Projeto de Controlador PID para Sistemas de Segunda Ordem com Atraso via Resposta em Frequência

Jhonat Heberson Avelino de Souza [1]

Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea [2]

Prof. Dr. José Mário Araújo [3]

[1]⟨jhonatheberson@gmail.com⟩

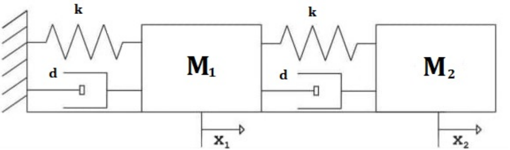
[2]⟨cetdorea@dca.ufrn.br⟩

[3]⟨prof.jomario@gmail.com⟩

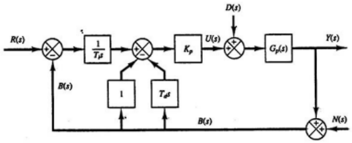
Departamento de Engenharia de Computação e Automação – DCA
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN

Sumário

Introdução - *Contextualização*



(a) Sistema massa e mola



(b) Controlador PID

Figura 1: Sistema de Segunda ordem, e Controlador PID

Introdução - Objetivos

- Estudo de sistemas de segunda ordem com atraso.
- Propor uma solução para um problema de controle para um sistema de segunda ordem com atraso
- Controlador Proporcional e Integrativo Derivativo.
- Definir o problema de controle nos termos da resposta em frequência usando Receptância
- Critério de estabilidade de Nyquest para definir a função as regras de otimização.
- Aprimorar algoritmo heurístico de otimização (GA) para encontrar os ganhos do controlador PID que atenda os critérios estabelecidos.

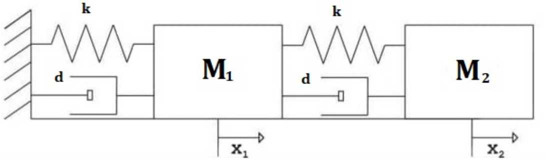


Figura 2: Sistema massa e mola

Equação do sistema

$$m_1\ddot{x}_1(t) + d\,(2\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k\,(2x_1(t) - x_2(t)) = 0 \tag{1}$$

$$m_2\ddot{x}_2(t) + d\,(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k\,(x_2(t) - x_1(t)) = u \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \tag{3}$$

Fundamentação Teórica - Sistema de segunda ordem

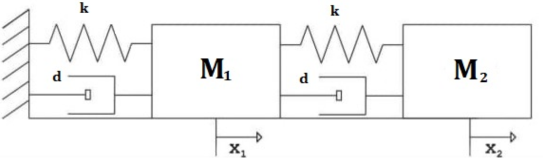


Figura 3: Sistema massa e mola

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{4}$$

Onde $\mathbf{M} \in \Re^{n \times n}$, é uma matriz de massas, $\mathbf{D} \in \Re^{n \times n}$ é uma matriz de amortecimento, $\mathbf{K} \in \Re^{n \times n}$ é uma matriz de rigidez, $\mathbf{B} \in \Re^{n \times m}$ é uma matriz de controle, $\mathbf{x} \in \Re^{n}$ é o vetor de deslocamento e $\mathbf{u} \in \Re^{m}$ é um vetor de entradas. SISOSingle Input Single Output

$\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_1$
$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_2$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2 \tag{5}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}u \tag{6}$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} u. \tag{7}$$

ou de maneira abreviada

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}u$$

com

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Fundamentação Teórica - Matriz de receptância

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t) \tag{9}$$

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau)\, d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \tag{10}$$

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - b(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{z} = \mathbf{0} \tag{11}$$

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - q(s)(s)bd)^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{0}$$

Fundamentação Teórica - Fórmula de Sherman-Morrison

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \tag{12}$$

Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* em (11) com $\mathbf{A} = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K})$, $\mathbf{u} = \mathbf{B}$ e $\mathbf{v} = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$, temos:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{b}\mathbf{d}(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)db} \tag{13}$$

onde $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} + bd(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s))^{-1}$ é definida em (**??**) como matriz de receptância de malha fechada e $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K})^{-1}$ como matriz de receptância de malha aberta, que, na prática, pode ser medida pela resposta em frequência $\mathbf{H}(j\omega)$.
A equação característica de (13) é definida como:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)b = 0 \tag{14}$$

Fundamentação Teórica - solução do sistema

$$(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s_k)b = 1$$

$$\mathbf{r}_k(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n$$

ou

$$\mathbf{r}_k k_p + \frac{k_i}{r_k} s + k_d r_k s = 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n$$

com $\mathbf{r}_k = \mathbf{H}(s_k)b$, onde o sobrescrito k representa o $k - \textit{ésimo}$ autovalor. E na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \frac{\mathbf{r}_1}{s_1} & s_1\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 & \frac{\mathbf{r}_2}{s_2} & s_2\mathbf{r}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{r}_{2n} & \frac{\mathbf{r}_{2n}}{s_{2n}} & s_{2n}\mathbf{r}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Fundamentação Teórica - Sistema com atraso

$$u(t-\tau) = k_p e(t-\tau) + k_i \int_0^t e(t-\tau)\, d\tau + k_d \frac{de(t-\tau)}{dt} \tag{16}$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t-\tau) \tag{17}$$

com $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}e^{st}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - bd(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)e^{-s\tau})\mathbf{z} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + K + e^{-s\tau}q(s)bd)^{-1}\mathbf{z} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{bd}(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)e^{-s\tau}}{1 + \mathbf{bd}(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)e^{-s\tau}} \tag{19}$$

Fundamentação Teórica - Fórmula de Sherman-Morrison com atraso

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{bd}(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)e^{-s\tau}}{1 + \mathbf{bd}(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)e^{-s\tau}} \tag{20}$$

$$1 - (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-s\tau} = 0 \tag{21}$$
$$(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)b = e^{s\tau}$$

e reescrevendo matricialmente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 & \frac{\mathbf{r}_1}{s_1} & s_1\mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 & \frac{\mathbf{r}_2}{s_2} & s_2\mathbf{r}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{r}_{2n} & \frac{\mathbf{r}_{2n}}{s_{2n}} & s_{2n}\mathbf{r}_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_p \\ k_i \\ k_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{s_1\tau} \\ e^{s_2\tau} \\ \vdots \\ e^{s_{2n}\tau} \end{bmatrix} \tag{22}$$

Resposta em frequência

- A matriz de receptância nos fornece a resposta em frequência $H(j\omega)$ do sistema
- O ganho de malha da equação característica em malha fechada é descrito na Equação 23.

$$L(s) = \mathbf{bd}(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)e^{-s\tau} \tag{23}$$

Definição do Problema - Estabilidade

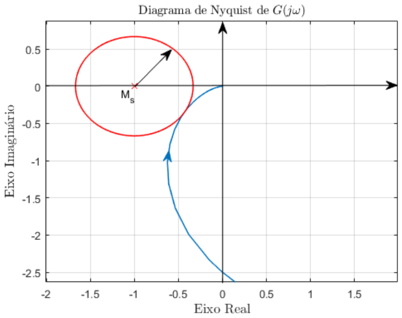


Figura 4: Diagrama de Nyquist Exemplo de Circunferência. M$_s$

Restrições de estabilidade

- Podemos afirmar pela teórica do critério de estabilidade de Nyquist que circunferência M_s representa quanto robusto é o sistema
- M_s é menor distância entre o ponto $(-1, 0)$ e a curva de Nyquist

Definição do Problema - Instabilidade

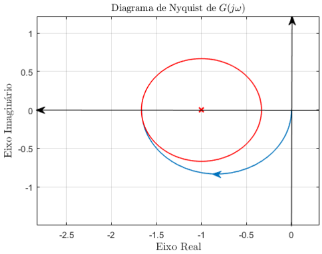


Figura 5: Diagrama de Nyquist de um Sistema Genérico para Exemplo de um Caso de Instabilidade.

Restrições de instabilidade

- Garantir que a curva de Nyquist não contenha a circunferência a englobando
- Enlaçar o ponto $(1, 0)$, se evidencia um caso de instabilidade

Definição do Problema - Funções de otimização

$$
\begin{aligned}
\min_{k_p\ k_i,\ k_d} \quad & h(k_p, k_i, k_d) = \left(\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - \mathrm{M}_s^{-1} \right)^2 \\
s.a. \quad & L(j\omega_i) = -(k_p + \frac{k_i}{j\omega_i} + k_d j\omega_i)\mathbf{H}(j\omega_i) b e^{-j\omega_i \tau} \\
& \mathrm{Re}\left\{ L(j\omega_i) \right\} \geq -1 + \mathrm{M}_s^{-1} \quad \forall\, \omega_i / \, \mathrm{Im}\left\{ L(j\omega_i) \right\} = 0 \\
\min_{\omega_i} \quad & \mathrm{Re}\{L(j\omega_i)\} = -1 + \mathrm{M}_s^{-1} \quad \forall\, \omega_i / \, \mathrm{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Metodologia - Algoritmo

Função	Dimensão	PSO [3]	PSO	GA [3]	GA	GA [5]
Esfera	30	1.0454E+05 ±7.1998E+04	**2.241E+03 ±7.030E+02**	6.4415E+03 ±1.6876E+03	**6.7564E+01 ±4.4760E+01**	2.0532E+02 ± 4.6377E+01
Rosenbrock	2	7.0289E+08 ±4.8937E+08	**7.0261E+08 ±3.666E+08**	1.2493E+07 ±8.6725E+06	**9.7689E+00 ±2.5590E+03**	1.2280E+02 ±1.9833E+02
Rastrigin	30	5.4130E+02 ±1.5969E+01	**1.7430E+02 ±2.506E+01**	5.5900E+01 ±1.4294E+01	**1.7650E+01 ±3.2255E+00**	6.9160E+01 ± 9.5182E+00

Figura 6: Média e desvio-padrão do fitness de 20 execuções do algoritmo, nas condições da ref [3]. Resultados deste trabalho em negrito

Busca dos ganhos do controlador

- Uso de meta-heurística para encontrar os ganhos
- Algoritmo Genético
- Resolve de forma genérica problemas de otimização
- Geralmente aplicadas a problemas para os quais não se conhece algoritmo eficiente

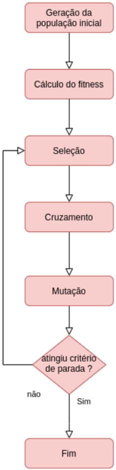


Figura 7: Fluxograma do algoritmo genético

Metodologia - Métodos de seleção

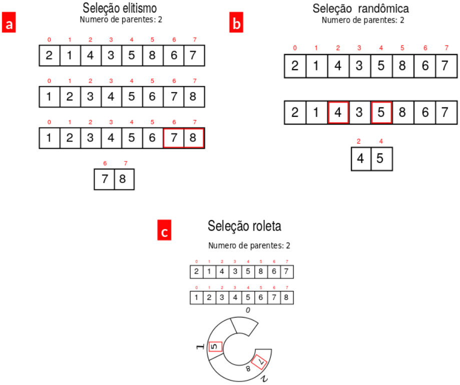


Figura 8: Ilustração dos métodos implementados de seleção. (a) Seleção elitismo, ordenando de forma crescente e escolhendo os indivíduos com maior fitness. (b) Seleção Randômica, que seleciona os pais aleatoriamente entre a população. (c) Seleção roleta, a qual ordena e rearranja para que simula uma roleta.

Metodologia - Métodos de cruzamento

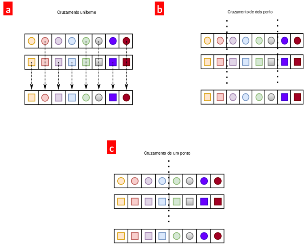


Figura 9: Algoritmos de cruzamento (crossover). (a) Cruzamento uniforme, em que o novo cromossomo (abaixo) é formado selecionando genes aleatórios de cada um dos pais. (b) Cruzamento de dois pontos, em que o novo cromossomo é formado pelas extremidades de um dos pais e a parte central do outro. Os pontos de corte (tracejados) são sorteados aleatoriamente para cada indivíduo. (c) Cruzamento de um ponto, em que o novo indivíduo é gerado com o início do cromossomo de um dos pais e o final do outro. O ponto de corte (linha tracejada) é decidido aleatoriamente para cada indivíduo.

Conclusões

- Estudo da eficiência para essa técnica utilizando controlador PID.
- Avaliação do critério de estabilidade de Nyquist.
- Trabalhos futuros: Aplicar essa técnica para sistemas multivariáveis e sistemas instáveis, verificar eficiência de outro algoritmo heurístico (PSO).

Referências

[1] Ogata, Katsuhiko (2009), Modern control engineering, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.

[2] DANTAS, N. J. B. (n.d.), Projeto de controladores para sistemas de segunda ordem com atraso via resposta em frequência., Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

[3] Mohd Nadhir Ab Wahab, Samia Nefti-Meziani, Adham Atyabi, A Comprehensive Review of Swarm Optimization Algorithms, PLOS ONE, 10, e0122827, 2015.

[4] Solgi, R. M., geneticalgorithm, v 1.0.1, https://github.com/rmsolgi/geneticalgorithm Acessado em 24/08/2020.