**1.** Una compañía produce aditivos para motores utilizando cuatro productos refinados del petróleo: $A$, $B$, $C$, y $D$. La compañía combina los cuatro productos según las especificaciones de los porcentajes mínimos y máximos en cada mezcla de $A$, $C$ y $D$, según se indica en la Tabla 1. La cantidad máxima disponible por día de cada producto $A$, $B$, $C$, y $D$, así como el coste se muestran también en la mencionada tabla.

Tabla **1**

| | % Máximo Producto $A$ | % Mínimo Producto $C$ | % Máximo Producto $D$ | Precio de venta (€/litro) |
|---|---|---|---|---|
| Lujo | 60 | 20 | 10 | 7.9 |
| Estándar | 15 | 60 | 25 | 6.9 |
| Económico | – | 50 | 45 | 5.0 |
| Disponibilidad (litros) | 4000 | 5000 | 3500 | 5500 |
| Coste (€/litro) | 0.60 | 0.52 | 0.48 | 0.35 |

(a) Formular un modelo de PL para determinar el plan óptimo de producción que maximice las ganancias.

- Variables de decisión:

$X_{iy}$ = litros del producto $i$ que se utilizan para producir el aditivo tipo $y$; $i = \{A, B, C, D\}$
$y = \{L, E, Ec\}$

- Función objetivo:

$$\text{Max } z = 7'9(x_{AL} + x_{BL} + x_{CL} + x_{DL}) + 6'9(x_{AE} + x_{BE} + x_{CE} + x_{DE}) + 5(x_{AEc} + x_{BEc} + x_{CEc} + x_{DEc})$$

$$- 0'60(x_{AL} + x_{AE} + x_{AEc}) - 0'52(x_{BL} + x_{BE} + x_{BEc}) - 0'48(x_{CL} + x_{CE} + x_{CEc}) -$$

$$- 0'35(x_{DL} + x_{DE} + x_{DEc}) = \rightarrow$$

$$\rightarrow = 7'3x_{AL} + 7'38x_{BL} + 7'42x_{CL} + 7'55x_{DL} + 6'3x_{AE} + 6'38x_{BE} + 6'42x_{CE} + 6'55x_{DE} +$$

$$+ 4'4x_{AEc} + 4'48x_{BEc} + 4'52x_{CEc} + 4'65x_{DEc}$$

- Restricciones:

• Disponibilidad →

$$x_{AL} + x_{AE} + x_{AEc} \leq 4000$$

$$x_{BL} + x_{BE} + x_{BEc} \leq 5000$$

$$x_{CL} + x_{CE} + x_{CEc} \leq 3500$$

$$x_{DL} + x_{DE} + x_{DEc} \leq 5500$$

• Porcentaje máximo y mínimo. →

$0'6x_{BL} + 0'6x_{CL} + 0'6x_{DL} - 0'4x_{AL} \geq 0$

$0'15x_{BE} + 0'15x_{CE} + 0'15x_{DE} - 0'85x_{AE} \geq 0$

$0'2x_{AL} + 0'2x_{BL} + 0'2x_{DL} - 0'8x_{CL} \leq 0$

$0'6x_{AE} + 0'6x_{BE} + 0'6x_{DE} - 0'4x_{CE} \leq 0$

$0'5x_{AEc} + 0'5x_{BEc} + 0'5x_{DEc} - 0'5x_{CEc} \leq 0$

$0'1x_{AL} + 0'1x_{BL} + 0'1x_{CL} - 0'9x_{DL} \geq 0$

$0'25x_{AE} + 0'25x_{BE} + 0'25x_{CE} - 0'75x_{DE} \geq 0$

$0'45x_{AEc} + 0'45x_{BEc} + 0'45x_{CEc} - 0'55x_{DEc} \geq 0$

$x_{ij} \geq 0$

$i = \{A, B, C, D\}$

$j = \{L, E, Ec\}$

(b) ¿Cuál es el plan óptimo de producción y la ganancia máxima?

(c) Escribir el problema dual del formulado en el apartado (a).

(d) Resolver el problema del apartado (c) utilizando las condiciones de holgura complementaria. ¿Es única la solución? Razonar la respuesta.

(b)

$x^*_{AL} = 3750$ l $\quad x^*_{AE} = 250$ l $\quad x^*_{AEc} = 0$ l $\quad z^* = 102986'7$ €

$x^*_{BL} = 5000$ l $\quad x^*_{BE} = 0$ l $\quad x^*_{BEc} = 0$ l

$x^*_{CL} = 2500$ l $\quad x^*_{CE} = 1000$ l $\quad x^*_{CEc} = 0$ l

$x^*_{DL} = 1250$ l $\quad x^*_{DE} = 416'67$ l $\quad x^*_{DEc} = 0$ l

(c)

$$\text{Min } y = 4000w_1 + 5000w_2 + 3500w_3 + 5500w_4$$

s.a.

$w_1 + 0'4w_5 + 0'2w_7 - 0'1w_{10} \geq 7'3$

$w_2 - 0'6w_5 + 0'2w_7 - 0'1w_{10} \geq 7'38$

$w_3 - 0'6w_5 - 0'8w_7 - 0'1w_{10} \geq 7'42$

$w_4 - 0'6w_5 + 0'2w_7 + 0'9w_{10} \geq 7'55$

$$w_1 + 0'85w_6 + 0'6w_8 - 0'25w_{11} \geq 6'3$$

$$w_2 - 0'15w_6 + 0'6w_8 - 0'25w_{11} \geq 6'38$$

$$w_3 - 0'15w_6 - 0'4w_8 - 0'25w_{11} \geq 6'42$$

$$w_4 - 0'15w_6 + 0'6w_8 + 0'75w_{11} \geq 6'55$$

$$w_1 + 0'5w_9 - 0'45w_{12} \geq 4'4$$

$$w_2 + 0'5w_9 - 0'45w_{12} \geq 4'48$$

$$w_3 + 0'5w_9 - 0'45w_{12} \geq 4'52$$

$$w_4 + 0'5w_9 + 0'55w_{12} \geq 4'65$$

$$w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8, w_9, w_{10}, w_{11}, w_{12} \geq 0$$

(d). Teorema de Holgura Complementaria

Aplicando el teorema de la Holgura Complementaria y las soluciones del primal llegamos a:

- $4^{o}$ restricción primal con holgura $\Rightarrow \boxed{w_4^* = 0}$
- $5^{o}$ restricción primal con holgura $\Rightarrow \boxed{w_5^* = 0}$

De las 12 variables, sólo 7 son $>0$. Estas variables determinan qué restricciones del dual son con igualdad:

$$\left.\begin{array}{l}
w_1 + 0'2w_7 - 0'1w_{10} = 7'3 \\
w_2 + 0'2w_7 - 0'1w_{10} = 7'38 \\
w_3 - 0'8w_7 - 0'1w_{10} = 7'42 \\
0'2w_7 + 0'9w_{10} = 7'55 \\
w_1 + 0'85w_6 + 0'6w_8 - 0'25w_{11} = 6'3 \\
w_3 - 0'15w_6 - 0'4w_8 - 0'25w_{11} = 6'42 \\
-0'15w_6 + 0'6w_8 + 0'75w_{11} = 6'55
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
w_1^* = w_2^* = 8'0064 \\
w_3^* = 8'7226 \\
w_6^* = 0 \\
w_7^* = w_8^* = w_9^* = 0'5962 \\
w_{10}^* = w_{11}^* = 8'2564 \\
w_{12}^* = 8'6766
\end{array}$$

(e)

(e) Sin resolver de nuevo el problema, responder a las siguientes cuestiones:

(i) En el plan óptimo de producción no se produce ningún litro del aditivo *Económico*. ¿Cuál debería ser el precio mínimo de venta de ese aditivo para que merezca la pena producirlo?

(ii) Hay restricciones sobre el porcentaje del producto $D$ que se utiliza en la producción de los diferentes aditivos. Si se pudiera violar alguna de estas limitaciones en el producto $D$, ¿merecería la pena? ¿Qué restricción sería más ventajosa eliminar? Razonar la respuesta.

(iii) Supongamos que el precio de venta por litro del aditivo Lujo aumenta a \$7.95, \$8.00 y \$8.05. ¿Cuál sería el aumento en el beneficio que se obtendría? Razonar la respuesta.

(iv) Si el precio de venta del aditivo Lujo se incrementa en un 3%, ¿cuál sería el beneficio máximo? ¿Cuál es la ganancia óptima si el precio de venta de este aditivo se incrementa en $\$\epsilon$, con $\epsilon < 0.31$?

(v) La cantidad disponible diariamente del producto $A$ es de 4000 litros. ¿Merecería la pena comprar 1000 litros más? En caso afirmativo, ¿a qué precio por litro? Justificar la respuesta.

(vi) Suponer que los precios de venta por litro se cambian a \$7.7 para Lujo, \$6.8 para Estándar y \$4.9 para Económico. Además, el Departamento de marketing estima que la demanda de Lujo no puede exceder los 12600 litros. ¿Cuál es la producción óptima y el máximo beneficio?

(i)

$$\begin{aligned}
w_1 + 0'5w_9 - 0'45w_{12} &\geq 4'4 \\
w_2 + 0'5w_9 - 0'45w_{12} &\geq 4'48 \\
w_3 + 0'5w_9 - 0'45w_{12} &\geq 4'52 \\
w_4 + 0'5w_9 + 0'55w_{12} &\geq 4'65 \\
\hline
w_1 + w_2 + w_3 + 1'5w_9 - 0'8w_{12} &= \boxed{18'6883}
\end{aligned}$$

(ii).

- Las restricciones asociadas al producto D para la elaboración del aditivo, ya que es el más barato.

- Las restricciones asociadas a la producción de aditivo de lujo y estándar, ya que son los únicos que se producen.

(iii)

- Aumenta a $7'95 \rightarrow \Delta z = \Delta c_i' \left( \sum_{j=A}^{D} x_{j1} \right) = \underline{0'05} (3750 + 5000 + 2500 + 1250) = \boxed{625\ €}$

- Aumenta a $8'00 \rightarrow \Delta z = \Delta c_i' \left( \sum_{j=A}^{D} x_{j1} \right) = \underline{0'1} (3750 + 5000 + 2500 + 1250) = \boxed{1250\ €}$

- Aumenta a $8'05 \rightarrow \Delta z = \Delta c_i' \left( \sum_{j=A}^{D} x_{j1} \right) = \underline{0'15} (3750 + 5000 + 2500 + 1250) = \boxed{1875\ €}$

(iv)

- Nuevo beneficio máximo $\Rightarrow 7'9 \cdot 1'03 = \boxed{8'137}$

- Incrementa en $\$\epsilon$, con $\epsilon < 0'31$.

$$z'^{0} = z^{0} + \Delta c_i \left( \sum_{j=A}^{D} x_{j2} \right) = z^{0} + 0'237\left(3750 + 5000 + 2500 + 1250\right) =$$

$$= 102\,986'7 + 2962'5 = \boxed{105\,949'2}$$

(v)

$$\begin{pmatrix} 3750 \\ 5000 \\ 250 \\ 3833'33 \\ 3750 \\ 0 \\ 1250 \\ 416'68 \\ 0 \\ 2500 \\ 1000 \\ 0 \end{pmatrix} + 1000 \begin{pmatrix} 1'0769 \\ 0 \\ -0'0769 \\ -0'0256 \\ -0'1538 \\ 0 \\ 0'1538 \\ -0'1282 \\ 0 \\ -0'3077 \\ -0'3077 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4826'9 \\ 5000 \\ 173'1 \\ 3807'73 \\ 3596'2 \\ 0 \\ 1403'8 \\ 288'48 \\ 0 \\ 2192'3 \\ 692'3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que todos los valores son $\geq 0 \Rightarrow$ Base actual sigue siendo óptima.

$$z'^{0} = z^{0} + \Delta\left(x_{AL} + x_{AE} + x_{AEC}\right) \omega_1$$

$$z'^{0} = 102\,986'7 + 1000 \cdot 8'0064 = 110\,993'1$$

(vi) ——

(f) Describir la forma general del problema inicialmente planteado y construir el correspondiente modelo de PL, utilizando la siguiente notación:

| | |
|---|---|
| $m$ | número de aditivos que se producen |
| $n$ | número de productos |
| $p_j$ | precio de venta del aditivo $j$, $j = 1, ..., m$ |
| $c_i$ | coste del producto $i$, $i = 1, ..., n$ |
| $a_i$ | disponibilidad máxima del producto $i$, $i = 1, ..., n$ |
| $r_{ij}$ | proporción mínima del producto $i$ que se requiere en el aditivo $j$ |
| $R_{ij}$ | proporción máxima del producto $i$ que se requiere en el aditivo $j$ |

$$\text{Max } z = 7'9p_1 + 6'9p_2 + 5p_3 - 0'6c_1 - 0'52c_2 - 0'48c_3 - 0'35c_4$$

s.a.

$a_1 \leq 4000$ $\quad R_{11} = 60$ $\quad r_{21} = 20$ $\quad R_{31} = 10$

$a_2 \leq 5000$ $\quad R_{12} = 15$ $\quad r_{22} = 60$ $\quad R_{32} = 25$

$a_3 \leq 3500$

$a_4 \leq 5500$ $\quad r_{23} = 50$ $\quad R_{33} = 45$

$m, n, p_j, c_i, a_i, r_{ij}, R_{ij} \geq 0$

**2.** Un intermediario que comercializa tinta para impresoras tiene un depósito con capacidad de $K$ unidades de volumen. En las próximas $n$ semanas, el intermediario comprará tinta al principio de la semana y la venderá al final de la misma, es decir, para venderla, debe almacenarla al menos una semana. Se considera que en la semana $j$, con $1 \leq j \leq n$, el intermediario paga un precio unitario $c_j$, tiene un coste unitario de almacenamiento $h_j$ y el precio unitario de venta es $s_j$. El depósito está inicialmente vacío y debe estar también vacío al final de la última semana. Se supone que el intermediario dispone de fondos ilimitados para la compra de tinta y puede vender cualquier cantidad de tinta.

(a) Formular un modelo de PL para maximizar el beneficio (ingresos menos costes) después de las $n$ semanas.

(b) Demostrar que el problema formulado en (a) tiene solución óptima finita.

(c) Probar que el valor óptimo del PL formulado en (a) es cero o proporcional al tamaño $K$ del depósito.
*Indicación:* Utilizar la teoría de dualidad.

(d) ¿Es posible que el depósito no se llene completamente ninguna de las $n$ semanas si el beneficio óptimo es positivo? Razonar la respuesta.

(a)

- Variables de decisión: $1 \leq j \leq n$

$X_j$ = número de unidades de volumen de tinta compradas al inicio de la semana $j$;

$V_j$ = número de unidades de volumen de tinta vendidas al final de la semana $j$.

$A_j$: número de unidades de volumen de tinta almacenadas al final de la semana $j$ antes de vender

- Función objetivo:

$$\text{Max } z = \sum_{j=1}^{n} \left( V_j \cdot s_j - X_j \cdot c_j - A_j \cdot h_j \right)$$

- Restricciones:

$A_0 = 0$

$A_n - V_n = 0$

$V_0 = 0$

$A_j - A_{j-1} + V_{j-1} - X_j = 0$

$V_j - A_j \leq 0$

$A_j \leq K$

$X_j, V_j, A_j \geq 0$

$1 \leq j \leq n$

(b) Demostración

$\Pi$ tiene que ser no vacío (1) y acotado (2):

(1): Es no vacío, ya que $X_j = V_j = A_j = 0$ cumple las restricciones anteriores y es por ello que es una solución válida.

(2):
- $A_j$ está acotado por $K$ debido a la restriccion: $\boxed{A_j \leq V_n}$
- $V_j$ está acotado por $A_j$ debido a la restricción: $\boxed{V_j - A_j \leq 0}$

- $X_j$ está acotado por $K$, $A_j$ y $V_j$ debido a que en una semana no puede tomar un valor superior a: $\boxed{K - A_{j-1} + V_{j-1}}$

- Finalmente, debido a las restricciones de no negatividad, las variables están acotadas inferiormente en 0. $\Longrightarrow$ Por todo esto, podemos decir que el problema tiene solución óptima finita.

(c)

Como el problema tiene solución óptima finita entonces su dual también debe tener solución óptima finita y el valor objetivo deberá ser el mismo:

- 0: cuando $X_j = V_j = A_j = 0$ se cumplen todas las restricciones y el valor de la f.o $= 0$. Esta sería la solución del problema en el siguiente caso: gastos > beneficios.

- Proporcional a K : Sea la función objetivo:

$$\text{Min} \quad Y = K \cdot \sum_{j=1}^{n} W_{6j}$$

Como el dual debe tener también una solución óptima factible, esa solución será proporcional a K ya que aparece en la propia f.o. del dual.

(d)

En el dual, si el beneficio óptimo es positivo significa que al menos un valor de $W_{6j}$ va a ser mayor que 0 $\longrightarrow$ En alguna semana j la restricción: $A_j \leq K$ se cumple sin holgura ($A_j = K$), lo que significa que esa semana j el almacén estará lleno.