

---

# <sup>221</sup> Capítulo 2

---

## <sup>222</sup> Teoria

---

### <sup>223</sup> 2.1 Sistemas de Segunda Ordem

<sup>224</sup> Diferentes tipos de sistemas, como os sistemas vibratórios mecânicos, são classifi-  
<sup>225</sup> cados como sistemas de segunda ordem. Esses sistemas são descritos por essas equa-  
<sup>226</sup> ções, que retratam o comportamento dinâmico do sistema. ~~(ARAÚJO 2018, SANTOS  
et al. 2018) discutem os modelos utilizados para esses sistemas indicam sua importância~~  
<sup>227</sup> ~~Esse~~ Esses modelos são usados para sistemas que possuem  $n$  equações diferenciais, uma para  
<sup>228</sup> cada ~~movimento livre do~~ sistema (DANTAS et al. 2020).

Nos trabalhos de ARAÚJO (2018) e de SANTOS et al (2018), são discutidos tais modelos, com destaque para sua importância.

...grau de liberdade do

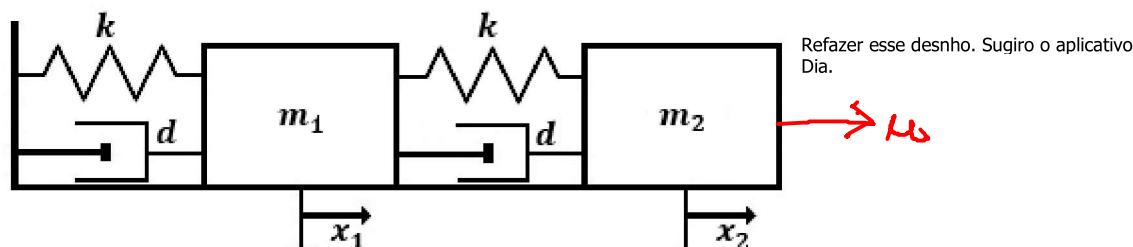


Figura 2.1: Sistema Massa-Mola-Amortecedor

Fonte: Imagem extraída de (DANTAS 2019)

<sup>230</sup> O sistema mostrado na Figura 2.1 pode ser modelado usando equações diferenciais,  
<sup>231</sup> conforme mostrado na Equação 2.1 e 2.2, segundo as leis clássicas da mecânica de New-  
<sup>232</sup> ton.

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + d(2\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k(2x_1(t) - x_2(t)) = 0 \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + d(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k(x_2(t) - x_1(t)) = u \quad (2.2)$$

sendo

<sup>233</sup> ~~Sendo  $u$  sendo a entrada do sistema,  $m_1$  e  $m_2$  sendo as massas dos blocos,  $k$  sendo o~~  
<sup>234</sup> ~~coeficiente de rigidez das molas,  $d$  sendo o coeficiente de amortecimento,  $x_1$  e  $x_2$  sendo os~~  
<sup>235</sup> ~~deslocamentos dos blocos e  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_1$  e  $\ddot{x}_2$  sendo respectivamente suas derivadas primeira~~  
<sup>236</sup> ~~e segunda, que representam as velocidades dos blocos e suas acelerações.~~

Sugestão

...sendo  $u$  uma força externa manipulável (entrada);  $m_1$  e  $m_2$  as massas dos blocos;  $k$  o coeficiente de rigidez das molas;  $d$  o coeficiente de amortecimento dos dashpots;  $x_1$  e  $x_2$  os deslocamentos dos blocos; e  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_1$  e  $\ddot{x}_2$  respectivamente as velocidades e as acelerações dos blocos.

237 Em forma matricial as equações 2.1 e 2.2 podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3)$$

238 Enquanto de forma simplificada:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.4)$$

239 sendo:

Para um sistema com  $n$  graus de liberdade e  $m$  entradas, têm-se

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

240 Onde  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , é uma matriz de massas,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de amortecimento, 241  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é uma matriz de rigidez,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é uma matriz de controle,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  é o vetor 242 de deslocamento e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de entradas.

### 2.1.1 Representação de Primeira Ordem

244 A Equação 2.4 representa o sistema de segunda ordem em sua forma original. Outra 245 maneira de interpretar o sistema descrito em 2.4 é usar representações de primeira ordem, 246 como espaço de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ .

Definindo  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_1$  e  $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_2$ , podemos escrever o sistema de segunda ordem da equação 2.4 como:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.6)$$

247 na forma de matrizes:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

248 ou de maneira abreviada:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

249 com:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

250 Essa representação é chamada de representação de primeira ordem padrão, enquanto 251 outras formas de representações do sistema de segunda ordem são generalizadas pelos 252 escritores como forma do sistema descriptor (DATTA 2004). Na literatura de controle, 253 como destacado por (OGATA 2009), esta representação é tratada como uma representação 254 de um sistema de equações diferenciais no espaço de estados, amplamente reconhecida 255 na engenharia.

Melhorar essa redação!

256 A motivação para a obtenção de um modelo de primeira ordem está na equação com 257 uma solução mais simples do que a equação de segunda ordem. No entanto, algumas

258 dificuldades numéricas surgem ao lidar com o sistema expresso dessa forma.

259 A primeira facilidade é que o número de equações no sistema, obtido a partir da análise  
 260 da fórmula 2.7, pode-se saber que para obter a matriz  $\mathbf{A}$ , a matriz  $\mathbf{M}$  deve ser possível obter  
 261 a inversa, também se a matriz  $\mathbf{M}$  não for bem condicionada, a sua inversa, então a matriz  
 262  $\mathbf{A}$  não seja calculada com precisão. Outro fato importante é as propriedades disponíveis  
 263 das matrizes de coeficientes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$ , como simetria, qual em problemas de grande  
 264 escala são informações importantes para representação em segunda ordem na Equação  
 265 2.7.

Ininteligível.

### 266 2.1.2 O Método da Receptância

267 O problema é encontrar um conjunto de ganhos de controlador Proporcional Integral  
 268 Derivativo (PID) que satisfaça o conjunto de autovalores desejados. O problema para en-  
 269 contrar esses ganhos solucionado em (MOTTERSHEAD e RAM 2007), para o controle  
 270 ativo de vibrações, chamado de Método da Receptância, baseado em medições, que uti-  
 271 liza as matrizes de massa, rigidez e amortecimento, obtidas pelo método dos elementos  
 272 finitos. Por ser um método baseado unicamente em dados medidos de vibrações, não há  
 273 necessidade de se determinar, ou conhecer, essas matrizes (TEHRANI et al. 2010).

274 A Determinação da Matriz Rigidez ( $\mathbf{K}$ ) e de massas ( $\mathbf{M}$ ) são menos desafiadoras por-  
 275 que de acordo com (MOTTERSHEAD e RAM 2007) os elementos finitos dessas matrizes  
 276 podem ser facilmente determinados, usando métodos variacionais. No entanto, essa pra-  
 277 ticidade funciona com matriz de amortecimento ( $\mathbf{C}$ ). Em algumas bibliografias o espaço  
 278 de estados e os elementos da matriz de amortecimento são definidos como padrões físicos  
 279 confiáveis. As vibrações levemente amortecidas podem ser aceitáveis como medida de  
 280 estudos de controle ativo do modelo de amortecimento (NUNES 2022).

Cabe aqui falar ligeiramente sobre  
 a regra de Rayleigh para a matriz de  
 amortecimento:  $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$

### 281 2.1.3 A Matriz de Receptância

Considerando o controle de um sistema de segunda ordem por realimentação de estados definido por

Aqui melhor usar b como vetor (minúsculo)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t) \quad (2.9)$$

$$u(t) = k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt} \quad (2.10)$$

282 Aqui caiu tudo de paraquedas: não se  
 definiu quem é o erro, quem é a saída,  
 absolutamente quase tudo que é importante  
 para desenvolver 2.13.  
 Sugiro ainda introduzir I ao invés de d para a matriz  
 de sensores (saída):  
 $y = \mathbf{I}\mathbf{x}$   
 283 em que  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}, \mathbf{B}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $k_p, k_i, k_d \in \mathbb{R}^n$ ;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ ;  
 $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} > 0$ ,  $\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \geq 0$  e  $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \geq 0$  para qualquer  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Substituindo 2.10 em 2.9, assumindo  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{ze}^{st}$ , sendo  $\mathbf{z}$  um vetor constante e  $s$  a variável de Laplace, solução do sistema, tem-se:

$$(\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K} - B(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

$$(\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K} - Bq(s)d) = \mathbf{0}$$

284 é possível perceber que  $q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$  perceber que as componentes de malha

<sup>285</sup> fechada de rigidez e amortecimento são modificadas pela matriz de posto-1, consequência  
<sup>286</sup> da realimentação de estados.

<sup>287</sup> **A Fórmula de Sherman-Morrison**

<sup>288</sup> A fórmula de *Sherman-Morrison* fornece a inversa de uma matriz com modificação  
<sup>289</sup> de posto-1 em termos da inversa da matriz original, e como visto em (VAN LOAN e  
<sup>290</sup> GOLUB 1983) e (GOLUB e VAN LOAN 2012) ela estabelece que, para uma dada matriz  
<sup>291</sup>  $\mathbf{A} \in \Re^{n \times n}$  quadrada e inversível e vetores colunas  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v} \in \Re^n$ :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \quad (2.12)$$

<sup>292</sup> Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* em 2.11 com  $\mathbf{A} = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{B}$   
<sup>293</sup> e  $\mathbf{v} = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$ , temos:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)B}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)B} \quad (2.13)$$

<sup>294</sup> na qual  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + bd(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s))^{-1}$  é definida em (RAM et al. 2009)  
<sup>295</sup> como matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}$  como matriz de  
<sup>296</sup> receptância de malha aberta, que, na prática, pode ser medida pela resposta em frequência  
<sup>297</sup>  $\mathbf{H}(j\omega)$ .

<sup>298</sup> A equação característica de 2.13 é definida como:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)B = 0 \quad (2.14)$$

<sup>299</sup> e em (MOTTERSHEAD e RAM 2007) a equação 2.14 é resolvida sendo reescrita da  
<sup>300</sup> seguinte forma:

$$(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)B = 1$$

<sup>301</sup> **2.1.4 Sistema com Atraso**

<sup>302</sup> Quando existe um atraso no tempo entre o estado medido e a ação de controle do  
<sup>303</sup> atuador podemos representar a lei de ação de controle da seguinte maneira:

$$u(t - \tau) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (2.15)$$

<sup>304</sup> sendo  $k_p, k_i$  e  $k_d \in \Re^n$  e são vetores de ganho do sistema, desta forma, um sistema de  
<sup>305</sup> controle de segunda ordem, como o da Figura 2.1, descrito pelo sistema de equações 2.4,  
<sup>306</sup> com matrizes de massa  $\mathbf{M} \in \Re^{n \times n}$ , amortecimento  $\mathbf{C} \in \Re^n$  e elasticidade  $\mathbf{K} \in \Re^n$  pode  
<sup>307</sup> ser escrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{B}u(t - \tau) \quad (2.16)$$

Aplicando-se os procedimentos da seção anterior, para obtenção da matriz de receptância do sistema de segunda ordem com atraso descrito pela equação 2.16, com  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{ze}^{st}$ , sendo  $\mathbf{z}$  um vetor constante e  $s$  a variável de *Laplace*, solução do sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} (\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K} - Bd(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)e^{-\tau s}) &= \mathbf{0} \\ (\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K} + e^{-\tau s}q(s)Bd)^{-1} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.17)$$

<sup>308</sup> e aplicando-se a fórmula de *Sherman-Morrison* como em 2.11

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)Be^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)Be^{-\tau s}} \quad (2.18)$$

<sup>309</sup> sendo novamente,  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K} + bd(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)e^{-\tau s})^{-1}$  é definida como  
<sup>310</sup> matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{Ms}^2 + \mathbf{Cs} + \mathbf{K})^{-1}$  como matriz de  
<sup>311</sup> receptância de malha aberta. A presença do atraso na equação 2.18 não modifica a possi-  
<sup>312</sup>bilidade da obtenção de  $\mathbf{H}(s)$  por sua resposta em frequência, uma das motivações para o  
<sup>313</sup>desenvolvimento deste trabalho.

A equação característica da matriz de receptância de 2.18 é dada por:

$$\begin{aligned} 1 - (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)Be^{-\tau s} &= 0 \\ \cancel{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)d\mathbf{H}(s)B} - e^{-\tau s} &\cancel{=} \end{aligned} \quad (2.19)$$

## <sup>314</sup> 2.2 Resposta em Frequência

<sup>315</sup> Na literatura clássica de controle, como em (OGATA 2009), o termo resposta A  
<sup>316</sup>frequência é definida como a resposta de estado estacionário do sistema à entrada senoi-  
<sup>317</sup>dal, o que significa que experimentalmente, o sistema é excitado com uma onda senoidal  
<sup>318</sup>entrada e observe o comportamento da saída. Trabalho realizado em resposta a frequên-  
<sup>319</sup>cia é muitas vezes motivada pelo bom desempenho em lidar com a incerteza nos modelos  
<sup>320</sup>das plantas para facilitar o uso de informações experimentais, desenhar metas e ações na  
<sup>321</sup>presença de atrasos no transporte (FRANKLIN et al. 2013).

### <sup>322</sup> 2.2.1 O Diagrama Polar, ou Diagrama de Nyquist

<sup>323</sup> A representação gráfica escolhida para o desenvolvimento deste trabalho é Nyquist,  
<sup>324</sup>também conhecido como diagrama polar. Gráfico polar de uma função de transferência  
<sup>325</sup>senoidal  $G(j\omega)$  é a magnitude de  $G(j\omega)$  e o angulo de fase de  $G(j\omega)$  em coordenadas  
<sup>326</sup>polares, onde  $\omega$  varia de zero a infinito de acordo com literatura base do (Ogata 2009).  
<sup>327</sup> Um exemplo de gráfico de Nyquist para um sistema típico de segunda ordem é mostrado  
<sup>328</sup>na equação 2.20 é mostrada na Figura 2.2.

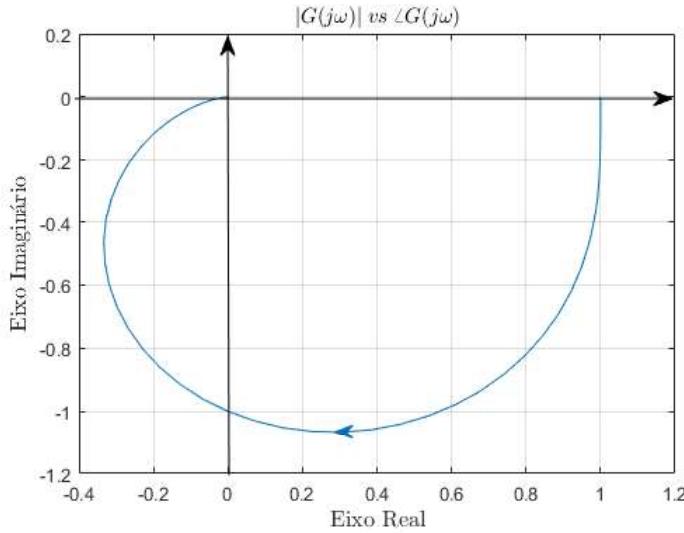


Figura 2.2: Exemplo de Diagrama de Nyquist para Sistema modelado por  $G(s)$

Fonte: (DANTAS 2019)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (2.20)$$

329 Outra maneira de interpretar um gráfico de Nyquist é pela parametrização por frequê-  
 330 ncia  $\omega$  de  $G(j\omega)$ , que mostra que esta representação tem alguns pontos não interessantes  
 331 em comparação com outras representações gráficas, porque não há informações diretas  
 332 sobre a frequência no gráfico em que na representação de *Bode* temos essa informação no  
 333 diagrama. As curvas de Nyquist são caracterizadas pela simetria em relação ao eixo real  
 334 e são muito comuns ao traçar essas curvas como mostra a Figura 2.3.

Você não pode vender o peixe pelas seus atributos ruins. A propaganda para o Nyquist aqui está muito negativa!

335 Métodos para obtenção das curvas são mostrado no livro de controle clássico como  
 336 (OGATA 2009), (FRANKLIN et al. 2013) e (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE 2007).  
 337 Neste trabalho, as trajetórias de Nyquist são obtidas com o auxílio do MATLAB R2020a.

### 338 2.2.2 Critério de Estabilidade de Nyquist

339 O critério de estabilidade de Nyquist determina a estabilidade do sistema, baseado  
 340 na resposta em frequência de um sistema em malha aberta. Em um sistema no circuito  
 341 fechado descrito pela seguinte função de transferência:

$$G_{mf}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.21)$$

342 a equação característica é dada por

$$1 + G(s) = 0 \quad (2.22)$$

343 e para estabilidade, todas as raízes desta equação devem ter partes reais negativas, ou  
 344 seja, O semiplano esquerdo (SPE) no plano  $S$ . Esse critério de estabilidade da equação de

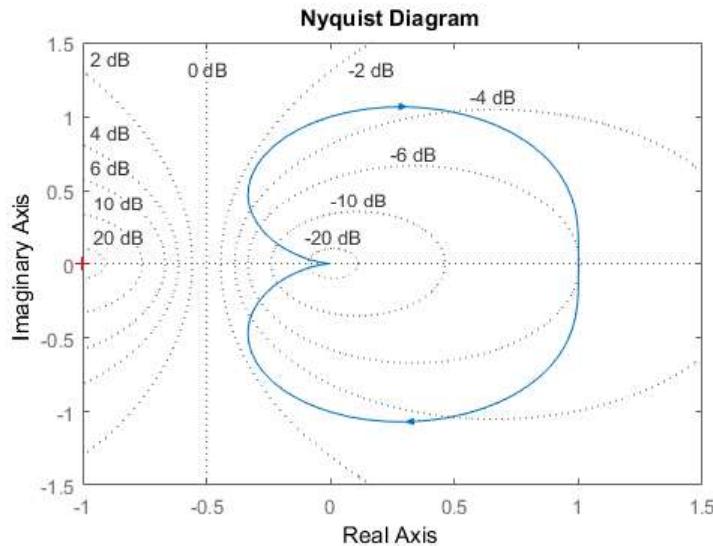


Figura 2.3: Diagrama de Nyquist com a Parte Espelhada

Fonte: (DANTAS 2019)

345 Nyquist relaciona o número dessas raízes no semiplano direito (SPD) para com o número  
 346 de voltas no ponto  $(-1, 0)$  descrito na equação 2.23

$$Z = N + P \quad (2.23)$$

347 na qual  $Z$  representa o número de polos de malha fechada situados no SPD,  $N$  o número  
 348 de envolvimentos do ponto  $(-1, 0)$ , no sentido horário, pelo traçado de Nyquist do ganho  
 349 de malha de  $G(j\omega)$  e  $P$  o número de polos de malha aberta no semi-plano direito de  $G(s)$ .

350 O número  $N$  pode ser negativo como também positivo, dependendo da orientação  
 351 da volta, para cada contribuição em volta no ponto no sentido horário em  $N$  é positiva,  
 352 e para cada volta no sentido anti-horário conta como uma contribuição negativa. Esse  
 353 argumento é baseado no teorema do mapeamento complexo ou Teorema Cauchy, que cria  
 354 uma relação a curvas em domínios funcionais com o domínio  $s$ . Segundo o (OGATA  
 355 2009) a análise de estabilidade do sistema pode ser resumido para três casos possíveis:

- 356 1. Não existir nenhum envolvimento do ponto  $-1 + j0$ . Implicando onde o sistema  
 357 será estável se não houver polos de malha aberta no SPD do plano  $s$ , e instável caso  
 358 contrário;
- 359 2. Existir um ou mais envolvimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido anti-horário. Impli-  
 360 cando que, para o sistema estável, nesse caso, o número de envolvimentos tem que  
 361 ser igual ao número de polos de malha aberta no SPD;
- 362 3. Existir um ou mais envolvimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido horário, implicando  
 363 nesse caso em instabilidade.

364 Baseado no teorema do mapeamento, (FRANKLIN et al. 2013) resume em quatro  
 365 passos básicos o processo de determinação de estabilidade de um sistema pelo critério de  
 366 estabilidade de Nyquist:

- 367 1. Obter o diagrama de Nyquist do ganho de malha do sistema, geralmente represen-  
 368 tado por 2.21;  
 369 2. Avaliar o número de envolvimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido horário ( $N$ ), se o  
 370 envolvimento for no sentido anti-horário o número é negativo;  
 371 3. Determinar o número de polos instáveis em malha aberta ( $P$ );  
 372 4. Calcular o número de raízes instáveis em malha fechada:  $Z = N + P$

373 Vantagens de usar a análise de estabilidade pelo critério de estabilidade de Nyquist é  
 374 que o número de polos ( $Z$ ) não precisa necessariamente ser encontrado, então não há ne-  
 375 cessidade de expressar matematicamente os atrasos por meio de funções de transferência  
 376 de ordem finita, eliminando o uso de aproximações, assim melhorando sua fidelidade nos  
 377 resultados.

### 378 2.3 Controlador Proporcional Integrativo Derivativo

379 O Controlador Proporcional Integrativo Derivativo (PID) une as ações proporcional,  
 380 integral e derivativa num só controlador, atuando tanto no regime transitório quanto no  
 381 regime permanente. São utilizados em sistema de controle industriais, onde ele introduz  
 382 um polo em  $p = 0$  e dois zeros ao sistema, que dependem dos parâmetros de controla-  
 383 dor, e tendemos ao zeros do sistema serem reais e iguais para melhorar a estabilidade  
 384 (GONTIJO et al. 2022).

385 Existem muitas maneiras de representar um PID por função de transferência, uma  
 386 delas é esta:

$$387 G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s} = K_c \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (2.24)$$

387 Na Figura 2.4, mostra o Controlador PID, como representação de diagramas de blocos,  
 388 perceba também que essa representação já está com melhorias como filtro derivativo,  
 389 como objetivo de tratar variações bruscas do sinal de referência.

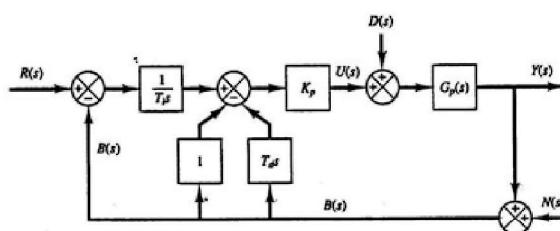


Figura 2.4: Diagrama de blocos do PID

Fonte: Autor

390 Na literatura de controle como (OGATA 2009), o método Lugar Geométrico das Raí-  
 391 zes (LGR), Zigler-Nichols são algumas técnicas de projetos de controladores PID.

392 Os passos comum para projeto de controladores PID é:

- 393 1. Traduzir as especificações de desempenho como uma localização desejada de polos  
394 dominantes de malha fechada
- 395 2. Verificar se o objetivo não pode ser atingido com um controlador mais simples
- 396 3. Se o PID é necessário, localizar o polo na origem e os zeros de modo que a condição  
397 de ângulo seja satisfeita
- 398 4. Calcular o ganho total requerido, aplicando a condição de módulo
- 399 5. Simular o sistema com o controlador e observar o comportamento da resposta. Caso  
400 não seja satisfatório, tentar um ajuste fino dos parâmetros do controlador ( $K_c, z_1$  e  
401  $z_2$ )

402 Neste trabalho não utilizaremos soluções lineares, sim, soluções heurísticas, como o  
403 uso de Algoritmo Genético e Enxames de Partículas para encontrar os valores dos ganhos  
404 que satisfaçam as nossas restrições de estabilidade *Nyquist*.

## 405 2.4 Índices de desempenho

406 Os índices de desempenhos são medidas quantitativa do desempenho de um sistema,  
407 esses índices consideram fatores, como erro do sistema, e o tempo. E para cada sistema é  
408 preciso identificar qual o maior fator relevante para o sistema, a qual queremos atingir o  
409 ótimo. Dizemos que o sistema de é **ótimo** quando o índice de desempenho selecionado é  
410 minimizado, em nosso caso o algoritmo genético irá minimizá-lo.

411 412 Alguns índices de desempenhos são:

- 413 • Integral do erro ao quadrado (*ISE*)

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt \quad (2.25)$$

414 Esse índice tem empenho entre resposta subamortecidas e super-amortecida, con-  
415 siste na medida do valor é dado pela integral do quadrado do erro atuante para uma  
416 malha de controle. o *ISE* tem uma maior sensibilidade aos erros grandes, porque, o  
417 desvio em relação ao sinal de referência é grande, contribui com uma maior parcela  
418 no resultado da integral, do que erro quadrático cuja magnitude seja menor. Po-  
419 rém, esse índice tendem que erros pequenos persistam na resposta do sistema por  
420 um tempo maior, por exemplo, oscilações longas e de pequenas amplitudes no sinal.

- 421 422 • Integral do erro absoluto (*IAE*)

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt \quad (2.26)$$

423 O índice *IAE* gera respostas mais lentas que *ISE* segundo, (OGATA 2009). A for-  
424 mulação é definida como integral do módulo do erro atuante, logo pode se notar

que é atuação contraria ao *ISE*, o *IAE* não, adiciona qualquer tipo de peso ao erro citado, ao minimizar o sistema considerando *IAE* podemos afirmar que a resposta será mais lenta, contudo espera-se que o sistema de controle apresente menos oscilações na saída.

- Integral do erro absoluto vezes o tempo (*ITAE*)

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \quad (2.27)$$

O efeito desse índice tem como principal fator é reduzir a contribuição do erro nos primeiros segundos e olhando para erro presente na resposta do regime do transitório. O *ITAE* é um índice mais seletivo no qual o seu valor mínimo é facilmente identificável em função do amortecimento  $\zeta$  do sistema. Geralmente os sistemas que utiliza a sintonia do controlador pela minimização do *ITAE* tendem a atingir o regime permanente de forma mais rápida.

- Integral do erro ao quadrado vezes o tempo (*ITSE*)

$$ITSE = \int_0^T te^2 dt \quad (2.28)$$

O *ITSE*, como também *ITAE* tem foco nas penalizações de oscilações persistentes, com objetivo de reduzir o tempo de acomodação.

## 2.5 Robustez de Estabilidade

Alguns sinais, como distúrbio  $d(t)$  e ruído/erro de medida  $n(t)$  que estão no sistema de controle em malha fechada, além de serem incertos, causam efeitos indesejáveis.

Quando um modelo do sistema em malha fechada com incertezas multiplicativas, com pertubações  $\delta(jw) = 0$  ou seja abrir a malha e determinar a função de transferência, de modo que obtemos um novo sistema em malha fechada que  $\delta(jw)$  é a função de transferência de ramo direto,  $H(jw)$  é a função de transferência de realimentação e a referência nula. Dessa forma, tem uma estabilidade em MF para qualquer  $\delta(jw)$ , assim podemos aplicar critério de *Nyquist*, com função de transferência de malha aberta igual a  $\delta(jw)H(jw)$ :

1. Por hipótese dizemos que  $W(jw), \delta(jw)$  é estável sendo que as que  $T(jw)$  afirmando que sempre o sistema é nominal, com isso temos que  $P = 0$  para qualquer  $\delta(jw)$ .
2. Logo para qualquer  $\delta(jw)$  o sistema em MF deve ser estável, logo  $Z = 0$ .

Penso que esta subseção deve ser totalmente reescrita, a fim de introduzir a robustez em termos de margens, e já relacioná-las, pr exemplo, ao disco Ms. Notação ruim, está usando w em lugar de ômega para a frequência!!

Devemos ter  $N = 0$ , o que significa que o gráfico de *Nyquist* de  $1 + \delta(jw)H(jw) \neq 0$  para qualquer  $\delta(jw)$ , pela definição do critério de estabilidade de *Nyquist* isso é possível somente quando ocorre a seguinte situação em que  $|1 + \delta(jw)H(jw)| > 0$ . Quando falamos de números complexos, no pior caso, temos quando  $1 - |\delta(jw)H(jw)| > 0$  e como

<sup>459</sup>  $|\delta(jw)| = 1$  logo, temos que  $|H(jw)| = |W(jw)T(jw)| < 1$  para qualquer frequência, ou  
<sup>460</sup> seja,  $|T(jw)| < 1/|W(jw)|$  o qual é condição de robustez de estabilidade. Também essa  
<sup>461</sup> condição de estabilidade é satisfeita quando  $\|WT\|_\infty < 1$  de acordo com (HESPAÑHA  
<sup>462</sup> 2018).