

Controle PID de Vibrações em Sistemas de Segunda Ordem com Atraso Usando Receptância com Estabilidade Robusta e Otimização de Desempenho

Jhonat H. A. de Souza * Nelson J. B. Dantas * Carlos E. T. Dórea *
José M. Araújo **

* Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Depto. Eng.
Computação e Automação. 59078-900 Natal, RN, (e-mail:
jhonat.souza.014@ufrn.edu.br, eng.nelsondantas@gmail.com,
cetdorea@dca.ufrn.br)

** Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia, BA,
(e-mail: prof.jomario@gmail.com)

Abstract: This work deals with the design of PID controllers for linear dynamic systems with time-delay, modeled by second-order matrix differential equations. The receptance approach is adopted, which, as it is based on the frequency response of the system, allows dealing with closed-loop stability exactly, without the need to resort to approximations of the delay term or *a posteriori* checks. An optimization problem is formulated to determine the controller gains that guarantee robustness, through a given stability margin, and performance, through the minimization of the Integral of the Absolute Error, relative to constant reference tracking. A Genetic Algorithm is implemented to solve the optimization problem. Unlike related works in the literature, the proposed method can also be applied to systems with open-loop poles in the right half-plane.

Resumo:

Este trabalho trata do projeto de controladores PID para sistemas dinâmicos lineares com atraso, modelados por equações diferenciais matriciais de segunda ordem. É adotada a abordagem por receptância, que, por se basear na resposta em frequência do sistema, permite tratar da estabilidade em malha fechada de forma exata, sem a necessidade de recorrer a aproximações do termo de atraso nem a verificações *a posteriori*. Um problema de otimização é formulado para a determinação dos ganhos do controlador que garantam robustez, por meio de uma margem de estabilidade pré-estabelecida e desempenho, por meio da minimização da Integral do Erro Absoluto relativo ao seguimento de uma referência constante. Um Algoritmo Genético é implementado para resolver o problema de otimização. Diferentemente de trabalhos correlatos na literatura, o método proposto pode ser aplicado igualmente a sistemas com polos de malha aberta no semiplano direito.

Keywords: Second-Order Systems; Time-Delay; PID Control, Receptance, Genetic Algorithm.

Palavras-chaves: Sistemas de Segunda Ordem; Sistemas com Atraso; Controle PID; Receptância; Algoritmo Genético.

1. INTRODUÇÃO

Sistemas físicos modelados por equações diferenciais de segunda ordem são amplamente encontrados em diversas áreas, desde a engenharia até a física e a biologia. Uma diversidade de fenômenos físicos, a exemplo da ressonância em sistemas vibratórios, vibroacústicos e elétricos, é ricamente representada por meio de modelos dinâmicos de segunda ordem (Balas, 1982; Preumont, 1997).

O controle de sistemas dinâmicos representados por tais modelos tem sido objeto de muitos estudos nas últimas décadas. Em particular, a chamada abordagem por *receptância* tem atraído muita atenção porque o modelo de resposta em frequência necessário pode ser inteiramente obtido a partir de dados experimentais, mesmo com um número reduzido de sensores e atuadores (Ram and Mottershead, 2013). O problema da supressão ativa de vibrações é uma das principais aplicações desta técnica de controle.

A presença de atrasos nas medições ou atuações é, em geral, inevitável (Mirkin and Palmor, 2005). Dependendo do tamanho do atraso, um projeto de controle que não o leve em consideração pode resultar em comportamento

* Este trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), código de financiamento 001, e do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), processo 311478/2022-0.

inesperado, desempenho insatisfatório e até mesmo na instabilidade do sistema em malha fechada. Porém, lidar diretamente com o atraso pode ser difícil do ponto de vista matemático porque o atraso introduz um termo irracional no modelo de receptância, que se torna de dimensão infinita (com um número infinito de polos).

Os primeiros métodos de projeto para sistemas de segunda ordem com atraso usando as matrizes de receptância baseavam-se na alocação de um determinado número de pólos supostamente dominantes (Ram et al., 2009). Porém estes métodos não garantiam estabilidade em malha fechada porque não havia nenhuma imposição ao posicionamento dos outros infinitos polos, o que deveria ser verificado *a posteriori*. Métodos com garantia de estabilidade *a priori* foram posteriormente propostos, mas requerendo as matrizes que definem o modelo, ou seja, não baseados em receptância (Belotti and Richiedei, 2020).

Se apenas o modelo de receptância estiver disponível, métodos de análise de resposta em frequência provenientes da teoria clássica de controle podem ser empregados (Araújo, 2018). Em particular, o chamado critério de Nyquist permite estabelecer se um sistema com atraso é estável em malha fechada sem a necessidade de recorrer a aproximações do termo de atraso ou verificações *a posteriori*. Esta ideia foi usada por Dantas et al. (2020) para propor um projeto de controle baseado em otimização com margem de robustez garantida para sistemas de segunda ordem com atraso. Este método foi estendido em (Dantas et al., 2021) para incluir a alocação parcial do polos e aplicado a um braço robótico flexível com dois elos em (Araújo et al., 2021).

Os métodos mencionados foram desenvolvidos para controle por realimentação de estado ou da derivada do estado, o que requer o sensoramento de todos os graus de liberdade, e sem considerar o problema de seguimento de referência. Uma solução a esses problemas é o uso do controlador PID (Proporcional - Integral - Derivativo), que foi objeto de estudo em (Gontijo et al., 2022) no âmbito de modelos de segunda ordem multivariáveis sem atrasos. Além disso, a imposição de uma margem de robustez não garante um desempenho aceitável da resposta transitória. Experimentos numéricos usando otimização da resposta transitória de controle PI (Proporcional - Integral) com atraso foram reportados em (Strmiska et al., 2022) para sistemas com apenas um grau de liberdade. Por fim, os métodos mencionados não se aplicavam a sistemas com polos de malha aberta no semiplano direito.

Este artigo apresenta um método de projeto de controle PID para sistemas de segunda ordem com atraso representados pelo modelo de receptância. Em relação ao *estado da arte* da literatura, além de considerar controladores PID, o método proposto é capaz de lidar com sistemas instáveis em malha aberta. Além disso, busca otimizar o desempenho da resposta transitória por meio da minimização do índice da integral do erro absoluto - *IAE*, com restrição de robustez avaliada pelo pico da função de sensibilidade da resposta em frequência (Dantas et al., 2020). O problema de otimização proposto é resolvido por Algoritmo Genético. Diversos resultados de simulação ilustram a eficiência do método.

2. PRELIMINARES E DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

2.1 Modelos de Segunda Ordem

Modelos dinâmicos lineares de segunda ordem são utilizados com frequência em análise de fenômenos vibratórios em estruturas flexíveis ou sistemas de parâmetros concentrados. A equação diferencial de modelos de segunda ordem controlados por uma entrada, contendo n graus de liberdade, definida sobre um deslocamento generalizado $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}u(t), \quad (1)$$

em que \mathbf{M} , \mathbf{C} , $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são matrizes, respectivamente, de massa, amortecimento e rigidez do sistema; $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ é uma matriz de influência (atuação); $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ denotam respectivamente aceleração e velocidade generalizadas; e $u \in \mathbb{R}$ é o esforço de controle.

Aplicando agora a transformada de Laplace a (1) obtém-se:

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{b}U(s) = \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s), \quad (2)$$

sendo $\mathbf{H}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K}]^{-1}\mathbf{b}$ definida como a *matriz de receptância* em malha aberta do sistema.

O problema estudado consiste em controlar vibrações do sistema, com a possibilidade de rastreamento de uma referência constante por um dos graus de liberdade, utilizando realimentação de saída com robustez garantida. A saída é definida por:

$$y(t) = \mathbf{l}\mathbf{x}(t) \quad (3)$$

em que $\mathbf{l} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ é uma matriz de composição de sensores.

Para uma dada referência $r(t)$, o erro de rastreamento é definido por:

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4)$$

2.2 Controle PID e Receptância de Malha Fechada

Um controlador PID, que possui a capacidade inerente de rastreamento para referências constantes com erro de regime permanente nulo (Franklin et al., 2013), é proposto como solução do problema, considerando a presença de atraso de medição, isto é:

$$u(t) = k_p e(t - \tau) + k_i \int_0^t e(t - \tau) d\tau + k_d \frac{de(t - \tau)}{dt} \quad (5)$$

em que k_p , k_i e $k_d \in \mathbb{R}$ são, respectivamente, os ganhos proporcional, integral e derivativo do controlador. Aplicando a transformada de Laplace em (3)-(5) obtém-se:

$$U(s) = -(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)e^{-\tau s}\mathbf{I}\mathbf{X}(s) + V(s), \quad (6)$$

em que $q(s) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)$ e $V(s) = q(s)R(s)$.

Da substituição de (6) em (1) resulta:

$$[\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s}q(s)\mathbf{b}]\mathbf{X}(s) = \mathbf{bV}(s). \quad (7)$$

Logo,

$$\mathbf{X}(s) = [\mathbf{M}s^2 + \mathbf{C}s + \mathbf{K} + e^{-\tau s}q(s)\mathbf{b}]^{-1}\mathbf{bV}(s) = \hat{\mathbf{H}}(s)\mathbf{V}(s) \quad (8)$$

Aplicando a fórmula de *Sherman-Morrison* na inversa presente em (8), obtém-se a matriz de receptância de malha fechada do sistema, dada por:

$$\hat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(s) - \frac{(k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}\mathbf{H}(s)e^{-\tau s}}{1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s}} \quad (9)$$

Nota-se que a receptância de malha fechada pode ser construída apenas com o conhecimento da receptância de malha aberta $\mathbf{H}(s)$, dispensando assim o conhecimento das matrizes \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} . Resultados expressivos sobre controle de vibrações utilizando receptâncias podem ser acessados na literatura recente (Araújo and Santos, 2018; Araújo, 2018; Santos et al., 2018; Singh et al., 2019; Dantas et al., 2020, 2021; Richidei et al., 2022).

3. SINTONIA ROBUSTA COM OTIMIZAÇÃO DE DESEMPENHO

Seja a receptância de malha fechada (9) sob o controlador PID. A presença do atraso de transporte torna a equação característica:

$$1 + (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s)\mathbf{H}(s)\mathbf{b}e^{-\tau s} = 0 \quad (10)$$

uma equação não-polinomial, que apresenta infinitas soluções. O estudo da estabilidade em problemas deste tipo não é uma tarefa trivial, entretanto métodos no domínio da frequência baseados no chamado *critério de Nyquist* permitem uma avaliação precisa da estabilidade em malha fechada do sistema na presença do atraso de transporte.

Com base no critério de Nyquist, um método foi proposto por Dantas et al. (2020) para o controle de sistemas de segunda ordem com atraso sem polos no semiplano direito, com uma entrada de controle. Estabilidade robusta baseada no pico da função de sensibilidade é imposta usando o critério do *círculo* M_s , que é um círculo de raio M_s^{-1} centrado no ponto crítico $-1 + j0$. Ao forçar a curva de Nyquist para fora deste círculo, quanto maior seu raio, menor o valor do pico M_s da função de sensibilidade, e menos suscetível se torna o sistema de malha fechada a violar a condição de estabilidade diante de uma variação dos parâmetros do sistema, o que consiste na imposição de uma margem de robustez. Um problema de otimização foi formulado para calcular os ganhos da realimentação de estado que garantem essa margem e uma solução numérica usando Algoritmo Genético foi proposta.

O controle por realimentação de estado requer o sensoramento de todos os graus de liberdade e uma estrutura mais complexa para o rastreamento de referências constantes, dificuldades que podem ser contornadas com o uso do controlador PID. O método descrito acima pode, assim, ser adaptado para o projeto de controladores PID com margem garantida de robustez. No entanto, esse método apresenta duas limitações importantes. A primeira é não se aplicar a sistemas com polos de malha aberta no semiplano direito. A segunda é de não otimizar diretamente o desempenho no domínio do tempo, por ter como objetivo apenas

garantir uma margem de robustez. Dessa forma, propomos a seguir um método que se aplica a qualquer sistema de malha aberta e que busca otimizar o desempenho em malha fechada.

3.1 Margem de Estabilidade

O critério de estabilidade de Nyquist permite estabelecer se um sistema linear é estável em malha fechada, a partir de sua resposta em frequência em malha aberta, mais especificamente do seu *diagrama polar*, ou *diagrama de Nyquist*. O critério baseia-se na seguinte equação Franklin et al. (2013):

$$N = Z - P, \quad (11)$$

sendo P o número de polos de malha aberta no semiplano direito, Z o número de polos de malha fechada no semiplano direito e N o número de voltas que o diagrama de Nyquist faz em torno do ponto crítico $-1 + j0$ no sentido horário. Para estabilidade em malha fechada deve-se ter, portanto, $Z = N + P = 0$, logo, $N = -P$, ou seja, o diagrama de Nyquist deve dar tantas voltas no sentido anti-horário em torno de $-1 + j0$ quanto seja o número de polos de malha aberta no semiplano direito.

Esse critério garante *estabilidade nominal*, ou seja, considerando que o modelo do sistema é exato, o que não ocorre na prática. Uma solução para tornar o controlador robusto em relação a desvios no modelo nominal é estabelecer uma “região de segurança” em torno do ponto crítico, na forma de um círculo de raio M_s^{-1} centrado nele, sendo M_s o pico da função de sensibilidade. Como mostrado em (Skogestad, 2007), no caso de sistemas estáveis em malha aberta, ao se garantir que a curva de Nyquist não faz voltas em torno deste círculo, garantem-se limitantes inferiores para as margens de ganho e de fase.

3.2 Minimização do IAE com margem de estabilidade garantida

Métodos existentes na literatura de controle de sistemas de segunda ordem lidam com problemas que consideram o termo exponencial do atraso em seus modelos utilizando aproximações, tais como a conhecida aproximação de Padé e, em alguns casos, as séries de Taylor e Maclaurin. Em (Mottershead and Ram, 2007) é evidenciado um dos problemas no cálculo de ganhos de controladores para sistemas com atraso utilizando aproximações: as soluções não garantem que todos os polos de malha fechada fiquem restritos ao semiplano esquerdo. Outro aspecto que desencoraja o uso de aproximações é que para boas representações se faz necessário o uso de funções polinomiais de ordem bastante elevada.

Visto que as soluções para o problema de cálculo de ganhos dos controladores em sistemas com atraso demandam estabilidade em malha fechada, este problema de controle pode ser formulado como um problema de otimização baseado em um parâmetro de desempenho dos controladores sob a restrição de estabilidade. Para este trabalho objetiva-se a minimização da integral do erro absoluto sujeito ao atendimento do critério de estabilidade de Nyquist conforme descrito a seguir:

Dados: $\mathbf{H}(s)\mathbf{B}$, τ

Resultado: k_p , k_i e k_d

- 1 Criar **População Inicial** de ganhos (k_p , k_i e k_d)
- 2 Avaliar utilizando a **Função Objetivo**, **Circunferência M_s** e **Estabilidade**;
- 3 **Ordenar** os indivíduos
- 4 **Verificar** se o **Melhor Indivíduo** atende aos critérios mínimos
- 5 **enquanto** *não forem atendidos critérios mínimos* **faça**
- 6 Efetuar **Cruzamentos** entre indivíduos para gerar uma nova população
- 7 **Ordenar** os novos indivíduos
- 8 **Verificar** se o **Melhor Indivíduo** da nova geração atende aos critérios mínimos
- 9 **se** *Condições Atendidas* **então**
- 10 retornar **Melhor Indivíduo** da geração atual como **Resultado**
- 11 **senão**
- 12 volte para o início da seção atual
- 13 **fim**
- 14 **fim**

Algorithm 1. Pseudo código para busca dos ganhos

$$\min_{k_p, k_i, k_d} \int_0^t |e(t)| dt \quad (12)$$

$$s.a \left(\min_{\omega_i} |L(j\omega) + 1| - M_s^{-1} \right)^2 \leq \epsilon \quad (13)$$

$$L(j\omega) = (k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s) \mathbf{H}(j\omega) \mathbf{b} e^{-j\omega\tau} \quad (14)$$

$$Z = N + P$$

A restrição (13), se satisfeita, garante uma distância mínima entre a curva de Nyquist e o círculo M_s , proporcionando uma margem de estabilidade robusta pré-estabelecida.

Já a restrição (14) representa a garantia de estabilidade segundo o critério de Nyquist que afirma que, para cada polo de malha aberta presente no semiplano direito, um envolvimento do ponto crítico $-1 + j0$ no sentido anti-horário é necessário. Qualquer envolvimento do ponto crítico pela curva de Nyquist no sentido horário resulta em instabilidade.

4. OBTENÇÃO DOS GANHOS DO CONTROLADOR VIA ALGORITMO GENÉTICO

A complexidade do problema de otimização (12)-(14) praticamente inviabiliza sua solução por métodos tradicionais de otimização baseados em gradiente. Neste trabalho, foi implementado um algoritmo genético, por sua eficiência e versatilidade, como descrito no Algoritmo 1.

Na elaboração do algoritmo foi definido como objetivo a equação (12). Para retorno da avaliação do círculo M_s foi utilizada a equação (13) e a definição de estabilidade baseada no critério de Nyquist visando atender ao disposto na equação (14) com uma função que contabiliza os envolvimento do ponto crítico $-1 + j0$ nos sentidos horário e anti-horário pela curva $L(j\omega)$. Na função de ordenação do algoritmo, os indivíduos são classificados em ordem crescente atendendo inicialmente à estabilidade, quantificada pela equação (14), onde P é o número de polos de malha aberta

Tabela 1. Estudos de Caso Abordados

Estudo de Caso (EC) / Exemplo (E)	Graus de Liberdade	Estabilidade em Malha Aberta	Colocação
EC I / E 1	1	Estável	-
EC II / E 2	2	Estável	Co-localizado
EC II / E 3	2	Estável	Não co-localizado
EC 3 / E4	3	Instável	Não co-localizado

no semiplano direito e N a quantidade de envolvimento do ponto crítico ($N > 0$ sentido horário, $N < 0$ sentido anti-horário). Assim, indivíduos "estáveis" (com $Z = 0$) nas primeiras posições da classificação e indivíduos "instáveis" (com $Z \neq 0$) nas últimas posições. Em seguida são reordenados em função do critério de robustez com seu custo dado pelo valor de ϵ na equação (13). Nesta etapa, aquele indivíduo que tiver menor valor de ϵ e atender ao critério de estabilidade, tomará a frente nas primeiras posições da ordenação. Por fim a ordem final é dada pela função objetivo (12), sendo o melhor indivíduo (primeiro lugar depois da ordenação) aquele com o menor valor de integral do erro absoluto que atenda tanto ao critério de robustez (com um valor mínimo de $\epsilon = 10^{-5}$) quanto ao critério de estabilidade. Para que a busca seja encerrada foram considerados os seguintes critérios de parada para verificação das *Condições Atendidas* na linha nove do algoritmo:

- (1) Melhor indivíduo estável
- (2) Indicativo de robustez $\leq 10^{-5}$
- (3) Número de gerações ≥ 20

Na seguinte seção são apresentados exemplos numéricos que mostram o desempenho do método na solução de problemas considerados como padrão na literatura.

5. EXEMPLOS NUMÉRICOS

Exploram-se nesta seção três estudos de caso para fins de ilustração da efetividade do método de sintonia proposto. Na Tabela 1, as características dos exemplos explorados são descritas. Os Diagramas de Nyquist para frequências $\omega \in [0, +\infty)$ e as respostas no domínio do tempo são destacados nas figuras da seção.

5.1 Estudo de caso I

Exemplo 1 Considera-se um sistema massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade com parâmetros $\mathbf{M} = 1$, $\mathbf{C} = 0,01$, $\mathbf{K} = 5$; atraso $\tau = 0,1s$ (Ram et al., 2009; Araújo, 2018). Ainda, são dados $b = 1$ e $l = 1$ e $M_s = 1,6667$. O problema de otimização descrito por (12)-(14) é então resolvido. Na Fig. 1, é mostrada a curva de Nyquist resultante e o círculo M_s relativo à robustez requerida. A resposta ao degrau unitário em malha fechada é ilustrada na Fig. 2. Na Tabela 2 são relacionados os ganhos dos controladores obtidos com e sem a minimização do índice IAE da resposta ao degrau.

Tabela 2. Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Estudo de Caso I, Exemplo 1

Sintonia	k_p	k_i	k_d	IAE
Robustez+IAE	7,3573	10,8351	3,9178	0,5779
Robustez	3,8368	2,1923	1,8057	2,2807

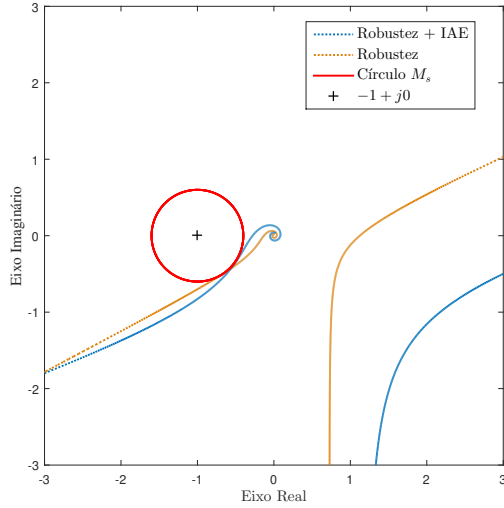


Figura 1. Diagrama de *Nyquist* para o Estudo de Caso I, Exemplo 1

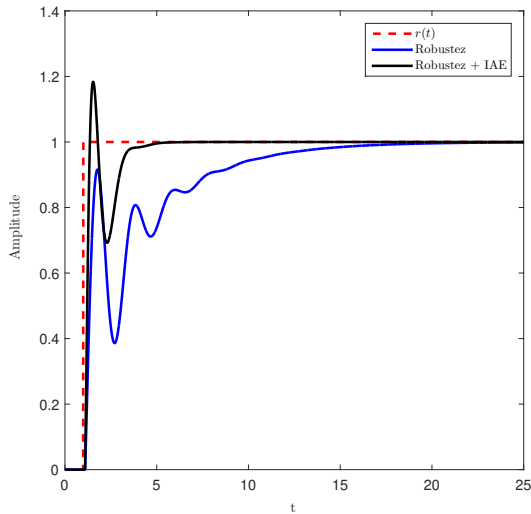


Figura 2. Resposta no tempo para uma referência constante do Estudo de Caso I, Exemplo 1

5.2 Estudo de Caso II

Este estudo de caso explora a aplicação do método de sintonia em um sistema com atraso longo. As matrizes do sistema são:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Dois exemplos são explorados nesse estudo de caso: o caso co-localizado - sensor e atuador juntos no mesmo grau de liberdade, ou seja, $l = b^T$ - e o caso não co-localizado, na qual a distribuição do sensor e do atuador é distinta.

Exemplo 2 Os parâmetros considerados são $\tau = 5s$, $\mathbf{l} = \mathbf{b}^T = [1 \ 0]$ e $M_s = 2$. O algoritmo de otimização é então aplicado, considerando a minimização de IAE, e

também somente a minimização da distância ao círculo M_s . Os resultados são sumarizados na Tabela 3, onde estão registrados os ganhos dos controladores sintonizados e os valores do índice IAE. Os diagramas de Nyquist com otimização de desempenho e robustez e considerando somente robustez são mostrados na Fig. 3. A resposta ao degrau para as duas sintonias é apresentada na Fig. 4, onde é evidente o desempenho superior do método de sintonia proposto.

Tabela 3. Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Estudo de Caso II - Exemplo 2

Sintonia	k_p	k_i	k_d	IAE
Robustez + IAE	0,5710	0,2829	0,4713	7,4872
Robustez	0,5193	0,2424	0,1804	7,9387

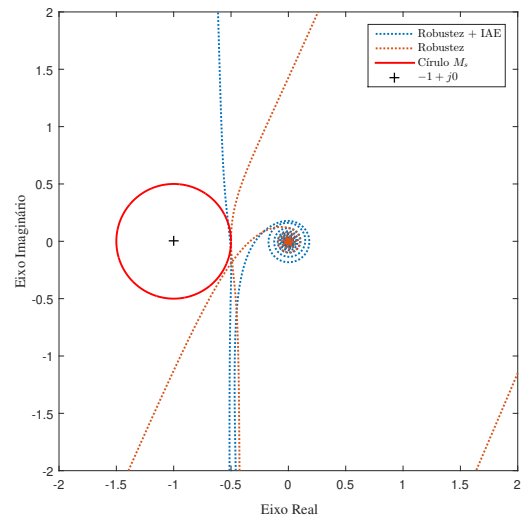


Figura 3. Diagrama de *Nyquist* para o Estudo de Caso II, Exemplo 2

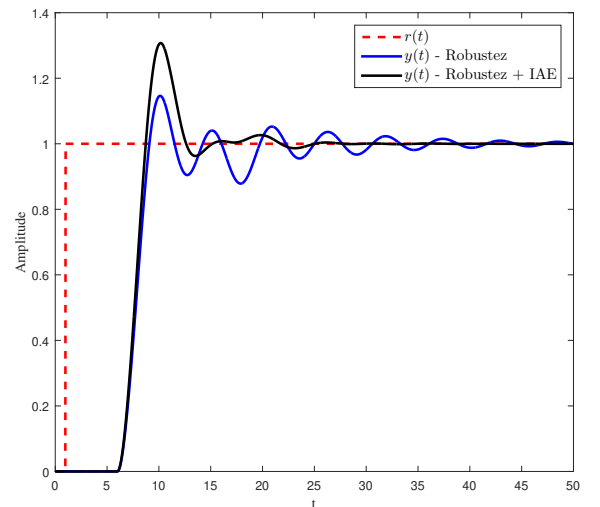


Figura 4. Resposta no tempo para uma referência constante do Estudo de Caso II, Exemplo 2

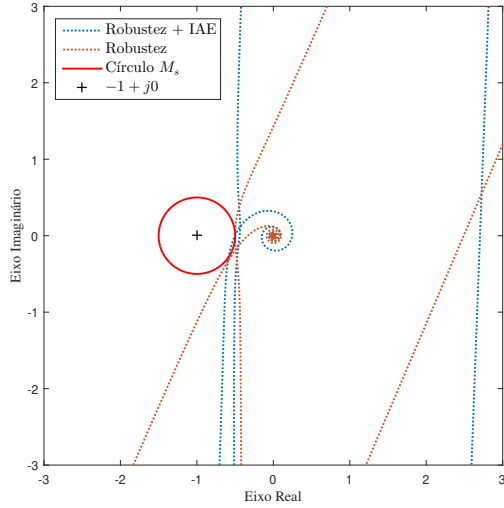


Figura 5. Diagrama de Nyquist para o Estudo de Caso II, Exemplo 3

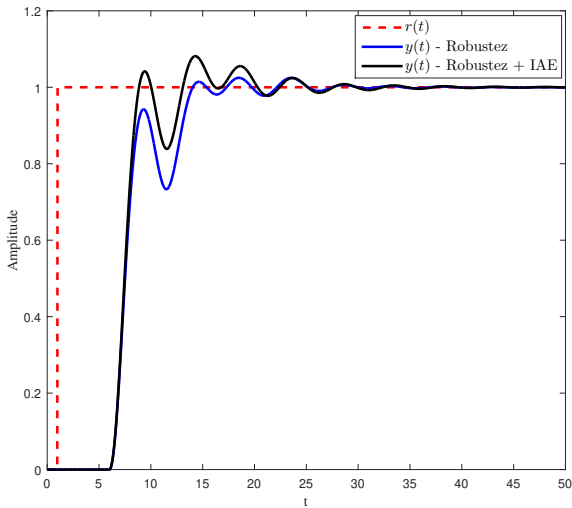


Figura 6. Resposta no tempo para uma referência constante para o Estudo de Caso II, Exemplo 3

Exemplo 3 Considere-se agora o caso não co-localizado, com $\mathbf{b}^T = [1 \ 0]$ e $\mathbf{l} = [0 \ 1]$. As matrizes e os demais parâmetros são os mesmos do Exemplo 2. O controle de graus de liberdade no esquema não co-localizado representa um desafio maior que o caso co-localizado, pois neste último, a propriedade de alternância entre pólos e zeros garante melhores margens (Preumont, 1997). Entretanto, com a técnica proposta, as margens mínimas são garantidas. Na Fig. 5, são mostrados os diagramas de Nyquist para as sintonias ótimas que consideram somente a robustez e também a robustez combinada com IAE. As respostas no domínio do tempo, ilustradas na Fig. 6, permitem comparar a sintonia com e sem a consideração do índice de desempenho. O ganhos dos controladores sintonizados e os valores do índice IAE podem ser vistos na Tabela 4.

Tabela 4. Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Estudo de Caso II - Exemplo 3

Sintonia	k_p	k_i	k_d	IAE
Robustez + IAE	0,5878	0,3866	0,5382	7,2212
Robustez	0,5460	0,3437	0,5229	7,5067

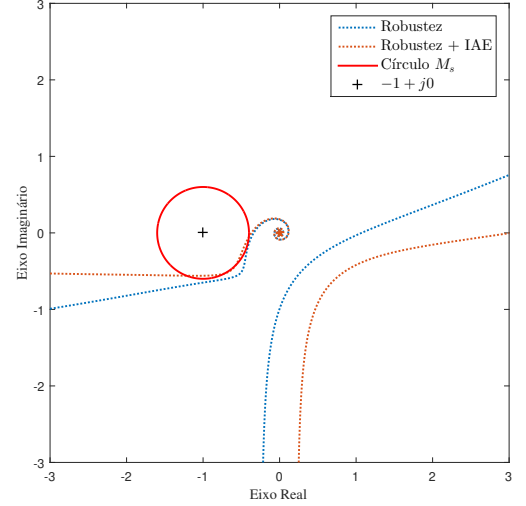


Figura 7. Diagrama de Nyquist para o Estudo de Caso III, Exemplo 4

5.3 Estudo de Caso III

Este estudo de caso, adaptado de (Shapiro, 2005), aborda um caso instável em malha aberta, cujas matrizes são dadas por:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$$

com $\mathbf{b}^T = [-1 \ 1]$ e $\mathbf{l} = [1 \ 0]$ além de um atraso $\tau = 0.5s$. Para garantia de margens, é dado $M_s = 1,6667$. Neste sistema dois polos de malha aberta localizam-se no semiplano direito, $s_{1,2} = 0,0039 \pm j0,9$. Da mesma forma que nos exemplos anteriores, projetam-se controladores PID de acordo com o método proposto, e considerando-se apenas o critério de robustez para fins de comparação. Na Fig. 7 visualizam-se os diagramas de Nyquist obtidos. As respostas no tempo são comparadas na Fig. 8. A Tabela 5 permite a comparação dos controladores projetados, e é possível notar um desempenho melhorado em relação ao IAE com a aplicação do método proposto. A estabilidade em malha fechada pode ser verificada no diagrama de Nyquist completo ($\omega \in \mathbb{R}$) com visão expandida, onde são constatados os dois envoltimentos requeridos do ponto crítico $-1 + j0$.

Tabela 5. Ganhos ótimos e índice de desempenho para o Estudo de Caso III - Exemplo 4

Sintonia	k_p	k_i	k_d	IAE
Robustez + IAE	-4,4787	-3,3738	-11,1194	2,6374
Robustez	-2,1975	-4,3664	-10,8658	3,5080

6. CONCLUSÃO

Neste artigo, uma abordagem para sintonia de controladores PID para controle de vibrações em sistemas de segunda

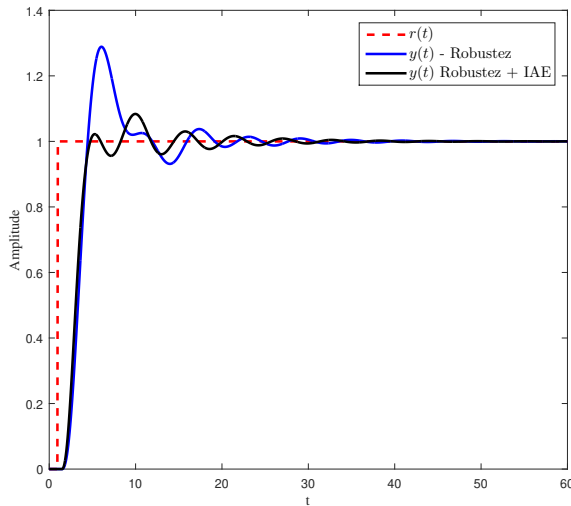


Figura 8. Diagrama de Nyquist para o Estudo de Caso III, Exemplo 4

ordem com atraso foi porposta. Desde que a ação integral incorpora a capacidade de seguimento de referências constantes, o uso de um índice de desempenho baseado em integral de erro pode ser facilmente incorporado ao problema de otimização formulado para sintonia do controlador. O método das receptâncias permite o uso da abordagem no domínio da frequência por meio de diagramas de Nyquist, visando a estabelecer um critério de robustez baseado no pico da função de sensibilidade, conferindo margens de estabilidade garantidas ao sistema em malha fechada. O método é desenvolvido para incluir sistemas estáveis ou instáveis em malha aberta. Uma série de exemplos numéricos foi apresentada de forma a ilustrar o potencial da abordagem em problemas diversificados.

REFERÊNCIAS

- Araújo, J.M. (2018). Discussion on ‘state feedback control with time delay’. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 98, 368–370.
- Araújo, J.M. and Santos, T.L.M. (2018). Control of a class of second-order linear vibrating systems with time-delay: Smith predictor approach. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 108, 173–187.
- Araújo, J., Betttega, J., Dantas, N., Dórea, C., Richiedei, D., and Tamellin, I. (2021). Vibration control of a two-link flexible robot arm with time delay through the robust receptance method. *Applied Sciences*, 11. doi:https://doi.org/10.3390/app11219907.
- Balas, M. (1982). Trends in large space structure control theory: fondest hopes, wildest dreams. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 27(3), 522–535.
- Belotti, R. and Richiedei, D. (2020). Pole assignment in vibrating systems with time delay: An approach embedding an a-priori stability condition based on linear matrix inequality. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 137, 106396. doi:https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106396.
- Dantas, N.J.B., Dórea, C.E.T., and Araújo, J.M. (2021). Partial pole assignment using rank-one control and receptance in second-order systems with time delay. *Meccanica*, 56(2), 287–302. doi:10.1007/s11012-020-01289-w. URL https://doi.org/10.1007/s11012-020-01289-w.
- Dantas, N.J., Dórea, C.E., and Araújo, J.M. (2020). Design of rank-one modification feedback controllers for second-order systems with time delay using frequency response methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 137, 106404. doi:https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2019.106404.
- Franklin, G.F., Powell, J.D., and Emami-Naeini, A. (2013). *Sistemas de controle para engenharia*. Bookman Editora.
- Gontijo, D.S., Araújo, J.M., Santos, T.L., and Souza, F.O. (2022). Proportional-integral-derivative-acceleration robust controllers for vibrating systems. *Journal of Vibration and Control*, 10775463211060898.
- Mirkin, L. and Palmor, Z.J. (2005). Control issues in systems with loop delays. In *Handbook of Networked and Embedded Control Systems*, 627–648. Birkhäuser Boston.
- Mottershead, J. and Ram, Y.M. (2007). Receptance method in active vibration control. *AIAA journal*, 45(3), 562–567.
- Preumont, A. (1997). *Vibration Control of Active Structures*. Springer Netherlands. doi:10.1007/978-94-011-5654-7. URL https://doi.org/10.1007/978-94-011-5654-7.
- Ram, Y. and Mottershead, J.E. (2013). Multiple-input active vibration control by partial pole placement using the method of receptances. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 40(2), 727–735.
- Ram, Y., Singh, A., and Mottershead, J.E. (2009). State feedback control with time delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 23(6), 1940–1945.
- Richidei, D., Tamellin, I., and Trevisani, A. (2022). Pole-zero assignment by the receptance method: multi-input active vibration control. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 172, 108976. doi:https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2022.108976.
- Santos, T.L., Araújo, J.M., and Franklin, T.S. (2018). Receptance-based stability criterion for second-order linear systems with time-varying delay. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 110, 428–441.
- Shapiro, A. (2005). Stability of second-order asymmetric linear mechanical systems with application to robot grasping. *Journal of Applied Mechanics*, 72, 966–968.
- Singh, K.V., Black, C., and Kolonay, R. (2019). Active aeroelastic output feedback control with partial measurements by the method of receptances. *Aerospace Science and Technology*, 86, 47–63. doi:https://doi.org/10.1016/j.ast.2018.12.037.
- Skogestad, Sigurd Postlethwaite, I. (2007). *Multivariable feedback control: analysis and design*, volume 2. Wiley New York.
- Strmiska, M., Pekař, L., and Araújo, J.M. (2022). Guide for stabilization and heuristic optimization of second-order systems controlled by p/i-delayed controllers. In *2022 IEEE 11th International Conference on Intelligent Systems (IS)*, 1–6. doi:10.1109/IS57118.2022.10019718.