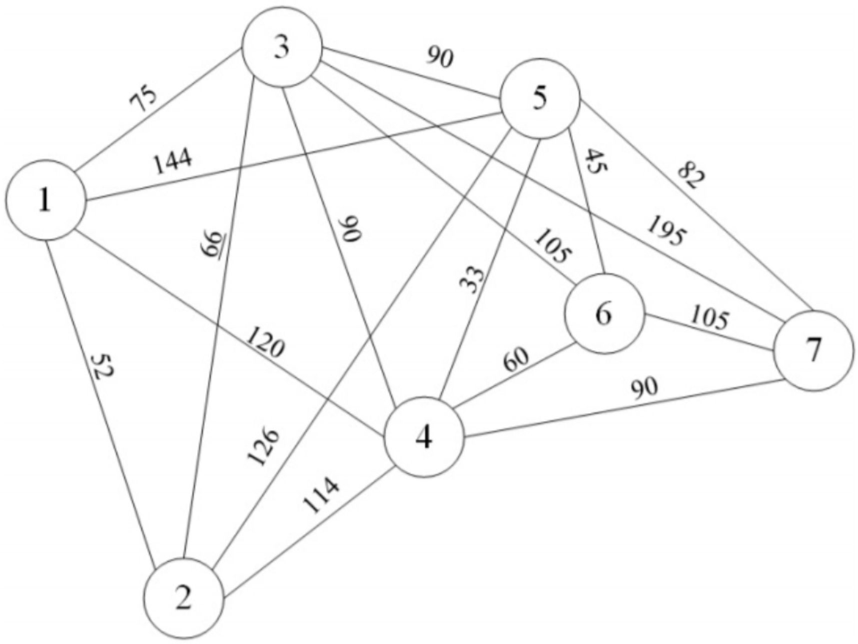
1. Un pequeño empresario de consumibles informáticos posee una cadena de siete tiendas en la ciudad. El número de cartuchos disponibles en cada una de las tiendas al final de la semana es el siguiente

Tienda	1	2	3	4	5	6	7
Cantidad	190	150	140	330	260	150	240

El empresario desea que al comienzo del lunes de la semana siguiente haya al menos 200 cartuchos en cada una de las tiendas. Para cumplir con este requerimiento se pueden enviar cartuchos de aquellas tiendas con mayor número de cartuchos a aquellas que no tengan los 200 necesarios. Los costes de envío por cartucho (en céntimos de euro) entre las tiendas son los siguientes



(a) Formular un modelo de PL para determinar la mejor manera de distribuir los cartuchos entre las tiendas.

(b) Resolver el problema del apartado (a). ¿Es única la solución? Si no lo fuera, indicar una solución alternativa.

(c) Suponer ahora que los cartuchos se pueden enviar entre todas las tiendas conectadas. Modelizar, sin resolver, este nuevo problema.

Apartado a) - Variables de decisión:

x_{ij} = nº de cartuchos enviados desde la tienda i hasta la tienda j ; $i = 4,5,7$; $j = 1,2,3,6$

- Función objetivo:

Min z : $120x_{41} + 114x_{42} + 90x_{43} + 60x_{46} + 144x_{51} + 126x_{52} +$
$+ 90x_{53} + 45x_{56} + 130x_{73} + 70x_{76}$

- s.a.

$x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{46} \leq 130$

$x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{56} \leq 60$

$x_{73} + x_{76} \leq 40$

$x_{ij} \geq 0$

$i = 4,5,7$

$j = 1,2,3,6$

$$x_{41} + x_{51} \geq 10$$

$$x_{42} + x_{52} \geq 50$$

$$x_{43} + x_{53} + x_{73} \geq 60$$

$$x_{46} + x_{56} + x_{76} \geq 50$$

Apartado b)

La tabla simplex final es la siguiente:

Final Simplex Tableau

Basis	C(j)	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
		120,0000	114,0000	90,0000	60,0000	144,0000	126,0000	90,0000	45,0000	130,0000	70,0000
Slack_C1	0	0	0	0	1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	0	-1,0000	0
Slack_C2	0	0	0	0	-1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0	0	-1,0000
Slack_C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000
X1	120,0000	1,0000	0	0	0	1,0000	0	0	0	0	0
X2	114,0000	0	1,0000	0	0	0	1,0000	0	0	0	0
X3	90,0000	0	0	1,0000	0	0	0	1,0000	0	1,0000	0
X8	45,0000	0	0	0	1,0000	0	0	0	1,0000	0	1,0000
	C(j)-Z(j)	0	0	0	15,0000	24,0000	12,0000	0	0	40,0000	25,0000
	* Big M	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Basis	Slack_C1	Slack_C2	Slack_C3	Surplus_C4	Surplus_C5	Surplus_C6	Surplus_C7	Artificial_C4	Artificial_C5	Artificial_C6	Artificial_C7	
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	R. H. S.
Slack_C1	1,0000	0	0	1,0000	1,0000	1,0000	0	-1,0000	-1,0000	-1,0000	0	10,0000
Slack_C2	0	1,0000	0	0	0	0	1,0000	0	0	0	-1,0000	10,0000
Slack_C3	0	0	1,0000	0	0	0	0	0	0	0	0	40,0000
X1	0	0	0	-1,0000	0	0	0	1,0000	0	0	0	10,0000
X2	0	0	0	0	-1,0000	0	0	0	1,0000	0	0	50,0000
X3	0	0	0	0	0	-1,0000	0	0	0	1,0000	0	60,0000
X8	0	0	0	0	0	0	-1,0000	0	0	0	1,0000	50,0000
C(j)-Z(j)	0	0	0	120,0000	114,0000	90,0000	45,0000	-120,0000	-114,0000	-90,0000	-45,0000	14.550,0000
* Big M	0	0	0	0	0	0	0	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0

Los valores que consiguen el óptimo de la función objetivo son:

$x_{41}^* = 10$ $\quad x_{43}^* = 60$ $\quad z^* = 14550$

$x_{42}^* = 50$ $\quad x_{56}^* = 50$

Solución: La traducción de este resultado nos indica que para que el empresario pueda tener al menos 200 cartuchos en cada tienda tendrá que enviar:

- 10 cartuchos de la tienda 4 a la 1.
- 50 cartuchos de la tienda 4 a la 2.
- 60 cartuchos de la tienda 4 a la 3.
- 50 cartuchos de la tienda 5 a la 6.

⟶ Esto ocasionará un coste de 14.550 céntimos = 145.50 €

- Por otra parte, la solución no es única. Otro posible resultado sería:

$x_{41}^* = 10$ $\quad x_{43}^* = 50$ $\quad x_{56} = 50$

$x_{42}^* = 50$ $\quad x_{53}^* = 10$ $\quad z^* = 14550$

Apartado c)

- Variables de decisión:

x_{ij} = nº de cartuchos que se pueden enviar desde la tienda i hasta la tienda j $\quad i = 1,2,3,4,5,6,7$

$j = 1,2,3,4,5,6,7$

- Función objetivo:

$$\text{Min } z = 52(x_{12}+x_{21}) + 75(x_{13}+x_{31}) + 120(x_{14}+x_{41}) + 144(x_{15}+x_{51}) +$$
$$+ 66(x_{23}+x_{32}) + 114(x_{24}+x_{42}) + 126(x_{25}+x_{52}) + 90(x_{34}+x_{43}) +$$
$$+ 90(x_{35}+x_{53}) + 105(x_{36}+x_{63}) + 195(x_{37}+x_{73}) + 33(x_{45}+x_{54}) +$$
$$+ 60(x_{46}+x_{64}) + 90(x_{47}+x_{74}) + 45(x_{56}+x_{65}) + 82(x_{57}+x_{75}) +$$
$$105(x_{67}+x_{76})$$

- s.a.

$$x_{21} - x_{12} + x_{31} - x_{13} + x_{41} - x_{14} + x_{51} - x_{15} \geq 10$$
$$x_{12} - x_{21} + x_{32} - x_{23} + x_{42} - x_{24} + x_{52} - x_{25} \geq 50$$
$$x_{13} - x_{31} + x_{23} - x_{32} + x_{43} - x_{34} + x_{53} - x_{35} + x_{63} - x_{36} + x_{73} - x_{37} \geq 60$$
$$x_{14} - x_{41} + x_{24} - x_{42} + x_{34} - x_{43} + x_{54} - x_{45} + x_{64} - x_{46} + x_{74} - x_{47} \geq -130$$
$$x_{15} - x_{51} + x_{25} - x_{52} + x_{35} - x_{53} + x_{45} - x_{54} + x_{65} - x_{56} + x_{75} - x_{57} \geq -60$$
$$x_{36} - x_{63} + x_{46} - x_{64} + x_{56} - x_{65} + x_{76} - x_{67} \geq 50$$
$$x_{37} - x_{73} + x_{47} - x_{74} + x_{57} - x_{75} + x_{67} - x_{76} \geq -40$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1,2,3,4,5,6,7$$
$$j = 1,2,3,4,5,6,7$$

2. Es habitual que las principales compañías petroleras utilicen PL para modelar muchas fases de sus operaciones. Consideremos una versión simplificada de parte de una operación de refinería. Para elaborar dos tipos de gasolina de aviación (alto octanaje y bajo octanaje) se mezclan cuatro componentes de la producción de la refinería. Además, se utiliza tetraetilo de plomo (TEL) para elaborar las dos gasolinas, con una mayor cantidad de este compuesto para obtener la gasolina de alto octanaje. Supongamos que el índice de octano (IO) y la presión de vapor (PV) de las mezclas son el promedio volumétrico de los índices de octano y de las

presiones de vapor, respectivamente, de las componentes. La tabla siguiente muestra los datos de interés relativos a las componentes que se utilizan en la elaboración de las gasolinas.

Componente	Presión de Vapor	IO Alta	IO Baja	Disponibilidad	Coste
C_1	5	109	98	1050	21.60
C_2	6.5	94	87	900	13.05
C_3	4	87	80	1350	11.40
C_4	8	108	100	750	12.90

Las características que deben poseer estas gasolinas son las siguientes:

Mezcla	PV	IO	Demanda	Ingresos
Alto Octanaje	≤ 7	100	1950	22.50
Bajo Octanaje	≤ 7	90	1200	19.50

(a) Formular un modelo de PL para maximizar el beneficio, suponiendo que las demandas se deben satrisfacer exactamente.

(b) Obtener el plan de producción óptimo. ¿Cuántas unidades de cada componente no se utilizan? ¿Cuál es la presión de vapor de cada tipo de gasolina obtenida? Justificar las respuestas.

(c) Considerar ahora que se pueden producir y vender más unidades de las inicialmente requeridas. ¿Cuál sería ahora el plan de producción óptimo? ¿Cuál es la presión de vapor de cada tipo de gasolina obtenida? ¿Se utilizan todas las componentes disponibles? Razonar las respuestas.

Apartado a)

– Variables de decisión:

x_{ij} = barriles de crudo tipo i para producir gasolina de tipo j i $\quad 1 \leq i \leq 4$

$\quad j = \{A, B\}$

c_i = barriles de crudo tipo i que se compran

g_j = barriles de gasolina tipo j que se produce y vende.

– Función objetivo:

Max $z = 22'50\, g_A + 19'50\, g_B - 21'6\, C_1 - 13'05\, C_2 - 11'40\, C_3 - 12'90\, C_4$

- s.a.

$C_1 \le 1050$ $\quad$ $x_{1A} + x_{1B} = C_1$

$C_2 \le 900$ $\quad$ $x_{2A} + x_{2B} = C_2$

$C_3 \le 1350$ $\quad$ $x_{3A} + x_{3B} = C_3$

$C_4 \le 750$ $\quad$ $x_{4A} + x_{4B} = C_4$

$g_A = 1950$ $\quad$ $x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} + x_{4A} = g_A$

$g_B = 1200$ $\quad$ $x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} + x_{4B} = g_B$

$$109\, x_{1A} + 94\, x_{2A} + 87\, x_{3A} + 108\, x_{4A} = 100\, g_A$$

$$98\, x_{1B} + 87\, x_{2B} + 80\, x_{3B} + 100\, x_{4B} = 90\, g_B$$

$$5\, x_{1A} + 6'5\, x_{2A} + 4\, x_{3A} + 8\, x_{4A} \le 7\, g_A$$

$$5\, x_{1B} + 6'5\, x_{2B} + 4\, x_{3B} + 8\, x_{4B} \le 7\, g_B$$

$x_{ij}, C_i, g_J \ge 0$

Apartado b)

Solución óptima obtenida: $z^* = 21\,529'23$ €

$x_{1A}^* = 708'4091$	$x_{1B}^* = 0$	$C_1^* = 708'4091$
$x_{2A}^* = 0$	$x_{2B}^* = 900$	$C_2^* = 900$
$x_{3A}^* = 776'5909$	$x_{3B}^* = 15$	$C_3^* = 791'5909$
$x_{4A}^* = 465$	$x_{4B}^* = 285$	$C_4^* = 750$

□ Unidades no utilizadas de cada componente:

Comp. 1 $\Rightarrow 1050 - 708'4091 = 341'59$ uds

Comp. 2 $\Rightarrow 900 - 900 = 0$ uds

Comp. 3 $\Rightarrow 1350 - 791'5909 = 558'41$ uds

Comp. 4 $\Rightarrow 750 - 750 = 0$ uds

- Presión de vapor de cada tipo de gasolina

$$PV_A = \frac{708'4091 \cdot 5 + 0 \cdot 6'5 + 776'5909 \cdot 4 + 465 \cdot 8}{1950} = 5'317$$

$$PV_B = \frac{0 \cdot 5 + 900 \cdot 6'5 + 15 \cdot 4 + 285 \cdot 8}{1200} \simeq 6'825$$

Apartado c) Como ahora se pueden producir y vender más unidades de las inicialmente requeridas, debemos modificar las restricciones: $g_A = 1950$; por $g_B = 1200$

$$\boxed{\begin{array}{l} g_A \geq 1950 \\ g_B \geq 1200 \end{array}}$$

→ Nueva solución óptima obtenida: 24461'66 €

$x_{1A}^* = 1050$ $\quad x_{1B}^* = 0$ $\quad c_1^* = 1050$ $\quad g_A^* = 2528'07$

$x_{2A}^* = 0$ $\quad x_{2B}^* = 900$ $\quad c_2^* = 900$ $\quad g_B^* = 1200$

$x_{3A}^* = 1013'077$ $\quad x_{3B}^* = 15$ $\quad c_3^* = 1028'077$

$x_{4A}^* = 465$ $\quad x_{4B}^* = 285$ $\quad c_4^* = 750$

- Unidades no utilizadas de cada componente:

Comp. 1 $\Rightarrow 1050 - 1050 = 0$ uds

Comp. 2 $\Rightarrow 900 - 900 = 0$ uds

Comp. 3 $\Rightarrow 1350 - 1028'077 = 321'923$ uds

Comp. 4 $\Rightarrow 750 - 750 = 0$ uds

- Presión de vapor de cada tipo de gasolina

$$PV_A = \frac{1050 \cdot 5 + 0 \cdot 6'5 + 1013'077 \cdot 4 + 465 \cdot 8}{2528'077} = 5'151$$

$$PV_B = \frac{0 \cdot 5 + 900 \cdot 6'5 + 15 \cdot 4 + 285 \cdot 8}{1200} \simeq 6'825$$

3. Se necesita planificar la producción de una fábrica para las tres próximas semanas con las siguientes demandas por semana: 20, 10 y 40 unidades, respectivamente. Los costes de almacenamiento para las tres semanas son de 3, 2 y 1, respectivamente. Los costes por demanda faltante para las tres semanas son: 2, 3 e ∞ (porque no se permite escasez al final de la tercera semana). La producción máxima en cada semana es de 35 unidades y los costes de producción son los siguientes:

Rango de Producción	Semana 1	Semana 2	Semana 3
$1 \leq P_t \leq 17$	4	6	6
$18 \leq P_t \leq 35$	6	12	10

(a) Formular un modelo de PL para minimizar los costes totales de producción e inventario.

(b) Determinar el plan óptimo de producción e inventario.

(c) Formular un modelo de transporte balanceado para determinar el plan de producción que minimice el coste total de producción y almacenamiento. ¿Cuál es el plan óptimo de producción e inventario?

(d) Suponer ahora que las demandas indicadas son mínimas, pero que solamente se pueden producir 95 unidades en las tres semanas. Además, la demanda faltante solamente se permite durante una semana. Formular un modelo de transporte balanceado para resolver este nuevo problema e indicar el plan de producción e inventario óptimo.

Apartado a) – Variables de decisión:

P_{1i} = uds producidas en el rango 1 en la semana i ; $1 \leq i \leq 3$

P_{2i} = uds producidas en el rango 2 en la semana i

S_i = uds sobrantes al final de la semana i

F_i = uds faltantes al final de la semana i

– Función objetivo:

$$\text{Min } z = 4P_{11} + 6P_{12} + 6P_{13} + 6P_{21} + 12P_{22} + 10P_{23} + 3S_1 + 2S_2 + S_3 + 2F_1 + 3F_2$$

– s.a.

$P_{1i} \geq 1$

$P_{1i} \leq 17$

$P_{2i} \leq 18$

$P_{1i} + P_{2i} \leq 35$

$P_{11} + P_{21} = 20 + S_1 - F_1$

$P_{12} + P_{22} = 10 - S_1 + S_2 - F_2 + F_1$

$P_{13} + P_{23} = 40 - S_2 + S_3 - F_3 + F_2$

$F_3 = 0$

$P_{1i}, P_{2i}, S_i, F_i \geq 0$

$\cancel{S_i \cdot F_i = 0} \rightarrow \left| \begin{array}{ll} 3+2 & > 0 \\ 2+3 & > 0 \\ 1 & > 0 \quad // \end{array} \right.$

Apartado b)

	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	17,0000	4,0000	68,0000	0	basic	-M	6,0000
2	X2	17,0000	6,0000	102,0000	0	basic	-M	8,0000
3	X3	17,0000	6,0000	102,0000	0	basic	-M	10,0000
4	X4	3,0000	6,0000	18,0000	0	basic	5,0000	10,0000
5	X5	0	12,0000	0	4,0000	at bound	8,0000	M
6	X6	16,0000	10,0000	160,0000	0	basic	8,0000	11,0000
7	X7	0	3,0000	0	1,0000	at bound	2,0000	M
8	X8	7,0000	2,0000	14,0000	0	basic	1,0000	4,0000
9	X9	0	1,0000	0	11,0000	at bound	-10,0000	M
10	X10	0	2,0000	0	4,0000	at bound	-2,0000	M
11	X11	0	3,0000	0	5,0000	at bound	-2,0000	M
12	X12	0	0	0	0	basic	-M	M
	Objective	Function	(Min.) =	464,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	17,0000	>=	1,0000	16,0000	0	-M	17,0000
2	C2	17,0000	>=	1,0000	16,0000	0	-M	17,0000
3	C3	17,0000	>=	1,0000	16,0000	0	-M	17,0000
4	C4	17,0000	<=	17,0000	0	-2,0000	2,0000	19,0000
5	C5	17,0000	<=	17,0000	0	-2,0000	15,0000	32,0000
6	C6	17,0000	<=	17,0000	0	-4,0000	15,0000	32,0000
7	C7	3,0000	<=	18,0000	15,0000	0	3,0000	M
8	C8	0	<=	18,0000	18,0000	0	0	M
9	C9	16,0000	<=	18,0000	2,0000	0	16,0000	M

$z^* = 464$ $\quad P_{21}^* = 3$ $\quad S_1^* = 0$ $\quad F_1^* = 0$

$P_{11}^* = 17$ $\quad P_{22}^* = 0$ $\quad S_2^* = 7$ $\quad F_2^* = 0$

$P_{12}^* = 17$ $\quad P_{23}^* = 16$ $\quad S_3^* = 0$

$P_{13}^* = 17$

Apartado c) Consideramos como orígenes las producciones de cada semana, divididas en 2 rangos, y como destinos cada semana.

La oferta serán las 17 uds de la producción de rango 1 (PN_i) y 18 uds de la producción de rango 2 (PS_i). Las uds de la demanda por semana son: 20, 10 y 40.

→ Por lo tanto, para balancear el problema creamos un destino ficticio (SF) que guardará la uds de demanda faltante para alcanzar la demanda (105−70 = 35)

	S_1	S_2	S_3	S_F	
PN_1	4	7	9	0	17
PS_1	6	9	11	0	18
PN_2	8	6	8	0	17
PS_2	14	12	14	0	18
PN_3	11	9	6	0	17
PS_3	15	13	10	0	18
	20	10	40	35	

Solución: Obtenemos una solución óptima $z^* = 464$

Apartado d) Ahora, la demanda es mínima y puede haber una producción adicional de hasta 95 uds entre las 3 semanas (95 − 70 = 25 uds posibles).

Por ello, dividimos la producción demandada en dos: una mínima (S_{im}), que es la que se indica en el problema, y una adicional (S_{ia}) que podrá ser como máximo de 25 uds en cada semana.

Tenemos que seguir creando un destino ficticio para balancear la oferta (17·3 + 18·3 = = 105) con demanda 10 → (105 − 95 = 10)

También debemos balancear la columna de las ofertas con un origen ficticio que acoja las diferencias. Finalmente, obtenemos una tabla como la siguiente:

	S_{1m}	S_{1a}	S_{2m}	S_{2a}	S_{3m}	S_{3a}	SF	
PN_1	4	4	7	7	9	9	0	17
PS_1	6	6	9	9	11	11	0	18
PN_2	8	8	6	6	8	8	0	17
PS_2	14	14	12	12	14	14	0	18
PN_3	M	M	9	9	6	6	0	17
PS_3	M	M	13	13	10	10	0	18
PF	M	0	M	0	M	0	M	50
	20	25	10	25	40	25	10	

Solución: Obtenemos una solución óptima $z^* = 666$