Preguntas

1. La distancia media entre dos señales periódicas $x_1(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $x_2(t) \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$; se puede expresar a partir de la potencia media de la diferencia entre ellas:

$$d^2(x_1, x_2) = \bar{P}_{x_1 - x_2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_T |x_1(t) - x_2(t)|^2 \, dt.$$

Sea $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales definidas como:

$$x_1(t) = Ae^{-jnw_0 t}$$

$$x_2(t) = Be^{jmw_0 t}$$

con $w_0 = \frac{2\pi}{T}$; $T, A, B \in \mathbb{R}^+$ y $n, m \in \mathbb{Z}$. Determine la distancia entre las dos señales. Compruebe sus resultados con Python.

$A, B \in \mathbb{R}^+$ (pertenece los numeros Reales)

$n, m \in \mathbb{Z}$ (enteros)

$w_0 = 2\pi / T_0$

T_0 Periodo fundamental

$$x_1(t) - x_2(t) = Ae^{-jnw_0 t} - Be^{jmw_0 t}$$

$$|x_1(t) - x_2(t)|^2 = |Ae^{-jnw_0 t} - Be^{jmw_0 t}|^2$$

$$z = Ae^{-jnw_0 t} - Be^{jmw_0 t}$$

$$z^* = Ae^{jnw_0 t} - Be^{-jmw_0 t}$$

$$z = z^*$$

$$e^{-x} = e^{x}$$

$$|x_1 - x_2|^2 = (Ae^{-jnw_0 t} - Be^{jmw_0 t})(Ae^{jnw_0 t} - Be^{-jmw_0 t})$$

$$= A^2 - ABe^{-jnw_0 t}e^{-jmw_0 t} - ABe^{jnw_0 t}e^{jmw_0 t} + B^2$$

$$= A^2 + B^2 - AB(e^{-j(n+m)w_0 t} + e^{j(n+m)w_0 t})$$

$$e^{-j(n+m)w_0 t}$$

$$e^{-jnw_0 t - jmw_0 t}$$

$$= A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0 t)$$

$$d^2 = \frac{1}{T}\int_0^T (A^2 + B^2 - 2AB\cos((n+m)w_0 t)) \, dt$$

$$d^2 = A^2 + B^2 - \frac{2AB}{T}\int_0^T \cos((n+m)w_0 t) \, dt$$

$K = n+m$

$\cos(K)\, w_0 t$

$$P_{x_1 - x_2} = \frac{1}{T_0}\left[\int_0^{T_0} (A^2 + B^2)\, dt - 2AB\int_0^{T_0} \cos((K) w_0 t)\right]$$

Si $K = 0$ $(n+m = 0)$

$$\cos(0) = 1 - \frac{1}{T}\int_0^T dt = \frac{T}{T} = 1$$

Si $K \neq 0$ $\displaystyle\int_0^T \cos\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right)Kt\right) dt = \frac{T}{2\pi K}[\operatorname{sen}(2\pi K) - \operatorname{sen}(0)] = \frac{T}{2\pi K} \cdot 0 = 0$

Si $n+m = 0$ $\quad d^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot 1 = (A-B)^2$

Si $n+m \neq 0$ $\quad d^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot 0 = A^2 + B^2$

$$\begin{cases} A - B \\ \sqrt{A^2 + B^2} \end{cases}$$

2. Encuentre la señal en tiempo discreto al utilizar un conversor análogo digital con frecuencia de muestreo de $5kHz$ y 4 bits de capacidad de representación, aplicado a la señal continua:

$$x(t) = 3\cos(1000\pi t) + 5\sin(3000\pi t) + 10\cos(11000\pi t).$$

Realizar la simulación del proceso de discretización (incluyendo al menos tres periodos de $x(t)$). En caso de que la discretización no sea apropiada, diseñe e implemente un conversor adecuado para la señal estudiada.

$W_1 = 1000\pi$

$W_2 = 3000\pi$

$W_3 = 11000\pi$

$F_1 = 1000\cancel{\pi}/2\cancel{\pi} = 500\ Hz$

$F_2 = 3000\cancel{\pi}/2\cancel{\pi} = 1500\ Hz$

$F_3 = 11000\cancel{\pi}/2\cancel{\pi} = 5500\ Hz$

Frecuencia de muestreo => $f_s = 5\ KHz = 5000\ Hz$

-> Según Nyquist $f_s > 2F_{max}$ -> frecuencia máxima de la señal

$2F_{max} = 11000\ Hz > F_s = 5000\ Hz$

No cumple Niquist

Después del muestreo

$f_e = |f - Kf_s|$

$f_e = |5500\ Hz - 5000\ Hz| = 500\ Hz$

$$X[n] = 3\cos\left(2\pi\cdot\frac{500}{5000}n\right) + 5\,sen\left(2\pi\cdot\frac{1500}{5000}n\right) + 10\cos\left(2\pi\cdot\frac{5500 n}{5000}\right)$$

$$= 3\cos(0{,}2\pi)n + 5\,sen(0{,}6\pi n) + 10\cos(2{,}2\pi)$$

$\downarrow$

$10\cos(0{,}2\pi)$

$X[n] = \underline{13}\cos(0{,}2\pi n) + \underline{5}\,sen(0{,}6\pi n)$

Amplitud $= 13 + 5 = 18$

Para 4 bits: $2^4 = 16$ niveles

$\Delta = \frac{2V_s}{L-1} = \frac{36}{15} = 2{,}4$

$P_X = \frac{13^2 + 5^2}{2} = 97$

Ruido de cuantización $\sigma_q^2 = \Delta^2/12 = 0{,}48$

conversor adecuado

$f_s \geq 2F_{max} = 11\ KHz$

$f_s = 12\ KHz$

$w_1 = \frac{\pi}{12}$; $W_2 = \frac{\pi}{4}$; $w_3 = \frac{11\pi}{12}$

3. Sea $x''(t)$ la segunda derivada de la señal $x(t)$, donde $t \in [t_i, t_f]$. Demuestre que los coeficientes de la serie exponencial de Fourier se pueden calcular según:

$$c_n = \frac{1}{(ti - tf)n^2 w_o^2}\int_{t_i}^{t_f} x''(t)e^{-jnw_o t}dt; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

¿Cómo se pueden calcular los coeficientes a_n y b_n desde $x''(t)$ en la serie trigonométrica de Fourier?.

Expansion de la señal $x(t)$ en serie exponencial de Fourier

$$x(t) = \sum_n C_n e^{jnw_0t}$$

- primera derivada de $x(t)$

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_n C_n e^{jnw_0t}\right) = \sum_n C_n jnw_0 e^{jnw_0t}$$

- segunda derivada

$$x''(t) \frac{d}{dt}\left(\sum_n C_n jn w_0 e^{jnw_0t}\right) = \sum_n C_n (jnw_0)^2 e^{jnw_0t}$$

Calculamos C_n multiplicando $x''(t)$ por e^{-jnw_0t} y lo integramos en el intervalo $[t_i, t_f]$

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t}\, dt = \int_{t_i}^{t_f} \sum_n C_n (jn w_0)^2 e^{jnw_0t} e^{-jnw_0t}\, dt$$

Por ortogonalidad de los exponenciales complejos podemos cancelar los exponentes de integracion

$$\int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t}\, dt = C_n (jnw_0)^2 (t_f - t_i)$$

Despejamos C_n:

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i)(jnw_0)^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t}\, dt$$

Simplificamos con $j^2 = -1$

$$C_n = \frac{1}{(t_f - t_i) n^2 w_0^2} \int_{t_i}^{t_f} x''(t) e^{-jnw_0t}\, dt$$

hacemos relacion con la trigonometrica Tenemos la Expresion general de $x(t)$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nw_0t) + b_n \operatorname{sen}(nw_0t)]$$

- Primera derivada:

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n nw_0 \operatorname{sen}(nw_0t) + b_n nw_0 \cos(nw_0t)]$$

- Segunda derivada

$$x''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [-a_n (nw_0)^2 \cos(nw_0t) - b_n (nw_0)^2 \operatorname{sen}(nw_0t)]$$

Ahora sacamos la ortogonalidad para los coeficientes a_n y b_n

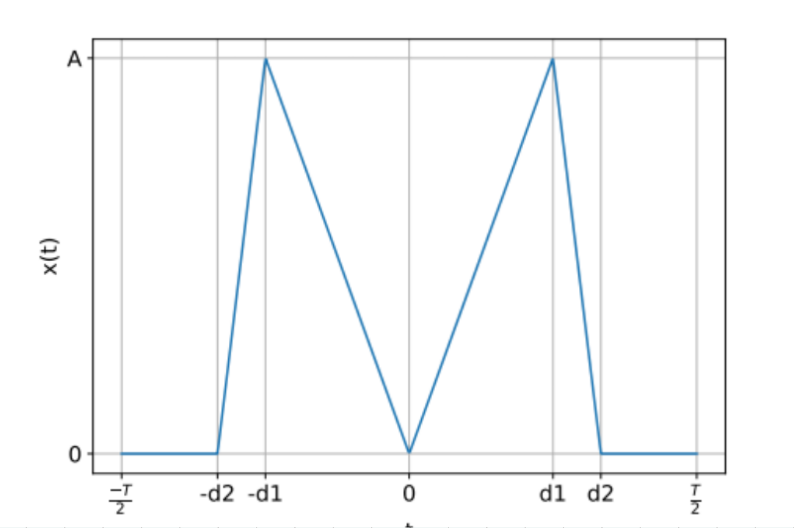
- para a_n

$$a_n = \frac{-2}{T n^2 \omega_0^2} \int_{ti}^{tf} x''(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt$$

= Para b_n

$$b_n = \frac{-2}{T n^2 \omega_0^2} \int_{ti}^{tf} x''(t)\, \mathrm{sen}(n\omega_0 t)\, dt$$

4. Encuentre el espectro de Fourier, su parte real, imaginaria, magnitud, fase y el error relativo para $n \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5\}$, a partir de $x''(t)$ para la señal $x(t)$ en la Figura 1 . Compruebe el espectro obtenido con la estimación a partir de $x(t)$. Presente las simulaciones de Python respectivas.



$x(t)$ es par y vale 0 fuera d $[-T, T]$

Como $x(t)$ es par

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(n\omega_0 t)\, dt = \frac{2}{T} \int_0^{2a} x(t) \cos(Kt)\, dt$$

Separa en las dos pieza lineales

$$C_n = \frac{2}{T}[I_1 + I_2], \quad I_1 = \int_0^a \frac{A}{a} t \cos(Kt)\, dt, \quad I_2 = \int_a^{2a} \frac{A}{a} (2a - t) \cos(Kt)\, dt$$

Integracion por partes

$$\int t \cos(Kt)\, dt \qquad u = t \qquad dv = \cos(Kt)\, dt$$

$$\int t \cos(Kt)\, dt = \frac{1}{K} \mathrm{sen}(Kt) + \frac{1}{K^2} \cos(Kt) + C$$

$$I_1 = \frac{A}{a} \left[\frac{a}{K} \mathrm{sen}(Ka) + \frac{1}{K^2} (\cos(Ka) - 1) \right]$$

Para $\int (2a-t)\cos(Kt)\,dt$ $\quad u=2a-t,\quad dv=\cos(Kt)\,dt$

$$\int (2a-t)\cos(Kt)\,dt = \frac{2a-t}{K}\operatorname{sen}(Kt) - \frac{1}{K^2}\cos(Kt)+C$$

Evaluando de a a 2a y multiplicacion por A/a:

$$I_2 = \frac{A}{a}\left[-\frac{a}{K}\operatorname{sen}(Ka) + \frac{1}{K^2}\left(\cos(Ka)-\cos(2Ka)\right)\right]$$

Sumamos I_1 es I_2

$$I_1 + I_2 = \frac{A}{a}\cdot\frac{1}{K^2}\left(2\cos(Ka) - \cos(2Ka) - 1\right)$$

$\frac{a}{K}\operatorname{sen}\left(\frac{K}{a}\right)$ se cancelan exactamente

C_n para $n \neq 0$

$$C_n = \frac{2}{T}(I_1+I_2) = \frac{2}{T}\cdot\frac{A}{a}\cdot\frac{1}{K^2}\left(2\cos(Ka) - \cos(2Ka) - 1\right),$$

Sustituimos $K = nw_0$ y $K^2 = (nw_0)^2 = (n\cdot 2\pi/T)^2 = \frac{4\pi^2 n^2}{T^2}$, entonces

$$\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{K^2} = \frac{2}{T}\cdot\frac{T^2}{4\pi^2 n^2} = \frac{T}{2\pi^2 n^2}$$

quedando así

$$C_n = \frac{AT}{2\pi^2 a n^2}\left(2\cos(nw_0 a) - \cos(2nw_0 a) - 1\right), \qquad n \neq 0$$

$$C_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{2a} x(t)\,dt$$

Integral del triangulo

$$\int_0^a \frac{A}{a}t\,dt = \frac{Aa}{2}, \qquad \int_a^{2a} \frac{A}{a}(2a-t)\,dt = \frac{Aa}{2}$$

suma = Aa

$$C_0 = \frac{2}{T}Aa = \frac{2Aa}{T} = \frac{A\tau}{T}$$

$$x(t) = \sum_n C_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$x''(t) = \sum C_n (jn\omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t} = -\sum C_n (n\omega_0)^2 e^{jn\omega_0 t}$$

$$d_n = -(n\omega_0)^2 C_n$$

$$d_n = -K^2 \circ \frac{2}{T} \circ \frac{A}{a} \circ \frac{1}{K^2} \left(2\cos(Ka) - \cos(2Ka) - 1\right)$$

$$= -\frac{2A}{Ta} \left(2\cos(Ka) - \cos(2Ka) - 1\right.$$

$$2\cos(\theta) - \cos(2\theta) - 1 = 4\cos\theta \, \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \text{con } \theta = n\omega_0 a$$

$$d_n = -\frac{8A}{Ta} \cos(n\omega_0 a) \, \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\omega_0 a}{2}\right), \quad n \neq 0$$

$$d_0 = 0.$$

$\mathbb{R}\{d_n\} = d_n$ (los reales)

$j\{d_n\} = 0$

$$d_n = \frac{8|A|}{Ta} \left|\cos(n\omega_0 a)\right| \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\omega_0 a}{2}\right)$$

Fase:

$$\angle d_n = \begin{cases} 0 & d_n > 0 \\ \pi & d_n < 0 \\ \text{indefinida } (0) & d_n = 0 \end{cases}$$

$n \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5\}$

$d_n = d_n \qquad n = 0,1,2,3,4,5 \qquad \text{con} \quad \theta_n := n\omega_0 a$

$$d_0 = 0,$$

$$d_n = -\frac{8A}{Ta} \cos(\theta_n) \, \mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_n}{2}\right), \quad n = 1,2,3,4,5$$

$A = 1$ y una Relución concreta a/T o $\omega_0 a$