

Projeto de Controlador PID para Sistemas de Segunda Ordem com Atraso via Resposta em Frequência

Jhonat Heberson Avelino de Souza *
Prof. Dr. Carlos Eduardo Trabuco Dórea **
Prof. Dr. José Mário Araújo ***

* Faculdade de Engenharia Mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, RN, (e-mail: jhonat.souza.014@ufrn.edu.br).

** Faculdade de Engenharia Mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, RN (e-mail: cetdorea@gmail.com)

*** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, BA, (e-mail: prof.jomario@gmail.com)

Abstract:

The mathematical description of phenomena such as mechanical vibrations, resonance, and oscillations through second-order differential equation systems. The frequency response approach is an alternative to overcome the difficulties of measuring parameters, allowing for the explicit treatment of delay. The objective is to develop a receptance-based method for robust tracking of delayed second-order system references, using PID-type controllers, and evaluate the effectiveness of the technique through numerical simulations. The work proposes that the robustness conditions be extended to this type of controller and analyzed for the single-input case.

Resumo: A descrição matemática de fenômenos como vibrações mecânicas, ressonância e oscilações por meio de sistemas de equações diferenciais de segunda ordem. A abordagem por resposta em frequência é uma alternativa para contornar as dificuldades de medição de parâmetros, permitindo tratar o atraso de forma explícita. O objetivo é desenvolver um método baseado em receptância para o rastreamento robusto de referências de sistemas de segunda ordem com atraso, usando controladores do tipo PID, e avaliar a eficácia da técnica por meio de simulações numéricas. O trabalho propõe que as condições de robustez sejam estendidas a esse tipo de controlador e analisadas para o caso monovariável.

Keywords: Second Order Systems, Delayed Systems, Receptance Matrix, Genetic Algorithm..

Palavras-chaves: Sistemas de Segunda Ordem, Sistemas com Atraso, Matriz de Receptância, Algoritmo Genético.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas de segunda ordem, que são sistemas físicos modelados por equações diferenciais de segunda ordem, amplamente encontrados em diversas áreas, desde a engenharia até a física e a biologia. Uma diversidade de fenômenos físicos, a exemplo da ressonância em sistemas vibratórios, vibroacústicos e elétricos, é ricamente representada por meio de modelos dinâmicos de segunda ordem BALAS (1982); VANDERVELDE (1986). O estudo desses sistemas é fundamental para a compreensão de uma ampla gama de fenômenos naturais e artificiais. Modelos matemáticos que representam esses sistemas podem ser escritos como um sistema matricial de equações diferenciais de segunda ordem.

Inspirado na possibilidade de medir experimentalmente modelos de sistemas de segunda ordem, demonstrada pela

eliminação da necessidade de aproximações de atraso. Ao definir matematicamente o problema de controle como um problema de otimização dos ganhos do controlador.

Nos últimos anos, alguns trabalhos correlatos a este foram desenvolvidos, entre eles ARAÚJO and SANTOS (2018); ARAÚJO (2018a,b); SANTOS et al. (2018); DANTAS (2019); DANTAS et al. (2020); MARTINS et al. (2020); NUNES (2022); GONTIJO et al. (2022).

Neste artigo apresenta um método de projeto de controle usando um controlador PID, seguidor de referência baseado em critério de estabilidade de *Nyquist*. O objetivo é otimizar o índice de Erro Absoluto Integral (*IAE*) juntamente com a robustez do sistema. O método é aplicado em sistemas de segunda ordem com atraso, não exigindo técnicas de alocação de polos. O uso do índice de *IAE* como parâmetro de busca para Algoritmo Genético (*GA*) é importante para aumentar a eficiência do sistema.

* Reconhecimento do suporte financeiro deve vir nesta nota de rodapé.

2. DEFINIÇÕES

Método da Receptância, uma técnica utilizada na engenharia estrutural para analisar e controlar sistemas dinâmicos complexos, representando um sistema de segunda ordem como um sistema de primeira ordem com múltiplos graus de liberdade. O método é baseado na ideia de que um sistema de segunda ordem pode ser representado por um sistema de primeira ordem com múltiplos graus de liberdade, sendo que cada grau de liberdade representa a resposta do sistema a uma determinada força ou excitação externa. A receptância é uma medida da relação entre a resposta do sistema e a excitação externa em cada grau de liberdade.

Importância da determinação das matrizes de rigidez, massa e amortecimento na análise dinâmica de sistemas, sendo que a determinação da matriz de amortecimento é menos desafiadora do que as outras matrizes e pode ser estimada pela regra de *Rayleigh* MOTTERSHEAD and RAM (2007).

A resposta em frequência como um método clássico de controle para lidar com a incerteza nos modelos das plantas e facilitar o uso de informações experimentais, e o critério de estabilidade de Nyquist, que determina a estabilidade do sistema com base na resposta em frequência de um sistema em malha aberta FRANKLIN et al. (2013).

O Controlador Proporcional Integrativo Derivativo (PID), que une as ações proporcional, integral e derivativa num só controlador, atuando tanto no regime transitório quanto no regime permanente, e sobre o índice IAE, que gera respostas mais lentas do que o ISE e é definido como integral do módulo do erro atuante.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

sistema matricial de equações diferenciais de 2º grau que é frequentemente utilizado em análises estruturais e de vibrações. O sistema é representado por várias matrizes, incluindo uma matriz de massas, uma matriz de amortecimento, uma matriz de rigidez e uma matriz de controle. O vetor de estado do sistema representa o deslocamento e o vetor de entrada representa as entradas. A matriz de massas é geralmente definida positiva, enquanto a matriz de amortecimento é pelo menos semi definida positiva e a matriz de rigidez é também semi definida positiva na maior parte das vezes.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t - \tau) \quad (1)$$

A saída do sistema definida como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{e}(t - \tau)\mathbf{l}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

Considere-se o monovariável, ou seja, $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$.

e erro do sistema é definido como:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3)$$

Assume-se a lei de controle por realimentação de estados como:

$$u(t - \tau) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (4)$$

em que k_p, k_i e $k_d \in \mathbb{R}$ são os vetores de ganho do controlador. Substituindo a equação (4) na equação (1) e realizando os procedimentos apresentados na seção ??.

Considerando:

$$V(s) = q(s)R(s), \text{ com } q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$$

$$U(s) = -(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)e^{-\tau s}lX(s) + V(s) \quad (5)$$

$$(Ms^2 + Cs + K + e^{-\tau s}q(s)lB)X(s) = V(s) \quad (6)$$

$$x(s) = (Ms^2 + Cs + K + e^{-\tau s}q(s)lB)^{-1}V(s) \quad (7)$$

aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison*, chega-se a matriz de receptância dada por:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{\mathbf{H}(s)(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)l\mathbf{H}(s)Be^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)l\mathbf{H}(s)Be^{-\tau s}} \quad (8)$$

Trabalhos relacionados ao controle em malha fechada aplicados a sistemas de segunda ordem têm ganhado cada vez mais notoriedade devido a sua relevância prática.

3.1 Parâmetro de projeto

O uso das margens de ganho e de fase como parâmetros de projeto de controladores em resposta em frequência. Essas margens são frequentemente usadas para fornecer referências indiretas para o controle de sistemas via resposta em frequência. No entanto, para sistemas com mais de um grau de liberdade, as margens de estabilidade nem sempre são medidas precisas de estabilidade.

As margens de ganho e de fase como parâmetros de projeto de controladores por resposta em frequência, que fornecem boas referências para o controle de sistemas via resposta em frequência. No entanto, para sistemas com mais de um grau de liberdade, essas margens não são medidas de estabilidade muito precisas. Portanto, é importante definir medidas que garantam estabilidade, como a distância entre o ponto $(-1, 0)$ e o diagrama de Nyquist do ganho de malha do sistema SKOGESTAD and POSTLETHWAITE (2007). A ideia é definir uma circunferência de raio M_s^{-1} centrada no ponto $-1 + j0$ para delimitar a região onde o traçado de *Nyquist* é permitido, garantindo uma distância segura do ponto $(-1, 0)$ e ilustrando a ideia de sistema robusto.

A definição do parâmetro de projeto para garantir estabilidade robusta em sistemas de controle. É proposto o uso da circunferência M_s como uma região segura para o traçado do diagrama de Nyquist, com o objetivo de manter o ponto $(-1, 0)$ a uma distância segura de $L(j\omega_i)$. O parâmetro de projeto é definido como a distância mínima entre a curva de $L(j\omega_i)$ e a circunferência M_s , que deve ser otimizada para garantir a estabilidade robusta do sistema. O texto destaca a importância de equilibrar a distância mínima desejada com a necessidade de respostas rápidas.

$$\min_{k_p, k_i, k_d} h(k_p, k_i, k_d) = \left(\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \quad (9)$$

$$s.a. L(j\omega_i) = (k_p + \frac{k_i}{j\omega_i} + k_d j\omega_i) l \mathbf{H}(j\omega_i) B e^{-j\omega_i \tau}$$

$$\text{Re}\{L(j\omega_i)\} \geq -1 + M_s^{-1} \quad \forall \quad \omega_i / \text{Im}\{L(j\omega_i)\} \neq 0 \quad (10)$$

O problema de otimização que busca garantir a estabilidade robusta de um sistema, mantendo o ponto $(-1, 0)$ a uma distância segura de $L(j\omega_i)$. A solução proposta é fazer com que a curva de $L(j\omega_i)$ tangencie a circunferência de raio M_s^{-1} , estabelecida como parâmetro de projeto, e isso é formulado como um problema de minimização da função quadrática $h(k_p, k_i, k_d)$. A menor distância entre $L(j\omega_i)$ e o ponto $(-1, 0)$ é definida como a menor distância entre $L(j\omega_i)$ e a circunferência de raio M_s^{-1} .

4. PRINCIPAIS RESULTADOS

O estudo analisa a eficácia do controlador PID em sistemas de segunda ordem com atraso estáveis em malha aberta, utilizando dois parâmetros de busca: robustez do sistema e índice de *IAE*. Os resultados das otimizações são apresentados neste artigo que compara os resultados da otimização da robustez do sistema e do índice de *IAE*, mostrando que esses parâmetros são mutuamente exclusivos e é difícil obter um sistema altamente robusto e eficiente ao mesmo tempo. Também é buscado um equilíbrio para otimizar tanto a robustez quanto o índice de *IAE*, a fim de obter um controlador ideal que possa manter a estabilidade e o tempo de acomodação mesmo em situações de perturbações no sistema.

4.1 Exemplos Numericos

A utilização de exemplos baseados em literatura de sistemas de controle para analisar a eficácia do método proposto em sistemas de controle de segunda ordem com atraso OGATA (2009).

Exemplo 1 Um exemplo clássico de um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, é definido para $\mathbf{M} = 1$, $\mathbf{C} = 0,01$, $\mathbf{K} = 5$, $\mathbf{B} = 1$ e $\tau = 0,1$ como no Exemplo 2 de RAM et al. (2009). com o objetivo de encontrar valores de K_p , K_i e K_d que garantam a estabilidade do sistema. O método proposto neste trabalho se concentra na otimização dos parâmetros com base no diagrama de Nyquist do ganho de malha do sistema $L(j\omega)$, considerando os conceitos de estabilidade de Nyquist, com o objetivo de obter um sistema relativamente robusto, com $M_s = 1,66$ como meta.

Exemplo 2 a aplicação do método apresentado em RAM et al. (2011) em um exemplo prático, utilizando matrizes de massa, amortecimento e elasticidade, juntamente com uma matriz de entrada $\mathbf{B}' = \mathbf{I}' = [0 \ 1]$ e uma constante de atraso $\tau = 5$. O objetivo é resolver a equação para obter um sistema relativamente robusto, com um círculo de margem de ganho e fase específico ($M_s = 1,6667$).

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0,9999 \\ -0,9999 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3 Neste caso específico, foi feita uma pequena modificação do Exemplo 2, com o objetivo de introduzir uma perturbação no sistema.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -0,9 \\ -0,9 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Para uma matriz de entradas $\mathbf{B}' = \mathbf{I}' = [0 \ 1]$, e uma constante de atraso $\tau = 0,5$.

4.2 Resultados

Nesta seção, faremos uma análise comparativa dos parâmetros otimizados diretamente e observaremos os benefícios de realizar a busca pelo critério de robustez ou pelo índice de *IAE*. A ideia inicial é comparar os gráficos de *Nyquist* e as simulações do sistema, sobrepondo os resultados. Além disso, foi desenvolvido um método capaz de buscar um equilíbrio entre esses dois parâmetros de busca, e realizaremos uma simulação com perturbação no sistema para validar sua robustez.

Com o objetivo de comparar os ganhos resultantes de cada parâmetro otimizado, efetuamos o cálculo da variância entre o ganho obtido a partir da otimização da robustez e aquele proveniente do índice que considera o módulo do erro. Os resultados dessa comparação foram apresentados na Tabela 1, permitindo-nos avaliar como cada um desses parâmetros afeta os ganhos.

Exemplo	Δk_p	Δk_i	Δk_d	Robustez	IAE
1	0,0085	5,0717	1,8727	0,1536	1,0622
2	0,0569	0,0004	0,0008	0,0001	7,3368
3	1,9370	0,0007	0,0776	0,3148	2,2072

Tabela 1. Tabela de Variação dos Ganhos do PID - Comparação da Otimização de *IAE* com robustez

Após analisar a Tabela 1, é perceptível que no Exemplo 2, a variação nos ganhos é baixa, o que era esperado devido ao comportamento semelhante no diagrama de Nyquist. No entanto, para os Exemplos 1 e 3, há uma variação maior, especialmente no ganho integral e proporcional.

Resultado exemplo 1 A Figura 1 apresenta a comparação dos diagramas para o Exemplo 1, sendo que o diagrama que enfatiza a robustez do sistema tangencia a referência M_s , enquanto que o diagrama otimizado para o *IAE* está próximo à circunferência e apresenta comportamento semelhante a outro diagrama.

A respeito da Figura 2, percebemos que o sistema estabilizado pelo critério do *IAE* é mais eficiente, apresentando um tempo de acomodação mais rápido, enquanto o sistema com ênfase na robustez tem uma resposta transitória mais lenta.

Resultado exemplo 2 No caso do Exemplo 2, por se tratar de um sistema mais complexo e, teoricamente, com maior dificuldade na sintonia dos ganhos do controlador, a Figura 3 apresenta o diagrama de *Nyquist*. Neste caso, é possível observar que, para o índice considerado, o *Nyquist* intersecta a circunferência, enquanto que, para a busca pela robustez, isso não ocorre, como esperado. Além

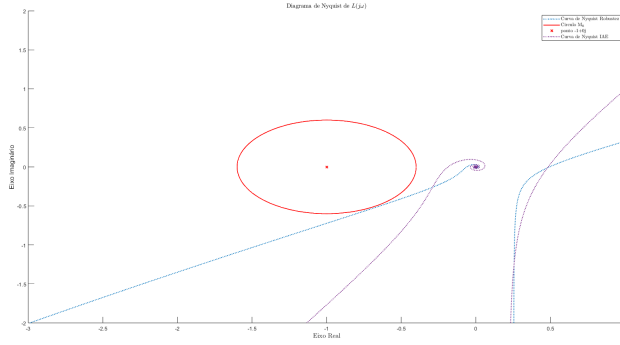


Figura 1. Comparação do diagrama de *Nyquist* do Exemplo 1

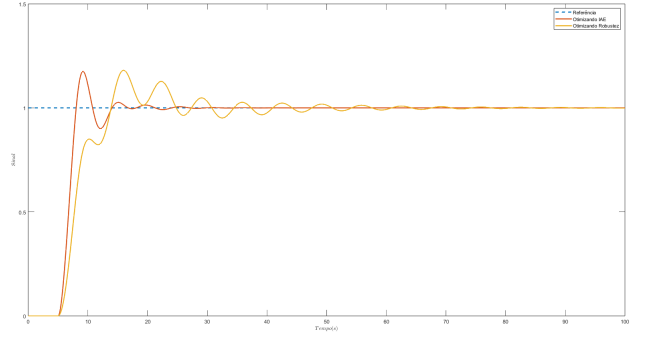


Figura 4. Comparação da simulação do Sistema do Exemplo 2

de *IAE* apresentou um tempo de acomodação menor em comparação com a otimização do critério de robustez.

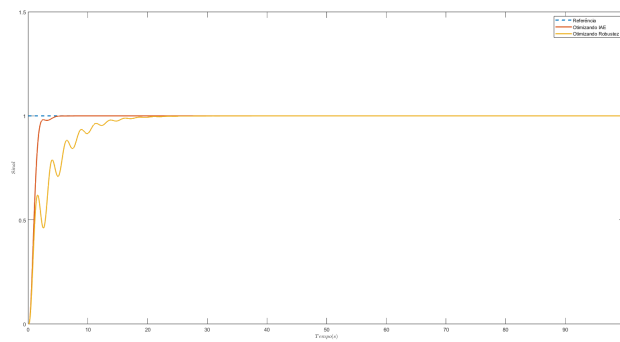


Figura 2. Comparação da simulação do Sistema do Exemplo 1

disso, conseguimos obter um comportamento semelhante no diagrama, circulando o ponto $0 + 0j$.

A simulação do sistema na Figura 4 apresenta o comportamento desejado quando otimizado com o índice de Integral do Erro Absoluto, sendo notável que o sistema é mais eficiente, enquanto que o sistema otimizado com ênfase na robustez tem uma resposta transitória mais lenta.

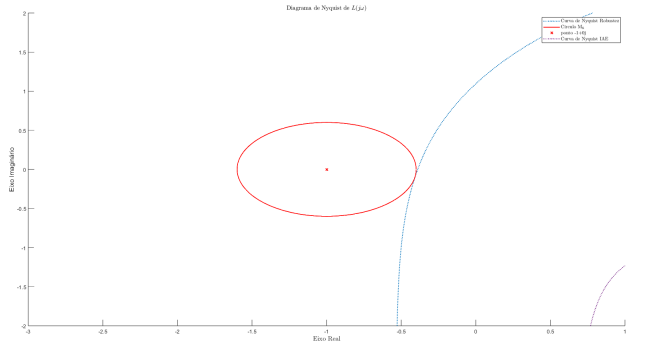


Figura 5. Comparação do diagrama de *Nyquist* do Exemplo 3

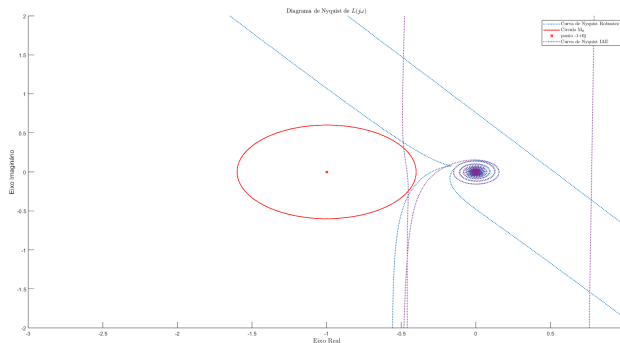


Figura 3. Comparação do diagrama de *Nyquist* do Exemplo 2

Resultado exemplo 3 No Exemplo 3, podemos observar na Figura 5 que há uma maior distância do diagrama em relação a ambas as otimizações. A partir da simulação do sistema na F6, verificamos que a otimização do índice

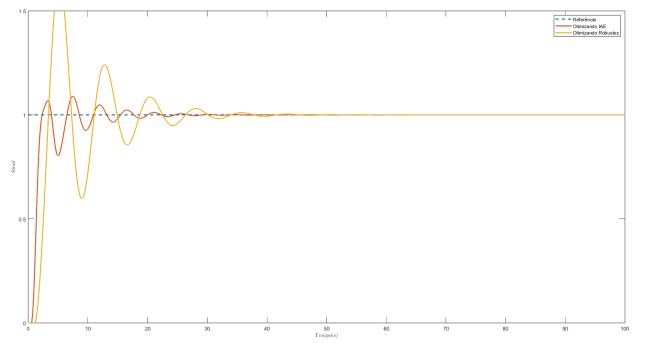


Figura 6. Comparação da simulação do Sistema do Exemplo 3

Para o método proposto neste trabalho, observamos um comportamento semelhante, conforme a Figura 7, apresenta, com uma acentuação dos resultados apresentados na seção ??, principalmente para o *Overshoot*, como apresentado na Figura 8.

O sistema de segunda ordem, com atraso, permanece estável em malha fechada conforme a Figura 9, confirma. Isso evidencia que a robustez é atenuado, para esses métodos, mais sem perder a estabilidade e robustez, além, percebemos que a perda da robustez é significativamente pequena,

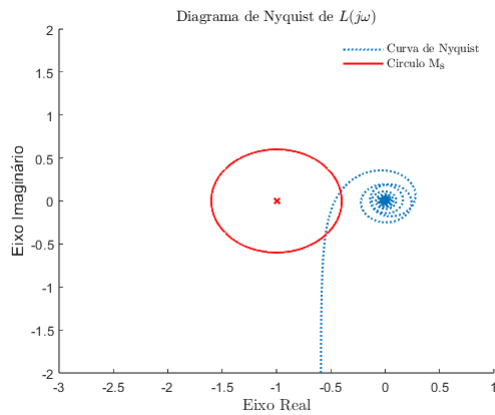


Figura 7. Diagrama de Nyquist com perturbação no sistema

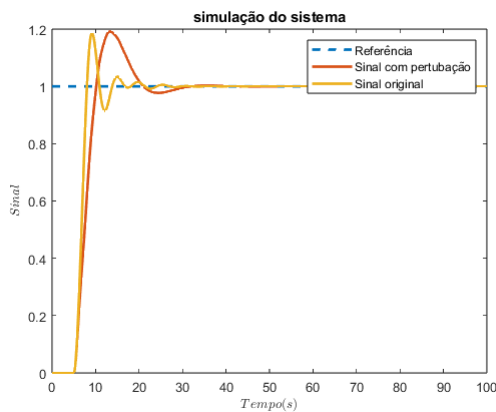


Figura 8. Simulação do Sistema com perturbação no sistema

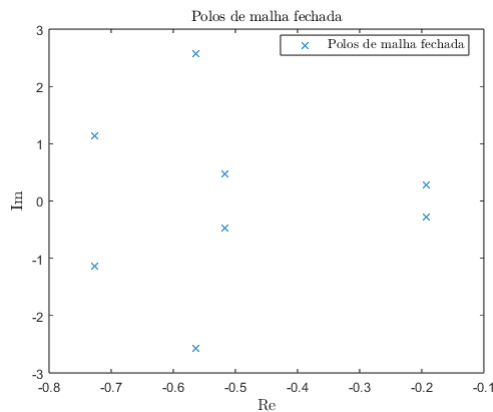


Figura 9. polos do Sistema com perturbação no sistema em relação aos ganhos de desempenho, adquiridos com introdução da busca com concorrência.

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram propostas soluções para resolver o problema de controle de sistemas de segunda ordem com atraso por meio do uso de um Controlador PID. Uma alternativa interessante para lidar com sistemas mais complexos é a utilização da representação experimental dos sistemas de segunda ordem com atraso por meio de uma matriz de receptância. Para obter os vetores de ganho

do controlador PID, o problema de controle foi expresso como um problema de otimização matemática. O objetivo foi encontrar ganhos que atendam de forma satisfatória tanto ao critério de projeto estabelecido quanto à robustez do sistema e ao índice de *IAE*, resultando em uma solução ótima que obtenha um sistema minimamente robusto e eficiente em termos de tempo de acomodação.

Além disso, constatou-se que a robustez e a otimização do índice do *IAE* apresentam comportamentos que competem entre si. Ou seja, não é possível otimizar a Integral do Erro Absoluto sem prejudicar a robustez do sistema. Por isso, foi necessário desenvolver um método que visasse melhorar ambos os aspectos de forma equilibrada.

Os resultados apresentados no capítulo ?? mostram que o método que busca otimizar ambos os parâmetros apresenta resultados mais satisfatórios do que a busca de algoritmos com apenas um parâmetro. Além disso, foi possível obter resultados superiores em relação a trabalhos anteriores deste mesmo grupo, como os estudos realizados por Dantas DANTAS (2019), e NUNES (2022), com melhor tempo de acomodação e *Overshoot*.

Existem outras propostas de interesse acadêmico que podem ser abordadas em trabalhos futuros, como a aplicação deste método em sistemas de controle instáveis para avaliar seu desempenho, bem como a aplicação em sistemas multivariáveis com atraso. Além disso, o uso de outras meta-heurísticas, como o Algoritmo de Enxame de Partículas (PSO), pode ser explorado para buscar resultados diferentes e possivelmente melhorias no controle desses sistemas.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo conhecimento e força, para chegar até aqui.

Ao meu orientador, Carlos Eduardo Trabuco Dórea.

Ao meu co-orientador José Mário Araújo.

Ao colega Nelson J. B. Dantas

À minha companheira, Maria e família pelo apoio durante esta jornada.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

REFERÊNCIAS

- ARAÚJO, J.M. (2018a). Discussion on ‘state feedback control with time delay’. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 98, 368–370.
- ARAÚJO, J.M. (2018b). Partial eigenvalue assignment in linear time-invariant systems using state-derivative feedback and a left eigenvectors parametrization. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, 0959651818811010.
- ARAÚJO, J.M. and SANTOS, T.L.M. (2018). Control of a class of second-order linear vibrating systems with time-delay: Smith predictor approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 108, 173–187.
- BALAS, M. (1982). Trends in large space structure control theory: fondest hopes, wildest dreams. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3), 522–535.

- DANTAS, N.J.B. (2019). *Projeto de Controladores para Sistemas de Segunda Ordem com Atraso via Resposta em Frequência*. Dissertação (mestrado) — mestrado em engenharia mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- DANTAS, N.J., Dórea, C.E., and Araújo, J.M. (2020). Design of rank-one modification feedback controllers for second-order systems with time delay using frequency response methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 137, 106404. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106404>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0888327019306259>. Special issue on control of second-order vibrating systems with time delay.
- FRANKLIN, G.F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de controle para engenharia*. Bookman Editora.
- GONTIJO, D.S., Araújo, J.M., SANTOS, T.L., and Souza, F.O. (2022). Proportional-integral-derivative-acceleration robust controllers for vibrating systems. *Journal of Vibration and Control*, 10775463211060898.
- MARTINS, J.K., Araújo, F.M., and Dórea, C.E. (2020). Um método baseado em otimização para sintonia de controladores pi para sistemas sujeitos a restrições. In *Congresso Brasileiro de Automática-CBA*.
- MOTTERSHEAD, J.E. and RAM, Y.M. (2007). Receptance method in active vibration control. *AIAA journal*, 45(3), 562–567.
- NUNES, L.A. (2022). *Controle por Realimentação Derivativa para Sistemas Dinâmicos de Segunda Ordem com Atraso*. Dissertação (mestrado) — mestrado em engenharia mecatrônica, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.
- OGATA, K. (2009). *Modern control engineering*. Prentice Hall Upper Saddle River, NJ.
- RAM, Y., Mottershead, J., and TEHRANI, M.G. (2011). Partial pole placement with time delay in structures using the receptance and the system matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 434(7), 1689–1696.
- RAM, Y., Singh, A., and MOTTERSHEAD, J.E. (2009). State feedback control with time delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(6), 1940–1945.
- SANTOS, T.L., Araújo, J.M., and Franklin, T.S. (2018). Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 110, 428–441.
- SKOGESTAD, S. and POSTLETHWAITE, I. (2007). *Multivariable feedback control: analysis and design*, volume 2. Wiley New York.
- VANDERVELDE, W.E. (1986). Control of large flexible space structures.