



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECATRÔNICA



# **CONTROLE PID DE VIBRAÇÕES EM SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM COM ATRASO USANDO RECEPTÂNCIA COM ESTABILIDADE ROBUSTA E OTIMIZAÇÃO DE DESEMPENHO**

**Jhonat Heberson Avelino de Souza**

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea

Coorientador: Prof. Dr. José Mário Araújo

**Dissertação de Mestrado** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica da UFRN como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Número de ordem PEM: M018

Natal, RN, agosto de 2023

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN  
Sistemas de Biblioteca - SISBI  
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Jhonat, Heberon Avelino de Souza.

Projeto de Controlador PID para Sistemas de Segunda Ordem com Atraso via Resposta em Frequência / Jhonat Heberon Avelino de Souza. - 2022.  
58f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecatrônica, Natal, 2022.

Orientador: Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea.

Co-orientador: Dr. José Mário Araújo

1. Sistemas de Segunda Ordem - Dissertação. 2. Sistemas com Atraso - Dissertação. 3. Resposta em Frequência - Dissertação. I. Dórea, Carlos Eduardo Trabuco. II. Araújo, José Mário. III. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 621.865.8

# CONTROLE PID DE VIBRAÇÕES EM SISTEMAS DE SEGUNDA ORDEM COM ATRASSO USANDO RECEPTÂNCIA COM ESTABILIDADE ROBUSTA E OTIMIZAÇÃO DE DESEMPENHO

**Jhonat Heberson Avelino de Souza**

Dissertação de Mestrado aprovada em 28 de agosto de 2023 pela banca examinadora composta pelos seguintes membros:

---

Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea (orientador) ..... DCA/UFRN

---

Prof. Dr. José Mário Araújo (co-orientador) ..... C&T/IFBA

---

Prof. Dr. Kurios Iuri Pinheiro de Melo Queiroz ..... DCA/UFRN

---

Prof<sup>a</sup> Dr<sup>a</sup> Fabio Meneghetti Ugulino de Araujo ..... DCA/UFRN

---

# Agradecimentos

---

A Deus, pelo conhecimento e força, para chegar até aqui.

Ao meu orientador, Carlos Eduardo Trabuco Dórea.

Ao meu co-orientador José Mário Araújo.

Ao colega Nelson J. B. Dantas

À minha companheira, Maria e família pelo apoio durante esta jornada.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

---

# RESUMO

---

Fenômenos como vibrações mecânicas, ressonância e oscilações podem ser descritos matematicamente por sistemas de equações diferenciais de segunda ordem, comumente designados de sistemas de segunda ordem. Trabalhar com esse tipo de modelo, em vez dos modelos de estado de primeira ordem, traz benefícios numéricos, embora haja dificuldades inerentes à determinação de seus parâmetros físicos. Os desafios são ainda mais significativos quando se considera a existência de atrasos entre as medições dos estados e os sinais de atuação, levando algumas abordagens à necessidade de uma pós-análise para determinar a estabilidade das soluções calculadas. Uma alternativa para contornar as dificuldades de medição de parâmetros é a abordagem por resposta em frequência, que usa modelos baseados em receptância. Esta dissertação de mestrado trata do projeto de controladores Proporcional Integral Derivativo (PID) para sistemas dinâmicos lineares com atraso, modelados por equações diferenciais matriciais de segunda ordem. Adota-se, neste trabalho, a abordagem por receptância, que, por se basear na resposta em frequência do sistema, permite tratar da estabilidade em malha fechada de forma exata, sem a necessidade de recorrer a aproximações do termo de atraso nem a verificações *a posteriori*. No caso, formula-se um problema de otimização para a determinação dos ganhos do controlador que garantam robustez, por meio de uma margem de estabilidade pré-estabelecida e de desempenho, além da minimização da Integral do Erro Absoluto, relativo ao seguimento de uma referência constante. Logo, implementa-se um Algoritmo Genético para resolver o problema de otimização. Dessa forma, diferentemente de trabalhos correlatos na literatura, o método proposto pode ser aplicado igualmente a sistemas com polos de malha aberta no semiplano direito.

**Palavras-chave:** Sistemas de Segunda Ordem; Sistemas com Atraso; Controle PID; Receptância; Algoritmo Genético.

---

# Abstract

---

Phenomena such as mechanical vibrations, resonance and oscillations can be mathematically described by second-order differential equation systems, commonly referred to as second-order systems. Working with this type of model, instead of first-order state models, brings numerical benefits, but there are inherent difficulties in determining their physical parameters. The challenges become even more significant when considering the existence of delays between state measurements and actuation signals, leading some approaches to require post-analysis for determining the stability of calculated solutions. An alternative to overcoming the difficulties of parameter measurement is the frequency response approach which utilizes models based on receptance. In view of the issue, this work focuses on the design of PID controllers (Proportional-Integral-Derivative) for linear dynamic systems with delay, modeled by second-order matrix differential equations. It adopts the receptance approach because it is based on the frequency response of the system, enabling precise treatment of closed-loop stability, without the need for approximations or back-testing of delay terms. To ensure robustness and performance, as well as minimize the Absolute Error Integral relative to the tracking of a constant reference, it formulates an optimization problem for the determination of controller gains. Also, it takes into account a pre-established stability margin. To solve the optimization problem, it implements a Genetic Algorithm. Unlike related works in the literature, the proposed method can be equally applied to systems with open-loop poles in the right half-plane.

**Keywords:** Second-Order Systems; Time-Delay; PID Control; Receptance; Genetic Algorithm.

---

# Sumário

---

Sumário	i
Lista de Figuras	iii
Lista de Tabelas	v
Lista de Símbolos e Abreviaturas	vii
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>4</b>
2.1 Representação de Primeira Ordem . . . . .	5
2.2 O Método da Receptância . . . . .	6
2.3 A Matriz de Receptância . . . . .	7
2.3.1 A Fórmula de <i>Sherman-Morrison</i> . . . . .	8
2.4 Sistema com Atraso . . . . .	9
2.5 Resposta em Frequência . . . . .	9
2.5.1 O Diagrama Polar ou o Diagrama de <i>Nyquist</i> . . . . .	10
2.5.2 Critério de estabilidade de <i>Nyquist</i> . . . . .	11
2.6 Controlador Proporcional Integrativo Derivativo . . . . .	13
2.7 Índices de desempenho . . . . .	14
2.8 Margem de Estabilidade . . . . .	15
<b>3 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA</b>	<b>17</b>
3.1 Parâmetro de Projeto e Formulação Matemática . . . . .	18
3.1.1 Circunferência $M_s$ . . . . .	19
3.1.2 Definição do problema de otimização . . . . .	19
<b>4 IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO</b>	<b>24</b>
4.1 Solução do Problema de Otimização . . . . .	24
4.1.1 Simulação do sistema para cálculo do <i>IAE</i> . . . . .	24
4.1.2 Algoritmo genético desenvolvido . . . . .	26
4.1.3 População inicial . . . . .	28
4.2 Implementação do Algoritmo de Otimização . . . . .	28

4.2.1	Ganhos infinitos da resposta em frequência devido à ação integral .	28
4.2.2	A Função Robustez . . . . .	30
4.2.3	A Função de Restrições . . . . .	30
4.2.4	A Função <i>Fitness</i> . . . . .	31
4.2.5	A Função de Variabilidade . . . . .	31
4.2.6	Obtenção dos ganhos do controlador via Algoritmo Genético . . . .	33
<b>5</b>	<b>EXPERIMENTOS E RESULTADOS</b>	<b>36</b>
5.1	Experimentos estudados . . . . .	36
5.1.1	Exemplo 1 . . . . .	36
5.1.2	Exemplo 2 . . . . .	38
5.1.3	Exemplo 3 . . . . .	40
5.1.4	Exemplo 4 . . . . .	43
5.1.5	Exemplo 5 . . . . .	45
<b>6</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>53</b>
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>55</b>



---

# Lista de Figuras

---

2.1	Sistema Massa-Mola-Amortecedor . . . . .	4
2.2	Exemplo de diagrama de Nyquist para sistema modelado por $G(s)$ . . . . .	10
2.3	Diagrama de blocos de $G_{mf}(s)$ . . . . .	11
2.4	Diagrama de blocos do PID . . . . .	13
3.1	Diagrama de <i>Nyquist</i> - Exemplo de Circunferência. $M_s$ . . . . .	20
3.2	Diagrama de <i>Nyquist</i> de um Sistema Genérico para Exemplo de um Caso de Instabilidade	22
4.1	Simulação criada com MATLAB/Simulink® . . . . .	25
4.2	Diagrama de <i>Nyquist</i> para $\omega \in [10^{-1}, 10^3]$ . . . . .	29
4.3	Diagrama de <i>Nyquist</i> para $\omega \in [10^{-6}, 10^3]$ . . . . .	29
4.4	Exemplificação da contagem de voltas que contêm o ponto $-1 + j0$ e o sentido do diagrama de <i>Nyquist</i> . . . . .	34
5.1	Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade . . . . .	37
5.2	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.1 . . . . .	38
5.3	Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.1 . . . . .	39
5.4	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.2 . . . . .	41
5.5	Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo . . . . .	42
5.6	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.3 . . . . .	43
5.7	Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.3 . . . . .	44
5.8	Diagrama de <i>Nyquist</i> com perturbação para o Exemplo 5.1.3 . . . . .	45
5.9	Resposta no tempo para uma referência constante com perturbação do Exemplo 5.1.3 . .	46
5.10	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o caso colocalizado (Exemplo 5.1.4) . . . . .	47
5.11	Resposta no tempo para uma referência constante do caso colocalizado (Exemplo 5.1.4)	48
5.12	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o de caso não colocalizado (Exemplo 5.1.4) . . . . .	49
5.13	Resposta no tempo para uma referência constante para o caso não colocalizado (Exemplo 5.1.4) . . . . .	50
5.14	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.5 . . . . .	51
5.15	Diagrama de <i>Nyquist</i> para o Exemplo 5.1.5 . . . . .	52



---

# Lista de Tabelas

---

5.1	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.1 . . . . .	37
5.2	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.2 . . . . .	40
5.3	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.3 . . . . .	41
5.4	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso colocalizado - Exemplo 5.1.4 . . . . .	44
5.5	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso não colocalizado (Exem- plo 5.1.4) . . . . .	45
5.6	Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.5 . . . . .	46



---

# Lista de Símbolos e Abreviaturas

---

$\ddot{x}$	aceleração do bloco, veja equação (2.2), página 4
$\dot{x}$	velocidade do bloco, veja equação (2.2), página 4
<b>C</b>	matriz de amortecimento, veja equação (2.4), página 5
<b>K</b>	matriz de rigidez, veja equação (2.4), página 5
<b>M</b>	matriz de massa, veja equação (2.4), página 5
<b>b</b>	matriz de atuação, veja equação (2.4), página 5
$\omega$	frequência natural, veja equação (2.10), página 7
$\xi$	fator de amortecimento, veja equação (2.10), página 7
$d$	coeficiente de amortecimento dos <i>dashpots</i> , veja equação (2.2), página 4
$k$	coeficiente de rigidez das molas, veja equação (2.2), página 4
$k_d$	Ganho derivativo, veja equação (2.18), página 9
$k_i$	Ganho integral, veja equação (2.18), página 9
$k_p$	Ganho proporcional, veja equação (2.18), página 9
$m$	massa do bloco, veja equação (2.2), página 4
$u$	entrada, veja equação (2.2), página 4
$x$	deslocamento do bloco, veja equação (2.2), página 4
AG	Algoritmo Genético, veja equação (1.0), página 2
AVC	Active Vibration Control, veja equação (2.0), página 4
GM	"Gain Margin", veja equação (3.10), página 19
IAE	Integrated Absolut Error, veja equação (1.0), página 2
ISE	Integrated Squared Error, veja equação (2.28), página 14
ITAE	Integrates Timed Absolut Error, veja equação (2.30), página 14
ITSE	Integrated Timed Squared Error, veja equação (2.31), página 15

PID	Proporcional Integral Derivativo, veja equação (0), página 3
PM	" <i>Phase Margin</i> ", veja equação (3.10), página 19
SPD	Semiplano Direito, veja equação (2.26), página 11
SPE	Semiplano Esquerdo, veja equação (2.26), página 11

---

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

---

Uma diversidade de fenômenos físicos, a exemplo da ressonância em sistemas vibratórios, vibroacústicos e elétricos, é ricamente representada por meio de modelos dinâmicos de segunda ordem (BALAS, 1982; VANDERVELDE, 1986). Os sistemas de segunda ordem são amplamente encontrados em diversas áreas, desde a Engenharia até a Física e a Biologia, tornando seu estudo fundamental para a compreensão de uma ampla gama de fenômenos naturais e artificiais.

Modelos matemáticos que representam esses sistemas podem ser escritos como um sistema matricial de equações diferenciais de segunda ordem, em que as constantes e variáveis das equações têm relações físicas diretas com o modelo real ou podem ser transformadas em equações diferenciais de primeira ordem (DANTAS, 2019). Em DATTA (2004), expõem-se representações de primeira ordem para alguns sistemas de segunda ordem, além de discussões sobre algumas deficiências associadas ao uso do modelo original.

Devido à sua relevância prática, o estudo de sistemas de segunda ordem tem ganhado cada vez mais notoriedade na comunidade de engenharia, proporcionando soluções para diversos obstáculos (DANTAS, 2019). Por exemplo, definir os componentes das matrizes que descrevem um sistema, como massa e elasticidade, é desafiador, haja vista a utilização de modelos matemáticos baseados em equações diferenciais de segunda ordem. Para facilitar o processo de modelagem desses sistemas, uma abordagem proposta por RAM et al. (2009) utiliza o conceito de receptância, que se baseia no uso de informações experimentais do sistema para definir essas matrizes.

Nos últimos anos, alguns trabalhos valeram-se dessa ideia, como base para modelagem de sistema de controle de segunda ordem com atraso, entre eles, mencionam-se: ARAÚJO e SANTOS (2018), ARAÚJO (2018a), ARAÚJO (2018b), SANTOS et al. (2018), DANTAS (2019); DANTAS et al. (2020a), MARTINS et al. (2020), NUNES (2022), GONTIJO et al. (2022).

Com a utilização do método da receptância, pode-se alocar os polos do sistema em uma posição segura no plano complexo, a fim de alcançar um desempenho desejado. Entretanto, quando há presença de atraso de transporte no sistema, ao escolher esse método, faz-se necessário realizar um tratamento posterior, para garantir que o sistema

continue estável em malha fechada, como visto em RAM et al. (2009) e em ARAÚJO e SANTOS (2018).

DANTAS et al. (2020a) propõem uma abordagem para eliminar a análise posterior do método de receptância na presença de atraso. Mais especificamente, a abordagem incide no domínio da frequência, mediante conceitos como estabilidade de *Nyquist*, margem de ganho e função de sensibilidade. Por meio desse viés, foi possível projetar um controlador robusto para sistema de segunda ordem com atraso.

Também, em NUNES (2022), desenvolveu-se um método para projetar um controle utilizando a realimentação derivativa de estados, que modifica as matrizes massa e amortecimento. A realimentação derivativa oferece vantagens em relação à realimentação de estados, como o uso de acelerômetros como sensores - mais baratos e mais aplicáveis na indústria - uma precisão na leitura dos estados do sistema (ABDELAZIZ e VALÁŠEK, 2004) e a possibilidade de regularização e estabilização de sistemas com matriz de massa singular. Os resultados desse método foram apresentados em um trabalho de NUNES et al. (2021).

No trabalho de GONTIJO et al. (2022), apresenta-se um método robusto para a concepção de controladores PID para sistemas vibratórios de segunda ordem com incertezas paramétricas. Diferentemente de trabalhos correlatos, baseados exclusivamente em retroalimentação proporcional e derivativa, o método proposto emprega a ação integral para atingir um erro nulo de rastreamento do ponto de ajuste na presença de distúrbios constantes relacionados aos graus de liberdade atuados, aumentando, por conseguinte, a flexibilidade do projeto.

Já nesta dissertação de mestrado, propõe-se um método para o projeto de controle usando um controlador Proporcional Integral Derivativo seguidor de referência, baseado no método de DANTAS et al. (2020a). A metodologia do projeto usa o critério de estabilidade de *Nyquist* como base teórica para determinar os valores dos ganhos do controlador que estabilizam a planta e atendem aos requisitos do projeto de controle.

Neste estudo, diferentemente de outros trabalhos nessa linha, um dos objetivos é alcançar a otimização do índice de Integral do Erro Absoluto (*IAE - Integral of the Absolute magnitude of the Error*), em conjunto com a otimização da robustez do sistema. No caso, o controlador PID é introduzido na formulação do problema para sistemas de segunda ordem com atraso. Logo, tendo em vista que esse controlador é amplamente utilizado até os dias atuais, esta proposta pode ser aplicada em situações reais de controle.

Tendo em vista a problemática, o objetivo desta pesquisa é apresentar uma extensão do método proposto por DANTAS et al. (2020a) e compará-lo. Diferentemente do estudo de SANTOS et al. (2018), que utilizaram técnicas de alocação de polos, a natureza do controlador PID neste trabalho não as exige, bem como dispensa a extensão do uso do índice de *IAE* como parâmetro de busca para o Algoritmo Genético (*GA - Genetic Algorithm*). Isso é importante para aumentar a eficiência do sistema e garantir sua robustez,



mesmo com a concorrência entre os parâmetros da otimização.

Haja vista essas questões, esta dissertação dispõe-se da seguinte forma:

- Capítulo 2: apresenta a teoria matemática básica para a compreensão do problema abordado e o desenvolvimento do trabalho.
- Capítulo 3: apresenta o problema com equacionamento matemático e detalhes importantes sobre as vantagens do método utilizado.
- Capítulo 4: apresenta o método desenvolvido para solução do problema disposto no Capítulo 3.
- Capítulo 5: apresenta os resultados obtidos com a utilização do método proposto, por meio de exemplos numéricos emprestados de outros trabalhos com objetivo de obter parâmetros de comparação dos resultados alcançados.
- Capítulo 6: traz comentários conclusivos e sugestões para futuros trabalhos relacionados.

---

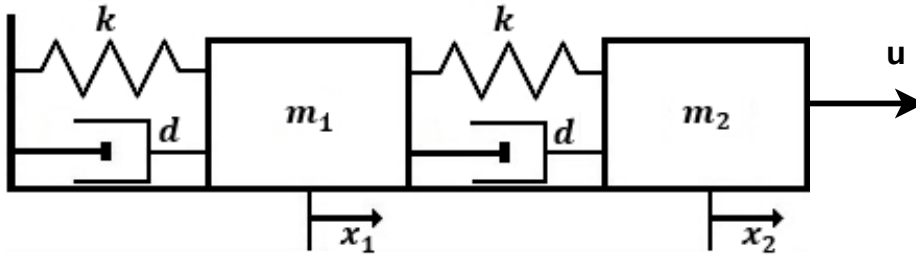
## Capítulo 2

# FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

---

Diferentes tipos de sistemas, como os sistemas vibratório-mecânicos, são classificados como sistemas de segunda ordem. Esses sistemas são descritos pelas equações 2.1 e 2.2, que retratam o comportamento dinâmico do sistema. Nos trabalhos de ARAÚJO (2018b); SANTOS et al. (2018), são discutidos tais modelos com destaque para sua importância no Controle Ativo de Vibrações (*AVC - Active Vibration Control*). Esses modelos são usados para sistemas que podem ser representados por  $n$  equações diferenciais de segunda ordem, uma para cada grau de liberdade do sistema (DANTAS et al., 2020a).

Figura 2.1: Sistema Massa-Mola-Amortecedor



Fonte: (DANTAS, 2019)

O sistema mostrado na Figura 2.1 pode ser modelado usando equações diferenciais, conforme as equações 2.1 e 2.2, segundo as leis clássicas da mecânica de Newton.

$$m_1 \ddot{x}_1(t) + d(2\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) + k(2x_1(t) - x_2(t)) = 0, \quad (2.1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2(t) + d(\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) + k(x_2(t) - x_1(t)) = u, \quad (2.2)$$

sendo  $u$  uma força externa manipulável (entrada);  $m_1$  e  $m_2$  as massas dos blocos;  $k$  o coeficiente de rigidez das molas;  $d$  o coeficiente de amortecimento dos *dashpots*;  $x_1$  e  $x_2$  os deslocamentos dos blocos; e  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ ,  $\ddot{x}_1$ ,  $\ddot{x}_2$ , respectivamente, as velocidades e acelerações dos blocos.

Em forma matricial, as equações 2.1 e 2.2 podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (2.3)$$

Enquanto, na forma compacta:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t), \quad (2.4)$$

sendo:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

em que  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  são matrizes, respectivamente, de massa, amortecimento e rigidez do sistema;  $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^{n \times 1}$  é uma matriz de influência (atuação);  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \in \mathfrak{R}^n$  denotam, respectivamente, aceleração e velocidade generalizadas; e  $u \in \mathfrak{R}$  é o esforço de controle.

## 2.1 Representação de Primeira Ordem

A equação 2.4 representa o sistema de segunda ordem em sua forma original. Outro modo de interpretar o sistema descrito em 2.4 é usar representações de primeira ordem, como espaço de estado  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u$ .

Definindo  $\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}_1$  e  $\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}}_2$ , podemos escrever o sistema de segunda ordem da equação 2.4 como:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_2 \quad (2.5)$$

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b}u \quad (2.6)$$

na forma de matrizes:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_1 \\ \tilde{\mathbf{x}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} u. \quad (2.7)$$

ou de maneira abreviada:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{b}}u$$

com:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Essa representação é chamada de representação de primeira ordem padrão, enquanto outras formas de representações do sistema de segunda ordem são generalizadas em sistema descritor, o qual é um tipo de sistema dinâmico que pode ser representado por meio de uma equação diferencial matricial, que inclui uma matriz de ganho (DANTAS et al., 2020b). Ele é chamado de “descritor” porque inclui tanto as variáveis de estado quanto as de saída em uma única matriz, ao contrário dos sistemas padrões nas quais as variáveis de estado e saída são separadas (DATTA, 2004).

A motivação para a obtenção de um modelo de primeira ordem está na equação com uma solução mais simples do que a equação de segunda ordem (DANTAS et al., 2021). No entanto, algumas dificuldades numéricas surgem ao lidar com o sistema expresso dessa forma.

Uma dificuldade numérica é a possibilidade de surgimento de raízes complexas no polinômio característico do sistema de primeira ordem, o que pode dificultar a análise da estabilidade do sistema. Por fim, a transformação de segunda ordem para primeira ordem pode levar a uma perda de precisão numérica, devido a erros de arredondamento e truncamento, o que pode afetar a validade do modelo.

Ademais, é importante considerar as propriedades disponíveis das matrizes de coeficientes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$ , como simetria, pois, em problemas de grande escala, expressam informações importantes para representação em segunda ordem na equação 2.7.

## 2.2 O Método da Receptância

O Método da Receptância é uma técnica utilizada na engenharia estrutural para analisar e controlar sistemas dinâmicos complexos. Ele permite a representação de um sistema de segunda ordem como um sistema de primeira ordem, facilitando o processo de modelagem e controle desses sistemas (OLIVEIRA, 2016).

O método é baseado na ideia de que um sistema de segunda ordem pode ser representado por um sistema de primeira ordem com múltiplos graus de liberdade. Cada grau de liberdade expressa a resposta do sistema a uma determinada força ou excitação externa. Logo, a receptância é uma medida da relação entre a resposta do sistema e a excitação externa em cada grau de liberdade (NUNES et al., 2021).

Para aplicar o método da receptância, é necessário medir a resposta do sistema em cada grau de liberdade para uma série de excitações externas. A partir desses dados, é possível calcular a receptância em cada grau de liberdade. Em seguida, essas receptâncias podem ser utilizadas para representar o sistema como um sistema de primeira ordem.

Uma das principais vantagens do método da receptância é que ele permite a representação de sistemas complexos com múltiplos graus de liberdade de uma forma simplificada. Isso facilita a análise e o controle desses sistemas, além de permitir a identificação de problemas que possam afetar o desempenho do sistema. Também, por ser um método

baseado unicamente em dados medidos de vibrações, não há necessidade de determinar ou conhecer essas matrizes (TEHRANI et al., 2010).

A Determinação da Matriz Rigidez ( $\mathbf{K}$ ) e de massas ( $\mathbf{M}$ ) são menos desafiadoras porque, de acordo com MOTTERSHEAD e RAM (2007), os elementos finitos dessas matrizes podem ser facilmente determinados, usando métodos variacionais. No entanto, essa praticidade não funciona com matriz de amortecimento ( $\mathbf{C}$ ) (NUNES, 2022).

A regra de *Rayleigh* é um método amplamente utilizado para estimar a matriz de amortecimento em um sistema dinâmico. A matriz de amortecimento é fundamental para descrever a dissipação de energia no sistema; já a definição correta é importante para garantir a precisão da análise dinâmica. Segundo a regra de *Rayleigh*, a matriz de amortecimento pode ser aproximada como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez do sistema conforme apresentado na equação 2.9.

$$C = \alpha M + \beta K \quad (2.9)$$

em que  $C$  é a matriz de amortecimento;  $M$  é a matriz de massa;  $K$  é a matriz de rigidez; e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes determinadas a partir das frequências naturais do sistema. Essas constantes podem ser calculadas a partir da equação 2.10, que envolve as frequências naturais do sistema e o fator de amortecimento.

$$\frac{(\beta\omega_1^2 - \alpha\omega_2^2)}{(\omega_1^2\omega_2^2)} = \zeta \quad (2.10)$$

em que  $\omega_1$  e  $\omega_2$  são as frequências naturais do sistema; já  $\zeta$  é o fator de amortecimento do sistema.

É importante notar que a regra de *Rayleigh* é uma aproximação, por isso sua precisão pode variar dependendo das características específicas do sistema em análise. No entanto, essa técnica é comumente utilizada na prática quando não há informações precisas sobre a matriz de amortecimento ou quando é difícil medir as propriedades de amortecimento diretamente.

## 2.3 A Matriz de Receptância

Considerando o controle de um sistema de segunda ordem por realimentação de estados, a saída é definida por:

$$y(t) = \mathbf{l}\mathbf{x}(t) \quad (2.11)$$

em que  $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$  é uma matriz de composição de sensores.

Para uma dada referência  $r(t)$ , o erro de rastreamento é definido por:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (2.12)$$

Assume-se a lei de controle por realimentação de estados como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t) \quad (2.13)$$

em que  $\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ ,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}^T$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{K}^T$ ;  $\mathbf{v}^T \mathbf{M} \mathbf{v} > 0$ ,  $\mathbf{v}^T \mathbf{C} \mathbf{v} \geq 0$  e  $\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v} \geq 0$  para qualquer  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ .

Na equação 2.13, assumindo  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}e^{st}$ , sendo  $\mathbf{z}$  um vetor constante e  $s$  a variável de *Laplace*, tem-se:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - q(s)\mathbf{b}\mathbf{l})\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.14)$$

é possível perceber que  $q(s)$  é o controlador do sistema definido no projeto e que os componentes de malha fechada de rigidez e amortecimento são modificados pela matriz de posto-1,  $q(s)\mathbf{b}\mathbf{l}$ , consequência da realimentação de estados.

### 2.3.1 A Fórmula de *Sherman-Morrison*

A fórmula de *Sherman-Morrison* fornece a inversa de uma matriz com modificação de posto-1 em termos da inversa da matriz original. Conforme visto em DANTAS (2019), ela estabelece, para uma dada matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  quadrada e inversível e vetores colunas  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ :

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}} \quad (2.15)$$

Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* em 2.14, com  $\mathbf{A} = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{b}$  e  $\mathbf{v} = q(s)$ , temos:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{q(s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}\mathbf{l}\mathbf{H}(s)}{1 + q(s)\mathbf{l}\mathbf{H}(s)\mathbf{b}} \quad (2.16)$$

em que  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + q(s)\mathbf{b}\mathbf{l})^{-1}\mathbf{b}$  é definida, em RAM et al. (2009), como matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{b}$ , como matriz de receptância de malha aberta, que pode ser medida pela resposta em frequência  $\mathbf{H}(j\omega)$ .

A receptância de malha fechada 2.16 sob o controlador *PID* torna a equação característica:

$$1 + q(s)\mathbf{l}\mathbf{H}(s)\mathbf{b} = 0 \quad (2.17)$$

## 2.4 Sistema com Atraso

Quando existe um atraso no tempo entre o estado medido e a ação de controle do atuador, podemos representar a lei de ação de controle da seguinte maneira, conforme apresentado por DANTAS (2019):

$$u(t - \tau) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (2.18)$$

sendo  $k_p, k_i$  e  $k_d \in \mathfrak{R}$  vetores de ganho do sistema. Dessa forma, um sistema de controle de segunda ordem, como o da Figura 2.1, descrito pelo sistema de equações 2.4, com matrizes de massa  $\mathbf{M} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , amortecimento  $\mathbf{C} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e elasticidade  $\mathbf{K} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ , pode ser escrito como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t - \tau) \quad (2.19)$$

Aplicando os procedimentos da seção anterior, para obtenção da matriz de receptância do sistema de segunda ordem com atraso descrito pela equação 2.19, com  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}e^{st}$ , sendo  $\mathbf{z}$  um vetor constante e  $s$  a variável de *Laplace*, para a solução do sistema, encontra-se:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - q(s)\mathbf{b}le^{-\tau s})\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.20)$$

aplicando  $q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$  na equação 2.20, temos:

$$(\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} - (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{b}le^{-\tau s})\mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (2.21)$$

e aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* como em 2.14,

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}\mathbf{I}\mathbf{H}(s)e^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{I}\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s}} \quad (2.22)$$

sendo, novamente,  $\hat{\mathbf{H}}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{b}le^{-\tau s})^{-1}\mathbf{b}$  definida como matriz de receptância de malha fechada e  $\mathbf{H}(s) = (\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{b}$  como matriz de receptância de malha aberta. A presença do atraso na equação 2.22 não modifica a possibilidade da obtenção de  $\mathbf{H}(s)$  por sua resposta em frequência, uma das motivações para o desenvolvimento deste trabalho.

A equação característica da matriz de receptância de 2.22 é dada por:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{I}\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s} = 0 \quad (2.23)$$

## 2.5 Resposta em Frequência

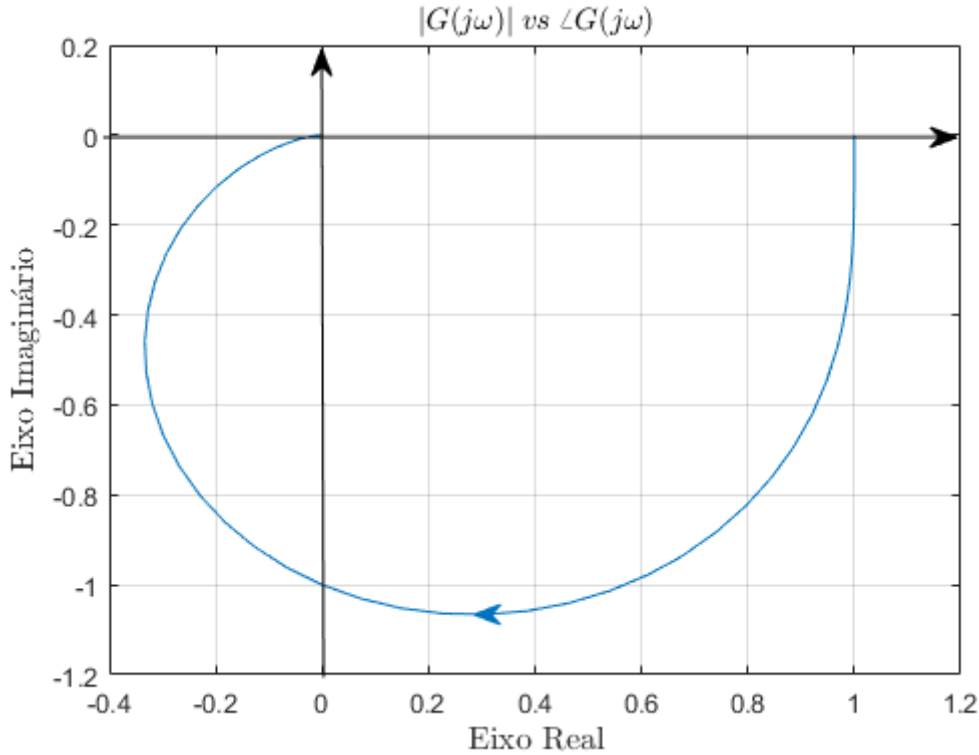
Na literatura clássica de controle, como em OGATA (2009), o termo resposta em frequência é definido como a resposta de estado estacionário do sistema a uma entrada

senoidal. Nota-se que o trabalho realizado em resposta à frequência é muitas vezes motivado pela maior facilidade em lidar com a incerteza nos modelos das plantas usando informações experimentais (FRANKLIN et al., 2013).

### 2.5.1 O Diagrama Polar ou o Diagrama de *Nyquist*

A representação gráfica escolhida para o desenvolvimento deste trabalho é o diagrama de *Nyquist*, também conhecido como diagrama polar. O gráfico polar de uma função de transferência senoidal  $G(j\omega)$  consiste na representação da magnitude de  $G(j\omega)$  e do ângulo de fase de  $G(j\omega)$  em coordenadas polares, em que  $\omega$  varia de zero a infinito (OGATA, 2009). Na Figura 2.2, apresenta-se um exemplo de gráfico de *Nyquist* para um sistema típico de segunda ordem mostrado na equação 2.24.

Figura 2.2: Exemplo de diagrama de Nyquist para sistema modelado por  $G(s)$



Fonte: (DANTAS, 2019)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} \quad (2.24)$$

O diagrama de *Nyquist* é um gráfico no qual o eixo radial representa a magnitude de ganho e o eixo angular, o deslocamento de fase de um sistema de controle. Quando a



curva do diagrama cruza o eixo real, há um ponto crítico de estabilidade que indica que a resposta do sistema está instável.

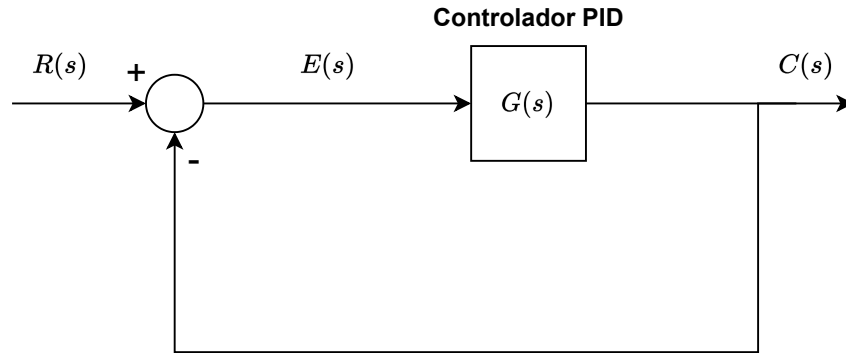
Os métodos para obtenção dos diagramas podem ser encontrados em livros de controle clássico, quais sejam, OGATA (2009), FRANKLIN et al. (2013) e SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007).

### 2.5.2 Critério de estabilidade de *Nyquist*

O critério de estabilidade de *Nyquist* determina a estabilidade do sistema, baseado na resposta em frequência de um sistema em malha aberta (DANTAS, 2019). Em um sistema no circuito fechado, descrito pela função de transferência apresentado na equação 2.25 e em seu diagrama de blocos, conforme a Figura 2.3,

$$G_{mf}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)} \quad (2.25)$$

Figura 2.3: Diagrama de blocos de  $G_{mf}(s)$



Fonte: o autor (2023)

a equação característica é dada por

$$1 + G(s) = 0 \quad (2.26)$$

Para estabilidade, todas as raízes desta equação devem ter partes reais negativas, ou seja, pertencer ao semiplano esquerdo (SPE) no plano  $s$ . Esse critério de estabilidade da equação de *Nyquist* relaciona o número dessas raízes no semiplano direito (SPD) com o número de voltas no ponto  $-1 + j0$  descrito na equação 2.27

$$Z = N + P \quad (2.27)$$

Nela, expressa-se a seguinte relação:  $Z$  representa o número de polos de malha fechada situados no SPD;  $N$ , o número de envoltimentos do ponto  $-1 + j0$ , no sentido

horário, pelo traçado de *Nyquist* do ganho de malha de  $G(j\omega)$ ; e  $P$ , o número de polos de malha aberta no semiplano direito de  $G(s)$  (DANTAS et al., 2020a).

O número  $N$  pode ser tanto negativo como positivo, dependendo da orientação da volta. Cada contribuição no sentido horário em  $N$  é positiva; já cada volta no sentido anti-horário conta como uma contribuição negativa. Esse argumento é baseado no teorema do mapeamento complexo ou Teorema Cauchy, que cria uma relação a curvas em domínios funcionais com o domínio  $s$ . Segundo OGATA (2009), a análise de estabilidade do sistema pode ser resumida em três casos possíveis:

1. Não existir nenhum envolvimento do ponto  $-1 + j0$ , implicando que o sistema será estável, se não houver polos de malha aberta no SPD do plano  $s$ , e instável, caso contrário;
2. Existir um ou mais envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido anti-horário, implicando que, para o sistema estável, nesse caso, o número de envoltimentos no sentido anti-horário tem que ser igual ao número de polos de malha aberta no SPD;
3. Existir um ou mais envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido horário, implicando, nesse caso, instabilidade.

Baseado no teorema do mapeamento, FRANKLIN et al. (2013) resumem em quatro passos básicos o processo de determinação de estabilidade de um sistema pelo critério de estabilidade de *Nyquist*:

1. Obter o Diagrama de *Nyquist* do ganho de malha do sistema, geralmente representado por 2.25;
2. Avaliar o número de envoltimentos do ponto  $-1 + j0$  no sentido horário ( $N$ ); se o envolvimento for no sentido anti-horário, o número é negativo;
3. Determinar o número de polos instáveis em malha aberta ( $P$ );
4. Calcular o número de raízes instáveis em malha fechada:  $Z = N + P$

O critério de estabilidade de *Nyquist* apresenta diversas vantagens em relação a outros métodos de análise de estabilidade. Uma dessas vantagens é que ele possibilita uma representação gráfica da estabilidade do sistema, permitindo uma rápida avaliação da estabilidade sem a necessidade de cálculos matemáticos complexos. Além disso, esse critério pode ser utilizado tanto para analisar funções de transferência em malha aberta quanto sistemas em malha fechada, o que o torna uma ferramenta versátil para a análise de estabilidade. Ademais, o critério de estabilidade de *Nyquist* fornece informações sobre a margem de estabilidade do projeto de controladores que garantam a estabilidade em diversas condições. Por fim, ele considera toda a faixa de frequência do sistema, em vez de apenas uma frequência ou faixa de frequências, proporcionando uma análise mais abrangente da estabilidade do sistema.

## 2.6 Controlador Proporcional Integrativo Derivativo

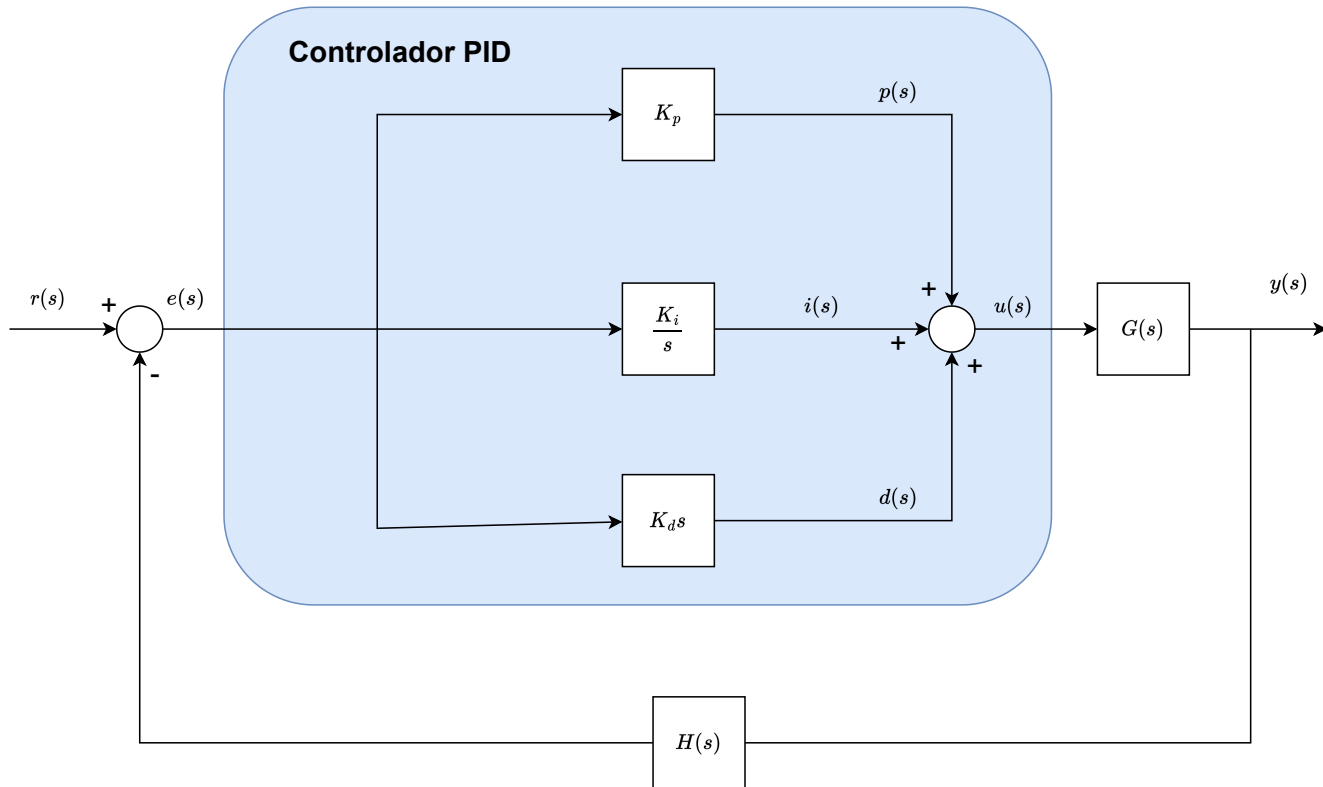
O Controlador Proporcional Integrativo Derivativo (PID) une as ações proporcional, integral e derivativa num só controlador, atuando tanto no regime transitório quanto no regime permanente. Em geral, pode ser muito bem utilizado em sistemas de controle industrial, em que se introduzem um polo em  $p = 0$  e dois zeros ao sistema, que dependem dos parâmetros de controlador (GONTIJO et al., 2022).

Existem muitas formas de representar um controlador PID por função de transferência. A seguir, demonstra-se uma possibilidade:

$$G_c(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{s^2 K_d + s K_p + K_i}{s} = K_c \frac{(s + z_1)(s + z_2)}{s} \quad (2.28)$$

Na Figura 2.4, mostra-se o controlador PID como representação de diagramas de blocos.

Figura 2.4: Diagrama de blocos do PID



Fonte: o autor (2023)

Na literatura de controle (OGATA, 2009), o método do Lugar Geométrico das Raízes (LGR) e as regras de sintonia de *Zigler-Nichols* são algumas técnicas de projetos de controladores PID.

Neste trabalho, não utilizaremos soluções lineares, mas soluções heurísticas, como o uso do Algoritmo Genético e, em trabalhos futuros, o algoritmo de Enxames de Partículas, a fim de encontrar os valores dos ganhos que satisfaçam as nossas restrições de estabilidade *Nyquist*.

## 2.7 Índices de desempenho

Os índices de desempenhos são medidas quantitativas do desempenho de um sistema, que considera fatores tais como erro de rastreamento e tempo de resposta. Para cada sistema, é preciso identificar qual o fator mais relevante, no qual se visa atingir o ótimo. No caso, dizemos que o desempenho do sistema é **ótimo** quando o índice de desempenho selecionado é minimizado.

Alguns índices de desempenhos mais usados são:

- Integral do Erro Quadrático (*ISE* - *Integrated squared Error*)

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt \quad (2.29)$$

Essa passagem descreve um índice usado para medir a eficiência de uma malha de controle. O índice, chamado de *ISE*, é calculado integrando o quadrado do erro entre a resposta do sistema e o sinal de referência. O *ISE* é mais sensível aos erros grandes, por contribuírem mais para o resultado da integral do que erros menores. No entanto, esse índice pode fazer com que erros pequenos persistam no sistema por um período prolongado, o que pode levar a oscilações prolongadas, de pequena amplitude no sinal.

- Integral do Erro Absoluto (*IAE* - *Integrated Absolut Error*)

$$IAE = \int_0^T |e(t)|dt \quad (2.30)$$

A minimização do índice *IAE* tende a gerar respostas mais lentas do que a do *ISE*, segundo OGATA (2009). A sua formulação é definida como integral do módulo do erro atuante. Nesse caso, nota-se que se penaliza menos o erro se comparado com *ISE*, diferentemente do *IAE*, que adiciona qualquer tipo de peso ao erro. Logo, ao minimizar o sistema, considerando *IAE*, podemos afirmar que a resposta será mais lenta. Contudo, espera-se que o sistema de controle apresente menos oscilações na saída.

- Integral do Tempo Multiplicado pelo Erro Absoluto (*ITAE* - *Integrates Timed Ab-*

*solut Error*)

$$ITAE = \int_0^T t|e(t)|dt \quad (2.31)$$

O *ITAE* é mais seletivo do que outros índices porque seu valor mínimo é facilmente identificável em fator do amortecimento  $\zeta$  do sistema. Quando os controladores são ajustados para minimizar o *ITAE*, os sistemas tendem a alcançar o regime permanente de forma mais rápida, porque o índice considera tanto a magnitude quanto a duração do erro presente na resposta do regime transitório.

- Integral do Tempo Multiplicada pelo Erro ao Quadrado (*ITSE* - *Integrated Timed Squared Error*)

$$ITSE = \int_0^T te^2dt \quad (2.32)$$

O *ITSE*, como também o *ITAE*, foca nas penalizações de oscilações persistentes, com objetivo de reduzir o tempo de acomodação (BARATIERI et al., 2019).

## 2.8 Margem de Estabilidade

A capacidade de um sistema de segunda ordem em manter a estabilidade e o desempenho diante de incertezas e perturbações externas é conhecida como robustez (NUNES et al., 2021). Isso significa que um sistema robusto consegue lidar com variações em suas condições de operação e manter um comportamento estável e desejado.

Vários fatores podem influenciar a robustez de um sistema de segunda ordem, incluindo a localização dos polos do sistema no plano complexo, a razão de amortecimento e a frequência natural. Quanto mais distantes os polos do sistema estiverem do eixo imaginário, maior será a robustez, pois o sistema será menos suscetível a perturbações na fase.

Outro fator que pode afetar a robustez de um sistema de segunda ordem é a razão de amortecimento. Ou seja, sistemas com alta razão de amortecimento tendem a ser mais robustos, uma vez que o amortecimento limita o impacto das perturbações no sistema. Além disso, a frequência natural do sistema também influencia a robustez, já que sistemas com frequências naturais mais baixas tendem a ser mais robustos do que aqueles com frequências naturais mais altas. Em síntese, é crucial garantir a robustez de um sistema de segunda ordem para que ele possa manter a estabilidade e o desempenho adequados em condições variáveis e adversas.

Assim, o critério de estabilidade de *Nyquist* permite estabelecer se um sistema linear é estável em malha fechada, a partir de sua resposta em frequência em malha

aberta, mais especificamente pelo seu *Diagrama Polar* ou *Diagrama de Nyquist*. O critério baseia-se na seguinte equação FRANKLIN et al. (2013):

$$N = Z - P, \quad (2.33)$$

sendo  $P$  o número de polos de malha aberta no semiplano direito,  $Z$  o número de polos de malha fechada no semiplano direito e  $N$  o número de voltas que o diagrama de *Nyquist* faz em torno do ponto crítico  $-1 + j0$  no sentido horário. Para estabilidade em malha fechada, deve-se ter, portanto,  $Z = N + P = 0$ , logo,  $N = -P$ . Ou seja, o diagrama de *Nyquist* deve dar tantas voltas no sentido anti-horário em torno de  $-1 + j0$  quanto seja o número de polos de malha aberta no semiplano direito.

Esse critério garante *estabilidade nominal*, isto é, considera-se que o modelo do sistema é exato, o que não ocorre na prática. Uma solução para tornar o controlador robusto em relação a desvios no modelo nominal é estabelecer uma “região de segurança” em torno do ponto crítico, na forma de um círculo de raio  $M_s^{-1}$  centrado nele, sendo  $M_s$  o pico da função de sensibilidade. Como mostrado em SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007), no caso de sistemas estáveis em malha aberta, ao garantir que a curva de *Nyquist* não faz voltas em torno desse círculo, garantem-se limitantes inferiores para as margens de ganho e de fase.

Para implementar um controle robusto e com melhor desempenho, REGO et al. (2017) propõem o uso de um círculo de raio  $M_s^{-1}$  centrado em  $(-1 + 0j)$ , que faz com que a curva do diagrama de *Nyquist* (em azul, na Figura 3.1) tangencie esse círculo (em vermelho, na Figura 3.1). Ressalta-se que são utilizados valores de  $M_s$  entre 1,3 e 2, como indicado por ASTROM (1995).

---

## Capítulo 3

# FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

---

Modelos dinâmicos lineares de segunda ordem são utilizados com frequência em análise de fenômenos vibratórios em estruturas flexíveis que usam modelos de parâmetros concentrados. A equação diferencial de modelos de segunda ordem controlados por uma entrada, contendo  $n$  graus de liberdade, definida sobre um deslocamento generalizado  $\mathbf{x} \in \Re^n$ , é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t) \quad (3.1)$$

O sistema matricial de equações diferenciais de segunda ordem, mostrado em 3.1, aparece em uma gama variada de aplicações em análises estruturais e vibrações como em BALAS (1982) e VANDERVELDE (1986), em que  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K} \in \Re^{n \times n}$  são matrizes, respectivamente, de massa, amortecimento e rigidez do sistema;  $\mathbf{b} \in \Re^{n \times 1}$  é uma matriz de influência (atuação);  $\ddot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}} \in \Re^n$  denotam, respectivamente, aceleração e velocidade generalizadas;  $\mathbf{x} \in \Re^n$  é o vetor de estado; e  $u \in \Re$  é o esforço de controle.

Aplicando a transformada de *Laplace* a 3.1, obtém-se:

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{b}U(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s), \quad (3.2)$$

sendo  $\mathbf{H}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{b}$  definida como a *matriz de receptância* em malha aberta do sistema.

No caso, o problema estudado consiste em controlar vibrações do sistema, com a possibilidade de rastreamento de uma referência constante por um dos graus de liberdade. Para isso, utiliza-se a realimentação de saída com robustez garantida. Especificamente, a saída é definida por:

$$y(t) = \mathbf{l}\mathbf{x}(t) \quad (3.3)$$

em que  $\mathbf{l} \in \Re^{1 \times n}$  é uma matriz de composição de sensores.

Para uma dada referência  $r(t)$ , o erro de rastreamento é definido por:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3.4)$$

Propõe-se como solução do problema um controlador *PID*, que possui a capacidade inerente de rastreamento para referências constantes com erro de regime permanente nulo (FRANKLIN et al., 2013). Também, considera-se a presença de atraso de medição, isto é:

$$u(t) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (3.5)$$

em que  $k_p, k_i$  e  $k_d \in \mathfrak{R}$  são, respectivamente, os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador. Aplicando a transformada de Laplace em 3.3, 3.4 e 3.5, obtém-se:

$$U(s) = -(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) e^{-\tau s} \mathbf{IX}(s) + V(s), \quad (3.6)$$

em que  $q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$  e  $V(s) = q(s)R(s)$ .

A substituição de 3.6 em 3.1 resulta em:

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s} q(s) \mathbf{b} \mathbf{l}] \mathbf{X}(s) = \mathbf{b} V(s). \quad (3.7)$$

Logo,

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s} q(s) \mathbf{b} \mathbf{l}]^{-1} \mathbf{b} V(s) = \hat{\mathbf{H}}(s) \mathbf{V}(s) \quad (3.8)$$

Ao aplicar a fórmula de *Sherman-Morrison* (2.15) na inversa presente em 3.8, obtém-se a matriz de receptância de malha fechada do sistema, dada por:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{H}(s) \mathbf{b} \mathbf{l} \mathbf{H}(s) e^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{l} \mathbf{H}(s) \mathbf{b} e^{-\tau s}} \quad (3.9)$$

Nota-se que a receptância de malha fechada pode ser construída apenas com o conhecimento da receptância de malha aberta  $\mathbf{H}(s)$ , dispensando assim o conhecimento das matrizes  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ . Pode-se acessar os resultados mais expressivos sobre controle de vibrações utilizando receptâncias na literatura recente (ARAÚJO e SANTOS, 2018; ARAÚJO, 2018a; SANTOS et al., 2018; SINGH et al., 2019; DANTAS et al., 2020b, 2021; RICHI-DEI et al., 2022).

### 3.1 Parâmetro de Projeto e Formulação Matemática

Margens de ganho e de fase são usualmente utilizadas como parâmetros de projeto de controladores por resposta em frequência. As relações entre a resposta temporal e essas margens fornecem boas referências, ainda que dadas de maneira indireta, para o controle de sistemas via resposta em frequência (DANTAS, 2019).



### 3.1.1 Circunferência $M_s$

Dadas as discussões anteriores sobre estabilidade e a definição do critério de estabilidade de *Nyquist*, conclui-se que, para sistemas estáveis em malha aberta, ou seja, sem nenhum polo de malha aberta no SPD ( $P = 0$ ), não pode haver nenhum envolvimento do ponto  $-1 + j0$  pelo diagrama de *Nyquist* do sistema. Assim, surge a ideia de definir como parâmetro de projeto uma medida que garanta estabilidade, a fim de atender a esse critério. SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007) apresentam a ideia de relação entre o chamado pico máximo da função de sensibilidade e a menor distância entre o ponto  $-1 + j0$  e o diagrama de *Nyquist* do ganho de malha do sistema apresentado. Baseado nesse conceito, define-se uma circunferência de raio  $M_s^{-1}$  centrada no ponto  $-1 + j0$ , delimitando a região em que o traçado de *Nyquist* seja permitido. Por conseguinte, garante-se uma distância segura do ponto  $-1 + j0$ , ilustrando a ideia de sistema robusto, matematicamente definida como:

$$GM \geq \frac{M_s}{M_s - 1}; \quad PM \geq 2 \arcsen \left( \frac{1}{2M_s} \right) \geq \frac{1}{M_s} [\text{rad}] \quad (3.10)$$

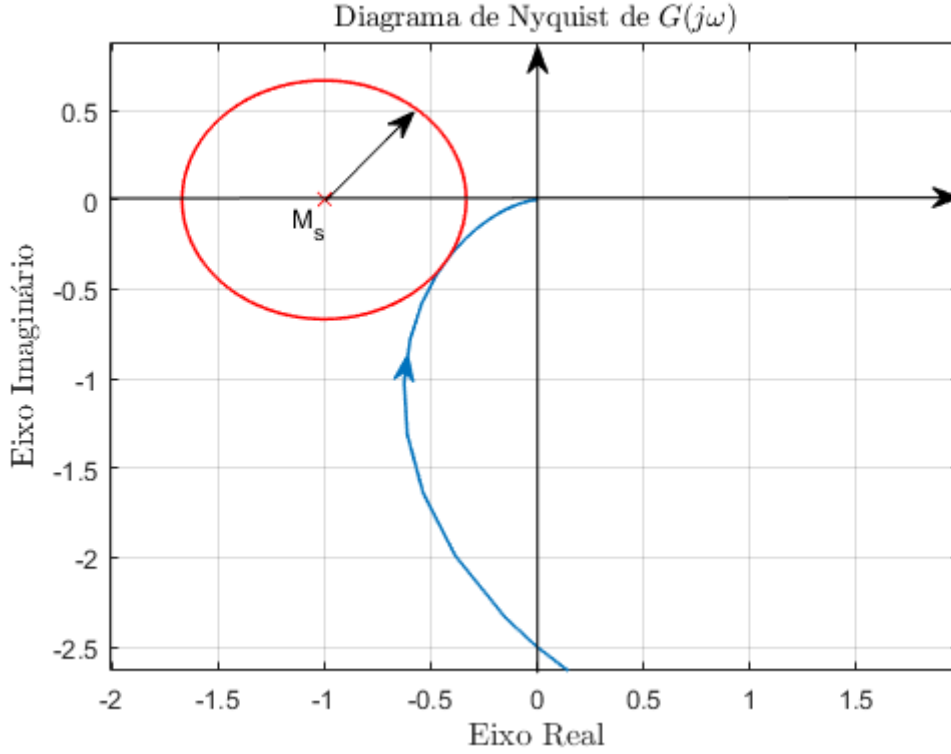
sendo  $GM$  a margem de ganho ( $GM$  - *Gain Margin*) e  $PM$  a margem de fase ( $PM$  - *Phase Margin*) da equação 3.10. Pode-se concluir que, definido um valor  $M_s$ , garante-se um mínimo valor de  $GM$  e  $PM$  como apresentado em DANTAS (2019).

Na literatura clássica de controle, como nos livros de OGATA (2009) e de FRANKLIN et al. (2013), a margem de ganho é descrita como um fator pelo qual o ganho do sistema pode ser aumentado antes de atingir a instabilidade. A influência dessa margem na resposta temporal do sistema é refletida em sua velocidade, em que sistemas com margens de ganho menores alcançam respostas mais rápidas (DANTAS et al., 2020a). O indicador de robustez, representado por  $M_s$ , estabelece um limite mínimo de margem de ganho que ainda seria considerado confortável. Portanto, a menor margem de ganho (consequentemente melhor desempenho em termos de velocidade de resposta) ocorre quando satisfazemos a equação 3.11, a seguir:

$$GM = \frac{M_s}{M_s - 1} \quad (3.11)$$

### 3.1.2 Definição do problema de otimização

A Figura 3.1 mostra o diagrama de *Nyquist* de um sistema genérico (traçado em azul) e uma circunferência (em vermelho), representando a circunferência  $M_s$ . À medida que o ganho do sistema aumenta, o diagrama de *Nyquist* tende a tangenciar a área da circunferência e a aproximar-se do ponto  $-1 + j0$ , chegando próximo da fronteira da instabilidade (DANTAS, 2019).

Figura 3.1: Diagrama de Nyquist - Exemplo de Circunferência.  $M_s$ 

Fonte: (DANTAS, 2019)

### Otimização de Robustez

Define-se como parâmetro de projeto o sistema que tenha uma distância mínima do ponto  $-1 + j0$ , considerando o raio dessa circunferência. Haja vista essa condição, a solução apresentada neste trabalho visa garantir uma estabilidade robusta, com objetivo de que, mesmo sujeito a alterações de parâmetros, o sistema seja estável. Para isso, deve-se manter o ponto  $-1 + j0$  a uma distância segura de  $L(j\omega)$ , o que pode ser interpretado como o traçado de  $L(j\omega)$  fora de uma circunferência centrada em  $-1 + j0$  cujo raio seria a distância mínima desejada com o cuidado de não apresentar soluções nas quais as curvas de  $L(j\omega)$  estejam muito afastadas do círculo, o que levaria a respostas muito lenta. Dessa forma, busca-se fazer com que a curva de  $L(j\omega)$  tangencie o círculo  $M_s$  estabelecido. Então, o seguinte problema de otimização pode ser formulado, semelhantemente ao proposto em DANTAS et al. (2021):

$$\min_{k_p, k_i, k_d} \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \quad (3.12)$$

$$s.t : \operatorname{Re} \{L(j\omega)\} \geq -1 + M_s^{-1} \quad \forall \quad \omega / \operatorname{Im} \{L(j\omega)\} = 0 \quad (3.13)$$

$$L(j\omega) = \left(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s\right) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau}$$

$$N = -P \quad (3.14)$$

sendo que  $\omega$  varia de zero a um valor elevado o suficiente para que  $|L(j\omega_i)| \simeq 0$ . A equação 3.12 estabelece o problema de minimização da função, que, por ser uma função quadrática, tem seu valor mínimo para  $\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| = M_s^{-1}$ . Também, como  $(\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1|)$  é a menor distância entre  $L(j\omega)$  e o ponto  $-1 + j0$ , ela dará num ponto tangente à circunferência de raio  $M_s^{-1}$ .

Perceba, que foi introduzido um deslocamento para direita representado pela contribuição da soma de mais um, na função  $L(j\omega)$ , isso é apenas um recurso geométrico, para deslocar a centro da referência do diagrama, para ser o ponto  $-1 + j0$ , assim verificamos a diferença de um menos raio de  $M_s^{-1}$ , o raio partindo desse novo centro que é ponto  $-1 + j0$ , assim não realizando o critério de estabilidade de *Nyquist* no centro do diagrama no ponto  $0 + j0$ , facilitando a aplicação de teoria de estabilidade de *Nyquist*.

### Otimização de Desempenho

O problema de otimização dado pela equação 3.12 não garante, todavia, que o desempenho da resposta seja considerado diretamente, apesar da ideia de robustez. Assim, propomos a otimização de desempenho definido matematicamente pela equação 3.15, que estabelece a busca por um conjunto de ganho de controlador com objetivo de maximizar o desempenho do sistema.

$$\min_{k_p, k_i, k_d} \int_0^t |e(t)| dt \quad (3.15)$$

$$s.t : \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \leq \epsilon \quad (3.16)$$

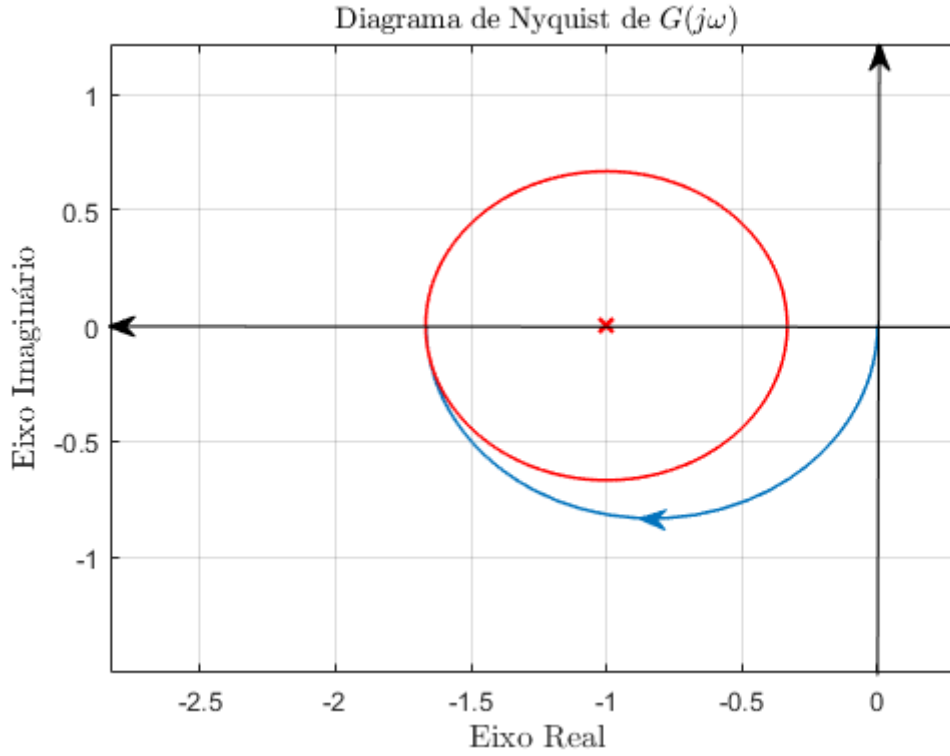
$$L(j\omega) = \left( k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \quad (3.17)$$

$$N = -P$$

Na literatura, alguns trabalhos abordam o desempenho do sistema por meio de técnicas de ajuste de curva, da sintonia de ganhos do controlador e da integral do erro como índice de *IAE*. Nesta dissertação, adotamos a minimização do *IAE*, melhorando, por conseguinte, o desempenho do sistema de segunda ordem com atraso (DANTAS, 2019). A restrição dada pela equação 3.16 garante que a solução aleatória mostrada na Figura 3.2 não seja obtida pela busca. Afinal, pelo critério de estabilidade de *Nyquist*, esse exemplo ilustra um caso de instabilidade (MARTINS et al., 2020).

### Sintonia Robusta com Otimização de Desempenho

Em matéria de sistema de controle, a robustez de um sistema e o desempenho são parâmetros concorrentes. Logo, não é possível melhorar esses critérios de controle de forma igualitária. Por isso, decidimos propor uma solução que tende a realizar a

Figura 3.2: Diagrama de *Nyquist* de um Sistema Genérico para Exemplo de um Caso de Instabilidade

Fonte: (DANTAS, 2019)

otimização desses parâmetros, de tal forma que, na mesma proporção que maximizamos o desempenho do sistema, tentamos maximizar a robustez, para que ambos os parâmetros tenham a mesma importância na otimização.

Além de propormos a otimizar desses parâmetros concorrentes, que existem em projeto de sistema de controle, também queremos garantir que o método desenvolvido seja aplicável para sistemas estáveis em malha aberta e instáveis. Assim, percebe-se a receptância de malha fechada (3.9) com a utilização do controlador *PID*. A presença do atraso de transporte torna a equação característica:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{I} \mathbf{H}(s) \mathbf{b} e^{-\tau s} = 0 \quad (3.18)$$

uma equação não polinomial, que apresenta infinitas soluções. Observa-se que o estudo da estabilidade em problemas desse tipo não é uma tarefa trivial. Entretanto, métodos no domínio da frequência baseados no *critério de Nyquist* permitem uma avaliação precisa da estabilidade em malha fechada do sistema na presença do atraso de transporte.

Métodos existentes na literatura de controle de sistemas de segunda ordem lidam com problemas que consideram o termo exponencial do atraso em seus modelos utilizando aproximações, tais como a conhecida aproximação de Padé e, em alguns casos, as séries de *Taylor* e *Maclaurin*. MOTTERSHEAD e RAM (2007) evidenciam um dos problemas

no cálculo de ganhos de controladores para sistemas com atraso utilizando aproximações: as soluções não garantem que todos os polos de malha fechada fiquem restritos ao semi-plano esquerdo. Outro aspecto que desencoraja o uso de aproximações é que, para boas representações, faz-se necessário o uso de funções polinomiais de ordem bastante elevada.

Visto que as soluções para o problema de cálculo de ganhos dos controladores em sistemas com atraso demandam estabilidade em malha fechada, esse problema de controle pode ser formulado como um problema de otimização baseado em um parâmetro de desempenho dos controladores sob a restrição de estabilidade. Neste trabalho, objetiva-se a minimização da integral do erro absoluto sujeito ao atendimento do critério de estabilidade de *Nyquist*, conforme descrito a seguir:

$$\min_{k_p, k_i, k_d} (1 - \alpha) * \int_0^t |e(t)| dt + \alpha \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \quad \forall \quad \alpha \in \{0, 1\} \quad (3.19)$$

$$s.t : \left( \min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \leq \epsilon \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} L(j\omega) &= \left( k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s \right) \mathbf{I} \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \\ N &= -P \end{aligned} \quad (3.21)$$

Assim, a restrição 3.20, se satisfeita, garante uma distância mínima entre a curva de *Nyquist* e o círculo  $M_s$ , proporcionando uma margem de estabilidade robusta pré-estabelecida (DANTAS et al., 2020b). Já a restrição 3.21 representa a garantia de estabilidade segundo o critério de *Nyquist*, que afirma que, para cada polo de malha aberta presente no semiplano direito, necessita-se de um envolvimento do ponto crítico  $-1 + j0$  no sentido anti-horário. Qualquer envolvimento do ponto crítico pela curva de *Nyquist* no sentido horário resulta em instabilidade.

---

## Capítulo 4

# IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO PROPOSTO

---

Este capítulo apresenta o método desenvolvido para alcançar os resultados apresentados no Capítulo 5. A busca por uma solução para o problema de otimização descrito no Capítulo 3 é feita usando um algoritmo genético e um algoritmo estocástico, tal como uma população que procura soluções aleatoriamente por meio de mutação e de cruzamento entre os membros da população. Dessa forma, pode-se solucionar problemas de otimização, tanto suaves como não suaves, com restrições lineares ou não lineares (MATHWORKS., 2019; GOLDBERG e HOLLAND, 1988).

### 4.1 Solução do Problema de Otimização

Uma das alternativas para solucionar problemas de otimização, como o descrito na equação 3.19, é o uso do algoritmo genético (*GA - Genetic Algorithm*). Trata-se de um método para solução de problemas de otimização com ou sem restrições, baseado no processo de seleção natural que imita a evolução biológica. O *GA* é um pioneiro na solução de problemas do tipo abordado neste trabalho (MATHWORKS., 2019). O algoritmo funciona repetitivamente alterando a população de soluções individuais. A cada etapa, o algoritmo genético escolhe aleatoriamente indivíduos da população atual e utiliza-os como pais para gerar filhos para a geração seguinte. Ao longo de sucessivas gerações, a população evolui até chegar a uma solução ótima. Esse processo é perfeitamente adequado ao objetivo de procura para o problema descrito pela equação 3.13.

O algoritmo genético pode ser utilizado para resolver problemas que não são adequados aos algoritmos de otimização padrão, incluindo aqueles cuja função objetivo é descontínua, não diferenciável, estocástica ou altamente não linear.

#### 4.1.1 Simulação do sistema para cálculo do *IAE*

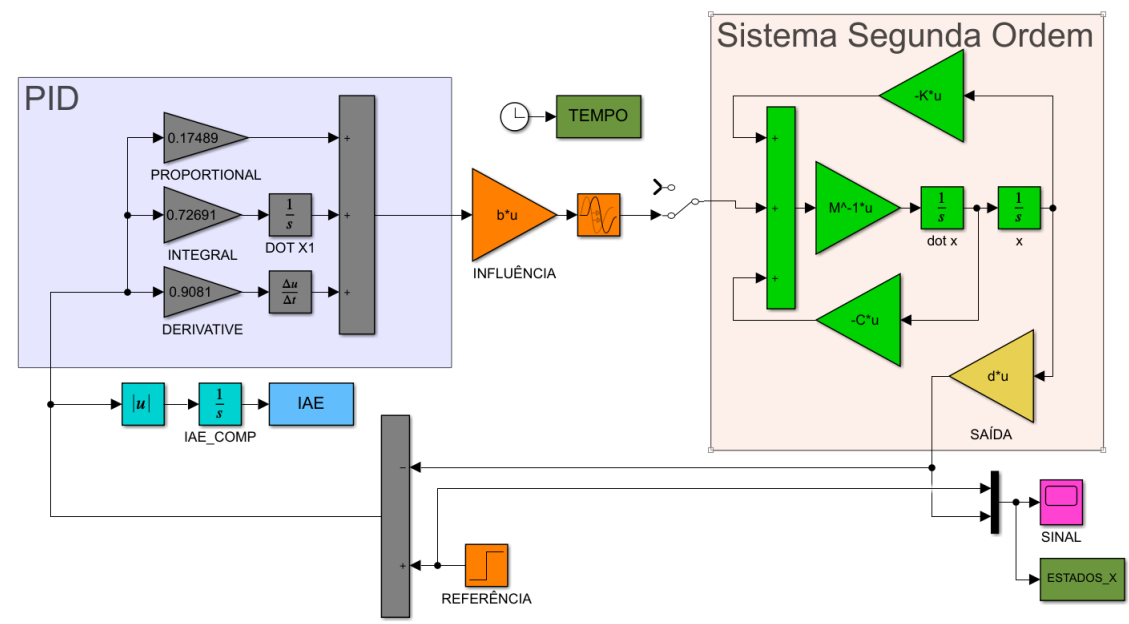
A função Integral do Erro Absoluto é um indicador que avalia o desempenho do sistema conforme descrito na seção 2.7. Esse indicador considera o erro de rastreamento,

ou seja, a diferença entre o sinal de saída e o sinal de referência. O cálculo da integral do valor absoluto desse erro é feito a partir da simulação da resposta do sistema com os valores do ganho do controlador associados a cada indivíduo da busca.

Neste trabalho, foi usada a ferramenta MATLAB/Simulink<sup>®</sup> para efetuar a simulação, conforme o diagrama apresentado na Figura 4.1. Usando o resultado da simulação, o *IAE* foi calculado, e o seu valor foi salvo em uma variável com mesmo nome.

O algoritmo 1 emprega a simulação mencionada para calcular o índice *IAE* para cada indivíduo da população, sendo que cada um é composto por  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$ . As demais variáveis necessárias para a execução da simulação são carregadas no *Workspace* do *software* MATLAB<sup>®</sup>. A função importa os parâmetros do controlador para a simulação e executa-a, valendo-se das variáveis do *Workspace*. Após a conclusão da simulação, a função retorna o valor do “*iae*”.

Figura 4.1: Simulação criada com MATLAB/Simulink<sup>®</sup>



Fonte: o autor (2023)

---

#### Algoritmo 1: IAE

---

**Entrada:** populacao e simulacao

**Saída:** iae

- 1  $k_p = \text{populacao}(1);$
  - 2  $k_i = \text{populacao}(2);$
  - 3  $k_d = \text{populacao}(3);$
  - 4 atribui  $k_p$  na simulacao
  - 5 atribui  $k_i$  na simulacao
  - 6 atribui  $k_d$  na simulacao
  - 7 executa a simulacao
  - 8 retorna iae
-

### 4.1.2 Algoritmo genético desenvolvido

No trabalho apresentado, optou-se por desenvolver o algoritmo genético devido à facilidade de otimização dos hiperparâmetros e à obtenção de melhores resultados com variações dos métodos principais do *GA*, tais como seleção, cruzamento e mutação (SOUZA; CARVALHO, 2020).

Os passos do algoritmo genético implementado foram:

1. Inicialização: uma população inicial de soluções é gerada aleatoriamente de  $k_p$ ,  $k_i$  e  $k_d$ ;
2. Seleção: os indivíduos são ordenados de forma que os ganhos do controlador que teve melhores resultados estão no início da população, por isso são selecionados para reprodução. Esse tipo de seleção é denominado de elitista;
3. Cruzamento: os ganhos do controlador *PID* selecionados são usadas como pais para produzir novos indivíduos (filhos);
4. Mutação: alguns dos indivíduos produzidos são submetidos a pequenas alterações aleatórias (mutações);
5. Avaliação: a nova geração de soluções é avaliada em termos da sua aptidão com a função de custo. Neste trabalho, utilizamos a robustez do sistema medida pelo valor de  $M_s$ , integral do erro absoluto e concorrência entre eles;
6. Variabilidade Genética: implementamos esse cálculo a fim de verificar a variação dos resultados da função de custo, reduzindo o número de iterações desnecessárias, isto é, que não apresentam ganhos significativos;
7. Substituição: a nova geração de soluções é substituída pela antiga, formando a nova população;
8. Repetição: o processo é repetido sucessivas vezes até que se atinja uma solução ótima ou se alcance um critério de parada;
9. Resultado: a melhor solução encontrada retorna como resultado do algoritmo genético.

Essas variações no comportamento do passo de seleção - como a seleção por elitismo, a seleção randômica, a seleção por roleta, bem como as variações no método de cruzamento, a exemplo do cruzamento em dois pontos ou uniforme e a mutação gaussiana ou uniforme - podem trazer grandes ganhos na otimização do *GA*, dependendo da formulação do problema e de como ele se comporta no espaço de amostra (SOUZA; CARVALHO, 2020).

As etapas para obtenção dos ganhos do controlador que resolvem o problema de otimização estão descritos no Algoritmo 2. Os seus dados de entrada são: o sistema de segunda ordem (" $m$ ", " $c$ ", " $k$ ", " $b$ ", " $1$ "), o atraso do sistema " $\tau$ ", o vetor de frequências " $\omega_i$ " sobre as quais a resposta em frequência do sistema será avaliada, o valor desejado para a medida de robustez e o nome do arquivo de simulação do sistema `simulacao` apresentado na Figura 4.1.



A execução do algoritmo requer as seguintes funções auxiliares: uma função de restrições para descrever as limitações impostas pelas equações 3.13, uma função de robustez que avalia a capacidade do sistema em malha fechada de lidar com variações, conforme definida pela equação 3.19, uma função *IAE* associada a um dado indivíduo que calcula a integral do erro absoluto do sistema em malha fechada, conforme define a equação 2.31, e uma função “OTIMIZACAO” que calcula o valor a ser minimizado pelo algoritmo genético. Dependendo do valor da variável “alfa”, tanto a robustez do sistema quanto o IAE em malha fechada podem ser otimizados, bem como a combinação desses parâmetros no sistema.

---

**Algoritmo 2:** Busca

---

**Entrada:** m; c; k; b; l;  $\tau$ ;  $\omega$ ;  $M_s$  e simulacao

**Saída:** ganhos = [  $k_p$   $k_i$   $k_d$  ];

```

1 populacao = gera uma população de tamanho n
2 objetivo = "execute";
3 execucao = 0;
4 variabilidade = 1;
5 evolucao = 0;
6 alfa = gera um valor aleatório entre 0 e 1
7 n = 100;
8 repita
9     para geração=1 até geração=n faça
10         avaliacao = []
11         se execucao > 0 então
12             | populacao(2 : n, :) = gera uma população aleatório de tamanho n - 1
13         fim
14         para i = 1 até populacao=n faça
15             nyquist = L(m, c, K, B, l,  $\tau$ ,  $\omega$ , populacao(i, 1 : 3));
16             robustez = ROBUSTEZ(nyquist(s),  $M_s$ );
17             restricao = RESTRICAO(nyquist(s), 0);
18             iae = IAE(populacao, simulacao);
19             otimizacao = OTIMIZACAO(iae, robustez, alfa);
20             avaliacao(i, 1 : end) = [otimizacao, restricao];
21             i = i + 1;
22         fim
23         populacao = [populacao avaliacao];
24         populacao = SELECAO(populacao);
25         populacao = MUTACAO(populacao(1 : n, 1 : n - 2));
26         nyquist = L(m, c, k, b, l,  $\tau$ ,  $\omega$ , populacao(1, 1 : 3));
27         robustez = ROBUSTEZ(nyquist(s),  $M_s$ );
28         restricao = RESTRICAO(nyquist(s), 0);
29         iae = IAE(populacao, simulacao);
30         otimizacao = OTIMIZACAO(iae, robustez, alfa);
31         se (otimizacao < 0.4 && restricao < 0.9) || (execucao > 2 && restricao < 0.9) então
32             | objetivo = "fim";
33             melhorIndividuo = populacao(1, :);
34             interromper;
35         fim
36         VARIABILIDADE(variabilidade, evolucao, otimizacao);
37         geracao = geracao + 1;
38     fim
39     execucao = execucao + 1;
40 até (objetivo  $\neq$  "fim");

```

---

### 4.1.3 População inicial

A primeira etapa na configuração de um algoritmo genético consiste em criar a população inicial. Esse termo, assim como todos os outros relacionados ao algoritmo, é inspirado na analogia com a teoria da evolução biológica (DANTAS, 2019). No contexto de otimização, ele se refere ao conjunto inicial de soluções possíveis para o problema específico em questão.

Neste trabalho, optou-se pelo desenvolvimento de um conjunto aleatório de indivíduos para a população. Por isso, inicialmente, criamos uma população com cem indivíduos. No caso, o primeiro *locus* corresponde a *kp*, seguido por *ki*, e *kd*.

## 4.2 Implementação do Algoritmo de Otimização

Nesta seção, discutiremos detalhes relativos ao desenvolvimento e à implementação das teorias apresentadas neste trabalho.

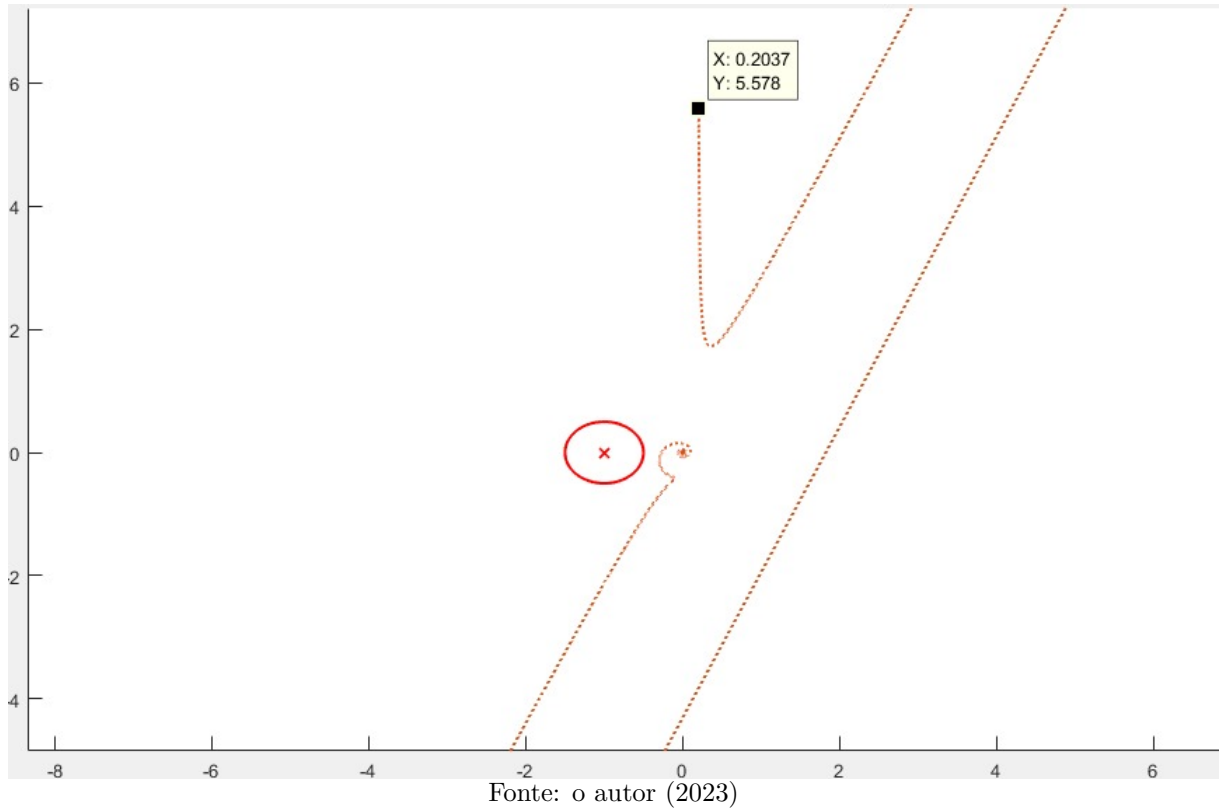
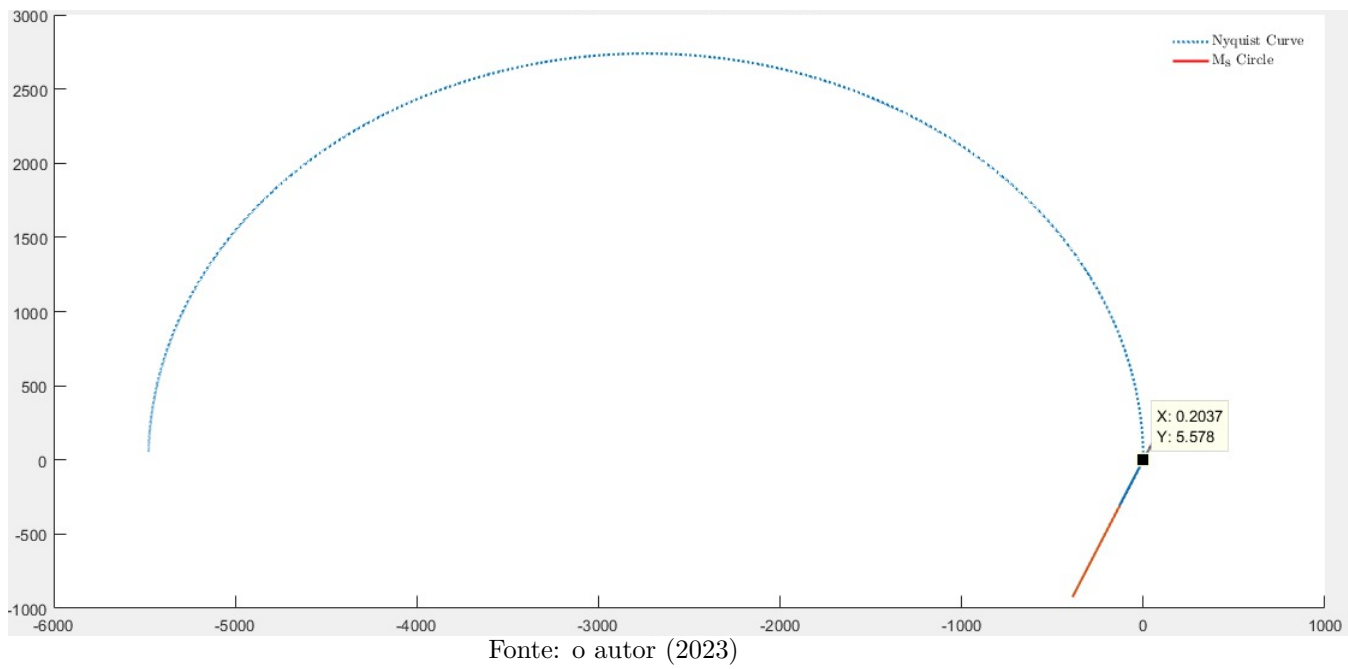
### 4.2.1 Ganhos infinitos da resposta em frequência devido à ação integral

Devido à natureza da ação integral do controlador *PID*, o módulo da resposta em frequência do ganho de malha atende a infinito para baixas frequências, dificultando a contagem do número de voltas do diagrama de *Nyquist* em torno do ponto crítico. Por exemplo, quando utilizamos o sistema de 5.1.3, que será disposto no capítulo 5, o método resultou nos seguintes ganhos do controlador PID [7.9574 14.8018 3.5920] respectivamente *kp*, *ki*, *kd* na Figura 4.2. Nela, as frequências  $\omega$  têm uma variação no intervalo de  $[10^{-1} \ 10^3]$ . Assim, podemos observar que o diagrama não envolve o ponto crítico  $-1 + j0$ . Também, com base na definição de estabilidade de *Nyquist*, o sistema seria estável em malha aberta. Porém, para os mesmo valores dos ganhos, com a variação de  $\omega$  no intervalo de  $[10^{-6} \ 10^3]$ , quando observamos a Figura 4.3, o gráfico envolve o ponto crítico. Assim:

Como solução inicial, introduzimos uma perturbação na ação integrativa, matematicamente expressa pela equação 4.2. Assim, calculando o limite  $\omega(i) \rightarrow 0$ , obtemos o seguinte resultado:

$$\lim_{\omega(i) \rightarrow 0} \frac{Ki}{j\omega(i)} = \lim_{\omega(i) \rightarrow 0} \frac{Ki}{j0} = \lim_{\omega(i) \rightarrow 0} \frac{Ki}{0} = +\infty \quad (4.1)$$

Logo, introduz-se a perturbação no denominador da ação integrativa conforme a equação 4.3. Assim, para os valores baixos de  $j\omega(i)$ , devido à perturbação, evitamos valores infinitos para ação integrativa, porque os resultados do denominador não tenderão

Figura 4.2: Diagrama de *Nyquist* para  $\omega \in [10^{-1}, 10^3]$ Figura 4.3: Diagrama de *Nyquist* para  $\omega \in [10^{-6}, 10^3]$ 

a zero para frequência muito baixas, fazendo que o cálculo do diagrama de *Nyquist* não tenha uma representação errada na função “L” exposta no Algoritmo 3.

$$\frac{Ki}{j\omega(i)} \quad (4.2)$$

$$\frac{Ki}{j\omega(i) + 0.0001} \quad (4.3)$$

---

**Algoritmo 3: L**


---

**Entrada:** m; c; k; b; l;  $\tau$ ;  $\omega$  e populacao

**Saída:** nyquist

```

1 kp = populacao(1);
2 ki = populacao(2);
3 kd = populacao(3);
4 para i = 1 até i = comprimento( $\omega$ ) faça
5      $\beta = j\omega(i)$ ;
6     nyquist(i) = (kp +  $\frac{ki}{\beta + 0.0001}$ ) +  $\beta kd$  l ( $m\beta^2 + c\beta + k$ ) $^{-1}$  b e $^{-\tau\beta}$ ;
7     i = i + 1;
8 fim
```

---

### 4.2.2 A Função Robustez

A função de robustez é utilizada como avaliação dos indivíduos da população. Para isso, tem-se em vista a garantia de que a menor distância entre o ponto  $-1 + j0$  e o diagrama de *Nyquist* de  $L(j\omega)$  seja igual ao raio da circunferência  $M_s$ , um parâmetro de projeto definido na resposta em frequência.

A função “L” apresentada no Algoritmo 3 calcula os valores de  $L(j\omega_i)$  e armazena-os nos vetores *Re* e *Im*, correspondendo às partes real e imaginária de  $L(j\omega_i)$ , respectivamente. O vetor *d* é utilizado para armazenar as distâncias entre o ponto  $-1 + j0$  e os pontos ao longo da curva  $L(j\omega_i)$ , armazenados nos vetores *Re* e *Im*. Logo, a função de robustez é uma medida usada para a avaliação para cada indivíduo da população - um candidato para a solução do problema de otimização. Ademais, utiliza-se o seu valor na busca realizada pelo Algoritmo Genético (DANTAS, 2019).

---

**Algoritmo 4: ROBUSTEZ**


---

**Entrada:** nyquist e  $M_s$ 
**Saída:** robustez

```

1 d =  $\sqrt{(\text{Re}(\text{nyquist}) + 1)^2 + \text{Im}(\text{nyquist})^2}$ ;
2 robustez = (min(d) -  $M_s^{-1}$ ) $^2$ ;
```

---

### 4.2.3 A Função de Restrições

O algoritmo 5 apresenta a função de “RESTRICAO” responsável por impor aos indivíduos as limitações do problema de otimização, definidas pelas equações 3.16, que se referem a impor o número de voltas necessárias em torno do ponto crítico  $-1 +$

$j0$  para garantia da estabilidade em malha fechada pelo critério de *Nyquist*. O vetor “*interseccao*” armazena os pontos de intersecção entre a curva de *Nyquist* de  $L(j\omega)$  e o eixo real. Utiliza-se a variável “*restricao*” para representar a restrição não linear estabelecida pela inequação 3.16. No caso, essa variável fica restrita a valores menores ou iguais a zero.

A função de “*RESTRICAO*” envia os valores de “*restricao*” de volta para o Algoritmo Genético e avalia o indivíduo da população com a função “*OTIMIZACAO*”. A busca é concluída quando as mudanças entre as gerações se tornam insignificantes e o melhor indivíduo avaliado pelas funções descritas é apresentado como resposta. Acrescenta-se que os resultados obtidos com o algoritmo desenvolvido serão apresentados no capítulo 5.

#### 4.2.4 A Função *Fitness*

A função “*OTIMIZACAO*” recebe como entrada dois parâmetros: os índices de robustez e “*iae*”, resultantes das funções descritas nas seções 4.2.2 e 4.1.1, respectivamente. Reforça-se que o índice de robustez mede o quão robusto é o sistema.

Levanta-se o seguinte problema: é possível notar que as definições dessas duas medidas podem entrar em conflito, já que, quando se deseja minimizar a integral do erro - ou seja, ter um tempo de acomodação baixo - pode-se acabar com um sistema menos robusto, com altos valores de *Overshoot*. Como solução, criou-se um parâmetro chamado alfa, que pondera esses dois critérios na função de “*OTIMIZACAO*”. No caso, o valor de alfa é um número entre zero e um, que permite escolher maior importância ao índice de “*robustez*” ou ao “*iae*”, bem como decidir se ambos têm a mesma importância na otimização do algoritmo de busca. O algoritmo 6 apresenta essa lógica.

#### 4.2.5 A Função de Variabilidade

O objetivo da Função de “*VARIABILIDADE*” Genética, apresentada no Algoritmo 7, é solucionar o problema de iteração do Algoritmo Genético quando não houver melhora no valor da Função “*OTIMIZACAO*” após várias iterações. Com isso, evita-se a execução desnecessária do programa quando a solução estiver presa em um mínimo local, a partir do qual não haverá avanços significativos com a continuidade das execuções do *GA*.

A função avalia o valor da função objetivo em dez execuções. Caso haja uma baixa variância entre esses valores, há uma indicação de que o algoritmo não está apresentando evolução na otimização, assim o custo computacional de continuar executando o algoritmo proposto não resultará em ganhos significativos. Com isso, a função interrompe a execução do *GA* e retorna o melhor indivíduo para aquela execução.

**Algoritmo 5: RESTRICAO****Entrada:** *nyquist*; *z*;**Saída:** *restricao*


---

```

1 contadorcw = 0;
2 contadorccw = 0;
3 interseccao = 0;
4 se Re(nyquist(1)) < -1 && abs(Im(nyquist(1))) < 0.2 então
5     xinterseccao = [xinterseccao Re(nyquist(1))];
6     se Im(nyquist(2)) < Im(nyquist(1)) então
7         contadorccw = contadorccw + 1;
8     fim
9     senão
10        contadorcw = contadorcw + 1;
11    fim
12 fim
13 para i = 1 até comprimento(nyquist) - 1 faça
14     se Im(nyquist(i))Im(nyquist(i + 1)) < 0 então
15         se Re(nyquist(i))Re(nyquist(i + 1))/2 < -1 então
16             interseccao = [interseccao(Re(nyquist(i))) + Re(nyquist(i + 1))]/2;
17             se Im(nyquist(i + 1)) < Im(nyquist(i)) então
18                 contadorccw = contadorccw + 1;
19             fim
20             senão
21                 contadorcw = contadorcw + 1;
22             fim
23         fim
24     fim
25     i = i + 1;
26 fim
27 para i = 1 até comprimento(nyquist) - 1 faça
28     se
29         -Im(nyquist(comprimento(nyquist) - (i - 1))) - Im(nyquist(comprimento(nyquist) - i)) < 0
30         então
31             se
32                 Re(nyquist(comprimento(nyquist) - (i - 1))) + Re(nyquist(comprimento(nyquist))) / 2 < -1
33                 então
34                     interseccao = [interseccao(Re(nyquist(comprimento(nyquist) - (i - 1)))) + Re(nyquist(comprimento(nyquist))) / 2];
35                     se
36                         -Im(nyquist(comprimento(nyquist) - (i - 1))) > -Im(nyquist(comprimento(nyquist) - i))
37                         então
38                             contadorccw = contadorccw + 1;
39                         fim
40                     senão
41                         contadorcw = contadorcw + 1;
42                     fim
43                 fim
44             fim
45             i = i + 1;
46 fim
47 restricao = -min(interseccao)contadorcw + (Z - contadorccw)^2;

```

---

**Algoritmo 6: OTIMIZACAO****Entrada:** *robustez*, *iae*, *e* *alfa***Saída:** *otimizacao*


---

```

1 otimizacao = alfa(robustez) + (1 - alfa)iae;

```

---

**Algoritmo 7: VARIABILIDADE****Entrada:** variabilidade, evolucao, e otimizacao

---

```

1 evolucao(variabilidade) = otimizacao;
2 variabilidade = variabilidade + 1;
3 se tamanho(evolucao) > 10 então
4     variabilidade = 1;
5     evolucao = evolucao(2 : end);
6     se var(evolucao) < 0.0000001 então
7         objetivo = "fim";
8         melhorIndividuo = populacao(1,:);
9         interromper;
10    fim
11 fim

```

---

**4.2.6 Obtenção dos ganhos do controlador via Algoritmo Genético**

Neste trabalho, também aplicaremos os métodos testados para sistemas de controle estáveis para sistemas instáveis. No entanto, isso traz algumas complicações no desenvolvimento do algoritmo, para que atenda às funções de restrições.

Pelo critério de *Nyquist*, testamos as raízes do polinômio característico de malha fechada, que devem ser parte real negativa. Mas quando temos um sistema instável, significa que temos raízes no SPD. Logo, para tornar esse sistema estável, precisamos forçar que o número de voltas no ponto  $-1 + j0$  seja igual ao número de raízes do polinômio característico de malha aberta, assim tornando o sistema estável. Nesse caso, o algoritmo proposto escolhe de forma heurística os ganhos do controlador *PID*, para atender a essa condição de voltas, igual ao número de polos de malha aberta no SPD.

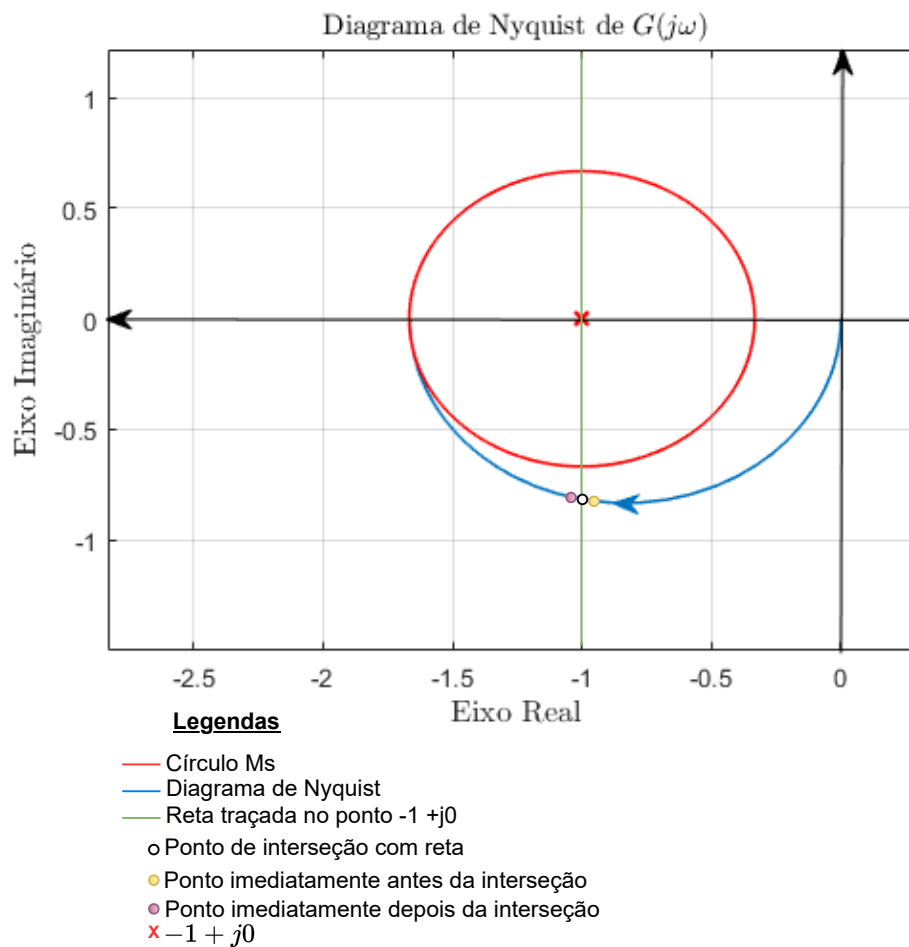
A solução inicial se embasa na teoria de ponto de intersecção de uma reta no diagrama de polos. Ao traçar retas no plano complexo e encontrar os pontos de intersecção que o digrama de *Nyquist* tem com essas retas, é possível tanto aferir o sentido em que o gráfico de *Nyquist* está envolvendo o ponto  $-1 + j0$ , quanto realizar a contagem dessas voltas.

Por exemplo, ao traçar uma reta definida como  $\Re = -1$ , cruzando o eixo real do diagrama *Nyquist* e encontrando as intersecções que a curva de *Nyquist* tem com essa reta, a partir de um ponto de intersecção, calculamos qual é ponto do diagrama de *Nyquist* imediatamente antes da intersecção e após ela. Logo, ao realizar uma análise desses pontos, consegue-se inferir qual o sentido do diagrama, com base no valor imaginário desses pontos. Na Figura 4.4, há um ponto que intersecta essa reta primeiramente abaixo do ponto  $-1 + j0$ . Ao calculá-lo imediatamente antes da intersecção da reta com o diagrama e após essa intersecção, considerando também multiplicar o valor real desses pontos, se o resultado for negativo, significa matematicamente que ocorreu uma transição entre a reta. Além disso, pode-se verificar que ocorreu a transição por meio da análise do valor imaginário desses pontos. Como o valor imaginário do ponto antes da intersecção é menor do que o valor do ponto após a intersecção, por conseguinte, é possível inferir o sentido

do *Nyquist* naquele cruzamento. É importante notar ainda se está no sentido horário e como esses pontos de intersecção contêm o ponto  $-1 + j0$ . Logo, verificou-se a realização de uma volta no ponto de instabilidade.

É importante ressaltar que para o caso de sistema instáveis, é necessário que o diagrama de *Nyquist* envolva o ponto  $-1 + j0$  para que o critério de estabilidade de *Nyquist* seja atendido, possibilitando duas possibilidades da otimização do algoritmo genético para os ganhos, tanto para margem para elevação de ganho e margem para redução do ganho, para o caso de sistema instáveis é essencial o enlace no ponto critico. Dessa forma, implementou-se o algoritmo que consegue tratar os casos de sistemas instáveis em malha aberta, conforme apresentado no algoritmo 5.

Figura 4.4: Exemplificação da contagem de voltas que contêm o ponto  $-1 + j0$  e o sentido do diagrama de *Nyquist*



Fonte: o autor (2023)

Ressalta-se ainda que a complexidade do problema de otimização 3.19-3.21 pra-



ticamente inviabiliza sua solução por métodos tradicionais de otimização baseados em gradiente.

Tendo em vista essa discussão, neste trabalho, implementou-se um algoritmo genético, por sua eficiência e versatilidade, como descrito na seção 4.1.

Acrescenta-se que, na elaboração do algoritmo, definiu-se como objetivo a função expressa na equação 3.19. Para retorno da avaliação do círculo  $M_s$ , utilizaram-se a equação 3.20 e a definição de estabilidade baseada no critério de *Nyquist*, visando atender ao disposto na equação 3.21, com uma função que contabiliza os envoltórios do ponto crítico  $-1 + j0$  nos sentidos horário e anti-horário pela curva  $L(j\omega)$ . Na função de ordenação do algoritmo, os indivíduos são classificados em ordem crescente, atendendo inicialmente à estabilidade, quantificada pela equação 3.21, em que  $P$  é o número de polos de malha aberta no semiplano direito e  $N$  é a quantidade de envoltórios do ponto crítico ( $N > 0$  sentido horário,  $N < 0$  sentido anti-horário). Assim, notam-se indivíduos "estáveis" (com  $Z = 0$ ) nas primeiras posições da classificação e indivíduos "instáveis" (com  $Z \neq 0$ ) nas últimas posições. Em seguida, a população é reordenada com base na função objetivo, apresentada na equação 3.19, que considera o critério de robustez com seu custo dado pelo valor de  $\epsilon$  na equação 3.20 e também na integral do erro absoluto. Nessa etapa, aquele indivíduo que tiver menor valor de  $\epsilon$  e que atender ao critério de estabilidade tomará a frente nas primeiras posições da ordenação.

Para encerrar a busca, consideraram-se os seguintes critérios de parada para verificação das *Condições Atendidas*:

1. Melhor indivíduo estável;
2. Número de gerações  $\geq 100$ ;
3. A importância de a função variabilidade - apresentada na seção 4.2.5 - atingir seu critério.

Assim, devido a essa técnica de contagem de voltas que o diagrama de *Nyquist* faz em torno do ponto  $-1 + j0$ , foi possível aplicar essa estratégia de sistema robusto e eficiência também para os sistemas instáveis em malha aberta, sem descartar os sistemas estáveis em malha aberta. Somado a isso, com a criação dessas funções auxiliares, conseguimos melhorar o desempenho do algoritmo de busca, haja vista os resultados da iteração do algoritmo. Dessa forma, os resultados gerados com a execução desse algoritmo apresentaram-se eficientes e funcionais, conforme o exposto no capítulo 5.

---

## Capítulo 5

# EXPERIMENTOS E RESULTADOS

---

Neste capítulo, apresentam-se alguns estudos de simulações, que visam à avaliação da eficácia e da afetividade dos controladores por meio do método proposto. Nesse caso, para a otimização do *PID*, utilizam-se dois parâmetros de busca. Mais especificamente, a primeira otimização baseia-se no critério de robustez do sistema; já a segunda otimização, no índice de *IAE*, haja vista a maior eficiência do sistema.

Podemos encontrar na seção 5.1 uma comparação entre os resultados obtidos quando otimizamos a robustez do sistema e o índice de Integral do Erro Absoluto. Assim, podemos inferir que esses parâmetros de avaliação do sistema são mutuamente exclusivos, o que significa que é difícil obter um sistema altamente robusto e eficiente ao mesmo tempo. Quando minimizamos o índice *IAE*, a robustez do sistema pode ser comprometida. O objetivo é encontrar um equilíbrio para otimizar tanto a robustez quanto o índice de *IAE*, a fim de obter um controlador ideal que mantenha a estabilidade e o tempo de acomodação, mesmo em situações de perturbações no sistema.

### 5.1 Experimentos estudados

Os exemplos estudados nesta seção baseiam-se na literatura de sistemas de controle, como descrito em OGATA (2009). Abordaremos os sistemas de controle de segunda ordem com atraso e detalharemos os resultados obtidos com o método proposto, além de compará-los com trabalhos já realizados, conforme descrito em DANTAS (2019).

#### 5.1.1 Exemplo 1

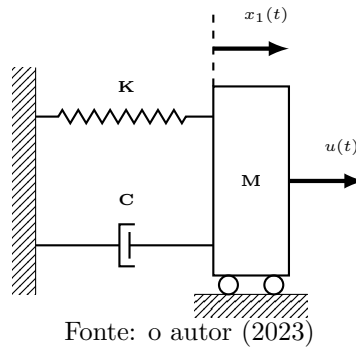
Na Figura 5.1, apresenta-se um exemplo clássico de aplicação do sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade. O problema de controle por realimentação de estados é definido para  $\mathbf{M} = 1$ ,  $\mathbf{C} = 0,01$ ,  $\mathbf{K} = 5$ ,  $\mathbf{b} = 1$  e  $\mathbf{l} = 1$ , com atraso igual a  $\tau = 0,1s$ , assim como no Exemplo 2, retirado de RAM et al. (2009). O objetivo é encontrar valores de  $\mathbf{Kp}$ ,  $\mathbf{Ki}$  e  $\mathbf{Kd}$ , de forma que o diagrama de *Nyquist* de  $L(j\omega)$  esteja completamente fora da área delimitada pela circunferência de raio  $M_s^{-1}$ , a qual é um parâmetro de projeto definido. A definição de  $M_s$  estabelece margens de ganho e de fase

Tabela 5.1: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.1

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$	$GM$	$PM$
Robustez + IAE	2,9222	5,4647	3,6449	0,9149	12,2 dB	53,4 deg
Robustez	1,4160	1,5225	0,8718	3,2841	24,3 dB	36,8 deg

para o sistema. Ademais, os valores comuns de  $M_s$  estão no intervalo de  $1,22 \leq M_s \leq 1,667$  (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE, 2007).

Figura 5.1: Sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade



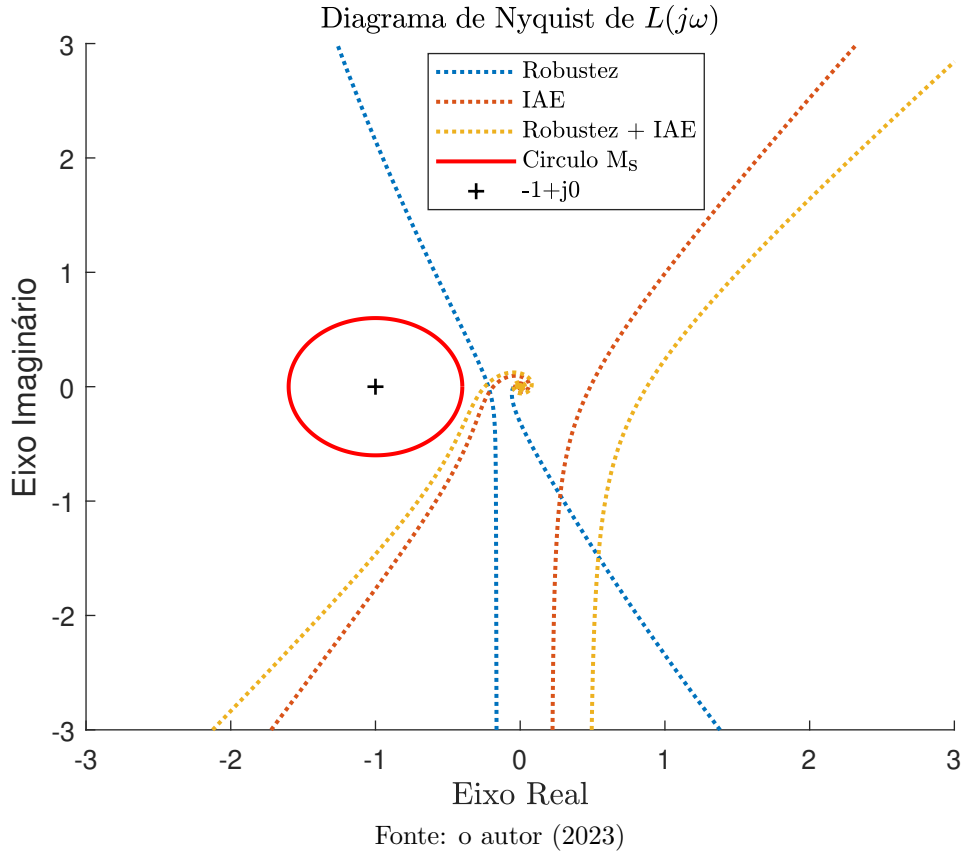
O método proposto neste trabalho foca nos parâmetros de projeto baseados no diagrama de *Nyquist* do ganho de malha do sistema  $L(j\omega)$ , considerando os conceitos de estabilidade segundo os critérios de *Nyquist* (DANTAS, 2019). Afinal, o objetivo da solução é obter um sistema relativamente robusto, tendo como meta  $M_s = 1,66$ .

## Resultados da Otimização

Analisaremos comparativamente os parâmetros otimizados diretamente e observaremos os benefícios de realizar a busca pelo critério de robustez ou pelo índice de  $IAE$ . A ideia inicial é comparar os gráficos de *Nyquist* e as simulações do sistema, sobrepondo os resultados sumarizados na Tabela 5.1 também são mostrados os valores de margem de ganho (GM) e margem de fase (PM) para o sistema com os ganhos apresentados na tabela. Esses valores podem servir de ilustração para estabilidade do sistema, uma vez que da definição, a margem de ganho indica de quanto o ganho de um sistema pode ser aumentado até que este atinja a instabilidade OGATA (2009).

A Figura 5.2 apresenta a comparação dos diagramas para o exemplo 5.1.1, sendo que o diagrama que enfatiza a robustez do sistema tangencia a referência  $M_s$ , enquanto o diagrama otimizado para o  $IAE$  está próximo da circunferência e apresenta comportamento semelhante a outro diagrama.

A respeito da Figura 5.3, percebemos que o sistema estabilizado pelo critério do  $IAE$  é mais eficiente, apresentando um tempo de acomodação mais rápido, enquanto o sistema com ênfase na robustez tem uma resposta transitória mais lenta.

Figura 5.2: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.1

A partir da observação dos dados, é possível perceber os resultados advindos da função de *fitness*, definida na seção 4.2.4, que tenta considerar os dois parâmetros de busca. Nesse caso, estamos atribuindo a mesma importância à robustez e ao *IAE*, já que o valor do parâmetro alfa é 0,5.

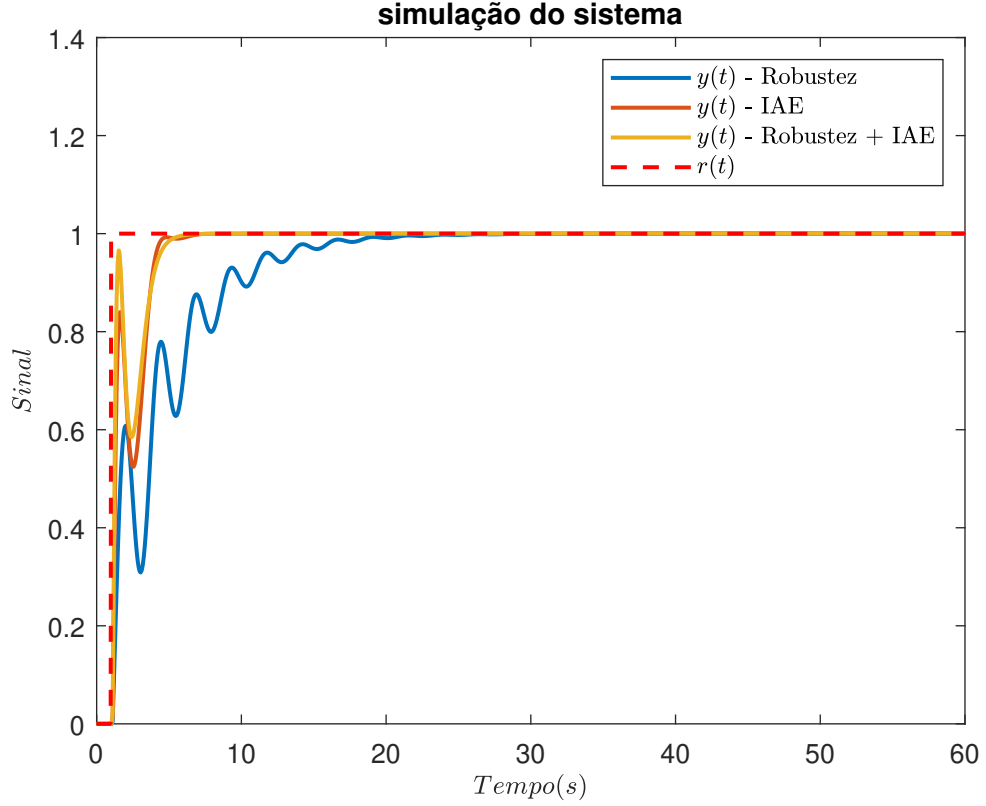
A Figura 5.2 revela que o diagrama de *Nyquist* apresenta uma pequena distância da referência  $M_s$ , mantendo sinais de um sistema mais robusto, sem perder a prioridade da eficiência. Essa situação difere quando realizamos a otimização apenas do *IAE*, de cujo raio de robustez estabelecido o diagrama tende a se afastar ainda mais.

Analisando a Figura 5.3, percebe-se que a combinação dos parâmetros resulta em uma melhoria geral em relação à simulação na qual a busca tentou otimizar apenas o índice *IAE*. Considera-se, também, a comparação com a simulação do trabalho base, a partir de DANTAS (2019).

### 5.1.2 Exemplo 2

Tendo em vista um exemplo prático, a fim de demonstrar a aplicação do método apresentado, conforme visto em RAM et al. (2011), podemos tomar as matrizes de massa, amortecimento e elasticidade como:

Figura 5.3: Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.1



Fonte: o autor (2023)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Assim, considerando o método apresentado em RAM et al. (2011), utilizaremos como exemplo prático uma matriz de entradas  $\mathbf{l} = \mathbf{b}^T = [0 \ 1]$  e uma constante de atraso  $\tau = 5s$ . Nesse caso, estamos lidando com um sistema não amortecido com autovalores de malha aberta sobre o eixo imaginário do plano  $s$ . Quando isso ocorre, pode ser difícil trabalhar com a resposta em frequência, uma vez que há uma descontinuidade nas frequências que coincidem com os autovalores do sistema no eixo imaginário. Para lidar com essa situação, a literatura de sistemas de controle, com base na teoria do mapeamento, sugere fazer uma pequena alteração no contorno do plano  $s$ , de modo a evitar os polos sobre o eixo  $j\omega$ . Em outras palavras, é necessário deslocar levemente os polos para a esquerda do eixo, a partir de uma pequena alteração em um dos elementos da matriz de amortecimento (OGATA, 2009). Nesse exemplo, a matriz  $\mathbf{C}$  é considerada.

Tabela 5.2: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.2

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$	$GM$	$PM$
Robustez + IAE	0,5145	0,2578	0,4004	7,3408	6,67 dB	-61,2 deg
Robustez	0,1774	0,2229	0,4433	10,0418	10,6 dB	-43,6 deg

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0,9999 \\ -0,9999 & 1 \end{bmatrix}$$

Novamente, a busca pela solução do problema descrito pela equação 3.19 é realizada para o círculo  $M_s = 1,6667$ .

### Resultados da Otimização

No caso do exemplo 5.1.2, por se tratar de um sistema mais complexo e, teoricamente, com maior dificuldade na sintonia dos ganhos do controlador, esses ganhos, assim como os índices  $IAE$  obtidos da simulação, estão apresentados na Tabela 5.2. A Figura 5.4 apresenta o diagrama de *Nyquist*. Nesse caso, é possível observar que, para o índice considerado, o *Nyquist* intersecta a circunferência, enquanto isso não ocorre como esperado, haja vista a busca pela robustez. Além disso, conseguimos obter um comportamento semelhante no diagrama, circulando o ponto  $0 + 0j$ .

A simulação do sistema na Figura 5.5 apresenta o comportamento desejado quando otimizado com o índice de Integral do Erro Absoluto. Nesse caso, nota-se que o sistema é mais eficiente quando o sistema otimizado com ênfase na robustez tem uma resposta transitória mais lenta.

No caso do resultado otimizando robustez mais o Integral do Erro Absoluto, nota-se que o gráfico de *Nyquist* na Figura 5.4 está próximo da circunferência de robustez  $M_s$ . Ademais, os resultados da simulação mostram eficiência, conforme evidenciado na Figura 5.5. Esses resultados são superiores aos obtidos nas simulações em que se otimiza apenas um parâmetro na busca do algoritmo *GA*.

### 5.1.3 Exemplo 3

Nesse caso específico, modificou-se um pouco o exemplo 5.1.2, para introduzir uma perturbação no modelo.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0.9 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Consideram-se uma matriz de entradas  $\mathbf{b}^T = \mathbf{1} = [0 \ 1]$  e uma constante de atraso  $\tau = 0,5$ .

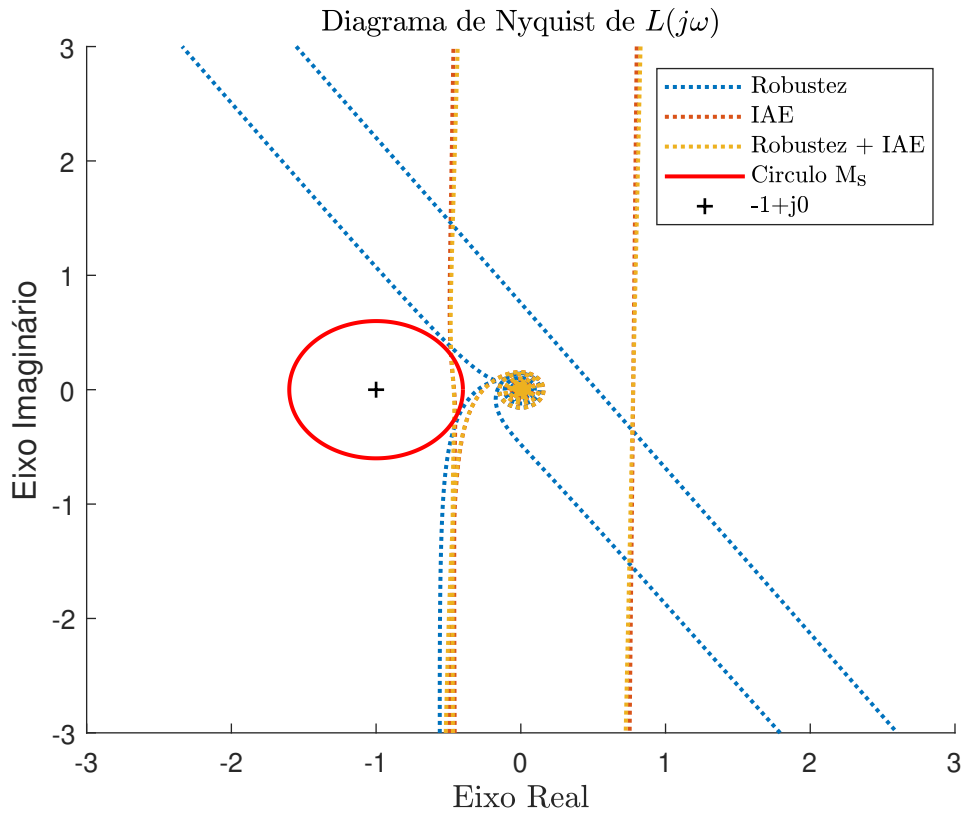
Figura 5.4: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.2

Tabela 5.3: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.3

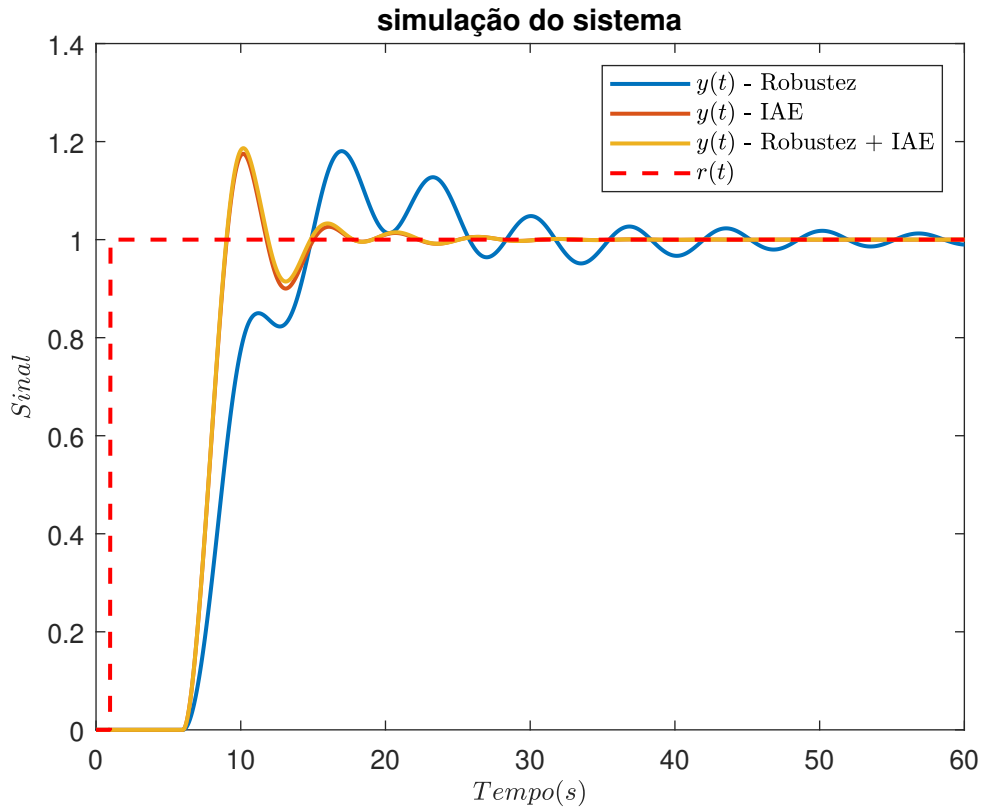
Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$	$GM$	$PM$
Robustez + IAE	0,4373	0,7548	1,8163	2,4390	5,86 dB	52,5 deg
Robustez	0,2399	1,0990	1,6015	6,4692	7,22 dB	54,2 deg

## Resultados da Otimização

No exemplo 5.1.3, os ganhos e os índices são evidenciados na Tabela 5.3, que demonstra o que podemos observar na Figura 5.6, em que há uma maior distância do diagrama em relação a ambas as otimizações. A partir da simulação do sistema na Figura 5.7, verificamos que a otimização do índice de  $IAE$  apresentou um tempo de acomodação menor em comparação com a otimização do critério de robustez.

Na Figura 5.7, podemos observar que a resposta transitória do sistema é menor em comparação com as simulações da otimização em apenas um dos parâmetros. Na Figura 5.6, a curva de *Nyquist* não se afasta muito da circunferência, o que indica que o sistema de controle continua eficiente em termos de robustez e tempo de acomodação, importantes para bons resultados em sistemas de controle (OGATA, 2009).

Figura 5.5: Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo



Fonte: o autor (2023)

### Resultados da perturbação no sistema

Nesse momento, simularemos uma perturbação do modelo, a fim de verificar quão robustos são os sistemas para o método proposto neste trabalho.

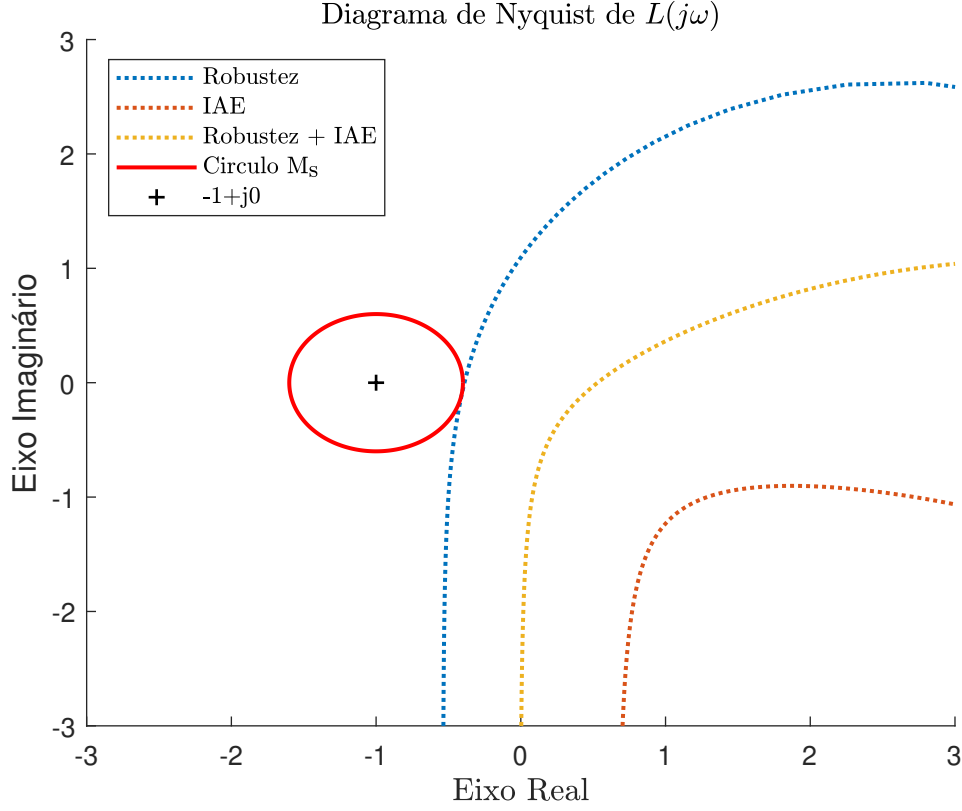
Para realizar a simulação da perturbação, analisa-se o sistema do exemplo 5.1.2, com ganhos obtidos da simulação. Assim, executa-se a simulação do exemplo 5.1.3, que representa uma perturbação no modelo, devido à variação da Matriz  $\mathbf{C}$ , considerando um exemplo para outro.

Conforme o método proposto nesta dissertação, observa-se um comportamento semelhante, consoante a Figura 5.8. Nela, apresenta-se uma acentuação dos resultados obtidos no exemplo 5.1.2, principalmente para o *Overshoot*, como pode se observar na Figura 5.9.

O sistema de segunda ordem, com atraso, permanece estável em malha fechada. Isso evidencia que a robustez é atenuada nesses métodos, mas sem perder a estabilidade e a robustez. Além disso, percebe-se que a perda da robustez é significativamente pequena, em relação aos ganhos de desempenho, adquiridos com a introdução da busca com concorrência.



Figura 5.6: Diagrama de Nyquist para o Exemplo 5.1.3



#### 5.1.4 Exemplo 4

Este exemplo explora a aplicação do método de sintonia em um sistema com atraso longo e restrição de robustez menos rígida. As matrizes do sistema são:

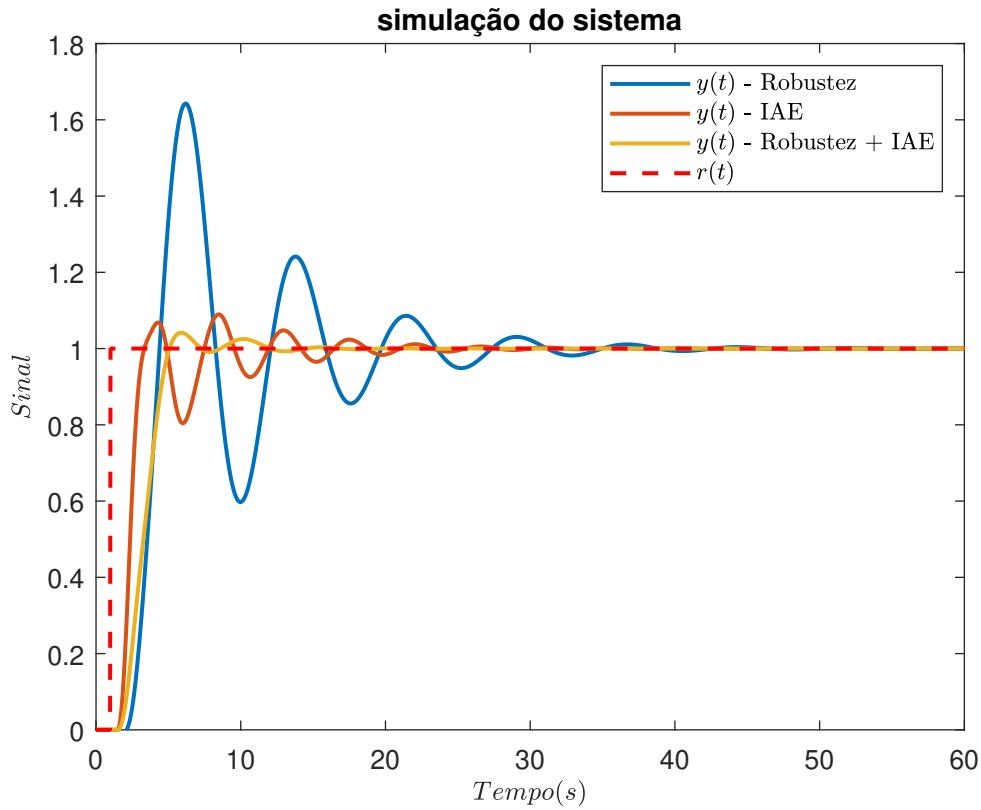
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dois casos são explorados nesse exemplo: o caso colocalizado - sensor e atuador juntos no mesmo grau de liberdade, ou seja,  $l = b^T$  - e o caso não colocalizado, em que a distribuição do sensor e do atuador é distinta.

Os parâmetros considerados são  $\tau = 5s$ ,  $\mathbf{l} = \mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $M_s = 2$ . Então, aplica-se o algoritmo de otimização, considerando a minimização de  $IAE$  e somente a minimização da distância ao círculo  $M_s$ .

Considere-se, a seguir, o caso não colocalizado, com  $\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Observa-se, pois, que as matrizes e os demais parâmetros são os mesmos do caso colocalizado.

Figura 5.7: Resposta no tempo para uma referência constante do Exemplo 5.1.3



Fonte: o autor (2023)

Tabela 5.4: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso colocalizado - Exemplo 5.1.4

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$	$GM$	$PM$
Robustez + IAE	0,5710	0,2829	0,4713	7,4872	6,01 dB	40,1 deg
Robustez	0,5193	0,2424	0,1804	7,9387	5,88 dB	-54,8 deg

## Resultados da Otimização

Os resultados para o caso colocalizado estão sumarizados na Tabela 5.4, em que se registam os ganhos dos controladores sintonizados e os valores do índice  $IAE$ . Os diagramas de *Nyquist* com otimização de desempenho e robustez, considerando somente robustez, encontram-se na Figura 5.10. Por sua vez, apresenta-se a resposta ao degrau para as duas sintonias na Fig. 5.11, na qual se evidencia o desempenho superior do método de sintonia proposto.

O controle de graus de liberdade no esquema não colocalizado representa um desafio maior que o caso colocalizado, pois, nesse último, a propriedade de alternância entre polos e zeros garante melhores margens (PREUMONT, 1997). Entretanto, com a técnica proposta, as margens mínimas estão garantidas. Na Figura 5.12, mostram-se os diagramas de *Nyquist* para as sintonias ótimas que consideram somente a robustez e a robustez

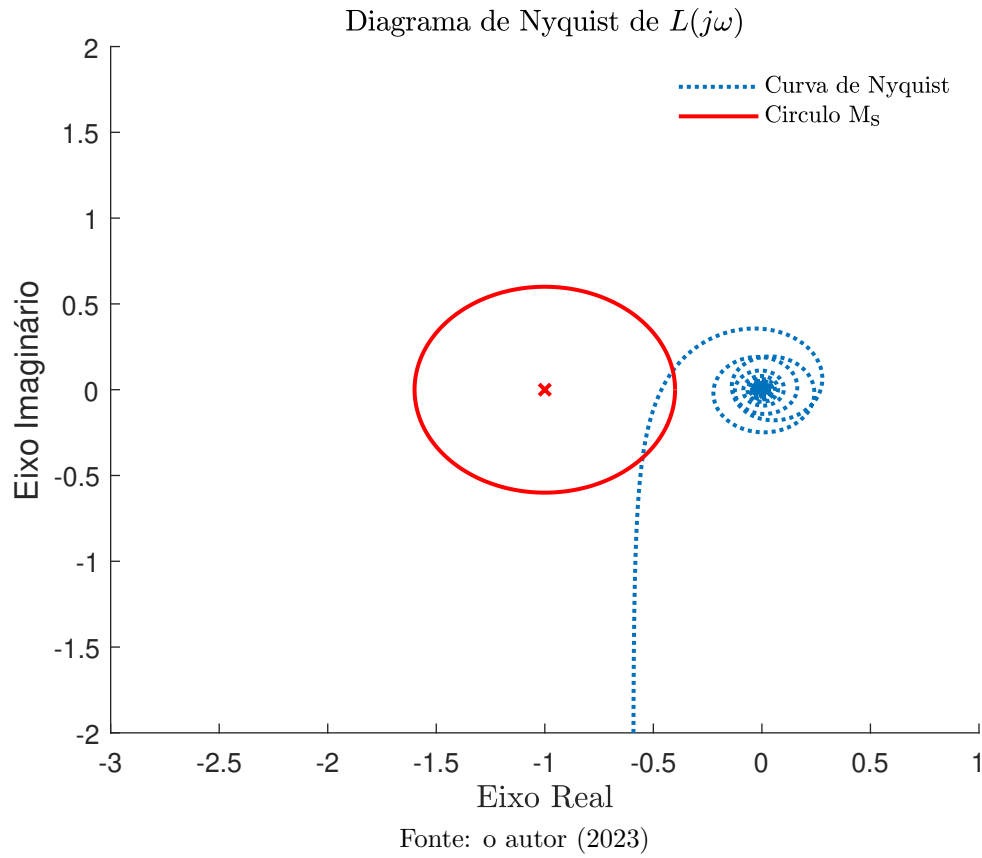
Figura 5.8: Diagrama de *Nyquist* com perturbação para o Exemplo 5.1.3

Tabela 5.5: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o caso não colocalizado (Exemplo 5.1.4)

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	$IAE$	$GM$	$PM$
Robustez + IAE	0,5878	0,3866	0,5382	7,2212	6,01 dB	51,1 deg
Robustez	0,5460	0,3437	0,5229	7,5067	6,5 dB	56,3 deg

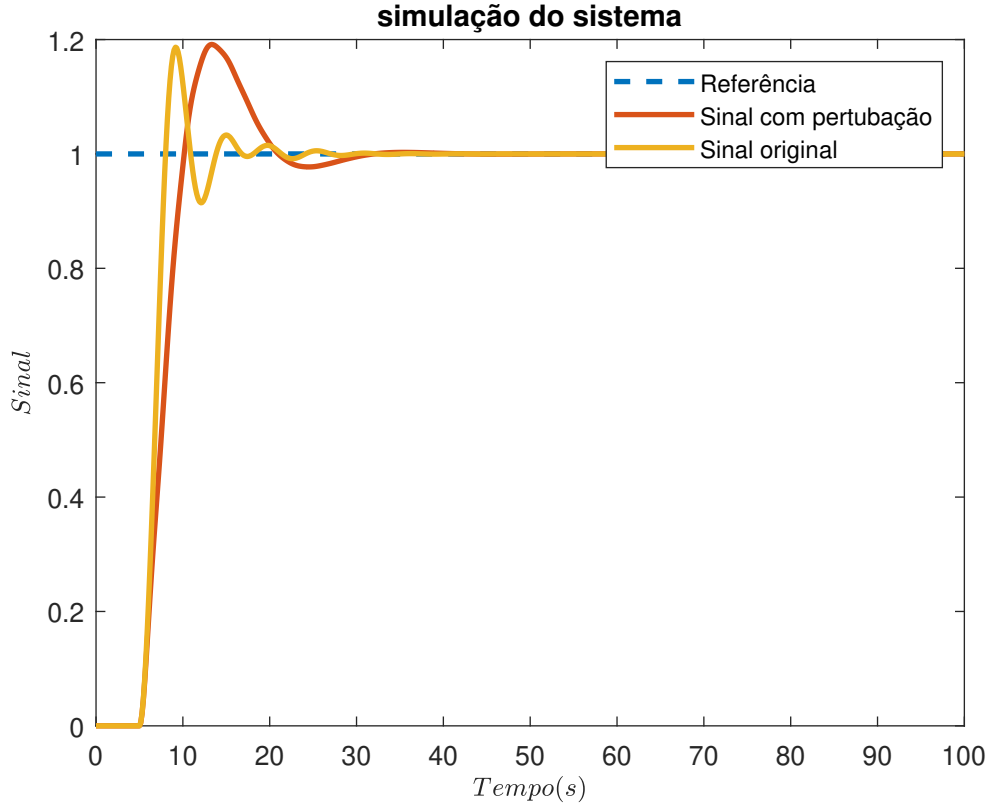
combinada com  $IAE$ . As respostas no domínio do tempo, ilustradas na Fig. 5.13, permitem comparar a sintonia com e sem a consideração do índice de desempenho. Ademais, os ganhos dos controladores sintonizados e os valores do índice  $IAE$  podem ser vistos na Tabela 5.5.

### 5.1.5 Exemplo 5

Este exemplo, adaptado de SHAPIRO (2005), aborda um caso instável em malha aberta, cujas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

Figura 5.9: Resposta no tempo para uma referência constante com perturbação do Exemplo 5.1.3



Fonte: o autor (2023)

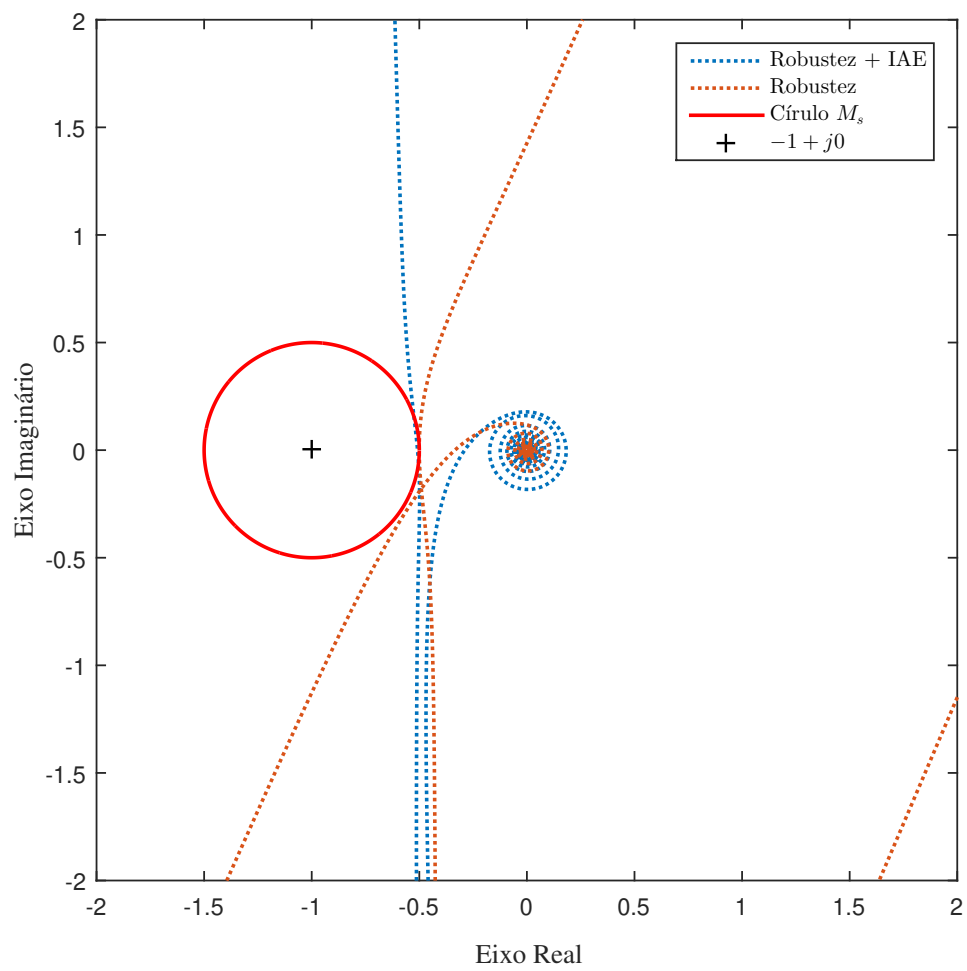
com  $\mathbf{b}^T = [-1 \ 1]$  e  $\mathbf{l} = [1 \ 0]$ , além de um atraso  $\tau = 0.5\text{s}$ . Para garantia de margens, é dado  $M_s = 1,6667$ . Nesse sistema dois polos de malha aberta, localizam-se no semiplano direito  $s_{1,2} = 0,0039 \pm j0,9$ . Da mesma forma que nos exemplos anteriores, projetam-se controladores PID, conforme o método proposto. Além disso, considera-se apenas o critério de robustez para fins de comparação.

### Resultados da Otimização

Na Figura 5.14, visualizam-se os diagramas de *Nyquist* obtidos. As respostas no tempo são comparadas na Figura 5.15. A Tabela 5.6 permite a comparação dos controladores projetados, sendo possível notar um desempenho melhorado em relação ao *IAE* com a aplicação do método proposto. Ademais, a estabilidade em malha fechada pode ser verificada no diagrama de *Nyquist* completo ( $\omega \in \mathbb{R}$ ), com visão expandida. Logo, é possível constatar os dois envoltimentos requeridos do ponto crítico  $-1 + j0$ .

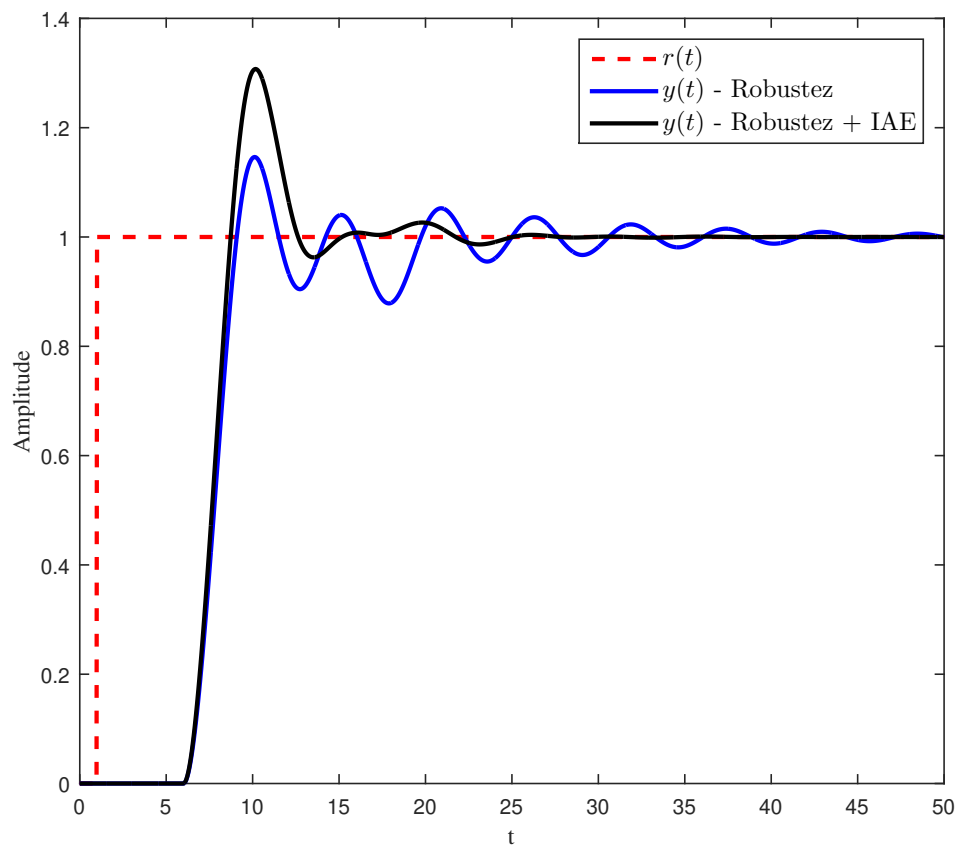
Tabela 5.6: Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Exemplo 5.1.5

Sintonia	$k_p$	$k_i$	$k_d$	<i>IAE</i>	<i>GM</i>	<i>PM</i>
Robustez + IAE	-4,4787	-3,3738	-11,1194	2,6374	8.69 dB	33.5 deg
Robustez	-2,1975	-4,3664	-10,8658	3,5080	9.4 dB	38.1 deg

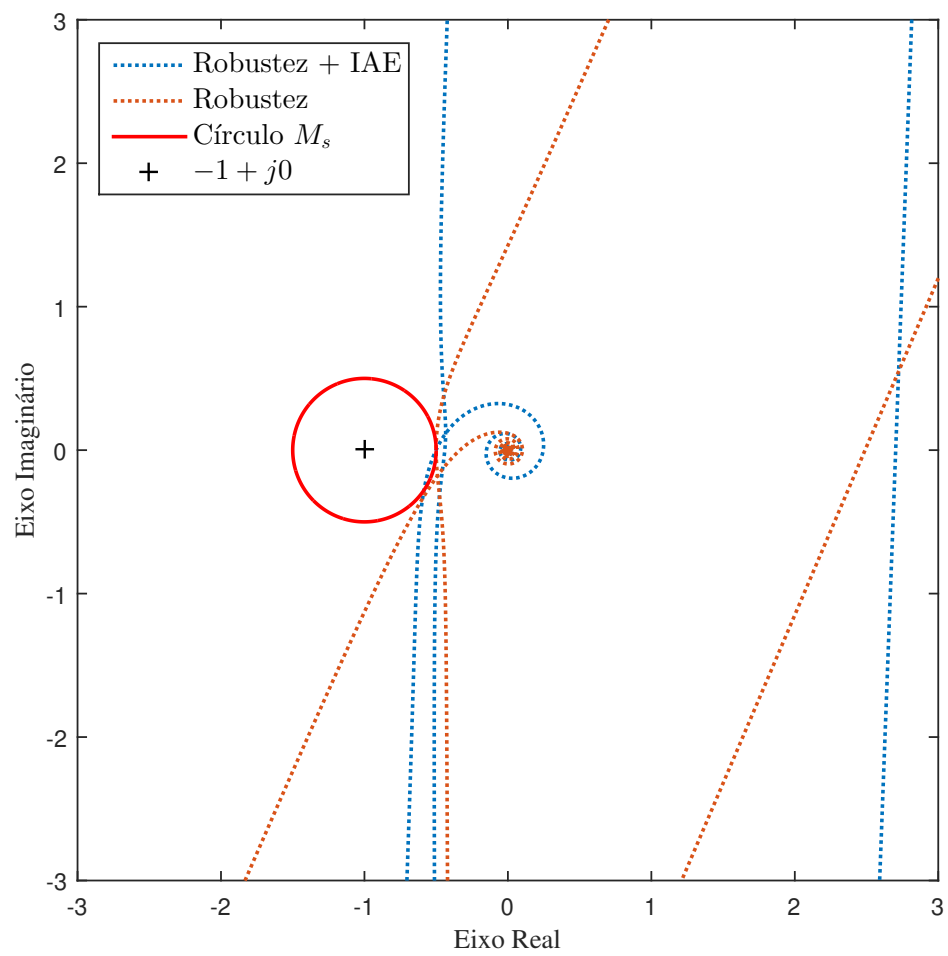
Figura 5.10: Diagrama de *Nyquist* para o caso colocalizado (Exemplo 5.1.4)

Fonte: o autor (2023)

Figura 5.11: Resposta no tempo para uma referência constante do caso colocalizado (Exemplo 5.1.4)

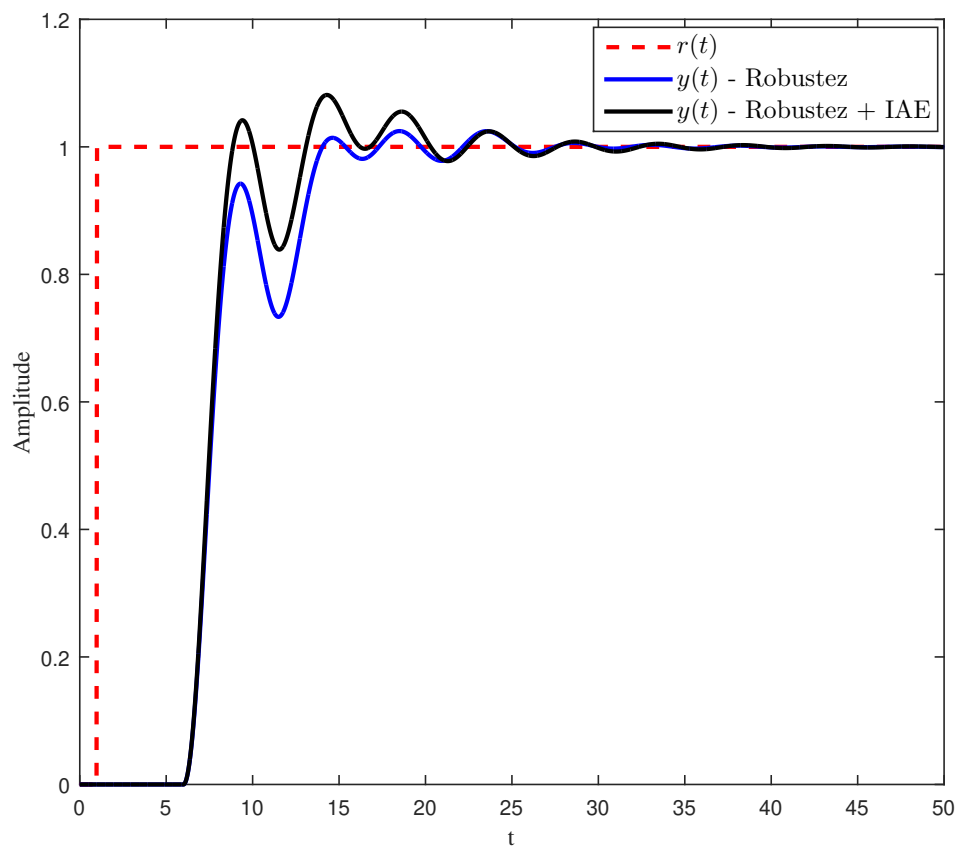


Fonte: o autor (2023)

Figura 5.12: Diagrama de *Nyquist* para o de caso não colocalizado (Exemplo 5.1.4)

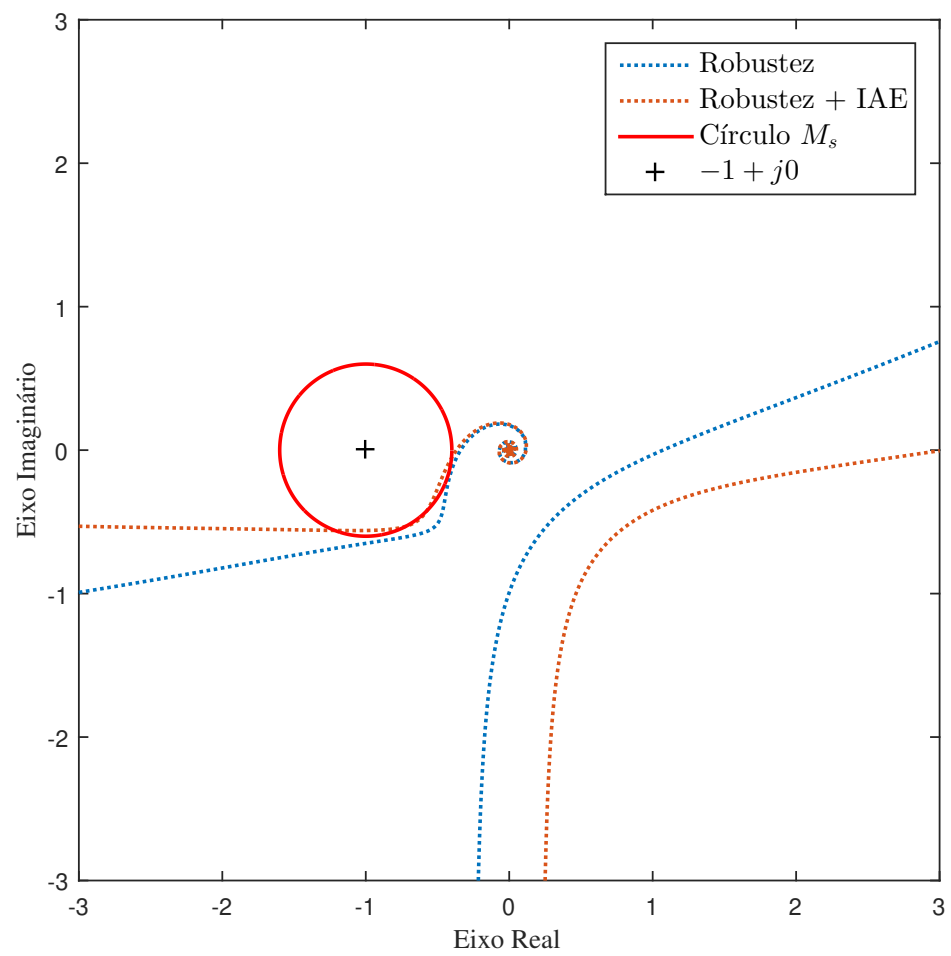
Fonte: o autor (2023)

Figura 5.13: Resposta no tempo para uma referência constante para o caso não colocalizado (Exemplo 5.1.4)

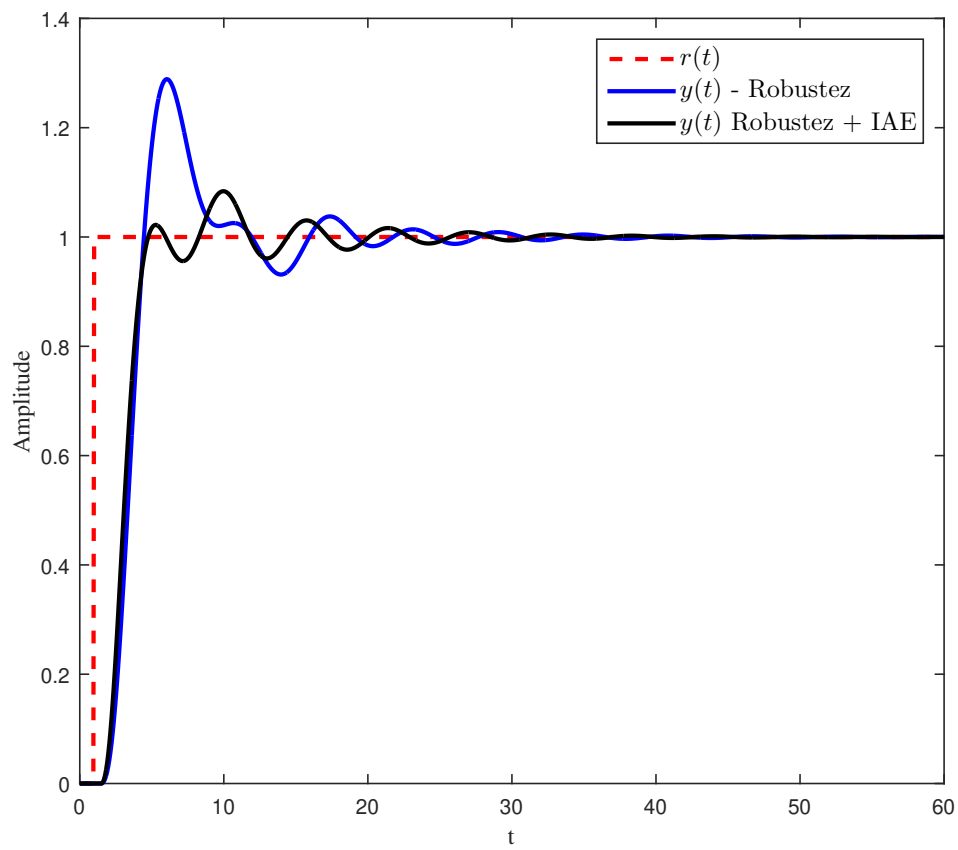


Fonte: o autor (2023)



Figura 5.14: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.5

Fonte: o autor (2023)

Figura 5.15: Diagrama de *Nyquist* para o Exemplo 5.1.5

Fonte: o autor (2023)

---

## Capítulo 6

# CONCLUSÃO

---

Neste trabalho, em síntese, foram propostas soluções para o problema de controle de sistemas de segunda ordem com atraso por meio do uso de um controlador *PID*. Diante disso, percebeu-se que uma alternativa interessante para lidar com sistemas mais complexos é a utilização da representação dos sistemas de segunda ordem com atraso por meio de uma matriz de receptância obtida (DANTAS, 2019). Para os vetores de ganho do controlador *PID*, o problema de controle foi expresso como um problema de otimização matemática. Nesse caso, o objetivo foi encontrar ganhos que atendam, de forma satisfatória, tanto à restrição do problema de otimização, que é a estabilidade robusta do sistema, quanto ao critério do projeto, em relação ao desempenho do sistema, medido pelo índice de *IAE*.

Por meio de experimentos numéricos, constatou-se que a robustez e a otimização do índice do *IAE* apresentam comportamentos que competem entre si. Ou seja, não é possível otimizar a Integral do Erro Absoluto sem prejudicar a robustez do sistema. Por isso, foi necessário desenvolver um método que visasse melhorar ambos os aspectos de forma equilibrada.

A utilização do algoritmo genético e de suas modificações, como a medição da variabilidade genética e o tratamento para que o *GA* conseguisse lidar com sistemas instáveis em malha aberta, mostrou-se importante não somente para a redução no número de iteração do algoritmo, mas para o desenvolvimento de uma solução para sistema de segunda ordem com atraso genérico que conseguisse encontrar ganhos do controlador proporcional, integral e derivativo para sistemas estáveis e instáveis.

Os resultados apresentados no capítulo 5 mostram que o método proposto, que tem em vista otimizar ambos os parâmetros, apresenta resultados mais satisfatórios do que a busca de algoritmos com apenas um parâmetro. Além disso, foi possível obter resultados superiores em relação a trabalhos anteriores desse mesmo grupo, como os estudos realizados por DANTAS (2019) e NUNES (2022), com melhor tempo de acomodação e *Overshoot*.

Existem outras propostas de interesse acadêmico que podem ser abordadas em trabalhos futuros, como a aplicação em sistemas multivariáveis com atraso. Além disso, o

uso de outras meta-heurísticas, como o Algoritmo de Enxame de Partículas (*PSO*), pode ser explorado para buscar resultados diferentes e, possivelmente, melhorias no controle desses sistemas.

---

# Referências Bibliográficas

---

- ABDELAZIZ, THS e M VALÁŠEK (2004), ‘Pole-placement for siso linear systems by state-derivative feedback’, *IEE Proceedings-Control Theory and Applications* **151**(4), 377–385.
- ARAÚJO, José Mário (2018a), ‘Discussion on ‘state feedback control with time delay’’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **98**, 368–370.
- ARAÚJO, José Mário (2018b), ‘Partial eigenvalue assignment in linear time-invariant systems using state-derivative feedback and a left eigenvectors parametrization’, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering* p. 0959651818811010.
- ARAÚJO, José Mário e Tito Luís Maia SANTOS (2018), ‘Control of a class of second-order linear vibrating systems with time-delay: Smith predictor approach’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **108**, 173–187.
- ASTROM, Karl J (1995), ‘Pid controllers: theory, design, and tuning’, *The International Society of Measurement and Control*.
- BALAS, Mark (1982), ‘Trends in large space structure control theory: fondest hopes, wildest dreams’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **27**(3), 522–535.
- BARATIERI, Larissa A, FÁBIO RENAN DURAND, VINÍCIUS SUTERIO, CRISTIANO MARCOS AGULHARI, BRUNO AUGUSTO ANGÉLICO e BRUNO LG COSTA (2019), Sintonia adaptativa de controladores pid utilizando otimização por enxame de partículas/mapas caóticos, em ‘Congresso Brasileiro de Automática-CBA’.
- DANTAS, N. J. B. (2019), Projeto de controladores para sistemas de segunda ordem com atraso via resposta em frequência., Dissertação (mestrado) — Mestrado em Engenharia Mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- DANTAS, Nelson J. B., Carlos E. T. Dorea e Jose M. Araujo (2021), ‘Partial pole assignment using rank-one control and receptance in second-order systems with time delay’, *Meccanica* **56**(2), 287–302.  
**URL:** <https://doi.org/10.1007/s11012-020-01289-w>
- DANTAS, Nelson J.B., Carlos E.T. Dórea e José M. Araújo (2020a), ‘Design of rank-

- one modification feedback controllers for second-order systems with time delay using frequency response methods', *Mechanical Systems and Signal Processing* **137**, 106404. Special issue on control of second-order vibrating systems with time delay.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327019306259>
- DANTAS, Nelson J.B., Carlos E.T. Dórea e José M. Araújo (2020b), 'Design of rank-one modification feedback controllers for second-order systems with time delay using frequency response methods', *Mechanical Systems and Signal Processing* **137**, 106404.
- DATTA, BISWA (2004), *Numerical methods for linear control systems*, Vol. 1, Academic Press.
- FRANKLIN, Gene F, J David Powell e Abbas Emami-Naeini (2013), *Sistemas de controle para engenharia*, Bookman Editora.
- GOLDBERG, David E e John H HOLLAND (1988), 'Genetic algorithms and machine learning', *Machine learning* **3**(2), 95–99.
- GONTIJO, Danielle S, José M Araújo, Tito LM SANTOS e Fernando O Souza (2022), 'Proportional-integral-derivative-acceleration robust controllers for vibrating systems', *Journal of Vibration and Control* p. 10775463211060898.
- MARTINS, José KEC, Fábio MU Araújo e Carlos ET Dórea (2020), Um método baseado em otimização para sintonia de controladores pi para sistemas sujeitos a restrições, em 'Anais do Congresso Brasileiro de Automática-CBA'.
- MATHWORKS. (2019), 'Genetic algorithm - matlab & simulink'.  
**URL:** <https://www.mathworks.com/help/gads/genetic-algorithm.html>
- MOTTERSHEAD, John E e Yitshak M RAM (2007), 'Receptance method in active vibration control', *AIAA journal* **45**(3), 562–567.
- NUNES, Leonardo A, Nelson JB Dantas, Carlos ET Dórea e José M Araújo (2021), Controle por realimentação derivativa de estados de sistemas dinâmicos de segunda ordem com atraso, em 'Anais do Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente-SBAI'.
- NUNES, Leonardo Araújo (2022), Controle por realimentação derivativa para sistemas dinâmicos de segunda ordem com atraso, Dissertação (mestrado) — Mestrado em Engenharia Mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- OGATA, Katsuhiko (2009), *Modern control engineering*, Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.
- OLIVEIRA, Juan Carlos Pereira de (2016), COMPARAÇÃO DE CONTROLADOR PID COM GANHO VARIANTE NO TEMPO E CONTROLADOR PID COM GANHO FIXO, Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

- PREUMONT, André (1997), *Vibration Control of Active Structures*, Springer Netherlands.
- URL:** <https://doi.org/10.1007/978-94-011-5654-7>
- RAM, YM, Akshay SINGH e John E MOTTERSHEAD (2009), ‘State feedback control with time delay’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**(6), 1940–1945.
- RAM, YM, JE Mottershead e M Ghandchi TEHRANI (2011), ‘Partial pole placement with time delay in structures using the receptance and the system matrices’, *Linear Algebra and its Applications* **434**(7), 1689–1696.
- REGO, Everton JC, Carlos ET Dórea e Andre L Maitelli (2017), ‘Ressintonia automática de controladores pi embarcados em clp, baseada em estimativa de robustez’, *XIII Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente* pp. 1733–1738.
- RICHIDEI, Dario, Iacopo Tamellin e Alberto Trevisani (2022), ‘Pole-zero assignment by the receptance method: multi-input active vibration control’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **172**, 108976.
- SANTOS, Tito LM, José Mário Araújo e Taniel S Franklin (2018), ‘Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay’, *Mechanical Systems and Signal Processing* **110**, 428–441.
- SHAPIRO, Amir (2005), ‘Stability of second-order asymmetric linear mechanical systems with application to robot grasping’, *Journal of Applied Mechanics* **72**, 966–968.
- SINGH, Kumar Vikram, Charlene Black e Raymond Kolonay (2019), ‘Active aeroelastic output feedback control with partial measurements by the method of receptances’, *Aerospace Science and Technology* **86**, 47–63.
- SKOGESTAD, Sigurd e Ian POSTLETHWAITE (2007), *Multivariable feedback control: analysis and design*, Vol. 2, Wiley New York.
- SOUZA; CARVALHO, Jhonat Heberon Avelino CARVALHO, Elton José Figueiredo de (2020), ‘Implementação e avaliação de algoritmos genéticos e de enxame no ajuste de campos de força em dinâmica molecular’, *Anais do XXXI Congresso de Iniciação Científica e Tecnológica da UFRN - eCICT 2020* pp. 1604–1605.
- TEHRANI, Maryam Ghandchi, Robin NR Elliott e John E Mottershead (2010), ‘Partial pole placement in structures by the method of receptances: theory and experiments’, *Journal of Sound and Vibration* **329**(24), 5017–5035.
- VANDERVELDE, Wallace E (1986), ‘Control of large flexible space structures’.