



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECATRÔNICA



Controle por Realimentação Derivativa para Sistemas Dinâmicos de Segunda Ordem com Atraso

Leonardo Araújo Nunes

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea

Co-orientador: Prof. Dr. José Mário Araújo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica da UFRN (área de concentração: Automação e Sistemas) como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Número de ordem PPgEMECA: M027

Natal, RN, 19 de janeiro de 2022

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Nunes, Leonardo Araújo.

Controle por Realimentação Derivativa para Sistemas Dinâmicos de Segunda Ordem com Atraso / Leonardo Araújo Nunes. - 2022.

76f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica, Natal, 2022.

Orientador: Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea

Coorientador: Dr. José Mário Araújo

1. Sistemas de segunda ordem - Dissertação. 2. Resposta em frequência - Dissertação. 3. Realimentação derivativa - Dissertação. 4. Sistemas singulares - Dissertação. 5. Regularização - Dissertação. I. Dórea, Carlos Eduardo Trabuco. II. Araújo, José Mário. I. Dórea, Carlos Eduardo Trabuco. II. Araújo, José Mario. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 621.865.8

*A todos aqueles que estiveram ao
meu lado durante a realização deste
trabalho.*

Agradecimentos

Ao meu orientador Carlos Eduardo Trabuco Dórea.

Ao meu co-orientador José Mário Araújo.

Ao colega Nelson J. B. Dantas.

À minha esposa Thais e família pelo apoio durante esta jornada.

Resumo

Neste trabalho propõe-se um método para o projeto de controladores por realimentação derivativa de estados de sistemas lineares representados por equações diferenciais matriciais de segunda ordem com atraso no sinal de controle. A partir da representação no domínio da frequência, conhecida como modelo por receptância, é formulado um problema de otimização para o cálculo de ganhos do controlador que limitem o pico em frequência de uma função de sensibilidade, garantindo assim estabilidade robusta em malha fechada mesmo diante do atraso. Algoritmo Genético é usado na resolução do problema de minimização. Para tratar de sistemas com matriz massa singular, uma estrutura com o preditor de Smith filtrado é proposta, a qual garante a regularização do sistema e a eliminação de dinâmicas impulsivas para condições iniciais consistentes. Experimentos numéricos ilustram a eficácia do método proposto, inclusive na eliminação de dinâmicas impulsivas, e trazem comparações com controladores por realimentação de estado.

Palavras-chave: Sistemas de segunda ordem, Resposta em frequência, Realimentação derivativa, Sistemas singulares, Regularização.

Abstract

This work proposes a method for designing controllers by state-derivative feedback of linear systems represented by second-order matrix differential equations with delay in the control signal. From the frequency domain representation, known as the receptance model, an optimization problem is formulated for the computation of controller gains that limit the frequency peak of a sensitivity function, thus ensuring robust stability in closed-loop even in face of delay. Genetic Algorithm is used to solve the optimization problem. To deal with systems with a singular mass matrix, a structure with a filtered Smith predictor is proposed, which guarantees the regularization of the system and the elimination of impulsive dynamics for consistent initial conditions. Numerical experiments illustrate the effectiveness of the proposed method, including the elimination of impulsive dynamics, and bring comparisons with state feedback controllers.

Keywords: Second-order systems, frequency response, state-derivative feedback, singular systems, regularization.

Sumário

Sumário	5
Lista de Figuras	7
Lista de Tabelas	10
1 Introdução	11
2 Referencial Teórico	14
2.1 Sistemas de Segunda Ordem	14
2.1.1 Problema do Autovalor Quadrático (QEP)	17
2.1.2 Realimentação de Estados e Realimentação Derivativa de Estados	18
2.2 Alacação de autovalores para sistemas de segunda...	20
2.2.1 Método da Receptância	21
2.2.2 Método da Receptância para o Caso de Realimentação Derivativa	24
2.3 Breve Análise do Sistema no Domínio da Frequência	25
2.3.1 Resposta em Frequência	25
2.3.2 Expressões Analíticas para a Resposta em Frequência	26
2.3.3 Diagrama de Nyquist e o Critério de Estabilidade	28
3 Controle por Realimentação Derivativa...	30
3.1 Problema da Alocação Indesejada	32
3.2 Abordagem do Problema no Domínio da Frequência	34
3.3 Parâmetro de Projeto e Formulação Matemática	34
3.3.1 Primeira restrição (necessária para a estabilidade)	36
3.3.2 Restrição adicional (restrição imposta para melhor desempenho) .	37
3.3.3 Restrição de regularização	38
3.4 Sistemas com Matriz Massa Singular e com Atraso	38
3.4.1 Problema da Regularização - Uso de Compensação	39
3.4.2 Condições Iniciais Consistentes - Complemento para a Elimina- ção do Comportamento Impulsivo	41
3.5 Resumo da problematização	43
3.6 Projeto de Controlador Usando Algoritmo Genético	43
3.6.1 Solução do Problema de Otimização	44

4	Experimentos e Resultados	48
4.1	Exemplo 1	48
4.2	Exemplo 2	51
4.3	Exemplo 3	55
4.3.1	Exemplo 3 (matriz massa singular sem atraso)	56
4.3.2	Exemplo 3 (matriz massa singular com atraso de 5 segundos) . . .	61
5	Conclusões	73
	Referências bibliográficas	74

Lista de Figuras

2.1	Sistema massa-mola-amortecedor de $n = 1$	15
2.2	Sistema massa-mola-amortecedor de $n = 4$	15
2.3	Respostas naturais do sistema da equação 2.1, para o caso de 1 grau de liberdade ($n = 1$) e diferentes valores de ξ	16
2.4	Resposta em frequência senoidal: a - sistema; b - função de transferência; e c - formas de onda de entrada e de saída.	26
2.5	Sistema massa-mola-amortecedor de $n = 1$	27
2.6	Sistema de controle e malha fechada.	28
2.7	Demonstração gráfica de mapeamento de um ponto e contorno no plano s por meio da função $F(s)$	29
3.1	Sistema de segunda ordem com atraso.	33
3.2	Aproximação dos autovalores primários utilizando Padé de ordem 3. . . .	33
3.3	Diagrama de Nyquist tangenciando a circunferência de raio M_s^{-1} centrada em $(-1 + 0j)$	35
3.4	Diagrama de Nyquist de um sistema genérico para exemplo de eventual caso de busca por minimização da equação 3.5 sem o uso da restrição 3.6.	36
3.5	Diagrama de Nyquist das equações presentes em 3.10, com ω variando somente entre 0 e 30 rad/seg, para fins de visualização. Em vermelho as curvas da equação 3.10a (sem atraso) e em azul a equação 3.10b (com atraso). O 'x' em $(-1+0j)$ representa ponto de interesse a estabilidade de Nyquist.	40
3.6	Esquema representativo de sistema de segunda ordem genérico (como da equação 1.1), acrescido de atraso e posto em malha fechada com realimentação derivativa com o preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018).	41
4.1	Sistema massa-amortecedor-mola a ser controlado.	48
4.2	Diagrama de Nyquist após a realimentação do sistema com os ganhos apresentados na Tabela 4.1.	49
4.3	Respostas do estado $\mathbf{x}(t)$ para condições iniciais $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ e um $\mathbf{x}(0) = 0,3$	50
4.4	Respostas do estado $\mathbf{x}'(t)$ para condições iniciais $\mathbf{x}'(0) = 0$ e um $\mathbf{x}(0) = 0,3$	51
4.5	Curvas de Nyquist referentes a Tabela 4.4.	53
4.6	Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.4.	54

4.7	Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.4.	55
4.8	Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.4.	56
4.9	Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a tabela 4.4.	57
4.10	Curvas de Nyquist referentes a Tabela 4.7.	59
4.11	Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.7.	60
4.12	Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.7.	61
4.13	Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.7.	62
4.14	Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.7.	63
4.15	Gráficos dos estados de aceleração para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, com ganhos da Tabela 4.7, como forma de comprovar a supressão do impulso em simulação.	64
4.16	Curvas de Nyquist referentes a Tabela 4.10.	65
4.17	Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.10.	66
4.18	Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.10.	67
4.19	Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.10.	68
4.20	Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.10.	69
4.21	Gráficos dos estados de aceleração para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.10.	70

4.22	Gráficos dos estados de aceleração para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, com ganhos presentes na Tabela 4.10 e com condições iniciais consistentes ($\mathbf{x}(0) = [0,1819 \quad 0,091]$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = [-0,5454 \quad -0,4545]$).	72
------	---	----

Lista de Tabelas

4.1	Demonstrativos dos ganhos de realimentação (derivativa ou não, com restrição adicional ou não).	49
4.2	Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos.	50
4.3	Margens de fase alcançadas para os diferentes casos.	50
4.4	Demonstrativos dos ganhos de realimentação (derivativa ou não, com restrição adicional ou não).	52
4.5	Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.4 . . .	52
4.6	Margens de fase alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.4. . . .	52
4.7	Demonstrativos dos ganhos de realimentação para o exemplo 3 sem atraso.	58
4.8	Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.7. . .	58
4.9	Margens de fase alcançadas para os diferentes casos da tabela 4.7	58
4.10	Demonstrativos dos ganhos de realimentação para o exemplo 3 com atraso (realimentação derivativa com o uso de preditor de Smith).	65
4.11	Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.10. . .	65
4.12	Margens de fase alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.10. . . .	65

Capítulo 1

Introdução

Equações diferenciais matriciais de segunda ordem vêm sendo usadas em diversos campos para modelar sistemas como, por exemplo, em circuitos elétricos, mecânica dos flúidos, sistemas mecânicos microeletrônicos (Tisseur e Meerbergen, 2001) e estruturas mecânicas. Sistemas mecânicos modelados como na equação (1.1) podem ser reescritos na forma de equações diferenciais matriciais de primeira ordem no espaço de estados, mas com isso há a perda de boas propriedades das matrizes como a simetria e esparsidade (Datta, 2003), além de tal manobra demandar um maior esforço computacional, tempo de execução e espaço para armazenamento, já que há um rearranjo das matrizes antes pertencentes ao \mathbb{R}^{nxn} , passando a integrar o \mathbb{R}^{2nx2n} (Tisseur e Meerbergen, 2001).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (1.1)$$

Ao se trabalhar com sistemas como o da equação (1.1), surge a dificuldade de realizar a sua modelagem, seja por elementos finitos ou outros, em especial nos casos de sistemas amortecidos, já que é mais difícil se definir com precisão a matriz de amortecimento (Tisseur e Meerbergen, 2001).

Como forma de facilitar a etapa de modelagem, tem-se o método baseado no conceito de receptância, apresentado em Ram *et al.* (2009), que utiliza dados experimentais do sistema para tal. Utilizando o método da receptância como apresentado em Ram *et al.* (2009) é possível alocar os pólos do sistema em uma posição segura no plano complexo, alcançando-se também um desempenho desejado. No entanto, com a presença de atraso de transporte no sistema, a simples utilização deste método não garante a estabilidade em malha fechada, surgindo a necessidade de realizar uma análise *a posteriori* com a utilização de técnicas de aproximação por séries de Taylor ou mesmo aproximação de Padé, como visto em Ram *et al.* (2009) e em Araújo (2018), respectivamente.

Para eliminar a necessidade da análise *a posteriori* do método da receptância, quando da presença de atraso, Dantas *et al.* (2020b) propuseram uma abordagem no domínio da frequência, utilizando conceitos como estabilidade de Nyquist, margem de ganho e função de sensibilidade, sendo possível em seu trabalho projetar um controlador robusto.

Para implementar este controle, Dantas *et al.* (2020b) utilizaram realimentação de estados, assim como Ram *et al.* (2009) realizando alterações nas matrizes \mathbf{D} e \mathbf{K} (vide equação (1.1)).

No presente trabalho, baseando-se no método proposto por Dantas *et al.* (2020b), é

proposto um método para o projeto de controle por meio de realimentação derivativa de estados, alterando-se desta forma as matrizes \mathbf{M} e \mathbf{D} . A realimentação derivativa apresenta vantagens em relação à realimentação de estado, tais como: uso de acelerômetros como sensores necessários ao controle, que possuem custo mais reduzido e são de maior aplicabilidade na indústria (Faria *et al.*, 2009); melhor precisão na leitura dos estados do sistema (Abdelaziz e Valasek, 2004); possibilidade de regularização e estabilização de sistemas com matriz massa singular (Abdelaziz, 2015)¹. Em trabalho publicado por Nunes *et al.* (2021) são expostos resultados do método aqui proposto, mas ao tempo de tal publicação não havia resultados referentes a regularização de sistemas de matriz massa singular com atraso no sinal de controle.

Em Dantas *et al.* (2020b) ficou demonstrado por meio de exemplos que sua proposta é eficiente em estabilizar e controlar de forma satisfatória diferentes sistemas, mesmo quando o método proposto em Ram e Mottershead (2007) e Ram *et al.* (2009) falha em uma primeira tentativa (antes de uma análise *a posteriori*). De igual forma ficou demonstrado em Nunes *et al.* (2021) a eficiência da extensão do método de Dantas *et al.* (2020b) a realimentação derivativa aqui empregada.

Neste trabalho é buscado como um de seus alvos a regularização de sistemas singulares de segunda ordem com atraso, sendo demonstrado na formulação do problema que no momento da regularização surge no polinômio característico um grau superior no numerador em relação ao seu denominador e que tal problema somado ao atraso gera impossibilidade para a regularização (devido ao rápido crescimento do módulo e fase do sistema no diagrama de Nyquist) sem que seja feito algum tipo de compensação. Como solução é apresentado o preditor de Smith com filtro proposto por Araújo e Santos (2018) para compensar o atraso e ainda assim tirar proveito do conceito de receptância para modelagem do sistema (necessária para o preditor).

Desta forma o presente trabalho apresenta uma extensão ao caso de realimentação derivativa e traz um comparativo entre os resultados alcançados com o método proposto em Dantas *et al.* (2020b) que utiliza realimentação de estados. Há ainda a utilização desta extensão ao caso da realimentação derivativa em sistemas de matrizes de massa singulares na presença de atraso para a sua regularização, utilizando como forma de compensação do atraso o preditor de Smith proposto por Araújo e Santos (2018), e quando possível as condições iniciais consistentes como apresentado em Bhat e Bernstein (1996). Acrescenta-se que apesar do uso do preditor a extensão aqui apresentada tem sua importância ao passo em que elimina a resposta impulsiva do sistema (o que não é possível com a realimentação de estados utilizada em Dantas *et al.* (2020b)).

O restante do trabalho está disposto da seguinte maneira:

- Capítulo 2: Traz conceitos iniciais e necessários para a compreensão do trabalho aqui desenvolvido.
- Capítulo 3: São apresentados problemas enfrentados no controle de sistemas de segunda ordem com atraso, parâmetros do projeto e sua formulação matemática necessária para o controle, além de ilustração por meio de pseudocódigos do método de otimização utilizado.

¹Destaca-se que em Abdelaziz (2015) os sistemas trabalhados não possuem atraso, o que evidencia uma dificuldade a mais a ser aqui trabalhada.

- Capítulo 4: São apresentados os resultados obtidos com a utilização do método proposto e exemplos numéricos disponíveis em outros trabalhos, momento em que é possível realizar estudos comparativos.
- Capítulo 5: Neste capítulo são apresentadas as conclusões.

Capítulo 2

Referencial Teórico

2.1 Sistemas de Segunda Ordem

Uma grande variedade de aplicações requerem o uso de sistemas de segunda ordem para descrição de sua dinâmica, como por exemplo a simulação de circuitos elétricos, sistemas mecânicos e microeletrônicos, a mecânica de fluidos e estruturas mecânicas como um todo (Tisseur e Meerbergen, 2001).

Aqui é dado maior destaque aos sistemas mecânicos, tendo em vista que presente trabalho tem como foco o controle ativo de vibrações (AVC) e uma de suas bases o artigo desenvolvido por Ram e Mottershead (2007) e outros mais recentes como Araújo (2018), Santos *et al.* (2018) e Dantas *et al.* (2020), trabalhos estes que se utilizam da descrição de sistemas na forma de modelos de segunda ordem.

Dada a importância deste tipo de sistema para o presente trabalho, se faz necessária uma breve revisão sobre o tema.

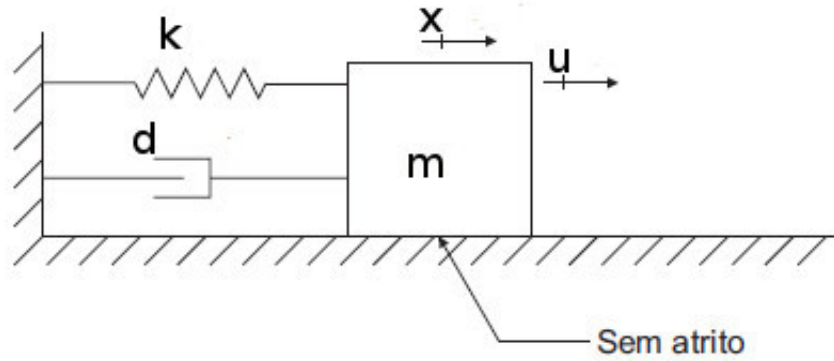
Equações de segunda ordem podem ser escritas como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad (2.1)$$

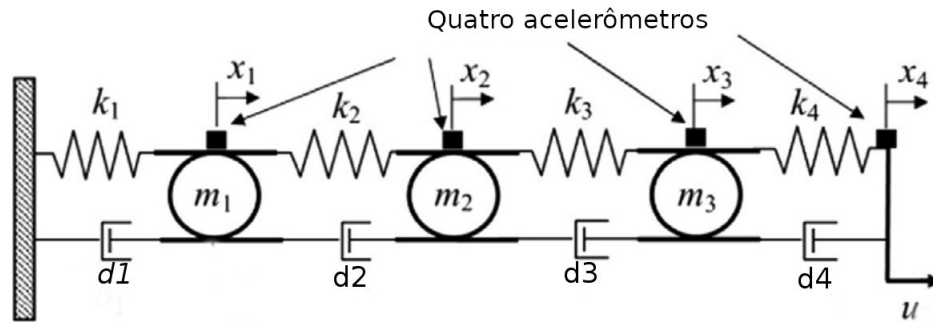
na qual \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são matrizes $n \times n$ e $\mathbf{x}(t)$ é um vetor de ordem n . Para o caso de sistemas mecânicos os parâmetros \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} representam respectivamente as matrizes massa, amortecimento e rigidez, como as dos sistemas ilustrados nas Figuras 2.1 e 2.2 (respectivamente para casos de $n = 1$ e $n = 4$, este último extraído de Abdelaziz (2015) com alguns ajustes), já \mathbf{B} representa a configuração dos atuadores, \mathbf{x} um vetor de deslocamento e \mathbf{u} um vetor de entradas ao sistema.

Neste trabalho é desenvolvido um controle por realimentação derivativa dos estados¹ que busca aprimorar o comportamento do sistema (pela alocação dos pólos), de forma que seja garantida a estabilidade do sistema em malha fechada com algum grau de robustez, utilizando gráficos de seus estados no tempo para avaliar o comportamento modificado. Então, é importante fazermos uma breve discussão da solução homogênea da equação 2.1. Para iniciar tal discussão de maneira simples considera-se o caso de $\mathbf{u}(t) = 0$ (solução homogênea) e $n = 1$.

¹Tema a ser tratado mais a frente.

Figura 2.1: Sistema massa-mola-amortecedor de $n = 1$.

Fonte: Autor.

Figura 2.2: Sistema massa-mola-amortecedor de $n = 4$.

Fonte: Adaptado de Abdelaziz (2015).

Com as considerações ao final do parágrafo anterior, a equação 2.1 pode ser reescrita como 2.2:

$$\ddot{x}(t) + 2\xi\omega_n\dot{x}(t) + \omega_n^2x(t) = u(t) \quad , \omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}, \xi = \frac{C}{2M\omega_n} \quad (2.2)$$

Na equação 2.2, conforme Nise (2018) e outros, ω_n é conhecido como frequência natural e ξ fator de amortecimento, possuindo esta equação uma solução geral² na forma $x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, na qual $\lambda_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1}$ são as raízes de $\lambda^2 + 2\xi\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$ e A e B são constantes a serem determinadas pelas condições iniciais do sistema ($x(t_0)$ e $\dot{x}(t_0)$).

A depender do valor de ξ o sistema da equação 2.1, para o caso $n = 1$, pode adotar diferentes comportamentos quanto ao seu amortecimento, como demonstrado na Figura

²Outras soluções específicas podem ser consultadas na vasta literatura da Engenharia de Controle, tais como Nise (2018), Ogata (2009) e outros.

2.3. Nise (2018) classifica este sistema de segunda ordem quanto ao seu fator de amortecimento da seguinte forma: para $\xi = 0$ o sistema é dito “não amortecido” e oscila indefinidamente; para valores de $0 < \xi < 1$ o sistema é dito “subamortecido”; para o caso de $\xi > 1$ se diz haver um “superamortecimento”; e para o caso em que $\xi = 1$ ³ o sistema é conhecido como “criticamente amortecido”.

Ilustrando a resposta natural com alguns valores de ξ tem-se a Figura 2.3:

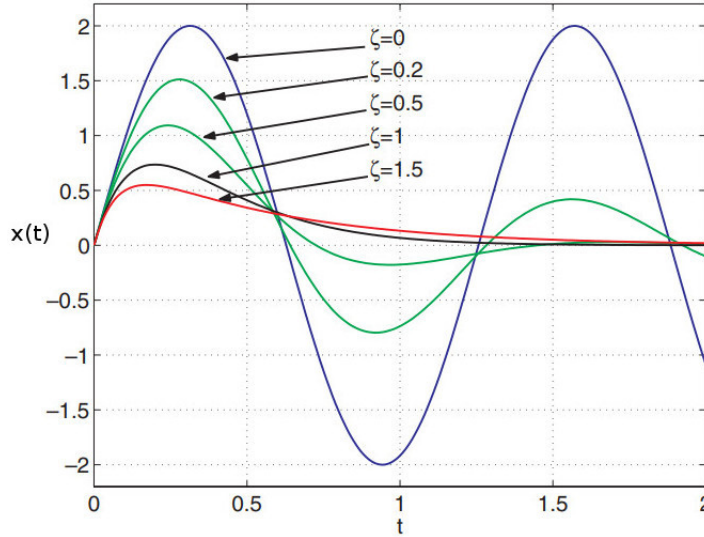


Figura 2.3: Respostas naturais do sistema da equação 2.1, para o caso de 1 grau de liberdade ($n = 1$) e diferentes valores de ξ .

Fonte: Nise (2018).

Iniciando a abordagem a sistemas de segunda ordem da equação 2.1 para o caso de $n > 1$, a título de exemplificação, tem-se o sistema representado na Figura 2.2, o qual possui sua equação na forma matricial representada em 2.3:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \\ \ddot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 & 0 & 0 \\ -d_2 & d_2 + d_3 & -d_3 & 0 \\ 0 & -d_3 & d_3 + d_4 & -d_4 \\ 0 & 0 & -d_4 & d_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & 0 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 & -k_4 \\ 0 & 0 & -k_4 & k_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3)$$

Para o caso de $n > 1$ o problema passa a ser matricial e é de conhecimento que os pólos do sistema equivalem aos seus autovalores. Também, tratando-se de sistemas matriciais

³Ocorre quando a equação 2.1 de $n = 1$ possui duas raízes reais e iguais.

de segunda ordem, o encontro dos autovalores e autovetores do sistema passa por um problema de autovalor quadrático (do inglês “quadratic eigenvalue problem” - QEP).

A respeito do QEP os autores Tisseur e Meerbergen (2001), citando referências como Gohberg *et al.* (1982) e Lancaster (1966), examinam o caso para $n > 1$ da equação 2.1 e, por questão de simplicidade, o caso particular em que os autovalores do sistema são todos distintos ($\lambda_i, i = 1 : 2n$ autovalores de $(\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K})x = 0$). Assim pode-se escrever $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2n})$, $R = [r_1, r_2, \dots, r_{2n}]$ e $L = [l_1, l_2, \dots, l_{2n}]$, onde r_i e l_i são respectivamente os autovetores a direita e a esquerda, já λ_i são os autovalores correspondentes e desta forma a solução geral homogênea é apresentada como $x(t) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k r_k e^{\lambda_k t} = R e^{\Lambda t} a$ (onde $a = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}]^T$ é um vetor arbitrário de constantes).

Destaca-se que tanto para o caso de em que a equação 2.1 possui $n = 1$ ou também $n > 1$ há a possibilidade de se representá-la na forma de equação de primeira ordem no espaço de estados, bastando para isso que a matriz \mathbf{M} seja inversível⁴ e que sejam seguidos alguns passos amplamente difundidos em literatura básica da Engenharia de Controle, tais como Ogata (2009) e Nise (2018), surgindo o benefício da utilização de outras técnicas de controle voltadas a sistemas assim modelados. No entanto, além de não fazer parte do escopo⁵ deste trabalho, conforme trazem Tisseur e Meerbergen (2001), a representação destes sistemas no espaço de estados, utilizando equação diferenciais de primeira ordem, demanda um maior esforço computacional, tempo de execução e espaço para armazenamento, tendo em vista que as matrizes deixam de ser da ordem $n \times n$ e passam a ser da ordem $2n \times 2n$.

Com esta breve introdução sobre o tema sistemas de segunda ordem, e uma rápida análise de suas soluções gerais homogêneas, fica evidente a importância dos autovalores para sistemas representados pela equação 2.1, interferindo eles profundamente no comportamento do sistema. Desta forma verifica-se a premente necessidade de uma discussão (mesmo que igualmente breve) sobre métodos para a descoberta de seus autovalores (que se resumem a um problema de autovalor quadrático - QEP) e outros para uma desejada realocação deles (no presente trabalho são apresentadas a realimentação de estados e também sua realimentação derivativa).

2.1.1 Problema do Autovalor Quadrático (QEP)

Como dito na parte final da seção anterior os autovalores possuem importante papel no comportamento dinâmico de um sistema de 2ª ordem, sendo fundamental o conhecimento de seus valores. O conhecimento dos autovalores adquire mais importância no momento em que (como será visto mais a frente) a técnica de controle aqui desenvolvida exige que o sistema a ser controlado não possua autovalores no semiplano direito (SPD).

Em Tisseur e Meerbergen (2001) é trazida a equação

$$Q(\lambda) = \lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{D} + \mathbf{K}, \quad (2.4)$$

⁴O que nem sempre é possível, como por exemplo na equação 2.3 em que $m_4 = 0$.

⁵O controle aqui implementado trabalha diretamente sobre equações de segunda ordem.

a qual é uma matriz polinomial $n \times n$ de grau 2, composta pelas matrizes massa, amortecimento e rigidez. Da equação 2.4 pode ser extrair o seu espectro, conhecido por

$$\Lambda(Q) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det Q(\lambda) = 0\} \quad (2.5)$$

trazendo $\Lambda(Q)$ o conjunto de autovalores de $Q(\lambda)$.

Há outro fator de interesse sobre a formação de $Q(\lambda)$, que seja a singularidade ou não da matriz \mathbf{M} (se está é inversível ou não). Para casos em que a matriz \mathbf{M} é singular o grau do polinômio de $\det Q(\lambda)$ será $r < 2n$, ou seja, o sistema possuirá tão somente r autovalores finitos e outros $2n - r$ autovalores no menos infinito, como também explica Abdelaziz (2015).

O presente trabalho ao implementar técnica de controle por realimentação derivativa, conforme Abdelaziz (2015), traz a possibilidade de eliminar respostas impulsivas indesejáveis do sistema devido a presença destes autovalores infinitos, tendo em vista que esta técnica é capaz de regularizar a matriz \mathbf{M} e por consequência tornar todos seus autovalores finitos.

Vale destacar que não está se falando aqui em resposta impulsiva como aquela tradicionalmente citada na literatura, ou seja, a resposta do sistema inicialmente em repouso a uma entrada impulsiva, mas sim a resposta de um sistema a determinadas condições iniciais que o levam a um comportamento impulsivo, como no exemplo citado por Bhat e Bernstein (1996) de centelhas/faíscas que surgem quando dois sistemas elétricos são conectados.

2.1.2 Realimentação de Estados e Realimentação Derivativa de Estados

Tendo em mente o exposto na seção 2.1.1 ou seja, que os autovalores de um sistema de segunda ordem podem ser descobertos por meio da equação $\det Q(\lambda) = 0$ (vide equação 2.5), fica claro que a realização de alterações nas matrizes massa, amortecimento ou mola (\mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K}) é capaz de modificar os autovalores do sistema (e consequentemente o seu comportamento dinâmico).

Uma das técnicas de controle utilizada para realizar esta alteração ⁶ é chamada de realimentação de estados, os quais descrevem o sistema. Para a implementação desta técnica são realizadas alterações da lei de controle, permitindo que o sistema possa ser colocado em malha fechada, realimentando o sistema com seus próprios estados modificados por algum ganho.

A depender dos estados a serem utilizados, a técnica de controle poderá ser chamada

⁶Deve-se ter atenção ao fato de que a realimentação de estados não realiza alterações propriamente ditas nos parâmetros do sistema em malha aberta, ou seja, não há alterações físicas na massa do sistema, nem sobre as propriedades de amortecimento ou rigidez em malha aberta do sistema. O que vem a ocorrer de fato é que matematicamente, quando é realizada a realimentação do sistema com seus estados, colocando-o em malha fechada, são notadas "alterações virtuais" sobre as matrizes de massa, amortecimento ou mesmo a de rigidez, como se vê nas equações 2.9 e 2.10

simplesmente de “realimentação de estado” ou “realimentação derivativa de estado”, possuindo suas leis de controle respectivamente as formas da equação 2.6 e 2.7.

$$u(t) = \mathbf{f}^T \dot{x}(t) + \mathbf{g}^T x(t) \quad (2.6)$$

$$u(t) = \mathbf{f}^T \ddot{x}(t) + \mathbf{g}^T \dot{x}(t) \quad (2.7)$$

Os vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} possui pertencem ao espaço \mathbb{R}^n .

Por questões didáticas há neste momento uma separação do tema em dois breves tópicos de “realimentação de estado” e “realimentação derivativa de estado” (chamada a partir deste ponto simplesmente de realimentação derivativa).

Realimentação de Estado

Tendo em mente o já citado em 2.1.2 e com a utilização da lei de controle exposta na equação 2.6, percebe-se que a equação 2.1 é modificada da forma apresentada na equação 2.8.

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{D}\dot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = \mathbf{B}(\mathbf{f}^T \dot{x}(t) + \mathbf{g}^T x(t)) \quad (2.8)$$

Com os devidos ajustes a equação 2.8 passa para a forma da equação 2.9

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{f}^T)\dot{x}(t) + (\mathbf{K} - \mathbf{B}\mathbf{g}^T)x(t) = 0 \quad (2.9)$$

logo, com o implemento da realimentação de estados aqui exposta, se torna possível alterar a dinâmica do sistema em malha fechada, havendo portanto uma realocação dos pólos do sistema.

No entanto, como percebe-se das equações apresentadas neste tópico, o grande problema reside em se saber quais devem ser os valores dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} . Para solução deste problema será discutido mais à frente o método da receptância, proposto em Ram e Mottershead (2007) e outros artigos.

Antes de ser discutido o método da receptância, deve-se falar a respeito da realimentação derivativa e o motivo de sua escolha para o presente trabalho.

Realimentação Derivativa

A ideia por trás da implementação da realimentação derivativa guarda grande semelhança com a realimentação de estado discutida no tópico anterior. Para sua implementação é adotada a lei de controle da equação 2.7 de maneira que as matrizes massa e amortecimento são alteradas da forma apresentada na equação 2.10.

$$(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}^T)\ddot{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{D} - \mathbf{B}\mathbf{g}^T)\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = 0 \quad (2.10)$$

Desta forma é possível se alterar os autovalores do sistema, como também já comentado no tópico anterior, realizando uma realimentação do sistema com os estados de aceleração e velocidade (com ganhos dados pelos vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} , respectivamente, no caso de sistemas mecânicos).

Apesar de parecer à primeira vista que a realimentação derivativa nada mais seria que uma nova abordagem matemática para da realimentação dos estados, ela traz consequências práticas de grande proveito. Um primeiro benefício seria a melhor qualidade na obtenção dos estados utilizados no sinal de controle, já um segundo benefício seria a possibilidade de regularização de sistemas de matriz massa singular.

Com relação a uma melhor obtenção dos estados, é afirmado por Abdelaziz e Valásek (2004) que os principais sensores utilizados nas mais diversas aplicações de controle são os acelerômetros, os quais (evidentemente) trazem como resposta o estado de aceleração do sistema. Faria *et al.* (2009) acrescentam que é possível se obter a velocidade com boa precisão integrando-se o sinal do acelerômetro. No entanto, uma nova integração do sinal do acelerômetro reconstruiria o estado deslocamento (utilizado na técnica de realimentação de estados, a “não derivativa”), trazendo consigo um acúmulo de erros e não representaria o deslocamento satisfatoriamente. Desta forma, este trabalho privilegia a realimentação derivativa em detrimento da realimentação de estados, pois assim faz uso de sinais mais fidedignos (o que já é um benefício em si só, tanto na área de controle como em tantas outras áreas ⁷).

Por fim, pode se verificar que com o uso da realimentação derivativa quando aplicado a sistemas de matriz \mathbf{M} (massa) singular, como em Abdelaziz (2015), surge a oportunidade de regularização do sistema (o que elimina comportamento impulsivo e indesejado), bastando que se garanta $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}^T) \neq 0$, pressupondo que $\text{rank}([\mathbf{M}, \mathbf{B}]) = n$.

2.2 Alocação de Autovalores para Sistemas de Segunda Ordem

Para que seja possível o controle do sistema, alcançando assim o desejado comportamento deste, é essencial que haja formas de se alocar devidamente os seus autovalores. Com relação ao tema Wonham (1967) demonstra primeiramente que para tal tarefa a realimentação de estado é um meio, desde que o sistema seja controlável. Por sua vez, Chu e Datta (1996) apresentam métodos numéricos para se alcançarem os valores necessários para os vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} , na equação 2.9 para obtenção dos autovalores e autovetores desejados. Outros trabalhos como Abdelaziz (2013), mencionando a mesma necessidade

⁷Ressalta-se que a medição de qualquer fenômeno é de suma importância em toda e qualquer ciência, seja ela da área de humanas ou mesmo exatas. Já dizia Deming (1990), da Administração, que “não se gerencia o que não se mede”, ou mesmo Compton (2019), a respeito da Inteligência Artificial, “An artificial intelligence (AI) is only as useful as the data used to train it. Training AI with dubious data leads to questionable decisions”.

citada por Wonham (1967), relatam que o sistema deve ser controlável em malha aberta e demonstram ser possível se alcançar os valores dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} , na equação 2.10⁸, para a obtenção de desejados autovalores e um novo sistema igualmente controlável.

Em todos trabalhos acima citados há a necessidade de se obter as matrizes massa-amortecedor-rigidez do sistema, mesmo que com algum grau de incerteza inserido. No entanto, tais dados muitas vezes não são simples de se obter, conforme citam Tisseur e Meerbergen (2001)⁹. Como forma de sobrepor esta dificuldade tem-se o método da receptância, discutido em alguns artigos como Ram e Mottershead (2007) e Ram *et al.* (2009). Os citados artigos dispensam qualquer conhecimento das matrizes massa-amortecedor-rigidez, bastando o uso da matriz receptância (que pode ser obtida experimentalmente). Esses artigos trabalham de forma a obter os ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} , na equação 2.9 (realimentação de estados), mas com uma pequena adaptação o método é facilmente modificado para o seu uso na equação 2.10 (realimentação derivativa).

Desta forma, tendo em mente que este trabalho faz uso do método da receptância para o controle de sistemas de segunda ordem com atraso, o próximo tópico traz alguns apontamentos importantes citados em Ram e Mottershead (2007) e em especial Ram *et al.* (2009), que trata do método da receptância na presença de atraso no sinal de controle.

2.2.1 Método da Receptância

Como já citado nos parágrafos anteriores, o método da receptância traz grande vantagem inicial a partir do momento em que não é necessário conhecer os parâmetros das matrizes massa-amortecedor-mola, que são muitas vezes de difícil conhecimento, conforme citado em Tisseur e Meerbergen (2001), bastando a medição das receptâncias, conforme lecionam Ram e Mottershead (2007) e Ram *et al.* (2009).

Para formular o método da receptância, Ram *et al.* (2009) iniciam apresentado o sistema a ser controlado na forma da equação 2.11 combinada com a lei de controle 2.12, ou seja, um sistema de segunda ordem com realimentação de estados¹⁰.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t) \quad (2.11)$$

$$u(t) = \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}^T \mathbf{x}(t) \quad (2.12)$$

Nas citadas equações 2.11 e 2.12 as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{D} , $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$, $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$, $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} > 0$, $\mathbf{v}^T \mathbf{D} \mathbf{v} \geq 0$ e $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \geq 0$ para qualquer $\mathbf{v} \neq 0$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

Combinando 2.11 e 2.12 e expressando o resultado no domínio da frequência, tem-se:

⁸Ou seja, passando a trabalhar com realimentação derivativa.

⁹Em tradução livre é dito algo como que as propriedades de amortecimento do sistema raramente são conhecidas da mesma forma que aquelas da inércia e rigidez, tornando difícil de se obter a matriz de amortecimento com precisão.

¹⁰Ram *et al.* (2009) apresentam o método para a solução de um QEP inverso na forma de um sistema com realimentação de estados, mas com devidos ajustes matemáticos apresentados mais a frente o mesmo método pode ser utilizado para solução em uma realimentação derivativa.

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - \mathbf{B}(\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T] \mathbf{x}(s) = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

Claramente percebe-se que a equação 2.13 é composta por uma matriz de polinômios, que no caso seria o nosso sistema $(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K})$ modificado por uma outra matriz de mesma dimensão (a matriz $\mathbf{B}(\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T$) e de posto unitário (no caso SISO), ocorrendo assim o conhecido “rank-1 modification”. Prosseguindo Ram e Mottershead (2007) utilizam a fórmula de Sherman–Morrison, apresentada na equação 2.14, para poder alcançar a inversa da matriz do sistema em malha fechada (após a implementação da realimentação de estados), conforme a equação 2.15.

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{u}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}} \quad (2.14)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) + \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{B}(\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)}{1 - (\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)\mathbf{B}} \quad (2.15)$$

Deseja-se deixar claro que na equação 2.15 $\hat{\mathbf{H}}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - \mathbf{B}(\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T]^{-1}$ (ou seja, o sistema em malha fechada após a realimentação de estados) e $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K})^{-1}$. Outro fator importante de se notar é que $\mathbf{H}(s)$ é a citada matriz de receptância em malha aberta, a qual pode ser auferida por meio de medições, como citam Ram e Mottershead (2007) e Ram *et al.* (2009).

Desta forma, para encontrar os valores de ganho dos vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} e assim alcançar os autovalores desejados para o sistema em malha fechada, deve-se ter em mente que a equação característica do sistema de malha fechada, conforme 2.15, se apresenta como $1 - (\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)\mathbf{B} = 0$ ou melhor ainda, $(\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)\mathbf{B} = 1$.

Reescrevendo a equação característica de forma a inserir um conjunto k de autovalores desejados, esta passa a ser reescrita como 2.16,

$$\mathbf{r}_k^T (\mathbf{g} + s_k \mathbf{f}) = 1 \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{r}_k = \mathbf{H}(s_k)\mathbf{B}$ e s_k representa o k -ésimo autovalor (que vai de 1 a $2n$), do conjunto de autovalores desejados.

Após inserir $2n$ autovalores desejados na equação 2.16, esta pode ser representada matricialmente como 2.17.

$$\begin{bmatrix} s_1 \mathbf{r}_1^T & \mathbf{r}_1^T \\ s_2 \mathbf{r}_2^T & \mathbf{r}_2^T \\ \vdots & \vdots \\ s_{2n} \mathbf{r}_{2n}^T & \mathbf{r}_{2n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Logo, a solução para encontrar a valor dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} é diretamente encontrada pela equação 2.17, tendo em mente que a matriz receptância $\mathbf{H}(s)$ é conhecida por medições, assim como também o vetor \mathbf{B} e os autovalores desejados, restando o vetor de ganhos (composto por \mathbf{f} e \mathbf{g}) como única variável desconhecida.

Continuando com a apresentação do método da receptância, deve ser dito que este também pode ser utilizado para sistemas com atraso, conforme bem demonstram Ram *et al.* (2009). Nestes tipos de sistemas a ação de controle não é mais apresentada como em 2.12, passando a ser apresentada como na equação 2.18a (com atraso no sinal de controle) e o modelo do sistema incorpora este atraso como na equação 2.18b.

$$u(t - \tau) = \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{x}}(t - \tau) + \mathbf{g}^T \mathbf{x}(t - \tau) \quad (2.18a)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t - \tau) \quad (2.18b)$$

Esta nova forma do sinal de controle faz com que a representação de 2.13 na frequência também seja alterada, passando para a forma de 2.19).

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - \mathbf{B}(\mathbf{g} - s\mathbf{f})^T e^{-s\tau}] \mathbf{x}(s) = \mathbf{0} \quad (2.19)$$

Continuando e aplicando a fórmula de Sherman-Morrison, de maneira similar ao caso sem atraso, a equação característica do sistema em malha fechada é apresentada não mais como $1 - (\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s) \mathbf{B} = 0$, mas sim na forma da equação 2.20.

$$1 - (\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s) \mathbf{B} e^{-s\tau} = 0$$

$$(\mathbf{g} + s\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s) \mathbf{B} = e^{s\tau} \quad (2.20)$$

Finalmente, para um sistema em malha fechada controlado por realimentação de estados, na presença de atraso, a solução para se encontrar o vetor de ganhos composto pelos vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} é dada pela equação 2.21.

$$\begin{bmatrix} s_1 \mathbf{r}_1^T & \mathbf{r}_1^T \\ s_2 \mathbf{r}_2^T & \mathbf{r}_2^T \\ \vdots & \vdots \\ s_{2n} \mathbf{r}_{2n}^T & \mathbf{r}_{2n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{s_1 \tau} \\ e^{s_2 \tau} \\ \vdots \\ e^{s_{2n} \tau} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Destaca-se que no caso de sistema com atraso, como frisam Ram *et al.* (2009), o sistema passa a apresentar infinitos outros autovalores que emergem do infinito, e que a depender do atraso estes podem vir a interferir na dinâmica do sistema e a alocação de $2n$ autovalores não mais garante a estabilidade, surgindo para Ram *et al.* (2009) a necessidade de uma análise *a posteriori* (verificação se todos autovalores primários - que

interferem de fato na dinâmica do sistema - são estáveis), mas neste trabalho é apresentado método que dispensa este passo (detalhes mais a frente).

Maiores detalhes sobre método da receptância, inclusive com exemplos de aplicação, podem ser vistos em Ram e Mottershead (2007) e em Ram *et al.* (2009).

2.2.2 Método da Receptância para o Caso de Realimentação Derivativa

Aproveitando-se da ideia trazida em Ram *et al.* (2009), o qual implementa o método da receptância para se alcançar o valor dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} utilizados para atingir os autovalores desejados em um sistema de segunda ordem com atraso quando em malha fechada por realimentação de estados, é possível também expandir a mesma ideia para o caso de um sistema de segunda ordem com atraso em malha fechada por realimentação derivativa.

A diferença persiste em alterar a lei de controle utilizada, que seria antes a equação 2.18a, a qual implementa uma realimentação de estados com atraso. Deve-se então utilizar a equação 2.22 como lei de controle, para o caso com atraso, implementando-se então uma realimentação derivativa.

$$u(t - \tau) = \mathbf{f}^T \ddot{\mathbf{x}}(t - \tau) + \mathbf{g}^T \dot{\mathbf{x}}(t - \tau) \quad (2.22)$$

Prosseguindo, dada a lei de controle de 2.22, a equação 2.19 pode ser reescrita como 2.23.

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{D}s + \mathbf{K} - \mathbf{B}(\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})^T e^{-s\tau}] \mathbf{x}(s) = \mathbf{0} \quad (2.23)$$

Aplicando-se a fórmula de Sherman-Morrison em 2.23 é possível alcançar a equação 2.24.

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) + \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{B}(\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)e^{-s\tau}}{1 - (\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau}} \quad (2.24)$$

Logo, da equação 2.24 extraísse que a equação característica do sistema em malha fechada com uma realimentação derivativa é $1 - (\mathbf{sg} + s^2\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau} = 0$, o que torna possível chegar a 2.25, como similarmente feito na equação 2.21.

$$\begin{bmatrix} s_1^2 \mathbf{r}_1^T & s_1 \mathbf{r}_1^T \\ s_2^2 \mathbf{r}_2^T & s_2 \mathbf{r}_2^T \\ \vdots & \vdots \\ s_{2n}^2 \mathbf{r}_{2n}^T & s_{2n} \mathbf{r}_{2n}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{s_1 \tau} \\ e^{s_2 \tau} \\ \vdots \\ e^{s_{2n} \tau} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Assim, com as adequações apresentadas, é possível se utilizar o método da receptância em 2.25 para o caso de um sistema de segunda ordem com atraso e uma realimentação derivativa, conseguindo desta forma alcançar valores dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} necessários para a obtenção dos autovalores desejados. Com isso o controle será capaz de se beneficiar das vantagens já citadas do método da receptância¹¹ e da realimentação derivativa¹².

2.3 Breve Análise do Sistema no Domínio da Frequência

Tendo em mente que este trabalho utiliza a resposta em frequência de sistemas para realizar análises sobre este e atingir o objetivo final que seja o seu controle de forma satisfatória¹³, torna-se de suma importância a discussão sobre este tópico.

Neste ponto do trabalho é discutido o que seria uma resposta em frequência, formas de expressá-la graficamente e, por fim, um critério utilizado para avaliar a estabilidade do sistema por meio da resposta em frequência.

2.3.1 Resposta em Frequência

Lições sobre a resposta em frequência de sistemas podem ser tiradas de referências bibliográficas conhecidas da Engenharia de Controle, tais como Nise (2018) e Ogata (2009). As referências aqui citadas lecionam, cada uma da sua forma, que a resposta em frequência remete à resposta em regime permanente de um sistema linear e invariante no tempo (LTI - linear time-invariant) quando submetido a um conjunto entradas senoidais em diferentes frequências, gerando como resposta um sinal igualmente senoidal e de mesma frequência, no entanto com diferença de amplitude e de fase.

Uma representação gráfica da resposta em frequência para um sistema genérico pode ser vista na Figura 2.4 extraída de Nise (2018), onde se vê que para uma dada entrada senoidal de frequência, com fase e amplitude determinadas, a saída é na forma de uma senóide de mesma frequência, mas com amplitude e fase alteradas (para uma resposta em regime permanente).

A Figura 2.4 pode ser resumida pela equação $M_s(\omega)\angle\phi = M_e(\omega)M(\omega)\angle[\phi_e(\omega) + \phi(\omega)]$, sendo importante neste momento uma melhor noção analítica dos passos realizados para se chegar até esta equação.

¹¹A não necessidade de conhecimento explícito das matrizes massa-amortecedor-rigidez, por exemplo.

¹²Maior fidelidade na medição dos sinais necessários para a realimentação, possibilidade de regularização de sistemas com matriz massa singular, possibilitando a eliminação do comportamento impulsivo do sistema etc

¹³Satisfatório entende-se, para este trabalho, o controle que mantenha a estabilidade do sistema em malha fechada e com algum grau de robustez (a qual é alcançada pela margem de ganho garantida). Tema este discutido com detalhes adicionais mais à frente neste trabalho.

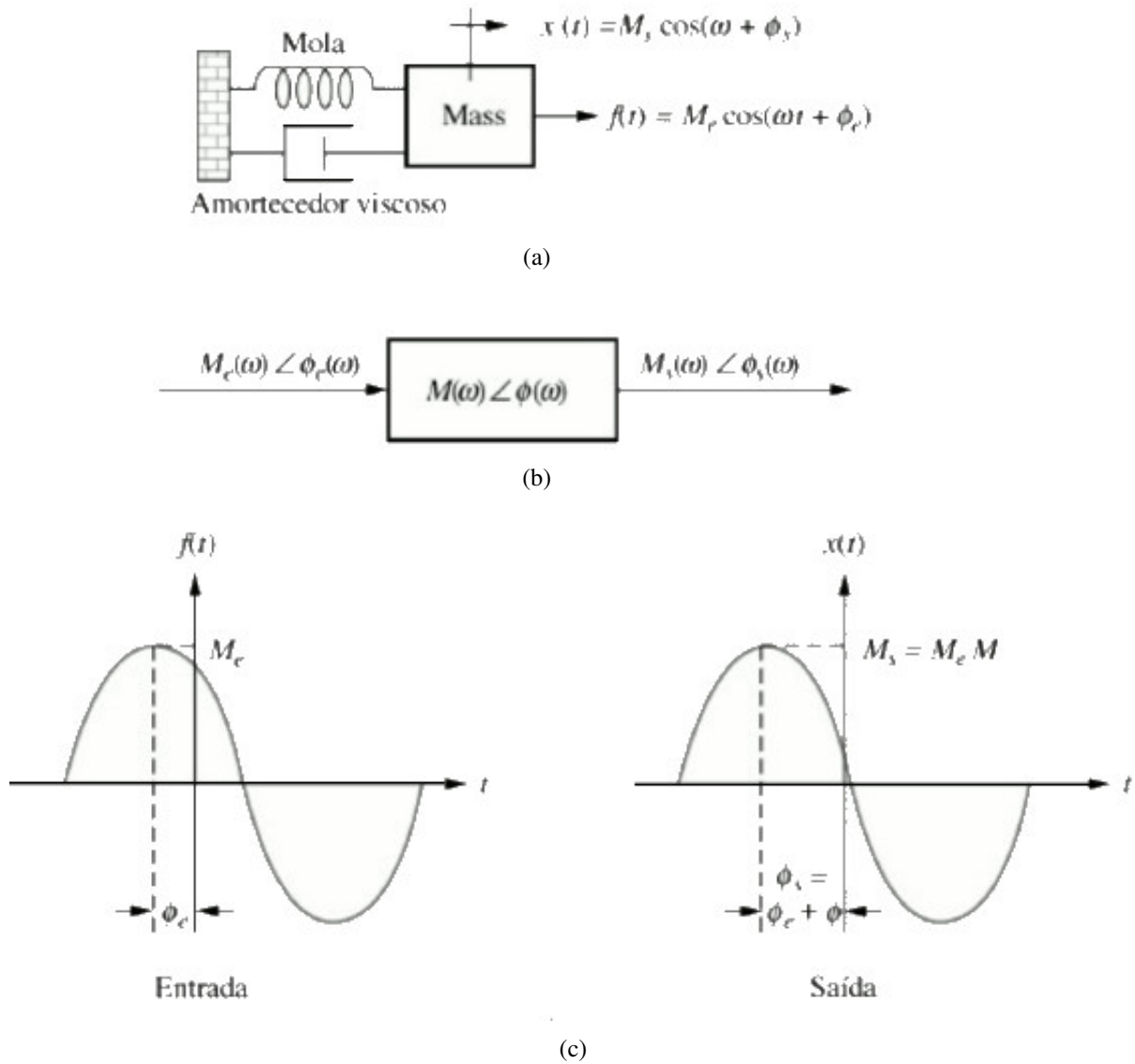


Figura 2.4: Resposta em frequência senoidal: **a**- sistema; **b**- função de transferência; e **c**- formas de onda de entrada e de saída.

Fonte: Adaptado de Nise (2018).

2.3.2 Expressões Analíticas para a Resposta em Frequência

Para introduzir as expressões analíticas de uma resposta em frequência, Nise (2018) apresenta um sistema com uma entrada genérica, como na Figura 2.5.

A entrada $R(s)$ é a transformada de Laplace de $r(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cos[\omega t - \tan^{-1}(\frac{B}{A})]$. Com relação a saída do sistema $C(s)$, esta terá a forma da equação 2.26.

$$C(s) = \frac{As + B\omega}{(s + j\omega)(s - j\omega)} G(s) = \frac{K_1}{s + j\omega} + \frac{k_2}{s - j\omega}$$

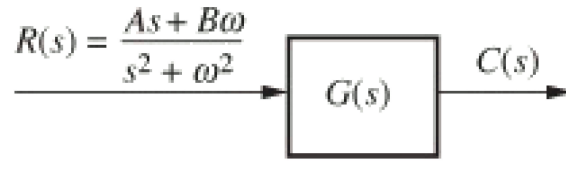


Figura 2.5: Sistema massa-mola-amortecedor de $n = 1$.
Fonte: Adaptado de Nise (2018).

$$+ \text{mais termos de frações parciais de } G(s) \quad (2.26)$$

Por frações parciais é possível encontrar o valor de K_1 como descrito na equação 2.27.

$$K_1 = \frac{As + B\omega}{s - j\omega} G(s) \Big|_{s \rightarrow -j\omega} =$$

$$\frac{1}{2}(A + jB)G(-j\omega) = \frac{1}{2}M_e e^{-j\phi_e} M_G e^{-j\phi_G} = \frac{M_e M_G}{2} e^{-j(\phi_e + \phi_G)} \quad (2.27)$$

De forma similar, K_2 é igual ao complexo conjugado de K_1 . Lembrando também que $M_G = |G(j\omega)|$ e $\phi_G = \angle G(j\omega)$.

Tomando somente a parcela da resposta $C(s)$ referente ao regime permanente, ou seja, os dois primeiros termos da equação 2.26 tem-se a equação 2.28.

$$C_{rp}(s) = \frac{K_1}{s + j\omega} + \frac{K_2}{s - j\omega} = \frac{\frac{M_e M_G}{2} e^{-j(\phi_e + \phi_G)}}{s + j\omega} + \frac{\frac{M_e M_G}{2} e^{j(\phi_e + \phi_G)}}{s - j\omega} \quad (2.28)$$

Aplicando-se a inversa de Laplace em $C_{rp}(s)$, da equação 2.28, chega-se a equação 2.29.

$$c(t) = M_e M_G \left(\frac{e^{-j(\omega t + \phi_e + \phi_G)} + e^{j(\omega t + \phi_e + \phi_G)}}{2} \right) = M_e M_G \cos(\omega t + \phi_e + \phi_G) \quad (2.29)$$

Portanto, tendo como resposta em regime permanente a equação 2.29, que também pode ser expressa na forma de fasor como $M_s \angle \phi_s = (M_e \angle \phi_e)(M_G \angle \phi_G)$, conclui-se que a função de transferência senoidal do sistema pode ser expressa como $G(j\omega)$, que por sua vez pode ser representada por sua magnitude e fase, em função da frequência. Portanto, como forma de expressar a função de transferência senoidal, há algumas opções de representações gráficas, dentre elas o Diagrama de Nyquist, que será discutida logo a frente e utilizada neste trabalho como uma das ferramentas para se alcançar o controle desejado.

2.3.3 Diagrama de Nyquist e o Critério de Estabilidade

A respeito de um sistema como o da Figura 2.6 e aproveitando ensinamentos retirados de Nise (2018), conclui-se pela importância de estabelecer os seguintes conceitos iniciais: **a-** relação entre os polos de $1 + G(s)H(s)$ e os polos de $G(s)H(s)$; **b-** a relação entre os zeros de $1 + G(s)H(s)$ e os polos da função de transferência em malha fechada; **c-** o conceito de mapeamento de pontos; e **d-** o conceito de mapeamento de contornos.

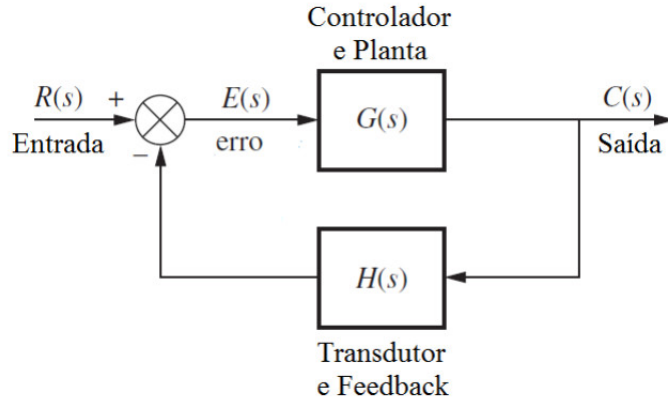


Figura 2.6: Sistema de controle e malha fechada.

Fonte: Adaptado de Nise (2018).

Das relações “a” e “b”, tendo-se em mente o desenvolvimento das equações apresentadas em nas equações em 2.30, pode-se concluir que, primeiro, os polos de $1 + G(s)H(s)$ são os mesmos que os polos de $G(s)H(s)$ (que por sua vez representa o sistema em malha aberta) e, segundo, os zeros de $1 + G(s)H(s)$ são os mesmos que os polos de $T(s)$ (ou seja, mesmo que os polos do sistema em malha fechada).

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{N_G}{D_G} \\
 H(s) &= \frac{N_H}{D_H} \\
 G(s)H(s) &= \frac{N_G N_H}{D_G D_H} \\
 1 + G(s)H(s) &= \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H} \\
 T(s) &= \frac{N_G D_H}{D_G D_H + N_G N_H}
 \end{aligned} \tag{2.30}$$

Continuando, Nise (2018) também traz o conceito de mapeamento de pontos (item “c”) na forma que segue. Tomando-se uma função $F(s)$ genérica e passando a substituir nesta função um ponto Q complexo qualquer do plano s , o resultado será outro número

complexo Q' (Q' é a imagem de Q por meio de $F(s)$). Por exemplo, um ponto $Q = 4 + j3$ na função $(s^2 + 2s + 1)$ pode ser mapeado no ponto $Q' = 16 + j30$. Por fim (item “d”), o mapeamento de contornos nada mais seria que o mapeamento de um conjunto de pontos (formando um contorno A) que juntos formam um dado contorno B (B é a imagem de A por meio de $F(s)$). Vide representação gráfica na Figura 2.7.

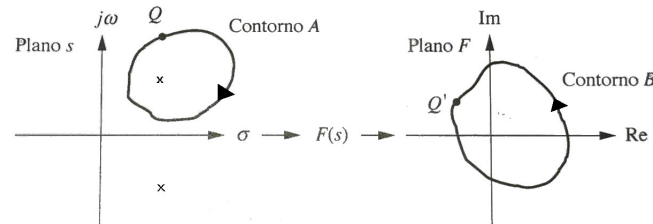


Figura 2.7: Demonstração gráfica de mapeamento de um ponto e contorno no plano s por meio da função $F(s)$.

Fonte: Adaptado de Nise (2018).

Através dos mapeamentos de contornos é possível se verificar pelo teorema de Cauchy a relação $N = P - Z$, em que N é igual ao número de voltas no sentido anti-horário do contorno B ao redor da origem; P é igual ao número de polos de $F(s)$ no interior do contorno A; e Z é igual ao número de zeros de $F(s)$ no interior do contorno A.

Se ao invés de se utilizar uma função genérica $F(s)$ for utilizada a função $G(s)H(s)$ para mapear um contorno A em sentido horário que envolva todo o semi plano da direita (SPD), a relação apresentada no parágrafo anterior pode ser compreendida como N igual ao número de voltas no sentido anti-horário do contorno B em torno do ponto $-1+0j$ (não mais a origem, já que utiliza-se $G(s)H(s)$ ao invés de $1 + G(s)H(s)$); P o número de polos em malha aberta no SPD; e Z o número de polos em malha fechada no SPD. Para tal conclusão, lembrar das relações “a” e “b” apresentadas no início deste tópico.

De todo exposto acima pode-se concluir que:

- Os diagramas de Nyquist são diagramas polares, que por sua vez são a representação gráfica da qual os seus pontos são o módulo e a fase de uma função $G(j\omega)$ (sistema em malha aberta) quando se varia o ω de zero ao infinito. Deve-se notar que ao se variar o ω de zero ao infinito estará se fazendo o mesmo que um contorno A sobre todo o semiplano direito. O mesmo se vê em Ogata (2009);
- Para se definir a estabilidade do sistema por meio do diagrama de Nyquist, basta utilizar a relação $N = P - Z$, que trará indícios da existência ou não de polos em malha fechada no SPD, ou seja, sobre a estabilidade do sistema. Para o presente trabalho todo sistema trabalhado não possui pólos no SPD quando em malha aberta, ou seja, o sistema pode ser definido como estável em malha fechada no momento em que o diagrama de Nyquist não apresentar qualquer volta em torno do ponto $-1 + 0j$.

Capítulo 3

Controle por Realimentação Derivativa de Sistemas de Segunda Ordem com Atraso

Conforme Tisseus e Meerbergen (2001) as equações diferenciais de 2ª ordem, como a 3.1, crescem em uso em algumas importantes áreas, dentre elas a de oscilações (vibrações) mecânicas. Tem-se em 3.1 a matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ conhecida como matriz de controle e o vetor de estados $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$. Citando Kawano *et al.* (2013), ainda sobre a equação 3.1, é dito que ela possui n graus de liberdade, possui uma representação matricial na qual as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{D} e \mathbf{K} são todas pertencentes ao $\mathbb{R}^{n \times n}$, são simétricas e representam as propriedades de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t - \tau) \quad (3.1)$$

Relatam ainda Kawano *et al.* (2013) que as matrizes \mathbf{D} e \mathbf{K} são ditas como positivas definidas, assim como também a matriz \mathbf{M} , na maioria dos casos, mas sob certas circunstâncias é possível se ter uma matriz massa que seja singular.

Por existir diversas formas citadas em Kawano *et al.* (2013) nas quais a matriz massa pode vir a ser singular, e sendo tal fato indesejado, pois conforme Abdelaziz (2015) e Bhat e Bernstein (1996) isso traz ao sistema uma resposta natural impulsiva (o que pode degradar o desempenho, danificar componentes ou mesmo destruí-los), é que são feitas buscas por soluções para a regularização da matriz massa.

Para que seja possível realizar a regularização de \mathbf{M} , deve se assumir uma lei de controle como a da realimentação derivativa (equação 3.2):

$$u(t - \tau) = \mathbf{f}^T \ddot{\mathbf{x}}(t - \tau) + \mathbf{g}^T \dot{\mathbf{x}}(t - \tau), \quad (3.2)$$

na qual $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são os vetores de ganho do controlador, além de se assumir outros pressupostos citados na literatura, tais como a necessidade de $\text{rank}([\mathbf{M}, \mathbf{B}]) = n$ e a garantia de que $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \neq 0$ (Abdelaziz, 2015).

Não menos importante do que projetar o controle, regularizando indesejadas matrizes

singulares de massa em algumas hipóteses, é garantir o seu bom funcionamento, fornecendo a ele boas leituras dos sinais dos estados¹ e isso em parte já é garantido na realimentação derivativa, já que os principais sensores de vibração utilizados na indústria são os acelerômetros e a partir das acelerações medidas, é possível reconstruir as velocidades com razoável precisão, mas não os deslocamentos (estado deslocamento este necessário na realimentação de estados, mas não na derivativa), conforme Abdelaziz e Valásek (2004).

De posse de uma lei de controle que utiliza sinais mais fidedignos e também capaz de regularizar, em algumas hipóteses, matrizes massa singulares, deve-se partir para a aplicação desta lei ao sistema. Substituindo então a equação 3.2 na 3.1 é possível se chegar a matriz de receptância 3.3:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) + \frac{\mathbf{H}(s)\mathbf{B}(s\mathbf{g} + s^2\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)e^{-s\tau}}{1 - (s\mathbf{g} + s^2\mathbf{f})^T \mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-s\tau}} \quad (3.3)$$

Logo, para se alocar devidamente os autovalores de 3.3, pode-se encontrar os necessários vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} calculados por meio da equação 2.25, no entanto, devido a presença do atraso τ , Ram *et al.* (2009) lembram da existência de dois grupos de autovalores, os autovalores primários e o secundários, sendo os autovalores primários os $2n$ autovalores finitos do sistema sem atraso (caso de matriz massa regular), já os autovalores secundários são outros autovalores emergentes do infinito devido ao atraso e estes autovalores que emergem do infinito podem causar uma alocação indesejada, com a possibilidade inclusive de tornar o sistema instável, como é visto no próximo tópico.

Acrescenta-se que no caso de matriz massa singular, na presença de atraso, o controle por realimentação derivativa regularizante fica impossibilitado sem que haja algum tipo de compensação ao crescimento exponencial da fase ou do crescimento polinomial da amplitude no diagrama de Nyquist (por razões expostas na seção 3.4.1). Então, neste trabalho é feita a opção por compensar o crescimento de fase utilizando o Preditor de Smith, como o proposto em Araújo e Santos (2018), que apresenta excelentes resultados para casos de sistemas com pouco, ou quase nenhum amortecimento. Destaca-se que com a utilização do preditor, o cálculo dos vetores de ganho da realimentação serão feitos desconsiderando a presença do atraso.

Portanto, neste capítulo são demonstrados os problemas enfrentados no controle e são apresentadas propostas de solução. Resumindo os problemas enfrentados se tem o que segue:

- Propiciar maior qualidade na leitura dos sinais dos estados, para que o controle tenha boas chances de ser melhor implementado, sendo solucionado em parte pelo uso da realimentação derivativa;

¹Pois, como já citado na seção 2.1.2, a qualidade da medição, não só é importante no controle de sistemas, como também em qualquer outra área do conhecimento, citando como exemplo Deming (1990), da Administração que diz que “não se gerencia o que não se mede”, ou mesmo Compton (2019), a respeito da Inteligência Artificial, “An artificial intelligence (AI) is only as useful as the data used to train it. Training AI with dubious data leads to questionable decisions”.

- Gerar uma lei de controle que garanta a estabilidade, sem a necessidade de análise *a posteriori*, por conta de eventual alocação indesejada (mais detalhes sobre o problema da alocação indesejada vide seção 3.1), o que é solucionado utilizando o método a ser proposto neste trabalho, que faz uma abordagem no domínio da frequência (vide seções 3.2 e 3.3).
- Impossibilidade de implementação de controle por realimentação derivativa regularizante na presença de atraso sem que haja algum tipo de compensação e dificuldade na completa eliminação do comportamento impulsivo mesmo após a regularização por meio de realimentação, em sistemas com atraso. Resumindo, problemas no controle de sistemas com atraso e matriz massa singular (vide seção 3.4);

3.1 Problema da Alocação Indesejada

Para iniciar a explicação do problema da alocação indesejada dos autovalores do sistema, Ram *et al.* (2009) diferenciam os autovalores primários dos secundários. É dito que para os casos em que o sistema não possui atraso ($\tau = 0$), ele possui precisamente $2n$ autovalores, ao passo em que na presença de qualquer pequena quantia de atraso ($\tau > 0$), o sistema possui uma quantidade infinita de autovalores. Tendo em vista que o caso de $\tau = 0$ seria uma situação limite, também seria prudente assumir que o sistema possuiria neste caso uma mesma infinidade de autovalores, mas que somente $2n$ deles afetariam a dinâmica do sistema (podendo-se assumir que os autovalores secundários estariam em $-\infty$).

É observado também que a medida que o atraso aumenta de zero a algum outro valor τ , são alteradas as localizações dos autovalores primários e também secundários, fazendo com que os autovalores secundários antes localizados em $-\infty$ (quando $\tau = 0$) passem a tomar valores finitos no plano complexo, podendo vir a se aproximarem dos que antes eram os autovalores primários. Desta forma a alocação dos autovalores utilizando a equação 2.25 (ou mesmo 2.21, como é feito em Ram *et al.* (2009)) não está completa tão logo quanto se encontrem os valores dos vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} da equação 2.22 (ou mesmo da equação 2.18, a depender do tipo de realimentação trabalhada), sendo necessário que seja feita uma análise *a posteriori* (para se verificar se os autovalores foram alocados da maneira desejada)

Ram *et al.* (2009) mostram como exemplo de realocação indesejada a realizada no sistema de matriz $\mathbf{M} = 1$, $\mathbf{D} = 0,01$, $\mathbf{K} = 5$, $\mathbf{B} = 1$ e $\tau = 0,1$ seg, como se vê na Figura 3.1.

Neste exemplo Ram *et al.* (2009) fazem uso da equação 2.21 e encontram valores de $\mathbf{f} = -0,3198$ e $\mathbf{g} = 5,1001$ para realocar os autovalores em $s_1 = -1$ e $s_2 = -47$ com uma lei de controle $u(t) = \mathbf{f}^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}^T \mathbf{x}(t)$ (realimentação de estados). No entanto, devido a influência do atraso, e o surgimento dos autovalores secundários antes localizados em $-\infty$, percebe-se que a real alocação dos autovalores primários se deu em -1 e em $0,1065$ (autovalor que traz instabilidade), havendo também a alocação em -47 , mas este seria um autovalor secundário.

Ram *et al.* (2009) continuam apresentando métodos para se realizar uma análise *a posteriori*, utilizando expansões da série de Taylor, com a qual é capaz de analisar se a

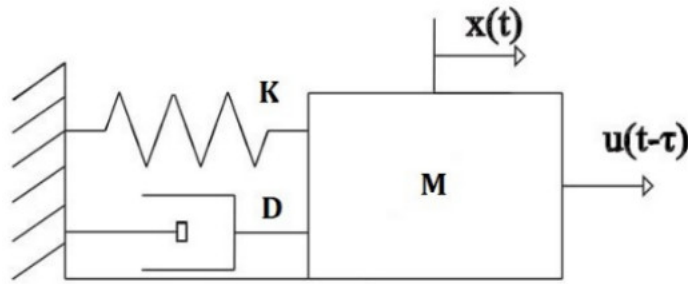


Figura 3.1: Sistema de segunda ordem com atraso.

realocação realizada atendeu as expectativas (se foi uma realocação desejada ou não).

Apesar de Ram *et al.* (2009) demonstrarem a necessidade de uma análise *a posteriori* após a alocação dos autovalores utilizando a equação 2.21, ou seja, para o caso de uma realimentação de estados, tal fato também ocorre da mesma maneira na realimentação derivativa (utilizando a equação 2.25). Como exemplo se pode trazer o mesmo sistema desta seção ($M = 1$, $D = 0,01$, $K = 5$ e $B = 1$), mas para um $\tau = 5$, no qual utilizando a equação 2.25 (realimentação derivativa) para realizar a alocação de $s_1 = -1$ e $s_2 = -47$ são alcançados vetores de ganho $\mathbf{f} = -0,0873$ e $\mathbf{g} = -4,1025$.

Conforme a Figura 3.2, percebe-se que não foram alcançados como autovalores primários os valores -1 e -47 , mas sim $s_{1,2} = 0,4272 \pm 4,5535i$ (o que torna o sistema instável) e $s_3 = -1$, além de outros valores de autovalores secundários. Tais valores da Figura 3.2 (aproximação dos autovalores primários) foram alcançados por meio da aproximação de Padé de ordem 3 (como sugerido em Araújo (2018)).

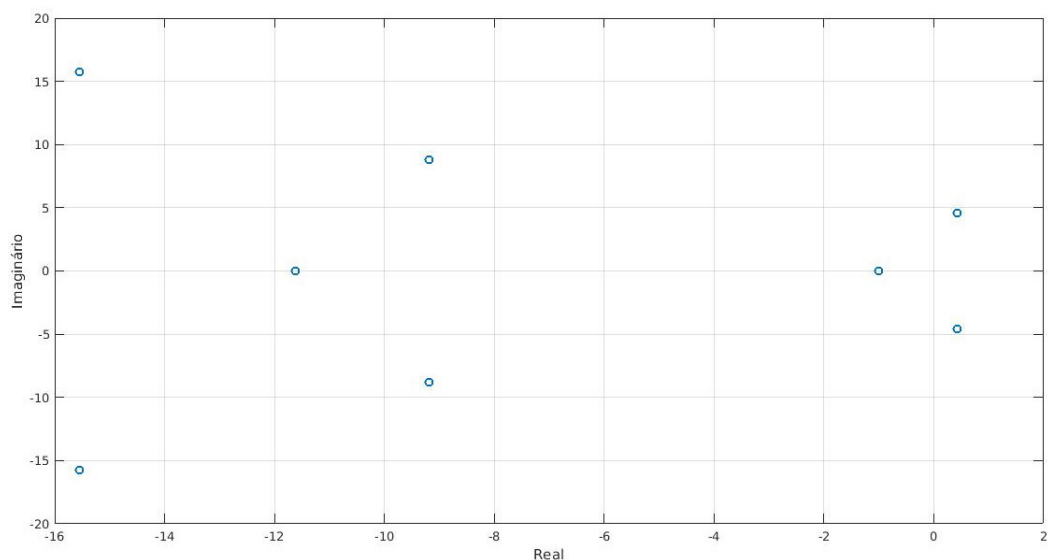


Figura 3.2: Aproximação dos autovalores primários utilizando Padé de ordem 3.

Fonte: O autor.

3.2 Abordagem do Problema no Domínio da Frequência

Dantas (2019), motivado por trabalho de Araújo (2018), realiza uma abordagem do problema no domínio da frequência, dispensando desta forma aproximações por séries de Taylor feitas em Ram *et al.* (2009) ou por Padé em Araújo (2018), para análises *a posteriori* feitas em Ram *et al.* (2009).

Em Araújo (2018) é definido como ganho de malha a expressão 3.4, com a qual é possível se traçar o diagrama de Nyquist.

$$L(s) = -(\mathbf{g}s + \mathbf{f}s^2)^T \mathbf{H}(s) \mathbf{B} e^{-s\tau} \quad (3.4)$$

Com o traçado do diagrama de Nyquist, é possível se definir a estabilidade do sistema através do critério de Nyquist, o qual define que para um sistema ser estável em malha fechada, o número de voltas da curva de Nyquist do sistema em torno do ponto $(-1 + 0j)$, no plano $j\omega$ no sentido anti-horário, deverá ser igual ao número de pólos de malha aberta do sistema no semi-plano direito.

Portanto, para o caso em que o sistema é estável em malha aberta (ou qualquer sistema que não possua autovalores no SPD), este mesmo sistema será estável em malha fechada, para um dado conjunto de vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} , caso a curva do diagrama de Nyquist não enlace o ponto $(-1 + 0j)$, passando então o problema de controle a ser uma forma de como encontrar valores para os vetores de ganho que satisfaçam a esta condição (o não enlace do citado ponto no plano complexo).

3.3 Parâmetro de Projeto e Formulação Matemática

No projeto de controle por meio da resposta em frequência os principais e mais conhecidos parâmetros utilizados são a margem de ganho, margem de fase e a máxima sensibilidade². Tais parâmetros são capazes de expor em números o grau de robustez do sistema e assim a sua garantia de estabilidade.

Tendo como pressuposto sistemas que não possuam autovalores no semiplano direito (SPD, o que inclui autovalores sobre o eixo imaginário), um sistema será dito estável em malha fechada caso a curva de seu diagrama de Nyquist não ultrapasse (não enlace) o ponto $(-1 + 0j)$ (conforme o critério de Nyquist).

Desta forma, para implementar um controle robusto e com melhor desempenho Rego *et al.* (2017) estabelece um círculo de raio M_s^{-1} centrado em $(-1 + 0j)$ e busca fazer com que a curva do diagrama de Nyquist (em azul na Figura 3.2) venha a tangenciar este círculo (em vermelho na Figura 3.2), o que garante valores minimamente adequados de margem de ganho e margem de fase, além de uma apropriada máxima sensibilidade do sistema, já que são utilizados valores de M_s entre 1,3 e 2, como indicam Astrom e Hagglund (1995.)

²Conceitos amplamente debatidos na literatura clássica, que recebem breves comentários em Rego *et al.* (2017). Para mais detalhes é possível consultar literaturas como Ogata (2009) e Nise (2018).

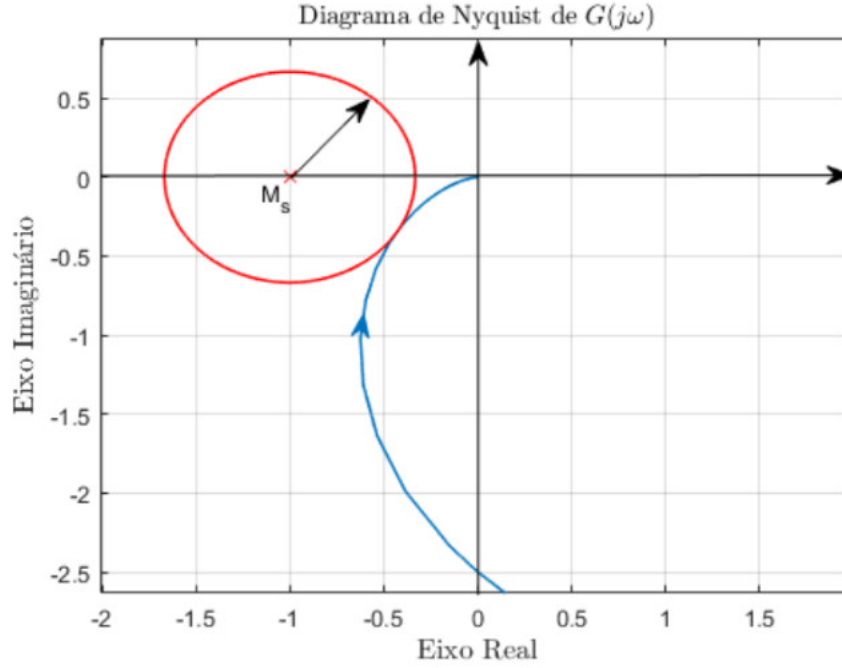


Figura 3.3: Diagrama de Nyquist tangenciando a circunferência de raio M_s^{-1} centrada em $(-1 + 0j)$.

Fonte: Imagem extraída de Dantas (2019).

No entanto, diferentemente do que é proposto em Rego *et al.* (2017), que faz uso de controlador PI como técnica de controle, o presente trabalho se propõe a utilizar como técnica a realimentação derivativa, de forma que deve ser definida uma nova abordagem.

Desta forma, para que seja possível ajustar a curva de Nyquist do sistema, definida por $L(j\omega) = -(j\omega_i \mathbf{g} + (j\omega_i)^2 \mathbf{f})^T \mathbf{H}(j\omega_i) \mathbf{B} e^{-j\omega_i \tau}$, fazendo-a tangenciar o círculo M_s , como visto na Figura 3.3, é definido neste trabalho um problema de otimização da expressão 3.5 (função objetivo)

$$h(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1})^2, \quad (3.5)$$

na qual o subscrito i indica o i -ésimo valor de frequência com ω variando de zero a um valor elevado o suficiente (em teoria variando de zero ao infinito).

Apesar de boa parte do problema ter sido resolvido ao se impor que a curva de Nyquist definida por $L(j\omega)$ venha a tangenciar o círculo de raio M_s^{-1} , devem se impor antes três importantes restrições ao problema de otimização da expressão 3.5. A primeira restrição é necessária e sem a qual a busca por valores dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} que minimizem a expressão 3.5 pode vir a gerar sistemas instáveis. A segunda restrição, dita restrição adicional, é imposta na tentativa de busca por respostas com melhor desempenho do sistema. Por fim, uma terceira restrição nominada como restrição de regularização, deve ser imposta ao problema de otimização para que as buscas pelos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} da

realimentação derivativa retornem como respostas somente aquelas capazes de regularizar a matriz massa do sistema (quando for o caso), para que desta forma o sistema fique livre de comportamentos impulsivos citados em Abdelaziz (2015).

3.3.1 Primeira restrição (necessária para a estabilidade)

Como primeira restrição necessária, a qual vem impor ao problema de otimização da função objetivo 3.5 buscas por respostas tão somente estáveis, tem-se a restrição em 3.6, que por sua vez busca evitar situações como a exposta Figura 3.4. Ou seja, além de se buscar por curvas no diagrama de Nyquist que tangenciam o círculo de raio M_s^{-1} , deve se evitar aquelas que enlacen o ponto $(-1 + 0j)$ ³. Para isso, Dantas (2019) teve como ideia primeiramente realizar buscas pelos pontos do diagrama de Nyquist que cruzassem o eixo real (no qual o valor da parte imaginária deste ponto da curva é zero) e de posse deste ponto é feito o exame se tal ponto da curva (ponto de cruzamento) está localizado antes ou depois do ponto $(-1 + 0j)$, sendo descartadas as curvas geradas por ganhos **f** e **g** que enlacen o ponto $(-1 + 0j)$ (ou seja, o descarte de toda curva que possua pontos com parte imaginária igual a zero e que a parte real seja menor que -1).

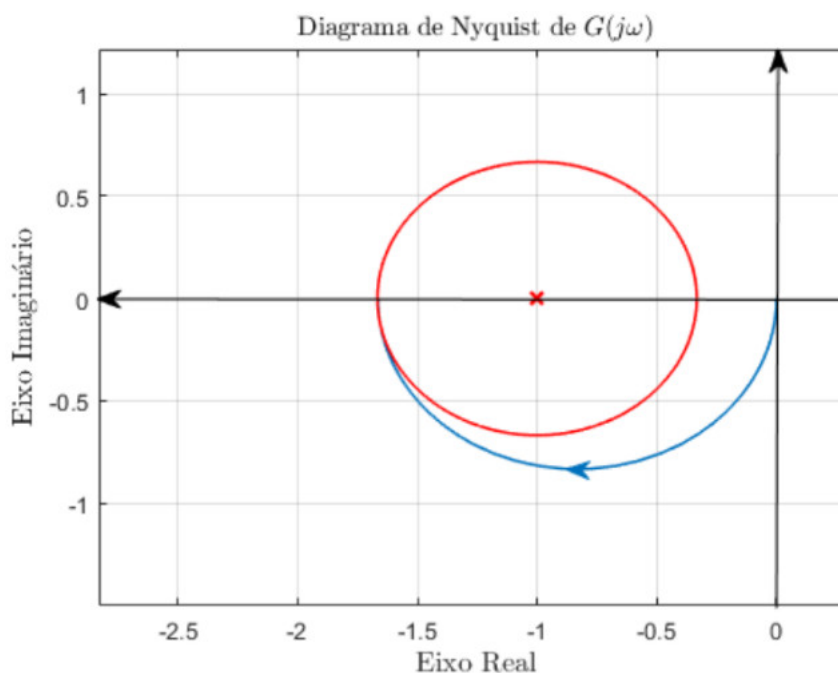


Figura 3.4: Diagrama de Nyquist de um sistema genérico para exemplo de eventual caso de busca por minimização da equação 3.5 sem o uso da restrição 3.6.

Fonte: Imagem extraída de Dantas (2019).

³Lembrar que é pressuposto que são trabalhados somente sistemas que não possuam autovalores no semiplano direito (SPD) quando em malha aberta e que segundo o critério de Nyquist, para que o sistema seja estável em malha fechada, não deve haver nenhum enlace no diagrama de Nyquist sobre o ponto $(-1 + 0j)$.

Expondo tal pensamento do parágrafo anterior em termos matemáticos e o incorporando ao problema de otimização, se tem a expressão 3.6

$$\operatorname{Re}\{L(j\omega_i)\} \geq -1 + M_s^{-1} \quad \forall \quad \omega_i / \operatorname{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0 \quad (3.6)$$

, a qual passa a garantir que o problema de otimização traga como saídas tão somente respostas estáveis.

3.3.2 Restrição adicional (restrição imposta para melhor desempenho)

Prosseguindo para a segunda restrição, dita restrição adicional, a qual busca incorporar ao problema de otimização buscas por vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} que gerem sistemas com melhor desempenho, se tem a expressão 3.7.

$$\operatorname{Re}\{L(j\omega_i)\} = -1 + M_s^{-1} \quad \forall \quad \omega_i / \operatorname{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0 \quad (3.7)$$

Para explicar a restrição adicional 3.7, primeiro cabe dizer que esta impõem ao problema de otimização buscas por valores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} que façam com que a curva do diagrama de Nyquist venha a tangenciar a círculo M_s em um ponto sobre o eixo real, ou seja, sobre ponto no qual $\operatorname{Im}\{L(j\omega_i)\} = 0$. Já explicando o objetivo desta restrição, deve se mostrar a relação existente entre a restrição circular de máxima sensibilidade (ou seja, não permitir que o diagrama de Nyquist ultrapasse o círculo de raio M_s^{-1}) e os parâmetros de margem de ganho e margem de fase (como se tem em Astrom e Hagglund (2006), conforme as expressões em 3.8.

$$MG \geq \frac{M_s}{M_s - 1}$$

$$MF \geq 2\arcsin(2M_s)^{-1} \quad (3.8)$$

Das expressões em 3.8 se entende que para a curva de Nyquist possa vir a obedecer a restrição circular de máxima sensibilidade, a margem de ganho deverá possuir valor maior ou igual ao apontado em 3.8. Tendo em mente também observações feitas em literatura clássica de controle como Ogata (2009), na qual margens de ganho menores correspondem a sistemas mais rápidos e consequentemente de melhor desempenho, é de se concluir que para melhorar o desempenho do sistema e ainda assim manter a sua robustez desejada, deve se buscar o mínimo de margem de ganho que também obedeça a restrição circular de máxima sensibilidade, e tal fato ocorre quando $MG = \frac{M_s}{M_s - 1}$ o que significa graficamente que o diagrama de Nyquist do sistema deve tangenciar o círculo de raio M_s^{-1} em ponto sobre o eixo real, ou seja, em um ponto que obedeça a restrição adicional 3.7.

3.3.3 Restrição de regularização

Finalizando o tema de restrições ao problema de otimização, se tem a restrição de regularização que deve ser imposta para que seja possível se trazer como respostas (valores dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g}) somente aquelas capazes de regularizar a matriz massa do sistema, eliminando respostas impulsivas como cita Abdelaziz (2015).

Desta forma, seguindo ensinamentos trazidos em Abdelaziz (2015), e como já citado em outras partes deste trabalho, deve se garantir no problema de otimização que $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \neq 0$, ou seja, forçar que a realimentação derivativa torne inversível a “nova” matriz massa do sistema (notar que não há alteração física dos parâmetros do sistema em malha aberta), eliminando a influência de autovalores infinitos na dinâmica do sistema.

Neste trabalho foi feita a opção por não somente garantir $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \neq 0$, mas também garantir que $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})$ seja maior que um valor mínimo qualquer atribuído, impedindo assim que $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})$ possa vir a assumir durante a otimização valores muito pequenos e muito próximos a zero (que ainda assim seriam diferente de zero), o que geraria um novo pólo não infinito, mas muito próximo a ele. Desta forma optou-se por garantir $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \geq 0,1$ e também $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f}) \leq 0,1$, introduzindo no problema de otimização a expressão 3.9 (ou seja, garantir que o módulo de $\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})$ seja maior que 0,1).

$$\text{abs}(\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})) \geq 0,1 \quad (3.9)$$

Não deve ser esquecido o pressuposto de que o sistema, além de estável em malha aberta, deve atender condições necessárias de solubilidade impostas em Abdelaziz (2015), tais como $\text{rank}([\mathbf{M}, \mathbf{B}]) = n$.

Importante também ressaltar que para um controle regularizante, por meio da realimentação derivativa em sistema com atraso, se faz necessária alguma forma de compensação da redução da margem de ganho e de fase (como explicado na seção 3.4.1), e assim é feito o uso do preditor de Smith proposto por Araújo e Santos (2018), quando então os ganhos devem ser buscados desconsiderando-se o atraso.

3.4 Sistemas com Matriz Massa Singular e com Atraso

Nesta seção são apresentados os problemas que surgem com a regularização de sistema de segunda ordem com atraso, pois esta impõem um maior crescimento na fase e módulo no diagrama de Nyquist, sugerindo-se como solução o uso do preditor de Smith com filtro proposto por Araújo e Santos (2018), viabilizando assim a regularização e com esta a eliminação da dinâmica impulsiva do sistema durante o período de atuação do controle (ou seja, após o início da realimentação, no período de $\tau \leq t < \infty$).

Também é visto mais a frente que somente com a regularização em sistemas singulares com atraso a dinâmica impulsiva não é completamente sanada⁴, sendo apresentado o con-

⁴Tendo em vista o período no qual inicia-se a atuação do controle, ou seja, $\tau \leq t < \infty$, estando o sistema desprovido de controle e consequente regularização nos instantes iniciais.

ceito de condições iniciais consistentes e proposto o seu uso quando possível e desejado para uma completa eliminação do comportamento impulsivo.

3.4.1 Problema da Regularização - Uso de Compensação

Como já citado seção 2.3.3 o diagrama de Nyquist expressa em seus pontos o módulo e a fase de uma função $G(j\omega)$ quando se varia o ω de zero ao infinito.

Por sua vez, sistemas providos de atraso, possuem como característica o exponencial decréscimo da fase (e, por óbvio, consequente redução da margem de fase), o que traz dificuldades para os mais diversos tipos de controle, nas mais diversas áreas, como o controle em malha fechada com atraso por rede IP, que sobre o tema muito bem citam Sues *et al.* (2011) o que segue: "O atraso, em um número amplo de sistemas, tem efeitos bem conhecidos à medida que este é aumentado, como a redução da margem de ganho e de fase do sistema".

Segue nas equações em 3.10 exemplos de funções $G(j\omega)$ (uma com e outra sem atraso), similares a exemplo numérico trabalhado mais a frente (este de um sistema de matriz massa singular), que possui um numerador de grau superior ao denominador, o que gera um crescimento polinomial do módulo no diagra de Nyquist. Na Figura 3.5 há os diagramas de Nyquist dos exemplos presentes em 3.10.

Destaca-se que o fato de o numerador possuir grau superior ao denominador é característica presente em sistemas diferenciais matriciais de segunda ordem de matriz massa singular quando regularizados pela realimentação derivativa, representando a equação 3.10b o ganho de malha (equação 3.4) do exemplo numérico trabalhado na seção 4.3.2.

$$G(j\omega) = \frac{0,46(j\omega)^4 - 0,38(j\omega)^3 + 0,76(j\omega)^2 + 1,04j\omega + 0}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2j\omega + 5} \quad (3.10a)$$

$$G(j\omega) = \frac{0,46(j\omega)^4 - 0,38(j\omega)^3 + 0,76(j\omega)^2 + 1,04j\omega + 0}{(j\omega)^3 + 3(j\omega)^2 + 2j\omega + 5} e^{-j\omega\tau} \quad (3.10b)$$

Para fins de visualização a Figura 3.5 foi montada sobre as equações de 3.10 com um $0 < \omega \leq 30 \text{ rad/seg}^5$. Percebe-se que com uma pequena variação de ω tanto a equação 3.10a quanto a 3.10b alcançaram um valor em módulo igual a 13.83, para $\omega = 30 \text{ rad/seg}$ (um valor alto para a baixa frequência), mas a 3.10b apresenta um problema adicional (além do crescimento polinomial do módulo), que seria um crescimento exponencial da fase, o que traz severos problemas para o controle, sendo possível visualizar na Figura 3.5 que a tal crescimento de fase é o responsável pelo enlace do ponto $(-1+0j)$, que para sistemas estáveis em malha aberta caracterizaria uma instabilidade na malha fechada.

Como forma de resolver tal problema com a fase deve haver uma compensação do atraso e tal pode ser feito com o uso de preditor de Smith, mas especificamente com o

⁵Seria preferível que fosse $0 < \omega \leq \infty \text{ rad/seg}$, mas tal gráfico não teria a visualização agradável por seu tamanho não convergir a zero e o trecho de frequências escolhido já atende às necessidades didáticas aqui buscadas.

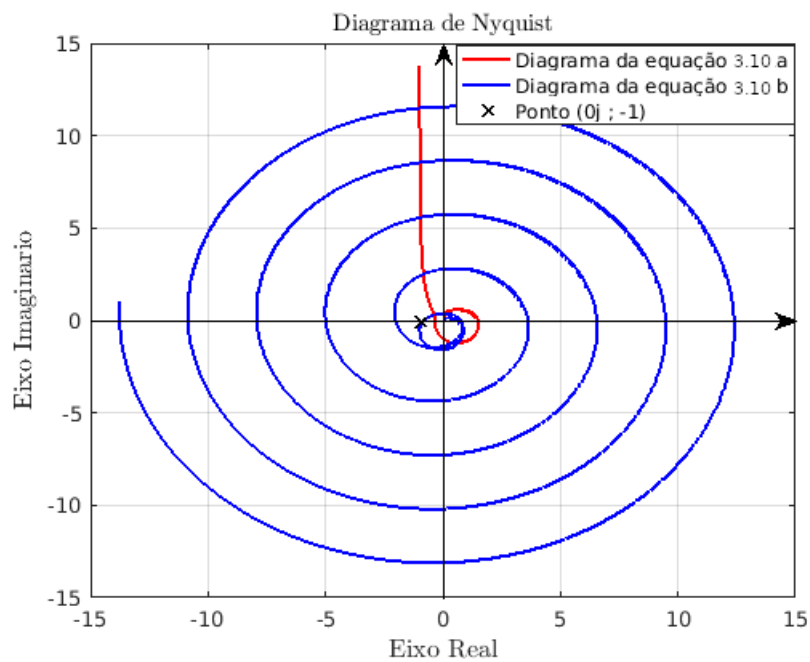


Figura 3.5: Diagrama de Nyquist das equações presentes em 3.10, com ω variando somente entre 0 e 30 rad/seg, para fins de visualização. Em vermelho as curvas da equação 3.10a (sem atraso) e em azul a equação 3.10b (com atraso). O 'x' em $(-1+0j)$ representa ponto de interesse a estabilidade de Nyquist.

Fonte: O autor.

preditor proposto em Araújo e Santos (2018), pelo fato desta proposta fazer o uso do modelo baseado na receptância, igualmente ao feito neste trabalho. Segue na Figura 3.6 esquema do preditor de Smith proposto, com adaptações.

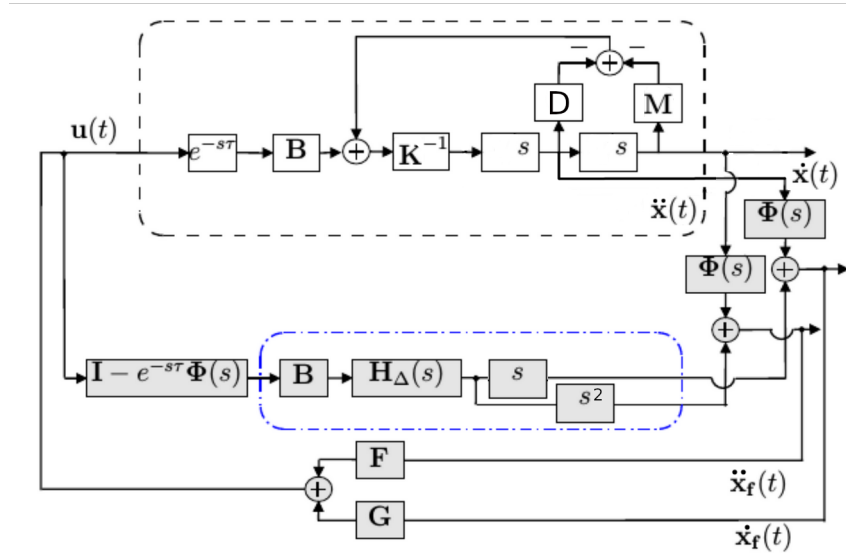


Figura 3.6: Esquema representativo de sistema de segunda ordem genérico (como da equação 1.1), acrescido de atraso e posto em malha fechada com realimentação derivativa com o preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018).

Fonte: Adaptado de Araújo e Santos (2018).

Da Figura 3.6 nota-se a presença de peças importantes, que sejam o $H_\Delta(s)$ e o $\Phi(s)$. O $H_\Delta(s)$ é a matriz de receptância, que pode ser auferida por meio de medições do sistema, o que favorece o projeto, já o $\Phi(s)$ é um filtro que deve ser projetado como lecionado em Araújo e Santos (2018), o qual reduz o erro de predição e também filtra potenciais frequências ressonantes que ficam por volta da frequência dos pólos não amortecidos (ou pouco amortecidos).

Desta forma, com o uso do preditor de Smith como representado na Figura 3.6 e apresentado em Araújo e Santos (2018), esperasse trazer facilidade ao projeto de controle, já que um sistema representado como na equação 3.10b passa a ser considerado como na equação 3.10a (desconsideração do atraso), viabilizando a regularização do sistema.

3.4.2 Condições Iniciais Consistentes - Complemento para a Eliminação do Comportamento Impulsivo

É citado no decorrer deste trabalho que um dos objetivos buscados com a realimentação derivativa aqui trabalhada é a regularização da matriz massa nos sistemas singulares, para que assim o comportamento impulsivo possa ser eliminado da dinâmica do sistema.

Uma das inspirações para tal proposta vem do trabalho de Abdelaziz (2015), que equaciona a realimentação derivativa como na equação 3.11 (aqui passada ao domínio da

frequência) e relata que para a regularização seja efetivada deve-se garantir que $\det(\mathbf{M} + \mathbf{B}\mathbf{f}) \neq 0$.

$$[(\mathbf{M} + \mathbf{B}\mathbf{f})s^2 + (\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{g})s + \mathbf{K}] \mathbf{x}(s) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Apesar da proposta muito bem definida em Abdelaziz (2015), este trabalho traz um complicador adicional, o qual é o atraso. Na presença do atraso a equação 3.11 pode ser reescrita como em 3.12.

$$[(\mathbf{M} + \mathbf{B}\mathbf{f}e^{-s\tau})s^2 + (\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{g}e^{-s\tau})s + \mathbf{K}] = \mathbf{0} \quad (3.12)$$

É de conhecimento (como demonstrado na seção anterior) que o atraso traz problemas como a redução da margem de ganho e de fase, o que pode ser resolvido como também antes citado. No entanto, além do problema já conhecido, a presença do atraso, logicamente, traz um retardo na atuação do controle como se vê na equação 3.12. Desta forma pode se dizer que não há atuação do controle por realimentação (seja derivativa ou não) sobre a dinâmica do sistema entre os instantes $0 \leq t < \tau$.

Sabendo-se que nos instantes $0 \leq t < \tau$ o sistema não possui alteração em sua dinâmica (apesar da realimentação), pode-se concluir claramente que sistemas de matriz massa singular, mesmo que regularizados, poderão apresentar comportamentos impulsivo em seus instantes iniciais ⁶.

Desta forma, para que haja uma completa eliminação do comportamento impulsivo, é desejável que os sistemas de matriz massa singular sejam dotados de condições iniciais consistentes, como apresentado em Bhat e Bernstein (1996).

Conforme o trabalho de Bhat e Bernstein (1996) um conjunto de condições iniciais consistentes é aquele capaz de impor a um sistema singular um comportamento de um sistema regular, ou seja, livre de comportamento impulsivo. Na propositura do teorema 2 daquele trabalho é dito que o conjunto de condições iniciais consistentes de um sistema de segunda ordem de matriz massa singular é dado pelos número reais das colunas de \hat{E}^2 e todo o seu subespaço, sendo \hat{E} apresentado na equação 3.13, para $\hat{M} \triangleq M + D + K$.

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \hat{M}^{-1}(M + D) & \hat{M}^{-1}M \\ -\hat{M}^{-1}K & \hat{M}^{-1}M \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Desta forma, caso se deseje uma completa eliminação do comportamento impulsivo de sistemas de segunda ordem de matriz massa singular com atraso, por meio de realimentação derivativa, é importante averiguar inicialmente se as condições iniciais do sistema são consistentes, como na equação anterior, assim haverá uma eliminação deste comportamento indesejado tanto no período de tempo $0 \leq t < \tau$ (que demanda o uso das condições iniciais consistentes), como também no período $\tau \leq t < \infty$ (garantido pela realimentação

⁶Deve se deixar claro que nos instantes de tempo $\tau \leq t < \infty$, com a regularização efetivada pela realimentação derivativa, não ocorrem comportamentos impulsivos no sistema

derivativa formulada neste trabalho).

3.5 Resumo da problematização

Nesta seção foi visto que o controle de sistemas como aqui pretendido enfrenta problemas como o de comportamento impulsivo (no caso da existência de matriz massa singular, o que demanda uma regularização para sanar tal problema) e também o de qualidade do sinal utilizado na realimentação. Para tais problemas a solução é encontrada ao se utilizar a técnica de realimentação derivativa, pelos motivos já explicados.

Ainda com relação a regularização, por motivos expostos na seção 3.4.1, não é possível implementar o controle regularizante por realimentação derivativa na presença de atraso, sem que haja algum tipo de compensação. Como também exposto na seção 3.4.1, como forma de compensar o atraso, é utilizado o preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018) (assim sendo feito, deve-se calcular os vetores de ganho desconsiderando-se o atraso). Portanto, quando neste trabalho for tratado um sistema singular com atraso e for desejada a sua regularização (que traz benefícios como a eliminação do comportamento impulsivo) deve ser associado ao controle um preditor de Smith com filtro e quando possível e desejado o uso de condições iniciais consistentes para uma completa supressão de qualquer dinâmica impulsiva.

Também foi apresentado o problema de se trabalhar com a realimentação derivativa de forma que seja possível encontrar respostas (valores dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} para a realimentação derivativa) que gerem um controle estável e com um mínimo de robustez, sem a necessidade de uma análise *a posteriori*, e para a solução de tal problema se faz necessária a otimização de 3.5 sob condição da restrição 3.6 e caso se busque impor um melhor desempenho, deve-se utilizar a restrição adicional 3.7, além da restrição 3.9 para uma regularização de eventual matriz massa singular no sistema a ser controlado.

Desta forma o trabalho segue com a próxima seção, na qual é demonstrado como se pretende otimizar as funções citadas acima, de maneira que se chegue a valores dos vetores de ganho \mathbf{f} e \mathbf{g} que estabilizem o sistema em malha fechada da maneira desejada.

3.6 Projeto de Controlador Usando Algoritmo Genético

Nesta parte do trabalho é apresentado o método proposto que possibilita resolver o problema de otimização da função objetivo 3.5, sem que seja violada a restrição 3.6, e quando desejado, permitir que a otimização também não viole as restrições 3.7 e 3.9.

Para resolução do problema de otimização foi escolhido trabalhar com algoritmo genético, o qual realiza pesquisas de forma aleatória por meio de mutações e cruzamentos entre membros de uma população, que pode ser utilizado na solução de problemas de otimização suaves ou não suaves, com restrições lineares ou não lineares MathWorks (2019).

Deve se destacar que, como já mencionado anteriormente, no caso de sistemas singulares com atraso, no qual se deseje realizar a regularização do sistema, é necessário

realizar a compensação do atraso, utilizando o preditor de Smith (sugerindo-se o preditor apresentado por Araújo e Santos (2018)), o que implica em cálculos dos valores dos vetores de ganho desconsiderando o atraso. Já para uma completa eliminação de dinâmicas impulsivas no sistema é sugerido também o uso de condições iniciais consistentes, quando possível.

Após finalizar a apresentação do método, são expostos alguns exemplos na seção seguinte.

3.6.1 Solução do Problema de Otimização

Baseado na teoria evolutiva, o algoritmo genético funciona a partir de avaliações⁷ realizadas geração após geração sobre os indivíduos existentes em uma dada população. Escolhidos os melhores indivíduos de uma população em uma determinada geração, o algoritmo realiza o cruzamento⁸ entre eles, permitindo também a existência de uma pequena taxa de mutação⁹, favorecendo assim que o campo de busca pelo ótimo global cresça e o melhor indivíduo seja selecionado ao final.

Na configuração do algoritmo genético, também é possível se impor a obediência a uma série de restrições, de forma que este algoritmo se encaixa perfeitamente aos propósitos deste trabalho.

Cabe destacar que no nosso problema os indivíduos da população são formados pelo vetor $[\mathbf{f} \quad \mathbf{g}]$ (junção dos dois vetores de ganho) e a avaliação do melhor indivíduo é feita com base na função objetivo 3.5 (dentre aqueles que respeitem as restrições que são impostas), ou seja, é feita a seleção do indivíduo que permita o diagrama de Nyquist tangenciar o círculo de raio M_s^{-1} .

Para trabalhar com o algoritmo genético, foi feito uso de *toolbox* do Matlab na versão R2016b, sendo apresentado a partir de então pseudocódigos que demonstram as configurações realizadas para que seja possível a busca pelo indivíduo que melhor atenda (dentro dos critérios estabelecidos) o controle por realimentação derivativa.

Algoritmo genético do Matlab

Segue o pseudocódigo intitulado “Algoritmo 1: função de busca” que ilustra o uso do “toolbox” do Matlab utilizado para a otimização da equação 3.5, sem que seja violada a restrição 3.6 e também as 3.7 e 3.9 quando desejado.

⁷Com base em uma função objetivo e eventuais restrições existentes.

⁸Das mais diversas formas, a depender da configuração utilizada, dentre várias expostas em MathWorks(2019) e outras literaturas.

⁹Também dependendo da configuração utilizada.

Algoritmo 1: função de busca

Entrada: $H(s)$; τ ; B e M_s
Saída: $gain = [f \ g]$

```

1  $gain \leftarrow ga(ObjectiveFunction, 2n, [], [], [], [], [], Constraints, options);$ 
2  $f \leftarrow gain(1 : n);$ 
3  $g \leftarrow gain(n + 1 : 2n);$ 
4 retorna  $[f \ g]$ 
```

No Algoritmo 1 há a necessidade de utilizar alguns parâmetros de entrada obrigatórios, tais como a função objetivo e o número de variáveis da resposta ou tamanho do vetor solução.

Apesar de não ser obrigatório para o funcionamento do algoritmo, a presente proposta demanda a inserção de outros parâmetros, tais como as funções de restrição já discutidas (sob pena do algoritmo retornar um sistema instável em malha fechada, por exemplo) e que são apresentadas mais a frente como pseudocódigos.

População Inicial

Outro parâmetro de entrada possível de ser manipulado, em especial se houver a necessidade ou o desejo de acelerar o processo de busca/otimização, é a população inicial.

Apesar de ser possível estipular uma população inicial com indivíduos previamente dispostos a serem bons candidatos a solução do problema, foi feita a opção neste trabalho de se utilizar o próprio algoritmo do Matlab (versão 2016b) que gera aleatoriamente um conjunto de soluções possíveis para o problema.

Função Objetivo

A função objetivo descrita pelo pseudocódigo Algoritmo 2 descreve o problema de otimização deste trabalho, dado pela equação 3.5. O Algoritmo 2 é utilizado como argumento de entrada na função “ga” (algoritmo do toolbox do Matlab) e por meio deste é realizada a avaliação dos indivíduos da população. Isso visa garantir que a menor distância entre o ponto $(-1 + 0j)$ e o diagrama de Nyquist de $L(j\omega)$ seja igual ao raio da circunferência M_s , definido como parâmetro de projeto via resposta em frequência.

A função “nyquist” (inserida na função objetivo) obtém os valores de $L(j\omega_i)$ e armazena nos vetores Re e Im as respectivas partes real e imaginária de $L(j\omega_i)$. O subscrito i indica o i -ésimo valor de frequência ω e pode ser deixado para a função determinar o intervalo de frequências, ou pode ser definido da construção do algoritmo. O vetor “d” armazena as distâncias entre o ponto $(-1 + 0j)$ e os pontos sobre a curva do diagrama de Nyquist (armazenados em Re e Im).

Por fim a função “ff” representa a avaliação do indivíduo da população do problema de otimização e esse valor é utilizado na avaliação pelo algoritmo genético “ga”.

Algoritmo 2: função objetivo**Entrada:** $gain = [\mathbf{f} \quad \mathbf{g}]; \mathbf{H}(s); \tau; \mathbf{B}$ e M_s **Saída:** ff

- 1 $L(s) = -(s\mathbf{g} + s^2\mathbf{f})\mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-\tau s};$
- 2 $[Re \ Im] \leftarrow nyquist\{L(s)\};$
- 3 $d = \sqrt{(Re + 1)^2 + Im^2};$
- 4 $ff = (\min(d) - M_s^{-1})^2;$
- 5 **retorna** ff

Função de restrições

O argumento “Função de Restrição” (Algoritmo 3) está presente no algoritmo de busca descrito em Algoritmo 1 e descreve as restrições necessárias para se buscar por soluções estáveis (obedecendo ao equação 3.6), além de outras que buscam melhorar o desempenho do controle (a equação 3.7) e que forçam a regularização de eventual matriz massa singular(a equação 3.9).

Deve se lembrar que no caso de sistemas de matriz massa singular, na presença de atraso, caso se deseje regularizar o sistema por meio da restrição presente na equação 3.9 (elimando-se assim dinâmicas impulsivas), por motivos apresentados na seção 3.4.1, os valores de ganho da realimentação devem ser calculados desconsiderando-se o atraso (utilizar $\tau = 0$) e deve ser feito o uso concomitante do preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018).

O pseudocódigo Algoritmo 3 incorpora estas restrições, e para conseguir as atender, trás consigo um vetor aqui chamado de “cross” que armazena todos os pontos de cruzamentos da curva de Nyquist de $L(j\omega)$ com o eixo real.

A variável “c(1)” e “c(2)” representam as restrições não lineares das inequações 3.6 e 3.9, que respectivamente garantem a estabilidade e a regularização da matriz massa, ao passo em que a variável “ceq” representa a restrição não linear dada pela equação 3.7.

Algoritmo 3: função de restrição

Entrada: $gain = [\mathbf{f} \quad \mathbf{g}]; \mathbf{H}(s); \tau; \mathbf{B}$ e M_s
Saída: $[c \text{ ceq}]$

- 1 $L(s) = -(s\mathbf{g} + s^2\mathbf{f})\mathbf{H}(s)\mathbf{B}e^{-\tau s};$
- 2 $[\text{Re } \text{Im}] \leftarrow \text{nyquist}\{L(s)\};$
- 3 $\text{cross} = [\text{Re}(1)]$
- 4 **para** $i=1$ **até** $\text{comprimento}(\text{Im})-1$ **faça**
- 5 **se** $\text{Im}(i) \times \text{Im}(i+1) < 0$ **então**
- 6 $\text{cross} = [(\text{cross } \text{Re}(i) + \text{Re}(i+1))/2];$
- 7 **fim**
- 8 $i=i+1;$
- 9 **fim**
- 10 $c(1) = -\min(\text{cross}) - 1 + M_s^{-1};$
- 11 $c(2) = -\text{abs}(\det(\mathbf{M}-\mathbf{B}*\mathbf{f})) + 0,1;$
- 12 $\text{ceq} = \min(\text{cross}) + (1 - M_s^{-1});$
- 13 **retorna** $[c \text{ ceq}]$

Finalizada esta seção, segue-se para a apresentação dos resultados.

Capítulo 4

Experimentos e Resultados

Para fins de apresentação dos resultados alcançados com a proposta de realimentação derivativa desta dissertação, são apresentados alguns exemplos com aplicação desta modalidade de controle e seus resultados são comparados outros de modalidade de controle similar, que seja a de realimentação de estados nos moldes da proposta na dissertação de Dantas (2019).

Da mesma forma como feito em Dantas (2019), os resultados alcançados são divididos em dois grupos, os com ganhos de realimentação SRA e os CRA. SRA faz referência aos ganhos calculados sem o uso da restrição 3.7, ou seja, "sem restrição adicional". Já os ganhos CRA são calculados pelo método proposto com o uso da restrição 3.7, ou seja, "com restrição adicional", realizando buscas por ganhos que trazem, em tese, um melhor desempenho para o sistema em malha fechada.

4.1 Exemplo 1

Um primeiro exemplo trabalhado é o da Figura 5.1 a seguir:

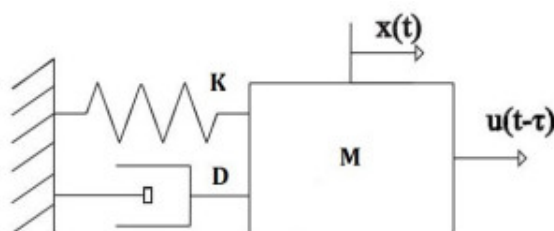


Figura 4.1: Sistema massa-amortecedor-mola a ser controlado.

Fonte: Imagem extraída de Dantas (2019).

Tal exemplo, além de estar presente na dissertação de Dantas (2019), também pode ser visto no artigo de Ram *et al.* (2009). Para este exemplo são utilizados os valores de $M=1$, $D=0,01$, $K=5$, $B=1$ e $\tau=0,1$, já para fins de comparação com o método aqui proposto, são utilizados os resultados apresentados na dissertação de Dantas (2019) (que utilizou uma realimentação de estados, não derivativa).

Utilizando um $M_s = 1,66$ foi possível alcançar valores de ganhos de realimentação apresentados na Tabela 4.1.

Método	\mathbf{f}	\mathbf{g}
Real. de Estados SRA	-2,6097	-5,9599
Real. de Estados CRA	-4,4300	-6,1675
Real. Derivativa SRA	-0,0057	0,0015
Real. Derivativa CRA	-0,3656	-4,1493

Tabela 4.1: Demonstrativos dos ganhos de realimentação (derivativa ou não, com restrição adicional ou não).

Para fins de esclarecimento da Tabela 4.1, deve ser dito que os ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} da realimentação de estados SRA e a CRA, são os propostos na dissertação de Dantas (2019), ao passo em que os ganhos \mathbf{f} e \mathbf{g} da realimentação derivativa SRA e a CRA são os ganhos alcançados pelo método aqui proposto (mesmo esclarecimento cabe para as próximas tabelas que expõem valores de ganho de realimentação).

De posse dos vetores \mathbf{f} e \mathbf{g} ¹ que realimentam o sistema com os seus estados, é possível se obter o diagrama de Nyquist do sistema para os diferentes ganhos e diferentes métodos. Desta forma, segue a Figura 4.2, que traz o diagrama de Nyquist com as curvas para os ganhos da Tabela 4.1.

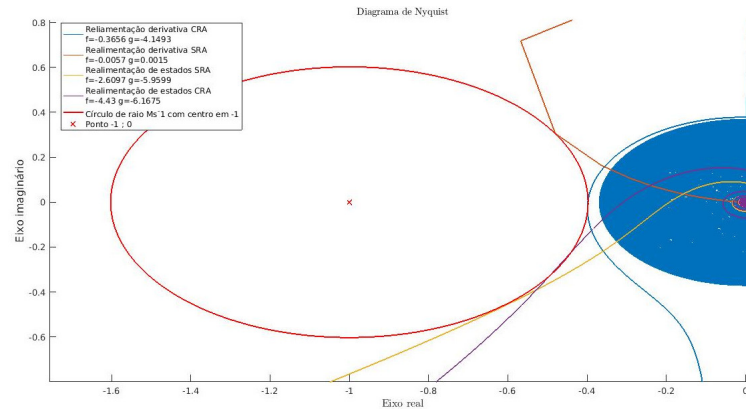


Figura 4.2: Diagrama de Nyquist após a realimentação do sistema com os ganhos apresentados na Tabela 4.1.

É de se notar que tanto em Dantas (2019) quanto no presente trabalho as abordagens SRA e CRA atingiram o seu objetivo, que seja o de tangenciar o círculo de raio M_s^{-1} em condições de estabilidade e (no caso CRA) em ponto mais próximo ao eixo real. Para identificar que realmente as curvas CRA realizaram o tangenciamento do círculo M_s em ponto mais próximo ao eixo real, basta comparar as curvas em cor vermelha e a amarela (curvas SRA) com as curvas de cor azul e roxa (curvas CRA), todas da Figura 4.2.

¹No caso de realimentação de estados, o vetor \mathbf{f} é responsável por realimentar o sistema com o estado $\dot{\mathbf{x}}(t)$ (velocidade) e o vetor \mathbf{g} o estado $\mathbf{x}(t)$ (posição). Já no caso da realimentação derivativa, vetor \mathbf{f} é responsável por realimentar o sistema com o estado $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ (aceleração) e o vetor \mathbf{g} o estado $\dot{\mathbf{x}}(t)$ (velocidade).

Para constatação da estabilidade e o grau de robustez do sistema, segue Tabela 4.2 com as margens de ganho (MG) alcançadas para cada um dos vetores de ganhos de realimentação da Tabela 4.1.

Método	MG
Real. de Estados SRA	14,3 dB
Real. de Estados CRA	10,2 dB
Real. Derivativa SRA	44,7 dB
Real. Derivativa CRA	8 dB

Tabela 4.2: Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos.

Acrescentando mais informações, segue a Tabela 4.3 com os valores das margens de fase (MF), referentes aos ganhos apresentados na Tabela 4.1.

Método	MF
Real. de Estados SRA	37,6°
Real. de Estados CRA	44,4°
Real. Derivativa SRA	-57,4°
Real. Derivativa CRA	84,4°

Tabela 4.3: Margens de fase alcançadas para os diferentes casos.

Para fins de análise do desempenho temporal, são exibidas nas Figuras 4.3 e 4.4 a resposta natural do sistema realimentado, exibindo os valores no tempo dos estados $\mathbf{x}(t)$ (posição, na Figura 4.3) e $\dot{\mathbf{x}}(t)$ (velocidade, na Figura 4.4), para todos casos da Tabela 4.1, considerando como condições iniciais $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ e $\mathbf{x}(0) = 0,3$.

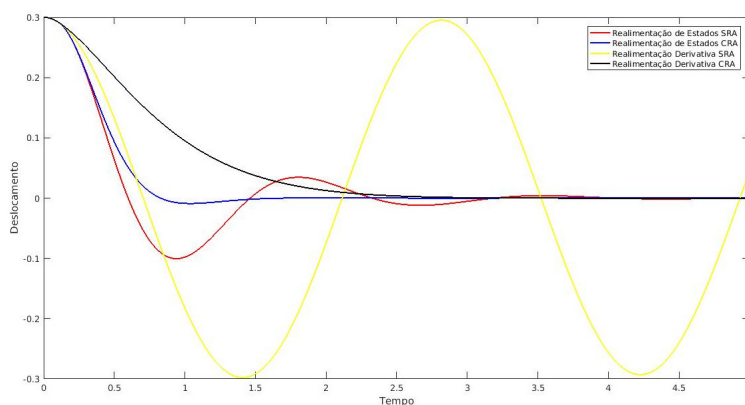


Figura 4.3: Respostas do estado $\mathbf{x}(t)$ para condições iniciais $\dot{\mathbf{x}}(0) = 0$ e um $\mathbf{x}(0) = 0,3$.

Na Figura 4.4 com o gráfico do desempenho temporal do estado velocidade para os quatro casos apresentados na Tabela 4.1.

Apesar de parecer à primeira vista que o controle implementado por realimentação derivativa SRA seria não amortecido, tal conclusão não seria correta, já que as respostas

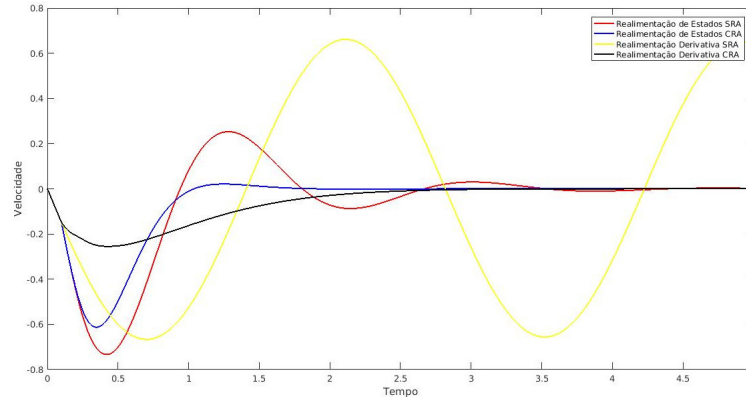


Figura 4.4: Respostas do estado $\mathbf{x}'(t)$ para condições iniciais $\mathbf{x}'(0) = 0$ e um $\mathbf{x}(0) = 0,3$.

apresentadas com tal controle apresenta uma constante de tempo de amortecimento² de 175 segundos, ou seja, apresenta sim um amortecimento em sua resposta, mas tal resposta seria muito menos amortecida que as demais. Ainda com relação ao controle implementado pela realimentação derivativa SRA, deve se dar atenção que apesar deste apresentar baixíssimo amortecimento, apresentou também a maior margem de ganho, o que favorece a aplicação de maiores ganhos que favoreceriam (em tese) um melhor desempenho temporal.

Acrescenta-se também que, comparando a realimentação derivativa com a realimentação de estados, ambas CRA, a realimentação derivativa foi visivelmente capaz de empregar um amortecimento muito maior que a realimentação de estados, apesar desta possuir uma margem de ganho um pouco maior, havendo espaço para emprego de maiores ganhos sem perda de estabilidade (mas com possível violação do círculo de sensibilidade M_s).

4.2 Exemplo 2

Trabalhando outro exemplo exposto presente em Dantas (2019), que por sua vez extraiu de Ram *et al.* (2011), segue o sistema de matriz massa-amortecedor-mola com os seguintes parâmetros:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema acima referido também possui como característica uma constante de atraso de $\tau = 5$ segundos e seus autovalores em malha aberta são $\lambda_{1,2} = 0 \pm j$ e $\lambda_{3,4} = -1 \pm 2j$ (o que ainda atende ao pressuposto de estabilidade em malha aberta).

Tendo em vista que este sistema possui pólos sobre o eixo imaginário e tal fato se apresenta como uma dificuldade para se trabalhar via resposta em frequência, é feita uma pequena alteração na matriz \mathbf{D} , passando esta a ser trabalhada como $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -0,999 \\ -0,999 & 1 \end{bmatrix}$,

²Tempo para que haja redução de 37% da amplitude.

o que força um pequeno deslocamento para esquerda dos pólos antes puramente imaginário, como sugere Ogata (2009).

Na Tabela 4.4 são apresentados os valores de ganho alcançados em Dantas (2019) (realimentação de estados) e os do presente trabalho (realimentação derivativa), todos para um $M_s = 1,66$.

Método	f	g
Real. de Estados SRA	[-0,0769 -0,0833]	[-0,0526 -0,0714]
Real. de Estados CRA	[-0.6032 0.3544]	[-0.2077 -0.1111]
Real. Derivativa SRA	[-0.0347 0.0550]	[0.0610 -0.0475]
Real. Derivativa CRA	[0.2497 0.0550]	[0.0235 -0.1599]

Tabela 4.4: Demonstrativos dos ganhos de realimentação (derivativa ou não, com restrição adicional ou não).

Segue também a Figura 4.5, que traz o diagrama de Nyquist com as curvas para os ganhos apresentados na Tabela 4.4.

Como forma de demonstrar a estabilidade e robustez do sistema, segue Tabela 4.5 com as margens de ganho (MG) alcançadas para cada um dos vetores de ganhos de realimentação da Tabela 4.4.

Método	MG
Real. de Estados SRA	12,7 dB
Real. de Estados CRA	7,9 dB
Real. Derivativa SRA	24,3 dB
Real. Derivativa CRA	8 dB

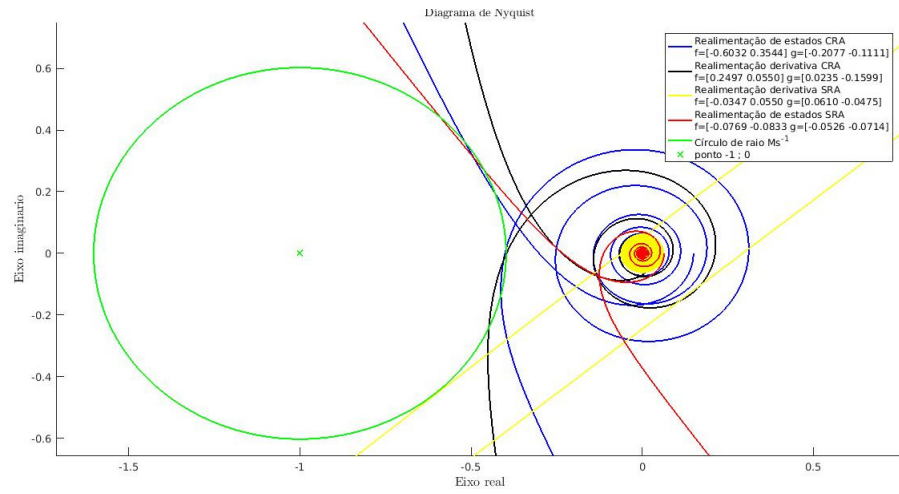
Tabela 4.5: Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.4

Acrescentando outras informações, segue a Tabela 4.6 com as margens de fase alcançadas com os diferentes ganhos de realimentação derivativa e de estados, da Tabela 4.4.

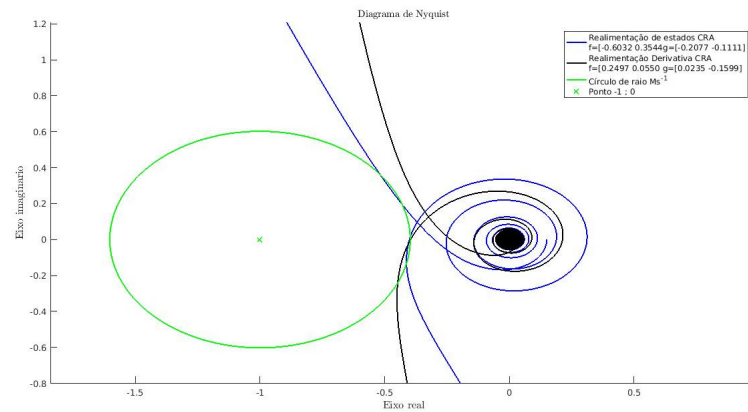
Método	MF
Real. de Estados SRA	-41,4°
Real. de Estados CRA	-46,5°
Real. Derivativa SRA	38°
Real. Derivativa CRA	-57,5°

Tabela 4.6: Margens de fase alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.4.

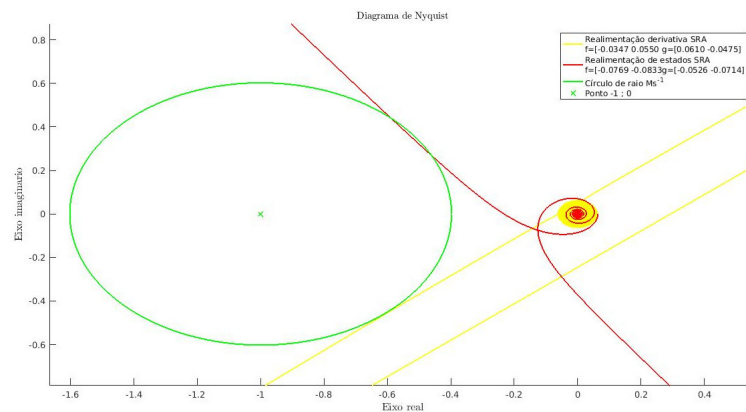
Para fins de comparação entre a realimentação de estados e a realimentação derivativa, inicialmente só o caso SRA, seguem as Figuras 4.6 e 4.7 com o comportamento dos estados deslocamento e velocidade no tempo (condições iniciais $\mathbf{x}(0) = [2 \ 0]^T$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = [0 \ 0]^T$).



(a) Diagrama de Nyquist para todos ganhos de realimentação da Tabela 4.4.



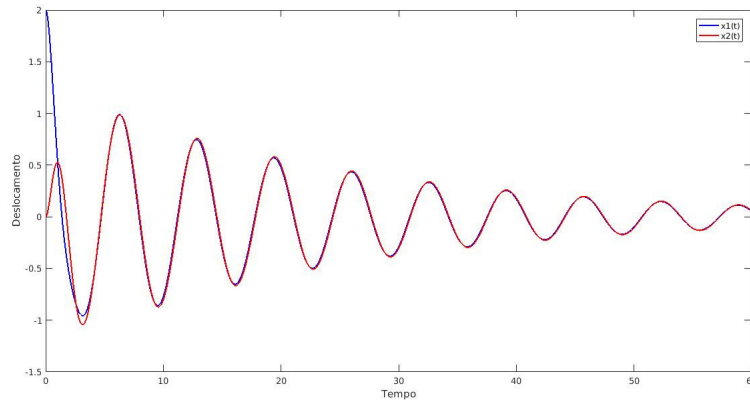
(b) Detalhe para curvas CRA.



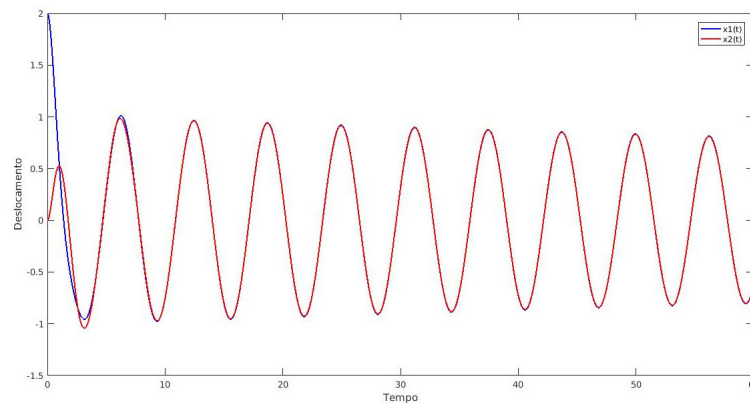
(c) Detalhe para curvas SRA.

Figura 4.5: Curvas de Nyquist referentes a Tabela 4.4.

Dos gráficos apresentados nas Figuras 4.6 e 4.7, que apresentam os desempenhos das diferentes realimentações SRA (realimentação de estados e realimentação derivativa),



(a) comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação de estados SRA.



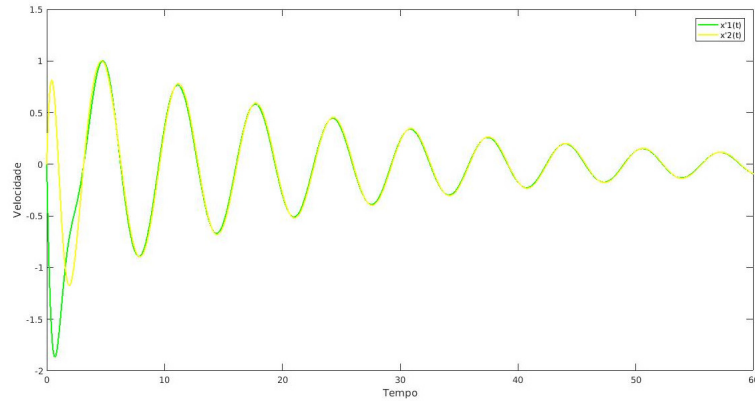
(b) comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação derivativa SRA.

Figura 4.6: Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.4.

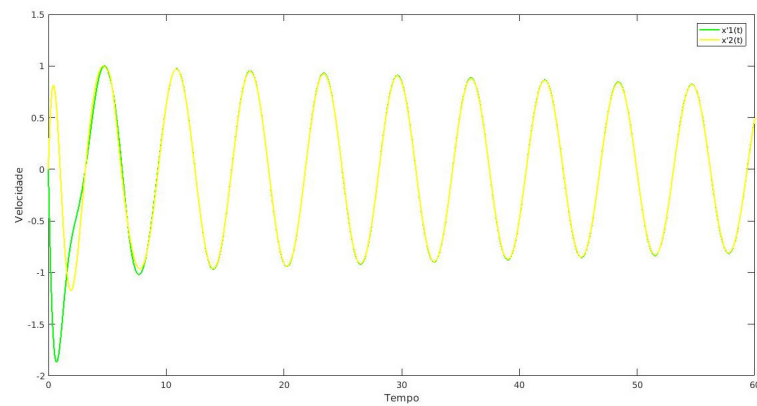
percebe-se que mais uma vez a realimentação derivativa apresentou uma dinâmica muito pouco amortecida, com uma constante de tempo de amortecimento igual a 259 segundos, mas que também teria apresentado a maior margem de ganho, o que possibilita um maior aumento nos ganhos sem que se atinja a instabilidade, em busca de melhor desempenho.

Prosseguindo, agora com a comparação entre a realimentação de estado e a realimentação derivativa, para o caso CRA, seguem as Figuras 4.8 e 4.9 com o comportamento dos estados de deslocamento e velocidade no tempo.

Realizando um comparativo entre a realimentação de estados e a realimentação derivativa, ambas CRA, percebe-se que as duas atingiram quase que um mesmo valor de margem de ganho, mas ainda assim a realimentação derivativa foi capaz de impor um maior amortecimento ao sistema.



(a) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação de estados SRA.



(b) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação derivativa SRA.

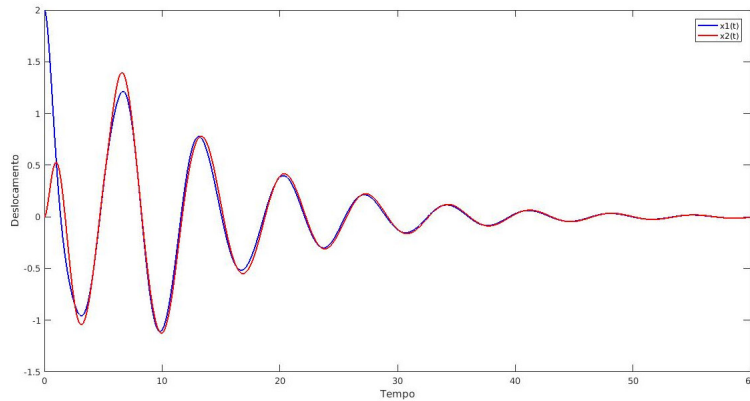
Figura 4.7: Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.4.

4.3 Exemplo 3

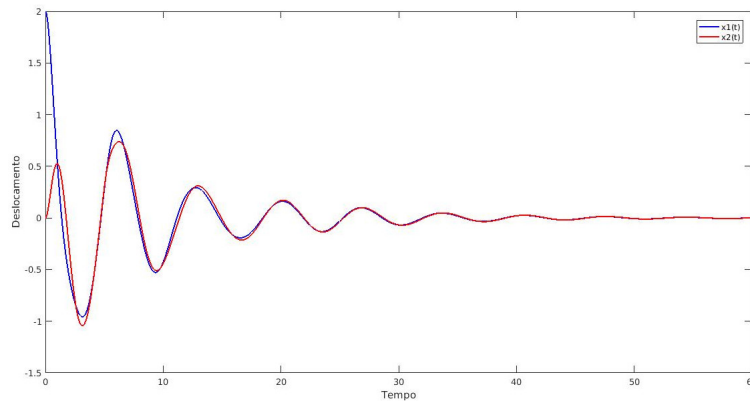
Como o objetivo de realizar novas comparações entre o método de realimentação de estados e a realimentação derivativa, foram realizados ajustes no exemplo 2 (apresentado a pouco), transformando a matriz massa antes regular $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ em uma matriz massa singular $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, possibilitando a demonstração da regularização da matriz massa por meio da realimentação derivativa, o que poderia favorecer eliminação de respostas impulsivas³.

Para demonstrar primeiramente a viabilidade de regularização da matriz massa sin-

³Respostas impulsivas são características inerentes de sistema massa-amortecedor-mola (também outros) que possuem matriz de massa singular, já que desta forma surge(m) autovalor(es) infinito(s), como cita Abdelaziz (2015).



(a) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação de estados CRA.



(b) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação derivativa CRA.

Figura 4.8: Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.4.

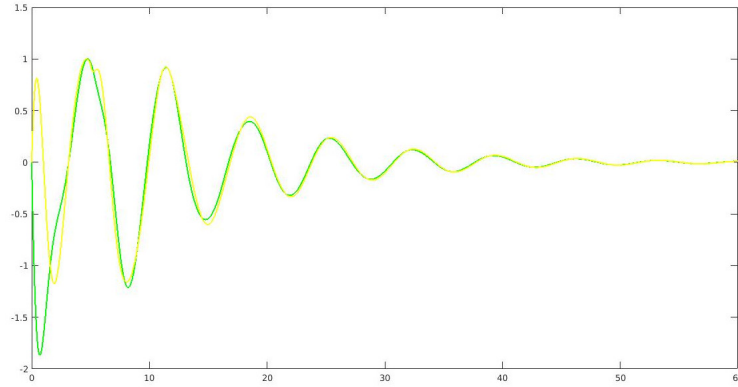
gular por meio da realimentação derivativa, a adaptação exemplo 2 (que virou exemplo 3) será apresentada inicialmente na ausência de atraso (constante de atraso igual a zero) e posteriormente será trabalhado o mesmo sistema com o seu atraso já conhecido de 5 segundos.

4.3.1 Exemplo 3 (matriz massa singular sem atraso)

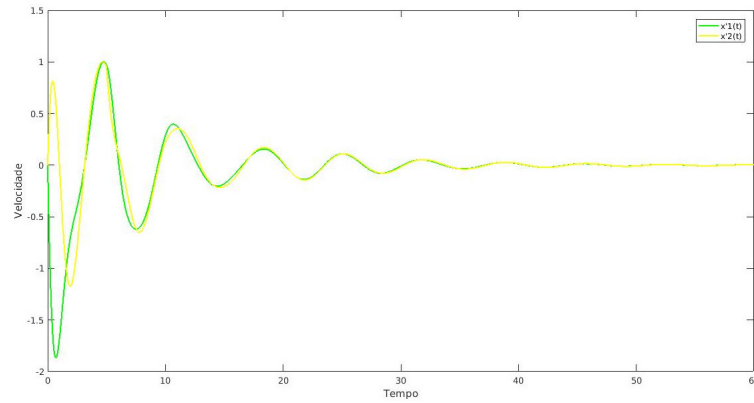
Lembrando novamente o sistema trabalhado, deve ser dito que ele apresenta as seguintes características (alteração somente sobre a matriz massa e a constante de atraso):

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O sistema acima referido não possui atraso de transporte e seus autovalores em malha



(a) comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação de estados CRA.



(b) comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação derivativa CRA.

Figura 4.9: Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a tabela 4.4.

aberta são $\lambda_{1,2} = -0,048 \pm 1,311j$, $\lambda_3 = -2,904$ e $\lambda_4 = -\infty$ (o que garante que o sistema é estável em malha aberta).

Para que seja realizada a regularização⁴ da matriz massa deve-se garantir⁵ que a nova matriz $(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})$ seja inversível, ou de igual forma, possua um determinante diferente de zero.

Logo, o algoritmo genético utilizou a restrição da equação 3.9 (ou seja, $|\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})| \geq 0,1$) para a busca por valores de ganhos de realimentação derivativa⁶, o que garante a regularização da matriz massa e também garante que o(s) polo(s) antes infinito(s),

⁴Somente para o caso de realimentação derivativa, não se falando em regularização para uma realimentação de estados.

⁵Há outras ponderações que devem ser levantadas e garantidas antes da implementação do método em sistemas de matriz massa singular, dentre elas $\text{rank}([\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{D} + \mathbf{K}, \mathbf{B}]) = n$ e $\text{rank}([\mathbf{M}, \mathbf{B}]) = n$, conforme se vê em Abdelaziz (2015).

⁶Não se falando nesta restrição para o caso de realimentação de estados, já que tal metodologia não é capaz de modificar valores da matriz massa por não realimentar o estado de aceleração.

responsável(eis) pelo comportamento impulsivo indesejado, não passe(m) a assumir valor(es) finito(s) muito grande(s) (o que iria o(s) aproximar de infinito).

Utilizando o algoritmo proposto, um $M_s = 1,66$ e garantindo que $|det(\mathbf{M} - \mathbf{Bf})| \geq 0,1$ (para o caso de realimentação derivativa), foram alcançados os valores de ganhos seguintes (Tabela 4.7).

Método	f	g
Real. de Estados SRA	[34.0230 -9.7546]	[-77.3124 -60.6372]
Real. de Estados CRA	[-3.0687 -30.1943]	[11.1960 -6.8014]
Real. Derivativa SRA	[1.1649 -1.3057]	[-0.1451 -1.4372]
Real. Derivativa CRA	[0.4854 -0.4631]	[0.0123 -0.35583]

Tabela 4.7: Demonstrativos dos ganhos de realimentação para o exemplo 3 sem atraso.

Segue na Figura 4.10 imagens dos diagramas de Nyquist alcançados com os valores de ganho da Tabela 4.7.

Demonstrando a estabilidade e a robustez do sistema, segue Tabela 4.8 com as margens de ganho (MG) alcançadas para cada um dos vetores de ganhos de realimentação da Tabela 4.7.

Método	MG
Real. de Estados SRA	∞ dB
Real. de Estados CRA	8,01 dB
Real. Derivativa SRA	9 dB
Real. Derivativa CRA	8 dB

Tabela 4.8: Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.7.

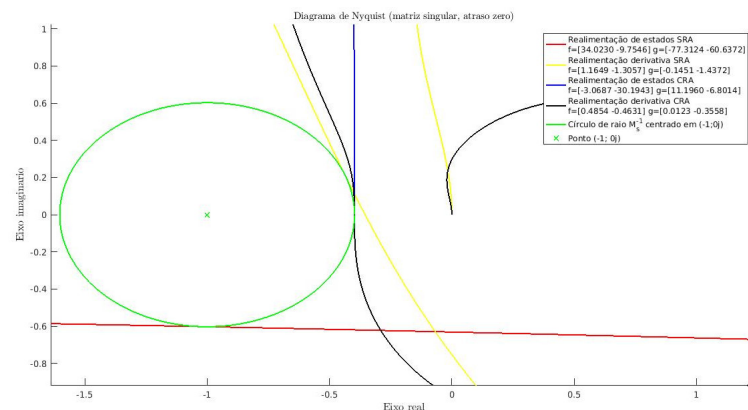
Acrescentando outras informações, segue a Tabela 4.9 com as margens de fase alcançadas com os diferentes ganhos de realimentação derivativa e de estados da Tabela 4.7.

Método	MF
Real. de Estados SRA	$37,4^\circ$
Real. de Estados CRA	$-66,4^\circ$ dB
Real. Derivativa SRA	$-50,4^\circ$
Real. Derivativa CRA	-54° dB

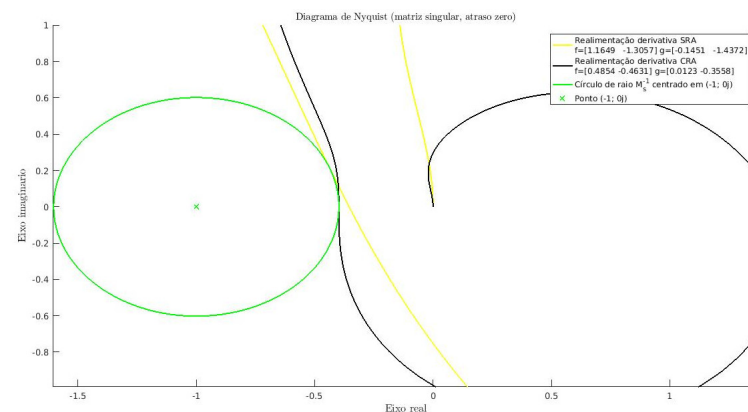
Tabela 4.9: Margens de fase alcançadas para os diferentes casos da tabela 4.7

Para fins de comparação entre a realimentação de estados e a realimentação derivativa, inicialmente somente para o caso SRA, seguem as Figuras 4.11 e 4.12 com o comportamento dos estados deslocamento e velocidade no tempo (condições iniciais $\mathbf{x}(0) = [2 \ 0]^T$ e $\mathbf{x}'(0) = [0 \ 0]^T$).

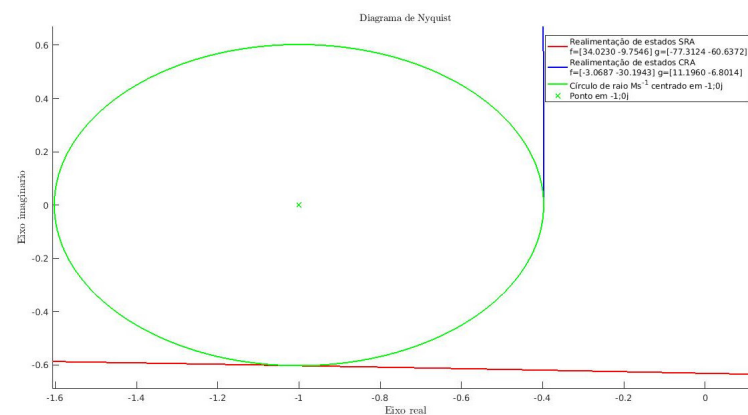
Das Figuras 4.11 e 4.12, percebe-se que a realimentação derivativa SRA (comparada a realimentação de estados) é capaz de impor na dinâmica do sistema um amortecimento



(a) Diagrama de Nyquist para todos os casos da tabela 4.7.



(b) Detalhe para realimentação derivativa CRA e SRA.

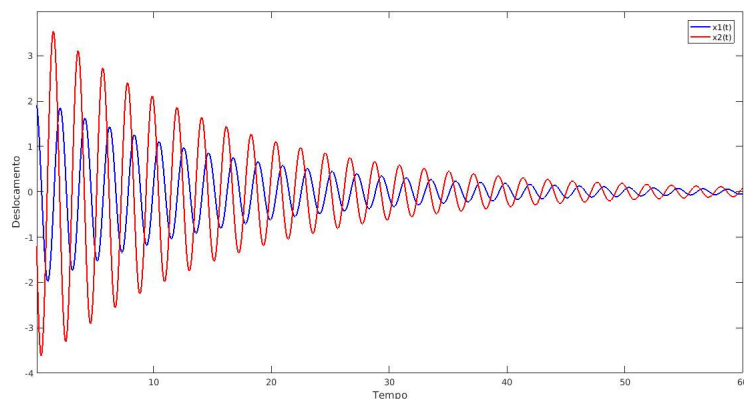


(c) Detalhe para realimentação de estados CRA e SRA.

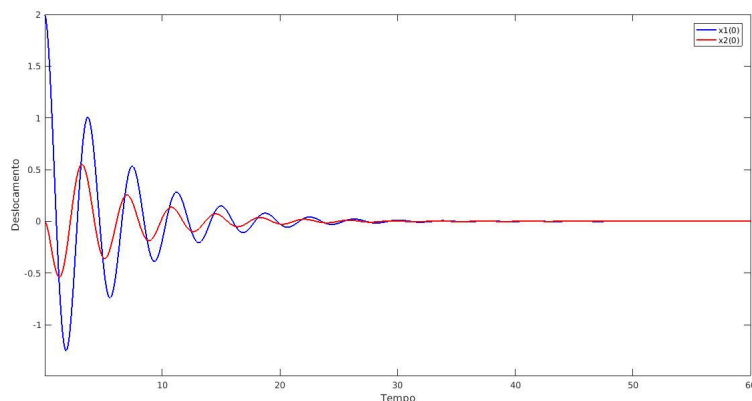
Figura 4.10: Curvas de Nyquist referentes a Tabela 4.7.

maior, levando o sistema mais rapidamente ao estado permanente. Em contrapartida, a realimentação de estados SRA possui uma margem de ganho infinita neste caso.

Prosseguindo com as comparações entre a realimentação de estados e a realimentação derivativa, agora para o caso CRA, seguem as Figuras 4.13 e 4.14 com o comportamento



(a) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação de estados SRA.



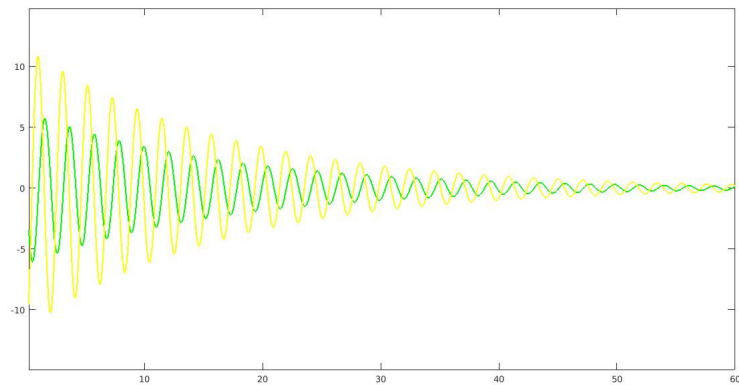
(b) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação derivativa SRA.

Figura 4.11: Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.7.

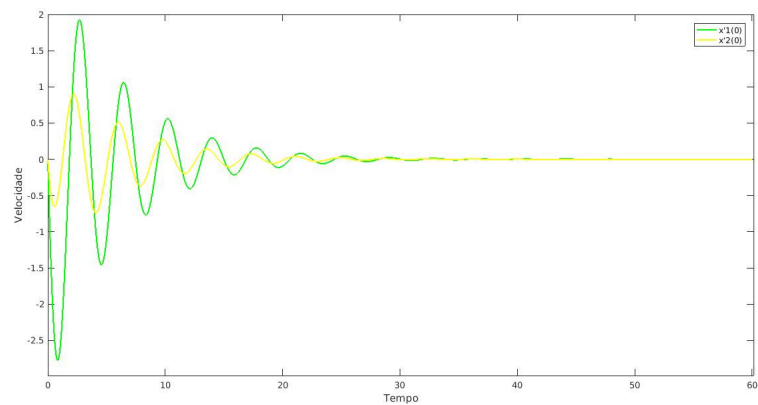
dos estados de deslocamento e velocidade.

Das Figuras 4.13 e 4.14 percebe-se que a realimentação de estados CRA foi capaz de impor uma dinâmica muito menos oscilatória, quando comparada a realimentação derivativa CRA, no entanto a realimentação de estados não é capaz de regularizar a matriz massa do sistema, fato este alcançado pela realimentação derivativa CRA, o que elimina comportamentos impulsivos no sistema (já que o sistema não terá mais autovalores infinitos, como lecionam Bhat e Bernstein (1996) e Abdelaziz (2015)).

Para demonstrar que de fato a realimentação derivativa foi capaz de eliminar o comportamento impulsivo no sistema, vide Figura 4.15, que traz o comportamento do estado aceleração do sistema no tempo (estado que fica mais destacado o comportamento impulsivo), figura na qual é notado no primeiro instante de tempo o pico repentino no valor da



(a) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação de estados SRA.



(b) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação derivativa SRA.

Figura 4.12: Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.7.

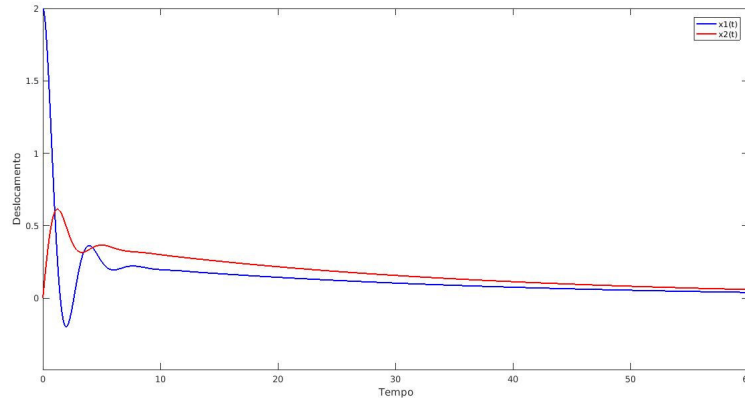
aceleração, assim como as fagulhas que surgem no primeiro instante em que conectamos alguns equipamentos elétricos a tomada.

Por fim, comparando as Figuras 4.11 a 4.14, percebe-se que, como nos outros exemplos, que a realimentações CRA (de estados e derivativa) foram mais rápidas que as SRA, sendo também notado que as realimentações SRA possuem margens de ganho maiores que as CRA.

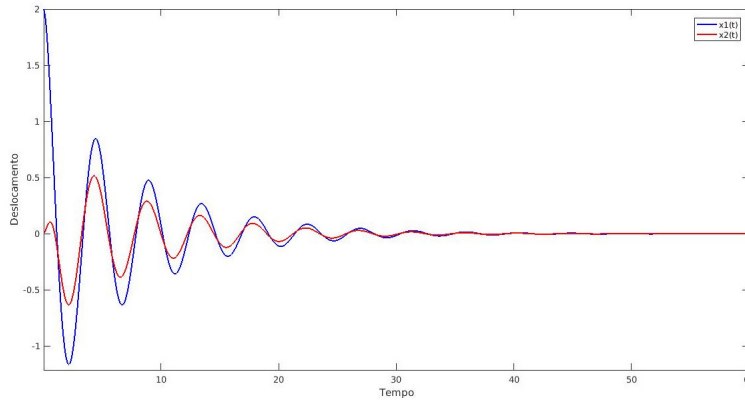
4.3.2 Exemplo 3 (matriz massa singular com atraso de 5 segundos)

Aqui é realizado o mesmo trabalho da seção 4.3.1, mas agora com a presença de atraso ($\tau = 5$), devendo-se levar em consideração os seguintes pontos.

Igualmente ao caso sem atraso, para que seja realizada a regularização da matriz



(a) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação de estados CRA.



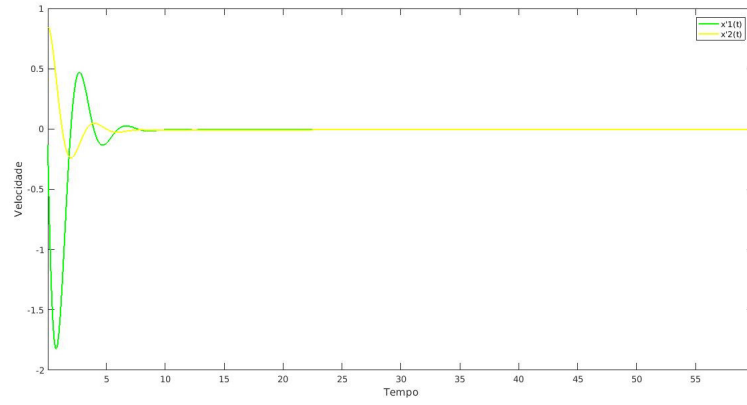
(b) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação derivativa CRA.

Figura 4.13: Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.7.

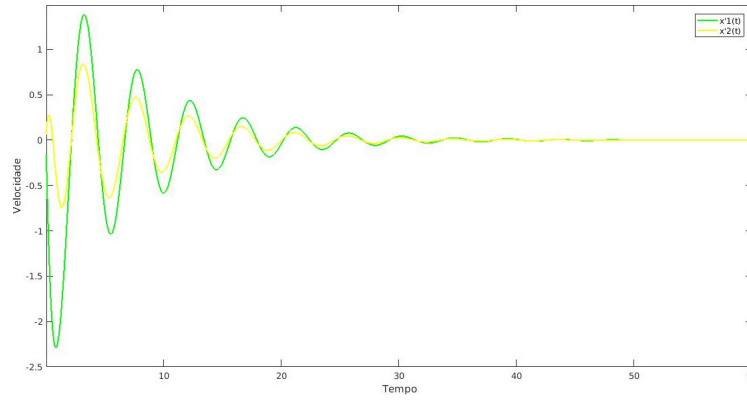
massa, deve-se garantir que a nova matriz $(\mathbf{M} - \mathbf{Bf})$ seja invertível, ou de igual forma, possua um determinante diferente de zero.

Para isso o algoritmo genético foi utilizado com uma restrição tipo $|\det(\mathbf{M} - \mathbf{Bf})| \geq 0,1$, o que além de garantir a regularização da matriz massa, também garante que o polo antes infinito (responsável pelo comportamento impulsivo indesejado) não venha possuir um valor finito muito grande (o que iria o aproximar do infinito).

Por motivos apresentados na seção 3.4.1, fica evidente a impossibilidade de calcular/buscar valores de ganhos que estabilizem o sistema na presença de atraso e que simultaneamente regularizem o sistema, sem que haja alguma forma de compensação (seja do crescimento de fase ou do crescimento do módulo). Neste trabalho é feito o uso do preditor de Smith proposto por Araújo e Santos (2018) para compensar o atraso, de forma que os valores de ganho para a realimentação derivativa são calculados desconsiderando-se o



(a) Comportamento no tempo dos dos estados de velocidade no caso de realimentação de estados CRA.



(b) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação derivativa CRA.

Figura 4.14: Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.7.

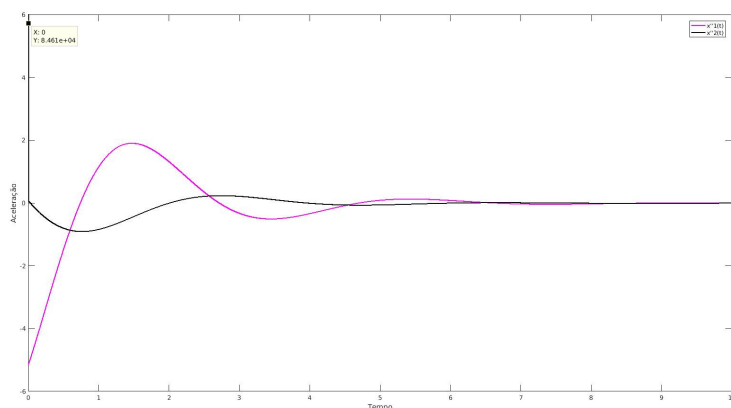
atraso (ou seja, iguais ao da seção anterior).

Seguindo ensinamentos presentes no trabalho de Araújo e Santos (2018), o preditor de Smith apresenta forma como que da Figura 3.6 e utiliza filtro como da equação 4.1 para um $\tau_f = 0,5$ e um $\omega_1 = 1,31$ (frequência de polo não amortecido do sistema).

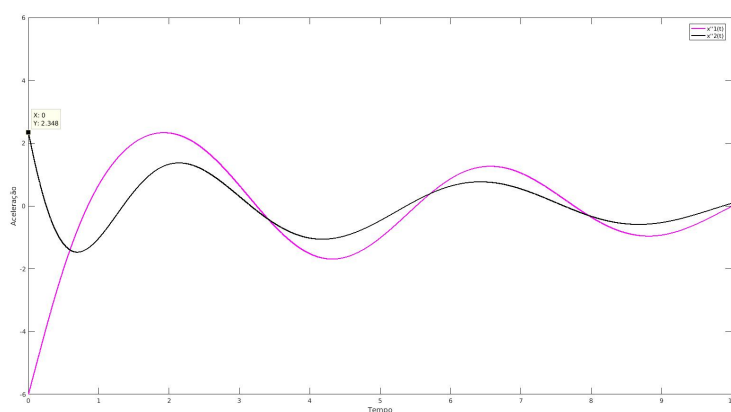
$$\Phi = \frac{1,1781s^2 + 1,3215s + 1}{(0,5s + 1)^3} \quad (4.1)$$

Com relação aos ganhos para o caso da realimentação de estados SRA e CRA, estes são calculados da forma como já foram apresentados em Dantas (2019), com intuito comparativo.

Sendo assim, utilizando o algoritmo proposto e garantindo que $|\det(\mathbf{M} - \mathbf{B}\mathbf{f})| \geq 0,1$ (para o caso de realimentação derivativa, desconsiderando o atraso pelo uso do preditor



(a) Comportamento no tempo dos estados de aceleração no caso de realimentação de estados CRA, com pico de impulso no valor e 8.461×10^4 (na forma como foi simulado), no instante zero segundo.



(b) Comportamento no tempo dos estados de aceleração no caso de realimentação derivativa CRA, com supressão do pico de impulso, no instante zero segundo.

Figura 4.15: Gráficos dos estados de aceleração para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, com ganhos da Tabela 4.7, como forma de comprovar a supressão do impulso em simulação.

de Smith), foram alcançados os valores de ganhos seguintes (Tabela 4.10).

Segue na Figura 4.16 imagens dos diagramas de Nyquist alcançados com os valores de ganho da Tabela 4.10.

Demonstrando a estabilidade e a robustez do sistema, segue Tabela 4.11 com as margens de ganho (MG) alcançadas para cada um dos vetores de ganhos de realimentação da Tabela 4.10.

Acrescentando outras informações, segue a Tabela 4.12 com as margens de fase alcançadas com os diferentes ganhos de realimentação derivativa e de estados, da Tabela 4.10.

Método	f	g
Real. de Estados SRA	[-0.0142 -0.3974]	[0.2243 -0.4013]
Real. de Estados CRA	[-0.1766 0.1331]	[0.6533 -0.7960]
Real. Derivativa SRA	[1.1649 -1.3057]	[-0.1451 -1.4372]
Real. Derivativa CRA	[0.4854 -0.4631]	[0.0123 -0.35583]

Tabela 4.10: Demonstrativos dos ganhos de realimentação para o exemplo 3 com atraso (realimentação derivativa com o uso de preditor de Smith).

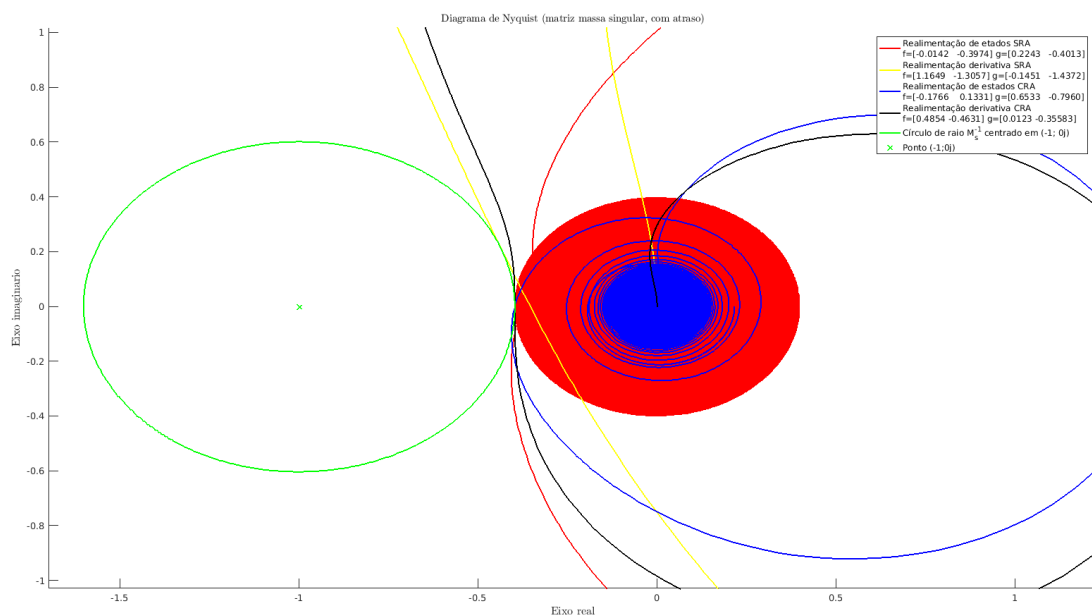


Figura 4.16: Curvas de Nyquist referentes a Tabela 4.10.

Método	MG
Real. de Estados SRA	8 dB
Real. de Estados CRA	8 dB
Real. Derivativa SRA	9 dB
Real. Derivativa CRA	8 dB

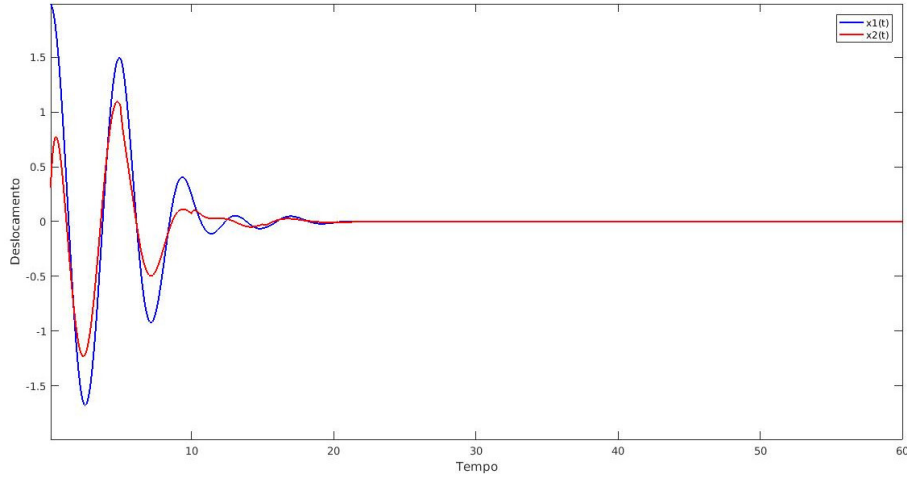
Tabela 4.11: Margens de ganhos alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.10.

Método	MF
Real. de Estados SRA	80,1°
Real. de Estados CRA	114,3° dB
Real. Derivativa SRA	-50,4°
Real. Derivativa CRA	-54° dB

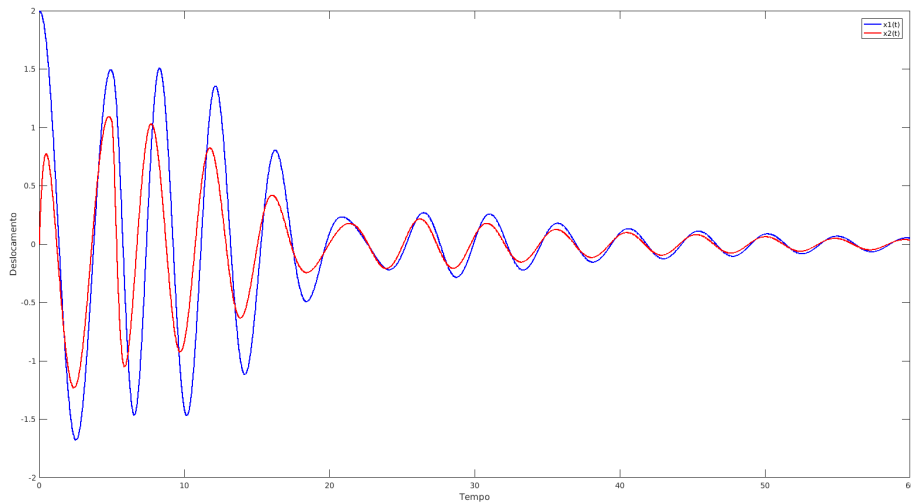
Tabela 4.12: Margens de fase alcançadas para os diferentes casos da Tabela 4.10.

Para fins de comparação entre a realimentação de estados e a realimentação derivativa, inicialmente somente para o caso SRA, seguem as Figuras 4.17 e 4.18 com o com-

portamento dos estados deslocamento e velocidade no tempo (condições iniciais $\mathbf{x}(0) = [2 \ 0]^T$ e $\mathbf{x}'(0) = [0 \ 0]^T$).



(a) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação de estados SRA.

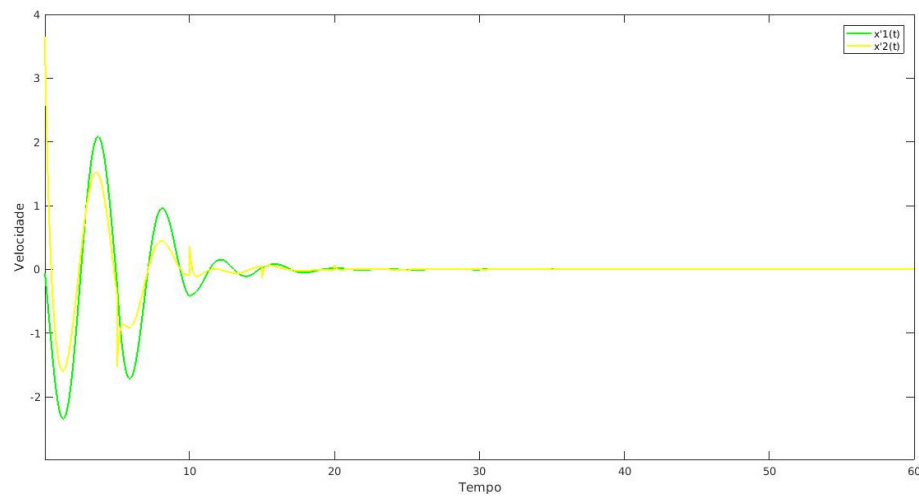


(b) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação derivativa regularizante SRA com preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018).

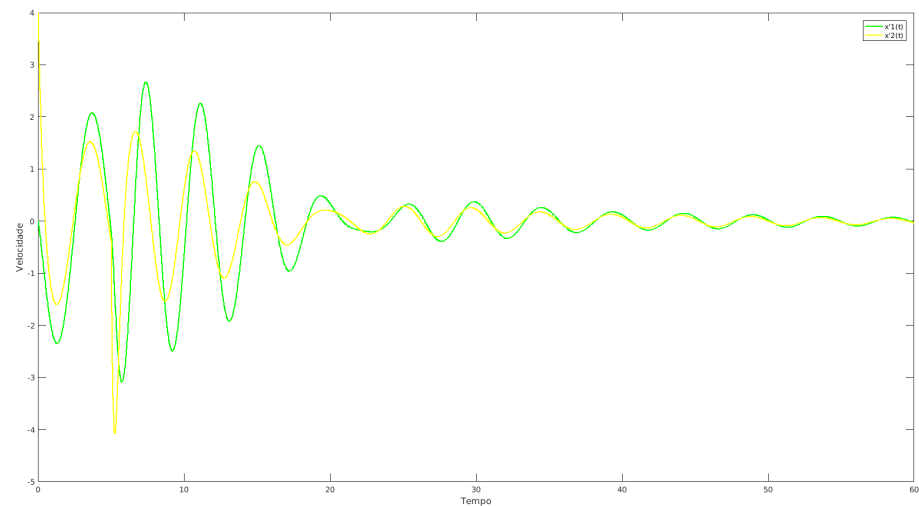
Figura 4.17: Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.10.

Das Figuras 4.17 e 4.18, percebe-se que a realimentação de estado SRA (comparada a realimentação derivativa) apresentou uma dinâmica mais rápida, o que levou o sistema a um estado permanente em menor tempo. Em contra partida, a realimentação derivativa foi capaz de regularizar o sistema, eliminando a dinâmica impulsiva no tempo $\tau \leq t < \infty$ (vide argumentação presente na seção 3.4.2).

Prosseguindo com as comparações entre a realimentação de estados e a realimentação



(a) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação de estados SRA.



(b) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação derivativa regularizante SRA com preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018).

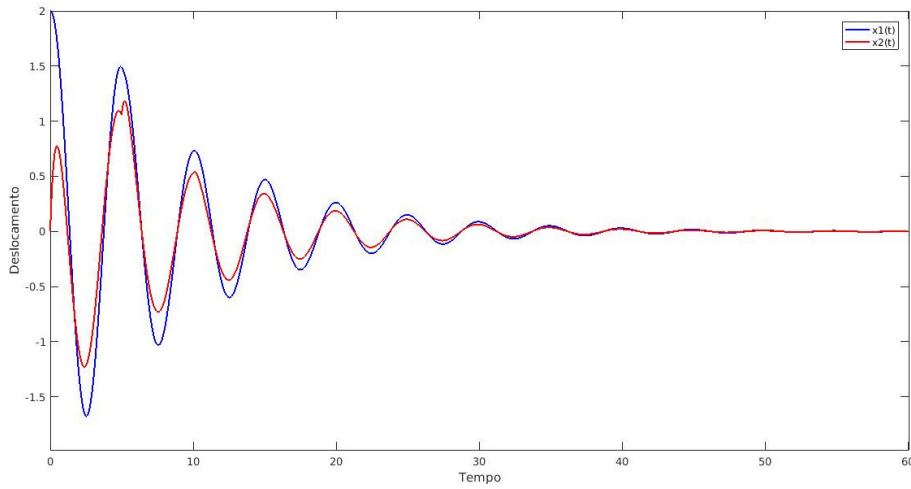
Figura 4.18: Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos SRA, referentes a Tabela 4.10.

derivativa, agora para o caso CRA, seguem as Figuras 4.19 e 4.20 com o comportamento dos estados de deslocamento e velocidade.

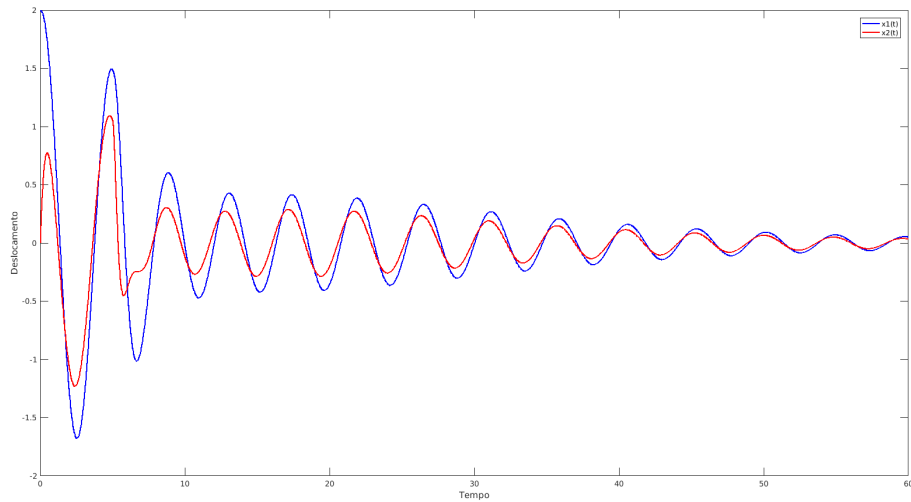
Das Figuras 4.19 e 4.20 percebe-se que novamente a realimentação de estados apresentou uma dinâmica mais rápida, alcançando o regime permanente em um menor tempo, no entanto somente a realimentação derivativa foi capaz de implementar um controle regularizante.

Para ressaltar a atuação da regularização, segue a Figura 4.21, que traz o estado aceleração (mais susceptível a dinâmica impulsiva) resultado da realimentação de estado e a realimentação derivativa regularizante, ambas CRA, para condições iniciais já citadas.

Novamente, deve-se lembrar que por motivos expostos na seção 3.4.2 a regularização



(a) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação de estados CRA.

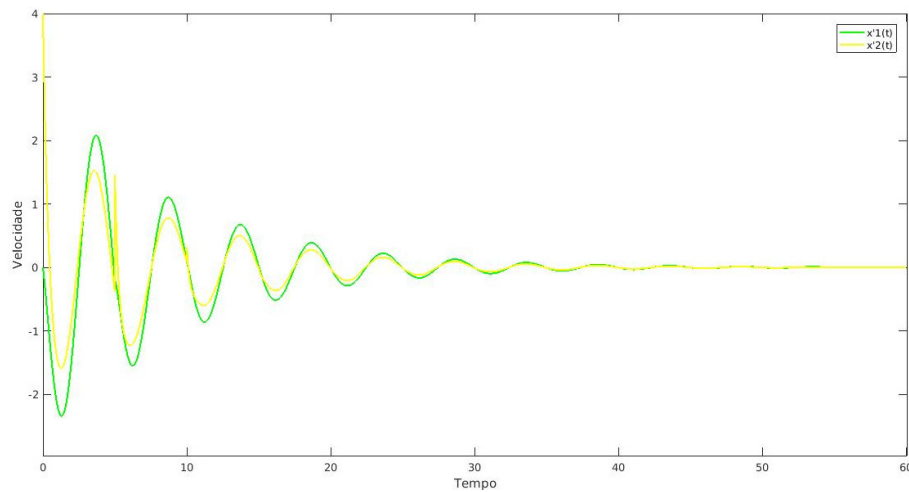


(b) Comportamento no tempo dos estados de deslocamento no caso de realimentação derivativa regularizante CRA com preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018).

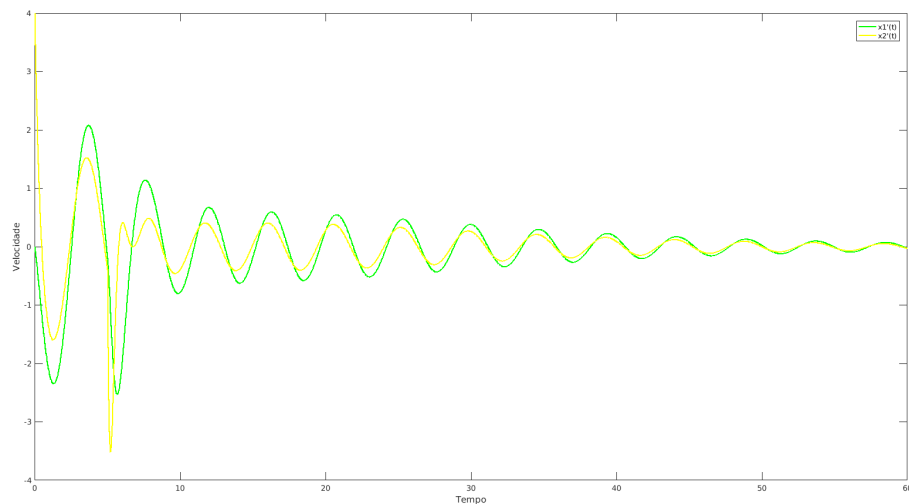
Figura 4.19: Gráficos dos estados de deslocamento para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.10.

em sistemas com atraso realizada por meio de realimentação derivativa, é eficiente somente no instante de tempo $\tau \leq t < \infty$, motivo pelo qual há um impulso inicial no instante 0 segundo na Figura 4.21(b). Com relação ao pico presente no instante de 5 segundos da Figura 4.21(b), pode-se dizer que este não caracteriza impulso, mas uma simples resposta do sistema a realimentação iniciada neste instante, já que o controle foi implementado por simulação, a qual não se tem saturação, e é de se esperar que uma entrada de $4 \cdot 10^5$ multiplicado por um ganho gere uma saída de maior amplitude.

Note que na Figura 4.21(a), por conta da falta de regularização do sistema, a dinâmica



(a) Comportamento no tempo dos dos estados de velocidade no caso de realimentação de estados CRA.

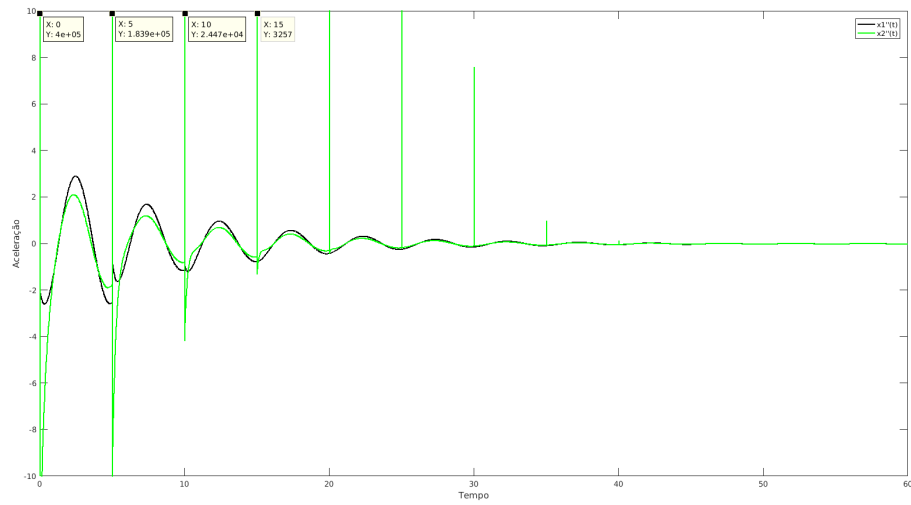


(b) Comportamento no tempo dos estados de velocidade no caso de realimentação derivativa regularizante CRA com preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018).

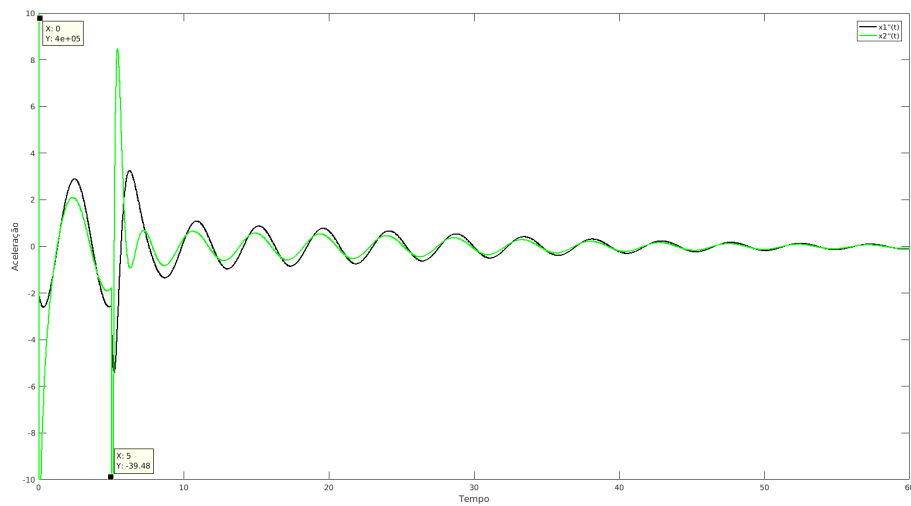
Figura 4.20: Gráficos dos estados de velocidade para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.10.

impulsiva é muito mais presente, o que poderia gerar danos em sistemas reais.

Por fim, para que seja possível um controle regularizante por realimentação derivativa, na presença de atraso, que possa eliminar completamente a dinâmica impulsiva, se faz necessário o uso de condições iniciais consistentes, como apresentado na seção 3.4.2. Para o sistema deste exemplo as condições iniciais consistentes (que fazem com que o



(a) Comportamento no tempo dos dos estados de aceleração no caso de realimentação de estados CRA e valores de pico de 4×10^5 em 0 segundo, $1,839 \times 10^5$ em 5 segundos, $2,447 \times 10^4$ em 10 segundos e 3257 em 15 segundos.



(b) Comportamento no tempo dos estados de aceleração no caso de realimentação derivativa regularizante CRA com preditor de Smith proposto em Araújo e Santos (2018) e valores de pico de 4×10^5 em 0 segundo e $-39,48$ em 5 segundos.

Figura 4.21: Gráficos dos estados de aceleração para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, referentes a Tabela 4.10.

sistema comporte-se como que regular fosse) são

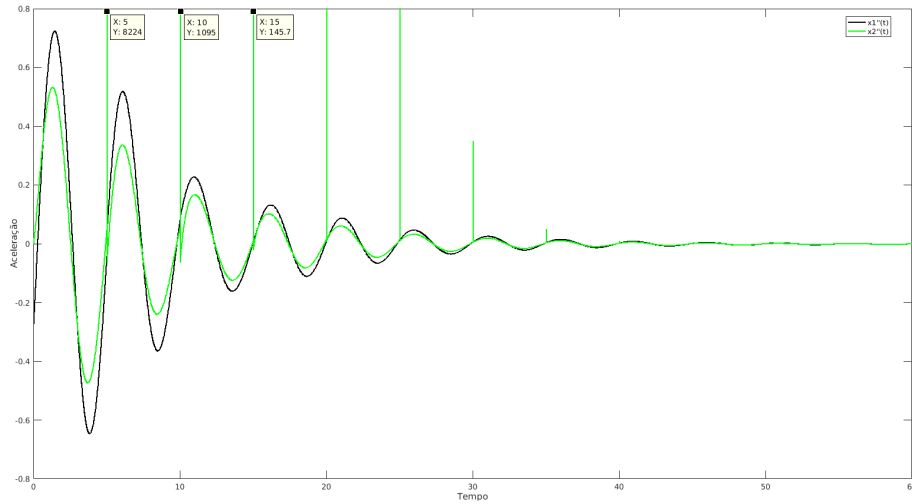
$$E = \begin{bmatrix} 0 & -0,0909 & 0,2727 & 0 \\ -0,0909 & 0 & 0,1818 & 0 \\ -0,4545 & 0 & -0,0909 & 0 \\ -0,1818 & -0,1818 & -0,0909 & 0 \end{bmatrix}$$

, como também todo o seu subespaço.

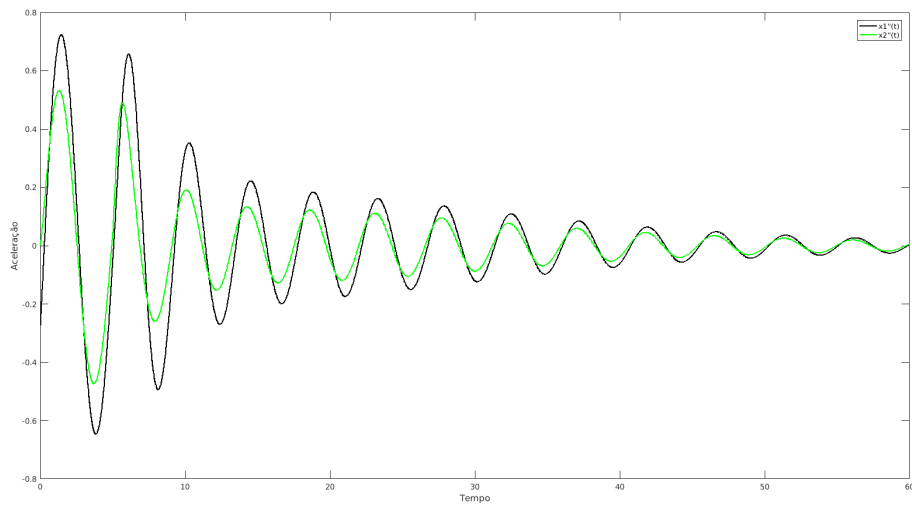
Para demonstrar a possibilidade da completa eliminação do comportamento impulsivo, segue Figura 4.22, com nova simulação deste exemplo aqui trabalhado, mas com novas condições iniciais, que sejam $\mathbf{x}(0) = [0, 18190, 091]$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = [-0,5454 - 0,4545]^7$

Assim, em análise a Figura 4.22 nota-se que com a realimentação derivativa regularizante aqui proposta, é possível eliminar a dinâmica impulsiva por completo, mesmo que diante de um sistema com atraso, garantindo-se assim os consequentes benefícios. Nota-se também que, no uso da realimentação de estados, na presença de atraso, mesmo que presentes condições iniciais consistentes, a dinâmica impulsiva não é eliminada nos sistemas de matriz massa singular.

⁷Os novos valores de $\mathbf{x}(0)$ e $\dot{\mathbf{x}}(0)$ correspondem a soma das colunas de E , para assim demonstrar que não só os valores presentes em E trazem condições iniciais consistentes, mas também todo seu subespaço.



(a) Comportamento no tempo dos dos estados de aceleração no caso de realimentação de estados CRA e valores de pico de 8224 em 5 segundos, 1095 em 10 segundos e 145,7 em 15 segundos (sem valor de pico em 0 segundo, devido as condições iniciais consistentes).



(b) Comportamento no tempo dos estados de aceleração no caso de realimentação derivativa regularizante CRA com preditor de Smith e condições iniciais consistentes, eliminando toda dinâmica impulsiva.

Figura 4.22: Gráficos dos estados de aceleração para os casos de realimentação de estados (figura a) e realimentação derivativa (figura b), ambos CRA, com ganhos presentes na Tabela 4.10 e com condições iniciais consistentes ($\mathbf{x}(0) = [0, 1819 \quad 0, 091]$ e $\dot{\mathbf{x}}(0) = [-0, 5454 \quad -0, 4545]$).

Capítulo 5

Conclusões

Ficou demonstrado neste trabalho a aplicabilidade de sistemas de segunda ordem.

Também é consenso na literatura o quanto o atraso traz dificuldades para a implementação de técnicas de controle (surgindo em alguns momentos a necessidade de análise *a posteriori* mesmo após "definido" o controle), em especial pelo surgimento de pólos secundários antes localizados no infinito.

Outro ponto demonstrado foi que sistemas de segunda ordem de matriz massa singular, possuem por consequência autovalores infinitos que são capazes de interferir na dinâmica do sistema (autovalores não secundários), causando comportamentos impulsivos que trazem degradação aos seus componentes.

Desta forma, para trazer solução aos problemas acima descritos, foi proposto neste trabalho um controle via resposta em frequência com realimentação derivativa para sistemas dinâmicos de segunda ordem, com matriz massa singular e atraso.

Em pesquisas realizadas não foram encontrados trabalhos acadêmicos dedicados ao tema (regularização de sistemas de segunda ordem com atraso).

Com a abordagem via resposta em frequência, foi alcançada uma maior facilidade para o projeto de controles em sistemas segunda ordem com atraso, já que o método proposto dispensa eventual análise *a posteriori* após a definição do controle, além de garantir certo grau de robustez.

Com relação a regularização de sistemas dinâmicos de segunda ordem com atraso, por meio da realimentação derivativa aqui proposta, foram apresentadas dificuldades iniciais na seção 3.4.1, as quais foram superadas com o uso do preditor de Smith (como proposto em Araújo e Santos (2018)) e para uma completa eliminação de qualquer dinâmica impulsiva, foi apresentado o conceito de condições iniciais consistentes na seção 3.4.2, havendo sucesso (diferentemente do que ocorreu para o caso da realimentação de estados).

Há outras propostas de interesse acadêmico que podem ser objeto de trabalhos futuros, tais como a análise comparativa entre realimentação de estado e derivativa da sensibilidade de malha fechada em relação a variações de parâmetros específicos do modelo, como em Araújo *et al.* (2016) ou mesmo o uso de realimentação derivativa para alocação parcial de polos, como em Dantas *et al.* (2021).

Referências bibliográficas

ABDELAZIZ, T. H. S. Robust pole placement for second-order linear systems using velocity-plus-acceleration feedback. *Iet Control Theory and Applications*, v. 7, p. 1843–1856, 2013.

ABDELAZIZ, T. H. S. Robust pole assignment using velocity acceleration feedback for second-order dynamical systems with singular mass matrix. *ISA Transactions*, v. 57, p. 71–84, 2015. ISSN 0019-0578. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057814002912>>.

ABDELAZIZ, T. H. S.; VALASEK, M. Pole-placement for siso linear systems by state-derivative feedback. *IEE Proceedings - Control Theory and Applications*, v. 151, p. 377–385(8), July 2004.

ARAUJO, J. M. Discussion on ‘state feedback control with time delay’. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 98, p. 368–370, 2018. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327017302492>>.

ARAÚJO, J. M.; DÓREA, C. E. T.; GONÇALVES, L. M. G. State derivative feedback in second-order linear systems: A comparative analysis of perturbed eigenvalues under coefficient variation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 76-77, p. 33–46, 2016.

ARAÚJO, J. M.; SANTOS, T. L. M. Control of a class of second-order linear vibrating systems with time-delay: Smith predictor approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 108, p. 173–187, 2018. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327018300694>>.

ASTROM, K. J.; HAGGLUND, T. *PID Controllers: theory, design, and tuning*. 2. ed. UK: ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 1995.

BHAT, S. P.; BERNSTEIN, D. S. Second-order systems with singular mass matrix and an extension of gvan reduction. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, v. 17, p. 649–657, 1996.

CHU, E. K.; DATTA, B. N. Numerically robust pole assignment for second-order systems. *International Journal of Control*, Taylor Francis, v. 64, n. 6, p. 1113–1127, 1996. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00207179608921677>>.

COMPTON, J. Data Quality: The Risks Of Dirty Data And AI. *Forbes Magazine*, 2019. Disponível em: <<https://www.forbes.com/sites/intelai/2019/03/27/the-risks-of>>.

dirty-data-and- ai/?sh=22bc2922dc77>.

DANTAS, N. J. B. Projeto de Controladores para Sistemas de Segunda Ordem com Atraso via Resposta em Frequência. Dissertação (Mestrado) — Mestrado em Engenharia Mecatrônica, UFRN, Natal, RN, 2019.

DANTAS, N. J. B.; DÓREA, C. E. T.; ARAÚJO, J. M. Design of rank-one modification feedback controllers for second-order systems with timedelay using frequency response methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 137, p. 106404, 2020. ISSN 0888-3270.

DANTAS, N. J. B.; DÓREA, C. E. T.; ARAÚJO, J. M. Partial pole assignment using rank-one control and receptance in second-order systems with time delay. *Meccanica*, v. 56, p. 287–302, 2021.

DATTA, B. *Numerical Methods for Linear Control Systems*. [S.l.]: Academic Press, 2003. ISBN 0-12-203590-9.

DEMING, W. *Qualidade: a revolução da administração*. Rio de Janeiro: Saraiva, 1990.

FARIA, F. A.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. Realimentação da derivada dos estados em sistemas multivariáveis lineares usando lmis. *Sba: Controle Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, v. 20, p. 83–93, 2009. ISSN 0888-3270. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/11449/9761>>.

GOHBERG, I.; LANCASTER, P.; RODMAN, L. *Matrix polynomials*. Academic Press, New York, 1982.

KAWANO, D. T.; MORZFELD, M.; MA, F. The decoupling of second-order linear systems with a singular mass matrix. *Journal of Sound and Vibration*, v. 332, p. 6829–6846, 2013. ISSN 0022-460X.

LANCASTER, P. *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*. Oxford: Pergamon, 1966. ISBN 978-0-08-011664-8.

MATHWORKS. Genetic Algorithm - MATLAB Simulink. 2019. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm.html>>.

NISE, N. S. *Engenharia De Sistemas De Controle*. 7. ed. [S.l.]: LTC, 2018. ISBN 9788521621355.

NUNES, L. A.; DANTAS, N. J. B.; DÓREA, C. E. T.; ARAÚJO, J.M. Controle por realimentação derivativa de estado de sistemas dinâmicos de segunda ordem com atraso. In: XV Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente. Porto Alegre-RS (evento online): 2021. p. 1380–1385.

OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, 2009.

RAM, Y. M.; MOTTERSHEAD, J. E. Receptance method in active vibration control.

AIAA journal, v. 45, p. 562–567, march 2007.

RAM, Y. M.; MOTTERSHEAD, J. E.; TEHRANI, M. G. Partial pole placement with time delay in structures using the receptance and the system matrices. *Linear Algebra and its Applications*, v. 434, n. 7, p. 1689–1696, 2011. ISSN 0024-3795.

RAM, Y. M.; SINGH, A.; MOTTERSHEAD, J. E. State feedback control with time delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, n. 6, p. 1940–1945, 2009. ISSN 0888-3270.

REGO, E. J. C.; DOREA, C. E. T.; MAITELLI, A. L. Ressintonia automática de controladores pi embarcados em clp, baseada em estimativa de robustez. *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente*, n. 7, p. 1733 – 1738, 2017.

SANTOS, T. L. M.; ARAÚJO, J. M.; FRANKLIN, T. S. Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 110, p. 428–441, 2018. ISSN 0888-3270.

SUESS, S. R.; PEREIRA, C. E.; FETTER, L. W.; GOEDTEL, A. A proposal to overcome constraints of ip networks in applications of closed loop control. *Revista IEEE América Latina*, v. 9, p. 975–981, 2011. ISSN 1548-0992.

TISSEUR, F.; MEERBERGEN, K. The quadratic eigenvalue problem. *SIAM Rev.*, v. 43, n. 2, p. 235–286, 2001. Disponível em: <<http://eprints.ma.man.ac.uk/466/1/38198.pdf>>.

WONHAM, W. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 12, n. 6, p. 660–665, 1967.