

# Controle PID de Vibrações em Sistemas de Segunda Ordem com Atraso Usando Receptância com Estabilidade Robusta e Otimização de Desempenho

Autor: Jhonat Heberon Avelino de Souza <sup>1</sup>

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea <sup>2</sup>

Coorientador: Prof. Dr. José Mário Araújo <sup>3</sup>

<sup>1</sup>[jhonatheberson@gmail.com](mailto:jhonatheberson@gmail.com)

<sup>2</sup>[cetdorea@dca.ufrn.br](mailto:cetdorea@dca.ufrn.br)

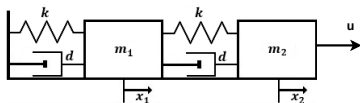
<sup>3</sup>[prof.jomario@gmail.com](mailto:prof.jomario@gmail.com)

Programa de Pós em Engenharia de Mecatronica – PPGEMECA – UFRN

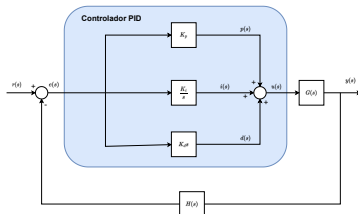
# Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentação Teórica
- 3 Definição do Problema
- 4 Metodologia
- 5 Experimentos
- 6 Resultados
- 7 Conclusões

Figura 1: Sistema de Segunda ordem, e Controlador PID



(a) Sistema massa e mola



(b) Controlador PID

Fonte: o autor (2023)

# Introdução - Trabalhos anteriores do grupo

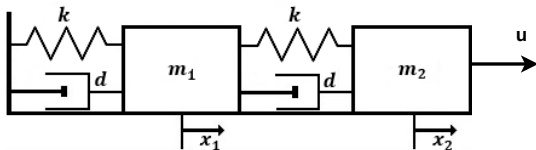
- Problema com realimentação de estado (DANTAS, 2019)  
 $u(t) = f^T \dot{x}(t) + g^T x(t)$
- Alocação parcial de polos (DANTAS, 2019)
- Monovariável (DANTAS, 2019)
- Sistemas estáveis em malha aberta (DANTAS, 2019)
- Problema com realimentação derivativa (NUNES et al, 2021)  
 $u(t) = f^T \ddot{x}(t) + g^T \dot{x}(t)$

Contribuímos com utilização do controlador Proporcional e Integrativo Derivativo (PID) com realimentação de saída para rastreamento e considerar sistemas estáveis e **instáveis** em malha aberta, otimizando índice *IAE* e robustez de forma **concorrente**.

# Introdução - Objetivos

- Estudo de sistemas de segunda ordem com atraso.
- Propor uma solução para um problema de controle para um sistema de segunda ordem com atraso
- Controlador Proporcional Integrativo e Derivativo (PID).
- Definir o problema de controle nos termos da resposta em frequência usando Receptância
- Critério de estabilidade de *Nyquist* para definir a função as regras de otimização.
- Otimização do controlador com base no índice de *IAE*, concorrente ao critério de robustez.
- Aprimorar algoritmo heurístico de otimização (GA) para encontrar os ganhos do controlador PID que atenda os critérios estabelecidos.
- Publicação do artigo no SBAI

Figura 2: Sistema massa e mola



Fonte: DANTAS (2019)

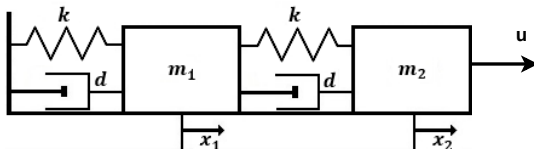
## Equação do sistema

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + d(2\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k(2x_1(t) - x_2(t)) = 0 \quad (1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + d(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k(x_2(t) - x_1(t)) = u \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3)$$

Figura 3: Sistema massa e mola



Fonte: DANTAS (2019)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t) \quad (4)$$

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade e  $m$  entradas, têm-se  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é uma matriz de massas,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de amortecimento,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de rigidez,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz de controle,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de deslocamento e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de entradas Single Input Single Output (SISO)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t) \quad (5)$$

Aplicando agora a transformada de Laplace a (5) obtém-se:

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{b}\mathbf{U}(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s), \quad (6)$$

A saída do sistema definida como:

$$y(t) = \mathbf{l}\mathbf{x}(t) \quad (7)$$

em que  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  é uma matriz de composição de sensores.

Para uma dada referência  $r(t)$ , o erro de rastreamento é definido por:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (8)$$

$$u(t) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (9)$$



# Fundamentação Teórica - Matriz de receptância

Aplicando a transformada de Laplace em (7), (8) e (9) obtém-se:

$$U(s) = -\left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right)e^{-\tau s} \mathbf{I} \mathbf{X}(s) + V(s), \quad (10)$$

em que  $q(s) = \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right)$  e  $V(s) = q(s)R(s)$ .

Da substituição de (10) em (5) resulta:

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s} q(s) \mathbf{b} \mathbf{l}] \mathbf{X}(s) = \mathbf{b} V(s). \quad (11)$$

Logo,

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s} q(s) \mathbf{b} \mathbf{l}]^{-1} \mathbf{b} V(s) = \hat{\mathbf{H}}(s) \mathbf{V}(s) \quad (12)$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \quad (13)$$

Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* na inversa presente em (12), obtém-se a matriz de receptância de malha fechada do sistema, dada por:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}\mathbf{I}\mathbf{H}(s)e^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{I}\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s}} \quad (14)$$

na qual  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + q(s)\mathbf{b}\mathbf{I})^{-1}\mathbf{b}$  é definida como matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{b}$  como matriz de receptância de malha aberta, que, na prática, pode ser medida pela resposta em frequência  $\mathbf{H}(j\omega)$ .

A equação característica de (14) é definida como:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{I}\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s} = 0 \quad (15)$$

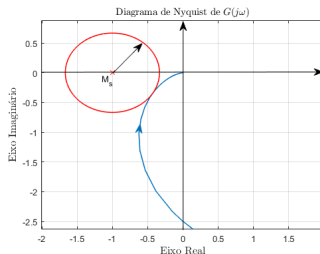
# Resposta em frequência

- A matriz de receptância nos fornece a resposta em frequência  $H(j\omega)$  do sistema
- O ganho de malha da equação característica em malha fechada é descrito na Equação 16.

$$L(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{IH}(s) \mathbf{b} e^{-\tau s} \quad (16)$$

# Definição do Problema - Estabilidade

Figura 4: Diagrama de Nyquist Exemplo de Circunferência.  $M_s$



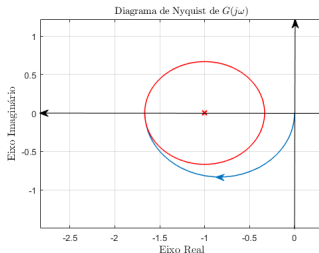
Fonte: DANTAS (2019)

## Restrições de estabilidade

- Podemos afirmar pelo critério de estabilidade de Nyquist que a circunferência  $M_s$  representa quanto robusto é o sistema
- $M_s$  é a menor distância entre o ponto  $(-1, 0)$  e a curva de Nyquist

# Definição do Problema - Instabilidade

**Figura 5:** Diagrama de Nyquist de um Sistema Genérico para Exemplo de um Caso de Instabilidade.



Fonte: DANTAS (2019)

## Restrições de instabilidade

- Garantir que a curva de Nyquist não contenha a circunferência a englobando
- Enlaçar o ponto  $(-1, 0)$ , se evidencia um caso de instabilidade

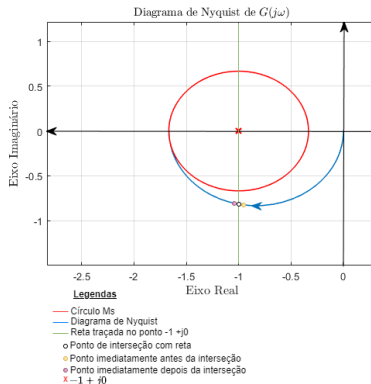
# Definição do Problema - Instabilidade

$$N = -P \quad (17)$$

- Neste trabalho também aplicaremos os métodos testado para sistema de controle estáveis para sistemas instáveis
- Quando temos um sistema instável significa que temos raízes no SPD
- $P$  o número de polos de malha aberta no semiplano direito
- $N$  o número de voltas que o diagrama de *Nyquist* faz em torno do ponto crítico  $-1 + j0$  no sentido horário.
- O diagrama de *Nyquist* deve dar tantas voltas no sentido anti-horário em torno de  $-1 + j0$  quanto seja o número de polos de malha aberta no semiplano direito.

# Definição do Problema - Instabilidade

**Figura 6:** Exemplificação da contagem de voltas que contem o ponto  $-1 + j0$  e o sentido do diagrama de *Nyquist*



Fonte: o autor (2023)

# Definição do Problema - Funções de otimização

seguinte problema de otimização pode ser formulado semelhante ao proposto em (DANTAS, 2019):

$$\min_{k_p, k_i, k_d} = \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \quad (18)$$

$$\text{s.a } \operatorname{Re}\{L(j\omega)\} \geq -1 + M_s^{-1} \quad \forall \quad \omega / \operatorname{Im}\{L(j\omega)\} = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \\ N &= -P \end{aligned} \quad (20)$$



# Definição do Problema - Funções de otimização

$$\min_{k_p, k_i, k_d} = \int_0^t |e(t)| dt \quad (21)$$

$$s.a \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \leq \epsilon \quad (22)$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \left( k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \\ N &= -P \end{aligned} \quad (23)$$

# Definição do Problema - Funções de otimização

$$\min_{k_p, k_i, k_d} (1 - \alpha) * \int_0^t |e(t)| dt + \alpha \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \quad \forall \quad \alpha \in \{0, 1\} \quad (24)$$

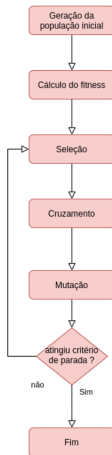
$$s.a \quad \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \leq \epsilon \quad (25)$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \left( k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \\ N &= -P \end{aligned} \quad (26)$$

## Busca dos ganhos do controlador

- Uso de meta-heurística para encontrar os ganhos
- Algoritmo Genético
- Resolve de forma genérica problemas de otimização
- Geralmente aplicadas a problemas para os quais não se conhece algoritmo eficiente

Figura 7: Fluxograma do algoritmo genético



Fonte: o autor (2023)

Figura 8: Pseudo código do algoritmo de busca

---

**Algoritmo 1:** Função de Busca

---

**Entrada:**  $M, C, K, B, I, t, \omega, M_s$  e *simulink*

**Saída:**  $gain = [K_p \ K_I \ K_d]$

```
1 populacao = random(n);
2 objetivo = "execute";
3 execucao = 0;
4 variabilidade = 1;
5 evolucacao = 0;
6 alfa = random(0,1);
7 n = 100;
8 repita
9   para geracao=1 até geracao=n faça
10     avaliacao = []
11     se execucao > 0 então
12       populacao(2:n,:) = random(n-1);
13     fim
14     para i = 1 até populacao=n faça
15       L ← LFunction(M, C, K, B, I, t, ω, populacao(i, 1:3));
16       robustez ← RobustezFunction(L(s), Ms);
17       restrictions ← RestrictionsFunction(L(s), 0);
18       IAE ← IaeFunction(populacao, simulink);
19       ff ← FitnessFunction(IAE, robustez, alfa);
20       avaliacao(i,1:end) = [ff, restrictions];
21       i = i + 1;
22     fim
23     populacao = [populacao avaliacao];
24     populacao ← AssortmentFunction(populacao);
25     populacao ← CrossOverFunction(populacao(1:n,1:end-2));
26     L ← LFunction(M, C, K, B, I, t, ω, populacao(1, 1:3));
27     robustez ← RobustezFunction(L(s), Ms);
28     restrictions ← RestrictionsFunction(L(s), 0);
29     IAE ← IaeFunction(populacao, simulink);
30     ff ← FitnessFunction(IAE, robustez, alfa);
31     se (ff < 0.4 && restrictions < 0.9) || (execucao >
32       2 && Restrictions < 0.9) então
33       objetivo = "fim";
34       melhorIndividuo = populacao(i,:);
35       interromper;
36     fim
37     VariabilidadeFunction(variabilidade, evolucacao, ff);
38     geracao = geracao + 1;
39   fim
40 execucao = execucao + 1;
41 até (objetivo ≠ "fim");
```

---

Fonte: o autor (2023)

Figura 9: Pseudo código da função L

---

**Algoritmo 3: Função L**

---

**Entrada:** M; C; K; B; I;  $\tau$ ;  $\omega$  e populacao

**Saída:** L

```
1 Kp = populacao(1);
2 Ki = populacao(2);
3 Kd = populacao(3);
4 para i = 1 até i = comprimento( $\omega$ ) faça
5    $\beta = j \times \omega(i)$ ;
6    $L(i) = (Kp + Ki/\beta + 0.0001) + \beta \times Kd) \times I \times (M \times \beta^2 + C \times \beta + K)^{-1} \times B \times e^{-\tau \times \beta}$ ;
7   i = i + 1;
8 fim
```

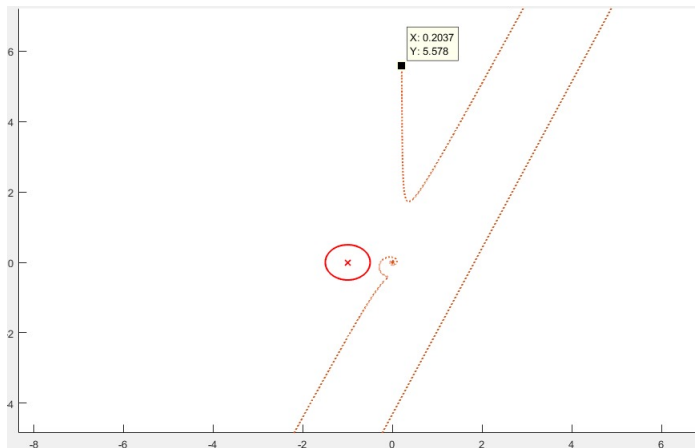
---

Fonte: o autor (2023)

## Nyquist infinito

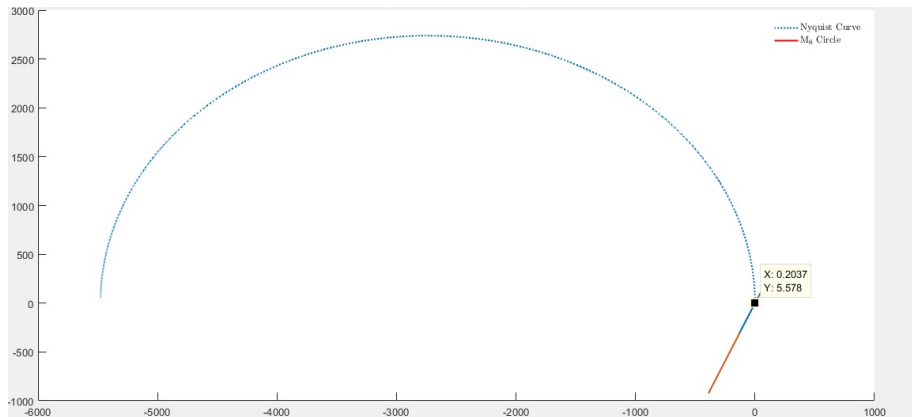
- Perturbação na ação integrativa
- Evita valores infinitos para cálculo do diagrama de Nyquist

Figura 10: Diagrama de *Nyquist* para  $\omega \in [10^{-1}, 10^3]$



Fonte: o autor (2023)

Figura 11: Diagrama de *Nyquist* para  $\omega \in [10^{-6}, 10^3]$



Fonte: o autor (2023)



Figura 12: Pseudo código da função de variabilidade

---

**Algoritmo 8:** Função de Variabilidade

---

```
Entrada: variabilidade, evolucao, e ff
1 evolucao(variabilidade) = ff;
2 variabilidade = variabilidade + 1;
3 se tamanho(evolucao) > 10 então
4     variabilidade = 1;
5     evolucao = evolucao(2:end);
6     se var(evaluation) < 0.0000001 então
7         objetivo = "fim";
8         melhorIndividuo = populacao(1,:);
9         interromper;
10    fim
11 fim
```

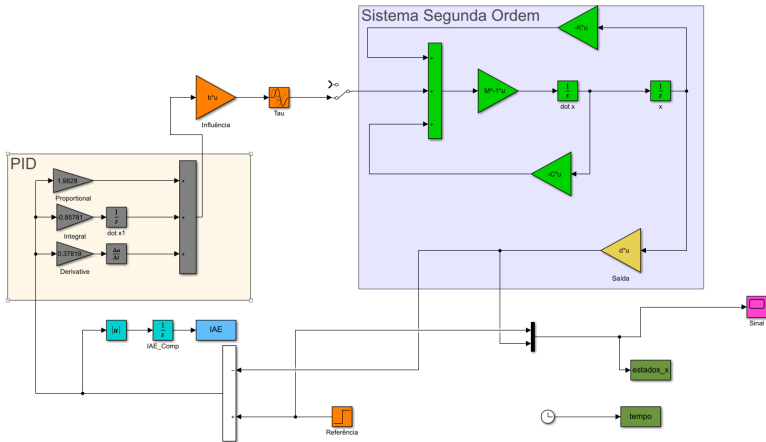
---

Fonte: o autor (2023)

## Verificação de variabilidade genética

- Análise de melhoria da população com base na interação do algoritmo

Figura 13: Simulação criada com MATLAB/Simulink®



Fonte: o autor (2023)

## Experimentos - Exemplo 2

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0,9999 \\ -0,9999 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Considerando o método apresentado em RAM et al. (2011), vamos utilizar como exemplo prático uma matriz de entradas  $\mathbf{B}' = \mathbf{I}' = [0 \ 1]$  e uma constante de atraso  $\tau = 5\text{s}$ .

Novamente a busca pela solução do problema descrito pela equação 24 é realizada para o círculo  $M_s = 1,6667$ .

## Resultados da Otimização - Exemplo 2

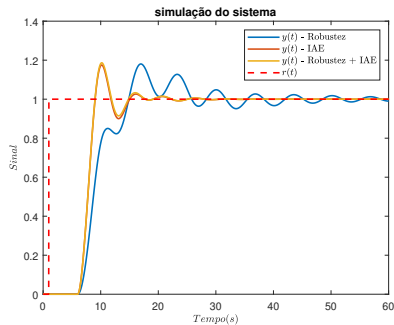
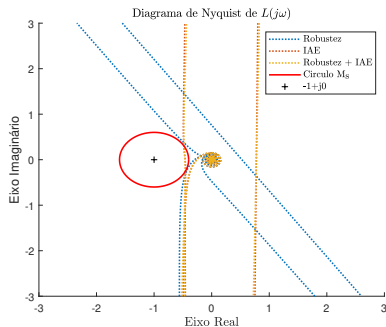
No caso do exemplo 2, por se tratar de um sistema mais complexo e, teoricamente, com maior dificuldade na sintonia dos ganhos do controlador, esses ganhos estão apresentados na Tabela 1,

**Tabela 1:** Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 2

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$
Robustez + IAE	0,5145	0,2578	0,4004	7,3408
Robustez	0,1773	0,2229	0,4432	10,0418

# Resultados da Otimização - Exemplo 2

Figura 14: Resultado exemplo 2



(a) Comparação do diagrama de *Nyquist* do Exemplo 2

(b) Comparação da simulação do Sistema do Exemplo 2

Fonte: o autor (2023)

## Experimentos - Exemplo 3

Neste caso específico, foi feita uma pequena modificação do exemplo 2, com o objetivo de introduzir uma perturbação no modelo.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para uma matriz de entradas  $\mathbf{B}' = \mathbf{I}' = [0 \ 1]$ , e uma constante de atraso  $\tau = 0,5$ .

# Resultados da Otimização - Exemplo 3

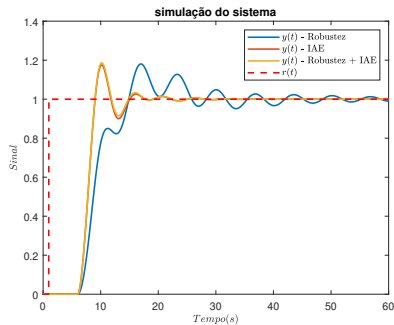
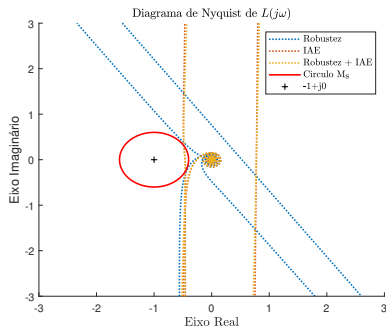
No exemplo 3, os ganhos e índices são evidenciados na Tabela 2.

Tabela 2: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 3

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$
Robustez + IAE	0,4373	0,7548	1,8163	2,4390
Robustez	0,2399	1,0990	1,6015	6,4692

# Resultados da Otimização - Exemplo 3

Figura 15: Resultado exemplo 3



(a) Comparação do diagrama de *Nyquist* do Exemplo 3

(b) Comparação da simulação do Sistema do Exemplo 3

Fonte: o autor (2023)



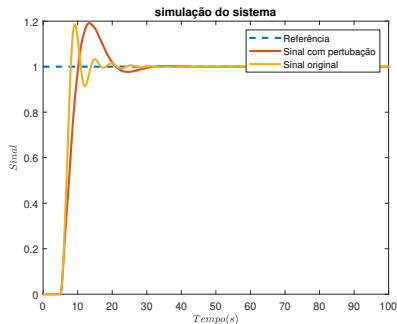
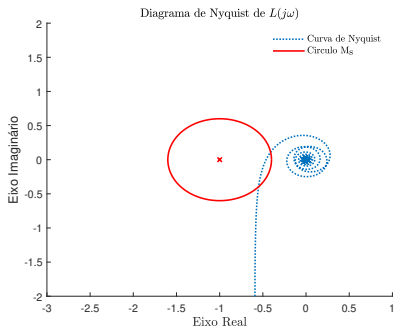
## Resultados da perturbação no sistema - Exemplo 3

Simularemos uma perturbação do modelo, com objetivo de verificar quão os sistemas são robustos para o método proposto neste trabalho.

Para realizar a simulação da perturbação, analisaremos o sistema do exemplo 2, com ganhos obtidos da simulação para este exemplo, executaremos a simulação do exemplo 3, o qual representa uma perturbação no modelo, devido à variação da Matriz **C**, de um exemplo para outro.

# Resultados da perturbação no sistema - Exemplo 3

Figura 16: Resultado otimizando concorrência entre  $IAE$  e robustez



(a) Diagrama de *Nyquist* com perturbação no sistema      (b) Simulação do Sistema com perturbação no sistema

Fonte: o autor (2023)

## Experimentos - Exemplo 5

Este exemplo, adaptado de SHAPIRO (2005), aborda um caso instável em malha aberta, cujas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

com  $\mathbf{b}^T = [-1 \ 1]$  e  $\mathbf{l} = [1 \ 0]$  além de um atraso  $\tau = 0.5s$ . Para garantia de margens, é dado  $M_s = 1,6667$ . Neste sistema dois polos de malha aberta localizam-se no semiplano direito,  $s_{1,2} = 0,0039 \pm j0,9$ . Da mesma forma que nos exemplos anteriores, projetam-se controladores PID conforme o método proposto, e considerando-se apenas o critério de robustez para fins de comparação.

## Resultados da Otimização - Exemplo 5

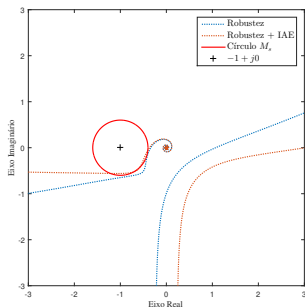
A Tabela 3 permite a comparação dos controladores projetados, e é possível notar um desempenho melhorado em relação ao *IAE* com a aplicação do método proposto. A estabilidade em malha fechada pode ser verificada no diagrama de *Nyquist* completo ( $\omega \in \mathbb{R}$ ) com visão expandida, onde são constatados os dois envoltimentos requeridos do ponto crítico  $-1 + j0$ .

Tabela 3: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5

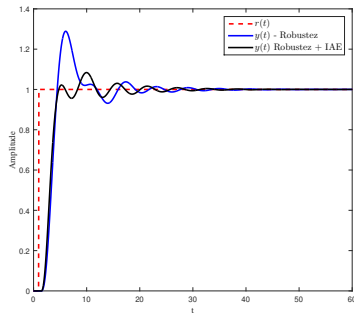
Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	<i>IAE</i>
Robustez + <i>IAE</i>	-4,4787	-3,3738	-11,1194	2,6374
Robustez	-2,1975	-4,3664	-10,8658	3,5080

# Resultados da Otimização - Exemplo 5

Figura 17: Resultado exemplo 5



(a) Comparação do diagrama de *Nyquist* do Exemplo 5



(b) Comparação da simulação do Sistema do Exemplo 5

Fonte: o autor (2023)

- PID com realimentação de saída para rastreamento.
- Estudo da eficiência para essa técnica utilizando controlador PID.
- Avaliação do critério de estabilidade de *Nyquist*.
- Avaliação do robustez do sistema como parametro de busca.
- Avaliação do índice *IAE* como parametro de busca.
- Estudo da concorrência entre a robustez do sistema e índice *IAE*.
- Avaliação da função *Fitness* desenvolvida que considera concorrência entre os parâmetros de busca.
- Trabalhos futuros: Verificar eficiência de outro algoritmo heurístico (PSO).

Obrigado!