

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS
LINEARES INCERTOS
– TEORIA E APLICAÇÕES –**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

ARÃO FISCHMAN

FLORIANÓPOLIS, SETEMBRO DE 1993

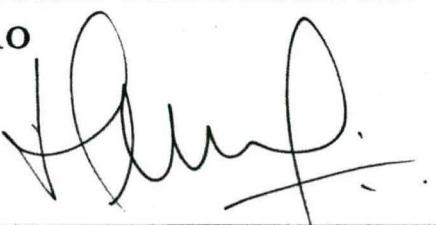
CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS
LINEARES INCERTOS
- TEORIA E APLICAÇÕES -

ARÃO FISCHMAN

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO
TÍTULO DE

MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO SISTEMAS DE CONTROLE,
E APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE
PÓS-GRADUAÇÃO



Prof. EDSON ROBERTO DE PIERI, Dr.

Orientador



Prof. ROBERTO DE SOUZA SALGADO, Ph.D.

Coordenador do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



Prof. EDSON ROBERTO DE PIERI, Dr.

Orientador



Prof. PEDRO LUIS DIAS PERES, Dr.



Prof. AGUINALDO SILVEIRA E SILVA, Ph.D.

A meus pais.

A meus irmãos: Joel, Moacir,
Claudete, Raquel e Alexandre;
e cunhados: Débora, Leila, Joni
e, em especial, Valmor.

Agradecimentos

A Edson Roberto De Pieri, meu orientador, pela amizade, dedicação e competência com que me agraciou durante este período de trabalho em comum.

A Alexandre Trofino Neto, pelas inestimáveis contribuições a este trabalho.

A Nelson Zeni Jr. pela idéia e incentivo iniciais.

Ao professor, colega e amigo Tristão Júlio Garcia dos Santos pela motivação e compa-
nheirismo.

Aos professores José Eduardo Ribeiro Cury e Julio Elias Normey Rico cujas parti-
cipações foram decisivas nos meus primeiros passos na carreira acadêmica.

Aos colegas Vinícius Leônidas Curcio, Romeu Reginatto e Alexandre Sanfelice Baza-
nella pela amizade e convívio que compartilhamos aqui em Florianópolis.

A todos os professores, colegas e amigos que de uma forma ou de outra prestaram-me apoio, seja profissional, seja psicológico, tão necessários para a realização desta obra.

A Neil Tenant e Chris Lowe.

A Geddy Lee, Alex Lifeson e Neil Peart.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Um controlador é dito *robusto* se ele for capaz de garantir um certo padrão mínimo de desempenho para o sistema global em malha fechada, mesmo em presença de incertezas sobre o modelo matemático deste sistema, de perturbações externas atuando sobre ele ou de dinâmicas parasitas nele presentes.

Com o intuito de tornar claro o posicionamento do problema de controle robusto, primeiramente é feito um estudo aprofundado dos principais resultados teóricos obtidos na literatura durante os anos sessenta e setenta, tais como LQR, LQG, e a teoria de controle H_∞ . Também são comentados aspectos de insensibilidade frente a variações no processo apresentados por tais métodos de síntese de controladores. Tais esquemas utilizavam um modelo matemático considerado perfeitamente conhecido e invariante.

Ao final dos anos setenta a teoria de controle evoluiu no sentido de considerar, a priori, o modelo matemático como sendo um conjunto ou família de modelos para a síntese de controladores. Introduz-se então, o conceito de robustez de controladores em presença deste conjunto de modelos. Em decorrência disto, torna-se necessário o estudo das diferentes maneiras de representação destes conjuntos de modelos caracterizando-se assim as incertezas que afetam o modelo nominal do sistema.

Uma vez definido o conjunto de modelos utilizado para a representação do sistema físico, diversos métodos de síntese de controladores robustos são abordados. Também suas relações com os esquemas clássicos de controle são comentadas, estabelecendo-se assim uma seqüência lógica da evolução do projeto de sistemas de controle no sentido da *robustez*.

Finalmente, a aplicabilidade de tais métodos de controle robusto é ilustrada por meio de estudos de caso em áreas diversificadas da engenharia, como por exemplo sistemas de estrutura flexível e sistemas de potência. No caso particular da aplicação de controle robusto a sistemas de potência, a abordagem utilizada, segundo o conhecimento do autor, é original.

Abstract

A controller is considered robust if it guarantees a minimum degree of performance for the closed-loop system even in the presence of mathematical modelling uncertainties, exogenous signals or neglected dynamics.

In order to facilitate the statement of the robust control problem, a detailed study of the main results in control theory during the 60's and 70's such as is LQR, LQG and H_∞ control theory is developed. Furthermore, insensibility characteristics of these control techniques are also analyzed. These methods work with a model of the system thought of as being perfectly known and time-invariant.

At the end of the 70's, the developments in control theory caused the mathematical model of the system to be considered as a family or set of models still in the design phase of the controller. Then, the concept of robustness of a controller is naturally introduced. At this point, it becomes necessary to study some different ways of representing these set of models as well as the uncertainties that affect them.

Once defined the set of models under consideration, various robust control synthesis methods are developed. Also their relationships with classical control theory methods are overviewed and, by doing this, a chronological evolution of the control design methods in the sense of *robustness* is established.

Finally, the applicability of these methods is illustrated by means of some case studies among different engineering areas such as flexible structure systems and power systems. In the particular case of power systems, the applied approach and the obtained results, in the author's knowledge, are original.

Lista de Figuras

1.1	Característica de malha fechada da solução do problema do regulador linear quadrático.	9
1.2	Estrutura do controlador LQR.	12
1.3	Região para posicionamento de autovalores com a técnica de deslocamento α	14
1.4	Estrutura do filtro de Kalman.	16
1.5	Estrutura do compensador LQG.	18
1.6	Esquema de controle H_∞	24
2.1	Conjunto de modelos definidos no domínio freqüencial.	33
2.2	Incertezas não-estruturadas, não-paramétricas no plano complexo.	35
2.3	Conjunto de modelos no espaço de estados.	36
2.4	Politopo convexo no espaço de sistemas representando um modelo com 3 elementos incertos no total	38
2.5	Incertezas sobre o modelo, limitadas em norma, vistas como um bloco de realimentação incerto.	40
3.1	Teorema do pequeno Ganho \times Estabilidade Quadrática.	58
3.2	Representação do problema de estabilização do sistema incerto como um problema de minimização H_∞	61
4.1	Barra engastada.	71
4.2	Simulação da barra submetida à lei de controle $u = k_s x$	74
4.3	Simulação da barra submetida à lei de controle $u = k_\infty x$	75

4.4 Simulação da barra submetida à lei de controle $u = -k_{PL}x$	76
4.5 Modelo de Heffron-Phillips	80
4.6 Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_{CG}x$ à condição inicial x_0	84
4.7 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{CG}x$ à perturbação de potência.	85
4.8 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{CG}x$ à perturbação de velocidade.	85
4.9 Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_s x$ à condição inicial x_0	87
4.10 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_s x$ à perturbação de potência.	87
4.11 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_s x$ à perturbação de velocidade.	88
4.12 Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_\infty x$ à condição inicial x_0	89
4.13 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_\infty x$ à perturbação de potência.	90
4.14 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_\infty x$ à perturbação de velocidade.	90
4.15 Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$ à condição inicial x_0	92
4.16 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$ à perturbação de potência.	92
4.17 Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$ à perturbação de velocidade.	93

Lista de Tabelas

- | | |
|---|----|
| 4.1 Tabela comparativa dos métodos de síntese para o exemplo da barra engastada. | 77 |
| 4.2 Tabela comparativa dos métodos de síntese para o exemplo de sistemas de potência. | 93 |

Notação

$\ \cdot\ $	Norma Euclideana de (\cdot) .
$\ \cdot\ _\infty$	Norma H_∞ de (\cdot) .
$A > 0$ ($A \geq 0$)	A é Matriz Positiva Definida (Positiva Semi-Definida).
A'	Transposta da Matriz A .
(\cdot)	Derivada Temporal de (\cdot) .
$E\{(\cdot)\}$	Operador Esperança Matemática de (\cdot) .

Índice

Introdução Geral	1
1 Robustez de Controladores Clássicos	4
1.1 Introdução	4
1.2 O problema do regulador linear quadrático	5
1.2.1 Minimização de $J(u(t))$	6
1.2.2 Propriedades de robustez dos controladores LQR	11
1.2.3 Alocação de espectro em uma dada região	12
1.3 O problema de controle ótimo com realimentação de estado estimado	14
1.3.1 Metodologia LQG	15
1.3.2 Solução do problema LQG	16
1.3.3 O procedimento LTR	17
1.3.4 Propriedades de robustez dos controladores LQG	20
1.4 O problema de controle H_∞	21
1.4.1 Norma H_∞ e equação de Riccati	22
1.4.2 O problema de controle H_∞ e realimentação de estados	24
1.4.3 Propriedades de robustez dos controladores H_∞	27
1.5 Conclusão	28
2 Modelagem do Sistema Físico e Incertezas	29
2.1 Introdução	29

2.2	Robustez × Insensibilidade	30
2.3	Caracterização das incertezas	31
2.4	Definição do conjunto de modelos	32
2.4.1	Modelagem por função de transferência	32
2.4.2	Modelagem por equações de estado	35
2.5	Conclusão	43
3	Síntese de Controladores Robustos	45
3.1	Introdução	45
3.2	Estabilizabilidade Quadrática	45
3.3	Algoritmos de Síntese	49
3.3.1	Abordagem por Custo Garantido	49
3.3.2	Abordagem por Schmitendorf	53
3.3.3	Abordagem pela Teoria de Controle H_∞	56
3.3.4	Abordagem por Programação Linear	63
3.4	Conclusão	66
4	Aplicações	67
4.1	Sistemas de Estrutura Flexível	67
4.1.1	Modelagem matemática	68
4.1.2	Estudo de caso	70
4.1.3	Considerações adicionais	77
4.2	Sistemas de Potência	78
4.2.1	A Estabilidade Dinâmica em Sistemas de Potência	79
4.2.2	Modelagem Matemática dos Sistemas de Potência	79
4.2.3	Obtenção do modelo incerto	81
4.2.4	Considerações adicionais	94

4.3 Conclusões	94
Conclusão	96
Bibliografia	99
A Resultados relacionados à Equação de Riccati	106

Introdução Geral

Os sistemas de controle sempre atraíram a atenção de matemáticos e filósofos ao longo da história. Um dos primeiros sistemas de controle foi, provavelmente, o mecanismo utilizado na abertura das portas do templo de Hero, no século I, sem a visível participação humana. Com certeza, naquela época, este sistema foi um dos responsáveis pelo ar de misticismo que simbolizava a força dos deuses do *Olimpo*.

Ao longo dos séculos, com a evolução das sociedades, também os sistemas de controle evoluíram, surgindo então a necessidade de um modelamento matemático que descrevesse as relações entre os estímulos aplicados ao sistema e as respostas por ele fornecidas. Com o advento da Revolução Industrial, no século XVIII, ocorreu a introdução de máquinas e motores, a vapor e elétricos, no processo produtivo, o que fez com que esta necessidade atingisse um estágio tal que o modelo matemático destes equipamentos se constituiu uma peça fundamental no crescimento da produtividade. Neste ponto da história, com o surgimento das linhas de montagem e da fabricação em massa de bens de consumo, houve uma gradual substituição do homem pela máquina, o que gerou uma outra necessidade: a de que os estímulos utilizados como entrada para estas máquinas fossem obtidos automaticamente, sem a participação do homem, a partir de informações obtidas das próprias máquinas. A esta característica dos sistemas de controle dá-se o nome de *realimentação*.

Uma data importante na história dos sistemas de controle realimentados foi 1934, quando da publicação do artigo de Hazen intitulado "*Teoria de Servomecanismos*". A palavra servomecanismo tem sua origem baseada na observação de que se um sistema funciona sem a intervenção do homem, e segundo a vontade deste, então este sistema age como um servo. De lá para cá, a Teoria de Controle de Sistemas Realimentados tem avançado rapidamente, sempre com o objetivo de adequar o funcionamento natural de determinado dispositivo às exigências de desempenho descritas nas especificações do mesmo. De outra forma, a Teoria de Controle se ocupa do problema de obter leis de controle (estímulos) que, quando aplicados ao sistema, façam com que este forneça resultados consoante às especificações. Devido a estes avanços, a Teoria de Controle tem sofrido várias modificações, seja no aspecto do modelamento matemático dos

sistemas, seja no aspecto da metodologia utilizada para abordar o problema.

Durante a primeira metade do nosso século, apesar da existência de ferramentas matemáticas adequadas como a Transformada de Laplace e o conceito de Função de Transferência, grande parte dos projetos de controle eram feitos valendo-se da tentativa e erro e de uma grande dose de empirismo na elaboração dos controladores. Além disso, durante este período, a quase totalidade dos projetos era monovariável, ou seja, os sistemas tratados possuíam somente uma entrada e uma saída.

Ao final dos anos cinqüenta, com os trabalhos de Kalman, houve o surgimento da abordagem temporal para solução dos problemas de controle. Neste momento, os sistemas passaram a ser modelados por Equações de Estado, com a utilização da Álgebra Matricial e da Teoria de Equações Diferenciais como ferramentas matemáticas básicas. Paralelamente, surgiu a consciência de que os projetos de controle necessitavam de um maior rigor na sua forma, e também de que era conveniente a criação de índices de desempenho como critérios de avaliação dos controladores obtidos. Seguindo estas tendências, nasceu a Teoria de Controle Ótimo. Até então, os esforços dos matemáticos e engenheiros de controle concentravam-se em modelar matematicamente de forma precisa os sistemas físicos e posteriormente no desenvolvimento de algoritmos eficazes para obtenção de controladores que apresentassem características desejáveis de desempenho e robustez frente a variações no modelo. Nesta época iniciou-se também o projeto de controle multivariável.

Sabendo-se que, por mais acurado que seja um modelo matemático, este não passa de uma aproximação do respectivo sistema físico, e também que as incertezas e variações são inerentes a todo tipo de aproximação, ao final dos anos setenta ocorreu uma pequena mudança no enfoque das pesquisas na Teoria de Controle. Surgiu então a idéia de modelar-se um sistema físico não mais como um único modelo matemático fixo e inflexível, mas sim como um modelo "*pouco conhecido*", ou em outras palavras, como um conjunto ou família de modelos admissíveis para este sistema físico. Aparece então a chamada *Teoria de Controle Robusto*.

Na Língua Portuguesa, a palavra *robusto* tem diversos significados, como por exemplo: resistente, vigoroso, sólido, poderoso, influente, etc. No contexto de controle, *robusto* significa insensível ou pouco sensível a variações de qualquer natureza no projeto, seja no sistema, seja no próprio controlador. Dito de outra forma, o controle robusto é aquele que garante características importantes como estabilidade, desacoplamento, rejeição de perturbações, ou índices mínimos de desempenho para o sistema frente às incertezas e variações que possam ocorrer com o mesmo.

Antes do surgimento da Teoria de Controle Robusto, a análise da robustez dos controladores obtidos era feita a posteriori, ou seja, após o projeto do mesmo. Em contrapartida,

a Teoria de Controle Robusto trata o problema levando em conta as incertezas de modelamento a priori, ou seja, na fase de projeto, garantindo assim patamares mínimos aceitáveis de desempenho para o sistema apesar do parco conhecimento sobre ele.

O presente trabalho tem por objetivo servir como um arcabouço teórico na área de Controle Robusto, bem como posicioná-lo no contexto global da Teoria de Controle, de forma clara, didática e acessível. Assim, esta dissertação está dividida em capítulos da seguinte forma:

O capítulo 1 é dedicado a desenvolver um apanhado dos principais resultados existentes na literatura de controle "moderno" no que concerne à síntese de controladores, bem como à análise das características de insensibilidade destes controladores a variações de qualquer natureza no modelo matemático do sistema.

No capítulo 2 é feita uma análise das formas pelas quais pode-se definir o conjunto de sistemas a ser controlado, bem como da caracterização e modelagem das incertezas em cada uma destas formas.

Feito isso, no capítulo 3, são apresentados alguns algoritmos de obtenção de controladores robustos levando-se em conta os conjuntos de sistemas incertos definidos no capítulo anterior.

Finalmente, no capítulo 4, é demonstrada a aplicabilidade de tais métodos de síntese a sistemas dinâmicos de naturezas bem diferentes, como é caso de sistemas flexíveis e de sistemas de potência.

Capítulo 1

Robustez de Controladores Clássicos

1.1 Introdução

No início dos anos sessenta com o surgimento da abordagem temporal para o tratamento de problemas de controle, criou-se também uma tendência de generalizar e formalizar os projetos que eram feitos até então de forma extremamente particular e com base no conhecimento prático.

Devido a este formalismo e à maneira genérica com que os sistemas de controle passaram a ser projetados, houve a necessidade da criação de índices de desempenho e medidas de robustez que justificassem tais procedimentos. Com isto surge a teoria de *Controle Ótimo*. Tal teoria tem por objetivo a obtenção de um controlador que quando aplicado ao sistema minimize determinado índice de desempenho, ou em outras palavras, seja ótimo com relação a este índice. Tal índice constitui uma medida de quão ajustado está o sistema em malha fechada a um conjunto de especificações. No contexto de controle ótimo, a análise de robustez dos sistemas de controle obtidos é feita a posteriori, e geralmente utiliza conceitos de estabilidade emprestados da teoria de *Controle Clássico*, como margens de ganho e de fase.

Este capítulo tem por objetivo desenvolver brevemente os fundamentos teóricos dos controladores consagrados na literatura de controle no que diz respeito ao formalismo de projeto e também de robustez dos mesmos, utilizando a abordagem temporal.

Na próxima seção, será introduzido o problema do regulador linear quadrático, também conhecido como problema de controle ótimo, e será também detalhada a obtenção da equação de Riccati, bem como as propriedades de robustez inerentes a estes controladores.

Posteriormente, será abordado o problema de controle ótimo quando não se tem acesso a todos os estados do sistema, ou seja, controle ótimo com realimentação de estado estimado.

A introdução de um observador ótimo de estados e as consequências desta inclusão no projeto do controlador LQR serão discutidas. Também será detalhado o procedimento conhecido como LTR¹ para o resgate das propriedades de robustez perdidas devido a falta do estado real do sistema para retroação.

Por fim, será estudado o problema de controle abordado pela *Teoria H_∞* para rejeição de perturbações. A teoria de controle H_∞ se ocupa da busca de um controlador que minimize a norma H_∞ de uma função de transferência garantindo a estabilidade interna do sistema em malha fechada. Condições necessárias e suficientes para a existência e um algoritmo para a obtenção de controladores H_∞ serão apresentados, bem como suas propriedades de robustez serão comentadas.

1.2 O problema do regulador linear quadrático

O problema do regulador linear quadrático consiste na minimização de um certo índice de desempenho que pode ser encarado como sendo um funcional de *custo* para este sistema. A solução deste problema de minimização gera uma lei de controle que, quando aplicada ao sistema, minimiza este índice de desempenho.

Normalmente, um compromisso entre a qualidade de resposta e a energia ou o esforço de controle necessário para tal fica expresso neste funcional de custo que envolve o sinal de controle $u(t)$ e um sinal que representa a resposta do sistema $y(t)$. O sinal $y(t)$ pode simbolizar diferentes grandezas, de acordo com o problema que está sendo tratado. No caso de desejar-se seguimento de referências, $y(t)$ representará o sinal de erro entre esta referência e a saída do sistema. Por outro lado quando o objetivo for somente a estabilização do sistema, então $y(t)$ pode representar simplesmente a saída do sistema, neste caso o controlador obtido atuará como regulador. Ainda se o problema considerado for o de rejeição de perturbações, então $y(t)$ representará o erro na saída devido a estas perturbações. Em todos estes casos deseja-se que o sinal que representa a resposta do sistema tenda para zero em regime permanente.

O funcional de custo normalmente utilizado neste tipo de problema é da forma:

$$J(u(t)) \triangleq \int_{t_0}^{\infty} [y'(t)Q(t)y(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt$$

onde $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor de saídas, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas de controle, t_0 é o tempo inicial e $Q(t) \geq 0$ e $R(t) > 0$ são matrizes de dimensões apropriadas que ponderam, respectivamente, as contribuições das saídas e das entradas de controle no cômputo do índice de desempenho. A minimização do funcional $J(u(t))$ implica:

¹do inglês Loop Transfer Recovery. Às vezes é preferível uma nomenclatura estrangeira a uma má tradução.

1. Minimização do efeito das condições iniciais sobre a saída e também da energia dispendida no controle, de forma ótima.
2. Uma vez que qualquer condição inicial $x(t_0)$ pode ser posta na forma $x_0\delta(t)$, onde $\delta(t)$ representa a função delta de Dirac, então a minimização de $J(u(t))$ implica também a minimização do efeito de qualquer perturbação do tipo impulsional sobre a saída do sistema.
3. Uma vez que o critério a ser minimizado é uma função quadrática de $y(t)$ e $u(t)$ até tempo infinito, então ambos os sinais forçosamente se anulam em regime permanente.
4. Das implicações anteriores, depreende-se que a estabilidade do sistema também é garantida.

Na próxima subseção será tratado o problema da minimização do critério $J(u(t))$, com a obtenção da lei de controle que realiza tal tarefa. A abordagem a ser seguida nesta seção não utiliza a formulação clássica baseada no princípio do mínimo de Pontryagin [2]. Ao invés disso, adotou-se a metodologia usada por Kwakernaak-Sivan [35] por esta tratar o problema de uma maneira mais condensada.

1.2.1 Minimização de $J(u(t))$

Seja o sistema dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) = C(t)x(t) \\ \text{com: } x(t_0) = x_0 ; x(t_f) = x_f \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica do modelo, $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}$ são respectivamente as matrizes de entrada e de saída do modelo, $u(t)$ é o vetor de entradas, $x(t)$ é o vetor de estados e $y(t)$ é o vetor de saídas. Assume-se que $A(t)$, $B(t)$ e $C(t)$ são matrizes limitadas, com elementos no corpo dos complexos e que estes elementos são funções contínuas de t .

Observação 1.1 A escolha de matrizes dependentes do tempo tem o intuito apenas de chamar a atenção do leitor para a forma mais geral do método sabendo-se, entretanto, que no seguimento apenas sistemas invariantes no tempo serão tratados.

Deseja-se encontrar uma entrada de controle $u[t_0, t_f]$ que minimize o funcional:

$$J(u(t)) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} [y'(t)Q(t)y(t) + u'(t)R(t)u(t)]dt + x'_f P_f x_f \quad (1.2)$$

com as seguintes condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q(t) = Q'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ R(t) = R'(t) > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ P_f = P'_f \geq 0 \\ \text{A equação de estados de 1.1 é controlável } \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ \text{A equação dinâmica 1.1 com a matriz de saída dada por:} \\ Q^{1/2}(t)C(t) \text{ é observável } \quad \forall t \in [t_0, t_f] \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Cabe ressaltar aqui que a escolha das matrizes de ponderação $Q(t)$, $R(t)$ e P_f é função, respectivamente, das exigências de desempenho com relação à saída do sistema, das limitações físicas de amplitudes de sinais de entrada e da exigência de um erro terminal quadrático pequeno.

O seguinte resultado ajudará na obtenção da lei de controle procurada.

Lema 1.1 [61] Seja $K'(t) = K(t)$ diferenciável em $[t_0, t_f]$, então:

$$\int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & B'(t)K(t) \\ K(t)B(t) & \dot{K}(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt = x'_f K(t_f) x_f - x'_0 K(t_0) x_0 \quad (1.4)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} & x'(t)K(t)x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} = \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [x'(t)K(t)x(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [\dot{x}'(t)K(t)x(t) + x'(t)\dot{K}(t)x(t) + x'(t)K(t)\dot{x}(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} [x'(t)A'(t)K(t)x(t) + u'(t)B'(t)K(t)x(t) + \\ & \quad + x'(t)\dot{K}(t)x(t) + x'(t)K(t)A(t)x(t) + \\ & \quad + x'(t)K(t)B(t)u(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} 0 & B'(t)K(t) \\ K(t)B(t) & \dot{K}(t) + A'(t)K(t) + K(t)A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ x(t) \end{bmatrix} dt \end{aligned}$$

□

Fazendo uso deste lema, a solução do problema de regulação ótima se resume ao próximo teorema.

Teorema 1.1 [61] Existe uma única solução ao problema colocado anteriormente e ela é dada por:

$$u^0(t) = -F(t)x(t) \quad (1.5)$$

com:

$$F(t) = R^{-1}(t)B'(t)P(t) \quad (1.6)$$

sendo $P(t)$ a solução da equação diferencial de Riccati:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) + \\ + C'(t)Q(t)C(t) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

com: $P(t_f) = P_f$

Demonstração: Somando-se e subtraindo-se $x'_f K(t_f) x_f$ à expressão do lema anterior, tem-se:

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= x'_f [P_f - K(t_f)] x_f + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[\begin{array}{c} u(t) \\ x(t) \end{array} \right]' \left[\begin{array}{cc} R(t) & B'(t)K(t) \\ K(t)B(t) & D(t) + K(t)B(t)R^{-1}B'(t)K(t) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} u(t) \\ x(t) \end{array} \right] dt + \\ &+ x'_0 K(t_0) x_0 \end{aligned}$$

com $D(t)$ dada por:

$$\begin{aligned} D(t) \triangleq \dot{P}(t) + A'(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B(t)R^{-1}(t)B'(t)P(t) + \\ + C'(t)Q(t)C(t) \end{aligned}$$

e sendo esta uma forma quadrática positiva semi-definida, a minimização pode ser feita termo a termo:

$$\begin{aligned} J(u(t)) &= x'_f [P_f - K(t_f)] x_f + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} [u(t) + R^{-1}(t)B(t)K(t)x(t)]' R [u(t) + R^{-1}(t)B(t)K(t)x(t)] dt + \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} x'(t)D(t)x(t)dt + \\ &+ x'_0 K(t_0) x_0 \end{aligned}$$

Para as condições dadas, a equação (1.7) tem uma única solução [35] e esta é a que anula o segundo termo da expressão acima. Fazendo-se $K(t) = P(t)$ solução da equação (1.7), observa-se que o primeiro e o terceiro termo desta expressão se anulam automaticamente, e nota-se também que $u^0(t)$ dada por (1.5) é a solução que minimiza $J(u(t))$, e que o valor mínimo deste funcional é, então dado por:

$$J(u^0(t)) = x'_0 P(t_0) x_0$$

□

Com relação a este resultado é conveniente tecerem-se alguns comentários:

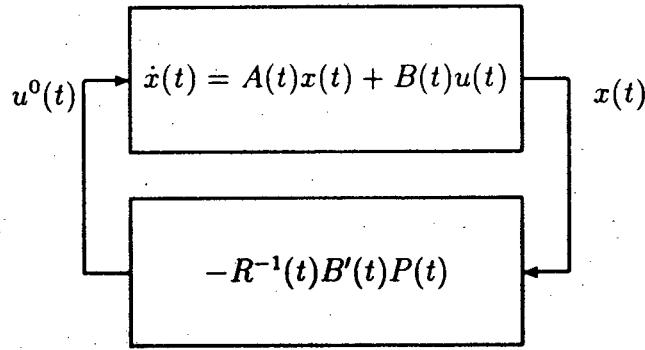


Figura 1.1: Característica de malha fechada da solução do problema do regulador linear quadrático.

- Não obstante o problema de regulação ótima não ter sido colocado em termos de um sistema realimentado, percebe-se a natureza de um sinal de realimentação na solução obtida, como mostra a figura 1.1.
- Se a hipótese de que $R(t) \geq 0$ tivesse sido assumida, então poderia existir uma entrada de controle $u^*(t)$ para a qual $R(t)u^*(t) = 0$ de tal forma que poderia se admitir entradas com normas infinitas sem que isto fosse computado no índice de desempenho. Exatamente por isto é que exige-se que $R(t)$ seja estritamente positiva definida, ou seja, $R(t) > 0$.

Voltando-se as atenções para o caso de um sistema invariante no tempo, pode-se resumir as conclusões anteriores em um único teorema :

Teorema 1.2 [35] *Considere o problema do regulador linear quadrático invariante no tempo:*

$$J(t) \triangleq \int_{t_0}^{t_f} [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt + x'_f P_f x_f \quad (1.8)$$

sujeito a:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ \text{com: } x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

com $Q = Q' > 0$, $R = R' > 0$ e $P_f = P'_f \geq 0$

A equação diferencial de Riccati associada a este problema é dada por:

$$-\dot{P}(t) = A'P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B'P(t) + C'QC \quad (1.10)$$

com condição de contorno: $P(t_f) = P_f$

1. Assumindo-se que $P_f = 0$. Então a medida que $t_f \rightarrow \infty$ a solução da equação de Riccati (1.10) tende a um valor constante de regime permanente \bar{P} se e somente se o sistema não possuir nenhum polo que, simultaneamente, seja instável, não-controlável e observável.

2. Se o sistema (1.9) for estabilizável e detetável então a solução da equação de Riccati (1.10) tende a um único valor \bar{P} para qualquer $P_f = P'_f \geq 0$ a medida que $t_f \rightarrow \infty$.

3. Se \bar{P} existir, é uma solução simétrica não-negativa definida da equação algébrica de Riccati:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'QC = 0 \quad (1.11)$$

Se o sistema (1.9) for estabilizável e detetável então \bar{P} é a única solução simétrica não-negativa definida de (1.11).

4. Se \bar{P} existir, ela será positiva definida se e somente se o par (C, A) for observável.

5. Se \bar{P} existir então a lei de controle:

$$u(t) = -\bar{F}x(t) \quad (1.12)$$

com:

$$\bar{F} = R^{-1}B'\bar{P} \quad (1.13)$$

é assintoticamente estável se e somente se o sistema (1.9) for estabilizável e detetável.

6. Se o sistema (1.9) for estabilizável e detetável então a lei de controle (1.12) minimiza:

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt + x'_f P_f x_f \right\} \quad (1.14)$$

para qualquer $P_f = P'_f \geq 0$. Com esta lei de controle, o valor ótimo do critério (1.14) é dado por:

$$J^0 = x'_0 \bar{P} x_0$$

Demonstração: A demonstração de todos os itens deste teorema está feita em [35]

□

Visando a clareza no entendimento, particulariza-se o resultado anterior para o caso de maior interesse, qual seja, onde $t_f \rightarrow \infty$, e onde arbitra-se $t_0 = 0$ sem perda de generalidade, pois em um sistema invariante no tempo isto sempre é possível mediante uma mudança na variável temporal.

Enuncia-se então o resultado simplificado. Dado o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \\ \text{com: } x(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

e o índice de desempenho:

$$J(u(t)) \triangleq \int_0^\infty [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt \quad (1.16)$$

com $Q = Q' > 0$, $R = R' > 0$ e supondo-se (A, B) estabilizável e (C, A) observável. Então:

$$u(t) = -Fx(t) \quad (1.17)$$

minimiza J , com a realimentação de estados F dada por:

$$F = R^{-1}B'P$$

onde P é a única solução simétrica positiva definida de

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'QC = 0 \quad (1.18)$$

Ademais, submetendo-se o sistema (1.15) a esta lei de controle, o valor do índice de desempenho obtido é:

$$J^0 = x_0'Px_0$$

1.2.2 Propriedades de robustez dos controladores LQR

O procedimento de projeto descrito na subseção anterior é conhecido na literatura como o problema do regulador linear quadrático (LQR) e suas propriedades de robustez são bastante conhecidas [35, 2, 38]. Algumas destas propriedades serão brevemente apresentadas aqui.

Supondo-se que $R = \rho I$, com ρ sendo uma constante estritamente positiva, então tem-se:

- Estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.
- Margem de ganho entre 0.5 e ∞ para variações no ganho da função de transferência $T(jw) = -F(jwI - A)^{-1}B$.
- Margem de fase de no mínimo 60° para variações na fase de $T(jw)$ definida acima.

Os conceitos de margem de ganho e margem de fase são bem conhecidos para sistemas monovariáveis. A generalização destes conceitos para o caso multivariável é feita simplesmente considerando-se que estas margens de estabilidade são válidas para qualquer par entrada-saída escolhido. Além disso, estas variações devem ser toleradas mesmo se ocorrerem simultaneamente em todos os canais entrada-saída do sistema. É oportuno ressaltar que a função de transferência $T(s)$ tem como entradas as variáveis de controle ($u(s)$) e como saídas os estados do sistema ($x(s)$), como ilustra a figura 1.2.

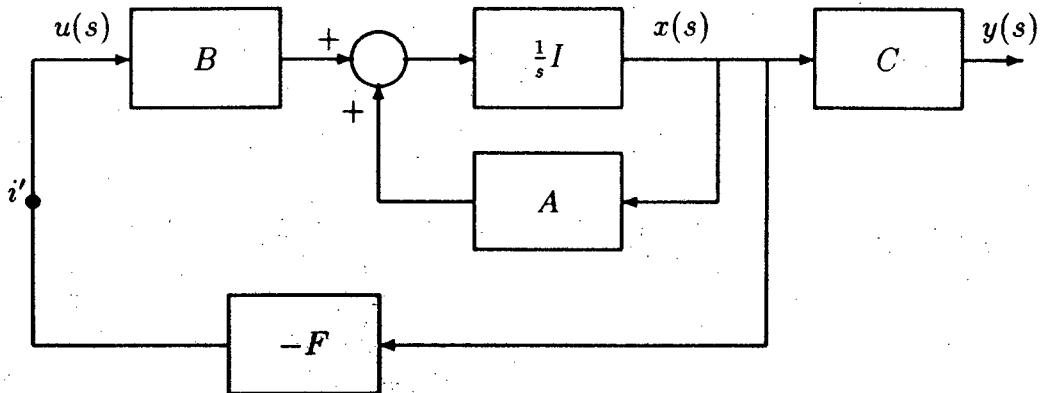


Figura 1.2: Estrutura do controlador LQR.

1.2.3 Alocação de espectro em uma dada região

A despeito das propriedades de robustez apresentadas pelos controladores ditos "LQR", uma questão ainda fica pendente. Qual o melhor compromisso entre o desempenho do sistema em malha fechada e o esforço de controle necessário para tal? Apesar da dificuldade de vincular-se exigências de desempenho para o sistema com escolhas adequadas das matrizes de ponderação Q e R , muito trabalho tem sido realizado neste sentido.

Normalmente quando se pensa em desempenho de um sistema logo se deseja posicionamento de pólos para o mesmo. Porém sabe-se que freqüentemente é suficiente alocar-se os autovalores deste sistema em uma dada região do plano complexo para que se tenha as exigências de projeto atendidas. Devido a isto existem resultados na literatura que sugerem métodos de escolha para as matrizes de ponderação a serem utilizadas na resolução do problema de regulação ótima para as quais obtém-se posicionamento dos autovalores do sistema em malha fechada em determinadas regiões do plano complexo [30, 63, 64, 14]. Contudo, a determinação das matrizes de ponderação em função das exigências de desempenho para o sistema ainda é um problema em aberto.

Um procedimento simples para obter-se posicionamento de pólos em uma dada região do plano complexo é apresentado a seguir [2].

Considere-se uma modificação no critério (1.16) como abaixo:

$$J_\alpha \triangleq \int_0^\infty e^{2\alpha t} [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)] dt \quad (1.19)$$

com α escalar, estritamente positivo. Então, definindo:

$$\begin{cases} \bar{x}(t) \triangleq e^{\alpha t}x(t) \\ \bar{u}(t) \triangleq e^{\alpha t}u(t) \\ \bar{y}(t) \triangleq C\bar{x}(t) \end{cases} \quad (1.20)$$

tem-se:

$$J_\alpha = \int_0^\infty [\bar{y}'(t)Q\bar{y}(t) + \bar{u}'(t)R\bar{u}(t)]dt \quad (1.21)$$

Aplicando-se a transformação de variáveis (1.20) às equações (1.15):

$$\dot{\bar{x}} = (A + \alpha I)\bar{x} + B\bar{u} \quad (1.22)$$

Sabendo-se que:

$$(A, B) \text{ estabilizável} \Leftrightarrow (A + \alpha I, B) \text{ estabilizável}$$

$$(C, A) \text{ observável} \Leftrightarrow (C, A + \alpha I) \text{ observável}$$

então existe uma lei de controle:

$$\bar{u}(t) = -F_\alpha \bar{x}(t) \quad (1.23)$$

que minimiza o índice de desempenho (1.21). Além disso, F_α é dada por:

$$F_\alpha = R^{-1}B'P_\alpha \quad (1.24)$$

onde P_α é a solução simétrica positiva definida de:

$$(A + \alpha I)'P_\alpha + P_\alpha(A + \alpha I) - P_\alpha BR^{-1}B'P_\alpha + C'QC = 0 \quad (1.25)$$

A aplicação da lei de controle $u(t) = -F_\alpha x(t)$ ao sistema (1.15) faz com que seu estado converja para a origem com uma taxa de decaimento exponencial de no mínimo α , em outras palavras, todos os autovalores do sistema:

$$\dot{x} = (A - BF_\alpha)x(t)$$

estão posicionados à esquerda de uma reta vertical que passa pelo ponto $(-\alpha, 0)$ no plano complexo, como mostra a figura 1.3.

Isto pode ser visualizado lembrando-se que:

$$\bar{x}(t) = e^{\alpha t}x(t)$$

e que com $\bar{u}(t) = -F_\alpha \bar{x}(t)$ aplicada ao sistema (1.22), tem-se:

$$\bar{x}(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

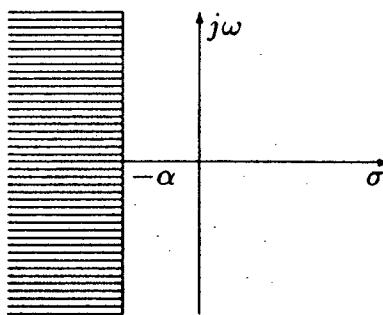


Figura 1.3: Região para posicionamento de autovalores com a técnica de deslocamento α .

então quando aplica-se a lei de controle $u(t) = -F_\alpha x(t)$ ao sistema (1.15) verifica-se que:

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty$$

no mínimo com a mesma taxa de decaimento que $e^{-\alpha t}$, donde depreende-se que todos os autovalores do sistema em malha fechada estão alocados na região hachurada da figura 1.3.

É interessante notar que o sistema em malha fechada obtido desta forma possui as mesmas propriedades de robustez obtidas na seção anterior, com a propriedade adicional de que todos os autovalores do mesmo estão situados na região citada. Isto é facilmente verificável observando-se que a equação (1.25) é similar à equação (1.18) considerando-se como nova matriz de ponderação de estados: $C'QC + 2\alpha P_\alpha$.

Estes procedimentos para alocação de espectro de sistemas dinâmicos apresentam deficiências tais como: surgimento de ganhos elevados no controlador em situações de fraca controlabilidade do sistema, além da hipótese restritiva de que todo o estado do sistema é disponível para o controlador.

Na próxima subseção o problema do regulador linear quadrático com realimentação de estado estimado será abordado, originando desta forma o projeto LQG.

1.3 O problema de controle ótimo com realimentação de estado estimado

O problema de regulação ótima visto na seção anterior (LQR) pressupõe que os estados do sistema são mensuráveis de forma direta. Genericamente porém, isto não ocorre, sendo então necessário obter-se uma estimativa deste estado com base em medições de variáveis do sistema.

Este é o problema de observação de estados que produz uma aproximação do estado original, a qual denomina-se $\hat{x}(t)$, a partir de informações sobre a entrada e a saída. Esta estimativa do estado real do sistema pode ser obtida utilizando-se um observador ótimo denominado Filtro de Kalman-Bucy (FKB).

Uma solução possível para o problema de controle ótimo com realimentação de estado estimado seria, portanto, utilizar o regulador ótimo LQR retroagindo, ao invés do estado real do sistema, uma estimativa do mesmo obtida pelo observador ótimo FKB. Esta metodologia de controle é conhecida como controle ótimo Linear Quadrático e Gaussiano e apresenta a denominada propriedade da *separação* que garante que a combinação de um regulador ótimo (LQR) com um observador ótimo (FKB) produz um controlador ótimo que utiliza a saída e a entrada do sistema e minimiza um funcional de custo semelhante ao da seção anterior.

Este procedimento é denominado Gaussiano porque além de medir a saída e a entrada do sistema, este ainda supõe que estas são afetadas por processos estocásticos de ruído branco (gaussiano). Desta forma, pode-se representar, de maneira simbólica, a solução proposta por:

$$\boxed{\text{LQR}} + \boxed{\text{FKB}} = \boxed{\text{LQG}}$$

1.3.1 Metodologia LQG

Seja o modelo de um sistema linear, invariante no tempo, dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \Gamma\omega \\ y(t) = Cx(t) + v \end{cases} \quad (1.26)$$

onde $x(t)$, $y(t)$, A , B e C são definidos como na seção anterior ω e v são vetores, de dimensões apropriadas, que representam "ruídos brancos", isto é, processos estocásticos com média zero e não correlacionados no tempo, com covariâncias:

$$E\{\omega\omega'\} = W \geq 0, \quad E\{vv'\} = V > 0 \quad (1.27)$$

e Γ é uma matriz constante, também de dimensão apropriada, que define a maneira pela qual o vetor de ruídos ω afeta a equação de estados. Assume-se que estes sinais de ruído também não são correlacionados entre si, isto é,

$$E\{\omega v'\} = 0$$

O problema LQG consiste em obter uma lei de controle que minimize o "custo":

$$J = \lim_{t_f \rightarrow \infty} E\left\{\int_0^{t_f} [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt\right\} \quad (1.28)$$

com:

$$\begin{aligned} Q &= Q' > 0 \\ R &= R' > 0 \end{aligned} \quad (1.29)$$

matrizes de ponderação da saída e da entrada, respectivamente.

A solução para o problema LQG é dada, como já foi visto, pelo princípio da separação que diz que o resultado ótimo é obtido adotando-se o seguinte procedimento:

1. Obter uma estimativa otima $\hat{x}(t)$ do estado $x(t)$. Esta optimalidade é no sentido de que $E\{(x(t) - \hat{x}(t))'(x(t) - \hat{x}(t))\}$ é minimizado.
2. Usar esta estimativa como se esta fosse uma medida exata do estado real e resolver o problema do regulador linear quadrático.

1.3.2 Solução do problema LQG

A solução do primeiro sub-problema definido na subseção anterior é obtida implementando-se um filtro de Kalman que tem uma estrutura semelhante à de um observador de estados pois possui como entradas a entrada e a saída do sistema e como saída o estado observado $\hat{x}(t)$. A estrutura do filtro de Kalman-Bucy é mostrada na figura 1.4.

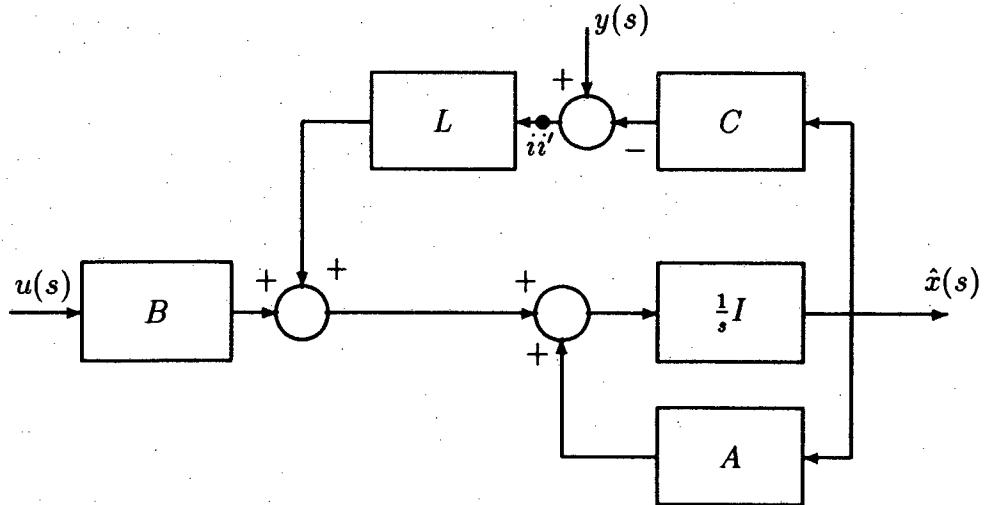


Figura 1.4: Estrutura do filtro de Kalman.

Nesta implementação, as matrizes A , B e C são idênticas às do sistema, as quais são supostas conhecidas, e a matriz L , que é o ganho do filtro de Kalman, é dada por:

$$L = SC'V^{-1} \quad (1.30)$$

onde S satisfaz a seguinte equação do tipo Riccati algébrica:

$$SA' + AS - SC'V^{-1}CS + \Gamma W\Gamma' = 0 \quad (1.31)$$

com $S = S' > 0$ sendo a única solução da equação acima, supondo-se $(A, \Gamma W^{1/2})$ controlável e (C, A) detetável.

O segundo sub-problema a ser resolvido é o de encontrar um sinal de controle que minimize o custo da forma:

$$\int_0^\infty [y'(t)Qy(t) + u'(t)Ru(t)]dt$$

supondo-se realimentação do verdadeiro estado do sistema e também que a equação de estado deste seja dada simplesmente por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

A solução deste problema foi obtida na seção anterior e consiste em aplicar ao sistema uma lei de controle dada por:

$$u(t) = -Fx(t)$$

com:

$$F = R^{-1}B'P \quad (1.32)$$

onde P é a única solução simétrica positiva definida da seguinte equação de Riccati algébrica dual a anterior:

$$A'P + PA - PBR^{-1}B'P + C'QC = 0 \quad (1.33)$$

com o sistema (A, B) estabilizável e (C, A) observável.

A estrutura do compensador LQG obtido compondo-se as duas soluções apresentadas é exposta na figura 1.5.

Na próxima subseção serão analisadas as propriedades de robustez que se obtém quando se agregam as duas soluções anteriores.

1.3.3 O procedimento LTR

Relembrando a estrutura do regulador LQR mostrada na figura 1.2 e comparando-a com a do observador ótimo da figura 1.4, percebe-se que existem algumas semelhanças entre elas. Visualiza-se nestas figuras dois laços de realimentação quais sejam:

$$H_c(s) = -F(sI - A)^{-1}B \quad (1.34)$$

$$H_f(s) = -C(sI - A)^{-1}L \quad (1.35)$$

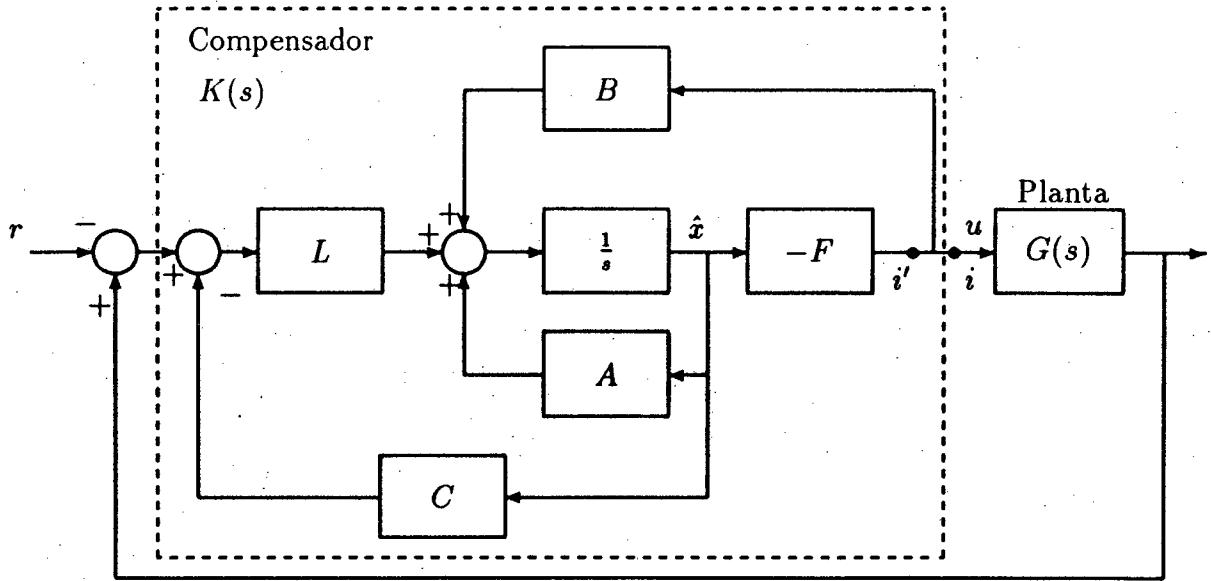


Figura 1.5: Estrutura do compensador LQG.

onde a função de transferência $H_c(s)$ é obtida abrindo-se o laço da figura 1.2 no ponto (i') enquanto que $H_f(s)$ obtém-se abrindo-se o laço da figura 1.4 no ponto (ii') . Na seção anterior, exploraram-se as propriedades de estabilidade e de margens de ganho e de fase apresentadas pela função de transferência $H_c(s)$. Devido ao fato destas duas funções de transferência de laço serem obtidas como soluções de dois problemas duais, quais sejam LQR e FKB, elas possuem as mesmas propriedades de robustez.

Seria esperado então, que os compensadores LQG exibissem boas características de desempenho e de robustez frente a variações de ganho e de fase no sistema. Infelizmente, isto não é verdade no caso geral. Sabe-se [22] que reguladores LQG podem apresentar péssimas margens de estabilidade. Um dos procedimentos clássicos quando do projeto de sistemas de controle baseados em realimentação/observação de estados é tornar a dinâmica da observação destes estados arbitrariamente rápida. Está demonstrado em [23] que este procedimento pode, em alguns casos, reduzir as margens de estabilidade do sistema em malha fechada à medida que estas dinâmicas tornam-se mais rápidas.

Existe, porém, uma maneira de se obter o ganho do filtro de Kalman utilizado no projeto LQG de tal forma a recuperar as propriedades de robustez na entrada da planta. O que se deve fazer é posicionar alguns dos autovalores do observador sobre os zeros do sistema, e os demais serem escolhidos com uma dinâmica arbitrariamente rápida. Uma vez que este procedimento implica cancelamento pólos/zeros, a condição de que a planta seja de fase mínima²

²trabalhos recentes já relaxaram esta condição [72].

é exigida.

O procedimento LTR tem como objetivo justamente recuperar as mesmas propriedades de robustez exibidas por (1.34), para a função de transferência obtida abrindo-se o laço de realimentação da figura 1.5 no ponto (*i*), ou seja, na entrada da planta. Para isto, deve-se fazer com que esta função de transferência tenda àquela obtida quando da abertura da malha de realimentação no ponto (*i'*) que é igual a $H_c(s)$ ³. Tal procedimento é descrito a seguir.

Abrindo-se o laço de realimentação no ponto (*i*), obtém-se a seguinte função de transferência:

$$K(s)G(s) = -F(sI - A + BF + LC)^{-1}LC(sI - A)^{-1}B \quad (1.36)$$

Definindo-se:

$$\begin{cases} \Phi(s) = (sI - A)^{-1} \\ \Psi(s) = (sI - A + BF)^{-1} \end{cases} \quad (1.37)$$

e reescrevendo (1.36) suprimindo o argumento *s*, tem-se:

$$KG = -F[\Psi^{-1} + LC]^{-1}LC\Phi B \quad (1.38)$$

$$= -F[\Psi - \Psi L(C\Psi L + I)^{-1}C\Psi]LC\Phi B \quad (1.39)$$

$$= -F\Psi L[I - (C\Psi L + I)^{-1}C\Psi L]C\Phi B \quad (1.40)$$

$$= -F\Psi L[I + C\Psi L]^{-1}C\Phi B \quad (1.41)$$

Nas manipulações acima, foi utilizado o lema da inversão matricial.⁴

Supondo que *L* tenha sido obtido escolhendo a matriz de covariância *W*, em (1.31), como sendo:

$$W = W_0 + q\Sigma \quad (1.42)$$

onde $\Sigma = \Sigma' \geq 0$, e *q* é um parâmetro real positivo. Para obter-se LTR aumenta-se indefinidamente este escalar *q*. Substituindo (1.42) em (1.31):

$$\frac{SA'}{q} + \frac{AS}{q} - \frac{SC'V^{-1}CS}{q} + \frac{\Gamma W_0 \Gamma'}{q} + \Gamma \Sigma \Gamma' = 0 \quad (1.43)$$

Sabe-se [35] que se $C(sI - A)^{-1}\Gamma W^{1/2}$ não tiver zeros de transmissão no semiplano direito e tiver no mínimo *r* saídas, onde *r* é o posto de Σ , então:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \frac{S}{q} = 0 \quad (1.44)$$

A partir de (1.43) e (1.44), tem-se:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} (q\Gamma\Sigma\Gamma')^{1/2} = SC'V^{-1/2}$$

³supondo-se casamento perfeito entre as matrizes do sistema e do observador.

⁴ $(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(DA^{-1}B + C^{-1})^{-1}DA^{-1}$

mas:

$$L = SC'V^{-1}$$

então:

$$L \rightarrow q^{1/2}\Gamma\Sigma^{1/2}V^{-1/2} \text{ à medida que } q \rightarrow \infty$$

Em particular, fazendo:

$$\Gamma = B, \quad \Sigma = I$$

e supondo que $C(sI - A)^{-1}B$ não tem zeros no semi-plano direito, então:

$$L \rightarrow q^{1/2}BV^{-1/2} \text{ à medida que: } q \rightarrow \infty$$

Substituindo novamente em (1.41), conclui-se⁵ que:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} KG = -F\Phi B$$

a qual é a própria função de transferência obtida abrindo-se o laço da figura 1.5 no ponto (*i'*), como desejado.

□

1.3.4 Propriedades de robustez dos controladores LQG

O procedimento descrito acima é conhecido como LTR assintótico padrão devido a existência do limite infinito para q . Na prática, fazendo-se $q \rightarrow \infty$, faz-se também com que $L \rightarrow \infty$ o que, obviamente, não é implementável. O projeto LQR é então levado a cabo fazendo-se q assumir valores grandes, mas finitos, fazendo com que as propriedades de robustez na entrada da planta se aproximem daquelas do regulador LQR. É interessante notar que tal técnica visa o resgate da robustez na entrada da planta. De forma similar, se pode projetar um controlador LQG que tenha como objetivo melhorar o desempenho e a insensibilidade a perturbações na saída da planta através de um desenvolvimento inteiramente análogo⁶. Neste caso, modifica-se o projeto do regulador linear quadrático de forma semelhante.

Usualmente, a melhoria das características de robustez na entrada do sistema deteriora estas na saída do mesmo, e vice-versa, estabelecendo-se assim um compromisso entre desempenho na entrada e na saída da planta [59]. Recentes trabalhos [67] relacionam o projeto LQG

⁵a hipótese de que o número de saídas é maior do que o de entradas é assumida.

⁶neste caso assume-se que a planta tem mais entradas do que saídas.

com a Teoria da Passividade e conseguem estabelecer um compromisso bastante aceitável entre as propriedades de robustez na entrada e na saída da planta. Ademais, estes resultados permitem a inclusão de incertezas paramétricas no modelo sem que isto prejudique a estabilidade do sistema global.

Na próxima seção será abordado o problema estudado pela teoria de controle H_∞ , o qual apresenta alguns pontos em comum com o projeto LQG/LTR. Além disso, a apresentação deste problema visa introduzir alguns conceitos de fundamental importância para os capítulos posteriores.

1.4 O problema de controle H_∞

Normalmente, quando do projeto de um sistema de controle, trabalha-se com plantas sujeitas a perturbações externas. Portanto, um dos objetivos do controle deve ser, também, o de reduzir a um nível aceitável o efeito destas perturbações na saída. Por exemplo, em [70], o problema de rejeição total de perturbações utilizando realimentação de estados é abordado e resolvido, isto é, mediante determinada lei de controle, as perturbações na entrada não seriam detetáveis na saída. Este procedimento porém, assume hipóteses bastante restritivas quanto ao sistema, o que limita a sua aplicabilidade a problemas reais.

Ao invés de eliminar-se completamente o efeito de tais perturbações externas na saída, uma idéia interessante é vislumbrar a redução deste efeito ao seu patamar mínimo, segundo as limitações práticas de projeto.

Uma possível abordagem para a solução deste problema é o de minimizar a norma H_∞ da função de transferência destas entradas de perturbação para as saídas controladas. Esta norma está, de certa forma, associada ao maior ganho que pode existir de alguma das entradas para alguma das saídas, ao longo de todo o espectro de freqüência. Logo, a minimização da norma H_∞ de uma função de transferência consiste em abordar o problema de rejeição de perturbações analisando-se o pior caso possível de ganho entrada/saída para este sistema.

A norma H_∞ de uma função de transferência $G(s)$ é denotada $\| G(jw) \|_\infty$ e é calculada como sendo o máximo valor singular de $G(jw)$ para todos os valores reais de w , isto é:

$$\| G(jw) \|_\infty \triangleq \max_{w \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(jw)) = \max_{w \in \mathbb{R}} \bar{\lambda}(G'(-jw)G(jw))$$

onde $\bar{\sigma}(\cdot)$ e $\bar{\lambda}(\cdot)$ denotam, respectivamente, o máximo valor singular e o máximo autovalor do argumento.

Desde a publicação do artigo pioneiro de Zames [71], a teoria de controle ótimo H_∞

constitui-se num importante campo de pesquisa. A teoria original é inteiramente baseada em métodos no domínio frequencial, porém a obtenção das soluções é realizada utilizando-se modelos e algoritmos fundamentados na abordagem por equações de estado.

Nesta seção será apresentado um resultado que possibilita a resolução do problema de controle H_∞ mediante o cálculo da solução de uma equação de Riccati modificada. Percebe-se que novamente, como no caso LQG/LTR, a equação de Riccati tem um papel importante na busca de soluções para problemas típicos da teoria de controle.

1.4.1 Norma H_∞ e equação de Riccati

Seja o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Dw(t) \\ z(t) = Ex(t) \end{cases} \quad (1.45)$$

onde $x(t)$ é o vetor de estados, $z(t)$ é o vetor de saídas controladas e $w(t)$ é o vetor de perturbações. A , D e E são matrizes constantes, de dimensões apropriadas, com elementos no corpo dos números complexos. Supõe-se também que o par (A, D) é controlável e (E, A) é observável.

É importante salientar que o interesse aqui é o de analisar o efeito das perturbações na saída do sistema. Devido a isto, as entradas de controle não aparecem no sistema (1.45). Na próxima subseção, métodos para minimizar este efeito indesejável das perturbações na saída via realimentação de estados serão estudados.

O sistema (1.45) possui função de transferência da perturbação para a saída dada por:

$$H(s) = E(sI - A)^{-1}D$$

Assumindo-se que o sistema seja estável, ele apresenta uma norma H_∞ como definida anteriormente. Suponha que deseja-se verificar se esta norma é menor do que um valor constante pré-especificado γ . Este problema está diretamente ligado à existência de solução para a seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A'P + PA + \frac{PDD'P}{\gamma^2} + EE' + Q = 0 \quad (1.46)$$

Para ilustrar a relação entre a equação (1.46) e a norma H_∞ de $H(s)$, enuncia-se o seguinte resultado:

Teorema 1.3 [56] A equação de Riccati algébrica (1.46) associada ao sistema (1.45) possui uma solução $P = P'$ positiva definida para alguma $Q = Q' > 0$ se e somente se as seguintes condições verificarem-se:

(i) A matriz A possui todos os seus auto-valores no semi-plano esquerdo aberto do plano s .

(ii) $\| H(s) \|_{\infty} < \gamma$.

Demonstração:

Suficiência: Se

$$\| E(sI - A)^{-1}D \|_{\infty} < \gamma$$

então:

$$\left\| \frac{E(sI - A)^{-1}D}{\gamma} \right\|_{\infty} < 1$$

isto é:

$$I - \frac{D'(-sI - A')^{-1}E'E(sI - A)^{-1}D}{\gamma^2} > 0 ; \forall s = jw$$

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que:

$$I - \frac{D'(-sI - A')^{-1}(E'E + \epsilon Q)(sI - A)^{-1}D}{\gamma^2} > 0 ; \forall s = jw ; Q = Q' > 0$$

Tem-se que o par $(A, (E'E + \epsilon Q)^{1/2})$ é observável e que o par $(A, \frac{D}{\gamma})$ é controlável. Então, pelo teorema A.1, existe uma matriz P simétrica, real, tal que:

$$A'P + PA + \frac{PDD'P}{\gamma^2} + E'E + \epsilon Q = 0$$

Uma vez que o sistema em malha aberta é assumido estável, e:

$$\frac{PDD'P}{\gamma^2} + E'E + \epsilon Q > 0$$

então, pela teoria de estabilidade de Lyapunov, tem-se que:

$$P = P' > 0$$

Necessidade: Se

$$A'P + PA + \frac{PDD'P}{\gamma^2} + E'E + Q = 0 ; Q = Q' > 0 ; P = P' > 0$$

então todos os autovalores de A têm parte real estritamente negativa. Além disso, pelo teorema A.1, tem-se:

$$I - \frac{D'(-jwI - A')^{-1}E'E(jwI - A)^{-1}D}{\gamma^2} \geq 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

$$\gamma^2 I - D'(-jwI - A')^{-1}E'E(jwI - A)^{-1}D \geq 0 \quad \forall w \in \mathbb{R}$$

$$\gamma^2 I - H(-jw)'H(jw) \geq 0$$

Donde⁷:

$$\| E(sI - A)^{-1}D \|_{\infty} < \gamma$$

□

1.4.2 O problema de controle H_{∞} e realimentação de estados

Na subseção anterior foram analisadas as relações entre a norma H_{∞} de uma função de transferência e uma certa equação de Riccati algébrica do tipo (1.46). Suponha que agora deseja-se reduzir esta norma H_{∞} , utilizando-se para isto realimentação de estados. O sistema linear invariante no tempo tratado é escrito sob a forma mais geral:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dw(t) \\ z(t) = Ex(t) \end{cases} \quad (1.47)$$

onde $u(t)$ é o vetor de entradas de controle. Deseja-se então que o sistema (1.47) em malha fechada, da figura 1.6, apresente norma H_{∞} menor do que uma constante γ pré-especificada.

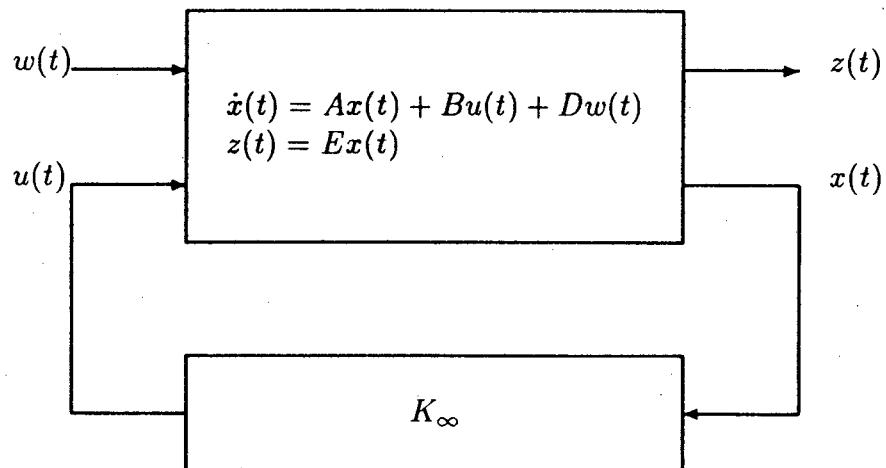


Figura 1.6: Esquema de controle H_{∞} .

O teorema enunciado a seguir é fundamental para a resolução do problema de controle ótimo H_{∞} utilizando-se a análise temporal.

Teorema 1.4 [56] Considerando-se o sistema (1.47) e dada a constante $\gamma > 0$. Então existe um ganho estático de realimentação de estados K_{∞} tal que $A + BK_{\infty}$ é estável e tal que a função de transferência do sistema em malha fechada satisfaz a condição:

$$\| E(sI - A - BK_{\infty})^{-1}D \|_{\infty} < \gamma$$

⁷está demonstrado em [32] que a desigualdade estrita pode ser inferida.

se e somente se, para algum $\epsilon > 0$ constante, existir uma solução simétrica positiva definida P , para a seguinte equação algébrica de Riccati:

$$A'P + PA - \frac{1}{\epsilon}PBB'P + \frac{1}{\gamma^2}PDD'P + \epsilon I = 0 \quad (1.48)$$

e neste caso o ganho de realimentação de estados necessário é dado por:

$$K_\infty = -\frac{1}{2\epsilon}B'P \quad (1.49)$$

com a lei de controle dada por $u(t) = K_\infty x(t)$.

Demonstração:

Suficiência: Se (1.48) se verifica, então aplicando a lei de controle $u(t) = K_\infty x(t)$, ao sistema (1.47), tem-se:

$$\hat{A} \triangleq A - \frac{1}{2\epsilon}BB'P \quad (1.50)$$

e a equação de Riccati (1.48) fica:

$$\hat{A}'P + P\hat{A} + \frac{1}{\gamma^2}PDD'P + \epsilon I = 0 \quad \checkmark$$

Utilizando-se o teorema anterior, tem-se que o sistema em malha fechada é estável e que sua norma H_∞ satisfaaz a condição:

$$\| E(sI - \hat{A})^{-1}D \|_\infty < \gamma$$

Necessidade: Supondo-se que \hat{A} possui todos os seus autovalores com parte real negativa e que:

$$\| E(sI - \hat{A})^{-1}D \|_\infty < \gamma$$

então:

$$\left\| \frac{E(sI - \hat{A})^{-1}D}{\gamma} \right\|_\infty < 1$$

isto é:

$$I - \frac{D'(-jwI - \hat{A}')^{-1}E'E(jwI - \hat{A})^{-1}D}{\gamma^2} > 0 ; \forall w \in \mathbb{R}$$

Seja $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tal que:

$$I - \frac{D'(-jwI - \hat{A}')^{-1}(E'E + \epsilon I)(jwI - \hat{A})^{-1}D}{\gamma^2} > 0 ; \forall w \in \mathbb{R}$$

Tem-se que o par $(\hat{A}, (E'E + \epsilon I)^{1/2})$ é observável e que o par $(\hat{A}, \frac{D}{\gamma})$ é controlável. Então, pelo teorema A.1, existe uma matriz P simétrica, real, tal que:

$$\hat{A}'\bar{P} + \bar{P}\hat{A} + \frac{\bar{P}DD'\bar{P}}{\gamma^2} + E'E + \epsilon I = 0$$

com $\bar{P} = \bar{P}' > 0$. Substituindo-se K_∞ por sua expressão e utilizando o teorema A.2, tem-se:

$$A'P + PA - \frac{1}{\epsilon}PBB'P + \frac{1}{\gamma^2}PDD'P + \epsilon I = 0$$

□

Enuncia-se agora, um teorema fundamental na elaboração de um algoritmo para a minimização da norma H_∞ de uma função de transferência.

Teorema 1.5 [51] Suponha que a equação (1.48) possui uma solução $P = P' > 0$ para algum $\epsilon = \epsilon^* > 0$ então esta equação apresenta solução simétrica positiva definida para qualquer $\epsilon \in (0, \epsilon^*]$.

Demonstração: a demonstração está detalhada em [51].

□

Conhecendo-se este resultado, pode-se proceder da seguinte maneira para verificar se um sistema pode ser estabilizado com constante de atenuação γ , isto é, se a norma H_∞ da respectiva função de transferência pode ser limitada em γ :

Algoritmo para minimização da norma H_∞

1. Escolhe-se $\gamma > 0$.
2. Arbitra-se $\epsilon > 0$.
3. Se a equação (1.48) possui uma solução $P = P' > 0$, então diminui-se γ e volta-se ao passo 2. Senão, se $\epsilon > \epsilon_{min}$ ⁸ então $\epsilon = \frac{\epsilon}{2}$ e volta-se ao passo 3.

⁸ ϵ_{min} deve ser escolhido de acordo com as restrições na norma do ganho de realimentação de estados e também de acordo com a precisão da máquina utilizada para os cálculos.

4. A mínima norma H_∞ para o sistema em questão é dada pelo último valor de γ para o qual a equação (1.48) apresentou solução $P = P' > 0$. Neste caso o ganho de realimentação de estados requerido para esta minimização é dado pela expressão (1.49).

É interessante notar que o teorema 1.4 fornece condições necessárias e suficientes para a existência de um controlador que garante que a norma H_∞ que se deseja minimizar fique limitada a um patamar superior γ . Ora, aplicando-se este resultado para valores cada vez menores deste parâmetro γ , na verdade, está sendo alcançada a minimização desta norma H_∞ para o sistema considerado.

A minimização de tal norma conforme descrita acima é, de fato, a maior possível. Esta afirmação é procedente graças ao resultado detalhado a seguir.

Teorema 1.6 [31] *O ínfimo da norma H_∞ de uma função de transferência em malha fechada obtida por retroação linear estática de estados é igual ao ínfimo desta norma obtido por meio de qualquer controlador que garanta a estabilidade do sistema, mesmo sendo este controlador não-linear e variante no tempo.*

Demonstração: ver [31].

□

1.4.3 Propriedades de robustez dos controladores H_∞

Considerando-se que estes controladores são obtidos utilizando-se a solução de uma equação de Riccati modificada, parece natural que eles apresentem as mesmas propriedades de robustez dos controladores LQR.

Com efeito, considerando-se a equação (1.48) reproduzida abaixo:

$$A'P + PA - \frac{1}{\epsilon}PBB'P + \frac{1}{\gamma^2}PDD'P + \epsilon I = 0$$

nota-se que, uma vez encontrada uma solução $P = P' > 0$, ela pode ser vista como uma equação de Riccati padrão:

$$A'P + PA - PB\hat{R}^{-1}B'P + \hat{Q} = 0$$

com:

$$\hat{Q} \triangleq \frac{1}{\gamma^2}PDD'P + \epsilon I \quad ; \quad \hat{R} \triangleq \epsilon I$$

Portanto, os controladores H_∞ , como no caso LQR, apresentam as seguintes propriedades:

- Garantem a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.
- Apresentam margem de ganho entre 0.5 e ∞ para variações no ganho da função de transferência $T_\infty(jw) = K_\infty(jwI - A)^{-1}B$.
- Também margem de fase de no mínimo 60° para variações na fase de $T_\infty(jw)$.

Ademais, sabe-se que é possível representar-se incertezas no modelo como perturbações externas atuando na planta [60]. Uma vez que o controlador H_∞ é calculado de modo a minimizar a influência de perturbações na saída do sistema, é de se esperar que este controlador apresente boas propriedades de robustez também frente a incertezas atuando no sistema. Este tópico será abordado nos próximos capítulos.

1.5 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os princípios básicos e algoritmos de cálculo de controladores consagrados na bibliografia de controle, bem como algumas de suas propriedades de robustez.

Foram expostos os principais resultados relacionados a teoria de controle ótimo supondo-se retroação de estados (LQR) e de estado estimado (LQG). Também foram abordados aspectos do problema de rejeição de perturbações, estudando-se os principais resultados da teoria de controle H_∞ com abordagem temporal. Uma verificação que merece destaque é a de que a equação algébrica de Riccati desempenha um papel assaz importante na resolução de problemas clássicos da teoria de controle.

Estas metodologias de controle são de fundamental importância para a boa compreensão dos conceitos que serão expostos no capítulo dedicado à síntese de controladores robustos. Em especial, a familiarização com técnicas de minimização de índices de desempenho e de rejeição de perturbações são de grande valia para o bom desenvolvimento do trabalho nos capítulos seguintes.

Até o presente momento, o enfoque principal foi direcionado para a síntese de leis de controle que consideravam os modelos sob análise perfeitamente conhecidos e invariantes no tempo. Além disso, no contexto da teoria clássica de controle, estes modelos matemáticos eram tomados como fiéis representantes do desempenho real do sistema físico.

Capítulo 2

Modelagem do Sistema Físico e Incertezas

2.1 Introdução

Quando da concepção de um sistema de controle, a etapa inicial consiste, em geral, na obtenção de um modelo matemático que represente adequadamente, de acordo com as exigências de projeto, o sistema físico em questão. Esta fase inicial de síntese de controladores tem evoluído sensivelmente nas últimas décadas.

Com efeito, contrariamente ao período 1960–1970, durante o qual os esforços concentravam-se essencialmente na elaboração de controladores que agissem sobre sistemas considerados perfeitamente conhecidos, no final dos anos 70 a teoria de controle evoluiu no sentido de considerar, a priori, o efeito das incertezas da modelagem matemática no projeto dos controladores.

Um modelo matemático, por mais acurado que este seja, trata-se somente de uma simplificação do sistema físico estudado, visando descrever, através de equações, o comportamento deste sistema. Em decorrência disto, é normal que este modelo matemático apresente imprecisões, em geral denominadas incertezas, que são decorrentes das simplificações realizadas ou do fato de que alguns dos parâmetros do sistema não são perfeitamente conhecidos. Desta forma, a teoria de controle moderno encaminhou-se para uma metodologia de projeto de sistemas realimentados no sentido de introduzir o conceito de *robustez*.

Na próxima seção, será feita a distinção entre os conceitos de *robustez* e de *insensibilidade*, o que é fundamental para o seguimento do trabalho. De posse destas noções, a seção seguinte será dedicada à caracterização das incertezas, suas classificações e suas origens. A seguir, são analisadas as maneiras pelas quais estas incertezas podem ser representadas quando da utilização das abordagens freqüencial e temporal para o modelamento do sistema, explicitando

assim a definição do conjunto de modelos a ser tratado pelo controle nestas duas abordagens.

2.2 Robustez × Insensibilidade

O termo robustez é frequentemente utilizado de maneira imprecisa e, às vezes, até mesmo confundido com a noção de fraca sensibilidade aos erros de modelagem.

No capítulo anterior, justamente com a intenção de conservar a nomenclatura utilizada pelos autores citados, utilizou-se a noção de robustez com o sentido de insensibilidade a possíveis variações no sistema físico considerado.

A partir deste momento é importante que se faça a clara distinção entre estas duas noções:

- robustez.
- insensibilidade.

Considerando-se o sistema a ser controlado não mais como sendo representado por um único modelo matemático fixo, mas sim por uma família ou conjunto de modelos que inclui todas as possíveis incertezas sobre o mesmo, define-se:

Definição 2.1 *Um controlador é dito robusto com relação a um conjunto de modelos especificado a priori se este garante um certo nível mínimo de desempenho para qualquer um dos possíveis modelos pertencentes a tal conjunto.*

Por outro lado, o conceito de insensibilidade está vinculado a uma análise a posteriori da influência das incertezas sobre o sistema, como na definição seguinte:

Definição 2.2 *Um sistema de controle é dito insensível se o mesmo é projetado de forma a minimizar a sensibilidade do sistema nominal¹ frente às possíveis incertezas presentes no sistema físico.*

¹nota-se que nesta definição faz-se necessário o conceito de modelo nominal.

Nota-se que na noção de insensibilidade não se está diante da modelagem do sistema físico por um conjunto de modelos, mas sim por um único modelo considerado nominal. Portanto, insensibilidade é um conceito local no sentido de que partindo-se do sistema nominal, verifica-se, a posteriori, qual o efeito das incertezas atuando sobre este sistema. Desta forma, agregam-se modelos ao modelo nominal para os quais as características de desempenho desejadas são garantidas obtendo-se assim, a posteriori, um conjunto de modelos aceitáveis, em torno do nominal, para determinado controlador.

Em contrapartida, robustez é um conceito de conjunto onde o modelo matemático juntamente com as incertezas que o afetam definem um domínio. Daí, o sistema a ser controlado deve ser visto como um conjunto de modelos definido por este domínio.

Para uma definição inequívoca de robustez, faz-se necessário ainda a definição do modo pelo qual serão descritas as tais incertezas, bem como da natureza do desempenho exigido para o domínio de modelos gerado por estas incertezas.

Uma característica fundamental exigida para todo sistema de controle é, sem dúvida, a estabilidade assintótica em malha fechada do mesmo e, para o momento será este o critério de desempenho escolhido para o conjunto de modelos.

2.3 Caracterização das incertezas

As incertezas que afetam o modelo de um sistema físico podem ter várias origens, das quais destacam-se:

1. variações paramétricas lentas e contínuas ou bruscas devidas a mudanças em certas condições de funcionamento.
2. imprecisão na estimação dos valores reais dos parâmetros do modelo.
3. aproximações de modelagem tais como linearização de um sistema em torno de um ponto de operação, ou mesmo eliminação de dinâmicas elevadas visando a redução da ordem do modelo matemático.

De acordo com suas origens, e também segundo a maneira pela qual estas incertezas afetam o modelo do sistema, elas são usualmente classificadas em:

- Incertezas Paramétricas / Não-Paramétricas.
- Incertezas Estruturadas / Não-Estruturadas.

Incertezas Paramétricas são as incertezas que podem ser atribuídas a variações ou à falta de conhecimento dos valores exatos de determinados parâmetros físicos do sistema, tais como: densidades, temperaturas, coeficientes de amortecimento, constantes de tempo, etc.

Incertezas Não-Paramétricas são geralmente oriundas de dinâmicas negligenciadas do processo, não podendo, assim, ser atribuídas a nenhum parâmetro ou coeficiente físico incerto.

Incertezas Estruturadas são aquelas incertezas das quais tem-se alguma informação sobre a maneira pela qual elas afetam os elementos sejam da matriz função de transferência, sejam das matrizes A , B , e C do sistema modelado por variáveis de estado.

Incertezas Não-Estruturadas quando não se tem nenhuma informação adicional sobre a maneira pela qual estas incertezas atuam no modelo, além do fato delas serem de norma limitada.

Apesar de não serem consensuais na literatura de controle robusto, estas definições são bem aceitas no contexto de sistemas incertos e também serão de grande importância no decorrer deste trabalho. Estes conceitos ficarão mais claros a seguir, quando da definição mais formal das incertezas utilizando-se as modelagens freqüencial e temporal.

2.4 Definição do conjunto de modelos

Esta seção tem por objetivo definir claramente o conjunto de modelos a ser considerado quando do projeto de controladores robustos definidos anteriormente. A definição deste conjunto depende da modelagem matemática que se adota para o sistema físico. Nas próximas subseções serão detalhadas estas definições quando utilizam-se as abordagens freqüencial e temporal.

2.4.1 Modelagem por função de transferência

Quando da adoção deste tipo de abordagem, a ferramenta matemática básica utilizada é a Transformada de Laplace. Assim, o sistema linear considerado pode ser modelado como:

$$y(s) = \mathcal{G}(s)u(s) \quad (2.1)$$

onde $u(s)$ e $y(s)$ são, respectivamente, as transformadas de Laplace dos vetores de entradas e saídas $u(t)$ e $y(t)$, e $\mathcal{G}(s)$ representa um conjunto onde cada elemento é uma matriz de

transferência com elementos no corpo das funções racionais da variável complexa s :

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & \cdots & g_{1m}(s) \\ g_{21}(s) & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ g_{r1}(s) & & & g_{rm}(s) \end{bmatrix}$$

onde o elemento g_{ij} representa a função de transferência da entrada j para a saída i do sistema.

Utilizando-se este tipo de modelagem, as incertezas são também caracterizadas no domínio freqüencial.

Considerando-se $G_0(s)$ como sendo a matriz de transferência nominal do sistema, as incertezas que agem sobre o sistema podem ser caracterizadas conforme a figura 2.1.

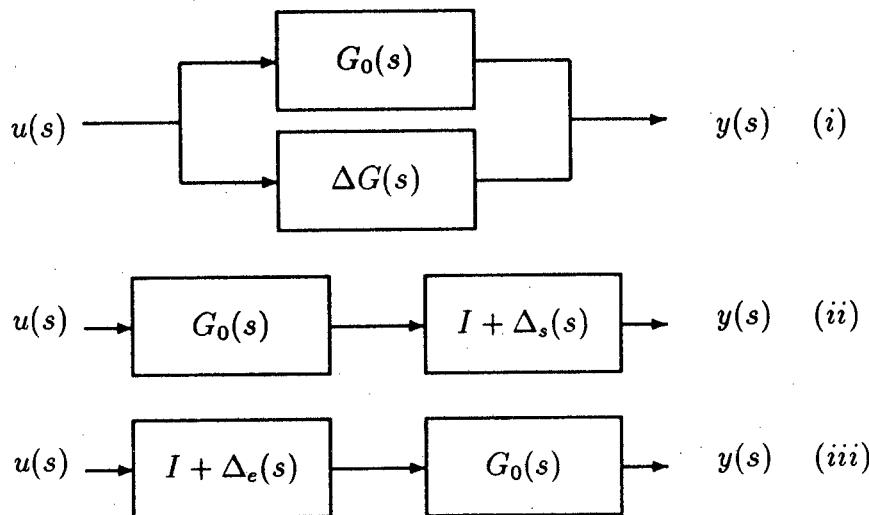


Figura 2.1: Conjunto de modelos definidos no domínio freqüencial.

Sendo assim, em cada um dos três casos citados acima, $\mathcal{G}(s)$ pode ser representado como segue:

$$\begin{aligned} (i) \quad \mathcal{G}(s) &= G_0(s) + \Delta G(s) \\ (ii) \quad \mathcal{G}(s) &= [I + \Delta_s(s)]G_0(s) \\ (iii) \quad \mathcal{G}(s) &= G_0(s)[I + \Delta_e(s)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Visto desta forma, o sistema físico é encarado como um conjunto de modelos, que são compostos de uma parte fixa, conhecida, $G_0(s)$ (modelo nominal) e de uma parte variável $\Delta G(s)$, $\Delta_s(s)$ ou $\Delta_e(s)$ (incertezas).

Utilizando-se a modelagem freqüencial, normalmente define-se o conjunto de modelos a ser tratado limitando-se somente a norma da matriz que representa as incertezas neste sistema.

Desta forma, define-se uma vizinhança em torno do sistema nominal $G_0(s)$, na qual consiste o conjunto de modelos considerado.

Adotando-se a notação:

$$\| L \| \stackrel{\Delta}{=} \bar{\sigma}[L] \equiv \sqrt{\lambda_{\max}[L^* L]}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \|\Delta G(jw)\| &\leq l_a(w) \quad \forall w \geq 0 \\ \|\Delta_s(jw)\| &\leq l_m(w) \quad \forall w \geq 0 \\ \|\Delta_e(jw)\| &\leq l_m(w) \quad \forall w \geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

As incertezas deste tipo são chamadas de *incertezas não-paramétricas não-estruturadas*, sendo a do tipo (i) denominada *aditiva* e a dos tipos (ii) e (iii) denominadas *multiplicativas*, respectivamente na saída e na entrada do sistema, segundo definem as equações (2.2) e a figura 2.1.

A denominação não-paramétrica é devido ao fato destas incertezas não serem caracterizadas como variações em parâmetros determinados do sistema, mas sim como uma medida do fraco conhecimento da resposta em freqüência do mesmo, o que pode ser causado, por exemplo, por dinâmicas não-modeladas do processo.

A representação freqüencial é utilizada, sobretudo, quando se está diante da presença de incertezas deste tipo. Neste contexto, o conjunto de modelos é obtido, geralmente, por meio de ensaios do sistema físico e da verificação de que a sua resposta em freqüência admite variações no formato das curvas de módulo e de fase. Com o arbítrio de limites para estas variações, chega-se finalmente ao conjunto de modelos que devem ser considerados admissíveis para aquele sistema físico.

Desta forma, para cada freqüência, tem-se um limite sobre a norma da variação da matriz de transferência em torno de seu valor nominal, o que define, no plano complexo, uma vizinhança em torno do modelo nominal naquela freqüência e cuja magnitude é dada pelo limite considerado para as incertezas, naquela freqüência, conforme mostra a figura 2.2.

É interessante observar que, quando modela-se o sistema incerto utilizando-se a abordagem freqüencial, supõe-se, tacitamente, que o sistema físico *pouco conhecido* é fixo, uma vez que a ferramenta função de transferência representa adequadamente somente sistemas lineares invariantes no tempo. Daí, tem-se que o conjunto de modelos citado anteriormente deve ser encarado como uma coleção de modelos invariantes no tempo que devem ser tratados simultaneamente pelo controle.

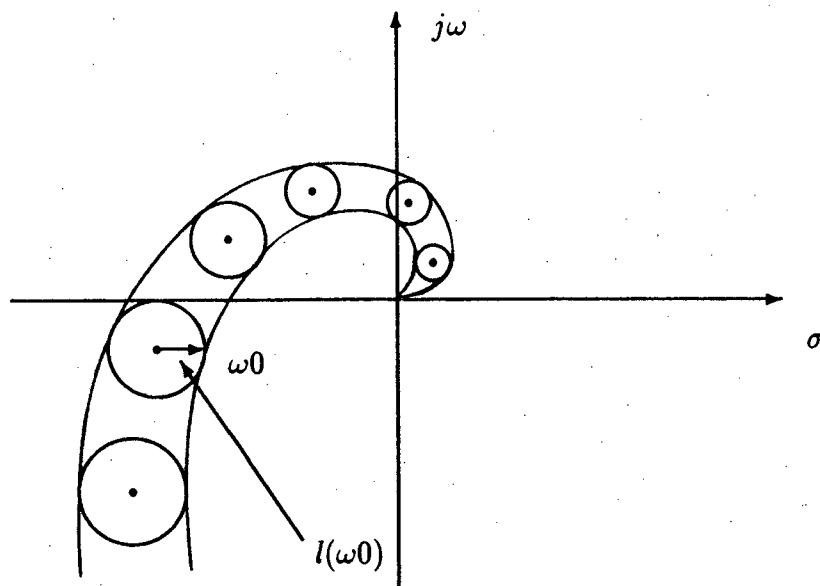


Figura 2.2: Incertezas não-estruturadas, não-paramétricas no plano complexo.

2.4.2 Modelagem por equações de estado

Nesta abordagem, faz-se uso da teoria de Equações Diferenciais e também de Álgebra Matricial para o desenvolvimento de modelos e análise de resultados. Dado que um sistema possa ter suas relações entradas-saídas descritas por meio de equações diferenciais lineares, então o mesmo pode ser representado por um sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem. A estas equações dá-se o nome de *equações de estado*. Daí surge o modelo:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.4)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados, $y \in \mathbb{R}^r$ é o vetor de saídas, $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de entradas, e onde A , B e C são conjuntos compactos que englobam, respectivamente, matrizes A , B , e C , de dimensões apropriadas e com elementos no corpo dos números complexos.

Desta maneira, as equações acima definem uma família de modelos ao invés de um único. Nesta família ou conjunto de modelos, as incertezas são consideradas a partir do momento em que admite-se que as matrizes do modelo matemático assumam quaisquer valores dentro dos seus respectivos conjuntos compactos especificados a priori representados por letras caligráficas, conforme mostra a figura 2.3.

Estes conjuntos compactos apresentam-se, geralmente, sob a forma de hiperesferas ou de outros poliedros convexos no espaço de matrizes. Este espaço de matrizes é de dimensão igual ao número de elementos incertos em cada uma destas matrizes.

A representação de estados fornece informações adicionais sobre a dinâmica interna do

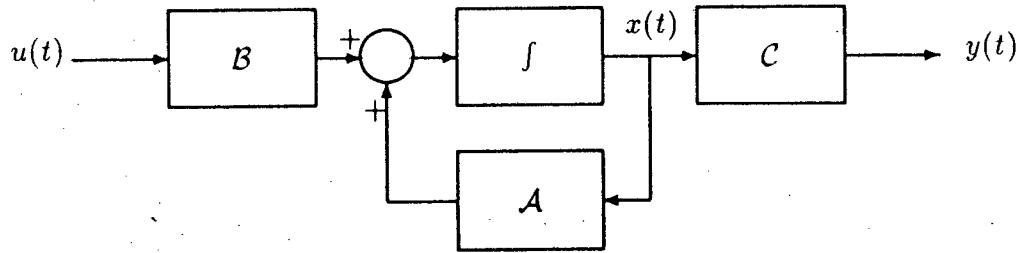


Figura 2.3: Conjunto de modelos no espaço de estados.

sistema, e não somente sobre as suas relações entradas-saídas, como no caso da representação freqüencial. Portanto, esta representação permite um conhecimento mais aprofundado sobre a estrutura interna deste sistema, permitindo assim um tratamento mais específico para as incertezas que o afetam.

De acordo com as estruturas dos conjuntos compactos \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} definidos em (2.4), tem-se que a caracterização das incertezas que formam o conjunto de modelos a ser tratado pelo controle pode ser feita de várias maneiras. Segundo a estrutura desta caracterização, as incertezas podem ser classificadas em diversos tipos, dentre eles:

Definição 2.3 Incerteza do tipo Linear Convexa: as incertezas do sistema (2.4) são do tipo linear convexa se \mathcal{A} , \mathcal{B} , e \mathcal{C} possuírem as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\triangleq \{A : A = \sum_{j=1}^{nr} r_j(t)A_j\} \\ \mathcal{B} &\triangleq \{B : B = \sum_{k=1}^{ns} s_k(t)B_k\} \\ \mathcal{C} &\triangleq \{C : C = \sum_{l=1}^{nq} q_l(t)C_l\}\end{aligned}$$

com:

$$r_j(t) \geq 0 ; j = 1, \dots, nr \quad e \quad r_1(t) + \dots + r_{nr}(t) = 1$$

$$s_k(t) \geq 0 ; k = 1, \dots, ns \quad e \quad s_1(t) + \dots + s_{ns}(t) = 1$$

$$q_l(t) \geq 0 ; l = 1, \dots, nq \quad e \quad q_1(t) + \dots + q_{nq}(t) = 1$$

Nesta definição, as matrizes A_j , B_k e C_l definem os vértices dos politopos, respectivamente, para as incertezas nas matrizes A , B e C , e os escalares $r_j(t)$, $s_k(t)$ e $q_l(t)$ permitem

a combinação linear convexa destes vértices para a representação dos pontos internos a estes politopos. Estes pontos internos representam valores numéricos admissíveis, respectivamente, para as matrizes A , B e C do modelo.

Definindo-se:

$$\begin{aligned}na &\stackrel{\Delta}{=} \text{número de elementos incertos na matriz } A \\nb &\stackrel{\Delta}{=} \text{número de elementos incertos na matriz } B \\nc &\stackrel{\Delta}{=} \text{número de elementos incertos na matriz } C\end{aligned}$$

tem-se que:

$$\begin{aligned}nr &\stackrel{\Delta}{=} 2^{na} = \text{número de vértices de } \mathcal{A}. \\ns &\stackrel{\Delta}{=} 2^{nb} = \text{número de vértices de } \mathcal{B}. \\nq &\stackrel{\Delta}{=} 2^{nc} = \text{número de vértices de } \mathcal{C}.\end{aligned}$$

então pode-se associar um espaço no qual cada ponto P_i representa uma tripla de matrizes da forma (A_i, B_i, C_i) , tem-se então que a família de modelos definida por (2.4) forma, neste espaço, um único politopo convexo. Os vértices deste politopo são pontos do tipo:

$$P_V = (A_j, B_k, C_l), \quad \text{com: } \begin{aligned}j &= 1, \dots, nr \\k &= 1, \dots, ns \\l &= 1, \dots, nq\end{aligned}$$

Os pontos internos a este politopo representam modelos admissíveis para o sistema, e são obtidos a partir de combinações lineares convexas dos vértices P_V . O número de vértices deste politopo é função do número total de elementos incertos nas matrizes A , B e C do sistema:

$$n_V = 2^{na+nb+nc}$$

Além disso, a dimensão do espaço no qual tal politopo pode ser representado é dada por $na + nb + nc$. A figura 2.4 ilustra a representação de um sistema incerto de ordem qualquer com $na + nb + nc = 3$. Neste caso, adotou-se a mesma magnitude de variação para todos os parâmetros.

Incertezas modeladas desta maneira são consideradas estruturadas pois pode-se facilmente perceber os limites de variação permitidos para cada um dos elementos das matrizes que definem o modelo. Além disso, geralmente estas incertezas são consideradas paramétricas, pois estão associadas a variações em coeficientes de equações diferenciais os quais, por sua vez são, via de regra, relacionados intimamente com parâmetros físicos do sistema.

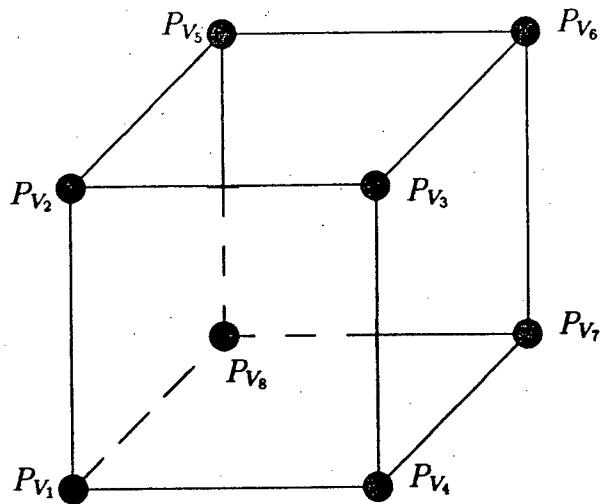


Figura 2.4: Politopo convexo no espaço de sistemas representando um modelo com 3 elementos incertos no total

Utilizando-se a definição acima, nota-se que não há nenhuma referência explícita quanto à existência de um modelo nominal para o sistema tratado.

No caso de definir-se um modelo dentre os possíveis como sendo o nominal, supõe-se que o sistema (2.4) pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A_0 + \Delta A(t))x + (B_0 + \Delta B(t))u \\ y = (C_0 + \Delta C(t))x \end{cases} \quad (2.5)$$

com:

$$\begin{aligned} \Delta A(t) &\triangleq D\Delta_A(t)E \\ \Delta B(t) &\triangleq F\Delta_B(t)G \\ \Delta C(t) &\triangleq H\Delta_C(t)W \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nesta formulação, A_0 , B_0 e C_0 representam as matrizes que formam o modelo nominal, D , E , F , G , H , W são matrizes constantes que determinam como as incertezas afetam os elementos das matrizes A_0 , B_0 e C_0 , e $\Delta_A(t)$, $\Delta_B(t)$ e $\Delta_C(t)$, são matrizes desconhecidas, somente limitadas em norma, que representam as fontes de incertezas, respectivamente, nas matrizes A , B e C . É interessante notar que sempre é possível, através de um escalonamento adequado das matrizes D , E , F , G , H e W , normalizar o limite sobre a norma de variação das matrizes de incertezas.

Daí, pode-se definir outros tipos de estrutura para os conjuntos compactos que formam o conjunto de modelos.

Definição 2.4 Incerteza Limitada em Norma: as incertezas do sistema (2.4) são do tipo limitadas em norma se \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} possuírem as seguintes estruturas:

$$\mathcal{A} \triangleq \{A : A = A_0 + D\Delta_A(t)E \quad ; \quad \|\Delta_A(t)\| \leq 1 \quad \forall t\}$$

$$\mathcal{B} \triangleq \{B : B = B_0 + F\Delta_B(t)G \quad ; \quad \|\Delta_B(t)\| \leq 1 \quad \forall t\}$$

$$\mathcal{C} \triangleq \{C : C = C_0 + H\Delta_C(t)W \quad ; \quad \|\Delta_C(t)\| \leq 1 \quad \forall t\}$$

Dado o interesse em obter-se um controlador linear invariante no tempo, utilizando-se retroação de estados, pode-se reescrever (2.5), em malha fechada, como:

$$\dot{x} = (A_0 + \Delta A(t))x + (B_0 + \Delta B(t))Kx \quad (2.7)$$

onde K representa o controlador estático considerado.

Com as equações (2.6), tem-se:

$$\dot{x} = (A_0 + B_0K + D_{AUM}\Delta_{AUM}(t)E_{AUM})x \quad (2.8)$$

com:

$$D_{AUM} \triangleq [D \ F]$$

$$E'_{AUM} \triangleq [E' \ (GK)']$$

$$\Delta_{AUM}(t) \triangleq \text{diag}[\Delta_A(t) \ \Delta_B(t)]$$

onde $\|\Delta_{AUM}(t)\| \leq 1$.

Definindo-se os seguintes vetores auxiliares:

$$v \triangleq E_{AUM}x$$

$$w \triangleq \Delta_{AUM}v$$

as incertezas sobre o modelo podem ser encaradas como um bloco de realimentação incerto, limitado em norma, bloco-diagonal, como ilustrado na figura 2.5.

As incertezas Limitadas em Norma são consideradas não-estruturadas, uma vez que, sendo as matrizes que as representam somente limitadas em norma, pouco se sabe sobre a maneira pela qual estas variações afetam os elementos das matrizes nominais do sistema. Normalmente este tipo de incerteza possui uma natureza não-paramétrica, podendo ser ocasionada, por exemplo por dinâmicas não modeladas do sistema.

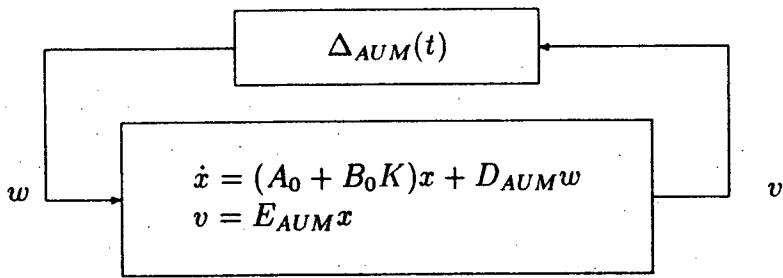


Figura 2.5: Incertezas sobre o modelo, limitadas em norma, vistas como um bloco de realimentação incerto.

O propósito do modelamento deste tipo de incertezas como um bloco de realimentação incerto consiste em proporcionar uma nova forma de visualização para as mesmas, e possivelmente apontar direções para tratá-las posteriormente.

Retomando-se o sistema (2.5), pode-se explorar um pouco mais as estruturas das matrizes $\Delta_A(t)$, $\Delta_B(t)$ e $\Delta_C(t)$ para obter, a seguir, uma nova classificação para tais incertezas.

Dada a definição 2.4, tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + D\Delta_A(t)E)x + (B_0 + F\Delta_B(t)G)u \\ y = (C_0 + H\Delta_C(t)W)x \end{cases}$$

Neste modelo, as matrizes de incerteza são limitadas somente em norma, podendo seus elementos variarem de forma arbitrária, assegurando-se que:

$$\|\Delta_A(t)\| \leq 1 \quad \forall t$$

$$\|\Delta_B(t)\| \leq 1 \quad \forall t$$

$$\|\Delta_C(t)\| \leq 1 \quad \forall t$$

Supondo-se que restrições adicionais são impostas sobre a forma de variação dos elementos destas matrizes, por exemplo, assumindo-se que as mesmas são bloco-diagonais, caminha-se na direção de um maior conhecimento da maneira pela qual as variações em determinados parâmetros físicos do sistema geram incertezas nos elementos das matrizes nominais do modelo, logo um maior grau de estrutura se estabelece. Então, assumindo-se que:

$$\Delta_A(t) = \text{diag}[\Delta_{A_j}(t)] \quad j = 1, \dots, n_a'$$

$$\Delta_B(t) = \text{diag}[\Delta_{B_k}(t)] \quad k = 1, \dots, n_b'$$

$$\Delta_C(t) = \text{diag}[\Delta_{C_l}(t)] \quad l = 1, \dots, n_c'$$

define-se que cada bloco de variação $\Delta_{A_i}(t)$, $\Delta_{B_k}(t)$ e $\Delta_{C_l}(t)$ associado a incertezas em determinadas características do sistema, causa variações nos elementos das matrizes A_0 , determinadas por D e E , B_0 , determinadas por F e G , e C_0 , determinadas por H e W .

Definição 2.5 Incerteza Diagonal: as incertezas do sistema (2.4) são do tipo diagonal se \mathcal{A} , \mathcal{B} e \mathcal{C} possuírem as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\triangleq \{A : A = A_0 + D\Delta_{AE}(t)E \quad ; \quad \Delta_{AE}(t)'\Delta_{AE}(t) \leq I\} \\ \mathcal{B} &\triangleq \{B : B = B_0 + F\Delta_{BE}(t)G \quad ; \quad \Delta_{BE}(t)'\Delta_{BE}(t) \leq I\} \\ \mathcal{C} &\triangleq \{C : C = C_0 + H\Delta_{CE}(t)W \quad ; \quad \Delta_{CE}(t)'\Delta_{CE}(t) \leq I\}\end{aligned}$$

com:

$$\Delta_{AE} = \text{diag}[\Delta_{A_1} \ \Delta_{A_2} \ \cdots \ \Delta_{A_{na'}}]$$

$$\Delta_{BE} = \text{diag}[\Delta_{B_1} \ \Delta_{B_2} \ \cdots \ \Delta_{B_{nb'}}]$$

$$\Delta_{CE} = \text{diag}[\Delta_{C_1} \ \Delta_{C_2} \ \cdots \ \Delta_{C_{nc'}}]$$

e, também:

$$D = [D_1 \ D_2 \ \cdots \ D_{na'}] \quad ; \quad E' = [E'_1 \ E'_2 \ \cdots \ E'_{na'}]$$

$$F = [F_1 \ F_2 \ \cdots \ F_{nb'}] \quad ; \quad G' = [G'_1 \ G'_2 \ \cdots \ G'_{nb'}]$$

$$H = [H_1 \ H_2 \ \cdots \ H_{nc'}] \quad ; \quad W' = [W'_1 \ W'_2 \ \cdots \ W'_{nc'}]$$

No caso em que na' , nb' e nc' são iguais a na , nb e nc respectivamente, tem-se a situação na qual é disponível a máxima informação sobre a maneira pela qual as incertezas geram variações nos elementos das matrizes nominais do modelo. Também as dimensões dos blocos de geradores de incertezas Δ_{A_i} , Δ_{B_k} e Δ_{C_l} são todas iguais a 1. Sendo assim, cada um destes blocos de incertezas passa a ser considerado como um escalar que pode variar no tempo, porém sempre pertencendo ao intervalo $[-1, 1]$. Daí, as matrizes D , E , F , G , H e W definem qual elemento das matrizes nominais do modelo é afetado por cada bloco de incertezas. Caso isto aconteça, existe uma equivalência entre as definições 2.3 e 2.5, pois ambos os conjuntos de modelos gerados pelas duas definições têm a mesma forma.

Neste caso, pode-se definir uma nova maneira de caracterizar-se as incertezas de modelamento. De acordo com a definição acima, se os blocos geradores de incertezas Δ_{A_i} , Δ_{B_k}

e Δ_{C_l} forem escalares, então as matrizes D_i , E_i , F_i , G_i , H_i e W_i tornam-se vetores linha ou coluna, sendo assim representados por letras minúsculas. Também os blocos Δ_{A_i} , Δ_{B_k} e Δ_{C_l} são substituídos por r_i , s_j e q_l , respectivamente. Daí tem-se a seguinte definição.

Definição 2.6 Incertezas Posto 1: as incertezas do sistema (2.4) são do tipo posto 1 se A , B e C possuïrem as seguintes estruturas:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\triangleq \{A : A = A_0 + \sum_{i=1}^{na} r_i(t) A_i\} \\ \mathcal{B} &\triangleq \{B : B = B_0 + \sum_{j=1}^{nb} s_j(t) B_j\} \\ \mathcal{C} &\triangleq \{C : C = C_0 + \sum_{l=1}^{nc} q_l(t) C_l\} \end{aligned}$$

com:

$$A_i = d_i e'_i \quad ; \quad i = 1, \dots, na$$

$$B_j = f_j g'_j \quad ; \quad j = 1, \dots, nb$$

$$C_l = h_l w'_l \quad ; \quad l = 1, \dots, nc$$

As restrições sobre o limite das variações dos escalares r_i , s_j e q_l , definem os conjuntos compactos abaixo:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\triangleq \{r(t) ; r_i(t) \in [-1, 1] \quad i = 1, \dots, na\} \\ \mathcal{S} &\triangleq \{s(t) ; s_j(t) \in [-1, 1] \quad j = 1, \dots, nb\} \\ \mathcal{Q} &\triangleq \{q(t) ; q_l(t) \in [-1, 1] \quad l = 1, \dots, nc\} \end{aligned}$$

Estas incertezas são denominadas posto 1 devido ao fato de que elas são formadas por uma soma de matrizes A_i , B_j e C_l que são decorrentes de um produto de dois vetores, o qual sempre gera matrizes com posto unitário. Estas incertezas são altamente estruturadas, uma vez que especifica-se exatamente, através dos vetores d , e , f , g , h e w qual elemento das matrizes do modelo nominal está variando em consequência da incerteza sobre cada elemento dos vetores $r(t)$, $s(t)$ e $q(t)$. Também pode-se esperar que estas incertezas com posto 1 tenham uma natureza paramétrica se associar-se os escalar r_i , s_j e q_l a valores de parâmetros físicos variantes ou cujos valores não sejam perfeitamente conhecidos.

Observação 2.1 Utilizando-se a abordagem temporal para a modelagem do sistema incerto, a hipótese de que o mesmo é variante no tempo, no interior do conjunto convexo que o define, é plenamente viável. Este problema será tratado com mais detalhes nos capítulos subsequentes.

2.5 Conclusão

Existem basicamente dois métodos para o modelamento de um sistema físico. O primeiro deles é a identificação das relações entre as suas entradas e as suas saídas. Neste caso, o caminho para representar o comportamento deste sistema é através da ferramenta matemática denominada função de transferência. O outro é usando as leis da física para determinar as equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema.

Em ambos os casos, o modelo pode ter sua qualidade ou mesmo a sua validade comprometida em decorrência de perturbações externas agindo sobre o sistema ou de variações nos parâmetros deste. Dentro deste contexto, faz-se necessário considerar a influência das variações a que o sistema físico pode estar sujeito.

A modelagem por matrizes de transferência é mais adequada ao tratamento das incertezas de natureza não-paramétrica do sistema, estando estas associadas a um parco conhecimento das relações entradas-saídas do sistema.

Estas incertezas normalmente são detectadas através de ensaios do sistema físico e da verificação de que a sua resposta em freqüência admite variações nas curvas de módulo e de fase. Estipulando-se limites para estas possíveis variações, chega-se à delimitação do conjunto de modelos a ser tratado pelo controle.

Modelar um sistema físico utilizando a abordagem por variáveis de estado, consiste em escrever explicitamente as equações diferenciais que representam as dinâmicas presentes neste sistema. Normalmente, a obtenção de tais equações diferenciais passa por uma análise física aprofundada do funcionamento do sistema em questão. Quando desta análise, tem-se grande interesse na determinação de grandezas físicas ligadas ao processo tais como: massas, volumes, temperaturas, ângulos, etc. entram em cena. Estas grandezas, direta ou indiretamente, são utilizadas na obtenção dos coeficientes destas equações dinâmicas.

Supondo-se que, por algum motivo qualquer, não se tenha um conhecimento satisfatório do valor numérico real de tais grandezas físicas, então, esta falta de conhecimento implicará, obviamente, falta de conhecimento também sobre os coeficientes que determinam as dinâmicas inerentes a este sistema. Quando transforma-se tais equações diferenciais nas assim chamadas, equações de estado, esta incerteza sobre o valor exato de tais grandezas físicas é representada

por incertezas bem definidas sobre determinados elementos das matrizes dinâmica, de entrada e de saída do modelo.

Definindo-se limites para as variações das grandezas físicas envolvidas no processo, também definem-se limites para as variações dos respectivos elementos das matrizes do sistema que dependem destes parâmetros. As incertezas sobre um modelo matemático que representa um sistema físico, quando encaradas desta maneira, são denominadas *incertezas paramétricas estruturadas*.

Uma vez definido o conjunto de modelos a ser tratado, o problema que se coloca é o de sintetizar uma lei de controle que assegure características como estabilidade, ou mesmo um grau de estabilidade pré-especificado para todo este conjunto de modelos, valendo-se fundamentalmente de controladores lineares, invariantes no tempo e utilizando-se retroação estática de estados. Em outras palavras, busca-se a síntese de controladores *robustos* com relação ao conjunto de modelos especificado.

Capítulo 3

Síntese de Controladores Robustos

3.1 Introdução

A partir do momento em que, para a obtenção de leis de controle, consideram-se modelos que englobam termos relativos a incertezas, verifica-se que os controladores assim obtidos são denominados *robustos*. Para o projeto de controladores robustos é preciso tratar um conjunto de modelos de uma única vez e garantir um nível mínimo de desempenho para todos eles.

Com este intuito, na seção a seguir, introduz-se a noção de estabilidade quadrática. Este conceito é fundamental, pois ao mesmo tempo em que garante a estabilidade de um sistema considerado sem incertezas, permite também a inclusão de outros critérios de desempenho para o mesmo tais como "deslocamento α ", além de ser de fácil generalização para o caso de sistemas incertos (conjunto de modelos).

No transcorrer do capítulo, serão expostos algoritmos de síntese de controladores robustos baseados no conceito de estabilizabilidade quadrática. Estes algoritmos, via de regra, estão relacionados com estratégias e métodos clássicos da teoria de controle, tais como Controle a Custo Garantido, Controle Ótimo, Controle H_∞ , entre outros, estendidos para o caso de sistemas lineares com incertezas.

3.2 Estabilizabilidade Quadrática

Como veremos no capítulo 4, as aplicações mais significativas desta dissertação utilizam o conceito de *Estabilizabilidade Quadrática* aplicado a sistemas lineares incertos. Desta forma, faz-se necessária uma exposição detalhada dos resultados ligados a este conceito.

Define-se estabilidade quadrática.

Definição 3.1 Um sistema autônomo, linear, invariante no tempo

$$\dot{x} = Ax$$

é dito quadraticamente estável se existir uma função de Lyapunov quadrática $V = x'Px$ com $P = P' > 0$ tal que a sua derivada seja uma função de x escalar definida negativa, ou seja:

$$x'[A'P + PA]x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Considerando-se a relevância dos trabalhos de Lyapunov como ferramentas de análise e de síntese da teoria de estabilidade de sistemas com modelos matemáticos perfeitamente conhecidos, torna-se natural, a extensão destes conceitos ao contexto de sistemas incertos.

O conceito de estabilizabilidade caracteriza a propriedade que determinado sistema apresenta de tornar-se estável quando submetido a uma lei de controle. No caso de sistemas lineares conhecidos e invariantes no tempo tem-se que o conceito de estabilizabilidade quadrática é equivalente ao de estabilizabilidade do sistema em questão. Quando da extensão de tal conceito ao caso de sistemas lineares incertos, pode-se pensar que, em presença de um domínio de incertezas reduzido, as condições para estabilizabilidade quadrática, que agora são suficientes para a estabilizabilidade do sistema, não são fortemente conservativas.

Enuncia-se agora o conceito de estabilizabilidade quadrática para um sistema linear conhecido e invariante no tempo.

Definição 3.2 Um sistema linear invariante no tempo é dito quadraticamente estabilizável se existir uma função de Lyapunov quadrática $V = x'Px$, com $P = P' > 0$, uma constante $\alpha > 0$ e uma lei de controle $u = p(x)$ tais que:

$$x'[A'P + PA]x + 2x'PBp(x) \leq -\alpha \|x\|^2 ; \quad \forall x \neq 0$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclideana do vetor de estados x .

Hollot e Barmish em [29] apresentam condições necessárias e suficientes para a estabilizabilidade quadrática de sistemas com incertezas na matriz dinâmica do sistema. Expõe-se agora o referido teorema.

Teorema 3.1 [29] O sistema linear incerto:

$$\dot{x} = A(r(t))x + Bu$$

é quadraticamente estabilizável se e somente se existe, para qualquer $A(r(t)) \in \mathcal{A}$, uma matriz definida positiva W tal que:

$$x'[A(r(t))W + WA(r(t))']x < 0 \quad ; \quad \forall x \in \mathcal{N}$$

onde \mathcal{A} representa o conjunto de todas as matrizes $A(r(t))$ admissíveis e $\mathcal{N} \triangleq \{x \neq 0 : B'x = 0\}$.

- Demonstração: em [29].

□

Sob a condição do teorema acima, garante-se que existe uma função de Lyapunov quadrática tal que sua derivada é negativa para todo $A(r(t)) \in \mathcal{A}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Ademais, encontrando-se $W = W' > 0$ que satisfaça tal condição, uma lei de controle que estabiliza o sistema incerto é dado por:

$$u(t) = -\epsilon B'W^{-1}x$$

com $\epsilon > 0$ suficientemente grande.

Considerando-se agora sistemas lineares com incertezas nas matrizes dinâmica e de entrada, tem-se:

$$\dot{x} = A(r(t))x + B(s(t))u \quad (3.1)$$

onde $r(t)$ e $s(t)$ são vetores de incertezas pertencentes, respectivamente, aos conjuntos compactos \mathcal{R} e \mathcal{S} .

Barmish em 1983 [8] introduziu o conceito de sistema dinâmico aumentado, qual seja:

$$\dot{x}^+ = A^+(r^+)x^+ + B^+u^+ \quad (3.2)$$

onde:

$$A^+ \triangleq \begin{bmatrix} A(r(t)) & B(s(t)) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B^+ \triangleq \begin{bmatrix} 0_{n \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}$$

com $x^+ \in \mathbb{R}^{n+m}$, $u^+ \in \mathbb{R}^m$ e $r^+ \in \mathbb{R}^{na+nb}$ definidos como:

$$x^+ \triangleq \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad u^+ \triangleq \frac{dy}{dt} \quad r^+ \triangleq \begin{bmatrix} r(t) \\ s(t) \end{bmatrix}$$

onde na e nb são, respectivamente, as dimensões dos vetores $r(t)$ e $s(t)$.

Este artifício permite o tratamento de sistemas com incertezas em ambas as matrizes do sistema (A e B), como se somente a matriz dinâmica fosse afetada por incertezas. Está demonstrado em [8] que para a análise da estabilizabilidade quadrática utilizando-se retroação linear de estados o sistema (3.2) é equivalente ao sistema 3.1.

Outro resultado apresentado na mesma publicação é o de que se existir uma lei de controle $u = p(x(t)) \in C^1$ que estabilize quadraticamente (3.1) então existirá também uma lei de controle do tipo $u = -Kx$ capaz de realizar a mesma tarefa.

Observação 3.1 Petersen em [49], através de um contra-exemplo, mostra que existem sistemas incertos do tipo (3.1) para os quais a estabilizabilidade quadrática por meio de controle não-contínuo não implica estabilizabilidade quadrática utilizando-se controle linear.

Finalmente, Barmish em 1985 enuncia as condições necessárias e suficientes para estabilizabilidade quadrática de sistemas do tipo (3.1) utilizando-se leis de controle contínuas ($u(t) \in C^l$). Primeiramente, outra definição.

Definição 3.3 O sistema (3.1) é dito quadraticamente estabilizável se existir uma função de Lyapunov quadrática $V = x'Px$, com $P = P' > 0$, uma constante $\alpha > 0$ e uma lei de controle contínua $u = p(x)$ tais que para quaisquer $r(t) \in \mathcal{R}$ e $s(t) \in \mathcal{S}$, tenha-se:

$$x'[A'(r(t))P + PA(r(t))]x + 2x'PB(s(t))p(x) \leq -\alpha \|x\|^2 ; \forall x \neq 0$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana do vetor de estados x .

Enuncia-se agora o resultado obtido por Barmish em 1985.

Teorema 3.2 [9] O sistema dinâmico incerto (3.1) é quadraticamente estabilizável se e somente se existir uma matriz $W = W' > 0$ tal que:

$$x'[A(r(t))W + WA(r(t))']x < 0$$

$\forall r(t) \in \mathcal{R}$ e $\forall x \in \mathcal{N}_S$, com:

$$\mathcal{N}_S \triangleq \{ x \in \mathbb{R}^n , x \neq 0 : B(s(t))'x = 0 \text{ para algum } s(t) \in \mathcal{S} \}$$

¹ C^l representa a classe das funções continuamente diferenciáveis com $p(0) = 0$.

Demonstração: esta demonstração é bastante técnica e por isso não será apresentada aqui. A mesma está desenvolvida detalhadamente em [9]

□

Nesta seção foram introduzidos os principais conceitos relacionados à estabilizabilidade quadrática. Entretanto, da forma como foram apresentados, os teoremas 3.1 e 3.2 servem quase que exclusivamente à análise da estabilidade de um dado sistema incerto, sem fornecer mecanismos para a síntese de um controlador robusto para este sistema. Na próxima seção abordar-se-á a busca de controladores que quando aplicados ao sistema incerto garantam sua estabilidade quadrática.

3.3 Algoritmos de Síntese

Nesta seção serão apresentados alguns resultados relativos à síntese de controladores robustos utilizando-se a modelagem temporal para a representação do conjunto de modelos.

3.3.1 Abordagem por Custo Garantido

Na literatura de controle ótimo é prática comum a escolha de um funcional de custo quadrático como índice de desempenho para o sistema, conforme visto no primeiro capítulo. A lei de controle então obtida garante a minimização de tal índice ou custo, para qualquer condição inicial da planta, além de garantir também a estabilidade assintótica global em malha fechada para o sistema.

Desta forma, no caso de sistemas sujeitos a incertezas, é pertinente vislumbrar a síntese de uma lei de controle que garanta a estabilidade² e também um patamar superior para este índice de desempenho para qualquer condição inicial do sistema e também para qualquer modelo matemático dentre os admissíveis. Esta é a filosofia do *controle robusto com custo garantido*.

O controle robusto de sistemas lineares incertos com índice de desempenho quadrático tem sido considerado por vários autores [33, 34, 16]. Devido ao fato deste problema ser derivado de uma abordagem de minimização³, a sua solução também requer a solução de uma equação de Riccati. Porém, neste caso, tal equação possui alguns termos adicionais decorrentes do modelamento das incertezas.

²normalmente quadrática.

³controle ótimo.

Para o modelamento do sistema incerto considera-se que as incertezas do mesmo são do tipo posto 1, conforme definido no capítulo anterior:

$$\dot{x}(t) = [A_0 + \Delta A(r(t))]x(t) + [B_0 + \Delta B(s(t))]u(t) \quad (3.3)$$

com:

$$\Delta A(r(t)) = \sum_{i=1}^{na} r_i(t)A_i \quad \Delta B(s(t)) = \sum_{j=1}^{nb} s_j(t)B_j$$

$$\begin{aligned} r(t) &\in \mathcal{R} / \mathcal{R} = \{ r(t) : |r_i| \leq \bar{r}, i = 1, \dots, na \} \\ s(t) &\in \mathcal{S} / \mathcal{S} = \{ s(t) : |s_j| \leq \bar{s}, j = 1, \dots, nb \} \end{aligned}$$

Percebe-se que é permitido ao sistema variar no tempo, com a restrição de que os vetores de incertezas $r(t)$ e $s(t)$ sejam mensuráveis no sentido de Lebesgue.

Sendo as matrizes A_i e B_j de posto 1, então é possível a decomposição das mesmas como segue:

$$A_i = d_i e'_i \quad i = 1, \dots, na$$

$$B_j = f_j g'_j \quad j = 1, \dots, nb$$

com $d_i, e_i, f_j \in \mathbb{R}^n$ e $g_j \in \mathbb{R}^m$. Esta decomposição visivelmente não é única, e constitui um grau de liberdade do projetista quando da fase de modelamento do sistema incerto.

De acordo com esta decomposição, definem-se então as seguintes matrizes simétricas positivas semi-definidas:

$$\begin{aligned} T &\triangleq \bar{r} \sum_{i=1}^{na} d_i d'_i & U &\triangleq \bar{r} \sum_{i=1}^{na} e_i e'_i \\ V &\triangleq \bar{s} \sum_{j=1}^{nb} g_j g'_j & W &\triangleq \bar{s} \sum_{j=1}^{nb} f_j f'_j \end{aligned} \quad (3.4)$$

Seja também, o seguinte funcional a ser minimizado:

$$J(u) = \int_0^{t_f} [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt + x'(t_f)P_f x(t_f) \quad (3.5)$$

onde as matrizes P_f e Q são simétricas positivas semi-definidas com dimensões apropriadas e R é simétrica positiva definida também de dimensão apropriada. Além disso, o par (A_0, B_0) é suposto controlável e o par $(Q^{1/2}, A_0)$ observável. Necessita-se agora de uma definição formal do que sejam custo garantido e lei de controle a custo garantido.

Definição 3.4 Para o sistema (3.3) com índice de desempenho (3.5), se existir uma lei de controle contínua $\hat{u}(t)$, $t \in [0, t_f]$ por realimentação de estados e um número $\hat{V} \geq 0$ tais que:

$$J(\hat{u}(t), r(t), s(t)) \leq \hat{V} \quad \forall r(t) \in \mathcal{R}, s(t) \in \mathcal{S}$$

então \hat{V} é um custo garantido e $\hat{u}(t)$, $t \in [0, t_f]$ é uma lei de controle a custo garantido para o sistema (3.3).

A seguir enuncia-se um resultado que possibilita a síntese de uma lei de controle a custo garantido para o sistema incerto considerado.

Teorema 3.3 [34] Dado o sistema descrito pelas equações (3.3) a (3.5). A lei de controle:

$$\hat{u}(t) = -\frac{1}{\epsilon} R^{-1} B'_0 P(t) x(t)$$

é uma lei de controle a custo garantido, e:

$$\hat{V}(x, 0) = x'(0) P(0) x(0)$$

é um custo garantido, se existir, para algum escalar $\epsilon > 0$ uma solução simétrica positiva semi-definida $P(t)$ para a seguinte equação de Riccati modificada:

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) + P(t)A_0 + A'_0 P(t) - P(t)[\frac{1}{\epsilon}(B_0 R^{-1} B'_0 - B_0 R^{-1} V R^{-1} B'_0 - W) - T]P(t) + \\ + U + Q = 0 \quad \forall t \in [0, t_f] \end{aligned} \quad (3.6)$$

com a condição de contorno:

$$P(t_f) = P_f$$

Demonstração: pode ser encontrada em [34, 16]

□

Considere-se agora o caso de controle a custo garantido para um intervalo de tempo infinito, ou seja, $t_f \rightarrow \infty$. Neste caso, o funcional (3.5) assume a forma:

$$J(u) = \int_0^\infty [x'(t)Qx(t) + u'(t)Ru(t)]dt \quad (3.7)$$

Sob a hipótese de que a solução de (3.6) tende para um valor constante $P = P' > 0$ à medida que $t_f \rightarrow \infty$, então enuncia-se o seguinte teorema.

Teorema 3.4 [34] Dado o sistema (3.3) e $J(u)$ dado por (3.7). A lei de controle:

$$u^*(t) = k_{CG}x(t)$$

com:

$$k_{CG} = -\frac{1}{\epsilon} R^{-1} B'_0 P$$

é uma lei de controle a custo garantido, e:

$$J(x(0), u^*(t)) \leq x'(0)Px(0)$$

se existir, para algum escalar $\epsilon > 0$, uma solução simétrica positiva semi-definida P para a seguinte equação de Riccati modificada:

$$\begin{aligned} PA_0 + A'_0 P - P[\frac{1}{\epsilon}(B_0 R^{-1} B'_0 - B_0 R^{-1} V R^{-1} B'_0 - W) - T]P + \\ + U + Q = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Demonstração: também pode ser encontrada em [34, 16]

□

Os resultados acima tornam possível a busca de um controlador que garanta a estabilidade e de certa forma, também, um desempenho mínimo para todo o conjunto de sistemas. A condição da existência de solução para a equação matricial (3.8) é claramente suficiente para a existência de uma lei de controle a custo garantido para o conjunto de modelos.

Uma condição necessária e suficiente para a existência de solução positiva definida para a equação (3.8) é dada na seguinte proposição.

Proposição 3.1 [34] A equação (3.8) apresenta uma solução positiva definida para algum escalar $\epsilon > 0$ se e somente se a matriz Hamiltoniana, $H \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$:

$$H = \begin{bmatrix} A_0 & -[\frac{1}{\epsilon}(B_0 R^{-1} B'_0 - B_0 R^{-1} V R^{-1} B'_0 - W) - T] \\ -U - Q & -A'_0 \end{bmatrix}$$

não possuir nenhum autovalor com parte real nula.

Demonstração: ver [34] e [42].

□

Um método simples e eficiente para o cálculo desta solução também está detalhado em [42].

3.3.2 Abordagem por Schmitendorf

Schmitendorf em 1988 obteve um resultado que também aborda o problema da estabilização de sistemas lineares incertos mediante a resolução de uma equação de Riccati aumentada.

Teorema 3.5 [62] Se existir P , simétrica, positiva definida, solução, para algum $\epsilon > 0$, de:

$$PA_0 + A'_0P - P\left\{\frac{1}{\epsilon}(2B_0R^{-1}B_0 - B_0R^{-1}VR^{-1}B'_0 - W) - T\right\}P + U + \epsilon Q = 0 \quad (3.9)$$

com Q e R simétricas, positivas definidas, parâmetros de projeto, então:

$$u(t) = k_s x(t) \quad (3.10)$$

com:

$$k_s = -\frac{1}{\epsilon} R^{-1} B'_0 P$$

é um controle estabilizante do sistema (3.3).

Demonstração: A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [62]. Entretanto, ela será apresentada aqui por tratar-se de uma forma padrão para a determinação de leis de controle robustas baseadas na equação de Riccati.

Seja $u(t)$ dada por (3.10), o sistema incerto em malha fechada fica:

$$\dot{x}(t) = \left\{ A_0 + \sum_{i=1}^{na} r_i(t) A_i - \frac{1}{\epsilon} B_0 R^{-1} B'_0 P - \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1}^{nb} s_j(t) B_j R^{-1} B_0 P \right\} x(t) \quad (3.11)$$

Seja $V \triangleq x'Px$ uma função quadrática, positiva definida, candidata a função de Lyapunov. Então sua derivada sobre a trajetória é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} = \dot{V}(x, t) &= 2x'PA_0x - \frac{2}{\epsilon}x'PB_0R^{-1}B'_0Px + \\ &= \dot{x}'P\dot{x} + x'P\dot{x} + 2x'P \sum_{i=1}^{na} r_i(t) A_i x - \frac{2}{\epsilon}x'P \sum_{j=1}^{nb} s_j(t) B_j R^{-1} B'_0 P x \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tem-se que:

$$2x'PA_0x = x'(PA_0 + A'_0P)x \quad (3.13)$$

e:

$$2x'P \sum_{i=1}^{na} r_i(t) A_i x = 2x'P \sum_{i=1}^{na} r_i d_i e'_i x \leq 2\bar{r} \sum_{i=1}^{na} |x'Pd_i e'_i x|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \bar{r} \sum_{i=1}^{na} (x' P d_i)^2 + \bar{r} \sum_{i=1}^{na} (e_i x)^2 \\
&= \bar{r} x' P \sum_{i=1}^{na} d_i d_i' P x + \bar{r} x' \sum_{i=1}^{na} e_i e_i' x \\
&= x' P T P x + x' U x
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Na obtenção de (3.14), foi utilizada a desigualdade $|ab| \leq a^2 + b^2$, para quaisquer escalares a e b .

Também:

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{\epsilon} x' P \sum_{j=1}^{nb} s_j(t) B_j R^{-1} B_0' P x &= -\frac{2}{\epsilon} x' P \sum_{j=1}^{nb} s_j(t) f_j g_j' R^{-1} B_0' P x \\
&\leq \frac{2}{\epsilon} \left| \sum_{j=1}^{nb} x' P s_j(t) f_j g_j' R^{-1} B_0' P x \right| \\
&\leq \frac{2}{\epsilon} \sum_{j=1}^{nb} |x' P s_j(t) f_j g_j' R^{-1} B_0' P x| \\
&\leq \frac{2}{\epsilon} \sum_{j=1}^{nb} |x' P f_j g_j' R^{-1} B_0' P x| \\
&\leq \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1}^{nb} (x' P f_j)^2 + \frac{1}{\epsilon} \sum_{j=1}^{nb} (g_j R^{-1} B_0' P x)^2 \\
&= \frac{1}{\epsilon} x' P W P x + \frac{1}{\epsilon} x' P B_0 R^{-1} V R^{-1} B_0' P x
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Usando (3.13), (3.14) e (3.15) em (3.12), temos:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, t) &\leq x' (P A_0 + A_0 P - \frac{2}{\epsilon} P B_0 R^{-1} B_0' P + \\
&\quad + P T P + U + \frac{1}{\epsilon} P W P + \frac{1}{\epsilon} P B_0 R^{-1} V R^{-1} B_0' P) x \\
&= x' \{P A_0 + A_0 P - P \left\{ \frac{1}{\epsilon} (2 B_0 R^{-1} B_0' - B_0 R^{-1} V R^{-1} B_0' - W) - T \right\} P + U\} x
\end{aligned}$$

Usando (3.9), e denotando-se por $\lambda_{\min}[Q]$ o menor autovalor de Q , tem-se:

$$\dot{V}(x, t) \leq -\epsilon x' Q x \leq -\epsilon \lambda_{\min}[Q] \|x\|^2$$

Portanto, se fizermos $\alpha = \epsilon \lambda_{\min}[Q]$, então:

$$\dot{V} \leq -\alpha \|x\|^2$$

e a estabilidade assintótica está assegurada pelo teorema de Lyapunov.

□

Propõe-se agora uma maneira de prover um tipo particular de alocação de autovalores para o conjunto de modelos.

Alocação de autovalores por deslocamento α

Desejando-se também que o sistema incerto em malha fechada apresente boas características de resposta transitória, pode-se incluir esta exigência nos métodos de síntese acima expostos.

A técnica de alocação de autovalores denominada deslocamento α , descrita em detalhes no primeiro capítulo, pode ser facilmente levada a efeito para todo o conjunto de modelos considerado.

Supondo-se que o sistema a ser controlado é do tipo:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \alpha I + \Delta A(t))x(t) + (B_0 + \Delta B(t))u(t) \quad (3.16)$$

e considerando-se a seguinte equação de Riccati modificada:

$$P_\alpha(A_0 + \alpha I) + (A_0 + \alpha I)'P_\alpha - P_\alpha\left\{\frac{1}{\epsilon}(2B_0R^{-1}B_0 - B_0R^{-1}VR^{-1}B_0' - W) - T\right\}P_\alpha + U + \epsilon Q = 0 \quad (3.17)$$

Tem-se que, se houver solução simétrica, positiva definida P_α de (3.17), então:

$$k_\alpha = -\frac{1}{\epsilon}R^{-1}B_0'P_\alpha \\ u_\alpha(t) = k_\alpha x(t) \quad (3.18)$$

é um controle estabilizante do sistema para o sistema (3.16). Isto é equivalente a afirmação de que todos os autovalores de

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \alpha I + \Delta A(t) + (B_0 + \Delta B(t))k_\alpha)x(t)$$

estão situados no semi-plano esquerdo aberto do plano complexo.

Portanto, verifica-se que a aplicação da lei de controle $u_\alpha(t)$ ao sistema incerto real (3.3) garante que todos os autovalores do mesmo estejam alocados à esquerda de uma reta vertical que passa pelo ponto $(-\alpha, 0)$ do plano complexo, conforme figura 1.3, no capítulo 1. Isto assegura um amortecimento mínimo pré-estabelecido α para o sistema, uma vez que todos os seus autovalores de malha fechada terão partes reais no máximo iguais a $-\alpha$.

É interessante notar-se que o desenvolvimento acima foi exposto levando-se em conta o resultado de Schmitendorf (teorema 3.5), porém o mesmo é válido também para o teorema 3.4 (custo garantido), procedendo-se de forma análoga.

Observação 3.2 Este esquema de posicionamento de autovalores restringe o conjunto de modelos que podem ser "estabilizados", uma vez que a existência de solução para a equação de Riccati (3.17) se verifica para um conjunto de modelos certamente menor do que para a equação de Riccati do teorema 3.5. Além disso, verifica-se que com a exigência adicional de deslocamento α , os ganhos de realimentação obtidos podem aumentar de forma indesejável em condições de fraca controlabilidade do par (A_0, B_0) .

Na próxima subseção será abordado o problema de estabilização de sistemas lineares incertos utilizando-se uma abordagem derivada da teoria de controle H_∞ .

3.3.3 Abordagem pela Teoria de Controle H_∞

Como foi visto no capítulo 1, a teoria de controle H_∞ tem por objetivo a minimização da norma de uma matriz função de transferência de um sistema multivariável, qual seja, das entradas de perturbação para as saídas controladas. Portanto, nota-se que tal teoria utiliza conceitos, fundamentalmente, do domínio freqüencial apesar do fato de que para a obtenção de controladores sejam utilizados métodos temporais. Em particular, uma equação do tipo Riccati é utilizada para a execução dos cálculos necessários, conforme detalhado também no capítulo 1.

Durante o período 1983-1987 uma nova abordagem para a obtenção de controladores robustos foi desenvolvida independentemente da teoria H_∞ . Esta abordagem fundamenta-se na estabilizabilidade quadrática para sistemas incertos e tem sua origem nos trabalhos de Leitmann [39, 40]. Muitos trabalhos seguiram este caminho de pesquisa [46, 10, 8, 12, 9, 57, 73], supondo retroação de estados e culminando também com o uso de equações de Riccati para a estabilização de sistemas incertos, de forma similar à abordagem por custo garantido e por Schmitendorf apresentadas nas subseções anteriores.

Nesta subseção será explorada a ligação entre as duas linhas de pesquisa expostas acima, de acordo com os trabalhos de Petersen, Zhou, Khargonekar and Rotea [56, 60, 32].

Para a estabilização quadrática do sistema linear incerto utilizando-se a abordagem H_∞ apresentada neste trabalho, as incertezas no seu modelo matemático devem ser do tipo limitadas em norma, ou seja:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t))x(t) + (B_0 + \Delta B(t))u(t) \quad (3.19)$$

onde:

$$\|\Delta A(t)\| \leq l_A ; \quad \|\Delta B(t)\| \leq l_B ; \quad \forall t$$

com $\|\cdot\|$ denota a norma matricial induzida e onde l_A e l_B são escalares positivos.

Primeiramente considera-se sistemas com incertezas somente na matriz dinâmica. Além disso, a variação na matriz A é assumida, sem perda de generalidade, ser da forma:

$$\begin{aligned}\Delta A(t) &= DF(t)E \\ \|F(t)\| &\leq \rho_A ; \quad \forall t\end{aligned}$$

onde ρ_A é um escalar positivo. Então, o sistema incerto autônomo fica da forma:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + DF(t)Ex(t) \quad (3.20)$$

O resultado a seguir relaciona a estabilidade quadrática do sistema incerto acima com o problema de minimização associado à teoria de controle H_∞ . Este resultado é um enunciado modificado do conhecido "Teorema do Pequeno Ganhão" no contexto de estabilidade quadrática.

Teorema 3.6 [56] *O sistema (3.20) é quadraticamente estável se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

(i) A_0 possui todos os seus autovalores com parte real estritamente negativa.

$$(ii) \|E(sI - A_0)^{-1}D\|_\infty < \frac{1}{\rho_A}.$$

Demonstração:

Necessidade: Se as condições (i) e (ii) são satisfeitas, então pelo teorema 1.3, tem-se que:

$$A'_0P + PA_0 + \rho_A^2 PDD'P + EE' + Q = 0$$

possui uma solução $P = P' > 0$ para alguma $Q = Q' > 0$. Portanto, conclui-se que:

$$A'_0P + PA_0 + \rho_A^2 PDD'P + EE' < 0$$

o que conduz a seguinte desigualdade⁴:

$$A'_0P + PA_0 + E'F(t)'D'P + PDF(t)E < 0$$

$$(A_0 + DF(t)E)'P + P(A_0 + DF(t)E) < 0$$

e a estabilidade quadrática de (3.20) está provada.

⁴aqui foi utilizado o fato de que $\rho_A^2 PDD'P + E'E \geq E'F(t)'D'P + PDF(t)E$.

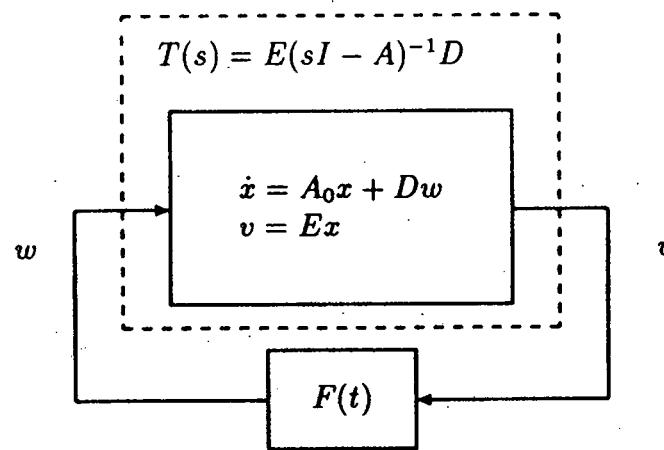


Figura 3.1: Teorema do pequeno Ganho × Estabilidade Quadrática.

Suficiência: para a demonstração da suficiência, diversos fatos e lemas relacionados à teoria matricial são necessários e devido a isto ela será omitida aqui. Para a prova completa, ver [32].

□

A correlação entre estabilidade quadrática, Teorema do Pequeno Ganho e a resolução de um problema da teoria H_∞ , no resultado acima, pode ser visualizada na figura 3.1. Modelando-se as incertezas paramétricas como um bloco de realimentação incerto, pode-se visualizar claramente a conexão, em realimentação, de dois blocos que originam um ganho de laço que jamais atinge o valor unitário, sob as hipóteses do teorema 3.6, o que satisfaz a condição para estabilidade do sistema realimentado do teorema do pequeno ganho [4].

Aplicação à Estabilização de Sistemas Incertos

Trata-se agora do problema da estabilização de um sistema incerto do tipo (3.20) utilizando-se retroação linear, estática de estados⁵, portanto considera-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + DF(t)E)x(t) + Bu(t) \\ \|F(t)\| \leq \rho_A ; \quad \forall t \end{cases} \quad (3.21)$$

Teorema 3.7 [56] O sistema incerto (3.21) é quadraticamente estabilizável se e somente se existir uma solução $P = P' > 0$, para algum escalar $\epsilon > 0$, para a seguinte equação algébrica

⁵esta restrição é feita sem prejuízo para a existência de um controlador que realize esta tarefa [60].

de Riccati:

$$A'_0 P + PA_0 - \frac{1}{\epsilon} PBB'P + \rho_A^2 PDD'P + E'E + \epsilon I = 0 \quad (3.22)$$

Neste caso, o ganho exigido para realizar tal tarefa é dado por:

$$K_\infty = -\frac{1}{2\epsilon} B'P \quad (3.23)$$

Demonstração:

Necessidade: Se o sistema (3.21) é quadraticamente estabilizável, então existe K_∞ tal que:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0 + DF(t)E + BK_\infty)x(t) \\ \|F(t)\| < \rho_A ; \quad \forall t \end{cases}$$

é quadraticamente estável.

Dai, pelo teorema 3.6 tem-se:

- (i) $A_0 + BK_\infty$ possui todos os seus autovalores com parte real estritamente negativa.
- (ii) $\|E(sI - A_0 - BK_\infty)^{-1}D\|_\infty \leq \frac{1}{\rho_A}$.

Então, aplicando-se o teorema 1.4, resulta:

$$A'_0 P + PA_0 - \frac{1}{\epsilon} PBB'P + \rho_A^2 PDD'P + \epsilon I = 0$$

e utilizando-se o teorema A.2, tem-se:

$$A'_0 P + PA_0 - \frac{1}{\epsilon} PBB'P + \rho_A^2 PDD'P + E'E + \epsilon I = 0$$

Suficiência: Fazendo $\hat{A}_0 \triangleq A_0 + BK_\infty$, com:

$$K_\infty = -\frac{1}{2\epsilon} B'P$$

em (3.22), tem-se:

$$\hat{A}_0' P + P\hat{A}_0 + \rho_A^2 PDD'P + E'E + \epsilon I = 0$$

Agora utilizando-se o teorema 1.3 do capítulo 1, então:

(i) $A_0 + BK_\infty$ possui todos os seus autovalores com parte real estritamente negativa.

$$(ii) \| E(sI - A_0 - BK_\infty)^{-1}D \|_\infty < \frac{1}{\rho_A}.$$

e aplicando-se o teorema 3.6 tem-se que o sistema:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + BK_\infty + DF(t)E)x(t)$$

é quadraticamente estável, sendo então o sistema (3.21) quadraticamente estabilizável.

□

Este resultado é de grande relevância, pois estabelece condições necessárias e suficientes para a estabilizabilidade quadrática do sistema (3.21).

Assume-se agora, que existem incertezas tanto na matriz dinâmica quanto na matriz de entradas do sistema e que ambas são consideradas limitadas em norma. O sistema de interesse é descrito por:

$$\dot{x}(t) = (A_0 + \Delta A(t))x(t) + (B_0 + \Delta B(t))u(t) \quad (3.24)$$

Assume-se que as incertezas ΔA e ΔB , sem perda de generalidade, obedecam a seguinte equação:

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = DF(t) [E_1 \quad E_2] \quad (3.25)$$

para alguma tripla de matrizes D , E_1 e E_2 , de dimensões apropriadas, que representam a maneira com que as incertezas afetam o modelo nominal e onde $F(t)$ representa as incertezas limitadas em norma:

$$\|F(t)\| \leq 1 ; \quad \forall t$$

Definindo-se o sistema incerto desta maneira, pode-se encarar o problema de estabilização deste como um problema de controle H_∞ utilizando-se uma planta não estritamente própria, ou seja, onde há transferência direta das entradas para as saídas. Isto é feito levando-se em conta que o sistema (3.24) pode, de acordo com (3.25), ser escrito como:

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + B_0u(t) + DF(t)E_1x(t) + DF(t)E_2u(t)$$

e definindo-se os vetores auxiliares:

$$\begin{aligned} v(t) &\triangleq E_1x(t) + E_2u(t) \\ w(t) &\triangleq F(t)v(t) \end{aligned}$$

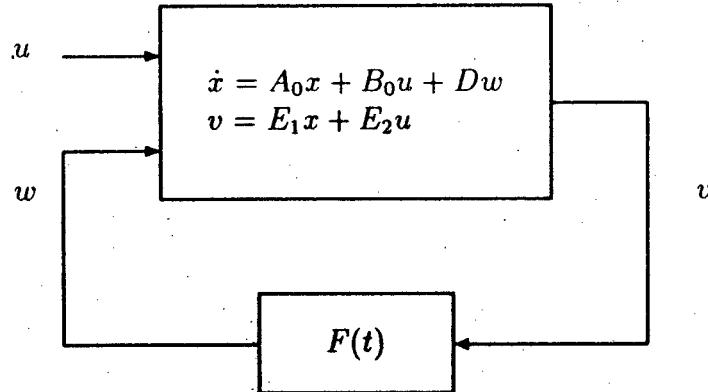


Figura 3.2: Representação do problema de estabilização do sistema incerto como um problema de minimização H_∞ .

o sistema tratado fica da forma representada na figura 3.2.

Para a resolução deste problema, será exposto aqui um resultado encontrado em [56, 32]. Faz-se necessária uma série de definições preliminares. Considera-se inicialmente que:

$$D \in \mathbb{R}^{n \times k}$$

$$F(t) \in \mathbb{R}^{k \times j}$$

$$E_1 \in \mathbb{R}^{j \times n}$$

$$E_2 \in \mathbb{R}^{j \times m}$$

onde n e m são os números de estados e de entradas, respectivamente e k e j são números inteiros positivos quaisquer. Agora, supõe-se que:

$$\rho(E_2) = i$$

logicamente $i < j$. Define-se $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{i \times n}$ tal que:

$$\rho(\Sigma_2) = i \quad \text{e} \quad E'_2 E_2 = \Sigma'_2 \Sigma_2$$

Define-se também $\Phi \in \mathbb{R}^{(m-i) \times m}$, tal que:

$$\Phi \Sigma'_2 = 0 \quad \text{e} \quad \Phi \Phi' = I \quad (\Phi = 0 \text{ se } i = m)$$

Seja, ainda, $\Xi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que:

$$\Xi \triangleq \Sigma'_2 (\Sigma_2 \Sigma'_2)^{-2} \Sigma_2$$

Com estas definições pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.8 [32] O sistema incerto (3.24) é quadraticamente estabilizável via controle linear se, para algum escalar $\epsilon > 0$, existir uma solução simétrica, positiva definida P para a equação de Riccati algébrica:

$$\begin{aligned} [A_0 - B_0 \Xi E'_2 E_1]' P + P[A_0 - B_0 \Xi E'_2 E_1] + P[DD' - B_0 \Xi B'_0 - \frac{1}{\epsilon} B_0 \Phi' \Phi B'_0] P \\ + E'_1[I - E_2 \Xi E'_2] E_1 + \epsilon I = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

neste caso uma lei de controle estabilizante é dada por:

$$u(t) = -k_\infty x(t) \quad (3.27)$$

com:

$$k_\infty = [\frac{1}{2\epsilon} \Phi' \Phi + \Xi] B_0 P + \Xi E'_2 E_1$$

Por outro lado, se o sistema (3.24) é quadraticamente estabilizável via controle linear, então existe um escalar $\epsilon^* > 0$ tal que para todo $\epsilon \in [0, \epsilon^*]$ a referida equação de Riccati possui ao menos uma solução simétrica, positiva definida P .

Demonstração: para uma demonstração detalhada, consultar [32] e suas referências.

□

Cabe salientar-se aqui, que o método de posicionamento de autovalores "deslocamento α " que já foi exposto anteriormente é aplicável também neste contexto. Sua implementação é feita de forma idêntica à detalhada na subseção anterior. Valem também os mesmos comentários sobre o aumento indesejável do ganho de realimentação em situações de fraca controlabilidade do sistema.

Observação 3.3 A técnica exposta nesta subseção é oriunda da resolução de um problema de minimização da influência de perturbações externas atuando no sistema. Dado que as incertezas paramétricas podem ser representadas como tais perturbações, é de se esperar que a lei de controle obtida por tal algoritmo minimize a sensibilidade da resposta do sistema a estímulos, com relação a estas variações paramétricas.

Na próxima subseção, será analisado um resultado que mostra como obter leis de controle robustas valendo-se apenas do conceito de estabilizabilidade quadrática e de técnicas de programação linear.

3.3.4 Abordagem por Programação Linear

O algoritmo de síntese descrito nesta seção utiliza conceitos de programação linear no seu desenvolvimento. O mesmo está baseado no resultado obtido por Barmish em [9] e exposto no início deste capítulo (teorema 3.2). Tal resultado fornece condições necessárias e suficientes para a estabilizabilidade de um sistema linear com incertezas do tipo linear convexa nas matrizes dinâmica e de entradas via leis de controle contínuas.

O objetivo continua sendo a obtenção de uma lei de controle linear e invariante no tempo que estabilize o sistema incerto descrito pela equação:

$$\dot{x} = A(r(t))x + B(s(t))u \quad (3.28)$$

A seguir, uma definição de estabilizabilidade quadrática:

Definição 3.5 *O sistema (3.28) é dito quadraticamente estabilizável via retroação linear de estados se existir uma função de Lyapunov quadrática $V = x'Px$, com $P = P' > 0$, uma constante $\alpha > 0$ e uma lei de controle $u = -Kx$ tais que para quaisquer $r(t) \in \mathcal{R}$ e $s(t) \in \mathcal{S}$, tenha-se:*

$$x'[A'(r(t)) + PA(r(t))]x + 2x'PB(s(t))Kx \leq -\alpha \|x\|^2 ; \forall x \neq 0$$

onde $\|\cdot\|$ denota norma euclideana.

Expõe-se, agora um resultado que fornece condições necessárias e suficientes para a estabilizabilidade quadrática do sistema incerto (3.28).

Teorema 3.9 [47] *O sistema descrito por (3.28) é quadraticamente estabilizável via retroação linear de estados se e somente se existirem uma matriz definida positiva $W = W' \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que:*

$$A_i W + W A'_i < B_j R + R' B'_j \quad \begin{cases} \forall i = 1, \dots, nr \\ \forall j = 1, \dots, ns \end{cases} \quad (3.29)$$

Além disso, se esta condição é satisfeita então um ganho de realimentação de estados robusto é dado por:

$$k_{PL} = RW^{-1} \quad (3.30)$$

Demonstração:

Necessidade: A estabilidade quadrática do par (A, B) definido em (3.28) por retroação linear de estados é equivalente a existência de matrizes $P = P' > 0$, $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tais que, para quaisquer $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{B}$ é válida a desigualdade:

$$(A - Bk_{PL})'P + P(A - Bk_{PL}) < 0 \quad (3.31)$$

Isto implica que tal desigualdade deve ser válida para todos os vértices dos poliedros \mathcal{A} e \mathcal{B} , então:

$$(A_i - B_j k_{PL})'P + P(A_i - B_j k_{PL}) < 0 \quad \begin{cases} \forall i = 1, \dots, nr \\ \forall j = 1, \dots, ns \end{cases} \quad (3.32)$$

Dai:

$$A'_i P + PA_i < k'_{PL} B'_j P + PB_j k_{PL} \quad \begin{cases} \forall i = 1, \dots, nr \\ \forall j = 1, \dots, ns \end{cases} \quad (3.33)$$

Pré e pós multiplicando-se a inequação acima por $W = P^{-1}$ e fazendo-se $R = k_{PL}W$ chega-se a:

$$A_i W + WA'_i < B_j R + R'B'_j \quad \begin{cases} \forall i = 1, \dots, nr \\ \forall j = 1, \dots, ns \end{cases} \quad (3.34)$$

Suficiência: A partir de (3.29), pré e pós multiplicando-se por $P = W^{-1} > 0$, tem-se:

$$PA_i + A'_i P < P[B_j R + R'B'_j]P \quad \begin{cases} \forall i = 1, \dots, nr \\ \forall j = 1, \dots, ns \end{cases} \quad (3.35)$$

Então, fazendo-se $k_{PL} = RW^{-1} = RP$:

$$(A_i - B_j k_{PL})'P + P(A_i - B_j k_{PL}) < 0 \quad \begin{cases} \forall i = 1, \dots, nr \\ \forall j = 1, \dots, ns \end{cases} \quad (3.36)$$

Se a desigualdade acima é válida para todos os vértices dos politopos \mathcal{A} e \mathcal{B} , pode-se mostrar facilmente que a mesma também é válida para todas as possíveis combinações lineares convexas destes vértices, o que dá origem a:

$$\left(\sum_{i=1}^{nr} r_i(t) A_i - \sum_{j=1}^{ns} s_j(t) B_j k_{PL} \right)' P + P \left(\sum_{i=1}^{nr} r_i(t) A_i - \sum_{j=1}^{ns} s_j(t) B_j k_{PL} \right) < 0$$

o que significa que $\forall A \in \mathcal{A}$ e $\forall B \in \mathcal{B}$ é válida a desigualdade:

$$(A - Bk_{PL})'P + P(A - Bk_{PL}) < 0$$

isto é, o sistema incerto (3.28) é quadraticamente estável mediante a lei de controle $u = -k_{PL}x$.

□

O resultado acima é extremamente importante pois transforma a desigualdade (3.31) que apresenta uma relação não-linear em P e k_{PL} na desigualdade (3.29) que é linear em R e W .

O cálculo da lei de controle robusta pode ser feito através da solução do seguinte problema de otimização:

$$\min \sigma + \delta \quad (3.37)$$

Sob as restrições:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1. w_{pp} \leq \sigma \\ 2. -\delta \leq r_{qp} \leq \delta \quad p = 1, \dots, n; q = 1, \dots, m \\ 3. W \geq I_{n \times n} \\ 4. A_i W + W A'_i - B_j R - R B_j \leq -\epsilon I_{n \times n} \quad \forall i, j \end{array} \right.$$

onde :

w_{pp} são os elementos da diagonal de W .

r_{qp} são os elementos de R .

σ e δ são variáveis escalares artificiais de otimização.

ϵ é um parâmetro livre de ajuste.

Este problema de minimização é resolvido utilizando técnicas de programação linear⁶. Apesar do mesmo parecer um pouco artificial, pode-se identificar, neste problema, vários aspectos intuitivos.

Em primeiro lugar, verifica-se que caso exista um par de matrizes (W, R) que satisfaça a desigualdade (3.29) então, é facilmente demonstrável, que as restrições 3 e 4 do problema de minimização são atendidas e portanto o mesmo apresenta uma solução.

Nota-se também que incluindo-se σ na função custo a ser minimizada, através da restrição 1, evita-se que os elementos da diagonal de W cresçam indefinidamente. O mesmo pode ser afirmado sobre δ com relação aos elementos de R na restrição 2.

Com o objetivo de limitar a norma do ganho de realimentação robusto, impõe-se a restrição 3, uma vez que na expressão deste ganho aparece W^{-1} , logo deseja-se que a matriz W seja mantida longe da singularidade⁷.

⁶ver [41] para uma análise aprofundada da teoria de programação linear.

⁷isto quer dizer que estipula-se um limite inferior maior do que zero para o seu menor valor singular.

Em [48] está proposto um algoritmo numérico do tipo *Plano de Corte* cuja convergência é garantida caso exista solução ao problema de minimização considerado. Porém, este algoritmo apresenta problemas relacionados à quantidade de memória necessária para o armazenamento de "arrays" que são necessários para a inclusão das restrições. Uma possível diminuição no efeito deste acúmulo de restrições existente neste algoritmo poderia ser obtida eliminando-se as restrições redundantes que são incorporadas a cada iteração do mesmo.

Finalmente, é válido observar que, novamente, neste algoritmo, é possível englobar a exigência de "deslocamento α " no projeto do controlador simplesmente substituindo-se na equação (3.29), A_i por $A_i + \alpha I$.

Ressalta-se, neste instante, a importância teórica deste resultado que fornece condições necessárias e suficientes para a estabilizabilidade quadrática de sistemas com incertezas do tipo linear convexa. Além disso, em caso de existência de solução para este problema, a mesma é imediatamente obtida como resultado da execução do algoritmo. Resta somente não completamente resolvido o problema numérico associado ao algoritmo de Plano de Corte utilizado.

3.4 Conclusão

Neste capítulo foram analisados algoritmos capazes de sintetizar leis de controle robustas. Primeiramente foi apresentado o conceito de estabilizabilidade quadrática e alguns resultados importantes relacionados a esta noção. Daí, algoritmos de síntese de controladores robustos foram desenvolvidos relacionando-os com metodologias de projeto bem conhecidas da teoria de controle "*moderno*", tais como Controle Ótimo, Controle H_∞ , entre outras.

A noção de estabilizabilidade quadrática constitui condição necessária e suficiente para a estabilizabilidade de um sistema linear invariante no tempo. Quando da extensão deste conceito para um sistema linear incerto variante no tempo, estas condições tornam-se somente suficientes originando assim, características de conservatividade nos métodos de síntese propostos. Assume-se a hipótese de que estas características não sejam demasiadamente restritivas, de tal maneira que não fiquem inviabilizadas as suas aplicações a exemplos reais.

Com o objetivo de ilustrar algumas das possíveis aplicações dos algoritmos de síntese de controle robusto, o próximo capítulo é dedicado exclusivamente à resolução de problemas de controle, via estes algoritmos, em áreas diversificadas da engenharia.

Capítulo 4

Aplicações

Dentre as diferentes áreas da engenharia, é comum o surgimento de sistemas dinâmicos sujeitos a variações e incertezas em suas características de funcionamento. Nos capítulos anteriores foi exposto um desenvolvimento teórico que culminou com a obtenção de métodos de síntese de controladores capazes de tratar este tipo de sistemas físicos que muitas vezes são pouco conhecidos.

Este capítulo visa, por um lado, verificar a aplicabilidade de tais métodos a exemplos concretos e, por outro lado, contribuir para a solução de problemas de controle até então tratados usando-se métodos clássicos e que neste capítulo serão estudados utilizando-se os métodos anteriormente apresentados.

Com este propósito, na próxima seção será abordado o problema de estabilização de sistemas de estrutura flexível sujeitos a incertezas paramétricas, em particular o de uma barra flexível engastada em uma das suas extremidades.

A seguir o problema de projeto de estabilizadores de sistemas de potência (ESP's) robustos será estudado. Neste contexto, um sistema altamente não-linear como é o caso dos sistemas de potência será modelado como um sistema linear incerto variante no tempo, tornando assim viável o seu tratamento valendo-se dos métodos estudados.

4.1 Sistemas de Estrutura Flexível

O controle por realimentação de estados de vibrações mecânicas em sistemas de estrutura flexível tem sido estudado por diversos autores [6, 10, 5, 28, 44, 19] e tem aplicações em variadas áreas, sobretudo em astronáutica. Sistemas como satélites flexíveis, espaçonaves, antenas espaciais etc. enquadram-se nesta classificação.

Teoricamente, este tipo de sistemas requer um número infinito de modos de vibração para uma representação exata do seu comportamento. Na prática, apenas alguns destes modos são retidos no modelo matemático. Estes modos são geralmente escolhidos utilizando-se um critério energético e também segundo exigências de desempenho para o sistema real.

4.1.1 Modelagem matemática

Os sistemas de estrutura flexível são exemplos de sistemas lineares de dimensão infinita¹, e, de uma maneira geral, estes necessitam de equações diferenciais parciais para a sua modelagem e podem ser descritos por uma equação de onda generalizada do tipo:

$$m(h)\ddot{u}(h, t) + 2\zeta A^{1/2}\dot{u}(h, t) + Au(h, t) = F(h, t) \quad (4.1)$$

onde:

$$\left\{ \begin{array}{l} u(h, t) = \text{deslocamento da posição de equilíbrio em dada posição.} \\ F(h, t) = \text{distribuição de força aplicada.} \\ m(h) = \text{densidade de massa.} \\ \zeta = \text{coeficiente de amortecimento geralmente muito pequeno (\approx 0.005).} \\ A = \text{operador simétrico diferencial não-negativo e de domínio denso no espaço de Hilbert.} \end{array} \right.$$

A densidade de massa, $m(h)$, é uma função positiva da posição ao longo da estrutura e, através

de uma mudança na variável $u(h, t)$, pode ser considerada invariante ao longo do corpo. Logo, assume-se que $m(h) \equiv 1$.

Assume-se que o espectro do operador A contém somente autovalores isolados λ_k com respectivas autofunções ortogonais $\phi_k(h)$ e pertencentes ao domínio de A formando uma base para o espaço de Hilbert, H .

$$A\phi_k = \lambda_k\phi_k, \quad A^{1/2}\phi_k = \lambda_k^{1/2}\phi_k; \quad 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$$

Estas autofunções $\phi_k(h)$ constituem as chamadas formas próprias da estrutura e as freqüências próprias da mesma são dadas por $\omega_k = \lambda_k^{1/2}$.

A distribuição de força, a qual constitui o controle, é modelada como sendo originada por m atuadores ao longo da estrutura:

$$F(h, t) = \sum_{i=1}^m b_i(h)f_i(t) \quad (4.2)$$

¹para maiores detalhes sobre a teoria de sistemas lineares de dimensão infinita, ver [19].

com $f_i(t)$ representando a amplitude da força aplicada pelo atuador i . Sendo os atuadores considerados puntuais, então as funções $b_i(h)$, pertencentes ao espaço de Hilbert H , são aproximadas por funções de Dirac do tipo $\delta(h - h_i)$, onde h_i representa a posição do atuador i na estrutura. Ou, alternativamente:

$$\langle b_i(h), \phi_k(h) \rangle \cong \phi_k(h_i)$$

As variações nos deslocamentos ao longo da estrutura são medidos por p sensores de velocidade pontuais:

$$y(t) = \dot{u}(h, t)$$

onde:

$$y_j(t) = \dot{u}(s_j, t) \quad j = 1, \dots, p \quad (4.3)$$

com s_j sendo a posição do sensor j , ao longo da estrutura.

Dado que as formas próprias geram uma base para o espaço de Hilbert H , então a solução da equação diferencial parcial (4.1) pode ser representada como:

$$u(h, t) = \sum_{k=1}^{\eta} u_k(t) \phi_k(h) \quad (4.4)$$

onde $u_k(t)$ representam as denominadas amplitudes modais.

Em teoria, η deveria ser infinito para a validade da expressão acima. Contudo, devido a restrições na banda de passagem de atuadores e sensores é comum assumir-se que apenas um número razoável de modos de vibração devam ser considerados na obtenção de um modelo realista.

A partir de (4.1), (4.2) e (4.4), tem-se que as amplitudes modais $u_k(t)$ satisfazem:

$$\ddot{u}(t) + 2\zeta\Lambda^{1/2}\dot{u}(t) + \Lambda u(t) = Bf(t) \quad (4.5)$$

com $\Lambda^{1/2} \in \mathbb{R}^{\eta \times \eta}$ sendo uma matriz diagonal cujos elementos são as freqüências próprias w_i , $i = 1, \dots, \eta$. A matriz $B \in \mathbb{R}^{\eta \times m}$ possui o elemento genérico b_{ij} da forma:

$$b_{ij} = \phi_i(a_j) \quad i = 1, \dots, \eta ; j = 1, \dots, m$$

onde $\phi_i(\cdot)$ é a forma própria associada ao modo i e a_j é a localização do atuador j .

A equação de saída (4.3) fica da forma:

$$y_j(t) = \dot{u}(s_j, t) = \sum_{k=1}^{\eta} \dot{u}_k(t) \phi_k(s_j)$$

Agora, definindo-se:

$$x \doteq \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \dot{u}_1(t) \\ u_2(t) \\ \dot{u}_2(t) \\ \vdots \\ u_\eta(t) \\ \dot{u}_\eta(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u(t) \doteq f(t)$$

Tem-se:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

com:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_\eta \end{bmatrix} \quad A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_i^2 & -2\zeta\omega_i \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \phi_1(a_1) & \cdots & \phi_1(a_m) \\ 0 & \cdots & 0 \\ \phi_2(a_1) & \cdots & \phi_2(a_m) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ \phi_\eta(a_1) & \cdots & \phi_\eta(a_m) \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \phi_1(s_1) & 0 & \phi_2(s_1) & \cdots & 0 & \phi_\eta(s_1) \\ 0 & \phi_1(s_2) & 0 & \phi_2(s_2) & \cdots & 0 & \phi_\eta(s_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \phi_1(s_r) & 0 & \phi_2(s_r) & \cdots & 0 & \phi_\eta(s_r) \end{bmatrix}$$

com $A \in \mathbb{R}^{2\eta \times 2\eta}$, $B \in \mathbb{R}^{2\eta \times m}$ e $C \in \mathbb{R}^{r \times 2\eta}$, onde η representa o número de modos de vibração retidos no modelo reduzido, m , o número de atuadores e r , o número de sensores localizados sobre a estrutura.

Desta forma, os estados do sistema são as amplitudes modais e as suas respectivas derivadas. As saídas y_j representam as variações nos deslocamentos nas posições s_j da estrutura.

Na próxima seção, o modelo para sistemas de estrutura flexível obtido acima será particularizado com o intuito de resolver-se um problema de controle robusto.

4.1.2 Estudo de caso

O exemplo escolhido trata-se de uma barra fina, flexível, engastada em uma de suas extremidades, conforme mostrado na figura 4.1, de cuja extremidade deseja-se suprimir as oscilações. Este exemplo é clássico na literatura de estruturas flexíveis e foi tomado aqui com o objetivo de ilustrar a viabilidade da aplicação de técnicas de controle robusto a este tipo de sistema.

Considera-se que os atuadores foram posicionados de forma a maximizar determinado critério de controlabilidade. Para este sistema físico, as freqüências e as formas próprias têm as seguintes expressões analíticas:

$$\begin{aligned} J_0(L\omega_i) &= 0 \\ \phi_i(h) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \frac{J_0((L-h)\omega_i)}{J_1(L\omega_i)} \quad i = 1, \dots, \eta \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde L é o comprimento da barra, h é a posição ao longo da mesma e $J_0(\cdot)$ e $J_1(\cdot)$ são funções de Bessel, respectivamente de ordem zero e um, ambas sendo do primeiro tipo.

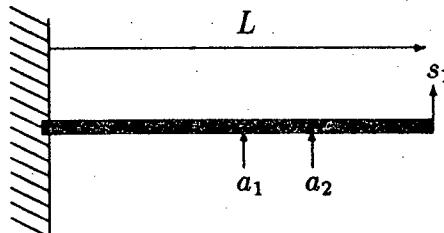


Figura 4.1: Barra engastada.

Observação 4.1 É importante lembrar que, na maioria dos casos, a obtenção das freqüências e formas próprias só é possível numericamente. Nestes casos, o método clássico a ser utilizado para este intuito é o método dos elementos finitos.

No exemplo numérico considerado, $L = 10 \text{ um}$ (unidades de medida) e as posições dos atuadores e sensores são dadas por:

$$\begin{cases} \text{Atuador 1 } (a_1): h = 5.2 \text{ um} \\ \text{Atuador 2 } (a_2): h = 7 \text{ um} \\ \text{Sensor 1 } (s_1): h = 10 \text{ um} \end{cases}$$

Admitindo-se que:

- Existem aproximações matemáticas na obtenção de (4.6) [15];
- Alguns dos parâmetros físicos da barra tais como: densidade, coeficiente de amortecimento, entre outros, podem ser conhecidos de forma imprecisa, e portanto, podem ocorrer variações em alguns parâmetros implícitos nas equações (4.6);

- Podem existir incertezas sobre o real posicionamento dos atuadores e sensores; então, faz-se necessária a obtenção de um conjunto de modelos que agrupe todas as possibilidades para estas incertezas.

Neste exemplo, assume-se que não há amortecimento natural para o sistema ($\zeta = 0$). Isto é plenamente justificável, uma vez que este amortecimento, no caso de estruturas flexíveis, é geralmente muito pequeno. Além disso, a inserção de uma pequena incerteza diagonal negativa genericamente aumentará a sua estabilidade e o seu desempenho.

Para a representação da dinâmica da barra foram retidos apenas dois modos de vibração, pois este par de modos englobam a quase totalidade da energia distribuída ao longo do espectro de freqüência. As freqüências próprias são supostas conhecidas a menos de um erro de $\pm 10\%$ e as posições dos atuadores são assumidas incertas com uma amplitude de variação de $\Delta h = 0.05 \text{ um}$.

Após todas estas considerações, formaliza-se o conjunto de modelos a ser tratado:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0.0584 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -0.3078 & 0 \end{bmatrix} & \Delta A(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0116r_1(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0609r_2(t) & 0 \end{bmatrix} \\
 B_0 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.5467 & 0.4313 \\ 0 & 0 \\ -0.4462 & 0.1339 \end{bmatrix} & \Delta B(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.0426s_1(t) & 0.0124s_2(t) \\ 0 & 0 \\ 0.0722s_3(t) & 0.1569s_4(t) \end{bmatrix} \\
 C &= \begin{bmatrix} 0 & 0.6091 & 0 & -0.9294 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Neste contexto, o conjunto de sistemas a ser estudado é obtido combinando-se as matrizes nominais com as matrizes de incertezas.

Agora, serão aplicados os métodos de estabilização vistos no capítulo anterior ao modelo derivado acima.

Abordagem por Schmitendorf

Inicialmente procede-se à uma particular decomposição em posto-1 das incertezas, obtendo-se as seguintes matrizes:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0116 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0609 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0.0116 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0609 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0.1149 & 0 \\ 0 & 0.1693 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0550 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2291 \end{bmatrix}$$

e escolhendo-se as matrizes de ponderação Q e R como sendo identidades de ordem 4 e 2, respectivamente e com $\epsilon = 0.5314$ a equação (3.9) apresentou solução simétrica positiva definida e a lei de controle robusta é dada por $u = k_s x$, com:

$$k_s = \begin{bmatrix} 0.3793 & 2.2218 & 0.5558 & 7.4564 \\ -1.7068 & -6.7758 & 0.9962 & -12.6865 \end{bmatrix}$$

cuja norma euclideana é 16.3931. O sistema nominal submetido a esta lei de controle apresenta os seguintes autovalores:

$$\Omega_s = \{-0.1491, -0.4715 \pm 0.6478i, -5.6416\}$$

Aplicando-se um impulso unitário na posição $h = 6,7 \text{ um}$ da barra, visualiza-se na figura 4.2 a resposta do sistema para alguns dos possíveis sistemas tratados. Admitiu-se que as incertezas assumem 4 de seus possíveis valores máximos nestas simulações.

Abordagem por controle H_∞

Nesta abordagem, considera-se que as incertezas sobre o modelo são do tipo limitadas em norma. Portanto, para a aplicação do teorema 3.8 ao sistema (4.7), é necessária a definição das matrizes D , E_1 e E_2 de forma a obter-se:

$$[\Delta A(t) \quad \Delta B(t)] = DF(t) [E_1 \quad E_2] \quad (4.8)$$

Com este intuito, arbitra-se $F(t)$ como sendo uma matriz diagonal de dimensão igual ao número total de elementos incertos em A e B e que seus elementos podem variar no tempo estando somente confinados ao intervalo $[-1, 1]$. Desta forma, garante-se que:

$$\|F(t)\| \leq 1 \quad \forall t$$

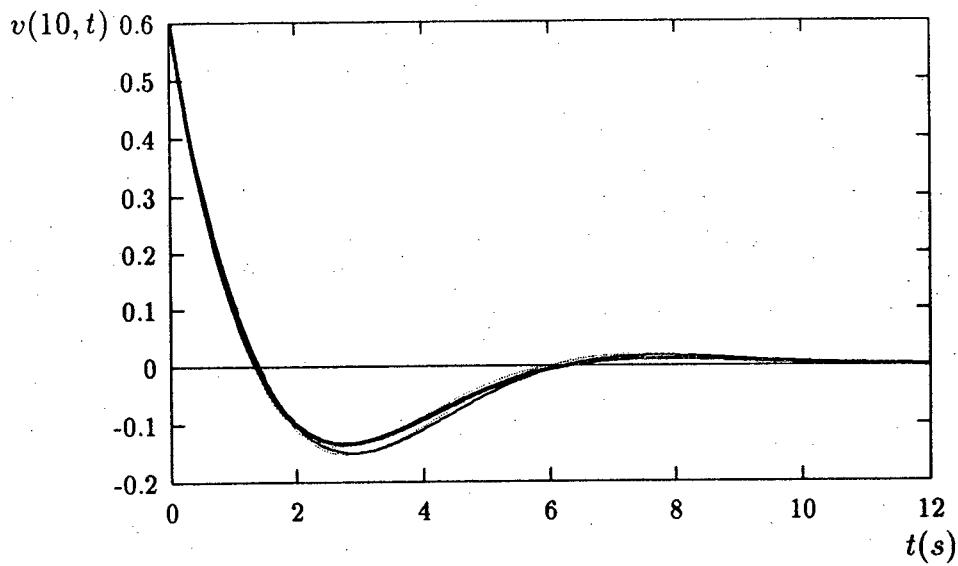


Figura 4.2: Simulação da barra submetida à lei de controle $u = k_s x$.

Uma escolha de matrizes D , E_1 e E_2 que satisfaz (4.8) é a seguinte:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.0116 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0609 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.0426 & 0 \\ 0 & 0.0124 \\ 0.0722 & 0 \\ 0 & 0.1569 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Seja a matriz Σ_2 dada por:

$$\Sigma_2 = \begin{bmatrix} 0.0839 & 0 \\ 0 & 0.1574 \end{bmatrix}$$

de forma que: $\Sigma_2^T \Sigma_2 = E_2^T E_2$. Então, tem-se que:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \Xi = \begin{bmatrix} 142.1214 & 0 \\ 0 & 40.3679 \end{bmatrix}$$

Com estas matrizes representando o sistema (4.7), com $\epsilon = 0.6461$, a equação (3.26) do teorema 3.8 apresentou solução definida positiva e o ganho de realimentação de estados obtido é dado por:

$$k_\infty = \begin{bmatrix} -6.1642 & -6.4820 & 7.2126 & 9.5722 \\ -4.9521 & -7.6775 & -4.1532 & -8.4427 \end{bmatrix}$$

com norma euclideana 15.4202. Com a lei de controle $u = k_\infty x$, o sistema nominal em malha fechada possui como autovalores:

$$\Omega_\infty = \{-0.7331, -1.0079, -3.5303, -6.9860\}$$

A resposta deste sistema à mesma excitação aplicada no resultado anterior e para incertezas assumindo seus valores máximos é mostrada na figura 4.3.

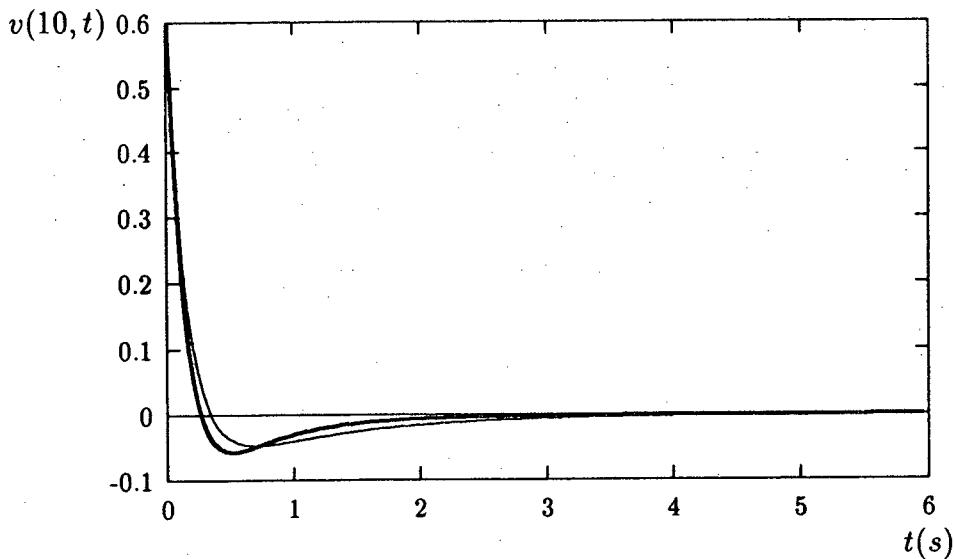


Figura 4.3: Simulação da barra submetida à lei de controle $u = k_\infty x$.

Nota-se que, com uma norma de ganho próxima à da abordagem por Schmitendorf obteve-se um conjunto de autovalores que conduzem a um tempo de estabilização bem menor e sem oscilações. Vale salientar que estes resultados dependem diretamente das escolhas das matrizes de ponderação e de decomposição de ambos os métodos e que estas, por serem arbitrárias, podem levar à soluções completamente distintas desta.

Abordagem por programação linear

Para este tipo de abordagem, o modelo utilizado para o sistema incerto deve apresentar incertezas do tipo linear convexa. Daí a necessidade de definir-se os vértices do poliedro convexo definido pelo sistema (4.7) no espaço de sistemas, que é de dimensão 6 pois existem 6 elementos incertos no modelo. Estes vértices são em número de 64 e são determinados procedendo-se à todas as combinações possíveis de matrizes nominais com os elementos das matrizes de incertezas assumindo ora seus valores mínimos, ora seus valores máximos, independentemente.

Utilizando-se uma rotina compatível com o pacote PC-MATLAB que resolve o problema de programação linear detalhado no capítulo anterior, obteve-se, após 204 iterações o

seguinte par de matrizes que satisfazem a equação (3.29):

$$W = \begin{bmatrix} 8.1682 & -2.1904 & 2.0349 & -1.2542 \\ -2.1904 & 3.0925 & 2.0114 & -0.4579 \\ 2.0349 & 2.0114 & 7.1196 & -1.0340 \\ -1.2542 & -0.4579 & -1.0340 & 2.7436 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} -0.5743 & 2.3507 & -0.1672 & -3.5711 \\ -0.2953 & 2.6691 & 1.6009 & 2.1590 \end{bmatrix}$$

o que dá origem a um ganho de realimentação de estados robusto dado por:

$$k_{PL} = \begin{bmatrix} 0.1437 & 1.0241 & -0.5380 & -1.2678 \\ 0.6897 & 1.7183 & -0.2708 & 1.2869 \end{bmatrix}$$

cuja norma euclideana é 2.2846. Submetido à lei de controle $u = -k_{PL}x$, o modelo nominal apresenta os seguintes autovalores:

$$\Omega_{PL} = \{-0.2918 \pm 0.5070i, -0.7278 \pm 0.3920i\}$$

Novamente, aplicando-se a mesma entrada impulsional no sistema incerto (4.7) com as incertezas assumindo seus valores máximos, visualiza-se na figura 4.4 o desempenho obtido para o sistema em malha fechada.

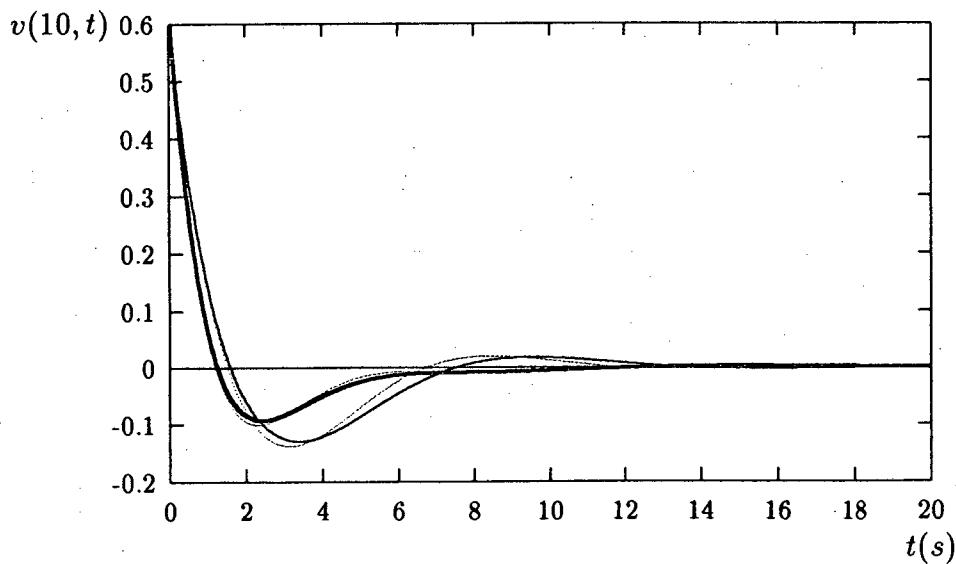


Figura 4.4: Simulação da barra submetida à lei de controle $u = -k_{PL}x$.

A tabela 4.1 contém um resumo dos resultados extraídos das aplicações dos métodos de síntese estudados ao exemplo de estrutura flexível proposto.

Abordagem	Norma do Ganho	Autovalores do Modelo Nominal
Custo Garantido	—	—
Schmitendorf	16.3931	$-0.1491, -0.4715 \pm 0.6478i, -5.6416$
Controle H_∞	15.4202	$-0.7331, -1.0079, -3.5303, -6.9860$
Programação Linear	2.2846	$-0.2918 \pm 0.5071i, -0.7278 \pm 0.3920i$

Tabela 4.1: Tabela comparativa dos métodos de síntese para o exemplo da barra engastada.

Observação 4.2 *Com a abordagem por custo garantido não foi possível obter um ganho estabilizante para o exemplo escolhido. Isto ilustra o caráter de suficiência que tal abordagem possui, assim como a abordagem por Schmitendorf.*

Analizando-se a tabela 4.1 e os gráficos das figuras 4.2, 4.3 e 4.4, pode-se tecer os seguintes comentários:

1. A natureza de otimalidade com relação a determinado índice de desempenho das soluções obtidas com as abordagens por Schmitendorf e Controle H_∞ explica o melhor desempenho apresentado pelo sistema nominal quando submetido a estas leis de controle. Por outro lado, este melhor desempenho é alcançado às custas de normas de ganho maiores, o que acarreta um maior esforço de controle.
2. A abordagem por Programação Linear, por estar fundamentada somente na exigência de estabilidade quadrática do conjunto de modelos, apresenta uma norma de ganho bem menor do que as demais abordagens. O desempenho transitório do sistema em malha fechada, logicamente, é bastante degradado por esta diminuição de ganho.
3. Quando da utilização da abordagem por Controle H_∞ , o conjunto de sistemas a ser tratado contém o conjunto definido pela equação 4.7. Na realidade, tal modelo constitui um conjunto compacto no espaço de sistemas que engloba o poliedro definido pela equação 4.7.

4.1.3 Considerações adicionais

Sistemas de estrutura flexível são sistemas passivos e portanto são intrinsecamente amortecidos em malha aberta, mesmo em presença de incertezas sobre alguns de seus parâmetros físicos. Porém, vale lembrar que quando em malha fechada, incertezas paramétricas podem degradar consideravelmente a resposta de tais sistemas inclusive levando-os à instabilidade.

Isto é ilustrado por meio de um simples exemplo. Suponha-se que é desejado, para o sistema nominal, o conjunto de autovalores Ω , e que para isto utiliza-se algum dos algoritmos ordinários para alocação dos mesmos. A título de ilustração, com esta finalidade utilizou-se a rotina "PLACE" do pacote PC-MATLAB para tal alocação. O ganho de realimentação de estados obtido é dado por:

$$k_{PLACE} = \begin{bmatrix} -0.5488 & -1.4157 & -0.3979 & 0.5464 \\ 10.0333 & -5.5265 & -4.6304 & -24.8881 \end{bmatrix}$$

cuja norma euclideana é 27.7882, muito maior do que a respectiva norma obtida com o resultado do teorema 3.5. Além disso, quando todas as componentes dos vetores de incertezas r e s assumem o valor -1 , o sistema global em malha fechada fica instável com o seguinte conjunto de autovalores:

$$\Omega_{PLACE} = \{-0.5588 \pm 1.4083i, -1.6482, 0.0266\}$$

No caso particular do exemplo considerado, a fonte de incertezas que mais afeta o comportamento do sistema em malha fechada é o posicionamento dos atuadores. Isto é perfeitamente compreensível, uma vez que os elementos da matriz B estão diretamente relacionados com o valor das formas próprias da estrutura nos pontos de atuação. Como consequência disto, os valores numéricos destes elementos podem variar rapidamente com o deslocamento dos atuadores, caso estes estejam localizados nas vizinhanças de algum dos zeros das formas próprias.

Torna-se assim bastante razoável a aplicação de métodos de síntese de controladores robustos a sistemas flexíveis.

4.2 Sistemas de Potência

Os sistemas de potência são os sistemas responsáveis pela geração de energia para os consumos industrial e doméstico. Com o constante crescimento da demanda e exigências cada vez maiores com relação à qualidade da energia gerada, estes sistemas tornam-se complexos e de grande porte.

Com o objetivo de tornar a geração de energia elétrica mais confiável e econômica ocorre a interligação de sistemas de potência. Com esta interligação, o sistema global tem capacidade de transferir energia rapidamente de uma área a outra do mesmo. Economicamente esta interconexão é vantajosa, pois permite uma redução das reservas de geração sem diminuição da confiabilidade no fornecimento de energia elétrica.

Cada um destes subsistemas é composto, fundamentalmente, por um gerador síncrono responsável pela conversão eletromecânica de energia entre a energia mecânica das quedas de água e a energia elétrica gerada. Além deste, um sistema elétrico elementar é composto também de uma turbina responsável pela transmissão da energia mecânica desde a queda de água até o rotor do gerador síncrono. O Gerador Síncrono Trifásico tem provado ser o mais eficiente para a geração de energia elétrica em larga escala. Além destes, outros componentes tais como os reguladores de tensão e de velocidade têm um efeito considerável sobre a estabilidade dinâmica dos sistemas de potência.

A energia gerada por estes sistemas de potência é transmitida até os pontos de consumo, tais como indústrias e residências, por meio de linhas de transmissão.

4.2.1 A Estabilidade Dinâmica em Sistemas de Potência

Quando do início das interconexões dos sistemas de potência, a principal forma de instabilidade era a perda de sincronismo dos geradores síncronos logo após uma falta no sistema global. A esta característica de instabilidade dos sistemas de potência convencionou-se chamar de instabilidade transitória. A atuação dos reguladores de tensão sobre o sistema de excitação do gerador aumenta as margens de estabilidade transitória. Porém, nota-se que a ação destes reguladores de tensão causa efeitos indesejáveis com relação à estabilidade dinâmica do sistema interligado. Estes efeitos manifestam-se principalmente sob a forma de oscilações de baixa freqüência e pouco amortecidas do rotor do gerador síncrono.

Com o intuito de minimizar estes efeitos maléficos, muitos autores propõem a adição de sinais estabilizadores à entrada dos reguladores de tensão. Estes sinais são derivados de medições de variáveis do próprio sistema e tem a função de amortecer as oscilações eletromecânicas do gerador. Aos controladores que geram estes sinais convencionou-se chamar estabilizadores de sistemas de potência (ESP). A função básica de um ESP consiste portanto em aumentar os limites de estabilidade dinâmica do sistema de potência modulando a excitação da máquina síncrona à qual é aplicado.

4.2.2 Modelagem Matemática dos Sistemas de Potência

É usual, no projeto de ESPs, supor-se que cada sistema de potência está conectado a um barramento infinito por meio de uma linha de transmissão. O barramento infinito é uma idealização que apresenta ao restante do sistema de potência global uma tensão com magnitude e freqüência constantes.

No final dos anos 60, de Mello e Concordia [45] propuseram uma abordagem para análise da estabilidade dinâmica e projeto de ESPs que é largamente utilizada pelas indústrias de geração de energia até os dias de hoje. Esta abordagem é baseada na análise do comportamento da malha de torque e ângulo do gerador síncrono em um sistema máquina barramento infinito.

Um modelo linearizado para o sistema máquina barramento infinito adequado para este tipo de análise é apresentado na figura 4.5.

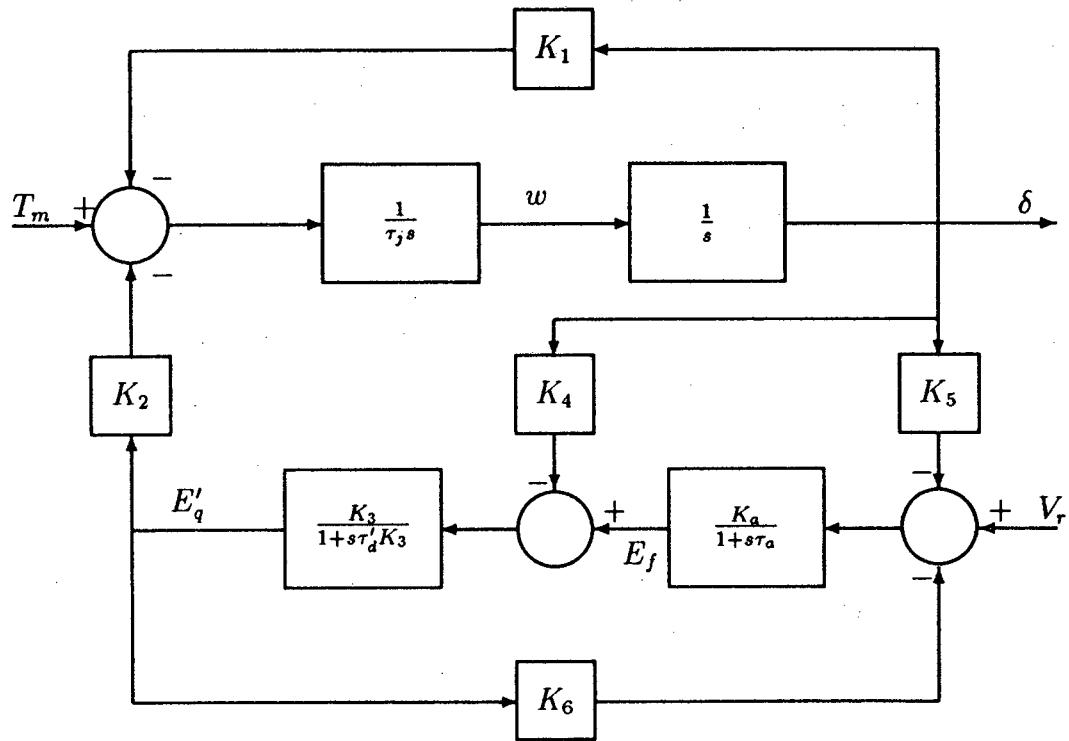


Figura 4.5: Modelo de Heffron-Phillips.

Uma realização para este sistema é apresentada em 4.10. Este é o conhecido modelo de Heffron-Phillips para a representação de um sistema máquina-barramento infinito.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4.10)$$

com:

$$A \doteq \begin{bmatrix} -\frac{1}{K_3 \tau_d'} & 0 & -\frac{K_4}{\tau_d'} & \frac{1}{\tau_d'} \\ -\frac{K_2}{\tau_j} & 0 & -\frac{K_1}{\tau_j} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_6 K_a}{\tau_a} & 0 & -\frac{K_5 K_a}{\tau_a} & -\frac{1}{\tau_a} \end{bmatrix} \quad x \doteq \begin{bmatrix} E'_q \\ \omega \\ \delta \\ E_f \end{bmatrix}$$

$$B \doteq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{K_a}{\tau_a} \\ 0 & \frac{1}{\tau_j} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad u \doteq \begin{bmatrix} V_r \\ T_m \end{bmatrix}$$

onde:

E'_q	tensão transiente no eixo em quadratura
ω	velocidade angular do rotor
δ	ângulo de carga
E_f	tensão de campo de excitação
$\tau_j = 2H$	com H sendo a constante de inércia do rotor
τ'_d	constante de tempo transitória no eixo direto
τ_a	constante de tempo do regulador de tensão
K_a	ganho do regulador de tensão
$K_1 - K_6$	parâmetros da linearização que dependem do ponto de operação
T_m	torque mecânico de referência
V_r	tensão de referência

Nota-se que este sistema possui 4 variáveis de estado. Destas, três são relativas ao gerador : δ , ω , E'_q e uma é relacionada com o sistema de excitação (regulador de tensão): E_f . Vale a pena lembrar que como este é um modelo linearizado, os valores destas variáveis de estado representam as variações das mesmas em torno dos seus valores quiescentes no dado ponto de operação.

4.2.3 Obtenção do modelo incerto

Condições de operação como fluxo de potência na linha de transmissão e diferentes topologias da malha de transmissão determinam o ponto de operação no qual o sistema se encontra. Variações nestas condições de funcionamento alteram o ponto de operação do sistema, portanto quando da linearização do mesmo em torno destes pontos de operação, variações ocorrem nos parâmetros K_1 a K_6 do modelo de Heffron-Phillips. Desta forma, arbitrando-se um domínio para tais condições de funcionamento do sistema, pode-se modelar o sistema propriamente dito, não linear, por um conjunto de modelos linearizados com cada um destes modelos representando o sistema não linear em um ponto de operação.

A cada ponto de operação é relacionado um par de matrizes (A, B) . Se é permitido ao ponto de operação variar arbitrariamente dentro de um intervalo pré-estabelecido, então um conjunto de pares (A, B) é gerado. Este será o conjunto de modelos que deverão ser estabilizados pelo "ESP robusto".

Imaginando-se um espaço \mathcal{S} , onde a cada ponto P_0 está relacionado um sistema dinâmico representado por uma dupla de matrizes (A_0, B_0) , iniciando-se em um dado ponto de operação e permitindo que este varie dentro dos limites do intervalo considerado admissível, então as sucessivas linearizações determinarão uma trajetória finita em \mathcal{S} . Desta forma, o conjunto de sistemas a ser estabilizado pelo ESP projetado é dado por esta trajetória.

Por razões de modelamento das incertezas, o conjunto de modelos é considerado como sendo o menor poliedro convexo em \mathcal{S} que contém inteiramente a referida trajetória.

Para o sistema máquina barramento infinito escolhido, foram arbitradas as seguintes condições possíveis para funcionamento do mesmo:

1. Fluxo de potência real admissível na linha de transmissão entre 0.8 pu e 1.2 pu^2 , ou seja, variação de $\pm 20\%$ em torno da condição nominal.
2. Aumento súbito de 100% na reatância da linha de transmissão devido a alguma variação na topologia do sistema interligado. Esta variação pode ser causada, por exemplo, pelo desligamento de alguma linha.

Observação 4.3 *Alguns dos parâmetros acima não figuram explicitamente nas equações, porém estes são utilizados no cálculo dos coeficientes K_1 a K_6 , provenientes da linearização.*

A seguir são dados valores numéricos de algumas constantes importantes do modelo escolhido.

Reatância de eixo em quadratura do gerador: $x_q = 0.66$

Reatância de eixo direto do gerador: $x_d = 1.07$

Reatância transitória de eixo direto do gerador: $x'_d = 0.408$

Resistência da armadura do gerador: $R_a = 0.003$

Impedância da linha de transmissão: $Z_e = 0.02 + 0.415j$

$H = 6.686$

$\tau'_d = 5.4$

$\tau_a = 0.2$

$K_a = 25$

Considerando estas variações, o conjunto de sistemas a ser controlado é dado por:

²sistema por unidade.

$$\begin{aligned}
A_0 &= \begin{bmatrix} -0.3091 & 0 & -0.0895 & 0.1852 \\ -22.8184 & 0 & -28.2574 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -69.6318 & 0 & 19.3459 & -5 \end{bmatrix} & \Delta A(t) &= \begin{bmatrix} 0.0250r_1(t) & 0 & 0.0304r_2(t) & 0 \\ 6.8550r_3(t) & 0 & 4.3257r_4(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12.9086r_5(t) & 0 & 6.0674r_6(t) & 0 \end{bmatrix} \\
B_0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 125 \end{bmatrix} & \Delta B(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
C &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & & (4.11)
\end{aligned}$$

O sistema nominal a malha aberta, A_0 é instável com autovalores:

$$\Omega_{MA} = \{0.1872 \pm 5.2117i, -2.8422 \pm 3.0913i\}$$

Aplicam-se agora alguns dos métodos de estabilização vistos no capítulo anterior ao modelo incerto acima.

Abordagem por custo garantido

Procedendo-se a uma particular decomposição em posto-1 das incertezas, obtém-se as seguintes matrizes:

$$\begin{aligned}
T &= \begin{bmatrix} 0.0015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 65.7025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 203.4471 \end{bmatrix} & U &= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
V &= 0 & W &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e escolhendo-se as matrizes de ponderação Q e R como sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.005 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}; R = 1$$

e com $\epsilon = 0.3874$ a equação (3.8) apresentou solução simétrica positiva definida e a lei de controle robusta obtida é da forma $u = k_{CG}x$, com k_{CG} dado por:

$$k_{CG} = \begin{bmatrix} -12.8023 & 2.4231 & -6.6912 & -0.1877 \end{bmatrix}$$

cuja norma euclideana é 14.6484. O sistema nominal, quando submetido a esta lei de controle apresenta os seguintes autovalores:

$$\Omega_{CG} = \{-5.6395 \pm 5.8558i, -8.7485 \pm 2.5143i\}$$

As respostas do sistema linear à condição inicial:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

para alguns dos valores máximos admissíveis para as incertezas estão mostradas na figura 4.6.

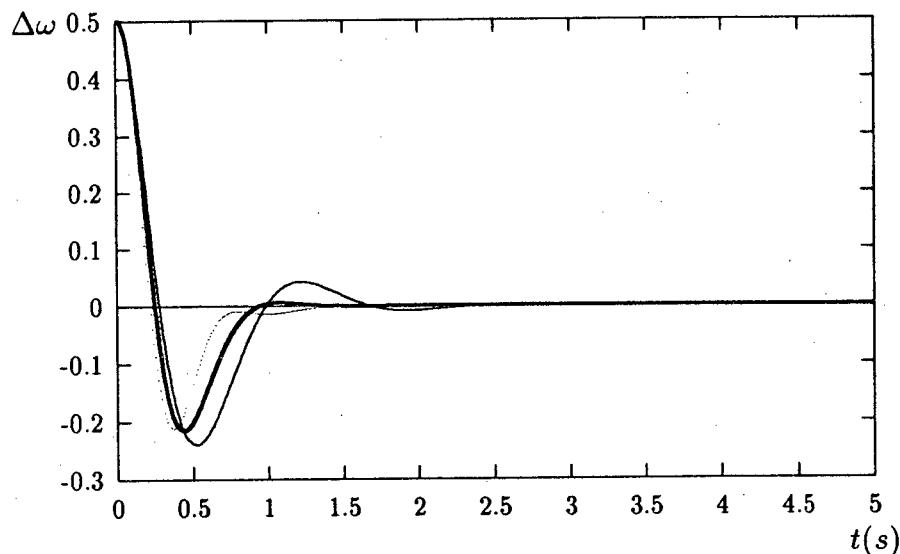


Figura 4.6: Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_{CG}x$ à condição inicial x_0 .

Para a verificação do desempenho do sistema não linear quando submetido às leis de controle robustas obtidas, foram escolhidas duas perturbações para o sistema. A primeira delas é uma variação de potência elétrica na linha de transmissão de 0.95 pu para 1.05 pu. Isto significa uma mudança no ponto de operação, dentro da faixa admissível para o mesmo. A segunda representa uma variação brusca na velocidade de 0.5 pu aplicado ao sistema na condição nominal de operação, e é equivalente a um impulso de torque elétrico, situação que ocorre, dentre outras situações, quando da ocorrência de um curto. As respostas do sistema a estas perturbações estão mostradas nas figuras 4.7 e 4.8.

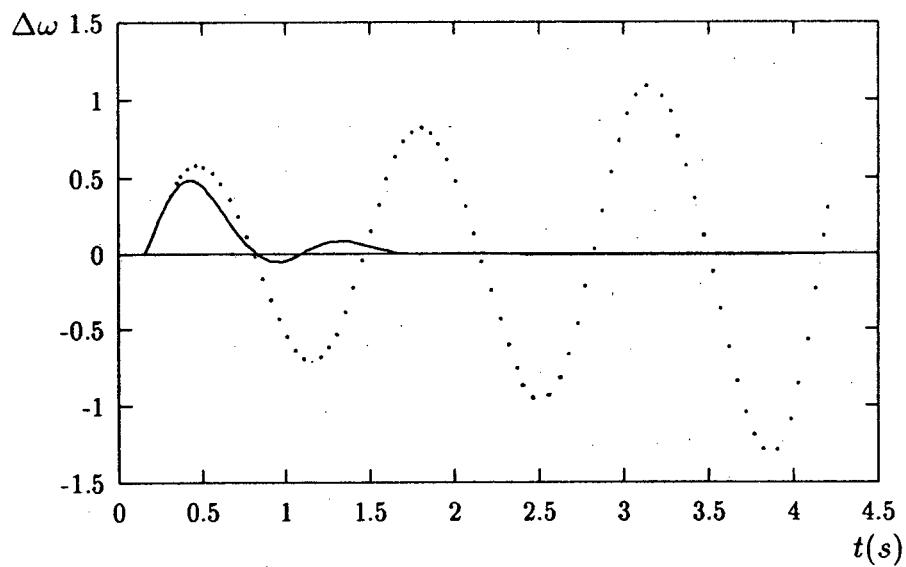


Figura 4.7: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{CG}x$ à perturbação de potência.

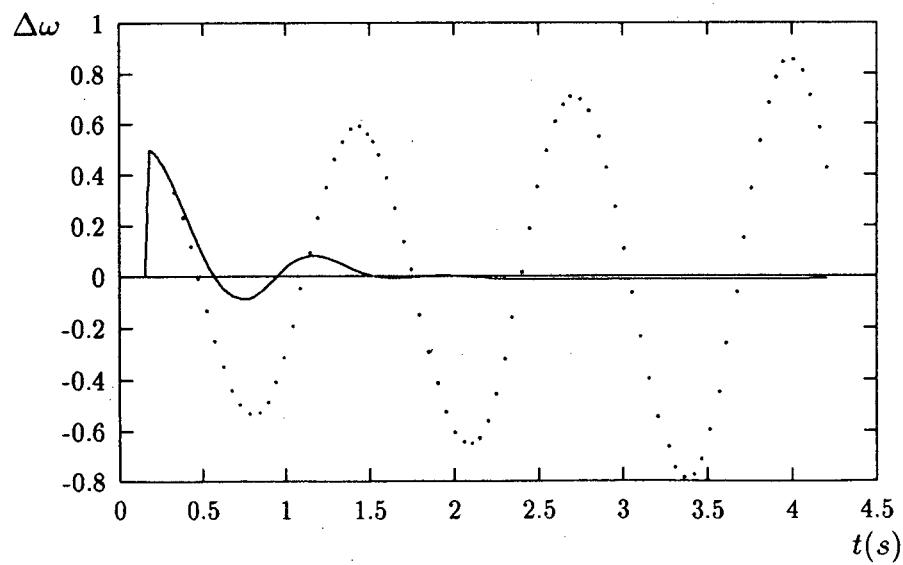


Figura 4.8: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{CG}x$ à perturbação de velocidade.

É interessante observar-se que estas simulações foram obtidas aplicando-se a lei de controle obtida no sistema não linear e com saturações adicionais nos sinais de atuação na excitação e no ESP em valores práticos típicos. Além disso, foram incluídos também os filtros "wash-out" para eliminação dos níveis DC das variáveis medidas (estados) uma vez que o sistema tratado consiste de uma linearização.

Observação 4.4 Nas simulações não lineares, a curva pontilhada representa sempre a resposta do sistema em malha aberta, e a curva contínua representa a resposta em malha fechada à dada perturbação.

Abordagem por Schmitendorf

Com a mesma decomposição em posto-1 exposta anteriormente, obtém-se as mesmas matrizes T , U , V e W .

Arbitrando-se as matrizes de ponderação Q e R como sendo:

$$Q = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad R = 10$$

e com $\epsilon = 0.0025$ a equação (3.9) apresentou solução simétrica positiva definida e a lei de controle robusta obtida é da forma $u = k_s x$, com k_s dado por:

$$k_s = \begin{bmatrix} -12.6436 & 2.7365 & -2.2062 & -0.1366 \end{bmatrix}$$

com norma euclideana é 13.1238. Quando submetido a esta lei de controle, o sistema nominal apresenta os seguintes autovalores:

$$\Omega_s = \{-4.0178 \pm 5.0835i, -7.174 \pm 11.4849i\}$$

As curvas de resposta do sistema linear à mesma condição inicial, x_0 , citada anteriormente, e também sujeito a incertezas assumindo seus valores máximos, são dadas na figura 4.9.

As respostas do sistema não linear em malha fechada quando sujeito às perturbações já citadas são mostradas nas figuras 4.10 e 4.11.

Abordagem por controle H_∞

Com o intuito de representar as incertezas sobre o modelo 4.11 como sendo limitadas em norma visando a aplicação do teorema 3.8, escolhe-se as matrizes D , E_1 e E_2 , que satisfazem

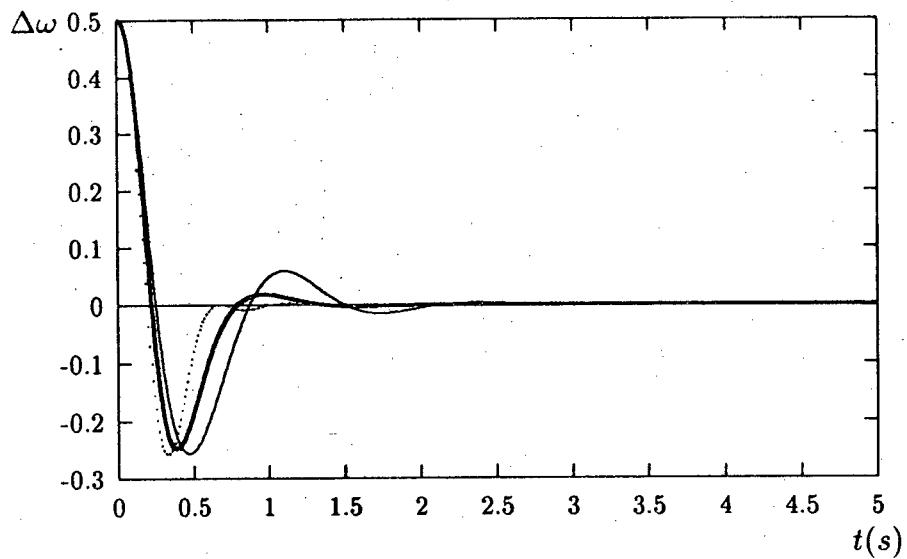


Figura 4.9: Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_s x$ à condição inicial x_0 .

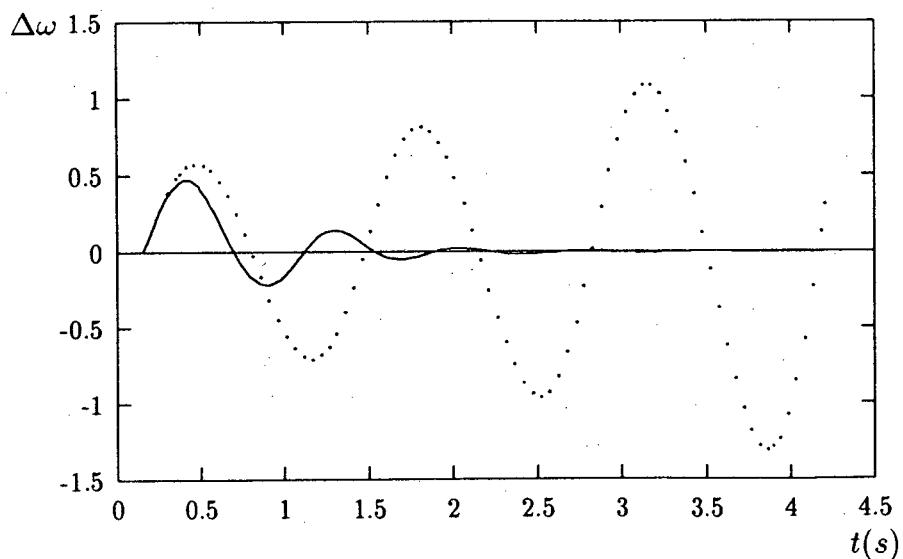


Figura 4.10: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_s x$ à perturbação de potência.

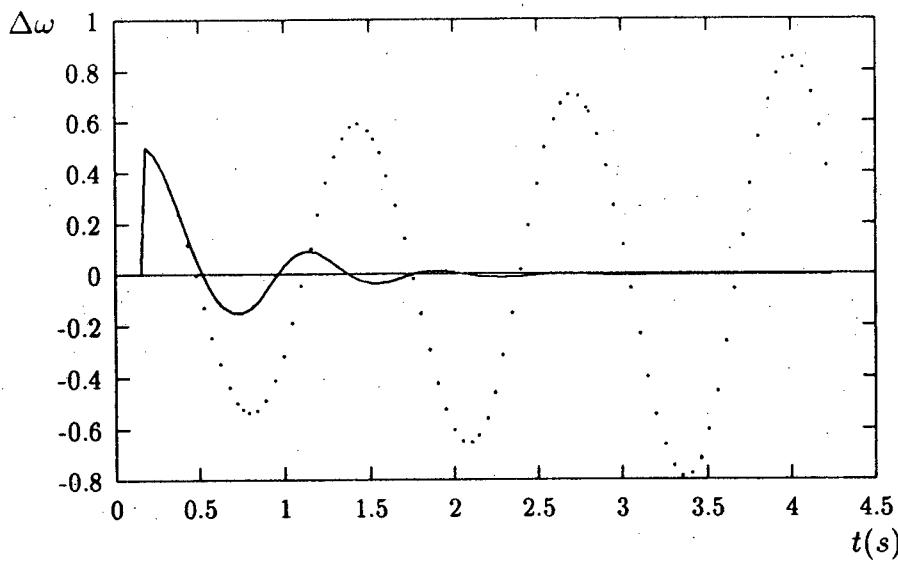


Figura 4.11: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_s x$ à perturbação de velocidade.

a equação 4.8, como sendo:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad E_1 = \begin{bmatrix} 0.025 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0304 & 0 \\ 6.855 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.3257 & 0 \\ 12.9086 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0674 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Então, arbitra-se a matriz:

$$\Sigma_2 = 0$$

de forma que: $\Sigma_2^T \Sigma_2 = E_2^T E_2$. Daí, tem-se que:

$$\Phi = 1 \quad ; \quad \Xi = 0$$

Com estas matrizes representando o sistema (4.11), com $\epsilon = 0.005$, a equação (3.26) do teorema 3.8 apresentou solução definida positiva e o ganho de realimentação de estados obtido é dado por:

$$k_\infty = [-174.58 \quad 41.14 \quad -21.63 \quad -0.71]$$

com norma euclideana 180.6627. Com a lei de controle $u = k_\infty x$, o sistema nominal em malha fechada possui como autovalores:

$$\Omega_\infty = \{-3.0783 \pm 4.4539i, \quad -43.8107 \pm 40.2870i\}$$

Observação 4.5 Na formulação original [32], a única restrição sobre a matriz $F(t)$ é a de que $\|F(t)\| \leq 1$. Verifica-se pois, que a matriz $F(t)$ como definida acima, isto é, sob a forma diagonal, é somente um caso particular da proposta inicialmente pelos autores. Portanto, nota-se claramente que o sucesso do presente algoritmo significa a obtenção de um controlador que trata um sistema que engloba (4.11). Daí, conclui-se que este procedimento tende a tornar mais conservativa a busca de um controlador que estabilize o sistema (4.11) e devido a isto, foi obtida uma norma de ganho muito maior do que aquelas obtidas com as abordagens por custo garantido e por Schmitendorf.

A resposta deste sistema à mesma excitação aplicada no resultado anterior e para incertezas assumindo seus valores máximos é mostrada na figura 4.12.

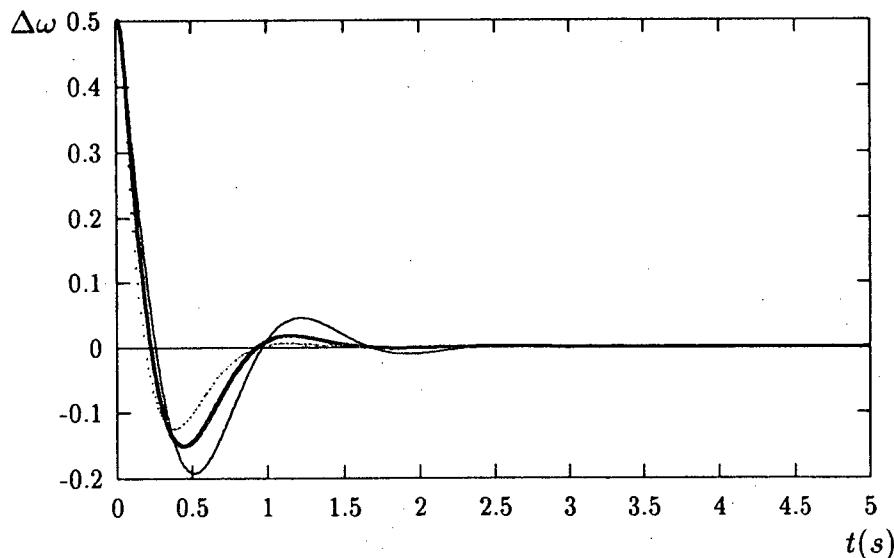


Figura 4.12: Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_\infty x$ à condição inicial x_0 .

As simulações do sistema não linear, quando aplicadas as mesmas perturbações anteriormente detalhadas e quando submetido à lei de controle $u = k_\infty x$, estão mostradas nas figuras 4.13 e 4.14.

Observação 4.6 Vê-se claramente que no caso do sistema não linear submetido à perturbação de potência, o sistema foi conduzido à instabilidade.

Isto decorre do fato de que o sinal de atuação do controlador está restrito a valores práticos usuais. Daí, novas não linearidades, do tipo saturação, são introduzidas, as quais podem ser modeladas como incertezas na matriz de entrada (B).

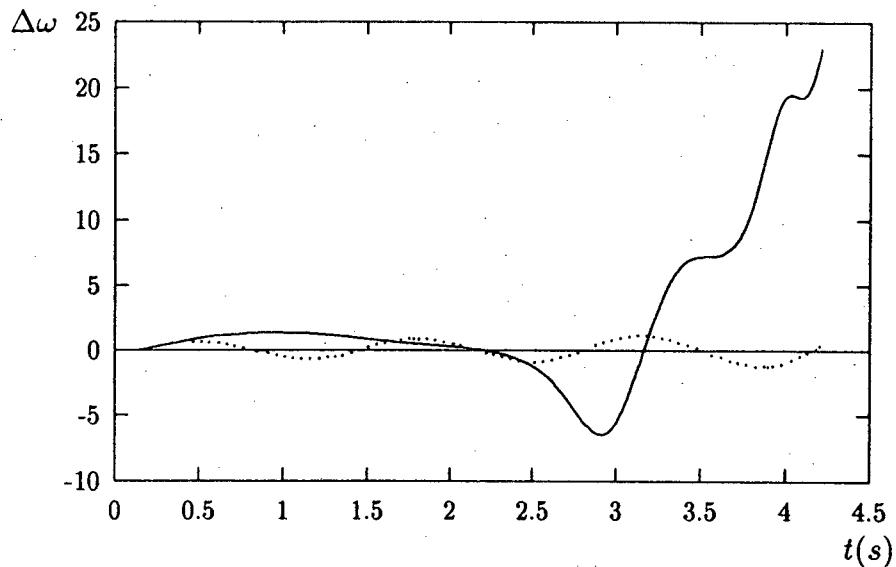


Figura 4.13: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_\infty x$ à perturbação de potência.

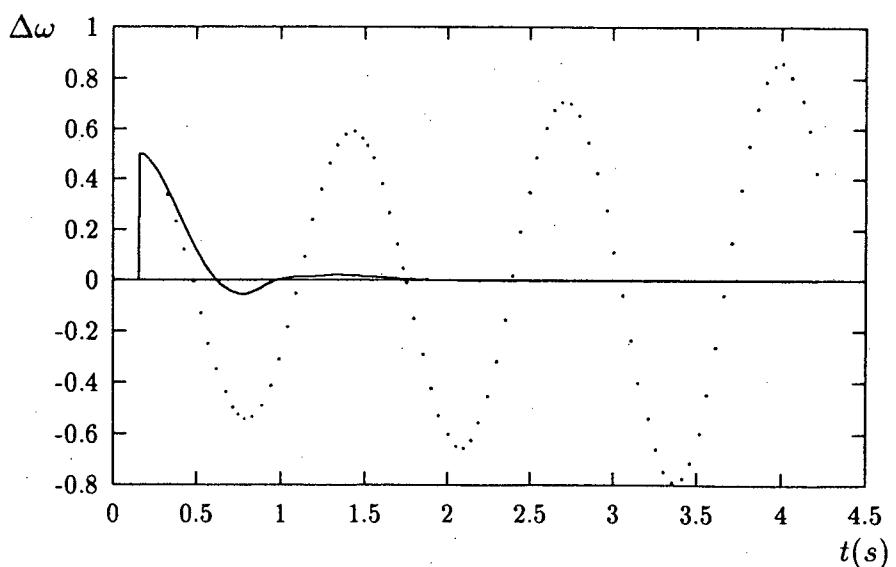


Figura 4.14: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_\infty x$ à perturbação de velocidade.

Nas demais simulações, estas incertezas não provocaram a instabilidade do sistema não linear, posto que as normas de ganho então utilizadas eram pequenas, e com isso o sistema permanecia saturado durante um pequeno período de tempo. Como no caso da perturbação de potência grande esforço de controle é exigido, o efeito desta não linearidade é mais pronunciado e conduz o sistema não linear à instabilidade.

Abordagem por programação linear

Para a utilização desta abordagem, deve-se determinar os vértices do poliedro convexo que representa o conjunto de modelos (4.11). Para isto, procede-se como para o exemplo da barra engastada. Definido o referido poliedro, e utilizando-se a mesma rotina compatível com o pacote PC-MATLAB que no exemplo anterior, obtém-se, após 335 iterações, o seguinte par de matrizes que satisfazem (3.29):

$$W = \begin{bmatrix} 2.7608 & 10.8832 & -1.0533 & -12.0065 \\ 10.8832 & 161.6064 & -3.8769 & 94.8240 \\ -1.0533 & -3.8769 & 6.1948 & -42.4118 \\ -12.0065 & 94.8240 & -42.4118 & 86.4613 \end{bmatrix}$$

$$R = [0.2771 \ 0.9083 \ 3.7356 \ 86.4613]$$

o que origina um ganho de realimentação de estados robusto dado por:

$$k_{PL} = [-3.7476 \ 0.3386 \ -2.9167 \ -0.2758]$$

cuja norma euclideana é 4.7689. Submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$, o modelo nominal apresenta os seguintes autovalores:

$$\Omega_{PG} = \{ -1.3724, -0.7502 \pm 5.6067i, -36.9145 \}$$

A resposta do sistema linear à condição inicial x_0 e para incertezas assumindo seus valores máximos é mostrada na figura 4.15.

Aplicando-se as mesmas perturbações, e valendo as mesmas considerações, as respostas do sistema submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$ estão expostas nas figuras 4.16 e 4.17.

A tabela 4.2 contém um resumo dos resultados extraídos das aplicações dos métodos de síntese estudados ao exemplo de sistemas de potência.

Após a análise dos resultados obtidos nesta secção, são pertinentes os seguintes comentários:

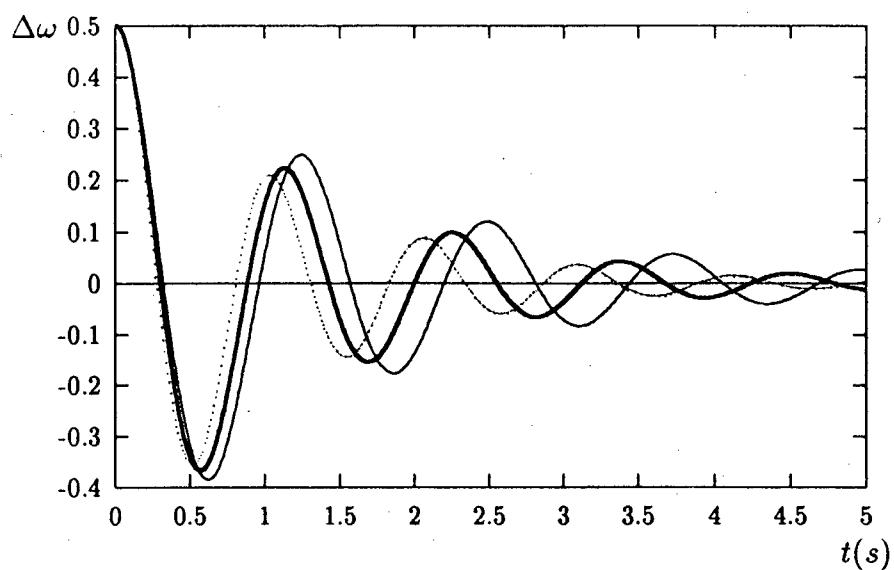


Figura 4.15: Resposta do sistema linear submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$ à condição inicial x_0 .

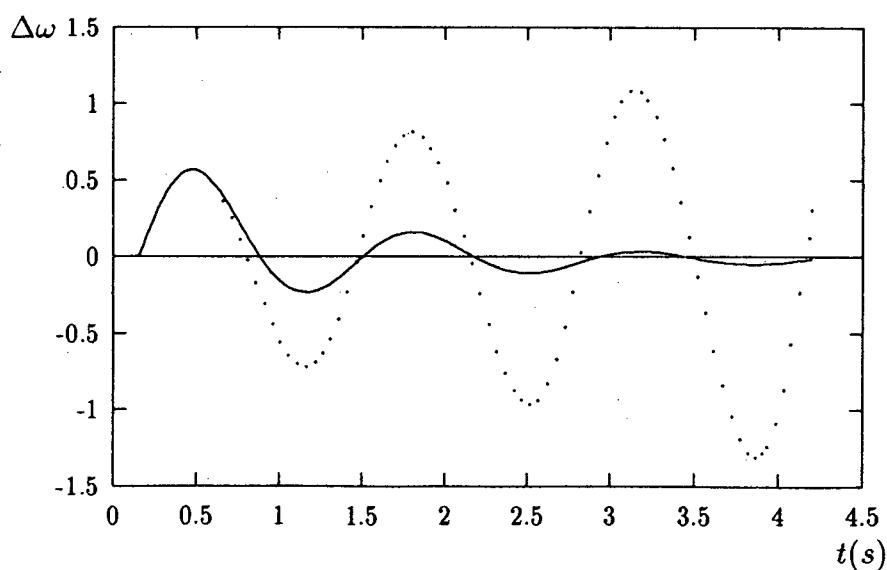


Figura 4.16: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$ à perturbação de potência.

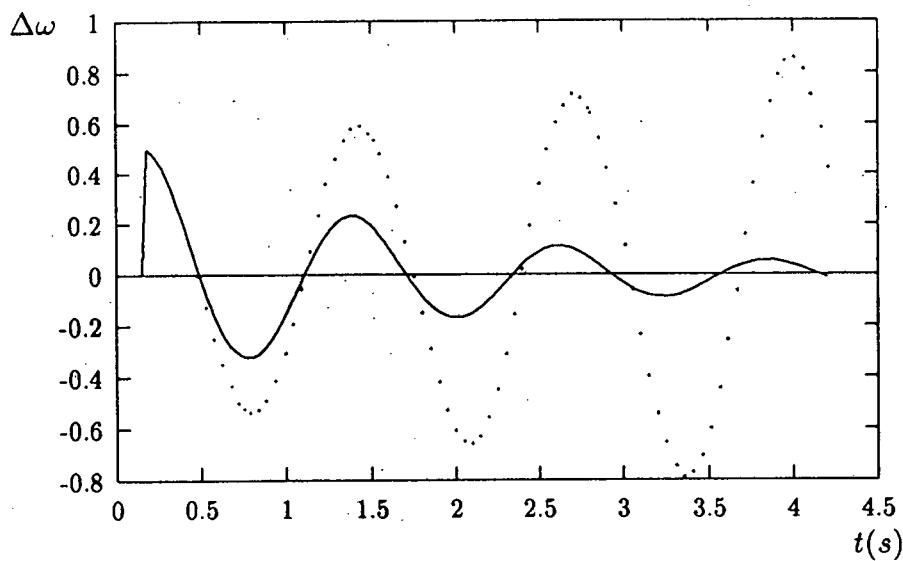


Figura 4.17: Resposta do sistema não linear submetido à lei de controle $u = k_{PL}x$ à perturbação de velocidade.

Abordagem	Norma do Ganho	Autovalores do Modelo Nominal
Custo Garantido	14.6484	$-5.6395 \pm 5.8558i$, $-8.7485 \pm 2.5143i$
Schmitendorf	13.1238	$-4.0178 \pm 5.0835i$, $-7.174 \pm 11.4849i$
Controle H_∞	180.662	$-3.0783 \pm 4.4539i$, $-43.810 \pm 40.287i$
Programação Linear	4.7689	-1.3724 , $-0.7502 \pm 5.6067i$, -36.9145

Tabela 4.2: Tabela comparativa dos métodos de síntese para o exemplo de sistemas de potência.

- As abordagens por custo garantido, por Schmitendorf, e por teoria H_∞ , são derivadas de problemas de minimização, logo valem-se da resolução de uma equação de Riccati para a obtenção de resultados. Daí a verificação de que estas abordagens apresentam um melhor desempenho transitório para o sistema.
- A abordagem por programação linear baseia-se na exigência de estabilidade quadrática para o sistema sem apresentar explicitamente alguma característica de minimização na busca de soluções. Devido a isto, tem-se a maior variação na resposta do sistema causada pelas incertezas e também o pior desempenho transitório do sistema em malha fechada. Esta é a abordagem que obteve o ganho de realimentação com menor norma euclideana.
- Enquanto as abordagens por custo garantido, por Schmitendorf e programação linear consideram apenas o conjunto de modelos com incertezas do tipo linear convexa, a abordagem pela teoria H_∞ considera uma classe de sistemas muito mais ampla. Isto deve-se

ao fato de que considerando-se as incertezas como sendo limitadas em norma assume-se que o sistema sob análise é representado por um conjunto de modelos no espaço de sistemas que engloba o poliedro convexo considerado pelas outras abordagens. Portanto, a abordagem utilizando teoria H_∞ tende a ser mais conservativa que as outras e, com isso, a produzir ganhos maiores para a estabilização deste conjunto de modelos.

4.2.4 Considerações adicionais

Sistemas de potência são sistemas não-lineares que naturalmente tendem à instabilidade em certos pontos de operação. O projeto clássico de ESPs é feito linearizando-se o sistema em torno do ponto de operação desejado e mantido invariante em detrimento de variações nas condições de operação do mesmo. Possivelmente, em algumas destas condições de funcionamento, o sistema em malha fechada seja conduzido a uma situação instável. Portanto, faz-se pertinente a inclusão de características de robustez no projeto de ESP, de tal forma que estas variações no ponto de operação sejam levadas em conta já na fase de projeto do mesmo.

No caso particular do exemplo tratado aqui, todos os sistemas pertencentes ao poliedro considerado eram instáveis em malha aberta. Com a aplicação das leis de controle robustas obtidas, os mesmos apresentaram desempenho bastante bom frente às perturbações aplicadas.

Outro aspecto importante a ressaltar é o de que as simulações foram realizadas mediante hipóteses realistas de perturbações aplicadas como variações na potência mecânica, variações na velocidade, bem como de limitações nos sinais de atuação do campo de excitação e do ESP.

Além disso, apesar de ser utilizada retroação de estados, não se faz necessário o uso de observadores, pois em geral, estas variáveis podem ser medidas diretamente ou calculadas algébricamente a partir de outras variáveis disponíveis para medição.

4.3 Conclusões

Neste capítulo foram apresentadas aplicações dos métodos de síntese de controladores robustos desenvolvidos no capítulo 3. Como possíveis áreas de aplicação foram escolhidas sistemas de estrutura flexível e sistemas de potência.

Analizando-se os resultados obtidos ao longo do capítulo, alguns comentários são pertinentes:

1. As abordagens por custo garantido, Schmitendorf e teoria H_∞ têm em comum o fato de que a lei de controle é dada pela solução de uma equação do tipo Riccati aumentada.

Como visto nos exemplos, o problema maior é encontrar uma solução simétrica positiva definida para estas equações. A dificuldade reside no fato de que a existência ou não da solução desejada está intimamente ligada e depende criticamente da forma como foram feitas as decomposições das incertezas.

2. No caso da abordagem por programação linear, o cálculo de um controlador que assegure a estabilidade do sistema é baseado numa condição necessária e suficiente para a existência deste controlador. Entretanto, a ordem do modelo e o número de elementos incertos deste ficam bastante restritos devido a problemas numéricos do algoritmo utilizado para a busca da lei de controle robusta.
3. Como já foi citado anteriormente, dado um sistema, o conjunto de modelos tratado pela abordagem H_∞ engloba o poliedro tratado pelas outras abordagens estudadas. O quanto maior será o conjunto de modelos da abordagem H_∞ em relação ao referido poliedro depende do formato deste poliedro e das matrizes escolhidas para a representação das incertezas limitadas em norma. Como consequência disto, a abordagem por controle H_∞ pode ser mais ou menos conservativa em relação às demais e com isto grandes diferenças nas normas dos ganhos obtidos podem ocorrer.

Depreende-se dos exemplos apresentados a importância de métodos de controle robusto para o tratamento de problemas onde o modelo matemático contém incertezas. Claramente os exemplos mostrados neste capítulo constituem somente uma pequena parcela dos problemas importantes da área de controle que podem ser tratados utilizando-se as técnicas apresentadas no capítulo anterior.

No próximo capítulo será feito um apanhado do que foi realizado nesta dissertação, bem como serão traçadas direções para futuras pesquisas nesta área da teoria de controle.

Conclusão

O problema de controle robusto é um tema de pesquisa de grande interesse atual, como pode ser constatado pelo volume de artigos e congressos tratando deste assunto.

A presente dissertação é o resultado de um trabalho de pesquisa no Laboratório de Controle e Microinformática a partir de maio de 1992, cujo interesse principal era tratar o problema de robustez aplicado à síntese de controladores.

Os objetivos deste trabalho consistiram em tratar os seguintes problemas:

- levantamento de métodos clássicos da teoria de controle ótimo;
- caracterização de incertezas em modelos matemáticos;
- estudo dos principais métodos de síntese de controladores robustos existentes na literatura;
- aplicações destes métodos a diversos tipos de sistemas dentro da engenharia quais sejam: sistemas de estrutura flexível e sistemas de potência;

Com este intuito, o primeiro capítulo foi dedicado a fornecer um apanhado geral dos principais métodos de síntese de controladores clássicos, sempre tendo em mente o conceito de insensibilidade dos mesmos frente a variações de qualquer natureza no sistema tratado. O problema do regulador linear quadrático, também conhecido como problema de controle ótimo, foi analisado. Também procedimentos para alocação de espectro em dadas regiões, bem como as características de robustez neste contexto foram discutidas. O problema de controle ótimo com realimentação de saída utilizando a metodologia LQG foi exposto e a utilização do procedimento LTR para recuperação das propriedades de robustez foi comentada. Finalmente o problema da teoria de controle H_∞ para rejeição de perturbações foi introduzido e suas propriedades de robustez foram analisadas.

O segundo capítulo foi dedicado ao desenvolvimento da noção de conjunto de modelos, conceito essencial para o bom desenvolvimento do trabalho. Em primeiro lugar, a distinção entre os conceitos de robustez e de insensibilidade foi detalhada. A seguir a definição formal do

conjunto de modelos a ser tratado pelo esquema de controle foi detalhada. Neste ínterim foram definidas também as maneiras pelas quais as incertezas sobre o modelo matemático podem ser caracterizadas e tratadas de forma analítica.

Feito isto, o terceiro capítulo constitui o corpo principal da dissertação onde são expostos alguns métodos de síntese de controladores robustos utilizando-se a abordagem temporal. Para isto, inicialmente foi definido um conceito fundamental, base de todas as filosofias de síntese robustas, o conceito de estabilizabilidade quadrática. A seguir, os algoritmos de síntese propriamente ditos foram analisados, assim como seus apelos intuitivos e suas ligações com as metodologias clássicas de controle foram comentadas.

No último capítulo, foram feitas aplicações destes algoritmos de síntese a exemplos pertencentes a domínios variados da engenharia. A primeira das aplicações atacou o problema de estabilização de sistemas de estrutura flexível sujeitos a incertezas paramétricas. Um exemplo acadêmico de uma barra engastada foi utilizado para ilustrar as potencialidades de utilização destes métodos de síntese de leis de controle robustas a este tipo de sistemas. Em um segundo momento, o problema de estabilização de sistemas de potência foi abordado utilizando tais técnicas de controle robusto. Os resultados obtidos mostram a possibilidade de aplicação destes algoritmos de síntese de controladores robustos a sistemas de potência.

Sem dúvida, uma contribuição importante da presente dissertação foi a aplicação de controle robusto a sistemas de potência, a qual revela-se uma importante área para trabalhos futuros, sobretudo porque, no conhecimento do autor, esta abordagem é original.

Dos resultados obtidos com a presente dissertação depreende-se algumas direções para futuras pesquisas:

Uma delas seria um estudo das melhorias que poderiam ser obtidas com a utilização de uma melhor decomposição das incertezas, nos métodos baseados na resolução de uma equação algébrica de Riccati.

Também o problema de estabilidade quadrática aliado a exigências de desempenho para o sistema incerto constitui uma importante área de pesquisa no contexto da teoria de controle robusto.

O problema de síntese de controladores robustos utilizando-se retroação de saída e o uso de observadores robustos se torna uma importante matéria para pesquisa a medida que relaxa a hipótese restritiva de retroação do estado completo do sistema.

Um estudo aprofundado do modelamento de dinâmicas negligenciadas do sistema como incertezas sobre o modelo reduzido e também a busca de controladores robustos que tratem

estas incertezas constitui um tema de grande interesse sobretudo no controle de sistemas de estrutura flexível. Nestes sistemas, normalmente um grande número de modos é desprezado e no entanto, estes são excitados pela ação de controle e podem ter efeitos nefastos sobre o desempenho do sistema.

No caso de sistemas de potência, um dos prováveis pontos para pesquisas futuras é a extensão dos resultados obtidos a modelos mais realistas, como a modelos de sistemas multi-máquinas, por exemplo. Além disso, um problema importante a ser analisado é o tratamento da não-linearidade do tipo saturação proveniente da limitação da ação de controle. Isto pode ser feito admitindo-se variações paramétricas na matriz de entradas do sistema linearizado. Apesar da simplicidade do modelo de sistema de potência considerado neste trabalho, os bons resultados obtidos indicam a viabilidade da extensão destas técnicas a modelos mais completos.

Bibliografia

- [1] P. M. ANDERSON, A. A. FOUAD – *Power System Control and Stability*, The Iowa State University Press, 1977
- [2] B. D. O. ANDERSON, J. B. MOORE – *Linear Optimal Control*, Prentice Hall, Electrical Engineering Series, 1970
- [3] D. ARZELIER – *Robustesse en Performance et en Stabilité des Systèmes Linéaires Incertain: Une Approche Quadratique*, Tese de Doutorado, Toulouse, 1992
- [4] K. J. ÅSTRÖM, B. WITTENMARK – *Adaptive Control*, Addison-Wesley, 1989
- [5] M. J. BALAS – *Modal Control of Certain Flexible Dynamic Systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol 16, Nº. 3, pp. 450-462, 1978
- [6] M. J. BALAS – *Feedback Control of Flexible Systems*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 23, Nº. 4, pp. 673-679, 1978
- [7] M. J. BALAS – *Trends in Large Space Structure Control Theory: Fondest Hopes Wildest Dreams*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 27, Nº. 3, pp. 522-535, 1982
- [8] B. R. BARMISH – *Stabilisation of Uncertain Systems Via Linear Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-28, Nº. 8, pp. 848 - 850, 1983
- [9] B. R. BARMISH – *Necessary and Sufficient Conditions for Quadratic Stabilizability of an Uncertain System*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 46, Nº. 4, pp. 399-408, 1985
- [10] B. R. BARMISH, G. LEITMANN – *On Ultimate Boundedness Control of Uncertain Systems in the Absence of Matching Assumptions*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 27, Nº. 1, pp. 153-158, 1982
- [11] B. BARMISH, M. CORLESS, G. LEITMANN – *A New Class of Stabilizing Controllers for Uncertain Dynamical Systems*, SIAM Journal of Control and Optimization, Vol. 21, Nº. 2, pp. 246 - 255, 1983

- [12] B. R. BARMISH, I. R. PETERSEN, A. FEUER – *Linear Ultimate Boundedness Control of Uncertain Dynamical Systems*, Automatica, Vol 19, Nº. 5, pp. 523-532, 1983
- [13] A. S. BAZANELLA – *Controle Auto-Ajustável de Sistemas de Potência*, Dissertação de Mestrado, UFSC, Florianópolis, 1993
- [14] O. BEGOVICH, P. de LARMINAT – *Simple Methods for Synthesis of Weighting Matrices in L. Q. Control*, ECC 91 European Control Conference, Grenoble, França, pp. 729-733, 1991
- [15] N. M. BLACHMAN, S. H. MOUSAVINEZHAD – *Trigonometric Approximations for Bessel Functions*, IEEE Trans. Aerospace Electronic Systems, Vol AES 22, Nº. 1, pp. 2-7, 1986
- [16] S. S. L. CHANG, T. K. C. PENG – *Adaptative Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameters*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-17, Nº. 4, pp. 474 - 483, 1972
- [17] C. T. CHEN – *Linear Systems - Theory and Design*, Holt-Rinehart-Winston (HRW), 1984
- [18] A. G. COVILLE – *Approches de la Commande Robuste par Positivité dans le Cadre H_∞ – Application à la Stabilisation de Structures Flexibles*, Tese de Doutorado, Paris, 1992
- [19] R. F. CURTAIN, A. J. PRITCHARD – *Infinite Dimensional Linear Systems Theory*, Springer-Verlag, 1978
- [20] J. J. D'AZZO, C. H. HOUPIS – *Feedback Control System Analysis & Synthesis*, McGraw-Hill Kogakusha, Ltd, 1960
- [21] P. DORATO – *Robust Control*, IEEE Press, 1987
- [22] J. C. DOYLE – *Guaranteed Margins for LQG Regulators*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 23, pp. 756-757, 1978
- [23] J. C. DOYLE, G. STEIN – *Robustness with Observers*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 24, pp. 607-611, 1979
- [24] J. C. DOYLE, G. STEIN – *Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical/Modern Synthesis*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-26, Nº. 1, pp. 4 - 16, 1981

- [25] J. C. DOYLE, K. GLOVER, P. P. KHARGONEKAR, B. FRANCIS - *State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 34, Nº. 8, pp. 831-847, 1989
- [26] A. FISCHMAN, E. R. DE PIERI - *Robust Control Design Applied to Large Flexible Structures with Polyhedral Uncertainties*, Anais do "Structural Optimization 93, The World Congress on Optimal Design of Structural Systems", Vol 1, pp 299-308, Rio de Janeiro, Brasil, Agosto 1993
- [27] A. FISCHMAN, A. S. BAZANELLA, E. R. DE PIERI, A. S. e SILVA - *Robust Control Techniques Applied to Power System Stabilizers Design*, submetido ao "Xº Congreso Chileno de Ingenieria Electrica", Universidade Austral do Chile, Novembro 1993
- [28] J. S. GIBSON - *A Note on Stabilization of Infinite Dimensional Linear Oscillators by Compact Linear Feedback*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol 18, Nº. 3, pp. 311-316, 1980
- [29] C. V. HOLLOT, B. R. BARMISH - *Optimal Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems*, Proceedings of the 18º Allerton Conference on Communication, Control and Computation, pp. 697-706, University of Illinois, Monticello, 1980
- [30] N. KAWASAKI, E. SHIMEMURA - *Determining Quadratic Weighting Matrices to Locate Poles in a Specified Region*, Automatica, Vol 19, Nº. 5, pp. 557-560, 1983
- [31] P. P. KHARGONEKAR, I. R. PETERSEN, M. A. ROTEA - *H_∞ -Optimal Control with State-Feedback*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 33, Nº. 8, pp. 786-788, 1988
- [32] P. P. KHARGONEKAR, I. R. PETERSEN, K. ZHOU - *Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H_∞ Control Theory*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 35, Nº. 3, pp. 356-361, 1990
- [33] O. I. KOSMIDOU, P. BERTRAND - *Robust Controller Design for Systems with Large Parameter Variations*, International Journal of Control, Vol. 45 , Nº. 3, pp. 927 - 938, 1987
- [34] O. I. KOSMIDOU, H. ABOU-KANDIL, P. BERTRAND - *A Game Theoretic Approach for Guaranteed Cost Control*, ECC 91 European Control Conference, Grenoble, França, pp. 2220 - 2225, 1991
- [35] H. KWAKERNAAK, R. SIVAN - *Linear Optimal Control Systems*, John Wiley & Sons, 1972

- [36] E. V. LARSEN, D. A. SWANN - *Applying Power System Stabilizers - part 1 : general concepts*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-100, pp. 3017-3024, 1981
- [37] K. T. LAW, D. J. HILL, N. R. GODFREY - *Design of Robust Power System Voltage Regulators*, Anais do "XIIth World Congress of IFAC", Vol 6, pp. 239-244, Sidney, Australia, Julho 1993
- [38] N. A. LEHTOMAKI, N. R. SANDELL Jr., M. ATHANS - *Robustness Results in Linear-Quadratic Gaussian Based Multivariable Control Designs*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 26, Nº. 1, pp. 75-93, 1981
- [39] G. LEITMANN - *Guaranteed Ultimate Boundedness for a Class of Uncertain Linear Dynamical Systems*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 23, Nº. 6, pp.1109-1111, 1978
- [40] G. LEITMANN - *Guaranteed Asymptotic Stability for Some Linear Systems with Bounded Uncertainties*, Transactions of the ASME, Vol. 101, Setembro, pp. 212 -216, 1979
- [41] LUENBERGER - *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, 1976
- [42] A. G. J. MACFARLANE - *An Eigenvector Solution of the Optimal Linear Regulator Problem*, Journal of Electronics and Control, Vol 14, pp. 643-654, 1963
- [43] J. M. MACIEJOWSKI - *Multivariable Feedback Design*, Addison-Wesley, 1990
- [44] L. MEIROVITCH - *Elements of Vibration Analysis*, McGraw-Hill, 1975
- [45] F. P. de MELLO, C. CONCORDIA - *Concepts of Synchronous Machine Stability as Affected by Excitation Control*, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-88, pp. 316-329, 1969
- [46] E. NOLDUS - *Design of Robust State Feedback Laws*, Int. Journal of Control, Vol 35, Nº. 6, pp. 935-944, 1982
- [47] P. L. D. PERES - *Sur la Robustesse des Systèmes Linéaires: Approche par Programmation Linéaire*, Tese de Doutorado, Toulouse, 1989
- [48] P. L. D. PERES, J. BERNUSSOU, J. C. GEROMEL - *A Cutting Plane Technique Applied to Robust Control Synthesis*, 8th IFAC Workshop - Control Applications of Nonlinear Programming and Optimization, pp. 177-186, Paris, França, Junho 1989

- [49] I. R. PETERSEN – *Quadratic Stabilizability of Uncertain Linear Systems: Existence of a Nonlinear Stabilizing Control Does Not Imply Existence of a Linear Stabilizing Control*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 30, Nº. 3, pp. 291-293, 1985
- [50] I. R. PETERSEN – *A Riccati Equation Approach to the Design of Stabilizing Controllers and Observers for a Class of Uncertain Linear Systems*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol. AC 30, Nº. 9, pp. 904 - 907, 1985
- [51] I. R. PETERSEN – *Disturbance Atenuation and H_∞ Optimization: A Design Method Based on the Algebraic Riccati Equation*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 32, Nº. 5, pp. 427-429, 1987
- [52] I. R. PETERSEN – *Notions of Stabilizability and Controllability for a Class of Uncertain Linear Systems*, Int. Journal of Control, Vol 46, Nº. 2, pp. 409-422, 1987
- [53] I. R. PETERSEN – *A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems*, Systems & Control Letters, Vol 8, pp. 351-357, 1987
- [54] I. R. PETERSEN – *Some New Results on Algebraic Riccati Equations Arising in Linear Quadratic Differential Games and the Stabilization of Uncertain Linear Systems*, Systems & Control Letters, Vol 10, pp. 341-348, 1988
- [55] I. R. PETERSEN – *Stabilization of an Uncertain Linear System in which Uncertain Parameters Enter into the Input Matrix*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol 26, Nº. 6, pp. 1257-1264, 1988
- [56] I. R. PETERSEN – *The Matrix Riccati Equation in State Feedback, H_∞ Control and in the Stabilization of Uncertain Systems with Norm Bounded Uncertainties*, Anais do Workshop on the Riccati Equation in Control Systems and Signals, pp. 51-56 Como, Italia, Junho 1989
- [57] I. R. PETERSEN, C. V. HOLLOT – *A Riccati Equation Approach to the Stabilization of Uncertain Linear Systems*, Automatica, Vol. 22, Nº. 4, pp. 397 - 411, 1986
- [58] V. H. QUINTANA, T. RAVICHANDRAN – *On the Design of Robust H_∞ Optimal Controllers for Synchronous Machines*, Anais do "XIIth World Congress of IFAC", Vol 6, pp. 253-258, Sidney, Australia, Julho 1993
- [59] L. R. RAY – *Stability Robustness for Uncertain LQG/LTR Systems*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol 38, Nº. 2, pp. 304-308, 1993

- [60] M. A. ROTEA, P. P. KHARGONEKAR – *Stabilization of Uncertain Systems with Norm Bounded Uncertainty – A Control Lyapunov Function Approach*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol 27, Nº. 6, pp. 1462-1476, 1989
- [61] R. S. SÁNCHEZ PEÑA – *Introducción a la Teoria de Control Robusto*, AADECA, 1992
- [62] W. E. SCHMITENDORF – *Designing Stabilizing Controllers for Uncertain Systems Using the Riccati Equation Approach*, IEEE Trans. Autom. Cont., AC 33, Nº. 4, pp. 376-379, 1988
- [63] L. S. SHIEH, H. M. DIB, S. GANESAN – *Continuous-time Quadratic Regulators and Pseudo-continuous-time Quadratic Regulators with Pole-placement in a Specified Region*, IEE Proceedings, Vol 134, Pt D, Nº. 5, pp. 338-346, 1987.
- [64] L. S. SHIEH, H. M. DIB, S. GANESAN – *Linear Quadratic Regulators with Eigenvalue Placement in a Specified Region*, Automatica, Vol 24, Nº. 6, pp. 819-823, 1988
- [65] J. J. SLOTINE, W. LI – *Applied Nonlinear Control*, Prentice-Hall, 1991
- [66] Y. A. SMAILI, A. T. ALOUANI – *A Multivariable Robust Controller Design for a Single Machine Infinite-Bus System*, Anais do "XIIth World Congress of IFAC", Vol 5, pp. 119-122, Sidney, Australia, Julho 1993
- [67] A. TROFINO NETO – *Commande Robuste et Performance des Systèmes Incertains*, Tese de Doutorado, Grenoble, 1993
- [68] M. VIDYASAGAR – *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall, 1978
- [69] J. C. WILLEMS – *Least Squares Stationary Optimal Control and the Algebraic Riccati Equation*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 16, Nº. 6, pp. 621-634, 1971
- [70] W. M. WONHAM – *Linear Multivariable Control – A Geometric Approach*, Springer-Verlag, 1979
- [71] G. ZAMES – *Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformation, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 26, Nº. 2, pp. 301-320, 1981
- [72] Z. ZHANG, J. S. FREUDENBERG – *LTR for Nonminimun Phase Plants*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol 35, Nº. 5, 1990

- [73] K. ZHOU, P. P. KHARGONEKAR – *Stability Robustness Bounds for Linear State-Space Models with Structured Uncertainty*, IEEE Trans. Autom. Cont., Vol AC 32, N°. 7, pp. 621-623, 1987
- [74] K. ZHOU, P. P. KHARGONEKAR – *An Algebraic Riccati Equation Approach to H_∞ Optimization*, Systems & Control Letters, Vol 11, pp. 85-91, 1988
- [75] K. ZHOU, P. P. KHARGONEKAR – *On the Stabilization of Uncertain Linear Systems via Bound Invariant Lyapunov Functions*, SIAM Journal on Control and Optimization, Vol 26, N°. 6, pp. 1265-1273, 1988

Apêndice A

Resultados relacionados à Equação de Riccati

Teorema A.1 [69] Assuma que o sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

é controlável e observável e também que todos os autovalores de A possuem parte real estritamente negativa (positiva). Então, existe uma solução simétrica real para a equação de Riccati algébrica:

$$A'P + PA - PBB'P + Q = 0$$

com $Q = -C'C$ tal que todos os autovalores de $A - BB'P$ possuem parte real negativa (positiva) se e somente se:

$$I - B'(-j\omega I - A')^{-1}C'C(-j\omega I - A)^{-1}B \geq 0 ; \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

Além disso, esta solução é única e possui a propriedade adicional de que $P = P' < 0$.

□

Teorema A.2 [51] Suponha que existam matrizes simétricas positivas definidas $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e um escalar positivo ϵ , tais que a equação algébrica de Riccati:

$$A'P + PA - \frac{1}{\epsilon}PBR^{-1}B'P + \frac{1}{\gamma}PDD'P + \frac{1}{\gamma}E'E + \epsilon Q = 0$$

possui uma solução simétrica positiva definida. Então, dadas quaisquer matrizes simétricas positivas definidas $Q_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $R_1 \in \mathbb{R}^{m \times m}$, existe um escalar positivo ϵ^* tal que a equação algébrica de Riccati:

$$A'P + PA - \frac{1}{\epsilon_1}PBR_1^{-1}B'P + \frac{1}{\gamma}PDD'P + \frac{1}{\gamma}E'E + \epsilon_1 Q_1 = 0$$

possui uma solução simétrica positiva definida para todo $\epsilon_1 \in (0, \epsilon^*]$.

□