

# Projeto de Controlador PID para Sistemas de Segunda Ordem com Atraso via Resposta em Frequência

Jhonat Heberson Avelino de Souza <sup>1</sup>

Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea <sup>2</sup>

Prof. Dr. José Mário Araújo <sup>3</sup>

<sup>1</sup>[jhonatheberson@gmail.com](mailto:jhonatheberson@gmail.com)

<sup>2</sup>[cetdorea@dca.ufrn.br](mailto:cetdorea@dca.ufrn.br)

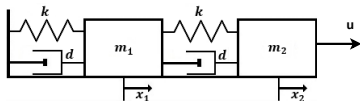
<sup>3</sup>[prof.jomario@gmail.com](mailto:prof.jomario@gmail.com)

Departamento de Engenharia de Computação e Automação – DCA  
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

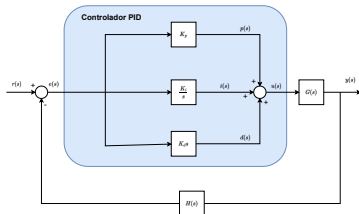
# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentação Teórica
- 3 Definição do Problema
- 4 Metodologia
- 5 Experimentos
- 6 Resultados
- 7 Conclusões
- 8 Referencias

# Introdução - Contextualização



(a) Sistema massa e mola



(b) Controlador PID

Figura 1: Sistema de Segunda ordem, e Controlador PID

# Introdução - Trabalhos anteriores do grupo

- Problema com realimentação de estado
- Alocação parcial de polos
- Monovariável
- Sistemas estáveis em malha aberta

Contribuímos com utilização do controlador Proporcional e Integrativo Derivativo (PID) com realimentação de saída para rastreamento e considerar sistemas estáveis em malha aberta, otimizando índice  $IAE$  e robustez de forma concorrente.

# Introdução - Objetivos

- Estudo de sistemas de segunda ordem com atraso.
- Propor uma solução para um problema de controle para um sistema de segunda ordem com atraso
- Controlador Proporcional e Integrativo Derivativo (PID).
- Definir o problema de controle nos termos da resposta em frequência usando Receptância
- Critério de estabilidade de *Nyquist* para definir a função as regras de otimização.
- Otimização do controlador com base no índice de *IAE*, concorrente ao critério de robustez.
- Aprimorar algoritmo heurístico de otimização (GA) para encontrar os ganhos do controlador PID que atenda os critérios estabelecidos.

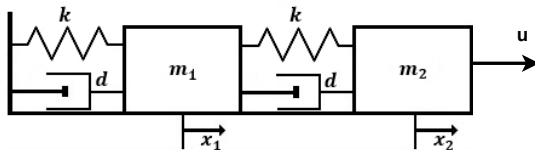


Figura 2: Sistema massa e mola

## Equação do sistema

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + d(2\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k(2x_1(t) - x_2(t)) = 0 \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + d(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k(x_2(t) - x_1(t)) = u \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

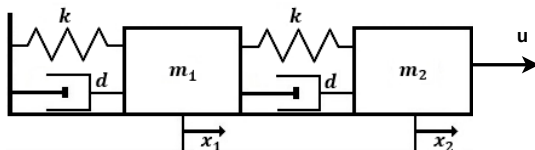


Figura 3: Sistema massa e mola

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{B}u \quad (4)$$

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade e  $m$  entradas, têm-se  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é uma matriz de massas,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de amortecimento,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de rigidez,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz de controle,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de deslocamento e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de entradas Single Input Single Output (SISO)

$$\mathbf{M}(t) + \mathbf{C}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

A saída do sistema definida como:

$$y(t) = l\mathbf{x}(t) \quad (5)$$

Considere-se o monovariável, ou seja,  $l \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ .  
e erro do sistema é definido como:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (6)$$

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(t) dt + k_d \frac{de(t)}{dt}$$



$$V(s) = q(s)R(s), \text{ com } q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$$

$$U(s) = -(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)e^{-\tau s}IX(s) + V(s) \quad (7)$$

$$(Ms^2 + Cs + K + e^{-\tau s}q(s)\mathbf{B}I)X(s) = V(s) \quad (8)$$

$$x(s) = (Ms^2 + Cs + K + e^{-\tau s}q(s)\mathbf{B}I)^{-1}V(s) \quad (9)$$

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - q(s)\mathbf{B}I)\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (10)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \quad (11)$$

Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* em (10) com  $\mathbf{A} = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{B}$  e  $\mathbf{v}^T = q(s)$ , temos:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)q(s)/\mathbf{H}(s)\mathbf{B}}{1 + q(s)/\mathbf{H}(s)\mathbf{B}} \quad (12)$$

na qual  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + q(s)\mathbf{B})^{-1}$  é definida como matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}$  como matriz de receptância de malha aberta, que, na prática, pode ser medida pela resposta em frequência  $\mathbf{H}(j\omega)$ .

A equação característica de (12) é definida como:

$$1 + q(s)/\mathbf{H}(s)\mathbf{B} = 0 \quad (13)$$

$$u(t - \tau) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (14)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t - \tau) \quad (15)$$

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - q(s)\mathbf{B}le^{-s\tau})\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (16)$$

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{B}le^{-s\tau})\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

# Fundamentação Teórica - Fórmula de Sherman-Morrison com atraso

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)/\mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)/\mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau}} \quad (17)$$

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)/\mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau} = 0 \quad (18)$$

# Resposta em frequência

- A matriz de receptância nos fornece a resposta em frequência  $H(j\omega)$  do sistema
- O ganho de malha da equação característica em malha fechada é descrito na Equação 19.

$$L(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{H}(s) B e^{-s\tau} \quad (19)$$

# Definição do Problema - Estabilidade

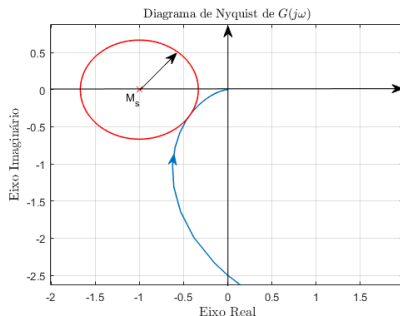
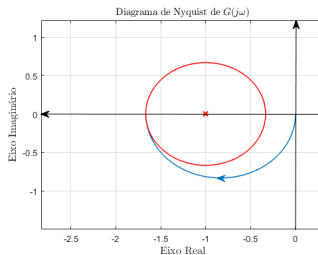


Figura 4: Diagrama de Nyquist Exemplo de Circunferência.  $M_s$

## Restrições de estabilidade

- Podemos afirmar pela teórica do critério de estabilidade de Nyquist que circunferência  $M_s$  representa quanto robusto é o sistema
- $M_s$  é menor distância entre o ponto  $(-1, 0)$  e a curva de Nyquist

# Definição do Problema - Instabilidade



**Figura 5:** Diagrama de Nyquist de um Sistema Genérico para Exemplo de um Caso de Instabilidade.

## Restrições de instabilidade

- Garantir que a curva de Nyquist não contenha a circunferência a englobando
- Enlaçar o ponto  $(1, 0)$ , se evidencia um caso de instabilidade

# Definição do Problema - Funções de otimização

$$\begin{aligned} \min_{k_p, k_i, k_d} \quad & h(k_p, k_i, k_d) = \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \\ \text{s.a.} \quad & L(j\omega_i) = -(k_p + \frac{k_i}{j\omega_i} + k_d j\omega_i) / \mathbf{H}(j\omega_i) B e^{-j\omega_i \tau} \\ & \text{Re}\{L(j\omega_i)\} \geq -1 + M_s^{-1} \quad \forall \omega_i / \text{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0 \\ \min_{\omega_i} \quad & \text{Re}\{L(j\omega_i)\} = -1 + M_s^{-1} \quad \forall \omega_i / \text{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0 \quad (20) \end{aligned}$$



Função	Dimensão	PSO [3]	PSO	GA [3]	GA	GA [5]
Esfera	30	1.0454E+05 ±7.1998E+04	<b>2.241E+03</b> <b>±7.030E+02</b>	6.4415E+03 ±1.6876E+03	<b>6.7564E+01</b> <b>±4.4760E+01</b>	2.0532E+02 ± 4.6377E+01
Rosenbrock	2	7.0289E+08 ±4.8937E+08	<b>7.0261E+08</b> <b>±3.666E+08</b>	1.2493E+07 ±8.6725E+06	<b>9.7689E+00</b> <b>±2.5590E+03</b>	1.2280E+02 ±1.9833E+02
Rastrigin	30	5.4130E+02 ±1.5969E+01	<b>1.7430E+02</b> <b>±2.506E+01</b>	5.5900E+01 ±1.4294E+01	<b>1.7650E+01</b> <b>±3.2255E+00</b>	6.9160E+01 ± 9.5182E+00

**Figura 6:** Média e desvio-padrão do fitness de 20 execuções do algoritmo GA comparado ao PSO, nas condições da ref [3]. Resultados do algoritmo deste trabalho em negrito

## Busca dos ganhos do controlador

- Uso de meta-heurística para encontrar os ganhos
- Algoritmo Genético
- Resolve de forma genérica problemas de otimização
- Geralmente aplicadas a problemas para os quais não se conhece algoritmo eficiente

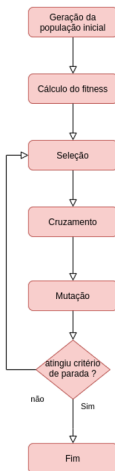


Figura 7: Fluxograma do algoritmo genético

---

**Algoritmo 1:** Função de Busca

---

```
Entrada: M, C, K, B, l,  $\tau$ ,  $\alpha$ ,  $M_f$  e simulink
Saída: gain = [Kp Ki Kd];
1 populacao = random(n);
2 objetivo = "execute";
3 execucao = 0;
4 variabilidade = 1;
5 evolucao = 0;
6 alfa = random(0,1);
7 n = 100;
8 repita
9     para geracao=1 até geracao=n faça
10         avaliacao = []
11         se execucao > 0 então
12             populacao(2:n,:) = random(n-1);
13         fim
14         para i = 1 até populacao=n faça
15             L ← LFunction(M, C, K, B, l,  $\tau$ ,  $\alpha$ , populacao(i, 1:3));
16             robustez ← RobustezFunction(L(s),  $M_f$ );
17             restrictions ← RestrictionsFunction(L(s), 0);
18             IAE ← IaeFunction(populacao, simulink);
19             ff ← FitnessFunction(IAE, robustez, alfa);
20             avaliacao(i,1:end) = [ff, restrictions];
21             i = i + 1;
22         fim
23         populacao = [populacao avaliacao];
24         populacao ← AssortmentFunction(populacao);
25         populacao ← CrossOverFunction(populacao(1:n,1:end-2));
26         L ← LFunction(M, C, K, B, l,  $\tau$ ,  $\alpha$ , populacao(1, 1:3));
27         robustez ← RobustezFunction(L(s),  $M_f$ );
28         restrictions ← RestrictionsFunction(L(s), 0);
29         IAE ← IaeFunction(populacao, simulink);
30         ff ← FitnessFunction(IAE, robustez, alfa);
31         se (ff < 0.4 && restrictions < 0.9) || (execucao >
32             2 && Restrictions < 0.9) então
33             objetivo = "fim";
34             melhorIndividuo = populacao(1,:);
35             interromper;
36         fim
37         VariabilidadeFunction(variabilidade, evolucao, ff);
38         geracao = geracao + 1;
39     fim
40     execucao = execucao + 1;
41 até (objetivo ≠ "fim");
```

---

Figura 8: Pseudo código do algoritmo de busca

---

**Algoritmo 3: Função L**

---

**Entrada:** M; C; K; B; I;  $\tau$ ;  $\omega$  e populacao

**Saída:** L

```
1 Kp = populacao(1);
2 Ki = populacao(2);
3 Kd = populacao(3);
4 para i = 1 até i = comprimento( $\omega$ ) faça
5   |  $\beta = j \times \omega(i)$ ;
6   |  $L(i) = (Kp + Ki/\beta + 0.0001) + \beta \times Kd) \times I \times (M \times \beta^2 + C \times \beta + K)^{-1} \times B \times e^{-\tau \times \beta}$ ;
7   | i = i + 1;
8 fim
```

---

Figura 9: Pseudo código da função L

## Nyquist infinito

- Perturbação na ação integrativa
- Evita valores infinitos para cálculo do diagrama de *Nyquist*

# Metodologia - Algoritmo verificando a variabilidade genética

---

**Algoritmo 8: Função de Variabilidade**

---

**Entrada:** variabilidade, evolucao, e ff

```
1 evolucao(variabilidade) = ff;  
2 variabilidade = variabilidade + 1;  
3 se tamanho(evolucao) > 10 então  
4     variabilidade = 1;  
5     evolucao = evolucao(2:end);  
6     se var(evaluacion) < 0.0000001 então  
7         objetivo = "fim";  
8         melhorIndividuo = populacao(1,:);  
9         interromper;  
10    fim  
11 fim
```

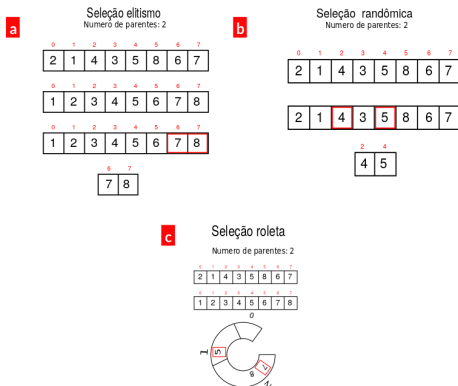
---

Figura 10: Pseudo código da função de variabilidade

## Verificação de variabilidade genética

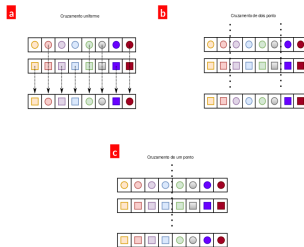
- Análise de melhoria da população com base na interação do algoritmo

# Metodologia - Métodos de seleção



**Figura 11:** Ilustração dos métodos implementados de seleção. (a) Seleção elitismo, ordenando de forma crescente e escolhendo os indivíduos com maior fitness. (b) Seleção Randômica, que seleciona os pais aleatoriamente entre a população. (c) Seleção roleta, a qual ordena e rearranja para que simula uma roleta.

# Metodologia - Métodos de cruzamento



**Figura 12:** Algoritmos de cruzamento (crossover). (a) Cruzamento uniforme, em que o novo cromossomo (abaixo) é formado selecionando genes aleatórios de cada um dos pais. (b) Cruzamento de dois pontos, em que o novo cromossomo é formado pelas extremidades de um dos pais e a parte central do outro. Os pontos de corte (tracejados) são sorteados aleatoriamente para cada indivíduo. (c) Cruzamento de um ponto, em que o novo indivíduo é gerado com o início do cromossomo de um dos pais e o final do outro. O ponto de corte (linha tracejada) é decidido aleatoriamente para cada indivíduo.



# Experimentos - Exemplo 1

# Experimentos - Exemplo 2

# Experimentos - Exemplo 3

# Experimentos - Exemplo 4

# Resultados - Resultados da Otimização de Robustez

# Resultados - Resultados da Otimização de IAE

# Resultados - Resultados da Comparação entre as Otimizações

# Resultados - Resultados da Concorrência entre a Otimização



# Resultados - Resultados da perturbação no sistema

- PID com realimentação de saída para rastreamento.
- Considerar sistemas instáveis em malha aberta.
- Considerar sistemas multivariáveis
- Estudo da eficiência para essa técnica utilizando controlador PID.
- Avaliação do critério de estabilidade de Nyquist.
- Trabalhos futuros: Verificar eficiência de outro algoritmo heurístico (PSO).

- [1] Ogata, Katsuhiko (2009), Modern control engineering, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.
- [2] DANTAS, N. J. B. (n.d.), Projeto de controladores para sistemas de segunda ordem com atraso via resposta em frequência., Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
- [3] Mohd Nadhir Ab Wahab, Samia Nefti-Meziani, Adham Atyabi, A Comprehensive Review of Swarm Optimization Algorithms, PLOS ONE, 10, e0122827, 2015.
- [4] Solgi, R. M., geneticalgorithm, v 1.0.1,  
<https://github.com/rmsolgi/geneticalgorithm> Acessado em 24/08/2020.