10 \cos\left(2\pi \cdot \frac{5000}{5000} n\right)$$

$$= 3 \cos(0.2\pi)n + 5 \sin(0.6\pi n) + 10 \cos(2,2\pi)$$

$$x[n] = 3 \cos(0.2\pi n) + 5 \sin(0.6\pi n)$$

$$10 \cos(2,2\pi)$$

$$\text{Amplitud} = 13 + 5 = 18$$

$$\text{para } 4 \text{ bits } 2^4 = 16 \text{ niveles}$$

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(t_f - t_i)n^2 w_o^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-j n w_o t} dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?

Expansión de la señal $x(t)$ en serie exponencial de Fourier

$$x(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}$$

- primera derivada de $x(t)$

$$x'(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_n C_n e^{jn\omega_0 t} \right) = \sum_n C_n jn\omega_0 e^{jn\omega_0 t}$$

- segunda derivada

$$x''(t) = \frac{d}{dt} \left(\sum_n C_n jn\omega_0 e^{jn\omega_0 t} \right) = \sum_n C_n (jn\omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t}$$

Calculamos C_n multiplicando $x''(t)$ por $e^{-jn\omega_0 t}$ y lo integramos en el intervalo $[t_i, t_f]$

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \int_{t_i}^{t_f} \sum_n C_n (jn\omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Por ortogonalidad de los exponentiales complejos podemos cancelar los exponentes de integración

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = C_n (jn\omega_0)^2 (t_f - t_i)$$

Despejamos C_n :

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)(j\omega_0)^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Simplificamos con $j^2 = -1$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)\omega_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Hacemos relación con la trigonométrica. Tenemos la expresión general de $x(t)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$

- primera derivada:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n n\omega_0 \sin(n\omega_0 t) + b_n n\omega_0 \cos(n\omega_0 t)]$$

- segunda derivada

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n (n\omega_0)^2 \cos(n\omega_0 t) - b_n (n\omega_0)^2 \sin(n\omega_0 t)]$$

Ahora sacamos la ortogonalidad para los coeficientes a_n y b_n

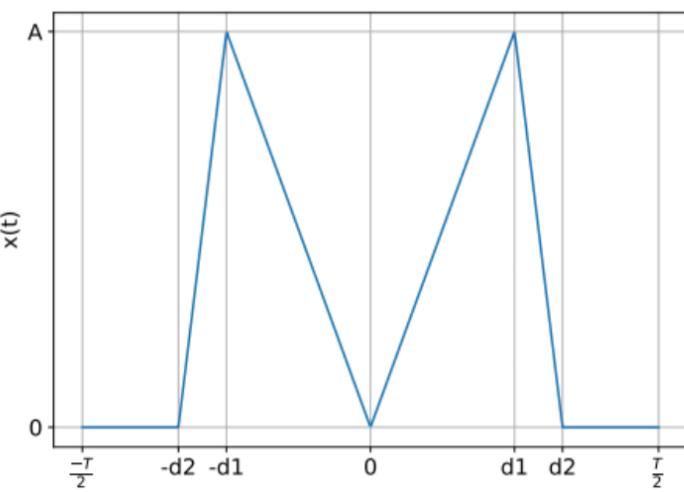
- Para a_n

$$a_n = \frac{-2}{T n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \cos(n w_0 t) dt$$

= para b_n

$$b_n = \frac{-2}{T n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) \sin(n w_0 t) dt$$

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1. Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.



$x(t)$ es par y vale 0 fuera de $[-T, T]$

Como $x(t)$ es par

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j n w_0 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n w_0 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^a x(t) \cos(kt) dt$$

separa en las dos piezas lineales

$$C_n = \frac{2}{T} [I_1 + I_2], \quad I_1 = \int_0^a \frac{A}{a} t \cos(kt) dt, \quad I_2 = \int_a^{2a} \frac{A}{a} (2a-t) \cos(kt) dt$$

Integración por partes

$$\int t \cos(kt) dt \quad u=t \quad dv=\cos(kt) dt$$

$$\int t \cos(kt) dt = \frac{1}{k} \sin(kt) + \frac{1}{k^2} \cos(kt) + C$$

$$I_1 = \frac{A}{a} \left[\frac{a}{k} \sin(ka) + \frac{1}{k^2} (\cos(ka) - 1) \right]$$

$$\text{para } \int (2\alpha - t) \cos(kt) dt \quad u = 2\alpha - t, \quad dv = \cos(kt) dt$$

$$\int (2\alpha - t) \cos(kt) dt = 2\alpha - t \sin(kt) - \frac{1}{k} \cos(kt) + C$$

Evaluando de a a 2π y multiplicacion por A/u :

$$I_2 = \frac{A}{u} \left[-\frac{u}{k} \sin(ku) + \frac{1}{k^2} (\cos(ku) - \cos(2ku)) \right]$$

Sumamos I_1 es I_2

$$I_1 + I_2 = \frac{A}{u} \cdot \frac{1}{k^2} (2\cos(ku) - \cos(2ku) - 1)$$

$\frac{u}{k} \sin\left(\frac{k}{u}\right)$ se cancelan exactamente

Ch para $n \neq 0$

$$C_n = \frac{2}{T} (I_1 + I_2) = \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{u} \cdot \frac{1}{k^2} (2\cos(ku) - \cos(2ku) - 1),$$

Sustituyimos $k = nw_0$ y $k^2 = (nw_0)^2 = (n \cdot 2\pi/T)^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}$, entonces

$$\frac{2}{T} \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{2}{T} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 n^2} = \frac{\pi^2}{2\pi^2 n^2}$$

Quedando así:

$$C_n = \frac{AT}{2\pi^2 n^2} (2\cos(nw_0\alpha) - \cos(2nw_0\alpha) - 1), \quad n \neq 0$$

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_{-\pi/L}^{\pi/L} x(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{2\pi} x(t) dt$$

Integral de trapezios

$$\int_0^u \frac{A}{2} t dt = \frac{Au}{2},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{A}{2} (2\alpha - t) dt = \frac{Au}{2}$$

Suma = Au

$$C_0 = \frac{2}{T} Au = \frac{2Au}{T} = \frac{AT}{T}$$

$$x(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x''(t) = \sum C_n (j n \omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t} = -\sum C_n (n \omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t}$$

$$d_n = -(n \omega_0)^2 C_n$$

$$\begin{aligned} d_n &= -K^2 \cdot \frac{2}{T} \cdot \frac{A}{a} \cdot \frac{1}{K^2} (2 \cos(Ka) - \cos(2Ka) - 1) \\ &= -\frac{2A}{Ta} (2 \cos(Ka) - \cos(2Ka) - 1) \end{aligned}$$

$$2 \cos(\theta) - \cos(2\theta) - 1 = 4 \cos \theta \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \text{con } \theta = n \omega_0 a$$

$$d_n = -\frac{8A}{Ta} \cos(n \omega_0 a) \sin^2\left(\frac{n \omega_0 a}{2}\right), \quad n \neq 0$$

$$d_0 = 0,$$

$$R\{d_n\} = d_n \quad (\text{los reales})$$

$$j\{d_n\} = 0$$

$$d_n = \frac{8|A|}{Ta} |\cos(n \omega_0 a)| \sin^2\left(\frac{n \omega_0 a}{2}\right)$$

Fase:

$$\angle d_n = \begin{cases} 0 & d_n > 0 \\ \pi & d_n < 0 \\ \text{indefinido (00)} & d_n = 0 \end{cases}$$

$$n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$$

$$d_n = d_n \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad \text{con } \Theta_n := n \omega_0 a$$

$$d_0 = 0,$$

$$d_n = -\frac{8A}{Ta} \cos(\Theta_n) \sin^2\left(\frac{\Theta_n}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$$

$A = 1$ y una relación concreta $a/\pi \approx \omega_0 a$

