



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECATRÔNICA



# Controle PID de Vibrações em Sistemas de Segunda Ordem com Atraso Usando Receptância com Estabilidade Robusta e Otimização de Desempenho

**Jhonat Heberson Avelino de Souza**

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea

Co-orientador: Prof. Dr. José Mário Araújo

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica da UFRN como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Número de ordem PEM: M018  
Natal, RN, julho de 2023



---

# Resumo

---

Fenômenos como vibrações mecânicas, ressonância e oscilações, podem ser descritos matematicamente por sistemas de equações diferenciais de segunda ordem, sendo estes sistemas comumente designados como sistemas de segunda ordem. Trabalhar com esse tipo de modelo, em vez dos modelos de estado de primeira ordem, traz benefícios numéricos, mas há dificuldades inerentes à determinação de seus parâmetros físicos. Os desafios são ainda mais significativos quando se considera a existência de atrasos entre as medições dos estados e os sinais de atuação, levando algumas abordagens à necessidade de uma pós-análise para determinar a estabilidade das soluções calculadas. Uma alternativa para contornar as dificuldades de medição de parâmetros é a abordagem por resposta em frequência que usa modelos baseados em receptância. Este trabalho trata do projeto de controladores Proporcional Integral Derivativo (PID) para sistemas dinâmicos lineares com atraso, modelados por equações diferenciais matriciais de segunda ordem. É adotada a abordagem por receptância, que, por se basear na resposta em frequência do sistema, permite tratar da estabilidade em malha fechada de forma exata, sem a necessidade de recorrer a aproximações do termo de atraso nem a verificações *a posteriori*. Um problema de otimização é formulado para a determinação dos ganhos do controlador que garantam robustez, por meio de uma margem de estabilidade pré-estabelecida e desempenho, e também da minimização da Integral do Erro Absoluto relativo ao seguimento de uma referência constante. Um Algoritmo Genético é implementado para resolver o problema de otimização. Diferentemente de trabalhos correlatos na literatura, o método proposto pode ser aplicado igualmente a sistemas com polos de malha aberta no semiplano direito.

**Palavras-chave:** Sistemas de Segunda Ordem, Sistemas com Atraso, Controle PID, Receptância, Algoritmo Genético.



---

# Abstract

---

Phenomena such as mechanical vibrations, resonance, and oscillations can be mathematically described by second-order differential equation systems, which are commonly referred to as second-order systems. Working with this type of model, instead of first-order state models, brings numerical benefits, but there are inherent difficulties in determining their physical parameters. The challenges are even more significant when considering the existence of delays between state measurements and actuation signals, leading some approaches to the need for post-analysis to determine the stability of calculated solutions. An alternative to bypass the difficulties of parameter measurement is the frequency response approach that uses models based on receptance.

This work deals with the project of PID controllers - Proportional-Integral-Derivative for linear dynamic systems with delay, modeled by second-order matrix differential equations. Is adopted the receptance approach, which, because it is based on the frequency response of the system, allows dealing with closed-loop stability exactly, without the need for re- run on delay term approximations or back-testing. A problem of optimization is formulated for the determination of the controller gains that guarantee robustness, through a pre-established stability margin, and performance, and also the the minimization of the Absolute Error Integral relative to the tracking of a constant reference. A Genetic Algorithm is implemented to solve the problem of optimization. Unlike related works in the literature, the proposed method can be applied equally to systems with open-loop poles in the right half-plane.

**Keywords:** Second-Order Systems, Time-Delay, PID Control, Receptance, Genetic Algorithm.



---

# Sumário

---

<b>Sumário</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Símbolos e Abreviaturas</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Fundamentação Teórica</b>	<b>5</b>
2.1 Sistemas de Segunda Ordem . . . . .	5
2.1.1 Representação de Primeira Ordem . . . . .	6
2.1.2 O Método da Receptância . . . . .	7
2.1.3 A Matriz de Receptância . . . . .	8
2.1.4 Sistema com Atraso . . . . .	9
2.2 Resposta em Frequência . . . . .	10
2.2.1 O Diagrama Polar, ou Diagrama de <i>Nyquist</i> . . . . .	10
2.2.2 Critério de Estabilidade de <i>Nyquist</i> . . . . .	12
2.3 Controlador Proporcional Integrativo Derivativo . . . . .	14
2.4 Índices de desempenho . . . . .	16
2.5 Margem de Estabilidade . . . . .	17
<b>3 Formulação do Problema</b>	<b>19</b>
3.1 Parâmetro de Projeto e Formulação Matemática . . . . .	20
3.1.1 Circunferência $M_s$ . . . . .	20
3.1.2 Definição do problema de otimização . . . . .	22
<b>4 Implementação do Método Proposto</b>	<b>27</b>
4.1 Solução do Problema de Otimização . . . . .	27
4.2 Implementação do Algoritmo de Otimização . . . . .	32
<b>5 Experimentos e Resultados</b>	<b>41</b>
5.1 Experimentos estudados . . . . .	41
5.1.1 Exemplo 1 . . . . .	41
5.1.2 Exemplo 2 . . . . .	44
5.1.3 Exemplo 3 . . . . .	47

5.1.4	Exemplo 4 . . . . .	51
5.1.5	Exemplo 5 . . . . .	56
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>59</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>60</b>



---

# Lista de Figuras

---

2.1	Sistema Massa-Mola-Amortecedor . . . . .	5
2.2	Exemplo de Diagrama de Nyquist para Sistema modelado por $G(s)$ .	11
2.3	Diagrama de <i>Nyquist</i> com a Parte Espelhada . . . . .	12
2.4	Diagrama de blocos de $G_{mf}(s)$ . . . . .	13
2.5	Diagrama de blocos do PID . . . . .	15
3.1	Diagrama de Nyquist Exemplo de Circunferência. $M_s$ . . . . .	22
3.2	Diagrama de <i>Nyquist</i> de um Sistema Genérico para Exemplo de um Caso de Instabilidade. . . . .	24
4.1	Simulação criada com MATLAB/Simulink® . . . . .	28
4.2	Diagrama de <i>Nyquist</i> para $\omega \in [10^{-1}, 10^3]$ . . . . .	33
4.3	Diagrama de <i>Nyquist</i> para $\omega \in [10^{-6}, 10^3]$ . . . . .	33
4.4	Exemplificação da contagem de voltas que contem o ponto $-1 + j0$ e o sentido do diagrama de <i>Nyquist</i> . . . . .	39
5.1	Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade . . . . .	42
5.2	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.1 . . . . .	43
5.3	Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.1 .	44
5.4	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.2 . . . . .	46
5.5	Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.2 .	47
5.6	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.3 . . . . .	48
5.7	Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.3 .	49
5.8	Diagrama de <i>Nyquist</i> com perturbação para o Exemplo 5.1.3 . . . . .	50
5.9	Resposta no tempo para uma referência constante com perturbação do Exemplo 5.1.3 . . . . .	51
5.10	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o caso co-localizado, Exemplo 5.1.4 . . . .	53
5.11	Resposta no tempo para uma referência constante do caso co-localizado, Exemplo 5.1.4 . . . . .	54
5.12	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o de caso não co-localizado, Exemplo 5.1.4	55
5.13	Resposta no tempo para uma referência constante para o caso não co-localizado, Exemplo 5.1.4 . . . . .	56
5.14	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.5 . . . . .	57
5.15	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.5 . . . . .	58



---

# Lista de Tabelas

---

5.1	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.1 . . . . .	42
5.2	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.2 . . . . .	45
5.3	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.3 . . . . .	48
5.4	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso co-localizado - Exemplo 5.1.4 . . . . .	52
5.5	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso não co-localizado - Exemplo 5.1.4 . . . . .	56
5.6	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.5 . . . . .	58



---

# Lista de Símbolos e Abreviaturas

---

$\ddot{x}$	aceleração do bloco, veja equação (2.2), página 5
$\dot{x}$	velocidade do bloco, veja equação (2.2), página 5
<b>C</b>	matriz de amortecimento, veja equação (2.4), página 6
<b>K</b>	matriz de rigidez, veja equação (2.4), página 6
<b>M</b>	matriz de massa, veja equação (2.4), página 6
<b>b</b>	matriz de atuação, veja equação (2.4), página 6
$\omega$	frequência natural, veja equação (2.10), página 8
$\xi$	fator de amortecimento, veja equação (2.10), página 8
$d$	coeficiente de amortecimento dos <i>dashpots</i> , veja equação (2.2), página 5
$k$	coeficiente de rigidez das molas, veja equação (2.2), página 5
$k_d$	Ganho derivativo, veja equação (2.18), página 9
$k_i$	Ganho integral, veja equação (2.18), página 9
$k_p$	Ganho proporcional, veja equação (2.18), página 9
$m$	massa do bloco, veja equação (2.2), página 5
$u$	entrada, veja equação (2.2), página 5
$x$	deslocamento do bloco, veja equação (2.2), página 5
AG	Algoritmo Genético, veja equação (1.0), página 2
AVC	Active Vibration Control, veja equação (2.0), página 5
GM	"Gain Margin", veja equação (3.10), página 21
IAE	Integrated Absolut Error, veja equação (1.0), página 2
ISE	Integrated squared Error, veja equação (2.28), página 16
ITAE	Integrates Timed Absolut Error, veja equação (2.30), página 16

ITSE	Integrated Timed Squared Error, veja equação (2.31), página 17
PID	Proporcional Integral Derivativo, veja equação (0), página 3
PM	<i>"Phase Margin"</i> , veja equação (3.10), página 21
SPD	Semiplano Direito, veja equação (2.26), página 13
SPE	Semiplano Esquerdo, veja equação (2.26), página 13

---

# Capítulo 1

## Introdução

---

Uma diversidade de fenômenos físicos, a exemplo da ressonância em sistemas vibratórios, vibro-acústicos e elétricos, é ricamente representada por meio de modelos dinâmicos de segunda ordem BALAS (1982); VANDERVELDE (1986). Os sistemas de segunda ordem são amplamente encontrados em diversas áreas, desde a engenharia até a física e a biologia, tornando seu estudo fundamental para a compreensão de uma ampla gama de fenômenos naturais e artificiais.

Modelos matemáticos que representam esses sistemas podem ser escritos como um sistema matricial de equações diferenciais de segunda ordem, onde as constantes e variáveis das equações têm relações físicas diretas com o modelo real, ou transformadas em equações diferenciais de primeira ordem DANTAS (2019). Em DATTA (2004), são apresentadas representações de primeira ordem para alguns sistemas de segunda ordem e discutidas algumas deficiências associadas ao uso do modelo original.

Devido à sua relevância prática, o estudo de sistemas de segunda ordem tem ganhado cada vez mais notoriedade na comunidade de engenharia, proporcionando soluções para diversos desafios DANTAS (2019). Uma das dificuldades na utilização de modelos matemáticos obtidos a partir de equações diferenciais de segunda ordem está na definição dos elementos das matrizes que caracterizam o sistema, como massa e elasticidade, visando simplificar o processo de modelagem desses sistemas, existe uma abordagem que utiliza a ideia de receptância, que foi proposta por RAM et al. (2009) se baseia no uso de informações experimentais do sistema para definir essas matrizes.

Nos últimos anos, alguns trabalhos utilizaram essa ideia, como base para modelagem de sistema de controle de segunda ordem com atraso, entre eles ARAÚJO and SANTOS (2018); ARAÚJO (2018*a,b*); SANTOS et al. (2018); DANTAS (2019); DANTAS et al. (2020*a*); MARTINS et al. (2020); NUNES (2022); GONTIJO et al. (2022).

A utilização do método da receptância, é possível alocar os polos do sistema em uma posição segura no plano complexo e alcançar um desempenho desejado. Entretanto, quando há presença de atraso de transporte no sistema, ao utilizar esse método, faz-se necessário realizar um tratamento posteriormente para garantir que o sistema continue estável em malha fechada, como visto em RAM et al. (2009) e em ARAÚJO and SANTOS (2018).

Uma abordagem foi proposta por DANTAS et al. (2020a) para eliminar a análise posterior do método de receptância na presença de atraso. Eles propuseram uma abordagem no domínio da frequência, utilizando conceitos como estabilidade de *Nyquist*, margem de ganho e função de sensibilidade. Por meio dessa abordagem, foi possível projetar um controlador robusto para sistema de segunda ordem com atraso.

Também em NUNES (2022) foi desenvolvido um método para projetar um controle utilizando realimentação derivativa de estados, que modifica as matrizes massa e amortecimento. A realimentação derivativa oferece vantagens em relação à realimentação de estados, como o uso de acelerômetros como sensores, que são mais baratos e mais aplicáveis na indústria, maior precisão na leitura dos estados do sistema ABDELAZIZ and VALÁŠEK (2004) e a possibilidade de regularização e estabilização de sistemas com matriz de massa singular. Resultados deste método foram apresentados em um trabalho de Nunes et al. (2021).

No trabalho GONTIJO et al. (2022), é apresentado um método robusto para a concepção de controladores PID para sistemas vibratórios de segunda ordem com incertezas paramétricas. Diferentemente de trabalhos correlatos baseados exclusivamente em retroalimentação proporcional e derivativa, o método proposto emprega a ação integral para atingir um erro nulo de rastreamento do ponto de ajuste na presença de distúrbios constantes relacionados aos graus de liberdade atuados, aumentando assim a flexibilidade do projeto.

Neste trabalho, é apresentado um método para o projeto de controle usando um controlador Proporcional Integral Derivativo seguidor de referência, baseado no método proposto por DANTAS et al. (2020a). A metodologia de projeto usa o critério de estabilidade de *Nyquist* como base teórica para determinar os valores dos ganhos do controlador que estabilizam a planta e atendem aos requisitos do projeto de controle.

Neste estudo, diferentemente de outros trabalhos nessa linha, um dos objetivos é alcançar a otimização do índice de Integral do Erro Absoluto (*IAE - integral of the absolute magnitude of the error*) em conjunto com a otimização da robustez do sistema. Como também, o controlador PID é introduzido na formulação do problema para sistemas de segunda ordem com atraso, o qual esse controlador é amplamente utilizado até os dias atuais, de forma que aplicação deste estudo seja mais utilizado em situações reais de controle.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma extensão e comparação com o método proposto em DANTAS et al. (2020a). Diferentemente do estudo de SANTOS et al. (2018), que utilizou técnicas de alocação de polos, a natureza do controlador PID neste trabalho não exige tais técnicas. Bem como a extensão do uso do índice de *IAE* como parâmetro de busca para Algoritmo Genético (*GA - genetic algorithm*). Isso é importante para aumentar a eficiência do sistema e garantir sua robustez, mesmo com a concorrência entre os parâmetros da otimização.

O trabalho está disposto da seguinte maneira:

- Capítulo 2: Apresenta a teoria matemática básica para a compreensão do problema abordado e desenvolvimento do trabalho.



- Capítulo 3: Apresenta o problema com equacionamento matemático e detalhes importantes sobre as vantagens do método a ser utilizado.
- Capítulo 4: Apresenta o método desenvolvido para solução do problema apresentado no Capítulo 3.
- Capítulo 5: Apresenta os resultados obtidos com a utilização do método proposto, através de exemplos numéricos emprestados de outros trabalhos com objetivo de obter parâmetros de comparação dos resultados alcançados.
- Capítulo 6: Traz comentários conclusivos e sugestões para futuros trabalhos relacionados.



---

## Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

---

### 2.1 Sistemas de Segunda Ordem

Diferentes tipos de sistemas, como os sistemas vibratórios mecânicos, são classificados como sistemas de segunda ordem. Esses sistemas são descritos pelas equações (2.1), (2.2) que retratam o comportamento dinâmico do sistema. Nos trabalhos de ARAÚJO (2018b); SANTOS et al. (2018) são discutidos tais modelos com destaque para sua importância no Controle Ativo de Vibrações (*AVC - active vibration control*). Esses modelos são usados para sistemas que podem ser representados por  $n$  equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada grau de liberdade do sistema DANTAS et al. (2020a).

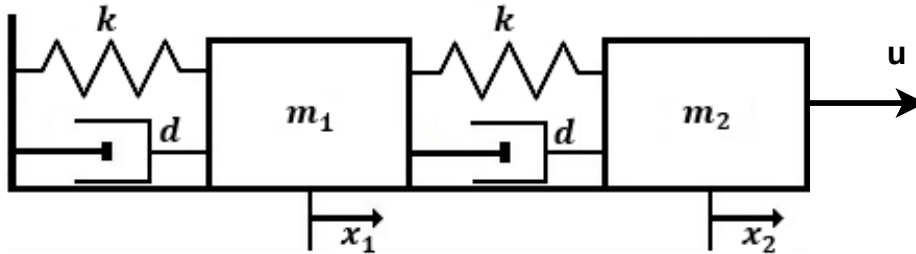


Figura 2.1: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Fonte: O autor

O sistema mostrado na Figura 2.1 pode ser modelado usando equações diferenciais, conforme mostrado nas equações (2.1) e (2.2), segundo as leis clássicas da mecânica de Newton.

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + d(2\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k(2x_1(t) - x_2(t)) = 0, \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + d(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k(x_2(t) - x_1(t)) = u, \quad (2.2)$$

sendo  $u$  uma força externa manipulável (entrada);  $m_1$  e  $m_2$  as massas dos blocos;  $k$  o coeficiente de rigidez das molas;  $d$  o coeficiente de amortecimento dos *dashpots*;  $x_1$  e  $x_2$  os deslocamentos dos blocos; e  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$  respectivamente, as velocidades

e acelerações dos blocos.

Em forma matricial as equações (2.1) e (2.2) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3)$$

Enquanto de forma compacta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t), \quad (2.4)$$

sendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes, respectivamente, de massa, amortecimento e rigidez do sistema;  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é uma matriz de influência (atuação);  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  denotam respectivamente aceleração e velocidade generalizadas; e  $u \in \mathbb{R}$  é o esforço de controle.

### 2.1.1 Representação de Primeira Ordem

A Equação (2.4) representa o sistema de segunda ordem em sua forma original. Outra maneira de interpretar o sistema descrito em (2.4) é usar representações de primeira ordem, como espaço de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ .

Definindo  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_1$  e  $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_2$ , podemos escrever o sistema de segunda ordem da equação 2.4 como:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}u \quad (2.6)$$

na forma de matrizes:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} u. \quad (2.7)$$

ou de maneira abreviada:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}u$$

com:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Essa representação é chamada de representação de primeira ordem padrão, enquanto outras formas de representações do sistema de segunda ordem são generalizadas em sistema descritor, o qual é um tipo de sistema dinâmico que pode ser representado por meio de uma equação diferencial matricial que inclui uma matriz

de ganho. Ele é chamado de “descriptor” porque inclui tanto as variáveis de estado quanto as de saída em uma única matriz, ao contrário dos sistemas padrão nas quais as variáveis de estado e saída são separadas DATTA (2004).

A motivação para a obtenção de um modelo de primeira ordem está na equação, com uma solução mais simples do que a equação de segunda ordem. No entanto, algumas dificuldades numéricas surgem ao lidar com o sistema expresso dessa forma.

Uma dificuldade numérica é a possibilidade de surgimento de raízes complexas no polinômio característico do sistema de primeira ordem, o que pode dificultar a análise da estabilidade do sistema. Por fim, a transformação de segunda ordem para primeira ordem pode levar a uma perda de precisão numérica devido a erros de arredondamento e truncamento, o que pode afetar a validade do modelo.

Outro fato importante é as propriedades disponíveis das matrizes de coeficientes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$ ; como simetria, a qual em problemas de grande escala são informações importantes para representação em segunda ordem na Equação (2.7).

### 2.1.2 O Método da Receptância

O Método da Receptância é uma técnica utilizada na engenharia estrutural para analisar e controlar sistemas dinâmicos complexos. Ele permite a representação de um sistema de segunda ordem como um sistema de primeira ordem, facilitando o processo de modelagem e controle desses sistemas.

O método é baseado na ideia de que um sistema de segunda ordem pode ser representado por um sistema de primeira ordem com múltiplos graus de liberdade. Cada grau de liberdade representa a resposta do sistema a uma determinada força ou excitação externa. A receptância é uma medida da relação entre a resposta do sistema e a excitação externa em cada grau de liberdade.

Para aplicar o método da receptância, é necessário medir a resposta do sistema em cada grau de liberdade para uma série de excitações externas. A partir desses dados, é possível calcular a receptância em cada grau de liberdade. Em seguida, essas receptâncias podem ser utilizadas para representar o sistema como um sistema de primeira ordem.

Uma das principais vantagens do método da receptância é que ele permite a representação de sistemas complexos com múltiplos graus de liberdade de uma forma simplificada. Isso facilita a análise e o controle desses sistemas, além de permitir a identificação de problemas que possam estar afetando o desempenho do sistema.

Por ser um método baseado unicamente em dados medidos de vibrações, não há necessidade de se determinar, ou conhecer, estas matrizes TEHRANI et al. (2010).

A Determinação da Matriz Rigidez ( $\mathbf{K}$ ) e de massas ( $\mathbf{M}$ ) são menos desafiadoras porque de acordo com MOTTERSHEAD and RAM (2007) os elementos finitos dessas matrizes podem ser facilmente determinados, usando métodos variacionais. No entanto, essa praticidade não funciona com matriz de amortecimento ( $\mathbf{C}$ ) NUNES (2022).

A regra de *Rayleigh* é um método amplamente utilizado para estimar a matriz de amortecimento em um sistema dinâmico. A matriz de amortecimento é fundamental

para descrever a dissipação de energia no sistema e a correta definição é importante para garantir a precisão da análise dinâmica. Segundo a regra de *Rayleigh*, a matriz de amortecimento pode ser aproximada como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez do sistema conforme apresentado na Equação (2.9).

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.9)$$

Onde  $C$  é a matriz de amortecimento,  $M$  é a matriz de massa,  $K$  é a matriz de rigidez, e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes determinadas a partir das frequências naturais do sistema.

Essas constantes podem ser calculadas a partir da equação (2.10) que envolve as frequências naturais do sistema e o fator de amortecimento.

$$\frac{(\beta\omega_1^2 - \alpha\omega_2^2)}{(\omega_1^2\omega_2^2)} = \zeta \quad (2.10)$$

Onde  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as frequências naturais do sistema, e  $\zeta$  é o fator de amortecimento do sistema.

É importante notar que a regra de *Rayleigh* é uma aproximação e sua precisão pode variar dependendo das características específicas do sistema em análise. No entanto, essa técnica é comumente utilizada na prática quando não há informações precisas sobre a matriz de amortecimento ou quando é difícil medir as propriedades de amortecimento diretamente.

### 2.1.3 A Matriz de Receptância

Considerando o controle de um sistema de segunda ordem por realimentação de estados definido por

A saída é definida por:

$$y(t) = \mathbf{l}\mathbf{x}(t) \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  é uma matriz de composição de sensores.

Para uma dada referência  $r(t)$ , o erro de rastreamento é definido por:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (2.12)$$

Assume-se a lei de controle por realimentação de estados como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t) \quad (2.13)$$

em que  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ ;  $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} > 0$ ,  $\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \geq 0$  e  $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \geq 0$  para qualquer  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Na equação (2.13), assumindo  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}e^{st}$ , sendo  $\mathbf{z}$  um vetor constante e  $s$  a

variável de *Laplace*, tem-se:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - q(s)\mathbf{b}l)\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

é possível perceber que  $q(s)$  é o controlador do sistema definido no projeto e os componentes de malha fechada de rigidez e amortecimento são modificadas pela matriz de posto-1,  $q(s)\mathbf{b}l$ , consequência da realimentação de estados.

### A Fórmula de *Sherman-Morrison*

A fórmula de *Sherman-Morrison* fornece a inversa de uma matriz com modificação de posto-1 em termos da inversa da matriz original, e como visto em VAN LOAN and GOLUB (1983) e GOLUB and VAN LOAN (2012) ela estabelece que, para uma dada matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  quadrada e inversível e vetores colunas  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* em (2.14) com  $\mathbf{A} = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{b}$  e  $\mathbf{v} = q(s)\mathbf{l}$ , temos:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{q(s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}l\mathbf{H}(s)}{1 + q(s)l\mathbf{H}(s)\mathbf{b}} \quad (2.16)$$

na qual  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + q(s)\mathbf{b}l)^{-1}$  é definida em RAM et al. (2009) como matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}$  como matriz de receptância de malha aberta, que, na prática, pode ser medida pela resposta em frequência  $\mathbf{H}(j\omega)$ .

Seja a receptância de malha fechada (2.16) sob o controlador *PID*, torna a equação característica:

$$1 + q(s)l\mathbf{H}(s)\mathbf{b} = 0 \quad (2.17)$$

#### 2.1.4 Sistema com Atraso

Quando existe um atraso no tempo entre o estado medido e a ação de controle do atuador podemos representar a lei de ação de controle da seguinte maneira:

$$u(t - \tau) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (2.18)$$

sendo  $k_p, k_i$  e  $k_d \in \mathbb{R}$  e são vetores de ganho do sistema, desta forma, um sistema de controle de segunda ordem, como o da Figura 2.1, descrito pelo sistema de equações (2.4), com matrizes de massa  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , amortecimento  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e elasticidade  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t - \tau) \quad (2.19)$$

Aplicando-se os procedimentos da seção anterior, para obtenção da matriz de receptância do sistema de segunda ordem com atraso descrito pela equação (2.19), com  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}e^{st}$ , sendo  $\mathbf{z}$  um vetor constante e  $s$  a variável de *Laplace*, a solução do sistema, tem-se:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - q(s)\mathbf{b}le^{-\tau s})\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

aplicando  $q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$  na equação (2.20), temos:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{b}le^{-\tau s})\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

e aplicando-se a fórmula de *Sherman-Morrison* como em (2.14)

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}\mathbf{l}\mathbf{H}(s)e^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{l}\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s}} \quad (2.22)$$

sendo novamente,  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{b}le^{-\tau s})^{-1}$  é definida como matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}$  como matriz de receptância de malha aberta. A presença do atraso na equação (2.22) não modifica a possibilidade da obtenção de  $\mathbf{H}(s)$  por sua resposta em frequência, uma das motivações para o desenvolvimento deste trabalho.

A equação característica da matriz de receptância de (2.22) é dada por:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{l}\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s} = 0 \quad (2.23)$$

## 2.2 Resposta em Frequência

Na literatura clássica de controle, como em OGATA (2009), o termo resposta em frequência é definido como a resposta de estado estacionário do sistema a uma entrada senoidal. Trabalho realizado em resposta a frequência é muitas vezes motivado pela maior facilidade em lidar com a incerteza nos modelos das plantas usando informações experimentais FRANKLIN et al. (2013).

### 2.2.1 O Diagrama Polar, ou Diagrama de *Nyquist*

A representação gráfica escolhida para o desenvolvimento deste trabalho é o diagrama de *Nyquist*, também conhecido como diagrama polar. Gráfico polar de uma função de transferência senoidal  $G(j\omega)$  consiste na representação da magnitude de  $G(j\omega)$  e do ângulo de fase de  $G(j\omega)$  em coordenadas polares, onde  $\omega$  varia de zero a infinito OGATA (2009). Um exemplo de gráfico de *Nyquist* para um sistema típico de segunda ordem mostrado na equação 2.24 é apresentado na Figura 2.2.



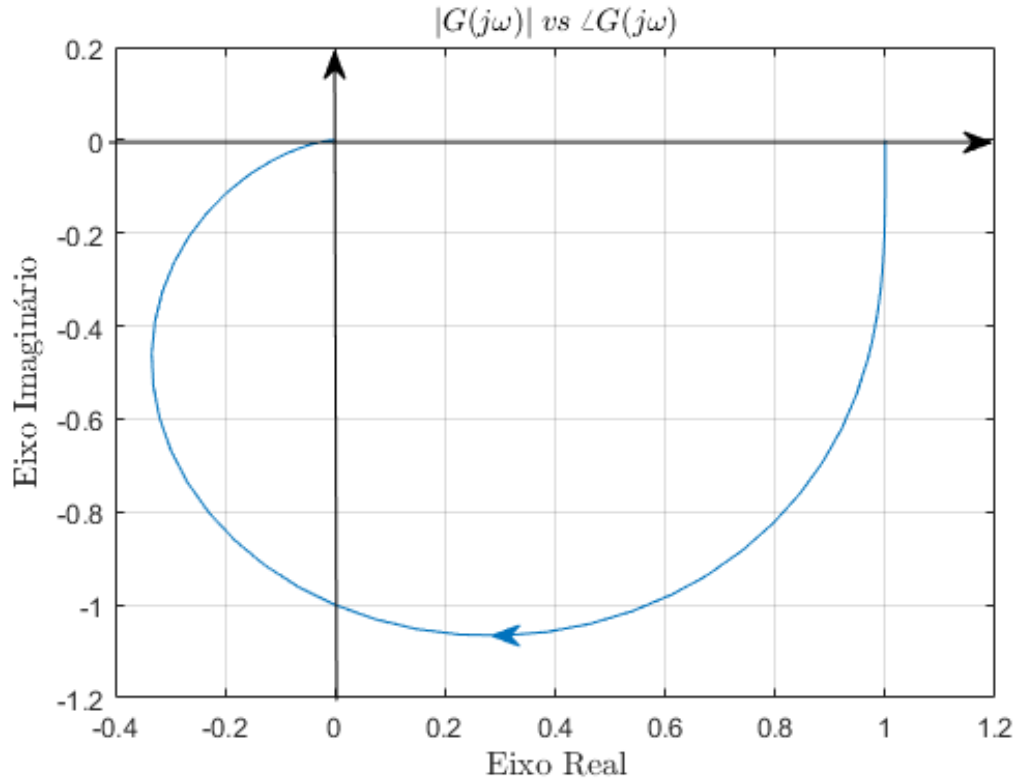


Figura 2.2: Exemplo de Diagrama de Nyquist para Sistema modelado por  $G(s)$   
 Fonte: DANTAS (2019)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (2.24)$$

O Diagrama de *Nyquist*, é um gráfico no qual o eixo radial representa a magnitude de ganho e o eixo angular representa o deslocamento de fase de um sistema de controle. Quando a curva do diagrama cruza o eixo real, há um ponto crítico de estabilidade que indica que a resposta do sistema está instável, além disso, as curvas de *Nyquist* são caracterizadas pela simetria em relação ao eixo real conforme apresentado na Figura 2.3.

O Diagrama de *Nyquist* é uma técnica muito útil para a análise de sistemas de controle, já que é possível avaliar a estabilidade do sistema sem precisar de uma simulação completa. É amplamente utilizado em áreas como engenharia de controle, eletrônica e telecomunicações para projetar e ajustar sistemas de controle e garantir sua estabilidade.

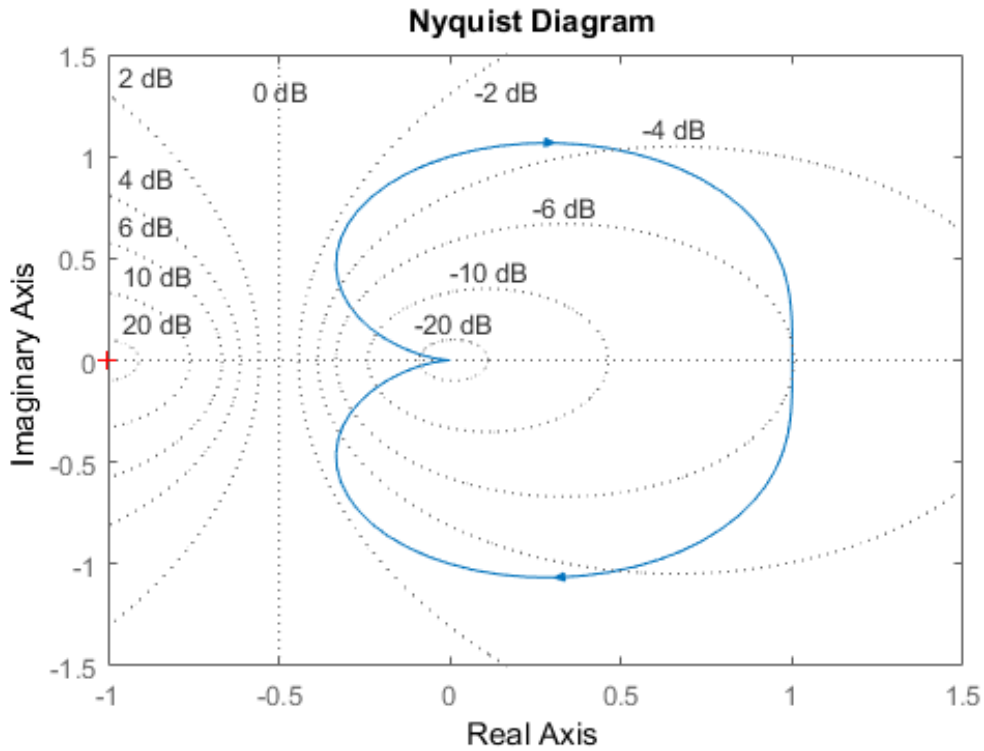


Figura 2.3: Diagrama de *Nyquist* com a Parte Espelhada  
 Fonte: DANTAS (2019)

Métodos para obtenção dos diagramas podem ser encontrados em livros de controle clássico como OGATA (2009), FRANKLIN et al. (2013) e SKOGESTAD and POSTLETHWAITE (2007).

### 2.2.2 Critério de Estabilidade de *Nyquist*

O critério de estabilidade de *Nyquist* determina a estabilidade do sistema, baseado na resposta em frequência de um sistema em malha aberta. Em um sistema no circuito fechado, descrito pela função de transferência apresentado na equação (2.25) e seu diagrama conforme a Figura 2.4:

$$G_{mf}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.25)$$

## Controlador PID

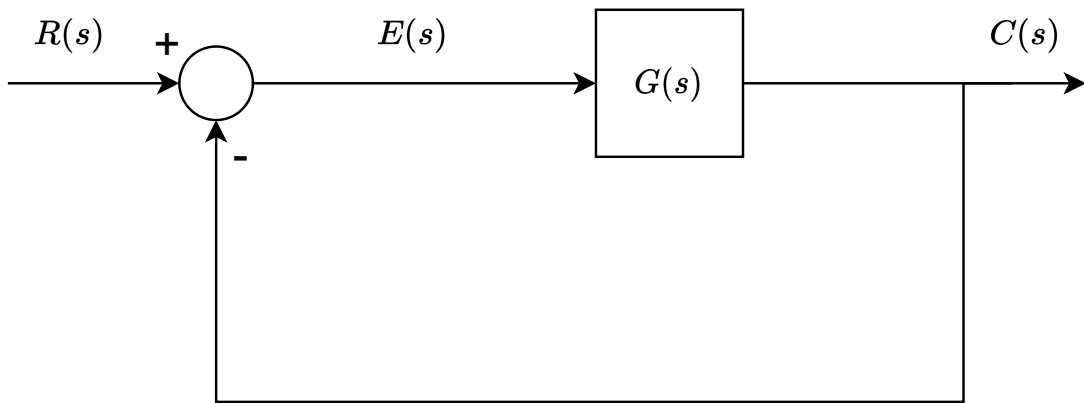


Figura 2.4: Diagrama de blocos de  $G_{mf}(s)$

Fonte: O autor

a equação característica é dada por

$$1 + G(s) = 0 \quad (2.26)$$

e para estabilidade, todas as raízes desta equação devem ter partes reais negativas, ou seja, pertencer ao semiplano esquerdo (SPE) no plano  $S$ . Esse critério de estabilidade da equação de *Nyquist* relaciona o número dessas raízes no semiplano direito (SPD) para com o número de voltas no ponto  $-1 + j0$  descrito na equação (2.27)

$$Z = N + P \quad (2.27)$$

na qual  $Z$  representa o número de polos de malha fechada situados no SPD,  $N$  o número de envolvimentos do ponto  $-1 + j0$ , no sentido horário, pelo traçado de *Nyquist* do ganho de malha de  $G(j\omega)$  e  $P$  o número de polos de malha aberta no semi-plano direito de  $G(s)$ .

O número  $N$  pode ser negativo como também positivo, dependendo da orientação da volta, para cada contribuição em volta no ponto no sentido horário em  $N$  é positiva, e para cada volta no sentido anti-horário conta como uma contribuição negativa. Esse argumento é baseado no teorema do mapeamento complexo ou Teorema Cauchy, que cria uma relação a curvas em domínios funcionais com o domínio  $s$ . Se-

segundo OGATA (2009) a análise de estabilidade do sistema pode ser resumido para três casos possíveis:

1. Não existir nenhum envolvimento do ponto  $-1 + j0$ , implicando que, o sistema será estável se não houver polos de malha aberta no SPD do plano  $s$ , e instável caso contrário;
2. Existir um ou mais envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido anti-horário, implicando que, para o sistema estável, nesse caso, o número de envoltimentos no sentido anti-horário tem que ser igual ao número de polos de malha aberta no SPD;
3. Existir um ou mais envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido horário, implicando nesse caso em instabilidade.

Baseado no teorema do mapeamento, FRANKLIN et al. (2013) resumem em quatro passos básicos o processo de determinação de estabilidade de um sistema pelo critério de estabilidade de *Nyquist*:

1. Obter o diagrama de *Nyquist* do ganho de malha do sistema, geralmente representado por (2.25);
2. Avaliar o número de envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido horário (N), se o envolvimento for no sentido anti-horário o número é negativo;
3. Determinar o número de polos instáveis em malha aberta (P);
4. Calcular o número de raízes instáveis em malha fechada:  $Z = N + P$

O critério de estabilidade de *Nyquist* apresenta diversas vantagens em relação a outros métodos de análise de estabilidade. Uma dessas vantagens é que ele possibilita uma representação gráfica da estabilidade do sistema, permitindo uma rápida avaliação da estabilidade sem a necessidade de cálculos matemáticos complexos. Além disso, esse critério pode ser utilizado tanto para analisar funções de transferência em malha aberta como sistemas em malha fechada, o que o torna uma ferramenta versátil para a análise de estabilidade. Ademais, o critério de estabilidade de *Nyquist* fornece informações sobre a margem de estabilidade do projeto de controladores que garantam a estabilidade em diversas condições. Por fim, ele considera toda a faixa de frequência do sistema, em vez de apenas uma frequência ou faixa de frequências, proporcionando uma análise mais abrangente da estabilidade do sistema.

## 2.3 Controlador Proporcional Integrativo Derivativo

O Controlador Proporcional Integrativo Derivativo (PID) une as ações proporcional, integral e derivativa num só controlador, atuando tanto no regime transitório quanto no regime permanente. São utilizados em sistema de controle industriais, onde ele introduz um polo em  $p = 0$  e dois zeros ao sistema, que dependem dos parâmetros de controlador GONTIJO et al. (2022).

Existem muitas maneiras de representar um controlador PID por função de transferência, uma delas é esta:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s} = K_c \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (2.28)$$

Na Figura 2.5, mostrado o controlador PID, como representação de diagramas de blocos.

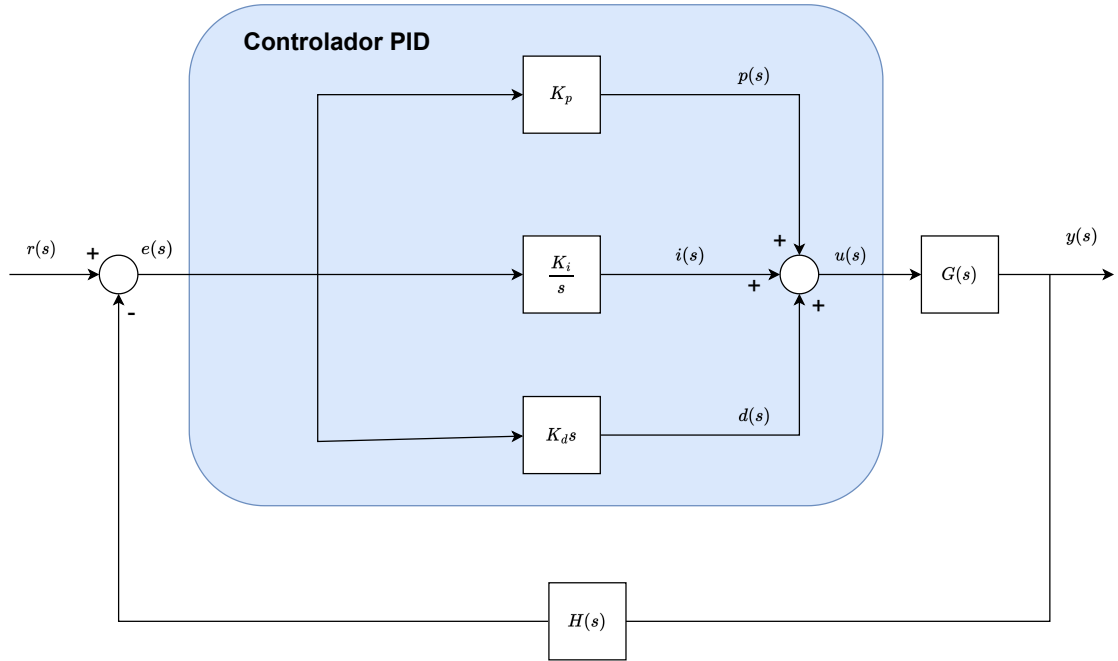


Figura 2.5: Diagrama de blocos do PID

Fonte: O autor

Na literatura de controle como OGATA (2009), o método Lugar Geométrico das Raízes (LGR), e as regras de sintonia de *Zigler-Nichols* são algumas técnicas de projetos de controladores PID.

Neste trabalho não utilizaremos soluções lineares, sim, soluções heurísticas, como o uso de Algoritmo Genético e em trabalhos futuros o algoritmo de Enxames de Partículas para encontrar os valores dos ganhos que satisfaçam as nossas restrições de estabilidade *Nyquist*.

## 2.4 Índices de desempenho

Os índices de desempenhos são medidas quantitativa do desempenho de um sistema, que considera fatores tais como erro de rastreamento e tempo de resposta. Para cada sistema é preciso identificar qual o fator mais relevante, para o qual se visa atingir o ótimo. Dizemos que o desempenho do sistema é **ótimo** quando o índice de desempenho selecionado é minimizado.

Alguns índices de desempenhos mais usados são:

- Integral do erro quadrático (*ISE* - *Integrated squared Error*)

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt \quad (2.29)$$

Essa passagem descreve um índice que é usado para medir a eficiência de uma malha de controle. O índice é chamado de *ISE* e é calculado integrando o quadrado do erro entre a resposta do sistema e o sinal de referência. O *ISE* é mais sensível aos erros grandes, pois eles contribuem mais para o resultado da integral do que erros menores. No entanto, esse índice pode fazer com que erros pequenos persistam no sistema por um período prolongado, o que pode levar a oscilações prolongadas e de pequena amplitude no sinal.

- Integral do erro absoluto (*IAE* - *Integrated Absolut Error*)

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt \quad (2.30)$$

A minimização do índice *IAE* tende a gerar resposta mais lentas do que a do *ISE* segundo OGATA (2009). A formulação é definida como integral do módulo do erro atuante, logo pode se notar que penaliza menos o erro se comparado com *ISE*, o *IAE* não, adiciona qualquer tipo de peso ao erro, ao minimizar o sistema considerando *IAE* podemos afirmar que a resposta será mais lenta, contudo espera-se que o sistema de controle apresente menos oscilações na saída.

- Integral do tempo multiplicado pelo erro absoluto (*ITAE* - *Integrates Timed Absolut Error*)

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \quad (2.31)$$

O *ITAE* é mais seletivo do que outros índices porque seu valor mínimo é facilmente identificável em fator do amortecimento  $\zeta$  do sistema. Quando os controladores são ajustados para minimizar o *ITAE*, os sistemas tendem a alcançar o regime permanente de forma mais rápida, porque o índice leva em consideração tanto a magnitude quanto a duração do erro presente na resposta do regime transitório.

- Integral do tempo multiplicada pelo erro ao quadrado (*ITSE* - *Integrated Timed Squared Error*)

$$ITSE = \int_0^T te^2 dt \quad (2.32)$$

O *ITSE*, como também *ITAE* foca nas penalizações de oscilações persistentes, com objetivo de reduzir o tempo de acomodação.

## 2.5 Margem de Estabilidade

A capacidade de um sistema de segunda ordem em manter a estabilidade e o desempenho diante de incertezas e perturbações externas é conhecida como robustez. Isso significa que um sistema robusto consegue lidar com variações em suas condições de operação e manter um comportamento estável e desejado.

Vários fatores podem influenciar a robustez de um sistema de segunda ordem, incluindo a localização dos polos do sistema no plano complexo, a razão de amortecimento e a frequência natural. Quanto mais distantes os polos do sistema estiverem do eixo imaginário, maior será a robustez, pois o sistema será menos suscetível a perturbações na fase.

Outro fator que pode afetar a robustez de um sistema de segunda ordem é a razão de amortecimento. Sistemas com alta razão de amortecimento tendem a ser mais robustos, uma vez que o amortecimento limita o impacto das perturbações no sistema. Além disso, a frequência natural do sistema também influencia na robustez, já que sistemas com frequências naturais mais baixas tendem a ser mais robustos do que aqueles com frequências naturais mais altas.

Em síntese, é crucial garantir a robustez de um sistema de segunda ordem para que ele possa manter a estabilidade e o desempenho adequados em condições variáveis e adversas.

O critério de estabilidade de *Nyquist* permite estabelecer se um sistema linear é estável em malha fechada, a partir de sua resposta em frequência em malha aberta, mais especificamente do seu *diagrama polar*, ou *diagrama de Nyquist*. O critério baseia-se na seguinte equação FRANKLIN et al. (2013):

$$N = Z - P, \quad (2.33)$$

sendo  $P$  o número de polos de malha aberta no semiplano direito,  $Z$  o número de polos de malha fechada no semiplano direito e  $N$  o número de voltas que o

diagrama de *Nyquist* faz em torno do ponto crítico  $-1 + j0$  no sentido horário. Para estabilidade em malha fechada deve-se ter, portanto,  $Z = N + P = 0$ , logo,  $N = -P$ , ou seja, o diagrama de *Nyquist* deve dar tantas voltas no sentido anti-horário em torno de  $-1 + j0$  quanto seja o número de polos de malha aberta no semiplano direito.

Esse critério garante *estabilidade nominal*, ou seja, considerando que o modelo do sistema é exato, o que não ocorre na prática. Uma solução para tornar o controlador robusto em relação a desvios no modelo nominal é estabelecer uma “região de segurança” em torno do ponto crítico, na forma de um círculo de raio  $M_s^{-1}$  centrado nele, sendo  $M_s$  o pico da função de sensibilidade. Como mostrado em (SKOGESTAD and POSTLETHWAITE, 2007), no caso de sistemas estáveis em malha aberta, ao se garantir que a curva de *Nyquist* não faz voltas em torno deste círculo, garantem-se limitantes inferiores para as margens de ganho e de fase.

Para implementar um controle robusto e com melhor desempenho, Rego et al. (2017) propõem o uso de um círculo de raio  $M_s^{-1}$  centrado em  $(-1 + 0j)$  e visa fazer com que a curva do diagrama de *Nyquist* (em azul na Figura 3.1) tangencie esse círculo (em vermelho na Figura 3.1) são utilizados valores de  $M_s$  entre 1, 3 e 2, como indicado por Astrom (1995).



---

## Capítulo 3

# Formulação do Problema

---

Modelos dinâmicos lineares de segunda ordem são utilizados com frequência em análise de fenômenos vibratórios em estruturas flexíveis que usam modelos de parâmetros concentrados. A equação diferencial de modelos de segunda ordem controlados por uma entrada, contendo  $n$  graus de liberdade, definida sobre um deslocamento generalizado  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t) \quad (3.1)$$

O sistema matricial de equações diferenciais de segunda ordem mostrado em (3.1), aparece em uma gama variada de aplicações em análises estruturais e vibrações como em (BALAS, 1982) e (VANDERVELDE, 1986), em que  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  são matrizes, respectivamente, de massa, amortecimento e rigidez do sistema;  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  é uma matriz de influência (atuação);  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$  denotam respectivamente aceleração e velocidade generalizadas;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado; e  $u \in \mathbb{R}$  é o esforço de controle.

Aplicando agora a transformada de *Laplace* a (3.1) obtém-se:

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{b}\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s), \quad (3.2)$$

sendo  $\mathbf{H}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{b}$  definida como a *matriz de receptância* em malha aberta do sistema.

O problema estudado consiste em controlar vibrações do sistema, com a possibilidade de rastreamento de uma referência constante por um dos graus de liberdade, utilizando realimentação de saída com robustez garantida. A saída é definida por:

$$y(t) = \mathbf{l}\mathbf{x}(t) \quad (3.3)$$

em que  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  é uma matriz de composição de sensores.

Para uma dada referência  $r(t)$ , o erro de rastreamento é definido por:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3.4)$$

Um controlador *PID*, que possui a capacidade inerente de rastreamento para referências constantes com erro de regime permanente nulo (FRANKLIN et al., 2013), é então proposto como solução do problema, considerando a presença de

atraso de medição, isto é:

$$u(t) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (3.5)$$

em que  $k_p, k_i$  e  $k_d \in \Re$  são, respectivamente, os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador. Aplicando a transformada de Laplace em (3.3), (3.4) e (3.5) obtém-se:

$$U(s) = -(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) e^{-\tau s} \mathbf{I} \mathbf{X}(s) + V(s), \quad (3.6)$$

em que  $q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$  e  $V(s) = q(s)R(s)$ .

Da substituição de (3.6) em (3.1) resulta:

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s} q(s) \mathbf{b} \mathbf{l}] \mathbf{X}(s) = \mathbf{b} V(s). \quad (3.7)$$

Logo,

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s} q(s) \mathbf{b} \mathbf{l}]^{-1} \mathbf{b} V(s) = \hat{\mathbf{H}}(s) \mathbf{V}(s) \quad (3.8)$$

Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* (2.15) na inversa presente em (3.8), obtém-se a matriz de receptância de malha fechada do sistema, dada por:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{H}(s) \mathbf{b} \mathbf{l} \mathbf{H}(s) e^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{l} \mathbf{H}(s) \mathbf{b} e^{-\tau s}} \quad (3.9)$$

Nota-se que a receptância de malha fechada pode ser construída apenas com o conhecimento da receptância de malha aberta  $\mathbf{H}(s)$ , dispensando assim o conhecimento das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ . Resultados expressivos sobre controle de vibrações utilizando receptâncias podem ser acessados na literatura recente (ARAÚJO and SANTOS, 2018; ARAÚJO, 2018a; SANTOS et al., 2018; Singh et al., 2019; Dantas et al., 2020b, 2021; Richidei et al., 2022).

## 3.1 Parâmetro de Projeto e Formulação Matemática

Margens de ganho e de fase são usualmente utilizadas como parâmetros de projeto de controladores por resposta em frequência. As relações entre a resposta temporal e essas margens fornecem boas referências, ainda que dadas de maneira indireta, para o controle de sistemas via resposta em frequência.

### 3.1.1 Circunferência $M_s$

Em vista das dadas as discussões anteriores sobre estabilidade com a definição do critério de estabilidade de *Nyquist*, uma conclusão para sistemas estáveis em malha aberta, ou seja, sem nenhum polo de malha aberta no SPD ( $P = 0$ ), é que não deve haver nenhum envolvimento do ponto  $-1 + j0$  pelo diagrama de *Nyquist*

do sistema. Assim, surge a ideia de se definir como parâmetro de projeto uma medida que garanta estabilidade visando atender a este critério. (SKOGESTAD and POSTLETHWAITE, 2007) trazem a ideia da relação entre o chamado pico máximo da função de sensibilidade e a menor distância entre o ponto  $-1 + j0$  e o diagrama de *Nyquist* do ganho de malha do sistema apresentado. Baseado nesse conceito, define-se uma circunferência de raio  $M_s^{-1}$  centrada no ponto  $-1 + j0$  delimitando a região onde o traçado de *Nyquist* é permitido, assim, garantindo uma distância segura do ponto  $-1 + j0$ , ilustrando a ideia de sistema robusto, é matematicamente definida como:

$$GM \geq \frac{M_s}{M_s - 1}; \quad PM \geq 2\arcsen\left(\frac{1}{2M_s}\right) \geq \frac{1}{M_s}[\text{rad}] \quad (3.10)$$

sendo a margem de ganho ( $GM$  - *Gain Margin*) e a margem de fase ( $PM$  - *Phase Margin*). da equação (3.10) pode-se concluir que, definido um valor  $M_s$  garante-se um mínimo valor de  $GM$  e  $PM$ .

Na literatura clássica de controle, como nos livros de OGATA (2009) e FRANKLIN et al. (2013), a margem de ganho é descrita como um fator pelo qual o ganho do sistema pode ser aumentado antes de atingir a instabilidade. A influência dessa margem na resposta temporal do sistema é refletida em sua velocidade, em que sistemas com margens de ganho menores alcançam respostas mais rápidas. O indicador de robustez, representado por  $M_s$ , estabelece um limite mínimo de margem de ganho que ainda seria considerado confortável. Portanto, a menor margem de ganho (e consequentemente melhor desempenho em termos de velocidade de resposta) ocorre quando satisfazemos a equação (3.11).

$$GM = \frac{M_s}{M_s - 1} \quad (3.11)$$

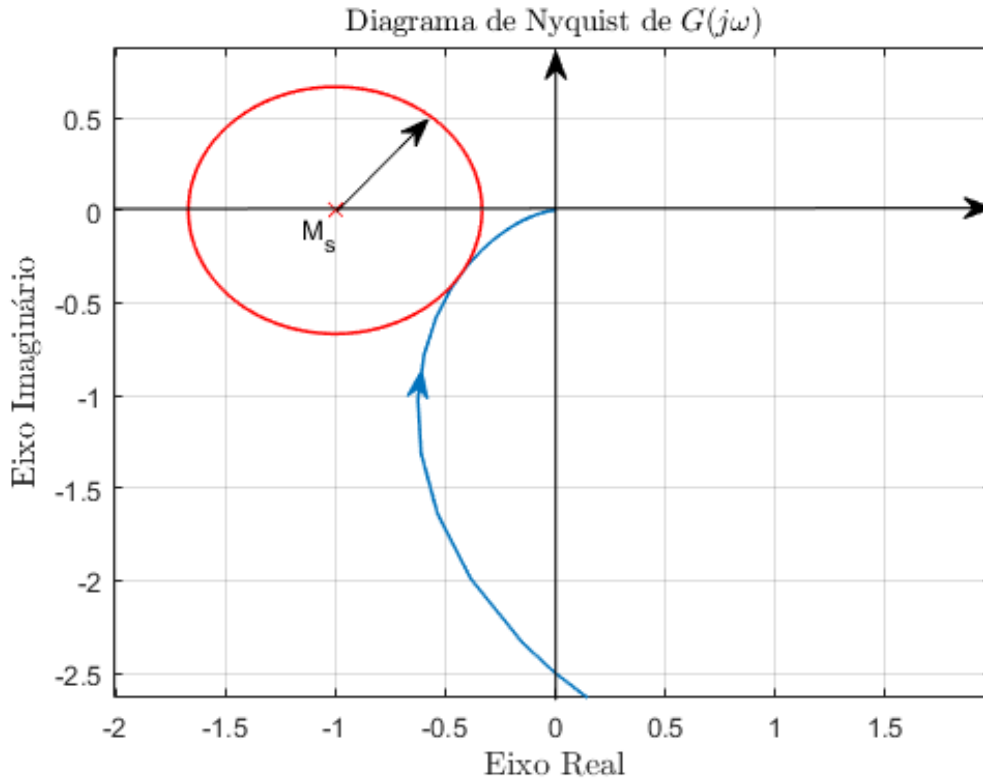


Figura 3.1: Diagrama de Nyquist Exemplo de Circunferência.  $M_s$   
 Fonte: DANTAS (2019)

### 3.1.2 Definição do problema de otimização

A Figura 3.1 mostra o diagrama de *Nyquist* de um sistema genérico (traçado em azul) e uma circunferência (em vermelho) representando a circunferência  $M_s$ . À medida que o ganho do sistema aumenta o diagrama de *Nyquist* tende a tangenciar a área da circunferência e se aproxima do ponto  $-1 + j0$  chegando próximo da fronteira da instabilidade.

#### Otimização de Robustez

Define-se como parâmetro de projeto que o sistema tenha uma distância mínima do ponto  $-1 + j0$  definida pelo raio dessa circunferência. A solução apresentada neste trabalho visa garantir uma estabilidade robusta, com objetivo de que mesmo sujeito a alterações de parâmetros o sistema seja estável. Para isso deve-se manter o ponto  $-1 + j0$  a uma distância segura de  $L(j\omega)$ , o que pode ser interpretado como o traçado de  $L(j\omega)$  fora de uma circunferência centrada em  $-1 + j0$  cujo raio seria a distância mínima desejada com o cuidado de não apresentar soluções nas quais as curvas de  $L(j\omega)$  estejam muito afastadas do círculo, o que levaria a respostas muito lenta. Dessa forma, busca-se fazer com que a curva de  $L(j\omega)$  tangencie o círculo  $M_s$  estabelecido e então o seguinte problema de otimização pode ser formulado

semelhante ao proposto em Dantas et al. (2021):

$$\min_{k_p, k_i, k_d} = \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \quad (3.12)$$

$$s.a \text{ Re} \{L(j\omega)\} \geq -1 + M_s^{-1} \quad \forall \quad \omega / \text{Im} \{L(j\omega)\} = 0 \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \\ N &= -P \end{aligned} \quad (3.14)$$

sendo  $\omega$  variando de zero a um valor elevado o suficiente para que  $|L(j\omega_i)| \simeq 0$ . A equação (3.12) estabelece o problema de minimização da função, que por ser uma função quadrática tem seu valor mínimo para  $\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| = M_s^{-1}$ , e como  $(\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1|)$  é a menor distância entre  $L(j\omega)$  e o ponto  $-1 + j0$ , dará num ponto tangente à circunferência de raio  $M_s^{-1}$ .

### Otimização de Desempenho

O problema de otimização dado pela equação (3.12) não garante, todavia que o desempenho da resposta seja considerada diretamente, apesar da ideia de robustez. Assim, propomos a otimização de desempenho definido matematicamente pela equação (3.15) que estabelece a busca por um conjunto de ganho de controlador com objetivo de maximizar o desempenho do sistema.

$$\min_{k_p, k_i, k_d} = \int_0^t |e(t)| dt \quad (3.15)$$

$$s.a \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \leq \epsilon \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \\ N &= -P \end{aligned} \quad (3.17)$$

Em alguns trabalhos na literatura o desempenho do sistema é abordado utilizando-se de técnicas de ajuste de curva, sintonia de ganhos do controlador, integral do erro como índice de *IAE*. Nesse trabalho, adotamos a minimização do *IAE*, assim melhorando o desempenho do sistema de segunda ordem com atraso. A restrição dada pela equação (3.16) garante que a solução aleatória mostrado na Figura 3.2 não sejam obtidas pela busca, pois pelo critério de estabilidade de *Nyquist* esse exemplo ilustra um caso de instabilidade MARTINS et al. (2020).

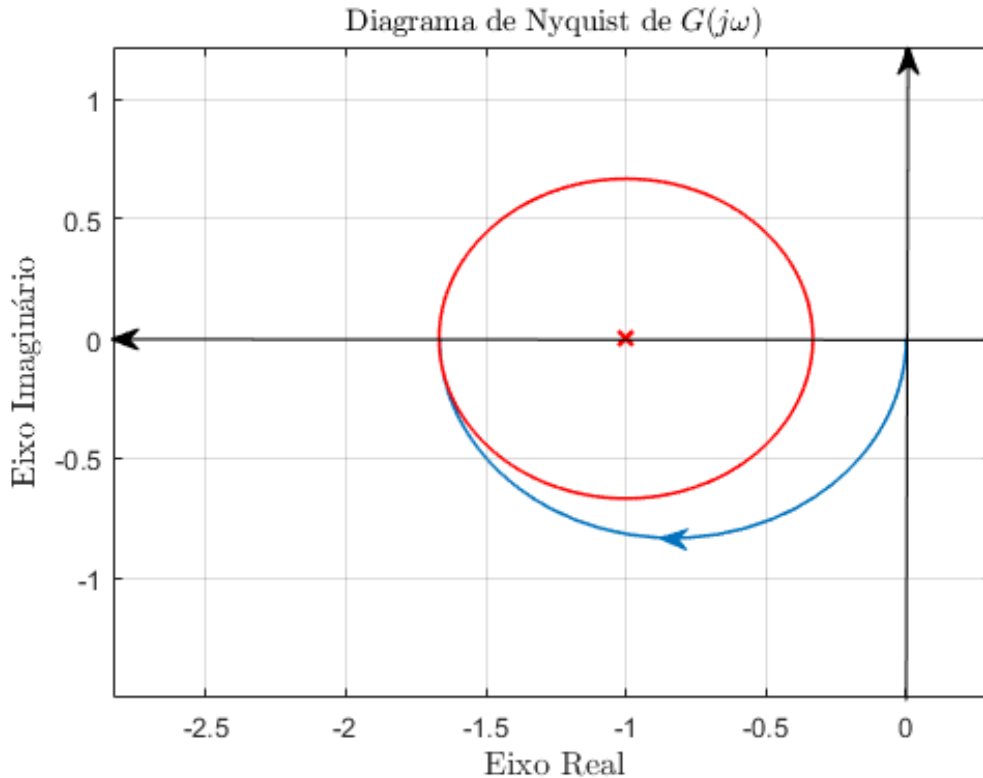


Figura 3.2: Diagrama de *Nyquist* de um Sistema Genérico para Exemplo de um Caso de Instabilidade.

Fonte: DANTAS (2019)

### Sintonia Robusta com Otimização de Desempenho

Em matéria de sistema de controle, a robustez de um sistema, e o desempenho são parâmetros concorrentes, o qual não é possível melhorar esses critérios de controle de forma igualitária. Por isso, decidimos propor uma solução que tende a realizar a otimização desses parâmetros, de tal forma que na mesma proporção que maximizamos o desempenho do sistema, tentamos maximizar a robustez, de forma que ambos os parâmetros tenha mesma importância na otimização.

Além de pospormos a otimizar desses parâmetros concorrentes, existentes em projeto de sistema de controle, também queremos garantir que o método desenvolvido seja aplicável para sistema estáveis em malha aberta, e instáveis. Assim, a receptância de malha fechada (3.9) sob o controlador *PID*. A presença do atraso de transporte torna a equação característica:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{I} \mathbf{H}(s) \mathbf{b} e^{-\tau s} = 0 \quad (3.18)$$

uma equação não-polinomial, que apresenta infinitas soluções. O estudo da estabilidade em problemas deste tipo não é uma tarefa trivial, entretanto métodos no domínio da frequência baseados no *critério de Nyquist* permitem uma avaliação

precisa da estabilidade em malha fechada do sistema na presença do atraso de transporte.

Métodos existentes na literatura de controle de sistemas de segunda ordem lidam com problemas que consideram o termo exponencial do atraso em seus modelos utilizando aproximações, tais como a conhecida aproximação de Padé e, em alguns casos, as séries de Taylor e *Maclaurin*. Em (MOTTERSHEAD and RAM, 2007) é evidenciado um dos problemas no cálculo de ganhos de controladores para sistemas com atraso utilizando aproximações: as soluções não garantem que todos os polos de malha fechada fiquem restritos ao semiplano esquerdo. Outro aspecto que desencoraja o uso de aproximações é que para boas representações se faz necessário o uso de funções polinomiais de ordem bastante elevada.

Visto que as soluções para o problema de cálculo de ganhos dos controladores em sistemas com atraso demandam estabilidade em malha fechada, este problema de controle pode ser formulado como um problema de otimização baseado em um parâmetro de desempenho dos controladores sob a restrição de estabilidade. Para este trabalho objetiva-se a minimização da integral do erro absoluto sujeito ao atendimento do critério de estabilidade de *Nyquist* conforme descrito a seguir:

A restrição (3.20), se satisfeita, garante uma distância mínima entre a curva de *Nyquist* e o círculo  $M_s$ , proporcionando uma margem de estabilidade robusta pré-estabelecida.

Já a restrição (3.21) representa a garantia de estabilidade segundo o critério de *Nyquist* que afirma que, para cada polo de malha aberta presente no semiplano direito, um envolvimento do ponto crítico  $-1 + j0$  no sentido anti-horário é necessário. Qualquer envolvimento do ponto crítico pela curva de *Nyquist* no sentido horário resulta em instabilidade.

$$\min_{k_p, k_i, k_d} (1 - \alpha) * \int_0^t |e(t)| dt + \alpha \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \quad \forall \quad \alpha \in \{0, 1\} \quad (3.19)$$

$$s.a \quad \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \leq \epsilon \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \\ N &= -P \end{aligned} \quad (3.21)$$





---

## Capítulo 4

# Implementação do Método Proposto

---

Este capítulo apresenta o método desenvolvido para alcançar os resultados apresentados no Capítulo 5. A busca por uma solução para o problema de otimização descrito no Capítulo 3 é feita usando um algoritmo genético, um algoritmo estocástico baseado em população que procura soluções aleatoriamente por meio de mutação e cruzamento entre os membros da população. Este algoritmo pode ser utilizado para solucionar problemas de otimização, tanto suaves como não suaves, com restrições lineares ou não lineares MATHWORKS. (2019); GOLDBERG and Holland (1988).

### 4.1 Solução do Problema de Otimização

Uma das alternativas para solucionar problemas de otimização, como o descrito na equação (3.19), é o uso do algoritmo genético (GA), um método para solução de problemas de otimização com ou sem restrições baseado no processo de seleção natural que imita a evolução biológica. O GA é um pioneiro na solução de problemas do tipo abordado neste trabalho MATHWORKS. (2019). O algoritmo funciona repetitivamente alterando a população de soluções individuais. A cada etapa, o algoritmo genético escolhe aleatoriamente indivíduos da população atual e os utiliza como pais para gerar filhos para a geração seguinte. Ao longo de sucessivas gerações, a população evolui até chegar a uma solução ótima. O que é perfeitamente adequado ao objetivo de procura para o problema descrito pela equação (3.13).

O algoritmo genético pode ser utilizado para resolver problemas que não são adequados aos algoritmos de otimização padrão, incluindo aqueles na qual a função objetivo é descontínua, não diferenciável, estocástica ou altamente não linear.

#### Simulação do sistema para cálculo do *IAE*

A função Integral do Erro Absoluto é um indicador que avalia o desempenho do sistema conforme descrito na seção 2.4. Esse indicador considera o erro de rastreamento, ou seja, a diferença entre o sinal de saída e o sinal de referência. O cálculo da integral do valor absoluto desse erro feito a partir da simulação da resposta do

sistema com os valores do ganho do controlador associados a cada indivíduo da busca.

Neste trabalho, foi usado a ferramenta MATLAB/Simulink<sup>®</sup> para efetuar a simulação conforme o diagrama apresentado na Figura 4.1. Usando o resultado da simulação, o *IAE* calculado e seu valor salvo em uma variável com mesmo nome.

Apresentado no Algoritmo 1 emprega a simulação mencionada para calcular o índice *IAE* para cada indivíduo da população, sendo que cada indivíduo é composto por  $K_p$ ,  $K_i$  e  $K_d$ . As demais variáveis necessárias para a execução da simulação são carregadas no *Workspace* do *software* MATLAB<sup>®</sup>. A função importa os parâmetros do controlador para a simulação e a executa, utilizando as variáveis do *Workspace*. Após a conclusão da simulação, a função retorna o valor do *IAE*.

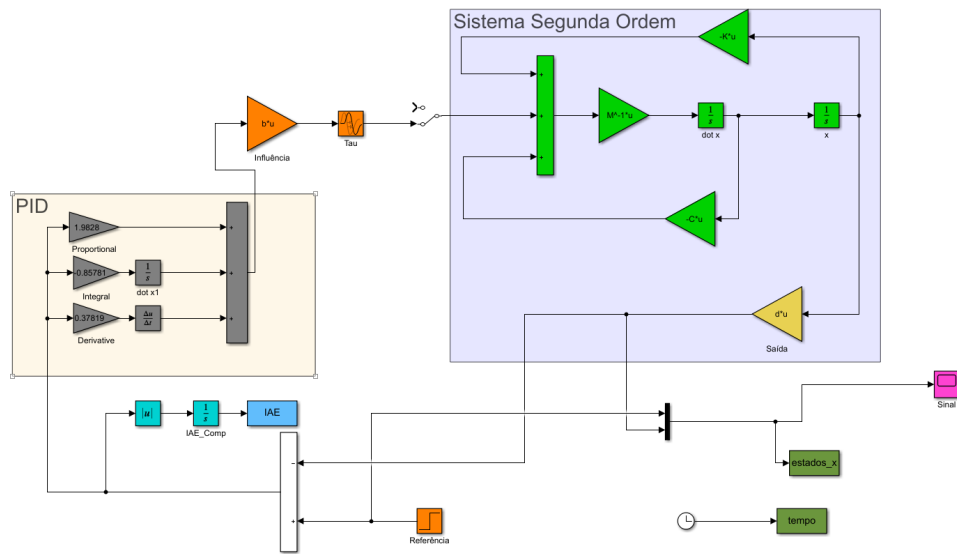


Figura 4.1: Simulação criada com MATLAB/Simulink<sup>®</sup>

---

### Algoritmo 1: Função IAE

---

**Entrada:** populacao e simulink

**Saída:** IAE

```

1 Kp = populacao(1);
2 Ki = populacao(2);
3 Kd = populacao(3);
4 setParam(strcat(simulink, "/Proportional"), "Gain", num2str(Kp));
5 setParam(strcat(simulink, "/Integral"), "Gain", num2str(Ki));
6 setParam(strcat(simulink, "/Derivative"), "Gain", num2str(Kd));
7 sim(simulink);
8 IAE = IAE(length(IAE));

```

---

### Algoritmo genético desenvolvido

No trabalho apresentado, optou-se por desenvolver o algoritmo genético devido à facilidade de otimização dos hiperparâmetros e obtenção de melhores resultados com variações dos métodos principais do GA, tais como seleção, cruzamento e mutação. SOUZA e CARVALHO (2020)

Os passos do algoritmo genético implementado foram:

1. Inicialização: Uma população inicial de soluções é gerada aleatoriamente de **kp**, **ki** e **kd**.
2. Seleção: Os indivíduos são ordenados de forma que os ganhos do controlador que tiveram melhor resultados estão no início da população e esses são selecionados para reprodução. Esse tipo de seleção é denominado de elitista.
3. Cruzamento: Os ganhos do controlador *PID* selecionados são usadas como pais para produzir novos indivíduos (filhos).
4. Mutação: Alguns dos indivíduos produzidos são submetidos a pequenas alterações aleatórias (mutações).
5. Avaliação: A nova geração de soluções é avaliada em termos da sua aptidão com a função de custo. Neste trabalho utilizamos a robustez do sistema medida pelo valor de  $M_s$ , integral do erro absoluto e concorrência entre eles.
6. Variabilidade Genética: Implementamos esse cálculo a fim de verificar a variação dos resultados da função de custo, reduzindo o número de iterações desnecessárias, que não apresentam ganhos significativos.
7. Substituição: A nova geração de soluções é substituída pela antiga, formando a nova população.
8. Repetição: O processo é repetido sucessivas vezes até que se atinja uma solução ótima ou se alcance um critério de parada.
9. Resultado: A melhor solução encontrada é retornada como resultado do algoritmo genético.

Essas variações no comportamento do passo de seleção, como seleção por elitismo, seleção randômica, seleção por roleta, bem como variações no método de cruzamento, como cruzamento em dois pontos ou uniforme, e a mutação gaussiana ou uniforme, podem trazer grandes ganhos na otimização do GA, dependendo da formulação do problema e de como ele se comporta no espaço de amostra SOUZA e CARVALHO (2020).

As etapas para obtenção dos ganhos do controlador que resolvem o problema de otimização estão descritos no Algoritmo 2. Os dados de entrada do algoritmo são:

o sistema de segunda ordem (**M**, **C**, **K**, **B**, **I**), o atraso do sistema  $\tau$ , o vetor de frequências  $\omega_i$  sobre as quais a resposta em frequência do sistema será avaliada, o valor desejado para a medida de robustez e o nome do arquivo de simulação do sistema **Simulink** apresentado na Figura 4.1.

A execução do algoritmo requer as seguintes funções auxiliares: uma função de restrições para descrever as limitações impostas pelas equações (3.13), uma função de robustez que avalia a capacidade do sistema em malha fechada de lidar com

variações, conforme definida pela equação (3.19), uma função *IAE* associada a um dado indivíduo que calcula a integral do erro absoluto do sistema em malha fechada, conforme definido pela equação (2.31), e uma função *Fitness* que calcula o valor a ser minimizado pelo algoritmo genético. Dependendo do valor da variável *alfa*, a robustez do sistema ou o IAE em malha fechada podem ser otimizados, bem como a combinação desses parâmetros no sistema.

**Algoritmo 2:** Função de Busca

---

**Entrada:**  $M$ ;  $C$ ;  $K$ ;  $B$ ;  $l$ ;  $\tau$ ;  $\omega$ ;  $M_s$  e *simulink*  
**Saída:**  $\text{gain} = [\text{Kp} \ \text{Ki} \ \text{Kd}]$ ;

```

1  populacao = random(n);
2  objetivo = "execute";
3  execucao = 0;
4  variabilidade = 1;
5  evolucao = 0;
6  alfa = random(0,1);
7  n = 100;
8  repita
9      para geracao=1 até geracao=n faça
10         avalicao = []
11         se execucao > 0 então
12             | populacao(2:n,:) = random(n-1);
13         fim
14         para i = 1 até populacao=n faça
15             |  $L \leftarrow \text{LFunction}(M, C, K, B, l, \tau, \omega, \text{populacao}(i, 1:3))$ ;
16             |  $\text{robustez} \leftarrow \text{RobustezFunction}(L(s), M_s)$ ;
17             |  $\text{restrictions} \leftarrow \text{RestrictionsFunction}(L(s), 0)$ ;
18             |  $\text{IAE} \leftarrow \text{IaeFunction}(\text{populacao}, \text{simulink})$ ;
19             |  $\text{ff} \leftarrow \text{FitnessFunction}(\text{IAE}, \text{robustez}, \text{alfa})$ ;
20             |  $\text{avaliacao}(i, 1:\text{end}) = [\text{ff}, \text{restrictions}]$ ;
21             |  $i = i + 1$ ;
22         fim
23         populacao = [populacao avaliacao];
24         populacao  $\leftarrow \text{AssortmentFunction}(\text{populacao})$ ;
25         populacao  $\leftarrow \text{CrossoverFunction}(\text{populacao}(1:n, 1:\text{end}-2))$ ;
26          $L \leftarrow \text{LFunction}(M, C, K, B, l, \tau, \omega, \text{populacao}(1, 1:3))$ ;
27          $\text{robustez} \leftarrow \text{RobustezFunction}(L(s), M_s)$ ;
28          $\text{restrictions} \leftarrow \text{RestrictionsFunction}(L(s), 0)$ ;
29          $\text{IAE} \leftarrow \text{IaeFunction}(\text{populacao}, \text{simulink})$ ;
30          $\text{ff} \leftarrow \text{FitnessFunction}(\text{IAE}, \text{robustez}, \text{alfa})$ ;
31         se ( $\text{ff} < 0.4 \ \&\& \ \text{restrictions} < 0.9$ ) || ( $\text{execucao} >$ 
           | 2 &&  $\text{Restrictions} < 0.9$ ) então
32             | objetivo = "fim";
33             | melhorIndividuo = populacao(1,:);
34             | interromper;
35         fim
36         VariabilidadeFunction(variabilidade, evolucao, ff);
37         geracao = geracao + 1;
38     fim
39     execucao = execucao + 1;
40 até (objetivo  $\neq$  "fim");
  
```

---

### População inicial

A primeira etapa na configuração de um algoritmo genético consiste em criar a população inicial. Esse termo, assim como todos os outros relacionados ao algoritmo, é inspirado na analogia com a teoria da evolução biológica. No contexto de otimização, ele se refere ao conjunto inicial de soluções possíveis para o problema específico em questão.

Neste trabalho, optou-se pelo desenvolvimento de um conjunto aleatório de indivíduos para a população. Inicialmente, criamos uma população com cem indivíduos, onde o primeiro *locus* corresponde a  $Kp$ , seguido por  $Ki$ , e  $Kd$ .

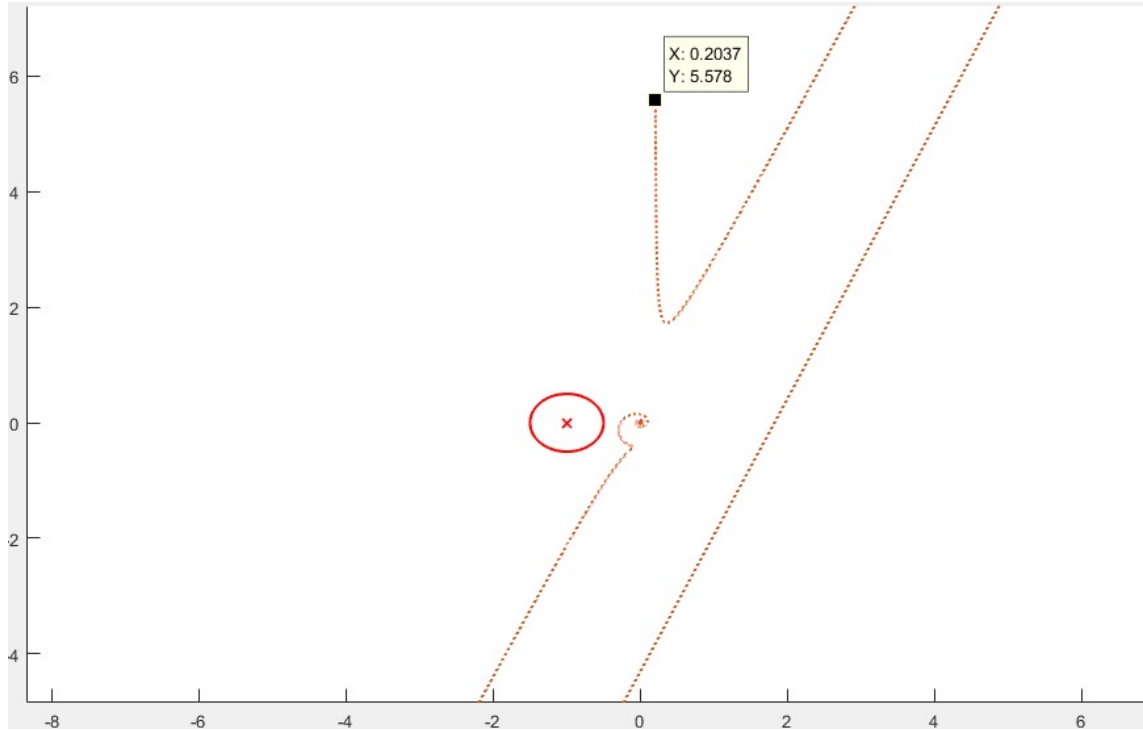
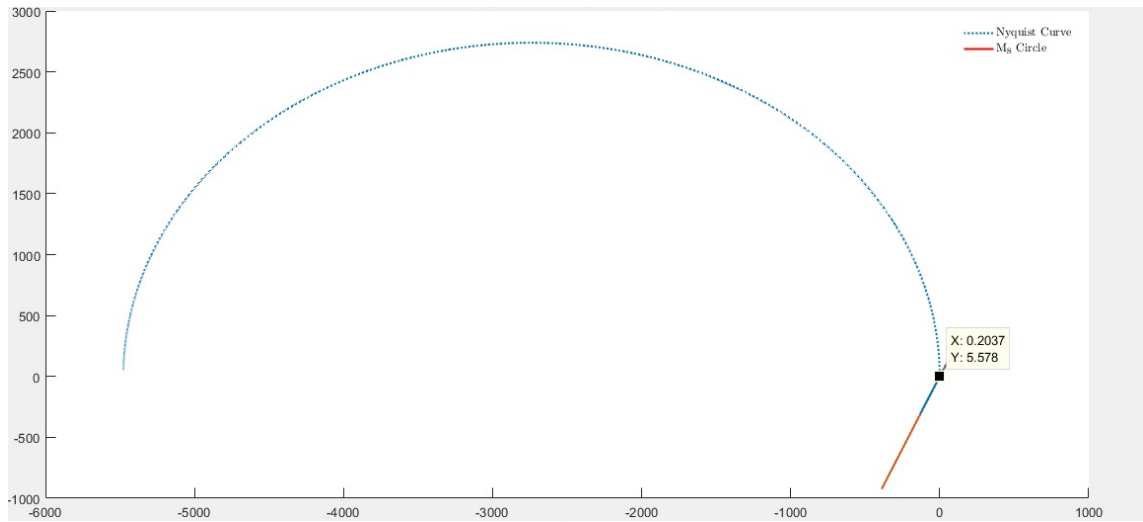
## 4.2 Implementação do Algoritmo de Otimização

Nesta seção, discutiremos detalhes relativos ao desenvolvimento e implementação das teorias apresentadas neste trabalho.

### Ganhos infinitos da resposta em frequência devido ação integral

Devido à natureza da ação integral do controlador  $PID$ , o módulo da resposta em frequência do ganho de malha atende a infinito para baixas frequências, dificultando a contagem do número de voltas do diagrama de *Nyquist* em torno do ponto crítico.

Por exemplo, quando utilizamos o sistema do exemplo 5.1.3, do capítulo 5 o método resultou nos seguintes ganhos do controlador  $PID$  [7.9574 14.8018 3.5920] respectivamente  $Kp$ ,  $Ki$ ,  $Kd$  na Figura 4.2, o qual as frequências  $\omega$  tem uma variação no intervalo de  $[10^{-1} \ 10^3]$  podemos observar que o diagrama não envolve o ponto crítico  $-1 + j0$ , e com base na definição de estabilidade de *Nyquist* o sistema seria estável em malha aberta. Mas, para os mesmo valores dos ganhos, com a variação de  $\omega$  no intervalo de  $[10^{-6} \ 10^3]$ , quando observamos a Figura 4.3, o gráfico envolve o ponto crítico.

Figura 4.2: Diagrama de *Nyquist* para  $\omega \in [10^{-1}, 10^3]$ Figura 4.3: Diagrama de *Nyquist* para  $\omega \in [10^{-6}, 10^3]$ 

Como solução inicial, introduzimos uma perturbação na ação integrativa o qual é matematicamente expressa pela equação (4.2), calculando o limite  $\omega(i) \rightarrow 0$  obtemos o seguinte resultado:

$$\lim_{\omega(i) \rightarrow 0} \frac{Ki}{j \times \omega(i)} = \lim_{\omega(i) \rightarrow 0} \frac{Ki}{j \times 0} = \lim_{\omega(i) \rightarrow 0} \frac{Ki}{0} = +\infty \quad (4.1)$$

Ao introduzir a perturbação no denominador da ação integrativa conforme a equação (4.3). Assim ao para valores baixos de  $j \times \omega(i)$ , devido a perturbação evitamos valores infinitos para ação integrativa, porque a resultados do denominador não irá tender a zero para frequência muito baixas, fazendo que o cálculo do diagrama de *Nyquist* não tenha uma representação errada na função L exposta no Algoritmo 3.

$$\frac{Ki}{j \times \omega(i)} \quad (4.2)$$

$$\frac{Ki}{j \times \omega(i) + 0.0001} \quad (4.3)$$

---

### Algoritmo 3: Função L

---

**Entrada:** M; C; K; B; l;  $\tau$ ;  $\omega$  e populacao

**Saída:** L

```

1 Kp = populacao(1);
2 Ki = populacao(2);
3 Kd = populacao(3);
4 para i = 1 até i = comprimento( $\omega$ ) faça
5    $\beta = j \times \omega(i)$ ;
6    $L(i) = (Kp + \frac{Ki}{\beta + 0.0001}) + \beta \times Kd) \times l \times (M \times \beta^2 + C \times \beta + K)^{-1} \times B \times e^{-\tau \times \beta}$ ;
7   i = i + 1;
8 fim
```

---

### A Função Robustez

A função de robustez é utilizada como avaliação dos indivíduos da população e tem em vista garantir que a menor distância entre o ponto  $-1 + j0$  e o diagrama de *Nyquist* de  $L(j\omega)$  seja igual ao raio da circunferência  $M_s$ , um parâmetro de projeto definido na resposta em frequência.

A função L apresentada no Algoritmo 3 calcula os valores de  $L(j\omega_i)$  e os armazena nos vetores *Re* e *Im*, correspondendo às partes real e imaginária de  $L(j\omega_i)$ , respectivamente. O vetor *d* é utilizado para armazenar as distâncias entre o ponto  $-1 + j0$  e os pontos ao longo da curva  $L(j\omega_i)$  que foram armazenados nos vetores *Re* e *Im*. Função de robustez é uma medida usada para a avaliação para cada indivíduo da população (o qual é um candidato a solução do problema de otimização) e o seu valor é utilizado na busca realizado pelo Algoritmo Genético.



---

**Algoritmo 4:** Função Robustez
 

---

**Entrada:**  $L$  e  $M_s$ **Saída:** robustez

1  $d = \sqrt{(\text{Re}(L) + 1)^2 + \text{Im}(L)^2};$   
 2  $\text{robustez} = (\min(d) - Ms^{-1})^2;$

---

**A Função de Restrições**

O algoritmo 5 apresenta a função de restrições responsável por impor aos indivíduos as limitações do problema de otimização, definidas pelas equações (3.16) que se refere a impor o número de voltas necessário em torno do ponto crítico  $-1+j0$  para garantia da estabilidade em malha fechada pelo critério de *Nyquist*. O vetor "cross" armazena os pontos de intersecção entre a curva de *Nyquist* de  $L(j\omega)$  e o eixo real. A variável "restrictions" é utilizada para representar a restrição não linear estabelecida pela inequação (3.16) e é restrita a valores menores ou iguais a zero.

A função de restrição envia os valores de **restrictions** de volta para o Algoritmo Genético e avalia o indivíduo da população com a função fitness. A busca é concluída quando as mudanças entre as gerações se tornam insignificantes e o melhor indivíduo avaliado pelas funções descritas é apresentado como resposta. Os resultados obtidos com o algoritmo desenvolvido são apresentados no capítulo 5.

---

**Entrada:** L; Z;

## Saída: restrictions

```
2 contadorccw = 0;
```

4 se  $\text{Re}(L(1)) < -1$  &  $|\text{Im}(L(1))| < 0.2$  então

6 se  $\text{Im}(L(2)) < \text{Im}(L(1))$  então

8	fim
---	-----

```
10 |         contadorcw = contadorcw + 1;
```

11	fin
----	-----

12 fim

```
13 para i = 1 até comprimento(L) - 1 faça
```

14 se  $\text{Im}(L(i)) \times \text{Im}(L(i + 1)) < 0$  então

15 se  $\operatorname{Re}(L(i)) \times \operatorname{Re}(L(i+1))/2 < -1$  então

16			<code>cross = [cross Re(L(i)) + Re(L(i + 1)))/2];</code>
----	--	--	--

17		se $\text{Im}(L(i+1)) < \text{Im}(L(i))$ então
----	--	--

18				contadorccw = contadorccw + 1;
----	--	--	--	--------------------------------

19			fm
----	--	--	----

20			senão
----	--	--	-------

21				contadorcw = contadorcw + 1;
----	--	--	--	------------------------------

22			fim
----	--	--	-----

23		fim
----	--	-----

24	fin
----	-----

```
25         i = i + 1:
```

26 fim

```
27 para i = 1 até comprimento(L) - 1 faça
```

```

28 | se -Im(L(comprimento(L) - (i - 1))) × -Im(L(comprimento(L) - i)) < 0

```

então

29	se $\text{Re}(\text{L}(\text{comprimento}(\text{L}) - (i - 1))) + \text{Re}(\text{L}(\text{comprimento}(\text{L}))) / 2 < -1$
----	---

então

```
30 cross = [cross Re(L(comprimento(L) - (i - 1))) + Re(L(comprimento) - i))/2];
```

31

$$-\text{Im}(\text{L}(\text{comprimento}(\text{L}) - (\text{i} - 1)))) > -\text{Im}(\text{L}(\text{comprimento}(\text{L}) - \text{i})))$$

então

32				contadorccw = contadorccw + 1;
----	--	--	--	--------------------------------

33			fm
----	--	--	----

34			senão
----	--	--	-------

35				contadorcw = contadorcw + 1;
----	--	--	--	------------------------------

36			fm
----	--	--	----

37		fim
----	--	-----

38	fim
----	-----

```
39         i = i + 1:
```

40 fim

```
41 restrictions = -min(cross) × contadorcw + (Z - contadorccw))2;
```

### A Função *Fitness*

A função *Fitness* recebe como entrada dois parâmetros: os índices de robustez e *IAE*, resultantes das funções descritas nas seções 8 e 4.1, respectivamente. O índice de robustez mede o quão robusto é o sistema.

Entretanto, é possível notar que as definições dessas duas medidas podem entrar em conflito, já que quando se deseja minimizar a integral do erro, ou seja, ter um tempo de acomodação baixo, pode-se acabar com um sistema menos robusto, com altos valores de *Overshoot*. Como solução, foi criado um parâmetro chamado *alfa*, que pondera esses dois critérios na função de fitness. O valor de *alfa* é um número entre zero e um, permitindo escolher se dar maior importância ao índice de robustez ou ao *IAE*, bem como decidir se ambos têm a mesma importância na otimização do algoritmo de busca. O algoritmo 6 apresenta essa lógica.

---

**Algoritmo 6:** Função *Fitness*

---

**Entrada:** Robustez, *IAE*, e *alfa*

**Saída:** *ff*

1  $ff = \text{alfa} \times \text{robustez} + (1 - \text{alfa}) \times \text{IAE};$

---

### A Função de Variabilidade

O objetivo da Função de Variabilidade Genética, apresentada no Algoritmo 7, é solucionar o problema de iteração do Algoritmo Genético quando não houver melhora no valor da Função *Fitness* após várias iterações. Com isso, evita-se a execução desnecessária do programa quando a solução estiver presa em um mínimo local, a partir do qual não haverá avanços significativos com a continuidade das execuções do *GA*.

A função avalia o valor da função objetivo em dez execuções. Caso haja uma baixa variância entre esses valores, há uma indicação de que o algoritmo não está apresentando evolução na otimização, assim o custo computacional de continuar executando o algoritmo proposto não resultará em ganhos significativos. Com isso, a função interrompe a execução do *GA* e retorna o melhor indivíduo para aquela execução.

---

**Algoritmo 7:** Função de Variabilidade
 

---

```

Entrada: variabilidade, evolucao, e ff
1 evolucao(variabilidade) = ff;
2 variabilidade = variabilidade + 1;
3 se tamanho(evolucao) > 10 então
4   variabilidade = 1;
5   evolucao = evolucao(2 : end);
6   se var(evaluation) < 0.0000001 então
7     objetivo = "fim";
8     melhorIndividuo = populacao(1, :);
9     interromper;
10  fim
11 fim
  
```

---

**Obtenção dos ganhos do controlador via Algoritmo Genético**

Neste trabalho também aplicaremos os métodos testado para sistema de controle estáveis para sistemas instáveis, porém isso traz algumas complicações no desenvolvimento do algoritmo, para que atenda as funções de restrições.

Pelo critério de *Nyquist*, testamos as raízes do polinômio característico de malha fechada devem ser parte real negativa, mas quando temos um sistema instável significa que temos raízes no SPD, e para tornar esse sistema estável, precisamos forçar que o número de voltas no ponto  $-1 + j0$  seja igual ao número de raízes do polinômio característico de malha aberta, assim tornando o sistema estável. Nesse caso, o algoritmo proposto escolhe de forma heurística os ganhos do controlador *PID*, para atender essa condição de voltas, igual ao número de polos de malha aberta no SPD.

A solução inicial se a base na teoria de ponto de intersecção de uma reta no diagrama de polos. Ao se traçar retas no plano complexo e encontrar os pontos de intersecção que o digrama de *Nyquist* tem com essas retas, conseguimos aferir o sentido no qual gráfico de *Nyquist* está envolvendo o ponto  $-1 + j0$ , como também realizar a contagem dessas voltas.

Por exemplo, ao traçar uma reta definida como  $\Re = -1$ , cruzando o eixo real do diagrama *Nyquist*, encontrando as intersecções que a curva de *Nyquist* tem com essa reta, a partir de um ponto de intersecção, calculamos qual é ponto do diagrama de *Nyquist* imediatamente antes da intersecção e após, realizando uma análise desses pontos, consegue-se inferir qual o sentido do diagrama com base no valor imaginário desses pontos. Na Figura 4.4, tem um ponto intersecta essa reta primeiramente abaixo do ponto  $-1 + j0$ , ao calcular o ponto imediatamente antes da intersecção da reta com o diagrama e calcular o ponto após essa intersecção, ao se multiplicar o valor real desses pontos e se o resultado for negativo, isso significa matematicamente que ocorreu uma transição entre a reta, ao verificar que ocorreu a transição, ao se analisar o valor imaginário desses pontos, como o valor imaginário do ponto antes da intersecção é menor do que o valor do ponto pós a intersecção, assim inferi o sentido do *Nyquist* naquele cruzamento, está no sentido horário, e como esses pontos de intersecção contem o ponto  $-1 + j0$ , logo foi realizado uma volta no ponto

de instabilidade. dessa forma, foi implementado o algoritmo que consegue tratar os casos de sistema instáveis em malha aberta, conforme apresentado no algoritmo 5.

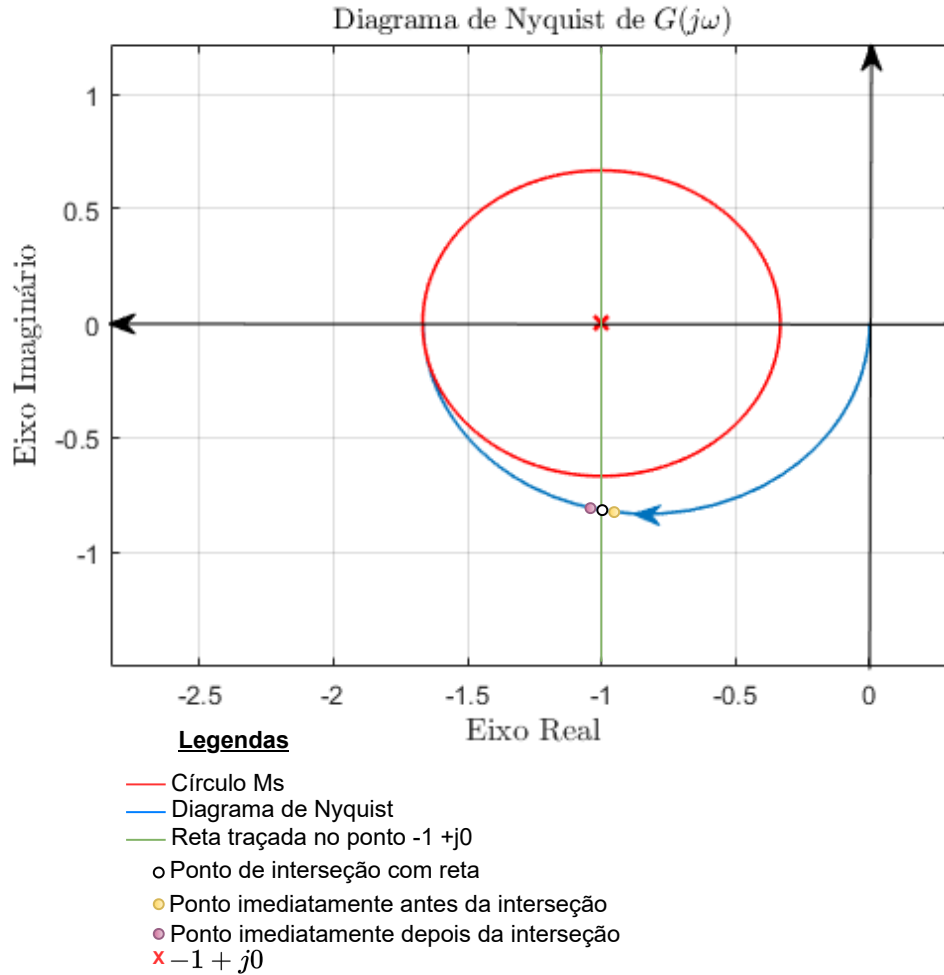


Figura 4.4: Exemplificação da contagem de voltas que contem o ponto  $-1 + j0$  e o sentido do diagrama de *Nyquist*

A complexidade do problema de otimização (3.19)-(3.21) praticamente inviabiliza sua solução por métodos tradicionais de otimização baseados em gradiente.

Neste trabalho, foi implementado um algoritmo genético, por sua eficiência e versatilidade, como descrito na seção 4.1.

Na elaboração do algoritmo foi definido como objetivo a função expressa na equação (3.19). Para retorno da avaliação do círculo  $M_s$  foi utilizada a equação (3.20) e a definição de estabilidade baseada no critério de *Nyquist* visando atender ao disposto na equação (3.21) com uma função que contabiliza os envoltimentos

do ponto crítico  $-1 + j0$  nos sentidos horário e anti-horário pela curva  $L(j\omega)$ . Na função de ordenação do algoritmo, os indivíduos são classificados em ordem crescente atendendo inicialmente à estabilidade, quantificada pela equação (3.21), onde  $P$  é o número de polos de malha aberta no semiplano direito e  $N$  a quantidade de envoltimentos do ponto crítico ( $N > 0$  sentido horário,  $N < 0$  sentido anti-horário). Assim, indivíduos "estáveis" (com  $Z = 0$ ) nas primeiras posições da classificação e indivíduos "instáveis" (com  $Z \neq 0$ ) nas últimas posições. Em seguida a população é reordenado com base na função objetivo apresentada na equação (3.19) que considera o critério de robustez com seu custo dado pelo valor de  $\epsilon$  na equação (3.20) e também a integral do Erro absoluto. Nesta etapa, aquele indivíduo que tiver menor valor de  $\epsilon$  e atender ao critério de estabilidade, tomará a frente nas primeiras posições da ordenação.

Para a busca ser encerrada foram considerados os seguintes critérios de parada para verificação das *Condições Atendidas*:

1. Melhor indivíduo estável
2. Número de gerações  $\geq 100$
3. A função variabilidade apresentado na seção 1 atinja seu critério

Assim, devidos a essa técnica de contagem de voltas que o diagrama de *Nyquist* faz em torno do ponto  $-1 + j0$ , conseguiu-se aplicar essa a estratégia de sistema robusto e eficiência também para sistema instáveis em malha aberta, como também para sistema estáveis em malha aberta. Somado a isso, com a criação dessas funções auxiliares, conseguimos melhorar a desempenho do algoritmo de busca, considerando os resultados com o decorrer da iteração do algoritmo. Dessa forma, os resultados gerados com a execução desse algoritmo, se apresentou eficiente e funcional conforme apresentado no capítulo 5.

---

# Capítulo 5

## Experimentos e Resultados

---

Neste capítulo, estudos de simulações são apresentados, visando avaliar a eficácia e a efetividade dos controladores utilizando o método proposto. Para a otimização do *PID*, são utilizados dois parâmetros de busca.

A primeira otimização se baseia no critério de robustez do sistema, a segunda otimização é baseada no índice de *IAE*, buscando alcançar uma maior eficiência do sistema.

Podemos encontrar na seção 5.1 uma comparação entre os resultados obtidos quando otimizamos a robustez do sistema e o índice de Integral do Erro Absoluto.

Podemos inferir que esses parâmetros de avaliação do sistema são mutuamente exclusivos, o que significa que é difícil obter um sistema altamente robusto e eficiente ao mesmo tempo. Quando minimizamos o índice *IAE*, a robustez do sistema pode ser comprometida. O objetivo é encontrar um equilíbrio para otimizar tanto a robustez quanto o índice de *IAE*, a fim de obter um controlador ideal que mantenha a estabilidade e o tempo de acomodação mesmo em situações de perturbações no sistema.

### 5.1 Experimentos estudados

Os exemplos que serão estudados nesta seção são baseados em literatura de sistemas de controle, como descrito em OGATA (2009). Abordaremos sistemas de controle de segunda ordem com atraso e detalharemos os resultados obtidos com o método proposto, além de compará-los com trabalhos já realizados, conforme descrito em DANTAS (2019).

#### 5.1.1 Exemplo 1

Na Figura 5.1, é apresentado um exemplo clássico de aplicação do sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade. O problema de controle por realimentação de estados é definido para  $\mathbf{M} = 1$ ,  $\mathbf{C} = 0,01$ ,  $\mathbf{K} = 5$ ,  $\mathbf{b} = 1$  e  $\mathbf{l} = 1$  com atraso igual a  $\tau = 0,1s$  como no Exemplo 2 de (RAM et al., 2009). O objetivo é encontrar valores de  $\mathbf{K_p}$ ,  $\mathbf{K_i}$  e  $\mathbf{K_d}$ , de forma que o diagrama de *Nyquist* de  $L(j\omega)$  esteja completamente fora da área delimitada pela circunferência de raio  $M_s^{-1}$ , a

qual é um parâmetro de projeto definido. A definição de  $M_s$  estabelece margens de ganho e de fase para o sistema, e valores comuns de  $M_s$  estão no intervalo de  $1,22 \leq M_s \leq 1,667$  SKOGESTAD and POSTLETHWAITE (2007).

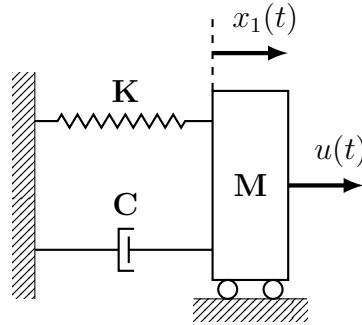


Figura 5.1: Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade

O método proposto neste trabalho foca nos parâmetros de projeto baseados no diagrama de Nyquist do ganho de malha do sistema  $L(j\omega)$ , considerando os conceitos de estabilidade segundo os critérios de Nyquist. O objetivo da solução é obter um sistema relativamente robusto, tendo como meta  $M_s = 1,66$ .

## Resultados da Otimização

A análise comparativa dos parâmetros otimizados diretamente e observaremos os benefícios de realizar a busca pelo critério de robustez ou pelo índice de  $IAE$ . A ideia inicial é comparar os gráficos de *Nyquist* e as simulações do sistema, sobrepondo os resultados o quais são os dados são sumarizados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.1

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$
Robustez + $IAE$	2,9222	5,4647	3,6449	0,9149
Robustez	1,4160	1,5225	0,8718	3,2841

A Figura 5.2 apresenta a comparação dos diagramas para o exemplo 5.1.1, sendo que o diagrama que enfatiza a robustez do sistema tangencia a referência  $M_s$ , enquanto o diagrama otimizado para o  $IAE$  está próximo à circunferência e apresenta comportamento semelhante a outro diagrama.

A respeito da Figura 5.3, percebemos que o sistema estabilizado pelo critério do  $IAE$  é mais eficiente, apresentando um tempo de acomodação mais rápido, enquanto o sistema com ênfase na robustez tem uma resposta transitória mais lenta.



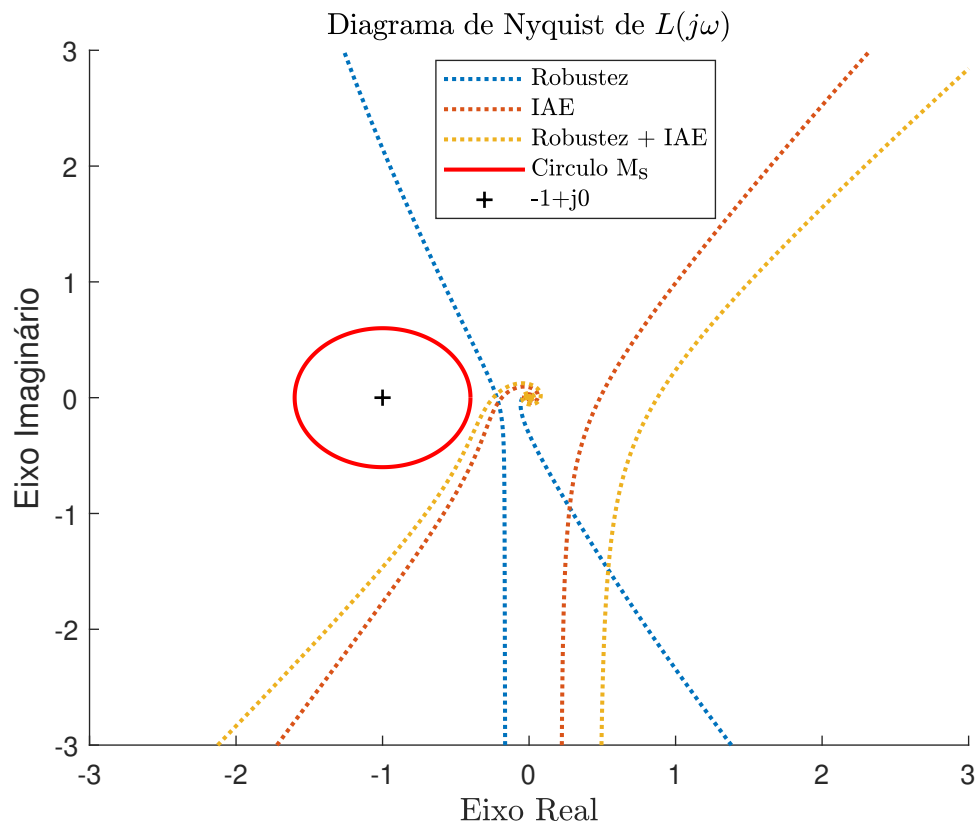


Figura 5.2: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.1

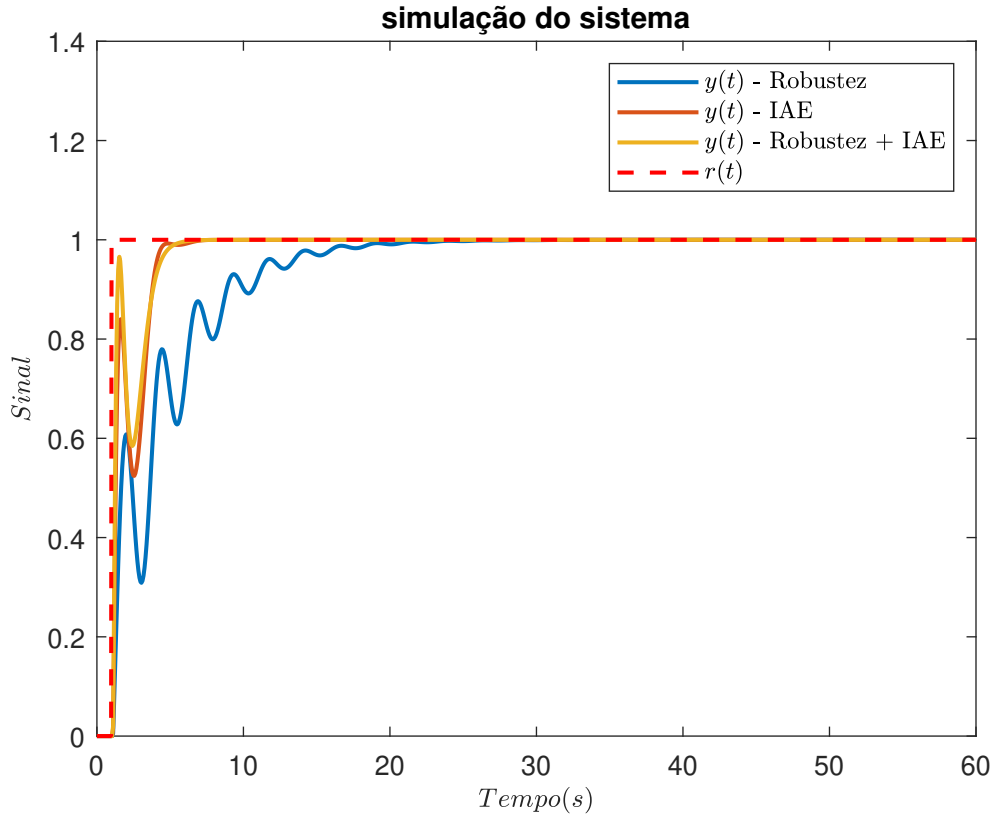


Figura 5.3: Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.1

Ao examinar os resultados conseguidos com a função de *fitness* definida na seção 41, que tenta considerar os dois parâmetros de busca. Nesse caso, estamos atribuindo a mesma importância à robustez e ao *IAE*, já que o valor do parâmetro alfa é 0,5.

A Figura 5.2 revela que o diagrama de *Nyquist* apresenta uma pequena distância da referência  $M_s$ , mantendo sinais de um sistema mais robusto, sem perder a prioridade da eficiência. Essa situação difere quando realizamos a otimização apenas do *IAE*, onde o diagrama tende a se afastar ainda mais do raio de robustez estabelecido.

Analisando a Figura 5.3, percebe-se que a combinação dos parâmetros resulta em uma melhoria geral em relação à simulação na qual a busca tentou otimizar apenas o índice *IAE*, e também em comparação com a simulação do trabalho base DANTAS (2019).

### 5.1.2 Exemplo 2

Considerando um exemplo prático para demonstrar a aplicação do método apresentado, conforme visto em (RAM et al., 2011), podemos tomar as matrizes de massa, amortecimento e elasticidade como:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Considerando o método apresentado em (RAM et al., 2011), utilizaremos como exemplo prático uma matriz de entradas  $\mathbf{l} = \mathbf{b}^T = [0 \ 1]$  e uma constante de atraso  $\tau = 5s$ . Nesse caso, estamos lidando com um sistema não amortecido com autovalores de malha aberta sobre o eixo imaginário do plano  $s$ . Quando isso ocorre, pode ser difícil trabalhar com a resposta em frequência, uma vez que há uma descontinuidade nas frequências que coincidem com os autovalores do sistema no eixo imaginário. Para lidar com essa situação, a literatura de sistemas de controle com base na teoria do mapeamento sugere fazer uma pequena alteração no contorno do plano  $s$ , de modo a evitar os polos sobre o eixo  $j\omega$ . Em outras palavras, é necessário deslocar levemente os polos para a esquerda do eixo, o que pode ser conseguido por meio de uma pequena alteração em um dos elementos da matriz de amortecimento OGATA (2009). Nesse exemplo, a matriz  $\mathbf{C}$  é considerada.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0,9999 \\ -0,9999 & 1 \end{bmatrix}$$

Novamente a busca pela solução do problema descrito pela equação (3.19) é realizada para o círculo  $M_s = 1,6667$ .

## Resultados da Otimização

No caso do exemplo 5.1.2, por se tratar de um sistema mais complexo e, teoricamente, com maior dificuldade na sintonia dos ganhos do controlador, esses ganhos está apresentado na Tabela 5.2, como também os índices  $IAE$  obtidos da simulação. A Figura 5.4 apresenta o diagrama de *Nyquist*. Neste caso, é possível observar que, para o índice considerado, o *Nyquist* intersecta a circunferência, enquanto, para a busca pela robustez, isso não ocorre, como esperado. Além disso, conseguimos obter um comportamento semelhante no diagrama, circulando o ponto  $0 + 0j$ .

Tabela 5.2: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.2

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$
Robustez + IAE	0,5145	0,2578	0,4004	7,3408
Robustez	0,1773	0,2229	0,4432	10,0418

A simulação do sistema na Figura 5.5 apresenta o comportamento desejado quando otimizado com o índice de Integral do Erro Absoluto, sendo notável que o sistema é mais eficiente, enquanto o sistema otimizado com ênfase na robustez tem uma resposta transitória mais lenta.

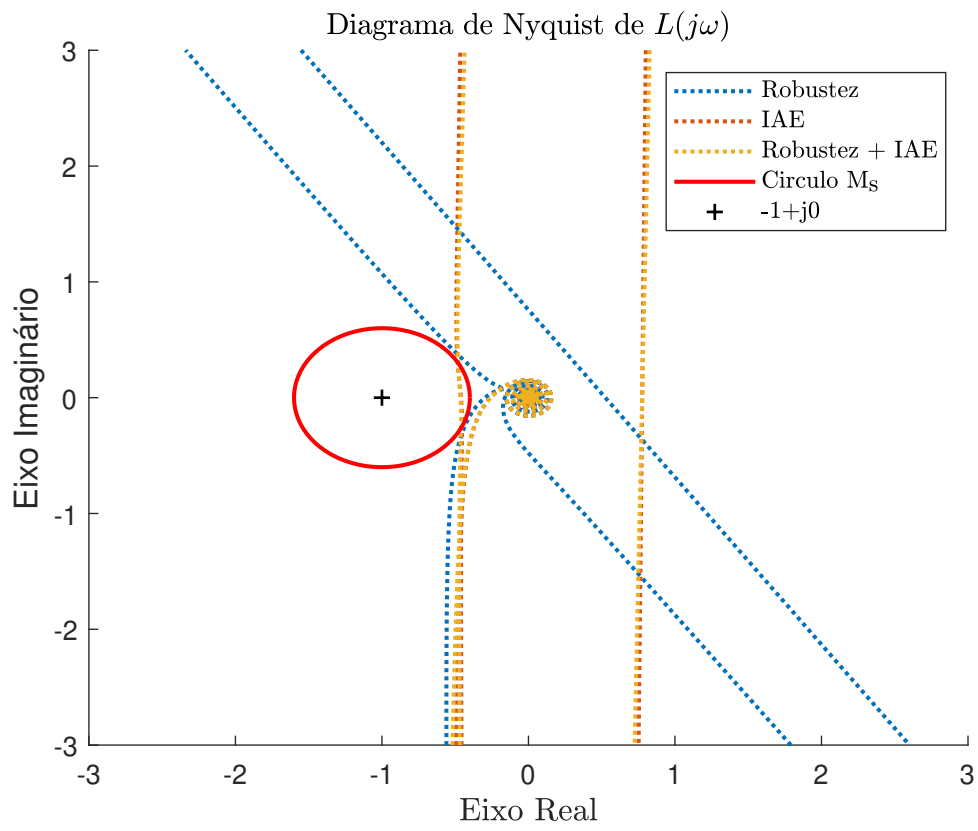


Figura 5.4: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.2

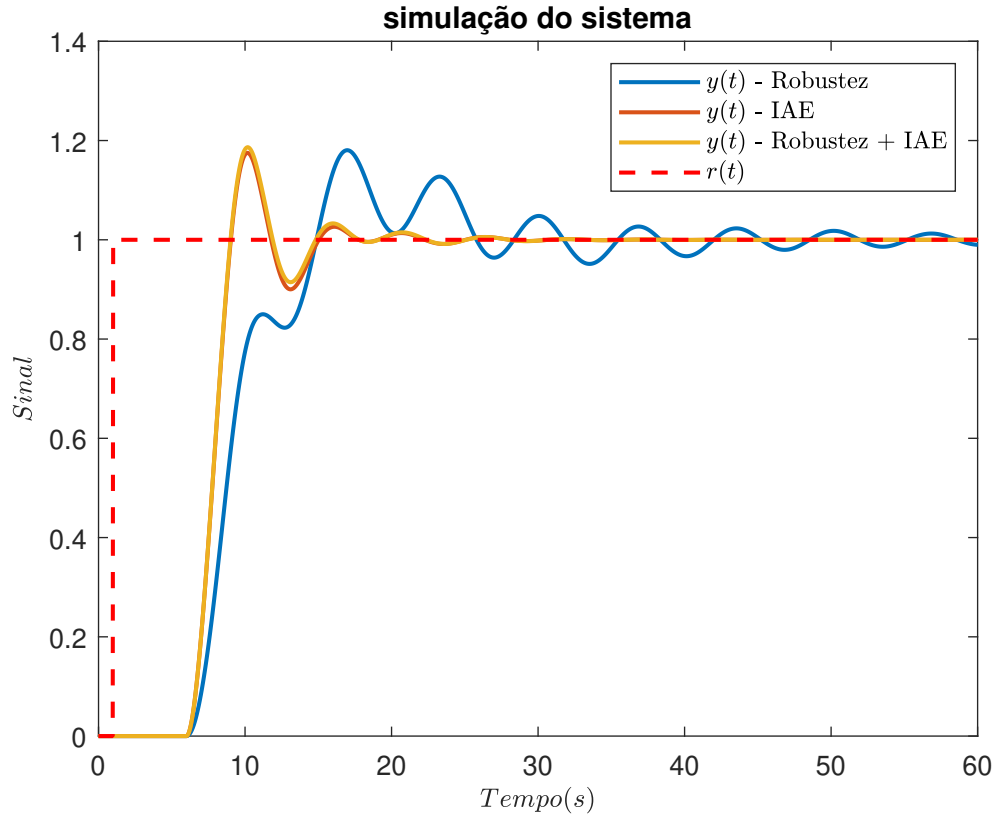


Figura 5.5: Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.2

No caso do resultado otimizando robustez mais o Integral do Erro Absoluto, nota-se que o gráfico de *Nyquist* na Figura 5.4 está próximo à circunferência de robustez  $M_s$ , e os resultados da simulação mostram eficiência, conforme evidenciado na Figura 5.5. Esses resultados são superiores aos obtidos nas simulações em que é otimizado apenas um parâmetro na busca do algoritmo *GA*.

### 5.1.3 Exemplo 3

Neste caso específico, foi feita uma pequena modificação do exemplo 5.1.2, para introduzir uma perturbação no sistema.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ -0.9 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para uma matriz de entradas  $\mathbf{B}' = \mathbf{I}' = [0 \ 1]$ , e uma constante de atraso  $\tau = 0,5$ .

#### Resultados da Otimização

No exemplo 5.1.3, os ganhos e índices são evidenciados na Tabela 5.3, o qual reflete o que podemos observar na Figura 5.6 que há uma maior distância do di-

agrama em relação a ambas as otimizações. A partir da simulação do sistema na Figura 5.7, verificamos que a otimização do índice de  $IAE$  apresentou um tempo de acomodação menor em comparação com a otimização do critério de robustez.

Tabela 5.3: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.3

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$
Robustez + IAE	0,7548	1,8163	0,4856	2,4390
Robustez	-0,2399	1,0990	1,6015	6,4692

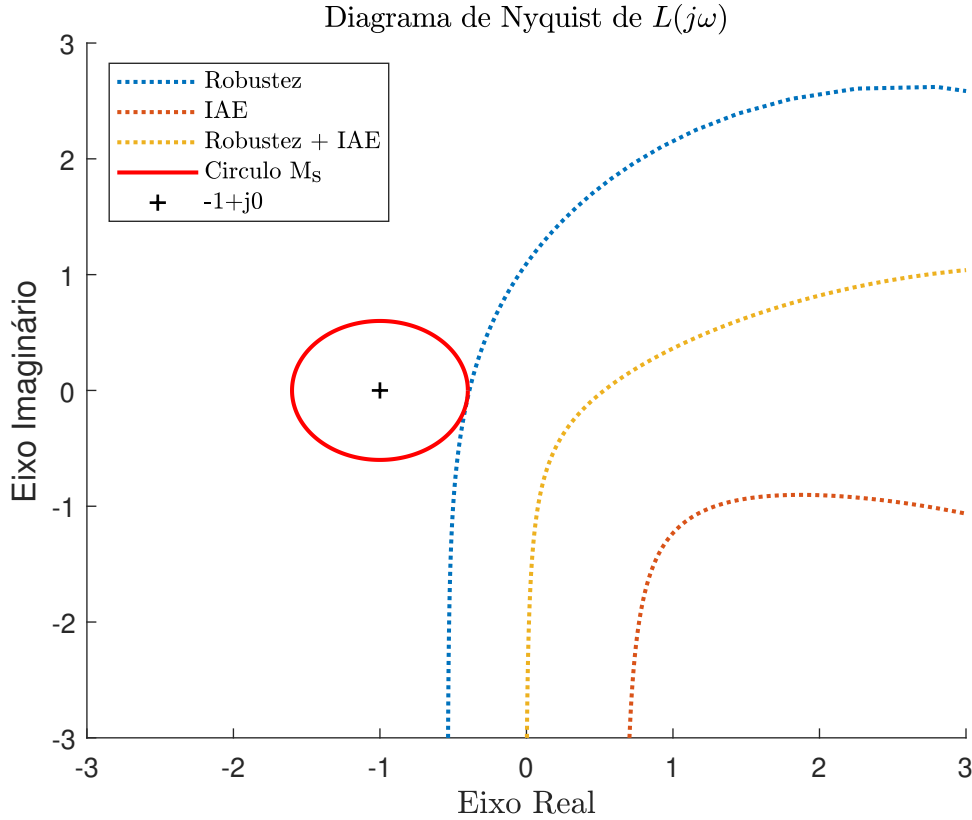


Figura 5.6: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.3

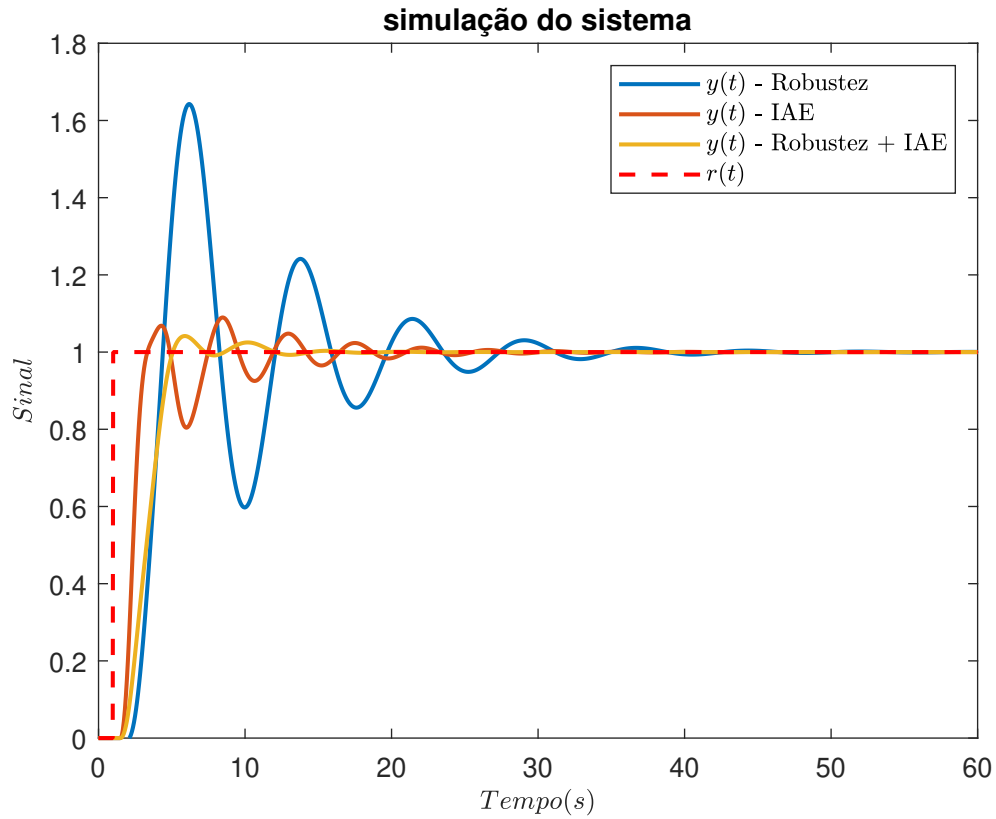


Figura 5.7: Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.3

Na Figura 5.7, podemos observar que a resposta transitória do sistema é menor em comparação com as simulações da otimização em apenas um dos parâmetros. Na Figura 5.6, a curva de *Nyquist* não se afasta muito da circunferência, o que indica que o sistema de controle continua eficiente em termos de robustez e tempo de acomodação, importantes para bons resultados em sistemas de controle OGATA (2009).

### Resultados da perturbação no sistema

Simularemos uma perturbação do sistema, com objetivo de verificar quão os sistemas são robustos para o método proposto neste trabalho.

Para realizar a simulação da perturbação, analisaremos o sistema do exemplo 5.1.2, com ganhos obtidos da simulação para este exemplo, executaremos a simulação do exemplo 5.1.3, o qual representa uma perturbação no sistema, devido à variação da Matriz  $\mathbf{C}$ , de um exemplo para outro.

Para o método proposto neste trabalho, observamos um comportamento semelhante, conforme a Figura 5.8, apresenta, com uma acentuação dos resultados apresentados no exemplo 5.1.2, principalmente para o *Overshoot*, como apresentado na Figura 5.9.

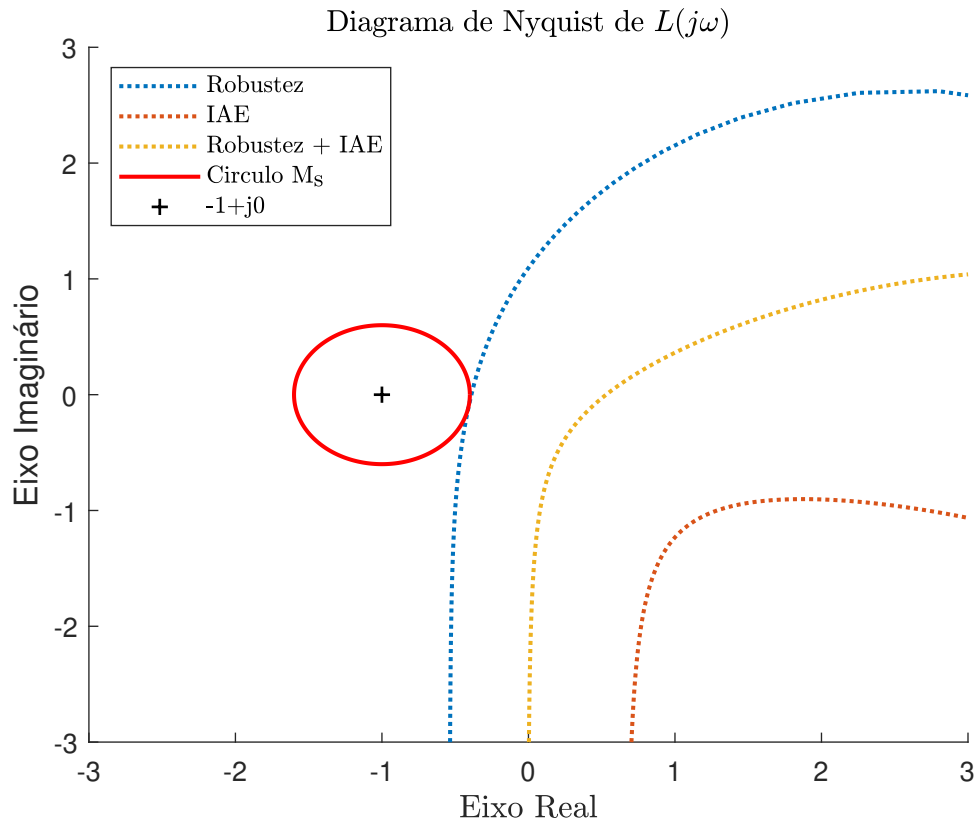


Figura 5.8: Diagrama de *Nyquist* com perturbação para o Exemplo 5.1.3



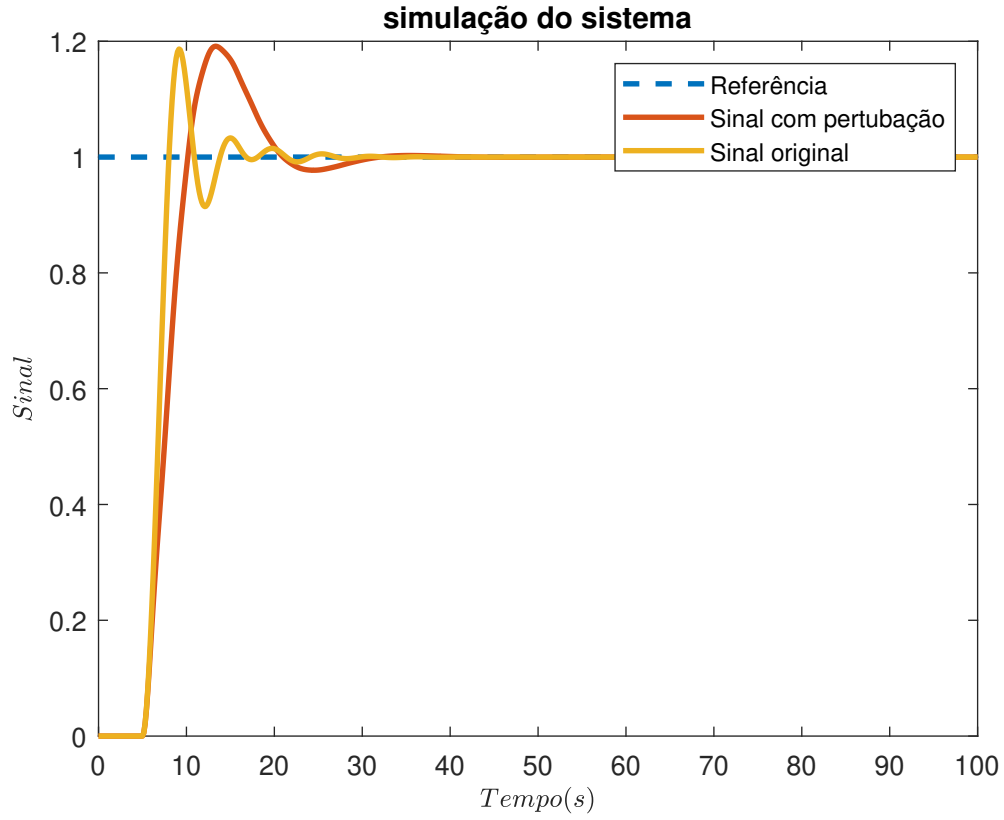


Figura 5.9: Resposta no tempo para uma referência constante com perturbação do Exemplo 5.1.3

O sistema de segunda ordem, com atraso, permanece estável em malha fechada. Isso evidencia que a robustez é atenuado, para esses métodos, mais sem perder a estabilidade e robustez, além disso, percebemos que a perda da robustez é significativamente pequena, em relação aos ganhos de desempenho, adquiridos com introdução da busca com concorrência.

#### 5.1.4 Exemplo 4

Este exemplo explora a aplicação do método de sintonia em um sistema com atraso longo e restrição de robustez menos rígida. As matrizes do sistema são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dois casos são explorados nesse exemplo: o caso co-localizado - sensor e atuador juntos no mesmo grau de liberdade, ou seja,  $l = b^T$  - e o caso não co-localizado, na qual a distribuição do sensor e do atuador é distinta.

Os parâmetros considerados são  $\tau = 5s$ ,  $\mathbf{l} = \mathbf{b}^T = [1 \ 0]$  e  $M_s = 2$ . O algoritmo de otimização é então aplicado, considerando a minimização de  $IAE$ , e também somente a minimização da distância ao círculo  $M_s$ .

Considere-se agora o caso não co-localizado, com  $\mathbf{b}^T = [1 \ 0]$  e  $\mathbf{l} = [0 \ 1]$ . As matrizes e os demais parâmetros são os mesmos do caso co-localizado.

### Resultados da Otimização

Os resultados para o caso co-localizado, são sumarizados na Tabela 5.4, onde estão registrados os ganhos dos controladores sintonizados e os valores do índice *IAE*. Os diagramas de *Nyquist* com otimização de desempenho e robustez e considerando somente robustez são mostrados na Figura 5.10. A resposta ao degrau para as duas sintonias é apresentada na Fig. 5.11, onde é evidente o desempenho superior do método de sintonia proposto.

Tabela 5.4: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso co-localizado - Exemplo 5.1.4

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	<i>IAE</i>
Robustez + IAE	0,5710	0,2829	0,4713	7,4872
Robustez	0,5193	0,2424	0,1804	7,9387

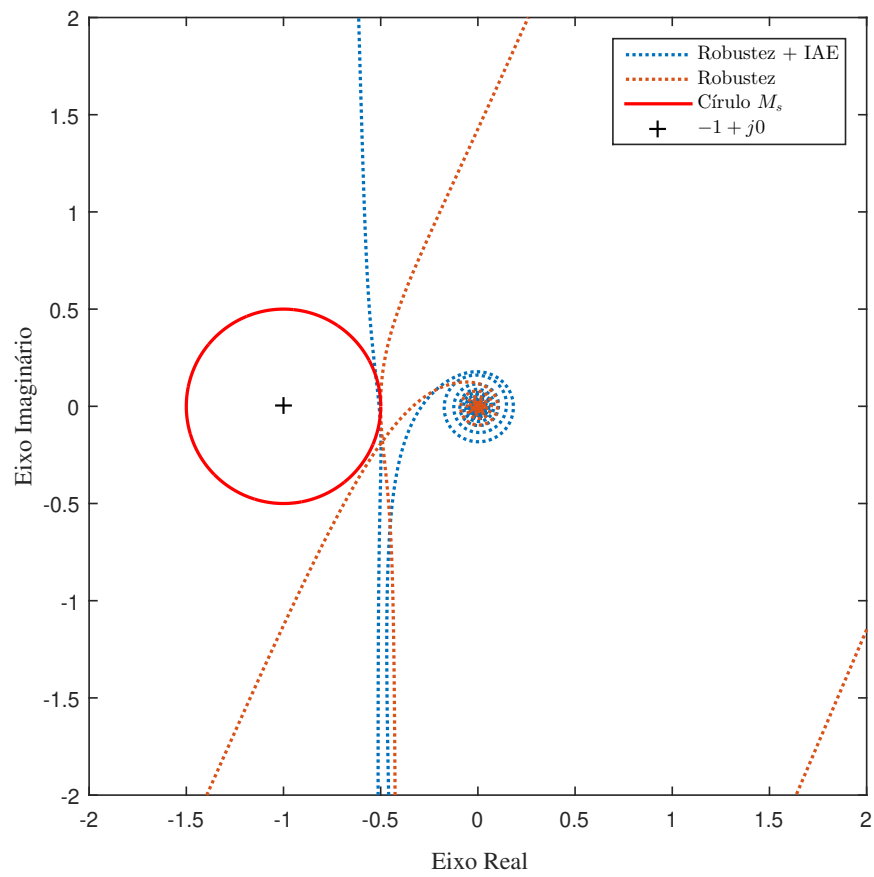


Figura 5.10: Diagrama de *Nyquist* para o caso co-localizado, Exemplo 5.1.4

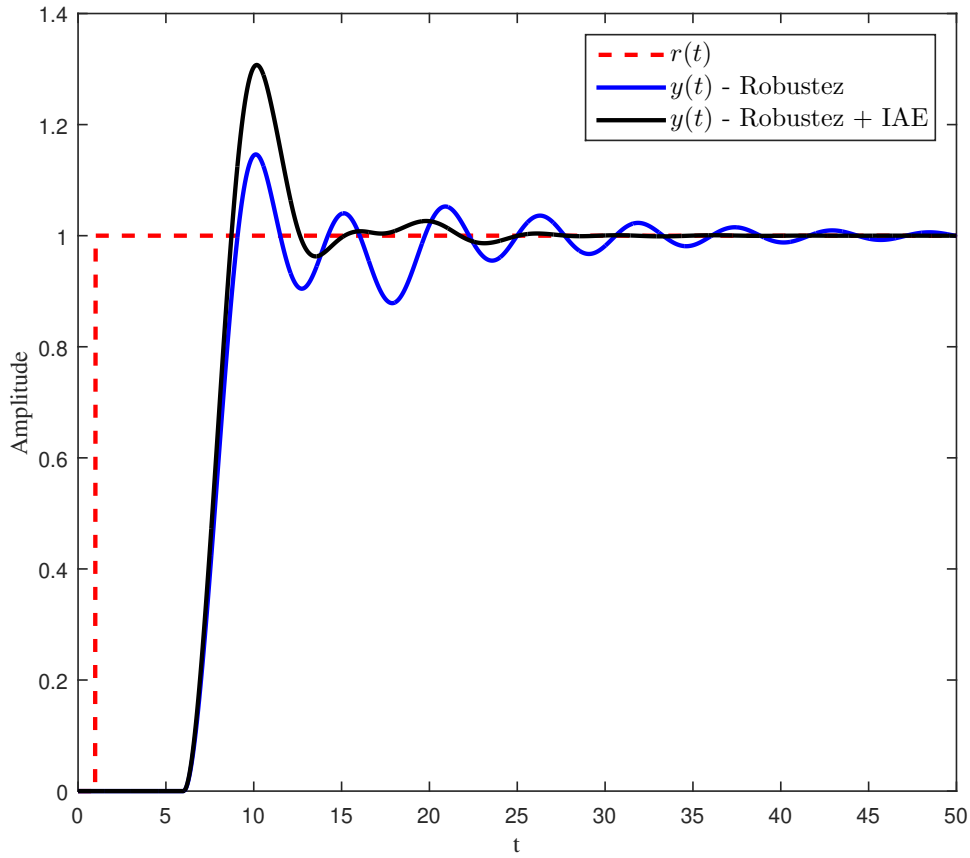


Figura 5.11: Resposta no tempo para uma referência constante do caso co-localizado, Exemplo 5.1.4

O controle de graus de liberdade no esquema não co-localizado representa um desafio maior que o caso co-localizado, pois neste último, a propriedade de alternância entre pólos e zeros garante melhores margens (Preumont, 1997). Entretanto, com a técnica proposta, as margens mínimas são garantidas. Na Figura 5.12, são mostrados os diagramas de *Nyquist* para as sintonias ótimas que consideram somente a robustez e também a robustez combinada com *IAE*. As respostas no domínio do tempo, ilustradas na Fig. 5.13, permitem comparar a sintonia com e sem a consideração do índice de desempenho. Os ganhos dos controladores sintonizados e os valores do índice *IAE* podem ser vistos na Tabela 5.5.

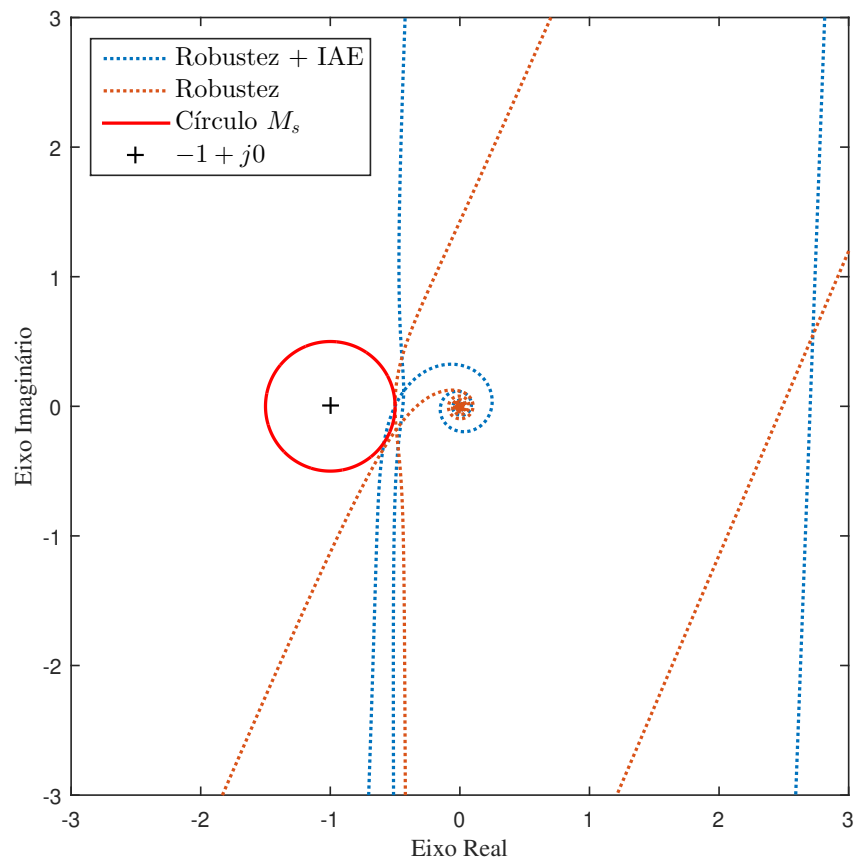


Figura 5.12: Diagrama de *Nyquist* para o de caso não co-localizado, Exemplo 5.1.4

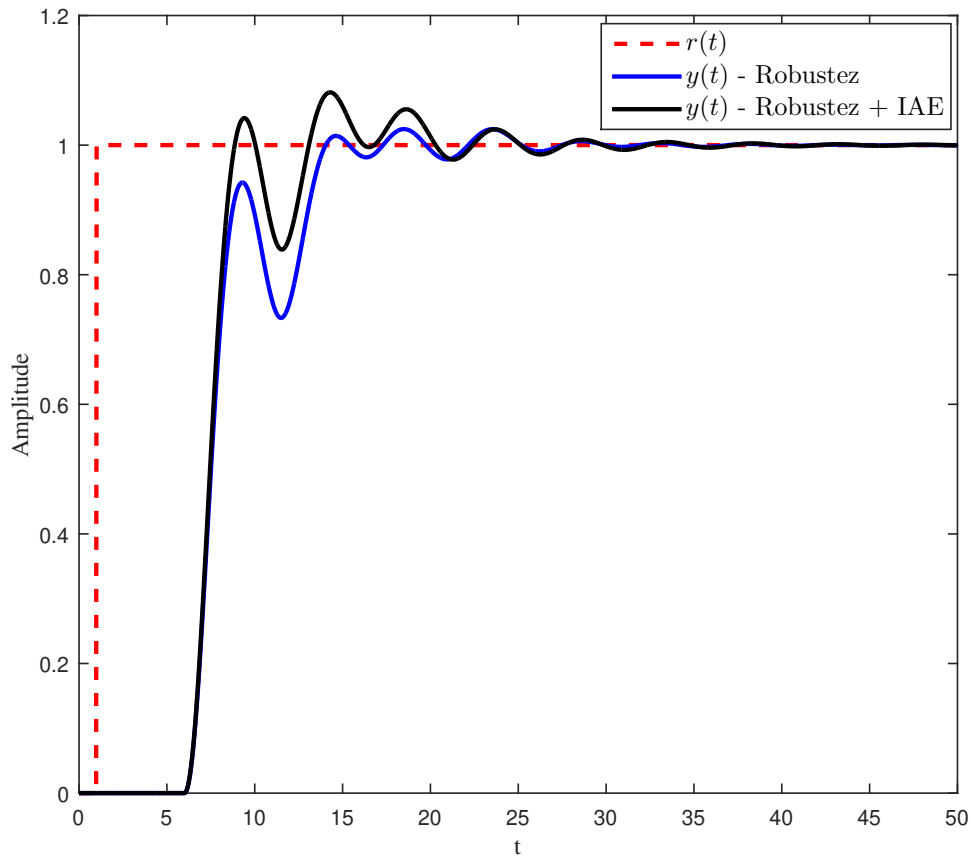


Figura 5.13: Resposta no tempo para uma referência constante para o caso não co-localizado, Exemplo 5.1.4

Tabela 5.5: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso não co-localizado - Exemplo 5.1.4

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$
Robustez + IAE	0,5878	0,3866	0,5382	7,2212
Robustez	0,5460	0,3437	0,5229	7,5067

### 5.1.5 Exemplo 5

Este exemplo, adaptado de (Shapiro, 2005), aborda um caso instável em malha aberta, cujas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

com  $\mathbf{b}^T = [-1 \ 1]$  e  $\mathbf{l} = [1 \ 0]$  além de um atraso  $\tau = 0.5\text{s}$ . Para garantia de margens, é dado  $M_s = 1,6667$ . Neste sistema dois polos de malha aberta localizam-se no semiplano direito,  $s_{1,2} = 0,0039 \pm j0,9$ . Da mesma forma que nos exemplos anteriores, projetam-se controladores PID conforme o método proposto, e considerando-se apenas o critério de robustez para fins de comparação.

### Resultados da Otimização

Na Figura 5.14 visualizam-se os diagramas de *Nyquist* obtidos. As respostas no tempo são comparadas na Figura 5.15. A Tabela 5.6 permite a comparação dos controladores projetados, e é possível notar um desempenho melhorado em relação ao *IAE* com a aplicação do método proposto. A estabilidade em malha fechada pode ser verificada no diagrama de *Nyquist* completo ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) com visão expandida, onde são constatados os dois envolvimentos requeridos do ponto crítico  $-1 + j0$ .

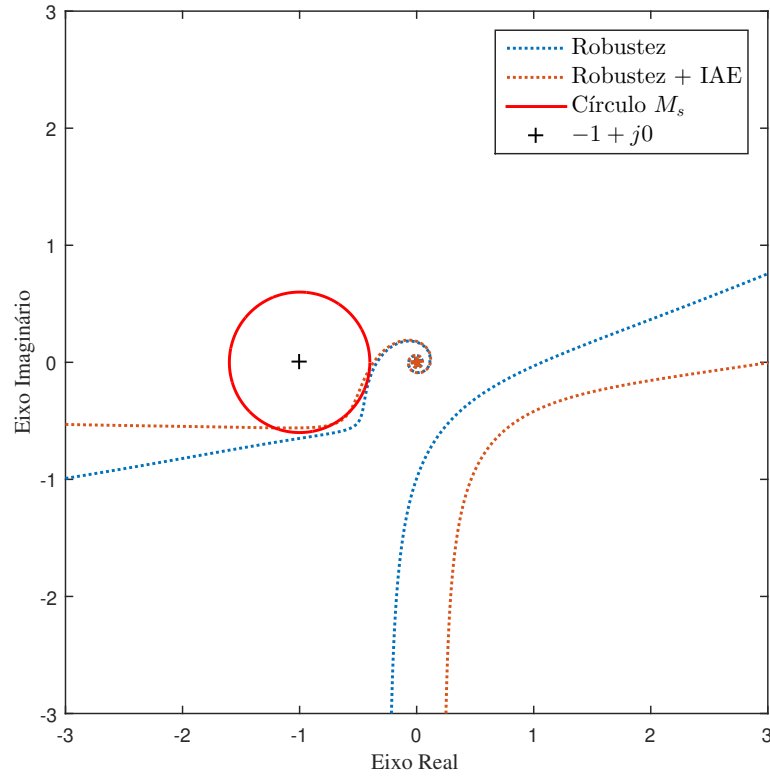


Figura 5.14: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.5

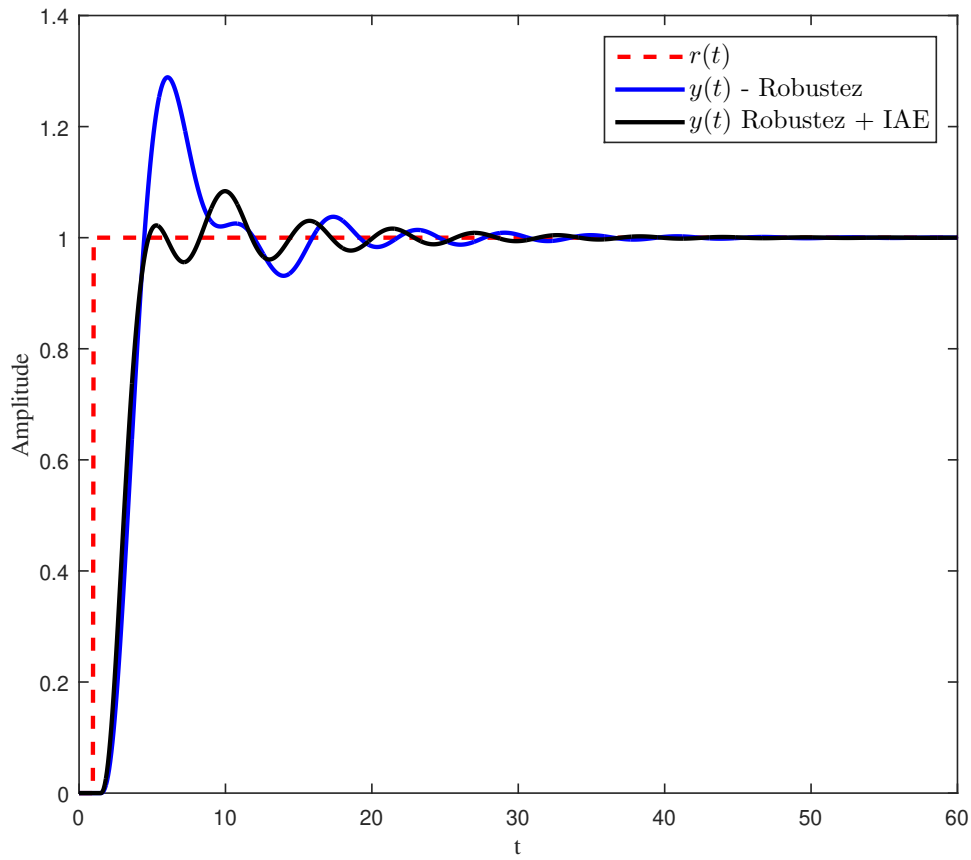


Figura 5.15: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.5

Tabela 5.6: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.5

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$
Robustez + IAE	-4,4787	-3,3738	-11,1194	2,6374
Robustez	-2,1975	-4,3664	-10,8658	3,5080



---

## Capítulo 6

### Conclusão

---

Neste trabalho, foram propostas soluções para resolver o problema de controle de sistemas de segunda ordem com atraso por meio do uso de um Controlador PID. Uma alternativa interessante para lidar com sistemas mais complexos é a utilização da representação experimental dos sistemas de segunda ordem com atraso por meio de uma matriz de receptância. Para obter os vetores de ganho do controlador PID, o problema de controle foi expresso como um problema de otimização matemática. O objetivo foi encontrar ganhos que atendam de forma satisfatória tanto ao critério de projeto estabelecido quanto à robustez do sistema e ao índice de *IAE*, resultando em uma solução ótima que obtenha um sistema minimamente robusto e eficiente em termos de tempo de acomodação.

Além disso, constatou-se que a robustez e a otimização do índice do *IAE* apresentam comportamentos que competem entre si. Ou seja, não é possível otimizar a Integral do Erro Absoluto sem prejudicar a robustez do sistema. Por isso, foi necessário desenvolver um método que visasse melhorar ambos os aspectos de forma equilibrada.

Os resultados apresentados no capítulo 5 mostram que o método que busca otimizar ambos os parâmetros apresenta resultados mais satisfatórios do que a busca de algoritmos com apenas um parâmetro. Além disso, foi possível obter resultados superiores em relação a trabalhos anteriores deste mesmo grupo, como os estudos realizados por Dantas DANTAS (2019), e NUNES (2022), com melhor tempo de acomodação e *Overshoot*.

Existem outras propostas de interesse acadêmico que podem ser abordadas em trabalhos futuros, como a aplicação em sistemas multivariáveis com atraso. Além disso, o uso de outras meta-heurísticas, como o Algoritmo de Enxame de Partículas (PSO), pode ser explorado para buscar resultados diferentes e possivelmente melhorias no controle desses sistemas.



---

# Referências Bibliográficas

---

- ABDELAZIZ, THS and M VALÁŠEK (2004), ‘Pole-placement for siso linear systems by state-derivative feedback’, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* **151**(4), 377–385.
- ARAÚJO, José Mário (2018a), ‘Discussion on ‘state feedback control with time delay’’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **98**, 368–370.
- ARAÚJO, José Mário (2018b), ‘Partial eigenvalue assignment in linear time-invariant systems using state-derivative feedback and a left eigenvectors parametrization’, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* p. 0959651818811010.
- ARAÚJO, José Mário and Tito Luís Maia SANTOS (2018), ‘Control of a class of second-order linear vibrating systems with time-delay: Smith predictor approach’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **108**, 173–187.
- Astrom, Karl J (1995), ‘Pid controllers: theory, design, and tuning’, *The International Society of Measurement and Control*.
- BALAS, Mark (1982), ‘Trends in large space structure control theory: fondest hopes, wildest dreams’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **27**(3), 522–535.
- DANTAS, N. J. B. (2019), Projeto de controladores para sistemas de segunda ordem com atraso via resposta em frequência., Dissertação (mestrado) — mestrado em engenharia mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- Dantas, Nelson J. B., Carlos E. T. Dorea and Jose M. Araujo (2021), ‘Partial pole assignment using rank-one control and receptance in second-order systems with time delay’, *Meccanica* **56**(2), 287–302.  
**URL:** <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01289-w>
- DANTAS, Nelson J.B., Carlos E.T. Dórea and José M. Araújo (2020a), ‘Design of rank-one modification feedback controllers for second-order systems with time delay using frequency response methods’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **137**, 106404. Special issue on control of second-order vibrating systems with time delay.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327019306259>

- Dantas, Nelson J.B., Carlos E.T. Dórea and José M. Araújo (2020b), ‘Design of rank-one modification feedback controllers for second-order systems with time delay using frequency response methods’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **137**, 106404.
- DATTA, Biswa (2004), ‘Numerical methods for linear control systems’, **1**.
- FRANKLIN, Gene F, J David Powell and Abbas Emami-Naeini (2013), *Sistemas de controle para engenharia*, Bookman Editora.
- GOLDBERG, David E and John H Holland (1988), ‘Genetic algorithms and machine learning’, *Machine learning* **3**(2), 95–99.
- GOLUB, Gene H and Charles F VAN LOAN (2012), *Matrix computations*, Vol. 3, JHU Press.
- GONTIJO, Danielle S, José M Araújo, Tito LM SANTOS and Fernando O Souza (2022), ‘Proportional-integral-derivative-acceleration robust controllers for vibrating systems’, *Journal of Vibration and Control* p. 10775463211060898.
- MARTINS, José KEC, Fábio MU Araújo and Carlos ET Dórea (2020), Um método baseado em otimização para sintonia de controladores pi para sistemas sujeitos a restrições, em ‘Congresso Brasileiro de Automática-CBA’.
- MATHWORKS. (2019), ‘Genetic algorithm - matlab & simulink’.  
**URL:** <https://www.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm.html>
- MOTTERSHEAD, John E and Yitshak M RAM (2007), ‘Receptance method in active vibration control’, *AIAA journal* **45**(3), 562–567.
- Nunes, Leonardo A, Nelson JB Dantas, Carlos ET Dórea and José M Araújo (2021), Controle por realimentação derivativa de estados de sistemas dinâmicos de segunda ordem com atraso, em ‘Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI’.
- NUNES, LEONARDO Araújo (2022), Controle por realimentação derivativa para sistemas dinâmicos de segunda ordem com atraso, Dissertação (mestrado) — mestrado em engenharia mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- OGATA, Katsuhiko (2009), *Modern control engineering*, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.
- Preumont, André (1997), *Vibration Control of Active Structures*, Springer Netherlands.  
**URL:** <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5654-7>

- RAM, YM, Akshay Singh and John E MOTTERSHEAD (2009), ‘State feedback control with time delay’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**(6), 1940–1945.
- RAM, YM, JE Mottershead and M Ghandchi TEHRANI (2011), ‘Partial pole placement with time delay in structures using the receptance and the system matrices’, *Linear Algebra and its Applications* **434**(7), 1689–1696.
- Rego, Everton JC, Carlos ET Dórea and Andre L Maitelli (2017), ‘Ressintonia automática de controladores pi embarcados em clp, baseada em estimativa de robustez’, *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* pp. 1733–1738.
- Richidei, Dario, Iacopo Tamellin and Alberto Trevisani (2022), ‘Pole-zero assignment by the receptance method: multi-input active vibration control’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **172**, 108976.
- SANTOS, Tito LM, José Mário Araújo and Taniel S Franklin (2018), ‘Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **110**, 428–441.
- Shapiro, Amir (2005), ‘Stability of second-order asymmetric linear mechanical systems with application to robot grasping’, *Journal of Applied Mechanics* **72**, 966–968.
- Singh, Kumar Vikram, Charlene Black and Raymond Kolonay (2019), ‘Active aeroelastic output feedback control with partial measurements by the method of receptances’, *Aerospace Science and Technology* **86**, 47–63.
- SKOGESTAD, Sigurd and Ian POSTLETHWAITE (2007), *Multivariable feedback control: analysis and design*, Vol. 2, Wiley New York.
- SOUZA e CARVALHO, Jhonat Heberson Avelino CARVALHO, Elton José Figueiredo de (2020), ‘Implementação e avaliação de algoritmos genéticos e de enxame no ajuste de campos de força em dinâmica molecular’, *XXXI Congresso de Iniciação Científica e Tecnológica da UFRN - eCICT 2020* pp. 1604–1605.
- TEHRANI, Maryam Ghandchi, Robin NR Elliott and John E Mottershead (2010), ‘Partial pole placement in structures by the method of receptances: theory and experiments’, *Journal of Sound and Vibration* **329**(24), 5017–5035.
- VAN LOAN, Charles F and Gene H GOLUB (1983), *Matrix computations*, Johns Hopkins University Press.
- VANDERVELDE, Wallace E (1986), ‘Control of large flexible space structures’.